BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA L. 13.

Dr. W. LÁSKA i Inż. S. WIDT

profesorowie Szkoły Politechnicznej we Lwowie.

MIERNICTWO

Część I.

Teorya błędów i rachunek wyrównania.

Cena 3 korony

WE LWOWIE.

I. Związkowa drukarnia we Lwowie, ul. Lindego L. 4.

1903.

PRZEDMOWA.

Przy wydaniu niniejszych zeszytów wzięte były pod uwagę przedewszystkiem potrzeby naszej Szkoły. Zeszyty te nie są przeznaczone dla początkujących. Wobec przeciążenia obowiązkami zawodowymi, nie mogliśmy tak szybko, jak tego potrzeba wymagała, napisać podręcznika systematycznego. Kierowaliśmy się więc zasadą, ażeby podać przedewszystkiem to, co jest konieczne.

Zebraliśmy w jednych zeszytach w możliwie zwięzłej formie to, co jest niezbędnem dla poszczególnych zawodów technicznych (np. szczegóły niezbędne dla geometrów katastralnych podane zostały w zeszycie II), w innych zaś zeszytach wyłożyliśmy teorye, przeznaczone dla wszystkich zawodów (np. w zeszycie I metodę najmniejszych kwadratów). Zeszyt ostatni będzie zawierał dokładny spis rzeczy, oraz bogaty zbiór zadań z teoryi i praktyki, pośród których znajdą się niektóre rzeczy, których miejsce właściwe byłoby w poprzednich zeszytach.

Za pomoc, okazaną przy korekcie i redakcyi, wyrażamy podziękowanie pp. drowi M. Ernstowi i W. Wojtanowi. Pozostałe jeszcze błędy drukarskie będą sprostowane w końcowym zeszycie.

Autorowie.

SPIS RZECZY.

A. Teorya błędów.

B. Równania warunkowe.

A. Teorya błędów.

§. I. Rodzaje błędów.

Spostrzeżenia, chociażby z największą starannością wykonywane, nie prowadzą nigdy do określenia prawdziwej wartości ilości szukanej, ale dają wyniki, różniące się mniej lub więcej od wartości prawdziwej. Różnica między prawdziwą wartością a wynikiem spostrzeżeń pochodzi głównie z trzech następujących źródeł:

Pierwszem jest przyrząd sam, który służy do wykonywania spostrzeżeń. Drugiem są warunki zewnętrzne, w których dane spostrzeżenia były wykonane. Trzeciem wreszcie jest osoba obserwatora.

Różnice pomiędzy wartością prawdziwą a spostrzeganą zwiemy prawdziwymi błędami spostrzeżeń.

Jak widzimy z powyższego, możemy błędy ze względu na ich źródła podzielić na:

a) błędy instrumentalne;

b) błędy okolicznościowe i

c) błędy personalne.

Błędy instrumentalne są te, które zależne są od przyrządu. Tak n. p. przy instrumencie niwelacyjnym okoliczność, że oś libeli nie jest równoległą do osi celowej lunety, powoduje błędy przy niwelowaniu. Podobnie błąd kolimacyi jest błędem instrumentalnym. W ogóle zaliczamy tu wszystkie błędy, które w zasadzie usunięte być mogą przez rektyfikacyę przyrządu.

Błędy okolicznościowe zależą od warunków, w jakich spostrzeżenia są robione. Do takich należy n. p. wpływ powietrza przy celowaniu lunetą, wpływ temperatury i wilgotności na długość łat mierniczych i t. p.

Błędy osobiste czyli personalne są to błędy, zależne od obserwatora. W astronomii np. skonstatowano, że każdy obserwator inaczej pojmuje chwilę przejścia gwiazdy przez nitkę przyrządu w południku, tak że różnica między rzeczywistą chwilą przejścia a mniemaną jest dla każdego obserwatora w przybliżeniu pewną ilością stałą. Tego rodzaju błędy występują przy wszelkich sposobnościach; nie dadzą się one określić teoretycznie, ale praktycznie w przybliżeniu wpływ ich prawie zawsze można oznaczyć.

Z innego stanowiska błędy spostrzeżeń dadzą się podzielić na:

α) błędy regularne i

β) błędy nieregularne.

Błędy regularne, czyli systematyczne lub mniej dobrze stałe, są te, które występują w spostrzeżeniach lub wpływają na ich wyniki w sposób prawidłowy, tak, że wpływ ich da się z góry obliczyć. Zazwyczaj źródła tych błędów są znane jakoteż i prawa, według których one na wynik wpływają. Do takich błędów należą n. p. błędy instrumentalne. Błędy nieregularne, zwane też przypadkowymi, są te, które wynikają ze współdziałania wielkiej liczby okoliczności, nie dających się z góry obliczyć.

Wreszcie możemy ze względu na wielkość podzielić błędy na:

1. błędy grube,
2. błędy dopuszczalne.

Błędy grube są te, które swą wielkością wyróżniają się pośród innych. N. p. gdy mierzymy dwa razy długość L taśmą 20 metrową, przytrafić się nam może, że otrzymamy następujące wyniki:

$$L_1 = 169{\cdot}75\,m, \quad L_2 = 189{\cdot}79\,m.$$

Widocznem jest, że w któremś z tych dwóch spostrzeżeń, tkwi błąd gruby o wielkości 20 metrów.

Błędy dopuszczalne lub możliwe są te, których wielkość leży w granicach dokładności stosowanych metod i przyrządów. Tak n. p. za pomocą bardzo wielkiej liczby pomiarów długości taśmą 20-metrową znaleziono, iż dla długości l różnica między dwoma pomiarami nie powinna przekraczać granicy

$$R = \pm 0.005 \sqrt{l} \text{ metrów.}$$

Błędy przypadkowe.

Jeżeli wyniki obserwacyi uwolnimy od błędów grubych i regularnych i otrzymamy rezultaty nie przekraczające granic dopuszczalnych, to wynik obserwacyi będzie się składał z wartości prawdziwej szukanej, oraz z pewnego kompleksu błędów, które razem tworzą tak zwany błąd prawdziwy. Jeżeli dalej taki pomiar zrobimy więcej razy, to za każdym razem otrzymamy pewien błąd. Wszystkie te błędy tworzą tak zwaną grupę błędów.

Badając takie grupy, przekonano się, że właściwości ich odpowiadają prawie zawsze wymaganiom teoryi matematycznego prawdopodobieństwa.

Błędy tego rodzaju nazywają się błędami przypadkowymi.

Oznaczmy błąd przypadkowy przez v_k i grupę błędów przez

$$\Sigma v_k = [v_k]$$

to tylko takie grupy błędów mogą być przedmiotem naszych uwag, dla których

$$\lim [v_k] = 0, \qquad \dots\dots\dots \quad 1)$$

przyjmujemy więc, że każda grupa błędów przypadkowych zbliża się w sumie tem bardziej do zera, im więcej obejmuje jednostek. Niechaj będzie x_k wynikiem spostrzeżenia prawdziwej ilości x, to jest

$$x = x_k + v_k \qquad \dots\dots\dots \quad 2)$$

zatem dla n spostrzeżeń

$$nx = [x_k] + [v_k]$$

lub

$$[v_k] = nx - [x_k]$$

Stosując do tego powyższą zasadę, mamy

$$\lim \{ nx - [x_k] \} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

Im większa jest więc liczba spostrzeżeń, odpowiadających warunkowi

$$\lim [v_k] = 0$$

tem bardziej zbliża się ich średnia arytmetyczna

$$x_0 = \frac{[x_n]}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

do wartości szukanej.

*§. 2. Średnia arytmetyczna dwóch spostrzeżeń.

Zastanówmy się teraz nad przypadkiem, gdy zostały zrobione dwa spostrzeżenia. Jak to wyżej zostało wyłożone, błędy przypadkowe nie mogą przekraczać pewnej granicy, właściwej każdemu sposobowi spostrzegania. Niechaj będzie R tą granicą dopuszczalnych błędów, to

$$|v_k| < R$$

albo co to samo

$$-R < v_k < +R$$

Ponieważ

$$x = x_k + v_k$$

więc będzie

$$x_k - R < x < x_k + R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

Przy dwóch pomiarach x_1 i x_2 jakiejś nieznanej wartości x, szukana wartość musi się więc znajdować w granicach

$$x_1 - R \quad \text{i} \quad x_1 + R$$
$$x_2 - R \quad \text{i} \quad x_2 + R.$$

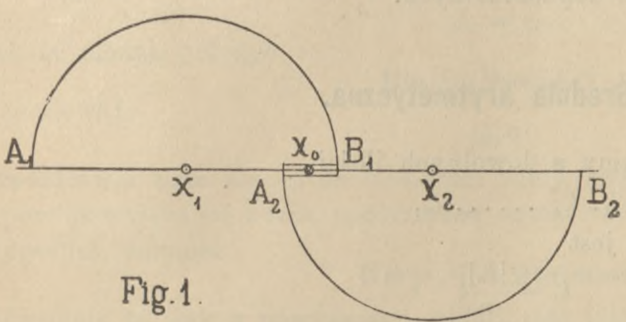

Fig. 1.

Graficznie można to przedstawić w następujący sposób. Niech będzie x wartością liniową n. p. długością, to długości x_1 i x_2 narysowane na jednej i tej samej prostej z jednego i tego samego punktu początkowego O, określają miejsca dwóch punktów x_1 i x_2 (patrz rys. 1). Zakreślmy promieniem R około x_1 i x_2 koła, to punkt, odpowiadający wartości szukanej, musi się na podstawie pierwszego spostrzeżenia znajdować między A_1 i B_1, a na podstawie drugiego między A_2 i B_2; na podstawie zaś obu spostrzeżeń razem, we wspólnej ich części A_2 i B_1.

Punkt środkowy tej części, to jest punkt

$$x_0 = \tfrac{1}{2} [OA_2 + OB_1]$$

będzie najmniej oddalony od punktu, który odpowiada wartości szukanej x, o ile naturalnie nieznając położenia punktu x wnioskować można.

---

*) Paragrafy, oznaczone przez *, mogą być przy czytaniu pominięte bez naruszenia ciągłości wykładu.

Gdybyśmy bowiem przyjęli zamiast punktu środkowego x_0 za bardziej odpowiedni jakiś inny punkt x', który, dajmy na to, leży bliżej B_1, niż punkt x_0, mogłoby się zdarzyć, że szukany punkt x, znajdowałby się właśnie bliżej punktu A_2.

Z tego widzimy, że w wypadku, gdy mamy dwa spostrzeżenia, ich średnia arytmetyczna jest najodpowiedniejszą wartością do zastąpienia niewiadomej. Jest bowiem (patrz rys. 1)

$$\tfrac{1}{2}[OA_2 + OB_1] = \tfrac{1}{2}[(x_1 + R) + (x_2 - R)] = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

Dalej mamy

$$2\,A_2 B_1 = 2\,R - (x_2 - x_1).$$

t. j. $A_2 B_1$ zmniejsza się, gdy $2\,R$ zbliża się do

$$x_2 - x_1$$

i zwiększa się w miarę zbliżenia się

$$x_2 - x_1$$

do zera. A ponieważ $A_2 B_1$ przedstawia obszar, w którym punt x leżeć musi, to wynika stąd w przypadku dwóch spostrzeżeń:

Im spostrzeżenia są zgodniejsze, tem mniej dokładnie wyraża się wielkość mierzona przez średnią arytmetyczną, a im spostrzeżenia są w granicach dopuszczalnych mniej zgodne, tem dokładniej określa ich średnia arytmetyczna wartość szukaną.

Stąd wypływa wniosek, że: zgodność spostrzeżeń nie zawsze jest oznaką ich dokładności. Nie wolno więc wyłączać pewnych spostrzeżeń tylko dlatego, że odchylają się znacznie od innych, jeżeli tylko odchylenie nie przekracza granic dopuszczalnych.

§. 3. Średnia arytmetyczna.

Twierdzenie. Jeżeli mamy n dowolnych ilości

$$l_1,\ l_2,\ \ldots\ldots\ l_n,$$

których średnia arytmetyczna jest

$$l_0 = \frac{[l_n]}{n},$$

i jeżeli położymy

$$\Delta_1 = l_0 - l_1$$
$$\Delta_2 = l_0 - l_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_n = l_0 - l_n$$

to zawsze jest

$$\Omega \equiv \Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2 + \ldots\ldots \Delta_n{}^2 = [\Delta_n{}^2] = \textbf{Minimum} \quad \ldots \quad 6)$$

bo ostatnie równanie możemy pisać w postaci

$$\Omega \equiv [(l_0 - l_n)^2] = \text{Minimum}$$

a do tego trzeba, ażeby

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Z_0} \equiv 2\,[l_0 - l_n] = 0$$

z tego zaś równania wypada

$$l_0 = \frac{[l_n]}{n}$$

Średnia arytmetyczna wyrównuje więc dany szereg dowolnych ilości w ten sposób, że suma kwadratów wartości

$$\Delta_k = l_0 - l_k$$

jest minimum. Gdybyśmy średnią arytmetyczną zastąpili inną wartością l', tak iż

$$\Delta'_k = l' - l_k$$

to będzie zawsze

$$\Omega' > \Omega \qquad \qquad 7)$$

Niechaj będą teraz l_k spostrzeżeniami pewnej nieznanej ilości l, to w razie, gdy te spostrzeżenia robione były z największą starannością, należy przypuścić, że błędy prawdziwe

$$l - l_k = v_k$$

będą miały charakter błędów przypadkowych, więc iż

$$\lim [v_k] = 0$$

Wtedy średnia arytmetyczna mało tylko od prawdziwej wartości różnić się może, mamy bowiem

$$l - \frac{[l_k]}{n} = \frac{[v_k]}{n}.$$

Jeżeli liczba spostrzeżeń rośnie, to w ułamku

$$\frac{[v_k]}{n}$$

licznik maleje a mianownik rośnie, ułamek ten zbliża się więc prędko do zera. W tym wypadku mamy więc bardzo blisko

$$\Delta_k = v_k.$$

tak że można położyć

$$\lim [v_k^2] = [\Delta_k^2] \qquad \qquad 8)$$

i ponieważ

$$[\Delta_k^2]$$

przedstawia nam absolutne minimum sumy kwadratów, to wnioskujemy, że z powiększającą się liczbą spostrzeżeń suma kwadratów prawdziwych błędów wypełnia warunek

$$\lim [v_k^2] = \text{Minimum}. \qquad \qquad 9)$$

Równanie to, jak z powyższego widać, jest tylko następstwem równania

$$\lim [v_k] = 0.$$

Te dwa równania są więc równorzędne i jedno może całkowicie zastąpić drugie.

§. 4. Różnica między błędem prawdziwym a błędem pozornym.

Dla błędów pozornych mamy równanie

$$l_0 = l_k + \Delta_k$$

gdzie l_0 jest średnią arytmetyczną spostrzeżeń nieznanej wartości l. Połóżmy dalej

$$l = l_0 + \delta$$

to mamy

$$l = l_k + \Delta l_k + \delta = l_k + v_k$$

więc

$$v_k = \Delta_k + \delta. \quad \dots\dots\dots \quad 10)$$

Z tego równania wynika, że prawdziwe błędy różnią się od pozornych tylko o stałą różnicę

$$\delta = l - l_0$$

między wartością prawdziwą a średnią arytmetyczną.

Mamy więc

$$v_1 = \Delta_1 + \delta, \quad v_2 = \Delta_2 + \delta, \quad v_3 = \Delta_3 + \delta, \dots\dots\dots \quad 11)$$

Z równania 11) wynika dalej, iż

$$v_k - v_\lambda = \Delta_k - \Delta_\lambda \quad \dots\dots\dots \quad 12)$$

to znaczy, że różnica dwóch błędów prawdziwych równa się różnicy dwóch odpowiednich błędów pozornych.

Dla n spostrzeżeń otrzymamy dalej z równania 10)

$$[v_n^2] = [(\Delta_n + \delta)^2] = [\Delta_n^2] + 2\,\delta\,[\Delta_n] + n\delta^2$$

Ponieważ zaś

$$[\Delta_n] = 0$$

to mamy

$$\frac{[v_n^2]}{n} = \frac{[\Delta_n^2]}{n} + \delta_2{}^2 \quad \dots\dots\dots \quad 13)$$

Wartość

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[v_n^2]}{n}} \quad \dots\dots\dots \quad 14)$$

nazywa się prawdziwym średnim błędem, jest pierw. kwadr. ona średnią arytmetyczną kwadratów prawdziwych błędów spostrzeżeń, wykonanych z jednakową dokładnością. Połóżmy dalej

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta_n^2]}{n}} \quad \dots\dots\dots \quad 15)$$

to równanie 13 można pisać

$$\varepsilon^2 = \mu^2 + \delta^2. \quad \dots\dots\dots \quad 16)$$

Widać stąd, iż zawsze

$$\varepsilon^2 > \mu^2 \quad \dots\dots\dots \quad 17)$$

Suma kwadratów odchyleń spostrzeganych wartości od prawdziwej wartości jest więc zawsze większą od sumy kwadratów odchyleń tych wartości od średniej arytmetycznej.

Różnicy

$$\delta = l - l_0$$

określić nie możemy, bo nie znamy wartości szukanej. Ażeby znaleść wartość przybliżoną postępujemy tak: z równania

$$\delta = l - \frac{[l_n]}{n} = \frac{[l - l_n]}{n}$$

otrzymujemy sumując

$$n\,\delta = [v_n] \quad \dots\dots\dots \quad 18)$$

więc

$$n^2\,\delta^2 = [v_n{}^2] + 2\,[v_k\,v_\lambda]$$

Wprowadzając nową hypotezę

$$\lim\,[v_k\,v_\lambda] = 0 \qquad v_k \gtrless v_\lambda \quad \dots\dots \quad 19)$$

mamy w przybliżeniu, zależnem od tej hypotezy

$$n^2 \delta^2 = [v_n^2] = n \varepsilon^2$$

Zatem

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

Podstawiając to w równaniu 16), otrzymuje się

$$\varepsilon^2 = \mu^2 + \frac{\varepsilon^2}{n}$$

lub

$$\frac{\varepsilon^2}{\mu^2} = \frac{n}{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

Równania 20) i 21) są tylko przybliżone, bo otrzymane za pomocą hypotezy

$$\lim [v_k v_\lambda] = 0, \qquad k \gtrless \lambda.$$

Ażeby to uwidocznić, połóżmy w równaniach

$$\delta = M, \qquad \varepsilon = m.$$

Otrzymujemy więc następującą tabliczkę:

Wzór prawdziwy	Wzór przybliżony
$\varepsilon = \sqrt{\frac{[v_n^2]}{n}}$ . . . . 22)	$m = \sqrt{\frac{[\Delta_n^2]}{n-1}}$ . . . 24)
$\delta = l - l_0$ . . . . 23)	$M = \sqrt{\frac{[\Delta_n^2]}{n(n-1)}}$ . . 25)

Z powyższych uwag wynika, że różnice

$$\varepsilon - m$$

i

$$\delta - M$$

będą tem mniejsze, im bardziej suma

$$[v_k v_\lambda], \qquad k \gtrless \lambda$$

zbliża się do zera.

Z równań dla m i M wynika dalej

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26)$$

* §. 5. Średnia arytmetyczna ze stanowiska matematycznego.

Niechaj będzie l prawdziwą wartością danego szeregu spostrzeżeń

$$l_1, l_2, \ldots\ldots l_n,$$

to zawsze istnieje pewna wartość x która zadość czyni równaniu

$$l = \sqrt[x]{\frac{l_1^x + l_2^x + \ldots\ldots l_n^x}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 27)$$

Gdyby l było znanem, to możnaby za pomocą odpowiednich metod znaleść niewiadomą x, bo byłoby to ściśle określone zadanie matematyczne. W danym jednak wypadku mamy dwie niewiadome x i l a tylko jedno równanie. Wyznaczenie x i l równocześnie, jest niemożebnem. Szukamy więc takiej wartości l_0, która by najbardziej do wartości l była zbliżona. W tym celu podzielmy równanie przez l_0^x. Mamy więc

$$n\left(\frac{l}{l_0}\right)^x = \left[\frac{l_n}{l_0}\right]^x$$

Połóżmy dalej

$$\frac{l}{l_0} = 1 - \varepsilon, \quad \frac{l_k}{l_0} = 1 - \varepsilon_k$$

to zawsze można przyjąć, iż ε jest małą wartością, tem mniejszą, im więcej l_0 zbliża się do l.

