ZASTOSOWANIE WYZNACZNIKÓW

W TEORYI

NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW.

NAPISAŁ

DOMINIK ZBROŻEK.

Osobne odbicie z IX tomu Pamiętnika Wydz. matem.-przyr. Akademii Umiejętności.

KRAKÓW.
W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządem Ignacego Stelcla.
1884.

ZASTOSOWANIE WYZNACZNIKÓW
W TEORYI
NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW.

Napisał

DOMINIK ZBROŻEK.

A.

Wyznaczenie najprawdopodobniejszych wartości kilku niewiadomych od siebie niezależnych, na podstawie spostrzeżeń nad ilością, która jest funkcyją tych niewiadomych, czyli wyrównanie spostrzeżeń pośredniczących.

1. Jeżeli mamy ilości niewiadome $x, y, z \ldots.$, w liczbie m, połączone z ilościami wiadomemi $a, b, c, \ldots$, i ilością L, którą oznaczamy za pomocą spostrzeżeń, to wyraz:

$$F\,(x, y, z, \ldots\ldots a, b, c \ldots L) = 0 \tag{1}$$

może być obrazem tego związku wyżéj wymienionych ilości. Otrzymawszy L ze spostrzeżeń, należy przyjąć, że ilości nam wiadome $a, b, c \ldots$, mogą przybiérać różne znane wartości a robiąc n takich spostrzeżeń, otrzymamy równania, których liczba będzie n, a z tych jedno n. p. r^{te} powinno dać:

$$F\,(x, y, z \ldots\ldots a_r, b_r, c_r \ldots L_r) = 0\,. \tag{2}$$

Zważywszy, że wszelkie spostrzeżenia, jakie robimy, są zawsze błędne, zważywszy również, że prawdopodobieństwo popełnienia pewnego błędu O jest wprawdzie największe, lecz przytém nieskończenie małe, wnioskować należy, że niewiadome $x, y, z \ldots.$, dadzą się wprawdzie wyznaczyć z m równań i zadość uczynią układowi równań (2) w tym razie, gdy $n = m$; lecz wartości dla $x, y, z \ldots$ będą obciążone błędami, o których wielkości nie będziemy mieli wyobrażenia. Jeżeli zaś nad L robimy więcej spostrzeżeń, t. j. gdy $n > m$ będzie, to zyskamy więcéj równań, niż nam potrzeba do wyznaczenia niewiadomych a obrachowawszy z m równań niewiadome i podstawiwszy je w $n - m$ pozostałych równaniach, nie uczynią one zadość tym pozostałym $n - m$ równaniom, t. j. nie zredukują ich do O, tylko otrzymamy ilości δ różniące się od O. To samo zajdzie, jeżeli otrzymawszy w jaki inny sposób prawdopodobne wartości dla niewiadomych, podstawimy je w system (2). Z tego powodu będzie:

(3) $$F\,(x, y, z \ldots a_r, b_r, c_r \ldots L_r) = \delta_r \quad \ldots\ldots$$

System (2) nazywamy systemem czyli układem równań zasadniczych, system zaś (3) systemem równań błędów.

2. Równanie (1) a zatém i układy (2), (3) dadzą się za pomocą szeregu Taylora przeistoczyć na równania linijne, jeżeli podstawimy

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta \quad \ldots\ldots$$

gdzie $x_0, y_0, z_0 \ldots.$ tak mało się różnią od $x, y, z \ldots.$, że drugie potęgi ilości $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ lub ich iloczyny opuścić można; będzie zatém:

$$0 = F\,(x, y, z \ldots. a, b, c \ldots L) = F\,(x_0, y_0, z_0 \ldots. a, b, c, .. L) + \frac{dF}{dx}\xi + \frac{dF}{dy}\eta + \frac{dF}{dz}\zeta + \ldots$$

a wstawiając w pojedyńcze pochodne $x_0, y_0, z_0 \ldots$ zamiast $x, y, z, ..$ otrzymamy:

$$k_1\xi + k_2\eta + k_3\zeta + \ldots. + K = 0\ ,$$

$$\text{gdzie } k_1 = \frac{dF}{dx};\ k_2 = \frac{dF}{dy};\ k_3 = \frac{dF}{dz}, \ldots.\ aK = F\,(x_0\ y_0\ z_0 \ldots a, b, c, \ldots L)\ .$$

W ilości K. jest zatém zawarta ilość, nad którą spostrzeżenia robimy. System równań zasadniczych może być dla tego zawsze układem równań linijnych następującéj formy:

(4) $$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots. + l_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ \ldots + l_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + l_n = 0 \end{array}$$

a system równań błędów będzie:

(5) $$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots. + l_1 = \delta_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots. + l_2 = \delta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + l_n = \delta_n \end{array}$$

gdzie w systemie (4) wyobrażamy sobie za niewiadome podstawione rzeczywiste wartości, zaś w systemie (5) tylko prawdopodobne.

3. Błędy δ będą tém mniejsze im dokładniéj wyznaczymy niewiadome, co wtedy nastąpi, jeżeli z możliwą starannością spostrzeżenia nasze robimy. Najlepsze pojęcie o dokładności w spostrzeżeniach, jak to nas uczą początki teoryi najmniejszych kwadratów, daje błąd średni ε, którego kwadrat równa się ułamkowi, a którego licznikiem jest suma kwadratów błędów rzeczywistych Δ, popełnianych przy n krotném spostrzeganiu jakiéjś ilości w równych warunkach, mianownikiem zaś jest liczba spostrzeżeń; zatem

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n} = \frac{[\Delta\Delta]}{n}\ .$$

Jeżeli dokładność w spostrzeganiu oznaczymy przez h, możemy wtedy przyjąć, że błędy średnie są w odwrotnym stosunku do dokładności, czyli

$$\varepsilon_0^2 : \varepsilon_1^2 : \varepsilon_2^2 : \ldots = \frac{1}{h_0^2} : \frac{1}{h_1^2} : \frac{1}{h_2^2} : \ldots : \frac{1}{h_n^2} = \frac{1}{p_0} : \frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \ldots : \frac{1}{p_n}$$

gdzie $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$ uważamy za liczby stojące w odwrotnym stosunku do kwadratów średnich błędów, a z których jedna dowolnie przyjętą być może. Podstawmy $p_0 = 1$ otrzymamy

$$\varepsilon_0^2 : \varepsilon_1^2 : \varepsilon_2^2 : \ldots = \frac{1}{h_0^2} : \frac{1}{h_1^2} : \frac{1}{h_2^2} : \ldots = 1 : \frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \ldots ,$$ a ztąd ogólnie

$$\varepsilon_0 = \varepsilon \sqrt{p} , \qquad h = h_0 \sqrt{p} ; \tag{6}$$

z czego wynika, że mnożąc błąd średni przez $\sqrt{p}$ otrzymamy błąd średni ε_0, dla którego $p = 1$ a z powodu, że ilości p są w odwrotnym stosunku do kwadratów średnich błędów i dają nam pojęcie o dokładności w spostrzeżeniach, nazywamy je wagami (*pondera*).

4. Z uwagi, że przeprowadzenie rachunkowe pozostaje to samo, czy większą lub mniejszą ilość niewiadomych przyjmiemy, ograniczmy się do liczby cztérech niewiadomych od siebie niezależnych a połączonych zasadniczém równaniem

$$ax + by + cz + dt + l = 0$$

gdzie a, b, c, d są znane ilości, zaś l otrzymuje swą wartość z dokonanych spostrzeżeń. Jeżeli robimy n spostrzeżeń w różnych warunkach i z różną dokładnością h, będziemy mieli n równań, które przedstawione są w (4), a przyjąwszy prawdopodobne wartości dla x, y, z, t, otrzymamy system równań (5). W (5) zmieniają się δ, ze zmianą przyjęcia prawdopodobnych wartości dla niewiadomych. Wyraz dla prawdopodobieństwa P równoczesnego istnienia pewnego układu δ, daje nam rachunek prawdopodobieństwa w równaniu

$$P = k e^{-\{h_1^2 \delta_1^2 + h_2^2 d_2^2 + \ldots\ldots + h_n^2 \delta_n^2\}} .$$

Wprowadzając w to równanie $h_r = h_0 \sqrt{p_r}$ z (6) będzie

$$P = k e^{-h_0^2 \{p_1 \delta_1^2 + p_2 \delta_2^2 + \ldots\ldots + p_n \delta_n^2\}} = k e^{-h_0^2 [p \delta\delta]} . \tag{7}$$

Ponieważ w tym razie ilości k, e, h_0 i p są stałe a tylko ze zmianą δ zmieniać się może prawdopodobieństwo P, możemy się zapytać: Jakie należy przyjąć wartości na x, y, z, t aby one odpowiadały najwięcéj naszym spostrzeżeniom? W równaniu (7) leży odpowiedź. Z powodu że δ mają być wynikiem podstawień w układzie (4), będą te wartości niewiadomych najprawdopodobniejsze, dla których prawdopodobieństwo równoczesnego istnienia różnych w układzie (5) występujących δ będzie największe, a to nastąpi gdy w równaniu (7)

$$p_1 d_1^2 + p_2 \delta_2^2 + \ldots + p_n \delta_n^2 = [p \delta\delta] = B \tag{8}$$

będzie najmniéjsze czyli minimum [1]).

---

[1]) Nie bez podstawy jest zarzut, z którym się często spotkać można, że przy teoryi najmniejszych kwadratów, opartéj na rachunku prawdopodobieństwa, przypuszcza się ciągłość w postępie spostrzeżeń oraz nieskończenie wielka liczba tych spostrzeżeń. Jestto zarzut słuszny, lecz należy zwrócić także uwagę na to, że mamy tu do czynienia z prawdopodobieństwem lecz nie z pewnością. Że wyprowadzenie prawdopodobieństwa popełnienia

Wyraz B, powstaje jeżeli każde równanie układu (5) pomnożymy odpowiednią ważnością, potém wyniesiemy je pojedynczo do kwadratu, nareszcie wszystkie kwadraty zesumujemy.

