



Politechnika Krakowska
Biblioteka Główna



100000060317



Wiktoria Sobinińska.
Kuch. m. kuch. koch.

Jan Sobiniński

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA T. VIII.

PODRĘCZNIK
STATYKI BUDOWLI

DLA

INŻYNIERÓW, ARCHITEKTÓW I SŁUCHACZÓW SZKÓŁ POLITECHNICZNYCH

Z 634 RYSUNKAMI W TEKSCIE I 6 TABLICAMI.

OPRACOWAŁ

MAKSYMILIAN THULLIE,

DYPLOMOWANY INŻYNIER, PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE.

—◆—
Wydanie drugie znacznie rozszerzone.

—◆—
Cena 18 koron.



LWÓW.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SEYFARTHA I CZAJKOWSKIEGO.

I. Związkowa drukarnia we Lwowie, ulica Lindego 1. 4.

1902.



W 11220

D-398/69

Przedmowa do drugiego wydania.

Gdy pierwsze wydanie było na wyczerpaniu i zresztą ogromny postęp umiejętności wymagał przerobienia Podręcznika, podjąłem tę pracę przed czterema laty i zacząłem wydawać drugie wydanie zeszytami, aby słuchacze moi mogli z nich korzystać jeszcze przed ukończeniem całego dzieła.

Drugie wydanie jest znacznie rozszerzone, bo gdy pierwsze, drukowane w 1886, zawierało 20 arkuszy druku, drugie zawiera 36 arkuszy. Starłem się w niem uwzględnić postępy nauki statyki budowli, dodałem niektóre działy pominięte w poprzednim wydaniu, jak n. p. obliczenie żelaznych dachów baniastych, wieżowych i namiotowych.

Przy tej sposobności podziękować muszę asystentowi memu p. Józefowi Kubali za wykonanie potrzebnych rysunków i pomoc w korekcie i wreszcie prosić polskich inżynierów, aby to drugie wydanie przyjęli z taką samą życzliwością, jaką cieszyło się wydanie pierwsze.

We Lwowie, w kwietniu 1902.

Maksymilian Thullie.

Spis rzeczy.

Wstęp	Str. 1
-----------------	--------

A. Wiadomości wstępne ze statyki wykreślnej.

I. Składanie sił.

§. 1. Siły przecinające się w jednym punkcie	3
§. 2. Siły działające w płaszczyźnie na układ punktów stale połączonych. Wielobok sznurowy	6
§. 3. Siły równoległe	7
§. 4. Moment statyczny	8
§. 5. Składanie ilukolwiek sił	9
§. 6. Dalsze własności wieloboku sznurowego	12
§. 7. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego	14

II. Belka prosta.

§. 8. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla obciążenia ciężarami skupionymi	15
§. 9. Analityczne wyznaczenie sił poprzecznych i momentów	19
§. 10. Dowolne obciążenie ciągle	21
§. 11. Jednostajne obciążenie ciągle	24
§. 12. Jednostajne obciążenie częściowe	26
§. 13. Belka jednym końcem utwierdzona	28
§. 14. Belka wystająca	30

B. Wytrzymałość konstrukcyj drewnianych i żelaznych.

III. Wytrzymałość na ciągnięcie i ciśnienie.

§. 15. Ogólne pojęcia	32
§. 16. Spółczynniki sprężystości	35
§. 17. Spółczynniki wytrzymałości na ciągnięcie i ciśnienie	40
§. 18. Wpływ kształtu ciała, ciepłoty, wilgotności i ciężaru gatunkowego na wytrzymałość	44
§. 19. Zjawiska przy przerwaniu	47
§. 20. Własności ciał zależne od krzywej odkształceń, zwięzienia i przedłużenia	50
§. 21. Pewność i natężenie dopuszczalne	53
§. 22. Doświadczenia Wöhlera i Bauschingera	60
§. 23. Wyznaczenie wymiarów według Winklera	62
§. 24. Wyznaczenie wymiarów według Launhardta i Weyraucha	67

	Str.
§. 25. Wyznaczenie wymiarów wedle Tetmajera	70
§. 26. Natężenie dopuszczalne dla drzewa	72
§. 27. Pręty o stałym przekroju	73
§. 28. Pręty o stałym natężeniu	73
§. 29. Linwy konopne i druciane i łańcuchy	76

IV. Wytrzymałość na ścinanie.

§. 29. Spółczynnik wytrzymałości i natężenie dopuszczalne	83
§. 30. Nitowanie pojedyncze	86
§. 31. Nitowanie podwójne	93
§. 32. Nitowanie wstęp i kształtówek	96
§. 33. Połączenia przegibne	99
§. 34. Obliczenie śrub	100
§. 35. Połączenie belek drewnianych	102

V. Wytrzymałość na zginanie.

§. 36. Związek między siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi	105
§. 37. Moment bezwładności	109
§. 38. Wyznaczenie momentu bezwładności ze względu na oś równoległą do danej	118
§. 39. Promień i elipsa bezwładności	119
§. 40. Elipsa bezwładności ze względu na osie ukośne	128
§. 41. Koło bezwładności	130
§. 42. Punkty stałe przekroju	131
§. 43. Analityczne wyznaczenie momentu bezwładności dla figur nieregularnych	132
§. 44. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności	135
§. 45. Linia całkowita	139
§. 46. Moment bezwładności szyny kolejowej	140
§. 47. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności powierzchni sposobem Nehlsa	142
§. 48. Obliczenie siły ścinającej poziomej	146
§. 49. Natężenia ścinające pionowe	148
§. 50. Natężenia w kierunkach ukośnych. Linie największych natężeń	150
§. 51. Natężenia główne	153
§. 52. Wykreślne wyznaczenie siły ścinającej poziomej	157
§. 53. Obliczenie przekroju kształtówek I, pracujących na zginanie	159
§. 54. Inne kształtówki	162
§. 55. Belki blaszane	173
§. 56. Obliczenie przekroju belki blaszanej	174
§. 56a. Obliczenie grubości ścianki belki blaszanej	177
§. 57. Obliczenie nitów belki blaszanej	179
§. 58. Obliczenie belek drewnianych	180
§. 59. Obliczenie belek stropu mieszanego	182
§. 60. Natężenia zginające po przekroczeniu granicy sprężystości	186
§. 61. Natężenia przy złamaniu belek drewnianych	188
§. 62. Natężenia przy złamaniu belek z żelaza spawalnego, zlewnego i stali	189

	Str.
§. 63. Natężenia zginające w belkach z żelaza lanego, kamienia i betonu. Prawo Bacha	194
§. 64. Natężenie w belkach, gdy siły nie działają w płaszczyźnie osi głównych	198
§. 65. Dźwigary drewniane złożone	203
§. 66. Natężenie dopuszczalne	206
§. 67. Obliczenie przekroju dźwigaru złożonego	211
§. 68. Obliczenie klinów	214
§. 69. Obliczenie śrub	221
§. 70. Obliczenie belek żelazno-betonowych	223
§. 71. Płyty Moniera. Faza pierwsza	225
§. 72. " " " druga	228
§. 73. Obliczenie wymiarów płyt Moniera	232
§. 74. Belki układu Hennebeque'a. Faza pierwsza	238
§. 75. " " " " druga	242
§. 76. Belki z różnego materiału	243
§. 77. Równanie linii ugięcia i ugięcie belki	246
§. 78. Ugięcie belki jednym końcem utwierdzonej	250
§. 79. Belka jednym końcem w murowana, a w drugim podparta	252
§. 80. Belka obu końcami poziomo utwierdzona	256
§. 81. Wykreślne wyznaczenie ugięcia belki	261
§. 83. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych belki jednym końcem podpartej, drugim utwierdzonej	263
§. 84. Belka obu końcami utwierdzonej	265
§. 85. Belka obu końcami ukośnie utwierdzonej	267
§. 86. Belka ciągła	269
§. 87. Belka ciągła dwu- i trzyprzęsłowa	271
§. 88. Belka ciągła o równych przęsłach	273

VI. Wytrzymałość złożona na zginanie i ciągnięcie lub ciśnienie.

§. 89. Bryła natężeń i oś obojętna	274
§. 90. Jądro przekroju	279
§. 91. Największe natężenie	283
§. 92. Wyznaczenie największych natężeń zapomocą jądra	283

VII. Wytrzymałość na wyboczenie.

§. 93. Wzory zasadnicze. Eulera i Rankina	285
§. 94. Wyznaczenie długości wolnej	293
§. 95. Wzory Tetmajera	298
§. 96. Obliczenie wymiarów	300
§. 97. Przykłady obliczenia wymiarów	307
§. 98. Wytrzymałość słupów żelaznych w razie pożaru	311
§. 99. Słupy obciążone mimośrodkowo	311
§. 100. Natężenie dopuszczalne	313
§. 101. Przykłady	314

VIII. Wytrzymałość na skręcenie.

Str.

§. 102.	Wzory zasadnicze	319
§. 103.	Wał pełny i wydrażony	321
§. 104.	Przekrój kwadratowy	322

IX. Belki kratowe i więzary dachowe.

§. 105.	Uwagi ogólne	323
§. 106.	Warunki wyznaczalności	324
§. 107.	Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych za pomocą metody wielobokowej	327
§. 108.	Metoda przecięć	329
§. 109.	Belka wzmocniona	331
§. 110.	Obciążenie dachów	333
§. 111.	Ogólne warunki równowagi dachu	340
§. 112.	Wyznaczenie sił wewnętrznych dla obciążenia pionowego	341
§. 113.	Parcie wiatru	345
§. 114.	Obliczenie więzaru Polonceau złożonego jako przykład	349
§. 115.	Belka pochyło leżąca	352
§. 116.	Drewniany pojedynczy dach krokwiowy	354
§. 117.	Dach płatwowy z podwójnym ciężarem i kolanem	356
§. 118.	Dach rozporowy	358
§. 119.	Więzar lukowy trójprzegubowy	359
§. 120.	Dachy baniaste	361
§. 121.	Obciążenie bani ciężarem własnym	363
§. 122.	„ „ śniegiem i wiatrem	365
§. 123.	Obliczenie dokładniejsze sposobem Müllera Breslaua	367
§. 124.	Płaskie dachy namiotowe	369
§. 125.	Dachy wieżowe czworoboczne	371
§. 126.	Dachy wieżowe ośmioboczne	373
§. 127.	Części składowe i rodzaje belek kratowych	378
§. 128.	Analityczne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej	380
§. 129.	Wykreślne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej	381
§. 130.	Krata wielokrotna	381
§. 131.	Belka kratowa Howe'a	382

C. Teoria sklepień.

X. Sklepienia kolebkowe.

§. 132.	Łuki i sklepienia	383
§. 133.	Siła podłużna i momenty jędrne	383
§. 134.	Warunki równowagi sklepienia	388
§. 135.	Obciążenie sklepienia	391
§. 136.	Linia ciśnienia	392

	Str.
§. 137. Grubość sklepienia	394
§. 138. Grubość sklepień betonowych Moniera	396
§. 139. Obliczenie nateżeń w sklepieniach Moniera	397
§. 140. Związek między linią ciśnienia a linią obciążenia	402
§. 141. Przybliżone wyznaczenie linii ciśnienia w sklepieniu symetrycznym	404
§. 142. Sklepienie niesymetrycznie obciążone	406
§. 143. Siły zewnętrzne	407
§. 144. Odkształcenie łuku	409
§. 145. Wyznaczenie trzech warunków	411
§. 146. Przybliżone wyznaczenie prawdziwej linii ciśnienia	413
§. 147. Położenie powierzchni momentów	422
§. 148. Ciśnienie sklepienia na krążyny	423

XI. Sklepienia krzyżowe i baniaste.

§. 149. Sklepienie krzyżowe nad kwadratem	426
§. 150. " " " prostokątem	428
§. 151. " " w jedlinkę	430
§. 152. " baniaste	430
§. 153. Bania kulista	432
§. 154. Wykreślne wyznaczenie nateżeń w bani	433
§. 155. Sklepienie klasztorne	436

XII. Przyczółki, filary i kominy.

§. 156. Linia ciśnienia	437
§. 157. Wmurowanie belki wspornikowej	439
§. 158. Linie wyznacznice przekroju prostokątnego	440
§. 159. Koło pełne	444
§. 160. Przekrój nieregularny. Siła działająca w osi głównej	445
§. 161. Przekrój nieregularny. Siła działa nie na osi głównej	447
§. 162. Kominy fabryczne	449

D. Budowle ziemne.

XIII. Równowaga stoków.

§. 163. Zasady	452
§. 164. Równowaga ziemi niespoistej	453
§. 165. Równowaga ziemi spoistej	453
§. 166. Naziom płaski i nieobciążony	455
§. 167. Stok pionowy	457
§. 168. Wyznaczenie wykreślne słoczyskości	458
§. 169. Parabola spójności	460
§. 170. Wyznaczenie stoku naturalnego, spójności i ciężaru gatunkowego	461
§. 171. Naziom załamany	463

	Str.
§. 172. Równowaga ziemi jednostajnie obciążonej	463
§. 173. Wykreślne wynoszenie stoku ziemi jednostajnie obciążonej	465
§. 174. Naziom dowolny częściowo obciążony	466
§. 175. Stok zakrzywiony	466

XIV. Parcie ziemi, obliczone sposobem analitycznym.

§. 176. Ogólne zasady	468
§. 177. Ogólne wyznaczenie powierzchni odłamu i parcia ziemi	469
§. 178. Ogólne wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi	472
§. 179. Wyznaczenie parcia ziemi, gdy naziom jest płaszczyzną, nachyloną do poziomu pod kątem β	472
§. 180. Parcie ziemi dla naziomu poziomego	475
§. 181. Parcie ziemi, gdy naziom nachylony do poziomu pod kątem tarcia	476
§. 182. Parcie ziemi na mur pionowy	477
§. 183. Parcie ziemi przy naziomie spadającym	478
§. 184. Wyznaczenie parcia ziemi dla naziomu pochyłego, zakończonego płaszczyzną poziomą	479
§. 185. Wysokość punktu zaczepienia parcia ziemi dla naziomu płaskiego, zakończonego płaszczyzną poziomą	481
§. 186. Uwzględnienie ciężaru ruchomego	481
§. 187. Parcie ziemi, gdy mur nakryty jest ziemią	484

XV. Parcie ziemi, wyznaczone wykreślnie.

§. 188. Zasady	484
§. 189. Parcie ziemi na mur płaski dla naziomu płaskiego	486
§. 190. Parcie ziemi na mur płaski, gdy naziom tworzą dwie płaszczyzny	491
§. 191. Parcie ziemi o naziomie dowolnego kształtu na mur płaski	493
§. 192. Wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi	494
§. 193. Parcie ziemi na mur krzywy	499
§. 194. Odpór ziemi	499
§. 195. Wykreślne wyznaczenie parcia ziemi sposobem Pilleta	501

XVI. Inne teorye parcia ziemi.

§. 196. Poprawka dla równowagi w spoczynku	502
§. 197. Poszczególne wypadki	504
§. 198. Wyznaczenie płaszczyzny odłamu	505
§. 199. Wyznaczenie analityczne parcia geostatycznego dla ściany pionowej i naziomu poziomego	506
§. 200. Nowsze teorye	509

XVII. Parcie ziemi na sklepienie.

§. 201. Sklepienie owalne	511
§. 202. Sklepienie tunelowe	513
§. 203. Uwzględnienie spójności	513

E. Mury oporowe.

XVIII. Stałość murów oporowych.

§. 204.	Ogólne zasady	514
§. 205.	Ogólne wyznaczenie grubości muru oporowego	515
§. 206.	Analityczne wyznaczenie grubości muru dla szwów pochyłych	516
§. 207.	Analityczne wyznaczenie grubości muru dla szwów poziomych	519
§. 208.	Wykreślne wyznaczenie grubości muru oporowego	520
§. 209.	Parcie geostatyczne przy wyznaczeniu grubości muru opo- rowego	522
§. 210.	Mury oporowe z przyporami	524
§. 211.	Korzystny przekrój muru oporowego	525
§. 212.	Parcie ziemi na przyczółek	526
	I. Dodatek : Literatura	529
	II. Dodatek : Tablice obciążeń stropów	534
	III. Dodatek : Tablice liczbowe	538



W S T Ę P.

Statyka budowli lub zastosowana, zwana także mechaniką budowniczą (n. *Baumechanik*, *Statik der Bauconstructionen*, fr. *mécanique appliquée*, an. *statics applied*) jestto nauka o warunkach równowagi i o wytrzymałości zespołów (konstrukcyj) budowlanych, zastosowana do obliczenia ich wymiarów i kształtów. Oczywiście nie możemy tu mówić o teorii wszystkich zespołów budowlanych, lecz omówimy tylko teorią najważniejszych zespołów, gdyż obliczenie mniej ważnych zespołów i szczegółów najlepiej daje się połączyć z opisem ich ustroju, który jest przedmiotem odrębnych nauk, jak n. p. budownictwa wodnego, budowy mostów itd. Pomiemy tu także obliczenie mostów, ponieważ odmienny sposób obciążenia robi obliczenie ich tak zawilem, że jest ono przedmiotem osobnej nauki, tak zwanej teorii mostów (n. *Theorie der Brücken*).

Przedmiot nasz podzielimy według tego, czy materiał użyty do zespołu jest mniej lub więcej sprężysty. A więc będziemy mówili najprzód o wytrzymałości materiałów sprężystych drzewa i żelaza, potem bardzo mało sprężystego kamienia, a nakoniec o wytrzymałości materiału niesprężystego ziemi.

Jak wiadomo, dwie są główne metody do rozwiązywania zagadnień mechaniki, metoda analityczna i wykreślna. Będziemy używali jednej i drugiej metody naprzemian według tego, która w danym razie prędzej prowadzi do celu; często zaś podamy sposoby obliczenia według obydwu metod, których wyniki służą wtedy do wzajemnego sprawdzenia.

Naukę o równowadze sił, wyłożoną sposobem wykreślnym, nazywamy statyką wykreślną (n. *graphische Statik*, fr. *statique graphique*, an. *graphic statics*). W dalszym ciągu przypuszczając będziemy znajomość głównych zasad mechaniki rozumowej. Dla związku i przypomnienia ich czytelnikom wyłożymy je jednak w poszczególnych rozdziałach, ale jak najkrócej i tylko o tyle, o ile one służą za podstawę dalszych praw i twierdzeń,

wchodzących w zakres statyki zastosowanej. Główniejsze zasady zaś statyki wykreślnej wyłożymy w pierwszym rozdziale.

Stąd wynika następujący podział przedmiotu:

- A. Wiadomości wstępne ze statyki wykreślnej.
- B. Wytrzymałość zespołów drewnianych i żelaznych.
- C. Teorya sklepień.
- D. Budowle ziemne.
- E. Mury oporowe.

Jako dodatek:

Literatura.

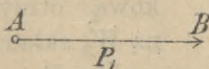
A. Wiadomości wstępne ze statyki wykreslnej.

I. Składanie sił.

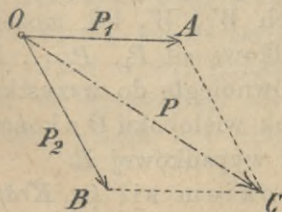
§. I. Siły przecinające się w jednym punkcie.

Do oznaczenia siły (n. *Kraft*, fr. *force*, an. *force*, cz. *siła*) potrzebne są trzy znamiona: jej wielkość (n. *Grösse*, fr. *grandeur*, *intensité*, an. *magnitude*, cz. *wielikost*), kierunek (n. *Richtung*, fr. *direction*, *ligne d'action*, an. *direction*, *line of action*, cz. *směr*) i punkt zaczepienia lub przyłożenia (n. *Angriffspunkt*, fr. *point d'application*, an. *point of action*, of *application*). Ponieważ punkt zaczepienia w kierunku siły możemy dowolnie przelożyć, wystarczy do oznaczenia siły zamiast punktu zaczepienia położenie siły (n. *Lage*, fr. *position*, an. *position*), t. j. jeden punkt, przez który kierunek siły przechodzi. Wszystkie te znamiona dadzą się łatwo przedstawić wykreslnie zapomocą linii prostej, której długość zawiera tyle jednostek długości, ile jednostek siły zawiera siła i której kierunek i po-

rys.1.



rys.2.



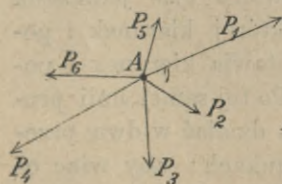
łożenie przedstawia kierunek i położenie siły. Po tej samej linii prostej może siła działać w dwu przeciwnych kierunkach; aby więc określić dokładnie, w którym kierunku działa dana siła, czyli jaki jest jej tok (fr. *sens*), dodajemy strzałkę w odpowiednim kierunku (rys. 1.). Nazywamy siłę albo jedną literą P_1, P_2, \dots , lub też dwiema literami n. p. AB , przyczem porządek liter oznacza tok siły.

Jeżeli dwie siły P_1 i P_2 (rys. 2.) przecinają się w punkcie O, to możemy je zastąpić jedną siłą R , którą nazywamy wypadkową

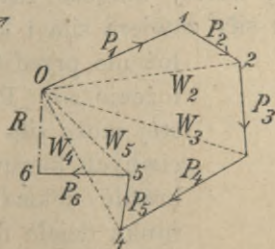
lub wynikową (n. *Resultirende*, fr. *resultante*, an. *resultant*, cz. *výslednice*), a siły P_1 i P_2 składowymi (n. *Componente*, fr. *composante*).

Wiemy, że jeżeli dwie siły działają na punkt materyalny, to drogi, które punkt pod działaniem tych sił w jednostce czasu przebiegnie, są proporcjonalne do ich wielkości, a zatem do OA i OB . Jeżeli siły P_1 i P_2 równocześnie działają na punkt O , to ten punkt przy końcu jednostki czasu znajdzie się w punkcie C , gdyż droga spowodowana siłą P_1 jest OA , a siłą P_2 jest AC , względnie OB . Długość OC przedstawia więc siłę, którą punkt O poruszony, znajdzie się w jednostce czasu także w punkcie C , a zatem siłę zastępującą działanie sił P_1 i P_2 , czyli wypadkową. Z tego wynika następnie prawidło składania dwu sił przecinających się: wykreślamy siłę $P_1 = OA$, z punktu A wykreślamy $AC \parallel OB = P_2$ i łączymy punkt O z punktem C ; prosta OC jest wypadkową. Do punktu C dojdziemy jednak także, wykreśliwszy $P_2 = OB$, a z punktu B $BC \parallel OA = P_1$. A zatem porządek, w którym składamy siły, jest obojętny.

Mając złożyć kilka sił, przecinających się w jednym punkcie (rys. 3.), postępujemy w ten sposób, że składamy najprzód



rys. 3.



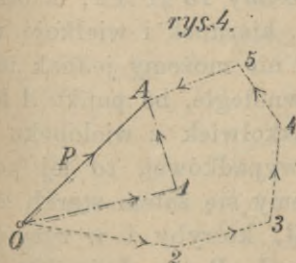
dwie siły P_1 i P_2 , z których wypadkową W_2 składamy następnie z siłą $P_3 = 23$; wypadkową otrzymaną W_3 składamy z siłą $P_4 = 34$, te siły dają znowu wypadkową W_4 , którą składamy z siłą P_5 itd.... P_n składamy wreszcie z wypadkową W_{n-1} i otrzymujemy wypadkową wszystkich sił R . Wykreślanie prostych W_2 , W_3 itd. możemy opuścić, a zatem chcąc znaleźć wypadkową sił P_1, P_2, \dots, P_n , kreślimy wielobok, którego boki są równoległe do wszystkich sił po porządku. Prosta, łącząca początek wieloboku O z końcem jego n (tu 6), daje wielkość i kierunek wypadkowej R .

Wielobok ten nazywamy wielobokiem sił (n. *Kräftepolygon*, fr. *polygon de forces*, an. *force polygon*, cz. *čara složek*),

a może on być płaskim lub przestrzennym, według tego, czy wszystkie siły składowe działają w jednej płaszczyźnie, czy nie. Z rys. 3. wynika, że rzut wypadkowej na jakąbądź prostą jest równy algebraicznej sumie rzutów składowych. Porządek, w jakim siły składamy, jest tu obojętny; dla dwu sił udowodni- liśmy to powyżej, dla więcej sił zaś, zmieniając porządek dwu po sobie następujących sił, możemy uzyskać dowolny porządek.

Dla równowagi (n. *Gleichgewicht*, fr. *équilibre*, an. *equilibrium*) tj., aby punkt, na który siły działają, pozostał w spo- czynku, wypadkowa R wszystkich sił musi być równą zeru czyli ostatni punkt wieloboku musi przypaść na początkowy punkt wieloboku O , a zatem wielobok musi być zamkniętym. Dla wieloboku w płaszczyźnie musi więc być dla równowagi suma rzutów składowych na dwie przecinające się proste równa zeru.

Rozkładanie (fr. *décomposition*) siły na składowe jest bardzo łatwe. Chcąc rozłożyć siłę P (rys. 4.) na składowe, czy- nimy ją wypadkową dowolnych sił $O1$ i $1A$, lub też $O2$, 23 ,



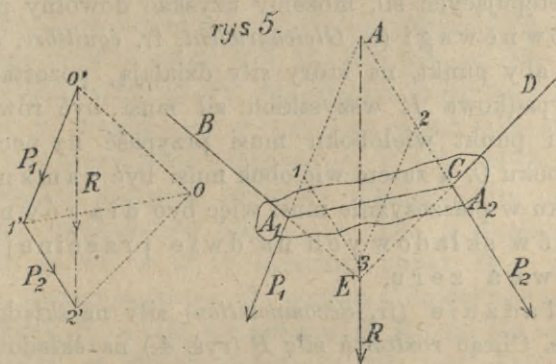
34, 45, 5A. Widzimy, że można znaleźć nieskończoną ilość skła- dowych, dających jako wypad- kową siłę P . Aby więc zadanie było oznaczone, muszą być dane pewne warunki. Jeżeli n.p. roz- kładamy siłę P na dwie skła- dowe, mogą być dane wielkość i kierunek jednej siły składowej, lub też wielkości albo kierunki obu składowych. Rozwiązywanie

podobnych zadań sprowadzamy zatem do wykreślnego rozwią- zywania trójkąta z trzech danych elementów.

Kierunek wypadkowej wyznacza nam przytem kierunki sił składowych, jeżeli pamiętać będziemy, że obieg strzałek sił składowych w wieloboku sił jest przeciwny tokowi wypadkowej, czyli, że wypadkowa jest równą i wprost przeciwną sile, którą dodaćby trzeba, aby wielobok był zamknięty.

§. 2. Siły działające w płaszczyźnie na układ punktów stale połączonych. Wielobok sznurowy.

Niechaj siły P_1 i P_2 działają na dwa punkty stale połączone A_1 i A_2 (rys. 5.). Przedłużmy kierunki obu sił aż do przecięcia się w punkcie A , to możemy te siły złożyć, jak wyżej.



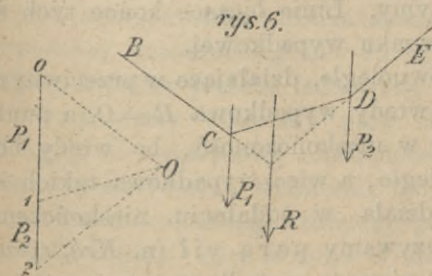
Jeżeli $A_1 = P_1$ a $A_2 = P_2$, to wykreślmy $13 \parallel A_2$, a otrzymamy $A_3 = R$, a zatem położenie, kierunek i wielkość wypadkowej. Tego sposobu składania sił nie możemy jednak użyć w wypadku, gdy siły składowe są równoległe, bo punkt A leży w takim razie w nieskończoności i jakkolwiek z wieloboku sił otrzymalibyśmy wielkość i kierunek wypadkowej, to jej położenie byłoby nam nieznanem. Będziemy się zatem starali znaleźć inny ogólny sposób składania sił, któryby i w tym wypadku dał się zastosować. Rozłożmy siłę P_1 na dwie dowolne składowe A_1B i A_1C , których wielkość otrzymamy z wieloboku sił $O'O$ i $O1'$. Również rozłożmy siłę P_2 na dwie składowe, z których jedna niech będzie równa i wprost przeciwna sile $A_1C = 1'O$. Z wieloboku sił otrzymamy kierunek i wielkość drugiej składowej $O2'$, wykreślamy więc $CD \parallel O2'$. Zamiast sił P_1 i P_2 mamy więc teraz cztery siły, z których dwie jednak A_1C i CA_1 się znoszą tak, że zostają tylko dwie BA_1 i DC . Przez ich punkt przecięcia się E przechodzi więc wypadkowa $R \parallel O'2'$. Kierunki sił A_1B i A_1C obraliśmy dowolnie, siły te przecinają się w O . Jeżeli teraz przyjmujemy inne kierunki sił składowych, przecinające się w innym punkcie O' , to ponieważ

punkty O' i $1'$ w wieloboku sił są stałe, punkt przecięcia się kierunków sił składowych O' określa dokładnie ich kierunki. Możemy więc zamiast tych dowolnych kierunków obrać dowolnie punkt O przecięcia się tych dwu sił w wieloboku sił. Punkt ten nazywamy biegunem (n. *Pol*, fr. *pôle*, an. *pole*), wielobok BA_1CD wielobokiem sznurowym (n. *Seilpolygon*, fr. *polygone funiculaire*, an. *funicular, cord or link polygon*), bo gdy w miejsce linii matematycznych tego wieloboku pomyślimy sobie sznury, zaś w B i D zaczepimy siły równe OO' i $O2'$, to system ten będzie w równowadze, a proste OO' , $O1'$ i $O2'$ będą przedstawiały ciągnięcia (względnie ciśnienia) sznurów. Linie, łączące biegun z wierzchołkami wieloboku sił, nazywamy promieniami (n. *Strahl*, fr. *rayon polaire*, an. *ray*).

§. 3. Siły równoległe.

Mając złożyć dwie siły równoległe (n. *parallel*, fr. *parallèle*, cz. *rovnoběžné*, (rys 6.) P_1 i P_2 , wykreślamy wielobok

sił $O12$, który tu staje się jedną linią prostą, równoległą do kierunku sił. Wypadkowa R równa się w tym wypadku algebraicznej sumie składowych, więc $R = O2$. Aby otrzymać położenie wypadkowej R , wybieramy dowolnie biegun O , kreślimy promienie, a do nich równoległe boki wieloboku sznurowego. Przekięcie się jego boków skraj-



nych wyznacza wedle poprzedniego paragrafu położenie wypadkowej, równoległej do składowych:

Jeżeli mamy złożyć dwie siły P_1 i P_2 (rys. 7.) równoległe, ale działające w przeciwnych kierunkach, postępujemy w ten sam sposób. Wypadkowa jest tu różnicą sił składowych i ma kierunek siły większej. Punkt przecięcia się boków skrajnych C wyznacza położenie wypadkowej.

Z rysunku widzimy, że trójkąty $O12$ i DAE są podobne, a stąd $AE:AB=P_2:OO$, zatem

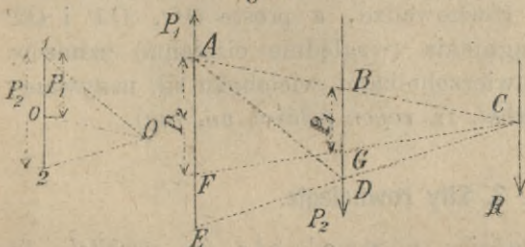
$$AE \cdot OO = P_2 \cdot AB; \dots \dots \dots 1)$$

dalej są także trójkąty ABD i $OO1$ podobne, więc

$$BD:AB=P_1:OO, \text{ a stąd} \\ BD \cdot OO = P_1 \cdot AB \dots \dots \dots 2)$$

Podzieliwszy rów. 2) przez rów. 1), otrzymamy

$$\frac{BD}{AE} = \frac{P_1}{P_2} \dots \dots \dots 3)$$



A zatem jeżeli na kierunkach sił P_1 i P_2 odetniemy $AF = P_2$ i $BG = P_1$, to prosta FG musi przechodzić także przez C .

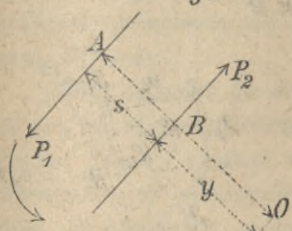
A więc dla dwu sił równoległych, ale działających w przeciwnych kierunkach, możemy wyznaczyć położenie wypadkowej, jeżeli wielkość siły P_1 odetniemy na kierunku siły P_2 i na odwrót i końce tych sił połączymy. Linie łączące końce tych sił AB i FG przetną się na kierunku wypadkowej.

Jeśli jednak dwie siły równoległe, działające w przeciwnych kierunkach, są sobie równe, wtedy wypadkowa $R = 0$, a punkt zaczepienia jej C przechodzi w nieskończoność, bo wtedy bok pierwszy i ostatni są równoległe, a więc wypadkowa takich sił jest nieskończenie małą i działa w oddaleniu nieskończenie wielkim. Dwie siły takie nazywamy parą sił (n. *Kräftepaar*, fr. *couple*, cz. *dvojica sil*). Ponieważ wypadkowa pary sił jest równa zero, więc działając na system punktów stale połączonych nie wywołuje ona ruchu postępowego, lecz ruch tylko obrotowy w kierunku wskazanym strzałką (rys. 8.).

§. 4. Moment statyczny.

Para sił nie mierzy się wielkością wypadkowej, bo ta równa się zero, lecz działaniem jej obrotowym, które wyznaczamy momentem statycznym, (n. *statisches Moment*, *Drehungsmoment*, fr. *moment*, an. *moment*, cz. *statyczny moment*). Moment danej siły ze względu na prostą, około której ruch ma nastąpić.

czyli ze względu na oś momentu (n. *Drehungsaxe*, fr. *axe du moment*), jestto iloczyn siły przez ramię momentu (n. *Hebelarm*, fr. *bras de levier*, an. *lever arm*) czyli odległość siły od osi momentu. Jeżeli przez ramię momentu i siłę położymy płaszczyznę, to przecina ona oś w środku momentu (n. *Momentenpunkt*, fr. *centre du moment*, an. *centre of moment*). Jeżeli więc siły działają w płaszczyźnie, to spuściwszy prostopadłą na kierunek danej siły z środka momentu, otrzymamy jej ramię momentu. Moment, którego kierunek obrotu jest zgodny z obrotem wskazówki na zegarze, będziemy nazywać dodatnim (n. *positiv*, fr. *positif*, an. *positive*), zaś moment działający w przeciwnym kierunku ujemnym (n. *negativ*, fr. *negatif*, an. *negative*). Moment pary sił ze względu na dowolny środek momentu O (rys. 8.) nazwijmy M_1 , tedy $P_1 = P_2$,



$$M_1 = - P_1 \cdot OA + P_2 \cdot OB = - P_1 (s + y) + P_2 y = - P_1 s.$$

Ponieważ y znika z rachunku, więc moment pary sił zostaje ten sam dla jakiegokolwiek środka momentu i równy jest jednej sile pomnożonej przez odstęp obu sił czyli prostopadłą, spuszczoną z jakiegokolwiek punktu jednej siły na drugą.

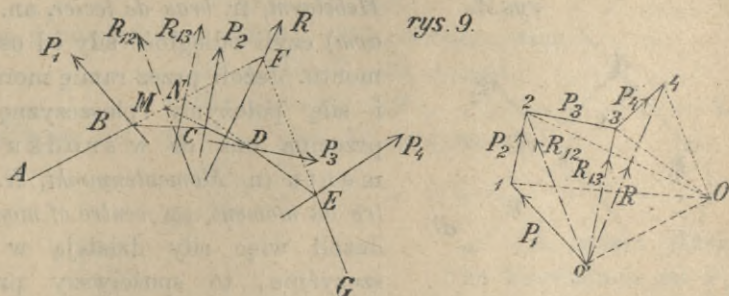
Jeżelibyśmy obie siły pary sił złożyli, otrzymalibyśmy według §. 3. wypadkową nieskończenie małą, działającą w oddaleniu nieskończenie wielkiem; moment jej będzie więc $0 \cdot \infty$, równy ilości skończonej, którąśmy powyżej wyznaczyli.

Dwie pary sił, złożone z sił nierównych, ale mające równy moment statyczny, są równe tak, że możemy jedną zastąpić drugą.

§. 5. Składanie ilukolwiek sił.

Mając złożyć kilka sił P_1, P_2, P_3, P_4 (rys. 9.), składamy najprzód dwie siły P_1 i P_2 , a mianowicie kreślimy wielobok sił 012, obieramy dowolnie punkt O , kreślimy promienie $OO, O1, O2$ i równoległe do nich wielobok sznurowy $ABCD$. Przez M , punkt przecięcia się boków AB i CD , przechodzi R_{12} wypadkowa tych dwóch sił P_1 i P_2 , wielkość jej jest $O2$. Z tą wypadkową R_{12} złożymy teraz siłę P_3 . Uskuteczmy to, jeżeli

w wieloboku sił wykreślimy $23 = P_3$, poprowadzimy z tego samego bieguna O promień 03 i wykreślimy wielobok sznurowy.



Pierwszym bokiem, równoległym do 00 , niech będzie prosta AM , drugim $MD \parallel 02$, trzecim będzie $DE \parallel 03$. R_{13} , wypadkowa sił R_{12} i P_3 , czyli P_1 , P_2 i P_3 , będzie więc równa 03 i przechodzić przez punkt N przecięcia się boków skrajnych AB i DE . Z siłą R_{13} złożymy dalej siłę P_4 i otrzymamy w ten sam sposób wypadkową wszystkich sił $R = 04$. Przechodzić ona będzie przez punkt F przecięcia się boków skrajnych AB i EG .

Łatwo pojmujemy, że jeżeli przy składaniu sił chodzi nam tylko o ostateczną wypadkową R , to możemy tok konstrukcyi uprościć, opuszczając wyznaczenie sił R_{12} , R_{13} itd. A więc wystarczy, jeżeli dla danych sił P_1 , P_2 , P_3 i P_4 wykreślimy wielobok sił, obierzemy dowolnie biegun O , poprowadzimy promienie i wykreślimy równoległe do tych promieni wielobok sznurowy $ABCDEG$. Wypadkowa $R = 04$ przechodzi przez punkt F przecięcia się boków skrajnych wieloboku sznurowego, jakiesmy to powyżej udowodnili.

Wielobok sił i wielobok sznurowy są figurami odwrotnemi (n. *reciprok*), gdyż, jak widzimy z rys. 9., każdemu bokowi wieloboku sił czyli każdej sile odpowiada wierzchołek kąta w wieloboku sznurowym i odwrotnie. Przy tem samym położeniu bieguna odchylają się dwa po sobie następujące boki wieloboku sznurowego n. p. AB i BC tem więcej, im większa jest odnośna siła P_1 , a więc kąt ABC jest tem większy, im większa jest siła P_1 . Gdyby $P_1 = 0$, toby i kąt $ABC = 0$, t. j. linie AB i BC tworzyłyby jedną prostą. Kąt wieloboku sznurowego pozwala także wnioskować o kierunku siły, dwa boki jego bowiem nachylone są zawsze w kierunku strzałki. Każdy bok wieloboku

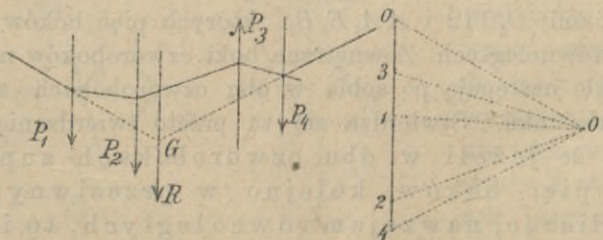
snurowego jest równoległy do promienia wieloboku sił, łączącego biegun z punktem przecięcia się dwóch sił, między którymi bok ten leży. Tak n. p. BC jest równoległym do $O1$, a 1 jest punktem przecięcia się sił P_1 i P_2 w wieloboku sił, między którymi BC leży.

Gdy dodamy do sił P_1, P_2, P_3 i P_4 siłę $-R$, równą R , mającą to samo położenie, lecz działającą w kierunku przeciwnym, wtedy nastąpi równowaga, to jest dany układ punktów pozostanie w spoczynku. Widzimy więc, że dla równowagi musi się zamknąć nie tylko wielobok sił, ale i wielobok sznurowy, gdyż pierwszy i ostatni jego bok muszą się przecinać na kierunku ostatniej siły.

Gdy wielobok sił się zamyka, a wielobok sznurowy nie, wtedy złożony wszystkie siły składowe prócz jednej P_n , otrzymamy wypadkową R_1 i P_n , które muszą być sobie równe i wprost przeciwne, bo z powodu, że wielobok sił się zamyka, $R = R_1 + P_n = 0$, czyli $R_1 = -P_n$, z powodu zaś, że wielobok sznurowy się nie zamyka, położenie R_1 będzie inne, niż P_n ; a zatem po złożeniu wszystkich sił otrzymamy dwie siły równoległe, równe a wprost przeciwne, czyli parę sił, której działanie mierzymy momentem. Układ punktów nie będzie wtedy miał wprawdzie ruchu postępowego (bo $R=0$), lecz będzie miał ruch obrotowy. Analitycznie możemy wyrazić powyższe twierdzenie w ten sposób:

Jeżeli rozłożymy wszystkie siły na składowe, działające w dwu przecinających się kierunkach, to dla równowagi musi być suma składowych wszystkich sił w obydwu kierunkach równa zeru (wielobok sił zamknięty)

rys. 10.

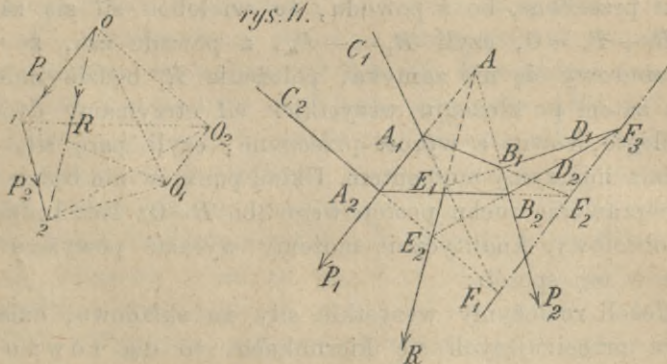


i suma momentów równa zeru (wielobok sznurowy zamknięty).

Wszystko cośmy powyżej mówili o składaniu sił w ogóle, da się zastosować do sił równoległych (rys. 10.). Chcąc złożyć siły równoległe P_1, P_2, P_3 i P_4 , kreślimy wielobok sił, który tu przedstawia jedna linia prosta, kreślimy dalej wielobok sznurowy, którego boki skrajne przedłużone przecinają się w punkcie G , wyznaczającym położenie wypadkowej R . Jej wielkość ($R=O_4$) i kierunek otrzymujemy z wieloboku sił.

§. 6. Dalsze własności wieloboku sznurowego.

Z poprzedniego widzimy, że przecięcie się dwu skrajnych boków wieloboku sznurowego wyznacza położenie wypadkowej, co odnosi się nie tylko do dwóch, ale i do więcej sił. Ponieważ wypadkowa musi przechodzić także przez punkt przecięcia się sił P_1 i P_2 , więc położenie jej jest AE_1 (rys. 11.), przyczem AE_1



musi być równoległe do O_2 . Ale proste O_2 i AE_1 są szóstymi bokami dwu czworoboków zupełnych (czworoboków wraz z obiema przekątnymi) O_1O_212 i $AA_1E_1B_1$, których pięć boków jest nawzajem równoległych. Zewnętrzne boki czworoboków nawzajem równoległe następują po sobie w obu czworobokach w przeciwnym kierunku. Stwierdza się tu przeto twierdzenie geometryczne, że jeżeli w obu czworobokach zupełnych mamy pięć boków, kolejno w przeciwnym kierunku licząc, nawzajem równoległych, to i szóste boki muszą być równoległe. Jeżeli biegun zmienimy i zamiast punktu O_1 obierzemy punkt O_2 , to otrzymamy inny wielobok sznurowy $C_2A_2B_2D_2$. Przez zmianę bieguna nie zmie-

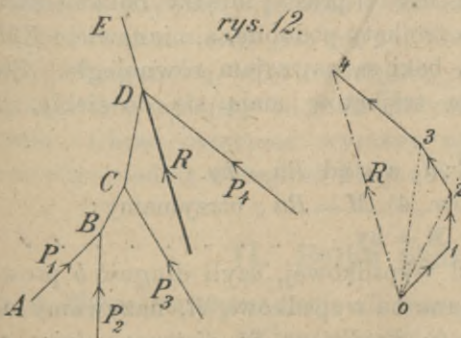
niamy wypadkowej, bo według §. 2. możemy biegun obracać dowolnie. Z tego wynika, że przecięcie się boków skrajnych E_2 musi znowu leżeć na prostej AE_1 . A więc gdy biegun przesuwa się w jakimkolwiek kierunku po płaszczyźnie, punkt przecięcia się boków skrajnych wieloboku sznurowego porusza się po linii prostej, wyznaczającej kierunek wypadkowej. Z rys. 11. możemy jednak udowodnić jeszcze jedno prawidło. Widzimy mianowicie, że bok O_1O_2 jest szóstym bokiem trzech czworoboków zupełnych $O_1O_2O_1$, $O_1O_2I_2$ i $O_1O_2O_2$, którego odpowiednimi bokami w czworobokach zupełnych $F_1F_2A_1A_2$, $F_2F_3B_1B_2$ i $F_1F_3E_1E_2$ są F_1F_2 , F_2F_3 i F_1F_3 , a których reszta pięć boków jest nawzajem równoległa. Z tego wynika, że i szóste boki są równoległe, a więc boki F_1F_2 , F_2F_3 i F_1F_3 są równoległe do O_1O_2 a punkty przecięcia się F_1 , F_2 i F_3 muszą leżeć na prostej równoległej do O_1O_2 . Możemy zatem napisać następujące twierdzenie:

Jeżeli biegun posuwa się na płaszczyźnie w linii prostej, to wszystkie boki wieloboku sznurowego obracają się około punktów prostej, równoległej do drogi bieguna.

To samo twierdzenie da się udowodnić i dla więcej sił składowych.

Przypuśćmy teraz, że mamy złożyć siły P_1 , P_2 , P_3 i P_4 (rys. 12.) i że przyjmiemy biegun w O , w początku pierwszej siły P_1 i wykreślimy wielobok sznurowy $ABCDE$, to widzimy, że promienie wieloboku sił przedstawiają wtedy wielkość i kierunek wypadkowych,

n. p. O_3 przedstawia wypadkową sił P_1 , P_2 i P_3 , a boki wieloboku sznurowego, równoległe do tych promieni, wyznaczają położenie tych wypadkowych. A zatem, jeżeli biegun przyjmujemy w początku pierwszej siły wieloboku sił, to boki wieloboku sznurowego wyznaczają poło-



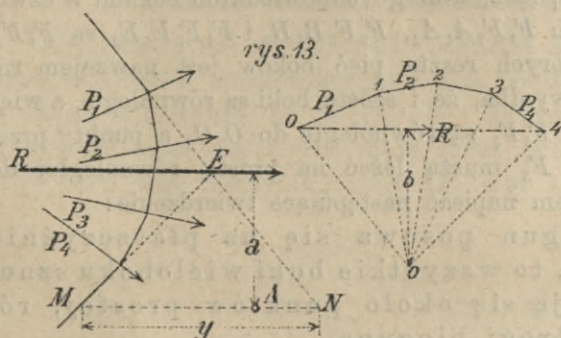
żenie tych wypadkowych. A zatem, jeżeli biegun przyjmujemy w początku pierwszej siły wieloboku sił, to boki wieloboku sznurowego wyznaczają poło-

zenie wypadkowych wszystkich sił od pierwszej aż do bok ten poprzedzającej, promienie zaś przedstawiają wielkości tych sił. Wielobok sznurowy staje się wtedy wielobokiem wypadkowych (cz. *čára výslednic*).

§. 7. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego.

Mając wyznaczyć sumę momentów statycznych kilku sił P_1, P_2, P_3 i P_4 ze względu na punkt dany A (rys. 12.), skła-

damy te siły w wypadkową R i wyznaczamy moment wypadkowej, który równa się algebraicznej sumie momentów sił składowych, gdyż wypadkowa, zastę-



pując w działaniu wszystkie siły składowe, sprawić musi taki sam moment, jak wszystkie składowe. Jeżeli prostopadłą spuszczoną z środka momentu A na wypadkową R nazwiemy a , to suma momentów sił P_1, P_2, P_3 i P_4 , równa momentowi wypadkowej

$$M = Ra \dots \dots \dots 4)$$

Poprowadźmy przez punkt A równoległą MN do wypadkowej i nazwijmy odcinek MN tej prostej między bokami skrajnymi y , to otrzymamy dwa trójkąty podobne, a mianowicie $EMN \sim O40$, bo wszystkie ich boki są nawzajem równoległe. Stąd wynika, że podstawy obu trójkątów mają się do siebie, jak wysokości, więc

$$y : a = R : b, \text{ a stąd } Ra = by.$$

Wstawiwszy wreszcie z rów. 4) $M = Ra$, otrzymamy:

$$M = by \dots \dots \dots 5)$$

Odległość bieguna od wypadkowej, czyli długość b prostopadłej, spuszczonej z bieguna na wypadkową R , nazywamy odległością biegunową (n. *Poldistanz*, fr. *distance polaire*, an. *pole distance*, cz. *vzdalenost polárná*). Możemy więc rów. 5) wyrazić w następujących słowach:

Moment statyczny sił P_1, P_2, P_3, \dots jest równy iloczynowi odcinka y między bokami skrajnymi wieloboku sznurowego równoległej do wypadkowej, przechodzącej przez środek momentu, przez odległość biegunową.

Odległość biegunową możemy uważać też jako siłę, a mianowicie jako składową, prostopadłą do wypadkowej sił, wyrażonych skrajnymi promieniami OO i $O4$. Ponieważ według rów. 5) otrzymujemy moment, mnożąc odcinek y odległością biegunową b , więc dobrze będzie, jeśli biegun O przyjmiemy tak, aby odległość biegunowa dała się wyrazić według podziałki sił jakąś liczbą całą n. p. 1, 2, 4, 5, 10, 50; to nam ułatwi odczytanie momentu na podziałce.

Moment jest, jak wiemy, iloczynem siły przez długość. Mierzymy więc moment jednostką, powstałą z pomnożenia siły przez jednostkę długości. Jeżeli zatem n. p. mierzymy siły kilogramami, a długości metrami, to jednostkę, którą mierzymy moment, nazywamy kilogrammetrem (kgm). Jeżeli odcinek y mierzymy jednostką długości, to musimy wtedy odległość biegunową uważać za siłę i mierzyć jednostką sił i na odwrót.

Chcąc uniknąć mnożenia, możemy wykreślić podziałkę, na której odczytany odcinek y da nam wprost moment w kgm . Aby wyznaczyć tę podziałkę, dość będzie pamiętać o tem, że chcąc odczytać daną długością liczbę b razy większą, musimy jednostkę podziałki wziąć b razy mniejszą. A więc odczytujemy najprzód b na podziałce sił i robimy jednostkę długości b razy mniejszą, a uzyskamy podziałkę dla momentów.

Ponieważ moment jest równy iloczynowi odcinka y przez odległość biegunową, więc im większą przyjmiemy odległość biegunową, tem mniejszy odcinek otrzymamy dla momentu i odwrotnie. Chcąc otrzymać wyraźny rysunek, musimy przyjąć zatem odpowiednią odległość biegunową.

II. Belka prosta.

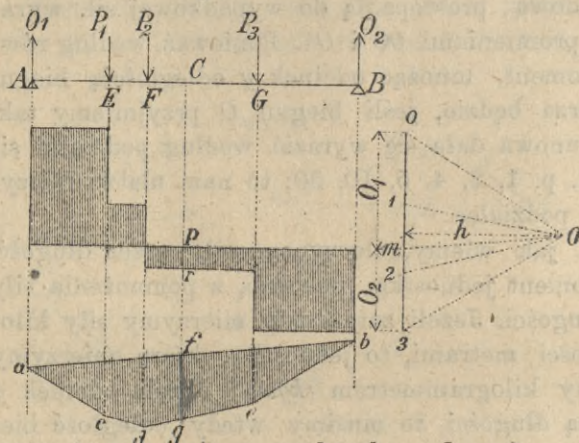
§. 8. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla obciążenia ciężarami skupionymi.

Dotychczas zajmowaliśmy się składaniem sił w płaszczyźnie w ogólności; teraz będziemy mówić o działaniu ich na belkę.

Belką, dźwigarem (n. *Träger*, fr. *poutre*, an. *girder*; *truss*, cz. *trám*), nazywamy część budowli, służącą do przeniesienia siły na podpory. Linie, łączącą środki ciężkości pojedynczych przekrojów, nazywamy osią belki (n. *Axe*, fr. *axe*.

an. *axis*, cz. *osa*). Na belkę *AB* (rys. 14.), podpartą w dwu punktach, działają pionowe siły P_1 , P_2 i P_3 . Gdyby belka nie była podpartą, nastąpiłby ruch w kierunku wypadkowej; jeżeli zaś belka jest pod-

rys. 14.



parta, to powstają w punktach podparcia czyli podporach (n. *Auflager*, fr. *appui*, an. *support*) *A* i *B* siły, utrzymujące cały układ w równowadze. Siły te O_1 i O_2 nazywamy oddziaływaniami podpór (n. *Pfeilerdruck*, *Auflagerdruck*, fr. *réaction des appuis*, an. *supporting force*, *reacting force*, *reaction*, cz. *reakcje podporové*).

Naszem zadaniem jest teraz wyznaczenie oddziaływań, które, jak już wspomnieliśmy, muszą utrzymywać belkę w równowadze. Kierunek oddziaływań zależy od kształtu i rodzaju łożysk (n. *Lager*, fr. *support*, *coussinet*, an. *support*, *bearing*), części budowli, na których bezpośrednio belka spoczywa. Jeżeli oddziaływanie są pionowe, belkę nazywamy wtedy belką prostą (n. *gerader Träger*, *Balkenträger*, *Balken*, fr. *poutre droite*, an. *straight girder*, *beam*, cz. *trám prostý*) i o takich tylko belkach będziemy w tym rozdziale mówić. Chcąc wyznaczyć wielkość oddziaływań O_1 i O_2 , wykreślamy wielobok sił, robiąc $01 = P_1$, $12 = P_2$, $23 = P_3$. Wiemy, że dla równowagi wielobok musi się zamknąć, więc $O_1 + O_2 = 30$. Znamy zatem sumę obu oddziaływań; aby zaś wyznaczyć wielkość każdego oddziaływania z osobna, wykreślamy wielobok sznurowy *acdeb*, kreśląc

$ac \parallel OO$, $cd \parallel O1$ itd. Dla równowagi wielobok sznurowy musi być zamknięty. Ostatni bok wieloboku sznurowego, który musimy wykreślić, aby wielobok zamknąć, otrzymamy, łącząc punkty a i b przecięcia się skrajnych boków z kierunkami oddziaływań, a więc tu z pionowemi przez A i B .

Prostą ab nazywamy z tego powodu linią zamykającą albo zamykającą (n. *Schlusslinie*, fr. *ligne finale*, *limitante*, *droite de fermeture*, an. *closing line*, cz. *základna strana*). Poprowadziwszy odnośny promień $Om \parallel ab$, otrzymamy punkt m , który podzieli długość $O3$ na dwie części $3m = O_2$ i $mO = O_1$, odpowiadające wierzchołkom a i b wieloboku sznurowego. Teraz bowiem siły P_1, P_2, P_3, O_2 i O_1 są w równowadze, bo wielobok sił i wielobok sznurowy się zamykają.

Ażeby wyznaczyć moment wszystkich sił, po lewej stronie punktu C leżących, ze względu na punkt C postępujemy, jakto wskazano w poprzednim paragrafie. Na rys. 14. mamy wykreślony odnośny wielobok sznurowy. Ponieważ wypadkowa jest pionową, więc spuszczyliśmy z punktu C pionową, a odcinek $y = fg$ między bokami skrajnymi ab i de , pomnożony przez odległość biegunową h da moment $M = hy$. Zamiast mnożyć odcinek przez odległość biegunową h , możemy zmienić dla momentów podziałkę długości w stosunku $1:h$, a więc jeżeli stosunek podziałki długości jest $\frac{1 \text{ cm}}{a \text{ m}}$, t. j. jeżeli 1 cm w rysunku przedstawia a metrów w naturze, a odległość biegunowa h , jako siła uważana, równa się h tonnom, to stosunek podziałki, na której y odczytujemy wprost jako moment, będzie $\frac{1 \text{ cm}}{ah \text{ tm}}$, t. j. 1 centymetr na rysunku będzie przedstawiał ah tonmetrów. Widzimy więc, że przy użyciu tej podziałki wszystkie odcinki pionowe w wieloboku sznurowym $acdegb$ przedstawiają wprost momenty w odnośnych punktach belki. Powierzchnię, utworzoną tymi odcinkami, $acdegb$ nazywamy powierzchnią momentów (n. *Momentenfläche*, fr. *surface représentative des moments*), gdyż ona okazuje wielkość momentów wzdłuż całej belki przy danem obciążeniu. Ponieważ siły, po lewej stronie przekroju C działające (wraz z oddziaływaniem), starają się belkę tem bardziej zgiąć, im większy ich moment ze względu na punkt C , przeto nazywamy w tym wypadku moment statyczny tych sił także momentem zginającym (n. *Biegunungsmoment*, fr. *moment fléchissant*, an. *bending moment*, cz. *moment ohybu*).

Jeżeli dla punktu C utworzymy wypadkową wszystkich sił po lewej stronie przekroju działających (wraz z oddziaływaniem) i rozłożymy ją na dwie składowe, jedną prostopadłą do osi w punkcie C , a drugą, działającą w kierunku osi, to składową, prostopadłą do osi w punkcie C , nazywamy siłą poprzeczną (n. *Transversalkraft*, *Querkraft*, *Scherkraft*, fr. *effort tranchant*, an. *shearing force*, cz. *сила příčna*, *posuwajica*), bo ona stara się ściąć belkę w kierunku poprzecznym t. j. prostopadłym do osi. Dla belki prostej poziomej i obciążenia pionowego siłą poprzeczną jest suma wszystkich sił, po lewej stronie przekroju działających. Siłę poprzeczną nazywamy dodatnią (n. *positiv*, fr. *positif*, an. *positive*), jeżeli działa w kierunku z dołu do góry na lewą część belki, w przeciwnym zaś razie ujemną (n. *negativ*, fr. *negatif*, an. *negative*). Oznaczając Q siłę poprzeczną w punkcie C , otrzymamy $Q = O_1 - P_1 - P_2$, a więc $Q = m0 - 01 - 12 = m2$. Punkty te m i 2 możemy też otrzymać, poprowadziwszy z bieguną O Om i $O2$, równoległe do przeciętych boków wieloboku sznurowego ab i de . A zatem dla otrzymania siły poprzecznej w danym punkcie C , kreślimy promienie równoległe do boków wieloboku sznurowego przeciętych pionową przez C , a odcinek $m2$ na wieloboku sił przedstawia nam siłę poprzeczną. Poprowadziwszy linie poziome z punktów m i 2 , otrzymamy $pr = m2 = Q$.

Jeżeli to samo uczynimy dla innych punktów, t. j. poprowadzimy z punktu m i z punktów 0 , 1 , 2 i 3 poziome, otrzymamy linię schodową, z której widzimy, że siła poprzeczna zmienia się tylko w punkcie, gdzie działa jaka siła, a między dwiema siłami jest stałą.

Z rysunku widzimy, że siła poprzeczna zmienia swój znak, a więc tutaj staje się ujemną, pod ciężarem, w obrębie którego leży punkt m . A zatem chcąc wyznaczyć ciężar, pod którym siła poprzeczna zmienia swój znak, należy wykreślić promień Om równoległy do zamykającej. Ciężar, który w wieloboku sił przetnie ten promień, jest ciężarem szukanym.

Przykład. Rysunek 14. przedstawia belkę prostą AB o rozpiętości $21,3\text{ m}$, na którą działają siły $P_1 = 9\text{ t}$, $P_2 = 9\text{ t}$, $P_3 = 7,5\text{ t}$ w punktach E , F i G . Przyjęliśmy przytem następane podziałki: dla długości $1:500$ czyli $\frac{1\text{ mm}}{0,5\text{ m}}$, dla sił $\frac{1\text{ mm}}{1\text{ t}} = \frac{1\text{ cm}}{10\text{ t}}$. Odległość biegunowa $h = 20\text{ mm}$, więc jako siła uważana oznacza 20 t ; podziałkę dla momentów, wyrażonych odcinkami y , znajdziemy teraz zmniejszając podziałkę długości w stosunku

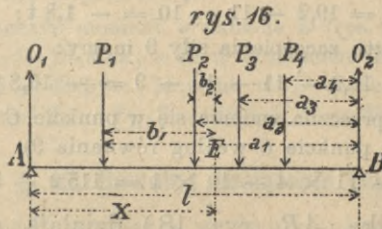
1:20, więc $\frac{1 \text{ mm}}{0,5 \times 20 \text{ tm}} = \frac{1 \text{ mm}}{10 \text{ tm}}$. Dla punktu C otrzymamy z rysunku jako moment $fg = 8,3 \text{ mm}$ czyli według podziałki momentów 83 tm . Siłę poprzeczną w C przedstawia rzędna pr , więc $Q = -3 \text{ t}$.