Równanie ostatnie można wtedy pisać

$$n(1-\varepsilon)^x = (1-\varepsilon_1)^x + (1-\varepsilon_2)^x + \ldots\ldots (1-\varepsilon_n)^x$$

czyli rozwijając w szereg Newtona

$$n\left(1 - x\varepsilon + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\varepsilon^2 - \ldots\ldots\right) = n - [\varepsilon_n]\,x + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}[\varepsilon^2_n] \ldots\ldots$$

lub

$$\varepsilon - \frac{x-1}{2}\varepsilon^2 + \ldots\ldots = \frac{[\varepsilon_n]}{n} - \frac{x-1}{2}\frac{[\varepsilon^2_n]}{n} + \ldots\ldots \quad 28)$$

Dalsze wyrazy, ponieważ ich wartości są bardzo małe, opuszczamy.

Teraz starajmy się określić l_0 tak, ażeby ε było minimum. To nastąpi wtedy, gdy

$$[\varepsilon^2_n] = \text{Min.}$$

bo wówczas równocześnie jest

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\varepsilon^2_n] = [\varepsilon_n] = 0$$

Mieliśmy

$$l_k - l_0 = l_0\,\varepsilon_k$$

sumując otrzymamy

$$[l_n] - nl_0 = l_0\,[\varepsilon_n]$$

a ponieważ

$$[\varepsilon_n] = 0$$

to mamy

$$l_0 = \frac{[l_n]}{n} = \frac{l_1 + l_2 + \ldots\ldots l_n}{n}$$

Gdy więc zapatrywać się będziemy na nasze zadanie tylko ze stanowiska matematycznego, to średnia arytmetyczna jest ową wartością, która do niewiadomej najbardziej się zbliża.

Pomnóżmy równanie 28) gdzie

$$\varepsilon l_0 = l_0 - l$$

przez l_0 to otrzymamy

$$(l_0 - l) - \frac{(x-1)}{2}\frac{(l_0-l)^2}{l_0} + \ldots\ldots = -\frac{x-1}{2n\,l_0}[(l_0-l_k)^2] + \ldots\ldots$$

widzimy stąd, że

$$l_0 - l$$

będzie tem mniejsze, im większe jest n i im mniejszą jest suma kwadratów wartości $l_0 - l_k$.

Średnia arytmetyczna przedstawia więc wartość, tem bardziej przybliżoną do niewiadomej, im większa jest liczba spostrzeżeń, a im mniejsza jest suma

$$[(l_k - l_0)^2].$$

§. 6. Zasady prawdopodobieństwa matematycznego.

1. Prawdopodobieństwem matematycznem P jakiegokolwiek zdarzenia nazywamy stosunek liczby m przypadków, danemu zdarzeniu sprzyjających, do ogólnej liczby wszystkich przypadków możliwych $m + n$.

Mamy zatem

$$P = \frac{m}{m+n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia jednej kuli białej z naczynia zawierającego 3 białe a 5 czarnych, jest n. p.

$$\frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$$

Prawdopodobieństwo matematyczne jest więc zawsze ułamkiem dodatnim, przybiera wartość 0 jeżeli w ogólnej liczbie przypadków niema żadnego sprzyjającego, zaś wartość 1, gdy wszystkie przypadki zdarzeniu sprzyjają. Znak 0 przedstawia więc niemożliwość, znak zaś 1 pewność zdarzenia się pewnego wypadku.

2. Jeżeli mamy kilka zdarzeń prostych i od siebie niezależnych

$$a \quad b \quad c \ldots\ldots$$

których prawdopodobieństwa są

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \ldots\ldots$$

to prawdopodobieństwo P' spełnienia się tych zdarzeń razem równa się iloczynowi prawdopodobieństw zdarzeń prostych, więc

$$P' = \alpha \beta \gamma \ldots\ldots \quad 30)$$

Wniosek. Prawdopodobieństwo, że zdarzenie a powtórzy się p razy po sobie wynosi

$$\alpha^p$$

jeżeli przez α oznaczy się prawdopodobieństwo prostego zdarzenia a.

3. Jeżeli w ogólnej liczbie n przypadków jest α prawdopodobieństwem zdarzenia się wypadku a, β prawdopodobieństwem zdarzenia się wypadku b i t. d. natenczas prawdopodobieństwo P'', że którekolwiek ze zdarzeń a lub b lub c ...... nastąpi, będzie

$$P'' = \alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots \quad 31)$$

W przeważnej liczbie zjawisk zachodzących w przyrodzie, nie jesteśmy w stanie z góry *(a priori)* oznaczyć liczby przypadków, sprzyjających danemu zdarzeniu. Mając obliczyć prawdopodobieństwo tego zdarzenia, nie pozostaje inna droga, jak oznaczenie prawdopodobieństwa tego zdarzenia na podstawie dokonanych już doświadczeń *(a posteriori)*. Tak n. p. prawdopodobieństwa pojawienia się pewnego błędu w danej grupie nie można a priori określić, ale jeżeli skonstruujemy tak zwaną krzywą prawdopodobieństwa (patrz §. 9) która, jak doświadczenie pokazuje, dla wszystkich zbadanych grup ma w przybliżeniu jednakowy kształt, to przyjmując, że i w każdym nowym wypadku to nastąpi, będziemy mogli określić prawdopodobieństwo pojawienia się tego błędu przynajmniej w przybliżeniu także a priori.

§. 7. Teorya błędów na podstawie rachunku prawdopodobieństwa.

Chcąc stosować twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa do teoryi błędów, należy przyjąć następujące hypotezy:

1. błędy dodatnie i ujemne są równie prawdopodobne;
2. błędy większe są przy jednym i tym samym sposobie spostrzegania mniej prawdopodobne od mniejszych;
3. błędy rzeczywiste są najprawdopodobniejsze;
4. Prawdopodobieństwo pojawienia się jakiegoś błędu danej grupy da się przez jedną i tę samą funkcyę przedstawić.

Hypoteza 4. opiewa, iż dla każdej grupy błędów jednego i tego samego sposobu spostrzegania istnieje pewna funkcya

$$f(v),$$

która określa prawdopodobieństwo popełnienia błędu v. W danej grupie zależy więc prawdopodobieństwo popełnienia pewnego błędu tylko od jego wielkości.

Na podstawie 1) hypotezy wnioskujemy, iż

$$f(+v) = f(-v).$$

$f(v)$ będzie zatem funkcyą parzystą. Wskutek drugiej hypotezy jest

$$f(v') > f(v)$$

w razie gdy

$$v' < v,$$

t. j. wartość funkcyi $f(v)$ maleje, jeżeli wartość błędu rośnie. Mamy zatem

$$\lim f(\infty) = 0.$$

Z trzeciej hypotezy w połączeniu z drugiem twierdzeniem rachunku prawdopodobieństwa wypływa równanie

$$\Pi = f(v_1) f(v_2) \ldots\ldots f(v_n) = \textbf{Maximum}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32)$$

Ażeby módz kształt funkcyi f określić, należy sobie przypomnieć, iż wskutek równania 1) mamy

$$\lim [v_k] = 0,$$

które to równanie zastąpić możemy (patrz r. 9) przez

$$\Omega = v_1{}^2 + v_2{}^2 + \ldots\ldots v_n{}^2 = \textbf{Minimum}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33)$$

Jak z matematyki wiadomo, równania 32) i 33) będą miały miejsce, jeżeli

$$v_1\, dv_1 + v_2\, dv_2 + \ldots\ldots v_n\, dv_n = 0$$

$$\frac{f'(v_1)}{f(v_1)} dv_1 + \frac{f'(v_2)}{f(v_2)} dv_2 + \ldots\ldots \frac{f'(v_n)}{f(v_n)} dv_n = 0.$$

Mnożąc pierwsze równanie przez na razie nieokreślony spółczynnik λ i odejmując od drugiego, otrzymujemy:

$$\sum \left\{ \frac{f'(v_k)}{f(v_k)} - \lambda v_k \right\} dv_k = 0.$$

Jeżeli

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ldots$$

są wartościami od siebie niezależnemi — a to jest nowa hypoteza — to

$$\frac{f'(v_k)}{f(v_k)} - \lambda v_k = 0.$$

Całkując otrzymamy

$$\log f(v_k) = \frac{\lambda}{2} v_k{}^2 + \log C$$

albo

$$f(v_k) = Ce^{\frac{\lambda}{2} v_k{}^2}$$

gdzie C jest stała całkowania.

Funkcya $f(v)$ maleje, jeżeli v rośnie, λ jest więc zawsze ujemne. Ażeby to oznaczyć, połóżmy

$$\frac{\lambda}{2} = -h^2$$

Mamy zatem

$$f(v) = Ce^{-h^2v^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

Do oznaczenia stałej C posłuży nam trzecie twierdzenie z rachunku prawdopodobieństwa.

Funkcya $f(v_k)$ oznacza, ile razy pewien błąd v_k w danej grupie błędów się znajduje. Prawdopodobieństwo matematyczne zdarzenia się tego błędu jest więc

$$\varphi(v_k) = \frac{f(v_k)}{n}$$

jeżeli n jest liczbą błędów w ogóle.

Ponieważ przy każdem spostrzeżeniu popełnia się jakiś błąd, to na podstawie twierdzenia trzeciego z rachunku prawdopodobieństwa, mamy

$$\sum \varphi(v_k) = \sum \frac{f(v_k)}{n} = 1,$$

lub uwzględniając równanie 34)

$$C \sum \frac{1}{n} e^{-h^2v^2} = 1.$$

Im większa liczba spostrzeżeń, tem bardziej zbliża się suma Σ do granicznej wartości, t. j. do całki. Mamy więc

$$C \lim \sum \frac{1}{n} e^{-h^2v^2} = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2v^2} dv = 1.$$

Połóżmy tu

$$hv = t$$

to

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2v^2} dv = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Z matematyki wiadomo, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

przeto mamy

$$\frac{C}{h}\sqrt{\pi} = 1$$

więc

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

Mamy zatem

$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

Przyjmując więc:

1. że suma kwadratów błędów jest minimum;
2. że matematyczne prawdopodobieństwo pojawienia się rzeczywistych błędów jest maximum;
3. że liczba błędów jest nieskończenie wielką;
4. że pojawianie się pojedyńczych błędów jest od siebie niezależne;

to matematyczne prawdopodobieństwo pojawienia się błędu v_k przedstawia się w formie

$$\varphi(v_k) = \frac{1}{n} f(v_k) = \frac{h}{n\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_k^2}$$

gdzie n oznacza ogólną ilość błędów.

Ażeby znaleść znaczenie wartości h, rozumujemy jak następuje:

Ponieważ błąd v_k występuje $f(v_k)$ razy, to suma wszystkich kwadratów błędów będzie

$$[v^2] = \sum v_k^2 f(v_k)$$

zatem

$$\frac{[v^2]}{n} = \sum \frac{1}{n} v_k^2 f(v_k)$$

lub

$$\frac{[v_k^2]}{n} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum \frac{1}{n} v_k^2 e^{-h^2 v_k^2}.$$

Jeżeli, jak wyżej przejdziemy od sumy do całki, przyjmując nieskończoną liczbę spostrzeżeń, to mamy

$$\lim \sum \frac{1}{n} v_k^2 e^{-h^2 v^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-h^2 v^2}\, dv.$$

Podstawiając tu

$$hv = t$$

i uwzględniając, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

otrzymamy

$$\frac{[v^2]}{n} = \frac{1}{2h^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 37)$$

i podstawiając

$$\varepsilon^2 = \frac{[v^2]}{n} = \frac{1}{2h^2}$$

ostatecznie

$$h = \frac{0{\cdot}70711\ldots}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 38)$$

Im dokładniejsze są spostrzeżenia, tem mniejsze są błędy v i tem bardziej zbliża się więc ε do zera, a rośnie h. Z tego powodu nazwano h miarą dokładności danej grupy spostrzeżeń, bo im większe h, tem dokładniejsze są spostrzeżenia.

* §. Błędy charakterystyczne.

Błędy charakterystyczne są to te błędy prawdziwe, które mają pewne właściwości osobliwe.

1. Błąd oczekiwany jest ten, dla którego matematyczne prawdopodobieństwo równa się $\frac{1}{2}$.

Błąd ten przedstawia nam pewną graniczną wartość tego rodzaju, że prawdopodobieństwo pojawienia się błędu bezwzględnie, mniejszego niż oczekiwany, równa się prawdopodobieństwu pojawienia się błędu większego.

Jeżeli oznaczymy przez ϱ wartość tego błędu, to mamy

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho} e^{-h^2 v^2}\, dv = \tfrac{1}{2}$$

Podstawiając tu

$$hv = t$$

otrzymamy

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\varrho} e^{-t^2}\, dt = \tfrac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 39)$$

lub

$$\int_0^{h\varrho} e^{-t^2}\, dt = \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi} = 0{\cdot}443113\ldots\ldots$$

Z tablic dla całki

$$\int_0^{a} e^{-t^2}\, dt = b$$

otrzymujemy dla

$$b = 0{\cdot}443113\ldots\ldots$$

$$a = 0{\cdot}476936\ldots\ldots$$

zatem

$$h\varrho = 0{\cdot}476936\ldots\ldots$$

lub

$$\varrho = \frac{0{\cdot}476936}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 40)$$

Podstawiając tu z równań 37) i 38)

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

mamy

$$\varrho = 0{\cdot}674489\sqrt{\frac{[v^2]}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 41)$$

2. Błąd przeciętny określony jest równaniem

$$\vartheta = \frac{\sum |v_k|}{n} = \frac{|v_1| + |v_2| + \ldots\ldots |v_n|}{n} \quad \ldots\ldots \quad 42)$$

jest to średnia arytmetyczna absolutnych wartości poszczególnych błędów.

Ażeby błąd ten przedstawić ze stanowiska rachunku prawdopodobieństwa należy sobie przypomnieć, iż błąd v_1 występuje $f(v_1)$ razy, błąd v_2 zaś $f(v_2)$ razy i t. d. Mamy więc

$$\frac{1}{n} \sum |v_k| = \sum \frac{1}{n} v_k f(v_k)$$

gdzie n oznacza ogólną ilość błędów. Mamy zatem dla

$$\lim n = \infty$$

tak jak poprzednio

$$\lim \sum \frac{1}{n} v_k f(v_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} v f(v)\, dv$$

tudzież za wprowadzeniem zmiennej

$$t = hv$$

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d(e^{-t^2})$$

i z tego

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{[|v|]}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

Mieliśmy poprzednio

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}}$$

Rugując z tych równań h otrzymuje się

$$\frac{\varepsilon^2}{\vartheta^2} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44)$$

Jeżeli więc błędy prawdziwe stosują się do praw matematycznego prawdopodobieństwa, to kwadrat średniego błędu podzielony przez kwadrat błędu przeciętnego równa się

$$\frac{\pi}{2}$$

Jeżeli zależność taka — ważna ściśle biorąc dla nieskończonej liczby spostrzeżeń — nie zachodzi, to dany szereg błędów nie odpowiada prawom matematycznego prawdopodobieństwa.

Kryterium to pozwala nam, przynajmniej częściowo, zbadać możliwość stosowania naszych wyników do danego szeregu obserwacyi.

Przykład. Wypróbujmy teoryę powyższą na przykładzie, w którym ilość poszukiwana x daną jest a priori.

Linia długości 150 *mm* została narysowaną na 10 kartkach i za każdym razem podzieloną na oko na dwie równe części. Pierwsza część z lewa na prawo uważaną była jako wielkość spostrzegana x_k, gdy $x = 75\,mm$ jest prawdziwą wartością. Wymierzenie owych x_k z dokładnością do 1 *mm* dało nam wartości spostrzegane. Z danych owego doświadczenia wynika następująca tabelka:

L.	x	Δx	Δx^2	v	v^2
1	79	—2·7	7·3	—4.0	16
2	80	—3·7	13·7	—5·0	25
3	71	+5·3	28·1	+4·0	16
4	71	+5·3	28·1	+4·0	16
5	73	+3·3	10·9	+2·0	4
6	75	+1·3	1·7	0·0	0
7	77	—0·7	0·5	—2·0	4
8	82	—5·7	32 5	—7·0	49
9	73	+3·3	10·9	+2·0	4
10	82	—5·7	32·5	—7·0	49

$[x]$	$[\Delta x]$	$[\Delta x^2]$	$[v]$	$[v^2]$
763	0	166	—13	183

Mamy tu

$$x = 75$$

$$x_0 = \frac{[x_n]}{n} = \frac{763}{10} = 76{\cdot}3$$

więc

$$\delta = x - x_0 = -1{\cdot}3$$

Dalej powinno być

$$[v^2] = [\Delta x^2] + n\delta^2.$$

W istocie mamy

$$183 = 166 + 10 \times 1{\cdot}3^2 = 166 + 17.$$

Otrzymujemy następnie

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} = \sqrt{\frac{183}{10}} = 4{\cdot}3$$

$$\vartheta = \frac{|v|}{n} = \frac{37}{10} = 3{\cdot}7$$

i stąd

$$2\,\frac{\varepsilon^2}{\vartheta^2} = 2.\frac{4{\cdot}3^2}{3{\cdot}7^2} = 2{\cdot}7$$

zamiast

$$\pi = 3{\cdot}14\ldots$$

Wreszcie jest

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta_x{}^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{166}{9}} = 4{\cdot}3$$

więc taka sama wartość jak dla ε, zgodnie z teoryą.

Znajdujemy dalej, iż

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \frac{4{\cdot}3}{\sqrt{10}} = 1{\cdot}3$$

i wzór przybliżony dla δ

$$M = \sqrt{\frac{[\Delta_x{}^2]}{n\,(n-1)}} = \sqrt{\frac{184}{90}} = 1{\cdot}4.$$

Jest także ogólnie

$$v_k - \Delta_k = \delta$$

bo mamy rzeczywiście

$$-4{\cdot}0 + 2{\cdot}7 = -1{\cdot}3$$
$$-5{\cdot}0 + 3{\cdot}7 = -1{\cdot}3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$-7{\cdot}0 + 5{\cdot}7 = -1{\cdot}3.$$

Prawdopodobne granice nieznanej są

$$x_0 + M \quad \text{i} \quad x_0 - M$$

lub

$$77{\cdot}7 \quad \text{i} \quad 74{\cdot}9$$

między któremi liczba 75·0 się rzeczywiście znajduje.

§. 9. Krzywa prawdopodobieństwa.

Niech będzie dany szereg (bardzo wielkiej liczby) spostrzeżeń

$$x_1,\ x_2 \ldots\ldots x_n$$

które uważamy za uporządkowane tak, że x_1 przedstawia najmniejszą, a x_n największą wartość w szeregu.

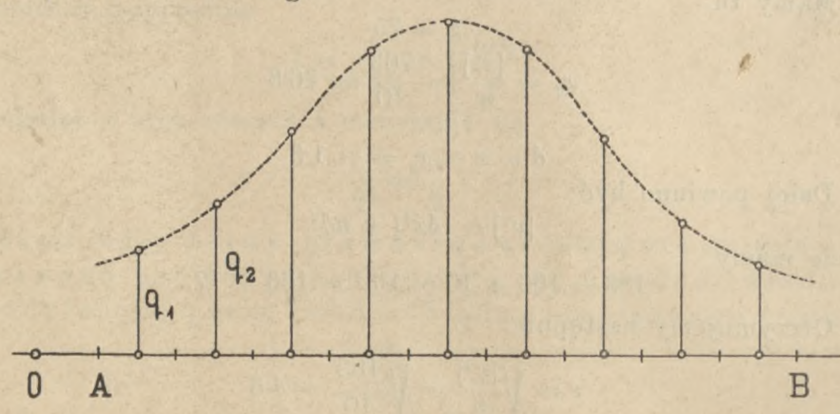

Fig. 2

Podzielmy odstęp od x_1 do x_n na m równych części i przeliczmy, ile wartości x w każdej części jest zawartych.