Wykonanie téj operacyi jest według (6) niczém inném jak redukcyją równań błędów do jednakowéj dokładności spostrzeżeń, mianowicie do spostrzeżeń, których waga jest jednostką. Przedstawmy sobie już tę operacyję na układzie (5) wykonaną, a pozostawiając te same znaki w odmienném ich znaczeniu, t. j. zamiast pisać n. p. $c_r\sqrt{p_r}$, $\delta_r\sqrt{p_r}$ piszmy c_r, δ_r, przeistoczy się (8) na

(9) $$B = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2 + [\delta\delta]\,.$$

W skutek przyjęcia, że niewiadome są niezależne, będą zawarowane równania minimum następujące

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\frac{dB}{dx} &= \delta_1\,\frac{d\delta_1}{dx} + \delta_2\,\frac{d\delta_2}{dx} + \ldots + \delta_n\,\frac{d\delta_n}{dx} = 0\\
\frac{1}{2}\,\frac{dB}{dy} &= \delta_1\,\frac{d\delta_1}{dy} + \delta_2\,\frac{d\delta_2}{dy} + \ldots + \delta_n\,\frac{d\delta_n}{dy} = 0\\
\frac{1}{2}\,\frac{dB}{dz} &= \delta_1\,\frac{d\delta_1}{dz} + \delta_2\,\frac{d\delta_2}{dz} + \ldots + \delta_n\,\frac{d\delta_n}{dz} = 0\\
\frac{1}{2}\,\frac{dB}{dt} &= \delta_1\,\frac{d\delta_1}{dt} + \delta_2\,\frac{d\delta_2}{dt} + \ldots + \delta_n\,\frac{d\delta_n}{dt} = 0\,.
\end{aligned}$$

Z (5) otrzymamy $\frac{d\delta}{dx} = a$; $\frac{d\delta}{dy} = b$; $\frac{d\delta}{dz} = c$; $\frac{d\delta}{dt} = d$; z odpowiedniémi wskaźnikami, w skutek czego zawarowane równania minimum przekształcają się w następujące:

(10) $$\begin{aligned}
a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 + \ldots + a_n\,\delta_n &= [a\delta] = 0\\
b_1\,\delta_1 + b_2\,\delta_2 + \ldots + b_n\,\delta_n &= [b\delta] = 0\\
c_1\,\delta_1 + c_2\,\delta_2 + \ldots + c_n\,\delta_n &= [c\delta] = 0\\
d_1\,\delta_1 + d_2\,\delta_2 + \ldots + d_n\,\delta_n &= [d\delta] = 0
\end{aligned}$$

---

błędu, przypadającego między Δ a $\Delta + \delta$, $\varphi(\Delta) = \frac{h\delta}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\Delta^2}$ gdzie δ oznacza odcinek nieskończenie mały na osi x, opiéra się na arytmetycznéj średniéj, nie osłabia to w niczém siły dowodu, gdyż nie potrzebujemy średniéj arytmetycznéj przyjmować jako aksyjomat, lecz wyprowadzić tę średnią na zasadzie, że błędy różnokierunkowe są równie możliwe, a zatém że $\varphi(+\Delta) = \varphi(-\Delta)$, tj. że robiąc nawet dwa spostrzeżenia, a popełniając błąd raz w kierunku dodatnim, drugi raz popełnić powinniśmy taki sam błąd lecz w kierunku odjemnym. Jeżeli zaś oba błędy są w jednym kierunku, to mamy do czynienia z jakiegokolwiek bądź powodu z błędem stałym, który wyrugować należy. Przyjąwszy wyż wspomnianą zasadę jako podstawę, będzie arytmetyczna średnia wynikiem, gdyż wtedy $[\Delta] = 0$.

Że błąd średni daje nam najlepsze pojęcie o dokładności w spostrzeganiu, jest tém udowodnione:

1) że przy téj saméj ilości spostrzeżeń dokładność w spostrzeganiu z większém prawdopodobieństwem jest oznaczona, jakby to być mogło przy użyciu innych potęg rzeczywistych błędów Δ.

2) że przy zestawieniu szeregów błędów o téj saméj ilości spostrzeżeń, których suma bez względu na znak jest ta sama, przyznaćby należało wszystkim spostrzeżeniom tę samą dokładność, pomimo znacznych różnic w wielkości błędów.

3) że podnosząc pojedyncze błędy do kwadratu nie potrzebujemy zważać na znak.

4) że użycie do tego celu wyższych potęg błędów, daje znowu przewagę błędom większym.

Niechcąc opierać wyznaczenia niewiadomych na funkcyi prawdopodobieństwa, jak to w najnowszych czasach najwięcéj się praktykuje: musimy przyjąć, że $[p\delta\delta]$ musi być minimum, co wprawdzie da się różnie wywnioskować, lecz oparcie na podstawie rachunku prawdopodobieństwa jest nietylko racyjonalniejsze, lecz nadaje także przeprowadzeniu dowodu więcéj siły.

Liczba tych równań odpowiada liczbie niewiadomych. Podstawiając w układ (10) wartości dla ε z układu (5) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t + [al] &= 0\\
[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,t + [bl] &= 0\\
[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,t + [cl] &= 0\\
[ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,t + [dl] &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

przyczém $[aa] = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + \ldots. + a_n a_n$

$[ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots. + a_n b_n$

i t. d.

Równania układu (11) nazywamy równaniami normalnemi i z nich dadzą się wartości najprawdopodobniejsze dla $x, y, z, t,$ wyznaczyć.

5. Wyznacznik równań normalnych jest wyznacznikiem symetrycznym i przedstawia się w następującéj formie

$$\begin{vmatrix} [aa], & [ab], & [ac], & [ad] \\ [ab], & [bb], & [bc], & [bd] \\ [ac], & [bc], & [cc], & [cd] \\ [ad], & [bd], & [cd], & [dd] \end{vmatrix} = \sigma .$$

Rozkładając go na minory otrzymamy

$$\begin{aligned}
\sigma &= [aa]\,\sigma_{aa} + [ab]\,\sigma_{ab} + [ac]\,\sigma_{ac} + [ad]\,\sigma_{ad} =\\
&= [ab]\,\sigma_{ab} + [bb]\,\sigma_{bb} + [bc]\,\sigma_{bc} + [bd]\,\sigma_{bd} =\\
&= [ac]\,\sigma_{ac} + [bc]\,\sigma_{bc} + [cc]\,\sigma_{cc} + [cd]\,\sigma_{cd} =\\
&= \qquad \text{i t. d.}
\end{aligned}$$

Dodajmy do tego wyznacznika jeden nowy pion i wiérsz, złożony z członów, które w sobie ilości uzyskane przez spostrzeżenia zawiérają, uformujemy nowy wyznacznik symetryczny

$$\begin{vmatrix} [aa], & [ab], & [ac], & [ad], & [al] \\ [ab], & [bb], & [bc], & [bd], & [bl] \\ [ac], & [bc], & [cc], & [cd], & [cl] \\ [ad], & [bd], & [cd], & [dd], & [dl] \\ [al], & [bl], & [cl], & [dl], & [ll] \end{vmatrix} = S .$$

Z porównania tych dwóch wyznaczników wynika, że wyznacznik σ jest jednym z minorów wyznacznika S a mianowicie

$$S_{ll} = \sigma .$$

Zastósowując teoryję wyznaczników do wyznaczenia niewiadomych z równań linijnych, otrzymamy z (11)

(12)
$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{[al]\,\sigma_{aa} + [bl]\,\sigma_{ab} + [cl]\,\sigma_{ac} + [dl]\,\sigma_{ad}}{\sigma} = \frac{S_{al}}{S_{ll}} \\
y &= -\frac{[al]\,\sigma_{ab} + [bl]\,\sigma_{bb} + [cl]\,\sigma_{bc} + [dl]\,\sigma_{bd}}{\sigma} = \frac{S_{bl}}{S_{ll}} \\
z &= -\frac{[al]\,\sigma_{ac} + [bl]\,\sigma_{bc} + [cl]\,\sigma_{cc} + [dl]\,\sigma_{cd}}{\sigma} = \frac{S_{cl}}{S_{ll}} \\
t &= -\frac{[al]\,\sigma_{ad} + [bl]\,\sigma_{bd} + [cl]\,\sigma_{cd} + [dl]\,\sigma_{dd}}{\sigma} = \frac{S_{dl}}{S_{ll}}\,.
\end{aligned}
$$

6. Niewiadome, których wartości otrzymaliśmy z ostatniego równania, są funkcyjami linijnemi ilości l możemy je przeto także w téj formie pisać

(13)
$$
\begin{aligned}
-x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots\dots\dots + \alpha_n l_n = [\alpha l] \\
-y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \dots\dots\dots + \beta_n l_n = [\beta l] \\
-z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \dots\dots\dots + \gamma_n l_n = [\gamma l] \\
-t &= \eta_1 l_1 + \eta_2 l_2 + \dots\dots\dots + \eta_n l_n = [\eta l]\,.
\end{aligned}
$$

Ważności niewiadomych p_x, p_y, p_z, p_t będą w skutek tego odwrotnościami kwadratów współczynników przy poszczególnych l a mianowicie

$$
p_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]}\,;\quad p_y = \frac{1}{[\beta\beta]}\,;\quad p_z = \frac{1}{[\gamma\gamma]}\,;\quad p_t = \frac{1}{[\eta\eta]}\,.
$$ [1])

Chcąc obrachować ważność np. dla y musimy wiedzieć, czemu się równają pojedyńcze β. Z układu (12) otrzymamy ogólnie

$$\sigma\beta = a\,\sigma_{ab} + b\,\sigma_{bb} + c\,\sigma_{bc} + d\,\sigma_{bd} \qquad \text{zaś}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2\,[\beta\beta] = [aa]\,\sigma_{ab}^2 &+ 2\,[ab]\,\sigma_{ab}\,\sigma_{bb} + 2\,[ac]\,\sigma_{ab}\,\sigma_{bc} + 2\,[ad]\,\sigma_{ab}\,\sigma_{bd} \\
&+ [bb]\,\sigma_{bb}^2 + 2\,[bc]\,\sigma_{bb}\,\sigma_{bc} + 2\,[bd]\,\sigma_{bb}\,\sigma_{bd} \\
&+ [cc]\,\sigma_{bc}^2 + 2\,[cd]\,\sigma_{bc}\,\sigma_{bd} \\
&+ [dd]\,\sigma_{bd}^2
\end{aligned}
$$

