...SSIKER
...ENSCHAFTEN.

ABHANDLUNG

über

DYNAMIK,

in welcher

die Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung der Körper auf die kleinstmögliche Zahl zurückgeführt und in neuer Weise abgeleitet werden, und in der ein allgemeines Princip zur Auffindung der Bewegung mehrerer Körper, die in beliebiger Weise aufeinander wirken, gegeben wird.

Von

D'ALEMBERT,
de l'Académie Royale des Sciences.

(1743.)

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

OSTWALD'S KLASSIKER

DER

EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

8. In Leinen gebunden.

Es sind bis jetzt erschienen aus den Gebieten der

Physik und Astronomie:

Nr. 1. **H. Helmholtz,** Über d. Erhaltung der Kraft. (1847.) (60 S.) ℳ —.80.

» 2. **C. F. Gauss,** Allg. Lehrsätze in Beziehung auf d. im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. (1840.) Herausg. v. A. Wangerin. (60 S.) ℳ —.80.

» 7. **F. W. Bessel,** Länge d. einfachen Secundenpendels. (1826.) Herausg. von H. Bruns. Mit 2 Taf. (171 S.) ℳ 3.—.

» 10. **F. Neumann,** D. mathem. Gesetze d. inducirten elektrischen Ströme (1845.) Herausg. v. C. Neumann. (96 S.) ℳ 1.50.

» 11. **Galileo Galilei,** Unterredungen u. mathem. Demonstrationen üb. zwei neue Wissenszweige etc. (1638.) 1. Tag m. 13 u. 2. Tag m. 26 Fig. im Text. Aus d. Italien. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. (142 S.) ℳ 3.—.

» 12. **Kant's** Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels, od. Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebäudes nach Newtonischen Grundsätzen abgehandelt. (1755.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. (158 S.) ℳ 2.40.

» 13. **Coulomb,** 4 Abhdl. üb. d. Elektricität u. d. Magnetismus. (1785-1786.) Übers. u. herausg. v. W. König. Mit 14 Textfig. (88 S.) ℳ 1.80.

» 20. **Chr. Huyghens,** Abhandlung üb. d. Licht. (1678.) Herausg. von E. Lommel. Mit 75 Textfig. (115 S.) ℳ 2.40.

» 21. **W. Hittorf,** Über d. Wanderungen der Ionen während der Elektrolyse. (1853—1859.) I. Hälfte. Mit 1 Taf. Herausg. v. W. Ostwald. (87 S.) ℳ 1.60.

» 23. —— —— II. Hälfte. Mit 1 Taf. Herausg. v. W. Ostwald. (142 S.) ℳ 1.50.

» 24. **Galileo Galilei,** Unterredungen u. mathem. Demonstrationen über 2 neue Wissenszweige etc. (1638.) 3. u. 4. Tag. mit 90 Fig. im Text. Aus dem Italien. u. Latein. übers. u. herausg. von A. von Oettingen. (141 S.) ℳ 2.—.

» 25. —— —— Anhang zum 3. u. 4. Tag, 5. u. 6. Tag, mit 23 Fig. im Text. Aus dem Italien. u. Latein. übers. u. herausg. von A. von Oettingen. (66 S.) ℳ 1.20.

» 31. **Lambert's** Photometrie. (Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae). (1760.) Deutsch herausg. v. E. Anding. Erstes Heft: Theil [illegible] Fig. im Text. (135 S.) ℳ [illegible]

» 32. —— —— [illegible] d V. Mit 32 Figuren im [illegible]

» 33. —— —— [illegible]. — Anmerkungen. [illegible]0.

Nr. 36. **F. Neumann,** Über ein allgemein. Princip der mathemat. Theorie inducirter elektr. Ströme. (1847.) Herausg. von C. Neumann. Mit 10 Fig. im Text. (96 S.) *M* 1.50.

» 37. **S. Carnot,** Betrachtungen üb. d. bewegende Kraft d. Feuers und die zur Entwickelung dieser Kraft geeigneten Maschinen. (1824.) Übersetzt und herausgegeben von W. Ostwald. Mit 5 Figuren im Text. (72 S.) *M* 1.20.

» 40. **A. L. Lavoisier** u. **P. S. de Laplace,** Zwei Abhandlungen über die Wärme. (Aus den Jahren 1780 u. 1784.) Herausg. v. J. Rosenthal. Mit 13 Figuren im Text. (74 S.) *M* 1.20.

» 44. Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandlungen von **Gay-Lussac, Dalton, Dulong** u. **Petit, Rudberg, Magnus, Regnault.** (1802-1842.) Herausg. von W. Ostwald. Mit 33 Textfiguren. (213 S.) *M* 3.—.

» 52. **Aloisius Galvani,** Abhandlung üb. d. Kräfte der Electricität bei der Muskelbewegung. (1791.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 21 Fig. auf 4 Taf. (76 S.) *M* 1.40.

» 53. **C. F. Gauss,** Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt. In der Sitzung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 15. December 1832 vorgelesen. Herausgegeben von E. Dorn. (62 S.) *M* 1.—.

» 54. **J. H. Lambert,** Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. (1772.) Herausgegeben von A. Wangerin. Mit 21 Textfiguren. (96 S.) *M* 1.60.

» 55. **Lagrange** u. **Gauss,** Abhandlungen über Kartenprojection. (1779 u. 1822.) Herausgeg. v. A. Wangerin. Mit 2 Textfig. (102 S.) *M* 1.60.

» 56. **Ch. Blagden,** Die Gesetze der Überkaltung und Gefrierpunktserniedrigung. 2 Abhandlungen. (1788.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. (49 S.) *M* —.80.

» 57. **Fahrenheit, Réaumur, Celsius,** Abhandlungen über Thermometrie. (1724, 1730—1733, 1742.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 17 Fig. im Text. (140 S.) *M* 2.40.

» 59. **Otto von Guericke's** neue »Magdeburgische« Versuche über den leeren Raum. (1672.) Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Friedrich Dannemann. Mit 15 Textfiguren. (116 S.) *M* 2.—.

» 61. **G. Green,** Ein Versuch, die mathematische Analysis auf die Theorieen der Elektricität und des Magnetismus anzuwenden. (Veröffentlicht 1828 in Nottingham.) Herausgegeben von A. v. Oettingen und A. Wangerin. (140 S.) *M* 1.80.

» 63. **Hans Christian Oersted** und **Thomas Johann Seebeck,** Zur Entdeckung des Elektromagnetismus. (1820—1821.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 30 Textfiguren. (83 S.) *M* 1.40.

» 69. **James Clerk Maxwell,** Über Faraday's Krafl ien. (1855 u. 1856.) Herausgegeben von L. Boltzmann. (130 S.) *M* 2.—.

» 70. **Th. J. Seebeck,** Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz. (1822—1823.) Herausgegeben von A. J. von Oettingen. Mit 33 Textfiguren. (120 S.) *M* 2.—.

» 76. **F. E. Neumann,** Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. (1832.) Herausgegeben von A. Wangerin. (52 S.) *M* —.80.

» 79. **H. Helmholtz,** 2 hydrodynamische Abhandlungen. I. Über Wirbelbewegungen. (1858.) — II. Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. (1868.) Herausg. v. A. Wangerin. (80 S.) *M* 1.20.

» 80. —— Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (1859.) Herausgegeben von A. Wangerin. (132 S.) *M* 2.—.

Nr. 81. **Michael Faraday**, Experimental-Untersuchungen über Elektricität. I. u. II. Reihe. (1832.) Mit 41 Figuren im Text. Herausgegeben von A. J. von Oettingen. (96 S.) ℳ 1.50.

» 86. —— —— III. bis V. Reihe. (1833.) Mit 15 Figuren im Text. Herausgegeben von A. J. von Oettingen. (104 S.) ℳ 1.60.

» 87. —— —— VI. bis VIII. Reihe. (1834.) Mit 48 Figuren im Text. Herausgegeben von A. J. von Oettingen. (180 S.) ℳ 2.60.

» 93. **Leonhard Euler**, Drei Abhandlungen üb. Kartenprojection. (1777.) Herausg. von A. Wangerin. Mit 9 Fig. im Text. (78 S.) ℳ 1.20.

» 96. **Sir Isaac Newton's** Optik oder Abhandlung über Spiegelungen, Brechungen, Beugungen und Farben des Lichts. (1704.) Übersetzt und herausgegeben von William Abendroth. I. Buch. Mit dem Bildniss von Sir Isaac Newton u. 46 Fig. im Text. (132 S.) ℳ 2.40.

» 97. —— —— II. u. III. Buch. Mit 12 Fig. im Text. (156 S.) ℳ 2.40.

» 99. **R. Clausius**, Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. (1850.) Herausgegeben von Max Planck. Mit 4 Figuren im Text. (55 S.) ℳ —.80.

» 100. **G. Kirchhoff**, Abhandlungen über Emission und Absorption: 1. Über die Fraunhofer'schen Linien. (1859.) — 2. Über den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme. (1859.) — 3. Über das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Licht und Wärme. (1860—1862.) Herausgegeben von Max Planck. Mit dem Bildniss von G. Kirchhoff u. 5 Textfig. (41 S.) ℳ 1.—.

» 101. —— —— Abhandlungen über mechanische Wärmetheorie: 1. Über einen Satz der mechanischen Wärmetheorie u. einige Anwendungen desselben. (1858.) — 2. Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. (1858.) — 3. Über die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure. Herausgegeben von Max Planck. (48 S.) ℳ —.75.

» 102. **James Clerk Maxwell**, Über physikalische Kraftlinien. Herausgegeben von L. Boltzmann. Mit 12 Textfig. (147 S.) ℳ 2.40.

» 106. **D'Alembert**, Abhandlung über Dynamik, in welcher die Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung der Körper auf die kleinstmögliche Zahl zurückgeführt und in neuer Weise abgeleitet werden, und in der ein allgemeines Princip zur Auffindung der Bewegung mehrerer Körper, die in beliebiger Weise aufeinander wirken, gegeben wird (1743). Übersetzt und herausgegeben von Arthur Korn. Mit 4 Tafeln. (210 S.) ℳ 3.60.

Abhandlung

über

DYNAMIK,

in welcher

die Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung der Körper auf die kleinstmögliche Zahl zurückgeführt und in neuer Weise abgeleitet werden, und in der ein allgemeines Princip zur Auffindung der Bewegung mehrerer Körper, die in beliebiger Weise aufeinander wirken, gegeben wird.

Von

D'ALEMBERT,

de l'Académie Royale des Sciences.

(1743.)

Uebersetzt und herausgegeben

von

Arthur Korn.

Mit 4 Tafeln.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1899.

An Monseigneur,

den Grafen von Maurepas[1]),

Minister und Staatssecretär der Marine, Commandeur der königlichen Orden.

Monseigneur,

In der Ueberzeugung, dass ein Mann der Wissenschaft nicht besser Ihr Wohlwollen erringen kann, als durch seine Arbeiten, habe ich mir die Aufgabe gestellt, zur Vervollkommnung der Mechanik beizutragen, indem ich sie auf eine geringe Anzahl einfacher und fruchtbarer Principien zurückführe, die Wege, welche bereits in dieser Wissenschaft gebahnt waren, völlig zu ebnen und selbst da Licht zu schaffen, wo man bisher noch am wenigsten bekannt war; in einem Worte, die nützlichste der mathematischen Wissenschaften gleichzeitig zu klären und zu erweitern. Wenn die Ausführung meinem Streben entsprechen sollte, könnte ich mir schmeicheln, Monseigneur, dass dieses Werk nicht unwürdig sein dürfte, unter Ihren Auspicien zu erscheinen: Welches aber auch der Erfolg dieser ersten Frucht meiner Arbeit sein möge, immer hoffe ich, dass Sie dieselbe geneigtest als ein Zeichen meines Strebens nach Vervollkommnung der Wissenschaft ansehen werden, und als ein Zeichen des Interesses, welches ich an dem Ruhme des sie beschützenden Ministers mir zu nehmen gestatte. Ich bin in Hochachtung

Monseigneur

Ihr sehr ergebener und
gehorsamer Diener

D'Alembert.

Vorrede.

Die Sicherheit der Mathematik ist ein Vortheil, den diese Wissenschaft hauptsächlich der Einfachheit ihres Gegenstandes verdankt. Man muss sogar gestehen, dass in Folge des Umstandes, dass nicht alle Theile der Mathematik gleich einfache Dinge behandeln, auch die Sicherheit im eigentlichen Sinne, welche sich auf nothwendig wahre und selbstverständliche Principien gründet, allen diesen Theilen weder in gleichem Maasse, noch in gleicher Weise eigen ist. Mehrere unter ihnen, welche sich auf physikalische Principien, d. h. auf Erfahrungsthatsachen oder einfache Hypothesen, stützen, haben sozusagen nur eine erfahrungsmässige oder gar eine rein hypothetische Sicherheit. Genau genommen können nur diejenigen, welche von dem Grössencalcül und von den allgemeinen Eigenschaften der Ausdehnung handeln, das ist die Algebra, die Geometrie und die Mechanik, als mit dem Merkmal der Evidenz behaftet angesehen werden. Und auch hier ist in der Klarheit, welche diese Wissenschaften unserem Geiste darbieten, eine Art von Abstufung und, wenn ich mich so ausdrücken darf, von Nüancirung zu bemerken. Je umfassender der von ihnen behandelte Gegenstand ist, und in je allgemeinerer und abstracterer Weise derselbe betrachtet wird, um so mehr sind ihre Principien frei von Dunkelheiten, und um so leichter sind sie zu erfassen. Aus diesem Grunde ist die Geometrie einfacher als die Mechanik und beide weniger einfach als die Algebra. Dieses Paradoxon wird denen nicht paradox erscheinen, welche diese Wissenschaften als Philosophen studirt haben: Die abstracteren Begriffe, welche der gewöhnliche Mensch als die unzugänglicheren ansieht, sind doch diejenigen, denen eine grössere Klarheit eigen ist. Das Dunkel scheint sich unserer Ideen in dem Maasse zu bemächtigen, als wir diese Begriffe auf specielle Dinge anwenden und die den Sinnen zugänglichen Eigenschaften untersuchen; wünschen wir weiter in die Natur dieser Dinge einzudringen, so finden wir fast immer, dass ihre Existenz, welche sich auf das zweifelhafte Zeugniss unserer Sinne stützt, gerade das ist, was wir am unvollkommensten an denselben kennen.

Es geht aus diesen Ueberlegungen hervor, dass es zur Behandlung irgend eines Theiles der Mathematik (ja wir können sagen irgend einer Wissenschaft) nach der bestmöglichen Methode nicht nur nothwendig ist, dabei so viel wie nur irgend möglich aus den abstractesten und daher einfachsten Wissenschaften geschöpfte Kenntnisse einzuführen und anzuwenden, sondern auch in möglichst abstracter und einfacher Weise den besonderen Gegenstand dieser Wissenschaft zu betrachten; nichts vorauszusetzen, keine Eigenschaften dieses Gegenstandes zuzulassen, als die, welche die betreffende Wissenschaft selbst für ihn voraussetzt. Daraus ergeben sich zwei Vortheile: Die Principien erhalten einmal die volle Klarheit, deren sie fähig sind, andererseits werden sie auf die kleinstmögliche Anzahl zurückgeführt und müssen in Folge dessen gleichzeitig an Allgemeinheit gewinnen, da das Feld einer Wissenschaft ein bestimmtes sein muss und die Principien derselben um so fruchtbarer sind, je kleiner ihre Anzahl ist.

Man hat sich seit langer Zeit, und zwar mit Erfolg, bemüht, in der Mathematik einen Theil des von uns eben entworfenen Planes zu verwirklichen: man hat in glücklicher Weise die Algebra auf die Geometrie, die Geometrie auf die Mechanik und jede dieser drei Wissenschaften auf alle anderen, deren Basis und Fundament sie bilden, in Anwendung gebracht. Man ist aber nicht so sehr bedacht gewesen, die Principien dieser Wissenschaften auf die kleinstmögliche Zahl zurückzuführen, noch ihnen die volle Klarheit zu geben, wie sie wünschenswerth wäre. Die Mechanik vor allem scheint man in dieser Hinsicht am meisten vernachlässigt zu haben: So haben denn auch die meisten ihrer Principien, theils an sich unklar, theils in unklarer Weise ausgesprochen und abgeleitet, Anlass zu mehreren heiklen Fragen gegeben. Man ist allgemein bisher mehr bemüht gewesen, das Gebäude zu vergrössern, als den Eingang in dasselbe zu erhellen; und man hat vor allem daran gedacht, dasselbe aufzurichten, ohne seinen Grundlagen die nöthige Sicherheit zu geben.

Ich habe mir in diesem Werke die Aufgabe gestellt, dieses doppelte Ziel zu erreichen, die Grenzen der Mechanik weiter hinauszurücken und den Zugang zu ihr zu ebnen; und mein wesentliches Bestreben ist es gewesen, das eine in gewissem

Grade durch das andere zu erreichen, d. h. nicht bloss die Principien der Mechanik aus den klarsten Begriffen abzuleiten, sondern auch neue Anwendungen derselben zu machen; zu gleicher Zeit die Ueberflüssigkeit mehrerer Principien, die man bisher in der Mechanik angewandt hatte, und den Vortheil zu zeigen, den man aus der Vereinigung der übrigen für den Fortschritt der Wissenschaft ziehen kann; in einem Worte, den Principien durch ihre Vereinfachung eine grössere Allgemeinheit zu geben. Dies war mein Bestreben bei Abfassung der Abhandlung, welche ich der Oeffentlichkeit übergebe. Um den Leser mit den Mitteln vertraut zu machen, mit denen ich diese meine Absicht zu verwirklichen gesucht habe, wird es vielleicht nicht ohne Nutzen sein, hier über die Wissenschaft, deren Behandlung ich unternommen habe, einige prüfende Ueberlegungen vorauszuschicken.

Die Bewegung und ihre allgemeinen Eigenschaften sind das erste und wesentliche Object der Mechanik; diese Wissenschaft setzt die Existenz der Bewegung voraus, und auch wir wollen sie als von allen Physikern zugestanden und anerkannt annehmen. In Bezug auf die Natur der Bewegung sind dagegen die Meinungen der Philosophen sehr getheilt. Nichts, muss ich gestehen, ist natürlicher, als unter der Bewegung das successive Auftreten des Bewegten in den verschiedenen Theilen des unbestimmten Raumes zu verstehen, welchen wir als den Ort der Körper auffassen: Diese Idee aber setzt einen Raum voraus, dessen Theile durchdringbar und unbeweglich sind; nun weiss ein jeder, dass die Cartesianer (eine heute allerdings sehr zurückgegangene Secte[2]) einen von den Körpern getrennten Raum nicht anerkennen, und dass sie die räumliche Ausdehnung und die Materie als ein und dasselbe ansehen. Man muss zugeben, dass, wenn man von einem solchen Princip ausgeht, die Bewegung die grösste Schwierigkeit für die Auffassung hätte, und dass ein Cartesianer besser thun würde, ihre Existenz zu leugnen, als zu versuchen, ihre Natur zu definiren. So absurd uns übrigens die Meinung dieser Philosophen erscheinen und so wenig Klarheit und Präcision in den metaphysischen Principien vorhanden sein mag, auf die sie sich zu stützen suchen, wir werden hier keine Widerlegung derselben unternehmen: Wir werden uns mit der Bemerkung begnügen, dass man, um eine klare Vorstellung von der Bewegung zu gewinnen, wenigstens im Stillen zweier Raumideen nicht entrathen kann. Die eine, die den Raum als undurchdringlich ansieht und unter ihm das versteht, was man eigentlich die Körper nennt; die andere, welche denselben einfach als räumliche Ausdehnung ansieht, ohne zu untersuchen, ob er durchdringbar ist oder nicht, also als das Maass der Entfernung eines Körpers von einem anderen, dessen als fest und unbeweglich gedachte Theile uns zur Beurtheilung der Ruhe und der Bewegung der Körper dienen können. Es wird uns daher stets erlaubt sein, einen unbestimmten Raum als den wahren oder gedachten Ort der Körper anzusehen und die Bewegung als den Uebergang des Bewegten von einem Orte zu einem anderen aufzufassen.

Die Untersuchung der Bewegung fällt manchmal in das Bereich der reinen Geometrie; so denkt man sich oft die — geraden oder krummen — Linien hervorgebracht durch die stetige Bewegung eines Punktes, die Oberflächen durch die Bewegung einer Curve, die Volumina durch die Bewegung einer Oberfläche. Es besteht indessen zwischen der Mechanik und der Geometrie der Unterschied, dass in dieser nicht nur die Entstehung der Figuren durch die Bewegung so zu sagen willkürlich ist und bloss eine elegante Form der Betrachtungsweise repräsentirt, sondern dass die Geometrie auch bei der Bewegung sich nur mit dem durchlaufenen Wege befasst, während man in der Mechanik noch auf die Zeit Rücksicht zu nehmen hat, welche das Bewegte zum Durchlaufen des Weges gebraucht.

Man kann nicht zwei Dinge völlig verschiedener Natur, wie den Raum und die Zeit, mit einander vergleichen: Man kann aber die Beziehung der Zeittheile zu einander mit der Beziehung der Theile des zurückgelegten Weges zu einander vergleichen. Die Zeit verläuft ihrer Natur nach gleichförmig, und die Mechanik setzt diese Gleichförmigkeit voraus. Wir können uns übrigens, ohne die Zeit an sich zu kennen, und ohne ein genaues Maass derselben zu haben, die gegenseitige Beziehung ihrer Theile nicht klarer vorstellen, als durch die gegenseitige Beziehung der Theile irgend einer geraden Linie. Nun kann die Beziehung zwischen den Verhältnissen der Theile einer solchen Linie und den Verhältnissen der Theile des von einem in irgend welcher Bewegung begriffenen Körper zurückgelegten Weges stets durch eine Gleichung ausgedrückt werden: Man kann sich also eine Curve vorstellen, deren Abscissen den seit dem Beginn der Bewegung abgelaufenen Zeiten entsprechen, und deren zugehörige Ordinaten die während jener

Zeit zurückgelegten Wege darstellen: Die Gleichung wird nicht die Beziehung der Zeiten zu den Strecken ausdrücken, sondern, wenn man so sagen darf, die Beziehung zwischen dem Verhältniss der Zeittheile zu ihrer Einheit und dem Verhältniss der Theile des zurückgelegten Weges zu der für sie geltenden Einheit. Denn die Gleichung einer Curve kann entweder als die Beziehung der Ordinaten zu den Abscissen angesehen werden oder als die Gleichung zwischen den Verhältnissen der Ordinaten zu ihrer Einheit und den Verhältnissen der entsprechenden Abscissen zu der ihnen zukommenden Einheit.

Es ist somit klar, dass man durch alleinige Anwendung der Geometrie und der Arithmetik, ohne Zuhülfenahme irgend eines anderen Princips, die allgemeinen Eigenschaften der nach einem beliebigen Gesetz vor sich gehenden Bewegung finden kann. Wie kommt es aber, dass die Bewegung eines Körpers diesem oder jenem besonderen Gesetze folgt? Das ist eine Frage, auf die uns die Geometrie allein keine Antwort geben kann, und welche man auch als das erste der Mechanik unmittelbar zugehörende Problem betrachten kann.

Man sieht zunächst sehr deutlich, dass ein Körper sich selbst keine Bewegung ertheilen kann. Er kann daher aus seiner Ruhe nur durch die Wirkung irgend einer äusseren Ursache gebracht werden. Bewegt er sich aber weiter von selbst fort, oder bedarf er zu seiner Bewegung der wiederholten Wirkung der Bewegungsursache? Für welche Ansicht man sich in dieser Hinsicht entscheiden möge, immer wird es unanfechtbar sein, dass nach einmaliger Voraussetzung der Existenz der Bewegung ohne Hinzunahme irgend einer anderen Hypothese das einfachste Gesetz, welches ein bewegtes Theilchen in seiner Bewegung befolgen kann, das Gesetz der Gleichförmigkeit ist, und es ist folglich auch dasjenige, welches befolgt werden muss, wie man ausführlicher in dem ersten Kapitel dieser Abhandlung sehen wird. Die Bewegung ist also ihrer Natur nach gleichförmig: Ich gebe zu, dass die Beweise, welche man bisher von diesem Princip gegeben hat, nicht sehr überzeugend sind. Man wird aus meinem Werke die ihnen entgegenstehenden Schwierigkeiten ersehen, sowie den Weg, den ich eingeschlagen habe, um jeden Versuch ihrer Lösung zu vermeiden. Der Satz, dass die Gleichförmigkeit das der natürlichen Bewegung zukommende Gesetz sei, scheint mir einen der besten Gründe zu liefern, auf welche man die Messung der Zeit durch die gleichförmige Bewegung stützen kann. Ich glaubte daher auch, in dieser Frage mehr ins Einzelne gehen zu müssen, wenn auch im Grunde diese Erörterung als etwas der Mechanik Fremdes erscheinen könnte.

Ist die Trägheit, d. h. die Eigenschaft der Körper, in ihrem Zustande der Ruhe oder der Bewegung zu verharren, einmal festgestellt, so ist klar, dass die Bewegung, welche wenigstens für den Beginn ihrer Existenz einer Ursache bedarf, nicht anders, als durch eine äussere Ursache, beschleunigt oder verzögert werden kann. Welches sind nun die Ursachen, die im Stande sind, die Bewegung eines Körpers hervorzubringen oder zu verändern? Wir kennen bisher nur zwei Arten derselben: Die einen offenbaren sich uns gleichzeitig mit der Wirkung, welche sie hervorbringen, oder vielmehr, zu denen sie Veranlassung geben: Das sind diejenigen, welche ihren Ursprung in der sichtbaren Wechselwirkung der Körper haben und aus ihrer Undurchdringlichkeit hervorgehen. Sie beschränken sich auf den Stoss [impulsion] und einige andere daraus abzuleitende Wirkungen. Alle anderen Ursachen erkennt man nur aus ihrer Wirkung, und wir sind über ihre Natur völlig im Unklaren. Solcher Art ist die Ursache, welche den Fall der schweren Körper nach dem Centrum der Erde hervorbringt, die Ursache, welche die Planeten in ihren Bahnen erhält u. a. m.

Wir werden bald sehen, wie man die Wirkungen des Stosses und der damit zusammenhängenden Ursachen bestimmen kann. Um uns hier nur an die Ursachen der zweiten Art zu halten, so ist klar, dass, wenn es sich um Wirkungen solcher Ursachen handelt, diese Wirkungen immer unabhängig von der Kenntniss der Ursache gegeben sein müssen, da sie nicht aus derselben hergeleitet werden können. So lernen wir, ohne die Ursache der Schwere zu kennen, aus der Erfahrung, dass die von einem fallenden Körper durchlaufenen Wege den Quadraten der Zeiten proportional sind. Es ist allgemein bei den nicht gleichförmigen Bewegungen, deren Ursachen unbekannt sind, augenscheinlich, dass die durch die Ursache entweder in einer endlichen Zeit oder in einem Augenblicke[3]) hervorgebrachte Wirkung immer durch die Gleichung zwischen den Zeiten und den Wegen gegeben sein muss. Ist diese Wirkung einmal bekannt, und setzt man das Princip der Trägheit voraus, so genügt allein die Geometrie und die Rechnung zur Erforschung der Eigenschaften dieser Arten von Bewegung. Wozu brauchen wir uns auf jenes Princip zu berufen, welches heute überall benützt wird, dass die beschleunigende oder verzögernde Kraft dem Elemente der Geschwindigkeit proportional ist; ein Princip, das sich allein auf das unbestimmte und dunkle Axiom stützt, dass die Wirkung der Ursache proportional ist. Wir wollen nicht untersuchen, ob dieses Princip eine nothwendige Wahrheit ist, wir wollen nur eingestehen, dass die bisher gegebenen Beweise uns nicht sehr überzeugend erscheinen. Wir wollen es auch nicht, wie einige Geometer, als einen reinen Erfahrungssatz annehmen, da hierdurch die Sicherheit der Mechanik zerstört und diese zu einer rein experimentellen Wissenschaft gemacht würde. Wir wollen uns mit der Bemerkung begnügen, dass das Princip, mag es nun wahr oder zweifelhaft, klar oder dunkel sein, für die Mechanik ohne jeden Nutzen und daher aus ihr auszuschliessen ist.

Wir haben bisher nur die Veränderung erwähnt, welche in der Geschwindigkeit des bewegten Theilchens durch die Ursachen hervorgebracht wird, die fähig sind, seine Bewegung zu verändern. Wir haben noch nicht untersucht, was eintreten muss, wenn die Bewegungsursache den Körper in einer Richtung zu bewegen sucht, welche von der ihm bereits eigenen abweicht. Alles, was uns in diesem Falle das Trägheitsprincip lehrt, ist, dass das bewegte Theilchen jetzt nur danach streben kann, eine Gerade zu beschreiben, und zwar gleichförmig. Das giebt uns aber weder seine Geschwindigkeit, noch seine Richtung. Man ist so gezwungen, ein zweites Princip zu Hülfe zu nehmen, welches man als das Princip der Zusammensetzung von Bewegungen bezeichnet, und mit Hülfe dessen man die einzig mögliche Bewegung eines Körpers bestimmt, der sich zu gleicher Zeit in verschiedenen Richtungen mit gegebenen Geschwindigkeiten zu bewegen sucht. Man wird in diesem Werke einen neuen Beweis dieses Princips finden, bei welchem ich mich bemüht habe, alle Schwierigkeiten, welche den für das Princip gewöhnlich gegebenen Beweisen anhaften, zu vermeiden, ohne dabei eine grosse Anzahl complicirter Voraussetzungen bei der Ableitung zu benützen, für ein Princip, welches eines der ersten der Mechanik ist und sich daher nothwendig auf einfache und leichtfassliche Belege stützen muss.

Wie die Bewegung eines seine Richtung wechselnden Körpers als zusammengesetzt aus seiner früheren und einer ihm ertheilten neuen Bewegung angesehen werden kann, so kann auch die frühere Bewegung des Körpers als zusammengesetzt aus der neuen, angenommenen Bewegung und einer anderen, verlorenen Bewegung gedacht werden. Es folgt daraus, dass die Gesetze der durch irgend welche Hindernisse veränderten Bewegung einzig und allein von den Gesetzen der durch dieselben Hindernisse zerstörten Bewegung abhängen. Es genügt ja offenbar, die Bewegung, welche der Körper von der Begegnung mit dem Hindernisse hatte, in zwei andere Bewegungen von solcher Art zu zerlegen, dass das Hinderniss der einen Bewegung nicht schadet und die andere zerstört. Man kann daraus nicht bloss die Gesetze der durch unüberwindliche Hindernisse veränderten Bewegung ableiten, die einzigen, welche man bisher mit Hülfe dieser Methode gefunden hat; man kann auch bestimmen, in welchem Falle die Bewegung durch dieselben Hindernisse zerstört wird. Was die Gesetze der durch nicht an sich unüberwindliche Hindernisse veränderten Bewegung betrifft, so ist aus demselben Grunde klar, dass im Allgemeinen zur Auffindung dieser Gesetze eine genaue Kenntniss der Gesetze des Gleichgewichtes genügt.

Welches ist nun das allgemeine Gesetz für das Gleichgewicht der Körper? Alle Geometer stimmen darin überein, dass zwei Körper mit entgegengesetzten Bewegungsrichtungen sich das Gleichgewicht halten, falls ihre Massen den Geschwindigkeiten umgekehrt proportional sind, mit denen sie sich zu bewegen streben; es ist aber vielleicht schwer, für dieses Gesetz einen völlig strengen Beweis zu liefern, der keinerlei Dunkelheiten enthält; daher haben auch die meisten Geometer vorgezogen, dasselbe als ein Axiom zu behandeln, anstatt sich zu bemühen, dasselbe zu beweisen. Bei genauerer Betrachtung wird man indessen erkennen, dass es nur einen einzigen Fall giebt, in dem sich das Gleichgewicht klar und deutlich zeigt; das ist der Fall, in dem die Massen der beiden Körper gleich und ihre Geschwindigkeiten entgegengesetzt gleich sind. Der einzige Weg, den man zum Beweise des Princips in den anderen Fällen einschlagen kann, scheint mir der zu sein, dieselben, wenn möglich, auf diesen ersten einfachen und an sich klaren Fall zurückzuführen. Diesen Weg habe auch ich einzuschlagen versucht; der Leser wird beurtheilen, ob es mir gelungen ist.

Das Princip des Gleichgewichtes, zusammen mit dem Princip der Trägheit und dem Princip der zusammengesetzten Bewegung, führt somit zur Lösung aller Probleme, in der es sich um die Bewegung eines Körpers handelt, und um die Frage, in welcher Weise dieselbe durch ein undurchdringliches und bewegliches Hinderniss, d. h. allgemein durch einen anderen Körper verändert wird, dem er nothwendigerweise Bewegung mittheilen muss, um wenigstens einen Theil der eigenen zu erhalten. Man kann aus der Combination dieser Principien leicht die Bewegungsgesetze der Körper herleiten, welche irgendwie auf einander stossen oder durch Einschaltung irgend eines Körpers, mit dem sie verbunden sind, auf einander einen Zug ausüben. Gesetze von gleicher Sicherheit und nothwendiger Wahrheit, wie die Gesetze der durch unüberwindliche Hindernisse veränderten Bewegung der Körper, da beide durch die gleichen Methoden festgestellt werden.

Wenn die Principien der Trägheit, der zusammengesetzten Bewegung und des Gleichgewichtes ihrem Wesen nach von einander verschieden sind, wie man zugeben muss, und wenn andererseits diese drei Principien für die Mechanik genügen, so hat man diese Wissenschaft auf die kleinstmögliche Anzahl von Voraussetzungen zurückgeführt, sobald man auf diese drei Principien alle Gesetze der Bewegung von Körpern unter irgend welchen Verhältnissen aufgebaut hat, wie ich es in dieser Abhandlung zu thun versucht habe.

Was die Beweise dieser Principien selbst anbetrifft, so habe ich, um ihnen die volle Klarheit und Einfachheit zu geben, deren sie mir fähig erscheinen, versucht, sie einzig und allein aus der Untersuchung der Bewegung herzuleiten und diese dabei in der einfachsten und klarsten Weise zu betrachten. Was wir wirklich in deutlicher Weise bei der Bewegung eines Körpers erkennen, ist, dass er einen gewissen Weg durchläuft, und dass er eine gewisse Zeit dazu braucht. Aus dieser Idee allein muss man alle Principien der Mechanik gewinnen, wenn man sie klar und präcise ableiten will. Man wird daher nicht erstaunt sein, dass ich in Folge dieser Ueberlegung sozusagen den Blick von den bewegenden Ursachen abgewandt habe, um einzig und allein die hervorgebrachte Bewegung zu betrachten, dass ich die dem Körper bei seiner Bewegung inhärirenden Kräfte völlig verbannt habe, dunkle, der Metaphysik angehörige Begriffe, welche nur im Stande sind, Finsterniss in einer an sich klaren Wissenschaft zu verbreiten.

Aus diesem Grunde glaubte ich auch, nicht auf die berühmte Frage der lebendigen Kräfte eingehen zu müssen. Es handelt sich um eine Frage, welche seit 20 Jahren die Geometer in zwei Lager theilt, ob nämlich die Kraft der in

Bewegung befindlichen Körper dem Product aus der Masse und der Geschwindigkeit oder aber dem Product aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist; z. B. ob ein Körper von der doppelten Masse und der dreifachen Geschwindigkeit eines anderen Körpers diesem gegenüber eine 18mal oder nur 6mal grössere Kraft besitzt. Trotz der Streitigkeiten, welche diese Frage hervorgerufen hat, sah ich mich doch durch den Umstand, dass sie für die Mechanik ohne jeden Nutzen ist, veranlasst, ihrer im vorliegenden Werke keinerlei Erwähnung zu thun: ich meine aber dennoch, dass ich eine Ansicht nicht ganz mit Stillschweigen übergehen darf, deren sich *Leibniz* wie einer grossen Entdeckung rühmen zu dürfen glaubte; die seitdem der grosse *Bernoulli* in so scharfsinniger und glücklicher Weise geklärt hat*); die sich *Mac-Laurin* mit aller Kraft umzustossen bemüht hat, und zu deren allgemeinerem Interesse schliesslich die Schriften einer durch ihren Geist und ihr Wissen berühmten Dame[4]) beigetragen haben. So wird es, ohne dass wir den Leser durch Einzelheiten über alles, was über die Frage gesagt worden ist, ermüden wollen, nicht unangebracht sein, hier in ganz gedrängter Weise die Principien auseinander zu setzen, welche zu ihrer Lösung dienen können.

Wenn man von der Kraft eines in Bewegung befindlichen Körpers spricht, so verbindet man entweder keine klare Idee mit der Aussprache dieses Wortes, oder man kann darunter nur allgemein die Eigenschaft des sich bewegenden Körpers verstehen, die ihm begegnenden oder widerstehenden Hindernisse zu überwinden. Man kann also weder unmittelbar durch den von einem Körper gleichförmig durchlaufenen Weg, noch durch die dazu aufgewandte Zeit, noch durch die einfache, alleinige und abstracte Betrachtung der Masse und der Geschwindigkeit die Kraft messen, sondern einzig und allein durch die Hindernisse, denen ein Körper begegnet, und den Widerstand, den ihm diese Hindernisse bieten. Je beträchtlicher das Hinderniss ist, das der Körper überwinden kann, oder dem er zu widerstehen im Stande ist, um so grösser kann man seine Kraft nennen, wofern man sich, ohne durch dieses

---

*) Man sehe die Abhandlung über die Gesetze von der Mittheilung der Bewegung, welche von der Academie im Jahre 1726 eine Belobigung erhielt, während der Pater *Mazière* den Preis davon trug.

Wort ein vorgebliches, in dem Körper vorhandenes Wesen darstellen zu wollen, seiner nur wie einer Abkürzung bedient, um eine Thatsache auszudrücken, etwa wie man sagt, ein Körper hat eine zweimal so grosse Geschwindigkeit als ein anderer; anstatt zu sagen, er durchläuft in der gleichen Zeit den doppelten Raum, ohne darum zu behaupten, dass dieses Wort Geschwindigkeit ein dem Körper inhärentes Wesen vorstelle.

Ist man sich hierüber einig, so ist klar, dass man der Bewegung eines Körpers drei Arten von Hindernissen entgegenstellen kann; entweder unüberwindliche Hindernisse, welche seine Bewegung, möge dieselbe sein, wie sie wolle, vollständig zerstören, oder Hindernisse, welche gerade nur so viel Widerstand haben, als nothwendig ist, um die Bewegung des Körpers zu zerstören, und diese Zerstörung in einem Augenblicke bewirken, das ist der Fall des Gleichgewichts; oder schliesslich Hindernisse, welche die Bewegung allmählich zerstören, das ist der Fall der verzögerten Bewegung. Da die unüberwindlichen Hindernisse alle Arten von Bewegung in gleicher Weise zerstören, so können sie nicht zur Bestimmung der Kraft dienen. Man kann also nur in dem Vermögen, Gleichgewicht zu halten oder Bewegung zu verzögern, ihr Maass suchen. Nun sind darüber wohl alle einig, dass zwischen zwei Körpern Gleichgewicht besteht, sobald die Producte ihrer Massen mit ihren virtuellen Geschwindigkeiten, d. h. den Geschwindigkeiten, mit denen sie sich zu bewegen streben, auf beiden Seiten gleich sind. Somit kann im Gleichgewichtsfalle das Product der Masse mit der Geschwindigkeit, oder was dasselbe ist, die Bewegungsquantität die Kraft darstellen. Jedermann gesteht auch zu, dass bei verzögerter Bewegung die Anzahl der überwundenen Hindernisse dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so dass ein Körper, der z. B. mit einer gewissen Geschwindigkeit eine Feder gespannt hat, mit einer doppelten Geschwindigkeit im Stande sein wird, entweder gleichzeitig oder nach einander nicht zwei, sondern vier der ersten gleiche Federn zu spannen, mit einer dreifachen Geschwindigkeit neun, und so fort. Daraus schliessen die Anhänger der lebendigen Kräfte, dass die Kraft der in Bewegung befindlichen Körper allgemein dem Producte der Masse mit dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei. Welchen Nachtheil kann es im Grunde haben, wenn das Maass der Kräfte für das Gleichgewicht und für die verzögerte Bewegung verschieden ist, da bei Zugrundelegung völlig klarer Ideen unter dem Worte Kraft nur die in der Ueberwindung eines Hindernisses oder in dem demselben geleisteten Widerstande bestehende Wirkung verstanden werden soll. Man muss indessen zugestehen, dass die Ansicht derer, welche die Kraft als das Product aus Masse und Geschwindigkeit ansehen, nicht nur im Falle des Gleichgewichtes, sondern auch im Falle der verzögerten Bewegung bestehen kann, wenn man im letzteren Falle die Kraft nicht durch die absolute Grösse der Hindernisse, sondern durch die Summe der Widerstände dieser Hindernisse misst. Denn man darf wohl nicht zweifeln, dass diese Summe der Widerstände der Bewegungsgrösse proportional ist, da, wie Jedermann zugiebt, die Bewegungsgrösse, welche der Körper in jedem Augenblicke verliert, dem Product aus dem Widerstand und der unendlich kleinen Zeitdauer proportional und die Summe dieser Producte augenscheinlich der Ausdruck für den ganzen Widerstand ist. Die ganze Schwierigkeit reducirt sich also darauf, ob man die Kraft durch die absolute Grösse der Hindernisse oder durch die Summe dieser Widerstände messen soll. Es würde mir natürlicher erscheinen, die Kraft in dieser letzteren Weise zu messen; denn ein Hinderniss ist ein solches, nur so lange es Widerstand leistet, und der richtige Ausdruck für das überwundene Hinderniss ist die Summe seiner Widerstände. Man hat übrigens, wenn man die Kraft in dieser Weise misst, den Vortheil, für Gleichgewicht und verzögerte Bewegung ein gemeinsames Maass zu haben. Nichtsdestoweniger meine ich, da wir nur dann eine genaue und deutliche Idee mit dem Worte Kraft verbinden, wenn wir uns mit diesem Ausdruck auf die Bezeichnung einer Wirkung beschränken, dass man es jedem überlassen sollte, hierüber nach seinem Gutdünken zu entscheiden; und die ganze Frage kann nur in einer sehr unwesentlichen metaphysischen Discussion bestehen, oder in einem Wortstreit, der vollends nicht werth ist, Philosophen zu beschäftigen. So würden ihr auch zweifellos nicht so viele Bände ihr Dasein verdanken, wenn man sich bemüht hätte, zu unterscheiden, was an ihr klar und was dunkel ist. Von solchem Standpunkte aus hätte es nur weniger Zeilen bedurft, um die Frage zu entscheiden. Ist es das vielleicht, was die meisten Bearbeiter dieses Gegenstandes zu vermeiden gesucht haben? [5])

Nachdem ich dem Leser eine allgemeine Idee von der Aufgabe gegeben habe, welche ich mir in diesem Werke gestellt habe, bleibt mir nur übrig, einige Worte über die Form zu sagen, die ich annehmen zu müssen glaubte. Ich habe in meinem ersten Theil versucht, nach Möglichkeit die Principien der Mechanik auch dem Verständniss von Anfängern anzupassen: ich konnte jedoch bei der Theorie der ungleichförmigen Bewegungen des Differentialcalcüls nicht entrathen; die Natur des Gegenstandes hat mich dazu gezwungen. Ich habe mich übrigens bemüht, in diesem ersten Theile eine ziemlich grosse Menge von Dingen in einen sehr kleinen Raum zusammen zu drängen, und wenn ich nicht auf alle Einzelheiten eingegangen bin, die der Gegenstand anregen könnte, so geschah das, weil ich, einzig und allein auf die Auseinandersetzung und Entwickelung der Hauptprincipien der Mechanik bedacht und in der Absicht, dieses Werk auf das Neue zu beschränken, es nicht für richtig hielt, es durch eine zu grosse Anzahl specieller Aufgaben, die man leicht anderswo finden kann, zu vergrössern.

Der zweite Theil, in welchem ich mir die Aufgabe gestellt habe, die Gesetze der Bewegung für Körper mit Wechselwirkung zu behandeln, bildet den Haupttheil des Werkes. Aus diesem Grunde habe ich diesem Buche den Namen Abhandlung über Dynamik gegeben. Dieser Name, der eigentlich die Wissenschaft der Kräfte oder Bewegungsursachen bedeutet, könnte zunächst nicht zutreffend für dieses Werk erscheinen, indem ich unter der Mechanik mehr die Wissenschaft der Wirkungen als die der Ursachen verstehe. Da indessen das Wort Dynamik heute bei den Gelehrten sehr gebräuchlich ist, um die Wissenschaft von der Bewegung der Körper zu bezeichnen, welche irgendwie auf einander wirken, so glaubte ich diesen Namen beibehalten zu müssen, um den Geometern gerade durch diesen Titel der Abhandlung anzudeuten, dass ich mir in derselben im Wesentlichen die Vervollkommnung und Bereicherung dieses Theiles der Mechanik zur Aufgabe stelle. Da dieses Gebiet ebenso interessant wie schwer ist und die in dieser Hinsicht in Betracht kommenden Probleme eine sehr ausgedehnte Gruppe bilden, haben sich seit einigen Jahren die grössten Geometer vorzugsweise mit ihm beschäftigt. Aber sie haben bisher nur eine sehr kleine Zahl derartiger Probleme gelöst, und nur in besonderen Fällen. Die meisten Lösungen, welche sie uns gegeben haben, stützen sich ausserdem auf Principien, die noch niemand allgemein bewiesen hat; so z. B. auf das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Ich habe daher eine besondere Ausführlichkeit in diesem Gebiet für angezeigt gehalten, um darzuthun, wie man alle Fragen der Dynamik durch ein und dieselbe äusserst einfache und directe Methode lösen kann, welche nur in der Verbindung der vorher besprochenen Principien besteht, der Principien des Gleichgewichts und der zusammengesetzten Bewegung. Ich zeige ihre Anwendung an einer kleinen Zahl ausgewählter Probleme, von denen einige bereits bekannt, andere völlig neu, noch andere schliesslich auch von sehr grossen Geometern falsch gelöst worden sind.

Da die Eleganz bei der Lösung einer Aufgabe hauptsächlich darin besteht, Principien nur direct und in möglichst kleiner Anzahl zu verwenden, so wird man nicht überrascht sein, wenn die Gleichförmigkeit in meinen Lösungen, die ich durchaus angestrebt habe, sie bisweilen länger erscheinen lässt, als eine Ableitung aus weniger directen Principien gethan hätte. Der Beweis, den ich nothwendigerweise für diese letztere hätte geben müssen, würde mich übrigens nur von der Kürze der Darstellung entfernt haben, die ich mir mit ihrer Hülfe zu verschaffen gesucht hätte. Und der wesentlichste Theil meines Buches wäre nur eine formlose Aufhäufung von Problemen geworden, kaum werth, das Licht des Tages zu erblicken, trotz der Mannigfaltigkeit, welche ich in dieselbe zu bringen gesucht habe, und trotz der Schwierigkeiten, welche einem jeden derselben eigen sind.

Da sich dieser zweite Theil übrigens hauptsächlich an diejenigen wendet, welche bereits die Differential- und Integralrechnung kennen und sich mit den im ersten Theile dargelegten Principien vertraut gemacht haben, oder an solche, welche schon in der Lösung der bekannten, gewöhnlichen Probleme der Mechanik geübt sind, so muss ich, um Missverständnissen vorzubeugen, bemerken, dass ich mich oft der unklaren Bezeichnung Kraft bedient habe, sowie einiger anderer Ausdrücke, die man gewöhnlich bei der Betrachtung der Bewegung von Körpern benützt; ich habe aber niemals diesen Ausdrücken andere Bedeutungen beilegen wollen, als diejenigen, welche aus den in dieser Vorrede oder im ersten Theile dieser Abhandlung dargelegten Principien hervorgehen.

Ich leite schliesslich aus demselben Princip, das mich zur Lösung aller Probleme der Dynamik führt, auch mehrere Eigenschaften des Schwerpunktes ab, von denen einige völlig neu, die übrigen bisher nur in oberflächlicher und unklarer Weise bewiesen worden sind, und ich beschliesse das Werk mit einem Beweise des gewöhnlich Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte genannten Princips.

Wird diese erste Arbeit vom Publikum günstig aufgenommen, so wird ihr bald ein anderes Werk folgen, in dem die Fragen, welche die Bewegung und das Gleichgewicht von Flüssigkeiten betreffen, nach derselben Methode und mit Hülfe derselben Principien behandelt werden sollen.[6])

Abhandlung über Dynamik.

Einleitende Definitionen und Begriffe.

I.

Wenn zwei einander gleiche und ähnliche Raumtheile undurchdringlich sind, d. h. wenn dieselben nur in solcher Weise mit einander zu einem einzigen Raumtheil vereinigt und verschmolzen werden können, dass das Volumen des letzteren nicht kleiner ist als die Summe der beiden Einzelvolumina, so wird jeder dieser Raumtheile das vorstellen, was man einen Körper nennt. Die Undurchdringlichkeit ist die wesentliche Eigenschaft, durch welche wir die Körper von den Theilen des unbestimmten Raumes unterscheiden, in welchem wir uns dieselben vorstellen.

Der Ort eines Körpers ist der Theil des Raumes, welchen er einnimmt, d. h. der Theil des Raumes, mit dem das Volumen des Körpers zusammenfällt.

II.

Ein Körper ist in Ruhe, wenn er an ein und demselben Orte bleibt; er ist in Bewegung, wenn er von einem Orte zu einem anderen übergeht, d. h. wenn er successive und ohne Unterbrechung Theile des Raumes einnimmt, welche einander unmittelbar benachbart sind.

III.

Da ein Körper nicht zu gleicher Zeit mehrere Orte einnehmen kann, so kann er nicht von einem Orte zu einem anderen in ein und demselben Zeitpunkt gelangen. Die Bewegung kann also nur während einer gewissen Zeit vor sich gehen.

IV.

Der von einem sich bewegenden Körper durchlaufene Weg[7]) ist unendlich theilbar; die Zeit ist daher gleichfalls unendlich theilbar. Es ist ferner klar, dass ein Körper, der sich in grader Linie bewegt, ohne in jedem Augenblick andere Veränderungen als die seines Ortes zu erfahren, nothwendig in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegen muss. Man sagt in diesem Falle, der Körper bewegt sich gleichförmig. Wenn die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege wachsen oder abnehmen, so heisst die Bewegung beschleunigt oder verzögert.

Erster Theil.

Allgemeine Gesetze der Bewegung und des Gleichgewichtes der Körper.

1. Man kann alle Principien der Mechanik auf drei zurückführen, das Princip der Trägheit, der zusammengesetzten Bewegung und des Gleichgewichtes. Wenigstens hoffe ich durch diese Abhandlung zu zeigen, dass diese ganze Wissenschaft aus den genannten drei Principien abgeleitet werden kann. Ich werde jedes derselben in den folgenden Kapiteln einzeln behandeln.

Erstes Kapitel.

Von der Trägheit und den aus derselben sich ergebenden Eigenschaften der Bewegung.

2. Ich nenne mit *Newton* Trägheit die Eigenschaft der Körper, in dem Zustande zu beharren, in welchem sie sich befinden. Nun ist ein Körper nothwendigerweise in dem Zustande der Ruhe oder in dem der Bewegung; das liefert uns die folgenden Gesetze:

I. Gesetz.

3. Ein ruhender Körper wird in der Ruhe verharren, so lange keine äussere Ursache ihn zum Aufgeben dieses Zustandes

veranlasst. Denn ein Körper kann sich nicht von selbst in Bewegung setzen.

Zusatz.

4. Es folgt daraus, dass ein Körper, falls er durch irgend eine Ursache Bewegung erhält, nicht von selbst diese Bewegung zu beschleunigen oder zu verzögern im Stande sein wird.

5. Man nennt allgemein Kraft oder Bewegungsursache alles, was einen Körper zur Bewegung veranlasst.

II. Gesetz.

6. Ein Körper, welcher einmal durch irgend eine Ursache in Bewegung gesetzt worden ist, muss in derselben stets gleichförmig und in gerader Linie verharren, so lange keine neue Ursache, verschieden von der, welche ihn in Bewegung gesetzt hat, auf ihn einwirkt, d. h. so lange keine äussere, von der Bewegungsursache verschiedene Ursache auf diesen Körper wirkt, wird er sich fortdauernd in gerader Linie bewegen und in gleichen Zeiten gleiche Wege durchlaufen.

Denn entweder genügt die untheilbare[8], augenblickliche Wirkung der Bewegungsursache bei Beginn der Bewegung, um den Körper einen gewissen Weg durchlaufen zu lassen, oder der Körper braucht zu seiner Bewegung die fortdauernde Wirkung der Bewegungsursache.

Im ersten Falle ist ersichtlich, dass der durchlaufene Weg nur eine gerade Linie sein kann, die von dem bewegten Körper gleichförmig beschrieben wird. Denn nach dem ersten Augenblick besteht (nach Voraussetzung) die Wirkung der Bewegungsursache nicht weiter, und die Bewegung besteht dennoch. Sie wird daher nothwendig gleichförmig sein, da (nach § 4) ein Körper von selbst seine Bewegung weder beschleunigen noch verzögern kann. Es ist ferner kein Grund vorhanden, warum der Körper nach der einen oder anderen Seite abweichen sollte. Er wird sich daher bei der Voraussetzung dieses ersten Falles, dass er sich von selbst, unabhängig von der Bewegungsursache, während einer gewissen Zeit bewegen kann, während dieser Zeit von selbst gleichförmig und in gerader Linie bewegen.

Nun muss ein Körper, der sich während einer gewissen Zeit von selbst gleichförmig und in gerader Linie bewegen kann, ewig seine Bewegung in derselben Weise fortsetzen, wenn nichts ihn daran hindert. Denn denken wir uns den Körper von A ausgehend (Fig. 1) und fähig, von selbst gleichförmig die Strecke AB zu durchlaufen, so nehme man auf der Strecke AB irgend zwei Punkte C, D zwischen A und B an. Befindet sich der Körper in D, so ist er genau in demselben Zustande[9]) wie in C, mit dem einzigen Unterschiede, dass er sich an einem anderen Orte befindet. Es muss daher mit dem Körper dasselbe geschehen, wie in C. Nun kann er sich, wenn er sich in C befindet, (nach Voraussetzung) von selbst gleichförmig bis B bewegen. Somit wird er, wenn er sich in D befindet, sich von selbst gleichförmig bis zum Punkt G zu bewegen im Stande sein, wenn $DG = CB$, und so fort.

Wenn also die erste, augenblickliche Wirkung der Bewegungsursache den Körper zu bewegen im Stande ist, so wird er sich gleichförmig und in gerader Linie bewegen, so lange ihn keine neue Ursache daran hindern wird.

Da man im zweiten Falle voraussetzt, dass keine äussere und von der Bewegungsursache verschiedene Ursache auf den Körper wirkt, so bestimmt nichts die Bewegungsursache zu- oder abzunehmen; daraus folgt, dass ihre fortgesetzte Wirkung gleichförmig und constant sein wird, dass sich somit[10]) der Körper während ihrer Wirkungszeit in gerader Linie und gleichförmig bewegen wird. Da nun derselbe Grund, in Folge dessen die Bewegungsursache constant und gleichförmig während einer gewissen Zeit gewirkt hat, immer besteht, so lange sich ihrer Wirkung nichts entgegensetzt, so ist klar, dass diese Wirkung fortdauernd dieselbe sein und stets dasselbe Resultat zur Folge haben muss. Q. e. d.

Es wird somit allgemein ein Körper, der durch irgend eine Ursache in Bewegung gesetzt worden ist, stets gleichförmig und in gerader Linie in dieser Bewegung verharren, so lange keine neue Ursache auf ihn wirken wird.

Die gerade Linie, welche ein Körper beschreibt oder zu beschreiben sucht, heisst seine Richtung.

Bemerkung.

7. Ich bin bei dem Beweise dieses zweiten Gesetzes etwas ausführlich gewesen, weil es einige Philosophen gegeben hat und deren noch giebt, welche behaupten, dass die Bewegung eines Körpers allmählich von selbst langsamer werden muss, wie es scheinbar die Erfahrung zeigt. Man muss übrigens

zugeben, dass alle Beweise, die man bisher von der Erhaltung der Bewegung gegeben hat, nicht den Grad nothwendiger Evidenz besitzen, der zu überzeugen vermag; sie gründen sich fast alle auf eine Kraft, die man in die Materie verlegt, mit Hülfe deren sie jeder Veränderung ihres Zustandes widersteht, oder auf die Indifferenz der Materie gegen die Bewegung sowohl, wie gegen die Ruhe. Das erste dieser beiden Principien kann, abgesehen davon, dass es in der Materie ein Wesen voraussetzt, von dem man keine klare Idee hat, zum Beweise des in Frage stehenden Gesetzes nicht ausreichen. Denn ein in gleichförmiger Bewegung begriffener Körper befindet sich, genau genommen, in jedem Augenblick in einem neuen Zustande[11]); er beginnt sozusagen fortwährend seine Bewegung, und man könnte glauben, dass er unaufhörlich in den Ruhezustand zurückzufallen streben würde, wenn dieselbe Ursache, die ihn aus der Ruhe gebracht hat, ihn nicht fortdauernd irgendwie zum Aufgeben des Ruhezustandes veranlasste.