Niechaj będzie w granicach

$$x_1, \text{ a } x_1 + \frac{x_n - x_1}{n} \quad \ldots\ldots \quad q_2$$

$$x_1 + \frac{x_n - x_1}{n}, \text{ a } x_1 + 2\,\frac{x_n - x_1}{n} \quad \ldots \quad q_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

spostrzeżeń, to rysuje się krzywa prawdopodobieństwa w następujący sposób:

Na pewnej prostej rysuje się w dowolnej podziałce

$$OA = x_1, \quad OB = x_n$$

tak iż

$$AB = x_n - x_1.$$

Odstęp AB dzielimy na m równych części i na rzędnych, poprowadzonych w środku każdej części, odcinamy kolejno wielkości

$$q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$$

Krzywa interpolacyjna tych rzędnych nazywa się krzywą prawdopodobieństwa danej grupy spostrzeżeń (patrz rys. 2).

Twierdzenie. Krzywa prawdopodobieństwa spostrzeżeń jest równocześnie i krzywą prawdopodobieństwa błędów spostrzeżeń.

Ażeby to pokazać, należy sobie przypomnieć, że kształt krzywej się nie zmienia, jeżeli początek układu spółrzędnych obierzemy dowolnie na linii AB.

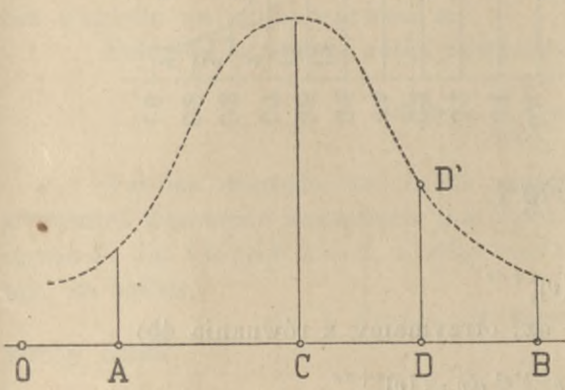

Fig. 3.

Obierzmy więc za początek układu punkt C tak, aby długość OC równała się szukanej wartości x. Jeżeli długość OD odpowiada spostrzeżeniu x_k, to długość odcinka

$$CD = OD - OC = x_k - x$$

bez względu na znak, będzie nam przedstawiała błąd v_k, który naturalnie tyle razy się pojawia, ile spostrzeżeń x_k mamy.

Przykład. Z 470 spostrzeżeń pewnej wielkości przez policzenie liczby błędów, bez względu na ich znak, znaleziono:

w granicach		liczbę błędów	
od	do	s	$\frac{1}{2} s$
0·0	0·1	94	47
0·1	0·2	88	44
0·2	0·3	76	38
0·3	0·4	58	29
0·4	0·5	51	26
0·5	0·6	36	18
0·6	0·7	26	13
0·7	0·8	14	7
0·8	0·9	10	5
0·9	1·0	7	4
1·0	—	10	—

Narysujmy teraz połowę krzywej błędów, to krzywa interpolacyjna (patrz rys. 4) będzie miała równanie

$$y = 49{\cdot}36\, e^{-(1{\cdot}76)^2 x^2}.$$

Kształt ten odpowiada bardzo dobrze teoryi, bo na podstawie poprzednich uwag wiadomo, że

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = \frac{\text{Liczbie błędów w granicach } x \text{ a } x + dx}{\text{Liczbę błędów w ogóle}} \quad . \quad . \quad 45)$$

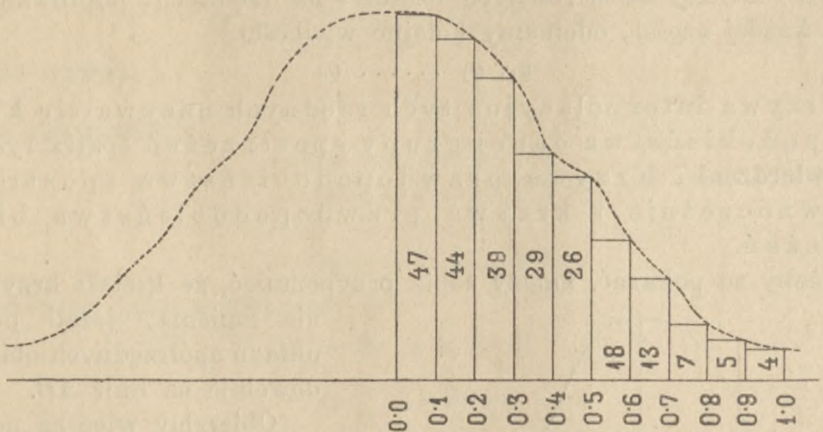

Fig.4

i oznaczając przez

$$[v]_x^{x+dx}$$

liczbę błędów w granicach x a $x + dx$, otrzymamy z równania 45)

$$470 \times \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = [v]_x^{x+dx}$$

Połóżmy tu n. p.

$$x = 0, \quad x + dx = 0 + 0{,}1 = 0·1$$

to będzie

$$e^{-h^2x^2} = 1$$

i

$$[v]_0^{0·1} = 470 \times \frac{1·76\ldots.}{1·7724..} \times 1 \times 0·1 = 47$$

W podobny sposób postępując, otrzymuje się liczbę teoretyczną błędów.

Następująca tabliczka podaje liczby, wynikające z rachunku (s'), zestawione z rzeczywistemi liczbami (s):

s (spostrzeżenie):	s' (teorya):
95	94
89	88
78	86
64	58
50	51
36	36
24	26
15	14
9	10
5	7

Widzimy więc, że teoretyczne liczby zgadzają się dość dobrze z rzeczywistemi, czyli że krzywa prawdopodobieństwa w tym wypadku ma kształt, odpowiadający matematycznej teoryi rachunku prawdopodobieństwa.

Grupa błędów powyższych przedstawia więc grupę błędów przypadkowych. Ten sposób zbadania grup spostrzeżeń jest atoli niewygodnym, bo obliczenie stałych krzywej interpolacyjnej wymaga dużo czasu. Daleko łatwiej można ten cel osiągnąć za pomocą uwag następującego paragrafu.

*§. 10. Próba szeregów błędów.

Całka

$$\varphi(\alpha) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-h^2x^2}dx$$

wyraża prawdopodobieństwo, że jakiś błąd nie przekracza bezwzględnie (t. j. bez względu na znak) wartości x.

Połóżmy $hx = t$, to całka powyższa przechodzi w następującą prostszą

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$$

Tablica wartości tej całki znajduje się przy końcu książki. Ażeby zrozumieć znaczenie zawartych tam liczb, przypuśćmy, że mamy szereg spostrzeżeń, dla których $h = 1$, a więc $x = t$ tak, że będzie

$$\varphi(\alpha) = \Phi(t),$$

wtedy całka

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0\cdot1} e^{-t^2}dt = 0\cdot112$$

wyraża prawdopodobieństwo, że błąd spostrzeżenia, uważany bezwzględnie, jest mniejszy niż 0·1.

Jeżeli więc n oznacza liczbę spostrzeżeń w ogóle, zaś s liczbę błędów, zawartych w granicach od $+0\cdot1$ do $-0\cdot1$, to

$$\frac{s}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0\cdot1} e^{-t^2}dt = 0\cdot112$$

a więc

$$s = 0\cdot112\,n.$$

Zatem gdy n. p. $n = 1000$, to $s = 112$.

Znaczy to, że gdy 1000 błędów o dokładności $h = 1$ podlega ściśle prawu prawdopodobieństwa, to pośród 1000 błędów będzie 112 takich, których wartość bezwzględna jest mniejszą niż 0·1.

Jeżeli miara dokładności nie jest 1, lecz równa się h, to należy całkę powyższą wziąć z argumentem

$$0\cdot1\,h, \quad 0\cdot2\,h, \quad 0\cdot3\,h \ldots\ldots$$

zamiast

$$0\cdot1, \quad 0\cdot2, \quad 0\cdot3 \ldots\ldots$$

P r z y k ł a d. W szeregu 40 określeń położenia kreski na podziałce, zrobionych z jednakową dokładnością, znaleziono następujące odchylenia od średniej arytmetycznej 3·93.

+ 0·25	+ 1·12	— 1·55	+ 0·65
+ 0·82	— 0·72	+ 0·17	+ 0·15
— 0·83	+ 0·66	— 0·66	+ 0·71
+ 1·18	— 0·15	+ 1·29	— 0·05
— 0·22	— 0·58	+ 0·95	— 0·02
— 1·11	— 0·50	— 0·28	— 1·28
+ 0·98	+ 0·67	— 1·80	— 0·50
— 2·52	+ 1·45	— 0·52	+ 1·65
+ 0·15	— 0·91	— 0·02	— 0·17
— 0·56	+ 0·50	+ 1·27	— 0·25

Suma kwadratów tych wartości jest

$$[\varDelta^2] = 32{\cdot}4364,$$

stąd wynika błąd średni

$$m = \sqrt{\frac{[\varDelta^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{32.4364}{40-1}} = \pm 0{\cdot}91$$

a więc

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{0.707}{0{\cdot}91} = 0{\cdot}77$$

Ażeby się dowiedzieć, jakiej liczby błędów, mniejszych bezwzględnie niż 0·5, należy się spodziewać według teoryi prawdopodobieństwa, trzeba obliczyć wartość całki $\Phi(t)$ dla

$$t = 0{\cdot}5 \times h = 0{\cdot}5 \times 0{\cdot}77$$

t. j. dla $t = 0{\cdot}39$. Znajdujemy z tablicy

$$\Phi(0{\cdot}39) = 0{\cdot}42.$$

Mamy zatem

$$s = 0.42 \times 40 = 18.$$

Analogicznie jako liczba błędów, mniejszych niż 1·0, otrzymuje się

$$s = 0.72 \times 40 = 29$$

Obliczając liczby, błędów w tych granicach rzeczywiście popełnionych, otrzymujemy liczby do teoretycznych bardzo zbliżone, mianowicie:

Suma błędów	spostrzeżenie	teorya
Od 0·0 do 0·5	15	17
„ 0·0 „ 1·0	29	29

Widzimy więc dostateczną zgodność teoryi z obserwacyą i wnioskujemy, że w tym wypadku metoda najmniejszych kwadratów może być stosowaną.

§. 11. Błąd średni funkcyi spostrzeżeń bezpośrednich.

Zadanie. Niech będzie ilość jakakolwiek u dana jako funkcya innych ilości od siebie niezależnych

$$x \quad y \quad z \ldots\ldots$$

postaci

$$u = F(x, y, z, \ldots\ldots).$$

Ze spostrzeżeń wypływa układ wartości szczególnych

$$x_0 \; y_0 \; z_0 \ldots\ldots$$

tych zmiennych, z błędami średnimi

$$m_x \quad m_y \quad m_z \ldots\ldots$$

i obliczono

$$u_0 = F(x_0,\ y_0,\ z_0 \ldots\ldots);$$

znaleść błąd średni m_0 ilości u_0.

Połóżmy

$$\begin{aligned} u - u_0 &= \Delta u \\ x - x_0 &= \Delta x \\ y - y_0 &= \Delta y \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

to

$$\Delta u = F(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z, \ldots\ldots) - F(x_0\ y_0\ z_0 \ldots\ldots)$$

lub rozwijając podług wzoru Taylora i ograniczając się do pierwszych potęg błędów,

$$\Delta u = \frac{\partial F}{\partial x_0} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y_0} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z_0} \Delta z + \ldots\ldots$$

Zatem

$$\Delta u^2 = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_0} \Delta x \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_0} \Delta y \right\}^2 + \ldots\ldots$$

$$+ 2 \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial y_0} \right) \Delta x\, \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial z_0} \right) \Delta x\, \Delta z + \left(\frac{\partial F}{\partial y_0} \right) \frac{\partial F}{\partial z_0} \right) \Delta y_0\, \Delta z_0 \ldots\ldots \right\}$$

i z tego sumując

$$[\Delta u^2] = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)^2 [\Delta x^2] + \left(\frac{\partial F}{\partial y_0} \right)^2 [\Delta y^2] + \left(\frac{\partial F}{\partial z_0} \right)^2 [\Delta z^2] + \ldots\ldots$$

bo

$$[\Delta x\, \Delta y] = [\Delta x\, \Delta z] = [\Delta y\, \Delta z] = \ldots\ldots = 0$$

Jeżeli podzielimy to równanie przez liczbę spostrzeżeń n i podstawimy

$$\frac{[\Delta u^2]}{n} = m_o,\ \frac{[\Delta x^2]}{n} = m_x,\ \ldots\ldots \text{ itd.}$$

to mamy

$$m_o = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)^2 m^2{}_x + \left(\frac{\partial F}{\partial y_0} \right)^2 m^2{}_y + \left(\frac{\partial F}{\partial z_0} \right)^2 m^2{}_z + \ldots\ldots} \quad . \quad . \quad 46)$$

Z powodu licznych zastosowań zasługuje na szczególniejszą uwagę funkcya liniowa

$$u = a + bx + cy + dz + \ldots\ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47)$$

gdzie

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots\ldots$$

są stałymi współczynnikami. Mamy w tym razie

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = a,\ \frac{\partial F}{\partial y_0} = b,\ \frac{\partial F}{\partial z_0} = c \ldots\ldots$$

przeto

$$m_o = \sqrt{a^2\, m^2{}_x + b^2 m_y{}^2 + c^2 m_z{}^2 + \ldots\ldots} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48)$$

Połóżmy tu

$$a = b = 1,\quad c = 0,\quad \ldots\ldots$$

to mamy dla

$$u = x + y$$

$$m_o = \sqrt{m^2{}_x + m^2{}_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 49)$$

Łatwo się o tem przekonać wprost, bo z równania

$$u = x + y$$

wypływa równanie

$$v_u = v_x + v_y$$

zatem

$$[v^2_u] = [v^2_x] + [v^2_y] + 2\,[v_x\, v_y]$$

Ponieważ zaś

$$[v_x\, v_y] = 0.$$

to mamy

$$\frac{[v_n^2]}{n} = \frac{[v_x^2]}{n} + \frac{[v_y^2]}{n}$$

lub

$$m_o^2 = m_x^2 + m_y^2.$$

1) Przykład. Pomiar prostej taśmą albo łatami.

Przy pomiarze prostej kładziemy wzdłuż jej długości taśmę lub łatę raz za razem po sobie, n. p. n razy. Oznaczmy długość tej prostej przez L, długość zaś jednostki mierniczej, t. j. taśmy albo łaty, przez l, to mamy:

$$L = l + l + l + \ldots\ldots + l \ (n \text{ razy}).$$

Błąd średni jest podług wzoru 46)

$$m_L = \sqrt{m_1^{\,2} + m_1^{\,2} + \ldots\ldots m_1^{\,2}}$$

Zatem

$$m_L = m_1 \sqrt{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 50)$$

Jeżeli mierzymy teraz inną długość L' tą samą jednostką, to otrzymujemy

$$m'_{L'} = m_1 \sqrt{n'}$$

Zatem

$$\frac{m_L}{m_{L'}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

Średnie błędy stoją więc w prostym stosunku do pierwiastków kwadratowych pomierzonych długości.

Zgodnie z teoryą wyznaczono na drodze bardzo licznych i starannych spostrzeżeń, następujące średnie błędy długości l:

dla łaty. . . . $m = 0{\cdot}003\ \sqrt{l}$
„ taśmy stalowej $m = 0{\cdot}005\ \sqrt{l}$
„ łańcucha . . $m = 0{\cdot}008\ \sqrt{l}$

Na pierwszy rzut oka zdawałoby się, że tu można położyć

$$L = nl$$

z czego by wypływało:

$$m_L = n\,.\,m_l.$$

Lecz równanie poprzednie nie jest wiernym obrazem naszej czynności pomiarowej, gdyż my przykładamy taśmę lub łatę raz, potem posuwamy ją o całą jej długość i dodajemy niejako do poprzedniej i t. d. Operacya nasza nie jest więc mnożeniem, lecz dodawaniem.

Równanie 50) nie przedstawia jednak praktycznego średniego błędu, ponieważ przy kładzeniu taśmy lub łaty zawsze pomiędzy jednem a drugiem położeniem pozostaje jakiś odstęp. Więc im większa jest pomierzona długość, tem większa będzie suma tych odstępów.

Do błędu nieregularnego m_L przybywa więc błąd regularny, proporcyonalny do pomierzonej długości

$$m_L' = m_l . n.$$

Mamy zatem

$$M_L = \sqrt{m_l^2 n + m_l'^2 n^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 52)$$

Wzór ten praktycznie można zastąpić przez

$$M_L = \sqrt{\alpha l + \beta l^2}$$

gdzie α i β są stałe, których średnie wartości za pomocą licznych spostrzeżeń wyznaczyć należy. Ponieważ α i β są małe ilości, to można wzór ten z bardzo wielkiem przybliżeniem zastąpić przez następujący:

$$M_L = \alpha' \sqrt{l} + \beta' l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 53)$$

Instrukcya dla zdjęć poligonalnych z roku 1887 podaje wielkość dozwolonego błędu dla pomiaru długości przy zdjęciach poligonalnych obliczoną według wzoru

$$\Delta l = 0{\cdot}0006\, l + 0{\cdot}02 \sqrt{l}$$

gdzie l jest długością pomierzonej prostej.

2) Przykład. Błąd przy pomiarze geometrycznym spadu.

Ogólnie biorąc, spad między dwoma punktami równa się, jak wiadomo, sumie spadów pojedyńczych. Mamy zatem wzór

$$H = [l_p - l_w]$$

gdzie

l_p jest łatą wprzód,

l_w „ „ wstecz.

Ażeby módz stosować wzór, potrzeba znać tylko wielkość średnich błędów dla pojedyńczych l_p i l_w, jako zmiennych niezależnych, t. j. rozważyć należy, od czego zależy wielkość takiego błędu, popełnionego przy pojedynczych odczytach na łacie.

Błąd ten, jak z nauki o poziomowaniu wiadomo, składa się:

1. z błędu w ustawieniu przyrządu,
2. z błędu odczytu na łacie.

Pierwszy jest dany przez iloczyn odległości d łaty od przyrządu i pochylenia celowej α względem poziomu. Drugi zaś w pierwszem przybliżeniu zależy tylko od odległości d. Jeżeli mierzymy, jak zwykle, jednakowymi odstępami ze środka, to wpływ pochylenia równa się zeru, więc błąd w odczycie jest wtedy zależny tylko od odległości d.

Mamy zatem

$$m_l = \mu d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 54)$$

gdzie μ jest błędem jednostkowym, i dalej

$$m_S = \sqrt{m_l^2 + m_l^2 + \ldots\ldots (n \text{ razy})}$$

jeżeli

$$n = \frac{L}{d}$$

jest liczbą stanowisk przyrządu podczas niwelacyi. Z tego wynika, iż

$$m_S = m_l \sqrt{n}.$$

Uwzględniając zaś równanie 54), mamy

$$m_s = \mu d \sqrt{\frac{L}{d}}$$

lub ostatecznie

$$m_s = \mu \sqrt{L d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55)$$

Niwelując tym samym przyrządem w ten sam sposób, t. z. w odstępach d, inną długość L', mamy

$$m_{s'} = \mu \sqrt{L' d}$$

więc

$$\frac{m_s}{m_{s'}} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

Znaczy to, że przy niwelowaniu tym samym przyrządem w ten sam sposób, t. j. ze środka i w równych odstępach, średnie błędy są proporcyonalne do pierwiastków kwadratowych niwelowanych długości.

3) Przykład. Średni błąd pomiarów kątowych.