Jeżeli wszystkie siły, działające po lewej stronie danego przekroju C (rys. 15.), złożymy w wypadkową Q , to wypadkowa wszystkich sił po prawej stronie przekroju musi być $-Q$, bo wedle §. 5. suma wszystkich sił pionowych musi być równą zeru. Siła poprzeczna w punkcie C , jest zatem równa wypadkowej wszystkich sił po lewej stronie przekroju działających lub też wypadkowej wszystkich sił po prawej stronie działających z odmiennym znakiem. Czasem, jeśli n. p. po prawej stronie mamy tylko jedną siłę, korzystamy z tego ostatniego twierdzenia.

Ponieważ siły O_1, P_1, P_2, P_3 i O_2 , a zatem i siły Q i $-Q$ są w równowadze, więc obie siły Q muszą mieć to samo położenie.

§. 9. Analityczne wyznaczenie sił poprzecznych i momentów.

Jeżeli siły P_1, P_2, P_3 i P_4 działają na belkę AB (rys. 16.), a ich odległości od podpory B nazwiemy a_1, a_2, a_3 i a_4 , to



otrzymamy oddziaływanie O_1 , wyznaczając sumę momentów około punktu B , która dla równowagi ma być równą zeru. Gdyby bowiem suma momentów wszystkich sił działających na belkę nie była równa zeru, to wypadkowy moment sprawiłby obrót belki, co się sprzeciwia założeniu. A zatem:

$$O_1 l - P_1 a_1 - P_2 a_2 - P_3 a_3 - P_4 a_4 = 0,$$

$$\text{a stąd } O_1 = P_1 \frac{a_1}{l} + P_2 \frac{a_2}{l} + P_3 \frac{a_3}{l} + P_4 \frac{a_4}{l} \quad \dots \quad 6)$$

a że suma sił pionowych według §. 5. ma być równą zeru, więc

$$O_2 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - O_1 \quad \dots \quad 7)$$

Siłę poprzeczną Q w punkcie E otrzymamy, tworząc sumę sił po lewej stronie punktu E działających, więc:

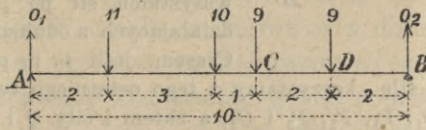
$$Q = O_1 - P_1 - P_2 \dots \dots \dots 8)$$

Nareszcie moment zginający uzyskamy, tworząc sumę momentów ze względu na punkt E sił, działających po lewej jego stronie. Zatem:

$$M = O_1 x - P_2 b_1 - P_2 b_2 \dots \dots \dots 9)$$

Przykład. Niechaj siły 11, 10, 9 i 9 t działają na belkę o rozpiętości 10 m w punktach, oznaczonych na rys. 17.

rys. 17



Według równania 6) mamy:

$$O_1 = \frac{1}{10} (11 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 2) = 19,2 \text{ t.}$$

$$O_2 = (11 + 10 + 9 + 9) - 19,2 = 39 - 19,2 = 19,8 \text{ t.}$$

Siła poprzeczna według równania 8) w punkcie C po lewej stronie punktu zaczepienia siły 9 jest:

$$Q = 19,2 - 11 - 10 = - 1,8 \text{ t;}$$

po prawej stronie punktu zaczepienia siły 9 mamy:

$$Q = 19,2 - 11 - 10 - 9 = - 10,8 \text{ t.}$$

A zatem siła poprzeczna zmienia się w punkcie C o 9 t. — Nareszcie otrzymamy moment w punkcie C według równania 9):

$$M = 19,2 \times 6 - 11 \times 4 - 10 \times 1 = 115,2 - 54 = 61,2 \text{ tm.}$$

Jeżeli na belkę AB (rys. 18.) działają siły $P_1, P_2, P_3, P_m, P_{m+1}, P_n$, to momenty w punktach zaczepienia sił dadzą się jeszcze wyznaczyć w inny sposób, wskazany przez *Pelletreau*.*)

Wedle rów. 6) $O_1 = \frac{1}{l} \sum Pa$, a moment w punkcie C

$$M_m = O_1 x_m - \sum_{m-1}^1 P (a - a_m).$$

Podobnie otrzymamy dla punktu D

$$M_{m+1} = O_1 x_{m+1} - \sum_m^1 P (a - a_{m+1}).$$

A stąd

$$M_{m+1} - M_m = O_1 (x_{m+1} - x_m) - (a_m - a_{m+1}) \sum_m^1 P$$

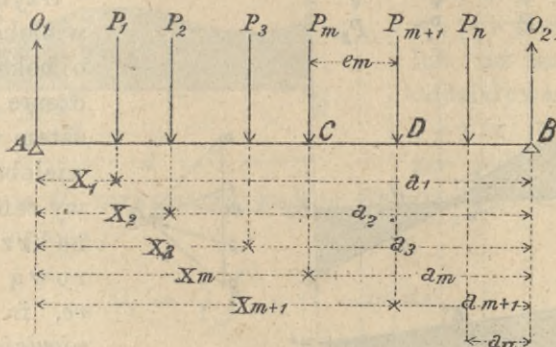
*) *Ann. des ponts et chaus.* 1887.

albo $\Delta M = M_{m+1} - M_m = e_m (O_1 - \Sigma_m^1 P)$

a że $O_1 - \Sigma_m^1 P = Q_m$, więc

$$\Delta M = e_m Q_m \dots \dots \dots 10)$$

rys. 18.



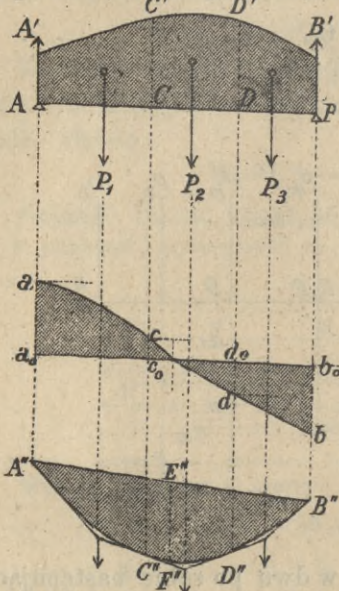
A zatem różnica momentów w dwu po sobie następujących punktach zaczepienia sił równa się odstępowi tych sił, pomnożonemu przez siłę poprzeczną.

Chcąc wyznaczyć moment w punkcie D (rys. 17.) otrzymamy $\Delta M = 2 \times - 10,8 = - 21,6 \text{ tm}$, a że w C moment $M = 61,2 \text{ tm}$, więc w D $M_1 = 61,2 - 21,6 = 39,6 \text{ tm}$. Moment w D możemy jeszcze inaczej wyznaczyć, mianowicie $M_1 = O_2 \cdot 2 = 19,8 \times 2 = 39,6 \text{ tm}$.

§. 10. Dowolne obciążenie ciągłe.

Na belkę AB, podpartą w dwu punktach, (rys. 19.) działa ciężar proporcjonalny do powierzchni kreskowanej. Ciężar taki niedziałający w jednym punkcie, lecz rozłożony na części belki lub też na całej belce, nazywamy obciążeniem ciągłym (n. *stetige Belastung*, fr. *charge répartie, continue*, an. *distributed load*, cz. *obtiženi spojite*). Powierzchnię AA'B'B nazywamy powierzchnią obciążenia (n. *Belastungsfläche*, fr. *surface représentative de charge*). Rzędna jakakolwiek n. p. CC', pomnożona przez dx , przedstawia wtedy ciężar na długości dx albo, gdy w myśli przyjmiemy ciężar na jednostce długości stały i taki sam, jak w punkcie C, przedstawia rzędna CC' ciężar na jednostkę długości czyli ciężar jednostkowy (cz. *oměrne obtiženi*).

Gdybyśmy podzielili powierzchnię obciążenia na niezliczoną ilość pasków, to moglibyśmy uważać je jako siły skupione, działające w środkach ciężkości pasków.



rys. 19.

Postępując dalej w znany sposób, otrzymalibyśmy wielobok sznurowy o bokach nieskończenie małych, a zatem widzimy, że wielobok sznurowy zamienia się tu na krzywą sznurową (n. *Seilcurve*, fr. *courbe funiculaire*, cz. *křivka výslednic*). Ponieważ jednak nie możemy

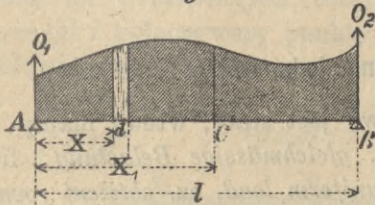
działać nieskończoną ilością sił, więc podzielmy powierzchnię obciążenia na mniejszą ilość pasków, tu n. p. na trzy paski, pionowemi CC' i DD' , oznaczmy powierzchnie tych pasków i proporcjonalne do nich ciężary P_1 , P_2 i P_3 , które zaczepiają w środku ciężkości pasków. Mamy więc tu trzy siły, dla których wykreślamy wielobok sił i wielobok sznurowy w znany sposób. Przedłużenia stycznych krzywej sznurowej w dwu punktach przecinają się, jak wiemy, w prostej, wyznaczającej kierunek wypadkowej, a więc styczne punktów linii sznurowej, odpowiadających punktom podziału A , C , D , B , przecinają się w pionowych, poprowadzonych przez środki ciężkości odnośnych pasków. Widzimy więc, że boki wieloboku sznurowego są stycznymi do linii sznurowej i że punkty styczności znajdują się w pionowych, przechodzących przez linie podziału. Otrzymawszy w ten sposób dostateczną ilość stycznych i punktów styczności, możemy wykreślić linią sznurową $A''C''D''B''$.

Podobnie otrzymamy i siły poprzeczne. W punkcie A siła poprzeczna równa się oddziaływaniu $O_1 = a_0 a$, w punkcie C $Q = O_1 - P_1 = m_0 - O_1 = m_1 = c_0 c$. W podobny sposób otrzymamy punkty d i b , a wszystkie łączymy linią krzywą. Im więcej

tych punktów wyznaczmy, tem dokładniej możemy wykreślić linię sił poprzecznych.

Dla obciążenia ciągłego dowolnego da się także analitycznie dowieść ważne twierdzenie, podane przez Schwedlera.

rys. 20.



dowolnego obciążenia ciągłego belki AB (rys. 20.) wyznaczmy w powyższy sposób, lub też analitycznie, oddziaływania. Jeżeli $q = f(x)$ oznacza ciężar jednostkowy, to

oddziaływanie O_1 otrzymamy według 6), uważając element qdx jako siłę skupioną,

$$O_1 = \frac{1}{l} \int_0^l q(l-x) dx \quad \dots \quad 11)$$

Wyznamy teraz dla punktu C w odległości x_1 od lewej podpory siłę poprzeczną i moment według 8) i 9), a otrzymamy

$$Q = O_1 - \int_0^{x_1} q dx \quad \dots \quad 12)$$

zaś

$$M = O_1 x_1 - \int_0^{x_1} q(x_1 - x) dx,$$

a stąd dla zmiennej x_1 pochodna:

$$\frac{dM}{dx_1} = O_1 - \int_0^{x_1} q dx = Q \quad \dots \quad 13)$$

Widzimy zatem, że dla dowolnego obciążenia ciągłego siła poprzeczna w każdym punkcie belki jest pochodną momentu. Z tego wynika bezpośrednio, że największość (maximum) momentów jest w tym punkcie, gdzie $Q = 0$ (rys. 19.).

Z rów. 12) wynika dalej

$$\frac{dQ}{dx} = -q,$$

a zatem :

$$q = - \frac{dQ}{dx} = - \frac{d^2M}{dx^2} \dots \dots \dots 14)$$

Stąd widzimy, że obciążenie jednostkowe jest pierwszą pochodną siły poprzecznej a drugą pochodną momentu.

§. II. Obciążenie jednostajne zupełne.

Gdy ciężar jednostkowy jest stały, wtedy mamy obciążenie jednostajne (n. *gleichmässige Belastung*, fr. *charge uniformément répartie*, an. *uniform load*, cz. *obtiženi rovnoměrne*).

Gdy ciężar jednostkowy jest między granicami x' i x_1 stały $= q_1$, to dla tej długości mamy z rów. 12)

$$Q = - q_1 x_1 + C \text{ i } M = Cx_1 - \frac{q_1 x_1^2}{2} + C_1 \dots \dots 15)$$

jeżeli C i C_1 oznaczają ilości stałe.

Z rów. 15) widzimy, że, jeżeli belka jest na pewnej długości obciążoną jednostajnie, to na tej długości linia sił poprzecznych jest prostą a momentów parabolą.

Jeżeli w rów. 15) zrobimy $q_1 = 0$, to $Q_1 = C$, $M = Cx + C_1$, a zatem jeżeli belka na pewnej długości nie jest wcale obciążoną, to na tej długości linia sił poprzecznych jest równoległą do osi, a linia momentów prostą.

Jeżeli przytem cała belka jest obciążoną, wtedy obciążenie nazywamy jednostajnem zupełnem (n. *totale gleichmässige Belastung*, an. *total uniform load*) i wtedy poprzednie wzory bardzo się upraszczają.

a) Liczebnie. Ponieważ przy obciążeniu jednostajnem zupełnem belka jest symetrycznie obciążona (rys. 21.), więc dla obciążenia jednostkowego g

$$O_1 = O_2 = \frac{1}{2} g l \dots \dots \dots 16)$$

Siłę poprzeczną Q dla dowolnego punktu C otrzymamy :

$$Q = O_1 - gx = \frac{1}{2} gl - gx = \frac{1}{2} g(1-2x) \dots \dots \dots 17)$$

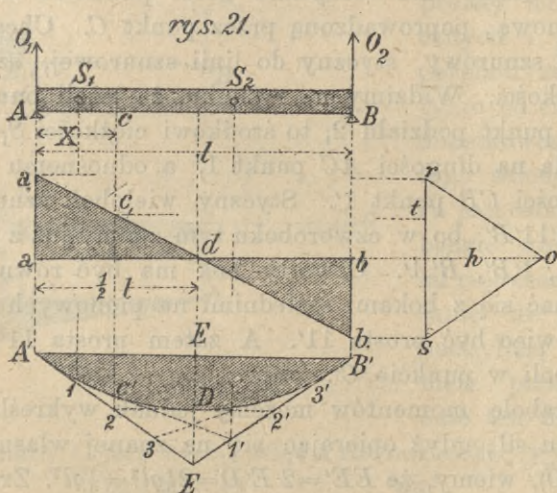
Moment w punkcie C będzie :

$$M = O_1 x - gx \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} glx - \frac{1}{2} gx^2 = \frac{1}{2} gx(1-x) \dots \dots 18)$$

Równanie 17) jest równaniem linii prostej, a mianowicie otrzymamy:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } x=0 \quad Q = \frac{1}{2}gl, \\ \text{„ } x = \frac{1}{2}l \quad Q = 0, \\ \text{„ } x = l \quad Q = -\frac{1}{2}gl. \end{array} \right\} \dots \dots \dots 19)$$

Linie sił poprzecznych otrzymamy więc, wykreśliwszy $aa_1 = bb_1 = \frac{1}{2}gl$ i połączywszy punkty a_1 i b_1 . Prosta ta przecina oś w połowie rozpiętości.



Równanie 18) dla momentów jest drugiego stopnia i przedstawia parabolę o osi pionowej, przechodzącej przez środek belki. Z równania tego otrzymamy dla $x=0$ $M=0$, dla $x=l$ $M=0$. Chcąc wyznaczyć największy moment, szukajmy, dla którego punktu będzie $Q=0$.

Z rów. 19. widzimy, że $Q=0$ dla $x = \frac{1}{2}l$, a stąd odcinek, dla którego moment jest największą, jest

$$x = \frac{1}{2}l, \text{ a najw } M = \frac{1}{8}gl^2 \dots \dots \dots 20)$$

b) Wykreślnie. Możemy tu postępować według ogólnej metody; jednak wiedząc, że linie sił poprzecznych jest prosta, a linie momentów parabolą, możemy obie te linie bardzo łatwo wykreślić w inny sposób. O linii sił poprzecznych mówiliśmy już powyżej; aby wykreślić linię momentów, kreślimy wielobok sił, robiąc $rs = gl$ i prowadzimy promienie skrajne. Chcąc wy-

kreślić wielobok sznurowy, prowadzimy równoległe do tych promieni $A'E \parallel rO$ i $B'E \parallel Os$. Są to styczne paraboli, którą wyznaczymy najłatwiej następnym znanym sposobem. Dzielimy obie styczne na równą ilość części (tu na 4) i łączymy punkty podziału równymi oznaczone liczbami. Proste te są stycznymi do paraboli, a punkty styczności mają odcinki dwa razy większe niż lewy punkt podziału.

Konstrukcyja ta da się zresztą łatwo uzasadnić. Pomyślmy bowiem, żeśmy całe obciążenie belki podzielili na dwie części linią pionową, poprowadzoną przez punkt C . Chcąc wykreślić wielobok sznurowy, styczny do linii sznurowej, szukamy środków ciężkości. Widzimy na rysunku, że jeżeli punktowi C odpowiada punkt podziału 2, to środkowi ciężkości S_1 powierzchni obciążenia na długości AC punkt 1, a odnośnemu punktowi S_2 dla długości CB punkt 1'. Styczny wielobok sznurowy będzie wtedy $A'11'B'$, bo w czworoboku tym znamy już z poprzedniego boki $A'1$, $1'B'$, $B'A'$. Czwarty bok ma być równoległy do Ot i przecinać się z bokami sąsiednimi na pionowych przez S_1 i S_2 musi to więc być prosta $11'$. A zatem prosta $11'$ jest styczną do paraboli w punkcie C' .

Parabolę momentów możemy jednak wykreślić nawet bez wieloboku sił, gdyż opierając się na znanej własności paraboli i rów. 20), wiemy, że $EE' = 2 E'D = 2 \frac{1}{8} gl^2 = \frac{1}{4} gl^2$. Zrobiwszy więc $EE' = \frac{1}{4} gl^2$, mamy punkt E , kreślimy styczne $A'E$ i $B'E$ i postępujemy dalej, jak wyżej.

§. 12. Jednostajne obciążenie częściowe.

Jeżeli belka AB obciążoną jest jednostajnie tylko na długości $AC = x$ (rys. 22.), postępujemy według metody ogólnej i za pomocą wieloboku sił i wieloboku sznurowego otrzymujemy dwie styczne ad' i $d'b$. Na długości $AC = x$ otrzymujemy parabolę adc , a na długości nieobciążonej linia momentów cb jest prostą.

Liczebnie otrzymamy z równania 6) dla ciężaru jednostkowego p

$$O_1 = \frac{1}{l} px \left(l - \frac{x}{2} \right) = \frac{px(2l - x)}{2l},$$

dalej dla dowolnego punktu E między A i C

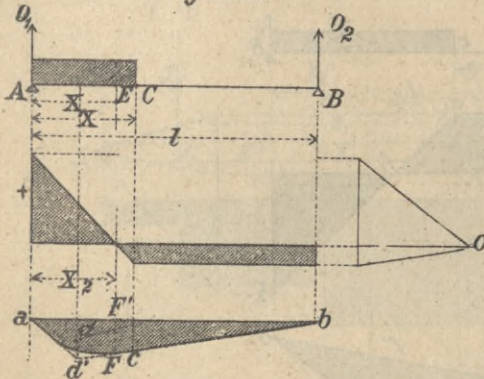
$$Q = Q_1 - px_1 \dots \dots \dots 21)$$

$$M = Q_1 x_1 - \frac{1}{2} p x_1^2 \dots \dots \dots 22)$$

Równanie 21.) dla sił poprzecznych na długości obciążonej jest równaniem prostej, a rów. 22.) dla momentów równaniem

paraboli. Z rów. 21.) i 22.) widzimy też, że kąt nachylenia prostej sił poprzecznych i parametr paraboli zależne są tylko od ciężaru jednostkowego p , dla tego samego ciężaru jednostkowego p będzie więc prosta sił poprzecznych tak samo do poziomu nachyloną i parametr paraboli będzie ten sam.

rys. 22.



Dla punktu C jest $x = x_1$, więc z równania 21.) wynika, że

$$Q = \frac{px(2l-x)}{2l} - px = -\frac{px^2}{2l} \dots \dots \dots 23)$$

Największy moment jest w tem miejscu, gdzie $Q = 0$; nazwijmy odnośny odcinek x_2 , to $\frac{px(2l-x)}{2l} - px_2 = 0$, a stąd $x_2 = \frac{x(2l-x)}{2l}$. Wstawiwszy to w równanie 22.), otrzymamy

$$\text{najw } M = \frac{px(2l-x)}{2l} \cdot \frac{x(2l-x)}{2l} - \frac{1}{2} p \frac{x^2(2l-x)^2}{4l^2}, \text{ czyli}$$

$$\text{najw } M = \frac{px^2(2l-x)^2}{8l^2} \dots \dots \dots 24)$$

Na rysunku 23. przedstawiliśmy momenty i siły poprzeczne dla przypadku, gdy długość CB jest jednostajnie obciążoną. Otrzymamy wtedy liczebnie w zupełnie ten sam sposób, co pierwej, siłę poprzeczną w punkcie C

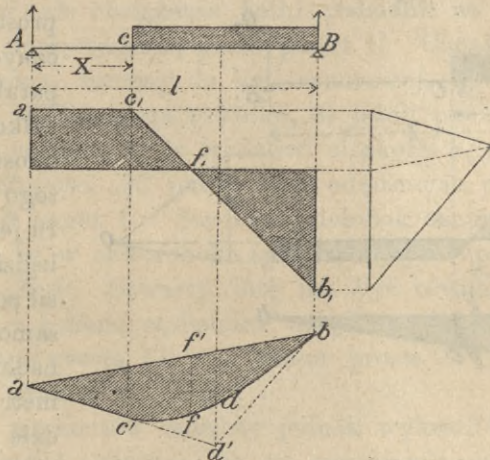
$$Q = + \frac{p(1-x)^2}{2l} \dots \dots \dots 25)$$

Największy moment M otrzymamy z rów. 24.), wstawivszy $(l-x)$ zamiast x , a więc

$$\text{najw } M = \frac{p}{8l^2} (l-x)^2 (l+x)^2 = \frac{p (l^2 - x^2)^2}{8l^2} \dots 26)$$

Wartości, które otrzymujemy w punkcie C dla siły poprzecznej z równań 23) i 25) przy obciążeniu częściowem są

rys. 23.



większe, niż wartość, którą otrzymamy z równania 17) dla obciążenia zupełnego, jeżeli przytem przypuścimy $p=g$. Przeciwnie momenty w każdym punkcie są największe dla obciążenia zupełnego, jakto widzimy z porównania równań 20), i 24).

§. 13. Belka jednym końcem utwierdzona.

Belka AB (rys. 24.), jednym końcem utwierdzona, obciążoną jest ciężarami skupionymi P_1, P_2 i P_3 . Chcąc wyznaczyć momenty i siły poprzeczne, wykreślamy, jak zwykle, wielobok sił i wielobok sznurowy $acfb$. Aby otrzymać powierzchnię momentów, musimy na zasadzie §. 7. przedłużyć pierwszy i ostatni bok wieloboku sznurowego aż do pionowej przez B . Tu więc nie mamy zamykającej w tem znaczeniu, co dla belki w dwu punktach podpartej. Moment w punkcie E przedstawia wtedy odcinek ee' między przedłużeniem pierwszego boku ab' a wielobokiem sznurowym, pomnożony przez odległość biegunową h . Największy moment otrzymamy dla punktu B .

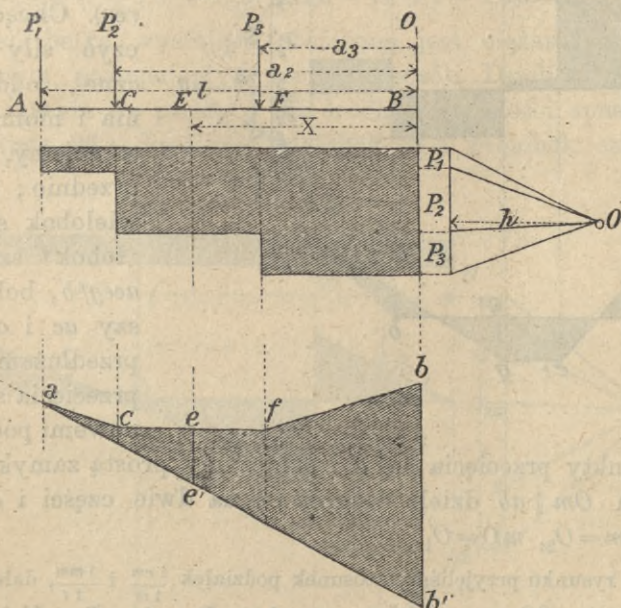
W rysunku przyjęliśmy stosunek podziałek $\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$ i $\frac{1 \text{ mm}}{2 \text{ t}}$, dalej $P_1 = 5 \text{ t}$, $P_2 = 16 \text{ t}$, $P_3 = 11 \text{ t}$; $l = 5 \text{ m}$, $a_2 = 4 \text{ m}$, $a_3 = 2 \text{ m}$, $h = 40 \text{ t}$.

Z konstrukcyi otrzymaliśmy $bb' = 2,8 \text{ m}$, więc

$$\text{najw } M = -bb' \cdot h = -2,8 \cdot 40 = -112 \text{ tm.}$$

Zamiast mnożyć przez h mogliśmy wyznaczyć podziałkę momentów, mianowicie $\frac{1 \text{ cm}}{1,40 \text{ tm}} = \frac{1 \text{ mm}}{4 \text{ tm}}$. Wedle tej podziałki odczytamy moment w B $M = -112 \text{ tm}$.

rys. 24.



Liczebnie otrzymamy:

$$O = P_1 + P_2 + P_3, \dots \dots \dots 27)$$

dalej dla punktu E

$$Q = -P_1 - P_2, \dots \dots \dots 28)$$

$$M = -P_1 (l - x) - P_2 (a_2 - x) \dots \dots \dots 29)$$

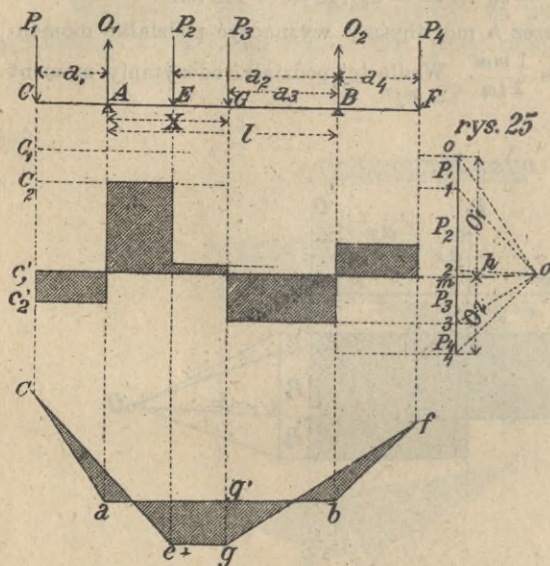
Dla $x=0$, więc dla punktu B , otrzymamy

$$\text{najw } M = -P_1 l - P_2 a_2 - P_3 a_3 \dots \dots \dots 30)$$

Wstawiawszy wartości wyżej podane w równanie 30) otrzymamy *najw* $M = -(5 \times 5 + 16 \times 4 + 11 \times 2) = -111 \text{ tm}$. Wynik, któryśmy otrzymali sposobem wykreślnym, różni się o 1 tm , czyli w podziałce momentu o $\frac{1}{4} \text{ mm}$, co wynika z niedokładności konstrukcyi.

§. 14. Belka wystająca.

Jeżeli belka CF (rys. 25.) podpartą jest nie na obu końcach, lecz w dwu punktach A i B między końcami, to nazywamy ją belką wystającą (n.



rys. 25

überhängender Träger, fr. poutre reposant en deux points d'appui intermédiaires). Chcąc wyznaczyć siły poprzeczne, oddziaływania i momenty, postępujemy, jak poprzednio; kreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy $acgf b$, boki pierwszy ac i ostatni bf przedłużamy aż do przecięcia się z pionowemi podporowemi

i punkty przecięcia się a i b łączymy prostą zamykającą ab . Promień $Om \parallel ab$ dzieli długość Oa na dwie części i otrzymujemy $4m = O_2$, $mO = O_1$.

Na rysunku przyjęliśmy stosunek podziałek $\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$ i $\frac{1 \text{ mm}}{1 \text{ t}}$, dalej $l = 3 \text{ m}$, $a_1 = 1 \text{ m}$, $a_2 = 2,2 \text{ m}$, $a_3 = 1,5 \text{ m}$, $a_4 = 1 \text{ m}$, $P_1 = 4 \text{ t}$, $P_2 = 11 \text{ t}$, $P_3 = 7 \text{ t}$, $P_4 = 4 \text{ t}$, $h = 15 \text{ t}$. Otrzymaliśmy $O_1 = 15,7 \text{ t}$, a moment w G $M = gg' \cdot h = = 0,56 \times 10 = 5,6 \text{ tm}$.

Siły poprzeczne wykreślimy, jak poprzednio, tworząc wykreślnie sumę wszystkich sił po lewej stronie przekroju. Chcąc sprowadzić wszystkie siły poprzeczne do jednej osi, zrobimy $c'_1 c'_2 = c_1 c_2$ i zamiast linii kreskowanej poprowadzimy z c'_2 poziomą.

Liczebnie wyznaczymy oddziaływanie O_1 , robiąc sumę momentów około punktu B równą zeru, więc

$$- P_1 (a_1 + l) + O_1 l - P_2 a_2 - P_3 a_3 + P_4 a_4 = 0$$

zatem $O_1 = \frac{1}{l} [P_1 (a_1 + l) + P_2 a_2 + P_3 a_3 - P_4 a_4]$. . . 31)

Znając oddziaływanie, łatwo obliczymy siły poprzeczne i momenty.

Dla naszego przykładu otrzymamy po wstawieniu wartości

$$O_1 = [4(1 + 3) + 11 \times 2,2 + 7 \times 1,5 - 4 \times 1] = 15,57 t.$$

Dla punktu G otrzymamy teraz

$$Q = -P_1 + O_1 - P_2 = -4 + 15,6 - 11 = +0,6 t,$$

albo gdy przyjmiemy, że P_3 działa po lewej stronie przekroju,

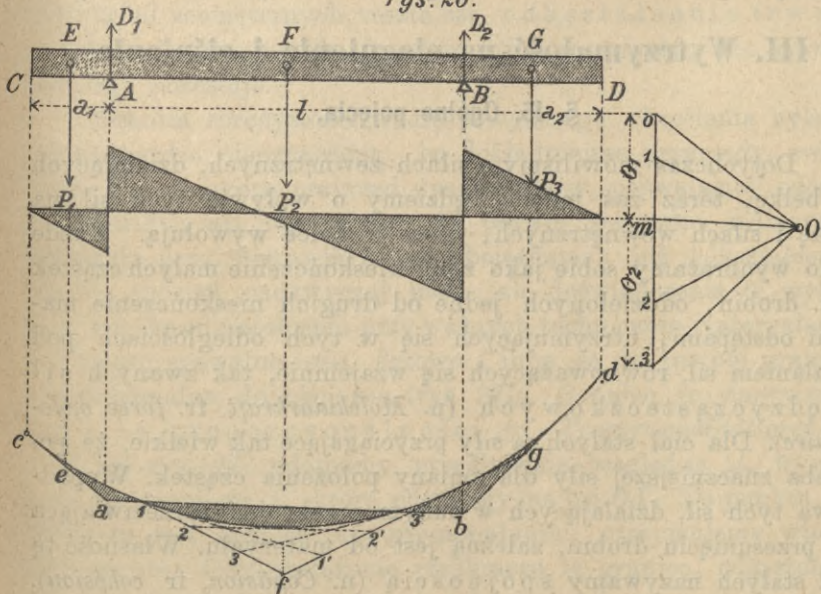
$$Q = -P_1 + O_1 - P_2 - P_3 = -6,4 t.$$

Dalej mamy

$$M = -4(1 + 1,5) + 15,57 \times 1,5 - 11(2,2 - 1,5) = 5,655 tm.$$

Jeżeli belka wystająca obciążoną jest ciężarem ciągłym jednostajnym, postępujemy w ten sam sposób. Dzielimy powierzchnię obciążenia na paski, z ich środków ciężkości spuszczone pionowe (rys. 26.), kreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy

rys. 26.



$cefgd$. Styczne końcowe w c i d , równoległe do promieni skrajnych, przedłużamy aż do pionowych podporowych, punkty przecięcia się a i b łączymy zamykającą. Wykreśliwszy teraz z danych stycznych linię sznurową, która jak wiemy, jest dla obciążenia jednostajnego parabolą, otrzymujemy powierzchnię momentów w części dodatnią a w części ujemną. Wykreśliwszy

$Om \parallel ab$, otrzymamy oddziaływania $\sum m = O_2$ i $mO = O_1$, a stąd łatwo siły poprzeczne.

Liczebnie wyznaczymy oddziaływania, robiąc sumę momentów około punktu B równą zeru. A więc dla obciążenia jednostkowego g

$$- ga_1 \left(l + \frac{a_1}{2} \right) + O_1 l - \frac{1}{2} gl^2 + \frac{1}{2} ga_2^2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$O_1 = ga_1 \left(1 + \frac{a_1}{2l} \right) + \frac{1}{2} gl - \frac{1}{2} ga_2 \frac{a_2}{l} \dots \dots \dots 32)$$

Znając oddziaływania, obliczymy łatwo momenty i siły poprzeczne w zwykły sposób.

B. Wytrzymałość konstrukcyj drewnianych i żelaznych.

III. Wytrzymałość na ciągnięcie i ciśnienie.

§. 15. Ogólne pojęcia.

Dotychczas mówiliśmy o siłach zewnętrznych, działających na belkę, teraz zaś mówić będziemy o wpływie tych sił na belkę i siłach wewnętrznych, które w belce wywołują. Każde ciało wyobrażamy sobie jako zbiór nieskończenie małych cząstek t. z. drobin, oddzielonych jedne od drugich nieskończenie małymi odstępami, utrzymujących się w tych odległościach pod działaniem sił, równoważących się wzajemnie, tak zwanych sił międzycząsteczkowych (n. *Molekularkraft*, fr. *force moleculaire*). Dla ciał stałych są siły przyciągające tak wielkie, że potrzeba znaczniejszej siły dla zmiany położenia cząstek. Wypadkowa tych sił, działających w danym przekroju, sprzeciwiająca się przesunięciu drobin, zależną jest od materiału. Własność tę ciał stałych nazywamy spójnością (n. *Cohäsion*, fr. *cohésion*).

Siły zewnętrzne, działające na belkę, sprawiają zmianę kształtu i wymiarów belki czyli odkształcenie (n. *Formänderung*, *Deformation*, fr. *déformation*), które po ustaniu działania sił zewnętrznych znika całkowicie lub częściowo. Tę własność ciała, która sprawia, że drobiny wracają do pierwotnego położenia po ustaniu działania sił zewnętrznych, nazywamy sprężystością (n. *Elasticität*, fr. *élasticité*, an. *elasticity*).

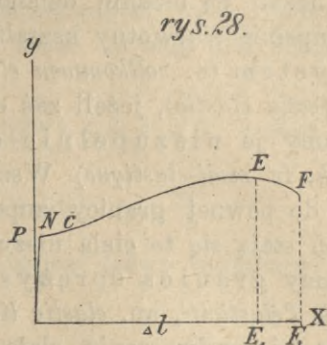
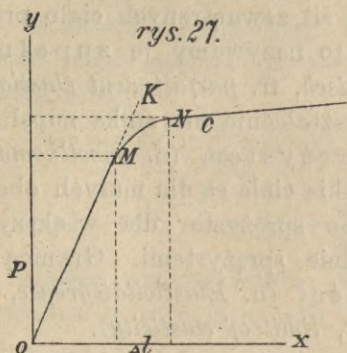
Wszystkie ciała stałe są mniej lub więcej sprężyste; u drzewa odkształcenia są stosunkowo większe, u kruszców zaś bardzo małe. Jeżeli po ustaniu działania sił zewnętrznych ciało przybiera zupełnie pierwotny kształt, to nazywamy je zupełnie sprężystem (n. *vollkommen elastisch*, fr. *parfaitement élastique*, an. *perfectly elastic*), jeżeli zaś odkształcenie nie znika zupełnie, nazywamy je niezupełnie sprężystem (n. *unvollkommen elastisch*, fr. *semi-élastique*). Wszystkie ciała są dla małych obciążeń aż do pewnej granicy zupełnie sprężyste, dla większych obciążeń stają się te ciała niezupełnie sprężystemi. Granicę tę nazywamy granicą sprężystości (n. *Elasticitätsgrenze*, fr. *limite de l'élasticité*, an. *elastic limit*, *limit of elasticity*).

Po jej przekroczeniu ciała te są niezupełnie sprężystemi; część odkształcenia, nazwana odkształceniem sprężystem (n. *elastische Deformation*, fr. *déformation élastique*) znika po ustaniu sił zewnętrznych, reszta zaś, odkształcenie trwałe (n. *bleibende Deformation*, fr. *déformation permanente*, an. *permanent set*), pozostaje.

Granica sprężystości wedle powyższego określenia byłaby jednak bardzo nieoznaczoną, bo dokładniejsze przyrządy, zwłaszcza Bauschingera przyrząd zwierciadlany, pozwalający odczytywać 0.0001 mm udowodniły, że prawie wszystkie materiały wykazują przy miernych nawet obciążeniach już odkształcenie trwałe, chociaż nadzwyczaj małe, ale doświadczenia te wykazały też, że odkształcenia przy ważnych technicznie materiałach, jak żelazo spawalne, stal, drzewo i inne, są do pewnej granicy proporcjonalne do obciążeń (rys. 27.). Granicę tę nazywamy granicą proporcjonalności (n. *Proportionalitätsgrenze*).

Na rys. 27. odcinamy przedłużenia względne Δl , wywołane obciążeniami P , które odcinamy na osi OY . Do punktu M , który tu jest granicą proporcjonalności, otrzymujemy wtedy linię prostą. Gdy obciążenie przekracza tę granicę, odkształcenia przestają być proporcjonalne do obciążeń, rosną mianowicie daleko szybciej, niż obciążenia, linia MN jest przytem styczną do OM . Ponieważ dla obciążeń poniżej granicy proporcjonalności odkształcenia trwałe są tak małe, że je w praktyce uważamy za nieistniejące, więc też zwykle nazywamy granicę proporcjonalności granicą sprężystości.

Po nagłem usunięciu sił zewnętrznych ciało powraca nagle do swego pierwotnego kształtu, ale wskutek bezwładności



odkształca się potem w przeciwną stronę i dopiero po kilku drganiach przechodzi w stan spoczynku. Każde nagłe działanie siły lub uderzenie wywołuje takie drgania.

Jeżeli siły zewnętrzne będą po przekroczeniu granicy sprężystości ciągle wzrastały, to po przekroczeniu pewnej granicy (punkt N wykresu) u niektórych materiałów odkształcenia nagle bardzo wzrastają i drobiny przedstawiają już mały opór przesunięciu, jak przy ciałach półpłynnych; bardzo małym obciążeniom odpowiadają wielkie przedłużenia. Granicę tę nazywamy granicą płynności (n. *Fliessgrenze*, *Streckgrenze*, fr. *limite de grande extension*). Przy dalszem wzrastaniu sił zewnętrznych nareszcie przewyciężą one spójność i nastąpi tak wielka zmiana położenia drobin, że siły międzycząsteczkowe przestają działać, nastąpi więc rozdzielenie drobin i pojedynczych części ciała (n. *Bruch*, fr. *rupture*, an. *failure*), a więc przerwanie, zgniecenie lub złamanie ciała. Całą spójność w tej chwili się objawiającą, a więc cały opór, jaki spójność stawia zmianie położenia drobin, nazywamy wytrzymałością (n. *Festigkeit*, fr. *résistance des matériaux*, an. *resistance*, *tenacity*).

Na rys. 28. przyjęliśmy dla Δl znacznie mniejszą podziałkę, niż w rys. 27., dlatego też prosta ON spada prawie z osią OY . Punkt N oznacza granicę płynności, EE_1 przedstawia siłę, która sprawia już przerwanie.

Ponieważ siły zewnętrzne działają w rozmaity sposób na belkę, więc też i wytrzymałość rozmaicie się objawia. Według tego rozróżniamy następane rodzaje wytrzymałości:

a) wytrzymałość na ciągnięcie (n. *Zugfestigkeit*, fr. *résistance à la traction*, an. *resistance to stretching*), jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działa w kierunku osi belki, starając się drobiny jedne od drugich oddalić,

b) wytrzymałość na ciśnienie (n. *Druckfestigkeit*, fr. *résistance à la compression*, an. *resistance to compression*), jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działa w kierunku osi belki, starając się drobiny zbliżyć jedne do drugich.

Oba te rodzaje wytrzymałości nazywamy wytrzymałością bezwzględną (n. *absolute Festigkeit*). Dalsze rodzaje wytrzymałości są:

c) wytrzymałość na ścinanie (n. *Schubfestigkeit*, fr. *résistance à cisaillement*, an. *resistance to shearing*), jeżeli wypadkowe sił zewnętrznych, działających w płaszczyźnie, przez oś położonej, po jednej i po drugiej stronie idealnego przekroju prostopadłego do osi, starają się przesunąć drobiny w płaszczyźnie przekroju,

d) wytrzymałość na zginanie (n. *Biegungsfestigkeit*, fr. *résistance à la flexion*, an. *resistance of flexure*), jeżeli na belkę działają siły prostopadle do osi, starając się ją wygiąć, i jeżeli te siły leżą wszystkie w jednej płaszczyźnie, położonej przez oś,

e) wytrzymałość na wyboczenie (n. *Knickfestigkeit*, fr. *résistance au flambage*, an. *resistance of crippling*), jeżeli ciało o stosunkowo długiej osi pracuje na ciśnienie,

f) wytrzymałość na skręcanie (n. *Drehungsfestigkeit*, *Torsionsfestigkeit*, fr. *résistance à torsion*), jeżeli siły zewnętrzne sprowadzają się do pary sił, działającej w przekroju prostopadłym do osi.

Często siły działają tak, że równocześnie pracuje belka w rozmaity sposób n. p. na ciśnienie i zginanie, na zginanie i ścinanie. Opór, jaki wtedy stawia ciało rozdzielaniu drobin, nazywamy wytrzymałością złożoną (n. *zusammengesetzte Festigkeit*, fr. *résistance composée*).

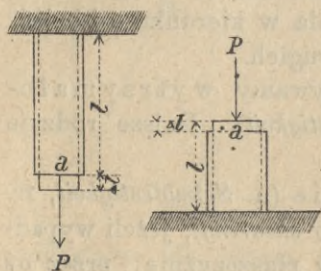
W tym rozdziale będziemy mówić tylko o wytrzymałości na ciągnięcie i ciśnienie.

§. 16. Spółczynniki sprężystości.

Jeżeli na graniastosłup o długości l a przekroju A działa siła P (rys. 29.) w kierunku osi, to długość pierwotna l zmienia

się o Δl , a mianowicie skracają się, jeżeli siła ciśnie, a przedłużają się, jeżeli siła ciągnie graniastosłup. Oprócz tego zmieniają się długości innych krawędzi graniastosłupa, a mianowicie krawędzi a i prostopadłej do rysunku b , i to, jeżeli l przedłuża się o Δl , tedy a i b skracają się o Δa i Δb i na odwrót.

rys. 29.



Przedłużenie w kierunku osi nazywamy podłużnym (n. *longitudinal*), a w kierunku prostopadłym do osi poprzecznym (n. *transversal*).

Doświadczenia wykazały, że przedłużenia Δl , Δa i Δb są aż do granicy sprężystości wprost proporcjonalne do długości l , a i b i do siły P , a odwrotnie do przekroju A . Możemy więc napisać

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{\epsilon A} \dots \dots \dots 33)$$

Jeżeli ϵ oznacza liczbę stałą, zależną od materiału, którą nazwiemy współczynnikiem sprężystości (n. *Elasticitätsmodul*, *Elasticitätscoefficient*, fr. *coefficient d'élasticité*, an. *modulus of elasticity*). Jest to tak zwane prawo Hooke.*)

Iloraz $\frac{\Delta l}{l}$, przedstawiający przedłużenie lub skrócenie na jednostkę długości, nazywamy przedłużeniem lub skróceniem jednostkowym (n. *relative Längenänderung*, fr. *allongement*, an. *unit strain*). Iloraz $\frac{P}{A} = \nu$ oznacza siłę działającą na jednostkę powierzchni czyli natężenie (n. *Spannung*, fr. *effort*, an. *stress on unit of area*), jeżeli więc siłę mierzymy w kg , powierzchnię w cm^2 , to natężenie wyrażać będziemy w kilogramach na centymetr kwadratowy, co oznaczamy kg/cm^2 (czytaj kg na cm^2).

Jeżeli natężenie stara się drobiny ciała jedne od drugich oddalić, wtedy nazywamy je dodatkiem lub też ciągnięciem (n. *Zug*, fr. *traction*, an. *tension*) i oznaczamy znakiem +.

*) Doświadczenia wiedeńskie z belkami żelaznymi okazały, że odkształcenia sprężyste podlegały temu prawu i po za granicą sprężystości, p. *Zeit. d. öst. Ing. u. Arch. Vereines* 1891.

Jeżeli zaś natężenie stara się zbliżyć drobiny jedne do drugich, to nazywamy je ujemnem lub też ciśnieniem (n. *Druck*, fr. *compression*, an. *compression*) i oznaczamy znakiem —.

Równanie 33) możemy więc inaczej napisać

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\nu}{\epsilon}, \dots \dots \dots 34)$$

a zatem przedłużenie jednostkowe jest proporcjonalne do natężenia. Jeżeli w równaniu 34 zrobimy $\nu=1$, to

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{\epsilon},$$

a zatem współczynnik sprężystości jest odwrotną wartością przedłużenia jednostkowego dla natężenia równego jedności.

Analogicznie do 34) możemy napisać

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{\nu}{\epsilon_1}, \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{\nu}{\epsilon_2} \dots \dots \dots 35)$$

Współczynniki ϵ_1 i ϵ_2 nazywamy współczynnikami sprężystości poprzecznej (n. *Coefficient für Transversalelasticität*, fr. *coefficient d'élasticité transversale*).

Współczynnik sprężystości ϵ jest tylko dla ciał równokierunkowych, których struktura jest zupełnie jednorodna (n. *isotrop*, fr. *isotrope*) we wszystkich kierunkach stałym. Takim ciałem jest n. p. żelazo kute, podczas gdy żelazo kute i walcowane mają tę własność tylko w przybliżeniu. Drzewo jest nierównokierunkowem, dlatego musimy tu ϵ wyznaczyć osobno w kierunku włókien, a osobno w kierunku prostopadłym do włókien.

Współczynniki sprężystości poprzecznej są w ciałach równokierunkowych równe, rozumowaniem można dowieść, że $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{4}\epsilon$ do $\frac{1}{3}\epsilon$.

Współczynniki sprężystości są dla każdego materiału inne. Wyznaczono je, poddając ciało badane działaniu pewnej znanej siły P i mierząc przedłużenia lub skrócenia Δl . Jednak i dla tego samego materiału nawet współczynnik sprężystości ma wartości bardzo różne n. p. dla żelaza walcowanego otrzymał Bender wartości od 1 100 000 do 2 800 000 $\frac{kg}{cm^2}$, a nawet dla żelaza z tej samej fabryki otrzymano według doświadczeń towarzystwa Cincinnati Southern Railway w Ameryce wartości 1 350 000 do 2 430 000 $\frac{kg}{cm^2}$, dlatego też wartości, które poda-

jemy poniżej dla rozmaitych materyałów, uważać można tylko jako liczby przeciętne z wielu doświadczeń uzyskane. Różnice wartości współczynnika sprężystości powstają także wskutek niezupełnie jednostajnego materyału.

W następnej tabliczce zestawiliśmy przeciętne wartości współczynników sprężystości dla materyałów, najbardziej w budownictwie używanych, jakoteż i natężenie przy granicy sprężystości.

Tutaj podnieść musimy raz jeszcze wielką niepewność granicy sprężystości. Linia ON (rys 27.) nie jest zupełnie prostą, a wyznaczenie punktu styczności N zależy od dokładności przyrządów.

Considère zaproponował, aby oznaczyć jako granicę sprężystości ten punkt linii odkształceń, a właściwie to natężenie, dla którego przedłużenie jest dwa razy tak wielkie, niżby było, gdyby było proporcjonalne do natężeń. W naszym przykładzie byłby to punkt C , a zatem granica sprężystości spadłaby z granicą płynności. W praktyce wyznaczenie granicy płynności jest daleko łatwiejsze i nie wymaga tak doskonałych przyrządów. Z tych więc powodów we Francji przyjęto regułę Considère'a i dlatego w dziełach francuskich znajdujemy znacznie wyższe wartości podane dla granicy sprężystości, niż w niemieckich i angielskich. My tu trzymać się będziemy naszego określenia granicy sprężystości pierwiej podanego zgodnie z Bauschingerem.

Jeżeli niepewnymi są wartości podane poniżej dla współczynników sprężystości, to tem trudniej jeszcze da się dokładnie wyznaczyć granicę sprężystości jeszcze z następnego powodu. Nowsze doświadczenia^{*)}, robione z żelazem spawalnym, okazały, że jeżeli granica sprężystości jest przy natężeniu x , a natężymy ciało aż do $v_1 > x$, to otrzymamy przedłużenie Δl , które się będzie składać z Δl_1 przedłużenia sprężystego i Δl_2 przedłużenia trwałego; to znaczy, że po ustaniu działania siły Δl_1 zniknie, a Δl_2 zostanie. (rys. 30.). Drobiny nie zajmą więc pierwotnego położenia, a zatem mamy właściwie do czynienia

^{*)} p. rozprawkę p. Wehage: „Spannung in verbogenen Körpern w Civilingenieur 1880.

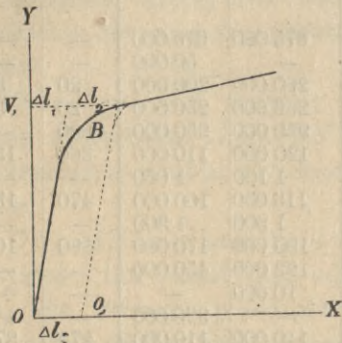
M a t e r y a ł	Spółczynnik sprężystości ϵ w		z natężenie przy granicy sprężyst. w	
	$\frac{kg}{cm^2}$		$\frac{kg}{cm^2}$	
	ciągnięcie	ciśnienie	ciągnięcie	ciśnienie
Aluminium (glin)	675 000	675 000	—	—
Bazalt i portir	—	50 000	—	—
Beton	260 000	200 000	20	30
Cement	266 000	250 000	20	30
Cynk	950 000	950 000	300	—
Drzewo miękkie w kierunku włókien	120 000	110 000	360	130
„ „ prostopadle do „	1 100	1 000	—	—
„ dębowe w kierunku	113 000	100 000	470	150
„ „ prostopadle do	1 300	1 300	—	—
„ bukowe w kierunku	180 000	170 000	580	105
Granit	122 000	450 000	—	—
Konopne liny	10 000	—	—	—
Łupek	—	920 000	—	—
Miedź	110 000	110 000	275	275
„ blacha	107 000	—	300	—
„ drut	120 000	—	1 200	—
Mur ciosowy	250 000	250 000	—	—
Mosiądz	640 000	640 000	480	—
Mosiądz drut	987 000	—	1 330	—
Ołów	60 000	60 000	100	—
Platyna	1 600 000	1 600 000	2 660	—
Rzemień nowy	1 250	—	—	—
„ używany	2 250	—	—	—
Stal miękka	2 100 000	2 100 000	2 500	—
„ twarda	2 200 000	2 200 000	3 600	—
Żelazo spawalne	2 000 000	2 000 000	1 600	1 600
„ zlewne	2 100 000	2 100 000	2 600	2 000
„ lane	1 000 000	95 000	—	—
„ blacha	1 900 000	—	1 500	—
„ drut	2 000 000	—	2 200	—

z nowem ciałem. Jeżeli teraz będziemy natężyć ciało aż do natężenia v_1 , to otrzymamy tylko przedłużenie sprężyste tak, że v_1 będzie teraz granicą sprężystości. Widzimy więc, że granica sprężystości żelaza kutego powiększa się jednorazowem jej przekroczeniem. — Dla żelaza lanego nie ma właściwie żadnej granicy sprężystości, pierwsze natężenie pozostawiało bowiem przy doświadczeniach przedłużenie trwałe, poczem aż do tego natężenia zachowywało się żelazo lane, jak sprężyste; granica sprężystości

dała się jednak jednorazowem większem natężeniem przesunąć wyżej.

Bauschinger badał też wpływ, jaki na granicę sprężystości wywierają zmiany w natężeniu badanego ciała i doszedł do następujących wyników:

rys.30,



a) Przez liczne zmiany natężeń między natężeniem równem zeru a największem natężeniem, spadającym z granicą sprężystości albo nieco nad nią wyższem, podnosi się pierwotną granicę sprężystości aż do pewnej granicy;

b) Zmiany natężeń w kierunku przeciwnym raz na ciągnienie, drugi raz na ciśnienie, które nie wiele przekraczają

granicę sprężystości, zniżają granicę sprężystości aż do zera;

c) Powoli wzrastające natężenia dodatnie i ujemne zniżają granicę sprężystości, dopiero wtedy, gdy przekraczają pierwotną granicę sprężystości;

d) Granica ta może być znowu podniesioną natężeniami zmiennymi, powoli wzrastającymi, jednak tylko do pewnej granicy, która może leżeć znacznie poniżej pierwotnej granicy sprężystości. Granicę tę nazywa Bauschinger naturalną (n. natürliche).

Przykład. Pręt z żelaza spawalnego 5 m długi o przekroju prostokątnym, którego podstawa $b=2$ cm, wysokość $h=20$ cm, jest ciągniony siłą $P=25t$; jakie jest przedłużenie pręta Δl ?

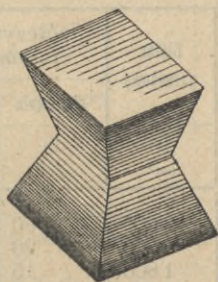
$$\text{Wedle rów. 33.) } \Delta l = \frac{P \cdot l}{\epsilon \cdot A} = \frac{25000 \cdot 500}{2000000 \cdot 2 \cdot 20} = 0.156 \text{ cm.}$$

§. 17. Spółczynniki wytrzymałości na ciągnienie i ciśnienie.

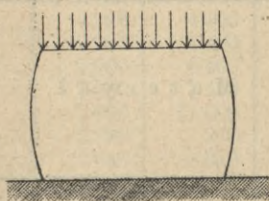
Gdy natężenie przekroczy granicę sprężystości, przedłużenia nie są już wtedy proporcjonalne do natężeń, lecz wzrastają daleko prędzej. Jeżeli natężenia odetniemy na osi odcinków

(rys. 28.), a odnośne przedłużenia lub skrócenia jako rzędne, to punkty wyznaczone temi rzędnemi wyznaczają linią $ONEF$, która na długości ON t. j. w granicach sprężystości jest prostą. Po za punktem N linia załamuje się, aż nareszcie natężenia dochodzą do pewnej największości EE_1 , poczem przy dalszem nagłym przedłużeniu się, natężenie się zmniejsza do FF_1 , a ciało się przerywa. Natężenie to nazywamy współczynnikiem wytrzymałości (n. *Festigkeitsmodul*, *Bruchmodul*, fr. *charge de rupture résistance maximum*, an. *breaking load*, *ultimate strength*). Współczynnik ten możemy wyznaczyć, poddając ciało badane natężeniu tak wielkiemu, aż ciało się przerwie. Podobną zupełnie linię odkształceń otrzymamy dla ciśnienia. Zgniecenie następuje tu przez przesunięcie cząstek ciała badanego na bok, a to w dwojaki sposób. Przy ciałach twardych odłupują się cząstki materiału w ten sposób, że zostają dwa ostrosłupy wierzchołkiem do siebie zwrócone (rys. 31.), albo też przy ciałach miększych n. p. ołowiu, następuje wybrzuszenie (rys. 32.), gdy stosunek wysokości do najmniejszego wymiaru

rys.31,



rys:32,



przekroju dosięga pewnej granicy (około 4 do 5 dla metali, 8 dla drzewa) ciało się wygina na bok i łamie. Występuje wtedy wytrzymałość na wyboczenie, o której będziemy mówić później. I tu otrzymujemy jednakże dla tychsamyh materiałów bardzo różne wartości z powodu rozmaitej ich jakości tak, że podane poniżej wartości musimy uważać tylko jako przeciętne, otrzymane z wielu doświadczeń.

Tyczy się to w największym stopniu kamieni, bo jeżeli różnice wartości współczynnika wytrzymałości dla kruszców wahają się o kilka lub kilkanaście procent, to dla kamieni dochodzą do 100 i więcej procent. I tak n. p. współczynnik wytrzymałości dla piaskowca szarowakowego wynosi 1270 kg/cm^2 węglowego 500 do 1200, pstrego 250 do 1300, kajprowego 150 do 1000, jurajskiego 300 do 800, kredowego 100 do 700, zielonego 200 do 400, karpackiego 120 do 650, molasowego 500 do 1500 kg/cm^2 . Średnia wartość 300 kg/cm^2 podana dla piaskowca w tabliczce różni się bardzo od wartości największych i najmniejszych.

I tu okazały doświadczenia, że, gdy ciało badane przerwało się przy pierwszej próbie przy natężeniu μ , to, gdy pozostałe części ciała poddano powtórnej próbie, ciało łamało się dopiero przy większym natężeniu μ' . Wynikałoby z tego, że kilkakrotnym natężeniem ciała aż do przerywania można wytrzymałość powiększyć. Zdaje się jednak, że doświadczenia te dowodzą tylko niejednostajności ciał. Przy pierwszej próbie przerywa się ciało w miejscu najslabszym już przy natężeniu μ , przy drugiej niema już tego słabego miejsca, więc wytrzymuje większe jeszcze natężenie aż do μ' .

M a t e r y a ł	Ciężar gatunkowy	Współczynnik wy- trzymałości μ	
		ciągnienie	ciśnienie
	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
Bazalt	3 000	80	1 800
Beton	2 200	20	150
Cegła (wypalona)	1 800	15	150
Cement	1 400	20	200
Cyna lana	7 300	350	500
„ drut	—	400	—
Cynk lany	7 290	550	—
„ blacha	7 200	480	—
Dolomit	2 800	20	800
Drzewo bukowe równoległe do włókien	800	1 000	400
„ „ prostopadłe „ „	800	70	120
„ dębowe równoległe „ „	1 000	960	400
„ „ prostopadłe „ „	1 000	50	120

M a t e r y a ł	Ciężar gatunkowy		Spółczynnik wytrzymałości μ	
			ciągnienie	ciśnienie
	$\frac{kg}{cm^3}$		$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$
Drzewo szpilkowe równoległe do włókien	730		600	300
" " prostopadle " "	730		48	40
Granit	2 750		30	600
Gnejs	2 550		30	500
Glin	2 600		2 030	—
Konopne liny	900		650	—
Kwarcyt	2 650		—	700
Łupek	2 800		—	600
Marmur	2 700		—	350
Miedź lana	8 790		1 340	4 500
" kuta	8 900		2 400	5 000
" blacha	8 900		2 100	—
" drut	8 880		5 000	—
Mosiądz lany	8 400		1 240	750
" drut	8 540		3 600	—
Mur ceglany na cemencie	1 800		—	90
" " " wapnie	1 800		—	50
Ołów	11 400		—	—
Piaskowiec	2 400		10	300
Platyna kuta	20 340		3 400	—
Porfir	2 600		—	1 200
Rzemień	—		300	—
Spiz	8 040		2 000	—
Srebro	10 500		2 900	—
Syenit	2 750		—	1 100
Stal bardzo miękka	7 900		4 400	5 000
" miękka	7 900		5 400	5 800
" twarda	7 900		6 400	7 000
" bardzo twarda	7 900		7 400	8 000
" drut	7 900		11 000	—
Szko lane	2 890		210	1 300
" dete	2 640		375	—
Wapień	2 700		27	600
Zaprawa wapienna	1 900		2	60
" cementowa	1 700		20	100
Żelazo lane	7 500		1 200	7 500
" spawalne	7 800		3 600	3 200
" zlewne	7 850		4 000	4 000
" blacha	7 800		3 400	—
" drut	7 800		6 500	—
Złoto	19 350		2 700	—

Normy, wypracowane przez austr. tow. inżynierów i architektów a przyjęte przez magistraty miasta Wiednia i Lincu, zawierają następujące ciężary materiałów budowlanych.