Was die Indifferenz der Materie gegen die Bewegung oder Ruhe anbetrifft, so scheint mir das einzig wirklich Klare, was dieses Princip dem Denkenden bietet, das zu sein, dass es keine wesentliche Eigenschaft der Materie ist, sich stets zu bewegen oder stets in Ruhe zu sein; es ist aber keine Folge dieses Gesetzes, dass ein bewegter Körper nicht fortdauernd der Ruhe zustreben könnte, nicht weil die Ruhe eine ihm in höherem Maasse zukommende Eigenschaft wäre, als die Bewegung, sondern weil es scheinen könnte, als müsste ein Körper bloss in seiner Eigenschaft als Körper in Ruhe sein, und als brauchte er für seine Bewegung etwas Weiteres, das sozusagen fortwährend in ihm hervorgebracht werden müsste.

Der Beweis, den ich von der Erhaltung der Bewegung gegeben habe, hat das Eigenthümliche, dass er in gleicher Weise gilt, mag die Bewegungsursache fortdauernd auf den Körper wirken oder nicht. Ich will damit nicht sagen, dass ich die fortdauernde Wirkung dieser Ursache als für die Bewegung des Körpers nothwendig erachte; denn wenn die augenblickliche Wirkung nicht genügte, welches Resultat würde dann diese Wirkung haben? Und wenn die augenblickliche Wirkung kein Resultat hätte, wie könnte die fortdauernde Wirkung ein solches haben? Da man indessen für die Lösung einer Frage möglichst wenige Principien verwenden soll, so glaubte ich mich auf den Beweis dafür beschränken zu müssen, dass das Fortdauern der Bewegung in gleicher Weise bei beiden Voraussetzungen folgt; allerdings setzt unser Beweis die Existenz der Bewegung voraus und mit noch grösserer Nothwendigkeit ihre Möglichkeit; die Existenz der Bewegung bestreiten hiesse aber sich gegen eine Thatsache auflehnen, die niemand in Zweifel zieht.[12])

Von der gleichförmigen Bewegung.

8. Wir haben eben gesehen, dass ein Körper sich gleichförmig und in gerader Linie bewegt, wenn keine äussere Ursache auf ihn einwirkt. Daraus folgt, dass derselbe Körper sich auch noch gleichförmig bewegen kann, wenn zwei äussere Ursachen auf ihn gleichzeitig und mit gleicher Stärke einwirken, in solcher Weise, dass die eine seine Bewegung zu beschleunigen, die andere sie zu verzögern sucht (auf diese Weise geschieht es, beiläufig bemerkt, dass fallende Körper eine gleichförmige Bewegung erlangen können, wenn der Widerstand der Flüssigkeit, in der sie sich bewegen, ihre Bewegung zu verzögern sucht, während ihre Schwere dieselbe zu beschleunigen strebt). In jedem anderen Falle ist die Bewegung nothwendig beschleunigt oder verzögert.

9. Wenn irgend zwei Theile AB, AC (Fig. 2) einer unbestimmten Geraden AO zwei Zeiträume darstellen, die seit dem Beginne der Bewegung verflossen sind, und die Strecken BD, CE die Wege, die während dieser Zeiten von einem in gleichförmiger Bewegung begriffenen Körper durchlaufen worden sind, so werden die Punkte D, E auf einer geraden Linie ADE liegen.

Denn da ein in gleichförmiger Bewegung begriffener Körper in gleichen Zeiten gleiche Strecken durchläuft, so müssen die Punkte D, E auf einer solchen Linie liegen, dass, falls man AB, BC einander gleich und von beliebiger Länge annimmt, stets $BD = FE$ sei. Diese Eigenschaft besitzt nun allein die gerade Linie. Q. e. d.

Zusatz.

10. Es ist $BD:CE = AB:AC$. Das heisst, bei der gleichförmigen Bewegung verhalten sich die Wege wie die zu ihrer Zurücklegung aufgewandten Zeiten.

Bemerkung über das Maass der Zeit.

11. Da das gegenseitige Verhältniss der Zeittheile uns an sich unbekannt ist, so ist das einzige Mittel, das wir zur Entdeckung dieses Verhältnisses benützen können, das, irgend eine andere den Sinnen mehr zugängliche und besser bekannte Beziehung zu suchen, mit welcher wir dasselbe vergleichen können; man wird somit das einfachste Zeitmaass gefunden haben, wenn es gelingt, in möglichst einfacher Weise das gegenseitige Verhältniss der Zeittheile mit derjenigen unter allen Beziehungen zu vergleichen, die uns am besten bekannt ist. Es folgt schon daraus, dass die gleichförmige Bewegung das einfachste Zeitmaass ist. Denn einerseits ist das Verhältniss der Theile einer geraden Linie das für uns am leichtesten fassliche; und andererseits giebt es keine Verhältnisse, die unter sich leichter vergleichbar sind, als gleiche Verhältnisse. Nun ist bei der gleichförmigen Bewegung das Verhältniss der Zeittheile gleich dem Verhältniss der entsprechenden Theile des durchlaufenen Weges. Die gleichförmige Bewegung giebt uns somit gleichzeitig das Mittel, die Beziehung der Zeittheile mit der uns am leichtesten fasslichen Beziehung zu vergleichen und diese Vergleichung in der einfachsten Weise anzustellen; wir finden also in der gleichförmigen Bewegung das einfachste Zeitmaass.

Ich behaupte ausserdem, dass das auf die gleichförmige Bewegung sich gründende Zeitmaass, abgesehen von seiner Einfacheit, auch dasjenige ist, dessen Benützung sich unserem Denken am natürlichsten darbietet. Da wir in der That keine Beziehung genauer kennen, als die Beziehungen von Theilen des Raumes, und da allgemein jede beliebige Bewegung, deren Gesetz uns gegeben ist, zur Ermittelung des Verhältnisses der Zeittheile führen würde, in Folge der bekannten Beziehung zwischen diesem Verhältniss und dem Verhältniss der Theile des durchlaufenen Weges; so ist klar, dass eine solche Bewegung das exacteste Maass der Zeit sein würde und folglich auch dasjenige, welchem man in der Anwendung vor jedem anderen den Vorzug geben müsste. Wenn es daher eine besondere Bewegungsart giebt, bei der die Beziehung zwischen dem Verhältniss der Zeittheile und dem Verhältniss der Theile des durchlaufenen Weges unabhängig von jeder Hypothese aus der Natur der Bewegung selbst bekannt ist, und wenn diese Bewegung die einzige ist, welcher diese Eigenschaft zukommt, so wird sie nothwendigerweise das natürlichste Zeitmaass sein. Nun ist es nur die gleichförmige Bewegung, welche die beiden eben genannten Bedingungen in sich vereinigt. Denn (§ 6) die Bewegung eines Körpers ist von selbst gleichförmig, sie wird eine verzögerte oder beschleunigte nur durch eine äussere Ursache, und dann ist sie in ihrer Veränderung einer unendlichen Mannigfaltigkeit von Gesetzen fähig. Das Gesetz der Gleichförmigkeit, d. h. die Gleichheit zwischen dem Verhältniss der Zeiten und dem Verhältniss der durchlaufenen Wege ist somit eine Eigenschaft der freien Bewegung.[13]) Die Analogie zwischen der gleichförmigen Bewegung und der Zeitdauer wird dadurch nur um so grösser, und es eignet sich folglich diese Bewegung um so mehr zur Messung der Zeit, da die Zeittheile gleichfalls in constanter, gleichförmiger Weise aufeinander folgen. Dem gegenüber ist jedes Gesetz der Beschleunigung oder der Verzögerung in der Bewegung sozusagen willkürlich und von äusseren Umständen abhängig. Die nicht gleichförmige Bewegung kann folglich nicht das natürliche Maass der Zeit sein; denn erstens wäre kein Grund vorhanden, weshalb eine besondere Art der nicht gleichförmigen Bewegung das bevorzugte Maass der Zeit sein sollte, eher als irgend eine andere Art; zweitens könnte man die Zeit nicht durch eine ungleichförmige Bewegung messen, ohne vorher durch irgend ein besonderes Mittel die Beziehung zwischen dem Verhältniss der Zeiten und dem Verhältniss der durchlaufenen Wege entdeckt zu haben. Wie könnte man übrigens diese Beziehung anders erkennen als durch die Erfahrung, und würde die Erfahrung nicht voraussetzen, dass man bereits ein festes und sicheres Maass der Zeit kenne?

Wie kann man sich nun aber versichern, wird man einwenden, dass eine Bewegung völlig gleichförmig ist? Ich erwidere darauf zunächst, dass es auch keine ungleichförmige Bewegung giebt, deren Gesetz wir genau kennen, und dass somit diese Schwierigkeit nur beweist, dass wir die Beziehung der Zeittheile nicht genau und in aller Strenge kennen; es folgt aber daraus nicht, dass die gleichförmige Bewegung nicht ihrer Natur nach das erste und einfachste Maass der Zeit sei. So suchen wir denn, da wir kein genaues und strenges Zeitmaass haben können, dasselbe wenigstens annäherungsweise in den angenähert gleichförmigen Bewegungen. Wir haben zwei Mittel zur Beurtheilung, ob eine Bewegung angenähert gleichförmig ist; entweder die Kenntniss, dass die Wirkung der beschleunigenden oder verzögernden Ursache nur unmerklich sein kann; oder den Vergleich derselben mit anderen Bewegungen, wenn wir bei beiden ein und dasselbe Gesetz beobachten. So urtheilt man, wenn mehrere Körper sich so bewegen, dass die von ihnen durchlaufenen Wege stets während derselben Zeiten genau oder angenähert dasselbe Verhältniss haben, dass die Bewegung der Körper genau oder wenigstens sehr angenähert gleichförmig sei.[14])

12. Man sagt von einem sich gleichförmig bewegenden Körper, er bewegt sich um so schneller, je grösser der Weg ist, welchen er in ein und derselben Zeit AB durchläuft, so dass man sagt, wenn BD, Bd die in derselben Zeit AB von zwei Körpern durchlaufenen Wege vorstellen, die Geschwindigkeiten dieser beiden Körper verhalten sich wie $BD : Bd$.

Zusatz.

13. Es ist:

$$BD : Bd = \frac{BD}{AB} : \frac{Bd}{AB} = \frac{BD}{AB} : \frac{Ce}{AC}.$$

Somit verhalten sich allgemein die Geschwindigkeiten zweier Körper wie die in beliebigen Zeiten zurückgelegten Wege BD, Ce, wenn man diese Wege durch die zu ihrer Zurücklegung aufgewandten Zeiten dividirt.

Die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Körpers ist somit dem Quotienten Weg durch Zeit proportional.

Von der beschleunigten oder verzögerten Bewegung.

14. Wenn die Endpunkte der Strecken BD, CE (Fig. 3 und 4) nicht auf einer geraden Linie liegen, sondern auf einer Curve ADE, so ist die Bewegung nicht mehr gleichförmig, sondern beschleunigt oder verzögert, je nachdem die Curve ADE gegen A convex oder concav ist, und diese fortwährende Veränderung kann nur von einer äusseren Ursache herrühren, die unausgesetzt als Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung wirkt.

Die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ändert sich dann in jedem Augenblick und kann nicht, wie bei der gleichförmigen Bewegung, durch eine constante Grösse gemessen werden. Man erkennt nur, dass der Ausdruck für dieselbe, wenn er für einen Augenblick gegeben ist, der gleiche sein muss wie für die Geschwindigkeit, die der Körper haben würde, wenn in diesem Augenblicke die Bewegung aufhörte, beschleunigt oder verzögert zu sein. Nehmen wir daher an, dass der Körper von dem Augenblick, in welchem er gerade den Weg BD zurückgelegt hat, sich gleichförmig mit der in D innegehabten Geschwindigkeit weiterbewege; so ist klar, dass, wenn man die Tangente DN zieht, PN der Weg sein würde, den er an Stelle von PE in der Zeit BC zurücklegen würde. In diesem Falle wäre (nach § 13) $\frac{PN}{DP}$ der Ausdruck für die Geschwindigkeit; nun ist das Verhältniss $PN:DP$ dasselbe, wie das Verhältniss des Elementes von AB zu dem Elemente von BD, weil DN Tangente ist. Nennt man daher allgemein t die Zeit, e den entsprechenden vom Körper zurückgelegten Weg, u die Geschwindigkeit nach der Zeit t, so wird man die Gleichung erhalten:

$$u = \frac{de}{dt}.$$

Verlängert man die Tangente DN, bis sie AB in F schneidet, so ist klar, dass BF die Zeit darstellen wird, welche der Körper gebrauchen würde, um BD gleichförmig mit der im Punkte D innegehabten Geschwindigkeit zu durchlaufen. Zieht man daher durch den Punkt A $Ad \parallel FD$, so wird Bd der Weg sein, den derselbe Körper gleichförmig mit dieser selben Geschwindigkeit in der Zeit AB zurücklegen würde.

Man sieht hieraus (Fig. 3), dass man, wenn z. B. ADE eine Parabel ist, d. h. wenn sich die Strecken BD, CE wie die Quadrate der Zeiten verhalten, die Gleichungen erhält:

$$AB = 2\,BF,$$

und

$$Bd = 2\,BD.$$

Zusatz I.

15. Die Strecken NE, ne sind die Wege, welche der Körper während der Zeiten BC, Bc mehr oder weniger zurücklegt, als die Wege PN, pn, welche er bei gleichförmiger

Bewegung mit der in D innegehabten Geschwindigkeit zurückgelegt hätte. Wenn man nun die Zeiten BC, Bc unendlich klein annimmt, so verhalten sich die Strecken NE, Ne, wie das Quadrat von BC zum Quadrat von Bc. Denn der Bogen DE kann wegen seiner unendlichen Kleinheit als ein Kreisbogen betrachtet werden; sei nun DN (Fig. 5) das unendlich kleine Stück der Tangente eines Kreisbogens, und zieht man durch den Punkt N und irgend einen anderen Punkt n dieses Stückes nach Belieben die Parallelen NQ, nq, so ist in Folge der Eigenschaft des Kreises:

$$NE \times NQ = DN^2;$$
$$ne \times nq = Dn^2;$$

und da die Strecken nq, NQ als gleich betrachtet werden können, so ist:

$$NE : ne = DN^2 : Dn^2.$$

Nun ist (Fig. 3 und 4):

$$DN : Dn = BC : Bc,$$

und somit allgemein:

$$NE : ne = BC^2 : Bc^2.$$

Zusatz II.

16. Es ist klar, dass die Strecken NE, ne die Wege sein würden, welche die beschleunigende Ursache den Körper in den Augenblicken[15]) BC, Bc zurücklegen lassen würde, wenn er zu Beginn dieser Augenblicke keine Geschwindigkeit hätte. Es verhalten sich daher die von einem Körper in Folge irgend einer beschleunigenden Kraft zurückgelegten Wege bei Beginn der Bewegung, wie die Quadrate der Zeiten.

Zusatz III.

17. Nimmt man $BC = dt$ und constant an, und betrachtet man die Curve ADE als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten, deren Verlängerungen ihre Tangenten werden, so wird NE das zweite Differential des zurückgelegten Weges BD sein, und man kann allgemein annehmen, dass die Curve die Differentialgleichung zweiter Ordnung hat:

$$\varphi dt^2 = \pm d^2 e,$$

wo φ irgend eine Function von e und t, oder auch von diesen Grössen und ihren Differentialen vorstellt; dabei ist das $+$ Zeichen zu nehmen, falls die Bewegung eine beschleunigte, d. h. falls die Curve ADE gegen AC convex ist, das $-$ Zeichen, falls die Bewegung eine verzögerte, d. h. falls die Curve ADE gegen AC concav ist.

Zusatz IV.

18. Da (nach § 14):

$$u = \frac{de}{dt},$$

so folgt wegen der Constanz von dt:

$$d^2 e = du\, dt;$$

die vorstehende Gleichung

$$\varphi dt^2 = \pm d^2 e$$

wird somit in die folgende übergehen:

$$\varphi dt = \pm du,$$

oder:

$$\varphi de = \pm u du.$$ [16])

Bemerkung I.

Ueber die beschleunigenden Kräfte.

19. Die gleichförmige Bewegung eines Körpers kann nur durch eine äussere Ursache verändert werden. Nun giebt es unter allen, zufälligen oder directen, Ursachen, welche auf die Bewegung der Körper von Einfluss sind, höchstens eine einzige, den Stoss, bei dem wir im Stande sind, die Wirkung allein aus der Kenntniss der Ursache zu bestimmen, wie man im zweiten Theile dieses Werkes sehen wird. Alle anderen Ursachen sind uns völlig unbekannt; sie können sich uns folglich nur durch die Wirkung offenbaren, welche sie hervorbringen, indem sie die Bewegung des Körpers beschleunigen oder verzögern, und wir können sie von einander nur durch die Kenntniss des Gesetzes und der Grösse ihrer Wirkungen unterscheiden,

d. h. des Gesetzes und der Grösse der Bewegungsänderung, welche sie hervorbringen. Ist daher die Ursache unbekannt, — dieser Fall soll hier allein in Frage kommen —, so muss die Gleichung der Curve unmittelbar entweder als eine Gleichung zwischen endlichen Grössen oder als Differentialgleichung gegeben sein. Die Gleichung ist gewöhnlich als Differentialgleichung gegeben, wenn die Bewegung eine nach einem willkürlichen oder rein hypothetischen Gesetz beschleunigte oder verzögerte ist. Sie ist dagegen gewöhnlich als eine Gleichung zwischen endlichen Ausdrücken gegeben, wenn das Gesetz der Beziehung der Wege zu den Zeiten durch die Erfahrung entdeckt worden ist. Nehmen wir z. B. an, die beschleunigende Kraft sei derart, dass der Körper fortdauernd in gleichen Zeitelementen gleiche Geschwindigkeitszuwachse erhalte; dann wird bei Constanz von dt auch du constant und somit φ eine constante Grösse sein. Die Gleichung

$$\varphi dt = du$$

wird in diesem Falle unmittelbar durch die Voraussetzung gegeben sein. Nehmen wir dagegen an, dass man in einem besonderen Falle durch die Erfahrung entdeckte, dass die endlichen seit dem Beginn der Bewegung zurückgelegten Wege den Quadraten der zu ihrer Zurücklegung gebrauchten Zeiten proportional sind, so ist die Gleichung der Curve ADE:

$$e = \frac{t^2}{a},$$

aus der man:

$$d^2e = \frac{2\,dt^2}{a},$$

und:

$$du = \frac{2\,dt}{a}$$

folgert.

Man sieht hieraus, dass bei dieser Annahme die Zuwachse der Geschwindigkeit in jedem Zeitelement gleich sind, und dass die Differentialgleichungen:

$$\varphi dt^2 = \pm d^2e,$$
$$\varphi dt = \pm du$$

aus der in endlichen Ausdrücken gegebenen Gleichung der Curve ADE folgen.

Es ist hiernach klar, dass, wenn die Ursache unbekannt ist, die Gleichung $\varphi dt = \pm du$ immer gegeben ist.

Die meisten Geometer stellen die Gleichung:

$$\varphi dt = du$$

zwischen den Zeiten und den Geschwindigkeiten unter einem anderen Gesichtspunkt dar. Was bei uns eine blosse Hypothese[17]) ist, wird von ihnen zum Princip erhoben. Da der Zuwachs der Geschwindigkeit die Wirkung der beschleunigenden Kraft ist und nach ihrer Ansicht eine Wirkung immer ihrer Ursache proportional sein muss, so betrachten diese Geometer die Grösse φ nicht bloss als den einfachen Ausdruck des Verhältnisses von du zu dt; es ist nach ihrer Ansicht ausserdem der Ausdruck für die beschleunigende Kraft, der, wie sie behaupten, du proportional sein muss, wenn dt constant ist; daraus folgern sie das allgemeine Axiom, dass das Product aus beschleunigender Kraft und Zeitelement dem Element der Geschwindigkeit gleich ist. *Daniel Bernoulli* (*Petersb. Mém.* Bd. 1) behauptet, dass dieses Princip nur eine erfahrungsmässige Sicherheit hat, da wir bei unserer Unkenntniss über die Natur der Ursache und die Art und Weise ihrer Wirkung nicht wissen können, ob ihre Wirkung ihr thatsächlich proportional ist oder ob sie nicht irgend eine Potenz oder irgend eine Function dieser selben Ursache ist. *Euler* hat sich dagegen in sehr ausführlicher Weise in seiner Mechanik zu beweisen bemüht, dass dieses Princip eine nothwendige Wahrheit ist. Wir werden, ohne hier zu discutiren, ob dieses Princip eine nothwendige Wahrheit oder nur von erfahrungsmässiger Sicherheit ist, uns damit begnügen, es als eine Definition aufzufassen und unter dem Worte »beschleunigende Kraft« nur die Grösse verstehen, welcher der Zuwachs der Geschwindigkeit proportional ist. So werden wir, anstatt zu sagen, der Zuwachs der Geschwindigkeit ist in jedem Zeitelement constant, oder dieser Zuwachs verhält sich wie das Quadrat der Entfernung des Körpers von einem festen Punkte, uns einfach zur Abkürzung und um uns dem gewöhnlichen Sprachgebrauch anzuschliessen so ausdrücken: die beschleunigende Kraft ist constant oder dem Quadrat der Entfernung proportional etc.; und wir werden allgemein unter der Beziehung zweier Kräfte nie etwas anderes als die Beziehung ihrer Wirkungen verstehen, ohne zu untersuchen, ob die Wirkung thatsächlich der Ursache oder einer Function dieser Ursache proportional ist:

Eine völlig unnöthige Untersuchung, da die Wirkung immer unabhängig von der Ursache entweder durch die Erfahrung oder durch eine bestimmte Voraussetzung gegeben ist.

So werden wir allgemein unter der bewegenden Kraft das Product aus der sich bewegenden Masse mit dem Element der Geschwindigkeit verstehen oder, was dasselbe ist, mit der kleinen Strecke, welche die Masse in einem bestimmten Zeitelement in Folge der ihre Bewegung beschleunigenden oder verzögernden Ursache zurücklegen würde; unter beschleunigender Kraft werden wir einfach das Element der Geschwindigkeit verstehen.[18]) Es ist nach Definitionen dieser Art leicht zu ersehen, dass alle Probleme, welche man über die Bewegung von in gerader Linie bewegten Körpern stellen kann, die von Centralkräften getrieben werden oder nach irgend einem Gesetz auf einander eine gegenseitige Anziehung ausüben, Probleme sind, welche wenigstens in demselben Maasse der Geometrie angehören, wie der Mechanik, und in denen die Schwierigkeit eine rein rechnerische ist, vorausgesetzt, dass der bewegte Körper als ein Punkt betrachtet wird.

Man könnte vielleicht denken, dass die Auslegung der Gleichung:

$$\varphi dt = \pm du$$

nicht als Hypothese, sondern als Princip wenigstens zur Berechnung der Wirkung bekannter Ursachen nothwendig sei, wie bei der Stosswirkung, im besonderen, wenn dieselbe aus kleinen auf einander folgenden Stössen besteht. Ich hoffe, dass man in dem zweiten Theile dieses Werkes erkennen wird, dass dieses Princip nicht nur unnütz ist, sondern dass seine Anwendung ungenügend ist und selbst zu falschen Resultaten führen kann.

Bemerkung II.[19])

Ueber die Vergleichung beschleunigender Kräfte.

20. Wenn man in einem beliebigen Kreise PQD (Fig. 5) die einander gleichen, unendlich kleinen Sehnen PD, DE zieht und PD bis O verlängert, so dass:

$$DO = PD;$$

wenn man schliesslich durch die Punkte O, E die Gerade OQ

und in dem Punkte D die Tangente DN zieht, welche OQ in N schneidet, so ist wegen der Eigenschaft des Kreises:

$$DN^2 = NE \times NQ;$$

$$OD \times OP \text{ oder } 2DO^2 = OE \times OQ.\text{*)}$$

Da nun die Strecken DN und DO, sowie NQ und OQ als gleich zu betrachten sind, so folgt:

$$OE = 2NE.$$

Sieht man also das Element DE irgend einer Curve ADE als einen kleinen Kreisbogen an, was man, ohne einen Fehler zu begehen, thun kann, so folgt, dass das zweite Differential NE des zurückgelegten Weges doppelt so gross ist, wie der wirkliche Weg, den die beschleunigende Kraft den Körper in dem Augenblicke BC würde zurücklegen lassen, wenn sie ihm auch gleich erscheint, sobald man die Curve als Polygon auffasst, weil dann die Tangente DN nichts anderes ist, als die Verlängerung der kleinen Seite der Curve.

Wir haben oben (§ 14) gesehen, dass, falls die zurückgelegten Wege den Quadraten der entsprechenden Zeiten proportional sind, ein Körper, der in der Zeit T den Weg E durchläuft, in derselben Zeit gleichförmig den Weg $2E$ mit der Geschwindigkeit zurücklegen würde, welche er am Ende des Weges E inne hat. Daraus folgt, dass NE, wenn man diese Strecke in der Polygoncurve als die Wirkung der beschleunigenden oder verzögernden Kraft ansieht, als der Weg zu betrachten ist, welcher gleichförmig mit der unendlich kleinen, von dem Körper am Ende des Augenblickes BC er-

---

*) Wenn die Strecken PD, DE, DO gleich sind, so kann man streng nachweisen, dass

$$OE = 2NE$$

ist. Denn das Dreieck DOE ist gleichschenkelig, der Winkel ODE wird durch die Hälfte des Bogens PDE und der Winkel NDE durch die Hälfte des Bogens DE gemessen. Daraus ergiebt sich, dass DN den Winkel ODE halbirt, und somit folgt, da:

$$DO = DE \text{ ist:}$$
$$OE = 2NE.$$

Der gegebene Beweis ist jedoch auch auf den Fall anwendbar, in dem PD, DE, DO nicht genau gleich sind, wenn nur ihre Differenz gegen sie unendlich klein ist.

langten Geschwindigkeit zurückgelegt worden ist. In der That verhalten sich bei der Polygoncurve die Strecken NE, ne nicht wie die Quadrate der Zeiten, sondern wie die Zeiten selbst. Man sieht so, wie man die momentane Wirkung der die Bewegung beschleunigenden oder verzögernden Kraft auf eine gleichförmige Bewegung zurückführen kann.

Man muss übrigens auf diese Unterscheidung der Polygoncurven und der strengen Curven bei der Beurtheilung der Wirkungen beschleunigender Kräfte und bei der Vergleichung dieser Wirkungen unter einander wohl achten. Wenn man eine der Wirkungen unter Zugrundelegung der strengen Curve berechnet, muss man die andere mit derselben Annahme berechnen; sonst würde man Gefahr laufen, das Verhältniss der Kräfte, d. h. ihrer Wirkungen, doppelt so gross zu nehmen, als es in Wirklichkeit ist. Man vergleiche die Geschichte der Akademie vom Jahre 1722.

Zweites Kapitel.

Von der zusammengesetzten Bewegung.

Lehrsatz.

21. Wirken gleichzeitig auf einen Körper oder Punkt A (Fig. 6) irgend zwei Bewegungsursachen[20]), von denen die eine ihn in einer bestimmten Zeit gleichförmig von A nach B, die andere in derselben Zeit ihn gleichförmig von A nach C bewegen würde, so construire man das Parallelogramm $ABCD$; ich behaupte, dass der Körper A gleichförmig die Diagonale AD durchlaufen wird, in derselben Zeit, in der er AB oder AC zurückgelegt hätte.

Sei Ag der unbekannte von dem Körper A zurückgelegte Weg, so ist sicher (nach § 6), dass dieser Weg eine gerade Linie sein wird, und dass der Körper A denselben gleichförmig zurücklegen wird. Es ist in gleicher Weise evident, dass derselbe in der Ebene der Geraden AB, AC liegen wird, da kein Grund vorhanden ist, warum er aus dieser Ebene nach der einen oder anderen Seite heraustreten sollte. Würde man ferner den Körper, wenn er an irgend einem Punkte g dieser Geraden angelangt ist, der Wirkung zweier Kräfte unterworfen annehmen, von denen die eine ihn in der Richtung $gc \parallel AC$

mit der in A in der Richtung AC innegehabten Geschwindigkeit, aber in entgegengesetztem Sinne, zu bewegen strebte, die andere ihn zu veranlassen suchte, die Gerade go gleich und entgegengesetzt $\parallel AB$ in derselben Zeit zurückzulegen, in welcher er AB zurückgelegt hätte, so ist klar, dass der Körper im Punkte g in Ruhe bleiben würde. Denn seine Geschwindigkeit und Richtung im Punkte g ist genau dieselbe, als wäre er unter dem Einfluss zweier Kräfte, welche den Kräften in den Richtungen AB und AC gleich und parallel, folglich den Kräften in den Richtungen go, gc gleich und entgegengesetzt parallel sind.

Dies vorausgeschickt, denken wir uns den Körper A, der die Gerade Ag beschreibt, auf einer Ebene $CLMH$, welche zwischen den beiden zu AC parallelen Führungen KL, IM frei gleiten kann, so dass alle ihre Punkte g mit AC gleiche und parallele Strecken gc in derselben Zeit beschreiben, in welcher der Körper A den Weg AC zurückgelegt hätte, und gleichzeitig mögen sich die beiden Führungen entgegengesetzt parallel zu AB mit der Geschwindigkeit bewegen, welche der Körper A in der Richtung AB haben würde, und die Ebene in ihrer Bewegung mitnehmen; dann ist evident, dass alle Punkte g der Ebene gleichförmig Gerade ga beschreiben werden, welche der Diagonale AD des Parallelogrammes BC gleich und parallel sind. Es ist ferner evident, dass der Punkt g, der in diesem Zustand fortwährend von vier Bewegungsursachen beeinflusst wird, die einander paarweise entgegengesetzt gleich sind[21]), in dem absoluten Raume in Ruhe bleiben muss. Daraus folgt, dass, wenn der Körper in einem Punkte g der Ebene angelangt ist, dieser Punkt g sich an der Stelle befinden muss, welche der Körper im Anfang seiner Bewegung inne hatte. Das kann nur der Fall sein, wenn die Gerade Ag mit der Diagonale AD zusammenfällt. Nimmt man noch

$$gc = AC,$$

$$go = AB$$

an, so sieht man, dass der Punkt g in den Punkt D fallen muss, da

$$ga = AD,$$

und dass der Punkt a in den Punkt A fallen muss. Q. e. d.

Bemerkung.

22. Der Beweis, den man gewöhnlich für den vorstehenden Satz beibringt, besteht darin, dass man annimmt, der Punkt A bewege sich auf einem Lineal AB mit der Geschwindigkeit, die er in der Richtung AB erhalten hat, und es bewege sich gleichzeitig die Gerade oder das Lineal AB in der Richtung AC mit der Geschwindigkeit, welche der Körper A in der Richtung AC erhalten hat. Man beweist ganz richtig bei dieser Annahme, dass der bewegte Punkt A die Diagonale AD beschreibt. Allgemein sind die meisten der gewöhnlichen Beweise dieser Behauptung darauf gegründet, dass man die beiden in den Richtungen AB und AC wirkenden Bewegungsursachen als während der ganzen Zeit der Bewegung auf den Körper A wirkend annimmt, was nicht genau den Kern der Sache trifft. Denn wir haben nur anzunehmen, dass der Körper A sich im ersten Augenblick gleichzeitig in den Richtungen AB und AC zu bewegen strebt, und man frägt nach der Richtung und Geschwindigkeit, welche er in Folge des Zusammenwirkens der beiden Kräfte haben muss. Sobald er eine mittlere Richtung AD eingeschlagen hat, existiren die beiden Bestrebungen in den Richtungen AB und AC nicht mehr, es besteht in Wirklichkeit nur noch seine Bestrebung in der Richtung AD.

Ich glaubte daher, dieser Schwierigkeit vorbeugen und zeigen zu müssen, dass der Weg des Körpers A derselbe ist, mögen die beiden Kräfte nur im ersten Augenblick, oder mögen sie alle beide auf den Körper fortdauernd wirken. Dies glaube ich durch den oben gegebenen Beweis erreicht zu haben.

Zusatz I.

23. Wenn ein Körper mit irgend einer Geschwindigkeit eine Gerade AC (Fig. 7) durchläuft oder zu durchlaufen sucht, und man nimmt irgendwo auf dieser Geraden oder auf ihrer Verlängerung einen Punkt B an, so kann man die Geschwindigkeit AC als aus der Geschwindigkeit AB und der Geschwindigkeit BC zusammengesetzt annehmen. Denn AC kann als die Diagonale eines Parallelogrammes angesehen werden, dessen Seiten AB, BC sind. Q. e. d.

Bemerkung.

24. Mancher Leser wird erstaunt sein, dass ich den Beweis einer scheinbar so einfachen Behauptung aus einem allgemeinen, viel complicirteren Falle herleite; man kann aber, wie ich glaube, die in Rede stehende Behauptung nicht anders beweisen, als wenn man den Satz, dass die Wirkung zweier Kräfte gleich der Summe ihrer Einzelwirkungen ist, oder dass zwei Ursachen zusammen so wirken, als ob sie einzeln jede für sich wirkten, als ein unanfechtbares Axiom ansieht; ein Princip, das mir weder genügend klar noch genügend einfach scheint, und welches übrigens der Frage der lebendigen Kräfte und dem oben in § 19 behandelten Princip der beschleunigenden Kräfte bereits zu nahe kommt. Dieser Grund hat mich veranlasst, die Anwendung jenes Satzes zu vermeiden, abgesehen davon, dass ich mir in dieser Abhandlung das Ziel setze, die Mechanik auf die kleinstmögliche Anzahl von Principien zurückzuführen und alle diese Principien aus dem alleinigen Begriffe der Bewegung herzuleiten, das heisst aus dem Begriffe des zurückgelegten Weges und der dazu gebrauchten Zeit, ohne die Kräfte und Bewegungsursachen[22]) irgendwie herbeizuziehen.

Zusatz II.

25. Wenn ein Körper von irgend zwei beschleunigenden Ursachen nach den Richtungen AB und AC (Fig. 8) getrieben wird, so wird seine Richtung die Diagonale eines Parallelogrammes über den Seiten AB, AC sein, welche den bei schleunigenden Kräften in den Richtungen AB, AC proportional sind, und die beschleunigende Kraft in der Richtung AD wird sich zu den beiden in den Richtungen AB und AC verhalten, wie AD zu AB und AC. Denn seien Ab und Ac die Wege, welche der Körper A im Beginn seiner Bewegung in Folge jeder einzelnen der Kräfte zurückgelegt hätte, so ist (§ 19):

$$Ab : Ac = AB : AC,$$

es werden sich daher die Geraden bd, cd parallel AC, AB im Punkte d der Diagonalen AD schneiden. Ebenso verhält sich, wenn $A\beta$, $A\gamma$ die in gleichen Zeiten in Folge dieser selbigen Kräfte zurückgelegten Wege sind, $Ab : A\beta$ wie das

Quadrat der Zeit, multiplicirt mit Ab oder Ac, zu dem Quadrat der Zeit, multiplicirt mit $A\beta$ oder $A\gamma$, also wie $Ac : A\gamma$; der Schnittpunkt δ der Geraden $\beta\delta$, $\gamma\delta$ wird somit wieder auf der Diagonalen AD liegen. Nimmt man daher an, dass sich der Körper A im ersten Augenblicke auf dem Lineal AB mit der beschleunigenden Kraft bewege, welche er in der Richtung AB hat, und dass die Wirkung der beschleunigenden Kraft in der Richtung AC gleichzeitig das Lineal von A nach C bewegt, so wird der Punkt A die Diagonale Ad beschreiben, in derselben Zeit, in der er Ab oder Ac durchlaufen hätte, und die beschleunigende Kraft in der Richtung AD wird sich zu jeder der Kräfte in den Richtungen der Seiten verhalten, wie die Diagonale zu jeder dieser selbigen Seiten.

Man sieht daraus, wie man an Stelle irgend einer beschleunigenden Kraft andere setzen kann, in beliebiger Anzahl.

Da wir übrigens oben (§ 20) gesehen haben, wie man die augenblickliche Wirkung irgend einer Kraft auf eine gleichförmige Bewegung zurückführen kann, so ist klar, dass sich so die Combination der Wirkungen beliebig vieler Kräfte und die Aufsuchung der Gesammtwirkung sehr leicht auf die Gesetze der zusammengesetzten gleichförmigen Bewegung zurückführen lässt.

Von der krummlinigen Bewegung und den Centralkräften.

26. Da ein Körper sich von selbst in gerader Linie zu bewegen strebt, kann er eine krumme Linie nur in Folge der Wirkung einer Bewegungsursache beschreiben, die ihn fortdauernd von seiner natürlichen Richtung ablenkt. Man kann aus dem vorstehenden Paragraphen die Principien der Bewegung eines Körpers auf einer Curve ableiten.

Es ist bewiesen, dass ein unendlich kleiner Bogen irgend einer Curve als ein Kreisbogen angesehen werden kann, dessen Radius gleich dem Krümmungsradius dieses Curvenbogens ist. Man führt auf diese Weise die Bewegung eines Körpers auf einer beliebigen Curve auf die Bewegung desselben Körpers auf einem Kreise zurück, dessen Radius sich in jedem Augenblicke ändert.

Die Bewegungsursache, welche einen Körper auf einer Curve zurückhält, wird im Besonderen Centralkraft genannt, wenn sie stets nach einem festen Punkt gerichtet ist; wir wollen sie aber hier allgemein Centralkraft nennen, möge sie nach einem festen Punkt gerichtet sein oder nicht. Dieselbe ist ihrer Natur nach nichts als eine beschleunigende oder verzögernde Bewegungsursache, deren Richtung von der des Körpers abweicht. Man kann nach alledem, was früher gesagt wurde (§ 24 und 25), die augenblickliche Wirkung dieser Bewegungsursache auf eine gleichförmige Bewegung zurückführen, indem man die Curve, welche die Kraft den Körper beschreiben lässt, als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten ansieht, und diese Wirkung ist doppelt so gross als diejenige, welche die Centralkraft hervorbringen würde, wenn man die in Betracht kommende Curve in exactem Sinne als eine Curve auffasst. Nehmen wir somit an, ein Körper beschreibe einen unendlich kleinen Kreisbogen PDE (Fig. 5) in Folge einer Bewegungsursache, welche ihn im Punkte D von der geraden Bahn in einer gegebenen Richtung ablenkt. Betrachtet man den Kreis als ein Polygon, so wird die kleine Sehne PD der Weg sein, den er im vorangehenden Augenblick zurückgelegt hat, und es ist DO (gleich der Sehne PD und in geradliniger Fortsetzung derselben) der Weg, den der Körper im folgenden Augenblicke zurückzulegen strebt. Ziehen wir daher OE parallel zur Richtung der Centralkraft in D, so wird OE die Augenblickswirkung dieser Bewegungsursache sein; wenn man dagegen den Kreis als einen Kreis in strengem Sinne auffasst, so wäre die Tangente DN die Linie, die der Körper zu beschreiben strebt, und NE die Wirkung der Bewegungsursache, welche ihn auf der Curve zurückhält.

Die Strecke NE, dividirt durch das Quadrat der zu ihrer Zurücklegung gebrauchten Zeit, ist (§ 17, 18 und 19) der Ausdruck für die beschleunigende Kraft, in Folge deren der Körper die Curve beschreibt; nun ist diese Strecke NE gleich dem Quadrat der Strecke DN oder des Bogens DE oder PD, dividirt durch NQ, und NQ verhält sich zum Durchmesser des Kreises, wie der Sinus des Winkels, den die Centralkraft mit der Curve bildet, zum ganzen Sinus[23]); es ist ferner die Strecke DE, dividirt durch die zu ihrer Zurücklegung gebrauchte Zeit, (nach § 14) der Ausdruck der Geschwindigkeit des Körpers. Es ist daher bei einer beliebigen Curve die Wirkung der Centralkraft proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungsradius und multiplicirt mit dem Verhältniss zwischen dem ganzen Sinus und dem Sinus des Winkels[24]), den diese Kraft mit der Curve bildet.

Allgemein wird die Centralkraft, wenn das Zeitelement als constant angenommen wird, durch die Strecke OE bei der Polygoncurve und durch NE bei der strengen Curve dargestellt. Man muss folglich auf diese Verschiedenheit des Ausdrucks bei dem Vergleich der Wirkungen zweier Centralkräfte Acht geben, und um nicht die eine oder die andere im Verhältniss zur anderen verdoppelt zu erhalten, muss man entweder alle beide Curven als Polygone oder alle beide als strenge Curven auffassen.

Die Centralkräfte und allgemein alle beschleunigenden Kräfte (wenn wir unter dem Worte Kräfte nur ihre Wirkungen verstehen) verhalten sich wie die kleinen Wege, welche ein Körper in ein und demselben Augenblicke in Folge dieser Kräfte zurücklegt. Man pflegt alle diese Kräfte mit der constanten beschleunigenden Kraft zu vergleichen, die wir am besten kennen, ich meine die Schwere. Ist E der Weg, den ein schwerer Körper in einer endlichen Zeit T zurücklegt, so ist $\frac{Edt^2}{T^2}$ der Weg, den er in der Zeit dt zurücklegen wird, und denkt man sich den Bogen DE in derselben Zeit durchlaufen, so wird sich die Centralkraft zur Schwerkraft verhalten, wie die Strecke $NE : \frac{Edt^2}{T^2}$, oder wie $OE : \frac{2Edt^2}{T^2}$.

Sei nun r der Krümmungsradius der Curve in N, S der Sinus des Winkels, den die Richtung der Centralkraft mit der Curve bildet, A der ganze Sinus, e der Weg, den der Körper gleichförmig mit der in D innegehabten Geschwindigkeit in der Zeit T zurücklegen würde, so ist:

$$DE = \frac{edt}{T};$$

$$OE = \frac{DE^2}{r} \times \frac{A}{S} = \frac{e^2dt^2A}{T^2S.r}.$$

Es verhält sich somit die Augenblickswirkung der Schwere zu derjenigen der Centralkraft, wie $2e : \frac{e^2A}{S.r}$, und wir haben so das Verhältniss dieser beiden Wirkungen, welches die meisten Geometer als das Verhältniss der Ursachen selbst ansehen, in endlichen Grössen ausgedrückt.

Drittes Kapitel.

Von der durch Hindernisse zerstörten oder veränderten Bewegung.

27. Ein sich bewegender Körper kann Hindernissen begegnen, welche seine Bewegung verändern oder selbst ganz aufheben; diese letzteren sind entweder an sich unüberwindlich oder bieten gerade nur so viel Widerstand, als nothwendig ist, um die dem Körper eingeprägte Bewegung zu zerstören.

Ein unüberwindliches Hinderniss kann derart sein, dass es dem Körper keine Bewegung erlaubt, wie in dem Falle, dass ein Körper an einem geraden Stabe zieht, der in einem Punkte fest ist; oder das Hinderniss kann von solcher Natur sein, dass es den Körper nicht hindert, sich in einer von seiner bisher innegehabten Richtung abweichenden Richtung zu bewegen, wie z. B. in dem Falle, dass der Körper einer unerschütterlich festen Ebene begegnet.

28. Wenn das dem Körper begegnende Hinderniss, unüberwindlich oder nicht, nur seine Bewegung modificirt und verändert, ohne sie zu zerstören, so dass der Körper, der z. B., bevor er dem Hindernisse begegnete, die Geschwindigkeit a hatte, gezwungen ist, eine Geschwindigkeit b anzunehmen, deren Grösse und Richtung von der ersten verschieden ist; so ist klar, dass man die Geschwindigkeit, welche der Körper hat, wenn er auf das Hinderniss trifft, als aus der Geschwindigkeit b und einer anderen Geschwindigkeit c zusammengesetzt ansehen kann, und dass es sich so verhält, als ob gerade die Geschwindigkeit c von dem Hindernisse zerstört worden sei.

29. Es folgt daraus, dass ein unelastischer Körper, der in lothrechter Richtung auf eine unbewegliche und undurchdringliche Ebene trifft, nach diesem Stosse stillstehen und in Ruhe bleiben muss. Denn es ist ersichtlich, dass, falls der Körper nach dem Auftreffen auf die Ebene noch eine Bewegung hat, eine solche nur nach rückwärts vorhanden sein kann, und zwar in der Richtung des Lothes; sei u seine Geschwindigkeit vor dem Stosse, v seine Geschwindigkeit nach rückwärts, die ich $= mu$ annehme, wo m irgend eine unbekannte Zahl vorstelle, so ist (nach § 28):

$$u = -mu + u + mu.$$

Es ist somit $u + mu$ die von dem Körper bei dem Auftreffen auf die Ebene verlorene Geschwindigkeit. Es ist aber kein Grund vorhanden, warum m gerade eine bestimmte Zahl sein soll, eher als irgend eine andere Zahl. Denn die einzige Bedingung, die zur Bestimmung der Geschwindigkeit $u + mu$ besteht, ist die, dass diese Geschwindigkeit durch die Ebene zerstört werden soll. Da nun (nach Voraussetzung) die Ebene unerschütterlich fest ist, so ist kein Grund vorhanden, warum sie gerade die Geschwindigkeit $u + mu$ zerstören sollte, eher als irgend eine andere Geschwindigkeit $u + nu$. Es kann also die Zahl m nicht gerade eine bestimmte Zahl sein, eher als irgend eine andere, sie wird somit null sein.[25]) Es folgt somit mu, also $v = 0$. Wenn andererseits die Geschwindigkeit $u + mu$ durch das Auftreffen auf die Ebene vernichtet wird, um so viel mehr wird die Geschwindigkeit u durch das Auftreffen auf die Ebene vernichtet werden können.

Zusatz I.

30. Nimmt man an, dass ein sich in der Richtung AB bewegender Körper A (Fig. 9) auf die unbewegliche und undurchdringliche Ebene BD trifft, auf der er gezwungen sei, sich zu bewegen, so wird sich seine Geschwindigkeit in der Richtung BD zu den Geschwindigkeiten in den Richtungen AB oder BC verhalten, wie der Sinus des Complementes des Winkels CBD zum ganzen Sinus.[26]) Denn man muss die Geschwindigkeit BC als aus zwei anderen zusammengesetzt ansehen, von denen die eine BE lothrecht zur Ebene BD ist, die andere in dieser Ebene liegt. Da nun die Geschwindigkeit BE durch die Ebene zerstört wird, so wird der Körper A nur noch die Geschwindigkeit BD haben, die sich zu BC verhält, wie der Sinus des Winkels BCD, des Complementes von CBD, zum ganzen Sinus.

Zusatz II.

31. Wenn sich ein Körper längs mehrerer Ebenen AB, BC, CD etc. (Fig. 10 und 11) bewegt, so verlängere man AB und BC beliebig bis F und E; man beschreibe darauf mit einem willkürlichen Radius GL den Bogen LM und mache den Winkel $LGM = CBF$; hierauf fälle man die Senkrechte

MK und beschreibe mit dem Radius GK den Bogen NK, so dass der Winkel $KGN = DCE$ wird, man fälle weiter die Senkrechte Ni und so fort; ich behaupte, falls man GL als den Ausdruck der Geschwindigkeit in der Richtung AB annimmt, wird GI die Geschwindigkeit in der Richtung CD darstellen. Das folgt deutlich aus dem vorstehenden Zusatz.

Zusatz III.

32. Die Summe der von A bis D verlorenen Geschwindigkeiten ist somit gleich LI, d. h. gleich der Summe der sinusversus[27]) der Winkel DCE, CBF, wenn man nach einander GL und GK als ganzen Sinus annimmt.

Zusatz IV.

33. Wenn man daher GL als ganzen Sinus annimmt, wird die verlorene Geschwindigkeit kleiner sein als die Summe dieser sinusversus.[27])

Von der Bewegung eines Körpers auf einer krummen Oberfläche.

Hülfssatz.

34. Wenn man in eine Curve $ABCDR$ (Fig. 12), nachdem man die Tangenten AY, RY gezogen hat, ein Polygon $ABCDR$ einschreibt, dessen Aussenwinkel BAY, CBF, DCE etc. einander gleich sind; so behaupte ich, dass man dieses Polygon als aus einer so grossen Seitenzahl zusammengesetzt denken kann, dass die Summe der sinusversus der Winkel BAY, CBF, DCE, RDS etc. kleiner wird als eine gegebene Grösse.

Es ist nämlich die Summe der Winkel BAY, CBF, DCE etc. gleich dem Winkel RYZ, der von den Tangenten RY, AY der Curve gebildet wird. Macht man daher den Winkel ryz (Fig. 13) $= RYZ$, den Winkel $ryn =$ einem der Winkel BAY oder CBF, und bezeichnet man mit n die Anzahl der Winkel, so wird:

$$\text{arc}\,.\,rn \times n = \text{arc}\,.\,rz$$

und

$$\frac{(\text{Sehne } rn)^2}{rh} \times n = \text{der Summe der sinusversus.}$$

Nun ist aber:

$$\frac{(\text{Sehne } rn)^2}{rh} \times n < \frac{(\text{arc}\,.\,rn)^2\,.\,n}{rh} = \frac{(\text{arc}\,.\,rz)^2}{n\,.\,rh}.$$

Setzt man daher:

$$\frac{(\text{arc}\,.\,rz)^2}{rh} = \pi\,.\,rl$$

(wo π eine gegebene Zahl ist, da die Strecken rh, rl und der Bogen rz gegeben sind), so wird die Summe der sinusversus $< \frac{\pi\,.\,rl}{n}$. Da nun π und rl constante Grössen sind, kann man n so gross machen, dass $\frac{\pi \times rl}{n}$ kleiner wird als eine gegebene Grösse; um so mehr wird daher die Summe der sinusversus kleiner als diese selbe gegebene Grösse sein.

Lehrsatz.

35. Wenn ein sich in der Richtung einer Geraden XA (Fig. 12) bewegender Körper auf die krumme Oberfläche AR trifft, die von XA in A berührt wird, und auf der er sich weiter zu bewegen gezwungen ist, so behaupte ich, dass er auf seinem Wege von A nach R nichts von seiner Geschwindigkeit verlieren wird.

Denn man kann in die Curve ein Polygon $ABCDR$ mit einer so grossen Seitenzahl einschreiben, dass die Summe der sinusversus seiner Aussenwinkel immer kleiner ist (§ 34) als eine gegebene Grösse, und dass man um so mehr (§ 33) die von A bis R verlorene Geschwindigkeit stets beliebig klein machen kann. Wenn daher dieses Polygon in die Curve übergeht, so wird die von A bis R verlorene Geschwindigkeit null sein.

Zusatz.

36. Es folgt so, dass die Geschwindigkeit eines sich auf einer Curve bewegenden Körpers sich in jedem Punkte der Curve, bei sonst völlig gleichen Verhältnissen, genau so ändert,

als bewegte er sich auf der Tangente der Curve in diesem Punkte.

Bemerkung.

37. Man beweist diesen Satz gewöhnlich, indem man die Curve als ein Polygon $ABCDR$ mit unendlich vielen Seiten ansieht, dessen Aussenwinkel CBF unendlich spitz sind; da die sinusversus dieser Winkel von der zweiten Ordnung unendlich klein sind, so schliesst man, dass ein Körper in jedem Augenblicke nur einen von zweiter Ordnung unendlich kleinen Theil seiner Geschwindigkeit verliert, so dass der ganze Verlust von A bis R nur von erster Ordnung unendlich klein ist.

Der von mir gegebene Beweis erscheint mir, wenn er vielleicht auch etwas lang ist, klarer, um so mehr als die von A bis R verlorene Geschwindigkeit wirklich genau null und nicht unendlich klein ist; wenn man in aller Strenge die Eigenschaften der Curven beweisen will, geräth man nothwendig zu etwas langen Beweisen; die Infinitesimalmethode kürzt diese Beweise wesentlich ab, sie ist aber nicht so streng. Sie hat ferner das Missliche, dass die Anfänger, die nicht immer ihren Sinn erfassen, sich gewöhnen könnten, diese unendlich kleinen Grössen als etwas wirklich Existirendes aufzufassen; das ist ein Irrthum, gegen den man um so mehr auf der Hut sein muss, als grosse Männer demselben unterworfen waren und derselbe Gelegenheit zu einigen schlechten Büchern über die Sicherheit der Geometrie gegeben hat. Die Methode des Unendlichkleinen ist nichts anderes, als die Methode der ersten und letzten Verhältnisse, d. h. der Beziehungen von Grössen, die entstehen oder vergehen.*)[28] Wenn man den Sinn und die Principien dieser Methode erfasst hat, ist es von Nutzen, dieselbe zur Anwendung zu bringen, um zu eleganteren Lösungen zu gelangen.

---

*) Man vergleiche den Abschnitt I des I. Buches der *Newton*schen Principien und vor allem das neue Buch von *J. Mac Laurin*, betitelt: A treatise of fluxions. Die Veranlassung zu dieser Abhandlung von *J. Mac Laurin* war ein englisches Buch, betitelt The Analyst etc. gegen die Sicherheit der Mathematik, dessen Argumente zum grössten Theile gegen die Infinitesimalmethode gerichtet sind.

Vom Gleichgewicht.

38. Wenn die Hindernisse, denen der Körper in seiner Bewegung begegnet, gerade nur den nothwendigen Widerstand bieten, um den Körper an seiner Bewegung zu hindern, dann sagt man, dass zwischen dem Körper und diesen Hindernissen Gleichgewicht besteht.

Lehrsatz.

39. Wenn zwei Körper, deren Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten, wie ihre Massen, entgegengesetzte Richtungen haben, in solcher Weise, dass der eine sich nicht bewegen kann, ohne den anderen zu verrücken, so wird Gleichgewicht zwischen diesen beiden Körpern bestehen.

Erster Fall.

Sind die beiden Körper und ihre Geschwindigkeiten gleich, so ist klar, dass sie alle beide in Ruhe bleiben werden. Denn es ist kein Grund vorhanden, warum sich der eine eher als der andere in der ihm eigenen Richtung bewegen sollte; es ist übrigens nach § 29 klar, dass sie sich nicht in entgegengesetzter Richtung bewegen können. Q. e. d.

Zweiter Fall.

Vermehrt man, während der eine dieser Körper in demselben Zustande bleibt, die Masse des anderen auf das Doppelte und vermindert seine Geschwindigkeit auf die Hälfte, so wird das Gleichgewicht weiterbestehen. Denn man kann (nach § 23) die Geschwindigkeit des kleinen Körpers als aus zwei Geschwindigkeiten zusammengesetzt annehmen, von denen jede der Geschwindigkeit des grossen gleich ist; und die Masse des grossen als zusammengesetzt aus zwei gleichen Massen, welche beide mit derselben Geschwindigkeit begabt sind. Man kann somit an Stelle jeder der angenommenen Massen beiderseits zwei gleiche Massen annehmen, denen gleiche Geschwindigkeiten eigen sind.[29)] Nun würde bei dieser letzteren Voraussetzung Gleichgewicht bestehen (Fall I). Q. e. d.

Dritter Fall.

Verhalten sich die beiden Massen wie zwei beliebige rationale Zahlen und seien M, m diese beiden Massen, U, u ihre Geschwindigkeiten, μ die Masse, welche das gemeinsame Maass der beiden Massen M, m vorstellt, v die Geschwindigkeit, welche das gemeinsame Maass der beiden Geschwindigkeiten U, u ist, so hat man:

$$m = \mu p, \quad M = \mu P;$$
$$u = vP, \quad U = vp,$$

wo P und p zwei ganze Zahlen vorstellen. Dies vorausgeschickt, beweist man, wie im vorangehenden Fall, dass man jeder der beiden Massen mit der ihnen eigenen Geschwindigkeit eine Anzahl $P \times p$ Massen μ substituiren kann, die mit der Geschwindigkeit v begabt sind und sich folglich gegenseitig Gleichgewicht halten werden. Q. e. d.

Vierter Fall.

Nehmen wir schliesslich an, die Massen M, m seien incommensurabel, so dass:

$$m = \mu p$$

und

$$M = \mu P + z,$$

wo P und p zwei ganze Zahlen sind und $z < \mu$; ich behaupte, dass, wenn

$$m \times u = M \times U,$$

wiederum Gleichgewicht bestehen wird.