A. Metoda reiteracyi. Błąd każdego kierunku składa się:

1. z błędu w celowaniu . . . . . . α
2. „ „ „ odczytywaniu limbusu . . β

Mamy więc dla jednego kierunku

$$m_k^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

i tak samo dla drugiego, zatem średni błąd jednego pomiaru

$$m = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)},$$

lub dla n spostrzeżeń

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{n}(\alpha^2 + \beta^2)}$$

(średni błąd reiteracyi).

B. Metoda repetycyi. Jeżeli n przedstawia liczbę repetycyi, to mamy razem

$2n$ celowań,

2 odczyty na limbusie,

więc

$$m = \sqrt{2(n\alpha^2 + \beta^2)}$$

Otatni odczyt daje nam kąt n razy większy, a nie sumę n równych kątów, mamy zatem

$$M' = \frac{m}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

lub

$$M' = \sqrt{\frac{2}{n}\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

i z tego

$$M > M'.$$

To znaczy, iż metodą repetycyjną w ogólności dokładniej można otrzymać pojedyńczy kąt, niż metodą reiteracyjną i jeżeli chodzi o pomiar tylko jednego kąta, to wskazanem jest stosowanie metody repetycyjnej. Jeżeli wszakże z jednego stanowiska trzeba pomierzyć więcej kątów, to, ze względu na wyrównanie ogólne, należy użyć metody reiteracyi.

Jeżeli kąty, które mają być pomierzone, są częściami pewnej konfiguracyi, to ich średni błąd jest także zależny od długości ramion. (Patrz §. 21 „O teodolicie").

Przyjmując

$$\alpha = \pm 1'', \qquad \beta = \pm 5''$$

mamy

$$n = 5, \quad M = \pm 3''2, \quad M' = \pm 1''5$$
$$n = 10, \quad M = \pm 2''3, \quad M' = \pm 0''8$$

a zatem jest w przybliżeniu dla

$$n = 5, \quad M = 2\,M'$$
$$n = 10, \quad M = 3\,M'$$

w ostatnim wypadku otrzymujemy za pomocą 10-razowej repetycyi teoretycznie dokładność, która odpowiada $3^2 \times 10 = 90$-razowej reiteracyi.

4. Przykład. W trójkącie ABC pomierzono bok

$$BC = a = 235 \cdot 19\, m,$$

oraz kąty

$$\alpha = 63^0\, 30'\, 30''$$
$$\beta = 47^0\, 16'\, 30''$$
$$\gamma = 69^0\, 13'\ \ 0''$$

Błąd średni pomierzonego boku niech będzie

$$m_a = \pm 0{\cdot}004 \sqrt{a} = \pm 0{\cdot}061\, m$$

i błąd średni kątów

$$m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = \pm 20''.$$

lub w mierze łukowej

$$m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = \pm \frac{20''}{206265} = \pm 0{\cdot}000097,$$

obliczyć średnie błędy boków b, c. Z danych a, α, β, γ otrzymuje się:

$$b = a \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 193{\cdot}05\, m$$

$$c = a \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 245{\cdot}68\, m.$$

Średni błąd boku b jest wtedy

$$m_b = \pm \sqrt{\frac{\partial}{\partial a}\left(a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 m_a{}^2 + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 m_\alpha{}^2 + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 m_\gamma{}^2} \quad . \quad 61)$$

a ponieważ

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) = -a\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = -b\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) = a\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = b\operatorname{cotg}\beta$$

więc

$$m_b = \pm b\sqrt{\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha\, m_\alpha{}^2 + \operatorname{ctg}^2\beta\, m_\beta{}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62)$$

Podstawiając w tym wzorze odpowiednie liczby, otrzymuje się

$$m_b = \pm 0{,}054\, m$$

i podobnie

$$m_c = \pm 0{,}066\, m.$$

Przypuśćmy teraz, iż pomierzono tylko dwa kąty α i γ z jednakową dokładnością, to mamy

$$\beta = 180 - \alpha - \gamma$$

i

$$m_\beta = \sqrt{m_\alpha^2 + m_\gamma^2}.$$

Ponieważ dokładność kątów α i γ była jednakową, to

$$m_\alpha = m_\gamma$$

zatem

$$m_\beta = m_\alpha \sqrt{2} \quad \text{. . . . . 63)}$$

Średni błąd w β jest więc większy, niż błąd kątów obserwowanych α i γ. Wnioskujemy stąd, że w ogóle przez obliczenie z danych kątów nie otrzymuje się kąta trzeciego tak dokładnie, jak przez spostrzeganie. Należy więc, o ile to jest możliwem, obserwować wszystkie kąty.

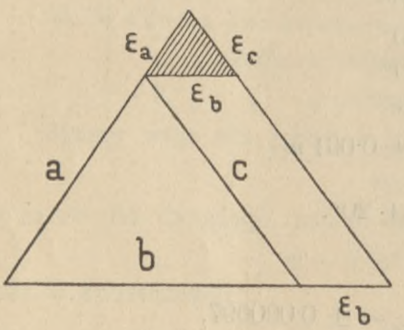

Fig. 5.

Przyjmując dalej, że

$$m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = 0,$$

to wtedy

$$\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c} \quad \text{. . . 64)}$$

i jak z rys. 5. widać

$$\frac{\varepsilon_a}{a} = \frac{\varepsilon_b}{b} = \frac{\varepsilon_c}{c}$$

Przypuszczając więc, że kąty zostały z absolutną dokładnością pomierzone, to błąd popełniony przy pomiarze jednego z boków (n. p. błąd ε_b boku b) rozkłada się na inne boki tak, że trójkąt błędów ($\varepsilon_a\, \varepsilon_b\, \varepsilon_c$) będzie podobny do trójkąta rzeczywistego (abc).

§. 12. Spostrzeżenia bezpośrednie o różnej dokładności.

Niech będą

$$l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ l_5$$

spostrzeżenia o jednakowej dokładności, to ich średnią arytmetyczną

$$l_0 = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}{5}$$

można pisać jak następuje:

$$l_0 = \frac{2\dfrac{l_1 + l_2}{2} + 3\dfrac{l_3 + l_4 + l_5}{3}}{2 + 3}$$

Podstawiając tu

$$l' = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$$l'' = \frac{l_3 + l_4 + l_5}{3}$$

mamy

$$l_0 = \frac{2l' + 3l''}{2+3}.$$

Podobnie otrzymalibyśmy dla ogólnej grupy

$$l_1 \; l_2 \ldots\ldots \; l_m \ldots\ldots \; l_{n+m}$$

$m + n$ spostrzeżeń

$$l_0 = \frac{ml' + nl''}{m+n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 65)$$

podstawiając

$$l' = \frac{[l_m]}{m}, \quad l'' = \frac{[l_{m+n}] - [l_m]}{n}.$$

Mając teraz dwa spostrzeżenia o różnej dokładności

$$l' \quad l''$$

możemy każde z nich uważać za złożone z pewnej liczby idealnych spostrzeżeń jednostkowych o jednakowej dokładności, a to l' z p takich elementarnych spostrzeżeń i l'' z q, wtedy stosując wzór 65 otrzymujemy

$$l_0 = \frac{pl' + ql''}{p+q}.$$

Oznaczmy błąd średni takiego jednostkowego spostrzeżenia przez ε, wtedy błędy średnie wartości l' i l'' będą kolejno

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}} \qquad \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}}$$

mamy zatem równanie

$$\varepsilon' \sqrt{p} = \varepsilon'' \sqrt{q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 66)$$

Liczby p i q zwiemy względnemi wagami spostrzeżeń l' i l''. Z równania 66) widać, iż

$$p : q = \frac{1}{\varepsilon'^2} : \frac{1}{\varepsilon''^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 67)$$

Słowami: Kwadraty błędów średnich znajdują się w odwrotnym stosunku do przynależnych im wag.

Napiszmy teraz równanie 66) jak następuje:

$$\varepsilon' \sqrt{p} = \varepsilon'' \sqrt{q} = \varepsilon \sqrt{1},$$

to widać, iż błąd ε przedstawia średni błąd jednostki ważności. Mamy więc twierdzenie: Jakikolwiek błąd średni, pomnożony przez pierwiastek kwadratowy z przynależnej mu wagi, daje wartość błędu jednostkowego.

Mając więc spostrzeżenia

$$l_1 \quad l_2 \quad l_3 \ldots\ldots \quad l_n$$

dla których istnieją odpowiednie wagi

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \ldots\ldots \quad p_n$$

oraz pojedyncze średnie błędy

$$m_1 \quad m_2 \quad m_3 \ldots\ldots \quad m_n$$

możemy pisać

$$l_0 = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots\ldots + p_n l_n}{p_1 + p_2 \ldots\ldots + p_n} = \frac{[p_n l_n]}{[p_n]} \quad \ldots \quad 68)$$

lub

$$l_0 [p_n] - [p_n l_n] = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 69)$$

Błędy pozorne pojedynczych spostrzeżeń będą wtedy

$$\Delta l_1 = l - l_1 \text{ i jego waga } p_1$$
$$\Delta l_2 = l - l_2 \quad " \quad " \quad p_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta l_n = l - l_n \quad " \quad " \quad p_n$$

Mnożąc każdy błąd przez odpowiednią wagę i dodając, otrzymuje się

$$[p_n \Delta l_n] = l[p_n] - [p_n l_n]$$

mamy zatem, uwzględniając równanie 69)

$$[p_n \Delta l_n] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 70)$$

z tego równania wynika, że

$$[p_n \Delta l_n{}^2] = \text{Minimum} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 71)$$

Średnia arytmetyczna jest, jak wiemy, funkcyą linijną kształtu

$$l_0 = \frac{p_1}{[p_n]} l_1 + \frac{p_2}{[p_n]} l_2 + \ldots\ldots \frac{p_n}{[p_n]} l_n$$

stosując zatem wzór 46), otrzymamy

$$M^2 = \left(\frac{p_1}{[p_n]}\right)^2 m_1{}^2 + \left(\frac{p_2}{[p_n]}\right)^2 m_2{}^2 + \ldots\ldots \left(\frac{p_n}{[p_n]}\right)^2 m_n{}^2 \quad . \quad . \quad 72)$$

jest dalej

$$m_k = \frac{e}{\sqrt{p_k}}$$

podstawiając to w równaniu 72), otrzymuje się

$$M + \pm \frac{e}{\sqrt{[p_n]}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 73)$$

Mamy więc twierdzenie: Błąd średniej arytmetycznej ogólnej, równa się średniemu błędowi jednostkowemu, podzielonemu przez pierwiastek kwadratowy, sumy wag poszczególnych spostrzeżeń.

Wzór

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta l^2]}{n-1}}$$
$$M = \sqrt{\frac{[\Delta l_n{}^2]}{n(n-1)}}$$

jest ważnym dla spostrzeżeń jednakowych wag. Chcąc zaś wzór ten stosować do grupy błędów

$$\Delta l_1 \quad \Delta l_2 \ldots\ldots \quad \Delta l_n$$

których wagi są

$$p_1 \quad p_2 \ldots\ldots \quad p_n$$

należy te błędy sprowadzić do równych wag, to jest do błędów o wadze 1, mnożąc każdy błąd przez pierwiastek kwadratowy jego wagi. W ten sposób otrzymujemy grupę błędów

$$\Delta l_1 \sqrt{p_1} \quad \Delta l_2 \sqrt{p_2} \ldots\ldots \quad \Delta l_n \sqrt{p_n}$$

o jednakowej wadze jednostkowej. Mamy więc

$$m = \sqrt{\frac{[p_n \Delta l_n{}^2]}{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 74)$$

uwzględniając wzór 73), otrzymujemy dalej

$$M = \sqrt{\frac{[p_n \Delta l_n^2]}{[p_n][n-1]}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

z tego wynika:

1. Średni błąd jednostkowy równa się pierwiastkowi kwadratowemu sumy iloczynów kwadratów poszczególnych błędów przypadkowych i odpowiednich wag, dzielonej przez liczbę spostrzeżeń, zmniejszoną o jednostkę.

2. Średni błąd średniej arytmetycznej ogólnej, równa się pierwiastkowi kwadratowemu sumy iloczynów kwadratów błędów poszczególnych i odpowiednich wag, dzielonej przez iloczyn sumy wszystkich wag i liczby spostrzeżeń, zmniejszonej o jednostkę.

Niechaj będzie ogólnie:

$$u = F(x_1\, y_1\, z_1 \ldots\ldots)$$

Ażeby znaleść wagę p_u funkcyi u, jeżeli wagi

$$p_x \quad p_y \quad p_z \ldots\ldots$$

zmiennych są dane, oznaczmy przez ε błąd średni jednostki.

Mamy wtedy

$$m_u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_y}}$$

$$m_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_x}}, \quad m_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_y}} \ldots\ldots$$

Podstawiając te wartości w równaniu 46), otrzymujemy

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \ldots\ldots}$$

i dzieląc przez ε

$$\frac{1}{p_u} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{p_y} + \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad 76)$$

Dla średniej arytmetycznej,

$$l_0 = \frac{p_1}{[p_n]} l_1 + \frac{p_1}{[p_n]} l_2 + \ldots\ldots \frac{p_n}{[p_n]} l_n$$

otrzymujemy, oznaczając przez P wagę średniej arytmetycznej,

$$\frac{1}{P} = \frac{p_1}{[p_n]^2} + \frac{p_2}{[p_n]^2} + \ldots\ldots \frac{p_n}{[p_n]^2} = \frac{[p_n]}{[p_n]^2}$$

Zatem

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{[p_n]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 77)$$

Waga średniej arytmetycznej równa się więc sumie wszystkich poszczególnych wag spostrzeżeń.

1) Przykład. Odległość dwóch punktów poligonalnych wyrównanych A), C) niech będzie

$$L = AC$$

$$A \cdot \underset{l_1}{\text{———}} \overset{B}{\cdot} \underset{l_2}{\text{———}} \cdot C$$

Z A pomierzono do punktu bocznego B długość l_1, a z B do C długość l_2 i otrzymano wynik

$$l_1 + l_2 = L + v.$$

Jak wyrównać ten pomiar? Niechaj będzie:

$\mu\sqrt{l_1}$ średni błąd pomiaru l_1

$\mu\sqrt{l_2}$ „ „ „ l_2

to wagi pomiarów tych długości są dane przez równanie 50). Mamy więc

$$x_1 = l_1 \quad \text{z wagą } p_1 = \frac{1}{l_1}$$

$$x_2 = L - l_2 = l_1 - v \quad „ \quad „ \quad p_2 = \frac{1}{l_2}$$

Zatem

$$x = \frac{x_1 p_1 + (l_1 - v) p_2}{p_1 + p_2} = l_1 - \frac{p_2}{p_1 + p_2}$$

a ponieważ

$$\frac{p_2}{p_1 + p_2} = \frac{l_1}{L}$$

więc

$$x = l_1 - \frac{l_1}{L} v \quad \text{. . . . . 78)}$$

to znaczy, że różnica v dzieli się w stosunku pomierzonej części do całej długości.

Tak samo postępuje się, jeżeli pewna długość została pomierzoną dwa razy tam i napowrót. Cała pomierzona długość jest tu $L = 2\,l$.

Mamy zatem wzór

$$x = l - \frac{v}{2} \quad \text{. . . . . 79)}$$

jeżeli v jest różnicą między oboma pomiarami.

Wróćmy teraz do pierwszego zadania. Tu mamy poprawki:

$$\Delta l_1 = -\frac{l_1}{L} v, \quad \Delta l_2 = -\frac{l_2}{L} v$$

Średni błąd jednostkowy jest tu

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{p_1 \Delta l_1{}^2 + p_2 \Delta l_2{}^2}{2-1}} = \frac{v}{L}\sqrt{l_1 + l_2} = \frac{v}{\sqrt{L}}$$

Jeżeli L jest podane w metrach, to ε jest średnim błędem długości przy pomiarze jednego metra. Średni błąd zaś długości x po wyrównaniu będzie

$$m = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1 + p_2}} = \frac{v}{\sqrt{L}}\sqrt{l_1\, l_2} \quad \text{. . . . . . . 80)}$$

a w wypadku gdy

$$l_1 = l_2$$

$$m = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Jeżeli więc pewna długość została pomierzoną dwa razy, tam i napowrót, i otrzymano wyniki

$$l \text{ i } l',$$

to średni błąd jednego pomiaru równa się

$$m = \pm \frac{l' - l}{\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 81)$$

Wynik ten można otrzymać także wprost. Bo mamy w ostatnim wypadku

$$l_0 = \frac{l' + l}{2}$$

Zatem

$$\Delta l = l_0 - l = - \tfrac{1}{2}(l - l')$$
$$\Delta l' = l_0 - l' = + \tfrac{1}{2}(l - l')$$

więc

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta l^2]}{n-1}} = \pm \frac{l - l'}{\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 82)$$

i dalej

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm \frac{l - l'}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 83)$$

2) Przykład. Mierzono kąt teodolitem repetycyjnym i otrzymano 14 następujących wartości a, jako wyniki p powtarzań. Wagi liczb a przyjmiemy wprost równe odpowiedniej liczbie powtarzań.

Nr.	a	p	ap
1	127° 49′ 45″00	5	225·00
2	31·25	4	125·00
3	42·50	5	212·50
4	45·00	3	135·00
5	37·50	3	112·50
6	38·33	3	115·00
7	27·50	3	82·50
8	43·33	3	130·00
9	40·63	4	162·50
10	36·25	2	72·50
11	42·50	3	127·50
12	39·17	3	117·50
13	45·00	2	90·00
14	40·83	3	122·50
		[p]	[ap]
		46	1830·00

Mamy więc

$$a_0 = \frac{[ap]}{[p]} = \frac{1830{\cdot}00}{46} = 39''78$$

Za pomocą tej wartości obliczono następującą tabliczkę:

Nr.	Δa +	Δa —	$p\Delta a$ +	$p\Delta a$ —	Δa^2	$p\Delta a^2$
1	—	5·22	—	26·10	27·248	136·24
2	8·53	—	34·12	—	72·761	291·04
3	—	2·72	—	13·60	7·398	36·99
4	—	5·22	—	15·66	27·248	81·74
5	2·28	—	6·84	—	5·198	15·59
6	1·45	—	4·35	—	2·103	6·31
7	12·28	—	36·84	—	150·798	452·39
8	—	3·55	—	10·65	12·461	87·81
9	—	0·85	—	3·40	0·723	2·89
10	3·53	—	7·06	—	12·461	24·92
11	—	2·72	—	8·16	7·398	22·19
12	0·61	—	1·83	—	0·372	1·12
13	—	5·22	—	10·44	27·248	54·49
14	—	1·05	—	3·15	1·103	3·31
			$[+p\Delta a]$	$[-p\Delta a]$		$[p\Delta a^2]$
			+91·04	—91·16		1167

mamy zatem

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[p\,\Delta a^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{1167}{13}} = \pm 9''{\cdot}475.$$

Dalej

$$M = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}} = \pm \frac{9''{\cdot}475}{\sqrt{46}} = \pm 1''397.$$

Wartością najprawdopodobniejszą kąta szukanego jest więc

$$127^0\ 49'\ 39''78$$

z błędem średnim

$$\pm 1''397 \text{ a wagą } 46.$$

Średni błąd 13-go spostrzeżenia jest n. p.

$$m_{13} = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_{13}}} = \pm \frac{9''475}{\sqrt{2}} = \pm 6''70$$

3) Przykład. Mierzono pewien kąt 58 razy i otrzymano wartość średnią (po odrzuceniu stopni i minut, które wszędzie się zgadzały)

$$51''34$$

tudzież błąd średni jednego spostrzeżenia

$$m = \pm 9''.$$

Następnie mierzono ten kąt powtórnie i otrzymano z 25-ciu pomiarów wartość

$$42''53$$

z błędem średnim

$$m' = \pm 4''$$

Chodzi o połączenie tych dwóch wyników w jeden i o jego błąd średni.