M a t e r y a ł	Ciężar	M a t e r y a ł	Ciężar
	$\frac{kg}{cm^2}$		
a) Drzewo.			
1. Drzewo dębowe . . .	800	5. Beton	2 400
2. „ sosnowe . . .	700	6. Ciosy piaskowca mięk-	
3. „ jodłowe . . .	700	kiego lub śred. tward.	2 400
4. „ świerkowe . . .	650	7. Ciosy piaskowca tward.	2 500
5. „ modrzewiowe	700	8. „ wapienia mięk-	
b) Kruszcze.			
1. Żelazo spawalne . . .	7 800	kiego lub śred. tward.	2 600
2. „ zlewne . . .	7 850	9. Ciosy wapienia tward.	2 700
3. „ lane . . .	7 500	10. Granit	2 800
4. Ołów	11 400	d) Rozmaite materyały.	
5. Miedź	8 900	1. Gruz	1 400
6. Cynk	7 200	2. Piasek suchy miękki .	1 240
c) Mur.			
1. Z cegieł prózn. suchy	1 200	3. „ „ ostry	1 350
„ „ mokry	1 400	4. Glina sucha	1 500
2. „ zwykł. suchy	1 500	„ mokra	1 900
„ „ mokry	1 700	5. Zaprawa	1 700
3. Z zendrówek suchy	1 900	6. Asfalt czysty	1 100
„ „ mokry	2 000	7. „ lany ze żwirem	1 600
4. Z kamienia łamanego .	2 400	8. „ ubijany	1 800
		9. Terazzo	2 000
		10. Gips	1 150
		10. Szkło do szyb	2 640

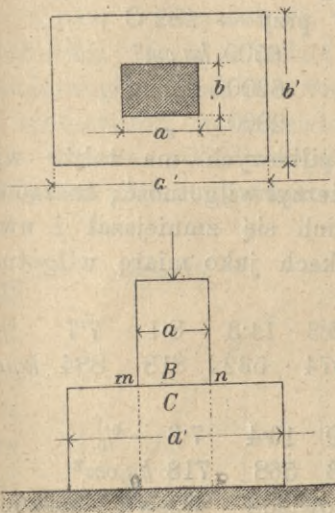
§. 18. Wpływ kształtu ciała, ciepłoty, wilgotności i ciężaru gatunkowego na wytrzymałość.

Mówiliśmy w §. 16., że siła, działająca w osi ciała, sprawia oprócz odkształceń podłużnych także poprzeczne. Dla tych ostatnich nie jest jednak obojętnym kształt ciała, bo włókna ciągnięte nie mogą każde z osobna zmniejszać swego przekroju, lecz są z innymi połączone i oddziałują na siebie nawzajem. Oddziaływanie to jest jednak różne przy różnych kształtach przekroju, co ma wpływ na wytrzymałość ciała.

I rzeczywiście doświadczenia Kirkaldegó, Bauschingera i Bacha dowiodły dla ciągnięcia małe zmniejszenie się wytrzymałości przy zwiększającej się szerokości żelaza płaskiego, a dla ciśnienia zwiększenie się wytrzymałości przy zwiększeniu się przekroju.

Jeżeli w ogóle w jakikolwiek sposób przeszkadzamy odkształceniu poprzecznemu, zwiększamy przez to współczynnik wytrzymałości. Jeżeli więc ciało *B* (rys. 33.) o mniejszym przekroju ciśnie na ciało *C* o większym przekroju, to ciśnienie przenosi się na graniastosłup *m n o p*, lecz otaczający ten graniastosłup materiał przeszkadza odkształceniu poprzecznemu, dlatego też do zgniecenia potrzebna jest siła nie $P' = \mu a b$, lecz

rys.33,



wedle doświadczeń, które Durand-Claye wykonał z kamieniami, a przy których było $a = b$ i $a' = b'$.

$$P = \mu a a' \quad . . \quad 36)$$

Ogólnie możnaby napisać

$$P = \mu \sqrt{a a' b b'} \quad . . \quad 37)$$

Bauschinger otrzymał na podstawie swych doświadczeń nieco odmienny wzór, mianowicie

$$P = \mu \sqrt[3]{\frac{a' b'}{a b}} \quad \quad 38)$$

Wielki wpływ na wytrzymałość metali ma ciepłota ciała badanego. Żelazo przy bardzo wysokiej ciepłocie 1000° zbliża się do stanu płynnego i współczynnik wytrzymałości spada prawie do zera.

M. Kollmann robił w r. 1878 doświadczenia w tym względzie z żelazem spawalnym i otrzymał następane wyniki

ciepłota 0 50 100 150 250 350 450 550 650 750 1000°C
 sp. wytrzym. na ciąg. $\mu = 3750, 3750 3730 3650 3500 3200 2280 860 690 490 150 \text{ kg/cm}^2$

w procentach 100 100 100 97 93 85 61 23 19 13 4%
 Widzimy więc, że do 200°C wytrzymałość żelaza bardzo mało się zmniejsza, szybciej już od 400 do 500°, potem jednak spada nagle, a przy 1000° wynosi tylko 4%.

Bardzo niska ciepłota ma też wpływ na wytrzymałość, jak to okazały doświadczenia Dewara i Steinera*). Wytrzymałość metali była przy bardzo niskiej ciepłocie większa, tak wynosiła wytrzymałość na ciągnięcie

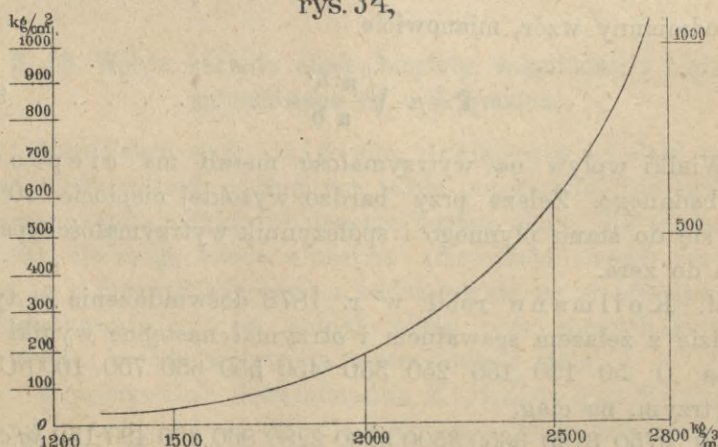
	przy + 150° C	przy — 182°C
stali miękkiej	3900	6500 kg/cm^2
żelaza	3000	6200 „
miedzi	1900	2800 „

Na wytrzymałość drzew szpilkowych ma także wielki wpływ wilgoć. Bauschinger mierzył wilgotność, susząc dane kawałki drzewa, dopóki ciężar ich się zmniejszał i uważał ubytek wagi wyrażony w odsetkach jako miarę wilgotności. Otrzymał on n. p. dla modrzewia

dla wilgotności	29.0	25.3	14.3	8.1	7.7	%
wytrzym. na ciśnienie μ	294	374	532	818	884	kg/cm^2
dla świerku						
$w =$	28.7	23.5	14.9	13.4	7.6	%
$\mu =$	295	324	443	568	718	kg/cm^2

Wilgotność $w=15\%$ odpowiada drzewu suszonemu w otwartej szopie. Dla tej wilgotności znalazł Bauschinger, że wytrzymałość zmienia się wraz z ciężarem gatunkowym

rys. 34,

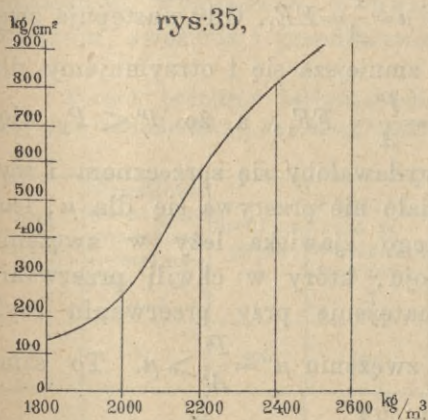


i to w przybliżeniu wedle prawa linii prostej tak, że możemy napisać $\mu=1000 \gamma-100 \text{ kg/cm}^2 \dots 39)$

*) por. Schweiz. Bauzeitung 1895 str. 137.

Z powyższego wynika, że drzewo mokre ma znacznie mniejszą wytrzymałość od suchego i że przez wysuszenie go w otwartej szopie, zwiększyć możemy wytrzymałość jego w dwójnasób.

Co do wytrzymałości wapieni i piaskowców, okazały doświadczenia M. Michelota wielką ich zależność od ciężaru gatunkowego. I tak dla wapieni przedstawiają rzędne na rys. 34. współczynnik wytrzymałości a odcinki ciężar gatunkowy. Linia krzywa przedstawiająca zawisłość współczynnika wytrzymałości od ciężaru gatunkowego jest wedle doświadczeń Michelota hyperbola. Podobnie przedstawia rys. 35. tę zawisłość dla piaskowców.



Wytrzymałość muru na ciągnienie jest mniejszą, niż jego części składowych, a to z powodu, że przyczepność może być mniejszą, czasem kamienie są źle oczyszczone potem kamienie wapniste wciągają wodę z zaprawy, przezco wytrzymałość się zmniejsza, wreszcie mróz

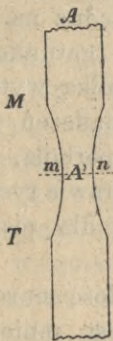
działa w ten sam sposób. Wytrzymałość muru na ciśnienie jest mniejsza niż kamienia, a większa niż zaprawy i ma się odwrotnie do grubości szwów. Jeśli niema wcale zaprawy, a kamienie się dokładnie stykają, wytrzymałość jest większa.

§. 19. Zjawiska przy przerwaniu.

Jeżeli natężenie ciała ciągniętego przekroczy granicę płynności N (rys. 28.), to przedłużenia wzrastają bardzo prędko, a przekrój pręta się zmniejsza odpowiednio, aż nareszcie przy pewnem natężeniu EE_1 , które zależy od natury ciała występuje nowe zjawisko (rys. 36.) i w pewnem miejscu MT zmiennem dla rozmaitych prętów następuje znaczne zmniejszenie przekroju, które nazywamy zwężeniem (n. *Contraction* fr. *striction*)

a które się wzmaga, aż nareszcie następuje w części najwęższej mn przerwanie ciała. Zwężeniu temu towarzyszy miejscowe przedłużenie, które dosięga w całości wielkości OF_1 (rys. 28.).

rys:36,

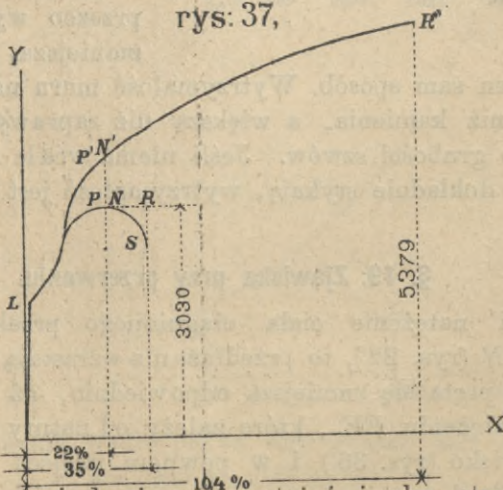


Zwężenie to występuje najbardziej w niektórych metalach ciągliwych (fr. *ductile*), jak ołów, cyna, miedź, mniej wyraźnie w żelazie i stali miękkiej, prawie wcale nic w drzewie, żelazie lanem i stali twardej.

Jeżeli siła działająca w kierunku osi pręta była P a przekrój pierwotny A , to współczynnik wytrzymałości $\mu = \frac{P}{A} = EE_1$. Gdy następuje zwężenie, siła P zmniejsza się i otrzymujemy dla przerwania $\mu' = \frac{P'}{A} = FF_1$, a że $P' < P_1$ więc

i $\mu' < \mu$, co wydawałoby się sprzecznem i wymaga wyjaśnienia, dlaczego ciało nie przerywa się dla μ , lecz dla mniejszego μ' . Powód tego zjawiska leży w zwężeniu a więc w mniejszym przekroju, który w chwili przerwania wynosi A' , właściwe więc natężenie przy przerwaniu czyli współczynnik wytrzymałości w zwężeniu $\mu'' = \frac{P'}{A'} > \mu$. To samo

rys: 37,



odnosi się zresztą i do innych natężeń i aby otrzymać prawdziwą krzywą odkształceń należałoby uwzględnić rzeczywistą

zmniejszoną powierzchnię. Także i co do przedłużenia musimy rozróżnić przedłużenie (n. *Verlängerung*, fr. *allongement*) pręta całkowite między znaczkami umieszczonymi w pewnym oznaczonym odstępie, a przedłużeniem w zwężeniu. Przy próbach materiałów mierzy się zwykle przedłużenie całkowite i to uważa się jako znamię ciągliwości, chociaż właściwie należałoby jako takie znamię uważać przedłużenie w zwężeniu.

Na rys. 37. przedstawiliśmy krzywą odkształceń dla żelaza miękkiego wedle Considere'a. Krzywa *OLPNS* jest zwykłą krzywą odkształceń wyznaczoną ze względu na pierwotną powierzchnię przekroju, *OLPN'R'* zaś prawdziwą krzywą odkształceń wyznaczoną z uwzględnieniem zmniejszenia się przekroju, zwężenia i przedłużenia w zwężeniu.

Poniżej podajemy tabliczkę odnoszącą się do tego doświadczenia, przyczem nadmieniamy, że odstęp znaczków wynosił 200 mm.

Siła ciągnąca <i>S</i>	Przedłużenie między znaczkami w stosunku do 1 m <i>a:l</i>	Średnica pręta <i>d</i>	Najmniejsza powierzchnia przekroju <i>A</i>	Natężenie w najmniejszym przekroju <i>V</i>	Przedłużenie w odsetkach w najmniejszym przekroju <i>a:l</i>	Uwaga.
kg	%	mm	mm ²	$\frac{kg}{cm^2}$	%	
400	0.010	16.0	200.97	199	0.010	
800	0.020	—	200.95	398	0.020	
1 200	0.030	—	200.93	597	0.030	
1 600	0.040	—	200.91	796	0.040	
2 000	0.050	—	200.89	995	0.050	
2 400	0.060	—	200.87	1 194	0.060	
2 800	0.075	—	200.84	1 394	0.075	
3 200	0.090	—	200.81	1 593	0.090	} granica sprężystości
3 600	1.110	—	200.77	1 793	0.111	
4 000	3.800	—	193.64	2 064	3.800	
4 400	4.800	—	191.79	2 294	4.800	
4 800	6.250	—	189.17	2 537	6.250	
5 200	8.250	—	185.68	2 800	8.250	
5 600	11.120	—	180.88	3 095	11.120	
6 000	16.600	—	172.38	3 480	16.600	} początek zwężenia
6 100	23.250	14.2	158.36	3 851	27.000	
5 900	27.600	13.3	188.92	4 247	44.000	
5 700	30.250	12.5	122.71	4 641	63.000	
5 500	32.000	11.8	109.45	5 025	84.000	
5 300	33.000	11.2	98.52	5 379	104.000	przerwanie

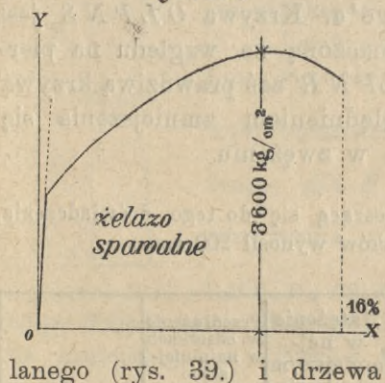
Granica sprężystości leży tu między 1800 a 2000 kg/cm^2 , współczynnik wytrzymałości $\mu = \frac{6100}{2.01} = 3034 \text{ } kg/cm^2$

Przedłużenie między znaczkami $\lambda = 33\%$.

W rzeczywistości wskutek zwięzienia, a więc zmniejszenia przekroju, przerywa się pręt dopiero przy natężeniu 5379 kg/cm^2 , widzimy więc, że materiał zdoła miejscowo pracować znacznie więcej, niż to współczynnik wytrzymałości wskazuje, ale w praktyce nie możemy przewidzieć dokładnie, o ile

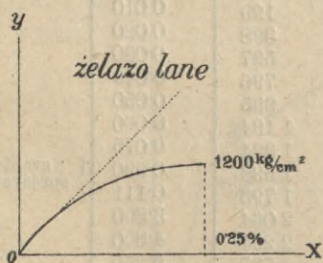
przy przerwaniu przekrój się zmniejszy i wyznaczamy współczynnik wytrzymałości μ ze względu na przekrój pierwotny i przedłużenie całkowite λ . Dlatego też następnie będziemy brali pod uwagę tylko zwykłą krzywą odkształceń.

rys. 38,

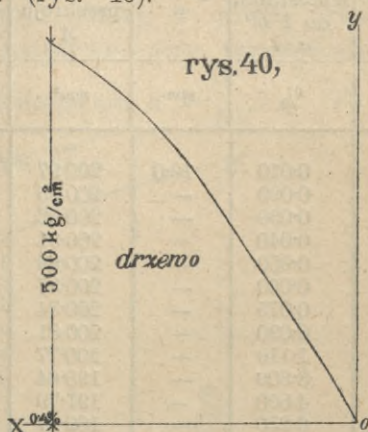


Kształt krzywej odkształceń zależy od materiału. Podajemy tu jako przykłady krzywą odkształceń dla żelaza spawalnego (rys. 38.), żelaza

rys. 39,



rys. 40,



§. 20. Własności ciał zależne od krzywej odkształceń, zwięzienia i przedłużenia.

Zwykle na zeskłady działają nie tylko siły stałe, lecz zarazem narażone są one na uderzenia i wstrząśnienia, których siła żywa musi być zniweczona pracą wewnętrzną materiału, proporcjonalną do iloczynu natężeń przez przedłużenia.

Jeżeli na osi OX (rys. 41.) odetniemy przedłużenia na cm długości a na osi OY natężenia ν , to praca przy przedłużeniu na cm długości pręta o przekroju A jest

$A\nu dl$, więc dla przedłużenia od 0 do Δl

$$P = A \int_0^{\Delta l} \nu dl = A \text{ pow. } OCC_1$$

Pracę, którą pręt wykonywa przy przedłużeniu się o ΔL

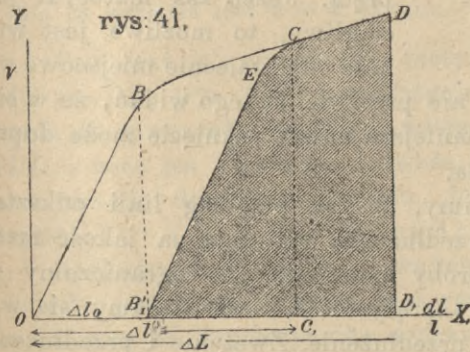
aż do przerwania, przedstawia więc dla $A=1$ pow. ODD_1 . Im większa ta powierzchnia, tem większą jest wytrzymałość pręta na wstrząśnienia i uderzenia, nazywamy ją więc wytrzymałością żywą (fr. *résistance vive de rupture*).

Jeżeli przekroczy granicę sprężystości, to po ustaniu siły otrzymamy odkształ-

cenie trwale OO_1 , przyczem $O_1E \parallel OB$, powierzchnia kreskowana jest jednak teraz mniejsza od całej powierzchni $OBDD_1$, a zatem przez przekroczenie granicy sprężystości zmniejszamy wytrzymałość żywą.

Wstrząśnięcia działają nagle na zeskład w ten sposób, że w pewnych częściach zeskładu wywołują znaczniejsze miejscowe odkształcenia. Przytem rozchodzi się o to, aby odkształcenia takie nie pociągały za sobą w tem miejscu przerwania. Zależy to od przedłużenia w zwięźeniu. Im ciało jakieś przy przerwaniu wykazuje większe zwięźenie i przedłużenie, a zatem im bardziej jest ciągliwe, tem lepiej wytrzymuje wstrząśnienia, tem mniej jest kruche (n. *sprøde*, fr. *fragile*).

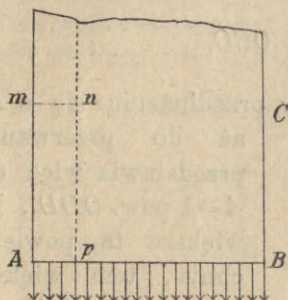
Podobnie rzecz się ma, jeżeli pręt pracujący na ciągnięcie jest nadpęknięty (rys. 42.). Wszystkie włókna od pn do BC wydłużają się wskutek siły zewnętrznej, w pasku zaś $Apnn$



rys. 41.

wydłużenie takie nie jest możliwe z powodu pęknięcia mn . Siły działające na Ap muszą się więc przenieść przez całe włókno pn , stąd powstaje w n

rys: 42,



miejsce większe odkształcenie, niż innych włókien. Jeżeli materiał nie jest ciągliwy i niezdolny do większych odkształceń, to w n nateżenie dosięgnie współczynnika wytrzymałości i pęknięcie się przedłuży, poczem to samo zjawisko się powtarza aż do zupełnego przerwania pręta. Jeżeli zaś materiał jest ciągliwy, to możliwe jest większe odkształcenie miejscowe w n

bez przerwania i pręt się nie przerwie. Z tego widać, że w ciałach kruchych każde najmniejsze nawet pęknięcie może doprowadzić do przerwania ciała.

Z poprzedniego widzimy, że tak przebieg linii odkształcenia, jak i zwężenie i przedłużenie wpływają na jakość materiału. Z tego powodu próby materiału nie ograniczamy na wyznaczeniu współczynnika sprężystości, lecz staramy się wyznaczyć także zwężenie i przedłużenie. Zwężenie i przedłużenie wyrażamy w odsetkach pierwotnego przekroju i pierwotnej długości między znakami, którą przyjmujemy 20 *cm*. Warunki dostawcze żelaza i stali zawierają zatem przepisy nie tylko co do najmniejszej wytrzymałości, ale także co do najmniejszego zwężenia i przedłużenia.

Rozporządzenie austr. min. handlu z r. 1887., dotyczące budowy mostów §. ust. 5. Żelazo spawalne musi mieć przy wytrzymałości 3600 kg/cm^2 i wyższej przynajmniej 12 procent przedłużenia w kierunku walcowania.

Przy mniejszej wytrzymałości musi być stosunkowo większe przedłużenie, które ma wynosić przy najniższej jeszcze dozwolonej wytrzymałości 3300 kg/cm^2 najmniej 20 procent.

Przedłużenie należy mierzyć na pręcie próbnym o przekroju 5 *cm*² przy odstępach znaczków 20 *cm*. Jeżeli nie można uniknąć użycia pręta próbnego o innym przekroju, niż powyżej podano, to należy odstęp znaczków w ten sposób wyznaczyć ze względu na pręt normalny, aby kwadraty odstępów znaczków miały się jak powierzchnie przekrojów.

Rozporządzenie austr. ministerstwa handlu z dnia 29. stycznia 1892, co do użycia zasadowego żelaza zlewne Martina dla zeskładów mostowych na kolejach żelaznych.

1. Żelazo zlewne, mające być użyte do jakiegokolwiek zeskładu dźwigającego musi posiadać przy wytrzymałości 3500 do 4500 kg/cm^2 w kierunku walcowania mierzonej najmniej takie przedłużenie, jakie wypada z wstawienia prostoliniowego dla niższej granicy 28%, dla wyższej 22%.

Dalej może wytrzymałość przy każdym moście we wszystkich jego częściach wahać się tylko najwyżej o 700 kg/cm^2 .

2. Żelazo nitowe, mające być użyte, musi wykazywać przy 3500 do 4000 kg/cm^2 wytrzymałości najmniej 32% do 26% przedłużenia.

3. Przy próbach przedsięwziętych dla kierunku prostopadłego do kierunku walcowania mają ważność te same granice wytrzymałości i procenta przedłużenia o 2 zmniejszone.

Przedłużenie należy mierzyć w sposób przepisany rozporządzeniem z dnia 15. września 1887 w §. 4. lit. a) u. 5.

Ponieważ jak widzieliśmy nietylko współczynnik wytrzymałości $\mu = DD_1$ (rys. 41.) i przedłużenie ΔL mają wpływ na zachowanie się materiału względem wstrząśnień, ale wielkość pow. ODD_1 , więc też Tetmajer uważa tę powierzchnię $A' = ODD_1$ jako znamię dobroci materiału. Możemy przytem w ogóle napisać

$$A' = \eta \mu \Delta l \dots\dots\dots 40)$$

Spółczynnik η jest dla pewnych materiałów prawie stały, a wtedy jest praca możliwa materiału wprost proporcjonalna do iloczynu ze współczynnika wytrzymałości przez przedłużenie.

Doświadczenia Steinera wykazały, że przy niskiej ciepłocie maleje ciągliwość. I tak n. p. wynosiło przedłużenie przy przerwaniu

dla	żelaza spawalnego	stali Martina	stali Tomasa
przy norm. ciepłocie	18.5	30.5	30.5%
w ciepłocie — 110 do — 50°	15.0	17	17

A zatem wytrzymałość wprawdzie wzrasta przy bardzo niskiej ciepłocie, ale ciało staje się kruchem. Zwłaszcza uszkodzone żelazo zlewne i niektóre gatunki spawalnego stają się przy bardzo niskiej ciepłocie kruche, jak szkło, nieuszkodzone zachowuje się znacznie lepiej.

§. 21. Pewność i natężenie dopuszczalne.

Ponieważ, jak wiemy, współczynnik wytrzymałości nie da się dokładnie wyznaczyć, lecz jest tylko przeciętną wartością

spółczynników, w praktyce się trafiających, ponieważ wiele pobocznych lub przypadkowych wpływów, działających niekorzystnie na ciało badane, nie da się obliczyć, ponieważ wreszcie wszystkie materyały z wyjątkiem chyba kruszców szlachetnych, podlegają zniszczeniu zwłaszcza pod wpływem wilgoci i powietrza, a więc materyał staje się gorszy lub też przekrój mniejszy wskutek rdzewienia, ponieważ możliwe są błędy w materyale, których nie można uniknąć ani spostrzec, więc z tych powodów nie dozwalamy nigdy w zespołach budowlanych wzrosnąć natężeniu aż blisko współczynnika wytrzymałości, lecz obliczamy przekroje w ten sposób, aby natężenie było $\frac{1}{n}$ wytrzymałości i nazywamy to natężenie τ natężeniem dopuszczalnym (n. *zulässige Spannung*, fr. *limite de securité*, *limite pratique de travail* an. *safe load*, *allowable unit stress*) a liczbę n współczynnikiem pewności (n. *Sicherheitsgrad*, fr. *coefficient de securité*, an. *factor of safety*), a zatem

$$\tau = \frac{\mu}{n} \dots \dots \dots 41)$$

Spółczynnik pewności n obieramy tem większy, im większym wstrząśnieniom ulega zespół, im dłużej ma trwać i im mniej dokładnie możemy obliczyć siły działające i wytrzymałość materyału. Obieramy przytem taki współczynnik pewności, aby $\tau = \frac{\mu}{n}$ nie przekraczało granicy sprężystości. Uwzględniając te wszystkie okoliczności obieramy zwykle w praktyce dla współczynnika pewności n następane wartości:

M a t e r y a ł	Spółczynnik pewności n			
	budowle tymczasowe	zwykle zespoły w budownictwie	mosty i dachy	machiny (wielkie wstrząśnienia)
Drzewo	{ciągnięcie	6	7	10
	{ciśnienie	4	5	7
Kamień, cegła, mur	—	20	25	30
Linwy	4	5	6	7
Szkło	—	4	—	—
Żelazo kute, blacha i stal	3 do 4	4	5 do 6	7 do 8
Żelazo lane	5	6	7	10

Francuzi w inny sposób wyznaczają natężenie dopuszczalne. Sądzą oni, że w najniekorzystniejszych warunkach nie powinno natężenie przekraczać granicy sprężystości, bo po jej przekroczeniu występują natężenia trwałe, zmiana układu wzajemnego drobin, która gdyby się częściej powtarzała, mogłaby doprowadzić do przerwania ciała. Dlatego też przyjmują Francuzi natężenie dopuszczalne τ równe m tej części natężenia przy granicy sprężystości α , a więc $\tau = \frac{\alpha}{m}$ 42)

i nazywają m współczynnikiem pewności, przyjmując $m = \frac{5}{3}, 2$ lub 3 .

Zarzucić jednak musimy temu sposobowi wyznaczania natężenia dopuszczalnego tę okoliczność, że wyznaczenie granicy sprężystości jest bardzo niepewne, że nareszcie są ciała nie mające wcale granicy sprężystości. Dlatego też lepiej przyjmować jako natężenie dopuszczalne n tą część współczynnika wytrzymałości, przytem jednak dobierać takie n , aby to natężenie leżało znacznie niżej granicy sprężystości.

Co do kamieni zwrócić tu musimy uwagę, że na ciśnienie inaczej się zachowują monolity, a inaczej kamienie w murze lub w sklepieniu. Gdy dla monolitów z kamienia bardzo twardego przyjmują nieraz $n=7$, z miększego $n=10$, to dla muru zwykle przyjmuje się $n=20$, a dla sklepień nawet $n=40$ do 60 .

Znając μ i n obliczymy łatwo z równania 41.) współczynniki wytrzymałości, które poniżej podajemy dla najważniejszych materyałów, zaokrągliwszy je według tego, jak je zwykle w praktyce obieramy.

Wyższe liczby dla mostów oznaczają natężenie dopuszczalne dla belek głównych a niższe dla części drugorzędnych.

Chcąc według poprzedniego obliczyć potrzebny przekrój części zespołu, szukamy największej siły P , która działa na tę część zespołu w najniekorzystniejszym wypadku i otrzymujemy dla natężenia dopuszczalnego τ przekrój

$$A = \frac{\text{najw. } P}{\tau} 43)$$

M a t e r y a ł	N a t ę ż e n i e d o p u s z c z a l n e τ w kg/cm^2							
	budowle tymczasowe		zwykłe zespoły budowlane		mosty i dachy		maszyny (wielkie wstrząśnienia)	
	ciągnięcie	ciśnienie	ciągnięcie	ciśnienie	ciągnięcie	ciśnienie	ciągnięcie	ciśnienie
Bazalt	—	200	4	90	—	—	—	—
Beton	—	—	3	25	2	20	—	—
Cegła (wypalona)	—	—	—	8	—	—	—	—
Cement	—	—	2	30	—	—	—	—
Cynk blacha	—	—	75	—	—	—	—	—
Dolomit	—	—	3	40	2	35	—	—
Drzewo bukowe równoleg. do włókien	120	90	100	80	90	75	60	45
" " prostop. " "	30	50	28	45	25	40	20	30
" " dębowe równoleg. " "	120	90	100	80	90	75	60	45
" " prostop. " "	28	50	25	45	20	40	16	30
" " szpilki. równoleg. " "	100	80	90	75	85	70	55	40
" " prostop. " "	28	18	25	15	20	12	16	10
Granit	—	—	5	40	4	35	—	—
Gneis	—	—	5	35	4	30	—	—
Glin	—	—	400	—	—	—	—	—
Konopne liny	100	—	—	—	—	—	—	—
Kwarcyt	—	—	—	35	—	30	—	—

Żupek	—	35	—	—	30	—	—	—	—
Marmur	—	20	—	—	—	—	—	—	—
Miedz lana	8	—	—	—	—	—	—	—	—
" kuta	210	—	—	—	—	—	—	—	—
Mur ceglany na cemencie	400	—	—	—	—	—	—	—	—
" " " wapnie	11	—	10	—	—	—	—	—	—
" " " kamienny, cemencie	7	—	6	—	—	—	—	—	—
" " " wapnie	14	—	13	—	—	—	—	—	—
Porfir.	10	—	9	—	—	—	—	—	—
Syenit	—	60	—	—	—	—	—	—	—
Stal bardzo miękka	—	55	—	—	—	—	—	—	—
" miękka	1 100	1 100	1000 do 900	1000 do 900	1000 do 900	800	800	800	800
" twarda	1 200	1 200	1100 " 1000	1100 " 1000	1100 " 1000	900	900	900	900
" bardzo twarda	1 600	1 600	1500 " 1200	1500 " 1200	1500 " 1200	1 100	1 100	1 100	1 100
Szkiełto dęte	—	—	1800 " 1500	1800 " 1500	1800 " 1500	1 400	1 400	1 400	1 400
" lane	90	—	—	—	—	—	—	—	—
Wapień	55	200	—	—	—	—	—	—	—
" " "	2	30	1	1	25	—	—	—	—
Żelazo lane	250	750	200	200	700	130	130	300	300
" spawalne	1 000	1 000	800 do 700	800 do 700	800 do 700	550	550	550	550
" zlewne	1 050	1 050	850 " 750	850 " 750	850 " 750	600	600	600	600
" blacha	950	—	750 " 650	750 " 650	—	500	500	—	—
" drut	1 200	—	1 000	1 000	—	700	700	—	—

Normy, wypracowane przez austr. tow. inżynierów i architektów a przyjęte przez magistraty miasta Wiednia i Lincu, zawierają następujące natężenia dopuszczalne.

	Ciągnienie <i>kg/cm²</i>	Ciśnienie <i>kg/cm²</i>
A) Żelazo i drzewo.		
1. Żelazo spawalne i miękkie żelazo zlewne	1 000	1 000
2. „ lane	250	750
3. Drzewo dębowe	100	70
4. „ sosnowe	90	60
5. „ jodłowe	70	60
6. „ świerkowe	70	55
7. „ modrzew owe	70	55

	klasa muru	ciśnienie <i>kg/cm²</i>		
		A.	B.	C.
B) Mur ciosowy i kamień.				
1. Granit i porfir		50	40	20
2. Kamienie twarde		25	20	—
3. „ średnio twarde		15	10	—
4. „ miękkie		7.5	—	—

A. Całkowite większe mury ciosowe, pojedyncze podpory, przyczółki, węzłowania, silniejsze filary obciążone i słupy, których najmniejszy wymiar poprzeczny wynosi najmniej $\frac{1}{8}$ wysokości.

B. Ciosy silnie podcięte i wystawione na zewnątrz, słupy i cieńsze filary obciążone, których najmniejszy wymiar poprzeczny wynosi $\frac{1}{8}$ do $\frac{1}{12}$ wysokości.

C. Całkiem cienkie słupy i filary obciążone, których średnica lub najmniejszy wymiar poprzeczny wynosi mniej, niż $\frac{1}{12}$ wysokości, jeżeli ustrój szczegółów jest odpowiedni.

C) Mur ceglany i kamienny.

Ciśnienie dopuszczalne w *kg/cm²*.

L. porz.	Rodzaj muru	Mury naj- mniej 45 cm grube	Mury mniej, niż 45 cm grube	
		i filary obciążone, których naj- mniejszy wymiar wynosi		
		najmniej $\frac{1}{6}$ wy- sokości	tylko $\frac{1}{6}$ do $\frac{1}{8}$ wysokości	tylko $\frac{1}{8}$ wysokości
1.	Mur ceglany na wapnie	5	2.5	—
2.	„ „ „ cemente	7.5	5	—
3.	„ „ „ „ portland.	10	7.5	5
4.	„ kamienny albo miesz. na wap.	4	—	—
5.	„ „ „ „ „ cem.	5	—	—
6.	„ z cegieł szlamowanych „ „	9	8	7.5
7.	„ „ „ „ na cem. portl.	12	10	8
8.	Zendrówki na cemente portlandz.	15	12	10
9.	Beton na zaprawie cementowej . .	7	—	—

D. Grunt budowlany.

ciśnienie dopuszczalne
kg/cm²

1. Głina i il bardzo wilgotny, piasek w warstwie 1 m grubości, jeżeli zapobieże się bocznemu wysunięciu do 1·5
2. Żwir z piaskiem silny w warstwie nie grubej albo przy zmiennem położeniu warstw, glina i il suchy stojący, lub po części stojący, jeżeli zapobieże się bocznemu wysunięciu do 2·5
3. Zbity gruboziarnisty żwir w warstwie grubej, leżąca glina i il suchy do 3·5
4. Pulchna ziemia wodnista, fundamentowanie przy użyciu pali do 2·0
5. Pulchna ziemia wodnista, fundamentowanie przy użyciu pali i warstwy betonu na 60 cm do 3·0

Berlińskie prezydyum policji przyjmuje następane natężenie dopuszczalne (ogłoszono w r. 1887.)

M a t e r y a ł	Natężenie dopuszczalne w kg/cm ²	
	ciągnienie	ciśnienie
Żelazo spawalne	750	750
„ lane	250	500
Błacha falista żelazna	500	500
Drut żelazny	1 200	—
Drzewo dębowe i bukowe	100	80
„ sosnowe	100	60
Granit	—	45
Piaskowiec wedle twardości	—	15 do 30
Wapień Rüdersdorfski w ciosach	—	25
Mur z wapiennych kamieni na wapnie	—	5
Zwykły mur ceglany	—	7
Mur ceglany na cemencie	—	11
Najlepszy mur z zendrówek na cemencie	—	12 do 14
Mur z wapieni porowatych	—	3 „ 6
Dobry grunt budowlany	—	25

Przykłady. 1. Jaką średnicę dać należy prętowi okrągłemu żelaznemu wiązania dachowego, jeżeli największa siła ciągnąca $P=6t$?

Według tabliczki przyjmiemy $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$, a zatem wedle 43)

$$A = \frac{6000}{800} = 7.5 \text{ cm}^2, \text{ a stąd } d = \sqrt{\frac{4.7.5}{\pi}} = 3.09 \text{ cm}$$

Przyjmiemy więc $d = 31 \text{ mm}$.

2. Niski słup drewniany o przekroju kwadratowym niesie 15t; wyznaczyć wymiary, jeżeli budowla jest tymczasową a drzewo miękkie.

Według tabliczki przyjmiemy $\tau=80 \text{ kg/cm}^2$, a zatem wedle 48.)

$A = \frac{15000}{80} = 187.5 \text{ cm}^2$, stąd bok $b = 13.7 \text{ cm}$, zamiast czego przyjmiemy $b = 14 \text{ cm}$.

3. Długość boku fundamentu kwadratowego słupa murowanego wynosi 1 m . jaki ciężar może on przenieść na grunt, dla którego $\tau=2.5 \text{ kg/cm}^2$?

$$P = 100 \cdot 100 \cdot 2.5 = 25000 \text{ kg} = 25 \text{ t.}$$

§. 22. Doświadczenia Wöhlera i Bauschingera.

Nowsze badania nad wytrzymałością materyałów, a mianowicie liczne doświadczenia Wöhlera, urządzone z polecenia pruskiego ministerstwa w latach 1859 do 1870 i późniejsze Bauschingera i Tetmajera, okazały, że jeżeli ciało łamie się przy jednorazowym obciążeniu przy natężeniu μ , to gdy ciało to obciążać będziemy bardzo często, złamie się już przy mniejszem natężeniu. Dalej wykazały doświadczenia, że ciało łamie się tem prędzej, im większa jest różnica między największem i najmniejszym natężeniem i im większa jest największość natężenia. Z tego wynika, że przy obliczaniu przekroju musimy uwzględnić nietylko najw. P , ale i najmn. P , zwłaszcza jeżeli między temi wartościami jest znaczna różnica i obciążenie często się zmienia. Ten wypadek zachodzi szczególnie przy mostach, gdy przeciwnie w zespolach zwykłych w budownictwie w mniejszym występuje stopniu i wystarcza tam zwykle zachowanie dawnego sposobu uwzględniania tylko najw. P .

Ponieważ jednak czasami, zwłaszcza przy obliczaniu dachów, mamy do czynienia z obciążeniem zmiennem, więc zastanowimy się tu w krótkości nad doświadczeniami Wöhlera, które wykazały następujące prawidła:

1. Gdy w pręcie powstają pewną ilość razy natężenia, wywołane obciążeniem zmiennem, przerwanie następuje już przy mniejszem natężeniu, niż gdyby natężenie było niezmiennem.

2. Jeżeli natężenie zmienia się między pewnymi granicami najmniejszością i największością, to potrzebną jest tem większa ilość zmian natężenia do przzerwania prętu, im mniejsza jest największość natężenia.

N. p. przy pewnym szeregu doświadczeń zmieniało się natężenie osi żelaznej od 0 do ν , a ilość zmian natężenia potrzebna do przzerwania była n .

Doświadczenie wykazało, że

$$\begin{array}{l} \text{dla } \nu = \quad 4\,500 \quad 3\,500 \quad 2\,500 \quad 2\,200 \quad \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \\ n = 170\,000 \quad 450\,000 \quad 1\,500\,000 \quad n > 4\,820\,000 \end{array}$$

3. Jeżeli największość natężenia powstaje niezmienną, to tem większej potrzeba ilości zmian natężenia do przzerwania pręta, im większą jest najmniejszość (*minimum*) natężenia.

Niechaj n. p. ν_0 będzie najmniejsze natężenie, ν_1 największe natężenie a n liczba zmian natężenia potrzebna, aby się pręt przerwał, to doświadczenia okazały dla stali, że

$$\begin{array}{l} \text{dla } \nu_0 = 1\,210 \quad 2\,430 \quad 3\,660 \quad 4\,820 \quad \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \\ \text{a } \nu_1 = 7\,300 \quad 7\,300 \quad 7\,300 \quad 7\,300 \quad \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \end{array}$$

potrzeba, aby $n = 0,06 \quad 0,15 \quad 0,40 \quad n > 19,67$ milionów.

4. Jeżeli największość natężenia przy stałej najmniejszości nie dosięga pewnej granicy, to ciało się nie przerywa, choćby ilość zmian natężenia była jak największą.

To natężenie graniczne nazywamy współczynnikiem wytrzymałości ustawicznej (n. *Arbeitsfestigkeitscoefficient*, fr. *limite de non-rupture*, an. *working stress*), bo nawet dla ustawicznych zmian natężenia pręt przy tem natężeniu się nie przerwie.

5. Wytrzymałość ustawiczna jest tem większa, im większą jest najmniejszość natężenia.

Nazwawszy α_m najmniejszość natężenia a α współczynnik wytrzymałości ustawicznej, otrzymano z doświadczeń z żelazem kute

$$\begin{array}{l} \text{dla } \alpha_m = -1\,700 \quad 0 \quad +1\,750 \quad +3\,290 \quad \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \\ \alpha = +1\,700 \quad +2\,340 \quad +3\,200 \quad +3\,290 \quad n \end{array}$$

Na podstawie tych doświadczeń ustawili uczeni niemieccy wzory, wedle których można dokładnie wyznaczyć wytrzymałość ustawiczną, a przyjmując n tą pewność także natężenie dopuszczalne z uwzględnieniem największości i najmniejszości natężenia.

Inżynierowie francuscy nie przyjęli tych wzorów, lecz zarzucają im, że doświadczenia Wöhlera nie były tak liczne, aby można ustawiać na ich podstawie tak dokładne wzory, że zresztą zmiany w natężeniu następowały zbyt szybko tak, że

drobiny nie miały czasu jeszcze wrócić do pierwotnego położenia, a już nastąpiła nowa zmiana natężenia.

Profesor monachijski Bauschinger robił w tym względzie dalsze doświadczenia z żelazem spawalnym i na ich podstawie doszedł do następnego wniosku.

Zmiany natężenia między natężeniem równym zeru a natężeniem przy granicy sprężystości nie spowodują nigdy przerwania, jeśli materiał nie posiada błędów i jeżeli granica sprężystości nie została sztucznie podwyższoną.

Wynik ten doświadczeń Bauschingera dostarczył inżynierom francuskim nowego argumentu przeciwko uwzględnianiu przy obliczaniu przekroju nie tylko najw. P ale i najmn. P . Wychodząc z zasady, że natężenie dopuszczalne ma być m tą częścią natężenia przy granicy sprężystości, twierdzą oni, że to, co się dzieje poza granicą sprężystości, niema wpływu na natężenie dopuszczalne. A że zmiany w natężeniu mają wpływ na wytrzymałość dopiero wtedy, gdy największe natężenie przekracza granicę sprężystości, więc zdaniem Francuzów nie trzeba ich uwzględniać.

Uznając po części zarzuty inżynierów francuskich za słuszne, pomimo tego wyznaczając natężenie dopuszczalne wedle wzoru 41.) $\tau = \frac{\mu}{n}$ a nie wedle wzoru 42.) $\tau = \frac{z}{m}$, uwzględniać powinniśmy zmiany w natężeniu na podstawie doświadczeń Wöhlera i Bauschingera.

§. 23. Wyznaczenie wymiarów według Winklera.

Stosunek współczynnika wytrzymałości ustawicznej do najmniejszości natężenia α_m możemy wykreślić przedstawić. Wykreślmy jako rzędne współczynniki wytrzymałości ustawicznej α (rys. 43.), jako odcinki najmniejszości natężenia α_m , to dla rozmaitych wartości α_m i α otrzymamy rozmaite punkty. Punkty te wszystkie połączone dają linię krzywą, zamiast której przyjmuje Winkler w celu uproszczenia wzorów prostą ab , nachyloną do osi OX . Chociaż prosta ab małoco różni się od krzywej $ac'b'$, jednak zawsze wyniki, otrzymane na podstawie prostej ab , musimy uważać tylko jako przybliżone.

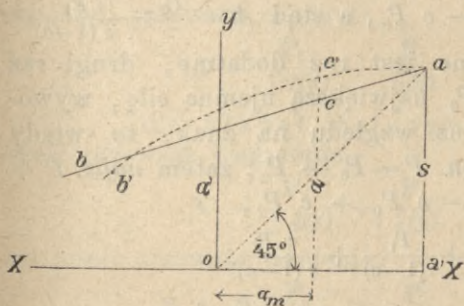
Równanie prostej ab będzie

$$\alpha = \alpha' + c \alpha_m \dots \dots \dots 44)$$

jeżeli α' i c oznaczać będą ilości stałe, które na podstawie doświadczeń wyznaczmy. Jeżeli w tem równaniu przyjmiemy $\alpha_m = 0$, to $\alpha = \alpha'$; natężenie to nazywamy współczynnikiem wytrzymałości pierwotnej (n. *Ursprungsfestigkeitscoefficient*, an. *primitiv safe stress*), bo przyjmujemy, że przed działaniem sił zewnętrznych natężenie pierwotne było równe zeru.

Poprowadźmy z punktu O prostą pod 45° do osi OX , to otrzymamy punkt przecięcia się a tej prostej z prostą ab . Z tego punktu spuścimy prostopadłą aa_1 , to będzie $aa_1 = \delta = Oa_1$, a więc dla $\alpha_m = \delta$ jest $\alpha = Oa_1 = \delta$. Natężenie δ nazywamy współczynnikiem wytrzymałości spoczynkowej (n. *Tragfestigkeitscoefficient*, an. *breaking strain*, *statical breaking strain*).

rys:43



Jestto natężenie, przy którym ciało łamie się przy stałym niezmiennem obciążeniu.

Jeżeli za α i α_m podstawimy δ w rów. 44.), otrzymamy $\delta = \alpha' + c \delta$ czyli $\alpha' = \delta (1-c)$. Podstawmy teraz tę wartość za α' rów. 44.), a otrzymamy $\alpha = \delta (1-c) + c \alpha_m \dots \dots 45)$

Z doświadczeń otrzymano dla żelaza $c = 0.45$, dla stali $c = 0.56$, możemy więc napisać dla żelaza:

$$\alpha = 0.55 \delta + 0.45 \alpha_m.$$

Wszystko to odnosi się do wytrzymałości na ciągnięcie; dla ciśnienia otrzymamy podobną linię na dole pod osią OX i równanie podobne jak 44.), stałe α' i c będą tylko inne.

Przypuśćmy teraz, że chcemy wyznaczyć przekrój belki przyjmując n^{ta} pewność. Jeżeli α jest współczynnikiem wytrzymałości ustawicznej, to według rów. 41.) i 43.) $\alpha = n \frac{\text{najw. } P}{A}$, gdzie A oznacza przekrój, P siłę działającą w osi. Również możemy napisać $\alpha_m = n \frac{\text{najmn. } P}{A}$, jeżeli α_m oznacza najmniej

szość natężenia, δ jest współczynnikiem wytrzymałości jednorazowej, więc dla n^{tej} pewności $\frac{\delta}{n} = \tau$. Podstawmy te wartości w rów.

45.), a otrzymamy $\alpha = n \frac{najw. P}{A} = n \tau (1-c) + c n \frac{najmn. P}{A}$

Pomnożmy całe równanie przez A , a podzielmy przez $n \tau (1-c)$, to otrzymamy

$$A = \frac{najw. P}{\tau (1-c)} - c \frac{najmn. P}{\tau (1-c)}.$$

Zastosujmy to do obciążenia zmiennego i nazwijmy siłę, wywołana ciężarem stałym P_0 a ciężarem zmiennym P_1 , to $najw. P = P_0 + P_1$, a $najmn. P = P_0$, więc $najw. P + - c najmn. P = P_0 + P_1 - c P_0$, a stąd $A = \frac{P_0}{\tau} + \frac{P_1}{\tau (1-c)}$.

Jeżeli natężenie zmienne jest raz dodatnie, drugi raz ujemne i jeśli nazwiemy P_2 największą ujemną siłę, wywołaną ciężarem zmiennym, bez względu na znak, to wtedy $najw. P = P_0 + P_1$, zaś $najmn. P = P_0 - P_2$, zatem $najw. P + - c najmn. P = P_0 + P_1 - c P_0 + c P_2$,

$$\text{więc } A = \frac{P_0}{\tau} + \frac{P_1}{\tau (1-c)} + \frac{c P_2}{\tau (1-c)}.$$

Nazwijmy $\tau = \tau_0$, a $\tau (1-c) = \tau_1$, to $A = \frac{P_0}{\tau_0} + \frac{P_1}{\tau_1}$, gdy natężenie nie zmienia znaku, zaś, gdy jest dodatnie i ujemne, to $A = \frac{P_0}{\tau_0} + \frac{P_1}{\tau_1} + \frac{P_2}{\tau_2}$, przyczem $\tau_2 = \frac{\tau (1-c)}{c}$. P_0 jest dodatnie, jeżeli ma znak ten sam, co P_1 , P_2 zaś jest dodatnie, jeżeli ma znak przeciwny.

Wstawmy wartość za c i τ , to otrzymamy dla żelaza, jeżeli przeważa ciągnienie,

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{770} + \frac{P_2}{1700} \text{ cm}^2, \\ \text{zaś jeżeli przeważa ciśnienie,} \\ A &= \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{720} + \frac{P_2}{1800} \text{ " } \end{aligned} \right\} \dots 46)$$

Wzorów tych możemy używać w budownictwie, dla mostów zaś trzeba uwzględnić jeszcze wstrząśnienia, sprawione ciężarem ruchomym, a to robimy w ten sposób, że ciężar ruchomy mnożymy współczynnikiem większym od jedności: 1,3 dla

mostów kolejowych, 1,2 dla drogowych a 1,1 dla kładek. Wtedy otrzymamy dla mostów kolejowych żelaznych, jeżeli przeważa ciągnienie,

$$A = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{590} + \frac{P_2}{1300} \text{ cm}^2, \left. \begin{array}{l} \text{zaś jeżeli przeważa ciśnienie,} \\ A = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{550} + \frac{P_2}{1380} \text{ " ,} \end{array} \right\} \dots 47)$$

dla mostów drogowych żelaznych, jeżeli przeważa ciągnienie,

$$A = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{640} + \frac{P_2}{1400} \text{ cm}^2, \left. \begin{array}{l} \text{zaś jeżeli przeważa ciśnienie,} \\ A = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{600} + \frac{P_2}{1500} \text{ " ,} \end{array} \right\} \dots 48)$$

dla kładek żelaznych, jeżeli przeważa ciągnienie,

$$A = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{1550} \text{ " ,} \left. \begin{array}{l} \text{zaś jeżeli przeważa ciśnienie,} \\ A = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{650} + \frac{P_2}{1640} \text{ " ,} \end{array} \right\} \dots 49)$$

W Austrii obowiązuje rozporządzenie ministeryalne z r. 1887. dla mostów żelaznych, którego §. 4. odnoszący się do mostów kolejowych brzmi:

Praca materiału. Przy uwzględnianiu obciążeń i wpływów określonych §. 3. ust. a, b, c, d, e, g, h, jakoteż i ciężaru własnego konstrukcyi nie powinno przekraczać obliczone największe natężenie materiału na cm^2 użytecznej powierzchni przekroju (t. j. po odciągnięciu dziur na nity, jakoteż części niewspółdziałających przekroju pełnego) następujących granic.

a) Przy żelazie spawalnem na ciągnienie i ciśnienie:

1. Dla rozpiętości niżej 40 m 700 kg wraz z dodatkiem 2 kg na każdy metr rozpiętości.

2. Dla rozpiętości od 40 m wyżej, a to:

dla 40 m	780	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
„ 80 m	840	„
„ 120 m	880	„
„ 160 m i wyżej	900	„

przyczem dla pośrednich rozpiętości należy wstawiać wedle prawa linii prostej, a dla poprzecznic i podłużnic brać tę wartość, która odpowiada ich rozpiętości.

b) Przy żelazie lanem, któryto materiał nie powinien tworzyć żadnych głównych części składowych konstrukcyi niosącej, ustanawia się

powyżej wzmiankowane granice: 700 kg/cm^2 na ciśnienie, 200 kg/cm^2 na zwykłe ciągnięcie;

c) Dla drzewa 80 kg/cm^2 na ciągnięcie i ciśnienie w kierunku włókien;

e) Największe natężenie, które wynika z działania wiatru, określonego w §. 3. ust. f. wraz z natężeniami poprzednio omawianymi według części zespołu, o którą chodzi, nie powinno przekraczać następczej granicy:

do §. 4. ust. a. punkt 1. i 2.	1000	$\frac{kg}{cm^2}$
„ §. 4. „ a. „ 3.	700	„
„ §. 4. „ a. „ 4.	600	„
„ §. 4. „ c. „	90	„

Dla mostów drogowych §. 16. brzmi:

Natężenie. Gdy przyjmiemy za podstawę omówione §. 15. lit. a, b i d, obciążenie i wpływy, jakoteż własny ciężar zespołu, nie może przekraczać obliczone największe natężenie materiału na cm^2 użytecznej powierzchni przekroju (t. j. po odciągnięciu dziur na nity, jakoteż części niewspółdziałających przekroju pełnego) następczych granic:

a) dla żelaza spawalnego, jak w §. 4. lit. a, l. 5. przepisano: 750 kg/cm^2 wraz z dodatkiem 2 kg/cm^2 na każdy metr rozpiętości, a najwyżej razem 900 kg/cm^2 , przyczem poprzecznice, podłużnice i składniki pośrednie obliczać należy podług ich rozpiętości.

b) Dla żelaza lanego obowiązują pod względem dopuszczalnego natężenia granice ustanowione w §. 4. lit. b.

c) Wkońcu mają być zastosowane także dla mostów drogowych postanowienia w §. 4. l. c i e, odnoszące się do mostów kolejowych.

Rozporządzenie austr. ministerstwa z dnia 29. stycznia 1892. co do użycia zasadowego żelaza zlewnego Martina dla mostów nakazuje przyjmować to samo natężenie dopuszczalne, co dla żelaza spawalnego.

W Rosyi należy przyjmować według rozp. ministr. komunikacyi z r. 1875. i 1885.

	dla żelaza kutego	dla żelaza zlewnego
dla belek głównych mostów o rozpiętości do 7 sąż.		
i belek drugorzędnych wszystkich mostów (netto)	$\tau = 600$	700 $\frac{kg}{cm^2}$
dla belek głównych mostów o rozpiętości 7 do 15. sąż.		
na ciągnięcie netto	$\tau = 700$	750 „
dla belek głównych mostów o rozpiętości nad 15 sąż.		
na ciśnienie półnetto	$\tau = 725$	800 „
dla tężników pionowych i poziomych mostów o rozpiętości wyżej 15 sążni na ciągnięcie	$\tau = 900$	1 000 „
dla tężników pionowych i poziomych mostów o rozpiętości wyżej 15 sążni na ciśnienie*)	$\tau = 900$	900 „

Metoda Winklera zaleca się wielką prostotą, nie jest jednak zupełnie ścisłą, gdyż linia ab' (rys. 43.) jest w rzeczywistości krzywą, a my przyjęliśmy zamiast niej z Winklerem prostą ab . Dlatego też podajemy poniżej metodę dokładniejszą.

*) Bliższe szczegóły poda Podr. Teoryi Mostów. Część I. tom. I. str. 24.

§. 24. Wyznaczenie wymiarów według Launhardta i Weyrauch'a.

Launhardt przyjmuje jako równanie linii $ac'b'$ (rys. 43).

$$\alpha - \alpha_m = \frac{\delta - \alpha}{\delta - \alpha'} \alpha, \dots \dots \dots 50)$$

stąd widzimy, że różnica natężenia (n. *Spannungsdifferenz*) $\alpha - \alpha_m$ jest funkcją drugiego stopnia wytrzymałości ustawicznej α .

Podstawmy w rów. 50) $\alpha_m = 0$, to otrzymamy $\alpha = \alpha'$, dla $\alpha_m = \alpha$ jest $\alpha = \delta$. Dla tych dwóch wartości α_m otrzymujemy więc te same punkty, co w poprzednim paragrafie; dla innych wartości linia krzywa, wyrażona rów. 47.), zgadza się dostatecznie z doświadczeniami Wöhlera.

Rów. 50. możemy inaczej napisać: $\alpha(\delta - \alpha') - \alpha_m(\delta - \alpha') = \alpha(\delta - \alpha)$, albo $\alpha\alpha' + \alpha_m(\delta - \alpha') = \alpha^2$, lub nareszcie

$$\alpha = \alpha' + \frac{\alpha_m}{\alpha}(\delta - \alpha') = \alpha' \left(1 + \frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} \frac{\alpha_m}{\alpha} \right) \dots \dots \dots 51)$$

Jeżeli teraz chcemy obliczyć wymiary belki, na którą działa w kierunku osi siła, zmieniająca się między granicami *najmn. P* i *najw. P*, a przypuszczamy n_{τ} pewność, to

$$\frac{\alpha_m}{\alpha} = \frac{n. \text{ najmn. } P}{n. \text{ najw. } P} = \frac{\text{najmn. } P}{\text{najw. } P} = \zeta, \dots \dots \dots 52)$$

$$a \quad \Lambda = \frac{n. \text{ najw. } P}{\alpha} = \frac{\text{najw. } P}{\tau} \dots \dots \dots 53)$$

Równanie 51.) możemy teraz napisać:

$$\alpha = \alpha' \left(1 + \frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} \zeta \right),$$

Doświadczenia Wöhlera okazały, że dla żelaza spawalnego $\delta = 3290 \frac{kg}{cm^2}$, $\alpha' = 2190 \frac{kg}{cm^2}$, więc $\frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} = \frac{3290 - 2190}{2190} = \frac{1}{2}$,

a zatem $\alpha = \alpha' (1 + \frac{1}{2} \zeta)$, a gdy $\alpha = n \tau$, $\alpha' = n \tau'$, to

$$\tau = \tau' (1 + \frac{1}{2} \zeta).$$

Dla $n=3$ otrzymamy stąd

$$\tau = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \zeta \right) \frac{kg}{cm^2} \dots \dots \dots 54)$$

Dla stali miękkiej i bardzo miękkiej możemy przyjąć $\delta = 4500 \frac{kg}{cm^2}$, $\alpha' = 2700 \frac{kg}{cm^2}$, więc $\frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} = \frac{4500 - 2700}{2700} = \frac{2}{3}$,

a zatem dla $n=3$ otrzymamy

$$\tau = 900 \left(1 + \frac{2}{3} \zeta \right) \frac{kg}{cm^2} \dots \dots \dots 55)$$

Dla stali średnio twardej możemy przyjąć

$$\delta = 6\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad \alpha' = 3\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad \text{więc } \frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} = \frac{6\,000 - 3\,000}{3\,000} = 1 \quad \text{więc dla } n=3$$

$$\tau = 1000 (1 + \zeta) \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots \dots \dots 56)$$

Wzory poprzednie są tylko wtedy ważne, gdy *najw.* *P* i *najmn.* *P* mają te same znaki. W przeciwnym razie musimy uwzględnić dalsze doświadczenia Wöhlera nad wytrzymałością dwustronną α_1 (n. *Schwingungsfestigkeit*, an. *vibration safe strength*), t. j. wytrzymałością ustawiczną, dla której *najmn.* natężenia równa jest największemu natężeniu, lecz ma znak przeciwny.

Jeżeli natężenie jest naprzemian dodatnie i ujemne i waha się między wartościami α'' i α , przyczem α'' ma znak przeciwny znakowi α , a bez względu na znak $\alpha > \alpha''$, to analogicznie do rów. 50.) da się tu według Weyrauch'a ustawić następnę równanie, zgadzające się dostatecznie z wynikami doświadczeń:

$$\alpha = \frac{\alpha' - \alpha_1}{2\alpha' - \alpha_1 - \alpha} (\alpha + \alpha''), \quad \dots \dots \dots 57)$$

przyczem wszystkie wartości brać należy bez względu na znak.

Jeżeli w tem równaniu podstawimy $\alpha'' = 0$, to $\alpha = \alpha'$,
a dla $\alpha'' = \alpha$ jest $\alpha = \alpha_1$.