Denn nehmen wir an, es bestände kein Gleichgewicht, und man müsste hierzu zu der Masse M eine Grösse t hinzufügen oder dieselbe um t vermindern; dann würde die mit der Geschwindigkeit U begabte Masse $\mu P + z \pm t$ der Masse m oder μp, welche mit der Geschwindigkeit u begabt ist, das Gleichgewicht halten. Nun muss die Grösse t nothwendig kleiner sein als μ. Denn wäre sie grösser, so würde $\mu P + z + t > \mu P + \mu$ sein. Es müsste ferner diese letztere Masse $\mu P + \mu$, um der Masse m das Gleichgewicht zu halten, die Geschwindigkeit:

$$\frac{mu}{\mu P + \mu} < \frac{mu}{\mu P + z}, \text{ d. h. } < U$$

besitzen. Nun nimmt man aber an, dass die mit der Geschwindigkeit U begabte Masse $\mu P + z + t$ der mit der Geschwindigkeit u begabten Masse m das Gleichgewicht halte. Es ist somit unmöglich, dass die mit einer kleineren Geschwindigkeit als U begabte Masse $\mu P + \mu$ ebenfalls m das Gleichgewicht halte. Es muss daher nothwendig $t < \mu$ sein, und da μ beliebig klein genommen werden kann, so folgt $t = 0$. Q. e. d.

Wäre die Grösse t eine Grösse, die man abzuziehen hätte, so wäre, wenn man $t > \mu$ annähme:

$$\mu P + z - t < \mu P$$

und

$$U < \frac{mu}{\mu P}$$

etc. Q. e. d.

Das Product der Masse eines Körpers mit seiner Geschwindigkeit wird Bewegungsgrösse genannt. Es ergiebt sich so der Satz, dass die Körper, welche einander gleiche und gerade entgegengesetzte Bewegungsgrössen haben, sich das Gleichgewicht halten.[30])

Zusatz I.

40. Sind drei Körper A, B, C (Fig. 14) an einem beliebig langen Stabe MN oder an einem Faden befestigt, und erhalten sie in den Richtungen AM, BM, CN solche Geschwindigkeiten, dass die Summe der Bewegungsgrössen des Körpers A und des Körpers B der des Körpers C allein gleich sind, so wird Gleichgewicht bestehen. Denn man kann (nach § 23) die Geschwindigkeit des Körpers C als aus zwei beliebigen Geschwindigkeiten zusammengesetzt ansehen, deren Summe der ganzen Geschwindigkeit gleich ist; und folglich kann man sich in dem Körper C zwei Bewegungsgrössen denken, deren eine der von B, deren andere der von A entgegengesetzt gleich ist. Q. e. d.

Es wird somit allgemein, wie gross auch die Zahl der Körper sein mag, Gleichgewicht bestehen, wenn die Summe der Bewegungsgrössen der Körper, welche in dem einen Sinne ziehen, der Summe der Bewegungsgrössen der Körper, welche in entgegengesetztem Sinne ziehen, gleich ist.

Zusatz II.

41. Nehmen wir an, es seien drei Körper B, C, F (Fig. 15), welche an Fäden oder Stäben AB, AC, AF befestigt sind, im Gleichgewicht, und man suche die gegenseitige Beziehung der Bewegungsgrössen dieser drei Körper. Man bemerke zunächst, dass die Wirkung der Körper B und C auf den Punkt A dieselbe ist, als wenn diese Körper sich in A befänden[31]; man nehme das Verhältniss von AH und AP gleich dem Verhältniss der Geschwindigkeiten der Körper B und C an; man zerlege jede dieser beiden Geschwindigkeiten in zwei andere AG, AN, und AL, AQ, von denen die beiden AG, AQ entgegengesetzte Richtungen haben und die beiden anderen AN, AL in die Richtung der Verlängerung von AF fallen mögen.

Da nun Gleichgewicht besteht, so folgt:

$$B \times AG = C \times AQ;$$

es muss ferner die Bewegungsgrösse des Körpers F gleich $B \times AN + C \times AL$ sein. Wenn man nun durch einen beliebigen Punkt der verlängerten Geraden AF $EK \parallel AC$ und $ED \parallel AB$ zieht, so behaupte ich, dass sich die Strecken AE, AD, AK wie die Bewegungsgrössen der Körper F, C, D verhalten werden, d. h. dass:

$$AE : \begin{pmatrix} AK \\ AD \end{pmatrix} = C \times AL + B \times AN : \begin{pmatrix} B \times AH \\ C \times AP \end{pmatrix}.$$

Denn es ist:

$$AE : \begin{pmatrix} AK \\ AD \end{pmatrix} = AO + AM : \begin{pmatrix} AK \\ AD \end{pmatrix} = \frac{AL \times OD}{PL} + \frac{AN \times KM}{AG} : \begin{pmatrix} \dfrac{AH \times KM}{AG} \\ \dfrac{AP \times OD}{PL} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{AL}{PL} + \frac{AN}{AG} : \begin{pmatrix} \dfrac{AH}{AG} \\ \dfrac{AP}{PL} \end{pmatrix}, \text{ da } OD = KM,$$

und wenn man für AG und PL die ihnen proportionalen Grössen C und B setzt:

$$= AL \times C + AN \times B : \left(\frac{AH \times B}{AP \times C}\right). \quad \text{Q. e. d.}$$

Zusatz III.

42. Alles, was wir soeben über das Gleichgewicht bei den vorstehenden Voraussetzungen gesagt haben, wird noch gelten, wenn man an Stelle der endlichen den im Gleichgewicht befindlichen Körpern eingeprägten Geschwindigkeiten beschleunigende Kräfte an ihnen annimmt, welche diesen endlichen Geschwindigkeiten proportional sind, oder, gemäss den § 19 gegebenen Definitionen, bewegende Kräfte, welche sich wie ihre früheren Bewegungsquantitäten verhalten. Das Gleichgewicht wird fortbestehen, man braucht sich zum Beweise nur des Zusatzes II Kap. II bedienen, an Stelle des Zusatzes I desselben Kapitels.

Bemerkung.

Ueber den Gebrauch des Wortes »bewegende Kräfte«[32]) in der Statik.

43. Die bewegenden Kräfte oder die die Körper bewegenden Ursachen können auf einander nur durch die Vermittlung der Körper selbst wirken, welche sie zu bewegen suchen. Es folgt daraus, dass die gegenseitige Wirkung dieser Kräfte nichts anderes ist, als die Wirkung der Körper selbst, welche mit den von jenen Bewegungsursachen ertheilten Geschwindigkeiten begabt sind. Man darf daher unter der Wirkung der bewegenden Körper und unter dem Ausdruck bewegende Kräfte selbst, dessen man sich allgemein in der Statik bedient, nichts weiter als das Product eines Körpers[33]) mit seiner Geschwindigkeit oder mit seiner beschleunigenden Kraft[34]) verstehen. Aus dieser Definition und den vorangehenden Paragraphen folgt leicht, dass zwei gleiche und gerade entgegengesetzte bewegende Kräfte sich Gleichgewicht halten, und dass zwei in demselben Sinne wirkende bewegende Kräfte eine der Summe der beiden einzelnen gleiche Wirkung erzeugen, dass, falls drei bewegende Kräfte, die auf ein und denselben Punkt wirken, im Gleichgewicht sind und man über

den Richtungen zweier dieser bewegenden Kräfte ein Parallelogramm errichtet, die Diagonale dieses Parallelogramms in der verlängerten Richtung der dritten bewegenden Kraft liegen wird, und dass das Verhältniss der drei bewegenden Kräfte dasselbe sein wird, wie das Verhältniss der Diagonale mit den Seiten etc., und andere ähnliche Sätze mehr, welche man in der Statik vielleicht mit geringerer Schärfe beweist, als wir es hier thun, da man gewöhnlich unter dem Worte bewegende Kraft keinen so klaren Begriff versteht, wie der ist, den wir gegeben haben.

Zusatz IV.

44. Denken wir uns zwei gleiche bewegende Kräfte an den Endpunkten A, B (Fig. 16) eines geraden und unbiegsamen Stabes AB angebracht, die in der Richtung eben dieses Stabes wirken und sich folglich Gleichgewicht halten. Denkt man sich irgend einen anderen Stab ABC, der selbst in einem beliebigen Punkte C fest ist, so ist klar, dass das Gleichgewicht weiter bestehen wird. Wenn ferner die bewegenden Kräfte, anstatt in A und B angebracht zu bleiben, irgendwo in der Verlängerung von AB nach A und nach B hin wirkend gedacht werden, so ist klar, dass das Gleichgewicht wiederum weiter bestehen wird. Wenn man sich daher den Stab AB ganz fort denkt und den Stab ACB allein annimmt, so werden sich die in A und B angebrachten gleichen und entgegengesetzten bewegenden Kräfte das Gleichgewicht halten.

Zusatz V.

Welcher das Princip des Hebels enthält.

45. Seien AH und BE die Richtungen der beiden an dem Hebel ACB im Gleichgewicht befindlichen Kräfte[35]), und es mögen sich AH und BE wie diese Kräfte verhalten; ich zerlege die Kraft AH in zwei andere, deren verlängerte Richtungen AK und AG resp. durch B und C hindurchgehen, und in gleicher Weise die Kraft BE in zwei andere, deren verlängerte Richtungen BP und BF resp. durch A und C hindurchgehen. Fällt man die Senkrechten CM, CV, CL auf AH, BE, AB, so ist:

$$AK = \frac{AH \times CM}{CL}$$

und

$$BP = \frac{BE \times CV}{CL}.$$

Es ist aber in Folge des Gleichgewichtes:

$$AK = PB,$$

somit:

$$CM \times AH = BE \times CV,$$

es verhalten sich also die Kräfte AH, BE umgekehrt, wie die Abstände ihrer Richtungen von dem festen Punkte.

Zusatz VI.

46. Wäre der Punkt C nicht fest, so müsste man sich des obigen Zusatzes II bedienen, um zu wissen, welche Kraft man in C anbringen müsste, um den Kräften AG, BF zu widerstehen. Da man nun die Kräfte AG, BF aus den Kräften AH und Ak, BE und Bp zusammengesetzt denken kann und die einander gleichen Kräfte Ak, Bp sich gegenseitig zerstören, so folgt, dass die Kraft, welche den Kräften AG, BF Gleichgewicht zu halten vermag, mit derjenigen identisch ist, welche man finden würde, wenn man an Stelle der Kräfte AG, BF die Kräfte AH, BE in C mit den ihnen zukommenden Richtungen angebracht annähme.

Bemerkung

über den Fall, dass der Hebel ein gerader ist.

47. Der vorstehende Beweis des Hebelprincips setzt voraus, dass die Geraden AC und CB einen Winkel bilden, und scheint folglich auf den Fall nicht anwendbar, dass der Hebel ein gerader ist und die Richtungen der Kräfte parallel sind. Da indessen die Behauptung gilt, wie stumpf auch der Winkel ACB sein mag, so ist klar, dass sie auch gelten wird, wenn der Winkel ACB 180 Grad beträgt. Ich gebe übrigens hier noch einen strengeren Beweis des in Frage stehenden Falles.

Seien AP, AR (Fig. 17) die Hebelarme, PD, RS die Richtungen der beiden Kräfte, die ich im Gleichgewicht annehme, so ist zunächst klar, dass, falls die Hebelarme gleich sind, die Kräfte P, R gleich sein müssen. Wenn aber die Arme AP, AR ungleich sind, so ziehen wir nach Belieben die Gerade AS, denken, dass diese Gerade einen unbiegsamen Stab vorstelle, an dessen Endpunkt S zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte in der Richtung der Kraft R angebracht sind. Wir nehmen ferner an, dass die nach unten ziehende Kraft S allein der Kraft P an dem Hebel PAS das Gleichgewicht zu halten vermag. Es steht fest, dass die derselben entgegengesetzte Kraft S der Kraft R Gleichgewicht halten d. h. (nach § 44), dass sie derselben gleich sein muss. Es ist also:

$$R = S,$$

$$= \frac{P \times AP}{AR} \text{ (nach § 45).}$$

Q. e. d. Somit:

$$R : P = AP : AR.$$

Ich stehe in der Ableitung der Eigenschaften des geraden Hebels aus denen des Winkelhebels nicht allein. *Newton* hat in seinen Principien von derselben Methode Gebrauch gemacht, wenn er auch einen von dem unseren verschiedenen Weg eingeschlagen hat, und man darf wohl glauben, dass sich dieser grosse Geometer der Schwierigkeit wohl bewusst war, der man bei einer anderen Methode begegnen würde. Ich habe die Eigenschaften des Winkelhebels aus dem Gleichgewicht zwischen zwei gleichen und gerade entgegengesetzten Kräften hergeleitet; da aber diese beiden Kräfte im Falle des geraden Hebels verschwinden, so konnte der Beweis für diesen Fall nur indirect aus dem allgemeinen Fall abgeleitet werden.

Man kann die Eigenschaften des geraden Hebels, dessen Kräfte parallel sind, so ableiten, dass man alle diese Kräfte auf eine einzige reducirt, deren Richtung durch den festen Punkt geht. So hat es *Varignon* in seiner Mechanik gemacht. Diese Methode hat neben mehreren anderen Vortheilen den der Eleganz und Gleichförmigkeit; aber hat sie nicht denselben Nachtheil wie die anderen, dass sie indirect ist und nicht aus den wirklichen Principien des Gleichgewichtes hervorgeht? Man muss die verlängerten Richtungen der Kräfte als sich im Unendlichen schneidend annehmen, dieselben dann durch Zerlegung auf eine einzige zurückführen und beweisen, dass die Richtung dieser letzteren durch den festen Punkt geht. Muss man zu diesem Mittel greifen, um das Gleichgewicht zweier gleicher Kräfte zu beweisen, die in parallelen Richtungen an gleichen Hebelarmen angebracht sind? Mir scheint dieses Gleichgewicht eben so einfach und leicht fasslich zu sein, als das zweier in gerade entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte oder einer durch einen festen Punkt aufgehobenen Kraft, und wir haben kein directes Mittel, um das eine auf das andere zurückzuführen. Wenn nun die Methode von *Varignon* zum Beweise des Hebelgleichgewichtes in einem Falle indirect ist, muss sie es auch nothwendig bei der Anwendung auf den allgemeinen Fall sein.

Zusatz VII.

48. Es bleibe alles genau so, wie in der vorstehenden Bemerkung; nimmt man nur an Stelle des festen Punktes eine Kraft an, welche den Kräften P und R das Gleichgewicht hält, so ist klar, dass ihre Richtung der Richtung dieser Kräfte entgegengesetzt parallel und gleich ihrer Summe sein muss. Denn nimmt man an, dass sie den Kräften P, S Gleichgewicht hält, so wird sie $= P + S$ sein. Da nun

$$S = R,$$

so ist sie auch $= P + R$.

49. Ich werde mich nicht weiter über die Gesetze des Gleichgewichtes in diesem ersten Theile verbreiten. Ich werde noch im zweiten Theile dieses Werkes Gelegenheit haben, weiter darüber zu sprechen. Das allgemeine Gesetz des Gleichgewichtes ist, dass die Kräfte sich umgekehrt verhalten, wie die Geschwindigkeiten in den Richtungen dieser Kräfte.[36]) Von diesem allgemeinen Gesetze, dessen *Newton* im Anfang seiner Principien in wenig Worten Erwähnung thut, hängt der Beweis der Erhaltung der lebendigen Kräfte ab, wie man in dem zweiten Theile dieses Werkes sehen wird.

Was im Einzelnen die verschiedenen Maschinen anbetrifft, die man gewöhnlich in der Statik erwähnt, wie die Rolle, das Wellrad etc., so begnüge ich mich, da ich nichts neues darüber zu sagen habe, meine Leser auf die Bücher zu verweisen, die darüber handeln, und besonders auf das im vorigen Jahre erschienene Werk von *Trabaud*, betitelt: *Principes sur le Mouvement et l'Equilibre*; ein Werk, in dem dieser Stoff und mehrere andere exact und klar behandelt sind.

Zweiter Theil.

Allgemeines Princip zur Auffindung der Bewegung mehrerer Körper, welche auf einander in beliebiger Weise wirken, mit mehreren Anwendungen des Princips.

Erstes Kapitel.

Darlegung des Princips.

Die Körper wirken auf einander in nur drei uns bekannten verschiedenen Weisen: Entweder durch einen unmittelbaren Antrieb, wie bei dem gewöhnlichen Stoss, oder mittelst eines zwischen denselben eingeschalteten Körpers, an dem sie befestigt sind, oder schliesslich in Folge einer wechselseitigen Anziehung, wie die Sonne und die Planeten in dem *Newton*schen System. Da die Effecte dieser letzten Wirkungsart genugsam untersucht sind, werde ich mich hier begnügen, die Bewegung der Körper zu behandeln, welche auf einander in beliebiger Weise stossen, oder solcher, welche auf einander durch Fäden oder unbiegsame Stäbe Züge ausüben. Ich werde mich um so lieber an diesen Gegenstand halten, als uns bisher die grössten Geometer nur eine sehr kleine Zahl von Problemen dieser Art gegeben haben und ich, wie ich hoffe, durch die allgemeine Methode, welche ich darlegen werde, alle, die mit der Rechenkunst und den Principien der Mechanik vertraut sind, in den Stand setze, die schwierigsten Probleme dieser Art zu lösen.

Definition.

Ich nenne in der Folge Bewegung eines Körpers die Geschwindigkeit des Körpers bei Rücksichtnahme auf seine Richtung, und unter Bewegungsgrösse werde ich gewöhnlich das Product aus der Masse und der Geschwindigkeit verstehen.

Allgmeines Problem.

50. Es sei ein System von Körpern gegeben, die zu einander in irgend welchen Beziehungen stehen;

wir setzen voraus, man präge jedem der Körper eine bestimmte Bewegung ein, der er in Folge der Wirkung der anderen Körper nicht folgen kann, man sucht die Bewegung, die jeder Körper annehmen muss.

Auflösung.

Seien A, B, C etc. die das System zusammensetzenden Körper, und nehmen wir an, dass man denselben die Bewegungen a, b, c etc. eingeprägt habe, die sie in Folge ihrer Wechselwirkung in die Bewegungen a, b, c etc. zu verändern gezwungen sind. Es ist klar, dass man die dem Körper A eingeprägte Bewegung a zusammengesetzt denken kann aus der Bewegung a, welche er angenommen hat, und einer anderen Bewegung α; dass man in gleicher Weise die Bewegungen b, c etc. zusammengesetzt denken kann aus Bewegungen b, β; c, γ etc.; woraus folgt, dass die Bewegung der Körper A, B, C etc. dieselbe gewesen wäre, wenn man ihnen an Stelle der Antriebe a, b, c etc. die doppelten Antriebe a, α; b, β; c, γ etc. gleichzeitig ertheilt hätte. Nun haben nach Voraussetzung die Körper A, B, C etc. von selbst die Bewegungen a, b, c etc. angenommen. Die Bewegungen α, β, γ etc. müssen daher derart sein, dass sie nichts in den Bewegungen a, b, c etc. verändern, d. h. falls die Körper nur die Bewegungen α, β, γ etc. erhalten hätten, so müssten sich diese Bewegungen gegenseitig aufheben und das System in Ruhe bleiben.

Daraus ergiebt sich das folgende Princip zur Auffindung der Bewegung mehrerer Körper mit gegenseitiger Wechselwirkung. Man zerlege die jedem Körper eingeprägten Bewegungen a, b, c etc. in je zwei andere a, α; b, β; c, γ etc. derart, dass die Körper, wenn man denselben nur die Bewegungen a, b, c etc. eingeprägt hätte, diese Bewegungen, ohne sich gegenseitig zu hindern, hätten bewahren können; und dass, wenn man denselben nur die Bewegungen α, β, γ etc. eingeprägt hätte, das System in Ruhe geblieben wäre; dann ist klar, dass a, b, c etc. die Bewegungen sein werden, welche diese Körper in Folge ihrer Wechselwirkung annehmen werden. Das ist die Lösung der Aufgabe.

Zweites Kapitel.

Eigenschaften des gemeinsamen Schwerpunktes mehrerer Körper, abgeleitet aus dem vorstehenden Princip.

Definition I.

Ich werde in der Folge als Schwerpunkt zweier Körper einen Punkt in ihrer Verbindungsgeraden bezeichnen, dessen Entfernungen von den beiden Körpern ihren Massen umgekehrt proportional sind; und allgemein werde ich stets unter dem Worte Schwerpunkt mehrerer Körper das verstehen, was man sich gewöhnlich in der Mechanik bei diesem Ausdruck denkt, d. h. einen solchen Punkt, für welchen, wenn man durch denselben eine beliebige Ebene legt, die Summe der Producte aus den Massen auf der einen Seite der Ebene mit ihren Abständen von dieser Ebene gleich ist der Summe der Producte aus den Massen auf der anderen Seite der Ebene mit ihren Abständen von der Ebene.

Scholie.

51. Wenn die Gewichte der Körper ihren Massen proportional sind, so ist der eben definirte Schwerpunkt auch der Punkt, in dem das System unterstützt werden müsste, um im Gleichgewicht zu bleiben, falls alle Körper mit einander durch unbiegsame Hebel verbunden wären. Es ist dies nicht mehr der Fall, wenn die bewegenden Kräfte oder die an den Körpern wirkenden Gewichte ihren Massen nicht proportional sind. Man müsste dann vielmehr das, was wir hier Schwerpunkt nennen, als Massenmittelpunkt bezeichnen*). Wir werden uns indessen hier des Ausdruckes Schwerpunkt bedienen, um uns der allgemein üblichen Ausdrucksweise anzuschliessen.

Definition II.

Wenn mehrere Kräfte zusammen wirken, so werde ich unter der aus der Zusammenwirkung dieser Kräfte resultirenden Kraft oder kurz unter der Resultanten

---

*) Dieser Ausdruck Massenmittelpunkt ist von Herrn *Daniel Bernoulli* erdacht worden; Traité du flux et reflux Kap. I.

dieser Kräfte eine Kraft verstehen, gleich und entgegengesetzt derjenigen, welche im Stande wäre, ihnen Gleichgewicht zu halten.

Wenn so z. B. AM (Fig. 17) die Richtung der Kraft ist, welche den Kräften P, R an dem Hebel PAR das Gleichgewicht hält, so wird AN die Richtung der Resultanten der Kräfte P, R sein, und diese Resultante wird dieselbe Stärke haben, wie die Kraft in der Richtung AM.

Zusatz.

52. Wenn mehrere Kräfte sich irgendwie Gleichgewicht halten, so wird die Resultante null sein, wenn kein fester Punkt vorhanden ist, und wenn ein solcher vorhanden ist, so wird die Richtung der Resultanten durch den festen Punkt gehen.

Denn da im ersten Falle sich alle Kräfte an und für sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, so ist die einzige Kraft, die allen diesen Kräften Gleichgewicht zu halten vermag, null und folglich auch (nach der vorstehenden Definition) die Resultante.

Im zweiten Falle ist ersichtlich, dass der feste Punkt den Einfluss einer Kraft hat, welche der Wirkung aller anderen widersteht; wenn man daher die Festigkeit des Punktes zerstört und eine Kraft sucht, welche allen gegebenen Kräften das Gleichgewicht zu halten vermag, so wird die Richtung dieser Kraft nothwendig durch den festen Punkt gehen. Somit wird auch die Richtung der Resultanten durch ihn hindurch gehen.

Ich verstehe übrigens hier und werde in den folgenden Hülfssätzen unter dem Ausdruck »fester Punkt« nicht bloss einen mathematischen Punkt verstehen (wie den Stützpunkt eines Hebels, den Aufhängungspunkt eines Stabes oder Fadens); sondern allgemein jedes unüberwindliche Hinderniss, das durch seinen Widerstand die gemeinsame Wirkung von Kräften aufzuheben und Gleichgewicht unter denselben herzustellen vermag.

Hülfssatz I.

53. Wenn sich beliebig viele Körper gleichförmig in parallelen Richtungen bewegen, in derselben oder

in verschiedenen Ebenen, so ist die Richtung ihres gemeinsamen Schwerpunktes den Richtungen dieser Körper parallel, und seine Geschwindigkeit gleich der Summe der Bewegungsgrössen aller Körper, dividirt durch die Summe ihrer Massen. Diese Behauptung ist in mehreren Werken bewiesen.

Hülfssatz II.

54. Es mögen drei Körper A, a, α (Fig. 18) oder allgemein beliebig viele Körper in einer Ebene liegen, und es sei G ihr Schwerpunkt. GM sei die gerade Linie, welche von dem Schwerpunkt dieser Körper in der Zeit zurückgelegt wird, in der diese irgend welche Strecken AC, ac, $\alpha\gamma$ durchlaufen. Ich behaupte, wenn man die Geschwindigkeiten AC, ac, $\alpha\gamma$ in je zwei andere AB, AD; ab, ad; $\alpha\beta$, $\alpha\delta$ zerlegt, so dass die Geraden AB, ab, $\alpha\beta$ einander parallel sind, und in gleicher Weise die Geraden BC, bc, $\beta\gamma$, und wenn man die Linie GN sucht, welche der Schwerpunkt G durchlaufen würde, wenn die Körper A, a, α die Geschwindigkeiten und Richtungen AB, ab, $\alpha\beta$ hätten, und in gleicher Weise die Linie GO, welche dieser selbe Schwerpunkt durchlaufen würde, wenn die Körper A, a, α die Geschwindigkeiten und Richtungen AD, ad, $\alpha\delta$ hätten: dann wird die Diagonale des über den Strecken GN, GO errichteten Parallelogrammes eben die Linie GM sein, welche der Schwerpunkt durchläuft, wenn die Körper A, a, α die Geschwindigkeiten und Richtungen AC, ac, $\alpha\gamma$ haben.

Denn denken wir uns den Körpern A, a, α, wenn dieselben in B, b, β angelangt sind und sich folglich ihr Schwerpunkt G (nach Voraussetzung) in N befindet, Geschwindigkeiten ertheilt, welche den Geschwindigkeiten in den Richtungen AD, ad, $\alpha\delta$ gleich und parallel sind, so ist klar, dass sie nach den Punkten C, c, γ der Geraden AC, ac, $\alpha\gamma$ gelangen werden. Da nun nach Voraussetzung der Schwerpunkt G sich in M befindet, wenn die Körper A, a, α in C, c, γ sind, so wird somit, während die Körper A, a, α die Strecken BC, bc, $\beta\gamma$ durchlaufen, der Schwerpunkt die Strecke NM

zurücklegen. Diese Strecke NM ist (nach Hülfssatz I) mit den Strecken BC, bc, $\beta\gamma$ parallel und

$$= \frac{A.BC + a.bc + \alpha.\beta\gamma}{A + a + \alpha}.$$

Die Gerade GO aber, welche der Schwerpunkt G zurücklegen würde, während die Körper A, a, α die Geraden AD, ad, $\alpha\delta$ gleich und parallel BC, bc, $\beta\gamma$ beschrieben, würde denselben Geraden AD, ad, $\alpha\delta$ parallel sein und

$$= \frac{A.AD + a.ad + \alpha.\alpha\delta}{A + a + \alpha} = \frac{A.BC + a.bc + \alpha.\beta\gamma}{A + a + \alpha}$$
$$= NM.$$

Es ist daher die Gerade GO gleich und parallel NM: Somit ist MG die Diagonale des Parallelogrammes über den Seiten NG, GO. Q. e. d.

Scholie.

55. Es ist ersichtlich, dass dieser Beweis auf eine beliebige Zahl von Körpern auszudehnen ist, und dass somit die Behauptung allgemein gilt.

Hülfssatz III.

56. Ist GM (Fig. 19 und 20) die von dem Schwerpunkte G der Körper A, a, α zurückgelegte Strecke, während diese Körper gleichförmig beliebige Geraden AC, ac, $\alpha\gamma$ beschreiben, und bringt man diese Körper an andere Orte F, f, φ derselben Ebene so, dass dieselben gegen einander eine ganz beliebige Lage haben, sei χ ihr Schwerpunkt, und denkt man sich, dass sie die Geraden FH, fh, $\varphi\eta$ beschreiben, respective gleich und parallel AC, ac, $\alpha\gamma$, so behaupte ich, dass die Gerade $\chi\mu$, welche von dem Schwerpunkt beschrieben wird, gleich und parallel GM ist.

Denn seien FL, fl, $\varphi\lambda$ respective gleich und parallel AB, ab, $\alpha\beta$; FP, fp, $\varphi\pi$ respective gleich und parallel AD, ad, $\alpha\delta$, und $\chi\nu$ der Weg des Schwerpunktes χ, wenn die Körper die Geraden FL, fl, $\varphi\lambda$ beschreiben; $\chi\omega$ der

Weg des Schwerpunktes, wenn sie FP, fp, $\varphi\pi$ beschreiben. Dann ist klar, dass $\chi\nu$ gleich und parallel GN, $\chi\omega$ gleich und parallel GO ist. Somit wird auch $\chi\mu$ gleich und parallel GM sein. Es sind dies aber (nach dem vorangehenden Hülfssatz) die beiden Geraden, welche die Schwerpunkte G, χ beschreiben, wenn die Körper A, a, α und F, f, φ die Geraden AC, ac, $\alpha\gamma$ und FH, fh, $\varphi\eta$ durchlaufen. Q. e. d.

Hülfssatz IV.

57. Man mache dieselben Annahmen, wie oben im Hülfssatz II, mit dem Unterschiede, dass AB, ab, $\alpha\beta$ und AD, ad, $\alpha\delta$ nicht parallel sein sollen. Ist dann GM der Weg des Schwerpunktes, wenn die Körper A, a, α gleichförmig die Geraden AC, ac, $\alpha\gamma$ beschreiben; GN der Weg desselben Schwerpunktes, wenn diese Körper die Geraden AB, ab, $\alpha\beta$ beschreiben; und GO der Weg des Schwerpunktes, wenn die Körper A, a, α die Geraden AD, ad, $\alpha\delta$ beschreiben; so behaupte ich, dass GM die Diagonale des Parallelogrammes über den Seiten GM, GO ist.

Man beweist nämlich, wie in Hülfssatz II, dass NM der Weg des Schwerpunktes ist, wenn die Körper A, a, α die Geraden BC, bc, $\beta\gamma$ beschreiben. Da aber AD, ad, $\alpha\delta$ respective gleich und parallel BC, bc, $\beta\gamma$ sind, so folgt (nach Hülfssatz III), dass GO gleich und parallel NM ist. Q. e. d.

Zusatz I.

58. Würde man die Bewegungen AC, ac, $\alpha\gamma$ in je drei oder beliebig viele andere beliebige Bewegungen zerlegen, so wäre stets der Weg GM des Schwerpunktes die letzte Diagonale der Parallelogramme über den Geraden, welche der Schwerpunkt durchlaufen würde, wenn die Körper A, a, α, einzeln nach einander, die componirenden Bewegungen ausgeführt hätten. Das folgt deutlich aus dem vorstehenden Hülfssatz.

Zusatz II.

59. Dieselbe Behauptung würde weiter gelten, wenn die Bewegungscomponenten nicht für alle Körper von gleicher

Anzahl wären; wenn z. B. die Bewegung des einen in drei, die Bewegung eines anderen in zwei zerlegt würde etc. Denn der vorstehende Hülfssatz würde nichts an seiner Richtigkeit einbüssen, wenn man z. B. $AD = 0$ voraussetzte, d. h. wenn man die Bewegung AC gar nicht zerlegte.

Hülfssatz V.

60. Wenn beliebig viele Körper A, B, C etc. in irgend welcher Weise mit einander verbunden sind, ohne dass indessen das System einen festen Punkt habe; und wenn man denselben solche Bewegungen M, N, P etc. einprägt, dass sie sich in Folge dieser Bewegungen im Gleichgewicht befinden, so behaupte ich, dass der Schwerpunkt der Körper A, B, C etc., wenn dieselben den Bewegungen M, N, P etc. fre folgen könnten, in Ruhe bleiben würde.

Denn zerlegt man die Bewegungen M, N, P etc. in je zwei andere m, μ; n, ν; p, π etc. parallel zwei gegebenen Geraden von beliebiger Lage, die ich mit K und Q bezeichne, so muss man, um den Weg des Schwerpunktes in Folge der Bewegungen M, N, P etc. zu finden, den Weg dieses Schwerpunktes in Folge der Bewegungen m, n, p etc. suchen, der (nach Hülfssatz I) $\parallel K$ und

$$= \frac{A.m + B.n + C.p + ..}{A + B + C + ..};$$

und den Weg desselben Schwerpunktes in Folge der Bewegungen μ, ν, π etc., der $\parallel Q$ und

$$= \frac{A.\mu + B.\nu + C.\pi + ..}{A + B + C + ..}.$$

Die Diagonale des Parallelogrammes über diesen beiden Geraden ist (nach Hülfssatz II) der Weg des Schwerpunktes. Man muss daher beweisen, dass jede dieser beiden Strecken null ist, um zu zeigen, dass der Weg des Schwerpunktes $= 0$ ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, man muss beweisen, dass:

$$A.m + B.n + C.p + ... = 0,$$

und

$$A.\mu + B.\nu + C.\pi + ... = 0.$$

Da nun (nach Voraussetzung) die mit den Geschwindigkeiten M, N, P etc. begabten Körper A, B, C etc. im Gleichgewicht sind und das System keinen festen Punkt hat, so muss die Resultante der bewegenden Kräfte[37]) $A.M$, $B.N$, $C.P$ etc. $= 0$ sein. Da sich aber die Kräfte $A.M$, $B.N$, $C.P$ etc. in die Kräfte $A.m$, $A.\mu$; $B.n$, $B.\nu$; $C.p$, $C.\pi$ etc. zerlegen lassen, so ist die Resultante dieser Kräfte diejenige, welche sich aus der Resultanten der Kräfte $A.m$, $B.n$, $C.p$ etc. und der Resultanten der Kräfte $A.\mu$, $B.\nu$, $C.\pi$ etc. zusammensetzt. Diese letzten beiden Resultanten sind aber zwei verschiedenen Geraden K und Q parallel. Damit daher die sich aus denselben zusammensetzende Kraft null sei, muss jede für sich $= 0$ sein. Nun ist die erstere $A.m + B.n + C.p + ..$, die zweite $A.\mu + B.\nu + C.\pi + ..$, somit muss jede dieser beiden Grössen $= 0$ sein. Q. e. d.

Hülfssatz VI.

61. Es mögen alle Voraussetzungen dieselben bleiben, wie im vorangehenden Hülfssatz, nur seien die Bewegungen M, N, P etc. beliebig, so dass sich also die mit diesen Geschwindigkeiten begabten Körper das Gleichgewicht halten mögen oder nicht, und das System möge auch nach Belieben einen festen Punkt haben. Ich behaupte, wenn man annimmt, dass die Körper A, B, C etc. bei Abstraction von ihrer Wechselwirkung den Bewegungen M, N, P etc. folgen würden, so wird der Weg des Schwerpunktes der Resultanten der Kräfte $A.M$, $B.N$, $C.P$ etc. parallel sein.

Man hat nämlich, um die Richtung dieser Kraft zu erhalten (bei denselben Voraussetzungen wie in dem Beweise des vorangehenden Hülfssatzes) die Diagonale eines Parallelogrammes zu ziehen, dessen Seiten mit K und Q parallel sind und sich zu einander wie

$$A.m + B.n + C.p + .. \text{ zu } A.\mu + B.\nu + C.\pi + ..$$

verhalten. Um aber den Weg des Schwerpunktes in Folge der Bewegungen M, N, P etc. zu erhalten, muss man (nach Hülfssatz II) die Diagonale eines Parallelogrammes ziehen, dessen Seiten mit K und Q parallel sind und sich zu einander wie

$$\frac{A.m+B.n+C.p+\,.\,.}{A+B+C+\,.\,.} \text{ zu } \frac{A.\mu+B.\nu+C.\pi+\,.\,.}{A+B+C+\,.\,.}$$

verhalten; die Seiten dieser beiden Parallelogramme werden somit paarweise parallel sein und zu einander in demselben Verhältnisse stehen. Es werden daher die Diagonalen parallel sein.

Zusatz.

62. Hätten die Körper A, B, C etc. die Bewegungen $(-M)$, $(-N)$, $(-P)$ etc., so würde der Weg des Schwerpunktes der Richtung der Resultanten entgegengesetzt parallel sein.

Scholie.

63. Alle oben bewiesenen Hülfssätze werden noch in Gültigkeit bleiben, wenn man die Körper in verschiedenen Ebenen annimmt. Denn 1. gilt der Hülfssatz I in diesem Falle genau so, wie in den anderen Fällen, 2. setzt der Beweis von Hülfssatz II nicht streng voraus, dass die Körper A, a, α in derselben Ebene liegen; er setzt nur voraus, dass sich die Bewegungen AC, ac, $\alpha\gamma$ in je zwei andere, parallel zwei gegebenen Geraden, zerlegen lassen. Daraus folgt, dass der Hülfssatz III in Gültigkeit bleiben wird, wenn auch die Körper in verschiedenen Ebenen liegen, wenigstens unter der Voraussetzung, dass die jedem Körper eingeprägten Bewegungen sich in je zwei andere, parallel zwei ihrer Lage nach gegebenen Geraden, zerlegen lassen. Wenn nun die Körper in verschiedenen Ebenen liegen, so kann man die denselben eingeprägten Bewegungen in je zwei andere zerlegen, von denen die eine einer ihrer Lage nach gegebenen Geraden parallel ist und die andere sich nunmehr wieder in zwei andere, parallel zwei ihrer Lage nach gegebenen Geraden, zerlegen lässt. Daraus folgt, dass der Hülfssatz III in allen Fällen gelten wird und dass gleichzeitig die Hülfssätze IV, V und VI, die sich nur auf die drei ersten stützen und in keiner Weise verlangen, dass die Körper in ein und derselben Ebene liegen, in allen Fällen gültig sind.

Wir haben übrigens in den vorstehenden Hülfssätzen die von *Newton* bewiesene Behauptung vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt mehrerer Körper, die sich gleichförmig in gerader Linie bewegen, ohne auf einander zu wirken, sich ebenfalls gleichförmig in gerader Linie bewegt. Es ist aber leicht zu sehen, dass man durch die Methode der Zerlegung der Bewegungen in andere, parallel gegebenen Geraden, auch sehr leicht diese Behauptung beweisen könnte, und dass so unsere Methode den Vortheil hat, dass man sich derselben zum Beweise der gleichförmigen und geradlinigen Bewegung des Schwerpunktes mehrerer Körper bedienen kann, mögen die Körper nun auf einander wirken oder nicht.

Lehrsatz I.

64. Der Bewegungs- oder Ruhezustand des Schwerpunktes mehrerer Körper ändert sich in keiner Weise durch die gegenseitige Wechselwirkung dieser Körper, wenn nur das System völlig frei ist, d. h. wenn seine Bewegung nicht durch einen festen Punkt beschränkt ist.

Denn da sich (nach § 50) die Bewegungen a, b, c etc. aus den Bewegungen a, α; b, β; c, γ etc. zusammensetzen, können die Bewegungen a, b, c etc. zusammengesetzt gedacht werden aus den Bewegungen a, $(-\alpha)$; b, $(-\beta)$; c, $(-\gamma)$ etc. Daraus folgt, dass der Weg des Schwerpunktes der mit den Bewegungen a, b, c etc. begabten Körper (nach Hülfssatz IV) derselbe ist, als wenn man dieselben zuerst mit den Bewegungen a, b, c etc. und dann mit den Bewegungen $(-\alpha)$, $(-\beta)$, $(-\gamma)$ etc. begabt annähme. Da nun nach Voraussetzung das System keinen festen Punkt hat und in Ruhe bleiben würde, wenn die Körper nur die Bewegungen α, β, γ etc. erhalten hätten, so folgt (nach Hülfssatz V und Zusatz zu Hülfssatz VI), dass der Weg des Schwerpunktes in Folge der Bewegungen $(-\alpha)$, $(-\beta)$, $(-\gamma)$ etc. null ist. Es ist somit der Weg des Schwerpunktes, wenn die Körper die Bewegungen a, b, c etc. haben, derselbe, als folgten sie den Bewegungen α, β, γ etc., welche man ihnen eingeprägt hat.

Bemerkung.

65. Hat das System einen festen Punkt, so können sich die mit den Bewegungen α, β, γ etc. begabten Körper das Gleichgewicht halten, ohne dass die Resultante dieser Bewegungen null zu sein braucht. Es genügt, dass die Richtung der Resultanten dieser Bewegungen durch den festen Punkt

geht; denn in diesem Falle wird der Weg des Schwerpunktes in Folge der Bewegungen $(-\alpha)$, $(-\beta)$, $(-\gamma)$ etc. (nach Zusatz zu Hülfssatz VI) der Richtung dieser Kraft entgegengesetzt parallel und folglich nicht $= 0$ sein. Es wird also dann die Wechselwirkung der Körper den Bewegungszustand des Schwerpunktes beeinflussen.

Lehrsatz II.

66. Wirkt bei denselben Voraussetzungen, wie in Lehrsatz I, auf die Körper die Schwere oder eine für jeden Körper constante Kraft, die, wenn man will, für die einzelnen Körper verschieden sein kann, in parallelen Richtungen, so wird der Schwerpunkt respective der Massenmittelpunkt dieselbe Curve beschreiben, als wenn die Körper frei wären.

Um dies zu beweisen, denken wir uns nur zwei Körper A, B (Fig. 21) und nehmen an, $A\alpha$, $B\beta$ seien die kleinen Wege, welche sie naturgemäss in Folge der ihnen ursprünglich eingeprägten Geschwindigkeiten Aa, Bb und der beschleunigenden Kraft in den Richtungen $a\alpha$, $b\beta$ zurücklegen würden; es sei C der Massenmittelpunkt der beiden Körper, d. h. ein Punkt, dessen Entfernungen von den Punkten A und B sich umgekehrt wie die Massen A und B verhalten (nicht wie die Gewichte A und B, welche hier den Massen nicht proportional zu sein brauchen[38]), und es mögen die Körper A und B, anstatt die Strecken $A\alpha$, $B\beta$ zu durchlaufen, die Wege Aa, Bb zurücklegen; dann ist klar (nach § 64), dass der Weg $C\gamma$ des Schwerpunktes im ersten Augenblick derselbe sein wird, wie wenn die Körper A und B die Linien $A\alpha$, $B\beta$ beschrieben. Im folgenden Augenblicke suchen die Körper a$\varepsilon = A$a und b$\delta = B$b zu beschreiben, und der Schwerpunkt C sucht die Gerade $\gamma K = C\gamma$ zu durchlaufen, dieselbe Gerade, die er auch durchlaufen hätte, wenn sich die Körper weiter in den Richtungen $A\alpha$, $B\beta$ bewegt hätten; da aber in Folge der beschleunigenden Kraft die Körper A und B in diesem letzteren Falle die parallelen Geraden ef, dg und im anderen Falle die Geraden $\varepsilon\varphi$, $\delta\chi$ beschreiben würden, die ihnen respective gleich und parallel sind, so folgt, dass der Weg γk des Massenmittelpunktes derselbe sein wird, mögen die Körper αf, βg oder die Linien aφ, bχ beschreiben. Welche anderen Linien aber die Körper A und B in Folge ihrer Wechselwirkung beschreiben mögen, der Weg des Centrums C wird stets derselbe bleiben (nach Lehrsatz I). Q. e. d. Man sieht leicht, dass der Beweis auf die Fälle auszudehnen ist, dass eine grössere Zahl von Körpern vorhanden ist.

Bemerkung.

67. Dieser Beweis würde nicht gelten, wenn die beschleunigende Kraft nicht für jeden Körper constant wäre und nicht in parallelen Richtungen wirkte. Denn man könnte dann nicht ef gleich und parallel $\varepsilon\varphi$, dg gleich und parallel $\delta\chi$ annehmen; und folglich wäre der Weg γk des Centrums nicht in beiden Fällen derselbe.

Zusatz.

68. Die beiden vorangehenden Lehrsätze liefern sehr einfache Methoden, um die Bewegung fester Körper zu finden. Wir werden im Folgenden Gelegenheit haben, einige Anwendungen derselben vorzuführen.

Lehrsatz III.

69. Sind beliebig viele Körper in irgend welcher Weise mit einander verbunden und einer oder mehrere dieser Körper gezwungen, sich in einer Ebene oder in parallelen Ebenen zu bewegen, so behaupte ich, dass die diesen Ebenen parallele Bewegung des Schwerpunktes gleichförmig sein wird.

[Wenn so z. B., um die Anschauung zu fixiren, ein Körper P (Fig. 29), der sich in der geraden Rinne PS, aus der er nicht heraustreten kann, zu bewegen gezwungen ist, einen anderen Körper M mittelst eines Stabes PM nach sich zieht, so wird der Schwerpunkt g dieser beiden Körper eine solche Curve beschreiben, dass die Theile der Geraden KS, welche den von dem Centrum g in gleichen Zeiten zurückgelegten Bögen entsprechen, einander gleich sind.]

Denn wenn man allgemein alle von dem Körper in jedem Augenblicke verlorenen Bewegungen auf eine einzige Kraft reducirt, so ist klar, dass in Folge des Gleichgewichtes dieser Bewegungen die Richtung der Resultanten nothwendig zu den Ebenen lothrecht ist. Der Schwerpunkt wird somit fortwährend von der geraden Bahn durch eine Kraft abgelenkt werden, deren Richtung (nach Hülfssatz VI und § 65) zu diesen Ebenen lothrecht ist, und deren Wirkung somit stets einer gegebenen Geraden parallel ist. Q. e. d.

Zusatz.

70. Dieselbe Behauptung würde weiter gelten, wenn die Körper mit beliebigen constanten oder nicht constanten beschleunigenden Kräften begabt wären, deren Richtungen indessen zu jenen Ebenen lothrecht sind. Daraus folgt, dass, falls die Körper sich nur unter der alleinigen Wirkung dieser Kräfte ohne irgend welchen Anfangsimpuls bewegten, der Massenmittelpunkt eine zu diesen Ebenen lothrechte Gerade beschreiben würde. Denn in diesem letzteren Falle würde der Massenmittelpunkt, wenn die Körper frei wären, eine zu diesen Ebenen lothrechte Gerade beschreiben; nun wird seine Bewegung aber nur durch eine Kraft verändert, deren Richtung mit diesen Ebenen parallel ist. Der Massenmittelpunkt wird somit niemals aus dem Lothe heraustreten.

Scholie I.

71. Die in § 64 und 66 bewiesenen Behauptungen gelten in gleicher Weise, wenn die Körper auf einander wechselseitige Anziehungskräfte ausüben. Denn da die Wege, welche die Körper gegen einander in Folge dieser Anziehungen zurücklegen, ihren Massen umgekehrt proportional sind, so wird die Summe der Bewegungen gleichfalls null sein; der Weg des Schwerpunktes wird somit durch die Wechselwirkung dieser Körper nicht geändert. Man kann hier übrigens den für Lehrsatz I gegebenen Beweis in Anwendung bringen, indem man alle diese Körper mit einander durch unbiegsame Stäbe verbunden denkt. Denn es ist klar, dass sie dann, bei alleiniger Rücksichtnahme auf ihre gegenseitige Anziehung, in Ruhe bleiben werden. Q. e. d.

Scholie II.

72. Es scheint mir, dass man mit Hülfe der bisher dargelegten Principien das berühmte Gesetz der Mechanik beweisen

kann, dass in einem im Gleichgewicht befindlichen System schwerer Körper der Schwerpunkt möglichst tief liegt. Denn nehmen wir das System in einem dem Gleichgewichtszustande unendlich nahen Zustande B an, so ist sicher, dass in jedem Körper eine kleine Bewegung vorhanden sein wird, die dem Gleichgewichtszustande zustrebt, und die Wirkung der Schwere ist aus dieser kleinen Bewegung und einer anderen zusammengesetzt zu denken, die zerstört wird. Da nun der Zustand B dem Gleichgewichtszustande unendlich nahe ist, so sind die zerstörten Bewegungen unendlich wenig von der Gesammtwirkung der Schwere verschieden, die im Gleichgewichtszustande zerstört wird, folglich sind die wirklichen Bewegungen jedes Körpers unendlich klein gegen diejenigen, welche sie gehabt hätten, wenn sie ihrer Schwere hätten frei folgen können, und die Bewegung des Schwerpunktes ist unendlich klein gegen seine Bewegung für den Fall, dass die Körper sich frei bewegten. Das würde nicht so sein, wenn von den beiden hier betrachteten unendlich nahen Zuständen der eine nicht der Gleichgewichtszustand wäre. Daraus folgt, dass man annehmen kann, der Schwerpunkt habe seinen Ort von dem Zustand B bis zum Gleichgewichtszustand nicht verändert, d. h. es ist so, als ob zwischen diesen beiden Zuständen die Senkung des Schwerpunktes $= 0$ wäre. Es ist somit im Gleichgewichtszustande die Senkung des Schwerpunktes ein Maximum.[39])

Drittes Kapitel.

Probleme, an denen man den Nutzen des vorstehenden Principes zeigt.

I.

Ueber Körper, die durch Vermittelung von Fäden oder Stäben auf einander wirken.

Problem I.

73. Man sucht die Geschwindigkeit eines in C festen Stabes CR (Fig. 22), welcher mit beliebig vielen Körpern A, B, R belastet ist, unter der Voraussetzung, dass die Körper, wenn der Stab sie nicht

hinderte, in gleichen Zeiten die unendlich kleinen Strecken AO, BQ, RT senkrecht zu dem Stabe beschreiben würden.

Die ganze Schwierigkeit reducirt sich darauf, die Strecke RS zu finden, die von einem der Körper R in derselben Zeit zurückgelegt wird, in der er RT durchlaufen hätte[40]; denn dann werden die Geschwindigkeiten BG, AM aller anderen Körper bekannt sein. Denken wir uns nun die eingeprägten Geschwindigkeiten RT, BQ, AO zusammengesetzt aus den Geschwindigkeiten RS, ST; BG, $(-GQ)$; AM, $(-MO)$, so würde nach unserem Princip der Hebel CAR in Ruhe bleiben, wenn die Körper nur die Bewegungen ST, $(-GQ)$, $(-MO)$ erhielten. Es ist somit:

$$A.MO.AC + B.GQ.BC = R.ST.CR,$$

d. h. wenn man AO mit a, BQ mit b, RT mit c, CA mit r, CB mit r, CR mit ϱ und RS mit x bezeichnet:

$$R(c-x).\varrho = A.r\left(\frac{xr}{\varrho} - a\right) + B.\mathrm{r}\left(\frac{x\mathrm{r}}{\varrho} - b\right);$$

folglich:

$$x = \frac{A.a.r.\varrho + B.b.\mathrm{r}.\varrho + R.c.\varrho.\varrho}{A.r^2 + B.\mathrm{r}^2 + R.\varrho^2}. \text{ [41]}$$

Zusatz I.

74. Seien F, f, φ die bewegenden Kräfte der Körper A, B, R, so wird man für die beschleunigende Kraft[42] des Körpers R finden:

$$\frac{Fr + f\mathrm{r} + \varphi\varrho}{Ar^2 + B\mathrm{r}^2 + R\varrho^2} \times \varrho,$$

indem man für a, b, c ihre Werthe $\frac{F}{A}$, $\frac{f}{B}$, $\frac{\varphi}{R}$ setzt. Nimmt man daher ds als das Element des von dem Radius CR beschriebenen Bogens und u als die Geschwindigkeit des Körpers R an, so wird allgemein:

$$\frac{Fr + f\mathrm{r} + \varphi\varrho}{Ar^2 + B\mathrm{r}^2 + R\varrho^2} \cdot \varrho ds = udu$$

sein, welche auch die Kräfte F, f, φ sein mögen. Es ist leicht, auf diese Weise das Problem der Schwingungsmittelpunkte bei einer beliebigen Voraussetzung zu lösen.

Zusatz II.

75. Daraus, dass

$$A.OM.AC + B.QG.CB = R.ST.CR,$$

folgt:

$$A.(AM - AO).CA + B.(BG - BQ).CB = R.(RT - RS).CR,$$

somit:

$$A.AM.CA + B.BG.CB + R.RS.CR$$
$$= A.AO.CA + B.BQ.CB + R.RT.CR,$$

d. h. die Kräfte $A.AM$, $B.BG$, $R.RS$ müssen den Kräften $A.AO$, $B.BQ$, $R.RT$ äquivalent sein. Man könnte daher das vorstehende Problem auch so lösen, dass man die Gerade RS in solcher Weise zu finden sucht, dass:

$$R.RS.CR + B.\frac{RS.CB^2}{CR} + A.\frac{RS.CA^2}{CR}$$

gleich

$$R.RT.CR + B.BQ.CB + A.AO.CA$$

wird.

Diese letztere Lösung kommt im Grunde auf dasselbe hinaus wie die Lösung von *Bernoulli* für die Schwingungsmittelpunkte, welche darin besteht, in irgend einem Punkte P des Stabes einen Körper anzunehmen, dessen Masse gleich

$$\frac{R.CR^2}{CP^2} + \frac{B.CB^2}{CP^2} + \frac{A.CA^2}{CP^2}$$

ist, und welcher mit einer beschleunigenden Kraft begabt ist, in Folge deren das Moment dieses Gewichtes den Momenten der mit ihrer natürlichen Schwere begabten Gewichte A, B, R gleich wird, und mit seiner Geschwindigkeit, nämlich der des Punktes P des Stabes. Daraus folgt, es ist diese beschleunigende Kraft

$$\frac{RS.CP}{CR},$$

und es wird so:

$$RS.\frac{CP}{CR}\left(\frac{R.CR^2}{CP^2}+\frac{B.CB^2}{CP^2}+\frac{A.CA^2}{CP^2}\right)\times CP$$
$$= A.AO.CA + B.BQ.CB + R.RT.CR.$$

Es ist ersichtlich, dass die linke Seite dieser Gleichung nichts anderes ist, als die Summe der Momente

$$A.AM.CA + B.BG.CB + R.RS.CR.$$

Man sieht so, dass man, ohne zu dem Punkte P seine Zuflucht zu nehmen, und ohne irgend welche neuen Massen zu substituiren, durch das Grundprincip der Lösung von *Bernoulli* das Problem der Schwingungsmittelpunkte noch einfacher lösen kann, als er es selbst gethan hat.

Ich hatte erst auf diese letztere Weise jenes Problem zu lösen gedacht, und so hat es auch *Euler* in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit *Bd. 7 der Petersburger Akademie* gemacht, wo er das letztgenannte Princip anwendet, dass die Kräfte $R.RS$, $B.BG$, $A.AM$ den Kräften $R.RT$, $B.BQ$, $A.AO$ äquivalent sein müssen. *Euler* hat aber dieses Princip nicht bewiesen, das vielleicht, in dieser Weise dargestellt, nicht so leicht zu beweisen ist. Der Verfasser hat es übrigens in derselben Arbeit zur Lösung einiger Probleme angewandt, welche sich auf Schwingungen biegsamer oder unbiegsamer Körper beziehen. Wir werden im Folgenden Gelegenheit haben, über eines dieser Probleme einige Bemerkungen zu machen.

Hülfssatz VII.

76. Sind zwei unendlich kleine Strecken Pp, Mm (Fig. 23) durch die Geraden PM, pm verbunden, und macht man

$$p\pi = Pp$$

und

$$m\mu = Mm,$$

so behaupte ich, 1) dass die Differenz $PM - \pi\mu$ doppelt so gross ist, wie die Differenz $(PM - pm)$, vermindert um das Quadrat des Winkels zwischen PM und pm, multiplicirt mit PM.

2) Dass der Winkel von $\pi\mu$ mit pm gleich ist dem Winkel von PM mit pm, multiplicirt mit

$$1 + \frac{2(PM - pm)}{PM}.$$

Denn zieht man die Geraden Ma, πe, μf parallel mit pm und Mb, aPd, $C\pi f$, μeg senkrecht zu pm, so ist.

$$Mb = \mu g;$$

$$Pd = \pi C.$$

Somit:

$$\mu e \text{ oder } \pi f = Pa.$$

Es sind daher die Winkel aMP, $e\pi\mu$ bis auf kleine Glieder zweiter Ordnung einander gleich. Nun ist:

$$PM - pm = PM - Ma + Ma - pm,$$

$$= \frac{Pa^2}{2PM} + mb - dp;$$

und ebenso findet man:

$$pm - \mu\pi = -\frac{\pi f^2}{2\pi\mu} + mg - cp.$$

Vernachlässigt man daher kleine Grössen von der dritten Ordnung, so ist:

$$PM - \pi\mu = 2(bm - dp) = 2(PM - pm) - \frac{Pa^2}{PM},$$

$$= 2(PM - pm) - (\sphericalangle\, aMP)^2 \times PM.$$

Zweitens ist der Winkel $e\pi\mu$ oder der Winkel zwischen pm und $\pi\mu$

$$= \frac{\mu e}{\pi e} = \frac{Pa}{pm - (bm - dp)} = \frac{Pa}{Ma - 2(bm - dp)},$$

$$= \frac{Pa}{Ma} + \frac{2(bm - dp)}{Ma} \times \frac{Pa}{Ma},$$

und wenn man kleine Grössen von der dritten Ordnung vernachlässigt

$$= \sphericalangle\, aMP \,.\left(1 + \frac{2(PM - pm)}{PM}\right). \quad \text{Q. e. d.}$$

Zusatz I.

