

WACŁAW BALICKI

LINIE WPŁYWOWE

DLA BELEK

TRZYPASOWYCH WSPORNIKOWYCH

(Z DWIEMA TABLICAMI).

ODBITKA Z „CZASOPISMA TECHNICZNEGO“
Nr. 21 i 22 z r. 1903.

LWÓW, 1903.

NAKŁADEM TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO.

Z I. ZWIĄZKOWEJ Drukarni we Lwowie, ul. Lindego 4.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000232001

WACŁAW BALICKI

LINIE WPŁYWOWE

DLA BELEK

TRZYPASOWYCH WSPORNIKOWYCH

(Z DWIEMA TABLICAMI).

ODBITKA Z „CZASOPISMA TECHNICZNEGO“
Nr. 21 i 22 z r. 1903.

LWÓW, 1903.

NAKŁADEM TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO.

Z I. ZWIĄZKOWEJ DRUKARNI W ŁWOWIE, UL. LINDEGO 4.

ΠΙ-25854



Alc. Nr.

D-20757

Belki wspornikowe nie są bynajmniej rzeczą nową. Przed 200 z górą laty wykonano tego rodzaju mosty w Japonii¹⁾ i w Tybecie²⁾, ostatni o podporowej³⁾ 30 m. Obszerniej zajmowali się takimi belkami amerykańscy i angielscy inżynierowie na początku XIX w.⁴⁾ Były to jednak tylko projekty. Pierwszy most wspornikowy nad rzeką Regnitz pod Bambergiem wykonał Gerber w r. 1867⁵⁾. O projekcie L. Brennecke'go w Petersburgu⁶⁾ (1879) jako znacznie późniejszym nie mówimy. W Ameryce pojawiają się te mosty później: daje im początek most nad Kentucky w r. 1875⁷⁾ (C. Shaler Smith). Gerberowi należy się głównie zasługa, że układ ten przyjął się w praktyce i rozpowszechnił, choć myśl belki ciąglej przegubowej — jak to niektórzy wykazują — zawdzięczał on Ruppertowi⁸⁾. Nikt jednak nie może zaprzeczyć, że Gerber użył pierwszy belek trzypasowych jako układu statycznie wyznaczalnego⁹⁾. Epokowym pod tym względem jest most na Neckarze pod Mannheim¹⁰⁾. Od tego czasu, tj. od r. 1888 belki wspornikowe trzypasowe zaczęły się coraz częściej pojawiać i wykonano kilka znaczniejszych mostów tego układu¹¹⁾.

¹⁾ *Centralblatt der Bauverwaltung* (C. d. B.) 1897, str. 114. (Autor chce widzieć pierwszy most wspornikowy w Niemczech około r. 1244, powołując się na „*Zeitschrift für Bauwesen*“ 1895, str. 370: zdaniem naszym twierdzenie to niezasadne).

²⁾ *Engineering* (E.) 1890, str. 217 i 218 (Westhofen). *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure* (V. d. I.) 1891, str. 85 i n. Rozprawa Kletta.

³⁾ Czyby wyraz podporowa nie mógł zastąpić odpowiedniego słowa rozpiętość?

⁴⁾ Oprócz wspomnianej rozprawy Kletta por. artykuł Gaudarda w *Annales des ponts et chaussées* (A. p. ch.) 1891, I, str. 349, a także E. 1892, str. 219.

⁵⁾ Oprócz wymienionej rozprawy Kletta por. *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereines zu Hannover* (H.) 1891, str. 527.

⁶⁾ C. d. B. 1890, str. 121.

⁷⁾ E. 1888, str. 85; A. p. ch. 1891, I, str. 349. Klett we wspomnianej rozprawie podaje rok 1876.

⁸⁾ *Wochenschrift des österr. Ingenieur- u. Architekten-Vereines* 1888, str. 63 i 64. artykuł Köstlina. Nadto A. p. ch. 1891, I, str. 349. i *Handbuch der Ingenieur-Wissenschaften* — Der Brückenbau — II Band, 2 Abtheilung, 1890, str. 396.

⁹⁾ H. 1889, str. 630 i n. (Landsberg).

¹⁰⁾ C. d. B.: 1887, str. 436 i 461; 1898, str. 443.

H.: 1888, str. 146; 1889, str. 89.

V. d. I.: 1890, str. 912; 1891, str. 85.

Mehrtens — *Der deutsche Brückenbau im XIX Jahrhundert* — 1900, str. 22.

¹¹⁾ Prócz mostu pod Mannheim przytaczamy: „Dombrücke“ we Wrocławiu (C. d. B. 1890, str. 328). Most w Bremie nad Wezerą (C. d. B. 1894, str. 118 i 288). Most na Cisie pod Tokajem (*Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines* 1897, str. 593; nadto: Förster: *Neue Brückenbauten in Österreich und Ungarn* 1899, str. 28, tabl. IX i X).

Co do obliczenia, to do najnowszych czasów była w literaturze wielka luka. O belkach trzypasowych, ale w dwu punktach podpartych z przegubem w środku, pisał Müller-Breslau¹⁾, po nim Landsberg²⁾, a wreszcie ogłosił na ten sam temat obszerniejszą rozprawę Fr. Engesser³⁾, w której podaje wzory do obliczania wspomnianej belki i nadmienienia, że można użyć tych wzorów do obliczania takich mostów, jaki się właśnie buduje w Mannheimie.

Od tego czasu nie pisano wcale o sposobie obliczania belek trzypasowych wspornikowych. Dopiero w najnowszych czasach w *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*⁴⁾ jest wskazany w kilku słowach ogólny sposób postępowania przy wyznaczaniu nateżeń w sposób analityczny. Obszerniej omawia tę kwestję Müller-Breslau⁵⁾ i podaje sposób wykreślenia linii wpływowych. W rok później metodę Müllera-Breslawa szerzej rozwija K. Haberhalt⁶⁾. Najważniejszym punktem jego pracy jest wykazanie tego, że linie wpływowe można uzyskać w następujący sposób. Wyznaczamy linie wpływowe dla wspornika *BC* (rys. 1 tabl. I lub tabl. II) jako belki w dwu punktach podpartej, a następnie dla belki *ABC*, obciążonej

siłą $\frac{Px}{l_1}$ w przegubie *C*: algebraiczna suma rzędnych obu linii dla tych wypadków daje linie wpływowe dla belki *ABC*.

Wspomniane prace nie zapełniły jednak zupełnie luki, którąśmy widzieli w literaturze, albowiem nie dały nam jasnego poglądu na linie wpływowe z analitycznym uzasadnieniem ich kształtów. Podjął się tego prof. Dr. M. Thullie: opracował on już przed kilku laty (o wiele wcześniej przed r. 1901, jak to mogłem wynioskować z rękopisu) analityczne wyprowadzenie linii wpływowych z podaniem wykresów (gdym belka zasadnicza równoległa), ale dotąd drukiem tego nie ogłosił. Miałem w swych rękach te cenne notatki w zeszłym roku przy wypracowaniu projektu tego rodzaju. Korzystając wtedy z rękopisu i uwag Autora, starałem się uogólnić te wzory, co niżej przedstawię. Przedtem jednak dla ułatwienia zagadnienia, idąc za tokiem myśli prof. Dr. M. Thulliego, będę się starał w sposób jak najbardziej elementarny wyprowadzić wzory i przedstawić wykres linii wpływowych dla kształtu o belce zasadniczej równoległej (rys. 1 na tabl. I).

Nadmieniam przytem, że chcąc ujednostajnić znakovanie, przyjąłem je wogóle odrębne niż prof. Dr.

¹⁾ *Graphische Statik* 1887, I, str. 421—425.

²⁾ H. 1889, str. 630 i n. (Über Mittengelenkbalken).

³⁾ H. 1890, str. 406 i n. (Über Mittengelenkbalken)

⁴⁾ II. Band, 2. Abtheilung, str. 341 i 342.

⁵⁾ *Graphische Statik* 1901, str. 361—365, 496—498.

⁶⁾ *Allgemeine Bauzeitung* 1902, Heft 1: Die Überbrückung der Salzach zwischen Oberndorf und Laufen. — Także odbitka.

M. Thullie w swym rękopisie. Dla uniknięcia nieporozumień przedstawiam je zaraz na wstępie dla kształtu najogólniejszego, tj. dla belki o wszystkich trzech pasach zakrzywionych (tabl. II rys. 1; por. też tabl. I rys. 1):

- A, B... podpory; zarazem oddziaływania;
- C, D... przeguby, czyli podpory belki wiszącej CD;
- l... podporowa AB;
- l₁... długość belki wystającej BC;
- l₂... podporowa CD;

x... odstęp siły P=1 od lewej podpory A (najw. x=l+l₁);

ξ₁, ξ₃,...; ξ₁', ξ₃',... odstępów węzłów pasu średniego od pionowej podporowej A; B;

ξ₂, ξ₄,...; ξ₂', ξ₄',... odstępów węzłów pasu dolnego od pionowej podporowej A; B;

O₀, O₂, O₄,...; O₀', O₂',... pręty pasu trzeciego, liczone od podpory B na lewo i na prawo; nachylone są one do poziomu pod kątami ω₀, ω₂, ω₄,...; ω₀', ω₂',...