Z rów. 57.) otrzymamy

$$\alpha = \alpha' + (\alpha_1 - \alpha') \frac{\alpha''}{\alpha} = \alpha' \left(1 - \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} \frac{\alpha''}{\alpha} \right),$$

a ponieważ

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{\text{najmn. } P}{\text{najw. } P} = \zeta', \quad \text{to}$$

$$\alpha = \alpha' \left(1 - \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} \zeta' \right) \dots \dots \dots 58)$$

Dla żelaza spawalnego otrzymał Wöhler

$$\alpha_1 = 1\,170 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad \text{więc } \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \frac{2\,190 - 1\,170}{2\,190} = \frac{1}{2},$$

a zatem dla $n=3$:

$$\tau = 700 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\text{najmn. } P'}{\text{najw. } P'} \right) = 700 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta' \right) \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots \dots \dots 59)$$

Dla stali miękkiej i bardzo miękkie możemy przyjąć $\alpha_1 = 1\,350 \frac{kg}{cm^2}$, więc $\frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \frac{2\,700 - 1\,350}{2\,700} = \frac{1}{2}$, więc dla

$$n = 3 \quad \tau = 900 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta'\right) \frac{kg}{cm^2} \dots \dots \dots 60)$$

Dla stali średnio twardej możemy przyjąć

$\alpha_1 = 1\,500 \frac{kg}{cm^2}$, więc $\frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \frac{3\,000 - 1\,500}{3\,000} = \frac{1}{2}$, więc dla $n = 3$

$$\text{otrzymamy} \quad \tau = 1000 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta'\right) \frac{kg}{cm^2} \dots \dots \dots 61)$$

Wstrząśnienia możemy uwzględnić, jak w poprzednim paragrafie, mnożąc dla wyznaczenia *najmn. P'* i *najw. P* ciężar współczynnikami 1,3 1,2 lub 1,1.

Przykłady.

1. Na pręt żelazny działa w osi siła ciągnąca $P_0 = 1\,t$, spowodowana własnym ciężarem zeskładu, ciężar zmienny wywołuje siłę $P_1 = 15\,t$. Jaką powierzchnię przekroju trzeba nadać temu prętowi?

Według metody Winklera otrzymamy z rów. 46)

$$A = \frac{1\,000}{1\,400} + \frac{15\,000}{770} = 0,71 + 19,48 = 20,2\,cm^2,$$

a według Weyraucha otrzymamy z rów. 54)

$$\tau = 700 \left(1 + \frac{1}{1+15}\right) = 722 \frac{kg}{cm^2},$$

a z rów. 53)

$$A = \frac{16\,000}{722} = 22,2\,cm^2,$$

2. Ciężar stały sprawia w danym pręcie żelaznym ciągnienie 2,8 t, ciężar zmienny zaś *najw. P* = + 10 t, *najmn. P* = - 5. t. Jak wielki przekrój musi mieć ten pręt?

Według Winklera otrzymamy z rów. 46)

$$A = \frac{2\,800}{1\,400} + \frac{10\,000}{770} + \frac{5\,000}{1\,700} = 17,9\,cm^2,$$

a według Weyraucha z rów. 59)

$$\tau = 700 \left(1 - \frac{5\,000 - 2\,800}{10\,000 + 2\,800}\right) = 640 \frac{kg}{cm^2},$$

a z rów. 53)

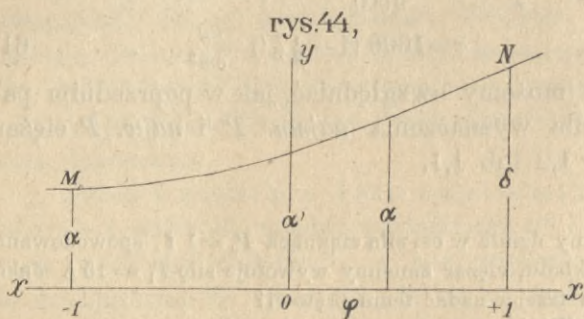
$$A = \frac{12\,800}{640} = 20\,cm^2.$$

Z obu tych przykładów widzimy, że wymiary, otrzymane według wzorów Weyraucha, są większe, że więc Weyrauch przyjmuje mniejsze natężenia dopuszczalne, niż Winkler. Że wzory Weyraucha odpowiadają lepiej doświadczeniom Wöhlera, mówiliśmy już poprzednio.

§. 25. Wyznaczenie wymiarów wedle Tetmajera.

Jeżeli stosunki $\frac{\text{najm. } P}{\text{najw. } P} = \frac{\alpha}{\alpha_m} = \zeta$ odetniemy jako odcinki a odnośne α na podstawie doświadczeń Wöhlera i Bauschingera

jako rzędne (rys. 44.), to otrzymamy linię krzywą MN , która wedle Tetmajera da się zastąpić parabolą o równaniu $\alpha = a + b\zeta + c\zeta^2$. 62)



Dla $\zeta = 0$, $\alpha = a = \alpha'$, dla

$$\zeta = \frac{\alpha}{\alpha_m} = 1,$$

więc $\alpha = \alpha_m$, jest $\alpha = \delta$, dla $\zeta = -1 = \frac{\alpha}{\alpha_m}$ jest $\alpha = \alpha_1$. Wstawmy w rów.

62.) $\zeta = 1$, to $\delta = \alpha' + b + c$ a dla $\zeta = -1$, $\alpha_1 = \alpha' - b + c$, a stąd otrzymamy $\alpha = \alpha'$, $b = \frac{\delta - \alpha_1}{2}$, $c = \frac{\delta + \alpha_1}{2} - \alpha'$, a zatem $\alpha = \alpha' + \frac{\delta - \alpha_1}{2} \zeta + \frac{\delta + \alpha_1 - 2\alpha'}{2} \zeta^2$ 63)

Dla żelaza spawalnego jest $\delta = 3290 \frac{kg}{cm^2}$, $\alpha' = 2190 \frac{kg}{cm^2}$, $\alpha_1 = 1170$, a więc

$$\alpha = 2190 + 1060 \zeta + 40 \zeta^2$$

Dla żelaza zlewne otrzymuje Tetmajer

$$\alpha = 2400 + 1440 \zeta + 360 \zeta^2$$

Dla stali miękkiej i bardzo miękkiej możemy przyjąć $\delta = 4500 \frac{kg}{cm^2}$, $\alpha' = 2700 \frac{kg}{cm^2}$, $\alpha_1 = 1350 \frac{kg}{cm^2}$, a więc $\alpha = 2700 + 1575 \zeta + 225 \zeta^2$,

a dla stali średnio twardej $\delta = 6000 \frac{kg}{cm^2}$, $\alpha' = 3000 \frac{kg}{cm^2}$

$\alpha_1 = 1500 \frac{kg}{cm^2}$, więc $\alpha = 3000 + 2250 \zeta + 750 \zeta^2$.

Jeżeli przyjmiemy $n=3$, to otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla żelaza spawalnego} \quad \tau = 700 + 350 \zeta + 13 \zeta^2 \\ \text{„ „ zlewnego} \quad \tau = 800 + 450 \zeta + 120 \zeta^2 \\ \text{„ stali miękkiej} \quad \tau = 900 + 500 \zeta + 70 \zeta^2 \\ \text{„ „ średnio twardej} \quad \tau = 1000 + 700 \zeta + 250 \zeta^2 \end{array} \right\} \dots 64)$$

Zamiast tych wzorów przyjmuje Tetmajer dla $n=3.5$

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla żelaza spawalnego} \quad \tau = 600 + 350 \zeta + 80 \zeta^2 \\ \text{„ „ zlewnego} \quad \tau = 700 + 430 \zeta + 100 \zeta^2 \\ \text{„ „ średnio twardej} \quad \tau = 830 + 640 \zeta + 250 \zeta^2 \end{array} \right\} \dots 65)$$

Komisya techniczna kolei żelaznych szwajcarskich przyjęła dla obliczenia mostów następane natężenia dopuszczalne:

$$\begin{array}{l} \text{dla żelaza spawalnego} \quad \tau = 700 + 400 \zeta + 80 \zeta^2 \\ \text{„ „ zlewnego} \quad \tau = 780 + 470 \zeta + 120 \zeta^2 \end{array}$$

We wszystkich powyższych wzorach ζ może być dodatnie lub ujemne, wedle tego, czy najw. P i najmn. P mają ten sam znak, czy też przeciwny.

Przykłady. Obliczmy te same pręty, co w poprzednim paragrafie.

1. Tu było $P_0 = 1 t$, $P_1 = 15 t$, więc $\zeta = \frac{1}{16 + 1} = \frac{1}{16}$

Wedle wzoru 64. otrzymamy więc $\tau = 700 + 350 \frac{1}{16} + 13 \frac{1}{16^2} = 722 \frac{kg}{cm^2}$

a z rów. 53.) $A = \frac{16000}{722} = 22.2 \text{ cm}^2$

Wedle wzoru 65.) będzie $\tau = 600 + 350 \frac{1}{16} + 80 \frac{1}{16^2} = 622 \frac{kg}{cm^2}$

a z rów. 53.) $A = \frac{16000}{622} = 25.7 \text{ cm}^2$

2. W drugim przykładzie było $P_0 = 2.8 t$, $P_1 = + 10 t$, $P_2 = - 5 t$, więc najw. $P = 12.8 t$, najmn. $P = - 2.2 t$, stąd $\zeta = - \frac{2.2}{12.8} = - 0.172$.

Wedle rów. 64.) będzie $\tau = 700 - 350 \times 0.172 + 13 \times 0.172^2 = 640$, więc $A = \frac{12800}{640} = 20 \text{ cm}^2$.

Wedle rów. 65.) będzie $\tau = 600 - 350 \times 0.172 + 80 \cdot 0.172^2 = 542 \frac{kg}{cm^2}$, stąd $A = \frac{12800}{542} = 23.6 \text{ cm}^2$.

Z obu tych przykładów widzimy, że wpływ trzeciego wyrazu w rów. 61.) i 62.) jest zwłaszcza dla żelaza spawalnego tak małym, że możemy go wszędzie opuścić, wskutek czego otrzymujemy wzory Weyraucha lub do nich podobne.

§. 26. Natężenie dopuszczalne dla drzewa.

Doświadczenia Wöhlera ograniczały się tylko na żelazo i stal. Drzewa nie badano w ten sposób, jednak analogicznie przypuszczać możemy, że zmiany w natężeniu i tu będą miały podobny wpływ na wytrzymałość. Przy drzewie uwzględniać będziemy jednak wpływ ciężaru ruchomego tylko dla mostów, w budownictwie obliczać będziemy wymiary według dawnego sposobu.

Dla mostów uwzględnimy wedle Winklera wstrząśnienia i zmiany w natężeniu w ten sposób, że mnożyć będziemy ciężar ruchomy, który jest przyczyną wstrząśnień i zmian w natężeniu, pewnym współczynnikiem większym od jedności, a mianowicie:

	przy obciążeniu pośrednim bezpośrednim	
dla kładek	$\eta=1.1$	1.2
„ mostów drogowych i kolejowych		
drugorzędnych	$\eta=1.2$	1.3
„ mostów kolei głównych	$\eta=1.3$	1.4

Nazwijmy P_0 siłę, działającą wskutek ciężaru stałego a P_1 wskutek ciężaru ruchomego, to otrzymamy przekrój

$$A = \frac{P_0 + \eta P_1}{\tau_1} \dots \dots \dots 66)$$

Zamiast tego możemy obliczać wymiary w zwykły sposób, jeśli odpowiednio przyjmiemy natężenie dopuszczalne τ , więc

$$A = \frac{P_0 + P_1}{\tau} = \frac{P_0 + \eta P_1}{\tau_1}, \text{ a stąd}$$

$$\tau = \tau_1 \frac{1 + \frac{P_0}{P_1}}{\eta + \frac{P_0}{P_1}} \dots \dots \dots 67)$$

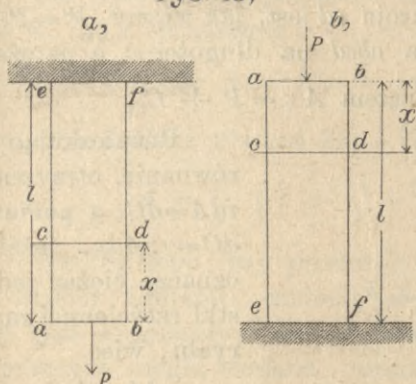
Natężenie τ_1 możemy przyjąć według następującej tabliczki:

Rodzaj natężenia	mosty małe		mosty tymczasowe	
	natężenie τ_1 dla drzewa			
	miękkiego	twardego	miękkiego	twardego
	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$
Ciągnienie . . .	105	120	120	140
Ciśnienie . . .	70	80	80	95

§. 27. Pręty o stałym przekroju.

Jeżeli siła P działa w kierunku osi na pręt o stałym przekroju (rys. 45.) i uwzględnimy przytem ciężar własny pręta, to w przekroju cd działa siła $P' =$

rys. 45,



$= P + A\gamma x$, jeżeli A oznacza przekrój a γ ciężar gatunkowy. Siła ta P' jest największą dla przekroju ef , gdzie $x=l$, więc najw. $P' = P + A\gamma l$ (68)

Jeżeli natężenie dopuszczalne jest τ , to najw. $P' = P + A\gamma l = A\tau$, a stąd

$$P = A(\tau - \gamma l) \dots \dots \dots 69)$$

albo

$$A = \frac{P}{\tau - \gamma l} \dots \dots \dots 70)$$

Jeżeli ciężar własny pręta jest bardzo mały w stosunku do ciężaru P , to możemy go nie uwzględniać i otrzymamy

$$P = A\tau, A = \frac{P}{\tau} \dots \dots \dots 71)$$

Przykład. Jaką średnicę d ma mieć żelazne ścięgno okrągłe 16 m długie dla ciągnięcia $P = 3,2$ t, natężenia dopuszczalnego

$$\tau = 800 \frac{kg}{cm^2} \text{ a } \gamma = 7,8 \frac{t}{m^3} = 7800 \frac{kg}{m^3} = 0,0078 \frac{kg}{cm^3}?$$

Według rów. 70.) mamy

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{3200}{800 - 0,0078 \cdot 16000} = \frac{3200}{800 - 124,8} = \frac{3200}{675,2} = 4,74 \text{ cm}^2, \text{ a stąd}$$

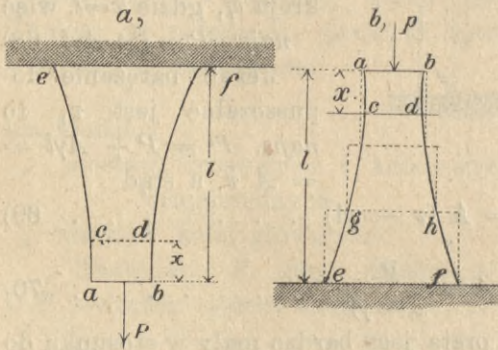
$$d = \sqrt{\frac{4,74 \times 4}{\pi}} = 2,46 \text{ cm} = 25 \text{ mm.}$$

§. 28. Pręty o stałym natężeniu.

Jak to widzieliśmy poprzednio, natężenie w pręcie o stałym przekroju jest najmniejsze u końca, w którym zaczepia siła, a największe u drugiego końca. Jeżeli więc natężenie największe jest równe natężeniu dopuszczalnemu, to natężenie w innych

przekrojach jest mniejsze, a więc materiał nie został należycie wykorzystany. Chcąc materiał lepiej wykorzystać, szukać będziemy takiego kształtu, ażeby napięcie było wszędzie równe napięciu dopuszczalnemu. Jeżeli na taką belkę działa w kierunku osi siła P (rys. 46), to w przekroju cd jest, jak wiemy, $P' = P + C$, jeżeli C oznacza ciężar pręta $abcd$ na długości x , a napięcie $\frac{P}{A} = \tau$ według założenia, a zatem $A\tau = P + C$.

rys. 46,



Różniczkując to równanie, otrzymamy $\tau dA = dC$, a ponieważ $dC = \gamma \cdot A dx$, jeżeli γ oznacza ciężar jednostki sześciennej materiału, więc

$$\tau dA = \gamma A dx,$$

a stąd

$$dx = \frac{\tau}{\gamma} \frac{dA}{A}.$$

Scałkowawszy to równanie, otrzymamy

$$x = \frac{\tau}{\gamma} \int_0^x \frac{dA}{A} = \frac{\tau}{\gamma} \log \text{nat } A \Big|_0^x,$$

a więc $x = \frac{\tau}{\gamma} (\log \text{nat } A - \log \text{nat } A_0)$, jeżeli A_0 oznacza przekrój dla $x=0$. Inaczej możemy to napisać:

$$x = \frac{\tau}{\gamma} \log \text{nat } \frac{A}{A_0},$$

a stąd otrzymamy

$$\frac{A}{A_0} = e^{\frac{\gamma x}{\tau}}, \dots \dots \dots 72)$$

gdzie e jest zasadą logarytmów naturalnych.

Ponieważ $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots$, więc

$$A = A_0 \left(1 + \frac{\gamma x}{\tau} + \frac{\gamma^2 x^2}{2\tau^2} + \dots \right) \dots \dots 73)$$

Przekrój ab wyznaczmy zaś według rów. 43), więc

$$A_0 = \frac{P}{\tau} \dots \dots \dots 74)$$

Dla wyznaczenia przekroju A wstawimy wartość z rów. 74) w rów. 72) i otrzymamy

$$\log A = \log \frac{P}{\tau} + 0,434 294 5 \frac{\gamma x}{\tau}, \dots \dots 75)$$

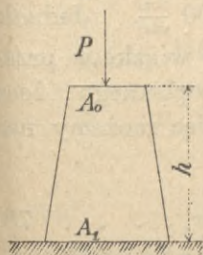
albo na podstawie równań 73) i 75)

$$A = \frac{P}{\tau} \left(1 + \frac{\gamma x}{\tau} + \frac{\gamma^2 x^2}{2 \tau^2} + \dots \right) \dots \dots 76)$$

Według tego, czy przekroje są kołami, prostokątami, czy też innymi figurami, zmienia się zarys pręta, zawsze jednak pręt taki ograniczony jest powierzchniami krzywymi. Ponieważ w praktyce ciągła zmiana przekroju napotykałaby często na trudności, więc zamiast powierzchni krzywych przyjmujemy płaszczyzny n. p. zamiast ace na rys. 46. przyjmujemy ae albo składamy pręt taki z kilku części graniastosłupowych (rys. 46. b), których przekrój równa się największemu przekrojowi gh pręta o stałym natężeniu w danej części.

Przykład. Na filar mурowany (rys. 47.) działa P w kierunku osi. Obliczyć przekrój u podstawy filaru tak, aby natężenie w A_0 i A_1 było równe τ .

rys. 47.



Według rów. 71) mamy $P = \tau A_0$, siła działająca na A_1 jest w przybliżeniu

$$P' = P + \gamma h \frac{A_0 + A_1}{2},$$

a według założenia ma być $P' = \tau A_1$; więc

$$\tau A_1 = \tau A_0 + \gamma h \frac{A_0 + A_1}{2},$$

a stąd

$$A_1 = A_0 \frac{2\tau + \gamma h}{2\tau - \gamma h} \dots \dots 77)$$

Jeżeli mamy dane następujące wartości: $\gamma = 2,2 \frac{t}{m^3}$, $P = 300 t$

$$\tau = 6 \frac{kg}{cm^2} = 60 000 \frac{kg}{m^2} = 60 \frac{t}{m^2}, h = 9 m, \text{ to } A_0 = \frac{300}{60} = 5 m^2,$$

$$A_1 = 5 \frac{2 \times 60 + 2,2 \times 9}{2 \times 60 - 2,2 \times 9} = 6,98 m^2.$$

Zwykle jednak ze względów konstrukcyjnych górny przekrój filaru przyjmujemy większy, a przynajmniej 2 m szeroki, wtedy natężenie jest

w górnej części filaru mniejsze, niż τ . W praktyce inżynierskiej zwykle nie spotykamy się z prętami lub filarami o stałym natężeniu i mamy do czynienia tu tylko z kształtami przybliżonymi.

§. 29. Linwy konopne i drucziane i łańcuchy.

Chociaż poprzednie wywody o wytrzymałości na ciągnięcie zastosować się dadzą także do linw i łańcuchów, jednak zrobimy tu w tym względzie jeszcze kilka uwag szczegółowych.

a) Linwy konopne (n. *Hanfseil*) składają się z włókien konopi europejskich lub też manilijskich. Pewna ilość włókien skręca się i tworzy wiązkę (n. *Litze*), kilka wiązek skręca się potem w linwę, jądro linwy nazywa się *duszą* (n. *Seilseele*). Linwa może być albo nieskręcaną albo też skręcaną. Przez skręcanie jednak samo powstają już natężenia w wiązkach; doświadczenia*) okazały, że należy tylko o tyle linwy skręcać, aby się skróciły o $\frac{1}{4}$ długości, gdyż dalsze skręcanie zniżyłoby za bardzo wytrzymałość linwy. Linwy mokre lub omazone są także mniej wytrzymałe od suchych, a to w stosunku 3:4. Wilgoć bowiem wsiąkając w linwę, zgrubia i zarazem skraca włókna, w skutek czego powstają natężenia, zmniejszające wytrzymałość linwy.

Spółczynnik wytrzymałości $\mu = 500$ do $800 \frac{kg}{cm^2}$, możemy więc przyjąć natężenie dopuszczalne $\tau = 100 \frac{kg}{cm^2}$. Jednak uwzględnić musimy także tę okoliczność, że wiązki w przekroju nie wypełniają całej powierzchni koła opisanego, lecz w przybliżeniu tylko 0,9 powierzchni koła, więc możemy napisać:

$$P = A \tau = 0,9 \frac{d^2 \pi}{4} \tau = 0,7 d^2 \tau, \quad . . . \quad 78)$$

jeżeli d oznacza średnicę linwy, a P siłę naciągającą linwę. Stąd wynika

$$d = \sqrt{\frac{4 P}{0,9 \tau \pi}} = 1,19 \sqrt{\frac{P}{\tau}} \quad \quad 79)$$

Jeżeli w rów. 78) i 79) wstawimy $\tau = 100 \frac{kg}{cm^2}$, to otrzymamy

*) Tetmayera ogłoszone w „Schw. Eisenbahn“ 1881. t. XV. N. 4.

$$P = 70 d^2 \text{ kg i } d = 0,119 \sqrt{P} \text{ cm} \dots \dots 80)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ciężar własny linwy suchej wynosi } g = 0,065 d^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \\ \text{a mokrej } g = 0,078 d^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \end{array} \right\} 81)$$

jeżeli d wyrazimy w cm.

Najmniejszy promień tarczy linwowej przyjmujemy $r = 4 d$.

Przykład. Jeżeli $P = 900 \text{ kg}$, obliczyć grubość linwy.

Z rów. 80) otrzymamy:

$$d = 0,119 \sqrt{900} = 3,57 \text{ cm, a ciężar tej linwy } g = 0,078 \times 3,6^2 = 1,0 \text{ kg/m.}$$

b) Linwy druciane (n. *Drathseil*) są albo skręcane albo nieskręcane. Skręcane używają się wszędzie tam, gdzie przechodzą przez krążki, gdyż przy nieskręcanych zewnętrzne wiązki muszą się więcej przedłużać od wewnętrznych, więc pracują od nich więcej na rozciąganie, gdy przy skręcanych każda wiązka jest raz na zewnętrznej, drugi raz na wewnętrznej stronie, a zatem ciągnięcie rozdziela się jednostajnie na wszystkie wiązki. Nieskręcanych (n. *Bündelseil*) używamy tylko wtedy, jeżeli nie przechodzą przez krążki, a więc n. p. przy mostach wiszących. Jeżeli n. p. przyjmujemy dla drutu żelaznego $\tau = 1500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ i nazwiemy n ilość drutów, z których się linwa składa, a średnicę drutu d_1 , to

$$P = \frac{n d_1^2 \pi}{4} \tau = \frac{n d_1^2 \pi}{4} 1500, \text{ a stąd } d_1 = 0,029 \sqrt{\frac{P}{n}} \text{ cm} \quad 82)$$

Znając ilość i grubość drutów możemy obliczyć średnicę linwy w przybliżeniu z równania $d = 1,3 d_1 \sqrt{n}$. Wstawivszy w to równanie wartość z 82), otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} d = 0,0378 \sqrt{P} \text{ cm,} \\ P = 696 d^2 \text{ kg} \end{array} \right\} \dots \dots 83)$$

Przy skręcanych linwach, które przechodzą przez krążki, uwzględnić musimy oprócz ciągnięcia podłużnego także nateżenie, wywołane wskutek zginania przy przejściu przez krążek, a nateżenie to, zależne od promienia krążka, jest często bardzo znaczne.

W przybliżeniu możemy obliczać linwy druciane przyjmawszy z powodu przejścia przez krążki tylko nateżenie dopuszczalne mniejsze, więc $\tau = 800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, a zatem

$$P = 800 n \frac{d_1^2 \pi}{4} = 628 n d_1^2 \quad \left. \vphantom{P} \right\} \dots \dots \dots 84)$$

a stąd

$$d_1 = 0,04 \sqrt{\frac{P}{n}}$$

a że średnica linwy da się obliczyć w przybliżeniu z równania $d = 1,59 d_1 \sqrt{n}$, więc wstawivszy tę wartość w równaniu 84) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} P &= 247 d^2 \\ d &= 0,0636 \sqrt{P} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 85)$$

Jako ciężar własny linwy drucianej możemy przyjąć

$$g = 0,8 n d_1^2 \frac{kg}{m} \dots \dots \dots 86)$$

jeżeli d_1 wyrazimy w *cm*.

Przykład. Z szybu 150 *m* głębokiego mamy wyciągnąć ciężar 1000 *kg* Ciężar własny przyrządu do wyciągania oprócz linwy waży 700 *kg*. Jak grube mają być druty, jeżeli $n = 90$?

Jeżeli ciężar własny linwy wynosi na 1 *m* $0,8 n d_1^2$, to na 150 *m* wynosić będzie $120 n d_1^2$ *kg*, a zatem cały ciężar $P = 1000 + 700 + 120 \times 90 d_1^2 = 1700 + 10800 d_1^2$, zaś według równania 84) $P = 628 n d_1^2 = 628 \times 90 d_1^2 = 56520 d_1^2$. A więc $1700 + 10800 d_1^2 = 56520 d_1^2$ a stąd $d_1^2 = 0,037$ *cm*², a $d_1 = 0,192$ *cm*, zaś $d = 2,9$ *cm* = 29 *mm*.

Ponieważ zmiany w natężeniu linw są znaczne, usprawiedliwionem jest tu zastosowanie doświadczeń Wöhlera*).

Natężenie całkowite górnego przekroju linwy, która jest całkowicie owinięta wynosi $\nu = \frac{P}{A} + \frac{C}{A} + \nu_1, \dots \dots \dots 87)$

jeżeli *C* oznacza ciężar linwy a ν_1 natężenie zginające, powstające wskutek owijania naokół tarczy linwowej. Mamy dalej

przekrój $A = \frac{n d_1^2 \pi}{4}$ *cm*², ciężar jednostkowy wedle 86) $g = 0,8 n d_1^2$ *kg/m* = $0,8 \frac{4A}{\pi} = A$ *kg/m*. Jeżeli *h* oznacza wysokość

szybu *w m*, to $C = gh = Ah$, a natężenie zginające jest według

Reulaux

$$\nu_1 = \frac{\varepsilon d_1}{d_2} \dots \dots \dots 88)$$

gdę d_2 oznacza średnicę tarczy linwowej. Jeżeli przyjmiemy

*) p. Hermann Emil, Berechnung der Förderseile. Zeits. d. öster. Ing. u. Arch. Verein. 1889 str. 22.

$\varepsilon = 2\,000\,000$, to $v_1 = \frac{2\,000\,000 \cdot d_1}{d_2}$, a jeżeli d_2 wyrażamy w m ,

to $v_1 = 20\,000 \frac{d_1}{d_2}$. To natężenie występuje w tym samym

przekroju jako ciśnienie i jako ciągnięcie, dlatego

$$\text{najw. } v = \frac{P}{A} + \frac{Ah}{A} + 20\,000 \frac{d_1}{d_2} = \frac{P}{A} + h + 20\,000 \frac{d_1}{d_2}$$

$$\text{najmn. } v = \frac{P}{A} + h + 20\,000 \frac{d_1}{d_2} = \text{najw. } v - 40\,000 \frac{d_1}{d_2}$$

Jeżeli współczynnik wytrzymałości ustawicznej jest a a pewność m , to według rów. 45)

$$m \cdot \text{najw. } v = (1-c) \delta + c \cdot \text{najmn. } v = (1-c) \delta + c (\text{najw. } v - 40\,000 \frac{d_1}{d_2}), \text{ najw. } v = \frac{(1-c) \delta}{m-c} - 40\,000 \frac{d_1}{d_2} \frac{c}{m-c}$$

$$\begin{aligned} \text{Czyste ciągnięcie } v' &= \frac{P}{A} + h = \text{najw. } v - 20\,000 \frac{d_1}{d_2} = \\ &= \frac{(1-c) \delta}{m-c} - 20\,000 \frac{d_1}{d_2} \frac{m+c}{m-c} \end{aligned}$$

Według doświadczeń Jennyego i Hermanna jest dla drutu żelaznego

$$\delta = 5\,600 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{„ ze stali bessemerskiej } \delta = 9\,000 \text{ „}$$

$$\text{„ „ „ lanej } \delta = 13\,000 \text{ „}$$

a że dla żelaza $c = 0.45$, dla stali $c = 0.56$,

więc

$$\left. \begin{aligned} \text{dla drutu żelaznego } v &= \frac{3\,080}{m-0.35} - \frac{20\,000 (m+0.45)}{m-0.45} \frac{d_1}{d_2} \\ \text{„ „ ze stali bessemerskiej } v &= \frac{3\,960}{m-0.56} - \frac{20\,000 (m+0.56)}{m-0.56} \frac{d_1}{d_2} \\ \text{„ „ ze stali lanej } v &= \frac{5\,720}{m-0.56} - \frac{20\,000 (m+0.56)}{m-0.56} \frac{d_1}{d_2} \end{aligned} \right\} 89)$$

$$\text{albo ogólnie } v = a - b \frac{d_1}{d_2} \dots \dots \dots 90)$$

Spółczynnik pewności n obrać należy wedle materiału i chyżości wyciągania. Im kosztowniejszy materiał, tem większe n , aby dłużej trwało. Wedle tego przyjmuje Hermann następnne współczynniki pewności:

		stal		
		żelazo	bessemeroska	łana
wyciąganie ręczne	chyżość 0	$m=1.1$	1.2	1.3
	niżej 3 $m/3$	$m=1.3$	1.56	1.78
wyciąganie maszynowe	n 6 n	$m=—$	1.78	2.00
	wyżej 6 n	$m=—$	—	2.22

Jeżeli wstawimy powyższe wartości dla m w rów. 89), to otrzymamy następne wartości dla a i b w rów. 90)

W y c i ą g a n i e

Materiał	ręczne		maszynowe	
	chyżość mała	niżej 3 m	niżej 6 m	wyżej 6 m
żelazo	$a=4740$	3620		
	$b=47600$	42400		
stal bessemerska	$a=6200$	3960	3250	
	$b=55000$	41200	38400	
stal łana	$a=7730$	4650	3970	3450
	$b=50200$	38400	35600	33400

Jeżeli $\frac{P}{A} = \nu_0$ nazwiemy napięciem użytecznym,

to
$$\nu_0 = \frac{P}{A} = \nu' - h = a - h - b \frac{d_1}{d_2} \dots \dots \dots 91)$$

a stąd
$$A = P \frac{1}{a - h - b \frac{d_1}{d_2}} \dots \dots \dots 92)$$

Widzimy stąd, że A jest tem większe im większe jest $\frac{d_1}{d_2}$, przy danej średnicy tarczy linowej jest więc A , a zatem ciężar liny, tem większy, im drut jest grubszy.

Z rów. 91) mamy $P = A \left(a - h - b \frac{d_1}{d_2} \right) = \frac{n d_1^2 \pi}{4} \left(a - h - b \frac{d_1}{d_2} \right)$

Niech będzie $\frac{d_1}{d_2} = x$, to $P = \frac{n x^2 d_2^2 \pi}{4} (a - h - b x)$

P będzie największem, gdy $\frac{dP}{dx} = 0 = 2(a - h)x - 3x^2 b$, a stąd

$$x = \frac{d_1}{d_2} = \frac{a - h}{1.5 b} \dots \dots \dots 93)$$

Jestto najkorzystniejszy stosunek $d_1 : d_2$ dla wytrzymałości drutu o grubości d_1 .

Przy wyciągach ręcznych h jest tak małe, że możemy go nie uwzględniać, wtedy

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{1,5 b}, \\ v &= a - b x = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 94)$$

a stąd otrzymamy następną tabliczkę dla średnicy d_2 tarczy linowej w m :

dru t	x	v	Średnica d_1 w milimetrach												
			0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.0
żelazny . . .	$\frac{2}{30}$	1580	0.60	0.64	0.76	0.82	0.90	0.98	1.06	1.12	1.20	1.28	1.36	1.42	1.50
st. hessemerska	$\frac{3}{40}$	2070	0.54	0.60	0.66	0.74	0.80	0.86	0.94	1.00	1.06	1.14	1.20	1.26	1.34
st. lana . . .	0.1	2710	0.40	0.46	0.50	0.56	0.60	0.66	0.70	0.76	0.80	0.86	0.90	0.96	1.00

Dla linow maszynowych powinna być oprócz tego średnica linwy $d \leq \frac{d_2}{80}$, a według *Hermann*

$$d = (1,327 + 0,05 n) \sqrt{n} d_1 = a d_1 \dots \dots \dots 95)$$

$n = 6$	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
$\alpha = 3.22$	7.09	8.09	9.04	9.96	10.86	11.73	12.50	13.5	14.3	15.2	16.0
$n = 90$	96	208	120	132	144						
$\alpha = 16.9$	17.9	19.4	21.1	22.8	24.6						

Dla linow maszynowych przyjmujemy zwykle $d_1 \approx 0.15 \text{ cm}$.

Przykłady. 1. Przy wyciągu ręcznym pionowym jest ciężar $P = 90 \text{ kg}$, głębokość $h = 40 \text{ m}$, należy obliczyć grubość linwy żelaznej, jeżeli średnica tarczy linowej wynosi $0,9 \text{ m}$.

Według tabliczki jest dla $d_2 = 0,9 \text{ m}$, najkorzystniejsze $d_1 = 0,6 \text{ mm} = 0,06 \text{ cm}$, $v_0 = v - h = 1580 - 40 = 1540 \text{ kg/cm}^2$, $A = 90:1540 = 0,057 \text{ cm}^2$, a stąd

$$n = \frac{4A}{d_1^2 \pi} = \frac{0,228}{0,06^2 \pi} = 20,1,$$

zamiast czego przyjmujemy $n = 24$.

Jeżelibyśmy przyjęli $d_1 = 0,7 \text{ mm} = 0,07 \text{ mm}$, to

$$v_0 = 4740 - 40 = 47600 \frac{0,07}{0,9} = 778 \text{ kg/cm}^2, A = 90:778 = 0,116 \text{ cm}^2,$$

a stąd $n = \frac{4A}{d_1^2 \pi} = \frac{0,464}{0,07^2 \pi} = 30,1$, zamiast czego przyjmujemy $n = 30$.

Ciężar jednostkowy wynosi w pierwszym wypadku

$$g = 0,8.24.0,06^2 = 0,068 \text{ kg/m}, \text{ w drugim } g = 0,8.30.0,07^2 = 0,118 \text{ kg/m}.$$

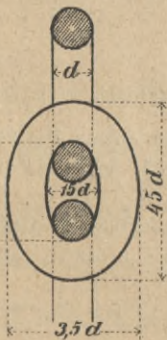
2. Zróbmy ten sam przykład, co pierwej zrobiliśmy bez uwzględnienia doświadczeń Wöhlera. Z szybu 150 m głębokiego mamy wyciągnąć ciężar 1000 kg z chyżością $v = 2,8 \text{ m/s}$, gdy średnica tarczy linowej wynosi $1,5 \text{ m}$.

Jeżeli przyjmiemy linwę ze stali lanej, to wedle 88) $v_0 = 4690 - 150 + - 38400 \frac{d_1}{d_2}$. Najkorzystniejsze $x = \frac{d_1}{d_2} = \frac{4690 - 150}{1,5 \times 38400} = 0,079$, więc $v_0 = 4690 + - 150 - 3027 = 1513 \text{ kg/cm}^2$, a stąd $A = 1000 : 1513 \text{ kg/cm}^2 = 0,66 \text{ cm}^3$. Dalej mamy $d_1 = 0,079 \times d_2 = 0,119 \text{ cm} = 1,2 \text{ mm}$, a stąd $n = \frac{4 \times 0,66}{0,12^2 \pi} = 58,4$, zamiast czego przyjmiemy $n = 60$, a wtedy $d = 12,5 \times 0,12 = 1,5 \text{ cm} < \frac{150}{80} = 1,875$.

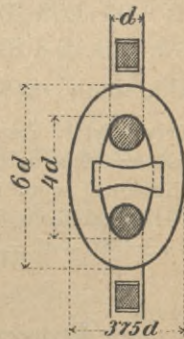
3. Ze sżybu pionowego o głębokości $h = 750 \text{ m}$ wyciągnąć mamy ciężar (całkowity wózek i ładunek) $P = 1800 \text{ kg}$ z chyżością 4 m .

Przyjmiemy znów linwę ze stali lanej, to wedle 88) $v_0 = 3970 - 750 - - 35600 \frac{d_1}{d_2}$. Najkorzystniejsze $x = \frac{d_1}{d_2} = \frac{3970 - 750}{1,5 \times 35600} = 0,061$, więc $v_0 = 3970 - - 750 - 2172 = 1048 \text{ kg/cm}^2$, a stąd $A = 1800 : 1048 = 1,72 \text{ cm}^2$. Jeżeli przyjmiemy $d_1 = 0,15 \text{ cm} = 1,5 \text{ mm}$, to $d_2 = \frac{0,15}{0,061} = 2,46 \text{ cm}$, a $n = \frac{4 \times 1,72}{0,15^2 \pi} = 97,3$, zamiast czego przyjmiemy $n = 102$.

c) Łańcuchy. Rozmaite rodzaje łańcuchów są w użyciu, my tu mówić będziemy jednak tylko o łańcuchu najbardziej używanym t. j. angielskim, którego kształt i wymiary przedstawia rys. 48. Jak widzimy, łańcuch pracuje tu nie tylko na ciągnięcie, lecz i na zginanie eliptycznych ogniw. Oprócz tego zależna jest wytrzymałość łańcucha od dobrego spawania ogniw. Zamiast jednak obliczać wytrzymałość łańcucha na zginanie, możemy obliczać go tylko na ciągnięcie, korzystając



rys:48. na ciągnięcie, lecz i na zginanie eliptycznych ogniw. Oprócz tego zależna jest wytrzymałość łańcucha od dobrego spawania ogniw. Zamiast jednak obliczać wytrzymałość łańcucha na zginanie, możemy obliczać go tylko na ciągnięcie, korzystając



rys:49.

z doświadczeń admiralicyi angielskiej, z których się okazało, że wytrzymałość łańcucha ma się do wytrzymałości żelaza okrągłego o tej samej średnicy d nie jak 2:1, lecz tylko, właśnie wskutek zginania, jak 11:9. Przyjąwszy więc $\tau = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, otrzymamy

$$P = \frac{11}{9} 1000 \frac{d^2 \pi}{4} = 960 d^2 \text{ kg} \quad \left. \dots \dots \dots \right\} \dots \dots \dots 96)$$

a stąd $d = 0,032 \sqrt{P} \text{ cm}$.

Ciężar łańcucha możemy przyjąć w przybliżeniu

$$g = 2,33 d^2 \frac{kg}{m}, \dots \dots \dots 97)$$

jeżeli d wyrażone w cm . Jeżeli ogniwa wzmocnimy szczeblem (rys. 49), to otrzymamy łańcuch szczeblowy (n. *Stegkette*) nieco wytrzymałszy. Doświadczenia admiralicy angielskiej wykazały, że wytrzymałość łańcucha szczeblowego jest $\frac{9}{7}$ razy większa, otrzymamy zatem

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{9}{7} 960 d^2 = 1234 d^2 kg \\ \text{a stąd } d &= 0,0285 \sqrt{P} cm \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 98)$$

Nowsze doświadczenia Tetmajera wykazały, że wytrzymałość łańcuchów jest jeszcze mniejszą. Należałoby więc przyjąć siłę P o 10% mniejszą, a zatem otrzymamy zamiast 96)

$$\left. \begin{aligned} P &= 874 d^2 kg \\ \text{a stąd } d &= 0,033 \sqrt{P} cm \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 99)$$

IV. Wytrzymałość na ścinanie.

§. 29. Spółczynnik wytrzymałości i natężenie dopuszczalne.

Ciało pracuje na ścinanie, jeżeli wypadkowe sił zewnętrznych, działających w płaszczyźnie, przez oś położonej, po jednej i drugiej stronie idealnego przekroju prostopadłego na oś starają się przesunąć drobiny w płaszczyźnie przekroju. Natężenia ścinające są aż do granicy sprężystości tak, jak ciągnięcia, proporcjonalne do powierzchni przekroju. Jeżeli więc nazwiemy P siłę zewnętrzną, działającą prostopadle do osi, μ_1 współczynnik wytrzymałości na ścinanie a A powierzchnię przekroju, to możemy napisać

$$P = A \mu_1 \dots \dots \dots 100)$$

Teoretycznie da się udowodnić dla ciał jednorodnych, że μ_1 wynosi $\frac{4}{5}$ współczynnika wytrzymałości na ciągnięcie (μ^*), ogólnie możemy więc napisać

$$\mu_1 = \alpha \mu \dots \dots \dots 101)$$

Doświadczenia wykazały, że dla kruszców możemy rzeczywiście w przecięciu przyjąć $\mu_1 = \frac{3}{4} \mu$, więc $\alpha = 0,75$, przy

*) Kluger. Wykład wytrzymałości materiałów str. 296.

M a t e r y a ł	Spółczyn- nik wy- trzymałości	Nate- żenie dopu- szczalne
	μ_1	τ_1
	na ścinanie w kg/cm^2	
Mur ceglany na zaprawie wapiennej	0,5	—
Olów	100	20
Piaskowiec	20	1
Platyna	2700	540
Spiż	2000	400
Stal bardzo miękka	3500	700
„ miękka	4100	820
„ twarda	4700	940
Wapień	40	2
Żelazo twarde	1000	200
„ spawalne nitowe	3000	600
„ zlewne	3300	660
„ blacha w kierunku walcowania	2400	500
„ „ prostopadle do kierunku walcowania	2900	580

Przekrój wyznaczamy dla stałego nateżenia według wzoru
 $P = A \tau_1 102)$

Dla zmiennego nateżenia możemy obliczać wymiary, uwzględniając doświadczenia Wöhlera, chociaż odnośnych osobnych doświadczeń na ścinanie nie robiono. Ze względu na to, że wytrzymałość na ścinanie dla metali jest równa $\frac{4}{5}$ wytrzymałości na ciągnięcie, otrzymamy:

a) jeżeli nateżenie nie zmienia znaku, dla żelaza
 $\tau_1 = \frac{4}{5} \tau (1 + \frac{1}{2} \xi)$, a wstawiwszy $\tau = 700 \frac{kg}{cm^2}$ jak w rów. 54.)

$$\tau_1 = 560 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{najmn. P}{najw. P} \right) kg/cm^2 103)$$

Dla stali zaś otrzymamy z rów. 55)

$$\tau_1 = 720 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{najmn. P}{najw. P} \right) kg/cm^2 104)$$

b) Jeżeli nateżenie zmienia znak, otrzymamy podobnie z równania 59.) dla żelaza

$$\tau_1 = 560 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{najmn. P'}{najw. P} \right) kg/cm^2 105)$$

a dla stali z równania 60)

$$\tau_1 = 720 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{najmn. P'}{najw. P} \right) kg/cm^2 106)$$

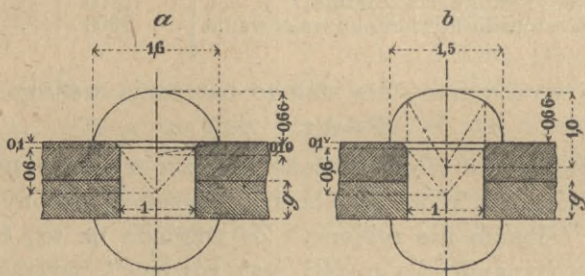
Odnośny ustęp austriackiego rozporządzenia ministeryalnego, dotyczącego się budowy mostów, brzmi:

§. 4. Praca materiału. 3. Dla obliczenia nitów na ciśnienie w jednym tylko kierunku 600kg/cm^2 , względnie w kilku kierunkach 500kg/cm^2 . 4. Dla obliczenia oporu przeciw ścinaniu w kierunku walcowania 500kg/cm^2 .

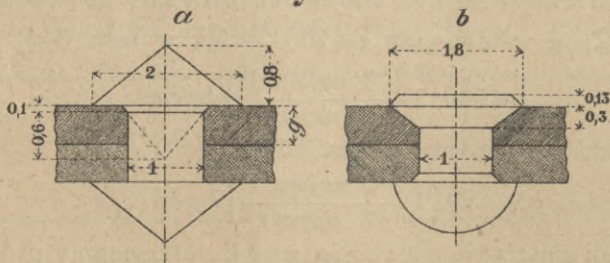
§. 30. Nitowanie pojedyncze.

Nity (n. *Niet*, fr. *rivet*, an. *rivet*) służą do połączenia stałego blach i kształtówek i składają się ze sworznia (n. *Bolzen*, fr. *tige*, an. *rivet bar*, *spindle*), główki (n. *Setzkopf*, fr. *tête de rivet*, an. *rivet head*) *A* (rys 53), gotowej przed użyciem nitu, i nakówki (n. *Schliesskopf*, fr. *rivure*) *B*, która powstaje z występującej części sworznia przez naklepanie i ma kształt sfero-

rys: 51.

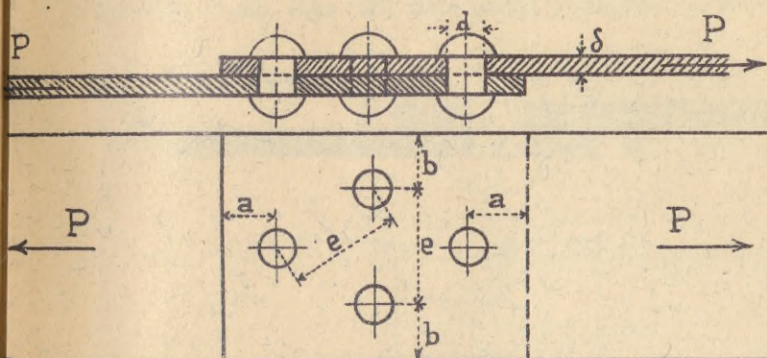


rys: 52.



idalny (rys. 51) lub też stożkowy (rys. 52 *a*); ten ostatni jednak jest niepraktyczny z powodu za małej wytrzymałości brzegów, dlatego też zupełnie prawie go zaniebano. Rysunek 52 *b* przedstawia nit wpuszczony (n. *versenkt*), który się używa tam, gdzie nie ma miejsca na nakówkę. Dla utworzenia nakówki trzeba, aby nit był rozżarzony. Tylko bardzo cienkie, mniej niż 10mm grube, wstawia się na zimno. Po ostygnięciu ściąga się sworznię,

OBLICZENIE NITÓW.



na ciśn. na ściankę dziury $P = n d \delta \tau_2$ przy $\tau_2 = 1600 \text{ kg/cm}^2$

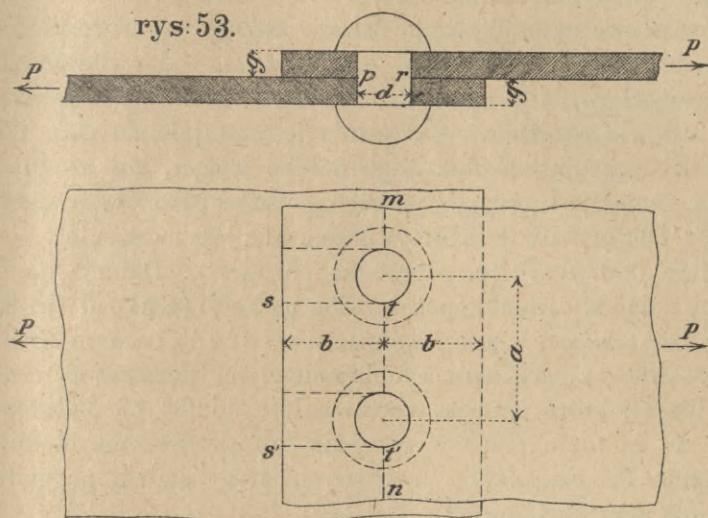
na scinanie $P = n \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1$ przy $\tau_1 = 800 \text{ kg/cm}^2$

— Długości w milimetrach — siły w kilogramach —

Nity należy obliczać:
 raz cięte dla wartości powyżej I
 dwucięte „ „ „ II
 na scinanie.

d	Odstęp nitów w mm						Wytrzymałość jednego nitu na scinanie		Wytrzymałość jednego nitu ze względu na ciśnienie na ściankę dziury przy grubości blachy $\delta =$																d		
	a norm.	b min.	b norm.	e min.	e norm.	e max.	raz-	dwu-	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		19	20
3	5	5	6	8	12	50	50	110	140																		3
4	6	6	8	10	16	50	100	200	190	260																	4
6	9	9	12	15	20	50	220	450	290	380	480																6
7	10	10	15	18	28	60	300	610	330	450	560	670															7
8	12	12	15	20	32	70	400	800	380	500	640	770	900														8
10	15	15	20	25	40	90	630	1260	480	640	800	960	1120	1280													10
12	18	18	25	30	50	100	900	1800	570	770	960	1150	1340	1540	1730	1920											12
14	21	21	30	35	56	110	1230	2460	670	890	1120	1340	1570	1790	2000	2240	2400	2690									14
16	24	24	35	40	60	120	1600	3200	770	1020	1280	1540	1790	2050	2300	2560	2820	3070	3300								16
18	27	27	40	45	70	140	2030	4060	870	1150	1440	1730	2020	2300	2600	2880	3170	3460	3750	4040	4320						18
20	30	30	40	50	80	160	2500	5000	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200	3520	3840	4160	4480	4800	5120					20
22	33	33	45	55	90	180	3040	6080	1060	1410	1760	2110	2460	2820	3340	3520	3870	4220	4580	4920	5260	5630	5980	6360			22
24	36	36	50	60	100	190	3600	7200	1150	1530	1920	2300	2700	3070	3460	3840	4220	4600	4990	5380	5760	6140	6530	6940	7300		24
26	39	39	55	65	110	200	4240	8480	1250	1660	2080	2500	2900	3330	3740	4160	4570	4990	5400	5820	6240	6650	7020	7450	7900	8520	26

a wskutek tego ściska blachy i wywołuje silne tarcie. Jeżeli więc siła P ma (rys 53) połączenie rozerwać, to musi przewy-



ciężyć naprzód tarcie, a potem wytrzymałość nitu na ścinanie. Ponieważ jednak tarcie i wytrzymałość nie działają równocześnie, lecz wytrzymałość działa dopiero, gdy tarcie zostanie przewyciężone, bo sworzeń po ostygnięciu nie wypełnia zupełnie dziury, więc na tarcie liczyć nie możemy przy obliczaniu wytrzymałości połączenia nitami *). Jak wiadomo wy-

*) Doświadczenia nad wytrzymałością nitów bardzo ciekawe wykonał znany inżynier francuski M. Dupuy z polecenia rządu francuskiego. Autor opisał te doświadczenia w *Annales des ponts et chaussées* (1895 str. 1). Gdy natężenie pręta żelaznego przekroczy granicę sprężystości, powstaje oprócz odkształcenia sprężystego także odkształcenie trwałe. Pręt taki nazywamy wyciągniętym (fr. *étiré*). Doświadczenia okazały, że granica sprężystości pręta wyciągniętego zgadza się prawie z natężeniem, które wywołało wyciągnięcie. Nity są to pręty wyciągnięte, pracujące powyżej pierwotnej granicy sprężystości. Nie wypełniają one zupełnie dziur ale ściskają mocno blachy, przez co wywołują bardzo znaczne tarcie. Tarcie to jest tem większe, im wyższą jest granica sprężystości nitu. Tarcie to jest bardzo zmienne i zależy od ciepłoty wkładania nitu, ciepłoty przy końcu wkładania i sposobu nitowania. Można jednak liczyć na następujące tarcia: nity żelazne, granica sprężystości (według sposobu oznaczania francuskiego) 1800 kg/cm^2 , nitowanie ręczne, tarcie 400 kg/cm^2 ; gr. sprężystości 2100 kg/cm^2 , tarcie 470 kg/cm^2 . Dla nitowania maszynowego a gr. spręż. 1800 kg/cm^2 tarcie 500 kg/cm^2 , gr. spręż. 2100 kg/cm^2 tarcie 580 kg/cm^2 . Nity stalowe przy nie-

trzymałość na ścinanie jest mniejszą od wytrzymałości na ciągnięcie w stosunku 4:5, więc $\tau_1 = 0,8 \tau$. Wielu jednak autorów przyjmuje przy obliczeniu nitów τ większe, a to z powodu, że do nitów używamy najlepszego żelaza, którego wytrzymałość na ciągnięcie jest 1,1 lub więcej razy większa od wytrzymałości żelaza zwykłego, więc $\tau_1 = 0,88$ do $0,96 \tau$. Jednak ze względu na to, że siła nie rozdziela się zupełnie jednostajnie na nity i niektóre nity pracują wskutek tego daleko więcej, niż z obliczeń wypada, lepiej jest przyjąć natężenie niższe, to jest zostawić $\tau_1 = 0,8 \tau$. Dla mostów w Austrii przepisane jest natężenie $\tau_1 = 600$ względnie 500 kg/cm^2 (p. poprzedni paragraf). Dziury na nity możemy robić w dwojaki sposób, albo przebijaniem (n. *Stanzzen*, fr. *poinçonnage*, a. *punching*), albo wierceniem (n. *Bohren*, fr. *perforation*, a. *drilling*). Przebijanie dziur pozostawia natężenia w blasze, które zniżają wytrzymałość do 20%^{*}). Jednak zaradzić się da temu przez wyżarzenie lub wywiercenie cienkiego pierścienia (a. *annealing*), przez co możemy znowu przywrócić pierwotną wytrzymałość^{**}).

Rysunek 53. przedstawia tak zwane nitowanie pojedyncze (n. *einfache Nietung*, fr. *simple rivure*, an. *single riveting*), przy którym nity urządzone są w jednym rzędzie. Jeżeli średnica nitu wynosi d , to obliczamy w ten sposób odstęp a i b , aby materiał jak najwięcej wyzyskać, a zatem, aby była jednakowa pewność przeciw przerwaniu blachy w linii mn przeciw ścięciu

towaniu ręcznym gr. spręż. 2100 kg/cm^2 , tarcie 450 kg/cm^2 ; gr. spręż. 2300 kg/cm^2 tarcie 660 kg/cm^2 . Jeżeli natężenie jest mniejsze od tarcia, to nity nie pracują wcale na ścinanie; w chwili, gdy tarcie zostanie przezwyciężone, blachy się przesuwają, poczem nit pracuje na ścinanie. Następnie dziury na nity stają się owalne, a w końcu połączenie zostaje przerwane w szwie.

^{*}) Według doświadczeń Tetmajera (Mittheilungen IV. zeszyt 1890) wynosiła n. p. wytrzymałość dla dziur:

	wierconych	przebijanych
żelaza zlewnego	4460 do 4780	3280 do 3740 kg/cm^2
„ spawalnego	3190 do 3340	2720 do 2880 „

^{**}) Rozporz. austr. min. handlu z dnia 29. stycznia 1892 co do użycia zasadowego żelaza zlewnego Martina dla zakładów mostowych na kolejach. §. 6 Wybijanie dziur na nity dotychczas używane, dozwolone jest tylko do 1. stycznia 1894 i to tylko pod tym warunkiem... Po 1. stycznia 1894 należy bez wyjątku dziury na nity wiercić, przebijanie dziur jest bezwarunkowo wzbronione.

nitów w płaszczyźnie pr i wyrwaniu blachy przed nitami w prostych st i $s't'$. Musimy także uważać, aby ciśnienie nitu na ściankę dziury w blasze nie przechodziło dozwolonej granicy. Możemy więc napisać następujące równania, jeżeli grubość blachy nazwiemy g :

dla n^{tej} pewności przeciw przerwaniu blachy w linii mn , licząc tak siłę P , jak i wytrzymałość, na szerokość a ,

$$P = (a - d)g\tau, \dots \dots \dots \alpha)$$

przeciw ścięciu nitu

$$P = \frac{\pi d^2}{4}\tau_1, \dots \dots \dots \beta)$$

przeciw wyrwaniu blachy przed nitami

$$P = 2bg\frac{4}{5}\tau = \frac{8}{5}bg\tau \dots \dots \dots \gamma)$$

Z porównania równań $\alpha)$ i $\beta)$ otrzymamy:

$$(a - d)g\tau = \frac{\pi d^2}{4}\tau_1, \text{ a stąd}$$

$$\frac{a}{g} = \frac{\pi \tau_1}{4\tau} \left(\frac{d}{g}\right)^2 + \frac{d}{g} \dots \dots \dots 107)$$

Dla $\tau_1 = \frac{4}{5}\tau$ otrzymamy stąd

$$\frac{a}{g} = \frac{\pi}{5} \left(\frac{d}{g}\right)^2 + \frac{d}{g} = 0,63 \left(\frac{d}{g}\right)^2 + \frac{d}{g} \dots \dots \dots 108)$$

Z doświadczeń *Kennedy*'ego wynikałoby $\frac{a}{g}$ nieco mniejsze, bo otrzymał on zamiast współczynnika 0,63 tylko 0,56.

Z równań $\beta)$ i $\gamma)$ otrzymamy dalej

$$\frac{\pi d^2}{4}\tau_1 = \frac{8}{5}bg\tau, \text{ a stąd}$$

$$\frac{b}{g} = 0,49 \frac{\tau_1}{\tau} \left(\frac{d}{g}\right)^2 \dots \dots \dots 109)$$

Dla $\tau_1 = \frac{4}{5}\tau$ otrzymamy

$$\frac{b}{g} = 0,39 \left(\frac{d}{g}\right)^2 \dots \dots \dots 110)$$

Wartości dla b , obliczone z równania 110), okazują się jednak w praktyce za małe zwłaszcza ze względu na robienie dziur, więc przyjmujemy b zamiast według równania 110) według następującego wzoru praktycznego

$$b = 1,9d \dots \dots \dots 111)$$

Jeżeli nazwiemy współczynnik mocy (*f. module de force du rivetage*) t. j. stosunek wytrzymałości w szwie do wytrzyma-

łości pełnej blachy v , to wytrzymałość na ciągnięcie ma się jak przekroje, więc

$$v = \frac{(a-d)g}{ag} = \frac{a-d}{a},$$

a wstawivszy wartość za a z równania 108)

$$v = \frac{\frac{\pi d^2}{5g}}{\frac{\pi d^2}{5g} + d} = \frac{1}{1 + \frac{5g}{\pi d}} \dots \dots \dots 112)$$

Z równań 108) i 112) obliczyliśmy dla wartości $\frac{d}{g}=1$ aż do 3 następną tabliczkę:

$\frac{d}{g} =$	1	1,5	2	2,5	3
$\frac{a}{g} =$	1,63	2,91	4,51	6,42	8,65
$v =$	0,39	0,49	0,56	0,61	0,65

Widzimy więc, że im większych używamy nitów w stosunku do grubości blachy, tem większa jest wytrzymałość połączenia, a zarazem nity są tem bardziej oddalone, a przeto połączenie jest tem mniej szczelne. Stosunek $\frac{d}{g}$ obieramy więc wedle tego, jaki cel ma połączenie.

Jeżeli chodzi nam przedewszystkiem o szczelność połączenia n. p. dla zbiorników, kadzi, okrętów, wtedy obieramy $\frac{d}{g}=1$ lub 1,5, aby nity były gęste i nazywamy takie połączenie nitowaniem szczelnem (n. *Dichtungsnietung*); o tem nie będziemy tutaj mówić. W budownictwie chodzi nam zwykle o jak najmniejsze osłabienie blachy, a więc o jak największe v , dlatego obieramy $\frac{d}{g}=2,5$ lub 3 i nazywamy to połączenie nitowaniem mocnem (n. *Kraftnietung*).

Tam, gdzie potrzeba obok wielkiej wytrzymałości także połączenia szczelnego n. p. przy kotłach parowych, obieramy dla $\frac{d}{g}$ średnią wartość 2 i nazywamy połączenie nitowaniem szczelnem i mocnem (szczelnomocnem, n. *combinirte Kraftnietung*).