77. Sind die Strecken PM, pm gleich, so ist:

$$PM - \pi\mu = -(\sphericalangle\, aMP)^2 . PM,$$

und

$$\sphericalangle e\pi\mu = \sphericalangle aMP.$$

Diese letzten beiden Sätze sind von *Clairaut* in den *Mémoiren der Akademie* 1736 bewiesen worden.

Zusatz II.

78. Sind die Strecken Mm, $m\mu$ (Fig. 24) $= 0$, so ist:

$$M\pi - PM = 2pO + \frac{PO^2}{PM}$$

und

$$\sphericalangle pM\pi - \sphericalangle PMp = -\frac{2pO}{PM} \cdot \sphericalangle PMp.$$

Problem II.

79. Wir wollen annehmen, ein in G fester (Fig. 25) und in einer horizontalen Ebene gelegener Stab sei mit zwei Körpern A und D belastet, von denen der eine A fest an dem Stabe angebracht ist, der andere längs des Stabes mittelst eines Ringes gleiten kann; man sucht die Geschwindigkeit jedes dieser Körper in jedem Augenblick und die von dem Körper D beschriebene Curve.

Seien AB, DE die kleinen von den Körpern A, D in ein und demselben Augenblicke beschriebenen Geraden; macht man den Bogen $BC = AB$ und die Strecke $Ei = ED$, in derselben Richtung, so ist klar, dass diese beiden Wege von den beiden Körpern in dem folgenden Augenblicke zurückgelegt würden, wenn der Stab sie nicht daran hinderte. Der Körper A, der nothwendig den Bogen BC beschreibt, wird somit diesen Bogen nicht mehr in einem dem ersten gleichen Augenblicke beschreiben: Sei nun die Linie oder der von BC unendlich wenig verschiedene Bogen BQ derjenige, welchen der Körper A gleichförmig mit der in B innegehabten Geschwindigkeit in demselben Augenblick durchlaufen würde, in dem er in Folge seiner erzwungenen Bewegung BC durchläuft, und sei Eo der Weg, den der Körper D ebenfalls gleichförmig in derselben Zeit zurücklegen würde, und an Stelle dessen er die Linie Ep in Folge des Widerstandes des Stabes beschreibt, dann ist klar, dass, wenn man die Bewegungen BQ und Eo aus den Bewegungen BC, CQ und Ep, El zusammengesetzt denkt, der Hebel GB im Gleichgewicht wäre, wenn die Körper A, D nur die Bewegungen CQ, El hätten. Da nun (nach Voraussetzung) der Körper E längs des Stabes gleiten kann, so ist zum Gleichgewicht nothwendig, dass El senkrecht zu dem Hebel GA sei; und ausserdem muss

$$A\,.\,CQ\,.\,CA = D\,.\,El\,.\,GE$$

sein. Dies sei vorausgeschickt.

Sei $GA = a$, $AB = dx$, $GD = y$, $FD = \frac{y\,dx}{a}$, $FE = dy$, $CQ = \alpha$, so ist (da sich die Strecken BQ, AB; Eo, DE wie die zu ihrer Zurücklegung aufgewandten Zeiten verhalten):

$$BC : CQ = DE : io.$$

Somit ist:

$$io = \frac{CQ\,.\,DE}{BC};$$

ferner ergiebt die Bedingung:

$$A\,.\,CQ\,.\,CA = D\,.\,El\,.\,GE$$

die Gleichung:

$$El \text{ oder } po = \frac{A\alpha a}{Dy}.$$

Nun ist (nach § 78):

$$\sphericalangle\, iGE = \sphericalangle\, EGD\left(1 - \frac{2\,FE}{GD}\right)$$

$$= \sphericalangle\, EGD - \frac{2\,dy\,dx}{ay};$$

und wenn man zu dem Winkel iGE den Winkel

$$\sphericalangle\, iGo = \frac{io}{Gi} \times \frac{DF}{DE} = \frac{CQ.DF}{Gi\,.\,BC} = \frac{CQ}{GD} \times \frac{DF}{AB} = \frac{CQ}{GA} = \frac{\alpha}{a},$$

und den Winkel

$$\sphericalangle\, oGp \text{ oder } \frac{po}{GD} = \frac{A\alpha a}{Dy^2},$$

hinzufügt, so wird:

$$\sphericalangle\, pGE = \sphericalangle\, EGD - \frac{2\,dy\,dx}{ay} + \frac{\alpha}{a} + \frac{A\alpha a}{Dy^2},$$

und da dieser Winkel pGE dem Winkel EGD (nach Construction) gleich ist, so folgt:

$$-\frac{2\,dy\,dx}{ay}+\frac{\alpha}{a}+\frac{A\alpha a}{Dy^2}=0.$$

Somit ist:

$$\alpha=\frac{2\,Dy\,dy\,dx}{Aa^2+Dy^2}.$$

Nun ist (nach § 78) die Differenz $(Gi-GD)$ gleich

$$2\,dy+\frac{y^2dx^2}{a^2y},$$

und $\dfrac{\alpha\,dy}{dx}$ ist gleich der Differenz Gp oder Go weniger Gi. Somit ist:

$$Gp-GE=dy+\frac{y\,dx^2}{a^2}+\frac{\alpha\,dy}{dx}.$$

Es wird also:

$$d^2y=\frac{y\,dx^2}{a^2}+\frac{\alpha\,dy}{dx},$$

oder wenn man für α seinen bereits gefundenen Werth einsetzt:

$$d^2y=\frac{y\,dx^2}{a^2}+\frac{2\,Dy\,dy^2}{Aa^2+Dy^2}$$

die Gleichung der Curve DEp.

Um darin die Unbekannten zu trennen, sei

$$dx=\frac{p\,dy}{a},$$

dann wird:

$$d^2y=-\frac{dp\,dy}{p},$$

und

$$-\frac{a^4dp}{p^3}-\frac{2\,y\,dy\,a^4D}{p^2(Aa^2+Dy^2)}=y\,dy,$$

mit dem Integrale:

$$\frac{a^4}{2\,p^2(Aa^2+Dy^2)^2}=G-\frac{1}{2\,D(Aa^2+Dy^2)},$$

wo G eine solche Constante vorstellt, dass $\frac{p}{a}$ im Anfangspunkte der Curve gleich dem gegebenen Verhältnisse von $\frac{dx}{dy}$ wird.

Man erhält somit:

$$dx \text{ oder } \frac{p\,dy}{a} = \frac{a\,dy\sqrt{D}}{\sqrt{(Aa^2 + Dy^2)(2\,GD(Aa^2 + Dy^2) - 1)}}$$

als Gleichung der Curve DEp.

Was die Geschwindigkeiten der beiden Körper anbetrifft, so findet man, wenn man u die Geschwindigkeit des Körpers A nennt,

$$-\frac{du}{u} = \frac{CQ}{BC},$$

da $\frac{BQ}{BC}$ das Verhältniss des zweiten Augenblickes zum ersten ist. Somit wird:

$$-\frac{du}{u} = \frac{2\,Dy\,dy}{Aa^2 + Dy^2},$$

und

$$\frac{u}{g} = \frac{Aa^2 + Db^2}{Aa^2 + Dy^2},$$

wenn man g als die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers A annimmt und im Anfangspunkt der Curve DE $y = b$ setzt. Ebenso ist, wenn man v die Geschwindigkeit des Körpers D nennt,

$$\frac{dv}{v} = \frac{Ep - Eo}{Eo} = \frac{po\,.\,FD}{DE^2} = \frac{Aa\,a\,y\,dx}{Dy^2 a\left(dy^2 + \frac{y^2\,dx^2}{a^2}\right)};$$

man kann indessen v in eleganterer Weise durch das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte finden, das wir später beweisen werden, und welches

$$Dv^2 + Au^2 = \text{einer Constanten}$$

ergiebt. Daraus folgt, wenn man h die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers D nennt:

$$v^2 = \frac{Dh^2 + Ag^2 - Au^2}{D}. \text{ 43)}$$

Bemerkung I.

80. Ich habe bei der Lösung dieses Problemes die dt oder constanten Zeitelemente vermieden [44]), um zur Gleichung der Curve zu gelangen, ohne den Ausdruck für die Geschwindigkeit zu kennen, was nothwendig wäre, wenn man die dt constant machte, da:

$$dt = \frac{dx}{u},$$

und man so die dt nur eliminiren kann, wenn man den Werth von u kennt. So werde ich in der Folge stets verfahren. Nicht etwa, als ob man nicht u auf verschiedene Weisen finden könnte. Ich habe vielmehr geglaubt, dass es angemessen ist, zu zeigen, wie man diese Kenntniss bei der Lösung derartiger Probleme entbehren kann.

Bemerkung II.

81. Das vorstehende Problem wäre nicht viel schwieriger, wenn die Körper A, D mit beschleunigenden Kräften p, f von beliebigen Richtungen und Werthen begabt wären. Um ein Beispiel für die in diesem Falle nothwendige Rechnung zu geben, will ich beide beschleunigende Kräfte constant und der Verticalen AV parallel annehmen, wobei ich das System in eine verticale Ebene gebracht denke. Die Construction bleibe dieselbe, wie in § 79; sei nur ferner QN der Weg, den der Körper A in Folge der Schwere p in dem Augenblicke zurücklegen würde, in dem er BC in Folge seiner erzwungenen Bewegung durchläuft; da dieser Augenblick unendlich wenig von dem ersten verschieden ist, folgt:

$$QN = p \cdot \frac{GV}{GA} \times \frac{dx^2}{u^2};$$

in gleicher Weise:

$$oz = \frac{fdx^2}{u^2};$$

$$z\pi = \frac{A\,.\,CN\,.\,GA}{D\,.\,DG} = \frac{Aa}{Dy}\left(\alpha + \frac{pz\,dx^2}{au^2}\right),$$

wenn man GV mit z bezeichnet. Es folgt weiter, wie in § 79:

$$\frac{2ydxdy}{ay^2}=\left(\alpha+\frac{pz\,dx^2}{au^2}\right)\times\frac{Aa}{Dy^2}+\frac{\alpha}{a}+\frac{fdx^2}{u^2}\times\frac{z}{ay},$$

und

$$d^2y=\frac{ydx^2}{a^2}+\frac{\alpha dy}{dx}+\frac{fdx^2\sqrt{a^2-z^2}}{au^2}.$$

Es ist ferner:

$$dx=-\frac{adz}{\sqrt{a^2-z^2}},$$

und

$$-\frac{du}{u}=\frac{\alpha}{dx}.$$

Setzt man den aus dieser letzten Gleichung sich ergebenden Werth von α in der ersten ein, so erhält man durch Integration den Werth von u in y und z und ihren Differentialen; und setzt man dann diesen Werth von u in der zweiten Gleichung ein, so erhält man die gesuchte Gleichung der Curve DEp.[45])

Bemerkung III.

82. Falls eine an dem Körper A angebrachte Kraft denselben zwingt, sich auf der Curve AB mit einer in jedem Punkte gegebenen Geschwindigkeit zu bewegen, und man fragt nach der Curve und der Geschwindigkeit des Punktes D, so kann man dieses Problem auf das vorhergehende zurückführen, indem man sucht, mit welcher beschleunigenden Kraft der Körper A begabt sein muss, damit er, bei seiner gemeinsamen Bewegung mit dem Körper D, in jedem Punkte B die gegebene Geschwindigkeit habe.

Man setze in der ersten der vier Gleichungen des vorangehenden Paragraphen φ statt $\frac{pz}{a}$ und, da u in x gegeben ist:

$$u=X,$$

und

$$-\frac{du}{u}=-\frac{dX}{X}=\frac{\alpha}{dx}.$$

Es ist somit:

$$\alpha=-\frac{dXdx}{X}.$$

Vergleicht man diesen Werth von α mit dem aus der ersten Gleichung [46]) sich ergebenden Werthe, so erhält man den Werth von φ und die Gleichung der Curve DEp. Sei z. B.

$$f = 0,\quad u = \text{einer Constanten } g,$$

so wird:

$$\alpha = 0$$

und

$$\frac{2\,dy\,dx}{ay} = \frac{\varphi\,dx^2}{g^2} \cdot \frac{Aa}{Dy^2},$$

somit:

$$\varphi = \frac{2\,Dg^2 y\,dy}{Aa^2 dx},$$

und

$$d^2 y = \frac{y\,dx^2}{a^2},$$

folglich:

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{Ga^2 + y^2}}$$

und

$$\varphi = \frac{2\,Dg^2 y}{Aa^3} \sqrt{Ga^2 + y^2}\,.$$

Ist $G = 0$, so folgt:

$$y = c^{\frac{x}{a}}$$

und

$$\varphi = \frac{2\,Dg^2 c^{\frac{2x}{a}}}{Aa^3}.$$

Die von dem Körper D beschriebene Curve ist in diesem Falle eine logarithmische Spirale.

Befindet sich kein Körper im Punkte A, ist vielmehr die Geschwindigkeit des Punktes A in der Richtung AB in Folge irgend einer an dem Stabe wirkenden Kraft gegeben, so kann man das Problem in derselben Weise lösen, indem man sich im Punkte A einen Körper von beliebiger Masse denkt und sucht, mit welcher beschleunigenden Kraft dieser Körper begabt sein muss, um, bei seiner gemeinsamen Bewegung mit dem Körper D, in jedem Punkte B die gegebene Geschwindigkeit zu besitzen; und man kann stets allgemein diese Methode benützen, wenn Körper in beliebiger Weise durch Fäden oder Stäbe verbunden sind, und wenn man annimmt, dass ein oder mehrere Punkte der Fäden oder Stäbe sich mit gegebenen Geschwindigkeiten in gegebenen Richtungen bewegen. Ich gebe zu, dass man diese Probleme in einfacherer Weise lösen kann, ohne nach derjenigen beschleunigenden Kraft des sich mit gegebener Geschwindigkeit bewegenden Körpers zu suchen, welche nothwendig ist, damit er sich unter der Einwirkung der anderen Körper mit der gegebenen Geschwindigkeit bewege; indessen ist die Lösung, die wir hier vorschlagen, wenn auch länger, doch nichtsdestoweniger aus den wahren Principien des Gegenstandes abgeleitet, denn es ist sicher, dass die Kraft, welche den Körper mit einer gegebenen Geschwindigkeit bewegt, verschieden ist von der, die vorhanden wäre, wenn alle anderen Körper nicht existirten, da ein Theil dieser Kraft dazu verwandt wird, die Wirkung dieser Körper aufzuheben. Unsere Lösung bestimmt die Differenz dieser beiden Kräfte, und darin liegt, wie mir scheint, die wahre Natur des in Frage stehenden Problemes.

Bemerkung IV.

83. Man erkennt leicht, dass man an Stelle zweier Körper A, D beliebig viele setzen kann, von denen die einen an dem Stabe fest angebracht sind, die anderen frei längs des Stabes hingleiten können; die Rechnungen werden nur etwas länger sein, das Problem wird aber immer durch dieselben Methoden seine Lösung finden.[47])

Problem III.

84. Ein Körper P falle längs einer Curve CB (Fig. 26) und ziehe einen anderen Körper F mittelst eines Fadens PCF nach sich, der über eine Rolle C gleitet, man sucht die Geschwindigkeit beider Körper.

Sei Pp das in einem Augenblicke von dem Körper P und $Ff = pV$ das von dem anderen Körper in demselben Augenblicke durchlaufene Element. In dem folgenden Augenblicke würden diese Körper, wenn nichts sie daran hinderte, $p\pi = Pp$ und $f\varphi = Ff$ durchlaufen. In Folge des Widerstandes und der Unausdehnbarkeit des Fadens wird aber der Weg $p\pi$ von dem Körper P in einem von dem ersten verschiedenen

Augenblicke zurückgelegt werden, und in demselben Augenblicke wird der Körper F im Punkte ϖ anlangen, wo:

$$\varpi C + C\pi = fC + Cp.$$

Nehmen wir jetzt an, der Körper P würde während der Zeit, in welcher er $p\pi$ durchläuft, von selbst [48]) den Weg pi zurücklegen, und der Körper F von selbst den Weg $f\omega$; es sei ferner $\omega\nu$ die verticale Strecke, welche die Schwere den Körper F in demselben Augenblick durchlaufen lassen würde, und il die Linie, welche die Componente der Schwere in der Richtung pi den Körper P zurücklegen lassen würde. Macht man $po = \pi l$, so ist nach unserem Princip nothwendig, dass der allein mit der durch $\varpi\nu$ dargestellten beschleunigenden Kraft begabte Körper dem Körper P Gleichgewicht halte, der mit der Kraft po und der zur Curve Cp senkrechten, in der Richtung pZ wirkenden Componente der Schwere und der Centrifugalkraft begabt ist. Zieht man nun vom Punkte o die Gerade $o\alpha$, welche die Verlängerung von Cp in α trifft, und die Gerade αu, so ist klar, dass Gleichgewicht stattfinden wird, falls:

$$F.\varpi\nu = P.p\alpha,$$

da der Rest der Kraft in der Richtung pZ durch den Widerstand der krummen Oberfläche aufgehoben wird.

Sei daher u die Geschwindigkeit des Körpers P, p seine absolute Schwere, g die des Körpers F [49]),

$$CP = x, \quad NP = y, \quad Pp = ds, \quad \varpi i = \alpha;$$

dann wird

$$il = \frac{pdy\,ds^2}{u^2 ds}$$

und

$$\varphi\omega : Ff = i\pi : Pp,$$

also:

$$\varphi\omega = \frac{\alpha dx}{ds};$$

$$\omega\nu = \frac{u^2}{gds^2}.$$

Setzt man:

$$\varpi\nu = n,$$

so findet man:

$$\varphi\varpi \text{ oder } -d^2x = \frac{\alpha dx}{ds} + \frac{gds^2}{u^2} - n;$$

ferner, da:

$$F.\varpi\nu = P.p\alpha,$$

ist,

$$F.n = P.\frac{po.ds}{dx} = \frac{Pds}{dx}.\left(\frac{pdyds^2}{u^2ds} - \alpha\right).$$

Daher:

$$Fd^2x + \frac{Fgds^2}{u^2} + \frac{F\alpha dx}{ds} = -\frac{P\alpha ds}{dx} + \frac{Ppds^2dy}{u^2dx},$$

folglich:

$$\alpha = \frac{-Fd^2x - \frac{Fgds^2}{u^2} + \frac{Ppds^2dy}{u^2dx}}{Fdx^2 + Pds^2} \times dsdx.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\alpha}{ds} = \frac{du}{u},$$

somit:

$$\frac{-Pu^2dxd^2x - Fgds^2dx + Ppds^2dy}{Fdx^2 + Pds^2} = udu,$$

oder

$$2udu\frac{Fdx^2 + Pds^2}{Pds^2} + \frac{2Fu^2dxd^2x}{Pds^2} = 2pdy - \frac{2Fgdx}{P}$$

mit dem vollständigen Integrale (wenn man, für y und $x = 0$, $u = 0$ annimmt):

$$\frac{u^2(Pds^2 + Fdx^2)}{Pds^2} = 2py - \frac{2Fgx}{P},$$

und wenn man

$$u^2 = 2pk$$

setzt, findet man:

$$k = \frac{ds^2\left(Py - \frac{Fgx}{p}\right)}{Pds^2 + Fdx^2}. \quad 50)$$

Zusatz I.

85. Macht man $g = p$, so findet man:

$$k = \frac{ds^2(Py - Fx)}{Pds^2 + Fdx^2},$$

was mit der von *Bernoulli, Bd. 2 der Petersburger Mémoiren* angegebenen Formel übereinstimmt und leicht aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte abgeleitet werden kann.

Zusatz II.

86. Ist p und $g = 0$, besitzen also die beiden Körper keine Schwere, so folgt:

$$\frac{u^2(Pds^2 + Fdx^2)}{Pds^2} = \text{einer Constanten.}$$

Zusatz III.

87. Das vorstehende Problem wäre mit derselben Leichtigkeit zu lösen, wenn die beiden Körper schwer wären und sich in einem Medium bewegten, dessen Widerstand mit einer Function der Geschwindigkeit proportional ist. Man hätte dann nämlich nur

$$p\frac{dy}{ds} - \varphi(u)^{*)} \text{ statt } p\frac{dy}{ds}$$

und in der Gleichung des Problemes:

$$g + \varphi \cdot \frac{udx}{ds} \text{ statt } g$$

zu setzen, dann erhielte man eine Gleichung, deren Unbekannte gleichfalls noch in einigen Fällen getrennt werden könnten, z. B. wenn:

$$\varphi(u) = a + bu^2$$

und a, b beliebige Constanten vorstellen.

---

*) Diese Grösse $\varphi(u)$ soll allgemein eine Function von u ausdrücken.

Zusatz IV.

88. Würden beide Körper sich auf je einer Curve bewegen, so bezeichne man Ff mit dt, Fu mit dx, FN mit dz (Fig. 27), dann erhielte man:

$$\varphi\omega = \frac{\alpha dt}{ds},$$

$$\omega\nu = \frac{gdz}{dt} \cdot \frac{ds^2}{u^2},$$

statt Fn hat man zu setzen $\frac{Fndt}{dx}$, und statt

$$-d^2x = \frac{\alpha dx}{ds} + \frac{gds^2}{u^2} - n$$

schreibe man:

$$-d^2t = \frac{\alpha dt}{ds} + \frac{gdz}{ds} \cdot \frac{ds^2}{u^2} - n.$$

Mittelst dieser geringen Aenderungen wird das Problem seine Lösung finden, und man erhält:

$$d\left[\frac{u^2(Pds^2 + Fdt^2)}{Pds^2}\right] = 2pdy - \frac{2Fgdx}{P}.$$

Eine Gleichung, die man auch mit Hülfe des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte finden könnte. Ist somit der Anfangswerth von u null, und sei zur Anfangszeit:

$$y = A, \quad z = 0,$$

so folgt:

$$\frac{u^2(Pds^2 + Fdt^2)}{Pds^2} = 2p(y - A) - \frac{2Fgz}{P}. \quad {}^{51)}$$

Zusatz V.

89. Macht man im vorangehenden Paragraphen

$$u^2 = 2pk$$

und

$$p = g,$$

so folgt:

$$k = \frac{[P(y - A) - Fz]ds^2}{Pds^2 + Fdt^2}.$$

Man kann, wenn man will, $A = 0$ machen, bei der Annahme, dass der Körper von C ausgehe, und man erhält dann:

$$k = \frac{(Py - Fz)ds^2}{Pds^2 + Fdt^2}.$$

Hermann hat im *2. Bande der Petersburger Mémoiren* eine Lösung des von uns in § 88 gelösten Problemes angegeben. Seine Formel kommt auf folgende heraus:

$$k = \frac{\left[Py - \int F\frac{dx^2\,dz}{ds^2}\right]ds^2}{Pds^2 + Fdx^2}$$

$$= \frac{\left[Py - Fz + \int F\frac{dz\,dg^2}{dt^2}\right]ds^2}{Pds^2 + Fdx^2},$$

(wenn man

$$dt^2 = dx^2 + dq^2$$

setzt). Nun kann man den von uns gefundenen Werth von k auch so schreiben:

$$\frac{2p[(Py - fz)ds^2 - Fu^2\,dq^2]}{2p(Pds^2 + Fdx^2)},$$

ein Ausdruck, der nicht auf dasselbe hinauskommen kann, wie der von *Hermann*, da die negative Grösse $(-Fu^2dq^2)$ nicht der positiven:

$$\left(\int \frac{Fdz\,dq^2}{dt^2}\right)2p\,ds^2$$

gleich sein kann. Man hat also wohl anzunehmen, dass sich irgend ein Versehen in die Lösung von *Hermann* eingeschlichen hat, da das Resultat unserer Lösung völlig mit dem übereinstimmt, welches man mit Hülfe des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte findet, und da diese Lösung sich im Uebrigen nur auf sehr klare Principien stützt.

Scholie.

90. Die Lösung des Problems III mag etwas lang erscheinen. Ich hielt es aber für angemessen, zu zeigen, wie

sich mein Princip auf dasselbe anwenden lässt. Wenn man nämlich das Problem in anderer Weise lösen wollte, könnte man so verfahren. Sei T die Spannung des Fadens, welche in gleicher Weise in der Richtung CP und CF wirkt, dann ist:

$$\frac{Ppdy}{ds} - \frac{Tdx}{ds}$$

die den Körper P in der Richtung Pp beschleunigende Kraft und

$$\frac{Tdx}{ds} - \frac{Fgdz}{ds}$$

die den Körper F in der Richtung Ff beschleunigende Kraft; man erhält somit:

$$\left(\frac{Ppdy}{ds} - \frac{Tdx}{ds}\right) ds = Pudu,$$

und

$$\left(\frac{Tdx}{ds} - \frac{Fgdz}{dt}\right) dt = \frac{F}{2} d\left(\frac{u^2 dt^2}{ds^2}\right),$$

woraus man erhält, wenn man die beiden Gleichungen addirt und integrirt:

$$u^2 + \frac{u^2 F dt^2}{P ds^2} = 2py - \frac{2Fgz}{P}.$$

Diese letztere Lösung kann dazu dienen, den Fehler der Lösung von *Hermann* zu finden; es würde aber zu lang sein, auf diese Discussion einzugehen. Uebrigens ist diese Lösung thatsächlich viel einfacher, als die des § 88; ich glaube indessen, dass sie nicht ganz so durchsichtig und direct ist. Denn, genau genommen, hat der Faden keine Eigenwirkung auf die Körper, er hat nur eine Widerstands- und keine Triebkraft.

Problem IV.

91. Ein Körper P bewege sich in einer krummen Rinne $APp\pi$ (Fig. 28), in der er von irgend einer beschleunigenden Kraft φ angegriffen werde, und ziehe zwei andere Körper M, M mittelst eines unbiegsamen Stabes[52]) MPM nach sich, man sucht die Geschwindigkeit des Körpers P und die von den beiden Körpern M, M beschriebenen Curven.

Seien Pp, MR, MR die von den Körpern P, M, M in einem beliebigen Augenblicke beschriebenen Wege; ich mache

$$p\pi = pP = p\varpi$$

und nehme an, dass der Körper P in dem Augenblicke, in welchem er in Folge seiner erzwungenen Bewegung $p\pi$ durchläuft, von selbst gleichförmig pf zurücklegen würde und ausserdem fg in Folge der Kraft[53] φ; ich mache ferner

$$Ri = MR;\quad \mathrm{Ri} = \mathrm{MR}$$

und nehme an, dass in derselben Zeit, in der der Körper P $p\pi$ durchläuft, der Körper M RK und der Körper M RK zurücklegen würde. Man hat nach unserem Princip die Kraft in der Richtung RK in zwei andere RZ, Re und die Kraft in der Richtung RK in zwei andere RZ, Re zu zerlegen, derart, dass die Körper P, M, M, wenn sie nur mit den Kräften πq, RZ, RZ begabt wären, sich Gleichgewicht hielten und das System in Ruhe bleiben würde, und dass sie, wenn sie nur die Bewegungen $p\pi$, Re, Re hätten, diese Bewegungen, ohne sich gegenseitig zu hindern, beibehalten könnten, so dass also:

$$\pi e = PM,\quad \pi \mathrm{e} = P\mathrm{M} \quad \text{und} \quad e\mathrm{e} = M\mathrm{M}.$$

Ich zerlege zunächst die Kraft in der Richtung RZ in zwei andere, von denen die eine RV in der Verlängerung von pR liege, und in gleicher Weise die Kraft in der Richtung RZ in zwei andere, von denen die eine in der Verlängerung von pR liege, und ich nehme RV und RV so an, dass sich die Körper P, M, M, wenn sie mit den Kräften πq, RV, RV begabt sind, das Gleichgewicht halten, was eintreten wird, wenn man sich diese Kräfte in p vereinigt denkt und die aus denselben resultirende Einzelkraft zu der Rinne senkrecht ist, wenn also:

$$\text{(A)}\qquad P \times \pi q = \frac{M.RV.GP}{PM} + \frac{\mathrm{M}.\mathrm{RV}.gP}{P\mathrm{M}}.$$

Es werden dann den Körpern M, M nur noch die Kräfte RX, RX bleiben, die sich gegenseitig zerstören müssen, was nur eintreten kann, wenn diese Strecken RX, RX in derselben Geraden RR liegen und:

$$\text{(B)}\qquad M.RX = \mathrm{M}.\mathrm{RX} \quad \text{ist.}$$

Sei nun:

$$PM = a, \quad GM = y, \quad g\mathrm{M} = \mathrm{y}, \quad P\mathrm{M} = b,$$

die constante Senkrechte

$$PQ = c,$$

e die Strecke $M\mathrm{M}$ oder $R\mathrm{R}$, u die Geschwindigkeit von P in der Richtung Pp:

$$Pp = dx, \quad \pi f = \alpha, \quad RX = z, \quad \mathrm{RX} = \mathrm{z},$$

dann ist:

$$fq = \frac{\varphi ds^2}{u^2} \quad \text{und} \quad \pi q = \alpha + \frac{\varphi dx^2}{u^2}.$$

Beschreibt man um p als Centrum den Bogen $\pi\varpi$ und zieht man die Geraden πi, πK; $Ro \parallel VK$, dann ist oe gleich und parallel RX, und es wird:

$$1) \qquad \varpi i - pR = \frac{a dy^2}{a^2 - y^2} \text{ (nach § 78)[54]};$$

$$\pi i - \varpi i = \frac{\varpi\pi \,.\, MG}{MP} = \frac{y dx^2}{ra},$$

wenn man mit r den Krümmungsradius der Curve APp in P bezeichnet.

2) ist, wenn man um L als Centrum die Bogen MN, PT und um π als Centrum den Bogen*) iY beschreibt:

$$YK \text{ oder } \pi i - \pi K = \frac{iK \,.\, RN}{MR},$$

oder (da $iK : MR = \pi f : Pp$):

$$YK = \frac{\pi f \,.\, RN}{Pp} = \frac{\pi f \,.\, pT}{Pp} = \frac{\pi f \,.\, PG}{MP} = \frac{\alpha \sqrt{a^2 - y^2}}{a}.$$

*) Der Winkel $\pi i K$ weicht nur unendlich wenig von dem spitzen Winkel PMR ab, wenn das auch in der Figur nicht so scheint, da man hier, um Verwirrungen vorzubeugen, gezwungen war, die unendlich klein angenommenen Strecken MR, Ri ziemlich gross zu machen. Man sieht daraus, dass der Bogen iY, von π aus gesehen, jenseits iK fallen muss und man ein Dreieck $iYK \sim MRN$ erhält.

3) ist

$$\pi K - \pi o = Ko = RV$$

und

$$\pi o - \pi e = \frac{oe \,.\, MQ}{MP} = \frac{z\sqrt{a^2 - c^2}}{a}.$$

Somit:

$$\pi e - pR \text{ oder } \pi e - PM$$

$$= -\frac{z\sqrt{a^2 - c^2}}{a} - RV - \frac{\alpha\sqrt{a^2 - y^2}}{a} + \frac{y\,dx^2}{ar} + \frac{a\,dy^2}{a^2 - y^2}.$$

Nun muss aber die Strecke $\pi e = PM$ sein. Somit folgt:

$$\text{(C)}\qquad \frac{z\sqrt{a^2 - c^2}}{a} + RV + \frac{\alpha\sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \frac{y\,dx^2}{ar} + \frac{a\,dy^2}{a^2 - y^2}.$$

Ebenso erhält man für den anderen Körper M:

$$\text{(D)}\qquad \frac{\mathrm{z}\sqrt{b^2 - c^2}}{b} + \mathrm{RV} + \frac{\alpha\sqrt{b^2 - \mathrm{y}^2}}{b} = -\frac{y\,dx^2}{br} + \frac{b\,d\mathrm{y}^2}{b^2 - \mathrm{y}^2}.$$

Ich bemerke weiter, dass $\frac{MN - PT}{PM}$ gleich dem Winkel zwischen pR und PM, und dass dieser Winkel selbst

$$= \Gamma pR - GPM + \Gamma pP = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{dx}{r} \text{ ist.}$$

Somit ist:

$$MN = PT + PM\left(\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{dx}{r}\right)$$

$$= \frac{y\,dx}{a} + \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{a\,dx}{r}.$$

Nun ist der Winkel zwischen ϖi und pR (nach § 78) gleich dem Winkel zwischen pR und PM; der Winkel zwischen ϖi und πi ist

$$= \frac{\varpi\pi \,.\, PG}{PM^2};$$

der Winkel zwischen πi und πK ist

$$= \frac{iY}{PM} = \frac{iK\,.\,MN}{MR\,.\,PM} = \frac{\pi f\,.\,MN}{Pp\,.\,MP};$$

der Winkel zwischen πK oder πo und πe ist

$$= \frac{oe\,.\,PQ}{PM^2} = \frac{zc}{a^2}.$$

Somit ist der Winkel zwischen πe und ϖi, also das zweite Differential des Winkels zwischen pR und PM gleich der Summe aller dieser Winkel, bei Anwendung der richtigen Vorzeichen, es wird also:

$$\text{(E)}\qquad d\left(\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{dx}{r}\right)$$

$$= \frac{dx^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^2 r} + \frac{\alpha}{a\,dx}\left(\frac{y\,dx}{a} + \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{a\,dx}{r}\right) - \frac{zc}{a^2}.$$

Ebenso folgt:

$$\text{(F)}\qquad d\left(\frac{d\mathrm{y}}{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}} - \frac{dx}{r}\right)$$

$$= -\frac{dx^2\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}}{b^2 r} + \frac{\alpha}{b\,dx}\left(\frac{\mathrm{y}\,dx}{b} + \frac{b\,d\mathrm{y}}{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}} - \frac{b\,dx}{r}\right) - \frac{\mathrm{z}c}{b^2}.$$

Setzt man ferner in den obigen Gleichungen (A) und (B) an Stelle der in dieselben eingehenden Strecken ihre analytischen Werthe, so erhält man:

$$\text{(G)}\qquad P\left(\alpha + \frac{\varphi\,dx^2}{u^2}\right) = \frac{M.RV\sqrt{a^2-y^2}}{a} + \mathrm{M}.\mathrm{RV}.\frac{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}}{b},$$

$$\text{(H)}\qquad \frac{M}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{z}}{z}$$

und endlich:

$$\text{(L)}\qquad \frac{\alpha}{dx} = -\frac{du}{u}.$$

Es ist ferner zu bemerken, dass in Folge der Unbiegsamkeit des Stabes der Winkel $MP\mathrm{M}$ constant ist, so dass $\frac{\mathrm{y}}{b}$ stets in $\frac{y}{a}$ gegeben ist. Benützt man daher die sieben Gleichungen, um α, u, RV, RV, z und z zu eliminiren, so kommt man zu einer Endgleichung, die nur noch dx und y, dy, d^2y enthält, und die die Gleichung einer der beiden gesuchten Curven repräsentirt. Hierauf wird es leicht sein, die andere zu finden.[55])

Bemerkung I.

92. Wären MP, PM Fäden, so würden die Kräfte in den Richtungen RX und RX null sein, und es wäre

$$z = 0 \text{ und } \mathrm{z} = 0.$$

Da aber y nicht mehr in y gegeben wäre, so hätte man sechs Gleichungen und fünf Unbekannte α, y, RV, RV und u zu eliminiren.

Zusatz I.

93. Nehmen wir zur Vereinfachung

$$r = \infty, \quad b = 0, \quad \varphi = 0$$

an, so dass sich also der Körper P in einer geraden Rinne befinde und nur einen Körper M mittelst eines Stabes oder Fadens nach sich ziehe, was in dem gegenwärtigen Falle auf dasselbe hinausläuft, dann ist:

$$RV = \frac{P a \alpha}{M\sqrt{a^2 - y^2}} = -\frac{\alpha\sqrt{a^2-y^2}}{a} + \frac{a\,dy^2}{a^2-y^2};$$

woraus folgt:

$$\alpha = \frac{M a\,dy^2}{\sqrt{a^2-y^2}} \times \frac{a}{Pa^2 + M(a^2-y^2)}$$

und

$$d\left(\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}\right) = \frac{\alpha}{a\,dx} \times \left(\frac{y\,dx}{a} + \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)$$

$$= \frac{M a^2 dy^2}{\sqrt{a^2-y^2}\,(Pa^2 + M(a^2-y^2))} \times \left(\frac{y}{a^2} + \frac{dy}{dx\sqrt{a^2-y^2}}\right).$$

Setzt man $dx = \frac{p\,dy}{a}$, so findet man nach den betreffenden Substitutionen:

$$\frac{-p\sqrt{a^2-y^2}}{\sqrt{Pa^2 + M(a^2-y^2)}} = A + \frac{May}{\sqrt{Pa^2 + M(a^2-y^2)}\,(M+P)},$$

wo A eine solche Constante vorstellt, dass das durch $\frac{p}{a}$ ausgedrückte Verhältniss von dx zu dy gleich dem gegebenen Verhältniss dieser Differentiale in dem Zeitpunkt ist, in welchem die Körper ihre Bewegung beginnen.[56])

Zusatz II.

94. Sei in dem vorstehenden Zusatze die Constante $A = 0$, dann findet man:

$$p = -\frac{M}{M+P} \cdot \frac{ay}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

und

$$dx = -\frac{Mydy}{(M+P)\sqrt{a^2-y^2}}.$$

Diese letzte Gleichung zeigt, dass in diesem Falle die Curve eine geometrische ist.[57]) Um dieselbe zu construiren, nehme man an, es sei CP (Fig. 29) die Lage des Fadens im ersten Augenblicke; beschreibt man dann um P als Centrum den Bogen CMK und fällt von irgend einem Punkte M die Senkrechte MG, macht

$$NS = GP$$

und

$$PO = \frac{PS \,.\, M}{M+P},$$

zieht OT gleich und parallel PM, dann ist der Punkt T ein Punkt der Curve. Um ihre Gleichung in den Coordinaten NQ, QT zu finden, bemerke man, dass

$$QT = MG = y,$$

nennt man dann NP, f und NQ, t; so sieht man, es ist:

$$NQ = BT = OS = \frac{PS \,.\, P}{M+P} = \frac{NG \,.\, P}{M+P}$$

$$= (\sqrt{a^2-y^2} - f)\frac{P}{M+P}.$$

Es ist somit:

$$t = (\sqrt{a^2-y^2} - f)\frac{P}{M+P}$$

und

$$t + \frac{fP}{M+P} = \frac{P}{M+P}\sqrt{a^2 - y^2},$$

das ist die Gleichung einer Ellipse, deren Centrum man erhält, wenn man:

$$ND = \frac{NP \,.\, P}{M+P}$$

macht, und deren Axen sind:

$$DE = a$$

und

$$XD = Cg = \frac{aP}{M+P}.$$

Ist daher der Anfangsimpuls der Körper P und M derart, dass das Anfangsverhältniss von dx zu dy gleich ist dem Verhältniss von

$$\frac{-My}{(M+P)\sqrt{a^2 - y^2}} : 1,$$

so beschreibt der Körper M eine Ellipse, wie wir sie eben bestimmt haben.

Zusatz III.

95. Macht man $P = m \,.\, M$, so ist der allgemeine Werth von dx:

$$-\frac{y\,dy}{(1+m)\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{A\,dy\sqrt{(1+m)a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

woraus ersichtlich ist, dass, falls $A \pm 0$ ist, die Curve zwar keine geometrische ist, aber mit Hülfe der Rectification der Ellipse construirt werden kann. Es ist nämlich:

$$\frac{dy\sqrt{(1+m)a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{dy\sqrt{(1+m)qa^2 - qy^2}}{\sqrt{q}\,\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Nun ist die allgemeine Formel für das Element der Ellipse:

$$\frac{dy\sqrt{a^2 + \left(\frac{p}{2a} - 1\right)y^2}}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

und macht man:

$$(1+m)q = 1, \quad \text{und} \quad -q = \frac{p}{2a} - 1,$$

so ergiebt sich:

$$q = \frac{1}{1+m}, \quad \text{und} \quad \frac{p}{2a} = \frac{m}{1+m};$$

daraus folgt, dass

$$\frac{dy\sqrt{(1+m)a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

das Bogenelement einer Ellipse ist, deren Abscisse y, deren grosse Achse $2a$, und für welche das Verhältniss des Parameters zu dieser Achse $\frac{m}{1+m}$ ist, wobei dieser Bogen noch durch $\sqrt{q}$ zu dividiren oder mit $\sqrt{1+m}$ zu multipliciren ist; oder, was auf dasselbe herauskommt, es ist der obige Ausdruck das Bogenelement einer Ellipse, deren grosse Achse $= 2a\sqrt{1+m}$, deren Abscisse $= y\sqrt{1+m}$, und für welche das Verhältniss des Parameters zu der grossen Achse $\frac{m}{1+m}$ ist.

Bemerkung II.

96. Was wir soeben in den beiden vorstehenden Zusätzen gesagt und aus dem allgemeinen Problem hergeleitet haben, kann man in einfacherer Weise aus zwei Sätzen ableiten, die wir zu Anfang dieses zweiten Theiles angegeben haben, dass nämlich der Schwerpunkt g der Körper P, M (Fig. 30) in einer zu der Rinne PQ senkrechten Geraden herabfällt, oder dass wenigstens seine Bewegung $\parallel PQ$ gleichförmig ist. Wenn nämlich der Schwerpunkt g in einer Geraden SgV herabfällt, so ist nach der Lehre von den Kegelschnitten klar, dass der Punkt M eine Ellipse beschreiben wird, und in dem anderen Falle braucht man sich nur zu denken, dass der Punkt g in einer zu der Rinne senkrechten Geraden herabfällt, während der Punkt P nach Q fortschreitet und der Punkt M eine Ellipse beschreibt, und dann das ganze System $\parallel PQ$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit fortschreiten zu lassen, welche der Schwerpunkt $g \parallel PQ$ haben soll. Es ist zu bemerken, dass alles dies in Gültigkeit bleibt, wenn die Körper P, M schwer sind, falls dann nur die Rinne PQ horizontal ist.

Seien PQ, MN die den Körpern P, M ursprünglich eingeprägten Geschwindigkeiten, so zerlege man die Geschwindigkeit MN in zwei andere, von denen die eine MR senkrecht, die andere MS parallel zu PQ ist, und das Problem wird völlig gelöst sein, wenn man, absehend von der gemeinsamen Geschwindigkeit TN, die Geschwindigkeit des Punktes M auf seiner Ellipse und die des Punktes P findet. Das wird leicht mit Hülfe des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft, welches wir später beweisen werden, möglich sein. Man sieht, das ist eine sehr einfache Methode, um derartige Probleme zu lösen.

Bemerkung III.

97. Wenn man, anstatt den Körper P mit einer beschleunigenden Kraft φ begabt anzunehmen, voraussetzte, dass er gezwungen sei, sich in der krummen Rinne APp mit einer einem gegebenen Gesetz entsprechenden Geschwindigkeit zu bewegen, so wird das Problem stets in derselben Weise seine Lösung finden. Es würde sich nur darum handeln, die Kraft φ zu bestimmen. Man vergleiche den obigen § 82.

Problem V.

98. Ein in C fester und mit zwei Gewichten[58] m, M belasteter Faden (Fig. 31) CmM werde unendlich wenig von der Verticalen CO entfernt, man sucht die Schwingungsdauer dieses Fadens.

Sei mu der von dem Körper m im ersten Augenblicke zurückgelegte Bogen, und MV der Bogen, der in derselben Zeit von dem Körper M beschrieben wird. Man kann den Körper M mit zwei Bewegungen begabt denken, von denen die eine MV gleich und parallel der Bewegung mu des Körpers m, die andere Vv eine Rotationsbewegung um das Centrum m oder u ist. Wir zerlegen zunächst die absolute Wirkung der Schwere[59] des Körpers m in der Richtung mQ in zwei andere Wirkungen, von denen die eine im Stande ist, den Körper m im ersten Augenblicke den Weg mu durchlaufen zu lassen, und die andere eine unbekannte Richtung mR hat. Diese letztere Wirkung muss zerstört werden, da sich (nach Voraussetzung) der Körper m nur in der Richtung mu bewegen kann. Wir zerlegen in gleicher Weise die absolute Wirkung der Schwere des Körpers M in der Richtung

ML in zwei andere, von denen die eine den Körper M die Strecke MV zurücklegen lässt, während die andere vollständig zerstört wird oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Wirkung in der Richtung mR, die gleichfalls aufgehoben werden muss, das Gleichgewicht hält. Dazu ist nun nothwendig, dass 1) die Wirkung auf den Körper M, die zerstört werden soll, in der Richtung MP, der Verlängerung von mM, liege, dass 2) diese Wirkung sich zu der Wirkung in der Richtung mR verhalte, wie der unendlich kleine Winkel SmR (zwischen mR und der Verlängerung von Cm) zu dem Winkel MmS, da zum Bestehen des Gleichgewichtes die Resultante dieser beiden Wirkungen die Richtung mS haben muss. Dies sei vorausgeschickt.

Sei $Cm = l$, p die Schwere des Körpers m, P die des Körpers M, $Mm = L$, $mK = x$, $MQ = y$, φ die beschleunigende Kraft in der Richtung mu; dann verhält sich 1) φ zu der Schwere p, wie der Winkel RmQ zum Sinus des rechten Winkels Rmu. Nimmt man daher 1 zum ganzen Sinus, so ist:

$$\sphericalangle\, RmQ = \frac{\varphi}{p}.$$

2) findet man in gleicher Weise:

$$\sphericalangle\, NML = \frac{\varphi}{P},$$

somit:

$$\sphericalangle\, PMN = \frac{y}{L} - \frac{\varphi}{P},$$

und die beschleunigende Kraft in der Richtung uv

$$= P\left(\frac{y}{L} - \frac{\varphi}{P}\right).$$

Nun muss sich aber die Wirkung auf den Körper M in der Richtung MP, die nur unendlich wenig von der Wirkung auf denselben in der Richtung ML abweicht und sich folglich durch $M \times P$ ausdrücken lässt, zu der Wirkung auf den Körper m in der Richtung mR $(m \times p)$ verhalten, wie der Winkel RmS oder $\frac{x}{l} - \frac{\varphi}{P}$ zum Winkel MmS oder $\frac{y}{L} - \frac{x}{l}$. Es ist somit:

$$m \cdot \varphi = \frac{mpx}{l} - M \cdot P \times \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right),$$

folglich:

$$\varphi = \frac{px}{l} - \frac{M \cdot P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right),$$

und die Wirkung in der Richtung Vv:

$$\frac{Py}{L} - \frac{px}{l} + \frac{M \cdot P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right).$$

Nennt man jetzt t die seit dem Beginn der Bewegung verflossene Zeit, so hat man die beiden folgenden Gleichungen:

$$\text{(M)} \qquad -d^2x = \left[\frac{px}{l} - \frac{M \cdot P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)\right]dt^2,$$

und

$$\text{(N)} \qquad -d^2y = \left[\frac{yP}{l} \cdot \frac{M+m}{m} - \frac{x}{l}\left(p + \frac{M \cdot P}{m}\right)\right]dt^2.$$

Diese beiden Gleichungen haben zur Bestimmung der Bewegung der beiden Körper zu dienen.[60])

Zusatz I.

99. Nimmt man an, dass die Anfangskräfte in den Richtungen mu und Vv sich verhalten, wie mK zu MQ; wenn also:

$$\text{(O)} \quad \frac{px}{l} + \frac{MPx}{lm} - \frac{MPy}{Lm} : \frac{yP}{L} \cdot \frac{M+m}{m} - \frac{x}{l}\left(p + \frac{M \cdot P}{m}\right) = x : y,$$

so behaupte ich, dass die Körper M, m zu gleicher Zeit in der Verticalen CO anlangen werden. Denn es ist hierzu nothwendig, dass die Bogen MQ, mK in derselben Zeit zurückgelegt werden. Nun werden sich, wenn die vorstehende Proportion besteht, die kleinen Theile, um welche sich die Bogen mK, MQ im ersten Augenblicke und in den folgenden vermindern, wie diese Bogen verhalten, und die beschleunigenden Kräfte werden den Bogen proportional sein, welche noch bis zur Ruhelage[61]) zu durchlaufen sind. Q. e. d.

Führt man die Proportion (O) in eine Gleichung über, so folgt:

$$\frac{pxy}{l}+\frac{MPxy}{lm}-\frac{MPy^2}{Lm}=\frac{yxP}{L}\cdot\frac{M+m}{m}-\frac{x^2}{l}\left(p+\frac{M.P}{m}\right)$$

oder

$$\frac{y}{x}+\frac{M+m}{2M}-\frac{pLm}{2MPl}-\frac{L}{2l}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{pLm}{MPl}+\frac{L}{l}+\left(\frac{M+m}{2m}-\frac{pLm}{2MPl}-\frac{L}{2l}\right)^2}$$

und

$$\frac{y+x}{x}=\frac{-m+M}{2m}+\frac{pLm}{2MPl}+\frac{L}{2l}$$

$$\pm\sqrt{\frac{pLm}{MPl}+\frac{L}{l}+\left(\frac{M+m}{2m}-\frac{pLm}{2MPl}-\frac{L}{2l}\right)^2}.$$

Zusatz II.

100. Ist $P=p$, d. h. haben die Körper M und m dieselbe specifische Schwere[62]), so ist:

$$\frac{y+x}{x}=\frac{Ml-ml+ML+mL}{2Ml}$$

$$\pm\frac{\sqrt{4MmLl+4M^2Ll+(Ml+ml-ML-mL)^2}}{2Ml}.$$

Die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse kann man in

$$\sqrt{4MmL^2+(ml+ML+Ml-mL)^2}$$

umformen, und es wird dann das Verhältniss von $y+x$ zu x dasselbe, welches für diesen Fall allein von *Dan. Bernoulli, Bd. 2 p. 111 der Petersburger Mémoiren* angegeben worden ist, und wofür dieser Verfasser später in Bd. 7 den Beweis geliefert hat. *Euler* hat gleichfalls in Bd. 8 eine Lösung dieses selben Problemes angegeben. Da dasselbe von Interesse ist und dazu dienen kann, mehrere andere ähnliche Probleme zu lösen, glaubte ich zeigen zu müssen, wie sich mein Princip auf dasselbe anwenden lässt.

Zusatz III.

101. Wenn die Lage des Fadens nicht die ist, welche der Faden haben muss, damit die Körper m, M zu gleicher Zeit

in der Verticalen anlangen, so muss man zur Integration der Gleichungen (N) und (M) des § 98 schreiten, wenn man die Bewegung der Körper M und m finden will. Ich setze zunächst, um die Rechnung möglichst einfach zu machen, nicht bloss $P = p$, sondern auch $M = m$ und $L = l$. Ich nehme ferner an, um die Gleichungen (M) und (N) homogen zu machen, es sei T die Zeit, in welcher die beschleunigende Kraft p den Körper m oder M einen Weg l durchlaufen lässt[63]); auf diese Weise gehen die Gleichungen (M) und (N) in die folgenden über:

$$\text{(P)} \qquad -d^2x = (2x - y)\frac{2\,dt^2}{T^2}$$

und

$$\text{(Q)} \qquad -d^2y = (2y - 2x)\frac{2\,dt^2}{T^2};$$

um diese Gleichungen zu integriren, multiplicire ich die erste mit α und die zweite mit ν (wo α und ν zwei unbestimmte Zahlen vorstellen mögen) und addire sie, das giebt:

$$\text{(R)} \qquad -\alpha d^2x - \nu d^2y = [(2\alpha - 2\nu)x + (-\alpha + 2\nu)y]\frac{2\,dt^2}{T^2}.$$

Ich verfahre nun so, dass

$$(2\alpha - 2\nu)x + (-\alpha + 2\nu)y$$

ein Vielfaches von $(-\alpha x - \nu y)$ wird, das giebt:

$$\frac{2\alpha - 2\nu}{\alpha} = \frac{2\nu - \alpha}{\nu}$$

und

$$\alpha = \pm \nu\sqrt{2}.$$

Somit wird:

$$-d^2x\sqrt{2} - d^2y = [(2\sqrt{2} - 2)x + (2 - \sqrt{2})y]\frac{2\,dt^2}{T^2}.$$

Setzt man:

$$x\sqrt{2} + y = u,$$

so folgt:

$$-d^2u = u(2 - \sqrt{2})\frac{2\,dt^2}{T^2}, \text{ [64])}$$

mit dem Integrale:

$$\frac{A^2 dt^2}{T^2} - du^2 = 2(2-\sqrt{2})\frac{u^2 dt^2}{T^2},$$

also:

$$dt = \frac{-Tdu}{\sqrt{A^2 - 2(2-\sqrt{2})u^2}},$$

(ich schreibe $-Tdu$, da u gleich $x\sqrt{2}+y$ und x, y mit wachsendem t abnehmen, somit auch u nothwendig mit wachsendem t abnimmt). Die Natur des Problemes und die Betrachtung der Gleichungen (P) und (Q) lassen uns ferner erkennen, dass für $t=0$,

$$dx = 0, \quad dy = 0,$$

folglich:

$$du = 0 \quad \text{ist.}$$

Somit ist $\dfrac{A^2}{2(2-\sqrt{2})}$ gleich dem Werthe von u^2 für $t=0$. Sind daher:

$$x = X, \quad y = Y$$

die Anfangswerthe von x, y, also ihre Werthe für $t=0$, so folgt:

$$\frac{A^2}{2(2-\sqrt{2})} = (X\sqrt{2}+Y)^2.$$

Setzt man nun für y seinen Werth $u - x\sqrt{2}$ in der Gleichung (P) ein, so ergiebt sich:

$$-d^2x = [(2+\sqrt{2})x - u]\frac{2dt^2}{T^2}.$$

Ich mache in dieser Gleichung, bei der man bemerke, dass die Grösse u bereits in t durch die Gleichung:

$$dt = -\frac{Tdu}{\sqrt{A^2 - 2(2-\sqrt{2})u^2}}$$

gegeben ist,

$$x = \frac{zs}{l},$$

wo z und s zwei unbestimmte Variabeln sind, und ich erhalte:

$$\frac{-zd^2s - 2dsdz - sd^2z}{l} = (2+\sqrt{2})\frac{zs}{l}\frac{2dt^2}{T^2} - \frac{2udt^2}{T^2}.$$

Man kann nun, da die eine der beiden unbestimmten Variabeln z und s beliebig ist, die beiden Ausdrücke

$$-zd^2s \quad \text{und} \quad (2+\sqrt{2})zs\frac{2dt^2}{T^2}$$

einander gleich setzen, das giebt:

$$\frac{B^2dt^2}{T^2} - ds^2 = (2+\sqrt{2})\frac{2s^2dt^2}{T^2}.$$

Somit:

$$dt = -\frac{Tds}{\sqrt{B^2-(2+\sqrt{2})2s^2}};$$

es bleibt uns jetzt nur noch die Gleichung:

$$-\frac{2dsdz - sd^2z}{l} = -\frac{2udt^2}{T^2},$$

mit dem Integrale:

$$\frac{s^2dz}{l} = \int\frac{2usdt^2}{T^2}.$$

Man bemerke schliesslich, da für t = 0

$$X = x$$

und

$$dx \text{ oder } \frac{zds + sdz}{l} = 0$$

wird, dass man für $t = 0$

$$ds = 0$$

und

$$dz = 0$$

annehmen kann; das giebt:

$$\frac{B^2}{2(2+\sqrt{2})} = s^2$$

und

$$\frac{zs}{l} \text{ oder } x = X.$$

Es wird somit für $t = 0$:

$$z = \frac{lX}{s}.$$

Aus allen diesen Gleichungen ergiebt sich die folgende Construction:

Man beschreibe um C als Centrum mit einem Radius

$$CA = X\sqrt{2} + Y$$

einen Kreis AF (Fig. 32). Man nehme ferner eine beliebige Strecke CK, welche T darstellen soll, mache

$$CB = \frac{T}{\sqrt{(2-\sqrt{2})2}}$$

und beschreibe um C als Centrum den Kreis BE.

Macht man das Verhältniss $BE : CK$ gleich dem Verhältniss der seit dem Beginn der Bewegung verflossenen Zeit t zu der gegebenen Zeitdauer T, zieht man ferner EFC und FG senkrecht zu CA, so behaupte ich, es wird CG der Werth von u sein, welcher $BE(t)$ entspricht. Es geht dies aus der Gleichung:

$$dt = -\frac{Tdu}{\sqrt{A^2 - 2(2-\sqrt{2})u^2}}$$

hervor, in welcher, wie man gesehen hat:

$$\frac{A^2}{2(2-\sqrt{2})} = (X\sqrt{2} + Y)^2.$$

Um die Gleichung:

$$dt = \frac{-Tds}{\sqrt{B^2 - 2(2+\sqrt{2})s^2}}$$

zu construiren, in der die Constante B^2 beliebig ist, bis auf die Beschränkung, dass dieselbe dem Werthe von

$$2s^2(2+\sqrt{2}) \text{ für } t = 0$$

gleich ist, mache man:

$$CD = \frac{T}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}},$$

setze:

$$\frac{B^2}{2(2+\sqrt{2})} = CA^2$$

und beschreibe mit dem Radius CD den Kreis DLO, auf welchem man den Bogen $DL = BE$ mache, dann wird das entsprechende $CZ = s$. Schliesslich construire man eine Curve mit der Abscisse t und den Ordinaten $\frac{us}{T}$ und eine andere Curve, deren Ordinaten gleich den mit $\frac{l}{s^2}$ multiplicirten Flächen $\int \frac{usdt}{T}$ der ersten sind, schliesslich eine dritte Curve, deren Ordinaten gleich den durch T dividirten, den Theilen der vorhergehenden Curve entsprechenden Flächen sind, dann wird:

$$z = \frac{lX}{CA} +$$

den entsprechenden Ordinaten dieser letzten Curve. Auf diese Weise erhält man für jede beliebige Zeit t die Werthe von u, z, s, somit die von x und y. Das ist die Lösung der Aufgabe.[65])

Bemerkung I.