---

[1]) Jeżeli mamy $X = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots$ i chcemy wyznaczyć błąd średni E funkcyi X, przy danych błędach średnich ε ilości x to będzie

$$E^2 = a_1^2\,\varepsilon_1^2 + a_2^2\,\varepsilon_2^2 + \dots, \qquad \text{z powodu zaś że } \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{p}}$$

będzie $\dfrac{\varepsilon_0^2}{P} = a_1^2\,\dfrac{\varepsilon_0^2}{p_1} + a_2^2\,\dfrac{\varepsilon_0^2}{p_2} + \dots$ czyli $\dfrac{1}{P} = \left[\dfrac{aa}{p}\right]$;

w razie gdy $p_1 = p_2 = \dots = 1$ będzie $\dfrac{1}{P} = [aa]$, czyli

$$P = \frac{1}{[aa]}\,.$$

$$\sigma^2[\beta\beta] = \sigma_{ab} \left\{ [aa]\,\sigma_{ab} + [ab]\,\sigma_{bb} + [ac]\,\sigma_{bc} + [ad]\,\sigma_{bd} \right\} +$$
$$\sigma_{bb} \left\{ [ab]\,\sigma_{ab} + [bb]\,\sigma_{bb} + [bc]\,\sigma_{bc} + [bd]\,\sigma_{bd} \right\} +$$
$$\sigma_{bc} \left\{ [ac]\,\sigma_{ab} + [bc]\,\sigma_{bb} + [cc]\,\sigma_{bc} + [cd]\,\sigma_{bd} \right\} +$$
$$\sigma_{bd} \left\{ [ad]\,\sigma_{ab} + [bd]\,\sigma_{bb} + [cd]\,\sigma_{bc} + [dd]\,\sigma_{bd} \right\}$$

W klamrach wielkich zawarte wyrazy nie są niczém inném jak wyznacznikami, wszystkie zaś te wyznaczniki, z wyjątkiem drugiego, przedstawionego przez rząd drugi, są zerami, z powodu że dwa rzędy mają równe, będzie przeto

$$\sigma^2\,[\beta\beta] = \sigma_{bb} \left\{ [ab]\,\sigma_{ab} + [bb]\,\sigma_{bb} + [bc]\,\sigma_{bc} + [bd]\,\sigma_{bd} \right\} = \sigma_{bb}\,.\,\sigma$$

ztąd zaś $[\beta\beta] = \dfrac{\sigma_{bb}}{\sigma}$, z czego $p_y = \dfrac{\sigma}{\sigma_{bb}}$;

a również tak samo otrzymamy

$$p_x = \frac{\sigma}{\sigma_{aa}}$$
$$p_z = \frac{\sigma}{\sigma_{cc}} \qquad (14)$$
$$p_t = \frac{\sigma}{\sigma_{dd}}\,.$$

7. Z powodu późniejszéj potrzeby będzie odpowiedniém, wyznaczyć na tém miejscu wartości dla $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, $[\alpha\eta]$, $[\beta\gamma]$ ..... Dla symetryczności w jakiéj się te wyrazy przedstawiają, wystarczy obrachowanie jednego z nich np. $[\beta\gamma]$.

Z układów (12) i (13) otrzymamy ogólnie:

$$\sigma\beta = a\,\sigma_{ab} + b\,\sigma_{bb} + c\,\sigma_{bc} + d\,\sigma_{bd}$$
$$\sigma\gamma = a\,\sigma_{ac} + b\,\sigma_{bc} + c\,\sigma_{cc} + d\,\sigma_{cd}$$

mnożąc te wyrazy i sumując je będzie:

$$\sigma^2\,[\beta\gamma] = \sigma_{ab} \left\{ [aa]\,\sigma_{ac} + [ab]\,\sigma_{bc} + [ac]\,\sigma_{cc} + [ad]\,\sigma_{cd} \right\}$$
$$+ \sigma_{bb} \left\{ [ab]\,\sigma_{ac} + [bb]\,\sigma_{bc} + [bc]\,\sigma_{cc} + [bd]\,\sigma_{cd} \right\}$$
$$+ \sigma_{ac} \left\{ [ac]\,\sigma_{ac} + [bc]\,\sigma_{bc} + [cc]\,\sigma_{cc} + [cd]\,\sigma_{cd} \right\}$$
$$+ \sigma_{bd} \left\{ [ad]\,\sigma_{ac} + [bd]\,\sigma_{bc} + [cd]\,\sigma_{cc} + [dd]\,\sigma_{cd} \right\}.$$

Wnioskując tak samo jak w ustępie 6 otrzymamy:

$[\beta\gamma] = \dfrac{\sigma_{bc}}{\sigma}$, a w skutek analogii

$$[\alpha\beta] = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma}\,;\quad [\alpha\gamma] = \frac{\sigma_{ac}}{\sigma}\,;\quad [\alpha\eta] = \frac{\sigma_{ad}}{\sigma}\,;\quad [\beta\eta] = \frac{\sigma_{bd}}{\sigma}\,;\quad [\gamma\varsigma] = \frac{\sigma_{cd}}{\sigma} \qquad (15)$$

8. Podstawiając wyznaczone najprawdopodobniejsze wartości niewiadomych w układzie (4) równań zasadniczych, otrzymamy równania błędów (5).

Suma kwadratów błędów $[\delta\delta]$ da się także wyprowadzić następującym sposobem:

Ogólnie jest

$$\delta = ax + by + cz + dt + l\,, \qquad \text{z czego}$$

$$\begin{aligned}[\delta\delta] = [aa]\,x^2 &+ 2\,[ab]\,xy + 2\,[ac]\,xz + 2\,[ad]\,xt + 2\,[al]\,x \\ &+ [bb]\,y^2 + 2\,[bc]\,yz + 2\,[bd]\,yt + 2\,[bl]\,y \\ &+ [cc]\,z^2 + 2\,[cd]\,zt + 2\,[cl]\,z \\ &+ [dd]\,t^2 + 2\,[dl]\,t \\ &+ [ll]\,.\end{aligned}$$

Wprowadzając wartości niewiadomych z (12) i porządkując je odpowiednio, dostaniemy

$$\begin{aligned}S_{ll}^2\,[\delta\delta] = &\; S_{al}\,\Big\{\,[aa]\,S_{al} + [ab]\,S_{bl} + [ac]\,S_{cl} + [ad]\,S_{dl} + [al]\,S_{ll}\,\Big\} - [al]\,S_{al}\,S_{ll} \\ &+ S_{bl}\,\Big\{\,[ab]\,S_{al} + [bb]\,S_{bl} + [bc]\,S_{cl} + [bd]\,S_{dl} + [bl]\,S_{ll}\,\Big\} - [bl]\,S_{bl}\,S_{ll} \\ &+ S_{cl}\,\Big\{\,[ac]\,S_{al} + [bc]\,S_{bl} + [cc]\,S_{cl} + [cd]\,S_{dl} + [cl]\,S_{ll}\,\Big\} - [cl]\,S_{cl}\,S_{ll} \\ &+ S_{dl}\,\Big\{\,[ad]\,S_{al} + [bd]\,S_{bl} + [cd]\,S_{cl} + [dd]\,S_{dl} + [dl]\,S_{ll}\,\Big\} - [dl]\,S_{dl}\,S_{ll} \\ &+ 2S_{ll}\,\Big\{\,[al]\,S_{al} + [bl]\,S_{bl} + [cl]\,S_{cl} + [dl]\,S_{dl} + [ll]\,S_{ll}\,\Big\} - [ll]\,S_{ll}\,S_{ll}\;.\end{aligned}$$

Należące do S_{al}, S_{bl}, S_{cl}, S_{dl} w klamry ujęte wyznaczniki są, z powodu równości dwóch rzędów, zerami, cały przeto wyraz upraszcza się i otrzymamy:

(16) $$S_{ll}\;[\delta\delta] = [al]\,S_{al} + [bl]\,S_{bl} + [cl]\,S_{cl}\,] + [dl]\,S_{dl} + [ll]\,S_{ll}\;,$$

z czego

(17) $$[\delta\delta] = \frac{S}{S_{ll}} = \frac{S}{\sigma}\,.$$

9. Do wyznaczenia średniego błędu spostrzeżeń o równéj dokładności lub do równéj dokładności sprowadzonych, potrzebujemy, według ustępu 3, znać błędy rzeczywiste Δ, co wtedy tylko jest możliwém, jeżeliby znane nam były prawdziwe wartości niewiadomych, które oznaczmy przez x', y', z', t'. Otrzymamy wtedy ogólnie:

$$\Delta = ax' + by' + cz' + dt' + l\,.$$

To równanie odciągnijmy od

$$\delta = ax + by + cz + dt + l \qquad \text{a dostaniemy}$$

$$\delta = a\,(x - x') + b\,(y - y') + c\,(z - z') + d\,(t - t') + \Delta.$$

Jeżeli zważymy, że ostatnie równanie różni się tém od ogólnego równania błędów że zamiast niewiadomych x, y, z, t przychodzą niewiadome $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ $t - t'$, a zamiast l ilość Δ to chcąc wyznaczyć $[\delta\delta]$ zastósować trzeba równanie (16).