V₂, V₄,...; V₂', V₄',... słupy pionowe przy pasie trzecim: długości ich wynoszą h₂, h₄,...; h₂', h₄',...

V₀... narożnik nad podporą B o długości h₀;

M₂, M₄,...; M₂', M₄',... pręty pasu średniego, nachylone do poziomu pod kątami μ₂, μ₄,...; μ₂', μ₄',...

D₁, D₂, D₃,...; D₁', D₂',... przekątnie, nachylone do pionu pod kątami δ₁, δ₂, δ₃,...; δ₁', δ₂',...

U₂, U₄,...; U₂', U₄',... pręty pasu dolnego, nachylone do poziomu pod kątami v₂, v₄,...; v₂', v₄',...

Siły wewnętrzne w prętach są oznaczone temi samemi literami co pręty (O, V, M, D, U).

d₂, d₄,...; d₂', d₄',... pionowy odstęp węzłów pasu średniego (M) od prętów pasu dolnego (U);

d₃, d₅,...; d₃', d₅',... pionowy odstęp węzłów pasu dolnego od przeciwnych prętów pasu średniego;

d_{3'}, d_{5'},...; d₃', d₅',... rzut pionowy przekątni D₃, D₅,...; D₃', D₅',...

Teraz przystąpić możemy do omówienia linii wpływowych dla belek trzypasowych o zasadniczej belce równoległej. Dla takiej belki (tabl. I) upraszcza się znakowanie: μ₂=μ₄=...=μ₂'=...=v₂=v₄=...=v₂'=...=0; δ₁=δ₂=...=δ₁'=...=δ; d₂=d₄=...=d₂'=...=d₃=d₅=...=d₃'=...=d₃, =d_{3'}, =...=d₅'=...=d.

Przystępując do właściwego tematu, zastanowimy się przedewszystkiem nad oddziaływaniami, gdyż w naszym ciągu na nich opierać się będziemy.

Zauważmy siłę P, znajdującą się w przęśle AB: widocznem jest, że oddziaływanie A będzie takie samo, jak dla belki prostej o podporowej l, czyli

$$A = P \frac{l-x}{l} \dots \dots \dots 1)$$

Gdy zaś siła P działa w przęśle BC, wtedy z równania momentów ze względu na B

$$A \cdot l + P(x-l) = 0 \text{ otrzymamy}$$

$$A = -P \frac{x-l}{l} = P \frac{l-x}{l} \dots \dots \dots 1')$$

Z równań 1) i 1') widzimy, że oddziaływanie A jest jedną prostą aż do pionowej przeguby C. Łatwo ją wykreślić, zważywszy, że dla x=0, A=P; x=l, A=0: odcinamy zatem A₁A₁'=P=1 i kreślimy prostą A₁'B₁ aż do pionowej C, gdzie otrzymujemy według 1') rzędną C₁C₁'=P $\frac{l_1}{l}$.

Musimy jeszcze zadać sobie pytanie, jaki wpływ na oddziaływanie A wywiera ciężar, znajdujący się na belce wiszącej CD. Nietrudno wysnuć wniosek, że ciężar w D niewywoła żadnego natężenia w belce ABC,

gdyż przenosi się całkowicie na belkę wspornikową po prawej; gdy zaś ciężar porusza się po belce CD rozdziela się według prawa prostej na przeguby C i D. Według tego należy połączyć punkt C₁' z D₁, by otrzymać całkowitą linię wpływową oddziaływania A, t. j. A₁'B₁C₁'D₁.

Jak wyznaczyć linię wpływową dla oddziaływania B?

Najprościej wyjść z zasady, że suma oddziaływań A i B musi być równa sile zewnętrznej P. Otrzymamy zatem rzędną w A₁ równą zeru, B₁B₁'=P=1, a łącząc A₁ z B₁', przedłużymy tę prostą do pionowej C, t. j. do C₁'. Punkt C₁' połączymy z D₁, rozumując jak poprzednio. Linią wpływową dla oddziaływania B jest zatem A₁B₁'C₁'D₁.

Chodziłoby jeszcze tylko o wyrażenie tego analitycznie.

Dla siły P w przęśle AB otrzymamy oddziaływanie B jak dla belki prostej, czyli

$$B = P \frac{x}{l} \dots \dots \dots 2)$$

gdy zaś siła P przekroczy podporę B, to równanie momentów względem A jest następujące:

$$-Bl + Px = 0, \text{ skąd } B = P \frac{x}{l} \dots \dots \dots 2')$$

Mając oddziaływania, przystąpić możemy do wyznaczenia linii wpływowych dla wszystkich prętów belki.

Siły wewnętrzne w pasie górnym (O) i słupach (V).

Gdy na belkę działa siła w przęśle AB, to zrobivszy przekrój II, otrzymamy równanie momentów ze względu na B:

$$A \cdot l - P(l-x) + O_0 \cdot h_0 \cos \omega_0 = 0, \text{ skąd}$$

$$O_0 = \frac{P(l-x) - A \cdot l}{h_0} \sec \omega_0 \dots \dots \dots 3)$$

Atoli z równ. 1) wynika, że P(l-x)=A.l, więc O₀=0. Żeby równowaga była możliwą, to nie tylko O₀=0, ale wszystkie siły wewnętrzne pasu górnego O i słupów V muszą być równe zeru: wynika to z warunków równowagi każdego z węzłów górnych.

Inaczej się rzecz przedstawi, gdy siła P przekroczy podporę B, a więc gdy działa w drugim przęśle. Wtedy (przekrój II) A.l + O₀.h₀ cos ω₀ = 0, a stąd

$$O_0 = - \frac{A \cdot l}{h_0} \sec \omega_0, \text{ mając zaś wzgląd na 1'),}$$

$$O_0 = P \frac{x-l}{h_0} \sec \omega_0 \dots \dots \dots 4)$$

Na podstawie tego równania wykreślimy linię wpływową dla O₀, o czym jednak powiemy niżej.

Teraz zastanowimy się nieco bliżej nad siłami wewnętrznymi w pasie trzecim O i w słupach V. Weźmy w tym celu pod uwagę węzeł o₂: jeżeli wykreślimy dla niego trójbok sił (rys. 4 tabl. I), to się okaże, że O₀ cos ω₀ = O₂ cos ω₂; na tej samej podstawie, biorąc pod uwagę węzeł o₂, o₄, o₆,..., o_{2n}, możemy napisać

$$O_0 \cos \omega_0 = O_2 \cos \omega_2 = \dots = O_{2n} \cos \omega_{2n} = H, \dots \dots \dots 5)$$

jeżeli przez H oznaczymy stałą dla danego obciążenia składową poziomą (ciągnięcie poziome).

Z równ. 5) otrzymamy

$$H = O_0 \cos \omega_0 = P \frac{x-l}{h_0} \sec \omega_0 \cos \omega_0 \dots \dots \dots 6)$$

biorąc pod uwagę równ. 4).

Na podstawie równ. 6) wykreślimy linię wpływową dla H:

Dla x=l, H=0

$$x=l+l_1, H = \frac{P}{h_0} \cdot l_1 = (H).$$

Odmierzamy więc B₁E₁=h₀ i robimy rzędną E₁E₁'=P=1; kreśląc prostą B₁E₁' aż do pionowej C,

otrzymujemy tamże $C_1 C_1' = \frac{P}{h_0} l_1 = (H)$ na mocy wykresu. Jeżeli wkońcu połączymy prostą $C_1' z D_1$, otrzymamy $B_1 C_1' D_1$ jako linię wpływową dla H , która ma kształt trójkąta. Największą rzędnę oznaczamy przez (H) .

Mając linię wpływową dla H , bardzo łatwo otrzymamy linie wpływowe dla O_0, O_2, \dots, O_{2n} , a jak niżej okażemy, także dla $O_0', O_2', \dots, O_{2m}'$: trzeba tylko największą rzędnę (w pionowej punktu C) pomnożyć przez sieczną odpowiedniego kąta, czyli $\sec \omega_0, \sec \omega_2, \dots, \sec \omega_{2n}$; $\sec \omega_0', \sec \omega_2', \dots, \sec \omega_{2m}'$. Z równ. 5) otrzymujemy bowiem

$$\left. \begin{aligned} O_0 &= H \sec \omega_0 \\ O_2 &= H \sec \omega_2 \\ &\dots \\ O_{2n} &= H \sec \omega_{2n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 7)$$

wzory, równoznaczne z 4).