102. Fragt man in dem soeben in dem vorstehenden Zusatze untersuchten Falle, in dem $P = p$, $M = m$, $L = l$ ist, wie gross das Verhältniss der Strecken X, Y sein muss, damit die Körper m, M zu gleicher Zeit in der Verticalen anlangen, so findet man (nach § 99):

$$2X - Y : 2Y - 2X = X : Y,$$

somit

$$Y^2 = 2X^2$$

und

$$\frac{Y}{X} = \pm\sqrt{2},$$

das ist derselbe Werth, den man für $\frac{\alpha}{\nu}$ gefunden hat. Man ersieht in der That, wenn man nur einigermaassen die Natur des Problemes beachtet, dass bei zwei Körpern m, M die beiden Werthe von $\frac{\alpha}{\nu}$ dieselben sein müssen, wie diejenigen, welche $\frac{Y}{X}$ haben muss, damit die beiden Punkte m, M zu gleicher Zeit in der Verticalen anlangen. Soll dies nämlich der Fall sein, so muss das Verhältniss von $x:y$, von $dx:dy$, von $d^2x:d^2y$ stets constant und gleich dem Verhältniss von $X:Y$ sein. Nehmen wir nun in diesem Falle die unbestimmten Grössen α, ν so an, dass

$$\frac{\alpha}{\nu} = -\frac{Y}{X},$$

so ist klar, dass in der Gleichung:

$$-\alpha d^2x - \nu d^2y = [(2\alpha - 2\nu)x + (-\alpha + 2\nu)y]\frac{2dt^2}{T^2}$$

die linke Seite null wird, folglich muss auch die rechte null sein, und das wird eintreten, falls:

$$\frac{2\alpha - 2\nu}{2\nu - \alpha} = -\frac{y}{x} = -\frac{Y}{X} = \frac{\alpha}{\nu},$$

oder falls gleichzeitig:

$$2\alpha - 2\nu = 0 \quad \text{und} \quad 2\nu - \alpha = 0.$$

Da nun dieser letzte Fall einen Widerspruch in sich schliesst, so folgt, dass, falls

$$\frac{\alpha}{\nu} = -\frac{Y}{X},$$

die Gleichung zwischen α und ν die folgende ist:

$$\frac{2\alpha - 2\nu}{2\nu - \alpha} = \frac{\alpha}{\nu},$$

genau dieselbe Gleichung, welche man oben für den allgemeinen Fall gefunden hat, in dem das Verhältniss von $Y:X$ beliebig ist. Es muss somit in dieser letzten Gleichung der negative Werth von $\frac{\alpha}{\nu}$ gleich der mit dem $+$ Zeichen versehenen Wurzel der Gleichung für $\frac{Y}{X}$ und der positive Werth von $\frac{\alpha}{\nu}$ gleich der mit dem — Zeichen versehenen Wurzel der Gleichung für $\frac{Y}{X}$ sein.

Bemerkung II.

103. Es ist klar, dass die Untersuchung des vorstehenden Paragraphen sich auf die Fälle anwenden lässt, in denen weder $P = p$, noch $M = m$, noch $L = l$ ist; und man ersieht thatsächlich, wenn man sich der Mühe unterziehen will, die Rechnung auszuführen, dass die Gleichung für $\frac{\alpha}{\nu}$, nach Potenzen dieser Grösse geordnet, sich nur durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes von der nach Potenzen von $\frac{Y}{X}$ geordneten Gleichung unterscheidet.

Es lassen sich nämlich die Gleichungen (M), (N) des § 98 allgemein so darstellen:

$$d^2x = (ax + by)\,dt^2$$

und

$$d^2y = (cx + ey)\,dt^2.$$

Da nun die beiden Körper gleichzeitig in der Verticalen anlangen, muss

$$ax + by = cx + ey = x : y$$

sein, und zur Berechnung des Werthes von $\frac{\alpha}{\nu}$ hat man die Gleichung:

$$\frac{a\alpha + c\nu}{\alpha} = \frac{b\alpha + e\nu}{\nu}.$$

Ordnet man die eine Gleichung nach Potenzen von $\frac{y}{x}$, die andere nach Potenzen von $\frac{\alpha}{\nu}$, so ergiebt sich, dass sich dieselben nur durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes unterscheiden.[66)]

Bemerkung III.

104. Ich habe übrigens bei der Lösung des vorstehenden Problemes die Bewegung des Gewichtes M nur deshalb aus zwei Bewegungen, einer mit dem Gewichte m gemeinsamen

Bewegung MV und einer Rotationsbewegung Vv um m als Centrum, zusammengesetzt gedacht, um den Leser auf die Lösung einiger späterer Probleme vorzubereiten, deren Lösung durch diese Betrachtung bedeutend erleichtert wird. Man hätte nämlich zunächst die Wirkung der Schwere auf M in der Richtung ML in zwei andere zerlegen können, von denen die eine die Bewegung Mv des Körpers M hervorbringt, die andere in der Richtung MP zerstört wird. Auf diese Weise erhielte man die beschleunigende Kraft in der Richtung Mv

$$= p \times \sin LMP = \frac{Py}{L};$$

nun ist der

$$\measuredangle\, SmR = \frac{\measuredangle\, SmM \times P.M}{p.m} = \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right) \times \frac{P.M}{p.m};$$

somit wäre:

$$\measuredangle\, RmQ = \frac{x}{l} - \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right) \times \frac{P.M}{p.m},$$

und folglich die beschleunigende Kraft in der Richtung mu gleich dem Product aus p und dieser letzteren Grösse. So erhielte man, da x der Weg ist, den diese letzte beschleunigende Kraft dem Körper m vorzuschreiben sucht, und $x + y$ der Weg, den die ganze beschleunigende Kraft dem Körper M zu geben strebt:

$$-d^2x = \left[\frac{px}{l} - \frac{MP}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)\right] dt^2$$

und

$$-d^2x - d^2y = \frac{Py}{L} dt^2,$$

das sind zwei Gleichungen, von denen die erste mit der Gleichung (M) des § 98 übereinstimmt, und die zweite ist nichts anderes, als die durch Addition der Gleichungen (M) und (N) desselben Paragraphen entstehende Relation. Diese Lösung kommt folglich auf dasselbe hinaus, wie die von uns in § 98 gegebene Lösung.[67])

Zusatz IV.

105. Allgemein kann man, wenn ein Faden $CMm\mu$ (Fig. 33) mit beliebig vielen Gewichten M, m, μ etc. belastet

ist, die unendlich wenig von der Verticalen entfernt sind, stets die beschleunigende Kraft jedes dieser Körper durch eine der beiden für den Fall zweier Körper in § 98 und 104 gegebenen Lösungen bestimmen.

Nehmen wir z. B. an, es seien drei Körper M, m, μ vorhanden, ihre Beschleunigungen durch die Schwere[68] P, p, π in den Richtungen MA, ma, $\mu\alpha$ mögen sich in je zwei andere zerlegen, von denen die einen die beschleunigenden Kräfte der Körper M, m, μ in den Richtungen MU, mu, μv vorstellen, die anderen in den Richtungen MB, mb, μZ sich das Gleichgewicht halten, und die Fäden CM, Mm, $m\mu$ denke man sich in den Richtungen MR, mr, μZ verlängert; dann ist klar, dass die Kräfte in den Richtungen μZ, mb, welche gleich den Gewichten der Körper μ, m anzunehmen sind, sich auf eine Kraft in der Richtung mr reduciren müssen, die der Summe der beiden gleichgesetzt werden kann; dass ebenso die Kraft in der Richtung mr oder Mm und die Kraft in der Richtung MB, die gleich dem Gewichte des Körpers M anzunehmen ist, sich auf eine Kraft in der Richtung MR reduciren müssen. Es ist somit die beschleunigende Kraft des Körpers μ

$$= \pi \measuredangle Z\mu\alpha,$$

die des Körpes m

$$= p\left(\measuredangle rma - \measuredangle rm\mu \frac{\pi \,.\, \mu}{p \,.\, m}\right),$$

die des Körpers μ

$$= P\left[\measuredangle RMA - \measuredangle RM\mu \frac{p \,.\, m + \pi \,.\, \mu}{P \,.\, M}\right].$$

Allgemein ist ersichtlich, dass, falls man zur Vereinfachung der Rechnung alle Beschleunigungen durch die Schwere gleich ein und derselben Grösse g setzt, welche man zur Einheit nimmt, und falls man p, q, r, s etc. die Winkel MCO, mMR, μmr etc. und B, C, D, E etc. die Massen (von oben angefangen) nennt, die beschleunigenden Kräfte der Körper der Reihe nach, von unten angefangen, die folgenden sein werden:

$$p + q + r + s$$

$$p + q + r - \frac{sE}{D},$$

$$p + q - r\frac{E + D}{C},$$

$$p - q\frac{E + D + C}{B}.$$

Das stimmt mit dem Resultat von *Daniel Bernoulli, Bd. 7 der Petersburger Mémoiren* p. 170 überein.

Zusatz V.

106. Nehmen wir an, der Faden sei mit nur drei einander gleichen Körpern belastet, es seien, von oben angefangen, x, y, z ihre Abstände von der Verticalen, und die zwischen den einzelnen Körpern liegenden Fadentheile seien einander gleich. Will man, dass diese Körper gleichzeitig in der Verticalen anlangen, so muss man

$$x : y = p - 2q : p + q - r$$

und

$$z : y = p + q + r : p + q - r$$

machen, oder (wenn man für p, q, r die ihnen proportionalen Grössen x, $y - 2x$, $z - 2y + x$ setzt):

$$x : y = 5x - 2y : 3y - 2x - z$$

und

$$z : y = z - y : 3y - 2x - z,$$

somit:

$$(3y - 2x - z)z = (z - y)y$$

und

$$(3y - 2x - z)x = (3x - 2y + 2x)y;$$

folglich:

$$z = -5y + \frac{2y^2}{x} + 3y - 2x = \frac{2y^2}{x} - 2y - 2x$$

und

$$y\left(\frac{2y^2}{x} - 3y - 2x\right) = \left(-\frac{2y^2}{x} + 5y\right)\left(\frac{2y^2}{x} - 2y - 2x\right);$$

daraus erhält man:

$$\frac{2y^2}{x} - 3y - 2x = -\frac{4y^3}{x^2} + \frac{4y^2}{x} + 4y + \frac{10y^2}{x} - 10y - 10x.$$

Dividirt man das Ganze durch x und ordnet die Gleichung nach Potenzen von $\frac{y}{x}$, so folgt:

$$\frac{4y^3}{x^3} - \frac{12y^2}{x^2} + \frac{3y}{x} + 8 = 0,$$

was sich mit dem Resultate von *Bernoulli*, *Bd. 6 der Petersburger Mémoiren* p. 112 deckt, wo er das, was wir x nennen, gleich 1 setzt und unter x das versteht, was hier $\frac{y}{x}$ ist.

Bemerkung III.

107. Wenn man allgemein bei einer beliebigen Anzahl von Körpern und bei beliebigen gegenseitigen Entfernungen verlangt, dass alle gleichzeitig in der Verticalen anlangen, so werden sich die Abstände des dritten, vierten Körpers etc. von der Verticalen stets durch Gleichungen darstellen, die in $\frac{y}{x}$ linear sind. Es wird ferner der Grad der nach Potenzen von $\frac{y}{x}$ geordneten Gleichung gleich der Anzahl der Körper sein, und diese Gleichung wird lauter reelle Wurzeln haben. Denn es ist ersichtlich, dass man, wenn z. B. drei Körper vorhanden sind und man den am höchsten gelegenen in einem sehr kleinen Abstande von der Verticalen annimmt, stets drei Bogen für jeden der beiden anderen finden kann, von solcher Art, dass alle drei gleichzeitig in der Verticalen anlangen; indem man sie nämlich entweder alle beide auf derselben Seite wie den ersten annimmt, das ist ein Fall; oder einen auf der einen Seite und den anderen auf der entgegengesetzten Seite, das giebt zwei Fälle. Allgemein haben, wenn die Lage des ersten Körpers gegeben ist, der zweite Körper und die anderen immer so viele möglichen Lagen, als Körper vorhanden sind, und somit wird die nach Potenzen von $\frac{y}{x}$ geordnete Gleichung stets lauter reelle Wurzeln haben. Ist daher die unendlich kleine Distanz des obersten Körpers von der Verticalen gegeben, so kann jeder der anderen Körper so viele verschiedene Lagen haben, als im Ganzen Körper vorhanden sind.[69])

Zusatz VI.

108. Will man bei denselben Voraussetzungen, wie in Zusatz V, die Bewegung jedes Körpers für sich haben, ohne Rücksicht darauf, ob alle gleichzeitig in der Verticalen anlangen, so hat man die drei Gleichungen zu bilden:

$$\text{(S)} \qquad -d^2x = (5x - 2y)\frac{2dt^2}{T^2},$$

$$\text{(T)} \qquad -d^2y = (3y - 2x - z)\frac{2dt^2}{T^2},$$

$$\text{(U)} \qquad -d^2z = (z - y)\frac{2dt^2}{T^2}.$$

Um diese Gleichungen zu integriren, multiplicire ich die erste mit α, die zweite mit ν, die dritte mit μ und addire. Dann erhalte ich:

$$-\alpha d^2x - \nu d^2y - \mu d^2z = [(5\alpha - 2\nu)x + (-2\alpha + 3\nu - \mu)y + (-\nu + \mu)z]\frac{2dt^2}{T^2};$$

ich setze:

$$\frac{5\alpha - 2\nu}{\alpha} = \frac{-2\alpha + 3\nu - \mu}{\nu} = \frac{-\nu + \mu}{\mu},$$

das giebt:

$$\mu = \frac{-2\alpha^2 + 3\alpha\nu - 5\alpha\nu + 2\nu^2}{\alpha} = \frac{2\nu^2}{\alpha} - 2\nu - 2\alpha$$

und

$$(5\alpha - 2\nu)\left(\frac{2\nu^2}{\alpha} - 2\nu - 2\alpha\right) = \left(\frac{2\nu^2}{\alpha} - 3\nu - 2\alpha\right)\alpha,$$

woraus man die Gleichung erhält:

$$\frac{8\alpha^3}{\nu^3} + \frac{3\alpha^2}{\nu^2} - \frac{12\alpha}{\nu} + 4 = 0.$$

Hat man durch Auflösung dieser letzten Gleichung den Werth von $\frac{\alpha}{\nu}$ gefunden, so gelangt man, wenn man

$$\alpha x + \nu y + \mu z = u$$

setzt, zu einer Gleichung von der Form:

$$(X) \qquad -d^2u = \frac{(5\alpha - 2\nu)2udt^2}{\alpha T^2},$$

die sich leicht integriren lässt, und aus der man wenigstens durch eine geometrische Construction den Werth von u in t erhalten kann; ich bezeichne denselben mit θ, es folgt dann:

$$(Y) \qquad -d^2x = (5x - 2y)\frac{2dt^2}{T^2},$$

und

$$(Z) \qquad -d^2y = \left(3y - 2 - \frac{\theta + \alpha x + \nu y}{\mu}\right)\frac{2dt^2}{T^2}.$$

Wir multipliciren die erste dieser Gleichungen mit der unbestimmten Zahl π, die zweite mit der unbestimmten Zahl ϱ und addiren, dann folgt:

$$-\pi d^2x - \varrho d^2y = \left[\left(5\pi - 2\varrho + \frac{\alpha\varrho}{\mu}\right)x \right.$$
$$\left. + \left(-2\pi + 3\varrho + \frac{\nu\varrho}{\mu}\right)y - \frac{\theta\varrho}{\mu}\right]\cdot\frac{2dt^2}{T^2};$$

man mache nun:

$$5\pi - 2\varrho + \frac{\alpha\varrho}{\mu} : \pi = -2\pi + 3\varrho + \frac{\nu\varrho}{\mu} : \varrho,$$

um durch die Substitution:

$$-\pi x - \varrho y = k$$

die Gleichung auf die Form zu bringen:

$$-d^2k = akdt^2 + b\theta dt^2,$$

die wir bereits weiter oben zu integriren gelernt haben.

Man könnte sich noch einer anderen Methode bedienen, indem man mit den drei Gleichungen (X), (Y), (Z) in derselben Weise operirt, wie vorher mit den drei Gleichungen (S), (T), (U). Man würde so die drei Gleichungen (X), (Y), (Z) auf drei Gleichungen von derselben Form, wie die Gleichung (X) zurückführen.[70])

Die hier vorgeschlagenen Methoden dienen übrigens nicht bloss allgemein zur Construction dieser Arten von Gleichungen, sie lassen vielmehr noch mehrere andere Anwendungen zu, deren Besprechung nicht hierher gehört.

Scholie.

109. Nur ein Umstand könnte bei der Construction der in Frage kommenden Gleichungen Schwierigkeiten bereiten; wenn nämlich der Fall einträte, dass die nach Potenzen von $\frac{\alpha}{\nu}$, $\frac{\pi}{\varrho}$ geordneten Gleichungen lauter imaginäre Wurzeln hätten. Ohne uns indessen mit der Frage aufzuhalten, was man dann zu thun hätte, um die Construction möglich zu machen, werden wir uns mit dem Nachweis begnügen, dass diese Gleichungen in dem hier in Frage kommenden Falle stets eine reelle Wurzel haben, was man in folgender Weise zeigen kann.

Seien x, y, s, u etc. die respectiven Abstände jedes Körpers von der durch den festen Punkt gehenden Verticalen. Die zur Auffindung der Bewegung dieser Körper dienenden Gleichungen lassen sich allgemein in der Form darstellen:

$$d^2x = (ax + by)dt^2,$$

$$d^2y = (cy + ex + fs)dt^2,$$

$$d^2s = (hs + ly + gu)dt^2,$$

$$d^2u = (mu + ns)dt^2 \text{ etc.}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit α, die zweite mit ν, die dritte mit μ, die vierte mit λ etc. und addirt, so erhält man, wenn man die rechte Seite zu einem Vielfachen von

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u + \ldots$$

macht:

$$\frac{\alpha a + e\nu}{\alpha} = \frac{\alpha b + c\nu + l\mu}{\nu} = \frac{f\nu + h\mu + n\lambda}{\mu} = \frac{g\mu + m\lambda}{\lambda} = \ldots$$

Ist allgemein die Anzahl der Körper $= n$, so erhält man $(n - 1)$ solcher Gleichungen; man entnehme aus den $(n - 2)$ ersten die Werthe von μ, λ etc. in $\frac{\alpha}{\nu}$; alle diese Werthe werden stets durch lineare Gleichungen gegeben sein; substituirt man diese Werthe in die $(n - 1)^{\text{te}}$ Gleichung, so wird man, wenn man nach Potenzen von $\frac{\alpha}{\nu}$ ordnet, eine Gleichung vom n^{ten} Grade erhalten; daraus folgt, dass, wenn $\frac{\alpha}{\nu}$ in dieser

Gleichung einen reellen Werth hat, auch alle anderen Grössen μ, λ etc. je einen reellen Werth haben werden.

Wenn nun 1. die Anzahl n der Körper ungerade ist, so wird die nach Potenzen von $\frac{\alpha}{\nu}$ geordnete Gleichung von ungerader Ordnung sein und wenigstens eine reelle Wurzel besitzen, folglich werden auch $\frac{\alpha}{\nu}$, μ, λ reelle Werthe besitzen.

Wenn 2. die Anzahl n der Körper gerade ist, so ist zu beweisen, dass man nach Substitution der aus den $(n-2)$ ersten Gleichungen erhaltenen Werthe von μ, λ etc. in der $(n-1)^{\text{ten}}$ eine Gleichung für $\frac{\alpha}{\nu}$ mit wenigstens einer reellen Wurzel erhält. Nehmen wir nun die Abstände x, y, s, u etc. der Körper von der Verticalen, die wir bisher beliebig vorausgesetzt haben, derart an, dass diese Körper zu gleicher Zeit in der Verticalen anlangen; dann ist zunächst (nach § 107)[71]) klar, dass $\frac{y}{x}$, s, u etc. reelle Werthe haben werden. Indem wir bei derselben Voraussetzung bleiben, substituiren wir in der Grösse $\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u + \ldots$ die Werthe von μ, λ etc. in $\frac{\alpha}{\nu}$ und nehmen an, dass man nach dieser Substitution die Grösse:

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u + \ldots = 0$$

mache, so erhält man eine Gleichung, in der nur $\frac{\alpha}{\nu}$ unbekannt ist, und deren Lösung für $\frac{\alpha}{\nu}$ einen solchen Werth ergiebt, dass

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u + \ldots = 0$$

wird. Diese Gleichung wird nun stets vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, also hier von ungerader Ordnung sein; sie wird somit in dem vorliegenden Falle wenigstens eine reelle Wurzel besitzen, und folglich existirt stets, wenn n eine gerade Zahl ist, ein reeller Werth von $\frac{\alpha}{\nu}$, für den die Grösse

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u + \ldots = 0$$

wird, wenn x, y, s, u etc. die Abstände sind, welche die

Körper von der Verticalen haben müssen, um gleichzeitig in der Verticalen anzulangen.

Ich werde jetzt beweisen, dass alle Wurzeln der nach Potenzen von $\frac{\alpha}{\nu}$ geordneten Gleichung:

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u + \ldots = 0 ,$$

unter denen, wie wir eben gesehen haben, wenigstens eine stets reell sein muss, gleichzeitig Wurzeln der allgemeinen nach Potenzen von $\frac{\alpha}{\nu}$ geordneten Gleichung n^{ten} Grades sein müssen; daraus wird hervorgehen, dass diese letzte Gleichung wenigstens eine reelle Wurzel haben muss, was wir uns zu beweisen vorgenommen haben.

Welche Werthe auch x, y, s, u etc. haben mögen, gleichviel ob die Körper gleichzeitig in der Verticalen anlangen oder nicht, stets wird die Gleichung bestehen:

$$\alpha d^2x + \nu d^2y + \mu d^2s + \lambda d^2u + \ldots = \left(\frac{a\alpha + e\nu}{\alpha} \cdot \alpha x\right.$$

$$+ \frac{c\nu + \alpha b + l\mu}{\nu} \cdot \nu y + \frac{f\nu + h\mu + n\lambda}{\mu} \cdot \mu s$$

$$\left. + \frac{g\mu + m\lambda}{\lambda} \cdot \lambda u + \ldots\right) dt^2,$$

oder (da

$$\frac{a\alpha + e\nu}{\alpha} = \frac{c\nu + \alpha b + l\mu}{\nu} = \frac{f\nu + h\mu + n\lambda}{\mu},$$

weil die Werthe von μ, λ etc. in $\frac{\alpha}{\nu}$ durch diese Gleichungen gegeben gedacht werden):

$$\alpha d^2x + \nu d^2y + \ldots$$

$$= \left[\frac{\alpha a + e\nu}{\alpha}(\alpha x + \nu y + \mu s) + \frac{g\mu + m\lambda}{\lambda} \cdot \lambda u\right] dt^2 .$$

Wenn man aber die Abstände x, y, s, u derart annimmt, dass die Körper gleichzeitig in der Verticalen anlangen, und dass ferner:

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u =$$

ist, so folgt:

$$\alpha d^2x + \nu d^2y + \ldots = 0,$$

d. h. es wird die linke Seite der obigen Gleichung null sein und folglich auch die rechte Seite. Nun ist diese rechte Seite (wegen

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u = 0)$$

$$= \left(\frac{-\alpha a - e\nu}{\alpha} + \frac{g\mu + m\lambda}{\lambda}\right)\lambda u$$

oder

$$= \left(\frac{-\alpha a\lambda - e\nu\lambda}{\alpha} + g\mu + m\lambda\right)u.$$

Somit ist:

$$\frac{-\alpha a\lambda - e\nu\lambda}{\alpha} + g\mu + m\lambda = 0,$$

und folglich wird jeder Werth von $\frac{\alpha}{\nu}$, der

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u = 0$$

zu machen vermag, auch die Grösse

$$\frac{-\alpha a\lambda - e\nu\lambda}{\alpha} + g\mu + m\lambda = 0$$

machen. Substituirt man aber in dieser letzten Grösse für μ, λ etc. ihre Werthe in α und ν, so erhält man die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades für $\frac{\alpha}{\nu}$. Somit hat die Gleichung:

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \lambda u + \ldots = 0$$

alle ihre Wurzeln mit der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades für $\frac{a}{\nu}$ gemein; das blieb noch zu beweisen.

Es wird sich mittelst einer ähnlichen Methode beweisen lassen, dass die allgemeine Gleichung für $\frac{\pi}{\varrho}$ wenigstens eine reelle Wurzel besitzt. Setzt man nämlich:

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \ldots = \theta,$$

wie in § 108, so ist zu bemerken, dass in Folge

$$\alpha x + \nu y + \mu s + \ldots = 0,$$
$$\theta = 0$$

wird (nach Voraussetzung), und der Beweis wird nach dieser Bemerkung genau derselbe sein, wie der vorstehende.

Zusatz VII.

110. Es sei eine Curve mit unendlich kleinen, einander gleichen Gewichten belastet, die sich in unendlich kleinen Abständen von einander befinden und alle unendlich wenig von der Verticalen entfernt sind; nennt man x die Abscissen, y die unendlich kleinen Ordinaten dieser Curve, s die Bögen, welche unendlich wenig von den entsprechenden x verschieden sind; endlich l die Länge des Fadens, so folgt aus § 105, dass die beschleunigende Kraft jedes der kleinen Gewichte proportional ist der Summe der Sinus der Aussenwinkel, von oben angefangen, vermindert um das Product seines Aussenwinkels mit dem Verhältniss des Gesammtgewichtes aller tieferen Gewichte zu dem in Frage stehenden; somit ist diese Kraft für jeden Punkt:

$$\int \frac{d^2 y}{ds} - \frac{(l-s) d^2 y}{ds^2},$$

wie dies *Daniel Bernoulli* in *Bd. 7 der Petersburger Mémoiren* p. 171 angegeben hat.

Daniel Bernoulli hat hieraus die Gleichung abgeleitet, welche die Curve haben müsste, damit alle ihre Theile gleichzeitig in der Verticalen anlangen. S. ebenda p. 171.

Hat die Curve diese Gleichung nicht, so wird sich ihre Gleichung von Augenblick zu Augenblick ändern, und der allgemeine Werth einer Ordinate y wird sich nur durch eine Function des Bogens oder der entsprechenden Abscisse x und der seit dem Beginn der Bewegung verflossenen Zeit t darstellen lassen; diese Function geht für $t = 0$ in den durch die Gleichung der Anfangscurve gegebenen Werth von y in s über. Sei daher allgemein:

$$y = \varphi(t, s) \text{ *)},$$
$$dy = p dt + q ds,$$

---

*) Diese Grösse $\varphi(t, s)$ drücke allgemein eine Function von t und s aus.

$\mathrm{d}^2 y$ das Differential von dy, wenn man s constant denkt, $d^2 y$ das Differential von dy, wenn man t constant denkt, dann ist:

$$\mathrm{d}^2 y = \left[\frac{dy}{ds} - (l - s)\frac{d^2 y}{ds^2}\right] dt^2$$

oder

$$\frac{dp}{dt} = q - (l - s)\frac{dq}{ds};$$

es ist dabei zu bemerken, dass bei der Bildung von dp nur t, bei der Bildung von dq nur s variabel ist. Sei:

$$dp = \alpha dt + \nu ds,$$

$$dq = b dt + m ds;$$

da $pdt + qds$ ein vollständiges Differential ist, so muss

$$\frac{dp}{ds} = \frac{dq}{dt},$$

also

$$b = \nu$$

sein. Ferner ergiebt die Gleichung:

$$\frac{dp}{dt} = q - \frac{(l - s)dq}{ds}:$$

$$\alpha = q - (l - s)m,$$

somit:

$$m ds = \frac{q ds - \alpha ds}{l - s}.$$

Addirt man auf beiden Seiten bdt oder νdt, so folgt:

$$m ds + b dt \text{ oder } dq = \frac{q ds - \alpha ds}{l - s} + \nu dt.$$

Folglich wird:

$$dq(l - s) - q ds = \nu dt(l - s) - \alpha ds,$$

und

$$q(l - s) = \int \nu dt(l - s) - \alpha ds.$$

Diese Gleichung muss für alle in Frage kommenden veränderlichen Curven gelten, deren allgemeine Gleichung in der Form:

$$y = \varphi(t, s)$$

dargestellt werden können.[72])

Hülfssatz VIII.

111. *CRM* (Fig. 34) sei ein Körper von beliebiger Form mit dem Schwerpunkte G; auf alle Theile V dieses Körpers mögen Kräfte VM wirken, deren Richtungen senkrecht seien zu der Geraden VC, welche man von den Punkten V nach einem beliebigen in dem Körper festen Punkt gezogen denkt, und diese Kräfte mögen den Abständen VC proportional sein; ich behaupte, dass die Richtung der Resultanten eine Gerade KL sein wird, die senkrecht zu der durch G gelegten Geraden CG durch C hindurchgeht.

Denn zerlegt man jede Kraft CM in zwei, eine in der Richtung $VN \parallel CV$, die andere in der Richtung $VP \perp CV$; so ist leicht zu sehen, dass sich die Kräfte in den Richtungen VN wie die Abstände CQ dieser Kräfte von der Geraden CG verhalten, dass somit die Summen dieser Kräfte gleich der Summe der Producte jedes Theilchens mit seinem Abstand von der Geraden CG sein werden. Da aber CG durch den Schwerpunkt G geht, so ist diese Summe $= 0$, somit ist die Resultante der Kräfte in den Richtungen $VN = 0$, es wird folglich die Richtung und Grösse der gesuchten Kraft dieselbe sein, wie die, welche sich aus den Kräften in den Richtungen $VP \perp CG$ allein zusammensetzt. Die Richtung dieser Kraft kann also nur eine zu CG senkrechte Gerade OKL sein.

Was die Grösse der Kraft in der Richtung OL anbetrifft, so ist dieselbe gleich der Summe der Kräfte in den Richtungen VP, multiplicirt mit den kleinen correspondirenden Massen V, und da die Kräfte VP mit VQ proportional sind und $\int V.VQ$ gleich CG, multiplicirt mit der Masse MSC, ist, in Folge der Eigenschaften des Schwerpunktes; so folgt, wenn man φ die beschleunigende Kraft des Punktes G nennt, für die Kraft in der Richtung OL der Werth $\varphi . MSC$.

Der Abstand der Geraden OL von C ist

$$= \frac{\int V.\varphi \frac{VC}{CG} \times VC}{\varphi . MSC} = \frac{\int V . VC^2}{CG . MSC}.$$

Zusatz.

112. Man sieht so, dass die Lage der Geraden OKL ganz unabhängig von φ stets gegeben ist.[73])

Problem VI.

113. Ein Körper CRV (Fig. 35) von beliebiger Gestalt mit dem Schwerpunkte G sei an einem Faden AC aufgehängt, und die Geraden AC, CG seien unendlich wenig von der Verticalen entfernt, man sucht die Geschwindigkeiten der Punkte C und G zu einer gegebenen Zeit t.

Die Theile des Körpers CRV haben alle eine Bewegung, gleich und parallel der des Punktes C, und sie drehen sich gleichzeitig um diesen Punkt C mit Geschwindigkeiten, welche den Abständen von diesem Punkte proportional sind. Sei p die absolute Schwere irgend eines Theilchens V in der Richtung der Verticalen VQ, und zerlegt man diese Wirkung für jedes Theilchen in zwei andere, von denen die eine in der Richtung Vu gleich und parallel der beschleunigenden Kraft des Punktes C in der Richtung CP sei, die andere in der Richtung Vn liege. Die Wirkung Vn, deren Richtung noch unbekannt ist, wird für alle Theilchen von derselben Grösse und Richtung sein. Man kann daher alle Wirkungen Vn als im Schwerpunkt G vereinigt und in der Richtung $GN \parallel Vn$ wirkend annehmen. Man muss ferner diese Wirkung Vn für jedes Theilchen in zwei andere zerlegen, von denen die eine zur Drehung des Theilchens V um C zu dienen hat, während die andere zerstört wird. Ich nenne diese letztere Wirkung s, und es muss, da sich alle Wirkungen s aufheben, die Resultante derselben in der Richtung AC wirken.

Es wurde bereits gefunden, dass die Gerade GN, die der ihrer Richtung nach unbekannten Geraden Vn parallel ist, die Richtung der aus den Kräften Vn resultirenden Kraft vorstellt; nun lässt sich (nach § 112) die Lage der Geraden KL finden, der Richtung der Resultanten der Wirkungen, welche die Theilchen V um C zu drehen suchen, wenn man auch den Werth dieser Kraft nicht kennt. Die Richtung der Resultanten der Wirkungen in den Richtungen GL und KL muss nothwendig durch den Schnittpunkt L der Geraden GL und KL gehen und muss ferner in der Verlängerung von AC liegen. Es liegt somit der Punkt L in der Verlängerung von AC. Folglich muss die Gerade GN durch den Schnittpunkt der ihrer Lage nach gegebenen Geraden KL und der Verlängerung von AC gehen, und CL wird die Richtung der Resultanten der Kräfte s sein.

Sei π die auf C in der Richtung CP wirkende Kraft, die allen Theilchen gemeinsam ist, φ die Kraft, die G um C zu drehen sucht, so ziehe man $Gi \parallel CP$ und $GM \parallel AP$, man bezeichne AC mit l, CG mit a, GK mit b, die Masse des Körpers mit m, CP mit x und den Winkel von CG mit der Verticalen mit $\frac{y}{a}$. Man kann GK und GL als gleich ansehen, und man erhält:

$$\measuredangle\, GLM = \measuredangle\, GCL \frac{CG}{GK} = \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right)\frac{a}{b},$$

und

$$\measuredangle\, LGM = \frac{x}{l} - \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right)\frac{a}{b};$$

nun ist die Kraft:

$$\pi = p \,.\, \measuredangle\, LGM = p\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right)\frac{a}{b}\right];$$

und die Kraft in der Richtung $KL(\varphi\,.\,m)$ muss sich zu der Kraft in der Richtung $GL(p\,.\,m)$ verhalten, wie der Sinus des $\measuredangle\, GLM$ zum ganzen Sinus. Somit ist:

$$\varphi = p\left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right)\frac{a}{b};$$

folglich:

$$-d^2x = \left[x - \left(\frac{yl}{a} - x\right)\frac{a}{b}\right]\frac{2\,dt^2}{T^2},$$

und

$$-d^2y = \left(\frac{yl}{b} - \frac{ax}{b}\right)\frac{2\,dt^2}{T^2};$$

Gleichungen, die man mittelst einer ähnlichen Methode integriren kann, wie die, deren wir uns in ähnlichen Fällen (§ 101 und 108) bedient haben.[74])

Zusatz.

114. Will man, dass die Punkte C, G gleichzeitig in der Verticalen anlangen, so mache man:

$$x:y=\frac{x}{l}-\frac{y}{b}+\frac{ax}{bl}:\frac{y}{b}-\frac{ax}{bl};$$

somit:

$$\frac{xy}{b}-\frac{ax^2}{bl}=\frac{xy}{l}-\frac{y^2}{b}+\frac{axy}{bl};$$

folglich:

$$\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}+\frac{l-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{l}{a}+\left(\frac{l-b}{2a}-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Ist l sehr gross im Verhältniss zu a und b, so wird entweder:

$$x=\frac{yl}{a}$$

oder

$$x=-y.$$

Die erste dieser Gleichungen ergiebt:

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{a};$$

d. h., falls der Faden sehr lang ist, müssen CG und AC sehr nahe in derselben Geraden liegen, wenn die Punkte C, G gleichzeitig in der Verticalen anlangen sollen. Die zweite Gleichung sagt aus, dass die Winkel der Geraden CG, AC mit der Verticalen auf derselben Seite der Verticalen zu nehmen sind und sich umgekehrt verhalten, wie $AC:CG$, d. h., damit die Punkte C, G gleichzeitig in der Verticalen anlangen, müssen nach der ersten Gleichung CG und AC in derselben Geraden liegen, und nach der zweiten muss der Schwerpunkt G im ersten Augenblicke in der Verticalen AP oder derselben sehr nahe liegen.

II.

Von Körpern, welche auf Ebenen rollen.[75])

Problem VII.

115. Es liege eine beliebige Figur CKO (Fig. 36) so auf einer horizontalen Ebene MCS auf, dass die Richtung GF für seinen Schwerpunkt G[76]) nicht durch ihren Berührungspunkt C gehe, man fragt, was mit dieser Figur geschehen wird.

Die Figur kann nur zwei Bewegungen haben; eine drehende um den Berührungspunkt C, der in jedem Augenblicke wechselt; die andere, die für alle Theile der Figur dieselbe sein wird, ist eine gleitende Bewegung längs der Ebene in der Richtung nach M oder S. Es ist daher zunächst zu bestimmen, ob diese letztere Bewegung in der Richtung nach M oder nach S vor sich geht; zweitens der Werth der diese Bewegung erzeugenden Kraft, die ich π nennen will; drittens die Kraft, welche den Schwerpunkt G um C dreht, die ich φ nennen will; schliesslich, ob diese letztere Kraft G nach rechts oder nach links dreht.

Welche Werthe auch die Kräfte φ haben mögen, sicher ist, dass man die Richtung ZNO der Resultanten derselben finden kann, und dass diese Gerade NO senkrecht zu der Verlängerung von CG sein wird. Ferner wird die Resultante der absoluten Wirkungen der Schwere auf jedes Theilchen die Richtung NGF haben und wird $= p \,.\, m$ sein, wenn man m die Masse des Körpers und p die absolute Schwere[77]) nennt. In gleicher Weise wird die mit MS parallele Gerade KGR die Richtung der Resultanten aller Kräfte sein, und die Stärke derselben wird den Werth $\pi \,.\, m$ haben. Nach unserem Princip muss sich nun die Kraft in der Richtung NF in drei Componenten zerlegen lassen, deren erste die Resultante der Wirkungen der Kräfte φ, die zweite die Resultante der Kräfte π ist, und deren dritte verschwindet. Diese dritte kann nur verschwinden, wenn sie die Richtung der zu der Ebene in C lothrechten Geraden CD hat. Daraus ist leicht durch blosse Betrachtung der Figur zu ersehen:

1) Dass NO und nicht NZ die Richtung der Resultanten der Kräfte φ sein wird und sich somit die Figur von links nach rechts drehen muss.

2) Dass die Kraft in der Richtung NG sich zusammensetzt aus der Kraft in der Richtung NO und einer anderen,

deren Richtung NL durch N und den Schnittpunkt L der Geraden CD, KR geht.

3) Dass die Figur von G nach K hin gleiten wird, nicht von G nach R hin.

4) Da die Kraft in der Richtung NV und die Geraden NL, NO ihrer Lage nach gegeben sind, wird die Kraft in der Richtung NO und folglich φ gegeben sein. Ebenso wird die Kraft in der Richtung NL gegeben sein, und da dieselbe sich zur Kraft $\pi . m$ verhält wie LQ zu QC, so wird auch die Kraft π gegeben sein. Damit ist das Problem gelöst.[78])

Scholie I.

116. Es ist übrigens nach § 70 klar, dass der Schwerpunkt G in einer verticalen Geraden herabfallen wird. Damit kann man nun leicht ohne Rechnung die Bewegung der Figur finden. Zieht man nämlich an einem beliebigen Punkte E die Tangente EB, auf die man die Senkrechte GB fälle. Dann wird der Punkt E der Figur die Ebene berühren, wenn G sich in einem GB gleichen Abstande von der Ebene befinden wird.[79])

Wenn der Punkt C (Fig. 37) kein Berührungspunkt ist, wenn z. B. die gegebene Figur ein Dreieck ist, von welchem C einen Eckpunkt vorstellt, so wird sich bei einer Bewegung des Schwerpunktes von G nach V der Punkt C nach einem Punkte E von solcher Lage bewegen, dass $VE = GC$ ist.

Scholie II.

117. *Euler* hat sich im *7. Bd. der Petersburger Mémoiren* mit der Lösung dieses Problemes beschäftigt, doch nur für den Fall, dass die Schwankungen des Körpers auf der Ebene unendlich klein sein sollen; seine Methode besteht darin, dass er die Momente der Kräfte, welche die Theilchen um C (Fig. 36) drehen, den Momenten ihrer absoluten Schwere in Bezug auf den als fest betrachteten Punkt C gleichsetzt, was auf dasselbe hinauskommt, als die Kraft in der Richtung NF in zwei Componenten zu zerlegen, deren eine die in der Richtung NO wirkende Resultante der Kräfte φ ist, welche die Drehung um den Punkt C bewirken, und deren andere durch die Punkte N und C geht und verschwindet.

Nun kann die Kraft in der Richtung NC nur verschwinden, wenn NC senkrecht zu MCS ist, ausser wenn man die Ebene als rauh voraussetzt und von genügender Rauhheit, um die Wirkung der Kraft NC in der Richtung der Ebene aufzuheben. So darf man, damit *Euler*'s Lösung gelte, die Ebene nicht als völlig glatt voraussetzen. Das wollte wahrscheinlich der Verfasser auch mit den Worten andeuten*): In hoc motu vero notandum est planum, super quo fit, aliquantulum asperum esse ponendum, ne curvae de loco suo inter vacillandum dimoveri queant, quod eveniret, si planum maxime foret politum.[80]) Offenbar bedeuten diese Worte »ne de loco suo dimoveri queant«: Wenn nur die Curven ausser ihrer Bewegung um den Berührungspunkt nicht auch eine gleitende Bewegung parallel der Ebene haben. Ich weiss indessen nicht, was *Euler* gehindert hat, auf diese letztere Bewegung in seiner Lösung Rücksicht zu nehmen.[81])

Scholie III.

118. Wenn die Peripherie der Figur und die Oberfläche der Ebene, auf der sie gleitet, nicht völlig glatt sind, so kann man die Kräfte p und π in folgender Weise finden; man betrachte den Punkt C (Fig. 38) als eine kleine Erhebung von gegebener Masse und man nehme an, man wisse, von welcher beschleunigenden Kraft g dieses kleine Körperchen in der Richtung CS oder CM angegriffen werden müsste, um bei einer auch noch so geringen Vergrösserung dieser Kraft den von der Rauhheit der Ebene herrührenden Widerstand zu überwinden. Man zerlege zunächst die absolute Kraft in der Richtung NG in zwei Componenten, von denen die eine die gesuchte Kraft in der Richtung NO sei, die andere in der Richtung der unbekannten Geraden NL wirke. Diese letztere Kraft muss in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine in der Richtung $LK = \pi . m$ ist, die andere in der Richtung LC, durch die man dem Punkte C einen Impuls in der Richtung CT gegeben denken kann, dem Punkte C in der Richtung CS eine der bekannten Grösse g gleiche Wirkung ertheilt.

Bezeichnet man die gegebenen Grössen: GP mit a, GN mit b, GO mit c, CR mit e, RG mit f und die Unbekannte GL mit y, so verhält sich die Kraft in der Richtung NL zu

*) pag. 108.

der Kraft in der Richtung $NG(p \times m)$ wie der Sinus des Winkels GNO oder $\frac{GP}{GN}$ zu dem Sinus des Winkels ZNL oder $\frac{LZ}{NL}$. Nun ist:

$$\frac{GP}{GN} = \frac{a}{b},$$

$$LZ = GP \times \frac{OL}{OG} = \frac{a(c+y)}{c}$$

und

$$NL = \sqrt{b^2 + y^2}.$$

Somit ist die Kraft in der Richtung NL

$$= \frac{p \,.\, m \,.\, NL \,.\, OG}{GN \,.\, OL}.$$

Die Kraft in der Richtung LC ist gleich der Kraft in der Richtung NL, multiplicirt mit dem Verhältniss des Sinus des Winkels NLG oder $\frac{NG}{NL}$ zum Sinus des Winkels RLC oder $\frac{CR}{CD}$; endlich ist die Kraft in der Richtung CS gleich der Kraft in der Richtung LC, multiplicirt mit $\frac{LR}{LC}$, daraus folgt

$$\frac{p \,.\, m \,.\, LR \,.\, GO}{OL \,.\, CR} \text{ oder } p \,.\, m \frac{(y-f)c}{(c+y)e}$$

als der Werth dieser Kraft in der Richtung CS. Sei nun μ die Masse der kleinen Erhebung C, dann muss:

$$p \,.\, m \frac{c(y-f)}{e(c+y)} = g \,.\, \mu$$

sein, woraus man den Werth von y erhält und somit die absoluten Werthe der Kräfte in den Richtungen NL, LK und NO, die man zu finden sucht.

Es ist aber hier eine wichtige Bemerkung zu machen, dass nämlich die auf den Punkt C in der Richtung CS wirkende Kraft in derselben Richtung liegen muss, wie die, in welcher die Theile des Körpers der Ebene parallel gleiten, woraus man erkennt, dass der Punkt L nur zwischen R und A liegen kann, wenn A der Schnittpunkt der Geraden NC, RG ist, und der Ausdruck für die Kraft in der Richtung CM wird hiernach:

$$\frac{p \,.\, m(f-y)c}{e(c+y)} = g \,.\, \mu \,,$$

woraus der Werth von y folgt. Ist dieser Werth grösser als RA, so kann die Figur nichts anderes thun, als sich um den Punkt C drehen, der in jedem Augenblick wechseln wird und während eines Augenblickes als fest betrachtet werden kann. Wünscht man, dass nicht die Kraft, welche nothwendig ist, um den Punkt C trotz des Widerstandes der Ebene zu bewegen, gegeben sei, sondern nur ihr Verhältniss zu dem Drucke dieses Punktes auf die Ebene, so nehme man $RL : RC$ in dem Verhältnisse der Reibungskraft zu der Druckkraft an; man wird so den Punkt L erhalten, der stets zwischen R und A liegen muss; im anderen Falle wird die Figur keine Bewegung parallel der Ebene haben.

Scholie IV.

119. In dem Falle, dass die Ebene MCS (Fig. 38) völlig glatt ist, haben wir gezeigt, dass der Schwerpunkt G in einer verticalen Geraden herabfallen muss. Um die Geschwindigkeit zu erfahren, mit der er fällt, braucht man nur die Kraft zu suchen, welche ihn in jedem Augenblicke in der Richtung GF angreift. Bezeichnet man GF mit x, mit φ die beschleunigende Kraft, welche den Punkt G um C dreht, mit m die Masse des Körpers, so folgt:

1) ist die Kraft in der Richtung $NO = \varphi \,.\, m$ (nach § 111); ferner muss man, da GF gegeben ist, aus der Natur der Curve die Strecke GC kennen, die ich mit X, und die Strecke GP, die ich mit z bezeichne. Die Kraft in der Richtung NR wird sich zur Kraft in der Richtung NO verhalten, wie der Sinus des Winkels PNG zum Sinus des Winkels GNR. Somit ist die Kraft in der Richtung NR:

$$= \frac{\varphi \,.\, m \,.\, PG}{GN} \times \frac{RN}{CF}$$

und die Kraft in der Richtung RL = der Kraft in der Richtung NR multiplicirt mit $\frac{RG}{GN}$, also

$$= \frac{\varphi . m . GP}{GN} = \frac{\varphi . m . GF}{CG}.$$

Somit verhält sich die auf den Punkt G in der Richtung GL wirkende Kraft zu der Kraft, die ihn um C zu drehen sucht, wie $GF : GC$ und die Kraft in der Richtung GF zur Kraft φ, wie $CF : CG$. Somit ist die Kraft in der Richtung GF

$$= \frac{\varphi . CF}{CG}.$$

Nun muss aber die Kraft in der Richtung $NG (p . m)$ sich zu der in der Richtung $NO (\varphi . m)$ verhalten, wie der Sinus von RNk zum Sinus von RNG, also wie $Rk : CF$; somit ist:

$$\varphi = \frac{p . CF}{Rk},$$

folglich die Kraft in der Richtung GF

$$= \frac{p . CF^2}{Rk . CG},$$

und da CF, CG, Rk in x gegeben sind, so ist klar, dass man die Anfangskraft in der Richtung GF als eine Function von x erhalten wird.

Man kann eine analoge Methode zur Auffindung der Geschwindigkeit in den folgenden Augenblicken anwenden. Das Kürzeste ist aber die Benützung des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Sei u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes G (Fig. 39), nachdem er in verticaler Richtung einen Weg $GV = t$ zurückgelegt hat, V die Geschwindigkeit, mit der die in einem gegebenen Abstande b vom Schwerpunkt G befindlichen Theilchen sich um eben diesen Schwerpunkt drehen, p die Schwere, M die Masse, a die Summe der Producte der Theilchen mit den Quadraten ihrer Abstände von G, so ist:

$$2pt = u^2 + \frac{V^2 a}{Mb^2};$$

nun ist t als Function von x und V als Function von u und x gegeben. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Scholie V.

120. Bewegt sich die Figur auf einer Ebene, die nicht glatt ist, und nimmt man die Reibung proportional einem gegebenen Theile der Druckkraft an, so haben die Strecken CR und CL (Fig. 38) ein constantes Verhältniss, folglich bewegt sich der Schwerpunkt G auf der von ihm beschriebenen Curve so, als ob er von einer Kraft getrieben würde, deren Richtung stets mit der Ebene MS einen constanten Winkel einschliesst.

III.

Von Körpern, welche auf einander mit Hülfe von Fäden wirken, an denen sie frei entlang gleiten können.

Problem VIII.

121. Ein Faden $ANPM$ (Fig. 40) von gegebener Länge sei fest in A auf einer horizontalen Ebene befestigt und mit zwei Gewichten[82]) M, P belastet, von denen das eine M fest an dem Faden angebracht sei, während das andere P mittelst eines Ringes an dem Faden entlang gleiten kann, man sucht die Bewegung beider Körper, unter der Annahme, dass jeder von ihnen einen beliebigen Antrieb erhalten habe.

Seien Pp, Mm die beiden von den Körpern P, M in einem Augenblicke durchlaufenen Strecken. Man beschreibe mit einem beliebigen constanten Radius AN den Bogen Nn und mache $n\mathrm{n} = nN$, die Frage reducirt sich dann darauf, die Grösse und Lage der Strecke pV zu finden, die unmittelbar auf Pp folgt, und die Lage VT des anderen Fadentheiles. Ich nehme an, der Körper P würde in dem Augenblicke, in dem er pV zurücklegt, gleichförmig in der Richtung Pp die Strecke:

$$p\mathrm{p} = p\pi + \pi\mathrm{p} = Pp + \pi\mathrm{p}$$

durchlaufen, und ebenso würde der Körper M gleichförmig die Strecke:

$$mo = m\mu + \mu o = Mm + \mu o$$

durchlaufen. Nach unserem Princip hat man die Bewegungen

pp, mo in je zwei andere px, pV und mL, mT zu zerlegen, von solcher Art, dass die Körper p, m sich durch ihre Bewegungen pV, mT nicht stören, d. h. dass

$$AV + VT = Ap + pm,$$

und dass die Körper sich in Folge der Bewegungen px, mL das Gleichgewicht halten würden. Daraus folgt:

1) Es muss mL in der Verlängerung von pm liegen.

2) Es kann, weil der Körper p längs des Fadens gleiten kann, Gleichgewicht nur eintreten, falls seine Richtung px den Winkel Apm halbirt.

3) Schliesslich muss sich die Kraft in der Richtung mL zur Kraft in der Richtung px verhalten, wie der Sinus des halben Winkels Apm zum Sinus des ganzen Winkels.

Da die Strecken Ap, pm, px ihrer Lage nach gegeben sind, so sieht man deutlich, dass das Problem gelöst wäre, wenn man die Grösse der Strecken px, πp kennen würde, und dass man im Uebrigen nur zu rechnen hätte. Nun müssen 1) die Strecken px, πp so beschaffen sein, dass die Winkel VAp und pAP einander gleich sind, 2) sind, wenn die Strecken px und πp gegeben sind, die Strecken AV und VT ihrer Grösse und Lage nach gegeben, und die Summe dieser Strecken muss constant sein. Man erhält somit zwei Bedingungen, aus denen sich zwei Gleichungen zur Auffindung von px und $p\pi$ ergeben. Wir lassen die Analyse folgen:

Sei $AN = 1$, $Nn = dx$, $AP = y$, $PQ = dy$, der Sinus des halben Winkels APM, z, und schliesslich c die Länge des Fadens.

1) Das Differential des Winkels $PAp\,(dx)$ + Differential des Winkels $APM\left(\frac{2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right)$ ist gleich dem Winkel zwischen PM und pm. Folglich ist dieser Winkel zwischen PM und pm

$$= dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

2) $\frac{pD}{Pp}$ und $\frac{PD}{Pp}$, d. h. die Sinus der Winkel pPD und PpD sind durch den Sinus von z und den des Winkels ApP gegeben; ich drücke sie daher so aus:

$$\varphi\left(z, \frac{PQ}{Pp}\right) \text{ und } \varDelta\left(z, \frac{PQ}{Pp}\right)\text{*)}$$

oder:

$$\varphi\left(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{dy^2+y^2dx^2}}\right) \text{ und } \varDelta\left(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{dy^2+y^2dx^2}}\right).$$

Somit ist:

$$pD = Pp\,.\,\varphi\left(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{d^2y+y^2dx^2}}\right)$$

und

$$PD = Pp\,.\,\varDelta\left(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{dy^2+y^2dx^2}}\right).$$

3) Es ist:

$$PM - pm = dy$$

und

$$mB - pD = dy - \left(dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right)^2 . \frac{c-y}{2}.$$

4) Setzt man:

$$px = \beta \quad \text{und} \quad \pi\mathrm{p} = \alpha,$$

so folgt (nach § 78):

$$\measuredangle\, \pi A p = dx - \frac{2\,dx\,dy}{y},$$

$$\measuredangle\, \pi A\mathrm{p} = \frac{\alpha\,dx}{\sqrt{dy^2+y^2dx^2}},$$

$$\measuredangle\, pAV \text{ oder } \measuredangle\, xAp = \frac{\beta z}{y}.$$

Somit:

$$\text{(A)}\qquad \frac{2\,dy\,dx}{y} - \frac{\alpha\,dx}{\sqrt{dy^2+y^2dx^2}} + \frac{\beta z}{y} = 0.$$

5) Es ist:

$$A\pi = y + 2\,dy + y\,dx^2;$$

$$A\mathrm{p} = A\pi + \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{dy^2+y^2dx^2}};$$

*) Die Grössen φ, $\varDelta$, vor eine beliebige andere Grösse gesetzt, sollen in der Folge stets eine Function dieser letzteren Grösse darstellen.

$$AV = A\mathrm{p} - \beta\sqrt{1 - z^2}.$$

Somit:

$$AV = y + 2dy + ydx^2 + \frac{\alpha dy}{\sqrt{dy^2 + y^2dx^2}} - \beta\sqrt{1 - z^2}.$$

Folglich, wenn man dx constant annimmt:

$$\text{(B)} \qquad d^2y = ydx^2 + \frac{\alpha dy}{\sqrt{dy^2 + y^2dx^2}} - \beta\sqrt{1 - z^2}.$$

6) Nun ist:

$$\mu o = \alpha . \frac{Mm}{Pp};$$

$$PM - \pi\mu = 2dy - \left(dx + \frac{2dz}{\sqrt{1 - z^2}}\right)^2 (c - y) \text{ (nach § 76)};$$

$$\pi o = \pi\mu - ol$$

(unter der Voraussetzung, dass μl ein um π als Centrum mit dem Radius $\pi\mu$ geschlagener Bogen und $MB \perp pB$ ist)

$$= \pi\mu - \frac{\alpha . mB}{Pp};$$

$$o\mathrm{p} = \pi o + \frac{\alpha . pD}{Pp};$$

$$oV = o\mathrm{p} - \beta\sqrt{1 - z^2};$$

nun ist in Folge des Gleichgewichts:

$$M \times oT : \frac{P . \beta}{2} = 1 : \sqrt{1 - z^2};$$

folglich:

$$oT = \frac{P . \beta}{2M\sqrt{1 - z^2}},$$

somit:

$$VT = oV - \frac{P . \beta}{2M\sqrt{1 - z^2}},$$

also:

$$VT = c - y - 2dy + \left(dx + \frac{2dz}{\sqrt{1 - z^2}}\right)^2 (c - y)$$

$$- \frac{\alpha . mB}{Pp} + \frac{\alpha . pD}{Pp} - \beta\sqrt{1 - z^2} - \frac{P . \beta}{2M\sqrt{1 - z^2}}.$$

Die Summe dieses Werthes VT und des oben unter 5) gefundenen Werthes von AV muss $= c$ sein, daraus folgt eine Gleichung, die mit (A) zusammen dazu dienen kann, α und β zu eliminiren.