Dla tego będzie także:

$$S_{\Delta\Delta}[\delta\delta] = [a\Delta]\, S_{a\Delta} + [b\Delta]\, S_{b\Delta} + [c\Delta]\, S_{c\Delta} + [d\Delta]\, S_{d\Delta} + [\Delta\Delta]\, S_{\Delta\Delta} \,.$$

Podstawiając tak w wyznaczniku S ustępu 5. Δ zamiast l, będziemy mieli

$$\begin{aligned}
\sigma[\delta\delta] = &- \{ [a\Delta]^2 \sigma_{aa} + [a\Delta][b\Delta]\sigma_{ab} + [a\Delta][c\Delta]\sigma_{ac} + [a\Delta][d\Delta]\sigma_{ad} \} \\
&- \{ [a\Delta][b\Delta]\sigma_{ab} + [b\Delta]^2 \sigma_{bb} + [b\Delta][c\Delta]\sigma_{bc} + [b\Delta][d\Delta]\sigma_{bd} \} \\
&- \{ [a\Delta][c\Delta]\sigma_{ac} + [b\Delta][c\Delta]\sigma_{bc} + [c\Delta]^2 \sigma_{cc} + [c\Delta][d\Delta]\sigma_{cd} \} \\
&- \{ [a\Delta][d\Delta]\sigma_{ad} + [b\Delta]\, d\Delta]\sigma_{bd} + [c\Delta][d\Delta]\sigma_{cd} + [d\Delta]^2 \sigma_{dd} \} \\
&+ [\Delta\Delta]\,\sigma \,.
\end{aligned}$$

Ponieważ rzeczywiste błędy nigdy nam nie będą wiadome w tych warunkach, nie pozostaje nic innego jak zamiast każdego Δ z osobna $\pm\,\varepsilon$ podstawić. Rozwijając wyrazy w klamry ujęte, baczyć należy że $\pm\,\Delta_r\,\Delta_s$ podstawić możemy według rachunku prawdopodobieństwa równe zeru. Uporządkowawszy tak wyrazy dostaniemy:

$$\begin{aligned}
\sigma[\delta\delta] = &- \varepsilon^2 \{ [aa]\sigma_{aa} + [ab]\sigma_{ab} + [ac]\sigma_{ac} + [ad]\sigma_{ad} \} \\
&- \varepsilon^2 \{ [ab]\sigma_{ab} + [bb]\sigma_{bb} + [bc]\sigma_{bc} + [bd]\sigma_{bd} \} \\
&- \varepsilon^2 \{ [ac]\sigma_{ac} + [bc]\sigma_{bc} + [cc]\sigma_{cc} + [cd]\sigma_{cd} \} \\
&- \varepsilon^2 \{ [ad]\sigma_{ad} + [bd]\sigma_{bd} + [cd]\sigma_{cd} + [dd]\sigma_{dd} \} \\
&+ [\Delta\Delta]\,\sigma
\end{aligned}$$

czyli $\qquad [\delta\delta] = -4\varepsilon^2 + [\Delta\Delta] = -4\varepsilon^2 + n\varepsilon^2 \qquad$ z czego

$$\varepsilon^2 = \frac{[\delta\delta]}{n-4}$$ albo ogólnie dla m niewiadomych

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-m}} \,.$$

Wprowadzając początkowe δ musimy pod znakiem sumy zamiast $\delta\delta$ pisać $p\delta\delta$ zaś ε jako błąd średni spostrzeżenia jednego, zastąpić błędem średnim ε_0 spostrzeżenia o wadze 1; zatém otrzymamy

$$\varepsilon_0 \pm = \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-m}} \tag{18}$$

a również

$$\varepsilon_x = \pm \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{p_x}}\,, \qquad \varepsilon_y = \pm \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{p_y}}\,, \qquad \varepsilon_z = \pm \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{p_z}}\,, \qquad \varepsilon_t = \pm \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{p_t}} \tag{19}$$

w którychto wyrazach zamiast wag wstawić należy ich wartości z (14).

10. Obliczanie i operacyje wyznacznikami pociągają za sobą tę korzyść, że dają dobry pogląd na cały mechanizm rachunkowy i przy mniejszym nawale liczb otrzymujemy każdą niewiadomą niezależnie od drugiéj a równocześnie łatwym sposobem dochodzimy do wyznaczenia błędów średnich. Jeżeli sumy $[aa]$, $[ab]$.... nie są liczbami jednocyfrowemi

lub jeżeli mamy więcéj niewiadomych, bardzo korzystnie jest zamiast sum przychodzących w tablicy wyznacznika wprowadzić bezpośrednio ich logarytmy. Że na znaki minorów zważać należy zbyteczném jest o tém wspominać.

Obrachowanie da się przeprowadzić w następującym porządku. Po znanéj kontroli że sumy są dobrze obrachowane, ustawiamy tabliczkę wyznacznika σ i obrachowujemy wszystkie minory

$$\sigma_{aa}, \; \sigma_{ab}, \; \sigma_{ac}, \; \sigma_{ad}, \; \sigma_{bb}, \; \sigma_{bc}, \; \sigma_{bd}, \; \sigma_{cc}, \; \sigma_{cd} \,. \tag{a}$$

Obrachowanie minorów przy wyznaczniku 4 stopnia jest proste i łatwe. Mając minory będzie

$$S_{ll} = \sigma = [aa]\,\sigma_{aa} + [ab]\,\sigma_{ab} + [ac]\,\sigma_{ac} + [ad]\,\sigma_{ad} \tag{b}$$

Do wyznaczenia niewiadomych, potrzebujemy według (12)

$$\begin{aligned} S_{al} &= -\left\{ [al]\,\sigma_{aa} + [bl]\,\sigma_{ab} + [cl]\,\sigma_{ac} + [dl]\,\sigma_{ad} \right\} \\ S_{bl} &= -\left\{ [al]\,\sigma_{ab} + [bl]\,\sigma_{bb} + [cl]\,\sigma_{bc} + [dl]\,\sigma_{bd} \right\} \quad \text{i t. d.} \end{aligned} \tag{c}$$

Ażeby otrzymać ważności p_x, p_y ... mamy już wszystko przygotowane gdyż

$$p_x = \frac{\sigma}{\sigma_{aa}}; \quad p_y = \frac{\sigma}{\sigma_{ab}} \quad \text{i t. d.} \tag{d}$$

Dla kontroli rachunku użyć można formułki wyprowadzonéj na podstawie własności wyznacznika symetrycznego n. p.

$$\sigma = \frac{\sigma_{aa}\,\sigma_{dd} - \sigma_{ad}^2}{\sigma_{aa\,dd}} \,. \tag{e}$$

Pozostaje jeszcze do obrachowania $[\delta\delta] = \frac{S}{\sigma}$.

S jako wyznacznik symetryczny może być obrachowany na podstawie formuły:

$$S = [ll]\,S_{ll} - \Sigma\,[lp]^2\,S_{ll,\,pp} - 2 \sum_{p,q} [lp]\,[lq]\,S_{ll,\,pq} \text{ [1]}, \tag{f}$$

gdzie Σ przedstawia $(n-1)$ składników (w naszym przykładzie cztéry), odpowiadających wartościom a, b, c, d, ilości p, zaś $\sum_{p,q}$ odnosi się do $\binom{n-1}{2}$ składników, powstających w skutek nadania ilościom p, q wartości odpowiadających wszystkim kombinacyjom tychże $(n-1)$ wartości po dwie.

Dla przyjętego przykładu otrzymamy

$$\begin{aligned} S = [ll]\,\sigma &- \left\{ [al]^2\,\sigma_{aa} + [bl]^2\,\sigma_{bb} + [cl]^2\,\sigma_{cc} + [dl]^2\,\sigma_{dd} \right\} - \\ &- 2\left\{ [al]\,[bl]\,\sigma_{ab} + [al]\,[cl]\,\sigma_{ac} + [al]\,[dl]\,\sigma_{ad} + [bl]\,[cl]\,\sigma_{bc} + [bl]\,[dl]\,\sigma_{bb} + [cl]\,[dl]\,\sigma_{cd} \right\}. \end{aligned} \tag{g}$$

Dla wzoru (g) są wszystkie potrzebne części obrachowane, chodzi zatém tylko o wykonanie operacyi naznaczonéj.

Tabelaryczne zestawienie całego mechanizmu rachunkowego, nie może być przedmiotem rozprawy a zresztą zależne jest od indywidualności i zręczności rachującego.

[1]) Baraniecki. Teoryja wyznaczników rozdział X, §. 93.

Najprawdopodobniejsza wartość funkcyi poprzednio wyznaczonych niewiadomych, jéj waga i błąd średni.

11. Jeżeli

$$\varphi\ (x, y, z \ldots)$$

jest funkcyją wyżéj wyznaczonych najprawdopodobniejszych piérwiastków, to podstawiając te piérwiastki w tę funkcyję otrzymamy jéj najprawdopodobniejszą wartość, jeżeli zaś chcemy jéj błąd średni wyznaczyć, potrzebujemy oprócz znanego nam już średniego błędu jednego spostrzeżenia lub spostrzeżenia, którego waga jest jednostką, wyznaczyć wagę téj funkcyi.

Ku temu celowi musimy najpiérw przekształcić funkcyję znanym sposobem na funkcyję linijną n. p.

$$F = f_1 x + f_2 y + f_3 z + f_4 t\ . \tag{20}$$

Bezpośrednie zastósowanie uwagi w 6. nie może tu mieć miejsca, gdyż pomimo przyjęcia, że pojedyncze niewiadome są od siebie niezależne, są ich najprawdopodobniejsze wartości od siebie zawisłe, w skutek wyznaczenia ich ze wspólnych równań normalnych — nie pozostaje nam przeto nic innego jak podstawić zamiast x, y .... ich wartości z (13) w (20), a mianowicie

$$-x = [\alpha l]\,; \quad -y = [\beta l]\,; \quad -z = [\gamma l]\,; \quad -t = [\eta l]\ .$$

Wykonawszy to będzie:

$$\begin{aligned} F = & (f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1 + f_4\eta_1)\ l_1 \\ & (f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2 + f_4\eta_2)\ l_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (f_1\alpha_m + f_2\beta_m + f_3\gamma_m + f_4\eta_m)\ l_m \end{aligned}$$

Spostrzegane ilości l są od siebie niezależne, otrzymamy zatém oznaczając wagę funkcyi F przez P.