Obliczmy naprzód błędy średnie obu wyników, to mamy

$$m = \frac{9''}{\sqrt{58}} \quad m' = \frac{4''}{\sqrt{25}}$$

przeto

$$p = \frac{58}{81} \quad p' = \frac{25}{16}$$

z tego otrzymuje się za pomocą wzoru 68) średnia

$$\frac{\frac{58}{81} \times 51''34 + \frac{25}{16} \times 42''53}{\frac{58}{81} + \frac{25}{16}} = 45''30$$

i błąd średni (patrz wzór 72)

$$M = \left[\frac{\frac{58}{81}}{\frac{58}{81} + \frac{25}{15}}\right]^2 9^2 + \left[\frac{\frac{25}{16}}{\frac{58}{81} + \frac{25}{16}}\right]^2 4^2 = 5''32.$$

Łatwiej obliczyć można te wartości w sposób następujący.

Ponieważ ilości p, p' są tylko liczbami stosunkowymi, a jedna z nich może być zawsze dowolnie obraną, to kładąc

$$(p') = 100,$$

obliczymy (p) z równania

$$\frac{(p)}{100} = \frac{58}{81} \cdot \frac{16}{25} = 45{\cdot}83.$$

Mamy zatem

$$\frac{45{\cdot}83 \times 51''34 + 100 \times 42{\cdot}53}{100 + 45{\cdot}83} = 45''.$$

Waga tej średniej jest więc

$$145{\cdot}83,$$

jeżeli wagi poszczególnych tych grup są

$$45''\,83 \text{ i } 100{\cdot}00.$$

4) Przykład. Ile razy trzeba obserwować pewien kąt teodolitem, dla którego średni błąd jednego pomiaru równa się

$$m = \pm 10'',$$

ażeby otrzymać spostrzegany kąt z dokładnością

$$m' = \pm 1''.$$

Średni błąd średniej arytmetycznej jest w tym wypadku

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{10''}{\sqrt{n}}$$

w drugim zaś

$$m' = 1'' \; M' \frac{10}{\sqrt{n}},$$

mamy zatem

$$n = 100.$$

Sto razy należałoby więc pomierzyć ten kąt, ażeby średni błąd średniej arytmetycznej równał się jednej sekundzie.

5) Przykład. Dane są spostrzegane kąty

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

dalej ich wagi (a priori)

$$p,\ p',\ p''$$

oraz warunek dla wyrównanych kątów:

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) = 180^0.$$

Dla kąta α mamy dwa spostrzeżenia, a mianowicie:

$$\alpha_1 = \alpha$$

$$\alpha_2 = 180 - (\beta + \gamma) = \alpha - w$$

przyczem

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 + w.$$

Waga pierwszej ilości jest

$$p_1 = p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A)$$

Ażeby znaleść wagę drugiej ilości rozumujemy tak: mamy

$$\varepsilon_\alpha^2 = \varepsilon_\beta^2 + \varepsilon_\gamma^2$$

oznaczając więc, średni błąd jednostkowy przez ε_0, możemy pisać

$$\left(\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{p_\alpha}}\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{p_\beta}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{p_\gamma}}\right)^2$$

zatem

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}.$$

Równanie to, ważne właściwie tylko dla wag po wyrównaniu, stosujemy i do wag danych, a to dlatego, że dane wagi nie są dowolnie obrane, lecz na podstawie dawniejszych spostrzeżeń.

Mamy więc równanie

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad B)$$

z którego wynika

$$p_2 = \frac{p'\,p''}{p' + p''}$$

Wyrównana wartość kąta α jest tedy

$$(\alpha) = \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2}{p_1 + p_2} = \frac{\alpha_1 p_1 + (\alpha_1 - w)\, p_2}{p_1 + p_2}$$

czyli

$$(\alpha) = \alpha_1 - \frac{p_2}{p_1 + p_2}\, w.$$

Jest atoli

$$\frac{p_2}{p_1 + p_2} = \frac{\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}}$$

więc

$$(\alpha) = \alpha - \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}\, \frac{1}{p}.$$

Podobnie znajdziemy

$$(\beta) = \beta - \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \frac{1}{p'}, \qquad (\gamma) = \gamma - \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \frac{1}{p''}.$$

W wypadku, gdy

$$p = p' = p'',$$

mamy

$$(\alpha) = \alpha - \frac{w}{3}, \ (\beta) = \beta - \frac{w}{3}, \ (\gamma) = \gamma - \frac{w}{3}.$$

Błąd średni spostrzeżenia o jednostce wagi jest

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{p_1\Delta_1{}^2 + p_2\Delta_2{}^2}{2-1}} = \sqrt{p_1\Delta_1{}^2 + p_2\Delta_2{}^2},$$

gdzie

$$(\alpha) - \alpha_1 = \Delta_1$$
$$(\alpha) - \alpha_2 = \Delta_2.$$

Mamy więc

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \frac{1}{p_1}\right)^2 p_1 + \left(\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \frac{1}{p'}\right)^2 p_2$$

uwzględniając tu równania *A)* i *B)* (patrz str. 34), otrzymamy

$$\varepsilon^2 = \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]^2} \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}\right\} = \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]}.$$

Z tego wynika, iż

$$\varepsilon = \frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}},$$

dalej jest

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}} = w \frac{\sqrt{\frac{1}{p}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}},$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p'}} = w \frac{\sqrt{\frac{1}{p'}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}},$$

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p''}} = w \frac{\sqrt{\frac{1}{p''}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}.$$

Te wartości, otrzymane za pomocą z góry przyjętych wag, przedstawiają naturalnie średnie przed wyrównaniem.

Ażeby otrzymać średnią po wyrównaniu, t. j. średnią wyrównanej ilości (α), należy sobie przypomnieć, iż ze względu na równanie:

$$(\alpha) = \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2}{p_1 + p_2}$$

waga wyrównanej ilości (α) jest

$$p_1 + p_2$$

Mamy zatem

$$(\varepsilon_\alpha) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1+p_2}}$$

Uwzględniając więc równania A i B otrzymuje się

$$(\varepsilon_\alpha) = \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \sqrt{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}\right)},$$

i analogicznie

$$(\varepsilon_\beta) = \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \sqrt{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p''}\right)},$$

$$(\varepsilon_\gamma) = \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \sqrt{\frac{1}{p''}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)}.$$

Równania te można jeszcze wygodniej pisać

$$(\varepsilon_\alpha) = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{p}\left\{1 - \frac{\frac{1}{p}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right\}},$$

$$(\varepsilon_\beta) = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{p'}\left\{1 - \frac{\frac{1}{p'}}{\left[\frac{1}{p'}\right]}\right\}},$$

$$(\varepsilon_\gamma) = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{p''}\left\{1 - \frac{\frac{1}{p''}}{\left[\frac{1}{p''}\right]}\right\}}.$$

Wagi zaś ilości wyrównanych (po wyrównaniu) są

$$(\varepsilon_\alpha) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_\alpha}},\ (\varepsilon_\beta) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_\beta}},\ (\varepsilon_\gamma) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_\gamma}}.$$

Mamy zatem

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{1}{p}\left\{1 - \frac{\frac{1}{p}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right\},$$

$$\frac{1}{p_\beta} = \frac{1}{p'}\left\{1 - \frac{\frac{1}{p'}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right\},$$

$$\frac{1}{p_\gamma} = \frac{1}{p''}\left\{1 = \frac{\frac{1}{p''}}{\left[\frac{1}{p''}\right]}\right\}.$$

Dla

$$\alpha = 65^0\,43'\,27''\,44 \qquad p = 10$$
$$\beta = 61\;\;17\;\;50''\,83 \qquad p' = 15$$
$$\gamma = 52\;\;58\;\;37''\,01 \qquad p'' = 12.$$

Otrzymuje się

$$w = -4''\,72$$
$$(\alpha) - \alpha = +1''\,89 \qquad \varepsilon = \pm 9''\,44$$
$$(\beta) - \beta = +1''\,26 \qquad \varepsilon_\alpha = \pm 2''\,98$$
$$(\gamma) - \gamma = +1''\,57 \qquad \varepsilon_\beta = \pm 2''\,44$$
$$\varepsilon_\gamma = \pm 2''\,72.$$

Dalej

$$(\varepsilon_\alpha) = \pm 2''\,31 \qquad p_\alpha = 16{,}7$$
$$(\varepsilon_\beta) = \pm 2''\,22 \qquad p_\beta = 20{,}4$$
$$(\varepsilon_\gamma) = \pm 2''\,09 \qquad p_\gamma = 18{,}1.$$

§. 13. Pomiary podwójne.

Jeżeli pewna długość była więcej razy pomierzoną tam i napowrót, to różnice

$$l_1 - l_1' = d_1$$
$$l_2 - l_1' = d_2$$
$$\cdots\cdots$$

mają charakter błędów prawdziwych. Wartość

$$D = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

nazywa się wtedy średnią różnicą. Wartość (patrz wzór 82)

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 85)$$

będzie w tym wypadku średnim błędem jednego pomiaru, a

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 87)$$

średnim błędem średniej arytmetycznej tych różnic.

Jeżeli dalej są

$$p_1,\, p_2,\, \ldots\ldots,\, p_n$$

wagi różnic

$$d_1,\, d_2,\, \ldots\ldots,\, d_n,$$

to, rozumując w ten sam sposób, jak w uwagach poprzednich, otrzymujemy

$$D = \sqrt{\frac{[pd^2]}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 87)$$

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 88)$$

$$M = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{[pd^2]}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 89)$$

Przyjmując teraz, że pomierzono różne długości tam i napowrót, lub że zniwelowano różne ciągi podobnie, to znaczy tam i napowrót, to wiemy, że wagi pojedynczych pomiarów, więc i ich różnic, są proporcyonalne do pomierzonych długości l. (Patrz wzory 51 i 56). Równania 87), 88), 89) można wtedy pisać

$$D = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d_n^2}{l_n}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 90)$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d_n^2}{l_n}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

$$M = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d_n^2}{l_n}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 92)$$

Jeżeli l_n wyrażamy w kilometrach, to M oznacza n. p. średni błąd kilometrowy jednego pomiaru albo jednej niwelacyi tam i napowrót.

Wzory te znajdą ważne zastosowanie w nauce o poziomowaniu.

§. 14. Równania normalne funkcyi liniowych.

Na wyznaczenie dwóch, trzech ... niewiadomych potrzeba przynajmniej dwóch, trzech ... równań pomiędzy niewiadomemi a ilościami wiadomemi. Jeżeli liczba równań jest mniejszą, zadanie jest nieokreślone, jeżeli liczba równań jest większa niż liczba niewiadomych, to zadanie to tylko przy pewnych założeniach jest rozwiązalne.

Niech będą dane równania liniowe

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - l_2 &= 0 \\ a^3 x + b_3 y + c_3 z - l_3 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z - l_n &= 0 \end{aligned}$$

w liczbie n, przewyższającej liczbę niewiadomych

$$x \quad y \quad z,$$

którą dla uproszczenia przyjmujemy równą 3, nadmieniając, że wszystkie prawidła, dla trzech niewiadomych znalezione, pozostają ważne dla jakiejkolwiek ich liczby.

Jeżeli w tym układzie równań zamiast wiadomych x, y, z, podstawimy dowolne liczby x_0 y_0 z_0, to otrzymamy:

$$\begin{aligned} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 - l_1 &= \Delta_1 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 - l_2 &= \Delta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x_0 + b_n y_0 + c_n z_0 - l_n &= \Delta_0. \end{aligned}$$

Ilości

$$\Delta_1 \quad \Delta_2 \ldots\ldots \Delta_n$$

będą oczywiście tem mniejsze, im bardziej wartości

$$x_0 \quad y_0 \quad z_0$$

zbliżają się do

$$x \quad y \quad z.$$

Stosując zasadę najmniejszych kwadratów, należy w tym wypadku określić x_0 y_0 z_0 tak, ażeby

$$\Omega = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots\ldots \Delta_n^2 = [\Delta_n^2] = \text{Minimum}.$$

To nastąpi wtedy, gdy

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} = 0 \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} = 0 \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z_0} = 0.$$

Ale jak wiemy, jest:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} = \left[\varDelta_n \frac{\partial \varDelta_n}{\partial x_0}\right] = [a_n \varDelta_n]$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y^0} = \left[\varDelta_n \frac{\partial \varDelta_n}{\partial y_0}\right] = [b_n \varDelta_n]$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z_0} = \left[\varDelta_n \frac{\partial \varDelta}{\partial z_0}\right] = [c_n \varDelta_n]$$

mamy zatem równania

$$[a_n (a_n x_0 + b_n y_0 + c_n z_0 - l_n)] = 0$$

$$[b_n (a_n x_0 + b_n y_0 + c_n z_0 - l_n)] = 0$$

$$[c_n (a_n x_0 + b_n y_0 + c_n z_0 - l_n)] = 0$$

lub

$$[aa]\, x_0 + [ab]\, y_0 + [ac]\, z_0 - [al] = 0$$

$$[ab]\, x_0 + [bb]\, y_0 + [bc]\, z_0 - [bl] = 0$$

$$[ac]\, x_0 + [bc]\, y_0 + [cc]\, z_0 - [cl] = 0$$

Równania te nazywamy „normalnemi". Jeżeli równania mają różną wagę, to na podstawie zasady

$$\Omega = p_1 \varDelta_1{}^2 + p_2 \varDelta_2{}^2 + \ldots\ldots p_n \varDelta_n{}^2 = \text{Minimum}$$

otrzymamy

$$[paa]\, x_0 + [pab]\, y_0 + [pac]\, z_0 - [pal] = 0$$

$$[pab]\, x_0 + [pbb]\, y_0 + [pbc]\, z_0 - [pbl] = 0$$

$$[pac]\, x_0 + [pcc]\, y_0 + [pcc]\, z_0 - [pcl] = 0$$

Przykład. Dane są równania:

1. $+\ 7\,\delta x - 10\,\delta y + 27 = 0$
2. $+\ 6\,\delta x + 13\,\delta y + 4 = 0$
3. $-\ 11\,\delta x + 7\,\delta y + 3 = 0$
4. $-\ 6\,\delta x - 4\,\delta y + 4 = 0$
5. $+\ \delta x - 24\,\delta y - 13 = 0.$

Do obliczania równań normalnych ułożymy sobie schemat następujący:

L.	aa	ab		al		bb	bl		ll
		+	—	+	—		+	—	
1	49	—	70	189	—	100	—	270	729
2	36	78	—	24	—	169	52	—	16
3	121	—	77	—	33	49	21	—	9
4	36	24	—	—	24	16	—	16	16
5	1	—	24	—	13	576	312	—	169
		+102	—171	+213	—70		+385	—286	
	[aa]	[ab]		[al]		[bb]	[bl]		[ll]
	+242	—69		+143		+910	+99		+939

Mamy więc

$$242\,\delta x - 69\,\delta y + 143 = 0$$
$$-69\,\delta x + 910\,\delta y + 99 = 0$$

Jeżeli chodzi o większą liczbę spostrzeżeń i ułatwienie rachunkowe, trzeba się starać o odpowiednie kontrole. Do obliczenia iloczynów posługujemy się wtedy tablicą kwadratów. Jest mianowicie

$$2\,ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$$

więc

$$2\,[ab] = [(a + b)^2] - [a^2] - [b^2].$$

Do obliczenia równań normalnych dla trzech nieznanych potrzebne są więc kwadraty następujących liczb

$$\begin{array}{cccc} a_k & (a_k + b_k) & (a_k + c_k) & (a_k + l_k) \\ & b_k & (b_k + c_k) & (b_k + l_k) \\ & & c_k & (c_k + l_k) \\ & & & l_k \end{array}$$

za których dodaniem otrzymamy

$$\begin{array}{cccc} [a^2] & [(a + b)^2] & [(a + c)^2] & [(a + l)^2] \\ & [b^2] & [(b + c)^2] & [(b + l)^2] \\ & & [c^2] & [(c + l)^2] \\ & & & [l^2] \end{array}$$

Dla kontroli tworzymy

$$s_k = a_k + b_k + c_k + l_k$$

i powinno wypaść

$$[s] = [a] + [b] + [c] + [d]$$

Położmy podobnie

$$S_k = a_k b_k + a_k c_k + a_k l_k + b_k c_k + b_k l_k + c_k l_k$$

to będzie

$$[S] = [ab] + [ac] + [al] + [bc] + [bl] + [cl]$$

że zaś

$$s_k^2 = a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + l_k^2 + 2\,a_k b_k + 2\,a_k c_k + 2\,a_k l_k + 2\,b_k c_k + 2\,b_k l_k + 2\,c_k l_k$$

zatem

$$[s^2] = [a^2] + [b^2] + [c^2] + [l^2] + 2\,[S]$$

Cały rachunek ułożymy w następujące tablice:

Tablica I.

Nr.	a	b	c	l	s
1 2 . . n					
	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[l]$	$[s]$
Nr.	a^2	b^2	c^2	l^2	s^2
1 2 . . n					
	$[a^2]$	$[b^2]$	$[c^2]$	$[l^2]$	$[s^2]$

Kontrola

$$[s] = [a] + [b] + [c] + [l]$$

Tablica II.

Nr.	$(a+b)$	$(a+c)$	$(a+l)$	$(b+c)$	$(b+l)$	$(c+l)$
1 2 . . n						

Nr.	$(a+b)^2$	$(a+c)^2$	$(a+l)^2$	$(b+c)^2$	$(b+l)^2$	$(c+l)^2$
1 2 . . n						
	$[(a+b)^2]$	$[(a+c)^2]$	$[(a+l)^2]$	$[(b+c)^2]$	$[(b+l)^2]$	$[(c+l)^2]$

Teraz rachuje się:

$$2\,[ab] = [(a+b)^2] - [a^2] - [b^2] \text{ i t. d.}$$

Dalej

$$2\,[S] = 2\,[ab] + 2\,[ac] + 2\,[al) \\ + 2\,[bc] + 2\,[bl] + 2\,[cl]$$

i wreszcie kontroluje się cały rachunek wzorem:

$$[s] - 2\,[S] = [a^2] + [b^2] + [c^2] + [l^2].$$

§. 15. Rozwiązanie równań normalnych.

Rozwiązanie równań normalnych można wykonać, stosując zwykłe sposoby rugowania; w teoryi najmniejszych kwadratów jednakowoż najkorzystniej jest stosować następujące postępowanie Gaussa.

Ruguje się najpierw niewiadomą x_0, z pierwszego równania normalnego wyznaczając:

$$x_0 = \frac{[al]}{[a^2]} - \frac{[ab]}{[a^2]} y_0 - \frac{[ac]}{[a^2]} z_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 90)$$

Podstawiwszy znalezioną wartość dla x_0 w drugiem i trzeciem równaniu normalnem i kładąc dla krótkości pisania:

$$[b^2] - \frac{[ab]}{[a^2]}[ab] = [bb\,1], \qquad [c^2] - \frac{[ac]}{[a^2]}[ac] = [cc\,1],$$

$$[bc] - \frac{[ab]}{[a^2]}[ac] = [bc\,1], \qquad [cl] - \frac{[ac]}{[a^2]}[al] = [cl\,1],$$

$$[bl] - \frac{[ab]}{[a^2]}[al] = [bl\,1],$$

znajdziemy

$$[bb\,1]\,y_0 + [bc\,1]\,z_0 = [bl\,1],$$
$$[bc\,1]\,y_0 + [cc\,1]\,z_0 = [cl\,1],$$

i z tego

$$y_0 = \frac{[bl\,1]}{[bb\,1]} - \frac{[bc\,1]}{[bb\,1]} z_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

Podstawiając ostatnią wartość y_0 w przedostatnim równaniu i kładąc

$$[cc\,2] = [cc\,1] - \frac{[bc\,1]}{[bb\,1]} [bc\,1],$$

$$[cl\,2] = [cl\,1] - \frac{[bc\,1]}{[bb\,1]} [bl\,1],$$

otrzymamy ostatecznie:

$$z_0 = \frac{[cl\,2]}{[cc\,2]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 92)$$

Zestawmy równania 90), 91), 92) w jeden układ, to otrzymamy tak zwane równania zredukowane.

$$x_0 + \frac{[ab]}{[a^2]} y_0 + \frac{[ac]}{[a^2]} z_0 = \frac{[al]}{[a^2]},$$
$$y_0 + \frac{[bc\,1]}{[bb\,1]} z_0 = \frac{[bl\,1]}{[bb\,1]},$$
$$z_0 = \frac{[cl\,2]}{[cc\,2]}.$$

Równania kontrolujące.