7) Es ist:

$$\measuredangle AVp = ApP - dx - \mathrm{pp}V$$

und

$$\measuredangle pVT \text{ oder } \measuredangle pVo = \measuredangle p\mathrm{p}o + \measuredangle \mathrm{pp}V + \measuredangle \mathrm{po}V.$$

Nun ist:

$$\measuredangle \mathrm{po}V = \frac{\beta z}{c-y},$$

und

$$\measuredangle p\mathrm{p}o = \measuredangle p\pi o - \measuredangle \pi o\mathrm{p} = \measuredangle p\pi o - \frac{\alpha \,.\, PD}{Pp(c-y)};$$

$$\measuredangle p\pi o = \measuredangle p\pi\mu + \measuredangle \mu\pi o,$$

$$= \measuredangle p\pi\mu + \frac{\mu o \,.\, MB}{Mm(c-y)},$$

$$= \measuredangle p\pi\mu + \frac{\alpha \,.\, MB}{Pp(c-y)},$$

$$= \measuredangle p\pi\mu + \frac{\alpha}{Pp(c-y)} \times \left[PD + (c-y)\left(dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right)\right];$$

der Winkel $p\pi\mu$ ist gleich dem Winkel Ppm + dem Winkel zwischen $\pi\mu$ und pm, und dieser letztere Winkel ist (nach § 76):

$$= \left(dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right)\left(1 + \frac{2\,dy}{c-y}\right);$$

somit wird:

$$\begin{aligned}\measuredangle AVp - \measuredangle pVT = {} & \measuredangle ApP + \measuredangle Ppm - dx - \measuredangle \mathrm{pp}V \\ & + \left(dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right)\left(1 + \frac{2\,dy}{c-y}\right) \\ & + \frac{\alpha}{Pp(c-y)} \times \left[PD + (c-y)\left(dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right)\right] \\ & - \frac{\alpha \,.\, PD}{Pp(c-y)} + \measuredangle \mathrm{pp}V + \frac{\beta z}{c-y};\end{aligned}$$

nun ist aber:

$$\sphericalangle ApP + \sphericalangle Ppm = \sphericalangle APM + \frac{2\,dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

somit:

$$d\left(\frac{2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \left(dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right)\left(\frac{2\,dy}{c-y} + \frac{\alpha}{Pp}\right) + \frac{\beta z}{c-y}.$$

Diese Gleichung kann zusammen mit der Gleichung (B) dazu dienen, die Gleichungen der beiden Curven zu finden, da α und β nach 6) bekannt sind.[83])

Bemerkung I.

122. Bringt man einen Faden ABC in den Punkten A und C fest an (Fig. 41), und kann ein Körper B, der der Schwere unterworfen ist oder nicht, frei an dem Faden ABC entlang gleiten, so ist klar, dass dieser Körper B die Ellipse MBN beschreiben wird, deren Brennpunkte A und C sind. Ich behaupte aber weiter, dass er sie in derselben Weise beschreiben wird, als ob er nicht mit dem Faden verbunden wäre und frei in der Höhlung der Ellipse herabfiele. Wenn er sich nämlich frei auf der Ellipse bewegt, ist die Richtung seiner in jedem Augenblicke verlorenen Bewegung eine Normale der Ellipse in dem Punkte, in welchem sich der Körper befindet. Bewegt er sich aber an dem Faden entlang, so ist die Richtung der von ihm in jedem Augenblicke verlorenen Bewegung die Gerade BF, die den Winkel ABC halbirt, und diese Gerade BF ist, wie aus der Theorie der Kegelschnitte bekannt ist, Normale der Ellipse MBN in B. Q. e. d.

Bemerkung II.

123. Geht ein Faden, der in A und C fest ist (Fig. 42) durch einen Körper $KRBGL$ hindurch, der an diesem Faden frei entlang gleiten kann, und sind alle Theile dieses Körpers mit solchen Geschwindigkeiten begabt[84]), dass er sich im Gleichgewichte befindet, so behaupte ich, dass die Resultante die Richtung der Geraden GR haben muss, welche den von den verlängerten Geraden AK, CL gebildeten Winkel AGC halbirt. Sonst würde der Körper RKG entweder nach A oder nach C hingleiten, und es würde folglich entgegen der Voraussetzung kein Gleichgewicht bestehen.

Nach dieser Bemerkung ist es leicht, die Curve zu finden, welche die Punkte K, L beschreiben, sowie die Geschwindigkeit beider Punkte, wenn der Körper einen beliebigen Impuls erhalten hat. Man hat nämlich in jedem Augenblicke vier Unbekannte zu finden, das sind die Richtungen der Punkte K und L und ihre Geschwindigkeiten. Nun müssen diese Richtungen und Geschwindigkeiten derart sein, dass $AK + CL$ constant ist, ebenso wie die Entfernung KL. Ferner müssen die verlorenen Kräfte für alle Punkte des Körpers KRL eine solche Richtung haben, dass die Resultante in der Richtung GR liegt; diese letztere Bedingung giebt zwei Gleichungen. Denken wir uns nämlich die von jedem Theilchen verlorene Kraft aus zwei anderen zusammengesetzt; eine $\|$, die andere $\perp GR$, so muss die Summe dieser letzteren null und die Richtung der Resultanten der anderen die Richtung GR sein; man erhält also im Ganzen vier Gleichungen für vier Unbekannte, und das Problem wird so seine Lösung finden. Ich führe die Rechnung hier nicht aus, da man sich wohl denken kann, dass dieselbe zu lang und sehr complicirt ist, und da es hier genügt, ihren Grundgedanken anzuführen.

Allgemeine Scholie.

124. Ich will diesen Gegenstand nicht beenden, ohne eine ziemlich wichtige Bemerkung über die Lösung der Probleme zu machen, bei denen man die Körper durch Fäden verbunden annimmt. Da die Fäden als unausdehnbar vorausgesetzt werden, so können sich die Körper niemals in einem Abstande von einander befinden, der grösser ist, als die Länge des Fadens zwischen ihnen; nichts hindert sie aber, einen kleineren Abstand zu haben. Wären so z. B. zwei Körper an den beiden Enden eines Fadens befestigt, und gäbe man ihnen derartige Bewegungen, dass sie denselben, ohne den Faden zu spannen, folgen könnten, so ist klar, dass sie diesen Bewegungen in derselben Weise folgen würden, als ob sie frei wären, so dass in diesem Falle somit kein neues Problem zu lösen wäre. Man kann daher auf diese Art von Fällen das von uns bisher benützte Princip nicht anwenden: denn wollte man von diesem Princip Gebrauch machen, so würde man finden, dass die Bewegungen, mit denen die Körper sich das Gleichgewicht halten sollten, anstatt den Faden zu spannen, im Gegentheil seine beiden Enden zu nähern suchen würden; und dass somit, da

der Faden dieser letzteren Wirkung keinen Widerstand entgegensetzt, diese Bewegungen nicht zerstört werden können.[85])

Allgemein, wenn die Körper durch Fäden verbunden sind, versichert man sich, ob die Fäden immer gespannt bleiben müssen, indem man zusieht, ob bei dieser Voraussetzung die Kräfte, welche sich das Gleichgewicht halten sollen, Richtungen besitzen, die den Faden zu verlängern streben. Ist dies der Fall, so wird man berechtigt sein, anzunehmen, dass sich die Fäden nicht biegen; im anderen Falle werden sich die Körper genau so bewegen, als ob sie frei und nicht mit einander verbunden wären. Man braucht alle diese Vorsichtsmaassregeln nicht zu treffen, wenn die Verbindung der Körper in unbiegsamen Stäben besteht, an denen sie fest angebracht sind. Denn dann ist ihr Abstand nothwendig gleich der Länge des Stabes zwischen ihnen und kann weder grösser noch kleiner als dieser sein. So würde auch die von uns eben über den Fall der Verbindung durch Fäden gemachte Bemerkung überflüssig sein, wenn die Verbindung anstatt in Fäden in unbiegsamen durch Charniere mit einander verbundenen Stäben bestände. Es besteht übrigens eine völlige Analogie zwischen dem letzteren Falle und dem Falle der Verbindung durch Fäden. Denn wenn die Bewegungen, welche mit Fäden verbundenen Körpern eingeprägt sind, eine solche Beschaffenheit haben, dass die Fäden dieselben in Folge ihrer Unausdehnbarkeit verändern können, so erhalten diese Bewegungen dieselbe Veränderung, als wenn die Fäden unbiegsame, durch Charniere mit einander verbundene Stäbe wären.

IV.

Ueber Körper, die auf einander unelastische oder elastische Stösse ausüben.[86])

Problem IX.

125. Ein Körper von der Masse m und der Geschwindigkeit u bewege sich auf ein und derselben Geraden mit einem anderen Körper von der Masse M und der Geschwindigkeit U, man sucht die Geschwindigkeit dieser Körper nach dem Stoss.

Sei v die Geschwindigkeit des ersten Körpers nach dem Stoss, V die des zweiten. Man setze (nach § 23):

$$u = v + u - v$$

und

$$U = V + U - V.$$

Es muss dann nach unserem Princip:

$$V = v$$

und

$$m(u - v) + M(U - V) = 0$$

sein. Somit ist:

$$v \text{ oder } V = \frac{mu + MU}{m + M}.$$ [87]

Zusatz.

126. Wird ein Körper M von beliebiger Masse, der mit einer gegebenen Geschwindigkeit U begabt ist, von einem unendlich kleinen Körper m mit der Geschwindigkeit u getroffen, so erhält er durch diesen Stoss eine Bewegungsgrösse

$$= m(u - U),$$

und ist u unendlich gross gegen U, so wird die Bewegungsgrösse, die er erhalten wird, gleich mu, also gleich der Bewegungsgrösse des stossenden Körpers. Man sieht hieraus, falls die Bewegung eines Körpers durch einen Antrieb, von dem er so zu sagen in jedem Augenblicke wiederholte Stösse erhält, beschleunigt oder verzögert wird, darf die Bewegungsgrösse, welche der Körper in jedem Augenblicke gewinnt oder verliert, nur dann der Stosskraft[88] proportional gesetzt werden, wenn man dieselbe von einer unendlich kleinen Masse ausgeübt denkt, die mit einer gegen die Geschwindigkeit des getroffenen Körpers unendlich grossen Geschwindigkeit begabt ist. In diesem Falle ist die Wirkung dieser Kraft immer dieselbe, mag der Körper in Bewegung oder in Ruhe sein.

Bemerkung.

127. Wir können hier beweisen, was wir weiter oben vorausgenommen haben (§ 19), dass das Princip von der Proportionalität der beschleunigenden Kräfte und des Elementes der Geschwindigkeit nicht zur Bestimmung der aus dem Stosse resultirenden Bewegungen benützt werden darf. In der That,

nehmen wir z. B. an, dass ein Körper auf einen anderen in Ruhe befindlichen stosse, dann wird die von dem getroffenen Körper gewonnene Bewegungsgrösse $\frac{muM}{m+M}$ sein. Es müsste somit die diese Bewegung hervorbringende Bewegungsursache mit $\frac{mMu}{M+m}$ proportional sein. Wie kann man aber 1) beweisen, dass die Bewegungsursache für den Körper M mit $\frac{Mmu}{M+m}$ proportional ist eher, als irgend einer anderen Function der Grössen M, m, u? Wäre selbst nicht die Annahme ganz natürlich, dass mu proportional der Bewegungsursache anzusehen sei? und das würde unfehlbar zu Irrthümern führen, da die Bewegungsursache für den Körper M bei im Uebrigen gleichen Verhältnissen der Grösse mu nicht proportional ist. Würde man 2) auch wissen, dass die Bewegungsursache mit $\frac{Mmu}{M+m}$ proportional ist, so könnte man daraus nichts weiter schliessen, als dass die mit ihrer Wirkung identificirte Bewegungsquantität des Körpers M mit $\frac{Mmu}{M+m}$ proportional ist, ohne zu wissen, ob sie diese Grösse selbst ist. Man muss somit nothwendig andere Principien benützen, um die absolute Bewegungsgrösse des getroffenen Körpers zu bestimmen.

Hülfssatz IX.

128. Auf einer Ebene QR befinde sich ein Körper $AKQR$ (Fig. 43) von beliebiger Gestalt, welcher frei auf dieser Ebene von Q nach R oder von R nach Q gleiten kann, es befinde sich ferner ein beliebiger Körper M an einer beliebigen Stelle auf KQ; wir wollen annehmen, der Körper $AKQR$ habe in der Richtung RQ eine beliebige Geschwindigkeit und der Körper M eine solche Geschwindigkeit und Richtung, dass er dem Körper $AKQR$ das Gleichgewicht hält.

So behaupte ich, dass dies nur eintreten kann, wenn 1) $MO \perp KQ$ die Richtung des Körpers M ist. Wenn 2) die Kraft des Körpers M in der Richtung MO und die Kraft des Körpers $AKQR$ in der Richtung RQ sich auf eine einzige Kraft reduciren, deren Richtung lothrecht zur Ebene QR ist.

Zusatz.

129. Es muss sich somit die Kraft des Körpers M zu der des Körpers $AKQR$ verhalten wie GL zu LS.[89])

Scholie.

130. Die Richtung der Resultanten der auf die beiden Körper wirkenden Kräfte muss nicht bloss lothrecht zu der Ebene sein, sondern auch durch die Basis QR hindurchgehen. Daraus sieht man, falls man durch den Schwerpunkt der Figur $AKQR$ eine Parallele zu QR legt, muss diese Gerade die Linie MO in einem Punkte schneiden, von dem man ein auf QR auftreffendes Loth fällen kann.

Problem X.

131. Man nehme den Körper M mit einer beliebigen zur Basis QR lothrechten beschleunigenden Kraft begabt an, während im Uebrigen die Voraussetzungen des vorstehenden Hülfssatzes bestehen bleiben, man sucht die Bewegung des Körpers M und die der Figur.

Seien AB, BC (Fig. 44) zwei auf einander folgende Seiten der Figur, so gewählt, dass $AB = BV$ sei, und nehmen wir an, dass, während der Körper M AB zurücklegt, die Figur den Weg Aa durchlaufen würde; so dass die Seiten AB, BC in die Lagen aB, BD gelangten. Sei nun:

$$a\alpha = Aa,\ \mathrm{Bb} = A\mathrm{B}$$

und schliesslich bδ die Strecke, welche der Körper M in Folge seiner beschleunigenden Kraft zurücklegen würde.[90]) Dann wären $a\alpha$, Bδ die Strecken, welche die beiden Körper in dem folgenden Augenblicke bei Abstraction von ihrer Wechselwirkung zurücklegen würden. An Stelle dieser Strecken werden sie, der eine die Strecke Aa, der andere die Strecke Bz durchlaufen, welche durch die Seite $bz \parallel \beta d$ abgegrenzt wird; und es muss nach unserem Princip die mit der Geschwindigkeit δz begabte Masse des Körpers M der mit der Geschwindigkeit aα begabten Masse m der Figur das Gleichgewicht halten. Daraus folgt, dass δz senkrecht zu bz sein muss, und:

$$m\,.\,\alpha\mathrm{a} : M\,.\,z\delta = i\mathrm{b} : z\delta.$$

Es folgt somit:

$$m\,.\,\alpha\mathrm{a} = M\,.\,i\mathrm{b}.$$

Nun ist aber:

$$i\mathrm{b} = kz - \mathrm{b}o - \mathrm{a}\alpha,$$

und

$$\mathrm{a}\alpha = d(\alpha a).$$

Bezeichnet man daher Aa mit du, BK mit dy, so folgt:

$$md^2u = Md^2y - Md^2u$$

oder

$$d^2u(M+m) = Md^2y.$$

Eine allgemeine und sehr einfache Gleichung zur Auffindung der Bewegung der beiden Körper, die ganz unabhängig von der auf M wirkenden Kraft ist, wenn dieselbe nur stets senkrecht zu QR wirkt.[91])

Scholie I.

132. Die Constanten, welche man bei der Integration der Gleichung:

$$Md^2y = (M+m)d^2u$$

hinzufügen muss, hängen von dem ersten dy und dem ersten du ab, Werthe, die stets leicht zu finden sind. Geht z. B. die Bewegung des Körpers M in A (Fig. 45) in der Richtung der Tangente AB im Punkte A vor sich, so hat man die Tangente AP zu ziehen und

$$AO = \frac{NQ\,.\,M}{M+m}$$

zu machen, um den Punkt O zu erhalten, an welchem sich die Figur[92]) befinden wird, wenn der Körper A in N ist.

Wirkt der Körper M durch seine blosse beschleunigende Kraft ohne einen Anfangsimpuls, so hat man $AQ \perp BD$ zu ziehen und

$$AO = \frac{NQ\,.\,M}{M+m}$$

zu machen.

Im Uebrigen ist nach § 70 klar, dass in diesem letzteren Falle der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Körper in einer verticalen Geraden herabfällt.

Scholie II.

133. Man könnte mehrere andere Lösungen dieses Problemes anführen, die alle auf die Gleichung:

$$Md^2y = (M+m)d^2u$$

hinauslaufen. Ich habe die eben angeführte Lösung allen anderen vorgezogen, weil sie äusserst einfach ist.

Alle dieser Aufgabe analogen Probleme werden stets durch Anwendung unseres Princips ihre Lösung finden, und eine Schwierigkeit kann nur noch in der Rechnung bestehen.

Hülfssatz X.

134. Zwei sich in den Richtungen GB, CD (Fig. 46) bewegende Kugeln G, C seien mit Geschwindigkeiten begabt, die durch die unendlich kleinen Strecken GB, CD dargestellt werden; es ist klar, falls

$$DB = CG,$$

falls also:

$$DE = BF$$

ist, werden die Bewegungen dieser beiden Kugeln sich nicht gegenseitig hindern; daraus folgt, damit allgemein diese Kugeln sich gegenseitig nicht hindern, muss die Geschwindigkeit des Berührungspunktes in der Richtung der zu beiden Körpern[93]) normalen Geraden CAG, auf beiden Seiten gleich sein.

Zusatz.

135. Wenn zwei Körper von beliebiger Figur sich berühren, und wenn man ihren Berührungspunkt[94]) als eine kleine Kugelfläche ansieht, so ist ersichtlich, damit diese beiden Körper sich nicht gegenseitig hindern, muss die Geschwindigkeit des Berührungspunktes in der Richtung der durch diesen Punkt gehenden Normalen der beiden Oberflächen für beide Körper gleich sein.

Hülfssatz XI.

136. Wenn beliebig viele Körper in solcher Weise auf einander stossen, dass dieselben bei Annahme

vollkommener Härte und Fehlens jeglicher Elasticität alle nach dem Stosse in Ruhe bleiben; so behaupte ich, sie werden, wenn sie vollkommen elastisch sind, jeder mit der vor dem Stosse inne gehabten Geschwindigkeit zurückkehren. Denn die Wirkung der Elasticität ist, jedem Körper die durch die Wirkung der anderen Körper verlorene Geschwindigkeit im entgegengesetzten Sinne wieder zu ertheilen.

Zusatz.

137. Wenn daher beliebig viele harte Körper auf einander stossen, wenn ferner a, b etc. ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoss sind, die sich nach dem Stosse in a, b etc. verwandeln, so betrachte man die Geschwindigkeiten a, b etc. als zusammengesetzt aus den Geschwindigkeiten a, α; b, β etc.; dann werden die Geschwindigkeiten dieser selben Körper sich nach dem elastischen Stoss aus den Geschwindigkeiten a, $(-\alpha)$; b, $(-\beta)$ etc. zusammensetzen.

Wir werden somit in den folgenden Problemen nur von dem Stoss harter Körper sprechen, da man aus denselben leicht die Gesetze der Bewegung elastischer Körper[95]) ableiten kann.

Ich untersuche hier nicht, ob es vollkommen harte Körper giebt, das ist eine Frage, die mehr der Physik[96]) als der Mechanik angehört, und ich nehme hier vollkommen harte Körper nur in demselben Sinne an, wie man in der Mechanik gewöhnlich unbiegsame Hebel, reibungslose Maschinen etc. voraussetzt. Ich nehme gleichfalls als eine Erfahrungswahrheit an, dass die Elasticität jedem Körper die durch den Stoss verlorene Bewegung in entgegengesetztem Sinne wieder ertheilt, ohne auf die Untersuchung einzugehen, wie diese Zurückerstattung vor sich geht.

Da es mit ziemlicher Sicherheit bewiesen ist, dass die elastischen Körper sich nach dem Stoss abplatten und zusammenziehen, um dann wieder in ihre erste Form zurückzugehen, so könnte man glauben, dass unsere Annahme ihrer Incompressibilität nicht der richtige Weg zur Auffindung der Bewegungsgesetze dieser Körper sei, und es ist wahr, dass dieser Umstand die Gesetze mehr oder weniger verändern muss, wie wir weiter unten zeigen werden. Trotzdem können wir wenigstens annehmen, dass die Körper ihre Form sehr wenig ändern und dass die Compression ebenso wie das Zurückgehen in die frühere Lage in einer sehr kleinen Zeit vor sich geht; in diesem Falle wird die Bewegung nach dem Stoss für unsere Sinne dieselbe sein, wie wenn man die Körper als incompressibel betrachtete. Man könnte diese Probleme streng lösen, wenn man wüsste, nach welchem Gesetze die Compression die Form des Körpers ändert; man kann darüber indessen nur Hypothesen aufstellen.

Problem XI.

138. Nehmen wir an, ein Körper A (Fig. 47) stosse auf einen anderen in Ruhe befindlichen BOQ in einer Richtung AC, die nicht durch den Schwerpunkt des getroffenen Körpers gehe, man sucht die Bewegung dieser beiden Körper nach dem Stoss.

Welche Bewegung auch der Körper BOQ annehmen möge, sicher ist (nach § 61), dass stets sein Schwerpunkt nach dem Stosse in gerader Richtung fortschreiten wird, während alle seine Theile um eben diesen Schwerpunkt rotiren werden. Er muss ferner nach unserem Princip, wenn man ihm eine der durch den Stoss erhaltenen entgegengesetzte Bewegung einprägte, dem Körper A Gleichgewicht halten, falls dieser mit der durch den Stoss verlorenen Bewegung begabt ist.

Es ist eine leicht zu beweisende Behauptung, dass bei der Bewegung des Schwerpunktes M in einer beliebigen Richtung und bei Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt die Richtung der Resultanten der Richtung des Schwerpunktes parallel ist. Nun kann die Richtung dieser Kraft keine andere sein, als die Gerade CA, welche im Berührungspunkt normal ist. Es muss somit die Bewegung des Schwerpunktes $M \parallel CA$ sein. Ferner muss die Rotationsgeschwindigkeit derart sein, dass bei Combination derselben mit der Bewegung des Schwerpunktes M die Körper sich gegenseitig nicht hindern, d. h. sie müssen eine gleiche Geschwindigkeit in demselben Sinne haben. Fällt man nun die Senkrechte MN auf CA, so ist leicht zu sehen, dass die Bewegung des Berührungspunktes A in der Richtung AN gleich der Bewegung des Punktes N ist. Die Schwierigkeit reducirt sich also darauf, die Geschwindigkeit des Punktes M und die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes N zu finden.

Sei u die Geschwindigkeit des Körpers A vor dem Stoss, u seine Geschwindigkeit nach dem Stoss, a die Geschwindigkeit von M, v die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes N, dann ist 1)

$$a + v = \mathrm{u}.$$

Ferner ist nothwendig die Resultante aus den Bewegungen der einzelnen Theilchen des Körpers entgegengesetzt gleich mit $A(u - \mathrm{u})$; nun muss diese Kraft $= Ma$ sein und die Richtung der Geraden CA haben; somit ist 2)

$$Ma = A(u - \mathrm{u}).$$

3) ist, wenn man die Summe der Producte aus den Theilchen des Körpers M und den Quadraten ihrer Abstände von M mit p bezeichnet:

$$\frac{v \,.\, p}{MN} = M \,.\, a \,.\, MN.$$

Diese drei Gleichungen werden dazu dienen, die Unbekannten a, v, u zu finden; das ist die Lösung der Aufgabe.[97])

Problem XII.

139. Zwei kugelförmige Körper A, a (Fig. 48), die an den in C und c festen Stäben CA, ca befestigt sind, mögen mit gegebenen Geschwindigkeiten auf einander stossen, man sucht ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoss; vorausgesetzt wird dabei, dass sich beide vor dem Stosse nach derselben Seite bewegen.

Seien u, v die Geschwindigkeiten der Centra A, a vor dem Stoss, u, v die Geschwindigkeiten dieser selben Centra nach dem Stoss. Nach unserem Princip müssen diese Geschwindigkeiten u, v derart sein, dass die beiden Körper sich nicht gegenseitig hindern, und dass dieselben, falls ihre Centra die Geschwindigkeiten u — u, v — v hätten, sich Gleichgewicht hielten, d. h. falls die Punkte A, a mit den Geschwindigkeiten u — u, v — v begabt sind, muss die in der Richtung Aa wirkende, in A concentrirt gedachte Kraft des Körpers A gleich der in der Richtung aA wirkenden, in a concentrirt gedachten Kraft des Körpers a sein.

Fällt man die zu Aa senkrechten Geraden CG, cg, so giebt die erste dieser beiden Bedingungen:

$$\frac{\mathrm{u}\,.\,CG}{CA} = \frac{\mathrm{v}\,.\,cg}{ca}.$$

Nennt man ferner F die Summe der Producte aus den Theilchen des Körpers A und den Quadraten ihrer Abstände von C, und f die analoge Grösse für den Körper a, so giebt die zweite Bedingung:

$$\frac{F\,.\,(u-\mathrm{u})}{AC\,.\,CG} + \frac{f\,.\,(v-\mathrm{v})}{ac\,.\,cg} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen werden sich die Werthe von u und v ergeben.[98])

Zusatz I.

140. Sind die Körper elastisch, so werden ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoss (nach § 137) die folgenden sein:

$$\mathrm{u} + \mathrm{u} - u \quad \text{und} \quad \mathrm{v} + \mathrm{v} - v.$$

Die Summe der lebendigen Kräfte wird nach dem Stoss:

$$\frac{F}{AC^2}(2\,\mathrm{u} - u)^2 + \frac{f}{ac^2}(2\,\mathrm{v} - v)^2$$

$$= \frac{Fu^2}{AC^2} + \frac{fv^2}{ac^2} + \frac{4\,F}{AC^2}(\mathrm{u}^2 - \mathrm{u}u) + \frac{4\,f}{ac^2}(\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}v).$$

Multiplicirt man aber das vorletzte Glied rechts mit

$$\frac{CA}{CG} \times \frac{CG}{CA},$$

das letzte mit

$$\frac{ca}{cg} \times \frac{cg}{ca},$$

was ihre Werthe in keiner Weise ändert, so sieht man, dass sie sich gegenseitig fortheben, da:

$$\frac{\mathrm{u}\,.\,CG}{CA} = \frac{\mathrm{v}\,.\,cg}{ca}$$

und

$$\frac{F\,.\,(\mathrm{u}-u)}{AC\,.\,CG} + \frac{f\,.\,(\mathrm{v}-v)}{ac\,.\,cg} = 0.$$

Somit ist die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoss

$$= \frac{F.u^2}{AC^2} + \frac{f.v^2}{ac^2},$$

d. h. die Summe der lebendigen Kräfte ist vor und nach dem Stoss dieselbe.

Zusatz II.

141. Sind die Geraden CA, ca im Augenblicke des Stosses parallel, so hat man:

$$CG = CA, \quad cg = ca$$

zu setzen, im Uebrigen wie oben zu verfahren. Dieser letzte Fall ist von *Jean Bernoulli* jun. im 7. *Bd. der Petersburger Mémoiren* unter Annahme elastischer Körper gelöst worden. Unsere beiden Lösungen sind sehr verschieden, sowohl in der Methode, als auch im Resultat. Denn in der Abhandlung von *Bernoulli* werden die Geschwindigkeiten nach dem Stoss durch Wurzelgrössen ausgedrückt; bei uns kann man sich leicht überzeugen, dass keine Wurzelgrössen vorkommen können. Die Grössen F, f, die einzigen, welche Wurzelgrössen hineinbringen könnten, enthalten solche nicht, da man, falls man die Radien der Kugeln A, a mit b, β bezeichnet,

$$CN = \mathrm{a}, \quad cn = \alpha$$

setzt, findet:

$$F = (\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{a}b + \tfrac{7}{5}b^2)A,$$

$$f = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \tfrac{7}{5}\beta^2)a.$$

Indessen abgesehen davon, dass *Bernoulli*'s Lösung nicht direct ist, indem sie sich auf das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte stützt, gründet sich diese Lösung noch auf ein anderes Princip, das ich nicht für richtig halte. Dieses Princip besteht darin, den durch den unbiegsamen Stab CA bewegten Körper A so zu betrachten, als ob alle seine Theile dieselbe Bewegung hätten, wie sein Centrum A, und als ob sich gleichzeitig der Körper A um sein Centrum mit einer der des Stabes gleichen Winkelgeschwindigkeit drehte. In Folge davon ist die Kraft des Körpers A nach ihm die gleiche, als ob derselbe nicht an dem Stabe befestigt wäre und alle seine Theile eine der des Centrums gleiche Geschwindigkeit hätten, ohne irgend welche Drehung; das scheint mir den Gesetzen der Mechanik entgegenzulaufen. *Bernoulli* begnügt sich in § XV seiner Abhandlung mit dem Nachweis, dass in beiden Fällen die Bewegungsgrösse dieselbe ist, mag der Körper um C rotiren oder mögen sich alle seine Theile mit einer der des Centrums A gleichen Geschwindigkeit bewegen, wogegen nichts einzuwenden ist. Es ist aber bei einer sich um einen festen Punkt drehenden Kugel Bewegungsgrösse und Kraft nicht dasselbe. Man hat noch auf den Hebelarm Rücksicht zu nehmen, mit dem jedes Theilchen wirkt; es ist die Summe der Producte jedes Elementes mit seiner Geschwindigkeit und seinem Abstand von dem festen Punkte das, was seine Kraft ausmacht, und nicht bloss die Summe der Producte jedes Elementes mit seiner Geschwindigkeit.

Problem XIII.

142. Zwei Körper A, B (Fig. 49), welche an in C und G festen Fäden CA, CG befestigt sind, mögen auf einander stossen, man sucht ihre Bewegungen nach dem Stoss.

Sei u die Drehungsgeschwindigkeit des Punktes A um C vor dem Stoss, — diese Geschwindigkeit ist allen Theilen des Körpers A gemeinsam — sei ferner v die Drehungsgeschwindigkeit des Schwerpunktes des Körpers A um den Aufhängungspunkt[99]) vor dem Stoss. Es seien in gleicher Weise U und V die Geschwindigkeiten, welche für den Körper B mit u und v analog sind; es mögen sich endlich diese Geschwindigkeiten nach dem Stoss in u und v, U und V verändern, die derart beschaffen sein müssen, dass die Körper A, B, ohne sich in dem Augenblicke nach dem Stoss gegenseitig zu hindern, vereint weiter gehen, und dass sie, falls sie nur die Geschwindigkeiten u — u, v — v, U — U, V — V hätten, sich das Gleichgewicht hielten.

Wenn alle Theile des Körpers A (Fig. 50) als mit der Geschwindigkeit u — u begabt angesehen werden, kann man alle ihre Bewegungen auf eine einzige Kraft zurückführen, deren Wirkung OK durch den Schwerpunkt des Körpers A geht und senkrecht zu der nach L hin verlängerten Geraden CA ist. Wenn ferner der Schwerpunkt des Körpers A mit der Drehungsgeschwindigkeit v — v um A begabt ist, findet man (nach § 112), ohne den Werth von v — v zu kennen, die Richtung NO der Resultanten. Die Kraft in der Richtung OP, die ich als aus den Kräften in den Richtungen OK, NO resultirend annehme, muss zerstört werden. Sie muss daher so beschaffen sein, dass man sie in zwei Componenten zerlegen kann, von denen die eine in der Richtung $PL \parallel CA$, die andere in der Richtung Pa wirkt, der Normalen in a, dem Berührungspunkte der beiden Körper. Da nun die Lage der Punkte P, O durch die sämmtlich ihrer Lage nach gegebenen Geraden aP, CA, NO, KO bestimmt ist, so folgt, dass die Richtung OP der Resultanten der Kräfte in den Richtungen OK und NO gleichfalls gegeben ist und folglich auch das Verhältniss dieser Kräfte in den Richtungen OK und NO. Nennt man aber m die Masse des Körpers A, so ist die Kraft in der Richtung OK

$$= m(u - \mathrm{u}),$$

und die in der Richtung NO

$$= m(v - \mathrm{v}).$$

Somit ist das Verhältniss von $u - \mathrm{u}$ zu $v - \mathrm{v}$ gegeben. Man findet durch eine ähnliche Ueberlegung, dass das Verhältniss von $U - \mathrm{U}$ zu $V - \mathrm{V}$ für den anderen Körper gegeben ist. Man kann so von den vier Unbekannten u, v, U, V zwei eliminiren. Man hat noch zwei weitere Bedingungen zu erfüllen, es muss nämlich die Kraft in der Richtung Pa derjenigen Kraft gleich sein, welche auf den anderen Körper in entgegengesetztem Sinne wirkt, und es müssen ferner diese Körper in dem Augenblicke nach dem Stoss vereint weiter gehen, d. h. es muss die Geschwindigkeit des Berührungspunktes a in der Richtung Pa für beide Körper gleich sein. Diese beiden Bedingungen geben zwei weitere Gleichungen, die zur Bestimmung der beiden übrigen Unbekannten dienen, und diese Gleichungen werden niemals von höherem als dem ersten Grade sein.[100])

Ueber den gleichzeitigen Zusammenstoss eines Körpers mit mehreren anderen.

Problem XIV.

143. Wir wollen annehmen, ein kugelförmiger Körper A (Fig. 51), der sich in einer gegebenen Richtung AQ mit einer gegebenen Geschwindigkeit

bewegt, begegnet gleichzeitig zwei in Ruhe befindlichen Körpern B, C, man sucht die Richtungen und Geschwindigkeiten dieser drei Körper nach dem Stoss.

Sei $AN = u$ die Geschwindigkeit des Körpers A vor dem Stoss, AR die gesuchte Richtung desselben nach dem Stoss und $AV = v$ seine Geschwindigkeit gleichfalls nach dem Stoss; BZ, CX die Geschwindigkeiten, welche die Körper B, C erhalten (alle diese Strecken AN, AV, BZ, CX, welche Geschwindigkeiten darstellen, werden unendlich klein angenommen).

Die Geschwindigkeit BZ des Körpers B und die Geschwindigkeit AV des Körpers A müssen (nach § 134) so beschaffen sein, dass:

$$VZ = AB.$$

In gleicher Weise müssen die Geschwindigkeit CX des Körpers C und die Geschwindigkeit AV des Körpers A so beschaffen sein, dass:

$$VX = AC.$$

Setzt man ferner im Augenblicke des Stosses den Körper A mit den Bewegungen AV, VN oder AV, Ap und die Körper B, C mit den gleichen und entgegengesetzten Bewegungen BZ, Bz; CX, cx begabt voraus; so müssen sich nach unserem Princip die mit den Bewegungen Ap, Bz, Cx begabten Körper A, B, C das Gleichgewicht halten.

Seien die gegebenen Grössen:

$$AQ = a, \quad QS = T, \quad QT = \mathrm{T}$$

und die Unbekannten:

$$QR = t, \quad AV = v,$$

dann ist (wenn man $RO \perp AS$ und $Ro \perp AT$ zieht):

$$\frac{RO}{AR} = \frac{(T - t)a}{\sqrt{a^2 + T^2}\sqrt{a^2 + t^2}};$$

$$\frac{Ro}{AR} = \frac{(\mathrm{T} + t)a}{\sqrt{a^2 + \mathrm{T}^2}\sqrt{a^2 + t^2}};$$

da ferner $VZ = AB$, so wird:

$$BZ = \frac{AV.AO}{AR} = v\left(\frac{\sqrt{a^2+T^2}}{\sqrt{a^2+t^2}} - \frac{(T-t)T}{\sqrt{a^2+T^2}\sqrt{a^2+t^2}}\right).$$

Man findet durch eine ähnliche Ueberlegung:

$$CX = v\left(\frac{\sqrt{a^2+T^2}}{\sqrt{a^2+t^2}} - \frac{(T+t)T}{\sqrt{a^2+T^2}\sqrt{a^2+t^2}}\right).$$

Fällt man nun vom Punkte V die Senkrechte VP auf AN, so wird in Folge des Gleichgewichtes:

$$A.PN = B\frac{BZ.AQ}{AS} + C\frac{CX.AQ}{AT},$$

und

$$A.VP = B\frac{BZ.QS}{AS} + C\frac{CX.QT}{AT}.$$

Setzt man nun in diesen Gleichungen an Stelle der in dieselben eingehenden Strecken ihre analytischen Werthe, so gelangt man zur Bestimmung von v und t; und man erkennt, dass man es immer nur mit der Auflösung linearer Gleichungen zu thun hat.[101])

Bemerkung I.

144. Ich verbreite mich nicht weiter über die Lösung dieses Problemes und suche dieselbe nicht einmal zu vereinfachen, weil man eine sehr schöne Lösung desselben in dem neuen Werke von *Mac-Laurin* findet. Man kann übrigens mit unserem Princip die Gesetze des Stosses auch für den Fall finden, dass eine Kugel beliebig vielen anderen begegnet; ein Problem, das von *Jean Bernoulli*, aber unter Anwendung des Princips von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, und nur für den Fall gelöst worden ist, dass die getroffenen Kugeln gleich sind und symmetrisch gelagert in Bezug auf die Richtung der stossenden Kugel. *Bouguer* hat gleichfalls das Problem nur für diesen letzten Fall gelöst (*Journal des Savants*, April 1728), ohne aber dabei von dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte Anwendung zu machen. *Bernoulli* hat in seiner Abhandlung über die Bewegung aus der von ihm gegebenen Lösung eine grosse Anzahl sehr schöner Folgerungen über die Bewegung von Körpern in Flüssigkeiten abgeleitet. Es finden sich dort unter anderen mehrere Sätze, deren Beweis

er nicht angegeben hat, und die in einer Abhandlung über die Flüssigkeiten ihren Platz finden können, welche ich, wie ich hoffe, nach der vorliegenden, veröffentlichen werde.[102])

Bemerkung II.

145. Wenn man übrigens auf die Natur des allgemeinen Problemes über das gleichzeitige Auftreffen von Körpern auf mehrere andere mit gegebenen Geschwindigkeiten und Richtungen näher eingeht, so kann man im Einzelnen mehreren Schwierigkeiten begegnen, und es wird gut sein, dieselben hier zu klären, zumal dieselben uns Gelegenheit geben, über die Gesetze des Stosses der Körper einige neue Bemerkungen zu machen.

Nehmen wir z. B. an, eine sich in der Richtung AL bewegende Kugel A (Fig. 52) begegne gleichzeitig den Kugeln C, D, E, F, welche in Bezug auf die Gerade AL symmetrisch liegen; die Kugeln F, E seien in Ruhe, und die Kugeln C, D mögen $\parallel AL$ eine der des Körpers A gleiche Geschwindigkeit haben; dann ist klar, dass der Körper A keine andere Wirkung auf die Kugeln C und D haben und dass alles sich in derselben Weise abspielen wird, als ob der Körper A die Kugeln E, F gar nicht berührte. Hätten dagegen die Kugeln C, D eine kleinere Geschwindigkeit in der Richtung AL, als der Körper A, dann würde der Körper A auf diese Kugeln einwirken, und es scheint zunächst, dass er allen vier Kugeln Bewegung mittheilen muss.

Hier liegt indessen eine Schwierigkeit. Nehmen wir an, die Geschwindigkeit der Kugeln C und D vor dem Stoss sei nur sehr wenig kleiner, als die des Körpers A. Vergrössert sie sich nur um sehr wenig nach dem Stoss, so wird sich, da die Kugeln A, C, D vereint fortschreiten müssen, die Geschwindigkeit der Kugel A nur sehr wenig vermindern; da ferner die Kugeln F, E gleichfalls mit der Kugel A vereint fortschreiten müssen, so werden sie eine Geschwindigkeit haben, die sich zu der Geschwindigkeit des Körpers A nach dem Stoss verhält, wie der Cosinus des Winkels BAF zum ganzen Sinus, und folglich im Verhältniss zu der von dem Körper A verlorenen Geschwindigkeit unendlich[103]) gross ist. Nach unserem Princip soll aber der mit seiner verlorenen Geschwindigkeit begabte Körper A den Körpern E, F, C, D, Gleichgewicht halten, wenn sie mit den von ihnen gewonnenen

Geschwindigkeiten entgegengesetzten Bewegungen begabt sind; nun ist die von dem Körper A verlorene Geschwindigkeit sehr klein (nach Voraussetzung) und kann daher nicht den endlichen Geschwindigkeiten der Körper E, F das Gleichgewicht halten. Somit kann die Geschwindigkeit der Kugeln C, D nicht um eine sehr kleine Grösse zunehmen. Nimmt andererseits ihre Geschwindigkeit um eine Grösse zu, die nicht sehr klein ist, so können sie nicht vereint mit dem Körper A fortschreiten, dessen Geschwindigkeit nothwendig abnehmen muss.[104])'

Man begegnet einer neuen Schwierigkeit, wenn man die Theorie auf dieses Problem anwendet. Man findet nämlich sehr leicht die Ausdrücke für die Geschwindigkeiten der fünf Körper nach dem Stoss, obgleich ihre Auffindung nach der eben gemachten Bemerkung nicht leicht aussieht. Die Rechnung gründet sich aber ausdrücklich auf die beiden Bedingungen, dass die fünf Körper nach dem Stoss vereint weiter gehen, und dass sie sich, wenn sie mit den von ihnen verlorenen resp. gewonnenen Geschwindigkeiten im entgegengesetzten Sinne begabt sind, das Gleichgewicht halten.

Untersucht man indessen, in welcher Weise die Rechnung diesen Bedingungen genügt, so erkennt man, dass sich mit den von denselben gegebenen Ausdrücken die Natur des Problemes nicht immer vereinen lässt, und dass diese Bedingungen sogar zu einer falschen Lösung führen können, wenn man sie nicht in der rechten Weise auf die vorliegende Frage anwendet. Damit die Körper z. B. nach dem Stoss vereint weiter gehen, müssen die Geschwindigkeiten dieser Körper in der Richtung der Normalen im Berührungspunkt gleich sein, eine Bedingung, welche ihren Ausdruck in der Analyse findet. Es müssen aber ferner diese Geschwindigkeiten je nach der Beschaffenheit des Falles denselben oder entgegengesetzten Sinn haben: eine Bedingung, die durch die Analyse nicht ausgedrückt wird und auch nicht ausgedrückt werden kann.[105]) Ebenso ist zum Gleichgewicht zwischen den getroffenen Körpern F, C, D, E und dem Körper A nicht ausreichend, dass die Summe der Bewegungen in demselben Sinne $= 0$ sei, — das ist das einzige, was die Analyse ausdrückt, es müssen ausserdem die sich das Gleichgewicht haltenden Bewegungen die Richtungen AB, FA, CA, DA, EA haben.

Da die Analyse diese Bedingungen nicht ausdrücken kann[105]), so kann man erst nach Auffindung der Werthe und der Richtungen der unbekannten Geschwindigkeiten zusehen, ob diese

Bedingungen erfüllt sind. Sind nicht alle Bedingungen erfüllt, wie in dem vorliegenden Falle, so ist dies ein Zeichen dafür, dass in dem System gewisse Körper vorhanden sind, die keinerlei Wirkung von den anderen erleiden, und deren Bewegungen keinerlei Aenderung erfahren. So werden in dem gegenwärtigen Falle die Körper *C* und *D*, obwohl sie eine geringere Geschwindigkeit haben als der stossende Körper *A*, dennoch keine Aenderungen erfahren, und alles wird sich so abspielen, als ob der Körper *A* allein den Körpern *E*, *F* begegnete. Die Körper *C* und *D* können in der That durch das Zusammentreffen mit dem Körper *A* keine Geschwindigkeitsverminderung erleiden. Sie können auch keine Geschwindigkeit durch die Wirkung des Körpers *A* erhalten; denn nach dem oben Gesagten können diese Körper nicht vereint mit dem Körper *A* nach dem Stoss weitergehen. Nun wird keine Wirkung zwischen den Körpern *A*, *C*, *D* eintreten, wenn sie nicht vereint nach dem Stoss weiter gehen. In der That lassen sich die Bewegungen zweier Körper bei gegenseitiger Einwirkung stets auf Bewegungen in demselben Sinne, durch die sie sich nicht hindern, und Bewegungen in entgegengesetztem Sinne, die zerstört werden, zurückführen. Nun können sich die Bewegungen im entgegengesetzten Sinne nur zerstören, wenn die Bewegungen in demselben Sinne gleich sind. Wenn nämlich der erste Körper sich schneller bewegte, als der zweite, so wäre jede Wechselwirkung zwischen beiden unmöglich.

Bemerkung III.

146. Die Sache liegt anders, wenn die Körper *A*, *C*, *D*, *E*, *F* elastisch sind. Es nimmt dann die Geschwindigkeit des Körpers *A* nur allmählich und in unmerklicher Abstufung ab, er muss daher auch auf die Körper *C*, *D* wirken und folglich nothwendig ihre Bewegungen verändern. Man muss sich daher wohl hüten, sich zur Auffindung der Bewegungen nach dem Stoss für diesen Fall der von uns in § 137 gegebenen Regel zu bedienen.

Diese Ueberlegung hat mich zu einer anderen geführt, dass die Anwendung eben dieser Regel auf den gleichzeitigen elastischen Stoss mehrerer Körper oft ganz fehlerhaft sein kann.

Nehmen wir z. B. die fünf Körper *A*, *F*, *E*, *C*, *D* (Fig. 52) als vollkommen elastisch an, so comprimirt sich jeder dieser Körper in dem Augenblicke des Stosses in solcher Weise, dass der gestossene Körper in jedem Augenblicke nach rückwärts in den resp. Richtungen FA, CA, DA, EA, eine unendlich kleine Bewegungsgrösse erhält, von derselben Grösse wie die, welche die Körper F, C, D, E nach vorwärts erhalten. Diese Körper platten sich daher mehr und mehr ab, bis sie schliesslich vereint weiter gehen können, mit Geschwindigkeiten, die gleich und gleich gerichtet sind, dann beginnen sie wieder allmählich in ihre frühere Form zurückzugehen, und sie gewinnen und verlieren von Neuem Bewegungsgrössen, welche den bereits verlorenen oder gewonnenen gleich sind.

Da wir aber über das Gesetz in völliger Unkenntniss sind, nach welchem die Elasticität die Beschleunigung in den Körpern hervorbringt, so können wir nicht wissen, ob die Compression aller fünf Körper in demselben Momente aufhört, und ob z. B. die Körper C und D nicht bereits beginnen, in ihre frühere Form zurückzugehen, wenn auch die Körper E, F noch nicht völlig comprimirt sind. In diesem Falle würden die fünf Körper nach dem Stoss nicht vereint weiter gehen, selbst wenn man annimmt, dass die Elasticität ihnen nicht ihre ursprüngliche Form wiedergiebt. Wenn dies nun der Fall wäre, so dürfte man sich nicht mehr zur Auffindung der Bewegung der fünf Körper nach dem Stoss der Methode des § 137 bedienen, dass man zunächst die fünf Körper als hart voraussetzt; denn diese Methode nimmt ausdrücklich an, dass die fünf Körper (ganz abgesehen von ihrer Elasticität) nach dem Stoss vereint weiter gehen.

Ein Grund, der uns zu zweifeln Anlass giebt, ob die Compression für alle fünf Körper in demselben Momente aufhört, liegt darin, dass es nothwendig Fälle giebt, in denen dies nicht möglich ist, wie z. B., wenn vorausgesetzt wird, dass die Körper C und D eine Geschwindigkeit $\parallel AL$ haben, welche um sehr wenig kleiner ist als die des Körpers A in der Richtung AL.

Wenn es Fälle giebt, in denen die Compression der fünf Körper gleichzeitig zu Ende ist, so ist begreiflich, dass bei Veränderung einzelner Umstände dies nicht mehr der Fall sein kann; wenn z. B. die Kugel A vier gleichen und in Ruhe befindlichen Kugeln C, D, E, F begegnet und in diesem Falle die Compression für alle Kugeln in demselben Momente zu Ende ist (was indessen nicht bewiesen werden kann), so ist begreiflich, dass bei Vermehrung der Massen der beiden

Kugeln C, D der Fall eintreten kann, dass diese beiden Kugeln ihre Compression vor oder nach den beiden Kugeln E, F vollenden. Man muss daher mit absoluter Nothwendigkeit nach Mitteln suchen, wie man in diesem Falle zur Auffindung der Gesetze des Stosses zu verfahren hat. Das wird sich nun in dem folgenden Paragraphen zeigen.

Ueber den gleichzeitigen Stoss mehrerer elastischer Körper.

147. Ich betrachte mit mehreren anderen Autoren zwei auf einander stossende elastische Körper A, B (Fig. 53, 54) in derselben Weise, als wären sie auf ihre Schwerpunkte A, B reducirt und als befände sich zwischen beiden eine Feder, die sich zusammenziehen und ausdehnen kann — das stellt die Compression und das successive Zurückgehen der beiden Körper in die ursprüngliche Form vor. Da ferner die Compression in einer sehr kleinen Zeit vor sich geht, so denke ich mir, dass diese Feder sich nur sehr wenig ausdehnt und zusammenzieht, dass sie aber bei einer sehr geringen Contraction bereits eine sehr grosse Kraft besitzt; und ich drücke diese Kraft durch eine Function der Grösse aus, um welche sich die Feder zusammenzieht oder ausdehnt, d. h. ich setze dieser Function die kleine Bewegungsgrösse proportional, welche der eine Körper verliert und der andere Körper in jedem Augenblicke gewinnt. Diese beiden Bewegungsgrössen sind nämlich (nach § 126) gleich, weil die Feder ihre Spannung nach beiden Seiten in gleicher Weise abzugeben sucht, mit einer Geschwindigkeit, die man gegen die der beiden Körper unendlich gross ansehen kann, da ihre Masse im Verhältniss zu denen derselben Körper unendlich klein ist.

Sind nach dieser Voraussetzung a, b (Fig. 54) die Punkte, nach denen die Körper A, B gelangt sind, und bezeichnet man

$$Aa \text{ mit } x, \quad Bb \text{ mit } y$$

und die abgelaufene Zeit mit t, so folgt:

$$-Ad^2x = \varphi(x-y)dt^2,$$

und

$$Bd^2y = \varphi(x-y)dt^2;$$

daraus ergiebt sich:

$$-Ad^2x = Bd^2y$$

und

$$ndt - Adx = Bdy,$$

wo n eine constante Zahl ist, die sich in der folgenden Weise bestimmen lässt; man nehme an, es seien a, b die Geschwindigkeiten der Körper A, B in A, B, so folgt für:

$$x \text{ und } y = 0:$$

$$\frac{dx}{dt} = a \quad \text{und} \quad dy = bdt;$$

somit:

$$n = Aa + Bb.$$

Die Integration der Gleichung ergiebt:

$$nt - Ax = By,$$

und es folgt:

$$-Ad^2x = \varphi\left(x - \frac{nt - Ax}{B}\right)dt^2;$$

setzt man:

$$x - \frac{nt - Ax}{B} = u,$$

so ergiebt sich (bei Constanz von dt):

$$-\frac{ABd^2u}{B+A} = \varphi(u)dt^2,$$

und

$$-\frac{ABdud^2u}{B+A} = dt^2du\varphi(u);$$

daraus folgt:

$$Aqdt^2 - \frac{ABdu^2}{2(B+A)} = dt^2\int du\varphi(u)$$

und

$$dt = \frac{du\sqrt{B}}{\sqrt{2(B+A)}\sqrt{q - \frac{\int du\varphi(u)}{A}}}.$$

148. Wenn ich diese Lösung hier angebe, so will ich übrigens damit nicht sagen, dass die Voraussetzung derselben zur Auffindung der Bewegung der Körper A, B nothwendig

sei; denn es geht mit ihnen bei dieser Voraussetzung dieselbe Veränderung vor, als wenn sich sowohl die Compression, als auch das Zurückgehen in die ursprüngliche Form in einem Augenblicke abspielten. Und da man vor allem die Bewegung nach dem Stoss sucht und im Uebrigen das Gesetz der augenblicklichen Beschleunigung oder Verzögerung unbekannt ist, so ist klar, dass die vorstehende Lösung kein Licht auf diesen besonderen Fall werfen kann; so dient sie auch hier nur zu einer Einführung zu complicirteren Fällen.

149. Nehmen wir in Figur 55 die Körper A, C, D, E, F als Punkte an, die durch Federn AC, AD etc. verbunden sind, und suchen wir nur die Geschwindigkeiten der Körper A, F, C, da die Körper E, D genau dieselben Veränderungen erleiden müssen, wie die Körper F, C; wir wollen voraussetzen, die Körper seien in a, f, c angelangt; fällt man die Senkrechten $a\varphi$, ax, so ist:

$$af = \varphi f,$$

weil die Strecken Aa, Ff sehr klein sind, da nach der obigen Voraussetzung die Feder AF nur sehr wenig compressibel ist. Bezeichnet man mit p den Cosinus des Winkels BAF, mit r den von $\measuredangle\, BAC$, dann folgt, wenn man

$$Aa \text{ mit } x, \quad Ff \text{ mit } y, \quad Cc \text{ mit } z$$

bezeichnet:

$$-Ad^2x = [2p\varphi(px - y) + 2r\varphi(rx - z)]dt^2;$$
$$Fd^2y = \varphi(px - y)dt^2;$$
$$Cd^2z = \varphi(rx - z)dt^2.$$

Es giebt einen Fall, in welchem die Unbekannten in diesen Gleichungen allgemein getrennt werden können, nämlich wenn

$$\varphi(px - y) = F(px - y);$$
$$\varphi(rx - z) = G(rx - z)$$

ist (wo G und F Constanten vorstellen); in diesem Falle kann man die Werthe von x, y und z in t durch die bei der Lösung des Problemes V auseinander gesetzte Methode finden, bei welcher Gelegenheit wir gezeigt haben, wie man derartige Gleichungen construiren kann. Die Compression der Feder zwischen den Körpern A, F wird aufhören, sobald

$$pdx = y$$

ist, und die zwischen den Körpern A, C, sobald:

$$rdx = z$$

ist.

150. Trifft der Körper A nur auf zwei symmetrisch gelegene Körper E, F, so ist, da mit dem Körper F genau dasselbe vor sich gehen muss, wie mit dem Körper E, die Schwierigkeit nicht grösser, als wenn der Körper A nur mit dem Körper F allein zusammenträfe, und alles spielt sich in grosser Annäherung so ab, als ob die Compression und das Zurückgehen in die ursprüngliche Form in einem Augenblicke vor sich ginge; darum sind in diesem Falle die vorstehenden Rechnungen von geringem Nutzen. Sie können nichts desto weniger dazu dienen, genau die Geschwindigkeit des Körpers A zu finden, sowie den Weg des Körpers F, der sich nicht in der Richtung der Geraden Ff bewegt, wie wir angenommen haben, und wie man auch ohne fehl zu gehen annehmen kann, sondern auf einer sehr kleinen Curve.