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} = f_1^2\,[\alpha\alpha] & + 2f_1 f_2\,[\alpha\beta] + 2f_1 f_3\,[\alpha\gamma] + 2f_1 f_4\,[\alpha\eta] \\ & + \quad f_2^2\,[\beta\beta] + 2f_2 f_3\,[\beta\gamma] + 2f_2 f_4\,[\beta\eta] \\ & \qquad\quad + \quad f_3^2\,[\gamma\gamma] + 2f_3 f_4\,[\gamma\eta] \\ & \qquad\qquad\qquad + \quad f_4^2\,[\eta\eta] \end{aligned}$$

a podstawiając wartości z (15) będzie:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{P} = & f_1\ \{\, f_1\,\sigma_{aa} + f_2\,\sigma_{ab} + f_3\,\sigma_{ac} + f_4\,\sigma_{ad} \,\} \\ & + f_2\ \{\, f_1\,\sigma_{ab} + f_2\,\sigma_{bb} + f_3\,\sigma_{bc} + f_4\,\sigma_{bd} \,\} \\ & + f_3\ \{\, f_1\,\sigma_{ac} + f_2\,\sigma_{bc} + f_3\,\sigma_{cc} + f_4\,\sigma_{cd} \,\} \\ & + f_4\ \{\, f_1\,\sigma_{ad} + f_1\,\sigma_{bd} + f_3\,\sigma_{cd} + f_4\,\sigma_{dd} \,\} = \\ = & -\{\, f_1\, S_{f_1} + f_2\, S_{f_2} + f_3\, S_{f_3} + f_4\, S_{f_4} \,\} = - S^{(f)} \end{aligned} \tag{21}$$

Wyznacznik $S^{(f)}$ tym się różni od wyznacznika poprzedniego S że zamiast $[al]$, $[bl]$ .... wchodzi kolejno w ostatni pion i ostatni wiérsz f_1, f_2 .... przyczém uważać należy że $f_5 = 0$ Z układu (21) otrzymamy

$$P = -\frac{\sigma}{S^{(f)}} \tag{22}$$

B.

Spostrzeżenia bezpośrednie nad niewiadomemi, których niezależność jest ograniczoną równaniami warunkowemi.

12. W zadaniu dotychczasowém robiliśmy spostrzeżenia nad ilościami, które pośredniczyły w wyznaczeniu niezależnych od siebie niewiadomych. Niemniéj ważne a często przychodzące zadanie jest następujące:

Robimy spostrzeżenia bezpośrednio nad niewiadomemi, które pewnym warunkom, wyrażonym przez równania, zadość uczynić muszą, przez co tracą swą niezależność. Ilość μ tych równań warunkowych musi być mniejszą, jak ilość niewiadomych m. Jeżeli jest dla przeprowadzenia zadania korzystném, z równań warunkowych wyznaczyć μ niewiadomych, to pozostałe $m-\mu$ niewiadome są od siebie niezależne a wyznaczenie ich według poprzednich ustępów może być przeprowadzone. Sposób ten wtedy z korzyścią da się wykonać, jeżeli $m-\mu$ jest liczbą małą a równania warunkowe są pojedyńcze. Stosując jakąkolwiek metodę do wyznaczenia niewiadomych, koniecznem jest, ażeby równania warunkowe były podane w formie linijnéj, w przeciwnym razie sprowadzić je należy do téj formy, bądź to za pomocą szeregu Taylora, bądź to jakim innym w dotyczącym przypadku odpowiednim sposobem.

Zadanie przedstawia się nam ostatecznie w tym zakresie. Mamy niewiadome $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ w liczbie m, które połączone są równaniami warunkowemi

(23)
$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &= 0 \\ b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 &= 0 \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 &= 0 \qquad \text{w liczbie } \mu. \end{aligned}$$

Spostrzegane wartości niewiadomych nie mogą być bez błędów, nie mogą przeto w zupełności zredukować do 0 równań warunkowych. Robiąc zatém spostrzeżenia nad pojedyńczemi x, otrzymamy zamiast rzeczywistych wartości zbliżone tylko n. p.

$$\begin{aligned} &l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4 \quad \text{z wagami} \\ &p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4\,. \end{aligned}$$

Podstawiając wyniki spostrzeżeń w (23) otrzymamy:

(24)
$$\begin{aligned} a_0 + a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3 + a_4l_4 &= w_1 = a_0 + [al] \\ b_0 + b_1l_1 + b_2l_2 + b_3l_3 + b_4l_4 &= w_2 = b_0 + [bl] \\ c_0 + c_1l_1 + c_2l_2 + c_3l_3 + c_4l_4 &= w_3 = c_0 + [cl]\,. \end{aligned}$$

Ażeby warunkowym równaniom zadość uczynić, musimy pojedyńcze l o jakąś ilość δ poprawić, co wtedy nastąpi jeżeli

(25)
$$\begin{aligned} a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3 + a_4\delta_4 + w_1 &= 0 \\ b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3 + b_4\delta_4 + w_2 &= 0 \\ c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + c_3\delta_3 + c_4\delta_4 + w_3 &= 0 \end{aligned}$$

w skutek czego ogólnie będą

(26)
$$x = l + \delta\,.$$

Z powodu, że ilość spostrzeżeń bezpośrednich nad niewiadomemi jest większa jak ilość równań warunkowych, możemy ustawić nieskończenie wiele grup z δ, które dodane do l, takie nam uczynią x, że one warunkom w (23) postawionym zupełnie odpowiedzą. Powstaje tedy pytanie, która z tych grup δ będzie najodpowiedniejszą, czyli któréj z tych grup należy się piérwszeństwo? Biorąc wzgląd na spostrzeżenia musimy orzec, że ta z grup δ będzie najodpowiedniejszą, dla któréj istnienie prawdopodobieństwa będzie największe a to prawdopodobieństwo według (7) będzie największe, jeżeli

$$[p\delta\delta] = p_1\delta_1^2 + p_2\delta_2^2 + p_3\delta_3^2 + p_4\delta_4^2 \quad \text{będzie minimum.}$$

Warunkiem minimum jest jak wiadomo $d\,[p\,\delta\delta] = 0$ czyli

$$\underset{1}{p\delta_1}\, d\delta_1 + \underset{2}{p\delta_2}\, d\delta_2 + \underset{3}{p\delta_3}\, d\delta_3 + \underset{4}{p\delta_4}\, d\delta_4 = 0. \tag{27}$$

Gdyby pojedyńcze x, a zatém δ i $d\delta$, były niezależne, podstawilibyśmy współczynniki pojedyńczych $d\delta$ równe 0; z czego wynikało by, że l są najprawdopodobniejsze wartości dla ilości x. Ponieważ zaś zachodzą związki między temi ilościami x, wyrażone ostatecznie układem równań błędów (25), musimy, aby zadosyć uczynić warunkowi minimum, oprócz równania (27) ustawić równania

$$\begin{aligned} a_1 d\delta_1 + a_2 d\delta_2 + a_3 d\delta_3 + a_4 d\delta_4 &= 0 \\ b_1 d\delta_1 + b_1 d\delta_2 + b_3 d\delta_3 + b_4 d\delta_4 &= 0 \\ c_1 d\delta_1 + c_2 d\delta_2 + c_3 d\delta_3 + c_4 d\delta_4 &= 0, \end{aligned} \tag{28}$$

któryto układ pochodzi z różniczkowania układu (25). Po wyrugowaniu za pomocą (28) μ różniczek z (27), będą pozostałe różniczki od siebie niezależne, a ich współczynniki podstawimy równe zeru. Rugowanie to da się wykonać metodą współczynników nieoznaczonych, według GAUSSA korelatami zwanych. Mnożąc w układzie (28) równania ilością k z odpowiedniémi wskaźnikami, otrzymamy

$$\begin{aligned} k_1 a_1\, d\delta_1 + k_1 a_2\, d\delta_2 + k_1 a_3\, d\delta_3 + k_1 a_4\, d\delta_4 &= 0 \\ k_2 b_1\, d\delta_1 + k_2 b_2\, d\delta_2 + k_2 b_3\, d\delta_3 + k_2 b_4\, d\delta_4 &= 0 \\ k_3 c_1\, d\delta_1 + k_3 c_2\, d\delta_2 + k_3 c_3\, d\delta_3 + k_3 c_4\, d\delta_4 &= 0. \end{aligned}$$

Odejmując te równania od (27) i porządkując według różniczek, musimy współczynniki różniczek w liczbie μ postawić w skutek rugowania równe zeru, z czego otrzymamy μ równań nam potrzebnych do wyznaczenia korelat; pozostałe różniczki staną się przez to niezależnemi a z powodu warunku minimum. Każdy z ich współczynników równy zeru. Na podstawie tych operacyi otrzymamy tyle równań, ile δ mamy wyznaczyć, mianowicie:

$$\begin{aligned} p_1\delta_1 - (k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1) &= 0 \\ p_2\delta_2 - (k_1 a_2 + k_2 b_2 + k_3 c_2) &= 0 \\ p_3\delta_3 - (k_1 a_3 + k_2 b_3 + k_3 c_3) &= 0 \\ p_4\delta_4 - (k_1 a_4 + k_2 b_4 + k_3 c_4) &= 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Mnożąc zaś układ ten kolejno ilościami $\frac{a}{p}$, potém $\frac{b}{p}$, nareszcie $\frac{c}{p}$, nadając tym ilościom odpowiednie wskaźniki, sumując je, a zarazem biorąc wzgląd na układ (25), otrzymamy system równań

$$\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] k_3 + w_1 &= 0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_3 + w_2 &= 0, \\ \left[\frac{ac}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] k_3 + w_3 &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

z którego korelaty nam potrzebne wyznaczyć można.