Ażeby obliczenie równań zredukowanych skontrolować, należy obliczyć

$$[as] = [a^2] + [ab] + [ac] + [al],$$
$$[bs] = [ab] + [b^2] + [bc] + [bl].$$

Dalej

$$[bs\,1] = [bs] - \frac{[ab]}{[a^2]} [as] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 93)$$

Mamy atoli

$$[bb\,1] + [bc\,1] + [bl\,1] =$$
$$\{[b^2] + [bc] + [bl]\} - \frac{[ab]}{[a^2]} \{[ab] + [ac] + [al]\},$$

lub

$$[bb\,1] + [bc\,1] + [bl\,1] =$$
$$\{[bs] - [ab]\} - \frac{[ab]}{[a^2]} \{[as] - [a^2]\} = [bs] - \frac{[ab]}{[a^2]} [as].$$

Więc powinno być

$$[bs\,1] = [bb\,1] + [bc\,1] + [bl\,1].$$

Podobnie otrzymujemy

$$[cs\,1] = [bc\,1] + [cc\,1] + [cl\,1]$$

i analogicznie

$$[cs\,2] = [cs\,1] - \frac{[bc\,1]}{[bb\,1]} [bs\,1] = [cc\,2] + [cl\,2].$$

Schemat rozwiązania równań zredukowanych.

$[a^2]$ $\log\,[a^2]$	$[ab]$ $\log\,[ab]$	$[ac]$ $\log\,[ac]$	$[al]$ $\log\,[al]$	$[as]$ $\log\,[as]$
$^*\log \dfrac{[ab]}{[a^2]} =$ $\log \sigma_1$	$\log \sigma_1 + \log\,[ab]$	$\log \sigma_1 + \log\,[ac]$	$\log \sigma_1 + \log\,[al]$	$\log \sigma_1 + \log\,[as]$
$[bb\,1] =$ $[b^2] - \sigma_1\,[ab]$ i t. d.	$[b^2]$ $- \sigma_1\,[ab]$	$[bc]$ $- \sigma_1\,[ac]$	$[bl]$ $- \sigma_1\,[al]$	$[bs]$ $- \sigma_1\,[as]$
	$[bb\,1]$ $\log\,[bb\,1]$	$[bc\,1]$ $\log\,[bc\,1]$	$[bl\,1]$ $\log\,[bl\,1]$	$[bs\,1]$ $\log\,[bs\,1]$
$^*\log \dfrac{[ac]}{a^2} = \log \sigma_2$		$\log \sigma_2 + \log\,[ac]$	$\log \sigma_2 + \log\,[al]$	$\log \sigma_2 + \log\,[as]$
$[cc\,1] = [c^2] - \sigma_2\,[ac]$ i t. d.		$[c^2]$ $- \sigma_2\,[ac]$	$[cl]$ $- \sigma_2\,[al]$	$[cs]$ $- \sigma_2\,[as]$
$^*\log \dfrac{[bc\,1]}{[bb\,1]} = \log \sigma_3$		$\log \sigma_3 + \log\,[bc\,1]$	$\log \sigma_3 + \log\,[bl\,1]$	$\log \sigma_3 + \log\,[bs\,1]$
$[cc\,2] = [cc\,1] - \sigma_3\,[bc\,1]$ i t. d.		$[cc\,1]$ $- \sigma_3\,[bc\,1]$	$[cl\,1]$ $- \sigma_3\,[bl\,1]$	$[cs\,1]$ $- \sigma_3\,[bs\,1]$
		$[cc\,2]$	$[cl\,2]$	$[cs\,2]$

Równania kontrolujące:

$$[bs\,1] = [bb\,1] + [bc\,1] + [bl\,1]$$

$$[cs\,2] = [cc\,2] + [cl\,2].$$

Logarytmy oznaczone * muszą być osobno kontrolowane.

§. 16. Kontrola rachunku zapomocą $[\Delta^2]$.

Podstawiając znalezione ilości

$$x_0 \quad y_0 \quad z_0,$$

w pojedynczych równaniach, otrzymuje się

$$a_k x_0 + b_k y_0 + c_k z_0 - l_k = \Delta_k,$$

równocześnie mamy

$$\Omega = [\Delta_n^2] = \text{Min.},$$

to jest

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} = 0 \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} = 0 \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial z_0} = 0.$$

Jest atoli

$$[\Delta^2] = [\Delta_k\,(a_k x_0 + b_k y_0 + c_k z_0 - l_k)],$$

więc

$$\Omega = [a\Delta]\,x_0 + [b\Delta]\,y_0 + [c\Delta]\,z_0 - [l\Delta],$$

a ponieważ

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} = [a\varDelta] = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_0} = [b\varDelta] = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z_0} = [c\varDelta] = 0,$$

to mamy

$$\Omega \equiv [\varDelta^2] = -[\varDelta l].$$

Stąd otrzymamy dalej

$$[\varDelta^2] = [l_k (l_k - a_k x_0 - b_k y_0 - c_k z_0)].$$

Zatem

$$[\varDelta^2] = [l^2] - [al] x_0 - [bl] y_0 - [cl] z_0.$$

Jeżeli stąd x_0 wyrugujemy przy pomocy równania

$$x_0 + \frac{[ab]}{[a^2]} y_0 + \frac{[ac]}{[a^2]} z_0 = \frac{[al]}{[a^2]},$$

to otrzymamy

$$[\varDelta^2] = [l^2] - \frac{[al]^2}{[a^2]} - [bl1]\, y_0 - [cl1]\, z_0$$

Podstawiając w tem równaniu ilość y_0, obliczoną z

$$y_0 + \frac{[bc\,1]}{[bb1]} z_0 = \frac{[bl\,1]}{[bb1]}$$

otrzymamy

$$[\varDelta^2] = [l^2] - \frac{[al]^2}{[a^2]} - \frac{[bl\,1]^2}{[bb\,1]} - [cl\,2]\, z_0.$$

Położywszy tu jeszcze

$$z_0 = \frac{[cl\,2]}{[cc\,2]},$$

będzie

$$[\varDelta^2] = [l^2] - \frac{[al\,]^2}{[a^2]} - \frac{[bl\,1]^2}{[bb\,1]} - \frac{[cl\,2]^2}{[cc\,2]} \quad \ldots\ldots \quad 94)$$

To równanie umożliwia nam dokładną kontrolę całego rachunku.

Możemy bowiem $[\varDelta^2]$ od razu obliczyć przy pomocy równań

$$\varDelta_k = a_k x_0 + b_k y_0 + c_k z_0 - l_k.$$

Wartość $[\varDelta_k{}^2]$, w ten sposób znaleziona, musi się zgadzać z wartością, obliczoną z równania 94).

§. 17. Waga niewiadomych.

Wartości najprawdobniejsze niewiadomych obliczyliśmy z układu równań linijnych

$$[aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z = [al],$$
$$[ab]\, x + [bb]\, y + [bc]\, z = [bl],$$
$$[ab]\, x + [bc]\, y + [cc]\, z = [cl].$$

Każdą niewiadomą tego układu równań można przedstawić w kształcie funkcyi liniowej wyrazów

$$[al],\ [bl],\ [cl],$$

bo mnożąc równania normalne przez na razie nieoznaczone spółczynniki

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,$$

otrzymuje się

$$x_0 \{ [aa]\lambda_1 + [ab]\lambda_2 + [ac]\lambda_3 \}$$
$$+ y_0 \{ [ab]\lambda_1 + [bb]\lambda_2 + [bc]\lambda_3 \}$$
$$+ z_0 \{ [ac]\lambda_1 + [bc]\lambda_2 + [cc]\lambda_3 \} +$$
$$[al]\lambda_1 + [bl]\lambda_2 + [cl]\lambda_3.$$

Jeżeli teraz na wyznaczenie spółczynników λ obieramy następujące równania

$$\left.\begin{aligned} [aa]\lambda_1 + [ab]\lambda_2 + [ac]\lambda_3 &= 1, \\ [ab]\lambda_1 + [bb]\lambda_2 + [bc]\lambda_3 &= 0, \\ [ac]\lambda_1 + [bc]\lambda_2 + [cc]\lambda_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 95)$$

to

$$x_0 = [ab]\lambda_1 + [bl]\lambda_2 + [cl]\lambda_3 \quad \ldots\ldots \quad 96)$$

Wyrazy

$$[al],\ [bl],\ [cl]$$

są zbudowane w sposób liniowy z ilości l. Takie same rozumowanie można stosować do niewiadomych x_0 i z_0.

Podstawiając tu

$$a_k\lambda_1 + b_k\lambda_2 + c_k\lambda_3 = \alpha_k,$$

możemy więc napisać

$$x_0 = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots\ldots \alpha_n l_n \quad \ldots\ldots \quad 97)$$

Niechaj będzie teraz μ średnim błędem jednostkowym ilości

$$l_1,\ l_2,\ \ldots\ldots,\ l_n,$$

dalej ε_x średnim błędem niewiadomej, to stosując wzór 46) mamy

$$\varepsilon_x{}^2 = \alpha_1{}^2\varepsilon^2 + \alpha_2{}^2\varepsilon^2 + \ldots\ldots + \alpha_n{}^2\varepsilon^2 = [\alpha^2]\,\varepsilon^2$$

Oznaczając wagę niewiadomej x_0 przez p_x i uwzględniając wzory 73) i 77), otrzymamy z równania ostatniego

$$\frac{1}{p_x} = [\alpha^2]. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 98)$$

Ażeby znaleść $[\alpha^2]$ położmy

$$\alpha_k . \alpha_k = \alpha_k a_k \lambda_1 + \alpha_k b_k \lambda_2 + \alpha_k c_k \lambda_3.$$

Zatem

$$[\alpha^2] = [\alpha a]\lambda_1 + [\alpha b]\lambda_2 + [\alpha c]\lambda_3.$$

Jest atoli

$$[\alpha a] = [(a_k\lambda_1 + b_k\lambda_2 + c_k\lambda_3)\, a_k],$$

więc

$$[\alpha a] = [a^2]\lambda_1 + [ab]\lambda_2 + [ac]\lambda_3,$$

podobnie otrzymujemy

$$[\alpha b] = [ab]\lambda_1 + [b^2]\lambda_2 + [bc]\lambda_3,$$
$$[\alpha c] = [ac]\lambda_1 + [bc]\lambda_2 + [c^2]\lambda_3.$$

Uwzględniając więc równania 95), mamy

$$[\alpha a] = 1, \quad [\alpha b] = 0, \quad [\alpha c] = 0.$$

Zatem

$$[\alpha^2] = \lambda_1.$$

Wskutek tego mamy

$$\varepsilon_x = \varepsilon\sqrt{\lambda_1}, \qquad \frac{1}{p_x} = \lambda_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 99)$$

Analogicznie znajdziemy równanie

$$\varepsilon_y = \varepsilon \sqrt{\lambda_2'} \qquad \frac{1}{p_y} = \lambda_2',$$

dla którego λ_2' należy obliczyć z układu:

$$[a^2]\lambda_1' + [ab]\lambda_2' + [ac]\lambda'_3 = 0,$$
$$[ab]\lambda_1' + [b^2]\lambda_2' + [bc]\lambda_3' = 1,$$
$$[ac]\lambda_1' + [bc]\lambda_2' + [c^2]\lambda_3' = 0.$$

Wreszcie tak samo otrzymamy:

$$\varepsilon_z = \varepsilon \sqrt{\lambda_3''}, \qquad \frac{1}{p_z} = \lambda_3'',$$

gdzie λ_3'' wypływa z równań

$$[a^2]\lambda_1'' + [ab]\lambda_2'' + [ac]\lambda_3'' = 0,$$
$$[ab]\lambda_1'' + [b^2]\lambda_2'' + [bc]\lambda_3'' = 0,$$
$$[ac]\lambda_1'' + [bc]\lambda_2'' + [c^2]\lambda_3'' = 1.$$

Uważając ostatnie równania za normalne, otrzymamy równania zredukowane:

$$[a^2]\lambda_1'' + [ab]\lambda_2 + [ac]\lambda_3'' = 0,$$
$$[bb1]\lambda_2'' + [bc1]\lambda_3'' = 0,$$
$$[cc2]\lambda_3'' = 1.$$

Więc

$$\lambda_3'' = \frac{1}{[cc2]} = \frac{1}{p_z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 100)$$

Z tego wynika twierdzenie: Jeżeli podług wyżej podanego (Gaussowskiego) sposobu utworzymy równania zredukowane, to w ostatniem równaniu, które tylko jedną niewiadomą posiada, współczynnik jest zarazem wagą niewiadomej.

§. 18. Obliczenie średnich błędów niewiadomych.

Gdy mamy znalezione wagi, to możemy przystąpić do obliczenia średnich błędów niewiadomych.

Mamy ogólnie

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_x}}, \quad \varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_y}}, \quad \varepsilon_z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_z}}.$$

przyczem μ oznacza średni błąd, odpowiadający jednostce wagi.

Niechaj będą v_k prawdziwe błędy, więc

$$v_k = ax + by + cz - l$$

gdzie

$$x, y, z,$$

są wartościami prawdziwemi. Obliczenie sumy kwadratów błędów v i tem samem obliczenie ilości

$$\varepsilon^2 = \frac{[v^2]}{n}$$

jest niemożliwe, gdyż wartości prawdziwe niewiadomych są nieznane.

Ażeby zaś znaleść wzór przybliżony, rozumujemy tak. Połóżmy

$$\Delta = ax_0 + by_0 + cz_0 - l,$$

to będzie

$$[v^2] = [av]\, x + [bv]\, y + [cv]\, z - [lv],$$
$$[v\Delta] = [av]\, x_0 + [bv]\, y_0 + [cv]\, z_0 - [lv].$$

Zatem

$$[v^2] - [\Delta v] = [av](x - x_0) + [bv](y - y_0) + [cv](z - z_0) \quad . \quad . \quad 101)$$

ale jest

$$v - \Delta = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0),$$

dalej

$$[\Delta(v - \Delta)] = [\Delta v] - [\Delta^2] = (x - x_0)[a\Delta] + (y - y_0)[b\Delta] + (z - z_0)[c\Delta],$$

lub ze względu na to, że

$$[a\Delta] = [b\Delta] = [c\Delta] = 0,$$

więc też

$$[\Delta^2] = [\Delta v],$$

równanie 101) można pisać

$$[v^2] - [\Delta^2] = [av](x - x_0) + [bv](y - y_0) + [cv](z - z_0) \quad . \quad . \quad 102)$$

Mamy dalej

$$[\alpha v] = [\alpha a]\, x + [\alpha b]\, y + [\alpha c]\, z - [\alpha l],$$
$$[\alpha \Delta] = [\alpha a]\, x_0 + [\alpha b]\, y_0 + [\alpha c]\, z_0 - [\alpha l]$$

a ponieważ

$$[\alpha b] = [\alpha c] = 0,$$
$$[\alpha a] = 1,$$

to odejmując drugie równanie od pierwszego, otrzymamy

$$[\alpha v] - [\alpha \Delta] = (x - x_0).$$

Łatwo jednak okazać, że

$$[\alpha \Delta] = 0,$$

mamy bowiem

$$\begin{aligned}[\alpha \Delta] &= [(a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3)\Delta], \\ &= [a\Delta]\lambda_1 + [b\Delta]\lambda_2 + [c\Delta]\lambda_3, \\ &= [a(ax_0 + by_0 + cz_0)]\lambda_1 + \ldots, \\ &= \left\{ [a^2]x_0 + [ab]y_0 + [ac]z_0 \right\}\lambda_1 + \ldots = 0.\end{aligned}$$

Jest przeto

$$[\alpha v] = x - x_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 103)$$

i analogicznie

$$\left.\begin{aligned}[\beta v] &= y - y_0, \\ [\gamma v] &= z - z_0,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 104)$$

gdzie

$$a_k \lambda_1' + b_k \lambda_2' + c_k \lambda_3' = \beta_k,$$
$$a_k \lambda_1'' + b_k \lambda_2'' + c_k \lambda_3'' = \gamma_k.$$

Jeżeli równania 103) i 104) wstawimy w równanie 102), znajdziemy

$$[v^2] - [\Delta^2] = [av][\alpha v] + [bv][\beta v] + [cv][\gamma v].$$

Jest atoli

$$[\alpha v][av] = [a\alpha v^2] + [(a_k \alpha_\lambda + a_\lambda \alpha_k) v_k v_\lambda].$$

Iloczyny

$$(a_k \alpha_\lambda + a_\lambda \alpha_k) v_k v_\lambda$$

mogą być równie prawdopodobnie dodatnie jak ujemne, weźmiemy przeto ich średnią wartość = zero. Kwadratów v również nie znamy, kładziemy więc w miejsce

$$v_1^2,\ v_2^2,\ \ldots\ldots,\ v_n^2,$$

ich wspólną, średnią wartość, t. j. ε^2. Mamy zatem, uwzględniając równania:

$$[a\alpha]=1, \qquad [b\beta]=1, \qquad [c\gamma]=1,$$
$$[v^2]-[\Delta^2]=3\varepsilon^2.$$

Wreszcie z określenia jest

$$[v^2]=n\varepsilon^2,$$

przeto, kładąc $\varepsilon=\mu$, ażeby zaznaczyć, że to wzór tylko przybliżony

$$\mu=\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n-3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 105)$$

W ogólnym wypadku m niewiadomych

$$x, y, z, t, \ldots,$$

byłoby oczywiście

$$\mu=\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n-m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 106)$$

§. 19. Wyrównanie spostrzeżeń zależnych od siebie.

Niech będą

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

ilości, mające się ze spostrzeżeń wyznaczyć, a spełniejące warunki postaci:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 107)$$

w liczbie $m<n$. Spostrzegane wartości tych ilości niech będą

$$x_1', x_2', \ldots, x_n'$$

z wagami

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Z powodu nieuniknionych błędów spostrzeżeń wartości te nie uczynią zadość równaniom warunkowym, otrzymamy natomiast

$$\begin{array}{l} \varphi_1(x_1', x_2', \ldots, x_n')=N_1, \\ \varphi_2(x_1', x_2', \ldots, x_n')=N_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1', x^{2\prime}, \ldots, x_n')=N_m, \end{array}$$

gdzie

$$N_1, N_2, \ldots, N_m,$$

są małemi ilościami.

Zadaniem naszem jest wynalezienie najodpowiedniejszych poprawek

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n,$$

które dodane do ilości

$$x_1', x_2', \ldots, x_n,$$

usuną niezgodności, występujące w równaniach warunkowych.

Z określenia poprawek δ wynika, że powinno być

$$\varphi_k(x_1'+\delta_2, x_2+\delta_2, \ldots, x_n'+\delta_n)=0.$$

Rozwijając podług wzoru Taylora i ograniczając się do pierwszych potęg ilości δ, otrzymamy

$$\varphi_k(x_1', x_2', \ldots, x_n)+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1'}\delta_1+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2'}\delta_2+\ldots\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n'}\delta_n=0.$$

Połóżmy tu dla skrócenia

$$\varphi_k (x_1' x_2' \ldots\ldots x_n) = N_k$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_k'} = a_k, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k'} = b_k, \ldots\ldots$$

otrzymamy układ równań linijnych

$$\left.\begin{aligned} N_1 + a_1 \partial_1 + a_2 \partial_2 + \ldots\ldots a_n \partial_n = 0, \\ N_3 + b_1 \partial_1 + b_2 \partial_2 + \ldots\ldots b_n \partial_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ N_m + k_1 \partial_1 + k_2 \partial_2 + \ldots\ldots k_n \partial_n = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 108)$$

w liczbie m, zupełnie równoważny układowi 107) stanowiący m związków pomiędzy ilościami

$$\partial_1 \; \partial_2 \ldots\ldots \partial_n.$$

Układ ten nie wystarcza jeszcze do wyznaczenia n niewiadomych poprawek ∂, bo $m < n$.