Na podstawie tych równań możemy bardzo łatwo wykreślić linie wpływowe dla prętów pasu trzeciego. Przede wszystkim widzimy, że te linie wpływowe będą zupełnie podobne do linii wpływowych dla H , a więc będą miały kształt trójkąta. Największą rzędnę w pionowej C znajdziemy w następujący sposób: Kreślimy $C_1 C_1' = (H)$, z punktu C_1 prostą $C_1 E \perp O_0$, a z C_1' poziomą do przecięcia się z prostą $C_1 E$. Wtedy $C_1 E = C_1 C_1' \sec \omega_0 = (H) \sec \omega_0$. Robiąc wreszcie $C_1 C_1'' = C_1 E$ (przez zatoczenie łuku) i łącząc C_1'' prostymi z B_1 i D_1 otrzymujemy $B_1 C_1'' D_1$ jako linię wpływową dla O_0 .

Przychodząc do omówienia słupów V , możemy napisać

$$V_2 = H (\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega_2) \dots \dots \dots 8)$$

wynika to wprost z rysunku 4 (tabl. I).

Takie same równania możemy napisać dla innych węzłów górnych.

Równ. 8) daje nam prosty sposób wykreślenia linii wpływowej dla V_2 , która ma znowu kształt linii H : W pionowej przegubu C odcinamy $C_1 C_1' = (H)$, z punktu C_1 kreślimy $C_1 E \perp O_0$ aż do przecięcia się z poziomą $C_1' E$ w punkcie E . W ten sposób otrzymaliśmy $C_1' E = C_1 F' = (H) \operatorname{tg} \omega_0$.

Teraz kreślimy z punktu E prostą $EF \perp O_2$ i otrzymujemy $E'F = (H) \operatorname{tg} \omega_2$. Tworząc różnicę tych dwu wyrazów i robiąc $C_1 C_1'' = C_1 F' = (H) \operatorname{tg} \omega_0 - (H) \operatorname{tg} \omega_2$, otrzymujemy punkt C_1'' , który połączony z B_1 i D_1 daje linię wpływową dla V_2 tj. $B_1 C_1'' D_1$.

Zbadajmy jeszcze, jak się zachowują pręty w przedziale BC (oczywiście gdy siła znajduje się w tym przedziale, bo gdy działa na belkę AB , siły wewnętrzne we wszystkich prętach belki BC są równe zeru).

Równanie momentów względem B (przekrój II II) da ogólny wzór

$$O_0' \cdot h_0 \cos \omega_0' + A \cdot l = 0, \text{ skąd } O_0' = -\frac{A \cdot l}{h_0} \sec \omega_0';$$

ale według 1') jest $A = -P \frac{x-l}{l}$, więc

$$O_0' = P \frac{x-l}{h_0} \sec \omega_0' \dots \dots \dots 4')$$

Otrzymujemy zatem takie same wzory, jak 4), 7), 8), a więc i linie wpływowe wyznaczmy tak samo.

Siły wewnętrzne w słupie V_0 . Słup ten, odrębny od innych, narażonym jest na ciśnienie, gdy siła przekroczy podporę B (gdy siła w przęśle AB , natężenie w słupie V_0 równem jest zeru). Z rysunku 3 (tabl. I) widzimy, że $-V_0 = H (\operatorname{tg} \omega_0 + \operatorname{tg} \omega_0')$, czyli $V_0 = -H (\operatorname{tg} \omega_0 + \operatorname{tg} \omega_0') \dots \dots \dots 9)$

Kształt linii wpływowej będzie zatem znowu podobny do H . Największą rzędnę w pionowej punktu C otrzymamy, jeżeli odetniemy $C_1 C_1' = (H)$, a z punktu C_1 wykreślimy $C_1 E \perp O_0$ aż do przecięcia się z poziomą

przez C_1' w E . Wtedy $C_1' E = C_1 E' = (H) \operatorname{tg} \omega_0$. Teraz z punktu E wykreślamy $EF \perp O_0'$ do przecięcia się z poziomą $B_1 D_1$ w F : otrzymujemy przez to $E'F = (H) \operatorname{tg} \omega_0'$. Jeżeli wkońcu zrobimy $C_1 C_1'' = C_1 F = (H) \operatorname{tg} \omega_0 + (H) \operatorname{tg} \omega_0'$ i połączymy punkt C_1'' z B_1 i D_1 , to linią wpływową dla V_0 jest $B_1 C_1'' D_1$.

Siły wewnętrzne w krzyżulcach.

Weźmy pod uwagę D_1 .

Ponieważ zasadnicza belka jest równoległa, więc gdy siła działa w przęśle AB , siła wewnętrzna D_1 będzie proporcjonalna do siły poprzecznej Q , bo siły wewnętrzne w pasie trzecim są $=0$, czyli

$$D_1 = Q \sec \delta \dots \dots \dots 10)$$

Gdy zaś siła przekroczy podporę B , to z warunku równowagi dla przekroju II wynika ogólny wzór

$$D_1 \cos \delta - O_0 \sin \omega_0 - A = 0, \text{ skąd } D_1 = (A + O_0 \sin \omega_0) \sec \delta, \text{ a podstawiając za } A \text{ i } O_0 \text{ wartości z 1') i 4), otrzymujemy}$$

$$D_1 = P (x-l) \left(\frac{\operatorname{tg} \omega_0}{h_0} - \frac{1}{l} \right) \sec \delta \dots \dots \dots 11)$$

Dla wykreślenia linii wpływowej można dwójako postąpić. Najczęściej autorowie wyznaczają — jeżeli weźmiemy pod uwagę D_1 — linię wpływową nie dla D_1 , lecz dla $(D_1) = \frac{D_1}{\sec \delta} = D_1 \cos \delta \dots \dots \dots 12)$

wskutek czego zamiast równ. 10) i 11) otrzymamy

$$(D_1) = Q \dots 10') \text{ i } (D_1) = P (x-l) \left(\frac{\operatorname{tg} \omega_0}{h_0} - \frac{1}{l} \right) \dots 11')$$

Postępowanie to jest zupełnie słuszne, gdy chodzi o teoretyczne badanie, n. p. o wyznaczenie najniekorzystniejszego obciążenia, albowiem upraszcza nam wykres. Ale jeżeli chcemy na podstawie linii wpływowych wyznaczyć siły wewnętrzne w danych prętach belki, to postępując w sposób powyżej podany, musimy pamiętać, że według 12) mamy pomnożyć wyniki przez $\sec \delta$. Podobnie dla O_0 moglibyśmy wykreślić linię wpływową dla H , a następnie wyniki pomnożyć przez $\sec \omega$ (równ. 7) itd. Zapomnienie, które się łatwo może zdarzyć, spowoduje grubo błąd. Dlatego wygodniej będzie dla praktyki przedstawić linie wpływowe w ten sposób, by rzędne przedstawiały wprost siłę wewnętrzną w danym przecię, wywołaną ciężarem $P=1t$, znajdującym się gdziekolwiek na belce. My też w ten drugi sposób oznaczamy konsekwentnie linie wpływowe.

Wracamy do linii wpływowej dla krzyżulca D_1 . W pierwszym przęśle według równ. 10) kształt jej jest taki, jak dla belki zwykłej. Należy więc, opierając się na dopiero co zrobionej uwadze, w pionowych podporowych A i B zamiast $P=1$ odciać $P \sec \delta = 1 \cdot \sec \delta$ nad i pod osią $A_1 B_1$, co się skutecznie w następujący sposób: Robimy $B_1 B_1' = P=1$, kreślimy prostą $B_1 E // D_1$ aż do przecięcia z poziomą $B_1' w E$; jeżeli teraz promieniem $B_1 E$ zatoczmy łuk aż do pionowej B , to otrzymamy $B_1 B_1'' = B_1 E = P \sec \delta$. Łącząc A_1 z B_1'' , otrzymujemy linię wpływową dla D_1 w pierwszym przęśle. Nie potrzebujemy nadmienić, że dla tego krzyżulca nie ma punktu obojętnego, więc powierzchnia wpływowa jest cała ujemna ($A_1 B_1 B_1''$).

Nie o wiele trudniej przedstawi się wykres linii wpływowej D_1 dla drugiego przęśla. Dla odciętej $x-l=h_0$ z równ. 11) otrzymamy rzędną

$$D_1 = P \sec \delta \cdot \operatorname{tg} \omega_0 - \frac{P \sec \delta}{l} \cdot h_0 \dots \dots \dots 11'')$$

Odcinamy zatem $B_1 E = h_0$, $EE_1 = P=1$ i tak samo, jak poprzednio otrzymujemy $EF = EG = P \sec \delta$. Wykreśliwszy $EG_1 // O_0$ aż do pionowej G , t. j. do G_1 , mamy $GG_1 = EG \cdot \operatorname{tg} \omega_0 = P \sec \delta \operatorname{tg} \omega_0 = EE_1''$. Od tej rzędnej mamy odjąć według 11'') wyrażenie $\frac{P \sec \delta}{l} h_0$.