Wyznacznik układu (30) jest także wyznacznikiem symetrycznym i różni się tylko tém od wyznacznika w ustępie 5, że pojedyńcze elementa wyznacznika są pod znakiem sumacyjnym podzielone przez odpowiednie wagi (któreto dzielenie w ustępie 5 jako wykonane przyjęte zostało) a prócz tego zamiast $[al]$, $[bl]$, $[cl]$, $[ll]$ są wstawione ilości w_1 w_2 w_3 i 0. Zważając na to otrzymamy

$$(31)\quad \begin{aligned} k_1 &= -\frac{w_1\,\sigma_{\frac{aa}{p}} + w_2\,\sigma_{\frac{ab}{p}} + w_3\,\sigma_{\frac{ac}{p}}}{\sigma} = \frac{S_{w_1}}{S_0} \\ k_2 &= -\frac{w_1\,\sigma_{\frac{ab}{p}} + w_2\,\sigma_{\frac{bb}{p}} + w_3\,\sigma_{\frac{bc}{p}}}{\sigma} = \frac{S_{w_2}}{S_0} \\ k_3 &= -\frac{w_1\,\sigma_{\frac{ac}{p}} + w_2\,\sigma_{\frac{bc}{p}} + w_3\,\sigma_{\frac{cc}{p}}}{\sigma} = \frac{S_{w_3}}{S_0}. \end{aligned}$$

Podstawiając wyrachowane wartości dla k w układzie (29), będzie

$$\delta_1 = \frac{a_1}{p_1}\,\frac{S_{w_1}}{S_0} + \frac{b_1}{p_1}\,\frac{S_{w_2}}{S_0} + \frac{c_1}{p_1}\,\frac{S_{w_3}}{S_0} = \frac{a_1\,S_{w_1} + b_1\,S_{w_2} + c_1\,S_{w_3}}{p_1\,S_0}\ ;$$

a zatém ogólnie

$$(32)\quad \delta = \frac{a\,S_{w_1} + b\,S_{w_2} + c\,S_{w_3}}{p\,\sigma}\ ,$$

a dodając δ do ilości l, otrzymamy według (26) wartości prawdopodobne dla x.

Ażeby wyznaczyć średni błąd ε_0 spostrzeganych ilości, których waga jest jednostką, należy zwrócić na to uwagę, że przeprowadzając wyrównanie sposobem, na początku wskazanym, mielibyśmy $m - \mu$ niezależnych niewiadomych przy m spostrzeżeniach, w skutek czego otrzymamy według wzoru (18)

$$(33)\quad \varepsilon_0 = \pm\sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{m-(m-\mu)}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,\delta\delta]}{\mu}}\ .$$

Dla obrachowania $[p\,\delta\delta]$ wyprowadźmy z równania (29), dzieląc je przez $\sqrt{p}$, równanie następujące:

$$\delta\sqrt{p} = \frac{a}{\sqrt{p}}\,k_1 + \frac{b}{\sqrt{p}}\,k_2 + \frac{c}{\sqrt{p}}\,k_3\ .$$

Podnosząc do kwadratu i sumując otrzymamy

$$\begin{aligned} [p\,\delta\delta] = &\left\{\left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]k_3\right\}k_1 \\ + &\left\{\left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_2\right\}k_2 \\ + &\left\{\left[\frac{ac}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_3 + \left[\frac{cc}{p}\right]k_3\right\}k_3\ . \end{aligned}$$

Podstawiając za wyrazy w klamrach ich wartości z (30) otrzymamy

$$[p\,\delta\delta] = -\ \{\,k_1\,w_1 + k_2\,w_2 + k_3\,w_3\,\}$$

Po wprowadzeniu wartości dla k z (31) będzie

$$[p\delta\delta] = -\frac{w_1 S_{w_1} + w_2 S_{w_2} + w_3 S_{w_3}}{\sigma} \text{ czyli}$$

$$[p\delta\delta] = -\frac{S}{S_0} = -\frac{S}{\sigma} \tag{34}$$

gdzie

$$S = \begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{p}\right], & \left[\frac{ab}{p}\right], & \left[\frac{ac}{p}\right], & w_1 \\ \left[\frac{ab}{p}\right], & \left[\frac{bb}{p}\right], & \left[\frac{bc}{p}\right], & w_2 \\ \left[\frac{ac}{p}\right], & \left[\frac{bc}{p}\right], & \left[\frac{cc}{p}\right], & w_3 \\ w_1, & w_2, & w_3, & 0 \end{vmatrix}.$$

Trzymając się uwag w ustępie 10 wypowiedzianych, nie natrafimy przy obrachowaniu na żadne trudności, zważać tylko należy, że ilości w zawsze równać się muszą związkowi ilości ze spostrzeżeń pochodzącemu mniéj temu co daje teoryja.

13. Waga funkcyi spostrzeżeń, w ustępie poprzednim wyrównanych.

Często, a mianowicie w geodezyi, spotykamy się ze zadaniem, że spostrzegając ilości, których niezależność jest warunkowemi równaniami ograniczoną, mamy obrachować błąd średni funkcyi tych ilości. Błąd średni jednego spostrzeżenia obliczono w poprzednim ustępie; obrachowawszy zatém wagę funkcyi wyznaczyć będziemy mogli błąd średni funkcyi. Dodać tu należy, że jeżeli funkcyja nie jest linijną na taką sprowadzoną być musi.

Dana niech będzie funkcyja

$$F = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 = f_0 + [fx] .$$

W téj funkcyi tylko te współczynniki nie będą zerem, których x niezależnie funkcyję wyznacza i tak n. p. w trójkącie płaskim spostrzegamy przy tryjangulacyi wszystkie kąty, lecz bok może być tylko funkcyją dwóch kątów niezależnych, chcąc zaś zatém wyznaczyć wagę funkcyi wyżéj wymienionéj należy wciągnąć w rachubę wszystkie spostrzeżenia, które pośrednio lub bezpośrednio przyczyniły się do wyznaczenia niewiadomych. Spostrzegane ilości były l_1, l_2, l_3, l_4, przeto musimy taką funkcyję linijną utworzyć, żeby

$$F = F_0 + F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + F_4 l_4 = F_0 + [Fl] \tag{35}$$

a obrachowawszy F_1, F_2, F_3, F_4, otrzymamy wagę P funkcyi F

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{FF}{p}\right] \text{ gdzie } p_1, p_2, p_3, p_4 \text{ są wagami spostrzeżeń } l.$$

Z (26) i (32) mamy ogólnie

$$x = l + \frac{a}{p}\frac{S_{w_1}}{\sigma} + \frac{b}{p}\frac{S_{w_2}}{\sigma} + \frac{c}{p}\frac{S_{w_3}}{\sigma}. \tag{36}$$

Zamiast $S_{w_1}, S_{w_2}, S_{w_3}$, pisać możemy według (24)

$$S_{[al]+a_0}, \quad S_{[bl]+b_0}, \quad S_{[cl]+c_0},$$

Wyznacznik tych minorów da się rozłożyć na cztéry wyznaczniki tego samego rzędu, zważając zaś na to, że naszém przyszłém zadaniem jest wyznaczenie współczynników ilości l, możemy S z (33) w téj formie pisać

$$S = \begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{p}\right], & \left[\frac{ab}{p}\right], & \left[\frac{ac}{p}\right], & [al], \\ \left[\frac{ab}{p}\right], & \left[\frac{bb}{p}\right], & \left[\frac{bc}{p}\right], & [bl], \\ \left[\frac{ac}{p}\right], & \left[\frac{bc}{p}\right], & \left[\frac{cc}{p}\right], & [cl], \\ [al], & [bl], & [cl], & 0 \end{vmatrix} + R = S' + R \ .$$

W trzech wyznacznikach, z których się R składa, nie ma żadnego minoru, któryby dołączony do poszczególnych elementów $[al]$, $[bl]$ lub $[cl]$ zawiérał ilość l. Rozkładając zatém minory możemy pisać

$$S_{[al]+a_0} = S_{[al]} + S_{a_0} = S'_{[al]} + I = S_{w_1}$$
$$S_{[bl]+b_0} = S_{[bl]} + S_{b_0} = S'_{[bl]} + K = S_{w_2}$$
$$S_{[cl]+c_0} = S_{[cl]} + S_{c_0} = S'_{[cl]} + L = S_{w_3}$$

gdzie w wyrazach I, K, L, nie znajdziemy ilości l.

Porządkując według tego (36) otrzymamy ogólnie

$$x = l + \frac{a}{p}\frac{1}{\sigma} S'_{[al]} + \frac{b}{p}\frac{1}{\sigma} S'_{[bl]} + \frac{c}{p}\frac{1}{\sigma} S'_{[cl]} + Q \ . \tag{37}$$

Rozkładając minory wyznacznika S' na minory wyznacznika σ, ustawić możemy następujące równania

$$S'_{[al]} = -\left\{ [al]\,\sigma_{\frac{aa}{p}} + [bl]\,\sigma_{\frac{ab}{p}} + [cl]\,\sigma_{\frac{ac}{p}} \right\}$$
$$S'_{[bl]} = -\left\{ [al]\,\sigma_{\frac{ab}{p}} + [bl]\,\sigma_{\frac{bb}{p}} + [cl]\,\sigma_{\frac{bc}{p}} \right\}$$
$$S'_{[cl]} = -\left\{ [al]\,\sigma_{\frac{ac}{p}} + [bl]\,\sigma_{\frac{bc}{p}} + [cl]\,\sigma_{\frac{cc}{p}} \right\}$$

a z pomocą tych równań otrzymamy z (37)

$$\begin{aligned} x = l & - \left\{ [al]\,\sigma_{\frac{aa}{p}} + [bl]\,\sigma_{\frac{ab}{p}} + [cl]\,\sigma_{\frac{ac}{p}} \right\} \frac{a}{p}\frac{1}{\sigma} \\ & - \left\{ [al]\,\sigma_{\frac{ab}{p}} + [bl]\,\sigma_{\frac{bb}{p}} + [cl]\,\sigma_{\frac{bc}{p}} \right\} \frac{b}{p}\frac{1}{\sigma} \\ & - \left\{ [al]\,\sigma_{\frac{ac}{p}} + [bl]\,\sigma_{\frac{bc}{p}} + [cl]\,\sigma_{\frac{cc}{p}} \right\} \frac{c}{p}\frac{1}{\sigma} \\ & + Q \ . \end{aligned}$$

Mnożąc ostatni układ przez f, zaopatrzywszy wyrazy pojedyńcze odpowiedniémi wskaźnikami i sumując, otrzymamy

$$\begin{aligned} F = [fx] + f_0 = [fl] & - \left\{ [al]\,\sigma_{\frac{aa}{p}} + [bl]\,\sigma_{\frac{ab}{p}} + [cl]\,\sigma_{\frac{ac}{p}} \right\} \left[\frac{af}{p}\right] \frac{1}{\sigma} \\ & - \left\{ [al]\,\sigma_{\frac{ab}{p}} + [bl]\,\sigma_{\frac{bb}{p}} + [cl]\,\sigma_{\frac{bc}{p}} \right\} \left[\frac{bf}{p}\right] \frac{1}{\sigma} \\ & - \left\{ [al]\,\sigma_{\frac{ac}{p}} + [bl]\,\sigma_{\frac{bc}{p}} + [cl]\,\sigma_{\frac{cc}{p}} \right\} \left[\frac{cf}{p}\right] \frac{1}{\sigma} \\ & + D \ . \end{aligned}$$