Ze względu na wykonanie nie możemy używać za grubych nitów, dlatego najw. d przyjmujemy równe 28 mm, a w praktyce zwykle dla grubości

$$g < 1,2 \text{ cm} \qquad g > 1,2 \text{ cm.}$$

$$d = g + 1 \text{ cm} \quad d = 0,5g + 1,6 \text{ cm.}$$

Grubość blachy wynosi w budownictwie zwykle 5 do 12 mm, w budowie mostów 8 do 15 mm. Rzadko używamy blach jeszcze grubszych, gdyż w grubych blachach częstsze są błędy w materjale, powstałe z bąbli, które w grubych blachach zostają pomimo walcowania.

Zastanowić się tu także musimy nad ciśnieniem, jakie nit wywiera na ściankę dziury. Dopóki nit nie jest rozchełtany, niema ciśnienia na ściankę dziury, bo tarcie wystarcza do przeniesienia siły, ale musimy liczyć także na wypadek, gdy się rozchełta, wtedy ciśnie on na ściankę dziury *). Gerber i Tetmajer robili w tym względzie doświadczenia, Gerber doszedł do wyniku, że ciśnienie τ_2 na ściankę dziury nie powinno w żadnym wypadku przekraczać dwukrotnego natężenia dopuszczalnego τ na ciągnięcie. Tetmajer sądzi, że ciśnienie to może wzrosnąć bez szkody aż do granicy płynięcia, a więc około 2200 kg/cm². Ze względu na to, że należy przyjąć choćby mały współczynnik pewności, to natężenie dopuszczalne τ_2 musi być znacznie niższem, a zwłaszcza nie powinno osiągać granicy sprężystości. Obliczmy τ_2 , ciśnienie na ściankę dziury, a otrzymamy

$$P = dg \tau_2 \dots \dots \dots 113)$$

Porównawszy to równanie z równaniem β), otrzymamy

$$\frac{\pi}{4} d^2 \tau_1 = dg \tau_2,$$

a stąd $\tau_2 = \frac{\pi}{4} \frac{d}{g} \tau_1 \dots \dots \dots 114)$

a dla $\tau_1 = \frac{4}{5} \tau \qquad \tau_2 = \frac{\pi}{5} \frac{d}{g} \tau \dots \dots \dots 115)$

Z równania tego otrzymamy dla

$\frac{d}{g} =$	2	2,5	3
$\frac{\tau_2}{\tau} =$	1,26	1,57	1,88

Widzimy stąd, że $\tau_2 = 2 \tau$ dopiero przy $\frac{d}{g} = 3,2$, jednak lepiej jest nie dopuszczać do tak wielkiego ciśnienia i przyjmo-

*) Por. *Consideré Ann. du ponts et chauss.* 1886.

wać najwięcej $\frac{d}{g}=2,5$, wtedy $\tau_1=1,57\tau$, które to natężenie dopuścić możemy jeszcze bez szkody materiału.

Dla większego $\frac{d}{g}$ mamy wedle równań a) i 113)

$$P=(a-d)g\tau=dg\tau_2, \text{ a stąd}$$

$$a=d\left(1+\frac{\tau_2}{\tau}\right) \dots \dots \dots 116)$$

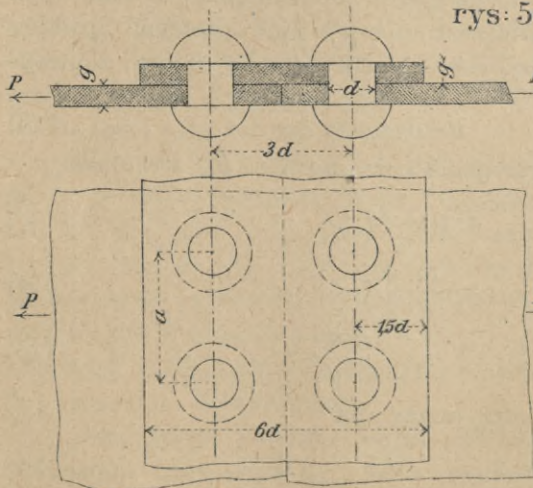
n. p. dla $\tau_2=1400$, $\tau=800 \text{ kg/cm}^2$, otrzymamy $a=2,75d$.

Obliczywszy a z równ. 107) i 116), przyjmujemy zawsze większe.

Rozporządzenie austr. minist. handlu z dnia 15. czerwca 1887. §. 4. ust. 3. Dla obliczenia nitów na ścinanie w jednym tylko kierunku 600 kg/cm^2 , względnie w kilku kierunkach 500 kg/cm^2 , przyczem należy na to uważać, że rzut ścianki dziury nita nie powinien pracować więcej nad 1400 kg/cm^2 .

Zupełnie tak samo, jak nitowanie pojedyncze, obliczamy także nitowanie z przykładką (n. *einfache Laschennietung*, fr. *cowre-joint*, an. *rivetted butt joint*) (rys. 54).

Nitowanie pojedyncze ma tę niedogodność, że siły P nie działają w jednej płaszczyźnie (rys. 53), wskutek czego powstaje moment $M=Pg$, który działa niekorzystnie na blachę i nity, zginając blachy. Według doświadczeń Tetmajera zmniejsza się wskutek tego wytrzymałość połączenia około 8% . Ponieważ moment Pg rośnie z gru-



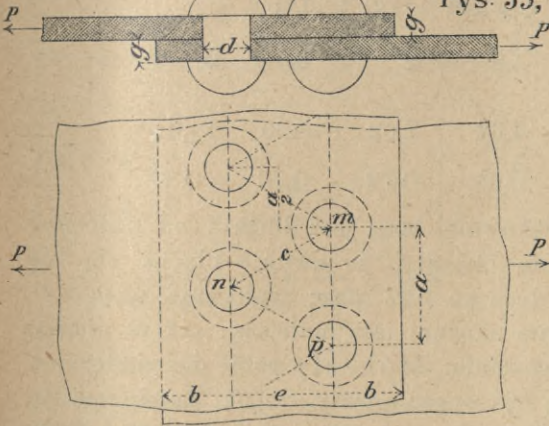
bością blachy, więc używamy nitowania pojedynczego tylko dla blach cienkich ($g \lesssim 1 \text{ cm}$).

§. 31. Nitowanie podwójne.

Przy nitowaniu pojedynczym użyteczny przekrój (n. *nutzbarer Querschnitt*, f. *section utile*) blachy t. j. przekrój po odciągnięciu dziur na nity jest bardzo mały, *v* wynosi, jak wiemy, najwięcej 0,65. Chcąc uzyskać większy użyteczny przekrój, używamy nitowania podwójnego (n. *doppelte oder Kettennietung*, fr.

rys: 55,

double rivure, an. *double rivetted joint*) urządzając dwa rzędy nitów (r. 55.) i przestawiając nity tak, aby nit w jednym rzędzie przypadł na środek między nitami drugiego rzędu. Jeżeli nazwiemy odstęp nitów jednego rzędu *a*, średnicę nitu *d* a grubość blachy *g*, to z doświadczeń



okazuje się, że odstęp skrajnego szwu nitów (n. *Nietennath*) od krawędzi blachy powinien być $b = 1,5d$, odstęp nitów dwu rzędów $a = 3d$, a Kennedy znalazł, że największa jest wytrzymałość połączenia, jeżeli

$$c = \frac{2}{3}a + \frac{d}{3}.$$

Chcąc mieć tę samą pewność przeciw przerwaniu blachy i przeciw ścięciu nitów, możemy napisać

$$P = 2 \frac{\pi}{4} d^2 \tau_1 \dots \dots \dots a) \tag{1}$$

przeciw ścięciu nitów i

$$P = (a - d) g \tau \dots \dots \dots \beta) \tag{2}$$

przeciw przerwaniu blachy w szwie, a więc

$$\frac{2}{4} \pi d^2 \tau_1 = (a - d) g \tau, \text{ a stąd}$$

$$\frac{a}{g} = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_1}{\tau} \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} \dots \dots \dots 117) \tag{3}$$

$$\text{dla } \tau_1 = \frac{4}{5} \tau \quad \frac{a}{g} = \frac{2\pi}{5} \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} \dots \dots \dots 117a) \tag{4}$$

Stosunek wytrzymałości szwu do wytrzymałości blachy pełnej jest podobnie, jak pierwej, dla $\tau_1 = \frac{4}{5} \tau$

$$v = \frac{a-d}{a} = \frac{1}{1 + \frac{5g}{2\pi d}} \dots \dots \dots 118)$$

Jeżeli porównamy tę wartość z wartością dla v wedle równania 112), poznamy, że tu v jest większe, niż przy nitowaniu pojedynczym, co zresztą także widzimy z następnej tabliczki, obliczonej na podstawie równań 117a) i 118).

$\frac{d}{g} = 1$	1,5	2	2,5	3
$\frac{a}{g} = 2,26$	4,32	7,02	10,35	14,3
$v = 0,56$	0,65	0,72	0,76	0,80.

Chociaż linia zygzakowata mnp jest dłuższa od linii mp , to przecież doświadczenia okazały, że zwykle blacha się nie przerywa w szwie mp , lecz po linii mnp ; widocznie więc wytrzymałość w płaszczyźnie ukośnej jest mniejszą, niż w prostopadłej do kierunku walcowania. Moberly robił doświadczenia i przekonał się, że złom był zygzakowaty, dopóki powierzchnia zygzakowata była $\leq 1,33$ razy powierzchni w linii prostej. Stąd wynika, że długość c powinna być $\frac{4}{3}$ razy większa niż a , zatem $c = \frac{4}{3}a$, skąd możnaby obliczyć a .

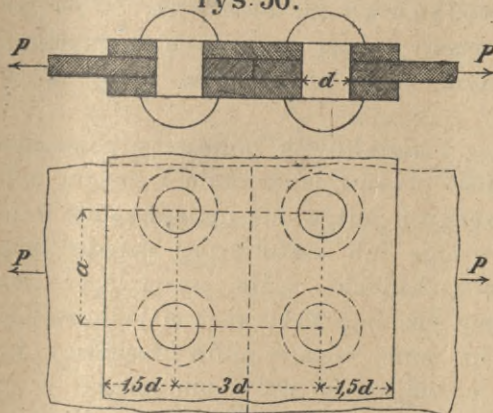
Gdybyśmy urządzili więcej rzędów nitów, mielibyśmy wedle ilości rzędów nitowanie potrójne, poczwórne i t. d., a stosunek v byłby coraz korzystniejszym. Jednak potrzebowałibyśmy także coraz więcej nitów i tracilibyśmy też coraz więcej blachy na zakładkę (n. *Überplattung*, fr. *rivetage à recouvrement*, a. *lap joint*), t. j. część blachy, zachodzącą na drugą blachę. Przy większej ilości rzędów nitów siła nie rozdziela się też równo na wszystkie nity, a mianowicie nity w skrajnych rzędach będą więcej nateżone, niż nity w średnich rzędach.

Dlatego też w praktyce rzadko używamy więcej rzędów, niż dwu, i my więc nie będziemy mówić o nitowaniu potrójnym i t. d., a zresztą w danym razie moglibyśmy zupełnie w podobny sposób, co dla dwu rzędów, obliczyć wytrzymałość nitowania i odstępów nitów.

Tak samo też obliczać będziemy nitowanie pojedyncze z dwiema przykładkami (n. *einfache Nietung mit Doppel-laschen*, fr. *rivetage à double couvre joint*, a. *butt joint with cover*

plates) (rys. 56). Nazwawszy, jak dawniej, grubość nitu d , blachy g a odstęp nitów a , otrzymamy przeciw przerwaniu blachy w szwie $P = (a - d)g\tau$. Dla przerwania połączenia przez ścięcie nitów musiałyby być nity ścięte w dwu płaszczyznach, więc otrzymamy przeciw ścięciu

rys: 56.



nity ścięte w dwu płaszczyznach, więc otrzymamy przeciw ścięciu

$$P = 2 \frac{\pi d^2}{4} \tau_1.$$

Widzimy tu, że dwa te równania są zupełnie takie same, jak dla nitowania podwójnego, otrzymamy więc te same wartości dla a i v , jak w równaniach 117) i 118).

Nity, jak już wspomnieliśmy, są tu narażone na ścięcie w dwu płaszczyznach, dlatego nazywamy je dwucięte (n. *doppelschnittig*, fr. *rivet à double coupe*, a. *rivet in double shear*), w przeciwieństwie do nitów raz ciętych (n. *einschnittig*, fr. *rivet à simple coupe*, a. *rivet in single shear*).

Nitowanie pojedyncze z dwiema przykładkami ma tę główną korzyść, że tu siły przenoszą się w tej samej płaszczyźnie i że nie ma żadnego momentu, któryby działał szkodliwie na blachę i nity.

Grubość przykładek może być wedle teorii równą połowie grubości blachy, zwykle jednak robimy je trochę grubsze ze względów praktycznych, a czasem nawet dajemy im grubość równą grubości blachy.

Jeżeli blachy, które mamy nitować, pracują na ciśnienie, to przy nitowaniu na zakładkę urządzamy nity w ten sam sposób, jak pierwej. Gdy blachy stykają się bezpośrednio w jednej płaszczyźnie, to właściwie nie potrzeba nitowania, bo siły przenoszą się wprost, jednak ze względu na przypadkowe przesunięcie blach dajemy przykładki i urządzamy nity, jak dla blach ciągnionych.

§. 32. Nitowanie wstęg i kształtówek.

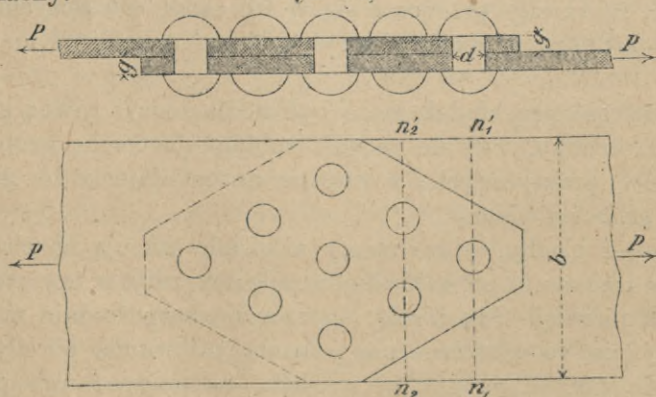
Wstęga czyli żelazo płaskie (n. *Flacheisen*, fr. *fer plat*, *fer méplat*, a. *flat iron*) jestto blacha wąska a długa o przekroju prostokątnym, kształtówka (n. *Façoneisen*, fr. *fer special*, a. *special iron*) zaś jestto żelazo walcowane o przekroju wielobocznym lub złożonym n. p. w kształcie litery **T**, **I**, krzyża i t. p.

Przy nitowaniu wstęg i kształtówek obliczamy połączenie znów tak, aby wytrzymałość przeciw przerwaniu i ścięciu była równą. Wszystkich potrzebnych nitów nie umieszczamy w jednym rzędzie, boby to wstęgę lub kształtówkę zanadto osłabiło; dlatego chodzi nam o zbadanie, jakie jest najlepsze rozmieszczenie nitów. Wiemy już najprzód, że tem jednostajniej siła rozłoży się na nity, im mniej rzędów nitów urządzimy, będziemy się więc starać, jak najwięcej nitów umieszczać w jednym rzędzie, przyczem jednak uważać będziemy musieli na to, aby wstęgę i kształtówkę zanadto nie osłabiać.

Rys. 57. przedstawia dwie wstęgi połączone nitami na zakładkę. Jeżeli w pierwszym rzędzie jest n_1 , w drugim n_2 nitów, to, jeśli ciągnięcie w pierwszym szwie n_1 n'_1 ma być τ ,

$$P = \tau (A - n_1 dg),$$

przyczem A oznacza przekrój wstęgi, d średnicę nitu, a g grubość blachy.



Jeżeli wstęga ma się przerwać w drugim szwie n_2 n'_2 i połączenie ma się zerwać, to muszą być równocześnie ścięte nity w pierwszym rzędzie, więc:

$$P = \tau (A - n_2 \bar{d}g) + \tau' n_1 \frac{d^2 \pi}{4}.$$

Dla jednakowej pewności przeciw przerwaniu w pierwszym i drugim szwie musi być $P = P'$, więc

$$\tau (A - n_1 \bar{d}g) = \tau (A - n_2 \bar{d}g) + \frac{\pi d^2 \tau' n_1}{4}, \text{ a stąd}$$

$$n_2 = \frac{n_1 \left(\bar{d}g + \frac{d^2 \pi \tau'}{4 \tau} \right)}{\bar{d}g} = n_1 \left(1 + \frac{\pi d \tau'}{4 g \tau} \right). \dots \dots 119)$$

Dla stosunków $\frac{d}{g}$, używanych w budownictwie, otrzymamy gdy $\frac{\tau'}{\tau} = 0,8$, dla

$\frac{d}{g} = 2$	2,5	3
$\frac{n_2}{n_1} = 2,2$	2,6	2,9,

a więc $3 > \frac{n_2}{n_1} > 2$.

Jeżeli zatem chcemy, aby pewność w dalszych rzędach nie była mniejszą, niż w pierwszym, to liczba nitów w następnym rzędzie może być dwa razy większą, niż w poprzednim, ale gdybyśmy liczbę nitów potroili, to pewność byłaby już mniejszą. Jeżeli więc $n_2 \leq 2 n_1$, to przekrój niebezpieczny t. j. ten, w którym przerwanie najłatwiej może nastąpić, jest w pierwszym rzędzie i według niego obliczamy wymiary, a więc

$$A - n_1 \bar{d}g = \frac{P}{\tau}. \dots \dots \dots 120)$$

Chcąc jak najmniej osłabić przekrój, dajemy w pierwszym rzędzie mało nitów, a mianowicie jeden lub dwa nity najwięcej.

Dla wyznaczenia ilości wszystkich nitów potrzebnych n ustawimy na zasadzie, aby pewność była równa przeciw przerwaniu wstęgi lub kształtówki i przeciw ścięciu nitów, następane równanie:

$$P = n \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1 = (b - n_1 \bar{d}) g \tau, \text{ czyli } \frac{n}{4} d^2 \pi = (b - n_1 \bar{d}) g \frac{\tau}{\tau_1}, \text{ a stąd}$$

w razie, gdy $\tau_2 = \frac{4}{3} \tau$,

$$n = 1,59 (b - n_1 \bar{d}) \frac{g}{\bar{d}^2} \dots \dots \dots 121)$$

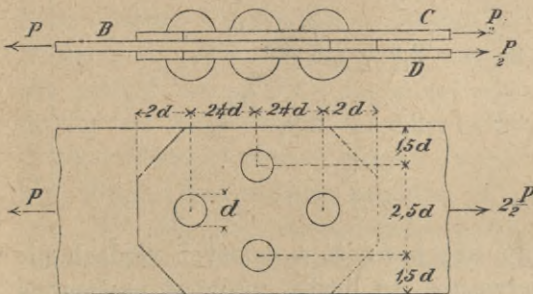
Jeżeli urządzimy podwójne przykładki, tak, że nity będą dwucięte, otrzymamy n o połowę mniejsze, więc

$$n = 0,80 (b - n_1 d) \frac{g}{d^2} \dots \dots \dots 122)$$

Odstęp nitów jednego rzędu od nitów drugiego robimy najmniej $2,5 d$ do $3 d$.

Przykład. Wstęgę B należy połączyć nitami z dwiema wstęgami C i D (rys. 58). Niech będzie siła $P=7t$. Jeżeli grubość wstęgi B jest $g=10\text{ mm}$ a średnica nitu $d=20\text{ mm}$, dalej

rys: 58,



$\tau=800\text{ kg/cm}^2$, $\tau_1=600\text{ kg/cm}^2$ to ilość potrzebną nitów otrzymamy z równ. (121)

$$\frac{n \cdot 2^2 \cdot \pi}{4} 600 = 7000, \text{ zatem}$$

$$n = \frac{7000}{\pi \cdot 600} = 3,7, \text{ zamiast}$$

czego przyjmiemy $n=4$.

Jeżeli jeden nit znajduje się będzie w pierwszym rzędzie, to według

$$120) A - 1.2.1 = \frac{7000}{800}, \text{ a stąd}$$

$$A = 8,75 + 2 = 10,75\text{ cm}^2, \text{ zatem}$$

gdy $g=1\text{ cm}$, $b=10,75\text{ cm}$, zamiast czego przyjmiemy $b=110\text{ mm}$. Zbadajmy jeszcze ciśnienie na ściankę dziury nitu. Otrzymamy wtedy

$$4.2.1 v_2 = 7000, \text{ zatem } v_2 = \frac{7000}{8} = 875\text{ kg/cm}^2,$$

a zatem mniejsze, niż dopuszczalne.

§. 33. Połączenia przegibne.

Żelazne części budowli dadzą się połączyć nie tylko nitowaniem, lecz także w inny sposób, a mianowicie za pomocą połączeń przegibnych czyli sworzniowych (n. *Gelenkverbindung*, *Bolzenverbindung*, fr. *construction articulée*) lub za pomocą śrub. Najprzód będziemy mówić o połączeniach przegibnych i obliczymy niektóre wymiary oka przy połączeniu przegibnem dwu prętów, z których jeden jest podwójnym (rys. 59).

Jeżeli siła P działa w kierunku osi pręta, to, jak wiemy,

$$P = \tau A, \dots \dots \dots \alpha)$$

jeżeli A oznacza przekrój pręta n. p. przy przekroju prostokątnym $A=bc$, zatem $P=\tau bc$.

Jeżeli sworzeń (n. *Bolzen*, fr. *cheville*, an. *pin*) jest, jak tutaj, dwa razy cięty, otrzymamy dla ścięcia jego

$$P = \tau_1 \frac{2d^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{2} d^2 \tau_1, \dots \dots \dots \beta)$$

a jeżeli $\tau_1 = \frac{4}{5} \tau$, $P = \frac{2\pi}{5} d^2 \tau$,

przyczem d oznacza średnicę przekroju sworznia. Z równania $\alpha)$ i $\beta)$ otrzymamy

$$P = \frac{\pi}{2} d^2 \tau_1 = \tau A, \text{ a stąd } d = \sqrt{\frac{2P}{\pi \tau_1}} = 0,798 \sqrt{\frac{P}{\tau_1}} \quad . \quad 123)$$

Jeżeli $\tau = \frac{4}{5} \tau_1$, to $d^2 = \frac{5}{2\pi} A$, więc

$$d = 0,893 \sqrt{A} \quad \dots \dots \dots 124)$$

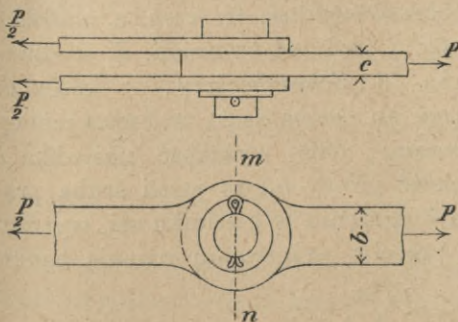
Ze względu na występujące tu natężenia zginające zaleca się przyjąć τ_1 o 15% niższe.

Dla sworznia raz ciętego otrzymamy zamiast rów. $\beta)$

$$P = \tau_1 \frac{d^2 v}{4} = \frac{\pi}{5} d^2 \tau, \text{ więc}$$

$$\frac{\pi}{5} d^2 \tau = \tau A, \text{ a stąd } d = 1,26 \sqrt{A} \quad \dots \quad 124 a)$$

rys: 59,



jeżeli sworzeń i pręt są z jednego materiału. Jeżeli zaś pręt jest żelazny a sworzeń stalowy, wtedy wzory te się zmieniają, gdyż za τ_1 musimy inną wartość podstawić.

Aby oko nie przerwało się w linii mn , musi być $A_1 = A$, jeżeli A_1 oznacza użyteczny przekrój pręta w przekroju mn . Abyśmy jednak w miejscu, gdzie

siła zaczepia, t. j. w oku, mieli większą pewność, przyjmujemy, opierając się na doświadczeniach amerykańskich *) większą je-

*) P. Steiner. *Über Brückenbauten in den Vereinigten Staaten von Nordamerika* 1878 str. 85, artykuł p. Lekoë w *Allg. Bauzeitung* 1882, Jay du Bois. *The strains in framed structures* 1883 i Fidler *A treatise on bridge construction* 1893.

szcze powierzchnię przekroju, niż teoretycznie potrzebna, a mia-
nowicie

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } \frac{d}{c} = & < 1 & 1 & 1,15 & 1,5 & 1,75 & 2 \\ \frac{A_1}{A} = & 1,4 & 1,5 & 1,6 & 1,67 & 1,71 & 1,75 \end{aligned} \right\} \quad . \quad 125)$$

Inne wymiary oka przyjmujemy zwykle następane

$$e \geq c, \quad d_1 \geq 0,75b, \quad d_1 = 2c, \quad h = b + \frac{1}{2}d$$

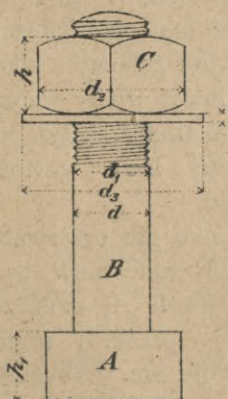
Rozumie się, że i tu musimy się starać, aby ciśnienie na
ściankę dziury nie było za wielkie, a więc ponieważ

$$\tau_2 = \frac{P}{de} = \frac{A}{de} \tau, \quad \text{zatem } e = \frac{P}{d \tau_2} \quad . \quad . \quad . \quad 126)$$

§. 34. Obliczenie śrub.

Śruba (n. *Schraube*, fr. *vis*, *boulon*, an. *screw*) składa się
ze sworznia *B* (n. *Schraubenspindel*, *Schraubenbolzen*, fr. *tige*
de boulon, an. *bar*) (rys. 60), na którym
nacięte są gwinty czyli skręty (n. *Schraubengewinde*, fr. *filet de vis*, a. *worm*
of a screw), głowy śruby *A* (n. *Schrauben-*
kopf, fr. *tête de vis*, a. *head*) i naśrubka
C (n. *Schraubenmutter*, fr. *écrou*, a. *matrize*).

rys. 60,



Nazwijmy *d* średnicę sworznia, *d*₁ średnicę
rdzenia (n. *Schraubenkern*, fr. *collet de*
vis, *noyau*, an. *screw neck*) w części nacię-
tej gwintami, dalej wysokość naśrubka *h*
a wysokość głowy *h*₁, to jeżeli śruba pra-
cuje na ciągnięciu w kierunku osi, wytrzy-
małość przeciw przerwaniu rdzenia będzie

$$P = \mu \frac{d_1^2 \pi}{4},$$

przeciw ścięciu głowy $P' = d \pi h_1 \frac{4}{5} \mu$, więc dla jednakiej pewności
 $P = P'$, a zatem

$$\frac{\mu d_2^2 \pi}{4} = d \pi h_1 \frac{4}{5} \mu, \quad \text{a stąd}$$

$$h_1 = \frac{5}{16} \frac{d_1^2}{d}.$$

Dalej otrzymujemy wytrzymałość przeciw ścięciu naśrubka

$$P = d_1 \pi h \frac{4}{5} \mu, \text{ a więc gdy } P = P',$$

$$d_1 \pi h \frac{4}{5} \mu = \mu d_1^2 \frac{\pi}{4}, \text{ a stąd } d = \sqrt[5]{\frac{5}{16} P}.$$

W praktyce jednak przyjmujemy większe wartości dla h i h_1 , zwłaszcza, że gwinty nie zawsze wypełniają zupełnie naśrubek, a więc nie wszystkie gwinty pracują równocześnie; mianowicie obieramy

$$h = d, \quad h_1 = 0,8 d \quad \dots \dots \dots 127)$$

Grubość naśrubka zwykle przyjmujemy

$$d_2 = 1,4 d + 0,5 \text{ cm} \quad \dots \dots \dots 128)$$

wymiary zaś podkładki

na twardym materiale	na drzewie	} 129)
$d_3 = 2,0 d + 0,5 \text{ cm}$	$2,4 d + 1,0 \text{ cm}$	
$s = 0,1 d + 0,3 \text{ cm}$	$0,12 d + 0,5 \text{ cm}$	

Wymiary gwintów są używane powszechnie prawie według systemu Widwortha, według którego krok śruby (n. *Schraubenganghöhe*, fr. *pas de vis*, a. *pitch*).

$$\left. \begin{aligned} s &= 0,08 d + 0,1 \text{ cm} \\ d_1 &= 0,872 d - 0,16 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 130)$$

Śruby grubsze niż 4 cm używane przy mostach i dachach mają gwinty płaskie, dla tych jest

$$\left. \begin{aligned} s &= 0,9 d + 0,2 \text{ cm} \\ d &= 1,1 d_1 + 0,22 \text{ cm} \\ h_1 &= 1,5 d. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 131)$$

Jeżeli śruba pracuje na ciągnięcie a P jest siłą działającą w kierunku osi, to

$$P = \frac{d_1 \pi}{4} \tau, \text{ a stąd } d_1 = 1,128 \sqrt{\frac{P}{\tau}} \quad \dots \dots 132)$$

Nateżenie dopuszczalne τ przyjąć należy wedle str. 57. Francuzi przyjmują jednak zwykle mniejsze nateżenie $\tau = 400 \text{ kg/cm}^{2*}$) ze względu na skręcanie, na jakie narażoną jest śruba podczas naciągania naśrubka.

Podstawiawszy wartość z rów. 132) w rów. 130), otrzymamy

$$d = 1,3 \sqrt{\frac{P}{\tau}} + 0,18 \text{ cm} \quad \dots \dots \dots 133)$$

*) p. Résal J. Construction metalliques str. 624.

Jeżeli płyty krnszcowe lub kształtówki łączymy śrubami tak, że śruby narażone są na ścięcie, to obliczamy je zupełnie tak samo, jak przy połączeniu nitowaniem lub sworzniowem.

Przykład. W moście drewnianym układu Howe'a siła działająca w słupie wiszącym, składającym się z dwu śrub jest 29,5t. Jakie wymiary mamy śrubom, jeżeli natężenie dopuszczalne $\tau = 760 \text{ kg/cm}^2$. Wedle założenia na jedną śrubę wypada $P = \frac{29,5}{2} = 14,75 \text{ t}$.

Z rów. 132) otrzymamy

$$d_1 = 1,128 \sqrt{\frac{14750}{760}} = 4,97 \text{ cm} \doteq 50 \text{ mm}.$$

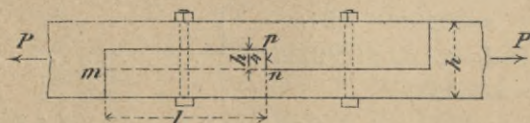
§. 35. Połączenie belek drewnianych.

W poprzednich paragrafach poznaliśmy obliczenie niektórych połączeń blach i kształtówek żelaznych, tu przejdziemy kilka przykładów, jak się obliczają połączenia belek drewnianych.

1. Zamek prosty (n. *das gerade Hackenblatt*, fr. *entement à double patte*, an. *tabled scarf*).

Jeżeli h i b oznaczają wysokość i szerokość dwu belek drewnianych (rys. 61.), połączonych zamkiem prostym i jeżeli siła P , działająca w osi, stara się to połączenie rozzerwać, to w płaszczyźnie np powstaje ciśnienie,

rys:61,



które nie powinno być większe, niż τ . Połączenie może być także rozzerwane, gdy belka zostanie ściętą w płaszczyźnie mn . Ażeby pewność przeciw ścięciu i zgnieceniu była jednakową, musi być

$$b \frac{h}{4} \tau = bl \tau',$$

jeżeli τ' oznacza natężenie dopuszczalne na ścinanie, a stąd

$$l = \frac{h}{4} \frac{\tau}{\tau'} = \frac{h}{4} \frac{70}{7} = 2,5 h \dots \dots \dots 134)$$

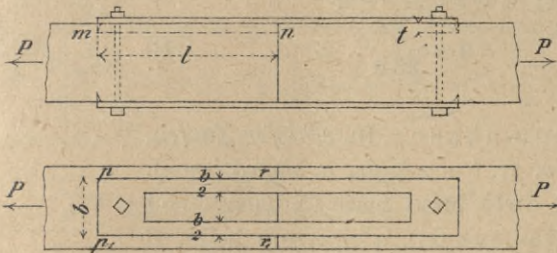
Rozumie się, że przytem musi być

$$P < \frac{bh \tau}{4}.$$

2. Zetknięcie proste z łubkami (n. *Verlaschung*, fr. *éclissage*, *éclitement* a. *fishing*).

Jeżeli większe siły działają w kierunku osi, wtedy używamy do połączenia belek drewnianych płyt żelaznych, tak zwanych łubków (n. *Laschenplatte*, fr. *éclisse*, a. *fish-plate* (rys. 62)

rys:62,



Jeżeli siła P , działająca w osi, stara się połączenie rozerwać, to najprzód, aby łubki się nie przerwały, musi być

$$P = 2 b g \tau,$$

jeżeli g oznacza grubość łubków, a τ natężenie dopuszczalne na ciągnięcie dla żelaza. Jeżeli przyjmiemy

$$\tau = 1000 \frac{kg}{cm^2}, \text{ to } P = 2000 b g, \text{ więc } b g = \frac{P}{2000} \quad . \quad . \quad 135)$$

Widzimy dalej, że siła P spowodowuje ciśnienie drzewa na zębra, wbite do głębokości t , i że nareszcie połączenie może być zniszczone przez ścięcie drzewa w płaszczyznach mn , pr i $p_1 r_1$. A więc mamy najprzód dla ciśnienia $P = 2 t' b_1 t$,

$$\text{a dla ścinania } P = 2 \tau_1 l (b + 2 t),$$

jeżeli t' i τ_1 oznaczają natężenia dopuszczalne dla drzewa na ciśnienie i ścinanie. Przyjmijmy

$$\tau' = 70 \frac{kg}{cm^2}, \quad \tau_1 = 7 \frac{kg}{cm^2}, \text{ to } b_1 = \frac{P}{140 t'} \quad . \quad . \quad . \quad 136)$$

$$\text{a } l = \frac{P}{14 (b_1 + 2 t)} \quad . \quad . \quad 137)$$

w cm i kg .

Przykład. Niech będzie $P = 4000 kg$, $g = 0,5 cm$, to otrzymamy z równania 135) $b = \frac{4000}{2000 \times 0,5} = 4 cm$, więc $\frac{b}{2} = 2 cm$. Dla $t = 2 cm$ otrzymamy

dalej z równania 136) $b_1 = \frac{4000}{140 \times 2} = 14,3 cm$, a z równania 137)

$$l = \frac{4000}{14 (14,3 + 4)} = 16,0 cm.$$

3. Połączenie czopowe (n. *Verzapfung*).

Dwie belki prostopadłe *A* i *B* (rys. 63) łączymy zapomocą czopa (n. *Zapfen*, fr. *tenon*, a. *tenon*). Siła *P* stara się ściąć czop w płaszczyźnie *mn*, więc dla natężenia dopuszczalnego τ_1 $P = ah\tau_1$

Dla drzewa prostopadłe do włókien przyjmujemy $\tau_1 = 23 \frac{kg}{cm^2}$, więc

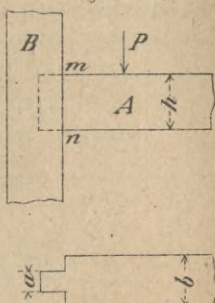
$$a = \frac{P}{23h} \dots \dots \dots 138)$$

w *kg* i *cm*.

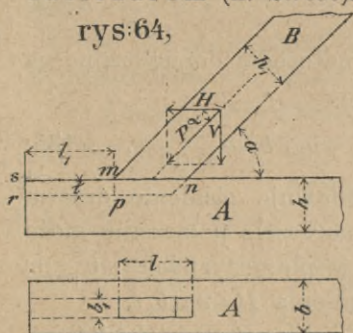
4. Czop ukośny (n. *schiefer Zapfen*, *Schrägzapfen*, fr. *tenon biais*, a. *sloped tenon*).

Jeżeli dwie belki mamy połączyć pod kątem ostrym (rys. 64), a przytem belka *B* wywiera znaczne ciśnienie *P*, używamy wtedy czopa ukośnego. Ciśnioną belkę ukośną *B* nazywamy zastrzałem (n. *Strebe*). Siła *P* da się rozłożyć na dwie składowe: *H* w kierunku poziomym i *V* w kierunku pionowym. Z rysunku widzimy że $H = P \text{dost } \alpha$, $V = P \text{wst } \alpha$,

rys:63,



rys:64,



$h_1 = l \text{wst } \alpha$, więc $l = \frac{h_1}{\text{wst } \alpha}$. Siła *H* usiłuje ściąć czop w płaszczyźnie *mn*,

więc $H = lb_1\tau_2 = 15lb_1$, jeżeli $\tau = 15 \frac{kg}{cm^2}$ jest natężeniem dopuszczalnym na ścinanie ukośnie do włókien. Czop usiłuje dalej wysunąć część drzewa

przed czopem *mprs*, więc $H = l_1(b_1 + 2t)\tau_1$, jeżeli τ_1 jest natężeniem dopuszczalnym na ścinanie w kierunku równoległym do włókien.

Porównawszy oba te równania i przyjąwszy $\tau_1 = 7 \frac{kg}{cm^2}$, otrzymamy $15b_1l = 7l_1(b_1 + 2t)$, a stąd

$$l_1 = \frac{15b_1l}{7(b_1 + 2t)} \dots \dots \dots 139)$$

Szerokość czopa b_1 możemy obliczyć z równania

$$b_1 = \frac{H}{15l} \dots \dots \dots 140)$$

Zwykle przyjmujemy $t = \frac{h}{3}$, zaś najmniejsze $b_1 = \frac{b}{3}$, dla wartości będzie

$$l_1 = \frac{5bl}{7\left(\frac{b}{3} + \frac{2}{3}h\right)} = \frac{15bl}{7(b+2h)} \dots \dots \dots 141)$$

Dla $b_1 = b$ byłoby

$$l_1 = \frac{15bl}{7\left(b + \frac{2}{3}h\right)} = \frac{27bl}{7(3b+2h)} \dots \dots \dots 141 a)$$

Przykład. Przyjmijmy $P=10t$, $\alpha=30^\circ$, $b=20\text{ cm}$, $h=20\text{ cm}$, $h_1=20\text{ cm}$,

wtedy $l = \frac{20}{\text{wst } \alpha} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40\text{ cm}$, dalej $H = P \text{ dost } \alpha = 10 \times 0,866t$. Z rów. 141)

otrzymamy $b_1 = \frac{8660}{15 \times 40} = 14,4\text{ cm}$, przyjmiemy więc $b_1 = b = 20\text{ cm}$, a wtedy

z równania 141) otrzymamy dla $t = \frac{h}{3} = 7\text{ cm}$

$$l_1 = \frac{27 \times 20 \times 40}{7(3 \times 20 + 2 \times 20)} = \frac{21600}{700} = 31\text{ cm}.$$

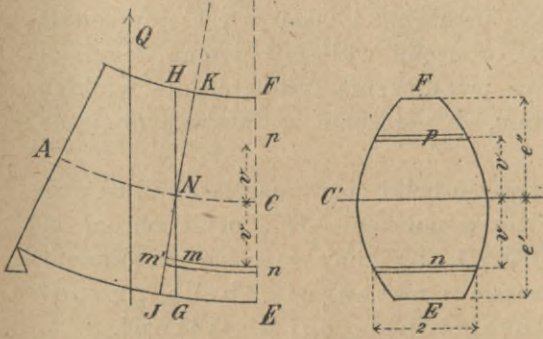
V. Wytrzymałość na zginanie.

§. 36. Związek między siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi.

Jeżeli na belkę o osi prostej działają prostopadłe do osi siły zewnętrzne, będące między sobą w równowadze, i jeżeli

leżą wszystkie w płaszczyźnie przechodzącej przez oś, wtedy siły te wyginają belkę t. j. skracają włókna między dwoma pierwotnie równoległymi przekrojami EF i GH (rys. 65) po stronie wklęsłej, a przedłużają je po stronie wypukłej. Rozumie się, że między włóknami przedłużonymi a skróconymi leżeć musi warstwa NC włókien, które zachowały swą

rys:65,



pierwotną długość. Warstwę tę nazywamy warstwą obojętną (n. *neutrale Faserschichte*, fr. *ligne des fibres neutres*), jej przecięcie się $C'C''$ z płaszczyzną przekroju, prostopadłą do osi, nazywamy osią obojętną (n. *neutrale Axe*, fr. *axe neutre*,

axe de flexion, axe d'équilibre, an. *neutral axis*), a przecięcie się AC z płaszczyzną, w której działają siły zewnętrzne, linią ugięcia lub sprężystą (n. *elastische Linie*, fr. *ligne élastique*, an. *elastic line*).

Chcąc wyznaczyć natężenia, powstałe w innych włóknach wskutek zginania, musimy zrobić niektóre przypuszczenia:

1) że zginanie jest tak małe, że natężenia pozostają w granicach sprężystości,

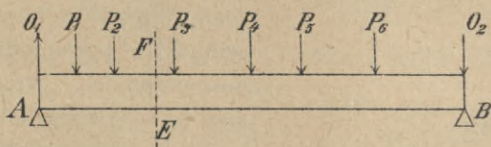
2) że przekroje EF i GH pozostają po ugięciu płaskimi i prostopadłymi do ugiętej osi, co zresztą stwierdził doświadczalnie Considère,

3) że włókna, równoległe do pierwotnej prostej osi belki, pozostają i nadal równoległymi do ugiętej osi.

Wyniki, uzyskane na podstawie tych przypuszczeń, są zgodne z doświadczeniami, więc możemy oprzeć dalszą teorię na tych przypuszczeniach.

Jeżeli na belkę AB (rys. 66), działają siły prostopadłe do osi, a belkę tę przetniemy płaszczyzną EF , prostopadłą do osi,

rys. 66.



i prawą część belki odejmiemy, to, ażeby lewa część została i nadal w równowadze, musimy przyłożyć do przekroju EF siły, równające się siłom wewnętrznym, działającym w EF , czyli oddziaływania prawej części belki na EF . Siły te wewnętrzne będą rozdzielone na całym przekroju i będą w części wypukłej dodatnie czyli ciągnienia, w części wklęsłej ujemne, czyli ciśnienia. One to sprawiają przedłużenia lub skrócenia włókien, a stąd wynika bezpośrednio, że natężenie w warstwie obojętnej jest równe zero.

Jeżeli przekroje po ugięciu belki pozostają płaskimi, to przekrój GH (rys. 65.) przejdzie w położenie JK , czyli obróci się około osi obojętnej o kąt JNG . Widzimy więc, że przedłużenia i skrócenia włókien, a zatem i natężenia, będą proporcjonalne do odległości ich do osi obojętnej.

Nazwijmy v odległość włókna $mn = s$ od osi obojętnej, które po ugięciu belki przedłuży się o $mm' = ds$, natężenie zaś tego włókna niech będzie ν . Nazwijmy dalej ν i ν' natężenia

włókien skrajnych E i F , a ich odległość od osi obojętnej e' i e'' , to możemy napisać

$$\frac{v}{v} = \frac{r'}{e'} = \frac{r''}{e''} = \zeta \dots \dots \dots 142)$$

ζ jestto więc nateżenie w warstwie, odległej o jednostkę długości od osi obojętnej.

Siła działająca na pasek mn powierzchni $= dA$, równoległy do osi obojętnej, będzie więc $v dA$, a więc suma wszystkich ciągnięć

$$\int_0^{e'} v dA, \text{ a ciśnienie } - \int_0^{e''} v' dA$$

jeżeli $-v'$ oznacza ciśnienie. Ponieważ przypuściliśmy, że na belkę działają tylko ciężary pionowe, więc dla równowagi musi być

$$\int_0^{e'} v dA - \int_0^{e''} v' dA = 0, \text{ albo}$$

$$\zeta \left[\int_0^{e'} v dA - \int_0^{e''} v dA \right] = 0. \dots \dots \dots 143)$$

$\int_0^{e'} v dA$ jest momentem statycznym powierzchni przekroju poniżej osi obojętnej, $-\int_0^{e''} v dA$ zaś powyżej osi obojętnej, więc $\int_0^{e'} v dA - \int_0^{e''} v dA$ jest momentem całego przekroju ze względu na oś obojętną.

Według równania 143) ma być ten moment statyczny równy zeru, bo ζ nie jest równe zeru, więc oś obojętna musi przechodzić przez środek ciężkości belki, bo tylko dla środka ciężkości jest moment statyczny przekroju równy zeru.

Jeżeli odcięta część belki AC jest w równowadze, to suma momentów ze względu na punkt C musi być równą zeru. Jeżeli M oznacza moment sił zewnętrznych, to bez względu na znak możemy napisać

$$M = \int_{e'}^{e''} v dA \quad v = \zeta \int_{e'}^{e''} v^2 dA,$$

lub nareszcie
$$M = \frac{v}{\zeta} \int_{e'}^{e''} v^2 dA \dots \dots \dots 144)$$

Nazwijmy całkę $\int_c^{e''} v^2 dA$ t. j. sumę iloczynów elementów powierzchni przez kwadraty ich odstępów do osi obojętnej, całkę, którą spotykamy także przy ruchu obrotowym, m o m e n t e m bezwładności (n. *Trägheitsmoment*, fr. *moment d'inertie*,

a. *moment of inertia*, cz. *moment setrvačnosti*) i oznaczmy ją I , to możemy napisać

$$M = \frac{v I}{v}, \text{ albo } v \mathbf{I} = \mathbf{M} v \dots \dots \dots 145)$$

Jeżeli za v wstawimy wartość e' i e'' i chcemy aby w włóknach skrajnych były natężenia dopuszczalne τ' i τ'' , to otrzymamy

$$\tau' \mathbf{I} = \mathbf{M} e' \text{ i } \tau'' \mathbf{I} = \mathbf{M} e'' \dots \dots \dots 146)$$

Opuściwszy znaczki, możemy ogólnie napisać

$$\tau \mathbf{I} = \mathbf{M} e \dots \dots \dots 147)$$

Piszemy tutaj τ , bo wymiary belki tak obliczamy, aby natężenie w włóknie skrajnem było równe natężeniu dopuszczalnemu. Ażeby natężenie było równocześnie w obu włóknach skrajnych równe natężeniom dopuszczalnym, musi być według 146)

$$\frac{\tau'}{e'} = \frac{\tau''}{e''} \dots \dots \dots 148)$$

jeżeli τ' i τ'' oznaczają natężenia dopuszczalne na ciągnięcie i ciśnienie. Jeżeli $\tau' = \tau''$, to powinno być $e' = e''$ i odwrotnie, jeżeli $\tau' \geq \tau''$, „ „ „ $e' \geq e''$.

Dla drzewa, żelaza kutego i stali jest $\tau' = \tau''$, będziemy więc obierali takie przekroje, aby środek ciężkości był w połowie wysokości przekroju; dla żelaza lanego zaś, gdzie $\tau'' > \tau'$ obierać będziemy przekroje niesymetryczne, aby równ. 148) było choć w przybliżeniu wypełnione.

Z równ. 145) wynika, że natężenie v włókien jest tem mniejsze, im mniejsze jest v , a więc im bliżej leżą osi obojętnej. Stąd wynika dalej, że chcąc materyał jak najbardziej wyzyskać, będziemy obierali takie przekroje belek, aby jak najwięcej materyału było jak najdalej osi obojętnej.

Z rys. 65) widzimy, że $Nmm' \sim ONC$, więc $ds : v = NC : NO$. Nazwijmy r promień krzywizny linii ugięcia, to $OC = r$, a ponieważ $NC = mn = s$, więc $ds : v = s : r$, a stąd $r = v \frac{s}{ds}$. We-

dług równ. 33) jest $\frac{ds}{s} = \frac{v}{\epsilon}$, więc $r = v \frac{\epsilon}{v}$, a ponieważ według

równ. 145) $\frac{v}{v} = \frac{I}{M}$, więc $r = \frac{I \epsilon}{M}$, a zatem

$$\epsilon \mathbf{I} = \mathbf{M} r \dots \dots \dots 149)$$

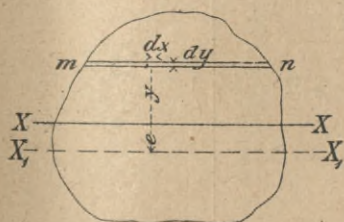
Wszystkie te wzory ważne są tylko na mocy założenia do granicy sprężystości. O natężeniach zginających po przekroczeniu granicy sprężystości, powiemy później.

§. 37. Moment bezwładności.

W równaniach zasadniczych 147) i 149) widzimy moment bezwładności I powierzchni przekroju belki ze względu na środek ciężkości. Moment bezwładności powierzchni jest, jak wiemy, całką iloczynów elementów powierzchni przez kwadraty ich odległości od danej osi. Elementem powierzchni niech będzie prostokąt o powierzchni $d^2A = dx dy$ (rys. 67), odległość jego od osi XX , przechodzącej przez środek ciężkości S jest y , to

$$I = \iint d^2A y^2 = \iint dx dy y^2 \dots \dots \dots 150)$$

rys:67,

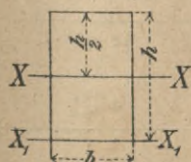


Jako przykład wyznaczmy moment bezwładności prostokąta (rys. 68). Wstawiwszy granice w równ. 150, otrzymamy

$$I = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy, \text{ a stąd}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \dots \dots \dots 151)$$

rys:68,



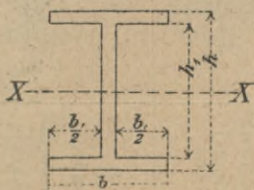
Podobnie oznaczają się w mechanice rozumowej analitycznie według równ. 150 momenty bezwładności rozmaitych figur geometrycznych. Tu ograniczamy się więc tylko na podaniu wyników i wspomnimy, że dla wyznaczenia momentu bezwładności figur złożonych używamy twierdzenia, wynikającego z równ. 150, że moment bezwładności powierzchni dla danej osi równy jest sumie momentów bezwładności jej części ze względu na tę samą oś.

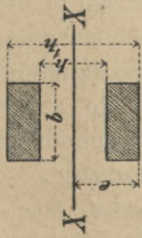
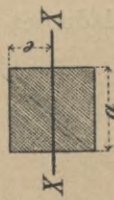

Momenty bezwładności poniżej podane są wszystkie ze względu na oś poziomą, przechodzącą przez środek ciężkości przekroju.




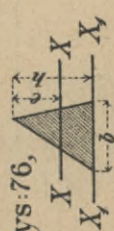

Przykład. Moment bezwładności przekroju wykreślonego na rys. 69. ze względu na oś XX będzie


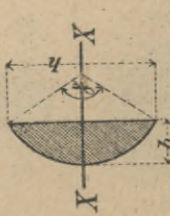

$$I = \frac{1}{12} bh^3 - 2 \frac{1}{12} \frac{b_1}{2} h_1^3 = \frac{1}{12} (bh^3 - b_1 h_1^3).$$

rys:69,

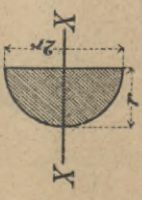





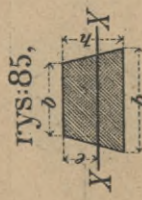
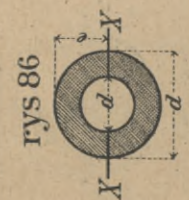

Licz. porząd.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	A powierzchnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładności
1	Dwa prostokąty	<p>rys: 70,</p> 	$\frac{h}{2}$	$b(h-h_1)$	$\frac{1}{12} b(h^3 - h_1^3)$	$\frac{1}{6} \frac{b}{h} (h^3 - h_1^3)$	$\sqrt{\frac{h^2 + hh_1 + h_1^2}{12}}$
2	Kwadrat o podstawie poziomej	<p>rys: 71,</p> 	$\frac{1}{2} a$	a^2	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{a}{\sqrt{12}} = 0,2889a$
8	Kwadrat, jeżeli oś jest przekątnią	<p>rys: 72,</p> 	$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{h}{2}$	$a^2 = \frac{bh}{2}$	$\frac{a^4}{12} = \frac{bh^3}{24}$	$0,1178a^2 = \frac{bh^2}{24}$	$0,2889a$

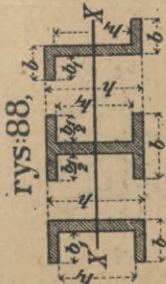
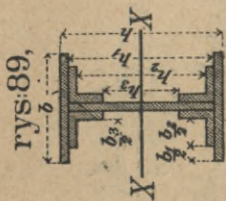

4	Romb, romboid, trójkąt	<p>rys: 73,</p> 	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{48}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{h}{\sqrt{24}} = 0,204h$
5	Elipsa	<p>rys: 74,</p> 	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi bh}{4}$	$\frac{\pi bh^3}{8} = 0,0491bh^3$	$\frac{\pi bh^2}{82} = 0,0982bh^2$	$\frac{h}{4}$
6	Koło	<p>rys: 75,</p> 	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64} = 0,0491d^4$	$\frac{\pi d^3}{82} = 0,0982d^3$	$\frac{d}{4}$
7	Trójkąt ze względu na os równoległą do podstawy	<p>rys: 76,</p> 	$\frac{2h}{3}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{86}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{h}{\sqrt{18}} = 0,2357h$
8	Odcinek paraboliczny stojący	<p>rys: 77,</p> 	$\frac{3}{5}h$	$\frac{2}{3}bh$	$\frac{8}{175}bh^3$	$\frac{8}{105}bh^2$	$0,2619h$

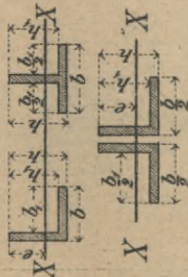

Licz. porząd.	Nazwa przekroju*	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	A powierzchnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładności
9	Odcinek paraboliczny leżący	rys: 78, 	$\frac{h}{2}$	$\frac{2}{3}bh$	$\frac{1}{80}bh^3$	$\frac{1}{15}bh^2$	$\frac{h}{\sqrt{5}} = 0,2236h$
10	Odcinek koła	rys: 79, 	$\frac{h}{2} = r \text{ wst } \frac{\gamma}{2}$	$\frac{1}{2}r^2(\gamma - \text{wst } \gamma)$	$\frac{r^4}{64}(16\gamma - 8 \text{ wst } \gamma + \text{wst } 2\gamma)$	$\frac{r^3}{64}(16\gamma - 8 \text{ wst } \gamma + \text{wst } 2\gamma) \frac{1}{\gamma}$ wst $\frac{\gamma}{2}$	—
11	Półowa elipsy	rys: 80, 	0,5756 h	$\frac{\pi}{4}bh$	0,0549 bh ³	0,0955 bh ²	0,2647 h

*) $b = r \left(1 - \text{dost } \frac{\gamma}{2} \right)$.




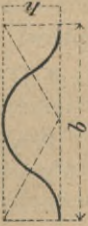
12	Półkole stojące	rys:81, 	r	$\frac{r^2\pi}{2}$	$0,3297 r^4$	$0,3927 r^3$	$0,458 r$
13	Półkole leżące	rys:82, 	$0,5756 r$	$\frac{r^2\pi}{2}$	$0,1098 r^4$	$0,1908 r^3$	$0,2647 r$
14	Sześciobok w koło wpi- sany od dwóch bokach poziomych	rys:83, 	$0,866 r$	$2,5981 r^2$	$0,5413 r^4$	$0,625 r^3$	$0,4564 r$
15	Sześciobok w koło wpi- sany od dwóch bokach pio- nowych	rys:84, 	r	$2,5981 r^2$	$0,5413 r^4$	$0,5413 r^3$	$0,4564 r$

Licz. porząd.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	A powierzchnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładności
16	Trapez	rys:85, 	$\frac{2b+b_1}{b+b_1} \frac{h}{3}$	$\frac{b+b_1}{2} b$	$\frac{b^2+4b b_1+b_1^2}{b+b_1} \frac{h^3}{36}$	$\frac{1}{12} \frac{b^2+4b b_1+b_1^2}{2b+b_1} h^2$	$\frac{h}{b+b_1} \sqrt{\frac{b^2+2bb_1+b_1^2}{18}}$
17	Pierścień kołowy	rys 86 	$e = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4} (d^2-d_1^2)$	$\frac{\pi}{64} (d^4-d_1^4) = 0,0491(d^4-d_1^4)$	$\frac{\pi}{32} \frac{d^4-d_1^4}{d} = 0,0982 \frac{d^4-d_1^4}{d}$	$\frac{1}{4} \sqrt{d^2+d_1^2}$
18	Pierścień eliptyczny	rys:87, 	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{4} (bh - b_1 h_1)$	$0,0491 (bh^3 - b_1 h_1^3)$	$\frac{\pi}{32} (bh^3 - b_1 h_1^3) = 0,0982 (bh^2 - b_1 h_1^2)$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{bh - b_1 h_1}}$

19	Przekroje U, I, Z		$\frac{h}{2}$	$bh - b_1 h_1$	$\frac{1}{12}(bh^3 - b_1 h_1^3)$	$\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{6h}$	$0,289\sqrt{\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{bh - b_1 h_1}}$
20	Przekrój złożony belki blaszanej		$\frac{h}{2}$	$bh - b_1 h_1 +$ $- b_2 h_2 - b_3 h_3$	$\frac{1}{12}(bh^3 +$ $- b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 +$ $- b_3 h_3^3)$	$\frac{bh^3 - b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 - b_3 h_3^3}{6h}$	
21	Leżąca Tówka i przekrój krzyżowy		$\frac{h}{2}$	$gh + bg_1$	$\frac{1}{12}(gh^3 + bg_1^3)$	$\frac{1}{6}\frac{gh^3 + bg_1^3}{h}$	$0,289\sqrt{\frac{gh^3 + bg_1^3}{gh + bg_1}}$

Licz. porząd.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	A powierzchnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładności
22	Przekrój T lub kątownik	<p style="text-align: center;">rys:91,</p> 	$\frac{1}{2} \frac{bh^2 - b_1h_1^2}{bh - b_1h_1}$	$bh - b_1h_1$	$\frac{1}{3} (bh^3 - b_1h_1^3) +$ $- \frac{1}{4} \frac{(bh^2 - b_1h_1^2)^2}{bh - b_1h_1}$	$\frac{2}{3} \frac{(bh^3 - b_1h_1^3)(bh - b_1h_1) +}{bh^2 - b_1h_1^2}$ $- \frac{1}{2} (bh^2 - b_1h_1^2)$	—
23	Przekrój falisty	<p style="text-align: center;">rys:92,</p> 	$h + \frac{d}{2}$	$2h(d - d_1) + (d^2 - d_1^2) \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) +$ $+ \frac{h^2 \pi}{4} (d^2 - d_1^2) +$ $+ \frac{h}{3} (d^3 - d_1^3) +$ $+ \frac{2}{3} (d - d_1) h^3$	$\frac{1}{h + \frac{d}{2}} \left[\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) + \right.$ $+ \frac{h^2 \pi}{4} (d^2 - d_1^2) +$ $+ \frac{h}{3} (d^3 - d_1^3) +$ $\left. + \frac{2}{3} (d - d_1) h^3 \right]$	—

Wzory przybliżone dla przekrojów próżnych o bardzo małej grubości ścian g

24	Kolo	rys:93, 	$\frac{d}{2}$	$\pi d g$	$\frac{\pi d^3 g}{8}$	$\frac{\pi d^2 g}{4}$	$\frac{d}{\sqrt{8}} = 0,3536d$
25	Elipsa	rys:94, 	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{2} \pi (b+h) g$	$\frac{1}{32} \pi h^2 g (3b+h)$	$\frac{\pi h g (3b+h)}{16}$	$\frac{h}{4} \sqrt{\frac{3b+h}{b+h}}$
26	Kwadrat	rys:95, 	$\frac{a}{2}$	$4 a g$	$\frac{2}{3} a^3 g$	$\frac{4}{3} a^2 g$	$\frac{a}{\sqrt{6}} = 0,4083 a$
27	Przekrój falisty	rys:96, 	$\frac{h}{2}$	$1,5 \left(h + \frac{b}{2} \right) g$	$\frac{h^3 g}{20} (3b+2h)$	$\frac{h g}{10} (3b+2h)$	—

§. 38. Wyznaczenie momentu bezwładności ze względu na oś równoległą do danej.

Znając moment bezwładności I ze względu na oś przez środek ciężkości powierzchni przechodzącą, możemy łatwo znaleźć moment bezwładności I_1 ze względu na oś X_1X_1 (rys. 67) równoległą do osi XX , w następujący sposób: Nazwawszy moment bezwładności elementu powierzchni d^2I , ze względu na oś XX , względnie d^2I_1 ze względu na oś X_1X_1 , otrzymamy

$$\begin{aligned} d^2I &= \bar{d}^2 A y^2, \\ d^2I_1 &= \bar{d}^2 A (y+e)^2 = \bar{d}^2 A y^2 + 2 \bar{d}^2 A e y + \bar{d}^2 A e^2, \text{ a stąd} \\ I_1 &= I + 2e \iint d^2 A y + e^2 \iint d^2 A. \end{aligned}$$

Jeżeli wykonamy jedno całkowanie, naznaczone w drugim wyrazie $2e \iint d^2 A y$, między granicami m i n , to otrzymamy pasek mn o powierzchni $\int_m^n d^2 A = dA$, a więc drugi wyraz będzie równy $2e \int dA y$. Ale $dA y$ jest momentem statycznym paska mn ze względu na oś XX , a więc $\iint dA y$ jest momentem statycznym powierzchni przekroju, który jest ze względu na środek ciężkości $= 0$. W trzecim wyrazie jest $\iint d^2 A = A$, więc

$$I_1 = I + Ae^2 \dots \dots \dots 152)$$

A zatem moment bezwładności powierzchni A ze względu na oś odległą o długość e od środka ciężkości jest równy momentowi bezwładności ze względu na oś, równoległą do osi danej, a przechodzącą przez środek ciężkości, więcej iloczynowi powierzchni przez kwadrat odległości e .