Die Gleichungen, die man zunächst findet, wenn man annimmt, dass sich F in der Richtung Ff bewegt und dass:

$$af = \varphi f,$$

lauten:

$$-Ad^2x = 2p\varphi(px - y)dt^2,$$

und

$$Fd^2y = \varphi(px - y)dt^2.$$

Daraus folgen wie in § 147 die Werthe von x und y in t. Bezeichnet man aber (Fig. 56) fo mit s[106]), so ergiebt sich weiter, dass die Kraft in der Richtung fo gleich der Kraft in der Richtung ao ist, wenn man diese mit $\frac{fo}{ol}$ multiplicirt, d. h. mit $\frac{a\varphi}{FA}$ oder $\frac{x\sqrt{1-p^2}}{a}$ (wenn man FA mit a bezeichnet), und man hat an Stelle von $px - y$ den genaueren Werth

$$px - y - \frac{(1-p)^2}{2a}x^2$$

zu setzen, weil $AF - ao$ (bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen dritter Ordnung)

$$= A\varphi - Ff - \frac{a\varphi^2}{2FA}.$$

Man hat daher zunächst die Werthe von x und y in t mittelst der Gleichungen

$$-Ad^2x = 2p\varphi(px-y)dt^2$$

und

$$Fd^2y = \varphi(px-y)dt^2$$

zu bestimmen, man hat weiter zu bemerken, dass in der ersten dieser Gleichungen an Stelle von $2p$, dem doppelten Cosinus des Winkels BAF, der doppelte Cosinus des Winkels Bal zu setzen ist, für den man den Werth

$$p - \frac{x\sqrt{1-p^2}}{a} \cdot \sqrt{1-p^2}$$

findet; man setze schliesslich statt x, $x+u$, statt y, $y+q$, wo u und q sehr kleine Grössen im Verhältniss zu x und y ausdrücken, und es folgt:

$$Fd^2y + Fd^2q = \varphi\left(px + pu - y - q - \frac{(1-p^2)x^2}{a}\right)dt^2; \text{*)}$$

$$-Ad^2x - Ad^2u = \left[2p - \frac{2x(1-p^2)}{a}\right]$$
$$\times \varphi\left(px + pu - y - q - \frac{(1-p^2)x^2}{2a}\right)dt^2;$$

und

$$Fd^2s = \frac{x\sqrt{1-p^2}}{a} \times \varphi(px-y)dt^2.$$

Sei allgemein:

$$d\varphi(\alpha) = d\alpha\,\Delta(\alpha)$$

(wenn α eine beliebige Variable vorstellt), so erhält man an Stelle der beiden ersten Gleichungen:

---

*) Wir nehmen hier an, dass die Kraft in der Richtung Ff dieselbe ist, wie die in der Richtung ao, weil dieselben von einander nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung abweichen, während wir hier nur auf unendlich kleine Grössen erster Ordnung Rücksicht nehmen, die bei der ersten Berechnung vernachlässigt wurden.

$$Fd^2q = dt^2\left(pu - q - \frac{(1-p)^2x^2}{2a}\right) . \varDelta(px-y);$$

$$-Ad^2u = 2pdt^2\left(pu - q - \frac{(1-p^2)x^2}{2a}\right)\varDelta(px-y)$$

$$-2x\frac{dt^2(1-p^2)}{a}\varphi(px-y),$$

und daraus ergiebt sich:

$$Fd^2q = \frac{2xdt^2(1-p^2)}{2ap}\varphi(px-y) - \frac{Ad^2u}{2p}.$$

Da nun x und y bereits in t gegeben sind, so erhält man durch die Integration dieser letzten Gleichung den Werth von u in q und t, den man so darstellen kann:

$$u = Rq + T,$$

wo R eine Constante und T eine Function von t ist; man braucht daher die Integration der Gleichung:

$$Fd^2q = \left[(pR-1)q + pT - \frac{(1-p^2)x^2}{2a}\right]dt^2\varDelta(px-y)$$

oder allgemein der Gleichung:

$$d^2q = Nqdt^2\Psi(t) + dt^2\Gamma(t),$$

wo N eine Constante und $\Psi(t)$, $\Gamma(t)$ Functionen von t sind. Diese Gleichung lässt sich mit Hülfe einer der in § 101 bereits auseinander gesetzten ähnlichen Methode integriren, wenn man q gleich dem Producte zweier unbekannter Functionen setzt. Was die Gleichung

$$Fd^2s = \frac{x\sqrt{1-p^2}}{a} \times dt^2\varphi(px-y)$$

anbetrifft, so erkennt jedermann leicht, da x und y in t gegeben sind, dass ihre Integration sehr einfach ist.

Bemerkung.

151. Es folgt aus dem eben Gesagten, dass, falls der Körper A auf zwei zur Richtung AB des stossenden Körpers symmetrisch gelegene elastische Körper C, D (Fig. 55)

trifft, die Geschwindigkeiten dieser drei Körper nach dem Stoss, wenn nicht genau, so doch mit grosser Annäherung dieselben sind, wie wenn die Compression und das Zurückgehen in die ursprüngliche Form in einem Augenblicke vor sich gingen. Die Sache läge anders, wenn die getroffenen Kugeln nicht symmetrisch gegen die stossende Kugel lägen.

In der That, nehmen wir an, die harte Kugel A, die sich in der Richtung AB bewege (Fig. 57), begegne den harten in Ruhe befindlichen Kugeln C, D mit einer durch die Strecke $A\alpha$ dargestellten Geschwindigkeit; nehmen wir ferner an, diese Kugel A ändere nach dem Stoss ihre Geschwindigkeit nicht, und es sei Aa ihre Geschwindigkeit, so folgt (indem man die Parallelogramme $Anax$, $Apai$ construirt und auf AC, AD die Senkrechten ax, ad fällt):

$$C \,.\, Ax = A \,.\, iX$$

und

$$D \,.\, Ad = A \,.\, np.$$

Somit verhält sich:

$$iX : np = C \,.\, Ax : D \,.\, Ad,$$

d. h. das Verhältniss von na zu An ist zugleich das Verhältniss des Cosinus des Winkels BAC, multiplicirt mit C, zu dem Product aus dem Körper D mit dem Cosinus des Winkels BAD. Somit muss das Product des Körpers C mit dem Sinus des Winkels BAC und seinem Cosinus gleich sein dem Producte des Körpers D mit dem Sinus des Winkels BAD und seinem Cosinus.

Sind die Körper D und C gleich, so ergiebt sich das Product aus dem Sinus des einen Winkels mit seinem Cosinus gleich dem Producte aus dem Sinus des anderen Winkels mit seinem Cosinus, was nur eintreten kann, wenn die Winkel sich zu 90° ergänzen, so dass der Winkel DAC ein rechter wird. Es folgt dann:

$$Ai : Ax = Ap : Ad.$$

Nimmt man daher die Strecke Aa unendlich klein an, so erkennt man, dass für den Fall, dass die drei Körper A, C, D elastisch sind, falls die Wirkungen der Federn aC, aD nicht den Strecken Ax, Ad proportional sind, der Punkt A sich von der Geraden Aa vom ersten Augenblicke an entfernen wird, und dass somit die Gesetze des Stosses zwischen diesen drei Körpern sehr von denen abweichen, die sich für den Fall ergeben würden, in dem die Compression und das Zurückgehen in die ursprüngliche Form in einem Augenblicke vor sich gehen.

152. Sei allgemein AB (Fig. 58) die Richtung des stossenden Körpers, Aa die Curve, welche er während der Compression und des Zurückgehens der Feder beschreibt:

$$Ai = x, \quad ai = z, \quad Cc = y, \quad D\delta = u,$$

der Cosinus von $\measuredangle DAC = r$,

dann folgt:

$$Ax - Cc = x + rz - y,$$

und

$$Ad - D\delta = z + rx - u,$$

man findet:

$$-Ad^2x = \varphi(x + rz - y)dt^2,$$
$$-Ad^2z = \varphi(z + rx - u)dt^2,$$
$$Cd^2y = \varphi(x + rz - y)dt^2,$$
$$Dd^2u = \varphi(z + rx - u)dt^2,$$

daraus ergiebt sich:

$$-Ad^2x = Cd^2y, \text{ und } \alpha t - Ax = Cy, \text{ [107)]}$$

und ebenso:

$$-Ad^2z = Dd^2u, \text{ und } \beta t - Az = Du. \text{ [107)]}$$

Man erhält daher (wenn man in den beiden ersten Gleichungen für y und u ihre Werthe setzt) zwei Gleichungen, in denen nur noch zwei unbekannte Functionen bleiben, und die sich mit Hülfe der früher auseinandergesetzten Methoden integriren lassen, falls:

$$\varphi(x + rz - y) = F.(x + rz - y)$$

und

$$\varphi(z + rx - u) = G.(z + rx - u). \text{ [108)]}$$

153. Es seien A, a (Fig. 59) zwei durch eine Feder Aa verbundene Körper, die in den Richtungen AD, ad so auf einander stossen, dass ihr Schwerpunkt C in Ruhe bleiben würde, wenn sie sich in den Richtungen AD, ad bewegen könnten; diese beiden Körper werden während der Zeit der Compression zwei ähnliche Curven ag, AG beschreiben, und

die Compression wird aufhören, wenn Gg zu beiden Curven normal ist; sie werden sodann während des Zurückgehens der Feder die den ersten ähnlichen Curven GF, gf beschreiben, woraus man erkennt, dass ihre Bewegung nach dem Stoss dieselbe sein wird, wie wenn die Compression und das Zurückgehen in die ursprüngliche Form in einem Augenblicke vor sich gingen. Das gilt allgemein, wenn zwei elastische Körper in beliebiger Weise auf einander stossen; denn es ist leicht zu ersehen, dass man bei der Unabhängigkeit der Bewegung ihres Schwerpunktes von ihrer Wechselwirkung nur ihre Bewegungen nach dem Stoss für den Fall aufzusuchen hat, dass bei dem Stoss ihr Schwerpunkt in Ruhe bleibt, und man hat dann nur dem ganzen System die Bewegung des Schwerpunktes zu ertheilen.

Wären die beiden Körper weich, so würden ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoss nicht dieselben sein, wie für den Fall, dass sie hart sind. Denn in letzterem Falle verhalten sich die Geschwindigkeiten vor dem Stoss zu denen nach dem Stoss wie $Cd : Ca$, und in dem Falle, in dem sie als weich vorausgesetzt würden, d. h. in denen sich die Feder zusammenziehen würde, ohne in die ursprüngliche Form zurück zu gehen, würden sich dieselben Geschwindigkeiten verhalten, wie $Cd : Cg$. Nun ist $Cg < Ca$. Somit ist die Behauptung bewiesen.[109])

Viertes Kapitel.

Ueber das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

154. Wenn Körper auf einander wirken, sei es, dass sie auf einander mittelst Fäden oder unbiegsamer Stäbe Züge ausüben, oder sei es, dass sie auf einander stossen, wenn die Stösse im letzteren Falle nur vollkommen elastische sind, so ist die Summe der Producte aus den Massen und den Quadraten der Geschwindigkeiten stets eine constante Grösse; und werden die Körper von irgend welchen Bewegungsursachen getrieben, so ist die Summe der Producte aus den Massen und den Quadraten der Geschwindigkeiten in jedem Augenblicke gleich der Summe der Producte aus den Massen und den Quadraten der Anfangsgeschwindigkeiten + den Quadraten der Geschwindigkeiten, welche die Körper erlangt hätten, wenn sich ein jeder der Körper auf der von ihm beschriebenen Curve unter der Einwirkung derselben Bewegungsursachen frei bewegt

hätte.[110]) In diesen beiden Sätzen besteht das, was man die Erhaltung der lebendigen Kräfte nennt.

Huygens ist meines Wissens der erste, welcher diese beiden Sätze erwähnt hat, und *Bernoulli* der erste, welcher ihre Nützlichkeit zur eleganten und leichten Lösung mehrerer dynamischen Probleme dargelegt hat. Ich versuche in diesem Kapitel, wenn nicht einen allgemeinen Beweis für alle Fälle, so doch wenigstens die Principien anzugeben, die für jeden besonderen Fall zur Auffindung des Beweises ausreichen.

155. Denken wir uns zunächst zwei Körper A, B (Fig. 60) von unendlich kleiner Ausdehnung, die an dem unbiegsamen Stabe AB befestigt sind, und nehmen wir an, man präge diesen Körpern beliebige Richtungen und Geschwindigkeiten ein, welche durch die unendlich kleinen Strecken AK, BD dargestellt sein mögen. Man hat nach unserem Princip die Parallelogramme MC, NL so zu construiren, dass

$$LC = AB,$$

und

$$B \times BM = A \times AN$$

ist; BC und AL werden die Geschwindigkeiten und Richtungen der Körper B und A sein. Nun ist

$$BC^2 = BD^2 - 2\,CE \times CD - CD^2$$

und

$$AL^2 = AK^2 + 2\,PL \times KL - KL^2.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} B\,.\,BC^2 + A\,.\,AL^2 &= A\,.\,AK^2 + B\,.\,BD^2 \\ &\quad + A(2\,PL\,.\,KL - KL^2) \\ &\quad - B(2\,CE\,.\,CD + CD^2), \end{aligned}$$

einfacher:

$$\begin{aligned} &= A\,.\,AK^2 + B\,.\,BD^2 \\ &\quad - A\,.\,KL^2 - B\,.\,CD^2, \end{aligned}$$

da:

$$CE = PL,$$

und

$$A\,.\,KL = B\,.\,CD.$$

Es folgt daher:

$$B\,.\,BC^2 + A\,.\,AL^2 = A\,.\,AK^2 + B\,.\,BD^2 - A\,.\,KL^2 - B\,.\,CD^2.$$

Zusatz I.

156. Sind NA, BM unendlich klein, weichen also die Geschwindigkeiten AL, BC nur um unendlich wenig von den Geschwindigkeiten AK, BD ab, so wird die Erhaltung der lebendigen Kräfte statt haben. Denn vernachlässigt man in der Gleichung die Strecken KL, CD, so folgt:

$$B \,.\, BC^2 + A \,.\, AL^2 = A \,.\, AK^2 + B \,.\, BD^2.$$

Zusatz II.

157. Sind NA, BM nicht unendlich klein, und trägt man

$$CF = CD,$$
$$LO = LK$$

in entgegengesetzten Richtungen ab, so ist leicht zu beweisen, dass

$$BF^2 = BD^2 - 4\,CE \,.\, CD,$$

und

$$AO^2 = AK^2 + 4\,PL \,.\, KL$$

wird. Somit ist

$$\begin{aligned} B \,.\, BF^2 + A \,.\, AO^2 &= B(BD^2 - 2\,BM \,.\, 2\,CE) \\ &\quad + A(AK^2 + 2\,AN \,.\, 2\,PL) \\ &= B \,.\, BD^2 + A \,.\, AK^2, \end{aligned}$$

da:

$$CE = PL,$$

und

$$A \,.\, AN = B \,.\, BM.$$

Die Erhaltung der lebendigen Kräfte findet also auch hier statt. Wenn man näher zusieht, haben wir aber hier gerade den Fall des Stosses zweier elastischer Körper (§ 137).

Ueber die Erhaltung der lebendigen Kräfte bei Körpern, die mittelst Fäden oder unbiegsamer Stäbe auf einander Züge ausüben.

158. Wir haben in dem vorangehenden Paragraphen gesehen, dass für zwei Körper, die an den Enden eines unbiegsamen Stabes befestigt sind, und denen man beliebige Anfangs-

geschwindigkeiten giebt, die Erhaltung der lebendigen Kräfte nur stattfindet, wenn die angenommenen Geschwindigkeiten von den ihnen ertheilten unendlich wenig abweichen. Nun kann die wirkliche Anfangsgeschwindigkeit jedes dieser Körper um eine endliche Grösse von der abweichen, die man ihm in einer beliebigen Richtung eingeprägt hat. Haben aber einmal die beiden Körper ihre Bewegungen auf ihren Curven begonnen, so verändern sich ihre Geschwindigkeiten von einem Augenblicke zum andern nur unendlich wenig. Daher ist stets in dem Falle des § 155 die Summe der Producte aus den beiden Massen und den Quadraten ihrer respectiven Geschwindigkeiten nicht gleich der Summe der Producte aus den Massen und den Quadraten der ihnen im ersten Augenblicke eingeprägten Geschwindigkeiten, sondern gleich der Summe der Producte aus den Massen und den Quadraten ihrer respectiven wirklichen Anfangsgeschwindigkeiten.

159. Wir haben nunmehr allgemein nachzuweisen, dass für die Bewegung von Körpern, welche mittelst Fäden oder unbiegsamer Stäbe auf einander Züge ausüben, und deren Geschwindigkeiten sich von Augenblick zu Augenblick nur unendlich wenig ändern, die Summe der Producte aus den Massen und den Quadraten der Geschwindigkeiten constant sein wird, falls die Körper nicht mit beschleunigenden Kräften begabt sind, und dass sie im letzteren Falle gleich der Summe der Wirkungen der bewegenden Kräfte beider Körper gleich sein wird.

Ich bemerke nun zunächst, dass der zweite Fall unmittelbar aus dem ersten folgt; d. h. wird der erste als richtig angenommen, so ist es mit Nothwendigkeit auch der zweite. Denn nehmen wir an, es seien A, a (Fig. 61) zwei Körper, die mit einander durch den Stab Aa verbunden und mit beschleunigenden Kräften von beliebigen Stärken und zu jeder Zeit beliebigen Richtungen begabt sind; BA, ab seien die Strecken, die diese Körper während ein und desselben Augenblickes zurückgelegt haben, und die folglich ihre Geschwindigkeiten darstellen können. Wären beide Körper frei, so würden sie in dem folgenden Augenblicke die Strecken AO, ao zurücklegen, die mit AB, ab gleich sind und in ihrer geraden Verlängerung liegen; nehmen wir an, AD, ad stellten die Wirkungen der bewegenden Kräfte in diesem Augenblicke vor, so würden sich ihre Geschwindigkeiten in AN, an verwandeln, und fällt man die Senkrechten BC, bc auf AC, ac, so folgt:

$$AN^2 = AB^2 + 2AD \,.\, AC$$

und

$$an^2 = ab^2 + 2ad \,.\, ac;$$

da aber die Geschwindigkeiten AB, ab die wirklichen Geschwindigkeiten im ersten Augenblicke sind und die Geschwindigkeiten AN, an nur unendlich wenig von ihnen abweichen, so werden diese selben Geschwindigkeiten nur unendlich wenig von den Geschwindigkeiten abweichen, in welche sie sich in Folge der Wechselwirkung der beiden Körper verwandeln. Bezeichnet man daher mit V, v die Geschwindigkeiten AB, ab, mit U, u die Geschwindigkeiten der Körper A, a im zweiten Augenblicke, d. h. die Geschwindigkeiten, die sie an Stelle von AN, an haben, so folgt:

$$\begin{aligned} A \,.\, U^2 + a \,.\, u^2 &= A \,.\, AN^2 + a \,.\, an^2\,, \\ &= A(AB^2 + 2AD \,.\, CA) + a(ab^2 + 2ad \,.\, ca), \\ &= A \,.\, V^2 + a \,.\, v^2 + 2A \,.\, AD \,.\, CA + 2a \,.\, ad \,.\, ca. \end{aligned}$$

Somit ist:

$$A(U^2 - V^2) + a(u^2 - v^2) = 2A \,.\, AD \,.\, CA + 2a \,.\, ad \,.\, ca,$$

also:

$$2AVdV + 2audu = 2A \,.\, AD \,.\, CA + 2a \,.\, ad \,.\, ca,$$

oder:

$$AV^2 + au^2 = \int 2A \,.\, AD \,.\, CA + \int 2a \,.\, ad \,.\, ca.$$

Würden sich aber die Körper A, a auf den Curven GA, ga frei bewegen, so ist klar, dass

$$\int 2A \,.\, AD \,.\, CA$$

die Wirkung der bewegenden Kraft des Körpers A von G bis A, und ebenso

$$\int 2a \,.\, ad \,.\, ca$$

die Wirkung der bewegenden Kraft des Körpers a von g bis a sein würde. Q. e. d.

Es ist klar, dass sich dieser Beweis auf eine beliebige Anzahl von Körpern ausdehnen lässt, und alles, was man dabei vorausgesetzt hat, ist, dass für die Fälle, in denen sich die

Geschwindigkeit nur unendlich wenig von Augenblick zu Augenblick ändert und die Körper nicht mit beschleunigenden Kräften begabt sind, die Summe der Producte aus den Massen und Quadraten der Geschwindigkeiten eine stets constante Summe ergiebt. Das bleibt uns noch allgemein zu beweisen. Hierfür brauchen wir die folgenden Hülfssätze.

Hülfssatz XII.

160. Sei $BVbN$ ein beliebiges Parallelogramm (Fig. 62); ich behaupte, falls man von einem seiner Eckpunkte B die Gerade BD von beliebiger Länge und Richtung zieht und von dem Punkte D die Senkrechten Dn, DK, DG auf die Verlängerungen von Bb, BV, BN fällt, so ist:

$$Bb \,.\, Bn = BV \,.\, BK + BN \,.\, BG.$$

Beweis.

Von den Punkten N, V, b fälle man die Senkrechten NE, VF, bH auf die Verlängerung von BD; man kann denken, die Seiten BV, BN repräsentiren Bewegungsursachen, die in je zwei Componenten BF, VF und BE, EN zerlegt sind, und es stelle ebenso die Diagonale Bb eine Bewegungsursache dar, die in die beiden Componenten BH, bH zerlegt ist. Da die Bewegungsursache Bb den beiden BN, BV äquivalent ist, so folgt:

$$BE + BF = BH$$

und nunmehr in Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke bHB, BDn:

$$\begin{aligned} Bb \times Bn = BD \times BH &= BD \times BE + BD \times BF \\ &= BN \,.\, BG + BV \,.\, BK. \end{aligned}$$

Q. e. d.

Bemerkung.

161. Man sieht leicht, dass man je nach der relativen Lage der Punkte E, F zu einander und zum Punkte H anstatt der Summe der Producte $BN \,.\, BG$ und $BV \,.\, BK$ ihre Differenz zu nehmen und dem Producte $Bb \,.\, Bn$ gleich zu setzen hat.

Ueber die Erhaltung der lebendigen Kräfte, wenn die als Punkte gedachten Körper durch Fäden verbunden sind.

162. Denken wir uns drei an dem Faden ABC befestigte Körper A, B, C (Fig. 63), und man präge diesen Körpern die Geschwindigkeiten $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ ein, welche in die Geschwindigkeiten AA, BD, CC überzugehen durch die Wechselwirkung der Körper gezwungen werden, in Geschwindigkeiten von solcher Art, dass

$$\text{A}D = AB; \quad D\text{C} = BC;$$

man hat nach unserem Princip die Geschwindigkeiten $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ als aus den Geschwindigkeiten AA, BD, CC und den Geschwindigkeiten Aa, Bb, Cc zusammengesetzt anzusehen, mit welch letzteren allein die Körper sich das Gleichgewicht halten würden; man hat daher die Formel zu beweisen:

$$A.A\text{A}^2 + B.BD^2 + C.C\text{C}^2 = A.A\alpha^2 + B.B\beta^2 + C.C\gamma^2,$$

also:

$$A.Aa.AQ - B.BN.BG + B.BV.BK - C.Cc.CM = 0.$$

Nun ist

$$CM = BK$$

und

$$C.Cc = B.BV$$

in Folge des Gleichgewichtes. Ebenso ist

$$AQ = BG$$

und

$$A.Aa = B.BN.$$

Somit folgt die Behauptung.

Nähme man an Stelle des Körpers A einen festen Punkt an, um den die Körper B, C sich drehen würden, so wäre

$$AQ = 0; \quad BG = 0,$$

und die Behauptung würde in Gültigkeit bleiben. Es ist aus der Natur des Beweises ersichtlich, dass er allgemein für beliebig viele Körper gilt.

Wäre der Punkt B nicht fest mit dem Faden verbunden, sondern könnte er längs desselben entlang gleiten, so würde Bb den Winkel ABC halbiren, und es wäre

$$A.Aa = B.Bn,\quad B.BV = C.Cc,\quad \text{und}\quad B.BN = B.BV,$$

und endlich

$$AQ - BG = BK - CM,$$

da

$$AD + DC = AB + BC;$$

somit folgt:

$$A.Aa.AQ - B.BN.BG + B.BV.BK - C.Cc.CM = 0.$$

Man erkennt so, wie ich denke, dass die Erhaltung der lebendigen Kräfte in allen Fällen statt hat, wenn man die Körper nur als Punkte ansieht und dieselben durch Fäden mit einander verbunden sind.

Hülfssatz XIII.

163. Es seien drei Körper A, B, C mit Geschwindigkeiten AQ, BR, Cc (Fig. 64) begabt und an einem Hebel von beliebiger Gestalt im Gleichgewicht; und es seien AB, BC die gegenseitigen Abstände dieser Körper. Denken wir uns den Hebel in einer anderen, der ersten unendlich benachbarten Lage und seien dann die Punkte F, G, E die Orte der Körper A, B, C, so dass:

$$FG = AB;\quad GE = BC,$$

so behaupte ich, es ist, wenn man die Senkrechten GK, FX, EZ errichtet:

$$B.BR.BK = A.AQ.AX + C.Cc.CZ.$$

Beweis.

So lange der Hebel kein gerader ist, lässt sich diese Behauptung in derselben Weise beweisen, wie in dem Falle, dass ABC ein Faden ist, da sich jede der Bewegungsursachen stets in je zwei andere überführen lässt, deren Richtungen durch die Angriffspunkte der beiden anderen hindurchgehen, und man so sechs Bewegungsursachen erhält, die paarweise einander entgegengesetzt gleich sind.

Nur in dem Falle des geraden Hebels (Fig. 65) ist eine solche Zerlegung nicht möglich, und es ist für denselben ein besonderer Beweis nothwendig. Seien somit AQ, BR, Cc senkrecht zu dem Hebel ABC, so ist

$$B \,.\, BR \,.\, BO = C \,.\, Cc \,.\, CL + A \,.\, AQ \,.\, AY,$$

die Strecken BO, BK; CL, CZ; AY, AX weichen aber von einander nur um Grössen ab, die im Vergleich mit ihnen unendlich klein sind. Somit ist

$$B \,.\, BR \,.\, BK = C \,.\, Cc \,.\, CZ + A \,.\, AQ \,.\, AX.$$

Q. e. d.

Bemerkung.

164. Wäre der Hebel ABC in einem Punkte fest, z. B. in Γ (Fig. 66) und dächte man sich den Hebel in einer anderen Lage $F\Gamma GE$, so würde die Behauptung in Gültigkeit bleiben und in einer ähnlichen Weise sich beweisen lassen.

Ueber die Erhaltung der lebendigen Kräfte, wenn die Körper durch unbiegsame Stäbe verbunden sind und man dieselben als Punkte betrachtet.

165. Es ist klar, dass sich mittelst des vorstehenden Hülfssatzes die Erhaltung der lebendigen Kräfte beweisen lässt, wenn die Körper durch unbiegsame Stäbe verbunden sind und jeder Körper fest an dem Stabe angebracht ist. Könnte einer der Körper, etwa B, an dem Stabe entlang gleiten, so müsste die von ihm verlorene Geschwindigkeit BR zu dem Stabe senkrecht sein, und er würde sich im folgenden Augenblicke nicht im Punkte G (von der Eigenschaft $FG = AB$) (Fig. 64), sondern in einem diesem unendlich benachbarten Punkte g befinden.*) Da nun die Punkte B, G unendlich benachbart sind und Gg, BA als parallel angesehen werden dürfen, so ist die Strecke Gg als senkrecht zu BK zu betrachten, und man kann daher die eine der beiden Strecken Bk und BK für die andere setzen, da ihre Differenz von zweiter Ordnung unendlich klein ist. Somit hat die Erhaltung der lebendigen Kräfte auch in diesem Falle statt.

---

*) Man nimmt hier an, dass der Hebel ABC eine Curve ist und BR normal zu dieser Curve in B. Es schien mir unnöthig, hierzu eine neue Figur zu zeichnen.

Ueber die Erhaltung der lebendigen Kräfte, wenn die Körper endliche Massen und durch Fäden oder unbiegsame Stäbe verbunden sind.

166. Wir haben in dem Hülfssatz XIII gesehen, es besteht, falls drei Körper A, B, C, begabt mit beliebig gerichteten Geschwindigkeiten AQ, BR, Cc, im Gleichgewicht sind, die Formel:

$$C.Cc.CZ + A.AQ.AX = B.BR.BK.$$

Daraus folgt, falls man Br gleich BR und in entgegengesetzter Richtung annimmt (Fig. 64), wenn man also die Resultante der beiden Bewegungsursachen $C.Cc$, $A.AQ$ sucht, so lässt sich stets der Ausdruck $C.Cc.CZ + A.AQ.AX$ auf ein einziges Product $B.Br.BK$ zurückführen; und so wird es bei einer beliebigen Anzahl von Körpern, die an einem unbiegsamen Stabe befestigt sind, falls man den Punkt B herausgreift, durch den die Resultante geht, und man annimmt, dass dieser Punkt B nach G gewandert sei, stets genügen, das Product von BK[111]) mit der resultirenden Kraft statt der Summe aller dieser Producte zu setzen.

Damit nun die Erhaltung der lebendigen Kräfte statthabe, muss, wie wir gesehen haben, die Summe aller dieser Producte = 0 sein. Es muss somit entweder die Resultante = 0 sein, oder BK. Nun ist 1) wenn kein fester Punkt vorhanden ist, die Resultante = 0. 2) Wenn ein solcher vorhanden ist, so muss die Geschwindigkeit des Punktes B null sein, oder es ist ihre Geschwindigkeit nothwendig senkrecht zur Richtung der Resultanten. In der That, ist das Hinderniss ein mathematischer Punkt, wie der Stützpunkt eines Hebels, so geht die Richtung der Resultanten durch diesen Stützpunkt; und die Bewegung des Punktes B ist eine Rotationsbewegung um diesen Punkt, oder der Punkt B ist nichts anderes als der Stützpunkt selbst, dessen Bewegung gleich null ist. Ist das Hinderniss eine unbewegliche Oberfläche, so ist der Punkt B, durch den die Richtung der Resultanten geht, nothwendig ein Punkt, der in diese Oberfläche fällt und dessen augenblickliche Bewegungsrichtung in dieser Oberfläche selbst liegt, während die Richtung der Resultanten zu dieser Oberfläche normal ist Somit ist allgemein

$$BK = 0,$$

wenn ein fester Punkt vorhanden ist. Es ist daher bewiesen, dass in den Fällen, in denen die Körper durch unbiegsame, feste oder nicht feste, Hebel verbunden sind, die Erhaltung der lebendigen Kräfte statt hat.

167. Sind die Körper durch Fäden verbunden, so denke man sich an den Enden jedes zwischen zwei Körpern gelegenen Fadentheiles zwei gleiche und entgegengesetzte Bewegungsursachen, die in der Richtung des Fadens ziehen, und der Beweis folgt dann leicht aus dem, was oben (§ 162) für den Fall gesagt wurde, in dem die Körper als Punkte betrachtet wurden.

168. Geht der Faden durch einen oder mehrere dieser Körper hindurch, in solcher Weise, dass sie an demselben frei entlang gleiten können, so hat man, da in diesem Falle die Richtung der Resultanten der verlorenen Bewegungen in jedem Augenblicke (nach § 123) durch den Schnittpunkt G (Fig. 67) der Geraden CS, AR geht und diesen Winkel halbirt, an Stelle dieser Resultanten zwei gleiche Bewegungsursachen anzunehmen, welche in den Richtungen SG, RG der Fadenstrecken CS, AR ziehen; nimmt man ferner an, es seien SV, RN die Wege der Punkte S, R und errichtet man die Senkrechten VD, NP, so folgt aus der Constanz von $AR + SC$:

$$SD = RP.$$

Mit Hülfe dieser Bemerkungen wird man leicht in allen Fällen zum Beweise der Erhaltung der lebendigen Kräfte gelangen.

Ueber die Erhaltung der lebendigen Kräfte bei dem Stosse elastischer Körper.

169. Wir könnten uns bei dem Beweise der Erhaltung der lebendigen Kräfte für den Stoss elastischer Körper der Methode bedienen, die Körper als hart zu betrachten und anzunehmen, dass die Compression und das Zurückgehen der Feder in einem Augenblicke vor sich gehe; wir haben bereits in § 157 eine Probe eines derartigen Beweises gegeben; da wir aber bemerkten, dass diese Hypothese in vielen Fällen nicht zu den wahren Gesetzen des Stosses elastischer Körper führen könnte, so wollen wir dieselbe hier verlassen, und wir wollen die in Frage stehende Behauptung unter der Annahme beweisen, dass sich zwischen den beiden Körpern eine Feder befinde, welche ihnen gleiche und entgegengesetzt gerichtete bewegende Kräfte ertheilt.

170. Seien A, B (Fig. 68) zwei durch eine Feder AB verbundene Punkte, die nach Empfang beliebiger Impulse AG, BF während der Zeit der Compression und des Zurückgehens der Feder die Curven Ama, BMb beschreiben. Sei φ die veränderliche bewegende Kraft, die in jedem Augenblicke für beide Körper gleich ist und dieselben in der Richtung der Feder Mm in entgegengesetztem Sinne zu bewegen sucht, V die Geschwindigkeit von M, u die von m, G die Geschwindigkeit von B, g die von A:

$$Mu = dx, \quad MV = dz,$$

dann folgt:

$$B \,.\, V^2 = B \,.\, G^2 - 2\int \varphi dz,$$

und

$$A \,.\, u^2 = A \,.\, g^2 + 2\int \varphi dx.$$

Da aber

$$ab = AB,$$

so ist

$$2\int \varphi dx - 2\int \varphi dz = 0,$$

somit:

$$Au^2 + BV^2 = B \,.\, G^2 + A \,.\, g^2,$$

wenn die Compression zu Ende ist.

Es ist klar, dass sich dieser Beweis auf beliebig viele Punkte ausdehnen lässt, die mit einander in beliebiger Weise verbunden sind. Man sieht somit, dass die Erhaltung der lebendigen Kräfte für Punkte, die durch Federn mit einander verbunden sind, statt hat.

Sind die Körper endlich, so genügt zum Beweise der Erhaltung der lebendigen Kräfte (nach § 166) der Nachweis, dass diese Erhaltung statt hat für die Punkte, durch welche die Richtungen der sich das Gleichgewicht haltenden resultirenden Kräfte gehen; diese Punkte werden für beide Körper durch den Berührungspunkt dargestellt; wir nehmen an, dass derselbe während der Compression und des Zurückgehens in die ursprüngliche Form, was beides als in einer sehr kurzen Zeit vor sich gehend gedacht wird, fortdauernd Berührungspunkt bleibe. Durch diesen Punkt hat man sich die Feder hindurchgehend vorzustellen, die den Körpern in jedem Augenblicke in entgegengesetztem Sinne bewegende Kräfte mittheilen, welche sich dann auf die ganze Masse vertheilen. Damit wird dieser Fall auf den vorangehenden zurückgeführt.

171. Würden die Körper *A*, *B* (Fig. 69) durch Vermittelung eines in *C* festen Stabes *CBA* einen Stoss auf einander ausüben, so wären die in *A* und *B* ausgeübten bewegenden Kräfte nicht mehr gleich, sondern sie wären den Hebelarmen *CA*, *CB* umgekehrt proportional, und da die in gleichen Zeiten von den Punkten *A* und *B* zurückgelegten Wege den Hebelarmen direct proportional sind, so folgt, dass die Producte aus den bewegenden Kräften und den Wegen der Punkte *A*, *B* auf beiden Seiten gleich sein würden. So kann man auch hier die Erhaltung der lebendigen Kräfte beweisen, entweder mittelst des Princips des § 157, wenn man die Körper als incompressibel ansieht, oder wenn man eine unendlich kleine Feder in *A* und eine zweite in *B* annimmt. Für den einsichtigen Leser ist es unnöthig, dies ausführlicher auseinander zu setzen.

Die Erhaltung der lebendigen Kräfte wird somit auch in dem vorliegenden Falle statt haben; und es ist durch die Combination der oben dargelegten Principien klar, dass man dieselbe stets für den Stoss elastischer Körper beweisen kann.

Allgemeine Scholie.

172. Es geht aus allem bisher Gesagten hervor, dass allgemein die Erhaltung der lebendigen Kräfte von dem Princip abhängt, nach welchem die Geschwindigkeiten der Punkte, in welchen im Gleichgewicht befindliche Kräfte wirken, in der Richtung dieser Kräfte Componenten haben, die diesen selben Kräften umgekehrt proportional sind.[112]) Dieses Princip ist seit langer Zeit von den Geometern als das Grundprincip des Gleichgewichtes anerkannt; aber niemand hat noch meines Wissens dieses Princip allgemein bewiesen, noch gezeigt, dass das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte mit Nothwendigkeit aus demselben folgt.

Das eben erwähnte Princip des Gleichgewichtes lässt sich stets leicht beweisen; denn entweder sind die Kräfte entgegengesetzt gleich oder sie wirken an verschiedenen Hebelarmen, oder es geht endlich die Resultante dieser Kräfte durch ein festes und unüberwindliches Hinderniss, wie in Problem X. Alles, was wir oben gesagt haben, ist, wie mir scheint, hinreichend, um den Beweis in den beiden ersten Fällen zu führen.

Was den letzten anbetrifft, so ist ersichtlich, dass die Componenten der Kräfte in einer zur Resultanten senkrechten Richtung gleich sein werden und ebenso die Geschwindigkeiten in demselben Sinne. Daraus ist leicht der Beweis abzuleiten, wenn man denselben für einen beliebigen Fall, z. B. für den des Problemes X sucht, wo er leicht zu finden ist.

Ueber die Erhaltung der lebendigen Kräfte für die Flüssigkeiten.

173. Sei $POTQ$ (Fig. 70) ein Gefäss von beliebiger und unbestimmter Gestalt, dessen durch die Parallelen AD, CZ begrenzter Theil $ADCZ$ mit Flüssigkeit erfüllt sei. Man denke sich diese Flüssigkeit in Scheibchen $FKG \parallel AD$ zerlegt, deren Punkte alle von einer durch die zugehörige Coordinate der Curve dfb dargestellten beschleunigenden Kraft angegriffen werden (wobei die Ordinaten ad die positiven beschleunigenden Kräfte darstellen, d. h. die, welche von L nach B gerichtet sind, und die Ordinaten kf die in entgegengesetztem Sinne gerichteten Kräfte); ich behaupte, dass im Falle des Gleichgewichtes der Flüssigkeit die Fläche $adnmobc$ null sein wird, d. h. die Summe der positiven Flächen wird gleich der der negativen sein.

Denn es ist zum Gleichgewichte nothwendig, dass eine beliebige Scheibe FKG von unten nach oben und von oben nach unten den gleichen Druck erfahre. Nun ist der Druck auf die Scheibe FKG in der Richtung LB derselbe, als ob sie mit dem Cylinder $EHFG$ belastet wäre, dessen Gewicht, wenn man LK mit x und mit φ die beschleunigende Kraft für jede Scheibe bezeichnet

$$= FG \times \int \varphi dx,$$

oder

$$= FG \times (adin - nfk)$$

sein wird; ebenso lässt sich beweisen, dass der Druck auf FG in der Richtung BA

$$= FG(kfm - mog + gcb)$$

wird, und da diese beiden Drucke gleich sein müssen, so folgt:

$$adin - nfk = kfm - mog + gcb$$

und

$$adin - nfkm + mog - gcb = 0.$$

Q. e. d.

Zusatz.

174. Wenn man an Stelle der beschleunigenden Kraft φ die kleine Geschwindigkeit du setzt, die ihr, bei constanter Zeit, proportional sein würde, also die kleine Geschwindigkeit, mit welcher jede Scheibe, für sich allein betrachtet, in einem Augenblicke fallen würde, so folgt:

$$\int du dx = 0.$$

Wenn sich daher die Flüssigkeit nach AB zu bewegt und du die von jeder Scheibe verlorene oder gewonnene Geschwindigkeit, d. h. (nach § 50) die Geschwindigkeit darstellt, mit Hülfe derer jede Scheibe mit den anderen zusammen im Gleichgewicht geblieben wäre, so ist:

$$\int du dx = 0.$$

Bemerkung.

175. Wir haben oben allgemein gezeigt (§ 159), dass die Erhaltung der lebendigen Kräfte in dem Falle, dass die Schwere oder eine beliebige beschleunigende Kraft auf die Körper wirkt, aus der Erhaltung der lebendigen Kräfte für den Fall des Fehlens beschleunigender Kräfte folgt. Wir werden uns daher mit dem Nachweis begnügen, dass für eine Flüssigkeit $ADZC$, die zu einer Anfangszeit durch eine beliebige Ursache (etwa einen Kolben) getrieben und in Bewegung gesetzt wird, bei Abstraction von der Schwere, die Erhaltung der lebendigen Kräfte statt hat.

Wir wollen hierzu die Flüssigkeit in gleiche und unendlich kleine Scheiben zertheilt denken, deren Masse m, deren Dicke dx und deren Breite y heissen mögen; es ist dann:

$$m = y dx.$$

Nennt man u die Geschwindigkeit jeder Scheibe und $u \pm du$ ihre Geschwindigkeit in dem folgenden Augenblicke; dann müssen sich nach unserem Princip die mit den Geschwindigkeiten du begabten Scheiben das Gleichgewicht halten, d. h. es wird:

$$\int du\,dx = 0$$

sein (nach dem vorstehenden Zusatz). Zum Beweise der Erhaltung der lebendigen Kräfte hat man zu zeigen, dass:

$$\int mu\,du = 0.$$

Nun ist:

$$u = \frac{1}{y},$$

da die Geschwindigkeit für jede Scheibe ihrer Breite umgekehrt proportional ist:

$$m = y\,dx,$$

somit:

$$\int mu\,du = \int du\,dx = 0.$$

Q. e. d.

Voranzeige.

Daniel Bernoulli hat in seinem ausgezeichneten Werke, betitelt »Hydrodynamica etc.«, die Gesetze der Bewegung von Flüssigkeiten in Gefässen aus der Erhaltung der lebendigen Kräfte abgeleitet, ohne indessen diese zu beweisen. Da unser allgemeines, in § 50 auseinander gesetztes Princip uns zur Auffindung des Beweises derselben geführt hat, so ist klar, dass wir unmittelbar aus eben diesem Princip die Bewegung der Flüssigkeit hätten ableiten können, was lichtvoller und directer gewesen wäre. Da es aber hier nicht unsere Absicht ist, über Flüssigkeiten zu handeln, so haben wir uns begnügt, ganz kurz den Nutzen unseres Princips in einem Gebiete zu zeigen, das so schwierig erscheint. Wir werden uns somit hier mit dieser leichten Probe begnügen, und wir werden diesbezüglich auf nähere Einzelheiten eingehen, wenn wir unsere Abhandlung über die Flüssigkeiten herausgeben, in der wir aus unserem allgemeinen Princip die Lösung der schwierigsten bisher in diesem Gebiete gestellten Probleme ableiten werden.

Finis.

Nachwort.[113])

D'Alembert wurde im November 1717 als ein uneheliches Kind der *M^me de Tencin* geboren und kurz nach seiner Geburt auf den Stufen der kleinen Kirche *St. Jean Lerond* ausgesetzt. Er erhielt nach dem Platze, wo man ihn fand, den Namen *Jean Baptiste Lerond* und wurde wegen seiner Schwächlichkeit nicht in ein Findelhaus gebracht, sondern in ein kleines Dorf unweit *Amiens* in Pflege gegeben. Er blieb dort nur sechs Wochen, denn inzwischen war sein Vater, der Artillerie-General *Destouches* aus dem Auslande nach *Paris* zurückgekehrt, hatte sich nach dem Kinde erkundigt und brachte dasselbe in *Paris* bei einer einfachen Frau, *M^me Rousseau*, unter. Er hinterliess *D'Alembert* bei seinem Tode eine jährliche Rente von 1200 Francs, die diesen in jedem Falle für sein ganzes Leben vor Entbehrungen schützte und ihm gestattete, ganz seiner Wissenschaft zu leben. Nachdem *D'Alembert* das *collège Mazarin* absolvirt hatte, in dem er auf eine noch nicht aufgeklärte Weise den Namen *D'Alembert* erhielt, wandte er sich zuerst der Jurisprudenz, dann der Medicin zu, ohne an dem einen noch an dem anderen Studium Gefallen zu finden. So fasste er, etwa im Alter von 20 Jahren, den Entschluss, diese Studien aufzugeben und sich ganz seiner Lieblingswissenschaft, der Geometrie, zu widmen.

Die Anzahl von *D'Alembert*'s wissenschaftlichen Abhandlungen ist ausserordentlich gross, die Anregungen, die er durch dieselben gegeben hat, von unserem heutigen Standpunkte aus zu übersehen, ist fast unmöglich. Er ist der eigentliche Begründer der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, einige Grundsätze der Algebra sind von ihm zum ersten Male ausgesprochen worden. Alle diese grossen Verdienste werden durch seinen »Traité de Dynamique« in den Schatten gedrängt, den er im Alter von 26 Jahren veröffentlichte, und der, obgleich von der Pariser Akademie lobend anerkannt, doch nicht sogleich die Beachtung erfuhr, welche er verdiente. *D'Alembert* hatte sich schon im Jahre 1741 um einen Platz als Associé in der Akademie[114]) bemüht; dreimal wurde er zurückgewiesen, und erst im Jahre 1746 wird er als solcher aufgenommen, nachdem er sich bis dahin mit dem minderwerthigen Range eines Adjoint hatte begnügen müssen.

Er erhielt von da an von der Akademie ein Jahresgehalt von 500 Francs, zehn Jahre später (1756) wird er zum Pensionaire surnuméraire, 1765 zum Pensionaire titulaire ernannt. Auch seine Abhandlung über die Flüssigkeitsbewegung (1744) hat den Anklang nicht gefunden, den er wohl erhoffte, den ersten grossen Erfolg errang er mit seiner Abhandlung über die Ursache der Winde, mit der er eine von der *Berliner Akademie* gestellte Preisaufgabe löste und Mitglied dieser Akademie wurde. Ein weiterer grosser Erfolg war seine Arbeit über die Präcession der Nachtgleichen. Seine Arbeiten über die schwingenden Saiten hielten ihn in fortdauernder Discussion mit den zeitgenössischen grossen Mathematikern, *Euler*, *Bernoulli* und später *Lagrange*. *D'Alembert* hat selbst einen grossen Theil seiner mathematischen Schriften unter dem Titel Opuscules mathématiques in den Jahren 1760—1780 herausgegeben, es fehlt darin aber neben mehreren anderen Schriften vor allem die Dynamik, und auch später ist eine vollständige Sammlung seiner mathematischen Werke nicht erschienen.

Einen grossen Theil seiner Arbeitskraft hat *D'Alembert* der von *Diderot* herausgegebenen Encyclopädie gewidmet; die von ihm gelieferte Vorrede zu diesem Werke wurde von seinem Jahrhundert als ein litterarisches Meisterstück angestaunt, die ersten Pariser litterarischen Kreise fühlten sich hochgeehrt, wenn er in ihrer Mitte erschien, und 1753 wurde er auch Mitglied der Académie française und zum fortdauernden Secretär derselben erwählt. Als solcher hatte er auf die verstorbenen Mitglieder die sogenannten Eloges oder Lobreden zu halten, die jetzt gewöhnlich von den neu eintretenden, an Stelle der verstorbenen gewählten Mitgliedern übernommen werden. Sein Einfluss auf die Wahlen der Akademie und ferner auch sein Anschluss an die von *Voltaire* begründete Freidenkerrichtung, die in der Encyclopädie besonders hervortrat, brachten ihm eine grössere Anzahl von Feinden, denen er sich aber stets in Wort und Schrift gewachsen zeigte.

Trotz dieser Anfeindungen hat *D'Alembert* nicht einen Augenblick daran gedacht, sein Geburtsland zu verlassen. Er wurde bereits 1752 von *Friedrich* II. von Preussen aufgefordert, die Präsidentschaft der Berliner Akademie zu übernehmen. Er entschuldigte sich mit seiner Mitwirkung an der Encyclopädie, welche seine Anwesenheit in Paris erfordere; nichtsdestoweniger bot ihm 1759 der König nach dem Tode von

Maupertuis die Stelle von neuem an. 1762 sehen wir *D'Alembert* als Gast *Friedrich*'s II. in Berlin, aber er war nicht zu überreden, das Anerbieten des Königs anzunehmen. Er lehnte in gleicher Weise die Aufforderung der russischen Kaiserin ab, die Erziehung des jungen russischen Thronfolgers zu übernehmen.

Die Correspondenz, die *D'Alembert* mit seinen Freunden sehr eifrig unterhielt, war fast nur wissenschaftlichen Inhalts, mit *Voltaire* correspondirte er über philosophische Dinge, mit *Lagrange* über die wichtigsten Fragen der Mathematik und Physik. *Lagrange* hatte seinem Freunde *D'Alembert* seine Stellung an der Berliner Akademie zu verdanken, und auch *Laplace* wurde von *D'Alembert* an der Berliner Akademie unterzubringen gesucht; doch verhielt sich *Lagrange* abwehrend, nicht weil er *Laplace* unterschätzte — er kannte ihn im Uebrigen damals nur aus einem Empfehlungsschreiben *D'Alembert*'s — sondern weil er sich nicht den Einfluss zutraute, demselben eine entsprechende Stellung zu verschaffen.

In seinen letzten Lebensjahren lebte *D'Alembert* sehr zurückgezogen, namentlich nach dem Tode seiner Freundin *M^{lle} de l'Espinasse*. Er starb im Jahre 1783 im Alter von 66 Jahren.

Der »Traité de Dynamique« wurde im Jahre 1743 von *D'Alembert* der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Paris vorgelegt, und es liegt diese erste Auflage von 1743 der vorliegenden Uebersetzung zu Grunde. Im Jahre 1758 gab er eine zweite Auflage heraus, in der er eine Anzahl Versehen berichtigte — diese Berichtigungen sind auch in der vorliegenden Ausgabe berücksichtigt worden — und, ausser einigen unwesentlichen Zusätzen im Text, 61 erklärende Anmerkungen hinzufügte, welche ihm von *Bezout*, einem befreundeten Mitgliede der königlichen Akademie der Wissenschaften, geliefert wurden, und durch welche er sein Werk einer grösseren Anzahl von Lesern zugänglich zu machen suchte. Wir haben diese Anmerkungen, die eine fünfte Figurentafel mit 11 weiteren Figuren nöthig machten, hier nicht berücksichtigt, da sie nicht von *D'Alembert* selbst herrühren und bei den im Laufe der Zeit eingetretenen Veränderungen der Bezeichnungen dem Leser heutzutage nicht einmal das Studium des Werkes erleichtern würden. Eine dritte Auflage, ein unveränderter Abdruck der zweiten, wurde im Jahre 1796, dreizehn Jahre nach *D'Alembert's* Tode, gedruckt.

Der Glanzpunkt des Werkes ist die Aufstellung des grossen dynamischen Grundprincips (§ 50), welche einen Wendepunkt in der Geschichte der Mechanik darstellt. Um mit Hülfe der Principien *Newton's* die Bewegung eines Massensystems zu finden, dem gewisse Beschränkungen auferlegt sind, musste man sich zwischen den das System zusammensetzenden Massen Reactionskräfte construiren. Für den Fall des Gleichgewichtes machte diese Construction keine Schwierigkeiten, da man bereits im Besitze des klarsten Gleichgewichtsprincips, des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, war; für den Fall der Bewegung war man aber noch nicht zur Klarheit gekommen, und man nahm zu neuen Hypothesen seine Zuflucht, die im Allgemeinen der Einheitlichkeit entbehrten. *D'Alembert* setzte diesem Hin- und Herrathen ein Ende, indem er durch sein Princip, dass die von den Massen eines Systems in einem Zeitelement verlorenen Geschwindigkeiten sich an dem System das Gleichgewicht halten, das dynamische Problem auf ein statisches zurückführte. *D'Alembert* braucht somit zu seiner Darstellung der Dynamik ausser seinem Grundprincip nur noch die Grundlagen der Statik, die er sich, da ihm selbst eine exacte Form des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten noch nicht bekannt war[115]), in den drei Grundsätzen concentrirt denkt:

1) in dem Princip der Trägheit,
2) in dem Princip der Zusammensetzung von Bewegungen,
3) in dem von ihm »Princip des Gleichgewichtes« genannten Satze (§ 39): Wenn zwei Körper, deren Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten, wie ihre Massen, entgegengesetzte Richtungen haben, in solcher Weise, dass der eine sich nicht bewegen kann, ohne den anderen zu verrücken, so wird Gleichgewicht zwischen diesen beiden Körpern bestehen.

Neben diesen drei Voraussetzungen schleicht sich aber, wie ja auch nicht anders zu erwarten ist, der Satz der Gleichheit von actio und reactio in allgemeinerer Form ein, so bei der Ableitung des Hebelgesetzes in der ohne Commentar benützten Annahme, dass der Angriffspunkt einer Kraft im starren System in seiner Richtung verlegbar ist (S. 51).

Der erste Theil des Werkes leidet unter der Annahme, dass mechanische Principien beweisbar sind und eines anderen Beweises bedürfen, als der Uebereinstimmung ihrer Folgerungen mit der Erfahrung. Diese Ansicht, der die Scheinbeweise der mechanischen Principien im ersten Theile entspringen, war zu *D'Alembert*'s Zeit weit verbreitet; hatte doch die Berliner Akademie zu jener Zeit die Preisfrage gestellt, »ob die Gesetze der Statik und der Mechanik von nothwendiger oder nur erfahrungsmässiger Wahrheit seien«, und *D'Alembert* hat mit Beziehung auf diese Frage in dem Vorwort zur zweiten Auflage seiner Dynamik eine längere metaphysische Untersuchung hinzugefügt, die wahrlich nicht in den Rahmen seines genialen Werkes passt und in einem merkwürdigen Constrast zu seinen übrigen, in hervorragender Weise aufgeklärten Ideen steht, nach welchen er z. B. energisch dagegen protestirt, in dem Begriffe der Kraft irgend etwas anderes zu suchen, als die hervorgebrachte Wirkung (S. 16), und sogar so weit geht, in dem ganzen Streite, ob man die Kraft eines Massentheilchens durch das Product

Masse mal Geschwindigkeit

oder

Masse mal (Geschwindigkeit)^2

zu messen habe, einen für die Mechanik nutzlosen Wortstreit zu erblicken (S. 16). Man hat *D'Alembert* vorgeworfen, in dieser letzten Behauptung den Kernpunkt der Streitfrage nicht richtig erkannt zu haben, da sich diese vor allem darum drehte, ob für ein Massensystem die Summe der ersteren oder die der letzteren Producte mit der Zeit constant bleibe, und er hat in der That wohl nur seinen Angriff gegen die metaphysische Seite der Frage gerichtet; im Uebrigen hat er in ganz markanter Weise zu der Richtung der lebendigen Kräfte Stellung genommen, da er ja das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte als eine Folgerung seines allgemeinen Princips hinstellt (S. 165 ff.). Nur weist er diesem Satze seine Stellung als specielle Folgerung des dynamischen Grundprincips, nicht als dynamisches Grundprincip selbst an.

Die im zweiten Theil gegebenen Beispiele, durch welche *D'Alembert* den Nutzen seines Princips zeigt, werden für die Leser, welche gewohnt sind, derartige mechanische Probleme mittelst der analytischen Methoden von *Lagrange* zu lösen, einige Schwierigkeiten haben; die Hinzufügung dieser analytischen Lösungen unter Beibehaltung der *D'Alembert*'schen Bezeichnungen und der Nachweis der Uebereinstimmung beider Lösungen in den Anmerkungen wird daher das Studium dieser

Beispiele erleichtern. Man wird bei der Vergleichung beider Arten von Lösungen Gelegenheit haben, den Fortschritt der Mechanik durch die Methoden von *Lagrange* zu bewundern, der durch Verknüpfung des *D'Alembert*'schen Princips mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zu der einheitlichen dynamischen Grundformel:

$$\sum_1^n {}_i \left[\left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i\right)\delta x_i + \left(m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i\right)\delta y_i + \left(m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i\right)\delta z_i\right] = 0$$

gelangte.

Für den Fall der kräftelosen Mechanik, die seit *Hertz* in den Vordergrund des Interesses gerückt ist, lautet die Formel einfacher:

$$\sum_1^n {}_i \, m_i\left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\,\delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2}\,\delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2}\,\delta z_i\right) = 0,$$

und wenn eine Voraussagung in unserer Wissenschaft berechtigt ist, so ist es die, dass das *D'Alembert*'sche Princip in dieser Form den Ruhm seines Entdeckers in eine unabsehbare Zukunft hinaustragen wird.

Anmerkungen.

1) *Zu S. 3.* Die zweite Auflage ist dem Grafen von *Argenson* gewidmet, Minister im Jahre 1758.

2) *Zu S. 7.* Secte (sic!) à la vérité fort affoiblie aujourd'hui.

3) *Zu S. 10.* Unter instant versteht *D'Alembert* ein unendlich kleines Zeittheilchen, wir wollen uns indessen gleichfalls des Ausdrucks »Augenblick« bedienen, da *D'Alembert* zwischen constanten und nicht constanten *dt* unterscheidet. Die ersteren entsprechen unseren »Zeitelementen«; den allgemeineren, beide Fälle umfassenden Ausdruck instant übersetzen wir, wie oben, mit dem Hinweis, dass man bei diesem Ausdruck nicht etwa an den Begriff des Zeitpunktes zu denken hat.

4) *Zu S. 14.* *D'Alembert* meint die Marquise *de Châtelet*, die Freundin *Voltaire*'s.

5) *Zu S. 16.* In der zweiten Auflage folgen hier noch weitere Begründungen, die *D'Alembert* den ganzen Streit als für die Mechanik unfruchtbar erscheinen lassen.

6) *Zu S. 19.* Diese Abhandlung über die Flüssigkeiten erschien 1744.

7) *Zu S. 21.* *D'Alembert* denkt bei seinen »Körpern« stets an das, was wir einen »materiellen Punkt« nennen.

8) *Zu S. 22.* d. h. zeitlich untheilbar.

9) *Zu S. 23.* Das anticipirt bereits die zu beweisende Behauptung (vergl. Anm. 11).