Porównywając to równanie z równaniem (35) będzie ogólnie

$$\begin{aligned} F_r = f_r - \frac{a_r}{\sigma}&\left\{\left[\frac{af}{p}\right]\sigma_{\frac{aa}{p}} + \left[\frac{bf}{p}\right]\sigma_{\frac{ab}{p}} + \left[\frac{cf}{p}\right]\sigma_{\frac{ac}{p}}\right\} \\ - \frac{b_r}{\sigma}&\left\{\left[\frac{af}{p}\right]\sigma_{\frac{ab}{p}} + \left[\frac{bf}{p}\right]\sigma_{\frac{bb}{p}} + \left[\frac{cf}{p}\right]\sigma_{\frac{bc}{p}}\right\} \\ - \frac{c_r}{p}&\left\{\left[\frac{af}{p}\right]\sigma_{\frac{ac}{p}} + \left[\frac{bf}{p}\right]\sigma_{\frac{bc}{p}} + \left[\frac{cf}{p}\right]\sigma_{\frac{cc}{p}}\right\}. \end{aligned}$$

Dzieląc to równanie przez $\sqrt{p_r}$ i oznaczając znowu wyznacznik symetryczny

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{p}\right], & \left[\frac{ab}{p}\right], & \left[\frac{ac}{p}\right], & \left[\frac{af}{p}\right], \\ \left[\frac{ab}{p}\right], & \left[\frac{bb}{p}\right], & \left[\frac{bc}{p}\right], & \left[\frac{bf}{p}\right], \\ \left[\frac{ac}{p}\right], & \left[\frac{bc}{p}\right], & \left[\frac{cc}{p}\right], & \left[\frac{cf}{p}\right], \\ \left[\frac{af}{p}\right], & \left[\frac{bf}{p}\right], & \left[\frac{cf}{p}\right], & \left[\frac{ff}{p}\right], \end{vmatrix} = S$$

i odpowiednio, jak zwykle, jego minory, będzie

$$\frac{F_r}{\sqrt{p_r}} = \frac{f_r}{\sqrt{p_r}} + \frac{a_r}{\sqrt{p_r}}\cdot\frac{S_{\left[\frac{af}{p}\right]}}{\sigma} + \frac{b_r}{\sqrt{p_r}}\cdot\frac{S_{\left[\frac{bf}{p}\right]}}{\sigma} + \frac{c_r}{\sqrt{p_r}}\cdot\frac{S_{\left[\frac{cf}{p}\right]}}{\sigma}\ .$$

Porównywając to równanie z ogólném równaniem błędów

$$\delta = ax + by + cz + l = a\,\frac{S_{al}}{\sigma} + b\,\frac{S_{bl}}{\sigma} + c\,\frac{S_{cl}}{\sigma} + l$$

otrzymamy, również jak w ustępie 8, zmieniając wyrazy odpowiednio

$$\left[\frac{FF}{p}\right] = \frac{S}{\sigma} = \frac{1}{P}\ . \tag{38}$$

W tym wzorze trzeba tylko licznik obrachować, gdyż mianownik jest nam z ustępu 12 wiadomy.

14. Spostrzeżenia pośredniczące z równaniami warunkowemi.

Zadania tego rodzaju przychodzą przy wyrównaniu sieci tryjangulacyjnéj, w celu ustalenia punktów téj sieci i wyznaczenia średniego błędu. Odpowiednio ustępowi 2 będzie

$$ax + by + cz + l = 0 \tag{a}$$

obrazem ogólnym równań zasadniczych o m niewiadomych a l ilością, nad ktorą robimy n spostrzeżeń. Niewiadome mają jeszcze zadość uczynić warunkom następującym w ogólnéj liczbie r

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0\ , \\ B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 z = 0\ . \end{aligned} \tag{b}$$

Gdyby nie było równań warunkowych, wyznaczyćby można

$$x_0 = \frac{S_{al}}{\sigma}\ ;\ y_0 = \frac{S_{bl}}{\sigma}\ ;\ z_0 = \frac{S_{cl}}{\sigma} \tag{c}$$

a obrazem ogólnym równań błędów byłby wyraz

(d) $$e = ax + by + cz + l\,.$$

Podstawione wartości niewiadomych z (c) w (b) nie uczynią zadość tym równaniom, w skutek czego otrzymamy:

(39)
$$\begin{aligned} A_0 + A_1 x_0 + A_2 y_0 + A_3 z_0 &= w_1\,,\\ B_0 + B_1 x_0 + B_2 y_0 + B_3 z_0 &= w_2\,.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Gdyby wartości dla niewiadomych w (c) były od siebie niezależne, to wyniki w (c) z odpowiedniemi wagami mogłyby być odpowiednio poprawione według ustępu 12, a wtedy zadośćby czyniły warunkom w układzie (b) wyrażonym; z powodu zaś zależności tych wyników nie pozostaje nic innego, jak tylko zwrócić się do spostrzeżeń od siebie niezależnych których wartość przedstawioną jest w ilościach l.

Pomyślmy sobie do otrzymanych wartości ze spostrzeżeń nad ilością l taką poprawkę $-v$ dodaną, że po uskutecznieniu téj poprawki, otrzymane z równań normalnych wartości niewiadomych

(e) $$x = \frac{S_{(al-av)}}{\sigma}\,,\quad y = \frac{S_{(bl-bv)}}{\sigma}\,;\quad z = \frac{S_{(cl-cv)}}{\sigma}$$

warunkom wymaganym w układzie (b) zadość uczynią, t. j. że

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 \frac{S_{(al-av)}}{\sigma} + A_2 \frac{S_{(bl-bv)}}{\sigma} + A_3 \frac{S_{(cl-cv)}}{\sigma} &= 0,\\ B_0 + B_1 \frac{S_{(al-av)}}{\sigma} + B_2 \frac{S_{(bl-bv)}}{\sigma} + B_3 \frac{S_{(cl-cv)}}{\sigma} &= 0.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Rozkładając wyznaczniki powyższych równań i podstawiając wartość z (39), otrzymamy

(40)
$$\begin{aligned} -A_1 \frac{S_{av}}{\sigma} - A_2 \frac{S_{bv}}{\sigma} - A_3 \frac{S_{cv}}{\sigma} + w_1 &= 0\,,\\ -B_1 \frac{S_{av}}{\sigma} - B_2 \frac{S_{bv}}{\sigma} - B_3 \frac{S_{cv}}{\sigma} + w_2 &- 0\,. \end{aligned}$$

Równania te odpowiadają w zupełności równaniom warunkowym (25) ustępu 12, a poprawki v, od siebie niezależne, poprawkom ε (26) tegoż ustępu; wszystkie zatém wyniki ustępu 12, dadzą się tu w zupełności zastósować a wnioski robione na podstawie tych wyników będą również ważne.

Konieczném jest przedstawić równania warunkowe w formie równań (25). Ku temu celowi rozwinąć należy pojedyńcze wyznaczniki, ażeby otrzymać współczynniki pojedyńczych v, odpowiadające współczynnikom ε równań (25). Wykonywając to będzie

$$\begin{aligned} -S_{av} &= [av]\,\sigma_{aa} + [bv]\,\sigma_{ab} + [cv]\,\sigma_{ac} = \Sigma\,(a_r\,\sigma_{aa} + b_r\,\sigma_{ab} + c_r\,\sigma_{ac})\,v_r\\ -S_{bv} &= [av]\,\sigma_{ab} + [bv]\,\sigma_{bb} + [cv]\,\sigma_{bc} = \Sigma\,(a_r\,\sigma_{ab} + b_r\,\sigma_{bb} + c_r\,\sigma_{bc})\,v_r\\ -S_{cv} &= [av]\,\sigma_{ac} + [bv]\,\sigma_{bc} + [cv]\,\sigma_{cc} = \Sigma\,(a_r\,\sigma_{ac} + b_r\,\sigma_{bc} + c_r\,\sigma_{cc})\,v_r\,. \end{aligned}$$

Podstawiając te wyrazy w układ (40), otrzymamy:

$$\begin{aligned} &\frac{A_1}{\sigma}\,\Sigma\,(a_r\,\sigma_{aa} + b_r\,\sigma_{ab} + c_r\,\sigma_{ac})\,v_r + \frac{A_2}{\sigma}\,\Sigma\,(a_r\,\sigma_{ab} + b_r\,\sigma_{bb} + c_r\,\sigma_{bc})\,v_r + \frac{A_3}{\sigma}\,\Sigma\,(a_r\,\sigma_{ac} + b_r\,\sigma_{bc} + c_r\,\sigma_{cc})\,v_r + w_1 = 0,\\ &\frac{B_1}{\sigma}\,\Sigma\,(a_r\,\sigma_{aa} + b_r\,\sigma_{ab} + c_r\,\sigma_{ac})\,v_r + \frac{B_2}{\sigma}\,\Sigma\,(a_r\,\sigma_{ab} + b_r\,\sigma_{bb} + c_r\,\sigma\quad)\,v_r + \frac{B_3}{\sigma}\,\Sigma\,(a_r\,\sigma_{ac} + b_r\,\sigma_{bc} + c_r\,\sigma_{cc})\,v_r + w_2 = 0.\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Równania te dadzą się po wykonaniu mnożenia czynnikami A i B także w następującéj formie pisać:

$$\begin{aligned} -\sum \frac{(a_r\, S_{A_1} + b_r\, S_{A_2} + c_r\, S_{A_3})\, v_r}{\sigma} + w_1 &= -\Sigma\, a'_r v_r + w_1 = 0, \\ -\sum \frac{(a_r\, S_{B_1} + b_r\, S_{B_2} + c_r\, S_{B_3})\, v_r}{\sigma} + w_2 &= -\Sigma\, b'_r v_r + w_2 = 0, \end{aligned} \tag{41}$$

w którymto układzie minory S_A, S_B odpowiadają minorom wyznaczników

$$S^{(A,A)} = \begin{vmatrix} [aa], & [ab], & [ac], & A_1, \\ [ab], & [bb], & [bc], & A_2, \\ [ac], & [bc], & [cc], & A_3, \\ A_1, & A_2, & A_3, & 0, \end{vmatrix}, \quad S^{(B,B)} = \begin{vmatrix} [aa], & [ab], & [ac], & B_1, \\ [ab], & [bb], & [bc], & B_2, \\ [ac], & [bc], & [cc], & B_3, \\ B_1, & B_2, & B_3, & 0, \end{vmatrix}. \tag{42}$$

W układzie (41) są wyrazy w klamrach ujęte i podzielone przez wyznacznik σ współczynnikami pojedyńczych poprawek v i odpowiadają zupełnie współczynnikom poprawek δ układu (25) ustępu 12; i tak odpowiadają współczynniki a_r, b_r poprawki δ_r współczynnikom

$$-\frac{a_r\, S_{A_1} + b_r\, S_{A_2} + c_r\, S_{A_3}}{\sigma} = a'_r, \quad -\frac{a_r\, S_{B_1} + b_r\, S_{B_2} + c_r\, S_{B_3}}{\sigma} = b'_r$$

poprawki v_r.