Przykłady. Według 151) jest moment bezwładności prostokąta ze względu na oś przez środek ciężkości przechodzącą $I = \frac{1}{12} bh^3$. Moment bezwładności ze względu na oś X_1X_1 (rys. 68), przez podstawę przechodzącą, będzie

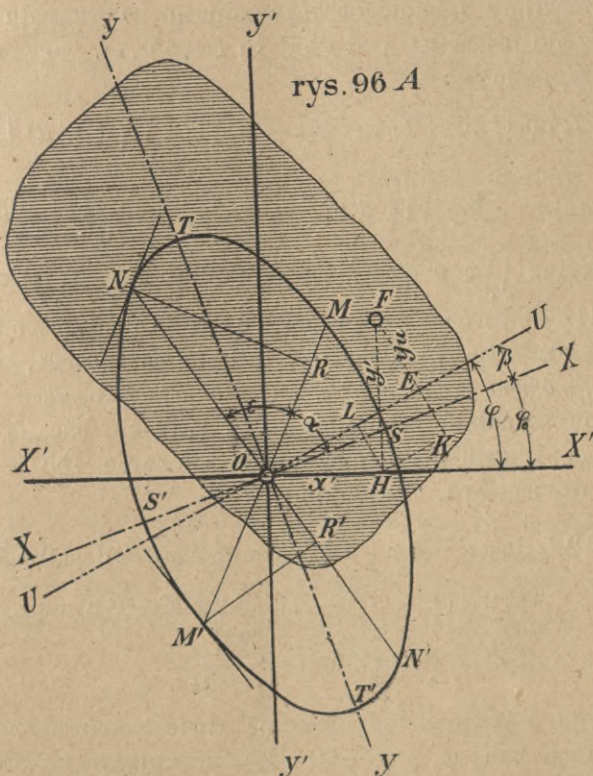
$$I_1 = \frac{1}{12} bh^3 + bh \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} bh^3 \dots \dots \dots 153)$$

Dla trójkąta mamy $I = \frac{1}{36} bh^3$, a ze względu na oś X_1X_1 (rys. 76) przechodzącą przez podstawę

$$I_1 = \frac{1}{36} bh^3 + \frac{1}{2} bh \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} bh^3 \dots \dots \dots 154)$$

§. 39. Promień i elipsa bezwładności.

Znając moment bezwładności ze względu na dwie prostopadłe osi $X'X'$ i $Y'Y'$ ((rys. 96 a), przecinające się w punkcie O , możemy znaleźć moment bezwładności danej powierzchni ze względu na oś UU , nachyloną do $X'X'$ pod kątem φ .



rys. 96 A

Niech będzie moment bezwładności danej powierzchni I_x ze względu na oś $X'X'$, I_y ze względu na oś $Y'Y'$, a I_u ze względu na oś UU . Zauważmy element powierzchni d^2A w punkcie F , którego rzędne niech będą x' i y' . Spuścimy z punktu F prostopadłą na UU i nazwijmy ją $FE=y_u$, to widzimy z rysunku, że $y_u = FK - EK = y' \text{ dost } \varphi - HL = y' \text{ dost } \varphi - x' \text{ wst } \varphi$.

Wiemy, że $I_u = \iint d^2A y_u^2$, więc

$$I_u = \iint (y' \text{ dost } \varphi - x' \text{ wst } \varphi)^2 d^2A = \iint y'^2 \text{ dost}^2 \varphi d^2A + \\ + \iint x'^2 \text{ wst}^2 \varphi d^2A - \iint 2x'y' \text{ dost } \varphi \text{ wst } \varphi d^2A,$$

czyli nareszcie

$$I_u = I_x \text{ dost}^2 \varphi + I_y \text{ wst}^2 \varphi - \text{wst } 2 \varphi \iint x'y' d^2A \quad . \quad 155)$$

Nazwijmy I_z moment bezwładności ze względu na oś, nachyloną do osi $X'X'$ pod 45^0 , to $\varphi = 45^0$, a więc z równania 155) otrzymamy

$$I_z = I_x \text{ dost}^2 45^0 + I_y \text{ wst}^2 45^0 - \text{wst } 90^0 \iint x'y' d^2A, \text{ a stąd}$$

$$K = \iint x'y' d^2A = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - I_z, \quad . \quad . \quad . \quad 156)$$

jeżeli wyraz $\iint x'y' d^2A$ oznaczymy literą K . Wyraz ten nazywamy iloczynem bezwładności lub momentem zбочenia (n. *Centrifugalmoment*, *Deviationsmoment*, fr. *produit d'inertie*, *moment rectangulaire*, an. *product of inertia*).

Aby wynaleść najmniejszość i największość I_u i odnośny kąt $\varphi = \varphi_0$, musimy zróżniczkować równanie 155) i zrobić pochodną równą zeru. Otrzymamy więc

$$\frac{d I_u}{d \varphi} = -2 I_x \text{ dost } \varphi \text{ wst } \varphi + 2 I_y \text{ wst } \varphi \text{ dost } \varphi - 2 \text{ dost } 2 \varphi K = 0, \text{ czyli}$$

$$\text{wst } 2 \varphi (I_y - I_x) - 2 \text{ dost } 2 \varphi K = 0, \text{ a stąd}$$

$$\text{st } 2 \varphi_0 = \frac{2K}{I_y - I_x} \quad . \quad . \quad . \quad 157)$$

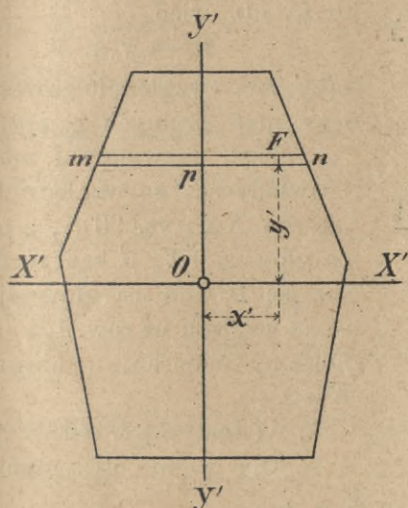
Temu wyrazowi odpowiadają dwie wartości φ_0 , różniące się o 90^0 , a więc φ_0 i $\varphi_0 + 90^0$. Różniczkując raz jeszcze, łatwo się możemy przekonać, że raz otrzymamy drugą pochodną dodatnią, drugi raz ujemną, a więc kąty φ_0 i $\varphi_0 + 90$ wyznaczają osi, dla których I_u jest największe i najmniejsze. Osie te, stojące jedna na drugiej prostopadle, nazywamy osiami głównymi bezwładności (n. *Hauptträgheitsaxe*, fr. *axe principal d'inertie*, an. *principal axis of inertia*).

Przyjęte dowolnie osi $X'X'$ i $Y'Y'$ stają się osiami głównymi, gdy $\varphi_0 = 0$, a więc gdy

$$K = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 158)$$

Jeżeli oś $Y'Y'$ (rys. 97) jest osią symetrii przekroju, to chcąc obliczyć $K = \iint x' y' d^2 A$ i całkując naprzód w pasku mn , któ-

rys. 97.



rego środkiem ciężkości jest p , możemy wyłączyć y' , jako stałą, a $\int x' d^2 A$ równa się momentowi statycznemu powierzchni tego paska ze względu na jego środek ciężkości, zatem $= 0$. To samo zrobiwszy dla innych pasków, zobaczymy, że $K = 0$, a zatem ze względu na 158) możemy powiedzieć, że gdy przez O może być położoną oś symetrii, oś ta jest zarazem

osią główną bezwładności, oś zaś prostopadła do niej jest drugą osią główną.

Jeżeli przez dany punkt nie da się poprowadzić oś symetrii, to moment zбочenia K należy wyznaczyć z równ. 156). Czasem łatwiej jednak dojdziemy do końca w następujący sposób podany przez Müllera Breslaua.

Przypuśćmy, że chcemy wyznaczyć moment zбочenia przekroju ze względu na osi OX i OY , równoległe do osi $O_1 X_1$ i $O_1 Y_1$, przechodzące przez środek ciężkości przekroju O_1 (rys. 98).

$$\text{Wedle 156) } K = \iint (x_1 + x_0)(y_1 + y_0) d^2 A$$

$$\text{albo } K = \iint x_1 y_1 d^2 A + x_0 \iint y_1 d^2 A + y_0 \iint x_1 d^2 A + x_0 y_0 \iint d^2 A$$

Nazwijmy K_1 moment zбочenia ze względu na osi $O_1 X_1$ i $O_1 Y_1$, to $K_1 = \iint x_1 y_1 d^2 A$. Dalej mamy ze względu, że O_1 jest

środkiem ciężkości $x_0 \iint y_1 d^2 A = 0$ i $y_0 \iint x_1 d^2 A = 0$ zatem

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + x_0 y_0 \mathbf{A} \dots \dots \dots 159)$$

Jeżeli osi $O_1 X_1$ i $O_1 Y_1$ są osiami głównymi bezwładności, to $K_1 = 0$, więc

$$\mathbf{K} = x_0 y_0 \mathbf{A} \dots \dots \dots 160)$$

przyczem uwzględnić zawsze należy znak rzędnych x_0 i y_0 .

Jeżeli nazwiemy I moment bezwładności ze względu na oś główną XX (rys. 96 a), a I_1 na oś główną YY , β kąt nachylenia osi UU do osi głównej XX , to ze względu na rów. 155) i 158) możemy napisać, ponieważ tu $K=0$,

$$I_u = I \text{dost}^2 \beta + I_1 \text{wst}^2 \beta \dots 161)$$

Dla $\beta = 45^\circ$ otrzymamy

$$I_{45} = \frac{1}{2} (I + I_1) \dots \dots \dots 161 a)$$

$$I_1 = 2 I_{45} - I \dots \dots \dots 162)$$

Możemy także napisać, wstawivszy w 161) $\beta = \varphi_0$,

$$I_x = I \text{dost}^2 (-\varphi_0) + I_1 \text{wst}^2 (-\varphi_0) = I \text{dost}^2 \varphi_0 + I_1 \text{wst}^2 \varphi_0,$$

$$I_y = I \text{wst}^2 \varphi_0 + I_1 \text{dost}^2 \varphi_0, \text{ a zatem}$$

$$I = \frac{I_x}{\text{dost}^2 \varphi_0} - I_1 \text{st}^2 \varphi_0, \text{ a więc } I_y = I_x \text{st}^2 \varphi_0 - I_1 \text{wst}^2 \varphi_0 \text{st}^2 \varphi_0 + I_1 \text{dost}^2 \varphi_0. \text{ czyli}$$

$$I_y \text{dost}^2 \varphi_0 - I_x \text{wst}^2 \varphi_0 = I_1 \text{dost}^4 \varphi_0 - I_1 (1 - \text{dost}^2 \varphi_0)^2 = I_1 (2 \text{dost}^2 \varphi_0 - 1),$$

$$I_1 = \frac{I_y \text{dost}^2 \varphi_0 - I_x \text{wst}^2 \varphi_0}{2 \text{dost}^2 \varphi_0 - 1} \dots \dots \dots 163)$$

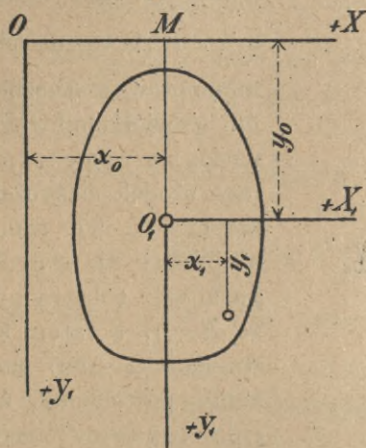
Dodawszy wartości I_x i I_y , otrzymamy

$$I_x + I_y = I (\text{dost}^2 \varphi_0 + \text{wst}^2 \varphi_0) + I_1 (\text{wst}^2 \varphi_0 + \text{dost}^2 \varphi_0) = I + I_1, \dots 164)$$

$$\text{a więc } \mathbf{I} = (I_x + I) - I_1 \dots \dots \dots 165)$$

Moment bezwładności w ogóle możemy inaczej jeszcze wyrazić, mianowicie równaniem $\mathbf{I} = \mathbf{A}a^2$, $\dots \dots \dots 166)$ którebyśmy otrzymali, skupivszy całą powierzchnię A w jednym punkcie i umieściwszy ją w oddaleniu a od osi. Iloczyn Aa^2

rys. 98.



równałby się momentowi bezwładności I . Długość a nazywamy promieniem bezwładności (n. *Trägheitsradius*, fr. *rayon de giration*, an. *radius of gyration*, cz. *poloměr setrvačnosti*).

Pomyślmy, żeśmy obliczyli dla dowolnej ilości osi, przez O przechodzących, momenty bezwładności i odetnijmy na każdej z tych osi długość odwrotnie proporcjonalną do pierwiastku

momentu bezwładności tak, że n. p. $OM = \frac{c}{\sqrt{I_m}}$, gdy c jest dowolną ilością stałą, a I_m momentem bezwładności ze względu na OM , to $I_m = \frac{c^2}{OM^2}$. Jeżeli rzędne punktu M , odniesione do osi głównych, są $OP = x$ i $PM = y$, to

dost $a = \frac{x}{OM}$, a wst $a = \frac{y}{OM}$, a więc ze względu na 161)

$I_m = I \frac{x^2}{OM^2} + I_1 \frac{y^2}{OM^2}$. Wstawiwszy wartości za OM , otrzymamy $I_m = II_m \frac{x^2}{c^2} + I_1 I_m \frac{y^2}{c^2}$, a więc $c^2 = Ix^2 + I_1 y^2$.

Wstawmy teraz $I = Aa^2$ i $I_1 = Aa_1^2$, a otrzymamy

$$c^2 = Aa^2 x^2 + Aa_1^2 y^2, \text{ albo}$$

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{c^2}{Aa^2 a_1^2} \dots \dots \dots 167)$$

Jestto równanie elipsy, którą nazywamy elipsą bezwładności (n. *Trägheitsellipse*, fr. *ellipse d'inertie*, an. *ellipse of inertia*). Jeżeli przytem przyjmiemy $c^2 = Aa^2 a_1^2$, to rów. 167) możemy napisać

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \dots \dots \dots 168)$$

Jestto równanie elipsy bezwładności, której połowy osi głównych są a i a_1 , promienie bezwładności głównych momentów bezwładności. W tym wypadku jest

$$OM^2 = \frac{c^2}{I_m} = \frac{Aa^2 a_1^2}{Aa_m^2}, \text{ więc } a_m = \frac{aa_1}{OM}.$$

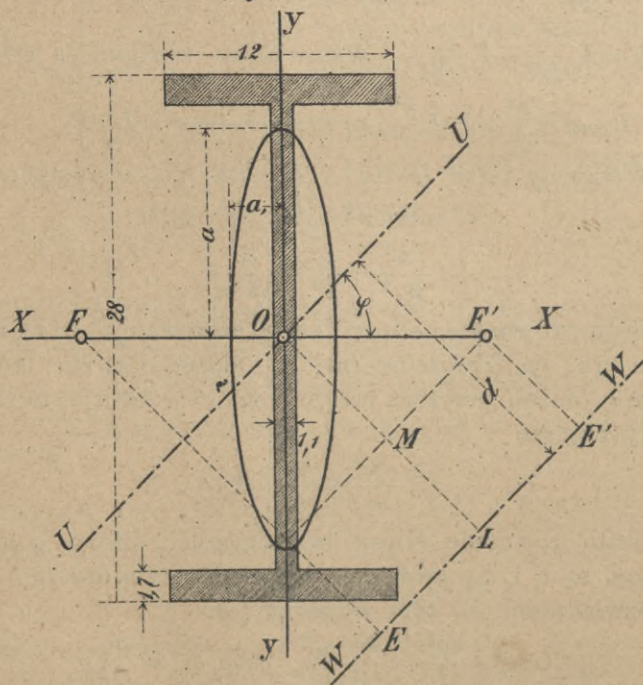
Jeżeli MM' i NN' są osiami sprzężonemi elipsy bezwładności a kąt między nimi zawarty ε , to na mocy znanej własności elipsy jest

$$aa_1 = ON \cdot OM \cdot \text{wst } \varepsilon, \text{ więc } a_m = \frac{ON \cdot OM \cdot \text{wst } \varepsilon}{OM} = ON \cdot \text{wst } \varepsilon = NR.$$

Widzimy więc, że jeżeli do elipsy bezwładności wykreślimy styczną, równoległą do danej osi, odstęp tej stycznej od osi jest równy promieniowi bezwładności ze względu na daną oś. Elipsa bezwładności będzie więc obwiednią prostych, równoległych do danych osi, poprowadzonych w odstępie równym promieniowi bezwładności. A zatem będzie, jak to już wiemy, $OT = OT' = a$, $OS = OS' = a_1$, której to własności elipsy bezwładności możemy użyć do jej wykreślenia.

Jeżeli punkt O jest środkiem ciężkości przekroju, elipsa bezwładności nazywa się wtedy elipsą środkową (n. *Centralellipse*, fr. *ellipse centrale*, an. *central ellipse*).

rys. 99.



Mając elipsę bezwładności wykreśloną, łatwo wyznaczyć możemy moment bezwładności dla jakiejkolwiek osi n. p. NN' , przechodzącej przez punkt O . Poprowadźmy styczną do elipsy, równoległą do NN' , a odległość obu linii $M'R' = a_n$ jest promieniem bezwładności, więc $I_n = Aa_n^2$.

Z równ. 161) wynika, że jeżeli $I=I_1$, to $I_m=I(\text{dost}^2 \beta + \text{wst}^2 \beta) = I$, a więc, gdy momenty bezwładności dla osi głównych są równe, to także i moment ze względu na jakąkolwiek oś, przechodzącą przez środek ciężkości jest równy momentowi ze względu na oś główną, czyli wszystkie momenty bezwładności, ze względu na osi, przechodzące przez punkt O , są równe; elipsa bezwładności staje się kołem.

Przykłady.

1) Wyznaczyć elipsę środkową przekroju I l. 28, wykreślonego na rys. 99. Przekrój jest symetryczny, więc oś symetrii YY jest jedną osią główną, drugą zaś oś $XX \perp YY$, przechodząca przez środek ciężkości.

Obliczmy najprzód I i I_1 , a otrzymany

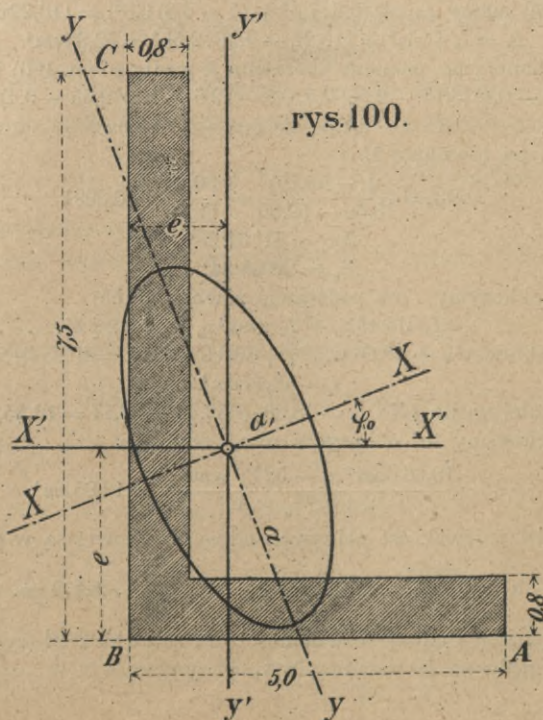
$$I = \frac{1}{2}(12 \times 28^3 - (12 - 1,1(28 - 3,4))^3) = \frac{1}{2}(263\,424 - 162\,266) = 8\,429,8 \text{ cm}^4,$$

$$I_1 = \frac{1}{12}(2 \times 1,7 \times 12^3 + (28 - 3,4) 1,1^3) = \frac{1}{12}(5\,865,2 - 32,7) = 486,0 \text{ cm}^4.$$

Powierzchnia przekroju $A = 2 \times 12 \times 1,7 + (28 - 3,4) 1,1 = 67,86 \text{ cm}^2$, więc połowy osi głównych elipsy środkowej będą

$$a = \sqrt{\frac{8\,429,8}{67,86}} = 11,145 \text{ cm}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{486,0}{67,86}} = 2,676 \text{ cm}.$$

2) Dla przekroju kątowniki $\frac{50,75}{8}$ o wymiarach, podanych na rys. 100., obliczyć wielkość i położenie osi głównych środkowej elipsy bezwładności.



rys.100.

Musimy najprzód znaleźć spólrzędne środka ciężkości O . W tym celu korzystając będziemy z równania $S = Ae$, gdy S oznacza moment statyczny powierzchni przekroju ze względu na prostą AB A powierzchnią przekroju, a e odległość środka ciężkości O od prostej AB . Możemy więc napisać

$$e = \frac{S}{A} \dots \dots \dots 169)$$

Wstawivszy wartość, otrzymamy

$$e = \frac{7,5 \cdot 0,8 \cdot 3,75 + (5 - 0,81) \cdot 0,4}{7,5 \cdot 0,8 + (5 - 0,8) \cdot 0,8} = \frac{23,844}{9,36} = 2,55 \text{ cm.}$$

Jeżeli S_1 i e_1 oznaczać będą moment statyczny ze względu na BC , względnie odległość środka ciężkości O od BC , to

$$e_1 = \frac{S_1}{A} = \frac{5,0 \cdot 0,8 \cdot 2,5 + (7,5 - 0,8) \cdot 0,4}{9,36} = \frac{12,14}{9,36} = 1,30 \text{ cm.}$$

Teraz obliczamy moment bezwładności I_x ze względu na oś $X'X'$ i I_y ze względu na oś $Y'Y'$. Dla wyznaczenia tych momentów rozłożymy przekroje na prostokąty i korzystając będziemy z wzorów 153) i 154). Nazwawszy b i h podstawę i wysokość prostokąta, mamy mianowicie momenty bezwładności ze względu na podstawę $I_1 = \frac{1}{3} bh^3$. Nazwawszy dalej I_c moment bezwładności ze względu na oś BC , I_a ze względu na BA otrzymamy

$$I_a = \frac{1}{3} (0,8 \cdot 5^3 + (7,5 - 0,8^2) \cdot 0,8^3) = 34,48 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_c - Ae_1^2 = 34,48 - 9,36 \cdot 1,30^2 = 18,66 \text{ cm}^4$$

$$\text{Dalej mamy } I_a = \frac{1}{3} (0,8 \cdot 7,5^2 + (5 - 0,8) \cdot 0,8^3) = 113,22 \text{ cm}^4$$

$$I_x = I_a - Ae^2 = 113,22 - 9,36 \cdot 2,55^2 = 52,36 \text{ cm}^4.$$

Teraz obliczymy moment zбочenia K wedle równ. 160) i otrzymamy

$$K = - (1,30 - 0,4) (3,75 - 2,55) 7,5 \cdot 0,8 - (2,5 - 1,3) (2,55 - 0,4) (5 - 0,8) 0,8$$

$$K = - 6,48 - 8,67 = - 15,15 \text{ cm}^4,$$

a ze względu na równanie 157)

$$\text{st } 2\varphi_0 = \frac{2(-15,15)}{18,66 - 52,36} = \frac{30,30}{33,70} = 0,8991$$

a stąd

$$2\varphi_0 = 41^\circ 57' 28''$$

$$\varphi_0 = 20^\circ 58' 34''.$$

Teraz obliczymy I na podstawie równania 155)

$$I = I_x \text{ dost}^2 \varphi_0 + I_y \text{ wst}^2 \varphi_0 - \text{wst } 2\varphi K. \dots \dots \dots 170)$$

$$\text{albo } I = 52,36 \text{ dost}^2 \varphi + 18,66 \text{ wst}^2 \varphi + \text{wst } 2\varphi 15,15 = 45,65 + 2,39 + 10,13$$

$$I = 58,17 \text{ cm}^4,$$

$$\text{a dalej wedle 165) } I_1 = 18,36 + 52,36 - 58,17 = 12,85 \text{ cm}^4.$$

I_1 moglibyśmy też obliczyć z rów. 163)

$$I_1 = \frac{18,66 \text{ dost}^2 \varphi_0 - 52,36 \text{ wst}^2 \varphi_0}{2 \text{ dost}^2 \varphi_0 - 1} = 12,85 \text{ cm}^4.$$

Długości połówek osi głównych elipsy środkowej są więc:

$$a = \sqrt{\frac{58,17}{9,36}} = 2,493 \text{ cm}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{12,85}{9,36}} = 1,172 \text{ cm.}$$

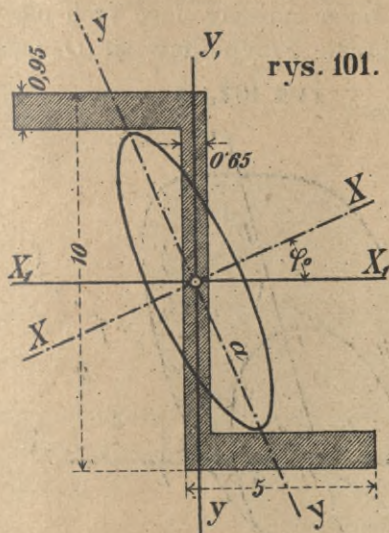
3) Wyznaczyć elipsę bezwładności dla zetówki l. 10 (rys. 101).

Ze względu na oś poziomą $X_1 X_1$ otrzymamy

$$I_x = \frac{1}{2} 0,65 \cdot 10^3 + \frac{1}{2} (5 - 0,65) (10^3 - (10 - 2 \cdot 0,95)^3)$$

$$I_x = 54,17 + 169,82 = 223,99 \text{ cm}^4.$$

Ze względu na oś pionową YY_1 mamy



$$I_y = \frac{1}{2} (10 - 0,95) 0,65^3 +$$

$$+ \frac{1}{2} 0,95 (5 + 5 - 0,65)^3$$

$$I_y = 0,16 + 64,71 = 64,87 \text{ cm}^4.$$

Dalej mamy moment zbieczenia

$$K = 0 - 2 \cdot 5 \cdot 0,95 (5 -$$

$$- 0,475) \times (2,5 - 0,325)$$

$$K = 93,50 \text{ cm}^4.$$

Wedle rów. 157) mamy teraz

$$\text{st } 2\varphi = \frac{-2 \cdot 93,5}{64,87 - 223,99} =$$

$$= 1,1745$$

$$\text{stad } 2\varphi_0 = 49^\circ 35' 17''$$

$$\text{a } \varphi_0 = 24^\circ 47' 38''.$$

Teraz obliczymy I na podstawie rów. 155).

$$I = 223,99 \text{ dost}^2 \varphi +$$

$$+ 64,87 \text{ wst}^2 \varphi +$$

$$+ \text{wst } 2\varphi \cdot 93,5 = 184,60 + 11,41 + 71,19$$

$$I = 267,20 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = 64,97 + 223,99 - 267,20 = 21,66 \text{ cm}^4.$$

Długość połówek osi głównych elipsy bezwładności otrzymamy

$$a = \sqrt{\frac{267,2}{14,77}} = 4,25 \text{ cm}, \quad b = \sqrt{\frac{21,66}{14,77}} = 1,21 \text{ cm}.$$

4) Przekrój eliptyczny.

Moment bezwładności ze względu na oś poziomą XX jest

$$I = \frac{\pi}{64} bh^3.$$

Nazwijmy połowy osi elipsy a' i b' , to

$$a' = \frac{h}{2}, \quad b' = \frac{b}{2}, \quad \text{mamy więc } I = \frac{\pi}{4} b' a'^3,$$

a stąd połowa osi głównej elipsy środkowej

$$a = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{4} b' a'^3}{a' b' \pi}} = \frac{1}{2} a'.$$

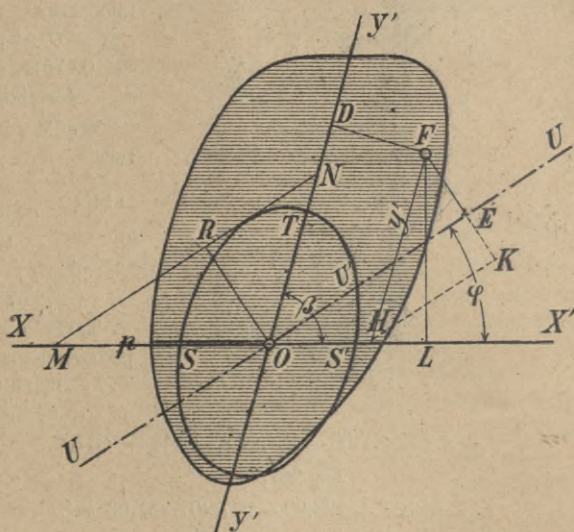
Podobnie otrzymamy $a_1 = \frac{1}{2} b'$.

Elipsa środkowa jest więc podobną do danej elipsy, a jej osi równają się połowom osi danej elipsy. To samo odnosi się do koła.

§. 40. Elipsa bezwładności ze względu na osi ukośne.

Jeżeli istnieje w przekroju tylko oś symetrii ze względu na osi ukośne, to w takim razie możemy użyć tych osi do wykreślenia elipsy bezwładności. Przyjmijmy w O (rys. 102)

rys. 102.



parę osi ukośnych $X'X'$ i $Y'Y'$, z których ostatnia jest zarazem ukośną osią symetrii. Niech ukośne rzędne punktu danego F będą y' i x' , odstęp punktu F od dowolnej osi UU , nachylonej do $X'X'$ pod kątem φ , niech będzie

$$EF = y_u = y' \text{dost } \gamma - x' \text{wst } \varphi.$$

Moment bezwładności przekroju ze względu na oś UU będzie

$$I_u = \iint (y' \text{dost } \gamma - x' \text{wst } \varphi)^2 d^2 A = \text{dost}^2 \gamma \iint y'^2 d^2 A + \\ + \text{wst}^2 \varphi \iint x'^2 d^2 A - 2 \text{dost } \gamma \text{wst } \varphi \iint x'y' d^2 A.$$

Ponieważ wedle założenia $\iint x'y' d^2 A = 0$ z powodu symetrii, więc

$$I_u = \text{dost}^2 \gamma \iint y'^2 d^2 A + \text{wst}^2 \varphi \iint x'^2 d^2 A \quad . . . \quad 171)$$

Z rysunku widzimy, że $FL = y' \text{wst } \beta$ i $FD = x' \text{wst } \beta$ więc

$$I_x = \text{wst}^2 \beta \iint y'^2 d^2 A, \quad I_y = \text{wst}^2 \beta \iint x'^2 d^2 A.$$

Wstawiwszy to w rów. 171) otrzymamy

$$I_u = \frac{\text{dost}^2 \gamma}{\text{wst}^2 \beta} \cdot I_{x'} + \frac{\text{wst}^2 \varphi}{\text{dost}^2 \beta} I_{y'} \dots \dots \dots 172)$$

Wstawmy teraz w rów. 172)

$$I_{x'} = A \cdot a'^2, I_{y'} = A \cdot a_1'^2, I_u = A a_u^2$$

$$\text{to } a_u^2 = \frac{\text{dost}^2 \gamma}{\text{wst}^2 \beta} a'^2 + \frac{\text{wst}^2 \varphi}{\text{wst}^2 \beta} a_1'^2.$$

Poprowadźmy $MN \parallel OU$ i nazwijmy odcinki na osiach $OM=p, ON=q$, to

$$\text{dost } \gamma = \frac{OR}{q}, \text{ wst } \varphi = \frac{OR}{p}, \text{ więc}$$

$$a_u^2 = \frac{OR^2 a'^2}{\text{wst}^2 \beta q^2} + \frac{OR^2 a_1'^2}{\text{wst}^2 \beta p^2}.$$

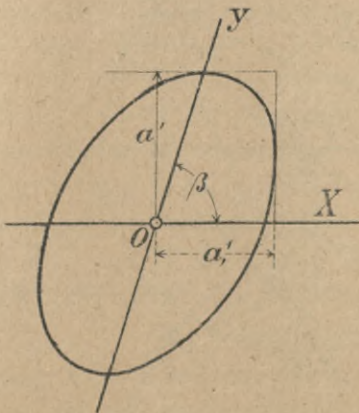
Jeżeli poprowadzimy MN w takim oddaleniu, aby $OR = a_u$, to

$$1 = \frac{a'^2}{\text{wst}^2 \beta q^2} + \frac{a_1'^2}{\text{wst}^2 \beta p^2} \dots \dots \dots 173)$$

Jestto równanie elipsy ze względu na odcinki stycznych q i p i da się wyznaczyć w znany sposób*) równanie obwiednej stycznych MN

$$\frac{x'^2 \text{wst}^2 \beta}{a'^2} + \frac{y'^2 \text{wst}^2 \beta}{a_1'^2} = 1 \dots \dots \dots 174)$$

rys. 103.



równanie elipsy ze względu na sprzężone osi OX' i OY' (rys. 103).

A zatem każda para osi ze względu na którą

$$\iint xy d^2 A$$

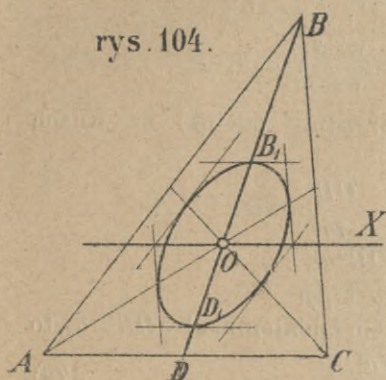
jest zerem, czyli każda para osi, z których jedna jest osią ukośną symetrii jest zarazem parą osi sprzężonych elipsy bezwładności.

Przykład. W trójkącie ABC (rys. 104) zróbmy $AD=DC$, to DB jest ukośną osią symetrii, a zatem BD i OX osiami sprzężonymi elipsy.

*) p. Keck. Vorträge über Elasticitätslehre str. 28.

Wiemy, że $I_x = \frac{1}{36}bh^3$, $A = \frac{1}{2}bh$, więc $a^2 = \frac{1}{18}h^2$, $a = 0,236h$. Zróbmy więc $D_1O = OB_1 = 0,236BD$, to D_1 i B_1 są to punkty elipsy bezwładności, w których styczne są poziome. To samo zrobić możemy ze względu na drugie dwa boki trójkąta AB i BC .

rys. 104.

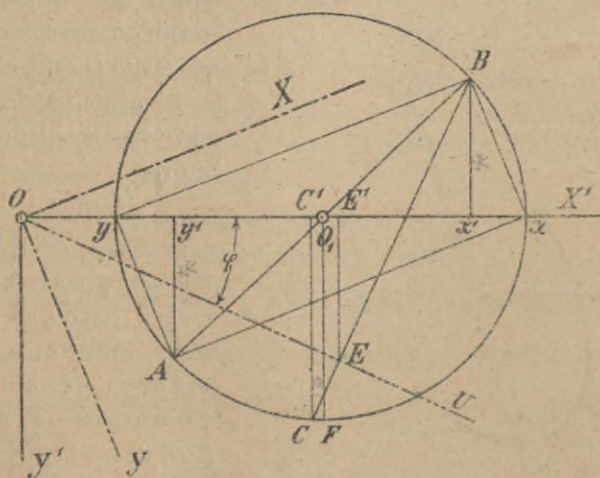


§. 41. Koło bezwładności.

Zmiana momentu bezwładności przekroju dla osi, przechodzących przez ten sam punkt a rozmaicie nachylonych, da się jeszcze inaczej przedstawić według Müllera-Breslaua.

Niechaj $Ox' = I_{x'}$ (rys. 105) a $Oy' = I_{y'}$, przyczem przypuśćmy, że $I_{x'} > I_{y'}$. Wystawmy w x' i y' prostopadłe na OX' , mianowicie $Bx' = -K$ i $Ay' = +K$. Zatoczmy teraz na średnicy

rys. 105.



AB koło, to posłuży nam ono do wyznaczenia momentu bezwładności ze względu na dowolną oś.

I tak dla dowolnej osi OU , nachylonej do X pod kątem φ , wykreślmy $BE \perp OU$, przydłużmy BE do C , wykreślmy $CC' \perp OX'$, to

$$OC' = OE' - E'C' = OE \text{ dost } \varphi - EC \text{ wst } \varphi$$

$$OE = I_{x'} \text{ dost } \varphi - K \text{ wst } \varphi$$

$$EC = K \text{ dost } \varphi - I_{y'} \text{ wst } \varphi, \text{ więc}$$

$$OC' = (I_{x'} \text{ dost } \varphi - K \text{ wst } \varphi) \text{ dost } \varphi - (K \text{ dost } \varphi - I_{y'} \text{ wst } \varphi) \text{ wst } \varphi$$

$$OC'^2 = I_{x'}^2 \text{ dost }^2 \varphi + I_{y'}^2 \text{ wst }^2 \varphi - 2 \text{ wst } \varphi \text{ dost } \varphi K = I_u$$

a zatem OC' przedstawia dla osi OU moment bezwładności.

Jeśli kąt φ będziemy zmieniać, to punkt C poruszać się będzie na obwodzie koła a rzut jego C' na prostej. Widzimy stąd, że najmn $I = Oy = I_1$, najw $I = Ox = I$.

Dla najmn $I = I_1$ oś OY musi być \perp do By , a więc być równoległą do yA , zaś $OX \perp Bx$ czyli $OX \parallel AX$. W ten sposób wyznaczyliśmy osi główne bezwładności.

Z rysunku wynika, że $CC' = K'$ jest momentem zбочenia dla osi OU . Moment zбочenia jest zerem dla osi głównych i rośnie do pewnej największości OF . Z rysunku też widzimy, że $I_{x'} + I_{y'} = I + I$, co zgadza się z rów. 165),

§. 42. Punkty stałe przekroju.

Na rys. 99 wykreśliliśmy elipsę bezwładności środkową, a więc $I = Aa^2$, $I_1 = Aa_1^2$, a ze względu na oś U będzie $I_u = I \text{ dost }^2 \varphi + I_1 \text{ wst }^2 \varphi = I(1 - \text{wst }^2 \varphi) + I_1 \text{ wst }^2 \varphi = A[a^2 - (a^2 + - a_1^2) \text{ wst }^2 \varphi]$. Moment bezwładności ze względu na oś WW , odległą o $d = OL$ od UU , będzie $I_w = A[a^2 - (a^2 - a_1^2) \text{ wst }^2 \varphi + d^2]$.

Zróbmy według Mohra $OF = OF' = \sqrt{a^2 - a_1^2} =$ odległości ogniska elipsy od środka O , to otrzymamy $d^2 - (a^2 - a_1^2) \times \times \text{ wst }^2 \varphi = \overline{OL}^2 - \overline{OF}^2 \text{ wst }^2 \varphi = \overline{OL}^2 - \overline{OM}^2 = (OL + OM) \times \times (OL - OM) = FE$. $F'E' = e_1 e_2$, a więc

$$I_w = A[a^2 + e_1 e_2] \dots \dots \dots 175)$$

Na mocy tego równania możemy wyznaczyć moment bezwładności ze względu na dowolną oś, jeżeli znamy elipsę środkową przekroju, albo przynajmniej a i punkty F i F' .

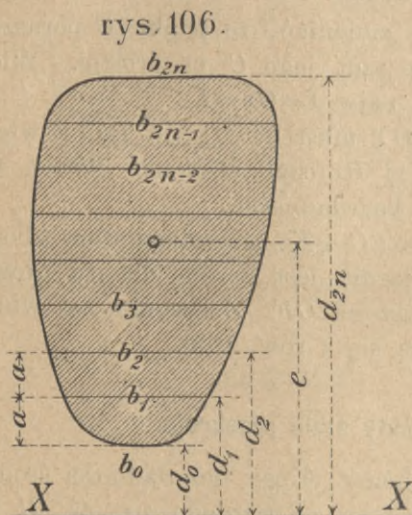
Jeżeli dana oś przechodzi przez punkt F lub F' , to e_1 lub e_2 staje się równem zeru, wtedy moment bezwładności równa się stałej ilości Aa^2 . Ze względu na tę własność nazywamy punkty

F i F' punktami stałymi (n. *Fixpunkte*). Elipsy bezwładności są dla tych punktów kołami. Jeżeli $a=a_1$, to punkty stałe przypadają na punkt O .

§. 43. Analityczne wyznaczenie momentu bezwładności dla figur nieregularnych.

Dla figur nieregularnych wyznaczamy moment bezwładności analitycznie najlepiej za pomocą znanej metody Simpsona, której udowodnienie należy do mechaniki rozumowej.

W celu wyznaczenia momentu bezwładności przekroju nieregularnego (rys. 106) ze względu na oś XX , dzielimy przekrój prostami równoległymi do XX na parzystą ilość równo grubych pasków. Nazwawszy długości tych prostych $b_0, b_1, b_2 \dots b_{2n}$, ich odstępów od XX $d_0, d_1, d_2 \dots d_{2n}$, a grubość



pasków a , otrzymamy moment bezwładności ze względu na XX :

$$I_1 = \frac{a}{3} [b_0 d_0^2 + b_{2n} d_{2n}^2 + 4(b_1 d_1^2 + b_3 d_3^2 + \dots + b_{2n-1} d_{2n-1}^2) + 2(b_2 d_2^2 + b_4 d_4^2 + \dots + b_{2n-2} d_{2n-2}^2)] \dots \dots \dots 176$$

Znając I_1 możemy wyznaczyć moment bezwładności ze względu na środek ciężkości według znanego równania $I = I_1 + - Ae^2$.

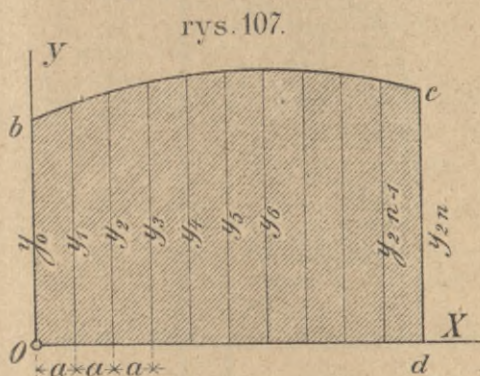
Długość e otrzymamy z równania 169) $e = \frac{S}{A}$, przyczem moment statyczny S powierzchni przekroju ze względu na XX jest według Simpsona:

$$S = \frac{a}{3} [b_0 d_0 + b_{2n} d_{2n} + 4(b_1 d_1 + b_3 d_3 + \dots + b_{2n-1} d_{2n-1}) + 2(b_2 d_2 + b_4 d_4 + \dots + b_{2n-2} d_{2n-2})] \dots \dots \dots 177$$

a powierzchnia

$$A = \frac{a}{3} [b_0 + b_{2n} + 4(b_1 + b_3 + \dots + b_{n-1}) + 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{n-2})] \quad 178)$$

Wzór 176) jest jednak niedogodnym w praktyce, bo musimy wykonać $2n-1$ mnożeń, dlatego też używamy innych wzorów, które zaraz podamy.



Jeżeli mamy wyznaczyć moment bezwładności powierzchni *Obcd* (rys. 107) ze względu na oś *OX* i *OY*, to otrzymamy według Simpsona, podzieliwszy powierzchnię znów na parzystą ilość pasków o grubości *a*, ze względu na oś *OX*:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \frac{a}{9} [y_0^3 + 4y_1^3 + 2y_2^3 + 4y_3^3 + 2y_4^3 + \\ &\quad + \dots + 4y_{2n-1}^3 + y_{2n}^3], \\ \text{a ze względu na oś } OY: \\ I_y &= \frac{a^3}{3} [0^2 y_0 + 1^2 \cdot 4y_1 + 2^2 \cdot 2y_2 + 3^2 \cdot 4y_3 + \\ &\quad + \dots + (2n-1)^2 4y_{2n-1} + (2n)^2 y_{2n}] \end{aligned} \right\} \quad 179)$$

Podobnie otrzymamy powierzchnię

$$A = \frac{a}{3} (y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})) \quad 180)$$

i moment statyczny ze względu na oś *OX*

$$S_x = \frac{a}{6} (y_0^2 + y_{2n}^2 + 4(y_1^2 + y_3^2 + \dots + y_{2n-1}^2) + 2(y_2^2 + y_4^2 + \dots + y_{2n-2}^2)) \quad 181)$$

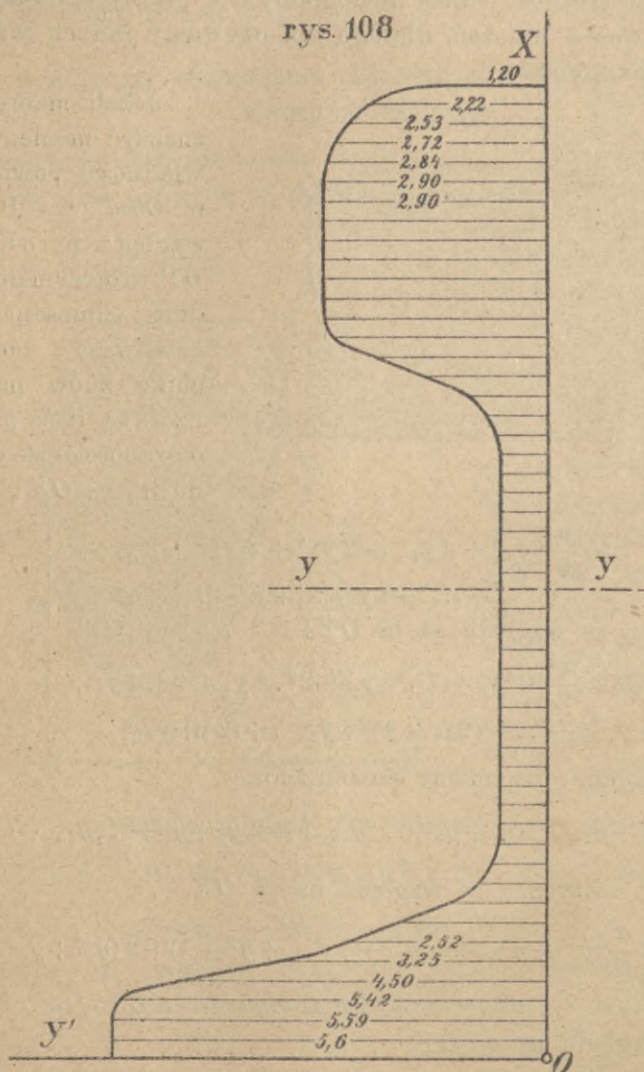
zaś ze względu na oś *OY*

$$S_y = \frac{a^2}{3} [0 \cdot y_0 + 2n y_{2n} + 4(1 \cdot y_1 + 3 y_3 + \dots + (2n-1) y_{2n-1}) + 2(2 y_2 + 4 y_4 + \dots + (2n-2) y_{2n-2})] \quad 182)$$

Wzory te są o tyle dla praktyki korzystniejsze, że kwadraty i sześciiany możemy wziąć z tablic, a przez to znacznie sobie ułatwić rachunek.

Przykład. Obliczyć moment bezwładności szyny austriackich kolei pierwszorzędnych (rys. 108). Z powodu symetrii liczymy moment dla połowy szyny i dzielimy ją na 50 pasków o grubości 0,25 cm.

rys. 108



Z wzorów 179) otrzymujemy

$$\frac{I_x}{2} = \frac{0,25}{9} [5,6^3 + 4 \cdot 5,6^3 + 2 \cdot 5,59^3 + 4 \cdot 5,42^3 + \dots + 4 \cdot 2,22^3 + 1,2^3]$$

$$I_x = 176,5 \text{ cm}^4.$$

$$\frac{I_{y'}}{2} = \frac{0,25^3}{8} [0^2 \cdot 5,6 + 1^2 \cdot 4 \cdot 5,6 + 2^2 \cdot 2 \cdot 5,59 + 3^2 \cdot 4 \cdot 5,42 + \dots + 49^2 \cdot 4 \cdot 2,22 + 50^2 \cdot 1,2]$$

$$I_{y'} = 2596,42 \text{ cm}^4.$$

Moment $I_{y'}$ sprowadzmy na oś ciężkości YY , w tym celu wyznaczamy odległość środka ciężkości z wzoru $e = \frac{S}{A}$. Moment statyczny S otrzymamy z wzoru 182)

$$\frac{S}{2} = \frac{0,25^2}{3} [1 \cdot 5,6 + 50 \cdot 1,2 + 4(1 \cdot 5,6 + 3 \cdot 5,42 + 5 \cdot 3,25 + \dots + 49 \cdot 2,22 + 2(2 \cdot 5,59 + 4 \cdot 4,45 + 6 \cdot 2,52 + \dots + 48 \cdot 2,53)]$$

$$S = 274,25 \text{ cm}^3.$$

Z wzoru 180)

$$\frac{A}{2} = \frac{0,25}{3} [5,6 + 1,2 + 4(5,6 + 5,42 + 3,25 + \dots + 2,22) + 2(5,59 + 4,5 + 2,52 + \dots + 2,53)]$$

$$A = 45,14 \text{ cm}^2$$

$$e = \frac{274,25}{45,14} = 6,07 \text{ cm}$$

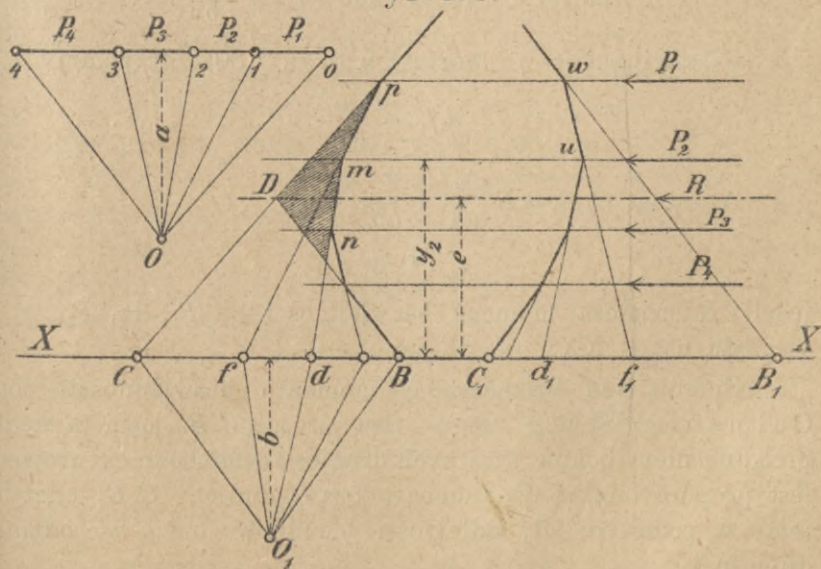
$$I_y = I_{y'} - Ae^2 = 2596,42 - 45,14 \cdot 6,07^2$$

$$I_y = 933 \text{ cm}^4.$$

§. 44. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności.

Na rysunku 109. widzimy siły równoległe P_1, P_2, P_3 i P_4 , których moment bezwładności ze względu na równoległą do nich oś XX mamy wyznaczyć. Wykreślmy najprzód w znany sposób wielobok sił 01234, wyrażając w przyjętej podziałce

rys. 109.



$\frac{1 \text{ cm}}{x \text{ kg}}$ siły długościami, obierzmy dowolny biegun O , poprowadźmy zeń promienie i wykreślmy wielobok sznurowy $pnmB$.

Punkt D przecięcia się przedłużeń boków skrajnych wyznacza położenie wypadkowej R . Przedłużmy boki pm i mn wieloboku sznurowego do osi XX , to otrzymamy trójkąt $mf\bar{d} \sim O12$, a stąd $f\bar{d} : y_2 = 12 : a$. Długość $12 = P_2$, więc

$$f\bar{d} = \frac{P_2 y_2}{a} \dots \dots \dots 180)$$

A więc moment statyczny dowolnej siły jest proporcjonalny do długości $f\bar{d}$, odciętej przedłużeniami odnośnych boków wieloboku sznurowego, co zresztą wynika wprost z §. 7. Jeżeli to samo zrobimy ze wszystkimi siłami, to

$$CB = \Sigma \frac{Py^2}{a} = \frac{S_1}{a}, \dots \dots \dots 181)$$

a stąd moment statyczny $S_1 = a \cdot CB$.

Uważajmy teraz odcinki $f\bar{d}$ jako siły, to CB będzie wielobokiem sił. Przyjmijmy drugi biegun O' , poprowadźmy promienie i wykreślmy drugi wielobok sznurowy wuC_1 . Wtedy otrzymamy

$$ud_1 f_1 \sim O'f\bar{d}, \text{ a stąd } d_1 f_1 = \frac{f\bar{d} \cdot y_2}{b}.$$

Wstawiawszy za $f\bar{d}$ wartość z równ. 180), otrzymamy

$$d_1 f_1 = \frac{P_2 y_2^2}{ab} \dots \dots \dots 182)$$

A zatem $C_1 B_1 = \Sigma \frac{Py^2}{ab} = \frac{I_1}{ab}$, więc

$$I_1 = C_1 B_1 \cdot a \cdot b, \dots \dots \dots 183)$$

jeżeli I_1 oznacza moment bezwładności sił P_1, P_2, P_3, P_4 ze względu na oś XX .

Sposób ten wyznaczania momentu bezwładności podał Culmann. Według niego więc prosta $C_1 B_1$, odcięta na osi przedłużeniem boków skrajnych drugiego wieloboku sznurowego, jest proporcjonalną do momentu bezwładności. $C_1 B_1$ odczytujemy w podziałce sił, odległości biegunowe a i b w podziałce długości.

Możemy jednak i w inny sposób wyznaczyć moment bezwładności. Według równ. 180) $fd = \frac{P_2 y_2}{a}$, a więc $P_2 y_2 = a \cdot fd$, a stąd

$$P_2 y_2^2 = a \cdot fd \cdot y_2 = 2a \Delta fmd.$$

Jeżeli to samo zrobimy dla innych sił, to powierzchnia $CpB = \frac{\sum Py^2}{2a} = \frac{I_1}{2a}$, a stąd

$$I_1 = 2a \text{ pow. } CpB \dots \dots \dots 184)$$

A więc moment bezwładności według tego sposobu, podanego przez Mohra, jest równy powierzchni ograniczonej osią, wielobokiem sznurowym i przedłużeniami boków skrajnych, pomnożonych przez podwójną odległość biegunową a , wyrażoną w podziałce sił.

Gdy mamy obliczyć moment bezwładności powierzchni nieregularnej, dzielimy ją na paski prostymi równoległymi do danej osi, szukamy środków ciężkości tych pasków i uważamy powierzchnie tych pasków jako siły równoległe, zaczepiające w środkach ciężkości pasków. Dalszy tok konstrukcyi jest zupełnie ten sam, co dla sił P_1, P_2, P_3, P_4 , tylko, że zamiast sił tu wchodzi w rachunek powierzchnie. Powierzchnie pasków wyznaczyć możemy w rozmaity sposób, a mianowicie zamieniając je na powierzchnie czworoboków o danej podstawie, lub też za pomocą linii całkowej. Zawsze otrzymamy powierzchnie jako iloczyn dwóch długości, a mianowicie długości $O1, 12$ i t. d., pomnożonej przez pewną długość c , wspólną wszystkim paskom. Zamiast odczytywać długość CB lub a w podziałce powierzchni, możemy więc odczytywać je w podziałce długości i pomnożyć przez c . Otrzymamy zatem z równ. 183) według Culmanna

$$I_1 = C_1 B_1 a \cdot b \cdot c \dots \dots \dots 185)$$

a z równ. 184) według Mohra

$$I_1 = 2a \cdot c \text{ pow. } CpB \dots \dots \dots 186)$$

Chcąc wyznaczyć I , moment bezwładności sił P_1, P_2, P_3, P_4 ze względu na oś, położoną przez punkt D w kierunku wypadkowej R , otrzymamy z równ. 181)

$$CB = \frac{S_1}{a} = \frac{Re}{a},$$

gdy e oznacza odstęp wypadkowej od osi XX . Dalej otrzymamy

$$\Delta CDB = \frac{Re^2}{2a}, \text{ a więc}$$

$$Re^2 = 2a \Delta CDB.$$

Wiemy, że $I = I_1 - Re^2 = 2a A - 2a \Delta CDB$, jeżeli $A = \text{pow. } CpB$, stąd

$$I = 2a(A - CDB) = 2aA_0, \dots \dots \dots 187)$$

jeżeli $A_0 = \text{pow. } DpmnB$.

Analogicznie otrzymamy dla momentu bezwładności powierzchni ze względu na oś ciężkości

$$I = 2a.c.A_0 \dots \dots \dots 188)$$

Licząc dokładniej sposobem Culmanna musimy uwzględnić tę okoliczność, że moment bezwładności danego paska jest według równ. 152) ze względu na daną oś XX , odległą od środka ciężkości paska o długość e (rys. 110) $I_1 = I + Ae^2$, pod-

czas gdyśmy dotychczas przyjmowali w przybliżeniu $I_1 = Ae^2$. Jeżeli paski są dość wąskie, to moment bezwładności I paska ze względu na jego środek ciężkości jest mały i możemy go opuścić.

Jeżeli zaś paski są większe i chcemy dokładnie wyznaczyć moment bezwładności, to przesuwamy, rysując drugi wielobok sznurowy, kierunki sił (t. j. tu momentów statycznych S). Mamy bowiem

$$I_1 = I + Ae^2 = A(a^2 + e^2), \text{ jeżeli } a = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

oznacza promień bezwładności. Moment statyczny $S = Ae$, więc

$$\frac{I_1}{S} = \frac{a^2 + e^2}{e} = e + \frac{a^2}{e} = e_1. \text{ Robimy więc poprawkę, przyjmując}$$

zamiast długości e długość e_1 , a zatem oddalając punkt zaczepienia momentu statycznego S dla drugiego wieloboku

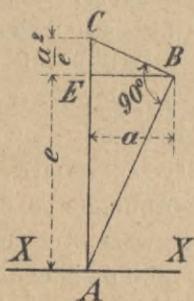
o $(e_1 - e) = \frac{a^2}{e}$. Długość $\frac{a^2}{e}$ znajdujemy łatwo wykreślnie, kre-

śląc prostopadle do ramienia e $EB = a$, promieniowi bezwładności*), łącząc punkt A w osi XX z punktem B i kreśląc $BC \perp AB$.

Wtedy $EC \cdot EA = a^2$, więc $EC = \frac{a^2}{e}$, zatem C jest punktem zaczepienia momentu statycznego.

*) Dla prostokąta $a = 0,288h$, jeżeli h wysokość paska.

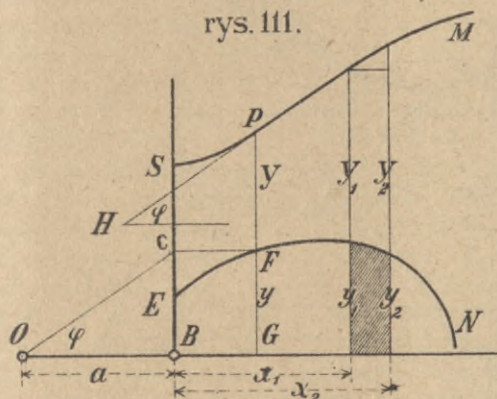
rys. 110.



§. 45. Linia całkowa.

Mówiliśmy, że powierzchnie pasków możemy wyznaczyć za pomocą linii całkowej. Otóż zastanowimy się teraz nieco nad istotą linii całkowej i nad sposobem jej wykreślenia

rys. 111.



Rzędne linii całkowej SPM (rys. 111) są funkcjami rzędnych danej linii EFN , wyrażonych równaniem $y=f(x)$.

Dla linii całkowej będzie

$$Y = \int \frac{f(x)}{a} dx + C,$$

gdzie a i C są ilościami stałymi. Liniją

EFN nazywamy wtedy ze względu na liniją SPM liniją różniczkową.

Zrózniczkowawszy to równanie, otrzymamy $\frac{dY}{dx} = \frac{f(x)}{a} = \text{st } \varphi$

jeżeli φ jest kątem nachylenia stycznej PH linii całkowej w P do poziomu. Poprowadźmy $FC \parallel NB$, a $CO \parallel PH$, to

$$\sphericalangle COB = \varphi, \text{ a więc } \text{st } \varphi = \frac{f(x)}{a} = \frac{y}{OB}, \text{ a stąd } OB = a.$$

Długość a nazywamy odległością biegunową a O biegunem.