Brakujących $n - m$ związków dostarczy nam zasada najmniejszych kwadratów.

$$\Omega \equiv p_1 \partial_1{}^2 + p_2 \partial_2{}^2 + \ldots\ldots p_n \partial_n{}^2 = \text{Minimum},$$

albo co na jedno wychodzi

$$p_1 \partial_1 . d\partial_1 + p_2 \partial_2 . d\partial_2 + \ldots\ldots p_n \partial_n . d\partial_n = 0 \quad . \; . \; . \quad 109)$$

Różniczki

$$d\partial_1 \; d\partial_2 \ldots\ldots d\partial_n,$$

nie są od siebie niezależne, lecz winne spełniać m warunków, wynikających ze zróżniczkowania równań warunkowych układu 107,

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 \, d\partial_1 + a_2 \, d\partial_2 + \ldots\ldots a_n \, d\partial_n, \\ 0 &= b_1 \, d\partial_1 + b_2 \, d\partial_2 + \ldots\ldots b_n \, d\partial_n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 &= k_1 \, d\partial_1 + k_2 \, d\partial_2 + \ldots\ldots k_n \, d\partial_n. \end{aligned}$$

Pomyślmy, że z tego układu obliczono m różniczek $d\partial$ i podstawiono je w równaniach 109); natenczas pozostałe różniczki w liczbie $(n-m)$ równań będą od siebie zupełnie niezależne. Jeżeli przeto ich spółczynniki położymy równo zeru, otrzymamy $(n-m)$ równań które wraz z układem 108) wystarczą do obliczenia n poprawek ∂.

Zamiast wykonywać rugowanie można użyć tak zwanych korrelatów t. j. mnożników nieokreślonych.

Mnożąc równania układu ostatniego przez nieokreślone na razie ilości

$$\lambda_1 \; \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_m$$

i odejmując otrzymane iloczyny od równania 109) otrzymamy:

$$\begin{aligned} &\{ p_1 \partial_1 - (a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 + \ldots\ldots k_1 \lambda_m) \} \, d\partial_1 + \\ &\{ p_2 \partial_2 - (a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \ldots\ldots k_2 \lambda_m) \} \, d\partial_2 + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &\{ p_n \partial_n - (a_n \lambda_1 + b_n \lambda_2 + \ldots\ldots k_n \lambda_m) \} \, d\partial_n = 0. \end{aligned}$$

Połóżmy spółczynniki wyrazów $d\partial$ równe zeru, to mamy

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{a_1}{p_1}\lambda_2 + \frac{b_1}{p_1}\lambda_2 + \ldots\ldots \frac{k_1}{p_1}\lambda_m, \\
\delta_2 &= \frac{a_2}{p_2}\lambda_2 + \frac{b_2}{p_1}\lambda_2 + \ldots\ldots \frac{k_2}{p_2}\lambda_m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_y &= \frac{a_n}{p_n}\lambda_1 + \frac{b_n}{p_n}\lambda_2 + \ldots\ldots \frac{k_n}{p_n}\lambda_m.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 110)$$

Korrelaty określają się przez podstawienie tych równań w układzie 108). Mamy zatem

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{aa}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]\lambda_2 + \ldots\ldots \left[\frac{ak}{p}\right]\lambda_m + N_1, \\
0 &= \left[\frac{ab}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]\lambda_2 + \ldots\ldots \left[\frac{bk}{p}\right]\lambda_m + N_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= \left[\frac{ak}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]\lambda_2 + \ldots\ldots \left[\frac{kk}{p}\right]\lambda_m + N_m.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 111)$$

Jeżeli obliczymy z tych równań mnożniki

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m,$$

to znajdziemy następnie poprawki

$$\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_n$$

z układu z równań 10). Przykład patrz „Teodolit“ §. 21.

§. 20. Określenie błędu średniego w wypadku spostrzeżeń od siebie zależnych.

Jeżeli oznaczymy przez

$$\varepsilon$$

błąd średni jednostki wagi spostrzeżeń

$$x_1', x_2', \ldots\ldots, x_n'$$

i przez

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$$

ich błędy średnie, natenczas będzie

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_k}},$$

gdzie p_k jest wagą spostrzeżenia x_k'.

Celem wyznaczenia błędu średniego, odpowiadającego jednostce wagi, zważmy najprzód, że w obecnym wypadku mamy $(n—m)$ koniecznie potrzebnych równań, pozostałe są już nadliczbowe i zużytkowanie ich ma jedynie na celu powiększenie dokładności.

Błąd średni jednostki jest tu więc, patrz §. 18).

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n - s}},$$

jeżeli s określa liczbę niewiadomych, a n liczbę spostrzeżeń w ogóle. W naszym wypadku mamy

$$s = n - m$$

niezbędnych ilości, przeto jest

$$n - s = n - (n - m) = m$$

i zatem

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\delta^2]}{m}} \quad \text{. . . . .} \quad 112)$$

Do sprawdzenia wprost obliczonej sumy

$$[p\delta^2]$$

można użyć następującego wzoru:

$$[p\delta] = -[N\lambda] \quad \text{. . . . .} \quad 113)$$

Jest bowiem

$$\delta_1 \sqrt{p_1} = \frac{a_1}{\sqrt{p_1}} \lambda_1 + \frac{b_1}{\sqrt{p_1}} \lambda_2 + \ldots\ldots \frac{k_1}{\sqrt{p_1}} \lambda_m,$$

$$\delta_2 \sqrt{p_2} = \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} \lambda_1 + \frac{b_2}{\sqrt{p_2}} \lambda_2 + \ldots\ldots \frac{k_2}{\sqrt{p_2}} \lambda_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zatem

$$[p\delta^2] = \left[\frac{a^2}{p}\right] \lambda_1{}^2 + \left[\frac{b^2}{p}\right] \lambda_2{}^2 + \ldots\ldots,$$

$$+ 2\left[\frac{ab}{p}\right] \lambda_1 \lambda_2 + \ldots\ldots$$

Piszmy tu

$$[p\delta^2] = \lambda_1 \left\{ \left[\frac{a^2}{p}\right] \lambda_1 + \left[\frac{b^2}{p}\right] \lambda_2 + \ldots\ldots, \right.$$

$$+ \lambda_2 \left\{ \left[\frac{ba}{p}\right] \lambda_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] \lambda_2 + \ldots\ldots, \right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

to mamy ze względu na równania 111)

$$[p\delta^2] = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 = \ldots\ldots = -[\lambda N].$$

§. 21. Przekształcenie funkcyi ogólnych w funkcye liniowe.

Mając ogólną funkcyę

$$F(x, y, z, \ldots\ldots, a, b, c) = 0,$$

gdzie

$$x, y, z$$

są zmiennemi, od siebie niezależnemi, oraz

$$a, b, c$$

ilościami stałemi i podstawiając

$$x = x_0 + \delta x$$
$$y = y_0 + \delta y$$
$$z = z_0 + \delta z$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

otrzymuje się podług wzoru Taylora

$$F(x, y, z, \ldots\ldots, a, b, c) =$$

$$F(x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots, a, b, c) + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \ldots\ldots \quad 114)$$

Jeżeli można się ograniczyć do pierwszych potęg wartości

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \ldots\ldots,$$

to mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\ldots\ldots=-F(x,y,z,\ldots\ldots a,b,c)\quad .\ 115)$$

Specyalnie dla jednej tylko zmiennej otrzymuje się

$$F(x)=F(x_0+\delta x)=F(x_0)+\frac{\partial F}{\partial x_0}\delta x+R,$$

gdzie

$$R=\frac{\delta x^2}{2}F^2(x_0+\Theta\,\delta x),\qquad 0<\Theta<1,$$

jest resztą szeregu. Jeżeli reszta jest tak małą, że jej uwzględniać nie trzeba, to wtedy funkcyę

$$F(x_0+\delta x)=0$$

można zastąpić funkcyą liniową

$$F(x_0)+\frac{\partial F}{\partial x_0}\delta x=F(x_0)+\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0).$$

1. Przykład. Dla

$$F(x)=\log\operatorname{tg}(x)$$

mamy

$$F(x_0+\delta x)=\log\operatorname{tg}(x_0+\delta x_0)=\log\operatorname{tg}x_0+\frac{\delta x.M}{\sin x_0\cos x_0}.$$

bo

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\log\operatorname{tg}x=\frac{M}{\sin x_0\cos x_0},$$

gdzie M jest modułem logarytmów, więc

$$M=0{\cdot}4342945=\frac{\log\text{Bryg.}}{\log\text{nat.}}$$

Chcąc zaś mieć ostatni wyraz w sekundach, należy pisać

$$\log\operatorname{tg}(x_0+\delta x)=\log\operatorname{tg}x_0+\frac{M}{\varrho}\frac{\delta x''}{\sin x_0\cos x_0},$$

gdzie

$$\varrho=206265\ldots\ldots=\frac{1}{\sin 1''}.$$

Połóżmy n. p.

$$x_0=30^0,\qquad \delta x''=10'',$$

to będzie

$$\log\frac{M}{\varrho}=4{\cdot}3233-10$$

$$\log\frac{1}{\sin x_0\cos x_0}=0{\cdot}3635$$

$$\text{Suma}\ .\ .\ 5{\cdot}6868-10.$$

Mamy więc

$$\log\operatorname{tg}(30^0\,0'\,10'')=\log\operatorname{tg}(30^0\,0'\,0'')+0{\cdot}000049.$$

Zgodnie z tablicami logarytmów. Jest bowiem

$$\log\operatorname{tg}30^0\,0'\,10''=9{\cdot}761488$$

$$\log\operatorname{tg}30^0\,0'\ \ 0''=9{\cdot}761439$$

$$\text{Różnica}\ .\ .\ 0{\cdot}000049.$$

2. Przykład. Mając dane spółrzędne

$$x_0 = 2000, \qquad y_0 = 1000,$$

to przy ich pomocy znajdziemy

$$\operatorname{tg} a_0 = \frac{y_0}{x_0} = 0{\cdot}5,$$

czyli

$$a_0 = 26^0\, 33'\, 54''.$$

Zapytajmy teraz, o ile zmieni się a, jeżeli x_0 wzrośnie o δx, a y_0 o δy. Mamy

$$\operatorname{tg}(a_0 + \delta a) = \frac{y_0 + \delta y}{x_0 + \delta x},$$

czyli

$$\operatorname{tg}(26^0\, 33'\, 54'' + \delta a'') = \frac{1000 + \delta y}{2000 + \delta x}.$$

Logarytmując, znajdziemy w tablicach logarytmów

$$\log \operatorname{tg}(26^0\, 35'\, 54'' + \delta a'') = \log \operatorname{tg} 20^0\, 35'\, 54'' + 0{\cdot}000053\, \frac{\delta a''}{10''}$$

$$\log(1000 + \delta y) = \log 1000 + 0{\cdot}000434\, \delta y$$

$$\log(2000 + \delta x) = \log 2000 + 0{\cdot}000217\, \delta x.$$

Mamy zatem równanie

$$53\, \frac{\delta a''}{10''} = 434\, \delta y - 217\, \delta x.$$

Jeżeli n. p.

$$\delta x = 1, \qquad \delta y = 2,$$

to

$$\delta a'' = 10'' \left\{ \frac{868 - 217}{53} \right\} = 113''.$$

Zgodnie z tym rachunkiem znajdujemy wprost

$$\operatorname{tg}(26^0 35' 57'') = \frac{1002}{2001} = \operatorname{tg}(26^0 33' 54'' + 113'').$$

3. Przykład. Z trzech punktów 1, 2, 3, leżących na linii prostej, celowano do punktu 4 i znaleziono (patrz rys. 6)

$$\measuredangle\, \alpha_1 = 41^0\, 19'$$
$$\measuredangle\, \alpha_2 = 62^0\, 56' \qquad \log a = 2{\cdot}95423$$
$$\measuredangle\, \alpha_3 = 117^0\, 38' \qquad \log b = 2{\cdot}65566$$
$$\measuredangle\, \alpha_4 = 36^0\, 23'.$$

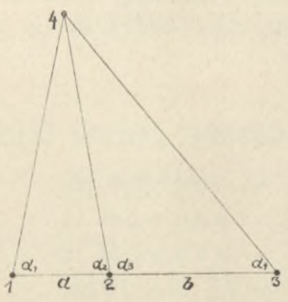

Fig. 6.

Dla długości 24 mamy w tym wypadku następujące wzory

$$\overline{24} = \frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{b \sin \alpha_4}{\sin(\alpha_3 + \alpha_4)}.$$

Zatem powinno zawsze być

$$\frac{a \sin \alpha_1 \sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{b \sin \alpha_4 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = 1.$$

Podstawiając w tem równaniu powyżej podane wartości, znajdziemy

$$\frac{a \sin \alpha_1 \sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{b \sin \alpha_4 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = 1{\cdot}00051.$$

Przyjmując dalej, że a i b są dokładne, to muszą być kąty o ilości

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4$$

poprawione, ażeby otrzymać ściśle:

$$\frac{a \sin(\alpha_1 + \delta_1) \sin(\alpha_3 + \alpha_4 + \delta_3 + \delta_4)}{b \sin(\alpha_4 + \delta_4) \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1 + \delta_2)} = 1.$$

Równanie ostatnie możemy zastąpić równaniem liniowem.

Logarytmując, otrzymuje się:

$$\log a + \log \sin(\alpha_1 + \delta_1) + \log \sin(\alpha_3 + \alpha_4 + \delta_3 + \delta_4) =$$
$$\log b + \log \sin(\alpha_4 + \delta_4) + \log \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1 + \delta_2).$$

Przyjmując minutę jako jednostkę kątową, mamy n. p.

$$\log \sin 41^0\, 20' = 9{\cdot}81983$$
$$\log \sin \alpha_1 = \log \sin 41^0\, 19' = 9{\cdot}81969$$
$$D = 0{\cdot}00014.$$

Przeto

$$\log \sin(41^0\, 19' + \delta_1') = \log \sin 41^0\, 19' + D.\delta_1'$$
$$= 9{\cdot}81969 + 0{\cdot}00014\, \delta_1' \text{ i t. d.}$$

Podstawiając to w równaniu logarytmicznem, otrzymuje się ostatecznie

$$\mathbf{17\, \delta_1 + 3\, \delta_2 - 26\, \delta_3 + 43\, \delta_4 + 22 = 0.}$$

B. Równania warunkowe.

§. 22. Równania warunkowe w konfiguracyach, w których tylko jedna długość pomierzoną została (konfiguracye tryangulacyjne).

Pierwsza zasada równań warunkowych: Liczba równań warunkowych równa się różnicy między liczbą elementów, do konstrukcyi danej konfiguracyi koniecznie potrzebną, a liczbą elementów danych. Np. wiemy, że czworokąt jest przez pięć pomierzonych wielkości określony. Jeżeli wszystkie boki i kąty pomierzymy, to mamy:

$$8 - 5 = 3$$

ponad konieczną potrzebę pomierzonych wielkości. W tym wypadku więc istnieją trzy równania warunkowe.

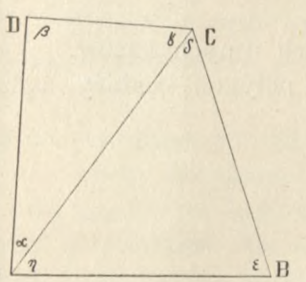

Fig. 7.

Druga zasada równań warunkowych: Równania warunkowe, o ile one tworzą podstawę wyrównania, powinny być od siebie niezależne.

W czworokącie (Fig. 7) mamy następujące równania warunkowe:

I . . . $\alpha+\beta+\gamma=180^0$,

II . . . $\eta+\varepsilon+\delta=180^0$,

III . . . $\alpha+\beta+\gamma+\eta+\varepsilon+\delta=360^0$.

To ostatnie jednak można otrzymać przez dodanie równań I i II. Będziemy więc mieli tylko trzy pary równań od siebie niezależnych, a to:

I II, albo I III, albo II III.

Podział równań warunkowych.

Ze względu na właściwości równań warunkowych, dzielimy je na:

1. Równania kątowe (równania podobieństwa),
2. Równania boków (równania tożsamości).

Równania kątowe są dwojakiego rodzaju:

a) Suma kątów na około jednego punktu równa się 360^0;

b) Suma kątów wewnętrznych w n-kącie wypukłym równa się $(n-2).180^0$.

Jeżeli mamy wielokąt sferyczny, to do sumy kątów wieloboku przybywa jeszcze nadmiar sferyczny.

Ażeby objaśnić istotę równań boków, weźmy pod uwagę specyalną konfiguracyę (Fig. 8). Mamy tu następujący układ równań warunkowych kątowych, od siebie niezależnych:

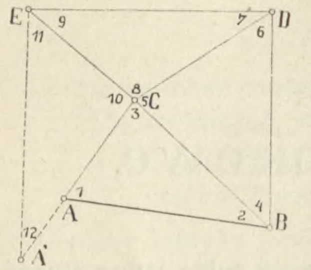

Fig. 8.

I. . . . $1 + 2 + 3 = 180^0$,
II. . . . $4 + 5 + 6 = 180^0$,
III. . . . $7 + 8 + 9 = 180^0$,
IV. . . . $10 + 11 + 12 = 180$,
V. . . . $3 + 5 + 8 + 10 = 360^0$.

Ażeby otrzymać ogólną liczbę równań warunkowych, rozumujemy tak:

Do określenia położenia trzech punktów ABC, trzeba znać trzy pierwiastki (n. p. jeden bok i dwa kąty). Każdy następny punkt D, E jest przez dwa nowe pierwiastki (np. kąty) określony. Liczba wszystkich, koniecznie potrzebnych elementów wynosi więc:

$$3 + (5 - 3) \times 2 = 7.$$

Przyjmując, że przy powyższej konfiguracyi pomierzono 13 wielkości (12 kątów i bok AB), będziemy mieli

$$13 - 7 = 6$$

od siebie niezależnych równań warunkowych. Pięć z tych równań otrzymaliśmy powyżej.

Zmieniając nieco kąty 11 i 12, otrzymalibyśmy zamiast konfiguracyi $ABCDE$ nową konfiguracyę $ABCDEAA'$, w której te same warunki byłyby wypełnione.

To samo miałoby miejsce przy zmianie dwóch innych kątów.

Uważając więc konfiguracyę $ABDEAA'$ za polygon, należy żądać, ażeby był zamkniętym, wtedy jest

$$AA' = 0,$$

albo, co to samo

$$CA' - CA = 0.$$

Mamy tu:

$$AC = AB . \frac{\sin 2}{\sin 3},$$

dalej:

$$AC' = CE . \frac{\sin 11}{\sin 12} = CD . \frac{\sin 7}{\sin 9} . \frac{\sin 11}{\sin 12}$$

$$= CB . \frac{\sin 4}{\sin 6} . \frac{\sin 7}{\sin 9} . \frac{\sin 11}{\sin 12}$$

$$= AB . \frac{\sin 1}{\sin 3} . \frac{\sin 4}{\sin 6} . \frac{\sin 7}{\sin 9} . \frac{\sin 11}{\sin 12}$$

zatem

$$AB . \frac{\sin 2}{\sin 3} = AB . \frac{\sin 1}{\sin 3} . \frac{\sin 4}{\sin 6} . \frac{\sin 7}{\sin 9} . \frac{\sin 11}{\sin 12},$$

a stąd równanie warunkowe

$$1 = \frac{\sin 1 \quad \sin 4 \quad \sin 7 \quad \sin 11}{\sin 2 \quad \sin 6 \quad \sin 9 \quad \sin 12}.$$

Punkt A nazywa się punktem centralnym równania warunkowego, bok CA — bokiem redukcyjnym.

§. 23. Liczba równań warunkowych w sieci tryangulacyjnej.