W tym celu kreślimy przez E_1'' poziomą od piono-

wej B . Odetnijmy $B_2K=l$, $KK_1=P=1$ i $KL=KK_1'=P \sec \delta$ (jak poprzednio), to połączysz punkt K_1' z B_2 , łatwo zauważyć, że w pionowej punktu E (dla $x-l=h_0$) rzędna

$$E_1' E_1'' = \frac{KK_1'}{B_2K} \cdot B_2 E_1'' = \frac{KK_1'}{B_2K} \cdot B_1 E = \frac{P \sec \delta}{l} \cdot h_0.$$

Różnica obu rzędnych czyli EE_1' jest rzędna linii wpływowej w punkcie E . Łącząc B_1 z E_1' prostą aż do pionowej punktu C , tj. do C_1' , a następnie C_1' z D_1 , otrzymujemy linię wpływową $B_1 C_1' D_1$.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę następny krzyżulec D_2 , to analogicznie jak poprzednio otrzymamy

$$\begin{aligned} D_2 \cos \delta - O_2 \sin \omega_2 - A &= 0, \\ D_2 &= (A + O_2 \sin \omega_2) \sec \delta = \\ &= \left(-P \frac{x-l}{l} + H \sec \omega_2 \sin \omega_2 \right) \sec \delta = \\ &= \left(-P \frac{x-l}{l} + P \frac{x-l}{h_0} \operatorname{tg} \omega_2 \right) \sec \delta, \text{ czyli wkońcu} \\ D_2 &= P(x-l) \left[\frac{\operatorname{tg} \omega_2}{h_0} - \frac{1}{l} \right] \sec \delta \quad . \quad . \quad 11a) \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że to równanie jest zupełnie analogiczne do równ. 11). Takie same wyniki otrzymamy dla wszystkich innych krzyżulców w przęśle AB .

Zwracamy przytem uwagę na to, że przychodzące w tych wzorach h_0 jest stałe: jest to wysokość słupa V_0 .

Jeżeli teraz przejdziemy do przęsła BC , to dla D_1' otrzymamy (oczywiście siła działa w drugim przęśle: gdy w pierwszym, wtedy $D_1'=0$) z przekroju II II dla $x-l > \zeta_2'$

$$\begin{aligned} D_1' \cos \delta + O_0' \sin \omega_0' - P &= 0, \\ D_1' &= (P - O_0' \sin \omega_0') \sec \delta = (P - H \operatorname{tg} \omega_0') \sec \delta \quad . \quad . \quad 13) \\ &= \left(P - P \frac{x-l}{h_0} \operatorname{tg} \omega_0' \right) \sec \delta = \\ &= P \left(1 - \frac{x-l}{h_0} \operatorname{tg} \omega_0' \right) \sec \delta \quad . \quad . \quad 13') \end{aligned}$$

Z ostatniego równania widzimy, że linia wpływowa składa się z prostej równoległej do osi w odstępnie $P \sec \delta$ i z prostej, przechodzącej przez B_1 , gdyż drugi wyraz dla $x=l$ staje się $=0$. Przy wykresie możemy się opierać na równaniu 13) lub 13'). Według 13') odcinamy $B_1 B_1' = P \sec \delta$: otrzymujemy w ten sposób jedną linię $B_1 C_1' D_1$, ważną od G . Ponieważ siła w B nie sprawi żadnego natężenia w przekątnej D_1' , więc łączymy punkt B_1 z G i otrzymujemy w ten sposób pierwszą linię $B_1 G C_1' D_1$. Od rzędnych tej linii mamy odjąć wyrażenie $P \frac{x-l}{h_0} \operatorname{tg} \omega_0' \sec \delta =$

$= P \sec \delta \operatorname{tg} \omega_0'$ dla $x-l=h_0$. $P \sec \delta$ daje nam wykreślona już linia: odetnijmy $B_1 E = h_0$, to w E rzędna $EE' = P \sec \delta$. Jeżeli teraz zrobimy $EF = EE'$ i z punktu F wykreślimy $FE'' \parallel O_0'$ aż do pionowej E , t. j. do E'' , to $EE'' = EF \operatorname{tg} \omega_0' = P \sec \delta \operatorname{tg} \omega_0'$. Łącząc B_1 z E'' prostą do C_1'' , otrzymujemy drugą linię $B_1 C_1'' D_1$. Różnica obu linii daje powierzchnię wpływową, która się tem różni od wszystkich innych dla D_2', D_3', \dots , że obie linie tworzące ją, przecinają się: wskutek tego są 2 punkty obojętne, tj. B_1 i N .

Na rysunku oznaczono powierzchnię dodatnią i ujemną. Anormalny kształt ten wynikł z powodu nagłej zmiany kątów ω_0' i ω_2' , którąśmy z umysłu zatrzymali. Przy wykonanych mostach tego rodzaju wszędzie widzimy przejścia łagodniejsze, wskutek czego ten wyjątkowy wypadek nie zajdzie.

Dla następnej przekątnej D_2' możemy napisać analogicznie do równ. 13')

$$D_2' = P \left(1 - \frac{x-l}{h_0} \operatorname{tg} \omega_2' \right) \sec \delta, \quad . \quad . \quad 13'')$$

Łatwo zauważyć, że składowe pionowe sił D_2' i O_2' mają znak przeciwny sile P (gdy siła P działa w miejscu $x-l > \zeta_2'$), a więc tak samo, jak przy wy-

prowadzaniu wzoru 13'): a zatem ważnym jest tu wzór 13'').

Przytem wiemy, że gdy jedna przekątna jest ciśniona, to druga będzie ciągniona. Która jest ciśniona albo ciągniona, o tem bardzo łatwo się przekonać według znanej reguły: gdy wypadkowa wszystkich sił na belkę działających przecina się z kierunkiem danej przekątnej na dole, to w przekątnej jest ciągnięcie; gdy na górze, to ciśnienie. Wiedząc to, nie popełnimy nigdy błędu, byśmy powierzchnię wpływową dodatnią odcieśli jako ujemną lub odwrotnie.

Na tabl. I widzimy jeszcze linię wpływową dla D_3' . Stosownie do zrobionej dopiero co uwagi wiemy, że na prawo od L jest powierzchnia wpływowa ujemna, na lewo od G dodatnia. Wiemy też z poprzedniego, że linia $B_1' C_1'$ ważną jest od L , do punktu G zaś dają powierzchnię wpływową rzędne linii $B_1 C_1''$. Punkt G należy połączyć z L , by otrzymać całkowitą linię wpływową $B_1 G L C_1' D_1 C_1'' B_1$.

Pozostały do omówienia pasy belki zasadniczej.

Siły wewnętrzne w pasie średnim (M). Weźmy pod uwagę M_4 . Zastanawiamy się tylko nad wypadkiem, gdy siła P działa w drugim przęśle; jeżeli w pierwszym, to mamy do czynienia z belką prostą równoległą, dla której wyznaczenie linii wpływowych jest nader łatwe.

Równanie momentów względem węzła u_4 daje

$$\begin{aligned} A \cdot \zeta_4 + M_4 \cdot d + H(h_6 + d) &= 0, \\ M_4 d &= -A \cdot \zeta_4 - H(h_6 + d) = \\ &= +P \frac{x-l}{l} \cdot \zeta_4 - H(h_6 + d) \dots \text{ze względu na } 1'). \end{aligned}$$

$$M_4 d = P \frac{x-l}{l} \cdot \zeta_4 - P \frac{x-l}{h_0} (h_6 + d) \dots \text{według } 6).$$

$$M_4 = P \frac{x-l}{d} \left(\frac{\zeta_4}{l} - \frac{h_6 + d}{h_0} \right) \quad . \quad . \quad 14)$$

Zróbmy $x-l=d$, czyli $B_1 G=d$, to dla tego punktu G otrzymamy

$$M_4 = P \frac{\zeta_4}{l} - P \frac{h_6 + d}{h_0} \quad . \quad . \quad 14')$$

Równanie 14') daje nam łatwy sposób wyznaczenia rzędnej w punkcie G . A mianowicie odcinamy $GF = \zeta_4$, następnie $FE = l$ i w punkcie E rzędna $EE' = P = 1$. Prowadząc prostą EF , widzimy z wykresu, że rzędna $GG' = \frac{P}{l} \cdot \zeta_4$. Od tej rzędnej należy odjąć wyrażenie

$P \frac{h_6 + d}{h_0}$. W tym celu na poziomej przez G' odetnijmy $G'K = h_6 + d$, a otrzymawszy punkt K , zróbmy $KL = h_0$ i rzędna $LL' = P = 1$. Jeżeli wkońcu wykreślimy prostą $L'K$, to łatwo zauważyć, że $G'G'' = \frac{P}{h_0} (h_6 + d)$. Różnica $GG' - GG'' = GG''$ daje rzędna linii wpływowej w G . Punkt G'' określa nam już linię wpływową, gdyż z równania 14) wiemy, że jest ona jedną prostą i że przechodzi przez B_1 , bo dla $x=l$, $M_4=0$: prowadzimy więc prostą $B_1 G''$ aż do C_1' , a następnie prostą $C_1' D_1$ i otrzymujemy linię wpływową dla drugiego przęsła $B_1 C_1' D_1$. Nie potrzebujemy dodawać, że dla pierwszego przęsła linia wpływowa jest trójkątem $A_1 E B_1$.