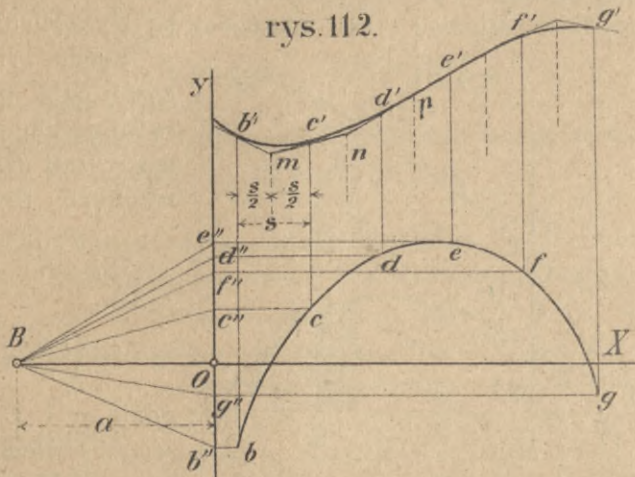
Chcąc wyznaczyć powierzchnię, zawartą między liniją różniczkową, osią i rzędnymi y_1 i y_2 , mamy

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = (Y_2 - C)a - (Y_1 - C)a = (Y_2 - Y_1)a, \quad . 189)$$

a więc powierzchnia ta równa się różnicy rzędnych linii całkowej, pomnożonej przez odległość biegunową a .

Aby dla danej linii różniczkowej wykreślić liniją całkową, postępujemy w następujący sposób: Dzielimy liniją różniczkową, $befg$ (rys. 112) na części tak krótkie, że je uważać możemy jako proste. Z punktów podziału b, c, d, e, f, g , kreślimy równoległe do osi OX aż do OY i łączymy punkty $b'', c'', d'', e'', f'', g''$, z biegunem B . Promienie $Bb'', Bc'', Bd'' \dots$ będą równoległe do stycznych linii całkowej w odpólnych punktach b', c', d', e' ,

f' , g' . Jeżeli bc , cd , $de \dots$ są proste, to odnośne części linii całkowitej będą liniami drugiego rzędu, a mianowicie parabolami.



Jeżeli zaś $b'c'$ jest parabolą, to styczne w b' i c' przecinają się w m , jak wiemy z matematyki, w połowie szerokości pasków. Ta własność parabol posłuży nam do wykreślenia linii całkowitej.

Obrawszy dowolny punkt b' kreślimy $b'm \parallel Bb''$, $mn \parallel Bc''$, $np \parallel Bd''$ i t. d. przyczem punkty mnp leżą w liniach połowiących paski. W ten sposób otrzymujemy szereg stycznych, a że znamy tu punkty styczności b' , c' , d' i t. d., więc wykreślenie linii całkowitej nie przedstawia już żadnej trudności. Jeżeli paski były dość wąskie, to styczne zastąpią linią całkową.

Jeżeli wyznaczymy powierzchnię pasków, na które podzieliliśmy powierzchnię przekroju, za pomocą linii całkowitej, to odległość biegunowa a jest wspólną odległością, którąśmy oznaczyli jako c w równ. 185, 186 i 188.

§. 46. Przykład. Moment bezwładności szyny kolejowej.

Tok konstrukcyi wyjaśnimy najlepiej na przykładzie, wyznaczając wykreślenie moment bezwładności szyny kolejowej (tabl. I).

Dzielimy lewą połowę szyny na paski, tak, aby linią zarysu na szerokość paska można przyjąć jako prostą i wykreślamy dla tej połowy szyny według poprzedniego paragrafu linią całkową. Gdy odległość biegunową przyjmijemy wielką, to linia całkową będzie płaską

i na odwrót; tu przyjęliśmy odległość biegunową O od podstawy $c=6\text{ cm}$. Z punktów przecięcia się prostych podziałowych z zarysem szyny spuszczone prostopadłe na podstawę n. p. mm' i łączymy spodki tych prostopadłych z biegunem O . Promienie te n. p. Om' są równoległe do stycznych linii całkowej, które kreślimy po kolei do prostych, połowiących szerokość pasków. W ten sposób otrzymamy linię całkową $a\ 1'', 2'', 3'' \dots c$, za pomocą której wyznaczymy powierzchnię połowy szyny, kreśląc z O i 19 poziome do przecięcia się z linią całkową w a i 19 i kreśląc pionową przez a . Odcinek $a\ 19$ pomnożony przez odległość biegunową OO daje nam powierzchnię połowy szyny.

W celu wyznaczenia momentu bezwładności rozkładamy znowu powierzchnię przekroju szyny na paski, które teraz mogą być trochę szersze, jednak tylko o tyle, aby wielobok sznurowy nie wiele się różnił od linii sznurowej, którą właściwie dla powierzchni powinniśmy otrzymać. Na rysunku podzieliliśmy szynę na 19 pasków, wąskich w głowie i nóżce, a szerszych w ścianie szyny, bo tu przekrój mniej się zmienia. Mamy wyznaczyć powierzchnie tych pasków i wykreślić wielobok sił (czyli właściwie powierzchni). Czynimy to za pomocą linii całkowej, przedłużając linie podziałowe do linii całkowej, np. Oa do a , $11''$ do $1''$, i spuszczać z punktów przecięcia się a , $1''$, $2'' \dots$ prostopadłe na poziomą $O' 1' 2' \dots 19'$. Odcinki w ten sposób uzyskane, pomnożone przez odległość biegunową $c=6\text{ cm}$, przedstawiają powierzchnie pasków, a więc $O' 19'$ jest wielobokiem sił, względnie powierzchni. Jeżeli zamiast linii całkowej krzywej wykreślimy tylko szereg stycznych, to trzeba aby punkty $1'' 2'' 3'' \dots$ przypadły na punkty styczności, a więc dobrze jest zachować te same linie podziału, co pierwej. Gdybyśmy przyjęli inne linie podziału, to punkty te nie wypadłyby na punkty styczności, a wtedy należałoby do konstrukcyi użyć linii całkowej krzywej a nie stycznych.

Następnie wyznaczamy środki ciężkości poszczególnych pasków i zaczepiamy w nich siły równoległe poziome, względnie powierzchnie pasków. Dalej przyjmujemy biegun O'' w odległości $a=10\text{ cm}$ od prostej $O' 15'$ i kreślimy promienie. Równoległe do tych promieni dają pierwszy wielobok sznurowy $s\ 9l$. Skrajne boki wieloboku sznurowego przedłużone przecinają się w punkcie D , przez który przechodzi wypadkowa. Pozioma D przecina oś szyny w środku ciężkości S . Przedłużwszy boki wieloboku sznurowego aż do osi, przechodzącej przez środek ciężkości, otrzymamy punkty oznaczone cyframi od 1...19. Jestto drugi wielobok sił względnie powierzchni, dla którego obieramy biegun O' w odległości $b_1=6\text{ cm}$ i kreślimy promienie. Następnie prowadzimy równoległe do tych promieni drugi wielobok sznurowy mwz . Skrajne boki wieloboku przedłużamy aż do przecięcia się z osią ciężkości w punktach B i C . Długość $BC=20,4\text{ cm}$ jest według Culmanna proporcjonalną do momentu bezwładności, który otrzymamy według równ. 185, gdy pomnożymy BC

przez a , b i c . Jeżeli zauważymy, że $\overline{BC} \cdot a \cdot b \cdot c$ przedstawia moment bezwładności połowy szyny, to chcąc otrzymać moment całego przekroju szyny, musimy pomnożyć wynik przez 2. Ponieważ szynę wykreśliśmy w podwójnej podziałce (2:1), więc wszystkie długości są dwa razy większe, a zatem aby otrzymać moment bezwładności rzeczywistego przekroju, musimy wynik podzielić przez $2^4=16$. A zatem

$$I_1 = \frac{20,4 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2}{16} = 918 \text{ cm}^4.$$

Według Mohra zaś otrzymamy, splanimetrowawszy powierzchnię s $9 \text{ l } D = 61,8 \text{ cm}^2$,

$$I_2 = \frac{61,8 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2}{16} = 927 \text{ cm}^4.$$

Jako ostateczny wynik przyjmijemy średnią arytmetyczną;

$$I_x = \frac{918 + 927}{2} = 922 \text{ cm}^4.$$

Jeżeli chcemy wyznaczyć teraz promień bezwładności wykreślenie, to możemy to zrobić wedle Müllera Breslaua w następujący sposób:

Dla połowy szyny jest wedle Culmanna, gdy odcinek BC nazwiemy z , $I = a_1 b_1 c z$, $A = n c$, więc

$$a^2 = \frac{I}{A} = \frac{a_1 b_1 c z}{n c} = \frac{a_1 b_1 z}{n}.$$

Odetnijmy $19' G = b_1$ i zróbmy $GH \parallel O'' 19'$, to $HL = b_1$. Z podobieństw trójkątów mamy $b_1 : n = OE : a_1$, więc $OE = \frac{a_1 b_1}{n}$, zatem

$a^2 = OE \cdot z$. Zróbmy $OK = z$, zatoczmy półkole na EK , to

$$\overline{O'' F}^2 = OE \cdot z = a^2, \text{ zatem } a = O'' F.$$

Dla całej szyny niech będzie moment bezwładności I' , powierzchnia A' , to $I' = 2 I$, $A' = 2 A$, stąd

$$a'^2 = \frac{I'}{A'} = \frac{2 I}{2 A} = \frac{I}{A} = a^2, \text{ zatem } a' = a.$$

Promień bezwładności jest więc dla całej szyny ten sam, co dla połowy.

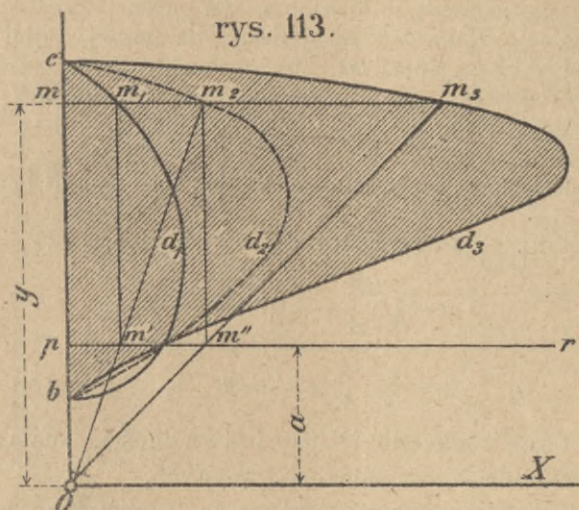
§. 47. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności powierzchni sposobem Nehlsa.

Aby wyznaczyć wykreślenie moment bezwładności powierzchni danej $cm_1 d_1 b = A$ (rys. 113) ze względu na oś OX , kreślimy najprzód prostą $pr \parallel OX$ w odległości a . Badajmy teraz element powierzchni, t. j. prostą mm_1 o grubości nieskończenie małej dy , zróbmy $m_1 m' \parallel mO$, połączmy O z m' , przedłużmy tę

prostą do m_2 , to otrzymamy $Om : a = mm_2 : pm'$, a stąd, ponieważ $pm' = mm_1$, będziemy mieli $y : a = mm_2 : mm_1$, więc

$$mm_2 = \frac{mm_1}{a} y.$$

rys. 113.



Zróbmy to samo z innymi elementami, a otrzymamy

$$\int mm_2 dx = \int \frac{mm_1 y dx}{a} = \text{pow. } bcm_2 d_2 = A_1 \text{ więc}$$

$$A_1 = \frac{S}{a}, \dots \dots \dots 190)$$

przyczem wyraz $\int mm_1 y dx = S$ przedstawia moment statyczny powierzchni A ze względu na OX .

Zróbmy teraz $m_2 m'' \parallel mO$ i wykreślmy Om'' aż do m_3 , a otrzymamy podobnie $pm'' : a = mm_3 : y$, a zważywszy, że $pm'' = mm_2$,

$$mm_3 = \frac{mm_2 y}{a}, \text{ stąd}$$

$$mm_3 dx = \frac{mm_2 y dx}{a} = \frac{mm_1 y^2 dx}{a^2}, \text{ a zatem}$$

$$\int mm_3 dx = \int \frac{mm_1 y^2 dx}{a^2} = \text{pow. } bcm_3 d_3 = A_2, \text{ więc}$$

$$A_2 = \frac{I}{a^2}, \dots \dots \dots 191)$$

przyczem wyraz $\int mm_1 y^2 dx = I$ przedstawia moment bezwładności powierzchni A ze względu na oś OX .

Po prawej stronie rysunku na tablicy I wyznaczyliśmy według tego sposobu, podanego przez Nehlsa, moment bezwładności szyny ze względu na oś pionową i to osobno dla górnej części szyny, a osobno dla dolnej. Długość a przyjęliśmy dla górnej części szyny 4 cm , dla dolnej większą $a_1 = 6\text{ cm}$, aby rysunek nie wypadł za papier. Splanimetrowawszy A_2 , otrzymaliśmy dla górnej części $A = 26,0\text{ cm}^2$, a dla dolnej $A_2' = 28,05\text{ cm}^2$, a więc

$$I' = (A_2 a^2 + A_2' a_1^2) \frac{2}{16} = (26,0 \cdot 4^2 + 28,05 \cdot 6^2) \frac{2}{16} = 178,1\text{ cm}^4.$$

Nareszcie otrzymamy promienie bezwładności

$$a = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = 4,51\text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 1,98\text{ cm}$$

Możemy teraz wykreślić elipsę bezwładności, znając promienie bezwładności dla obu osi głównych.

Zrobić tu jeszcze musimy uwagę, że jeżeliśmy do wykreślenia linii $cm_3 d_3 b$ z linii $cm_2 d_2 b$ użyli nie prostej *pr* (rys. 113) w odległości a , lecz innej prostej w odległości n. p. a' , to zamiast równ. 191) otrzymalibyśmy $A_2 = \frac{I}{aa'}$, jak tego łatwo dowieść można.

Moment bezwładności powierzchni możemy także wyznaczyć za pomocą bardzo zmyślnego przyrządu, mianowicie planimetru *Amslera*, którego teorią i opis podał Dr. Winkler w czasopiśmie Austriackiego Towarzystwa Inżynierów i Architektów w r. 1870 *).

Powierzchnia A_1 (rys. 114), wyrażająca moment statyczny powierzchni, ma jeszcze inne znaczenie, które zaraz wyjaśnimy.

Według rów. 107) $\frac{1 \cdot 42}{v} \frac{v}{v} = \zeta$. Jeżeli oś OX przyjmujemy w środku ciężkości przekroju, to $v = y$, więc $v = \zeta y$.

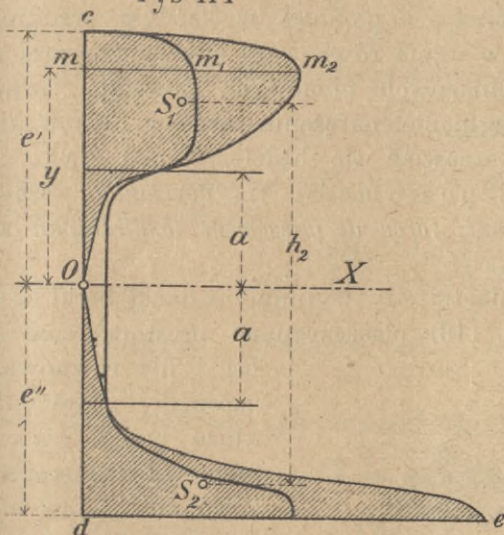
Na pasek powierzchni $mm_1 dy$ działa siła $mm_1 dy v = mm_1 dy \zeta y = mm_2 a \zeta dy$. Jeżeli scałkujemy siły działające w przekroju powyżej osi obojętnej, to otrzymamy

*) p. także Ott: *Vorträge über Baumechanik. II. Theil.* str. 124 i nast.

$$C' = \int_0^{e'} mm_2 dy a \zeta = a \zeta \cdot A_1$$

jeżeli $A_1 = \text{pow. } OCm_2$, a podobnie wypadkowa nateżeń poniżej osi obojętnej $C'' = a \zeta A_2$, jeżeli $A_2 = \text{pow. } Oed$, przyczem $C' = C''$. Siły normalne, działające

rys: 114

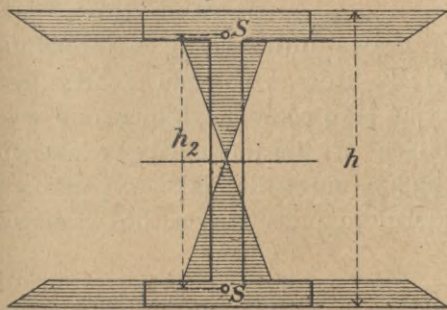


w paskach powierzchni przekroju są proporcjonalne do mm_2 , powierzchnie zatem kreskowane A_1 i A_2 przedstawiają rozkład nateżeń normalnych w przekroju i nazywają się dla tego sprowadzonymi powierzchniami przekroju (n. *reducirte Querschnittsfläche*). Jeżeli wyznaczymy środki ciężkości powierzchni A_1 i A_2 w S_1 i S_2 , to punkty

te są punktami zaczepienia ciśnienia i ciągnięcia, nazywamy je więc środkiem ciśnienia względnie ciągnięcia. Odstęp pionowy środków ciśnienia i ciągnięcia niech będzie h_2 , to

$$C \cdot h_2 = M \quad (192)$$

rys: 115



Na rys. 115. widzimy powierzchnię sprowadzoną przekroju I i środki ciśnienia i ciągnięcia. Widzimy, że tu odstęp środków nateżenia h_2 jest nie o wiele mniejszy od h , w przybliżeniu możemy przyjąć $h_2 = 0,9h$.

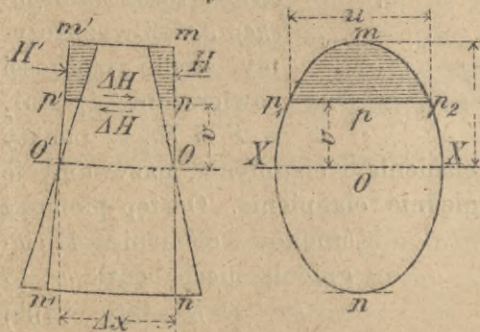
§. 48. Obliczenie siły ścinającej poziomej.

Siły zginające belkę działają w kierunku prostopadłym do osi belki, więc wywołują oprócz nateżeń zginających także nateżenia ścinające. Dla belki o osi prostej jest siła poprzeczna wypadkową wszystkich sił, działających po lewej stronie danego przekroju, nateżenia ścinające pionowe w każdym przekroju muszą więc być równe w stanie równowagi sile poprzecznej Q .

Oprócz nateżeń ścinających pionowych powstają jednak w belce, pracującej na zginanie, nateżenia także w innych kierunkach. Najprzód zastanawiać się będziemy nad nateżeniami ścinającymi poziomymi (n. *horizontale Schubspannung*, fr. *effort rasant*, *force de glissement longitudinal*, an. *horizontal shearing stress*).

W celu wyznaczenia tej siły wytnijmy z danej belki część jej o długości Δx (rys. 116) płaszczyznami prostopadłymi do

rys: 116



osi i dla równowagi zaczepmy nateżenia, które przed przecięciem w belce istniały. Zbadajmy teraz siły działające w warstwie pp' , równoległej do osi, a odległej od niej o v . Na części belki $mm'p'p$ działają po prawej i po lewej stronie nateżenia, które, jak wiadomo, zmieniają się według prawa linii prostej. Nateżenia te dadzą się złożyć na siły H i H' , które z powodu, że Δx jest bardzo małe, możemy obie przyjąć jako poziome. Dadzą one wypadkową $\Delta H = H' - H$, działającą w kierunku siły większej. Siły, działające na część belki $pp'n'n$, muszą dać jako wypadkową także ΔH , lecz działającą w kierunku przeciwnym, bo warstwa pp' jest w równowadze.

Według równ. 145) jest $v = \frac{M}{I} v$, a więc siła, działająca na pasek p_1p_2 o długości u a grubości dv , jest $\frac{M}{I} v u dv$, a stąd

$$H = \int_v^e v u dv = \frac{M}{I} \int_v^e u v dv.$$

Podobnie otrzymamy $H' = \frac{M'}{I} \int_v^e u v dv$, jeżeli przekrój belki pozostał ten sam; a więc

$$\Delta H = H' - H = \frac{M' - M}{I} \int_v^e u v dv = \frac{\Delta M}{I} \int_v^e u v dv.$$

Jeżeli przekroje obierzemy bardzo blisko, to możemy napisać

$$dH = \frac{dM}{I} \int_v^e u v dv.$$

Siła ścinająca pozioma dH działa na długości dx , na jednostkę długości wypada więc

$$\sigma = \frac{dH}{dx} = \frac{dM}{dx \cdot I} \int_v^e u v dv.$$

Z równania 13) wiemy, że $\frac{dM}{dx} = Q$ t. j. sile poprzecznej,

całka zaś $\int_v^e u v dv$ wyraża moment statyczny powierzchni $p_1 m p_2$ ze względu na środek ciężkości przekroju O , nazwijmy go S , to

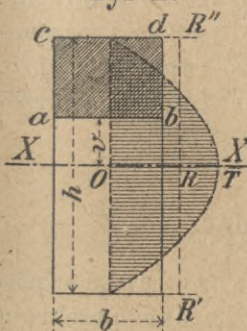
$$S = \int_v^e u v dv, \text{ a więc} \quad \sigma = \frac{QS}{I} \dots \dots \dots 193)$$

Natężenie ścinające poziome σ_1 na jednostkę powierzchni będzie

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{u} = \frac{QS}{Iu} \dots \dots \dots 194)$$

Z równania 193) widzimy, że ponieważ Q i I są dla danego przekroju i obciążenia stałe, więc σ zmienia się proporcjonalnie do S , a zatem siła ścinająca jest największa w osi, a w warstwie skrajnej równa zero, bo tam $S=0$. Dla przekroju prostokątnego (rys. 117) mamy

rys: 117



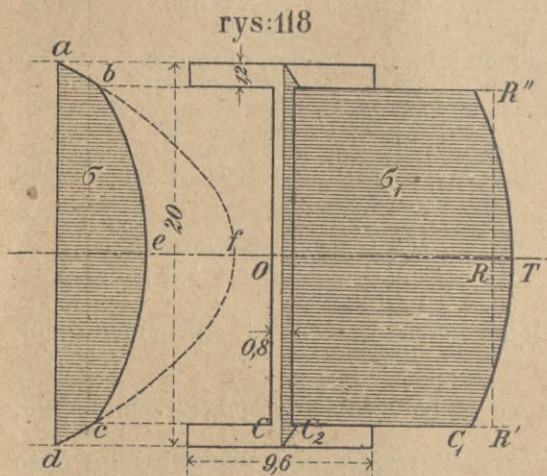
$$S = \left(\frac{h}{2} - v\right) b \frac{\frac{h}{2} - v}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - v^2\right),$$

$$\sigma = \frac{Qb}{2 \cdot \frac{1}{12} b h^2} \left(\frac{h^2}{4} - v^2\right) = \frac{6Q}{h} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{v}{h}\right)^2\right] \dots \dots \dots 195)$$

Widzimy więc, że dla zmiennej v siła ścinająca σ i natężenie ścinające poziome σ_1 zmienia się w przekroju prostokątnym wedle paraboli. W przekroju I (rys. 118) zmienia się siła ścinająca σ we-

dle paraboli ab i cd w stopie i głowie, zaś według innej paraboli bec w ściance.

Z równania 194) widzimy, że natężenie ścinające poziome σ_1 zmienia się proporcjonalnie do $\frac{S}{u}$. Jeżeli więc szerokość przekroju u nagle się zmienia, to i σ_1 zmienia się nagle odwrotnie proporcjonalnie do u .



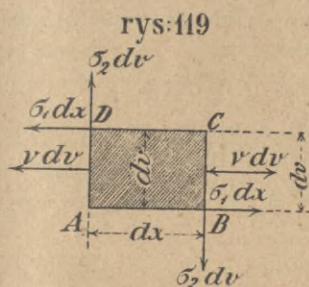
Przy przejściu więc ze ścianki w stopę w C następuje nagle zmiana natężenia ścinającego. Z rysunku 118. widzimy, że natężenia ścinające są bardzo małe w stopie i głowie i przenoszą się prawie w całości na ściankę. Na odwrót wedle rys. 115. natężenia normalne w belkach o przekroju I działają przeważnie w stopie i głowie, a mało co w ściance.

§. 49. Natężenie ścinające pionowe.

Wiemy już z poprzedniego, że suma natężeń ścinających pionowych (fr. *effort tranchant*) w każdym przekroju pionowym belki o osi prostej równą jest sile poprzecznej Q . Zachodzi teraz pytanie, jak siła poprzeczna rozdziela się w przekroju.

Wytnijmy z belki (rys. 119) dwiema płaszczyznami poziomymi w odstępnie dv i dwiema płaszczyznami pionowymi w odstępnie dx graniastosłup o podstawie $ABCD$ a wysokości $= 1$

to w płaszczyznach DC i AB działają siły ścinające poziome $\sigma_1 dx$, w płaszczyznach zaś pionowych siły $\sigma_2 dv$, a oprócz tego równoległe do osi działają siły $v dv$, które się znoszą.



Mamy tu więc dwie pary sił, dla równowagi musi być suma ich momentów równa zeru, więc

$$-\sigma_1 dx \cdot dv + \sigma_2 dv \cdot dx = 0, \text{ a zatem}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \dots \dots \dots 196)$$

Widzimy więc, że natężenia ścinające pionowe σ_2 są w każdym punkcie przekroju po-

przecznego równe natężeniom ścinającym poziomym σ_1 , w tym punkcie działającym.

Ze względu na równanie 195) możemy napisać

$$\sigma_2 = \frac{QS}{Iu},$$

a więc natężenia ścinające pionowe zmieniają się proporcjonalnie do $\frac{S}{u}$.

Jeżeli siła poprzeczna Q działa na przekrój A , to gdyby natężenia rozdzielały się na przekrój jednostajnie (prosta $R'R'$ w rys. 117), toby największe natężenie $\sigma_1 = \frac{Q}{A}$.

Dla przekroju prostokątnego jest największe natężenie wedle 194) i 195) dla $v=0$

$$OT = \frac{6Q}{4bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} = \frac{3}{2} OR \dots \dots \dots 197)$$

Największe natężenie na ścinanie jest więc dla przekroju prostokątnego $\frac{3}{2}$ razy większem, niż przeciętne dla równego rozdzielenia siły.

Dla przekroju $I OT$ będzie także nieco większem niż OR (rys. 118), jeżeli jednak siłę Q rozdzielimy tylko na ściankę równo, to będzie się mało co różniło od OR .

Przykład. Dla kształtówki I wykreślonej na rys. 118. niech będzie $Q=20t$. Dla przekroju tego jest $I=2402 \text{ cm}^3$, więc przeciętne natężenie ścinające w ściance $\sigma_0 = \frac{20000}{0,8 \times 17,6} = 1421 \text{ kg/cm}^2$.

Obliczmy teraz OT . W tym celu wyznaczamy najprzód S dla $v=0$, zatem $S=9,6 \times 1,2 \times 9,4 + 0,8 \times 8,8 \times 4,4 = 141,15 \text{ cm}^3$, więc wedle 194) i 195)

$OT = \frac{20000 \times 141,15}{2402 \times 0,8} = 1469 \text{ kg/cm}^2$. Wartość ta tak mało się różni od wartości poprzedniej, że często w praktyce liczymy tylko natężenie ścinające średnie

$$\sigma_0 = \frac{Q}{b'h'} \dots \dots \dots 198)$$

Obliczmy jeszcze natężenie ścinające w C , a otrzymamy

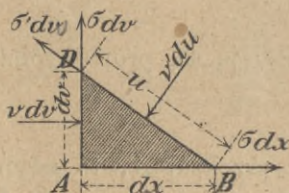
$$S = 9,6 \times 1,2 \times 9,4 = 110,2 \text{ cm}^3, \text{ więc } CC_1 = \frac{20000 \times 110,2}{2402 \times 0,8} = 1168 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{a } CC_2 = \frac{2000 \times 110,2}{2402 \times 9,6} = 97 \text{ kg/cm}^2.$$

§. 50. Natężenia w kierunkach ukośnych. Linie największych natężeń.

Na graniastosłup, którego podstawa jest prostokątem (rysunek 119) działa w stanie równowagi sześć sił, jeżeli zaś przetniemy go według przekątnej DB (rysunek 120), to w stanie równowagi działa 5 sił na element, mianowicie

rys:120



$v dv, \sigma dv, \sigma dx, v' du, \sigma' du$. Stosunek tych sił się nie zmienia, jeżeli wszyst-

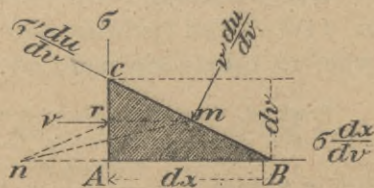
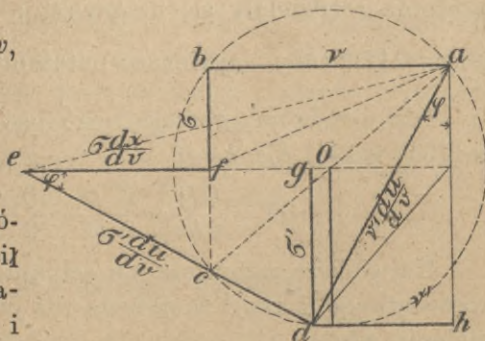
kie podzielimy przez dv , wtedy otrzymamy siły

$$v, \sigma, \sigma \frac{dx}{dv}, v' \frac{du}{dv}, \sigma' \frac{du}{dv}$$

(rysunek 121).

Jeżeli siły te są w równowadze, to wielobok sił i sznurowy muszą się zamknąć. Co do wielkości i kierunku znamy tylko v i σ , co do kierunku resztę sił. Przypuśćmy, że $abfeda$ jest wielobokiem sił i że biegun obierzemy w punkcie a . Wykreślmy promienie, a równoległe do nich wielo-

rys:121



bok sznurowy. Pierwszy promień aa jest tu zerem, drugi ad , kreślimy więc równoległą do ad przez punkt m do siły $\sigma' \frac{du}{dx}$, przyczem $Cm = mB$. Dalej kreślimy $mn \parallel ae$, $nr \parallel af$, $rm \parallel ab$ aż do punktu m , ponieważ wielobok sznurowy musi się zamknąć. Z rysunku widzimy, że $ae f \sim mnr$, więc $mr : Ar = ef : bf$, czyli $\frac{1}{2} dx : \frac{1}{2} dv = ef : \sigma$, stąd $ef = \sigma \frac{dx}{dv}$. Dalej widzimy, że $efc \sim ABC$, więc $\sigma \frac{dx}{dv} : fc = dx : dv$, a stąd

$$fc = \sigma \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \sigma = bf.$$

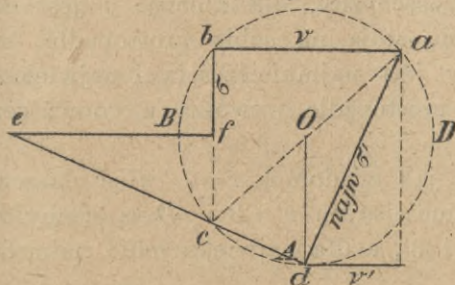
Ponieważ z rysunku także wynika, że $\sphericalangle abc = \sphericalangle adc = 90^\circ$, więc punkty a, b, c i d leżą na okręgu koła. Na tej podstawie możemy teraz wielobok sił łatwo wykreślić w następujący sposób: kreślimy $v = ab$, $bf = \sigma$ i przedłużamy tę prostą do c tak, aby $fc = bf$. Zataczamy koło przez abc , prowadzimy $ad \parallel v' \frac{du}{dv}$ czyli $ad \perp BC$ i dc przedłużamy aż do poziomej przez f .

Z trójkątów $egd \sim ABC$ mamy $\sigma' \frac{du}{dv} : dg = du : dv$, a stąd $dg = \sigma'$. Podobnie otrzymamy z trójkątów $adh \sim ABC$

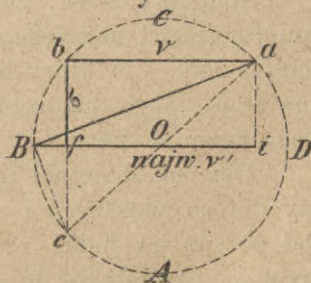
$$v' \frac{du}{dv} : dh = du : dv, \text{ więc } dh = v'.$$

Łatwo możemy teraz znaleźć kierunki sił v' i σ' , dla których v' i σ' przybierają największe i najmniejsze wartości. Dla największego σ' musi być płaszczyzna, w której działa σ' , równo-

rys:122

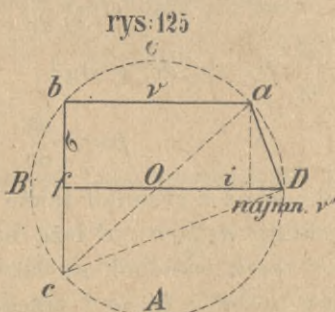
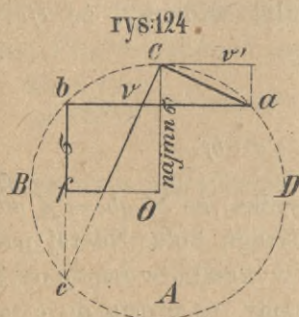


rys:123



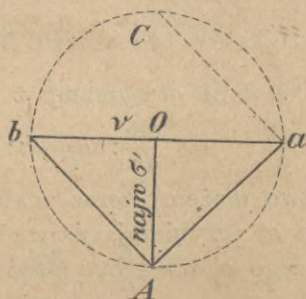
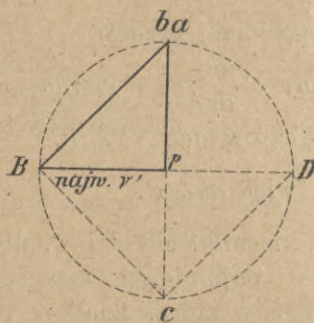
ległą do Ac (rys. 122) a v' działać w prostej aA , przyczem punkt d wpada na punkt A , znajdujący się w pionowej pod O .

Jeżeli płaszczyznę tę obrócimy o 45° , kierunki te zmieniają się na cB i aB (rys. 123), wtedy $\sigma=0$, a ν' jest największem. Po dalszym obrocie o 45° zmieniają się te kierunki na cC i aC (rys. 124), a wtedy σ' osiąga swej najmniejszości. Gdy nareście jeszcze obrócimy te płaszczyzny o 45° (rys. 125), to otrzymamy kierunki cD i aD , a wtedy ν' jest najmniejszością, a $\sigma=0$.



rys:126

rys:127



Widzimy więc, że płaszczyzny, dla których σ' jest najmniejszością i największością stoją na sobie prostopadle, zaś płaszczyzny, dla których ν' jest najmniejszością i największością stoją także na sobie prostopadle i tworzą z powyższymi płaszczyznami kąty 45° .

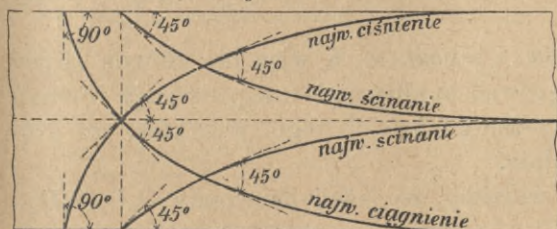
Dla osi obojętnej jest, jak wiadomo, $\nu=0$, więc płaszczyzny dla największych i najmniejszych ν' cB i cD są nachylone pod 45° do osi belki (rys. 126), a dla największych i najmniejszych σ' równoległe do osi.

Dla włókna skrajnego jest, jak wiadomo, $\sigma=0$, więc płaszczyzny, dla których ν' jest największe i najmniejsze, są ró-

wnośle i prostopadle do osi, zaś płaszczyzny, dla których σ' jest najmniejszością i największością aA i aC (rys. 128), nachylone są pod kątem 45° do osi.

Jeżeli w pewnym punkcie belki wyznaczymy kierunki płaszczyzn dla największych i najmniejszych ν' lub σ' , potem w punktach sąsiednich, leżących w tych kierunkach, wyznaczymy znów kierunki płaszczyzn dla największości i najmniejszości ν' lub σ' i tak dalej postępować będziemy, to otrzymamy linie krzywe, których styczne wyznaczają w danym punkcie kierunki wyżej wspomnianych płaszczyzn. Linie te największych nateżeń (n. *Spannungstrajektorie*, an. *tractory*) wykreśliliśmy na rysunku 128 na podstawie powyższych twierdzeń dla belki o stałej szerokości.

rys.128.



Widzimy, że linie największego ciągnięcia i ciśnienia wychodzą pionowo z włókien skrajnych, są nachylone do pionu pod kątem 45° w osi i kończą się stycznie do włókien skrajnych. Linie naj-

większego ściśnięcia wychodzą z włókien skrajnych nachylone pod 45° , stają się coraz więcej płaskie i kończą się stycznie do osi.

§. 51. Nateżenia główne.

Z rysunku 121 możemy otrzymać dwa równania, jeżeli utworzymy sumy składowych wszystkich sił w kierunkach ad i ed i zrobimy je równe zeru ze względu na to, że siły te są w równowadze.

Tworząc sumę najprzód w kierunku ad otrzymamy:

$$\nu' \frac{du}{dv} = \nu \operatorname{wst} \varphi + 2 \sigma \operatorname{dost} \varphi,$$

albo, ponieważ

$$\frac{dv}{du} = \operatorname{wst} \varphi, \quad \nu' = \nu \operatorname{wst}^2 \varphi + 2 \sigma \operatorname{wst} \varphi \operatorname{dost} \varphi,$$

lub nareście
$$\nu' = \frac{\nu}{2} (1 - \operatorname{dost} 2 \varphi) + \sigma \operatorname{wst} 2 \varphi \quad 199)$$

Tworząc zaś sumę składowych w kierunku ed , otrzymamy $\sigma' \frac{du}{dv} = \nu \text{dost } \varphi - \sigma \text{wst } \varphi + \sigma \frac{dx}{dv} \text{dost } \varphi$, lub ponieważ $\frac{dx}{dv} = \text{dot } \varphi$ $\sigma' = \nu \text{wst } \varphi \text{dost } \varphi + \sigma (\text{dost}^2 \varphi - \text{wst}^2 \varphi)$, albo wręście

$$\sigma' = \frac{\nu}{2} \text{wst } 2 \varphi + \sigma \text{dost } 2 \varphi \quad 200)$$

Nateżenia ν' i σ' dadzą się złożyć w wypadkowe nateżenie ζ' , działające ukośnie na element BC .

Jeżeli przez dany punkt poprowadzimy we wszystkich kierunkach proste i odetniemy na nich odnośne nateżenia ζ' we właściwych kierunkach, to końce tych prostych leżeć będą na elipsie, jak się tego dowodzi w mechanice rozumowej. Elipsę tę nazywamy elipsą nateżeń (n. *Spannungsellipse*). Osi główne tej elipsy sąto nateżenia stojące prostopadle na odnośnych elementach, a więc *najw.* ν' i *najmn.* ν' , gdyż wtedy $\sigma' = 0$ (rys. 124 i 126).

Aby wynaleść *najw.* i *najmn.* ν' , a więc osi główne elipsy nateżeń możemy postępować analitycznie na podstawie równań 199) i 200), albo też możemy użyć do tego wyników, do których doszliśmy wykreślnie.

Z rys. 122 i 124 widzimy, że jeżeli nazwiemy $OA = PB = OC = OD = r$, to

$$\text{najw } \pm \sigma' = \pm r = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 + 4 \sigma^2} \quad 201)$$

Również widzimy z rys. 123 i 125, że

$$\text{najw } \pm \nu' = i O \pm r = \frac{\nu}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 + 4 \sigma^2} \quad 202)$$

Z rys. 122. i 124. widzimy też, że dla położenia płaszczyzny elementu, dla którego otrzymujemy *najw* $\pm \sigma'$,

$$\nu' = \frac{\nu}{2} \quad 203)$$

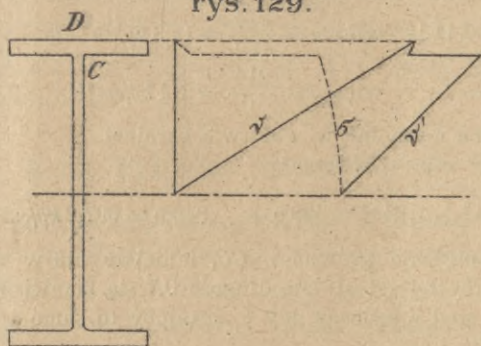
Wartości *najw* $\pm \nu'$ nazywamy nateżeniami głównemi (n. *Hauptspannung*, an. *maximum stress*), a wartości *najw* $\pm \sigma'$ nateżeniami głównemi ścinającymi (n. *Hauptschubspannung*).

Przy obliczaniu wymiarów musimy uważać, aby nateżenie główne normalne i nateżenie główne ścinające w żadnym punkcie belki nie przekraczało dozwolonej granicy.

Powiedzieliśmy wyżej, że n_{ajw} ($\pm \nu$) jest zawsze w warstwie skrajnej, tam zaś jest $\sigma=0$. Jeżeli wstawimy w rów. 202) $\sigma=0$, to otrzymamy $n_{ajw} \pm \nu' = \nu$. Dlatego przy obliczaniu wymiarów na podstawie wzoru 147) $\tau I = Me$ uwzględniamy tylko natężenie podłużne ν warstwy skrajnej, robiąc je równym natężeniu dopuszczalnemu τ .

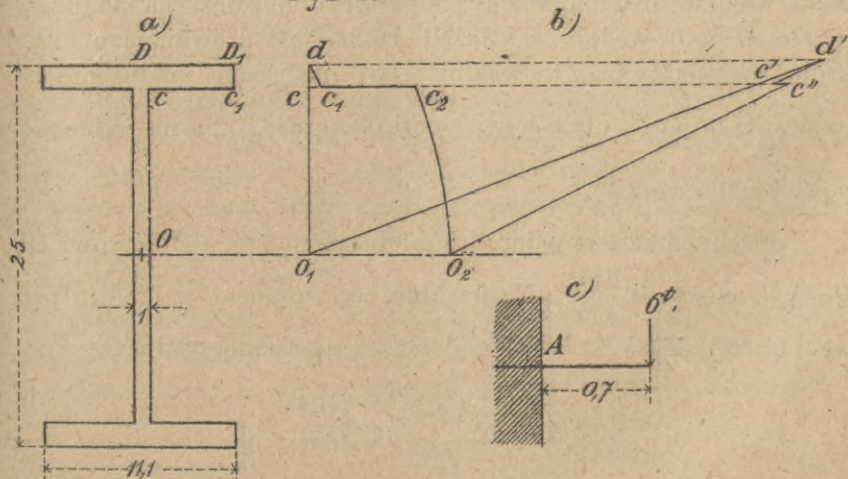
Jeżeli szerokość przekroju zmienia się nagle, jak n. p. w kształtówce I (rys. 129), to w C , gdzie kształtówka przechodzi w ściankę, jest natężenie normalne ν dość wielkie a także i natężenie ścinające σ , natężenie więc główne normalne ν' może być większem od natężenia w włóknie skrajnem D . Aby temu zapobiedz zaokrągla się przekrój w C , przezco zmniejsza się natężenie ścinające a stąd i natężenie główne.

rys. 129.



Przykład. Niechaj siła $6t$ działa na końcu belki jednym końcem wmurowanej $0,7m$ długiej. Jakie będzie natężenie główne w przekroju przy ściance A , jeżeli belka ma przekrój wedle rys. 130?

rys. 130.



Moment największy wynosi $6 \times 0,7 = 4,2tm = 420000 \text{ kgcm}$. Dla kształtówki I jest $A = 25 \times 1 + 2 \times (11,5 - 1) 1,5 = 55,3 \text{ cm}^2$

$$I = \frac{1}{12} (11,1 \times 25^3 - 10,1 \times 22^3) = 5491 \text{ cm}^4.$$

Natężenie normalne w włóknie skrajnym D

$$v = \frac{420000 \times 12,5}{5491} = 957 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{w } C \quad v = \frac{957 \cdot 11}{12,5} = 841 \text{ kg/cm}^2.$$

Natężenie ścinające otrzymamy w włóknie skrajnym $\sigma = 0$, w CC_1

$$\sigma = \frac{QS}{Iu} = \frac{6000 \cdot (11,1 \cdot 1,5 \cdot 11,75)}{5491 u} = \frac{214}{u}$$

$$\text{w głowce jest } u = 11,1, \text{ więc } \sigma = \frac{214}{11,1} = 19,3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{w ściance jest } u = 1, \text{ więc } \sigma = \frac{214}{1} = 214 \text{ kg/cm}^2.$$

Zatem natężenie główne normalne w warstwie skrajnej

$$v' = v = 957 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{w } CC_1 \quad v' = \frac{841}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{841^2 + 4 \cdot 214^2} = 420,5 + \frac{1}{2} 943,5 = 897,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Tu więc jest jeszcze natężenie główne w CC_1 mniejsze niż w warstwie skrajnej, lecz gdyby przy tej samej sile długość 0,7 się zmniejszyła, zmniejszyłby się moment, a stąd v , podczas gdy σ zostałoby to samo i możliwym by było, że $cc'' > dd'$.

Z przykładu powyższego widzimy jednak, że wypadek taki byłby zupełnie wyjątkowy i zdarzyć się może w ogóle tylko tam, gdzie i moment i siła poprzeczna jest wielką, że zwykle jednak dostatecznym jest obliczenie natężenia normalnego w warstwie skrajnej.

Jeżeli $v = 0$, to według 201) $najw \pm \sigma' = \pm \sigma$. Przekrój belki więc w dwu punktach podpartej obliczamy na podporze (gdzie $M = 0$) według σ . Jeżeli belka jest drewnianą o przekroju prostokątnym, to według 195) otrzymamy natężenie na jednostkę długości dla $v = 0$ tj. w osi obojętnej $\frac{3Q}{2h}$, a na jednostkę

$$\text{powierzchni } \sigma = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}.$$

Jeżeli belka jest jednostajnie obciążoną, to według rów. 19)

$$Q = \frac{1}{2} ql, \text{ więc } \sigma = \frac{3ql}{4bh}.$$

Największy zaś moment w środku jest według 20) $M = \frac{1}{8} ql^2$, więc największe natężenie podłużne

$$v = \frac{Me}{I} = \frac{\frac{1}{8} ql^2 \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} bh^3} = \frac{3}{4} \frac{ql^2}{bh^2}.$$

Jeżeli dla drzewa miękkiego przyjmiemy $\tau' = 7 \text{ kg/cm}^2$, $\tau = 80 \text{ kg/cm}^2$ i obliczymy wymiary tak, że $\nu = \tau$, to

$$\sigma : \tau = \frac{3ql}{4bh} : \frac{3ql^2}{4bh^2} = h : l, \text{ więc } \sigma = \tau \cdot \frac{h}{l} = \frac{80h}{l}.$$

Jeżeli więc $\sigma \leq \tau'$, to $\frac{80h}{l} \leq 7$, czyli

$$h \leq \frac{7}{80} l = 0,088 l \dots \dots \dots 204)$$

Belki drewniane bardzo wysokie, dla których $h > 0,088 l$, trzeba więc obliczać ze względu na siłę poprzeczną Q z powodu niebezpieczeństwa ścinania pionowego w podporach, zwykle jednak $h < 0,088 l$, a wtedy obliczamy je według największego momentu.

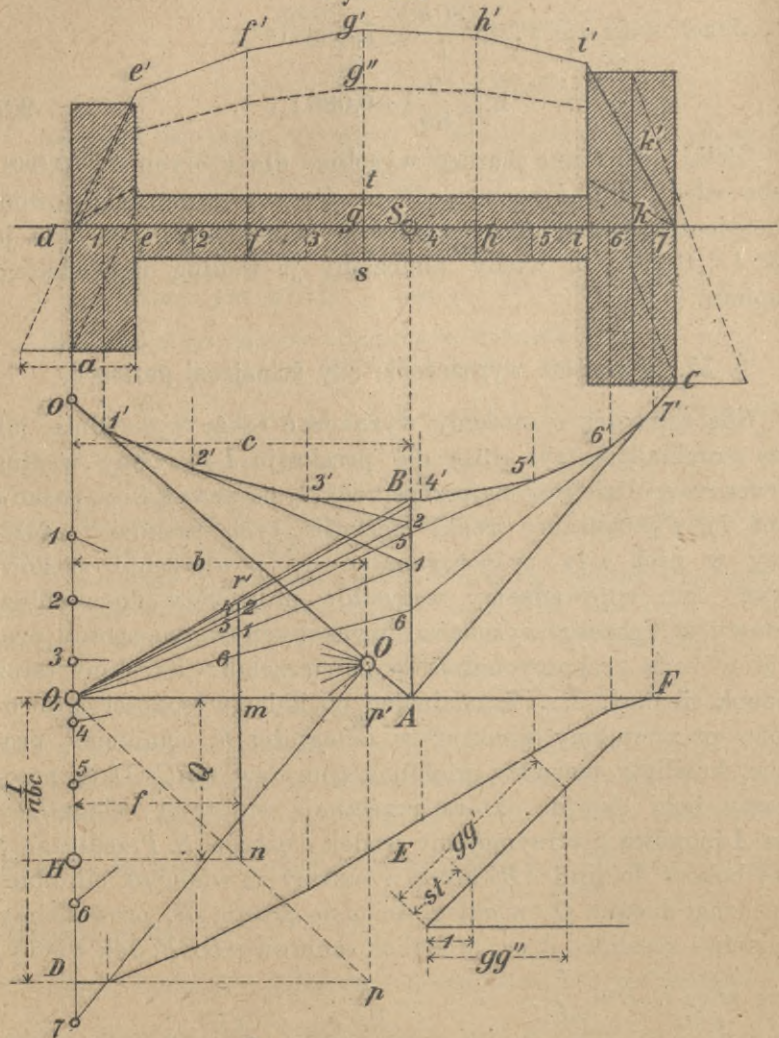
§. 52. Wykreślne wyznaczenie siły ścinającej poziomej.

Siłę ścinającą σ możemy wyznaczyć także wykreślnie, jak to na przykładzie (rys. 131) dla przekroju I okazemy według Culmanna. Dzielimy najprzód przekrój na pewną ilość pasków (tu na 7), wyznaczamy środki ciężkości tych pasków i zaczepiamy w nich siły proporcjonalne do powierzchni pasków. W tym celu sprowadzamy wszystkie prostokąty do wspólnej podstawy a , przeto wysokości uzyskanych w ten sposób prostokątów będą proporcjonalne do powierzchni. Kreślimy teraz wielobok sił $0, 1, 2, \dots, 7$, odcinając po kolei wysokości czworoboków, przyjmujemy punkt O w odległości b , ciągniemy promienie, kreślimy pierwszy wielobok sznurowy OBC . Dalej przedłużamy boki skrajne, które przecinają się w A , ciągniemy przez A pionową i otrzymujemy środek ciężkości S . Przedłużamy resztę boków do linii AB , którą uważamy za wielobok sił, obieramy drugi biegun O_1 w odległości c na prostej 07 , prowadzimy promienie i kreślimy drugi wielobok sznurowy DEF . Jak wiemy, będzie więc $O_1D = \frac{I}{abc}$.

Poprowadźmy $Op \parallel O_1D$ i połączmy O_1 z p , odetnijmy dalej $O_1H = Q$ i poprowadźmy $Hn \parallel O_1F$ i pionową nm , to $mn = Q$, a $O_1nm \sim O_1p'p$, więc $pp' : b = mn : O_1m$, a zatem, gdy $O_1m = f$, $\frac{I}{abc} : b = Q : f$, a stąd $f = \frac{bQabc}{I} = \frac{ab^2cQ}{I}$.

Długość AB przedstawia moment statyczny powierzchni pierwszych trzech pasków ze względu na środek ciężkości prze-

rys: 131



kroju, więc $AB = \frac{S_{1,3}}{ab}$. Przedłużmy mn aż do r , to $mr : f =$
 $= \frac{S_{1,3}}{ab} : c$, a stąd $mr = \frac{S_{1,3}f}{abc}$, a wstawiwszy wartość za f ,
 $mr = \frac{S_{1,3} Qab^2c}{Iabc} = \sigma_{1,3} \cdot b \dots \dots \dots 205)$

Widzimy więc, że odcinek mr proporcjonalny jest do siły ścinającej w warstwie g . Wykreślmy $gg'=2mr$, dalej $ee'=2.m1$, $ff'=2.m2$, $hh'=2.m4$, $ii'=2.m5$, $kk'=2.m6$, to rzędne te podzielone przez $2b$ przedstawiają siłę ścinającą w tych warstwach. Wierzchołki tych rzędnych połączone dają linię sił ścinających, (an. *curve of shearing stress*).

Jeżeli chcemy mieć natężenie ścinające σ_1 , czyli siłę ścinającą na jednostkę powierzchni, to musimy siłę ścinającą σ w każdej warstwie np. g podzielić przez szerokość warstwy st . Na rysunku zrobiliśmy to za pomocą kąta proporcjonalnego i połączyli końce odnośnych rzędnych linią kreskowaną. W warstwach, gdzie szerokość przekroju nagle się zmienia, zmienia się też nagle i natężenie ścinające.

§. 53. Obliczenie przekroju kształtówek I , pracujących na zginanie.

Kształtówki w kształcie I używamy często jako belki, pracującej na zginanie. Znając moment sił zewnętrznych, działających na belkę, obliczamy jej wymiary według równania $\tau I = Me$, a stąd

$$\frac{M}{\tau} = \frac{I}{e} \dots \dots \dots 206)$$

Wyraz $\frac{I}{e}$ zależny tylko od przekroju belki nazywamy momentem oporu (n. *Widerstandsmoment*, fr. *module de flexion, de section*).

Austryackie Towarzystwo inżynierów i architektów w Wiedniu wyznaczyło wymiary dla pewnej ilości kształtówek I , które fabryki żelaza wyrabiają na zapas i których zatem każdego czasu dostać można. Wymiary te, ciężar kształtówek na jednostkę długości i moment oporu zestawiliśmy w następnej tabliczce *).

*) W tablicach ogłoszonych w r. 1892 przez austr. Tow. inżynierów i architektów nie uwzględniono zaokrągleń i nachylenia niektórych boków przekroju kształtówek, które potrzebne są ze względu na walcowanie. Ponieważ jednak nieuwzględnianie zaokrągleń i nachyleń daje wyniki niezupełnie dokładne, a różnice dochodzą do 14%, zatem przeliczyłem te tablice i podaję tu wartości dokładne z uwzględnieniem zaokrągleń i nachyleń.

Znając M i τ , wyznaczamy iloraz $\frac{M}{\tau}$, który ma być równy momentowi oporu kształtówki. Szukamy więc z tabliczki w kolumnie $\frac{I}{e} = I : \frac{h}{2}$ wartość najbardziej zbliżoną, a nie mniejszą od $\frac{M}{\tau}$ i obieramy odnośną liczbę kształtówki.

Kształtówki I

zestawione wedle norm austriackiego Towarzystwa inżynierów i architektów z r. 1892. obliczone dokładnie z uwzględnieniem zaokrągleń i nachyleń (rys. 132).

Normalne

$$\text{dla } h \leq 160 \text{ mm} : b = 0,4 h + 20 \text{ mm}$$

$$d = 0,03 h + 1,6 \text{ mm} \quad d_1 = 1,5 d$$

$$\text{dla } h \leq 160 \text{ mm} : b = 0,3 h + 36 \text{ mm}$$

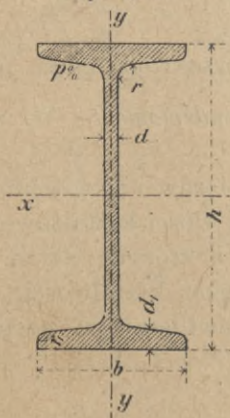
$$d = 0,4 h, \quad d_1 = 1,5 d$$

$$r = 1,2 d, \quad r_1 = 0,6 d,$$

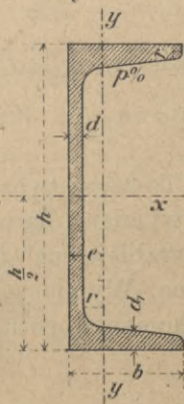
pochyłość wewnętrzna boków stopy i głowy $p^o_0 = 0,02 h + 7$, h w mm .

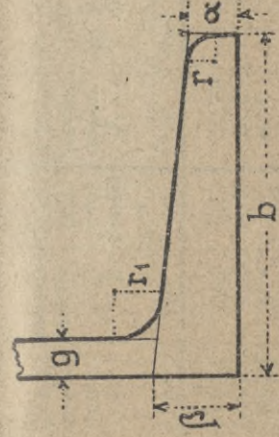
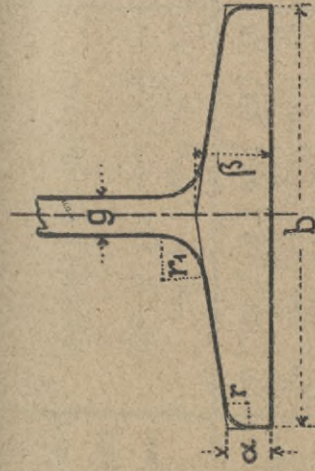
Wyjątki co do b przy kształtówkach l. 18 a, 22 a, 24 a i 28 a.

rys: 132.



rys: 133.





KSZTAŁTÓWKA I	b	g	α	β	r	r_1
Nr 6	44	4	4	7	2,4	4,8
"	52	4	4,8	7,5	2,4	4,8
"	42	3,9	4,5	7,3	2,3	3,9
"	46	4,2	4,8	8,4	2,5	4,2
"	60	4,5	4,8	9,6	2,7	5,4
"	50	4,5	5,4	8,3	2,7	4,5
"	68	5,0	6,0	10,0	3,1	6,2
"	58	5,1	5,5	9,8	3,1	5,1
"	72	5,5	6,8	10,9	3,3	6,6
"	62	5,4	6,2	10,0	3,2	5,4
"	76	6,0	6,8	10,9	3,5	7,0
"	66	5,7	6,4	11,4	3,4	5,7
"	80	6,0	7,5	11,0	3,6	7,2
"	70	6,0	7,4	11,2	3,6	6,0
"	84	6,5	7,5	12,0	3,9	7,8
"	90	7,0	8,9	14,0	4,2	8,4
"	135	7,0	7,5	14,5	4,2	8,4
"	36	8,0	9,6	15,3	4,8	9,6
"	99	8,5	9,9	15,3	5,1	10,2
"	102	9,0	10,0	16,0	5,4	10,8
"	135	9,0	10,1	16,3	5,4	10,8
"	105	9,0	11,0	17,9	5,5	11,0
"	108	9,5	11,4	18,4	5,7	11,4
"	135	9,5	10,6	19,3	5,7	11,4
"	111	10,0	11,6	18,5	6,0	12,0
"	114	10,5	12,3	18,8	6,3	12,6
"	120	11,0	15,2	20,0	6,6	13,2

KSZTAŁTÓWKA I	b	g	α	β	r	r_1
Nr 28a	150	14,0	14,2	21,3	6,6	13,2
"	30	12,0	15,8	20,5	7,2	14,4
"	32	13,0	15,5	23,6	7,8	15,6
"	35	14,0	17,0	25,6	8,4	16,8
"	40	16,0	19,5	29,6	9,6	19,2
"	45	18,0	21,6	34,0	10,8	21,6
"	50	20,0	22,2	40,0	12,0	24,0

KSZTAŁTÓWKA I	b	g	α	β	r	r_1	
Nr 6	40	5,5	6,8	10,0	3,3	8,0	
"	45	6,0	7,4	10,5	3,6	9,0	
"	50	6,5	8,0	11,9	3,9	9,5	
"	55	7,0	9,2	12,5	4,2	10,5	
"	60	7,0	8,8	12,8	4,2	10,5	
"	60	7,5	8,9	13,5	4,5	12,0	
"	15	6,0	5,6	7,8	3,1	7,5	
"	65	6,0	7,0	9,5			
"	65	8,0	9,3	15,0	4,8	12,0	
"	70	8,5	10,0	15,0	5,1	12,5	
"	75	9,0	10,3	17,9	5,4	13,5	
"	80	9,5	12,4	15,8	6,7	14,0	
"	85	10,0	11,3	19,6	6,0	15,0	
"	90	10,5	11,9	20,4	6,3	15,5	
"	95	11,0	13,0	21,5	6,6	16,5	
"	100	11,5	14,0	21,7	6,9	17,0	
"	30a	78	17,0	16,0	19,0	6,5	12,0

Liczba kształtówki	wymary w milimetrach						nachylenie wewnętrznych boków stopy p/o	prze-krój A	ciężar g	ze względu na oś XX			ze względu na oś YY					
	h	b	d	d ₁	r ₁	r				cm ²	kg/m	moment bezwładności J _x	moment oporu J _x : 2	pro-mień bezwładności α	cm ⁴	moment oporu J _y : 2	cm ³	Promień bezwładności α ₁
8	80	52	4,0	6,0	2,4	4,8	9,07	7,07	97,1	24,3	3,17	12,75	4,90	1,19				
10	100	60	4,5	7,0	2,7	5,4	12,42	9,69	207,9	41,6	4,08	29,7	7,57	1,35				
12	120	68	5,0	8,0	3,1	6,2	16,27	12,69	392,7	65,4	4,91	37,8	11,1	1,52				
13	130	72	5,5	8,5	3,3	6,6	18,67	14,56	523,9	80,6	5,30	47,6	13,2	1,60				
14	140	76	6,0	9,0	3,5	7,0	20,54	16,02	659,5	94,2	5,67	55,6	15,4	1,65				
15	150	80	6,0	9,0	3,6	7,2	22,57	17,60	840,1	112,0	6,10	68,6	17,1	1,74				
16	160	84	6,5	9,5	3,9	7,8	25,43	19,83	1018	133,4	6,48	83,6	19,9	1,81				
18	180	90	7,0	11,0	4,2	8,4	31,20	24,34	1662	184,6	7,30	119,7	26,6	1,96				
18 ^a	180	135	7,0	11,0	4,2	8,4	41,10	32,06	2363	262,6	7,58	370,7	54,9	3,00				
20	200	96	8,0	12,0	4,8	9,6	37,55	29,29	2428	242,8	8,04	155,5	33,1	2,08				
21	210	99	8,5	12,5	5,1	10,2	40,98	31,96	2898	276,0	8,40	180,9	36,5	2,15				
22	220	102	9,0	13,0	5,4	10,8	44,52	34,73	3434	312,2	8,78	205,5	40,3	2,24				
22 ^a	220	135	9,0	13,0	5,4	10,8	53,10	41,42	4347	395,2	9,05	458,0	67,9	2,94				
23	230	105	9,0	14,0	5,5	11,0	48,15	37,56	4097	356,3	9,22	242,2	46,1	2,24				
24	240	108	9,5	14,5	5,7	11,4	51,97	40,54	4784	398,7	9,59	273,1	50,6	2,29				
24 ^a	240	135	9,5	14,5	5,7	11,4	59,80	46,64	5775	451,3	9,83	517,3	76,6	2,94				
25	250	111	10,0	15,0	6,0	12,0	55,97	43,66	5554	444,3	10,33	306,4	55,2	2,34				
26	260	114	10,5	15,5	6,3	12,6	60,11	46,89	6413	493,3	10,33	342,9	60,2	2,39				
28	280	120	11,0	17,0	6,6	13,2	68,65	53,55	8523	608,8	11,14	439,2	73,2	2,53				
28 ^a	280	150	11,0	17,0	6,6	13,2	78,85	61,50	10274	733,9	11,41	827,0	110,3	3,24				
30	300	126	12,0	18,0	7,2	14,4	77,97	60,82	10997	733,1	11,88	637,8	85,4	2,63				
32	320	132	13,0	19,0	7,8	15,6	87,99	68,63	13973	873,3	12,60	651,6	98,7	2,72				
35	350	141	14,0	21,0	8,4	16,8	103,97	80,78	19690	1125,1	13,79	871,8	123,7	2,90				
40	400	156	16,0	24,0	9,6	19,2	132,74	103,54	32683	1634,1	15,69	1356	173,8	3,20				
45	450	171	18,0	27,0	10,8	21,6	165,52	129,11	51234	2277,0	17,59	2003	234,3	3,48				

Przykłady. Na belkach żelaznych spoczywają sklepienia płaskie jako powała. Belki żelazne o rozpiętości 5,5 m kładziemy w odstępach 1,2 m. Ciężar własny powały wraz z obciążeniem tłumem ludzi jest 750 kg/m^2 . Jakie mają być wymiary kształtówki I?