Przyjmijmy, że w sieci tryangulacyjnej, posiadającej p wierzchołków, zmierzono tylko jedną podstawę, oraz wszystkie kąty. Ażeby znaleść liczbę do określenia siatki (bez względu na oryentacyę) koniecznie potrzebnych elementów, rozumujemy tak:

Podstawa sama określa dwa punkty, do określenia zaś każdego następnego wierzchołka trzeba nam dwóch kątów. Mamy zatem:

$$2(p-2) = 2p-4$$

koniecznie potrzebnych kątów. Gdy więc pomierzono w ogóle W kątów, to:

$$W-2p+4$$

wyraża liczbę kątów, pomierzonych ponad istotną potrzebę. Liczba równań warunkowych jest więc:

$$W-2p+4 \quad \dots\dots\dots \quad 117)$$

Te równania warunkowe mogą być, jak wiadomo, albo równaniami kątów, albo równaniami boków.

Aby znaleść liczbę równań kątowych, weźmy pod uwagę, że p wierzchołków połączonych jest ze sobą liniami prostemi, oznaczającemi obustronne celowe. Liczba tych prostych niech będzie P. Ażeby wszystkie punkty połączyć w zamkniętą figurę, potrzeba conajmniej p obustronnych celowych, a więc pozostaje nadmiar:

$$P-p$$

prostych, z których każda jest powodem jednego równania warunkowego.

Ponieważ przy danych p liniach mamy jedno równanie warunkowe (równanie zamknięcia polygonu), to mając P linij, będziemy mieli wogóle:

$$P-p+1 \quad \dots\dots\dots \quad 118)$$

równań warunkowych kątów, bez względu na horyzonty.

Ażeby zaś znaleść liczbę równań boków, należy wziąć pod uwagę, że dwa punkty są koniecznie potrzebne do wyznaczenia jednej prostej. Gdy mamy p punktów, to do oznaczenia każdego z $p-2$ punktów, potrzeba dwóch linij. Z tego wynika, że dla konstrukcyi całej konfiguracyi potrzeba

$$1\,(\text{Basis}) + 2(p-2) = 2p-3$$

prostych, przypuszczając, że całą konfiguracyę tylko za pomocą prostych określamy. Gdy więc mamy P prostych, tworzących całą konfiguracyę, to jest:

$$P-2p+3 \quad \dots\dots\dots \quad 119)$$

linij więcej niż trzeba. Każda z tych linij nadliczbowych, daje nam jedno równanie warunkowe.

§. 24. Figury normalne dla równań boków.

Schemat równania warunkowego.

Gdy A jest punktem centralnym (patrz rys. 9), to

$$1 = \frac{\sin z_1 \sin z_2 \dots \sin z_6}{\sin n_1 \sin n_2 \dots \sin n_6} = \frac{[\sin z]}{[\sin n]}.$$

Tego samego wzoru można użyć i w wypadku, gdy boki się przecinają.

Mamy więc regułę: Gdy liczymy od punktu centralnego kąty wzdłuż obwodu poligonu jako pierwszy, drugi i t. d., to iloczyn kątów nieparzystych, podzielony przez iloczyn kątów parzystych, równa się jednostce.

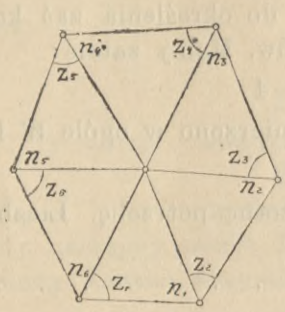

Fig. 9.

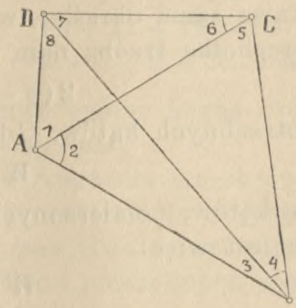

Fig. 10.

Prykład 1. W konfiguracyi rys. 10 dane (jako wyniki spostrzeżeń):

bok: AB,

kąty: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Więc mamy tu:

$$W = 8.$$

Dalej jest ilość punktów:

$$p = 4,$$

a ilość prostych, tworzących całą konfiguracyę:

$$P = 6.$$

Ogólna liczba równań kątowych jest więc:

$$W - 2p + 4 = 8 - 2 \times 4 + 4 = 4.$$

Równań kątów mamy:

$$P - p + 1 = 6 - 4 + 1 = 3,$$

a równań boków

$$P - 2p + 3 = 6 - 8 + 3 = 1.$$

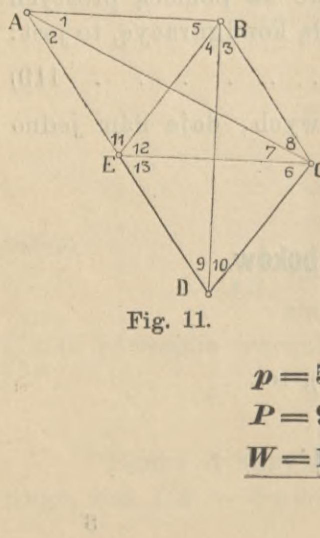

Fig. 11.

Równania te są:

$$1 + 8 + 7 + 6 = 180^0,$$
$$7 + 6 + 5 + 4 = 180^0,$$
$$5 + 4 + 3 + 2 = 180^0,$$

i dalej biorąc punkt A jako centralny:

$$\frac{\sin 1 \sin 3 . \sin 5 . \sin 7}{\sin 2 . \sin 4 . \sin 6 . \sin 8} = 1.$$

Przykład 2. (Patrz rys. 11):

$p = 5$	$W - 2p + 4 = 7$	
$P = 9$	$P - p + 1 = 5$	$\left.\right\} 5 + 2 = 7$
$W = 13$	$P - 2p + 3 = 2$	

$$
\begin{aligned}
&1 + 2 + \ 5 + 11 = 180^0,\\
&4 + 9 + 12 + 13 = 180^0,\\
&3 + 6 + 10 + \ 7 + 8 = 180^0,\\
&6 + 9 + 10 + 13 = 180^0,\\
&2 + 7 + 11 + 12 = 180^0.
\end{aligned}
$$

Centralny punkt E:

$$1 = \frac{\sin 7 \sin (3 + 4) \sin 1 \sin 11}{\sin 12 \sin 8 \sin 5 \sin 2}.$$

Centralny punkt D:

$$1 = \frac{\sin 6 \sin 3 \sin 12 \sin 9}{\sin 10 \sin (7 + 8) \sin 4 \sin 13}.$$

Aby te równania znaleść, należy całą konfiguracye podzielić na dwie następujące:

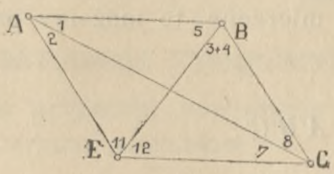

Fig. 12.

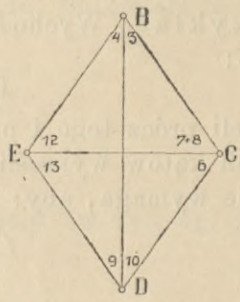

Fig. 13.

Przykład 3. (Patrz rys. 14).

$$
\begin{array}{c|c}
p = 9 & \\
P = 17 & P - p + 1 = 9 \\
W = 27 & P - 2p + 3 = 2.
\end{array}
$$

Do tego należy dodać dwa horyzonty u punktów K i H, razem będzie więc:

$$9 + 2 + 2 = 13 = W - 2p + 4$$

równań warunkowych

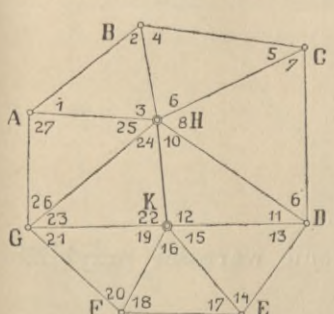

Fig. 14.

1. $3 + \ 6 + \ 8 + 10 + 24 + 25 = 360^0$,
2. $19 + 16 + 15 + 12 + 22 = 360^0$,
3. $1 + \ 2 + \ 3 = 180^0$,
4. $4 + \ 5 + \ 6 = 180^0$,
5. $7 + \ 8 + \ 9 = 180^0$,
6. $10 + 11 + 12 = 180^0$,
7. $13 + 14 + 15 = 180^0$,
8. $16 + 17 + 18 = 180^0$,
9. $19 + 20 + 21 = 180^0$,
10. $22 + 23 + 24 = 180^0$,
11. $25 + 26 + 27 = 180^0$.

Jeżeli weźmiemy H i K jako punkty centralne, albo co równoważne, linię HK jako podstawę, i rozłożymy tę konfiguracyę na dwie: $(ABCDHGK)$ i $(DEFGHK)$, to otrzymamy dwa równania boków:

$$12.\quad \frac{\sin 12 . \sin 6 . \sin 5 . \sin 2 . \sin 27 . \sin 23}{\sin 11 . \sin 7 . \sin 4 . \sin 1 . \sin 26 . \sin 22} = 1.$$

$$13. \quad \frac{\sin 10 . \sin 13 . \sin 17 . \sin 20 . \sin 23}{\sin 11 . \sin 14 . \sin 18 . \sin 21 . \sin 24} = 1,$$

przez co liczba równań warunkowych jest wyczerpaną.

§. 25. Równania warunkowe przy pomiarach kontrolnych i przy wciąganiu w wyrównaną siatkę.

Dotychczas zakładaliśmy, że w konfiguracyach tylko jedna prosta była mierzoną. Jeżeli będzie pomierzonych (oprócz wszystkich kątów), więcej prostych, to powstają nowe równania warunkowe. To samo dotyczy i wciągania punktów w wyrównaną siatkę, którą przyjmujemy za niezmienną.

Przykład. Wychodząc od boku a, możemy ΔABC skonstruować, jeżeli tylko:

$$\text{I.} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Jeżeli prócz tego i prosta b była mierzona, to możemy przy pomocy tych samych kątów wykreślić $\triangle A'B'C'$.

Wyrównanie wymaga, aby:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Jeżeli:

$$A'C' = AC,$$

musi więc być:

$$a . \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = b,$$

albo:

$$\text{II.} \quad a . \sin \beta - b . \sin \alpha = 0,$$

jako żądane równanie warunkowe.

Jeżeli i trzeci bok został pomierzony, to mamy do czynienia z następującymi trójkątami: 1. z $A'''B'''C'''$, powstałym z pomierzonych boków a i b i z wyrównanych kątów α, β, γ, oraz 2. z $\triangle A^{IV}B^{IV}C^{IV}$, powstałym z pomierzonego boku c i z tych samych wyrównanych kątów α, β, γ. Mamy więc nowy warunek:

$$\triangle A'''B'''C''' \cong A^{IV}B^{IV}C^{IV}.$$

Do tego trzeba, ażeby:

$$B'''C''' = B^{IV}C^{IV}.$$

Mamy:

$$B'''C''' = a . \cos \beta + b \cos \alpha,$$

więc nowe równanie warunkowe:

$$\text{III.} \quad C - a \cos \beta - b . \cos \alpha = 0.$$

Równanie I, II, III, należy przez wprowadzenie wartości przybliżonych przekształcić w równania liniowe.

Równania warunkowe przy nawiązaniu się.

Przykład. Jest dany punkt P (patrz rys. 15), który metodą wcinania wprzód został do istniejącej już siatki włączony, przy czem $\triangle ABC$ należy uważać za niezmienny. Pomierzone kąty niech będą:

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta, \ \varepsilon, \ \eta.$$

Należy wyszukać równania warunkowe.

Trójkąt ABC jest zwykle dany przez spółrzędne, przy pomocy których wyrachujemy azymuty, a z nich kąty:

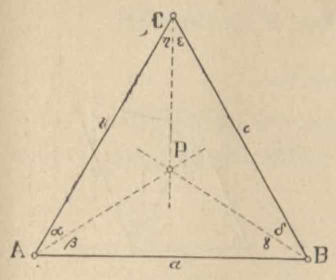

Fig. 15.

$$A,\ B,\ C.$$

Równania warunkowe zatem są:

$$\alpha + \beta - A = 0,$$
$$\gamma + \delta - B = 0,$$
$$\varepsilon + \eta - C = 0.$$

Ponieważ kąty ABC wypełniają już warunek:

$$A + B + C = 180^0,$$

to równanie:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta = 180^0.$$

przedstawiające sumę powyższych równań odpada. Natomiast będziemy mieli jedno równanie boków:

$$1 = \frac{\sin\beta.\sin\delta.\sin\eta}{\sin\gamma.\sin\varepsilon.\sin\alpha}.$$

Przykład nawiązania tryangulacyi.

Bez przymusu nawiązania się mielibyśmy (w rys. fig. 16) następującą ilość równań warunkowych:

$p = 14$	
$P = 28$	$P - p + 1 = 15$
$W = 45$	$P - 2p + 3 = 3$

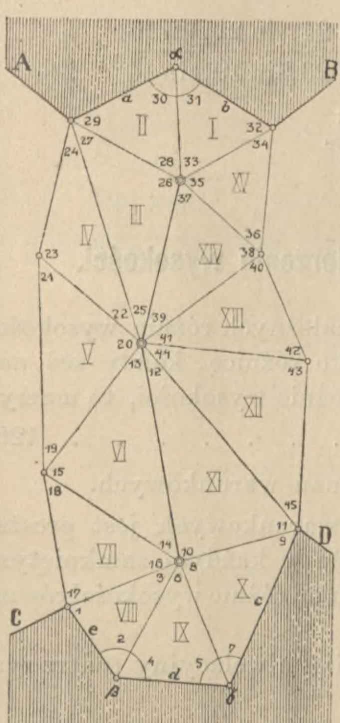

Fig. 16.

a oprócz tego trzy horyzonty, więc razem:

$$15 + 3 + 3 = 21 = W - 2p + 4.$$

Jeżeli tryangulacya ta przylega do istniejących i wyrównanych tryangulacyi AB i CD bokami a, b, e, d, c, to boki a, b, c, d, e, jakoteż i kąty załamania α, β, γ nie mogą być przedmiotem wyrównania, natomiast powodują one nowe równania warunkowe.

Mamy tu przedewszystkiem:

$$\text{I.}\ 30 + 31 - \alpha = 0,$$
$$\text{II.}\ 2 + 4 - \beta = 0,$$
$$\text{III.}\ 5 + 7 - \gamma = 0,$$

Oprócz tego jest:

$$\text{IV.}\ \frac{b}{a} = \frac{\sin 33.\sin 29}{\sin 32.\sin 28}.$$

$$\text{V.}\ \frac{c}{d} = \frac{\sin 3.\sin 5}{\sin 1.\sin 3}.$$

$$\text{VI.}\ \frac{d}{e} = \frac{\sin 6.\sin 9}{\sin 4.\sin 8}.$$

Ilość równań warunkowych powiększyła się w ten sposób o 6, tak, że mamy razem:

$$21 + 6 = 27$$

równań warunkowych, a mianowicie:

6 równań I .... VI. z powodu nawiązania się,
3 horyzonty,
15 równań kątów,
3 równania boków,

razem 27 równań.

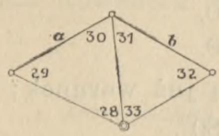

Fig. 17.

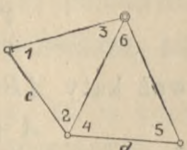

Fig. 18.

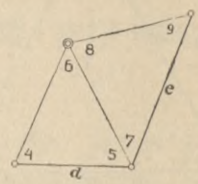

Fig. 19.

Aby znaleść trzy równania boków, rozkładamy figurę na grupy, które się około trzech horyzontów skupiają, mianowicie:

1. I, II, III, XIV, XV;
2. III, IV, V, VI, XI, XII, XIII, XIV;
3. VI, VII, VIII, IX, X, XI.

Otrzymamy więc podług normalnych schematów (strona 57) równania:

$$1 = \frac{\sin 29 . \sin 31 . \sin 34 . \sin 38 . \sin 25}{\sin 30 . \sin 22 . \sin 36 . \sin 39 . \sin 29},$$

$$1 = \frac{\sin 10 . \sin 45 . \sin 42 . \sin 38 . \sin 26 . \sin 24 . \sin 21 . \sin 15}{\sin 11 . \sin 43 . \sin 40 . \sin 37 . \sin 27 . \sin 23 . \sin 19 . \sin 14},$$

$$1 = \frac{\sin 1 . \sin 4 . \sin 7 . \sin . 11 . \sin 13 . \sin 18}{\sin 2 . \sin 5 . \sin 9 . \sin . 12 . \sin 15 . \sin 17}.$$

§. 26. Równania przy niwelacyi i przy mierzeniu wysokości.

Między p punktami jest tylko $(p - 1)$ niezależnych różnic wysokości możliwych. Pierwsze dwa punkty dają jedną tylko różnicę, każdy zaś następny punkt nową różnicę. Jeżeli pomierzono l różnic wysokości, to mamy:

$$l - (p - 1) = l + 1 - p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 120)$$

danych ponad potrzebę, więc taką samą ilość równań warunkowych.

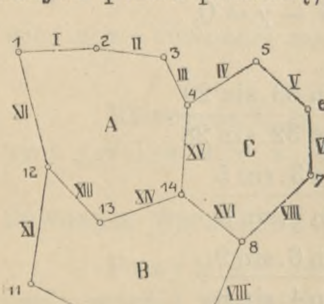

Fig. 20.

Postać tych równań warunkowych jest prosta, a każde z nich wyraża, że w każdym zamkniętym polygonie niwelacyjnym suma różnic wysokości równa się zeru.

Niech będzie dany ciąg niwelacyjny (patrz rys. 20), to mamy:

$$p = 13 \quad (1, 2, 3, \ldots . 14)$$

$$l = 16 \quad (1, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \ldots . \mathrm{XVI})$$

czyli

$$16 + 1 - 14 = 3$$

równania warunkowe, które wyrażają, że suma różnic wysokości w każdym z trzech polygonów A, B i C równa się zeru.

Symbolicznie znakiem $|\overline{}$, to mamy:

$$|\overline{A}=0,\quad |\overline{B}=0,\quad |\overline{C}=0 \quad \ldots\ldots \quad 121)$$

Równania te można pisać jak następuje:

$$|\overline{A}=0,\quad |\overline{A+B}=0,\quad |\overline{A+B+C}=0 \quad \ldots \quad 122)$$

Jeżeli H_K oznacza wyrównaną wysokość punktu K, to otrzymamy z spostrzeganych różnic wysokości:

$$h_{(2,1)} = H_2 - H_1$$
$$h_{(3,2)} = H_3 - H_2$$
i t. d.

Suma tych wszystkich różnic musi być w zamkniętym polygonie równą zeru, według tego będzie n. p.

$$|\overline{A} = h_{(2,1)} + h_{(3,2)} + h_{(4,3)} + h_{(14,4)} + h_{(13,14)} + h_{(12,13)} + h_{(1,12)} = 0.$$

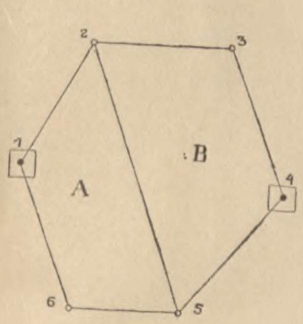

Fig. 21.

Jeżeli w danej siatce są dane pewne punkty stałe, t. j. takie, których wysokość jest dana i niezmienna, to otrzymamy nowe równania warunkowe:

$$h_{(2,1)} + h_{(3,2)} + h_{(4,3)} = H_4 - H_1,$$
$$h_{(5,4)} + h_{(6,5)} + h_{(1,6)} = H_1 - H_4.$$

Przykład. W konfiguracyi (rys. 21), gdzie wysokości punktów 1, 4 są dane, mamy 3 równania:

$$|\overline{A} = h_{(2,1)} + h_{(5,2)} + h_{(6,5)} + h_{(6,1)} = 0,$$
$$|\overline{B} = h_{(5,4)} + h_{(5,2)} + h_{(3,2)} + h_{(4,3)} = 0,$$
$$h_{(2,1)} + h_{(3,1)} + h_{(4,3)} = H_4 - H_1.$$

Obszerniej o wyrównaniu pomiarów spadu i wysokości będzie mowa w odnośnych częściach tego dzieła.

20200