Ten sam tok wykresu stosuje się do innych przętów pasu średniego (M) przęsła AB .

Przechodzimy do przęsła BC .

Dla $x-l > \zeta_4'$ otrzymamy następujące równania momentów ze względu na węzeł u_4'

$$\begin{aligned} A(l + \zeta_4') + B \cdot \zeta_4' + M_4' \cdot d + H(h_4' + d) &= 0, \text{ a pod-} \\ \text{stawiając wartości za } A \text{ i } B, \\ -P \frac{x-l}{l} (l + \zeta_4') + P \frac{x}{l} \cdot \zeta_4' + M_4' \cdot d + H(h_4' + d) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(-P \frac{x}{l} + P\right)(l + \zeta_4') + P \frac{x}{l} \cdot \zeta_4' + M_4' d + H(h_4' + d) = 0 \\ & -Px + Pl + P\zeta_4' + M_4' d + H(h_4' + d) = \\ & = -P(x-l-\zeta_4') + M_4' d + P \frac{x-l}{h_0} (h_4' + d) = 0 \dots a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_4' &= P \frac{x-l-\zeta_4'}{d} - P \frac{x-l}{d} \cdot \frac{h_4' + d}{h_0} \\ M_4' &= P \frac{x-l}{d} \cdot \frac{h_0 - (h_4' + d)}{h_0} - P \frac{\zeta_4'}{d} \dots 15) \end{aligned}$$

Dla $x-l=d$ równanie to się upraszcza:

$$M_4' = P \frac{h_0 - (h_4' + d)}{h_0} - P \frac{\zeta_4'}{d} \dots 15')$$

Linia wpływa dla M_4' jest — według równ. 15) — różnicą dwu prostych, z których jedna przechodzi przez B_1 (dla $x-l=0$ pierwszy wyraz staje się $=0$), a druga jest równoległą do osi. Wykres nie przedstawia żadnych trudności: Odcinamy $B_1E=d$, $EG = h_0 - (h_4' + d)$, $GK=h_0$ i rzędną $KK' = P=1$; rzędną prostej $K'G$ w punkcie E , t. j. $EE'' = P \frac{h_0 - (h_4' + d)}{h_0}$. Mając E'' , kreślimy prostą B_1E'' do C_1'' i prostą $C_1''D_1$. Od rzędnych tej linii mamy odjąć $P \frac{\zeta_4'}{d}$. W tym celu odcinamy $EE' = P=1$ i prowadzimy prostą B_1E' aż do pionowej F' , przyczem $B_1F = \zeta_4'$: wtedy $FF' = \frac{l}{d} \cdot \zeta_4'$ na mocy wykresu. Jeżeli przez F' wykreślimy poziomą, to otrzymamy drugą linię, ważną od F' (dla $x-l > \zeta_4'$) t. j. $F'C_1''D_1$. A jak wyglądać będzie ta linia od F' do B_1 ? — Wiemy, że musi być linią prostą¹⁾; wiemy też, że ciężar w B nie wywoła żadnego natężenia w M_4' , a więc mamy jeden punkt tej prostej B_1 ; drugim jest otrzymany już punkt F' , a zatem szukaną linię przedstawia prosta B_1F' .

Chodziłoby jeszcze o wyrażenie tego analitycznie: t. zn. szukamy siły wewnętrznej dla pręta M_4' , gdy $x-l < \zeta_4'$. Teraz przy równaniu momentów względem węzła u_4' wejdzie jeszcze jeden czynnik, t. j. moment siły P , czyli $-P[\zeta_4' - (x-l)] = +P(x-l-\zeta_4')$. To samo wyrażenie ze znakiem przeciwnym widzimy w równaniu a); otrzymamy zatem po redukcji zamiast a) następujące równanie:

$$M_4' d + P \frac{x-l}{h_0} (h_4' + d) = 0, \quad M_4' = -P \frac{x-l}{d} \cdot \frac{h_4' + d}{h_0} \quad b)$$

$$\text{Dla } x-l=d, \quad M_4' = -P \frac{h_4' + d}{h_0} = P \frac{h_0 - (h_4' + d)}{h_0} - P.$$

Z poprzedniego wiemy, że rzędną $EE' = P=1$, a $EE'' = P \frac{h_0 - (h_4' + d)}{h_0}$: różnica obu rzędnych czyli $E'E''$ przedstawia więc M_4' dla $x-l=d$, czyli słusznem jest tu równanie b).

Siły wewnętrzne w pasie dolnym (U).

Zaczynamy od pręta U_4 w pierwszym przęśle. Równanie momentów ze względu na węzeł m_2 jest

$$\begin{aligned} A \cdot \zeta_3 - U_4 \cdot d + H \cdot h_4 &= 0, \\ U_4 &= A \frac{\zeta_3}{d} + H \frac{h_4}{d} = -P \frac{x-l}{l} \cdot \frac{\zeta_3}{d} + P \frac{x-l}{h_0} \cdot \frac{h_4}{d} \\ U_4 &= P \frac{x-l}{d} \left(\frac{h_4}{h_0} - \frac{\zeta_3}{l} \right), \dots 16) \end{aligned}$$

równanie analogiczne do 14). Dla $x-l=d$ wynika

$$U_4 = P \frac{h_4}{h_0} - P \frac{\zeta_3}{l} \dots 16')$$

Według tego odcinamy $B_1E=d$, $EL=h_4$, $LK=h_0$, $KK' = P=1$: wtedy $EE'' = P \frac{h_4}{h_0}$. Następnie zróbmy

$EG = \zeta_3$, $GF=l$, $FF' = P=1$, to $EE' = \frac{P}{l} \cdot \zeta_3$. Różnica

$E'E'$ jest rzędną linii wpływowej $B_1C_1'D_1C_1''B_1$. Wykres ten można było wykonać tak samo jak dla M_4 : otrzymalibyśmy w takim razie tylko jedną linię, a powierzchnia wpływowa byłaby ograniczona tą linią i osią B_1D_1 , gdy przy podanym wykresie tworzą ją dwie proste.

W drugim przęśle otrzymamy dla $x-l > \zeta_3'$ ze względu na węzeł m_2' następujące równanie momentów

$$\begin{aligned} P(x-l-\zeta_3') + U_4' \cdot d - H \cdot h_4' &= 0, \\ U_4' &= P \frac{x-l}{h_0} \cdot \frac{h_4'}{d} - P \frac{x-l-\zeta_3'}{d} \\ U_4' &= P \frac{x-l}{d} \left(\frac{h_4'}{h_0} - 1 \right) + P \frac{\zeta_3'}{d} \\ U_4' &= P \frac{\zeta_3'}{d} - P \frac{x-l}{d} \cdot \frac{h_0 - h_4'}{h_0} \dots 17) \end{aligned}$$

analogiczne równanie do 15), a więc i wykres będzie taki sam. A mianowicie dla $x-l=d$,

$$U_4' = P \frac{\zeta_3'}{d} - P \frac{h_0 - h_4'}{h_0} \dots 17')$$

odcinamy zatem $B_1E=d$, $EE' = P=1$, to dla $B_1F = \zeta_3'$ rzędną $FF' = P \frac{\zeta_3'}{d}$. Jeżeli zrobimy dalej $EK =$

$$= h_0 - h_4', \quad KG = h_0, \quad GG' = P=1, \quad \text{to } EE'' = P \frac{h_0 - h_4'}{h_0}.$$

Rozumując analogicznie jak przy 15'), dojdziemy do wniosku, że linia wpływowa ma kształt $B_1C_1''D_1C_1'F'B_1$.

Podane dotąd wzory prof. Dr. M. Thulliego okazują jasno, że teoria i wykres linii wpływowych dla belki trzypasowej wspornikowej o zasadniczej belce równoległej jest rzeczą nader prostą i łatwą.

Czy się zadanie bardzo utrudni, gdy przyjmiemy belkę zasadniczą wieloboczną, czyli wszystkie trzy pasy zakrzywione?

Wyprowadzimy zupełnie tak samo jak poprzednio wzory dla tego najogólniejszego wypadku i na ich podstawie wysnujemy pewne wnioski. Przyjmiemy przytem w ogólnych zarysach kształt mostu na Nekarze pod Mannheimem; pas dolny wyginamy przesadnie w górę dla uzyskania bardziej przejrzystego rysunku (tabl. II rys. 1). Przedewszystkiem nadmienić musimy, że pozostają tu ważne wzory 1)–10), gdyż przy ich wyprowadzeniu obojętnym był kształt belki zasadniczej. Zmieniają się tylko nieco linie wpływowe dla krzyżulców i pasów dolnego i średniego.