10) *Zu S. 23.* Hier liegt der Fehlschluss, durch den *D'Alembert* von der falschen Voraussetzung des zweiten Falles zum richtigen Resultat kommt.

11) *Zu S. 24.* Gerade das Gegentheil hiervon hat *D'Alembert* zu seinem Scheinbeweise des Trägheitsgesetzes benützt (S. 23).

12) *Zu S. 25.* In der 2. Auflage fügt *D'Alembert* in einer zweiten Bemerkung hinzu, dass die Erfahrung mit dem Trägheitsprincip in Einklang ist. Denn 1) bleiben ruhende Körper

in Ruhe und 2) behält ein einmal in Bewegung gesetzter Körper seine gleichförmige, geradlinige Bewegung um so näher bei, je kleiner die Hindernisse seiner Bewegung (Reibung, Luftwiderstand) sind, so dass man schliessen kann, die Bewegung würde nie aufhören, wenn die verzögernden Ursachen null wären.

13) *Zu S. 27.* Das soll heissen: der Bewegung, welche durch keinerlei äussere Ursachen beeinflusst wird.

14) *Zu S. 28.* In der 2. Auflage fügt *D'Alembert* noch ein drittes Mittel zur Beurtheilung, ob eine Bewegung gleichförmig sei, hinzu, indem er sagt, wir können zwei Zeiträume gleich annehmen, wenn oft wiederholte Experimente zeigen, dass sich in denselben gleiche Wirkungen ereignen; er verweist dabei kurz auf die Wasseruhr.

15) *Zu S. 30.* Vergl. Anm. 3.

16) *Zu S. 31.* In der 2. Auflage ist der Inhalt dieser vier Zusätze ohne erhebliche Veränderungen auf sechs Zusätze vertheilt.

17) *Zu S. 33.* Hier im Sinne von »erfahrungsmässige Voraussetzung«, ähnlich wie z. B. Anfangsbedingungen einer Bewegung erfahrungsmässige Voraussetzungen sind.

18) *Zu S. 34.* Vergl. Anm. 20.

19) *Zu S. 34.* In der 2. Auflage ist diese Bemerkung noch ausführlicher behandelt (Bemerkungen II—V), unter Heranziehung der Schwere als Beispiel (Bemerkung VI).

20) *Zu S. 36.* puissances; wir übersetzen in der obigen Weise, da wir mit Kraft das Wort force wiedergeben, das durch die vorigen Paragraphen je nach dem dasselbe begleitenden Beiwort verschiedene Definitionen erhalten hat. Puissance, cause und force motrice haben bei *D'Alembert* ein und dieselbe Bedeutung (unsere »bewegende Kraft $\times$ Zeitelement«); force accélératrice entspricht unserer »Beschleunigung $\times$ Zeitelement«.

21) *Zu S. 37.* In diesem Urtheil ist der zu beweisende Satz bereits anticipirt, hier liegt der Kern des obigen Scheinbeweises.

22) *Zu S. 39.* d. h. die damals üblichen metaphysischen Begriffe der Kräfte und Bewegungsursachen.

23) *Zu S. 41.* Man macht sich von dieser alten Ausdrucksweise frei, indem man stets den sogenannten ganzen Sinus (sinus total) = 1 setzt.

24) *Zu S. 41.* In der 1. Auflage findet sich hier ein Versehen, das in der 2. Auflage berichtigt ist, es steht fälschlich: »multiplicirt mit dem Verhältniss zwischen dem Sinus des Winkels, den . . . bildet, und dem ganzen Sinus.«

25) *Zu S. 44.* Diesen Schluss zieht *D'Alembert* schon in Anticipation des gewünschten Resultates. In der obigen wunderlichen Form ist er durchaus unberechtigt.

26) *Zu S. 44.* In unserer Ausdrucksweise: das genannte Verhältniss ist gleich $\cos(CBD)$.

27) *Zu S. 45, Zus. III.* sinus versus x ist gleich $(1 - \cos x) \times$ ganzer sinus.

Zu S. 45, Zus. IV. Nimmt man GL zum ganzen Sinus, so ist:

$$\begin{array}{l} \text{sinus versus } CBF = GL(1 - \cos CBF) = KL\,, \\ \text{sinus versus } DCE = GL(1 - \cos DCE) > IK\,, \\ \hline \text{sinus versus } CBF + \text{sinus versus } DCE \quad > IL. \end{array}$$

28) *Zu S. 47.* des quantités, qui naissent ou s'évanouissent. In der 2. Auflage ist diese metaphysische Ausdrucksweise verbessert in: des limites des quantités finies.

29) *Zu S. 48.* Das ist offenbar nur eine Umschreibung, aber kein Beweis der Behauptung; denn dass die Wirkung einer Masse mit doppelter Geschwindigkeit gleich der Wirkung zweier halben Massen mit einfacher Geschwindigkeit ist, soll ja erst bewiesen werden.

30) *Zu S. 50.* In der 2. Auflage wird die Bemerkung hinzugefügt, dass diese Bedingung nicht bloss hinreichend, sondern auch nothwendig für das Gleichgewicht ist.

31) *Zu S. 51.* Das ist bereits eine neue Hypothese.

32) *Zu S. 52.* puissances, vergl. Anm. 20.

33) *Zu S. 52.* d. h. seiner Masse.

34) *Zu S. 52.* Vergl. Anm. 20.

35) *Zu S. 53.* Wir wollen von nun an da, wo ein Missverständniss nicht entstehen kann, für puissance das Wort Kraft gebrauchen.

36) *Zu S. 56.* Dieser etwas kurz ausgesprochene Satz soll jedenfalls etwas ähnliches aussagen, wie das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

37) *Zu S. 65.* Man hat hier zu denken, dass die Körper A, B, C etc. Stösse erhielten, die ihnen, wenn sie frei wären, die Bewegungen M, N, P etc. ertheilen würden.

38) *Zu S. 68.* Wie die Voraussetzungen des Satzes II aussagen, sollen auf A, B constante parallele Kräfte wirken, die den Massen nicht proportional zu sein brauchen; *D'Alembert* nennt dieselben hier allgemein »Gewichte« wegen ihrer Analogie mit den Wirkungen der Schwere.

39) *Zu S. 71.* oder Minimum. (Hinzufügung in der 2. Auflage, in der hier merkwürdigerweise vor der Anwendung des obigen Satzes auf die Theorie der Flüssigkeiten gewarnt wird).

40) *Zu S. 72.* wenn er frei wäre.

41) *Zu S. 72.* Nennen wir ω den Drehungswinkel des Hebels um den Punkt C, so lautet die Gleichung des *D'Alembert*'schen Princips:

$$R\,.\,(RS - RT)\,.\,CR\,.\,\delta\omega + B\,.\,(BG - BQ)\,.\,CB\,.\,\delta\omega$$
$$+ A(AM - AO)\,.\,CA\,.\,\delta\omega = 0,$$

oder

$$R(x - c)\varrho\,\delta\omega + B\left(\frac{x\mathrm{r}}{\varrho} - b\right)\mathrm{r}\,\delta\omega + A\left(\frac{xr}{\varrho} - a\right)r\,\delta\omega = 0,$$

und daraus folgt:

$$R(c - x)\varrho = Ar\left(\frac{xr}{\varrho} - a\right) + B\mathrm{r}\left(\frac{x\mathrm{r}}{\varrho} - b\right),$$

$$x = \frac{Aar\varrho + Bb\mathrm{r}\varrho + Rc\varrho^2}{Ar^2 + B\mathrm{r}^2 + R\varrho^2}.$$

42) *Zu S. 72.* Es sei daran erinnert, dass *D'Alembert* unter beschleunigender Kraft (force accélératrice) das versteht, was man heute »Beschleunigung $\times$ Zeitelement« nennt.

43) *Zu S. 79.* Am leichtesten folgt die Lösung mit Hülfe der Bewegungsgleichungen von *Lagrange*. Die lebendige Kraft von A ist:

$$\tfrac{1}{2}A\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \equiv \tfrac{1}{2}Au^2,$$

die von D:

$$\tfrac{1}{2}D\left(\frac{y^2}{a^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) \equiv \tfrac{1}{2}Dv^2,$$

somit die ganze lebendige Kraft in den von *D'Alembert* benützten Variabeln x, y:

$$T = \tfrac{1}{2}D\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2\,a^2}(Aa^2 + Dy^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Die *Lagrange*'schen Gleichungen sind hiernach:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{a^2}y\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left((Aa^2 + Dy^2)\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

mit den beiden Integralen:

$$(Aa^2 + Dy^2)\frac{dx}{dt} = \text{const.}$$

$$\left(\text{entsprechend } \frac{u}{g} = \frac{Aa^2 + Db^2}{Aa^2 + Dy^2} \text{ im Text}\right),$$

$$\tfrac{1}{2}D\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2a^2}(Aa^2 + Dy^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \text{const.}$$

$$\left(\text{entsprechend } v^2 = \frac{Dh^2 + Ag^2 - Au^2}{D} \text{ im Text}\right).$$

Um die Gleichung der Curve des Punktes D zu finden, berücksichtige man die Identität:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} \equiv \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2},$$

in der man die aus den *Lagrange*'schen Gleichungen für $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ folgenden Werthe:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2Dy\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}}{Aa^2 + Dy^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{a^2}y\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

einsetze, dann folgt die Gleichung im Text:

$$-\frac{a^4}{p^3}\cdot\frac{dp}{dt} - \frac{2y\frac{dy}{dt}a^4D}{p^2(Aa^2 + Dy^2)} = y\frac{dy}{dt}, \quad \left(\text{wenn } p = a\frac{dx}{dy}\right),$$

mit dem daselbst angegebenen Integrale.

44) *Zu S. 80.* Die Lösungen werden dadurch nur complicirter, wie bereits *Lagrange* hervorgehoben hat (Mécanique analytique II. Theil, I. Abschnitt, Anm. zu § 10): »Was diese Lösungen noch complicirt, ist, dass der Verfasser vermeiden will, die dt oder Zeitelemente constant zu machen, wie er selbst hervorhebt«.

45) *Zu S. 81.* Die *Lagrange*'schen Gleichungen lauten jetzt:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{a^2} y \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + f \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a},$$

$$\frac{d}{dt}\left((Aa^2 + Dy^2)\frac{dx}{dt}\right) = (paA + fyD)z,$$

$$\left(\text{wenn } z = a \cos \frac{x}{a}\right).$$

Um wieder die Uebereinstimmung mit den Gleichungen im Text für die Curve des Punktes D zu erhalten, setze man in der Identität:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \equiv \frac{1}{u^2}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2 x}{dt^2}\right\}$$

die aus den *Lagrange*'schen Gleichungen folgenden Werthe für $\frac{d^2 x}{dt^2}$ und $\frac{d^2 y}{dt^2}$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{z(paA + fyD) - 2Dy \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}}{Aa^2 + Dy^2},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{a^2} y \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + f \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a}$$

ein, dann folgen ohne Weiteres die im Text gegebenen Gleichungen, wenn man:

$$\alpha = -\frac{d^2 x}{dt^2} dt^2 = -\frac{du\, dx}{u}$$

setzt.

46) *Zu S. 82.* des vorhergehenden Paragraphen.

47) *Zu S. 83.* In der 2. Auflage sind einige solcher complicirteren Fälle § 97—99 behandelt.

48) *Zu S. 84.* naturellement, d. h. hier in Folge seiner in dem betreffenden Zeitpunkt inne gehabten Geschwindigkeit.

49) *Zu S. 84.* Absolute Schwere steht für Beschleunigung durch die Schwere oder durch eine beliebige derselben parallele constante Kraft, $\times$ Zeitelement.

50) *Zu S. 85.* Die lebendige Kraft von P ist

$$\tfrac{1}{2}P\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

die von F:

$$\tfrac{1}{2}F\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2}F\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

somit die ganze lebendige Kraft:

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{F\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + P\right\}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

und die *Lagrange*'sche Gleichung lautet:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}\left(F\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + P\right)\right] = p\frac{dy}{ds}P - g\frac{dx}{ds}F + F\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2},$$

da die Kräfte die Kräftefunction:

$$U = pyP - gxF$$

haben. Die erhaltene Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$\left(F\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + P\right)\frac{d^2s}{dt^2} + F\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = p\frac{dy}{ds}P - g\frac{dx}{ds}F,$$

das ist, wenn man bedenkt, dass:

$$\frac{ds}{dt} = u, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{du}{dt}$$

ist, die im Texte angegebene Differentialgleichung mit dem Integrale der lebendigen Kraft:

$$\tfrac{1}{2}\left(F\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + P\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - (pyP - gxF) = \text{const.}$$

51) *Zu S. 87.* Jetzt ist:

$$T = \tfrac{1}{2}F\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}P\left(\frac{ds_2}{dt}\right)^2,$$

wenn wir s_1 und s_2 für t und s im Text schreiben. Wieder gilt das Integral der lebendigen Kraft:

$$\tfrac{1}{2}\left(F\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + P\left(\frac{ds_2}{dt}\right)^2\right) - (pyP - gzF) = \text{const.}$$

52) *Zu S. 89.* d. h. hier zwei Stäbe MP, MP, die mit einander einen unveränderlichen Winkel einschliessen.

53) *Zu S. 90.* »In Folge der Kraft φ« ist hier gleich »in Folge der beschleunigenden Kraft φ«.

54) *Zu S. 91.* Hier ist ein grösserer Rechenfehler, der in der zweiten Auflage berichtigt ist. Er hat nur Einfluss auf die Gleichungen (C) und (D). Es ist an Stelle dieses Schlusses die folgende Betrachtung zu setzen:

Es ist, wenn r den Krümmungsradius in P vorstellt, der Winkel zwischen pR und PM

$$= \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{dx}{r};$$

nun ist:

$$\frac{\varpi i - pR}{a} =$$

dem Quadrat dieses Winkels (nach § 77), somit:

$$\varpi i - pR = a\left(\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{dx}{r}\right)^2.$$

In Folge dieses Unterschiedes haben dann die Gleichungen (C) und (D) des Textes so zu lauten:

$$\text{(C)} \qquad \frac{z\sqrt{a^2-c^2}}{a} + RV + \frac{\alpha\sqrt{a^2-y^2}}{a}$$

$$= \frac{y\,dx^2}{ar} + a\left(\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{dx}{r}\right)^2,$$

$$\text{(D)} \qquad \frac{z\sqrt{b^2-c^2}}{b} + RV + \frac{\alpha\sqrt{b^2-y^2}}{b}$$

$$= -\frac{y\,dx^2}{br} + a\left(\frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}} - \frac{dx}{r}\right)^2.$$

55) *Zu S. 94.* Die lebendige Kraft von P ist:

$$T_1 = \tfrac{1}{2}Pu^2,$$

die von M:

$$T_2 = \tfrac{1}{2} M \left\{ u^2 + 2uy\left(\frac{u}{r} + \frac{v}{\sqrt{a^2-y^2}}\right) + a^2\left(\frac{u}{r} + \frac{v}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)^2 \right\},$$

die von M:

$$T_3 = \tfrac{1}{2} \mathrm{M} \left\{ u^2 + 2u\mathrm{y}\left(-\frac{u}{r} + \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}}\right) + b^2\left(-\frac{u}{r} + \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}}\right)^2 \right\},$$

wenn man:

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad \mathrm{v} = \frac{d\mathrm{y}}{dt}$$

setzt und r den Krümmungsradius der Curve

$$\xi = \xi(\mathrm{x}),$$
$$\eta = \eta(\mathrm{x})$$

für P nennt, so dass:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\eta}{dx}\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{d\xi}{dx}\frac{d^2\eta}{dx^2}.$$

Es lauten dann die *Lagrange*'schen Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T_1+T_2+T_3)}{\partial u}\right] = \frac{\partial}{\partial x}(T_1+T_2+T_3) + P\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{r} + \frac{v}{\sqrt{a^2-y^2}}\right) = \frac{u^2}{r}\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a^2} - \frac{y}{a^2}\frac{du}{dt} - \frac{\lambda}{Ma^2},$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{u}{r} + \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}}\right) = -\frac{u^2}{r}\frac{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}}{b^2} - \frac{\mathrm{y}}{b^2}\frac{du}{dt} - \frac{\lambda}{\mathrm{M}b^2},$$

wobei wir die in Folge der Constanz des Winkels $MP\mathrm{M}$ bestehende Bedingung:

$$\frac{\delta y}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{\delta \mathrm{y}}{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}} = 0$$

durch einen Multiplicator λ eingeführt haben. Die zweite und dritte Gleichung stimmt mit den Gleichungen (E) und (F) des Textes überein, wenn man bedenkt, dass:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{r}+\frac{v}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)=\frac{u^2}{dx^2}d\left(\frac{dx}{r}+\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)$$
$$+\frac{udu}{dx^2}\left(\frac{dx}{r}+\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}\right),$$
$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{u}{r}+\frac{\mathrm{v}}{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}}\right)=\frac{u^2}{dx^2}d\left(-\frac{dx}{r}+\frac{d\mathrm{y}}{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}}\right)$$
$$+\frac{udu}{dx^2}\left(-\frac{dx}{r}+\frac{d\mathrm{y}}{\sqrt{b^2-\mathrm{y}^2}}\right),$$

und

$$z=\frac{\lambda dx^2}{Mcu^2},\quad \mathrm{z}=\frac{\lambda dx^2}{\mathrm{M}cu^2}$$

setzt. Die erste unserer obigen Gleichungen, die man fortlassen kann, wenn man das Integral der lebendigen Kraft dafür einführt, ist die Gleichung (G) des Textes, wenn man in derselben für RV, RV ihre Werthe aus den (berichtigten) Gleichungen (C) und (D) einsetzt.

56) *Zu S. 95.* Jetzt ist die ganze lebendige Kraft:

$$T=\tfrac{1}{2}Pu^2+\tfrac{1}{2}M\left\{u^2+2y\frac{uv}{\sqrt{a^2-y^2}}+\frac{a^2v^2}{a^2-y^2}\right\},$$

und die Differentialgleichungen des Problemes haben die beiden Integrale:

$$T=\text{const.},$$
$$Pu+M\left(u+\frac{yv}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)=\text{const.}$$

57) *Zu S. 95.* d. h. dass man die einzelnen Punkte der Curve mittelst Zirkel und Lineal construiren kann.

58) *Zu S. 98.* Es ist hier trotz des Ausdruckes »Gewichte« an zwei Massen m, M mit beliebigen constanten beschleunigenden Kräften in der Richtung der nach unten gehenden Verticalen zu denken.

59) *Zu S. 98.* $=$ Beschleunigung durch die Schwere $\times$ Zeitelement, vergl. Anm. 49.

60) *Zu S. 100.* Da die Lage des Fadens nur unendlich wenig von der Verticalen abweicht, werden von *D'Alembert* die verticalen Geschwindigkeiten von m und M vernachlässigt, somit ist die lebendige Kraft von m:

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

die von M:

$$\tfrac{1}{2}M\left\{\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right\}^2;$$

somit die ganze lebendige Kraft:

$$T=\tfrac{1}{2}(m+M)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2}M\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+2\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right\}.$$

Die in Folge der Schwere*) der beiden Massen vorhandene Kräftefunction hat nach x und y die Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-(pm+PM)\frac{x}{l},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-PM\frac{y}{L},$$

bei Vernachlässigung höherer Potenzen von x und y gegen l und L, die *Lagrange*'schen Gleichungen sind somit:

$$(m+M)\frac{d^2x}{dt^2}+M\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{pm+PM}{l}x$$

und

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{Py}{L},$$

und daraus folgen unmittelbar die Gleichungen (M) und (N) des Textes.

61) *Zu S. 100.* d. h. bis zum ersten Durchgang durch die Gleichgewichtslage.

62) *Zu S. 101.* Specifische Schwere soll die constante Beschleunigung in der Richtung der nach unten gehenden Verticalen sein, $\times$ Zeitelement.

63) *Zu S. 102.* Es ist $T^2=2\frac{l}{p}$.

64) *Zu S. 102.* Bei *D'Alembert* steht $\sqrt{2}$ statt $2-\sqrt{2}$. Wir haben diesen Rechenfehler auch in den folgenden Gleichungen berichtigt.

*) Im Sinne *D'Alembert*'s, vergl. Anm. 58.

65) *Zu S. 106.* Zur Zeit der Veröffentlichung der 1. Auflage ist offenbar *D'Alembert* die vollständige Integration der Differentialgleichung:

$$-\frac{d^2u}{dt^2} = u(2-\sqrt{2})\frac{2}{T^2}$$

nicht bekannt gewesen. Er hat sich mit solchen linearen Differentialgleichungen 2. O. im Anschluss an seine Untersuchungen über schwingende Saiten beschäftigt (Berichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften 1748), und so war er in der 2. Auflage der Dynamik im Stande, die Lösung seines Problemes V in wesentlich einfacherer Form zu geben. Es folgt ja, falls:

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ sein soll für } t = 0,$$

ohne Weiteres:

$$u = A\cos\left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}\,\frac{t}{T}\right);$$

damit kennt man $x\sqrt{2}+y$, und dann folgen leicht die Werthe von x und y aus den Gleichungen (P), (Q).

66) *Zu S. 108.* *D'Alembert* bemerkt noch in der 2. Auflage, dass die Wurzeln $\frac{Y}{X}$ und $\frac{\alpha}{\nu}$ stets reell sein müssen.

67) *Zu S. 109.* In der 2. Auflage ist der allgemeine Fall in den Bemerkungen IV—VIII etwas eingehender behandelt.

68) *Zu S. 110.* Vgl. Anm. 62.

69) *Zu S. 112.* Die Beweisgründe des § 107 sind keine zwingenden zu nennen, und darunter leidet auch die Untersuchung des § 109.

70) *Zu S. 114.* Das ist in der That der elegantere Weg, der in der 2. Auflage eingeschlagen wird, wobei *D'Alembert* noch $\alpha = 1$ setzt. Sind dann ν, ν', ν'' die drei Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{8}{\nu^3}+\frac{3}{\nu^2}-\frac{12}{\nu}+4=0,$$

so wird:

$$\begin{aligned}\mu &= 2\nu^2-2\nu-2,\\ \mu' &= 2\nu'^2-2\nu'-2,\\ \mu'' &= 2\nu''^2-2\nu''-2;\end{aligned}$$

man setze nun:

$$x + \nu y + \mu z = u,$$
$$x + \nu' y + \mu' z = u',$$
$$x + \nu'' y + \mu'' z = u'';$$

dann erhält man die drei Differentialgleichungen:

$$-d^2 u = (5 - 2\nu)\frac{2u\,dt^2}{T^2},$$

$$-d^2 u' = (5 - 2\nu')\frac{2u'dt^2}{T^2},$$

$$-d^2 u'' = (5 - 2\nu'')\frac{2u''dt^2}{T^2},$$

die genau so zu integriren sind, wie die Differentialgleichung in Anm. 65.

71) *Zu S. 116.* Vgl. Anm. 2. *D'Alembert* hat in der 2. Auflage diese ganze Untersuchung fortgelassen und nur für den Fall von drei Körpern gezeigt, dass alle Wurzeln reell sein müssen.

72) *Zu S. 121.* In der 2. Auflage sind diese Untersuchungen etwas weiter ausgeführt (Bemerkung XII—XVI).

73) *Zu S. 122.* In der 2. Auflage ist der Hülfssatz VIII noch durch zwei weitere Zusätze erläutert.

74) *Zu S. 123.* Nennt man σ den Abstand eines Theilchens V — oder, wie wir schreiben wollen, $d\tau$ — von C, so ist die lebendige Kraft des Systems:

$$T = \tfrac{1}{2} m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right] + \frac{1}{2a^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \int \sigma^2 d\tau.$$

D'Alembert setzt nun:

$$\int \sigma^2 d\tau = ma(a+b),$$

dann wird:

$$T = \tfrac{1}{2} m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{a+b}{a}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right];$$

die Kräftefunction ist:

$$U = pm\left(l \cos\frac{x}{l} + a\cos\frac{y}{a}\right),$$

wobei zu beachten ist, dass $\frac{x}{l}$ und $\frac{y}{a}$ ausserordentlich kleine Winkel sind; die *Lagrange*'schen Gleichungen werden hiernach:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-pm\frac{x}{l},$$

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{a+b}{a}\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-pm\frac{y}{a},$$

und daraus folgen die Gleichungen des Textes, wenn man noch

$$T^2=\frac{2l}{p}$$

setzt.

75) *Zu S. 125.* Des corps qui vacillent sur des plans; vaciller ist eigentlich hin- und herschwanken; es wird bei Problem VII somit von vornherein an ein schwingungsartiges Rollen gedacht.

76) *Zu S. 125.* d. i. das Loth von G auf die Ebene.

77) *Zu S. 125.* d. i. die Beschleunigung durch die Schwere.

78) *Zu S. 126.* Für die Lösung des Problemes genügen die beiden Integrale, welche ein Schwerpunktssatz und das Princip der lebendigen Kraft liefern.

Sei C_0 (Fig. 39) der Punkt, in welchem die Figur die Ebene zu einer Anfangszeit $t=0$ berührt, ω_1 der Winkel C_0GC, ω_2 der Winkel von CG gegen die Verticale, so ist die lebendige Kraft des Systems:

$$T=\tfrac{1}{2}m\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2\right]+\tfrac{1}{2}\varDelta\left[\frac{d(\omega_1+\omega_2)}{dt}\right]^2,$$

wenn X, Y die Coordinaten von G sind und $\varDelta$ das Trägheitsmoment der Figur in Bezug auf G vorstellt; es ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\text{(a)}\quad\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad X=X_0,\quad\text{(Schwerpunktssatz)}\\ \tfrac{1}{2}m\left(\frac{dY}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2}\varDelta\left[\frac{d(\omega_1+\omega_2)}{dt}\right]^2=mp(Y_0-Y),\\ \qquad\qquad\text{(Satz von der lebendigen Kraft).}\end{array}\right.$$

Ausserdem ist:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} X = \xi + r \sin \omega_2 \,, \\ Y = r \cos \omega_2 \,, \end{cases}$$

wenn r die Strecke CG, ξ die x Coordinate von C vorstellt. r ist als Function von ω_1 gegeben:

$$\text{(c)} \qquad r = r(\omega_1), \quad \text{(Gleichung der Grenzcurve)},$$

und es ist:

$$\text{(d)} \qquad r \sin \omega_2 - \frac{dr}{d\omega_1} \cos \omega_2 = 0 \,,$$

da die Curve die Ebene in C berührt.

Die zweite Gleichung (a) wird in Folge (b), (c), (d) eine Differentialgleichung für ω_1 allein, und es ergeben sich dann einzeln aus (c), (d), (b) die Werthe von $r \omega_2 Y \xi$.

79) *Zu S. 126.* In der 2. Auflage ist noch das Problem unendlich kleiner Schwankungen etwas eingehender behandelt.

80) *Zu S. 127.* Deutsch: »Bei dieser Bewegung ist indessen zu bemerken, dass die Ebene, auf der dieselbe vor sich geht, etwas rauh angenommen werden muss, damit die Curven bei dem Rollen nicht auch gleiten können, was eintreten würde, wenn die Ebene ausserordentlich glatt wäre.«

81) *Zu S. 127.* In dem *Euler*'schen Problem besteht das Schwerpunktsintegral nicht, dagegen die Bedingung:

$$\text{(a)} \qquad \xi = \int_0^{\omega_1} r \, d\omega_1 \,,$$

falls man zum Anfangspunkt den Punkt wählt, in dem C_0 zur Zeit $t = 0$ die Ebene berührt. Es besteht aber nach wie vor das Integral der lebendigen Kraft:

$$\text{(b)} \quad \tfrac{1}{2} m \left[\left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 \right] + \tfrac{1}{2} A \left[\frac{d(\omega_1 + \omega_2)}{dt} \right]^2 = mp(Y_0 - Y),$$

und wie früher die Gleichungen:

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} X = \xi + r \sin \omega_2 \,, \\ Y = r \cos \omega_2 \,; \end{cases}$$

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} r = r(\omega_1), \\ r \sin \omega_2 - \dfrac{dr}{d\omega_1} \cos \omega_2 = 0 \,. \end{cases}$$

Mit Hülfe von (a), (c), (d) wird (b) eine Differentialgleichung für ω_1 allein, dann folgen einzeln aus (d), (a), (b) die Unbekannten $r \omega_2 \xi X Y$.

82) *Zu S. 131.* Trotz dieser Ausdrucksweise sind unter M, P die Massen der beiden Theilchen zu verstehen.

83) *Zu S. 136.* Wir begnügen uns hier, da die Endgleichungen einer besonderen Vereinfachung nicht fähig sind, mit der Aufstellung des Ausdruckes für die lebendige Kraft. Bezeichnen wir mit $x_1 y_1$ die Coordinaten von P, mit $x_2 y_2$ die von M, so ist bei Einführung der *D'Alembert*'schen Variabeln x, y, z:

$$x_1 = y \cos x,$$

$$y_1 = y \sin x,$$

$$x_2 = y \cos x + (c - y)\{\cos x(1 - 2z^2) - 2z \sin x \sqrt{1 - z^2}\},$$

$$y_2 = y \sin x + (c - y)\{\sin x(1 - 2z^2) + 2z \cos x \sqrt{1 - z^2}\}.$$

Mit diesen Werthen folgt für die lebendige Kraft von P:

$$T_1 = \tfrac{1}{2} P \left\{ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right\},$$

für die von M:

$$T_2 = \tfrac{1}{2} M \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \{c^2 - 4y(c - y)z^2\} + 4z^2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right.$$

$$+ \frac{4(c - y)^2}{1 - z^2} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - 8(c - y)z \frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} + \frac{4(c - y)(c - 2yz^2)}{\sqrt{1 - z^2}} \frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt}$$

$$\left. - 4cz\sqrt{1 - z^2}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} \right].$$

Man kann sogleich das Flächenintegral und das Integral der lebendigen Kraft angeben, aber kein drittes Integral für den allgemeinen Fall.

84) *Zu S. 136.* d. h. mit solchen Impulsen, welche den Theilchen, wenn sie frei wären, derartige Geschwindigkeiten ertheilen würden.

85) *Zu S. 138.* Diese Schwierigkeit besteht heute nicht mehr; man weiss, dass auch bei Bedingungsungleichungen das *D'Alembert*'sche Princip bestehen bleibt, nur muss man die auf Bedingungsungleichungen bezüglichen Methoden der Variationsrechnung in Anwendung bringen.

86) *Zu S. 138.* Des corps qui se poussent ou qui se choquent. *D'Alembert* gebraucht im Uebrigen das Wort choc für beide Arten von Stössen.

87) *Zu S. 139.* Sind x und X die Coordinaten von m und M, so lautet das Princip in analytischer Form:

$$m\varDelta u\delta x + M\varDelta U\delta X = 0,$$

wo

$$\varDelta u = v - u,$$
$$\varDelta U = V - U.$$

Ausserdem soll nach dem Stosse:

$$\delta x = \delta X, \quad v = V$$

sein. Es folgt somit aus der ersten Gleichung:

$$m(v-u) + M(V-U) = 0,$$
$$v = V = \frac{mu + MU}{m + M}.$$

88) *Zu S. 139.* Stosskraft = Masse $\times$ Geschwindigkeit des stossenden Körpers.

89) *Zu S. 141.* Dabei ist G ein beliebiger Punkt der Geraden MO, L der Schnittpunkt der Geraden MO mit der Basis RQ und S der Fusspunkt des von G auf RQ gefällten Lothes.

90) *Zu S. 141.* wenn er frei wäre.

91) *Zu S. 142.* Nehmen wir die x-Axe in der Richtung QR, die y-Axe senkrecht dazu an, sei ξ die x-Coordinate eines Punktes der Figur, $\xi_0\eta_0$ die Coordinaten von M, so ist der analytische Ausdruck des Princips:

$$md\xi'\delta\xi + M(d\xi'_0\delta\xi_0 + d\eta'_0\delta\eta_0) = H_0\delta\eta_0\ ^{*}),$$

unter der Bedingung:

$$\delta\xi\cos(nx) = \delta\xi_0\cos(nx) + \delta\eta_0\cos(ny)$$
(Gleichheit der normalen Componenten),

wenn $\cos(nx)\cos(ny)$ die Richtungscosinusse der Figuren-Normalen in M vorstellen. Es folgen so die drei Gleichungen:

---

*) Wenn H_0 die in der Richtung der y-Axe auf M wirkende Kraft ist.

$$md\xi' + Md\xi'_0 = 0,$$
$$md\xi' \cos(ny) + Md\eta'_0 \cos(nx) = H_0 \cos(nx)$$
$$\xi' \cos(nx) = \xi'_0 \cos(nx) + \eta'_0 \cos(ny).$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt:

$$(m+M)d\xi' = Md\left[\eta'_0 \frac{\cos(ny)}{\cos(nx)}\right].$$

Man erhält hieraus die Gleichung des Textes, wenn man

$$d\xi = du,$$
$$d(\xi - \xi_0) = d\eta_0 \frac{\cos(ny)}{\cos(nx)} = dy$$

setzt; es folgt dann:

$$(m+M)d^2u = Md^2y.$$

92) *Zu S. 142.* d. h. der frühere Punkt A der Figur.

93) *Zu S. 143.* Zu den Oberflächen der beiden Körper.

94) *Zu S. 143.* d. h. kleine, diesen Berührungspunkt umschliessende Flächenstücke.

95) *Zu S. 144.* d. h. die Gesetze des elastischen Stosses.

96) *Zu S. 144.* d. h. der Experimentalphysik.

97) *Zu S. 146.* Bezeichnen wir mit $\Delta u_0 \Delta v_0$ die Geschwindigkeitszuwachse des Körpers $A(x_0 y_0)$, mit $\Delta\xi' \Delta\eta'$ die des Punktes $M(\xi\eta)$, mit $\Delta\varrho'$ die der Drehungsgeschwindigkeit*) der Figur um G, ε ihre Dichtigkeit, $d\tau$ irgend ein Element derselben, so ist der analytische Ausdruck des Princips:

$$A(\Delta u_0 \delta x_0 + \Delta v_0 \delta y_0) + M(\Delta\xi' \delta\xi + \Delta\eta' \delta\eta) + p\Delta\varrho' \delta\varrho = 0,$$

wo:

$$p = \int \varepsilon r^2 d\tau \quad (r \text{ Abstand } M \to d\tau)$$

dieselbe Bedeutung wie im Text hat.

Nun haben wir die Bedingung:

$$\delta x_0 \cos(nx) + \delta y_0 \cos(ny)$$
$$= \delta\xi \cos(nx) + \delta\eta \cos(ny) - \delta\varrho \,.\, MN$$

(Gleichheit der normalen Componenten),

*) Im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers.

wenn wir mit $\cos(nx)\cos(ny)$ die Richtungscosinusse der inneren Normalen in A bezeichnen, oder wenn wir diese zur x-Richtung nehmen:

$$\delta x_0 = \delta\xi - \delta\varrho \,.\, MN.$$

Es ergeben sich somit die Gleichungen:

$$\varDelta v_0 = 0, \quad \varDelta\eta' = 0,$$

$$A\varDelta u_0 + M\varDelta\xi' = 0,$$

$$A\varDelta u_0 \,.\, MN - p\varDelta\varrho' = 0.$$

Nach den Voraussetzungen des Problemes sollen $v_0\eta'\xi'\varrho'$ vor dem Stoss null sein; bezeichnen wir daher, um Uebereinstimmung mit dem Texte zu gewinnen:

$$\varDelta u_0 = \mathrm{u} - u,$$

$$\varDelta\xi' = +\alpha,$$

$$\varDelta\varrho' = -\frac{v}{MN},$$

so folgen die Gleichungen des Textes:

$$A\,.\,(u - \mathrm{u}) = M\,.\,\alpha,$$

$$M\,.\,\alpha\,.\,MN = \frac{v\,.\,p}{MN},$$

und

$$\mathrm{u} = \alpha - \varrho' MN = \alpha + v$$

(Gleichheit der normalen Geschwindigkeitscomponenten).

98) *Zu S. 147.* Nehmen wir die x-Axe in der Richtung aA an, nennen P, ϱ die Drehungswinkel der beiden Kugeln um C, c, so ist der analytische Ausdruck des *D'Alembert*'schen Princips:

$$F\varDelta P'\delta P + f\varDelta\varrho'\delta\varrho = 0,$$

wo F, f die Trägheitsmomente von Aa in Bezug auf C, c sind. Es ist ferner:

$$CA\,.\,\varDelta P' = \mathrm{u} - u,$$

$$ca\,.\,\varDelta\varrho' = \mathrm{v} - v,$$

somit:

$$\frac{F}{CA}(\mathrm{u} - u)\delta P + \frac{f}{ca}(\mathrm{v} - v)\delta\varrho = 0.$$

In Folge der Gleichheit der normalen Componenten an der Berührungsstelle muss:

$$CG \,.\, \delta P - cg \,.\, \delta \varrho = 0$$

sein, es ergeben sich daher die beiden Gleichungen:

$$\frac{F(\mathrm{u} - u)}{CA \,.\, CG} + \frac{f(\mathrm{v} - v)}{ca \,.\, cg} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{u} \,.\, CG}{CA} = \frac{\mathrm{v} \,.\, cg}{ca},$$

das sind die beiden Gleichungen des Textes.

99) *Zu S. 149.* An dem Faden, nicht etwa um den festen Punkt C.

100) *Zu S. 150.* Die Lösung ist der der vorhergehenden Aufgabe ganz analog; das über beide Körper auszudehnende Integral:

$$\int \varepsilon (\varDelta u \delta x + \varDelta v \delta y + \varDelta w \delta z) d\tau$$

muss gleich null sein, unter der Bedingung, dass im Berührungspunkt nach dem Stoss die normalen Componenten gleich sind. Als Unbekannte sind zu wählen die Drehungswinkel der Aufhängungspunkte der Körper um die festen Punkte und die Drehungswinkel der Schwerpunkte um die Aufhängungspunkte. Wir erhalten aus dem Princip vier Gleichungen für die vier Unbekannten. Die Formeln werden ziemlich complicirt und sind daher auch von *D'Alembert* nicht weiter ausgeführt worden.

101) *Zu S. 152.* Nehmen wir AQ zur y-Axe, die Parallele zu QT durch A zur x-Axe, nennen $\delta x \delta y$ die Verrückungen von A, $\delta \beta$, $\delta \gamma$ resp. die Verrückungen von B, C in den Richtungen AB, AC, so lautet die analytische Form des *D'Alembert*'schen Princips:

$$A[(AN - AP)\delta x + VP \,.\, \delta y] + B \,.\, BZ \,.\, \delta \beta + C \,.\, CX \,.\, \delta \gamma = 0.$$

Dabei ist wegen der Gleichheit der normalen Componenten:

$$-\delta \beta = \frac{AQ}{AS} \delta x + \frac{QS}{AS} \delta y,$$

$$-\delta \gamma = \frac{AQ}{AT} \delta x + \frac{QT}{AT} \delta y,$$

somit folgt aus der Gleichung des Princips:

$$A \,.\, PN = B \,.\, \frac{BZ \,.\, AQ}{AS} + C \,.\, \frac{CX \,.\, AQ}{AT},$$

$$A \,.\, VP = B \,.\, \frac{BZ \,.\, QS}{AS} + C \,.\, \frac{CX \,.\, QT}{AT},$$

und die beiden Gleichungen, die die Gleichheit der normalen Geschwindigkeiten ausdrücken, lauten:

$$BZ = \frac{AV \,.\, AO}{AR},$$

$$CX = \frac{AV \,.\, Ao}{AR}.$$

Das sind die vier Gleichungen des Textes.

102) *Zu S. 153.* Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides 1744. Liv. III. Chap. I.

103) *Zu S. 153.* infiniment, gemeint ist »ausserordentlich gross«.

104) *Zu S. 154.* Dieses Paradoxon löst sich, wenn man bedenkt, dass die Bedingung für die normalen Componenten keine Gleichung, sondern eine Ungleichung ist.

105) *Zu S. 154.* Führt man nach den Methoden von *Lagrange* die Undurchdringlichkeitsbedingungen durch Multiplicatoren ein, so müssen diese bestimmte Vorzeichen haben, die Theorie giebt daher wohl die Bedingungen, aber die Bemerkung des Textes ist in so fern berechtigt, als man für jeden besonderen Fall probiren muss, ob diese Bedingungen erfüllt sind.

106) *Zu S. 160.* Indem man die Bahn des Punktes F von vornherein nicht als geradlinig voraussetzt.

107) *Zu S. 164.* Wo α und β Constanten sind.

108) *Zu S. 164.* Wo F und G constant sind.

109) *Zu S. 165.* In der 2. Auflage schliesst hier *D'Alembert* noch weitere Betrachtungen über die elastischen Stösse an, ohne indessen zu versuchen, wirklich strenge Methoden zur Lösung solcher Probleme aufzustellen.

110) *Zu S. 166.* In dieser Form ausgesprochen, ist der Satz nicht in allen Fällen correct, der wahre Sinn wird erst aus § 159 klar.

111) *Zu S. 174.* Wo BK stets die Projection der Strecke BG auf die Richtung der resultirenden Kraft vorstellt.

112) *Zu S. 177.* Das ist wieder ein Anklang an das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, dessen exacte analytische Form erst von *Lagrange* aufgefunden wurde. (Allgemein war es zum ersten Male von *Jean Bernoulli* bereits 1717 in einem Briefe an *Varignon* ausgesprochen worden.)

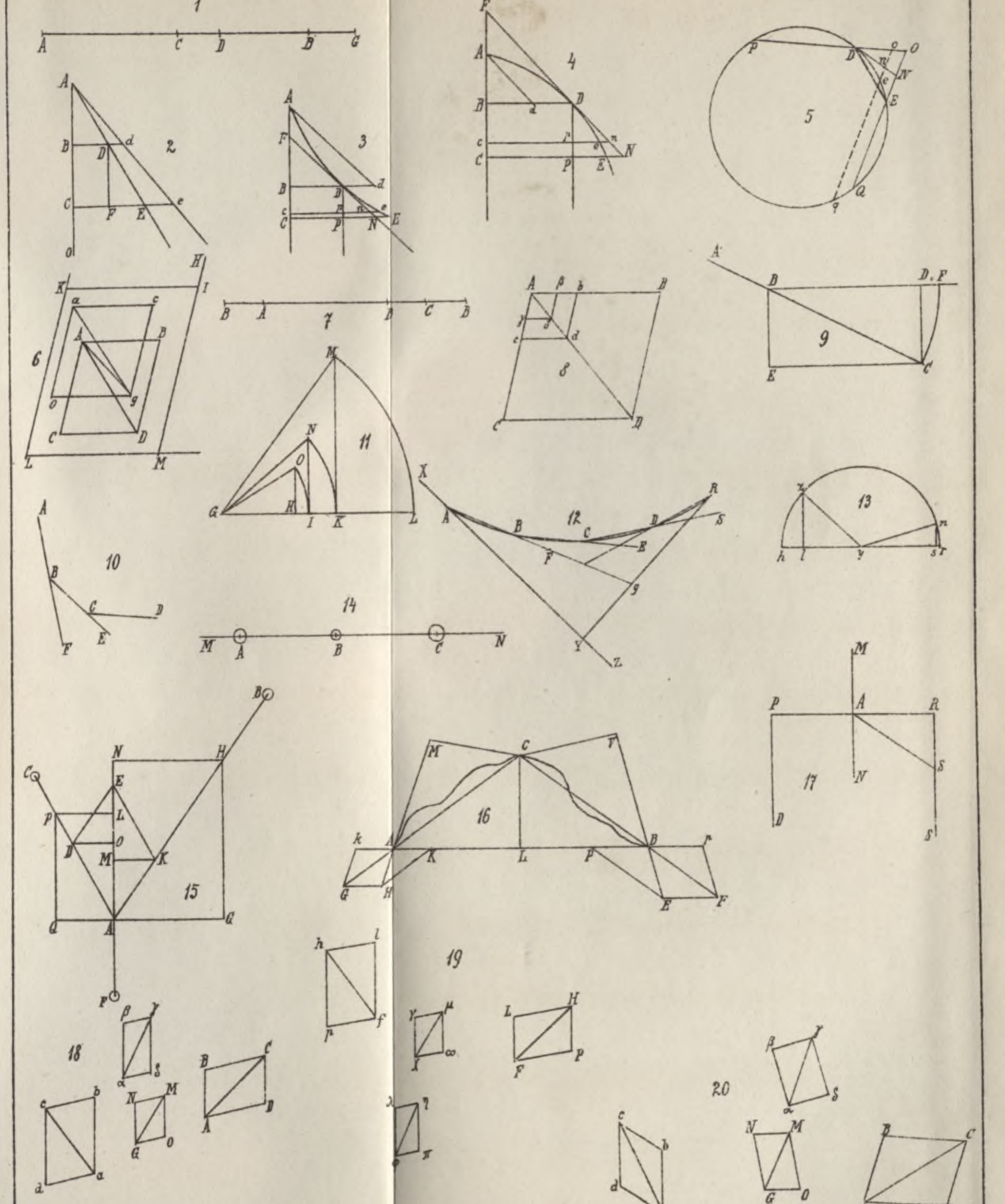
113) *Zu S. 181.* Eine ausgezeichnete, geistvolle Biographie *D'Alembert*'s hat *Bertrand* gegeben. (*Bertrand*, les grands écrivains français; *D'Alembert*, Paris, Hachette 1889.)

114) *Zu S. 181.* In der Académie des Sciences.

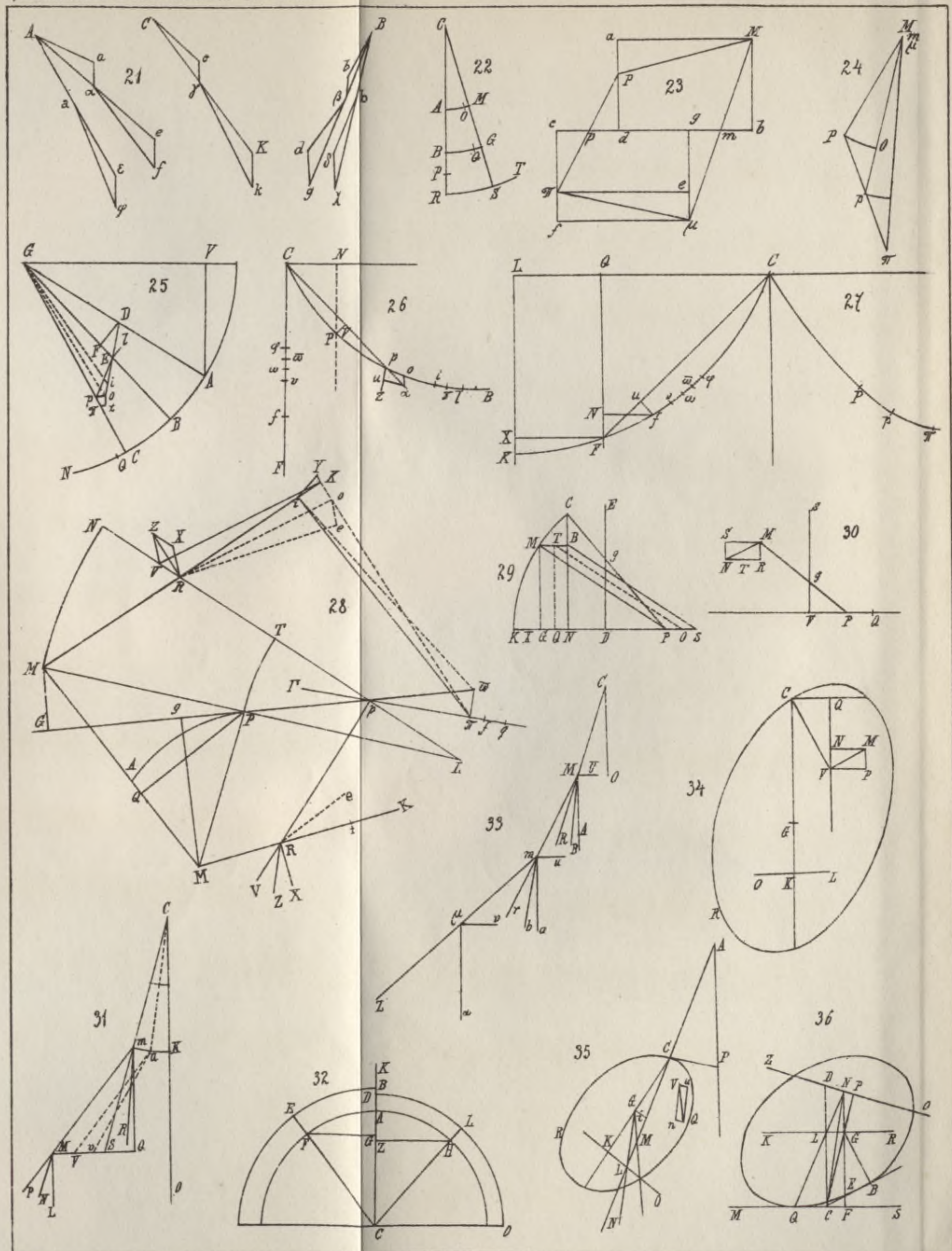
115) *Zu S. 184.* Andeutungen desselben finden sich S. 56 und 177 ff.

Inhaltsverzeichniss.

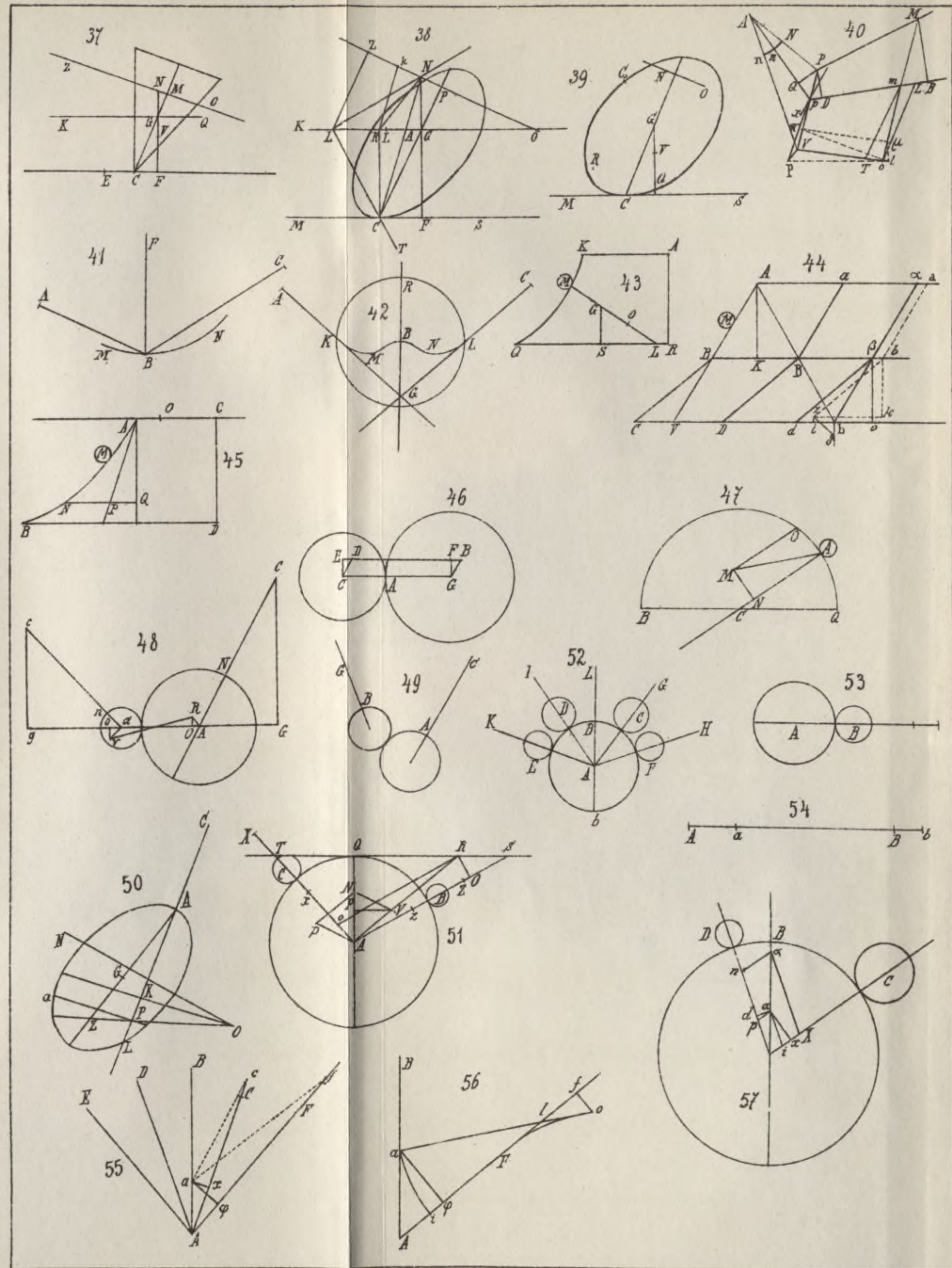
Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.



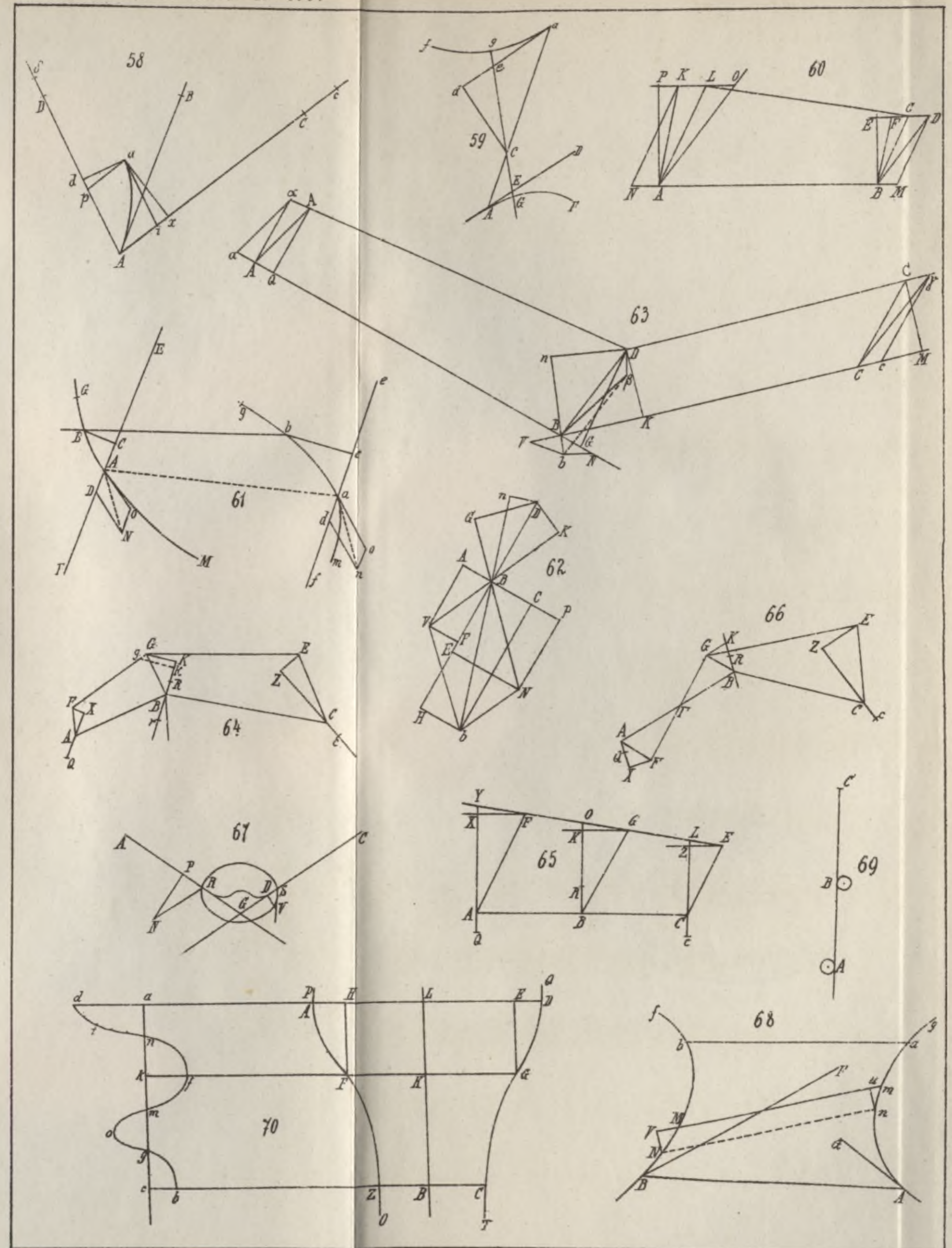
Verlag v. Wilhelm Engelmann, Leipzig.



Verlag v. Wilhelm Engelmann, Leipzig.



Verlag v. Wilhelm Engelmann, Leipzig.



Verlag v. Wilhelm Engelmann, Leipzig.