Ażeby pojedyńcze poprawki v wyznaczyć, potrzebujemy obrachować $[a'a']$, $[b'b']$, $[a'b']$ odpowiednio ustępowi 12, gdzie przychodzą wyrazy $\left[\frac{aa}{p}\right]$, $\left[\frac{ab}{p}\right]$, $\left[\frac{bb}{p}\right]$, przyczém zważać należy, że ważności p odpowiadają tu jednostce. Wykonywając te operacye otrzymamy

$$\begin{aligned} [a'a'] &= -\frac{A_1\, S_{A_1}\cdot\sigma + A_2\, S_{A_2}\cdot\sigma + A_3\, S_{A_3}\cdot\sigma}{\sigma^2} = -\frac{S^{(A,A)}}{\sigma}, \\ [b'b'] &= -\frac{B_1\, S_{B_1}\cdot\sigma + B_2\, S_{B_2}\cdot\sigma + B_3\, S_{B_3}\cdot\sigma}{\sigma^2} = -\frac{S^{(B,B)}}{\sigma}, \\ [a'b'] &= -\frac{A_1\, S_{B_1}\cdot\sigma + A_2\, S_{B_2}\cdot\sigma + A_3\, S_{B_3}\cdot\sigma}{\sigma^2} = -\frac{S^{(A,B)}}{\sigma}, \end{aligned} \tag{43}$$

gdzie

$$S^{(A,B)} = \begin{vmatrix} [aa], & [ab], & [ac], & A_1, \\ [ab], & [bb], & [bc], & A_2, \\ [ac], & [bc], & [cc], & A_3, \\ B_1, & B_2, & B_3, & 0, \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [aa], & [ab], & [ac], & B_1, \\ [ab], & [bb], & [bc], & B_2, \\ [ac], & [bc], & [cc], & B_3, \\ A_1, & A_2, & A_3, & 0. \end{vmatrix}. \tag{44}$$

Ustawiając wyznacznik

$$\begin{vmatrix} -\frac{S^{(A,A)}}{\sigma}, & -\frac{S^{(A,B)}}{\sigma}, & w_1 \\ -\frac{S^{(A,B)}}{\sigma}, & -\frac{S^{(B,B)}}{\sigma}, & w_2 \\ w_1, & w_2, & 0 \end{vmatrix} = S^{(s)} \tag{45}$$

stósownie do przyjętéj symboliki będzie

$$S^{(s)}_{w_1} = -\begin{vmatrix} \frac{S^{(A,B)}}{\sigma}, & \frac{S^{(B,B)}}{\sigma} \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix}, \quad S^{(s)}_{w_2} = -\begin{vmatrix} \frac{S^{(A,A)}}{\sigma}, & \frac{S^{(A,B)}}{\sigma} \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix}$$

minor zaś

$$\begin{vmatrix} \frac{S^{(A,A)}}{\sigma}, & \frac{S^{(A,B)}}{\sigma} \\ \frac{S^{(A,B)}}{\sigma}, & \frac{S^{(B,B)}}{\sigma} \end{vmatrix} = S_0^{(s)} = \sigma^{(s)} \tag{46}$$

a odpowiednio układowi (32) ustępu 12 otrzymamy:

(47) $$v_r = -\left\{ \frac{a_r\, S_{A_1} + b_r\, S_{A_2} + c_r\, S_{A_3}}{\sigma} \frac{S^{(s)}_{w_1}}{\sigma^{(s)}} + \frac{a_r\, S_{B_1} + b_r}{\sigma} \right.$$

Mnożąc pojedyńcze v ilościami a, b, c, i sumując je, otrzyma

$$[av] = -\frac{1}{\sigma\sigma^{(s)}}\left\{ ([aa]\, S_{A_1} + [ab]\, S_{A_2} + [ac]\, S_{A_3})\, S^{(s)}_{w_1} + ([aa]\, S_{B_1} + [ab]\, S_{B_2} + [ac]\, S_{B_3})\, S^{(s)}_{w_2} \right\},$$

$$[bv] = -\frac{1}{\sigma\sigma^{(s)}}\left\{ ([ab]\, S_{A_1} + [bb]\, S_{A_2} + [bc]\, S_{A_3})\, S^{(s)}_{w_1} + ([ab]\, S_{B_1} + [bb]\, S_{B_2} + [bc]\, S_{B_3})\, S^{(s)}_{w_2} \right\},$$

$$[cv] = -\frac{1}{\sigma\sigma^{(s)}}\left\{ ([ac]\, S_{A_1} + [bc]\, S_{A_2} + [cc]\, S_{A_3})\, S^{(s)}_{w_1} + ([ac]\, S_{B_1} + [bc]\, S_{B_2} + [cc]\, S_{B_3})\, S^{(s)}_{w_2} \right\}.$$

Ponieważ $S_{av} = -([av]\,\sigma_{aa} + [bv]\,\sigma_{ab} + [cv]\,\sigma_{ac})$

będziemy mieli, podstawiając za sumy $[av]$, $[bv]$, $[cv]$, wartości wyżéj wyznaczone, po łatwéj redukcyi

$$S_{av} = -\frac{1}{\sigma^{(s)}}\left\{ (A_1\,\sigma_{aa} + A_2\,\sigma_{ab} + A_3\,\sigma_{ac})\, S^{(s)}_{w_1} + (B_1\,\sigma_{aa} + B_2\,\sigma_{ab} + B_3\,\sigma_{ac})\, S^{(s)}_{w_2} \right\}.$$

Mając wszystko co potrzeba obrachowane otrzymamy, wstawiając w układ równań (e) wartość za S_{av}

$$x = \frac{S_{al} - S_{av}}{\sigma} = \frac{S_{al}}{\sigma} - \frac{1}{\sigma\sigma^{(s)}}\left\{ (A_1\,\sigma_{aa} + A_2\,\sigma_{ab} + A_3\,\sigma_{ac})\, S^{(s)}_{w_1} + (B_1\,\sigma_{aa} + B_2\,\sigma_{ab} + B_3\,\sigma_{ac})\, S^{(s)}_{w_2} \right\},$$

a analogicznie

(48) $$y = \frac{S_{bl} - S_{bv}}{\sigma} = \frac{S_{bl}}{\sigma} - \frac{1}{\sigma\sigma^{(s)}}\left\{ (A_1\,\sigma_{ab} + A_2\,\sigma_{bb} + A_3\,\sigma_{bc})\, S^{(s)}_{w_1} + (B_1\,\sigma_{ab} + B_2\,\sigma_{bb} + B_3\,\sigma_{bc})\, S^{(s)}_{w} \right\},$$

$$z = \frac{S_{cl} - S_{cv}}{\sigma} = \frac{S_{cl}}{\sigma} - \frac{1}{\sigma\sigma^{(s)}}\left\{ (A_1\,\sigma_{ac} + A_2\,\sigma_{bc} + A_3\,\sigma_{cc})\, S^{(s)}_{w_1} + (B_1\,\sigma_{ac} + B_2\,\sigma_{bc} + B_3\,\sigma_{cc})\, S^{(s)}_{w} \right\}.$$

Jeżeli wyznaczone wartości niewiadomych podstawimy w równania zasadnicze, otrzymamy układ równań błędów, dla którego ogólnie będzie

(f) $$\delta = ax + by + cz + l = e + v.$$

Podnosząc każde równanie układu (f) do kwadratu i sumując będzie:

$$[\delta\delta] = [ee] + [vv]$$

gdzie $[ee] = \frac{S}{\sigma}$, odpowiednio zaś równaniu (34) ustępu 12, $[vv] = -\frac{S^{(s)}}{\sigma^{(s)}}$. Zważając na to, że ilość niewiadomych niezależnych jest $m - r$, będzie błąd średni spostrzeżeń, których waga jest jednostką

(49) $$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{\frac{S}{\sigma} - \frac{S^{(s)}}{\sigma^{(s)}}}{n - m + r}}.$$

Wyznaczenie ważności P funkcyi $F = \varphi\,(x, y, z \ldots)$ po przekształceniu jéj na linijną, będzie zawsze możliwe, zważając na równanie (38) ustępu 13, i stosując wyznaczniki (45) i (46) tego ustępu, gdyż spostrzeżenia niezależne l i ich wagi p zastępują wartości z normalnych równań wyznaczonych niewiadomych mianowicie:

$$x = \frac{S_{al}}{\sigma},\ y = \frac{S_{bl}}{\sigma},\ z = \frac{S_{cl}}{\sigma} \qquad \text{z wagami} \quad p_x = \frac{\sigma}{\sigma_{aa}},\ p_y = \frac{\sigma}{\sigma_{bb}},\ p_z = \frac{\sigma}{\sigma_{cc}}.$$