Chcąc znaleźć siłę wewnętrzną D_1 (gdy P w przęśle BC), otrzymamy z przekroju II

$$\begin{aligned} U_2 \sin v_2 + D_1 \cos \delta_1 - O_0 \sin \omega_0 - A &= 0 \\ -U_2 \sin v_2 + P \frac{x-l}{h_0} \operatorname{tg} \omega_0 - P \frac{x-l}{l} &= D_1 \cos \delta_1 \end{aligned}$$

$$D_1 = \left[P(x-l) \left(\frac{\operatorname{tg} \omega_0}{h_0} - \frac{1}{l} \right) - U_2 \sin v_2 \right] \sec \delta_1 \quad 18)$$

Dla D_1' zaś bierzemy przekrój II II:

$$\begin{aligned} U_2' \sin v_2' + D_1' \cos \delta_1' + O_0' \sin \omega_0' - P &= 0 \\ D_1' &= \left[P \left(1 - \frac{x-l}{h_0} \operatorname{tg} \omega_0' \right) - U_2' \sin v_2' \right] \sec \delta_1' \quad 19) \end{aligned}$$

Wzory 18) i 19) składają się z dwu części: część pierwsza to równania 11) i 13): wykreślamy zatem jak poprzednio linie wpływowe, których rzędne mamy pomniejszyć o część drugą, t. j.

$$U_2' \sin v_2 \sec \delta_1 (U_2' \sin v_2' \sec \delta_1').$$

Wzory na U otrzymamy niżej (22) i 23).

Według powyższego kreślimy więc najpierw linie wpływowe D_1 i D_1' zupełnie tak samo jak na tab. I.

¹⁾ p. Winkler. *Theorie der Brücken, Äussere Kräfte der Balkenträger*, 1886, str. 29.

I tak otrzymujemy w drugim przęśle dla D_1 linię $B_1 C_1' D_1$: największą rzędną $C_1 C_1'$ należy pomniejszyć o odcinek $U_2 \sin v_2 \sec \delta_1$. Dla U_2 znaleźliśmy rzędną w pionowej przegubu C równą co do wielkości odcinkowi MN (rys. 3): kreślimy tedy $MO \parallel D_1$, z punktu N poziomą i otrzymujemy $MO = MP = U_2 \sec \delta_1$. Jeżeli teraz wykreślimy $MR \perp U_2$ i z punktu P linię $PR \perp MR$, to odcinek $PR = U_2 \sec \delta_1 \sin v_2$. O tę długość mamy pomniejszyć rzędną $C_1 C_1'$, więc robimy $C_1 C_1'' = PR$ i otrzymujemy $B_1 C_1'' D_1$ jako linię wpływową¹⁾.

Zupełnie tak samo postępujemy z linią wpływową dla D_1' (według równ. 19)). Ponieważ linia wpływowa dla U_2' ma punkt załomu w odstępnie $\zeta_1' = B_1 K$, więc odcinamy $K_1 K' = PR = U_2' \sec \delta_1' \sin v_2'$ (rys. 4) i prowadzimy prostą $B_1 K_1$ aż do pionowej G , t. j. do G'' . Tak samo w pionowej przegubu C odcinamy $C_1' C_1''' = PR = U_2' \sec \delta_1' \sin v_2'$ (rys. 5) i kreślimy prostą $G'' C_1'''$ i $C_1''' D_1$, by otrzymać zupełną linię wpływową $B_1 C_1''' D_1 C_1''' G'' B_1$. Punkt G'' możnaby też otrzymać w ten sposób, że przedłużymy poziomą $C_1 G'$ do pionowej K , odetniemy $K_2 K_2' = K_1 K' = PR$ (rys. 4) i połączymy K' z punktem C_1''' : prosta ta przetnie pionową G w punkcie G'' .

Ponieważ kąty v są bardzo małe, więc możemy śmiało bez żadnej ujemy dla praktycznej dokładności rysunku odmierzyć odcinek PR wprost na łuku OP .

Nie nadmieniamy nawet, że dla każdej przekątnej będzie inne δ i v , a więc $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots; v_2, v_4, v_6, \dots; \delta_1', \dots$.

Przystępujemy do pręta M_4 . Dostajemy

$$A \cdot \zeta_4 + M_4 \cdot d_5 \cos \mu_4 + H (h_6 + d_5) = 0$$

$$M_4 \cdot d_5 \cos \mu_4 = P \frac{x-l}{l} \cdot \zeta_4 - P \frac{x-l}{h_0} (h_6 + d_5)$$

$$M_4 = \frac{P(x-l)}{d_5 \cos \mu_4} \left(\frac{\zeta_4}{l} - \frac{h_6 + d_5}{h_0} \right) \dots 20)$$

Dla M_4' zaś znajdziemy

$$A(l + \zeta_4') + B \cdot \zeta_4' + M_4' \cdot d_5' \cos \mu_4' + H(h_4' + d_4') = 0$$

$$M_4' = P \frac{x-l}{d_5' \cos \mu_4'} \cdot \frac{h_0 - (h_4' + d_4')}{h_0} - P \frac{\zeta_4'}{d_5' \cos \mu_4'} \dots 21)$$

Widzimy z wzorów 20) i 21), że staną się one równoznaczne z odpowiednimi wzorami 14) i 15), skoro za $d_5 \cos \mu_4$ ($d_5' \cos \mu_4'$) podstawimy d . Wykres linii wpływowej dla M_4 (rys. 2) jest analogiczny do odpowiedniego rysunku na tabl. I: ta tylko zachodzi różnica, że odcinek $B_1 G = d_5 \cos \mu_4$ (p. rys. 1) — reszta wykresu zostaje ta sama. (Zatrzymaliśmy też te same litery co na tabl. I).

Dla M_4' (rys. 2) znowu mamy $B_1 E = d_5' \cos \mu_4'$, a dalszy tok konstrukcji jak na tabl. I. Nie zastanawiamy się przeto dalej nad wykresem linii wpływowych i przechodzimy do ostatniej części, którą mamy omówić, tj. do pasu dolnego.

Chcąc znaleźć U_4 i U_4' otrzymamy

$$A \cdot \zeta_3 - U_4 \cdot d_4 \cos v_4 + H \cdot h_4 = 0$$

$$U_4 = P \frac{x-l}{d_4 \cos v_4} \left(\frac{h_4}{h_0} - \frac{\zeta_3}{l} \right) \dots 22)$$

$$i \quad P(x-l - \zeta_3') + U_4' \cdot d_4' \cos v_4' - H \cdot h_4' = 0$$

$$U_4' = P \frac{\zeta_3'}{d_4' \cos v_4'} - P \frac{x-l}{d_4' \cos v_4'} \cdot \frac{h_0 - h_4'}{h_0} \dots 23)$$

Co do równań 22) i 23), analogicznych do 16) i 17), musielibyśmy powtórzyć uwagę, tyczącą się równ. 20) i 21).

A zatem dla U_4 mamy $B_1 E = d_4 \cos v_4$ (p. rys. 1); dalszy wykres jak na tabl. I: zmieniliśmy go o tyle,

że $FF' = P = 1$ odcięliśmy nad osią, przez co otrzymaliśmy powierzchnię wpływową ograniczoną nie dwiema liniami, lecz jedną linią $B_1 C_1' D_1$ i osią $B_1 D_1$.

Dla U_4' odcięliśmy $B_1 E = d_4' \cos v_4'$ (p. rys. 1), a zresztą wykres zupełnie analogiczny jak na tabl. I.

Musimy zrobić jeszcze uwagę, że ponieważ kąty μ_4, v_4, \dots , są bardzo małe, więc możemy śmiało zamiast $d_5 \cos \mu_4$ wziąć wprost d_5 , zamiast $d_4 \cos v_4$, odciąć d_4 i t. d.: dokładność na tem wcale nie ucierpi, a uprościmy sobie znacznie pracę.

Mając w ten sposób wzory dla kształtu najogólniejszego, łatwo je zmodyfikować przez dedukcję dla wypadku, gdy pas dolny prosty, a średni zakrzywiony, lub odwrotnie, a wreszcie dla belki zasadniczej równoległej, czyli otrzymamy równania 11)—17), wzory prof. Dr. M. Thulliego.

O ile się zmienia linie wpływowe wskutek drugorzędowego zawieszenia, które spotykamy dość często przy mostach tego rodzaju, nad tem wcale się nie zastanawiamy, bośmy już przedstawili rzecz tę obszernie¹⁾.

Ostatnią tę partję traktowaliśmy krótko, bo inaczej z powodu obszernego przedstawienia części pierwszej, musielibyśmy się powtarzać. Atoli był jeszcze inny powód postąpienia w ten sposób: Widzieliśmy z powyższego, że linie wpływowe w pewnej części są takie same jak dla belki zwykłej w dwu punktach podpartej. Otóż dla tego rodzaju belek łatwo znaleźć linie wpływowe bez większych pomocniczych wykresów, gdy kształt ich prosty. Dla belki wielobocznej np. o wiele prostszym sposobem, który prędzej wiedzie do celu, jest uzyskanie linii wpływowych zapomocą dwu planów sił²⁾. A zatem dla belek wspornikowych trzypasowych o zasadniczej belce wielobocznej szybciej nam da linie wpływowe jeszcze trzeci plan sił (według Haberkalta), niż postępowanie według metody, wskazanej w ostatniej części. Tyczyć się to oczywiście belki zasadniczej, bo dla pasu trzeciego i słupów V wykres jest tak prosty, że go możemy zawsze zastosować. Jeżeli jednak chodzi o większą dokładność lub skontrolowanie wyników, uzyskanych drogą wykreślną, należałoby postąpić w sposób powyżej wskazany, czyto graficznie czy też — co ędzie dokładniej — obliczyć charakterystyczne rzędne według równ. 6)—9) i 18)—23) i na ich podstawie wykreślić linie wpływowe.

W ten sposób, sędzę, byłaby omówiona sprawa linii wpływowych dla belek trzypasowych wspornikowych ze strony teoretycznej i praktycznej.

Na tem miejscu niech mi wolno będzie złożyć serdeczny dzięk prof. Dr. M. Thulliemu za udzielenie mi swego rękopisu i za cenne wskazówki, o czem już na wstępie wspomniałem, a wreszcie za ułatwienie mi pracy przez pożyczanie rozprawy Haberkalta i Statyki Müllera-Breslaua.

Na zakończenie wyrazić muszę żal, że nie udało mi się tej pracy tak gruntownie przedstawić, jak pierwotnie zamierzałem. Tyczy się to głównie części historycznej. Ale brak czasu stanął na przeszkodzie i był przyczyną tego, że całość nie wypadła jednolicie: trudno marzyć o jednolitości, skoro niektóre partje pisałem w wagonie kolejowym.

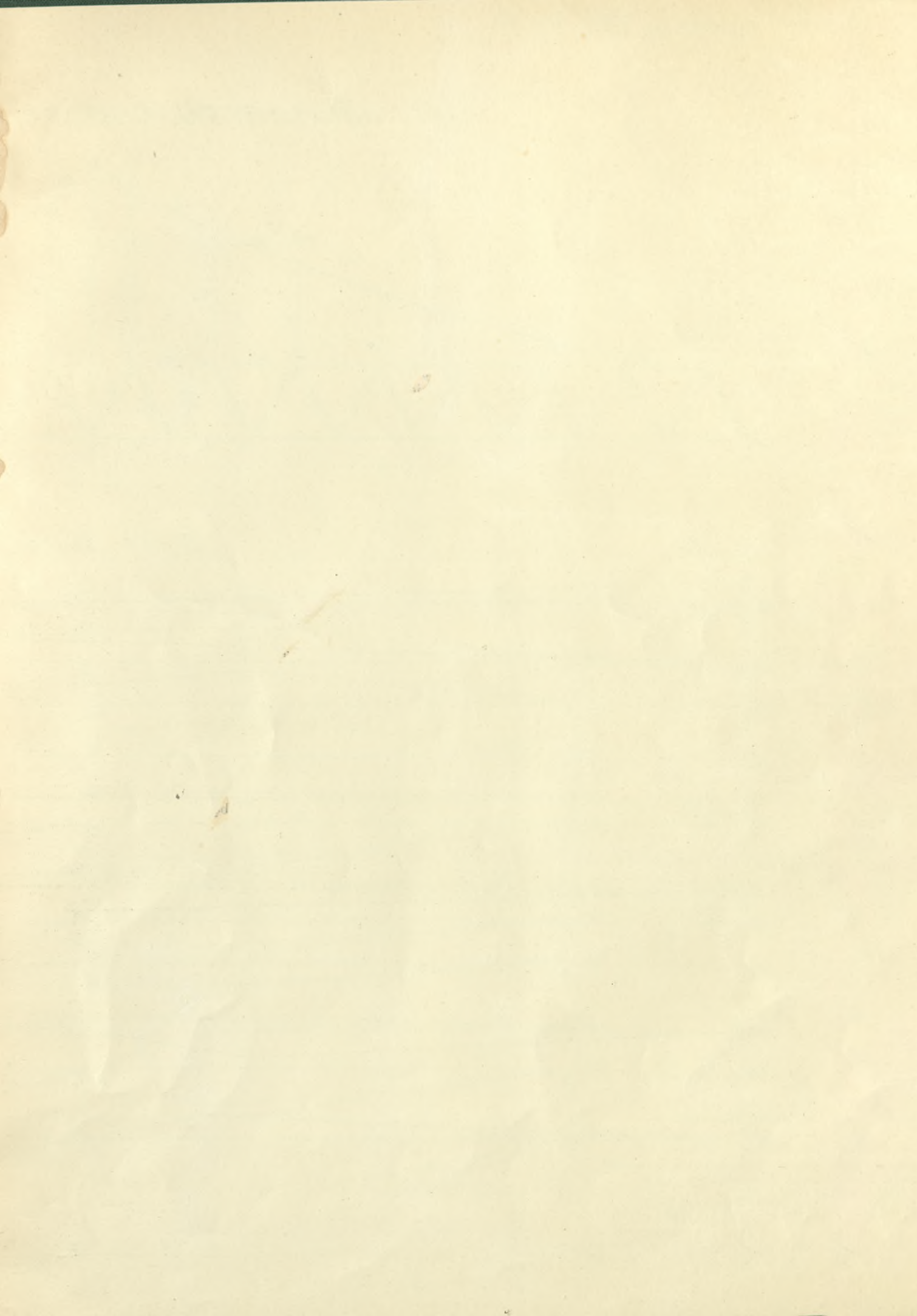
Kończę życzeniem, by ta praca wywołała pewne zajęcie, którego tak bardzo u nas potrzeba w dziedzinie teorii mostów. Dlatego też wdzięcznym będę za krytykę i wszelkie uwagi.

We Lwowie dnia 30 maja 1903.

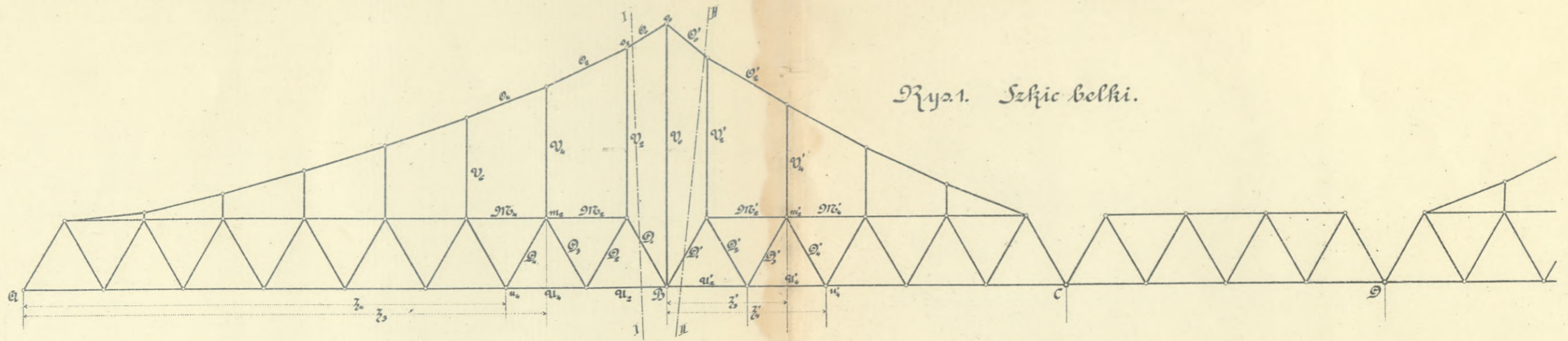
¹⁾ Rzędną $C_1 C_1'$ odcięliśmy większą niż być powinna dla uzyskania więcej przejrzystego rysunku (inaczej punkt C_1''' padłby prawie na C_1').

²⁾ Por. *Czasopismo Techniczne*, 1902, str. 298.

³⁾ Por. Müller-Breslau. *Graphische Statik*, I, str. 238 (wydanie 1901).

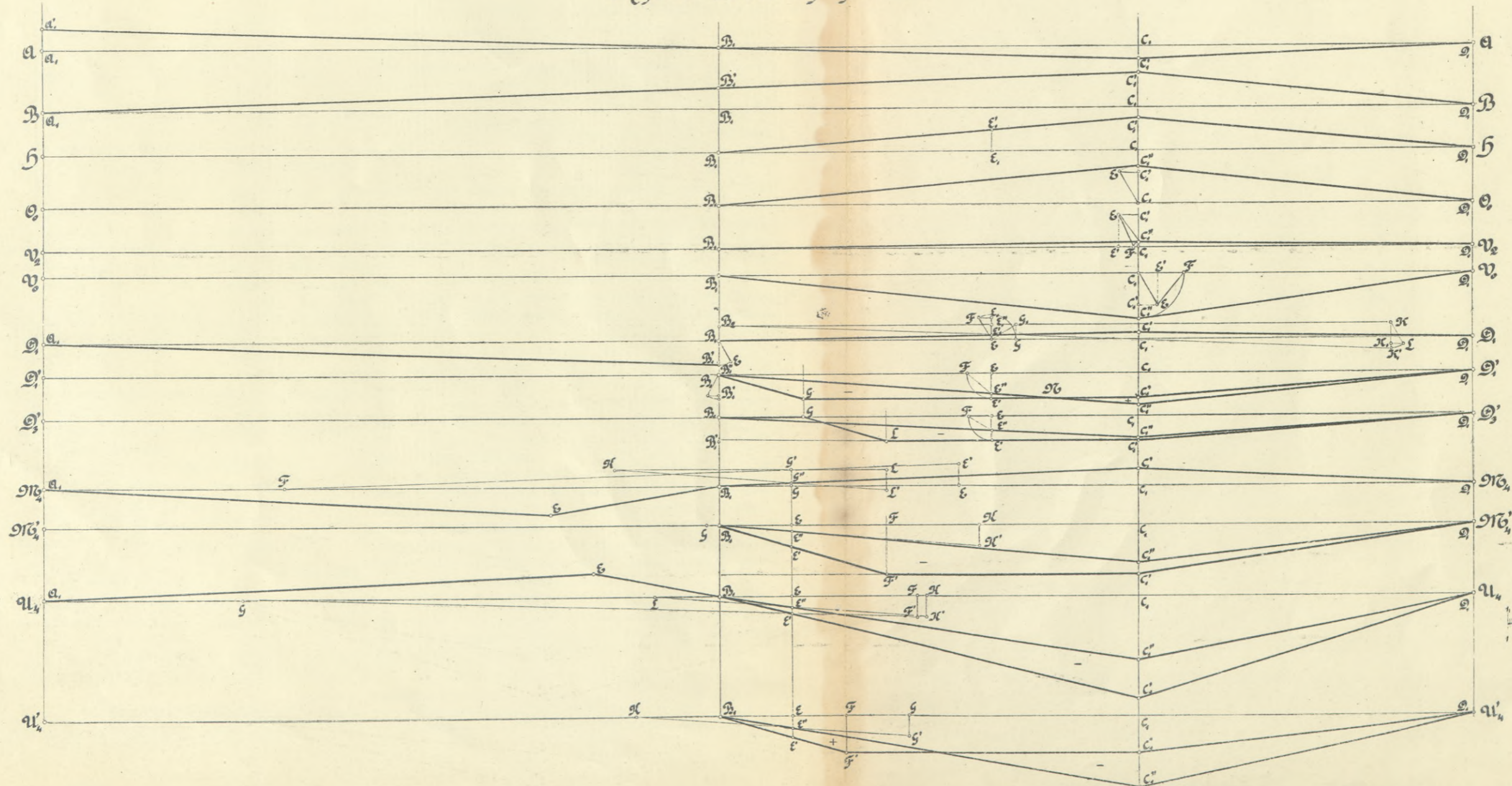


Linie wpływowe dla belek trzypazomych wspornikowych.

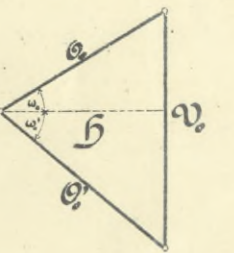


Rzys. 1. Szkic belki.

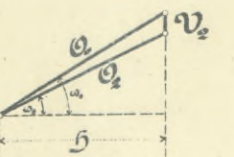
Rzys. 2. Linie wpływowe:



Rzys. 3.

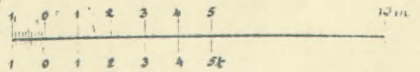


Rzys. 4.



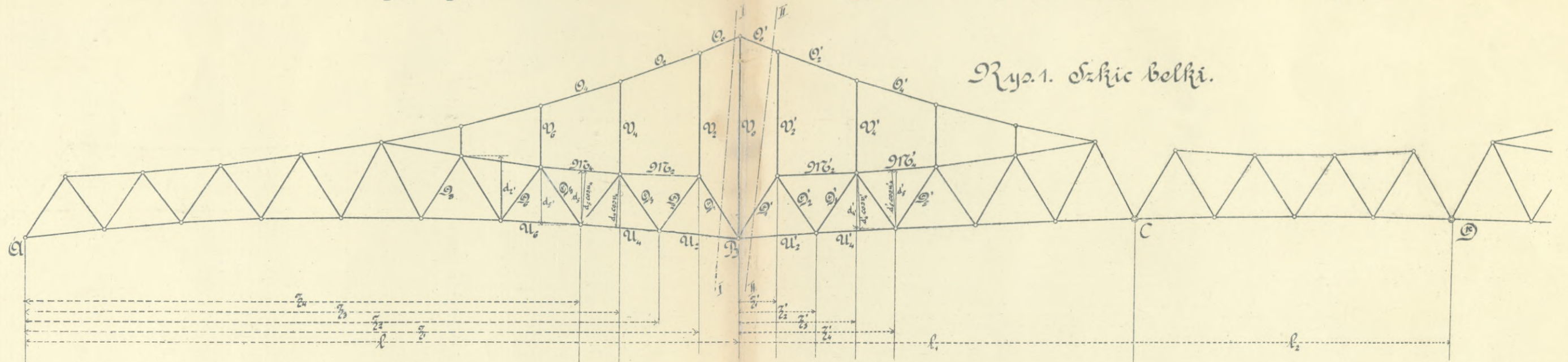
Podziałki:

dla długości.

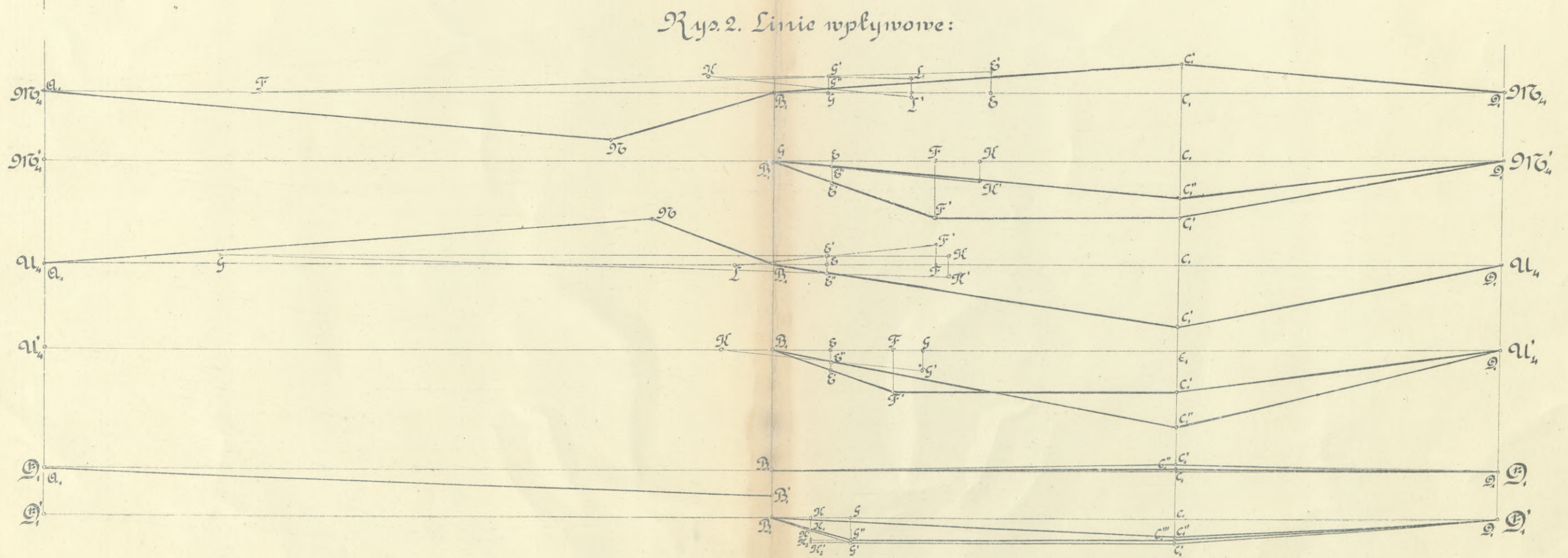


dla sił.

Linie wpływowe dla belek trzypasowych wspornikowych.



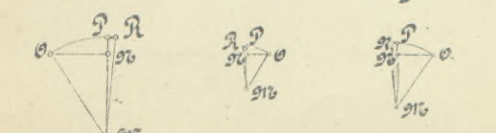
Rys. 1. Szkic belki.




Rys. 2. Linie wpływowe:

Podziałki:
 Dla długości: m 1 0 1 2 3 4 5 10m
 Dla sił: x 1 0 1 2 3 4 5 t

Rys. 3. Rys. 4. Rys. 5.



POLITECHNIKA KRAKOWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA

 25854
L. inw.

Kdn. 524. 13. IX. 54

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000232001

Z



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-25854

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000232001