Na jeden metr bieżący kształtówki przypada powierzchnia powały $1,2 \text{ m}^2$, a więc ciężar na 1 cm bieżący $g = \frac{1,2 \cdot 750}{100} = 9 \text{ kg/cm}^2$. Moment największy dla obciążenia zupełnego jest w środku belki $M = \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{8} 9 \cdot 5,5^2 = 340312 \text{ kgcm}$. Jeżeli przyjmiemy $\tau = 1000 \text{ kg/cm}^2$, to $\frac{M}{\tau} = 340,3 \text{ cm}^3$, a więc obieramy kształtówkę I.23 dla której $\frac{I}{e}$ równa się $356,3 \text{ cm}^3$.

2. Balkon wystający na 1,2 m podparty jest kształtówkami I w odstępach 1,25 m. Ciężar własny balkonu równo rozdzielony wynosi 390 kg/m^2 , ciężar ruchomy stanowi tłum ludzi, który przyjmujemy 400 kg/m^2 , ciężar poręczy wynosi 300 kg/m .

Każdy ze średnich dźwigarów jest obciążony ciężarem jednostajnie rozdzielonym $(390 + 400) 1,25 = 987,5 \text{ kg/m}$ i skupionym działającym na końcu $300 \times 1,25 = 375 \text{ kg}$, zatem wedle 30) najw. $M = ql \cdot \frac{1}{2} l + P \cdot l = \frac{1}{2} ql^2 + Pl = = \frac{1}{2} 0,988 \cdot 1,2^2 + 0,375 \cdot 1,2 = 0,711 + 0,450 = 1,161 \text{ tm}$, a dla $\tau = 1000 \text{ kg/cm}^2$ $\frac{M}{\tau} = \frac{116100}{1000} = 116,1 = \frac{I}{e}$.

A zatem przyjmiemy kształtówki I.16, dla której $\frac{I}{e} = 133,4 \text{ cm}^3$.

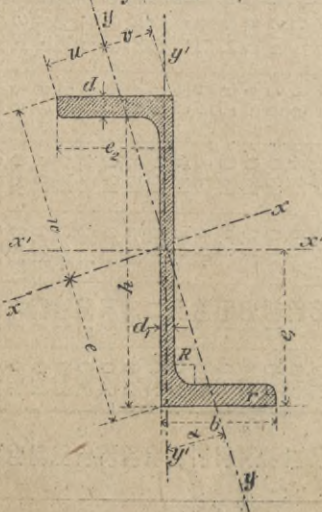
Dźwigary skrajne niosą ciężar jednostajnie rozdzielony $(390 + 400) \times \frac{1,25}{2} + 300 = 794 \text{ kg/m}$ i skupiony na końcu $300 \times \frac{1,25}{2} = 188 \text{ kg}$, zatem

$$\text{najw. } M = \frac{1}{2} 0,794 \cdot 1,2^2 + 0,188 \cdot 1,2 = 0,572 + 0,225 = 0,797 \text{ tm}.$$

$$\text{Zatem } \frac{M}{\tau} = \frac{I}{e} = \frac{79700}{1000} = 79,7 \text{ cm}^3.$$

Moglibyśmy więc przyjąć dla dźwigarów skrajnych kształtówki I.13.

rys:134



§. 54. Inne kształtówki.

Towarzystwo inżynierów i architektów w Wiedniu ustanowiło pewne wymiary także dla innych kształtówek, które poniżej podajemy zestawione w tablicach wraz z odległościami środka ciężkości od podstawy i momentami i promieniami bezwładności.

I. Kształtówka U (n. U Eisen) (rys. 133).

Dla przekroi normalnych jest $b=0,25 h + 25 mm$ (zaokrąglone na 5 mm)

$d=0,025 h + 4 mm$ (zaokrąglone na 0,5 mm)

$d_1=1,5 d,$

$r_1=0,6 d,$

$r=1,5 d,$

$p=(0,01 h + 7)\%$

Liczba kształtówki	wymiaru w milimetrach					nachylenie wewn. boków $\frac{p}{\delta}\%$	Prze-kroj A	ciężar g	odstęp środka ciężkości e	ze względu na oś XX			ze względu na oś YY			
	h	b	d	d_1	r_1					r	moment		pro-mień bez-wład-ności a	moment		pro-mień bez-wład-ności a_1
											bez-władności J_x	oporu $J_x : \frac{h}{2}$		bez-władności J_y	oporu $J_y : (b-e)$	
							cm^2	kg/m	cm	cm^4	cm^3	cm^4	cm^3			
6	60	40	5,5	8,0	3,3	8,0	9,01	7,03	1,44	47,8	15,9	12,8	5,0	1,19		
8	80	45	6,0	9,0	3,6	9,0	12,06	9,41	1,55	116,0	29,0	21,8	7,4	1,34		
10	100	50	6,5	9,5	3,9	9,5	15,03	11,72	1,63	227,0	45,4	32,8	9,7	1,48		
12	120	55	7,0	10,5	4,2	10,5	18,80	14,67	1,74	409,6	68,3	49,1	13,1	1,62		
13	130	60	7,0	10,5	4,2	10,5	20,55	16,03	1,87	533,0	82,0	64,8	15,7	1,78		
14	140	60	7,5	11,0	4,5	11,0	22,40	17,47	1,83	661,8	94,5	69,2	16,6	1,76		
16	160	65	8,0	12,0	4,8	12,0	26,89	20,98	1,95	1038	129,7	97,1	21,4	1,90		
18	180	70	8,5	12,5	5,1	12,5	31,12	24,28	2,04	1513	163,2	128	25,9	2,03		
20	200	75	9,0	13,5	5,4	13,5	36,34	28,35	2,17	2181	218,1	171	32,2	2,17		
22	220	80	9,5	14,0	5,7	14,5	41,19	32,13	2,26	2979	270,8	218	38,0	2,30		
24	240	85	10,0	15,0	6,0	15,0	47,14	36,77	2,38	4056	338,0	282	46,0	2,45		
26	260	90	10,5	15,5	6,3	15,5	52,62	41,05	2,47	5293	407,2	348	53,2	2,57		
28	280	95	11,0	16,5	6,6	16,5	59,31	46,27	2,60	6914	493,9	437	63,3	2,70		
30	300	100	11,5	17,0	6,9	17,0	65,39	50,99	2,68	8724	581,6	536	73,2	2,86		

II. Kształtówki Z, Zetówki (n. Z Eisen) (rys. 134).

$$R = \bar{d}, r = 0,4 \bar{d}, p = 0\%$$

Liczba kształtówki	Wymiary w milimetrach						Przekrój A cm ²	Ciężar g jednostkowy	Odstęp środka ciężkości		Ze względu na os		Odstępy osi w mm				Ze względu na os główną						
	h	b	d ₁	d	r	R			e ₁	e ₂	moment bezwładności		Polożenie osi głównych		XX		YY						
											I _x	I _y	s ₁	s ₂	I	I/w	a	I'	I/v	a ₁			
																					cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴
6	60	40	5,5	8,0	3,3	8,0	9,0	7,02	30	37,3	48,4	27,1	0,694	13,5	19,4	47,0	22,7	62,9	13,4	2,64	12,6	6,5	1,18
8	80	45	6,0	9,0	3,6	9,0	12,1	9,34	40	42,0	116,7	43,7	0,550	17,6	21,9	55,3	33,6	147,6	26,7	3,49	13,7	6,3	1,06
10	100	50	6,5	9,5	3,9	9,5	15,1	11,8	50	46,8	226,7	63,7	0,461	21,5	23,9	65,0	44,0	270,5	41,6	4,33	19,8	8,3	1,15
12	120	55	7,0	10,5	4,2	10,5	18,9	14,7	60	51,5	411,3	94,2	0,399	25,6	25,5	74,8	54,4	467,2	62,5	4,97	37,2	14,6	1,40
14	140	60	7,5	11,0	4,5	11,0	22,5	17,5	70	56,3	666,7	128,5	0,360	29,2	27,2	84,9	64,6	746,8	88,0	5,76	48,4	17,6	1,47
16	160	65	8,0	12,0	4,8	12,0	27,0	21,1	80	61,0	1046	179,4	0,335	32,4	29,2	95,2	74,6	1161	121,9	6,56	69,4	22,0	1,54
18	180	70	8,5	12,5	5,1	12,5	31,3	24,4	90	65,8	1524	233,4	0,313	35,8	31,1	10,6	84,6	1664	157,6	7,29	93,0	30,0	1,72
20	200	75	9,0	13,5	5,4	13,5	35,5	27,7	100	70,5	2197	310,9	0,299	38,9	33,0	11,6	94,5	2383	205,4	8,19	125,2	37,9	1,88

IV. Kątówki (n. *Winkelleisen*,

A. Równoramienne

$$r=d, r_1=0,5d,$$

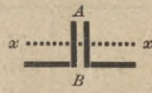
Liczba kątówki	Wymiary w mm				Prze- krój A	Ciężar g	Położenie osi głównych i środka cięż- kości			Moment bez- władności ze względ- u na podstawę I_{ab}
	b	d	r_1	r			w	e	v	
4 ^{1/2}	45	5	6,0	3,0	4,29	3,35	3,18	1,82	3,21	15,0
	45	6	6,0	3,0	5,08	3,96	3,18	1,88	3,17	18,2
	45	7	6,0	3,0	5,85	4,56	3,18	1,92	3,14	21,4
5	50	5	6,0	3,0	4,79	3,74	3,54	1,99	3,59	20,6
	50	6	6,0	3,0	5,68	4,43	3,54	2,05	3,55	24,9
	50	7	6,0	3,0	6,55	5,11	3,54	2,11	3,51	29,2
5 ^{1/2}	55	6	7,0	3,5	6,29	4,91	3,89	2,26	3,93	32,9
	55	7	7,0	3,5	7,26	5,67	3,89	2,28	3,89	38,7
	55	8	7,0	3,5	8,21	6,40	3,89	2,33	3,85	44,5
6	60	6	7,5	3,7	6,90	5,38	4,24	2,39	4,31	42,6
	60	7	7,5	3,7	7,97	6,22	4,24	2,45	4,27	50,1
	60	8	7,5	3,7	9,02	7,04	4,24	2,50	4,23	57,6
	60	9	7,5	3,7	10,05	7,84	4,24	2,56	4,19	65,1
6 ^{1/2}	65	6	8,0	4,0	7,51	5,86	4,60	2,57	4,68	53,9
	65	7	8,0	4,0	8,68	6,77	4,60	2,62	4,65	63,3
	65	8	8,0	4,0	9,83	7,67	4,60	2,67	4,60	72,8
	65	9	8,0	4,0	10,96	8,55	4,60	2,73	4,57	82,4
	65	10	8,0	4,0	12,07	9,41	4,60	2,77	4,54	92,1
7	70	7	8,5	4,2	9,39	7,32	4,95	2,80	5,02	79,1
	70	8	8,5	4,2	10,64	8,30	4,95	2,84	4,99	90,9
	70	9	8,5	4,2	11,87	9,26	4,95	2,90	4,95	102,7
	70	10	8,5	4,2	13,08	10,20	4,95	2,97	4,90	114,6
7 ^{1/2}	75	8	10,0	5,0	11,47	8,95	5,30	3,01	5,37	110,9
	75	9	10,0	5,0	12,80	9,98	5,30	3,07	5,33	125,5

fr. cornière, fer en L, an. angle iron)

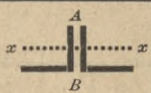
(n. gleichschenkelig) (rys. 136).

$p = 0\%$.

Ze względu na oś X_1X_1			Ze względu na oś główną XX			Ze względu na oś główną YY			Dwie znitowane kątowniki			
moment		promień bezwładności a_0	moment		promień bezwładności a	moment		promień bezwładności a_1	Ze względu na oś AB		Ze względu na oś XX	
bezwładności I_0	oporu $I_0 : v$		bezwładności I_x	oporu $I_x : w$		bezwładności I_y	oporu $I_y : e$		moment	promień	moment	promień
cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	bezwładności		bezwładności	
									$2 I_{ab}$	a_{ab}	$2 I_{xx}$	a_{xx}
									cm^4	cm	cm	cm
7,86	2,45	1,35	12,5	3,94	1,71	3,19	1,75	0,86	30,0	1,87	15,7	1,35
9,17	2,89	1,34	14,6	4,59	1,69	3,75	1,99	0,86	36,3	1,89	19,3	1,34
10,54	3,36	1,34	16,5	5,20	1,68	4,56	2,38	0,88	42,7	1,91	21,1	1,34
11,2	3,11	1,53	17,5	4,95	1,91	4,84	2,43	1,01	41,1	2,07	22,3	1,53
12,9	3,64	1,51	20,5	5,78	1,90	5,41	2,64	0,98	49,8	2,09	25,9	1,51
14,7	4,20	1,50	23,2	6,56	1,88	6,14	2,91	0,97	58,5	2,11	29,4	1,50
17,4	4,43	1,66	27,6	7,09	2,09	7,21	3,19	1,07	65,8	2,29	34,8	1,66
19,9	5,11	1,65	31,4	8,07	2,08	8,31	3,64	1,07	77,3	2,31	39,7	1,65
22,1	5,75	1,64	35,0	9,00	2,07	9,27	3,98	1,05	89,0	2,33	44,3	1,64
22,9	5,31	1,82	36,3	8,56	2,29	9,54	3,99	1,18	85,2	2,48	45,8	1,82
26,2	6,14	1,81	41,4	9,77	2,28	11,0	4,49	1,17	100,1	2,51	52,4	1,81
29,3	6,93	1,80	46,3	10,9	2,27	12,3	4,93	1,17	115,1	2,53	58,6	1,80
32,2	7,69	1,79	50,9	12,0	2,25	13,6	5,29	1,16	130,3	2,55	64,4	1,79
29,0	6,20	1,97	46,6	19,1	2,49	11,4	4,44	1,23	107,8	2,68	58,0	1,97
33,6	7,23	1,97	53,3	11,6	2,48	13,9	5,31	1,27	126,7	2,70	67,2	1,97
37,3	8,11	1,95	59,7	13,0	2,46	14,9	5,58	1,23	145,7	2,72	74,6	1,95
41,6	9,10	1,95	65,7	14,3	2,45	17,5	6,41	1,26	164,8	2,74	83,2	1,95
45,7	10,07	1,95	71,5	15,5	2,43	19,9	7,18	1,28	184,1	2,76	91,4	1,95
42,3	8,42	2,12	67,3	13,6	2,68	17,3	6,18	1,36	158,2	2,90	84,6	2,12
47,9	9,60	2,12	75,5	15,2	2,66	20,3	7,12	1,38	181,7	2,92	95,8	2,12
52,8	10,7	2,11	83,3	16,8	2,65	22,3	7,69	1,37	205,4	2,94	105,6	2,11
56,9	11,6	2,09	90,7	18,3	2,63	23,1	7,78	1,33	229,2	2,96	113,8	2,09
58,9	11,0	2,27	93,3	17,6	2,85	24,5	8,14	1,46	221,8	3,11	117,8	2,27
65,2	12,2	2,26	103,2	19,5	2,84	27,2	8,86	1,46	250,9	3,13	130,4	2,26



Liczba kątowniki	Wymiary w mm				Prze- krój <i>A</i>	Ciężar <i>g</i>	Położenie osi głównych i środka cięż- kości			Moment bez- władności ze względ- u na podstawę <i>I_{ab}</i>
	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>r₁</i>	<i>r</i>			<i>w</i>	<i>e</i>	<i>v</i>	
					<i>cm²</i>	<i>kg/m</i>	<i>cm</i>			<i>cm⁴</i>
7 ^{1/2}	75	10	10,0	5,0	14,11	11,01	5,30	3,13	5,29	140,1
	75	11	10,0	5,0	15,40	12,01	5,30	3,18	5,24	154,9
	75	12	10,0	5,0	16,67	13,00	5,30	3,24	5,21	169,9
8	80	8	10,0	5,0	12,27	9,57	5,66	3,18	5,75	134,6
	80	9	10,0	5,0	13,70	10,69	5,66	3,24	5,71	152,2
	80	10	10,0	5,0	15,11	11,79	5,66	3,31	5,66	169,9
	80	11	10,0	5,0	16,50	12,87	5,66	3,35	5,63	187,8
	80	12	10,0	5,0	17,87	13,94	5,66	3,41	5,59	205,9
9	90	9	11,5	5,5	15,52	12,11	6,36	3,59	6,46	215,9
	90	10	11,5	5,5	17,13	13,36	6,36	3,65	6,42	240,9
	90	11	11,5	5,5	18,72	14,60	6,36	3,70	6,38	266,1
	90	12	11,5	5,5	20,29	15,83	6,36	3,76	6,34	291,4
	90	13	11,5	5,5	21,84	17,03	6,36	3,80	6,31	316,9
10	100	10	12,0	6,0	19,16	14,94	7,07	3,99	7,18	327,0
	100	11	12,0	6,0	20,95	16,34	7,07	4,04	7,14	361,3
	100	12	12,0	6,0	22,72	17,72	7,07	4,10	7,10	395,8
	100	13	12,0	6,0	24,47	19,09	7,07	4,17	7,05	430,5
	100	14	12,0	6,0	26,40	20,59	7,07	4,20	7,03	465,3
12	120	11	13,0	6,5	25,37	19,79	8,49	4,74	8,64	626,3
	120	12	13,0	6,5	27,54	21,48	8,49	4,79	8,61	684,3
	120	13	13,0	6,5	29,69	23,16	8,49	4,86	8,56	744,7
	120	14	13,0	6,5	31,82	24,82	8,49	4,90	8,53	804,2
	120	15	13,0	6,5	33,93	26,47	8,49	4,96	8,49	864,0
14	140	13	14,5	7,2	34,93	27,25	9,90	5,57	10,06	1178
	140	14	14,5	7,2	37,46	29,22	9,90	5,61	10,03	1272
	140	15	14,5	7,2	39,97	31,18	9,90	5,66	10,00	1366
	140	16	14,5	7,2	42,46	33,12	9,90	5,73	9,95	1460
16	160	15	16,5	8,2	46,04	35,91	11,31	6,35	11,51	2030
	160	16	16,5	8,2	48,93	38,17	11,31	6,41	11,47	2170
	160	17	16,5	8,2	51,80	40,40	11,31	6,48	11,42	2310
	160	18	16,5	8,2	54,65	42,63	11,31	6,52	11,39	2451

Ze względu na oś $X_1 X_1$			Ze względu na oś główną XX			Ze względu na oś główną YY			Dwie znitowane katówki 			
moment		promień bezwładności σ_0	moment		promień bezwładności a	moment		promień bezwładności a_1	Ze względu na oś AB		Ze względu na oś XX	
bezwładności I_0	oporu $I_0 : v$		bezwładności I_x	oporu $I_x : w$		bezwładności I_y	oporu $I_y : e$		moment	promień	moment	promień
sm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^4	cm	cm^4	cm^3	cm	$2I_{ab}$	a_{ab}	$2I_{xx}$	a_{xx}
71,8	13,6	2,26	112,5	21,2	2,82	31,1	9,94	1,48	280,3	3,15	143,6	2,26
76,9	14,7	2,23	121,7	22,9	2,81	32,1	10,1	1,44	309,8	3,17	153,8	2,23
82,5	15,8	2,22	130,3	24,6	2,80	34,7	10,7	1,44	339,8	3,19	165,0	2,22
72,5	12,6	2,43	114,6	20,2	3,06	30,4	9,56	1,57	269,2	3,31	145,0	2,43
80,4	14,1	2,42	126,9	22,4	3,04	33,9	10,5	1,57	304,5	3,33	160,8	2,42
87,2	15,4	2,40	138,6	24,5	3,03	35,8	10,8	1,54	339,9	3,35	174,4	2,40
95,1	16,9	2,40	149,9	26,5	3,01	40,3	12,0	1,56	375,5	3,37	190,2	2,40
102,1	18,3	2,39	160,7	28,4	3,00	43,5	12,7	1,56	411,7	3,39	204,2	2,39
115,8	17,9	2,73	183,8	28,9	3,44	47,8	13,3	1,75	431,7	3,73	231,6	2,73
126,9	19,8	2,72	201,2	31,6	3,43	52,6	14,4	1,75	481,8	3,75	253,8	2,72
137,6	20,6	2,71	218,1	34,3	3,41	57,1	15,4	1,75	532,2	3,77	275,2	2,71
147,8	23,3	2,70	234,3	36,8	3,40	61,3	16,3	1,74	582,9	3,79	295,6	2,70
158,9	25,2	2,70	250,0	39,3	3,38	67,8	17,8	1,76	633,9	3,81	317,8	2,70
174,6	24,3	3,02	280,3	39,0	3,83	68,9	17,3	1,90	654,1	4,13	349,2	3,02
189,9	26,6	3,01	304,3	43,0	3,81	75,5	18,7	1,90	722,7	4,15	379,8	3,01
204,7	28,8	3,00	327,6	46,3	3,80	81,8	19,9	1,90	791,6	4,17	409,4	3,00
217,6	30,9	2,98	350,1	49,5	3,78	85,1	20,0	1,87	860,9	4,19	435,2	2,98
232,4	33,1	2,97	371,8	52,6	3,75	93,0	22,2	1,88	930,6	4,20	464,8	2,97
339,9	39,3	3,66	547,1	64,4	4,64	132,7	28,0	2,28	1253	4,97	679,8	3,66
367,8	42,7	3,65	589,7	69,5	4,63	145,9	30,5	2,30	1369	4,99	735,6	3,65
393,4	46,0	3,64	631,3	74,4	4,61	155,5	32,0	2,29	1489	5,01	786,8	3,64
421,1	49,4	3,64	671,6	79,1	4,59	170,6	34,8	2,32	1608	5,03	842,2	3,64
446,0	52,5	3,62	710,8	83,7	4,58	181,2	36,5	2,31	1728	5,05	892,0	3,62
636	63,2	4,27	1015	102,6	5,39	256	46,0	2,71	2356	5,81	1271	4,27
681	67,9	4,26	1083	109,4	5,38	280	49,9	2,74	2544	5,83	1363	4,26
726	72,6	4,26	1149	116,1	5,36	303	53,5	2,75	2732	5,85	1453	4,26
764	76,8	4,24	1214	122,6	5,35	314	54,8	2,72	2921	5,87	1528	4,24
1102	95,7	4,89	1747	154,3	6,15	457	72,0	3,15	4060	6,64	2203	4,89
1166	101,6	4,88	1848	163,4	6,14	484	75,5	3,15	4340	6,66	2332	4,88
1224	107,2	4,86	1947	172,2	6,13	501	77,3	3,11	4621	6,68	2448	4,86
1291	113,3	4,86	2044	180,7	6,12	538	82,5	3,14	4903	6,77	2582	4,86

B. Nierównoramienne

$$r=d,$$

Liczba przekroju	Wymiary w milimetrach					Powierzchnia przekroju A cm^2	Ciężar jednostkowy g kg/m	Odstęp środka ciężkości w cm		Położenie osi głównej YY $st\alpha$	Odstępy od osi głównych cm w centymetrach			
	b	b_1	d	r	r_1			e	e_1		w	s	v	t
$\frac{5}{7\frac{1}{2}}$	50	75	7	7,5	3,7	8,32	6,49	2,47	1,24	0,430	5,11	3,76	2,62	2,12
	50	75	8	7,5	3,7	9,42	7,35	2,52	1,29	0,428	5,08	3,78	2,60	2,18
$\frac{6}{9}$	60	90	8	9,0	4,5	11,45	8,93	2,96	1,50	0,431	6,14	4,51	3,13	2,55
	60	90	9	9,0	4,5	12,78	9,97	3,00	1,52	0,430	6,11	4,53	3,12	2,58
	60	90	10	9,0	4,5	14,09	10,99	3,04	1,55	0,428	6,09	4,54	3,12	2,62
$\frac{7}{10\frac{1}{2}}$	70	105	9	10,0	5,0	15,05	11,74	3,44	1,71	0,436	7,16	5,27	3,66	2,94
	70	105	10	10,0	5,0	16,61	12,96	3,48	1,75	0,433	7,14	5,28	3,66	2,99
	70	105	11	10,0	5,0	18,15	14,16	3,59	1,79	0,430	7,12	5,29	3,65	3,04
$\frac{8}{12}$	80	120	10	11,0	5,5	19,13	14,92	3,92	1,95	0,435	8,19	6,01	4,24	3,35
	80	120	11	11,0	5,5	20,92	16,32	3,96	1,99	0,432	8,17	6,02	4,23	3,40
	80	120	12	11,0	5,5	22,69	17,70	4,00	2,02	0,430	8,15	6,03	4,21	3,44
$\frac{9}{13\frac{1}{2}}$	90	135	11	12,0	6,0	23,70	18,48	4,40	2,18	0,435	9,21	6,76	4,77	3,75
	90	135	12	12,0	6,0	25,72	20,06	4,44	2,22	0,433	9,20	6,77	4,77	3,80
	90	135	13	12,0	6,0	27,72	21,62	4,48	2,26	0,431	9,18	6,78	4,76	3,85
$\frac{10}{15}$	100	150	12	13,0	6,5	28,74	22,42	4,89	2,42	0,436	10,22	7,51	5,26	4,18
	100	150	13	13,0	6,5	30,99	24,17	4,93	2,46	0,435	10,21	7,53	5,27	4,22
	100	150	14	13,0	6,5	33,22	25,91	4,97	2,50	0,434	10,20	7,55	5,27	4,27
$\frac{11}{16\frac{1}{2}}$	110	165	13	14,0	7,0	34,27	26,73	5,38	2,66	0,437	11,25	8,26	5,81	4,59
	110	165	14	14,0	7,0	36,75	28,66	5,41	2,69	0,435	11,24	8,28	5,82	4,63
	110	165	15	14,0	7,0	39,21	30,58	5,45	2,73	0,433	11,23	8,29	5,82	4,68
$\frac{6}{8}$	60	80	7	8,0	4,0	9,38	7,31	2,51	1,53	0,545	5,55	4,34	2,92	2,55
	60	80	8	8,0	4,0	10,63	8,29	2,55	1,56	0,544	5,54	4,36	2,93	2,59
	60	80	9	8,0	4,0	11,86	9,25	2,59	1,60	0,542	5,52	4,38	2,93	2,64
$\frac{8}{10}$	80	100	8	10,0	5,0	13,87	10,82	3,03	2,04	0,626	6,99	5,72	3,69	3,34
	80	100	9	10,0	5,0	15,50	12,09	3,07	2,08	0,624	6,98	5,73	3,69	3,39
	80	100	10	10,0	5,0	17,11	13,35	3,11	2,12	0,622	6,97	5,74	3,69	3,44
	80	100	11	10,0	5,0	18,70	14,59	3,15	2,16	0,620	6,96	5,75	3,70	3,49
$\frac{9}{12}$	90	120	10	11,0	5,5	20,13	15,70	3,75	2,27	0,547	8,32	6,52	4,40	3,79
	90	120	11	11,0	5,5	22,02	17,17	3,79	2,31	0,545	8,31	6,53	4,40	3,84
	90	120	12	11,0	5,5	23,89	18,63	3,83	2,35	0,543	8,30	6,54	4,40	3,89
$\frac{9}{13}$	90	130	11	12,0	6,0	23,15	18,05	4,20	2,22	0,469	8,91	6,68	4,64	3,79
	90	130	12	12,0	6,0	25,11	19,59	4,24	2,26	0,467	8,89	6,69	4,64	3,84
	90	130	13	12,0	6,0	27,07	21,11	4,27	2,29	0,464	8,88	6,70	4,65	3,88
$\frac{10}{12}$	100	120	11	12,0	6,0	23,15	18,05	3,63	2,64	0,679	8,41	7,14	4,43	4,22
	100	120	12	12,0	6,0	25,11	19,59	3,67	2,68	0,677	8,40	7,15	4,44	4,28
	100	120	13	12,0	6,0	27,07	21,11	3,71	2,72	0,676	8,39	7,15	4,45	4,33
$\frac{10}{14}$	100	140	12	13,0	6,5	27,54	21,48	4,47	2,50	0,496	9,65	7,34	5,07	4,22
	100	140	13	13,0	6,5	29,69	23,16	4,51	2,54	0,495	9,63	7,36	5,07	4,25
	100	140	14	13,0	6,5	31,82	24,82	4,55	2,57	0,494	9,61	7,37	5,07	4,28

(n. ungleichschenkelig) (rys. 137).

$$r_1 = \frac{1}{2} d.$$

Moment bezwładności w cm^4 ze względu na krawędź zewn.		Ze względu na oś									
		$X_1 X_1$		$Y_1 Y_1$		XX		YY			
		krótkiego	długiego	I'	a'	I_1'	a_1	I	a	I_1	a_1
		ramienia									
I_0	I_0'	cm^4	cm	cm^4	cm	cm^4	cm	cm^4	cm		
97,4 ^a	29,3	46,6	2,37	16,5	1,41	53,4	2,53	9,7	1,08		
111,7	33,9	51,9	2,35	18,2	1,39	59,5	2,51	10,6	1,06		
192,0	57,6	91,7	2,83	31,9	1,67	105,3	3,03	18,3	1,28		
216,7	65,4	101,7	2,82	35,7	1,68	116,7	3,02	20,7	1,27		
241,4	73,4	111,2	2,81	39,5	1,67	127,5	3,01	23,2	1,27		
343,1	102,9	165,0	3,32	58,9	1,98	189,9	3,55	34,0	1,50		
382,3	115,2	181,1	3,31	64,3	1,97	208,0	3,54	37,4	1,50		
421,6	127,7	196,7	3,29	69,5	1,96	225,6	3,53	40,6	1,50		
569,5	170,6	275,5	3,80	97,9	2,26	317,0	4,07	56,8	1,72		
627,9	138,9	299,8	3,79	106,1	2,25	344,2	4,05	61,7	1,72		
686,4	207,4	323,4	3,78	114,8	2,25	368,0	4,03	67,5	1,72		
892,2	267,2	433,4	4,28	154,6	2,55	498,4	4,58	89,6	1,94		
975,3	293,1	468,4	4,26	166,3	2,54	538,0	4,57	96,7	1,94		
1058,5	319,3	502,2	4,25	177,6	2,53	576,2	4,56	103,5	1,93		
1335,7	399,9	648,5	4,75	231,5	2,84	747,0	5,10	134,0	2,16		
1449,6	435,3	696,5	4,74	247,8	2,83	801,0	5,08	143,4	2,15		
1563,7	471,1	743,2	4,73	263,5	2,82	854,0	5,07	153,0	2,15		
1926,3	576,3	934,5	5,22	333,7	3,12	1076,3	5,60	191,9	2,37		
2077,8	623,5	1002,1	5,22	357,4	3,12	1152,4	5,60	207,1	2,37		
2229,7	671,1	1065,2	5,21	379,0	3,11	1223,8	5,59	220,3	2,37		
118,0	50,1	58,9	2,51	28,2	1,73	71,9	2,77	15,2	1,27		
135,3	57,7	66,2	2,50	31,9	1,73	80,8	2,76	17,3	1,27		
152,8	65,4	73,2	2,48	35,0	1,72	89,2	2,74	19,1	1,27		
262,8	134,9	135,5	3,13	77,2	2,36	172,9	3,53	39,7	1,69		
296,6	152,8	150,6	3,12	85,6	2,35	192,0	3,52	44,2	1,69		
330,7	170,6	165,2	3,11	93,8	2,34	210,4	3,51	48,6	1,68		
364,7	188,7	179,2	3,10	101,4	2,33	227,9	3,49	52,7	1,68		
569,9	241,9	286,9	3,78	138,2	2,62	350,4	4,17	74,7	1,93		
628,5	267,4	312,3	3,77	149,9	2,61	380,9	4,16	81,3	1,92		
687,3	293,1	336,8	3,75	161,2	2,60	410,4	4,14	87,6	1,91		
796,7	267,0	388,3	4,10	152,9	2,57	454,6	4,43	86,6	1,93		
871,0	292,8	419,5	4,09	164,5	2,56	491,0	4,42	93,5	1,93		
945,5	319,0	452,0	4,09	177,2	2,56	527,4	4,41	101,8	1,94		
627,1	364,4	322,0	3,73	203,0	2,96	423,6	4,28	101,4	2,09		
685,9	399,2	347,7	3,72	218,9	2,95	456,8	4,27	109,8	2,09		
744,9	434,3	372,4	3,71	234,0	2,94	488,8	4,25	117,6	2,08		
1085,9	399,2	535,7	4,41	227,1	2,87	636,2	4,81	126,6	2,14		
1178,7	434,5	574,8	4,40	243,0	2,86	681,2	4,79	136,0	2,14		
1271,8	470,2	613,1	4,39	260,2	2,86	727,1	4,78	146,3	2,14		

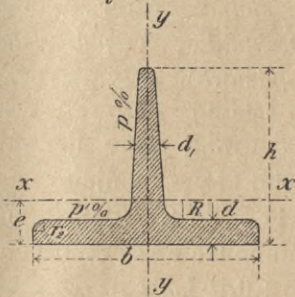
V. Zoresówki czyli złobkówki (n. Belageisen) (rys. 138) $r = g$.

Liczba porządk.	Wymiary w milimetrach						Prze- krój A	Ciężar jedno- stko- wy g	Odstęp środ- ka ciężkości		Moment bez- władno- ści ze względem na pod- stawę I_1	Ze względu na oś poziomą XX			Ze względu na oś pionową YY					
	b'	d'	h	b	b_1	d			d_1	g		e	e_1	cm	moment bez- wład- ności I	I/e lub I/e ₁	pro- mien bezwł. a	moment bez- oporu wład. I'	I'/e' lub I'/e' ₁	pro- mien bezwł. a
11	110	60	85	25	42	5	5	7,52	1,76	1,74	35,7	12,8	6,97	1,28	60,3	12,06	2,99			
16	160	100	55	30	45	6	4	10,84	2,66	2,84	122,2	45,5	16,01	2,05	233,6	29,20	4,64			
18	180	112	63	34	50	7	5	13,90	3,08	3,22	210,6	78,6	24,4	2,38	366,3	41,03	5,13			
21	210	135	75	37,5	60	8,5	7,5	19,32	3,70	3,80	416,2	152,0	40,0	2,80	722,6	68,82	6,11			
24	240	156	87	42	69	10	9	25,39	4,32	4,38	744,7	270,7	61,8	3,27	124,4	103,6	7,00			
26	260	170	95	45	75	11	10	30,20	4,74	4,76	1061,8	332,8	80,4	3,56	173,6	133,6	7,58			

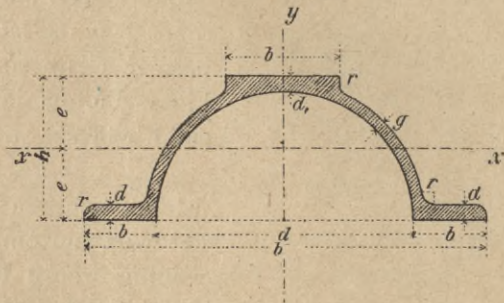
VI. Cwierćkolówki (n. Viertelkreiseisen, Quadranteseisen) (rys. 139).

Liczba kształtów.	Wymiary w milimetrach										Dwa przekroje znitowane ze względu na XX				Cztery kształtówki dla osi AB										
	średnica średnia		średnica zewnętrzna		szerokość		grubość		Wy- sokość		Za- okrą- glenie		I	a	I'	a'	I	h ₁	I	h ₂					
	D	R	R'	b	d	d ₁	d ₂	d ₃	h ₁	h ₂	r ₁	r ₂									cm ⁴	cm	cm ⁴	cm	cm ⁴
10	100	52	48	39	6	4	87	64,5	3	6	7,34	5,78	3,44	5,26	143,2	56,5	112,9	21,5	3,92	572,7	65,8	8,88	572,7	88,8	8,88
15	150	78	72	46	8	6	118	87,0	5	9	13,47	10,51	4,93	6,87	511,4	184,0	367,9	53,6	5,23	2046	173,4	12,8	2046	235,1	12,8
20	200	104	96	53	10	8	149	109,9	6	11	21,57	16,82	6,46	8,45	1359	459,8	919,7	108,9	6,53	5434	364,7	15,9	5434	494,3	15,9
25	250	130	120	60	12	10	180	132,9	7	13	31,64	24,68	8,00	10,01	2993	971,0	1942	194,1	7,83	11973	665,2	19,5	11973	901,1	19,5
30	300	156	144	67	14	12	211	155,8	8	15	43,67	34,07	9,54	11,56	5803	1825	3650	315,1	9,14	23213	1100	23,0	23213	1490	23,0

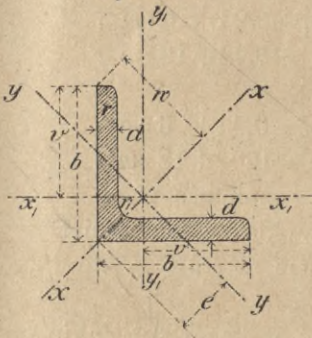
rys:135



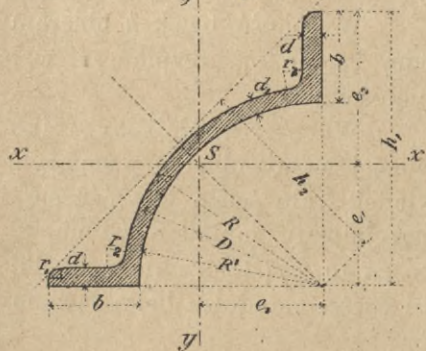
rys:138



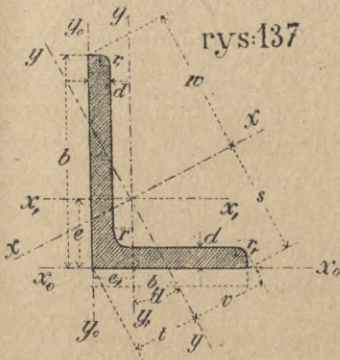
rys:136.



rys:139



rys:137



§. 55. Belki blaszane.

Dla większych rozpiętości lub ciężarów, gdy największe kształtówki I nie wystarczają, używamy belek blaszanych (n. *Blechträger*, fr. *poutre en tôle*, a. *wrought-iron girder*, cz. *nosnik plechowy*).

Belka blaszana (rys. 140) składa się ze ścianki *A* (n. *Blechwand*, *Stehblech*, fr. *âme*, a. *web* cz. *stoina*), czterech kątowników *B* i nakładek *C* (n. *Lamelle*, *Deckplatte*, fr. *plate-bande* a. *flange-plate*, cz. *pásznica*). Zwykle przyjmujemy wymiary ścianki, kątowników i szerokości *b* nakładek a obliczamy ich grubość *d*. Grubość ścianki przyjmujemy zwykle w budownictwie 7 do 8 mm, przy mostach większą, a mianowicie w przybliżeniu

$$g = 8,5 + 0,15 l \text{ mm} \dots 207)$$

jeżeli *l* oznacza rozpiętość w *m*. Szerokość kątowników możemy przyjąć w budownictwie według wzoru

$$\left. \begin{aligned} \text{a} \text{ nakładki} \quad b_1 &= 0,21 + 5 \text{ cm} \\ \text{a} \text{ nakładki} \quad b &= 0,41 + 16 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots 208)$$

przy mostach

$$\left. \begin{aligned} \text{zaś} \quad b_2 &= 0,41 + 6 \text{ cm} \\ \text{a} \text{ nakładki} \quad b &= 0,81 + 18 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots 209)$$

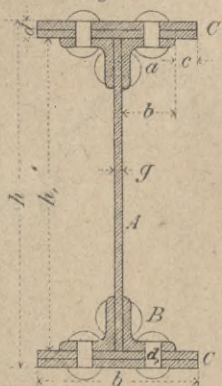
jeżeli *l* oznacza rozpiętość w *m*.

Wysokość belek *h* obieramy zwykle w budownictwie równą $\frac{1}{12}$ do $\frac{1}{16}$ rozpiętości, w budowie mostów $\frac{1}{8}$ do $\frac{1}{12}$ rozpiętości.

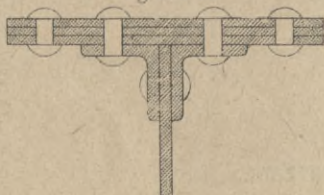
Wzory te podaliśmy tylko jako wskazówkę, jakie mniej więcej mamy obierać wymiary ścianki, kątowników i szerokości nakładek, ale ściśle trzymać się ich nie potrzebujemy, bo jeśli przyjmiemy mniejsze wymiary kątowników lub węższe nakładki, to za to wypadną nam nakładki grubsze i na odwrót. Wszystkie te części składowe belki łączymy nitami w jedną całość, przy-

czem rozróżniamy nity poziome i pionowe, które urządzamy w dwu rzędach. Jeżeli nakładki wystają o długość $c \leq 6,5 \text{ cm}$, wtedy musimy połączyć nakładki jeszcze dwoma rzędami nitów skrajnych (n. *Randnieten*), (rys. 141).

rys:140



rys:141



§. 56. Obliczenie przekroju belki blaszanej.

Belki blaszane obliczamy także według rów. 147) $\tau I = Me$. Moment bezwładności *I* rozłożymy tu na dwie części tak, że

$$I = I_1 + I_2, \dots 210)$$

przyczem I_1 jest momentem bezwładności kątownek i ścianki, który zaraz możemy obliczyć z danych wymiarów, zaś I_2 momentem bezwładności nakładek. Z poprzedniego widzimy, że (rys. 140)

$$I_2 = \frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3) \dots \dots \dots 211)$$

Z rysunku zaś widzimy, że $h = h_1 + 2d$. Wstawmy tę wartość i po odciągnięciu dziur na nity pionowe $b' = b - 2d$ zamiast b , a otrzymamy

$$I_2 = \frac{1}{12} b' (h_1^3 - 6h_1^2d + 12d^2h_1 + 8d^3 - h_1^3).$$

Ponieważ d w stosunku do h_1 jest bardzo małe, więc możemy wyraz $8d^3$ wobec wyrazu $6h_1^2d$ opuścić, a wtedy

$$I_2 = \frac{b'h_1d}{2} (h_1 + 2d).$$

Wstawmy teraz wartość za I_2 i $e = \frac{h_1 + 2d}{2}$ w równ. 210)

i 147), a otrzymamy

$$\tau I_1 + \frac{b'h_1d\tau}{2} (h_1 + 2d) = M \frac{1}{2} (h_1 + 2d), \text{ a stąd}$$

$$d = \frac{M}{b'h_1\tau} - \frac{2I_1}{b'h_1(h_1 + 2d)} \dots \dots \dots 212)$$

W drugim wyrazie tego równania po prawej stronie widzimy jednak w mianowniku ilość d , której nie znamy. Musimy więc obliczyć d najprzód w przybliżeniu, wstawivszy w równ. 212) $d=0$, a więc otrzymamy przybliżoną wartość dla d

$$d = \frac{M}{b'h_1\tau} - \frac{2I_1}{b'h_1^2}, \dots \dots \dots 213)$$

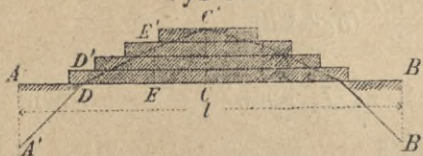
Wartość tę wstawiamy w równ. 212) po prawej stronie i otrzymujemy dokładną wartość d .

W równania te wchodzi M , które się zmienia według położenia przekroju. Dlatego obliczamy najprzód przekrój, dla którego M jest największe, n. p. w belce w dwu punktach podpartej, jednostajnie obciążonej dla $x = \frac{l}{2}$. Grubość d rozdzielamy w danym razie na kilka nakładek, przyjmując grubość pojedynczej nakładki 8 do 15 mm.

Potem obliczamy dla innych punktów belki odnośne d według tych samych równań, wstawiając tylko odnośne wartości

za M . Długość nakładek wyznaczamy najlepiej wykreślnie (rys. 142). Obliczymy grubość nakładki d w środku belki i zrobmy $d=CC'$. Dla punktów A i B jest $M=0$, więc z równ. 212) wynika, że grubość d będzie tu ujemną, równą $AA'=BB'$. Wykreśliwszy odnośne grubości także w kilku punktach pośrednich D i E , łączymy punkty $A' D' E' C' \dots$ linią krzywą, lub, jeśli punkty te są dość bliskie, prostymi, a powierzchnia między tą linią a osią AB przedstawia teoretyczną grubość nakładki. CC' dzielimy na odpowiednią ilość nakładek i kreślimy poziome, których przecięcia się z linią $A' C' B'$ wyznaczają końce nakładek. W rysunku 142. widzimy w środku belki cztery nakładki

rys. 142.



potem trzy, dwie, jedną, a nareszcie widzimy, że niedaleko podpór nie potrzeba wcale nakładek. Ze względu dów ustrojowych przedłużamy nieco nakładki po za linią $A' D' E' C'$, jak na rysunku uwidoczniiono.

Przy obliczeniu momentu bezwładności I_1 trzeba uwzględnić osłabienie przekroju przez nitowanie. Ścianka osłabia się wskutek spajania przykładkami, gdy bowiem długość jednej blachy nie wystarcza, musimy dwie lub więcej blach spajać.

Jeśli przy spajaniu urządzimy nity w odległości a , to $v = \frac{a - d_1}{a}$, a osłabienie ścianki uwzględnimy, biorąc w rachunek zamiast grubości ścianki g grubość vg . W przybliżeniu możemy przyjąć $v=0,77$, więc przyjmujemy zamiast g tylko $0,77g$. Przykładki dajemy zawsze z obu stron ścianki, grubość ich mogłaby być połową grubości ścianki, nie używamy jednak cieńszych przykładek niż 6 mm .

Co do obliczenia odległości nitów w przykładce, to dla przekrojów niedaleko podpór, gdzie siła poprzeczna Q jest wielka, możemy ją obliczać w następujący sposób. Siła poprzeczna, jak wiemy z §. 48. i 49., nie rozdziela się jednostajnie w przekroju, lecz jest w osi obojętnej największa, a mianowicie wynosi według 193) na jednostkę długości $\sigma = \frac{QS}{I}$, a więc na długości a , równej odstępowi nitów, działa $a \frac{QS}{I}$. Dla warstwy obojętnej

możemy w przybliżeniu przyjąć $S = \frac{A}{2} \cdot \frac{h_2}{2}$ a $I = 2 \frac{A}{2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2$, jeżeli $\frac{h_2}{2}$ oznacza odstęp środka ciężkości połowy przekroju od osi obrotnej. Na długości a działa więc siła $a \frac{Q \frac{A}{2} \cdot \frac{h_2}{2}}{2 \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2} = a \frac{Q}{h}$. Przyj-

mijmy $h = 0,9 h$, to $a \frac{Q}{0,9 h} = 2 \frac{\pi d^2}{4} \tau_1$, a stąd

$$a = \frac{9 \pi d^2 h \tau_1}{20 Q} = 1,41 \frac{d^2 h \tau_1}{Q} \dots \dots \dots 214)$$

Równanie to jest ważnem wtedy, gdy po obu stronach szwu przytwierdzimy przykładki jednym rzędem nitów. Jeżeli, jak zwykle, znajduje się po dwa rzędy nitów, to

$$a = \frac{18 \pi d^2 h \tau_1}{20 Q} = 2,83 \frac{d^2 h \tau_1}{Q} \dots \dots \dots 215)$$

W pobliżu środka belki jest Q bardzo małe, a że tu moment wielki, więc możemy obliczać nity przykładek, jak dla zwykłego spajania blach, według równ. 117).

§. 56. Obliczenie grubości ścianki belki blaszanej.

Wiemy, że siła ścinająca w osi ciężkości jest największą, że tę więc wyznaczyć musimy dla obliczenia grubości ścianki belki blaszanej. Jeżeli siłę ścinającą poziomą nazwiemy σ , to wiemy; że według równ. 193)

$$\sigma = \frac{QS}{I}$$

Wyrazy S i I obliczamy w przybliżeniu, jak w poprzednim paragrafie; dla warstwy przez środek przechodzącej będzie więc

$$\sigma = \frac{Q \frac{A}{2} \cdot \frac{h_2}{2}}{2 \frac{A}{2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2} = \frac{Q}{h_2}$$

A więc na jednostkę długości działa siła $\sigma = \frac{Q}{h_2}$ na ściankę, jeżeli zatem natężenie dopuszczalne na ścinanie blachy jest

$\tau' = \frac{5}{8} \tau$, a powierzchnia ścięcia $l \cdot g = g$ (rys. 140), to $g \frac{5}{8} \tau = \frac{Q}{h_2}$,

a stąd $g = \frac{8}{5} \frac{Q}{\tau h_2}$.

W przybliżeniu przyjmiemy według Weyrauch'a, jak pierwej, $h_2 = 0,9 h$, więc

$$g = \frac{10,8 Q}{9,5 \tau h} = \frac{16 Q}{9 \tau h} = 1,8 \frac{Q}{\tau h} \dots \dots \dots 216)$$

Wzór ten nie uwzględnia jednak natężeń ukośnych, które w belce blaszanej mogą być większe, niż $\sigma = \frac{Q}{h_2}$. Dla warstwy obojętnej jest wprawdzie $\nu = 0$, lecz w tem miejscu przekroju, gdzie przekrój się nagle rozszerza, t. j. w punkcie a , gdzie się znajdują poziome ramiona kątówek, natężenia ukośne mogą być, jak wiemy z §. 51, większe. Tu bowiem natężenie ścinające nie jest o wiele mniejsze, niż w środku, a i natężenie ν jest tu prawie $= \tau$. Jeżelibyśmy przyjęli $\nu = \sigma$, to według równ. 202) najw. $\nu' = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 + 4 \sigma^2} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \sqrt{1 + 4} = \frac{\sigma}{2} (1 + \sqrt{5})$. Jeżeli więc chcemy, aby

$$\text{najw. } \nu' = \tau, \text{ to } \tau = \frac{1 + 2,23}{2} \sigma = 1,625 \sigma, \text{ więc } \sigma = \frac{\tau}{1,62}.$$

Ze względu jednak na mniejszą wytrzymałość blachy na ścinanie w kierunku włókien przyjmiemy $\sigma = \frac{\tau}{1,8}$. Zatem będzie

$$\frac{\tau}{1,8} g = \frac{Q}{h_2} = \frac{10 Q}{9 h}, \text{ a stąd}$$

$$g = \frac{10 Q}{9 h} \cdot \frac{1,8}{\tau} = 2,0 \frac{Q}{\tau h} \dots \dots \dots 217)$$

Dla belek zwykłych, w budownictwie używanych, otrzymujemy często z wzoru tego bardzo małą grubość g , w praktyce jednak przyjmujemy najmniej $g = 6$ do 8 mm . Dla belek mostowych, gdzie siły są większe, da się wzór ten z pożytkiem użyć.

Przykład. Dla belki głównej mostu blaszanego o rozpiętości 10 m niech będzie obciążenie $q = 5,5 \text{ t/m}$, zatem na podporze

$$\text{najw. } Q = \frac{1}{2} q l = \frac{1}{2} 5,5 \times 10 = 27,5 \text{ t.}$$

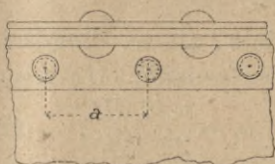
Niech będzie dalej $h = 100 \text{ cm}$, $\tau = 720 \text{ kg/cm}^2$, to $g = 2 \cdot \frac{27500}{720 \cdot 100} = 0,76 \text{ cm}$.
Przyjmiemy więc $g = 8 \text{ mm}$.

§. 57. Obliczenie nitów belki blaszanej.

a) Obliczenie nitów poziomych.

Nity, łączące belkę blaszaną w jedną całość, narażone są na ścięcie wskutek siły ścinającej poziomej, której wielkość na jednostkę długości jest σ , a zatem, jeżeli nity urządzimy w odstępach a (rys. 143), na długość a siła ta wynosi σa . Ponieważ nity poziome są dwucięte, więc

rys:143.



$$\sigma a = 2 \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1 = \frac{QS}{I} a, \text{ a stąd}$$

$$a = \frac{\pi \tau_1 d^2 I}{2 QS}, \dots \dots \dots 218)$$

gdzie S oznacza moment statyczny powierzchni przekroju nad nitem poziomym, a więc nakładek i części kątovek ze względu na oś obojętną, a d średnicę nitu.

Z równ. 218) widzimy, że im większą jest siła Q , tem mniejsze muszą być odstępny nitów a i odwrotnie. A zatem ponieważ siła Q przy podporach jest największą, więc tam muszą być nity najgęściej umieszczone, w środku zaś belki, gdzie siła poprzeczna jest bardzo mała, nity mogą być rzadsze.

Jeżeli chcemy uwzględnić także ciśnienie na ściankę dziury, to jeżeli ciśnienie to nazwiemy v_2 , będzie $\sigma a = dg v_2$, przyczem g oznacza grubość ścianki; a więc

$$dg v_2 = 2 \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1, \text{ a stąd } v_2 = \frac{\pi d}{2 g} \tau_1.$$

Stąd otrzymamy dla

$\frac{d}{g} = 1$	1,5	2	2,5
$\frac{v_2}{\tau_1} = 1,57$	2,35	3,14	3,92

Widzimy, że natężenia v_2 są bardzo wielkie; według wzoru 218) licząc dla $\frac{d}{g} = 1,5$, otrzymamy dla $\tau_1 = 600$ $v_2 = 2,35 \times 600 = 1410 \text{ kg/cm}^2$. Jeżeli $\frac{d}{g} > 1,5$, to nie możemy już liczyć wedle wzoru 218), ale nazwawszy τ_2 ciśnienie dopuszczalne na ściankę dziury, otrzymamy

$$dg \tau_2 = \frac{QS}{I} a, \text{ więc}$$

$$a = \frac{dg \tau_2 I}{QS}, \dots \dots \dots 219)$$

przyczem możemy przyjąć $\tau_2 = 1400 \text{ kg/cm}^2$.

b) Nity pionowe umieszczamy zwykle oba w jednym rzędzie (rys. 144).

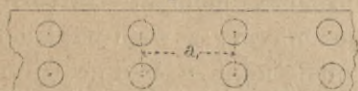
Nazwijmy odstęp nitów a_1 , to otrzymamy

$$a_1 \sigma = a_1 \frac{QS_1}{I} = 2 \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1,$$

przyczem uwzględnimy, że nity są raz cięte, ale na długości a muszą być ścięte dwa nity. Z powyższego równania otrzymamy

$$a_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_1 d^2 I}{QS_1}, \dots 220)$$

rys. 144.



gdzie S_1 oznacza moment statyczny nakładek ze względu na środek ciężkości przekroju. Oczywiście rzecz, że $S > S_1$,

więc z równ. 218) i 220) wynika, że zawsze $a < a_1$. Jeżeli nity poziome obliczamy według 219), to a jest tem bardziej mniejsze niż a_1 . Ale ponieważ nity pionowe umieszczamy w środku między nitami poziomymi, więc przyjąć musimy $a_1 = a$, obliczamy zatem tylko odległość nitów poziomych i w tej samej odległości przyjmujemy też nity pionowe.

Często otrzymujemy z tych równań odstęp nitów a bardzo wielki, ze względów konstrukcyjnych więc przyjmujemy największe

$$a = 20g, \dots \dots \dots 221)$$

jeżeli g jest grubością pojedynczej nakładki.

§. 58. Obliczenie belek drewnianych.

Belki drewniane obliczamy także według równ. 147) $\tau I = Me$, jeżeli $h \leq 0,09l$, gdy l oznacza rozpiętość belki w dwu punktach podpartej (p. §. 51).

Dla przekroju prostokątnego (rys. 68) mamy $\tau \frac{1}{12} bh^3 = M \frac{h}{2}$,

a stąd
$$bh^2 = \frac{6M}{\tau} \dots \dots \dots 222)$$

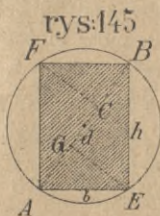
Przyjawszy $b = nh$, otrzymamy $nh^3 = \frac{6M}{\tau}$, a stąd

$$h = \sqrt[3]{\frac{6M}{n\tau}} \dots \dots \dots 223)$$

Jeżeli przyjmiemy pewną wartość dla b , to

$$h = \sqrt{\frac{6M}{b\tau}} \dots \dots \dots 224)$$

Tu możemy też rozwiązać pytanie, jaki jest pod względem wytrzymałości najkorzystniejszy przekrój belki, wyciosanej z pnia okrągłego. Z równ. 222) widzimy, że M będzie tem większe, a zatem belka tem więcej uniesie, im większy jest wyraz bh^2 . Nazwijmy $bh^2 = u$, to otrzymamy najprzód z rysunku



145, jeżeli d jest średnicą pnia, $h^2 = d^2 - b^2$, a więc

$$u = bh^2 = b(d^2 - b^2).$$

Szukać teraz będziemy wartości b , dla której u będzie największe, a więc musi być

$$\frac{du}{db} = 0 = d^2 - 3b^2, \text{ a stąd } b^2 = \frac{d^2}{3}, \text{ zatem}$$

$$b = d\sqrt{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots 225)$$

Z rysunku widzimy, że $h^2 = d^2 - b^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2}{3}d^2$, więc

$$h = d\sqrt{\frac{2}{3}} \dots \dots \dots 226)$$

Porównawszy równ. 225) i 226), otrzymamy $b:h = 1:\sqrt{2}$, czyli $b:h = 1:1,41$, albo w przybliżeniu

$$b:h = 5:7 \dots \dots \dots 227)$$

Jestto najkorzystniejszy stosunek podstawy do wysokości belki z pnia okrągłego wyciosanej. Jeżeli z punktu E spuścimy prostopadłą na średnicę AB , to

$$b^2 = AB \cdot AC, \text{ a } h^2 = AB \cdot BC,$$

czyli według równ. 225) i 226)

$$AB \cdot AC = \frac{d^2}{3}, \text{ } AB \cdot BC = \frac{2}{3}d^2 \text{ a więc } AC = \frac{1}{3}d \text{ a } BC = \frac{2}{3}d.$$

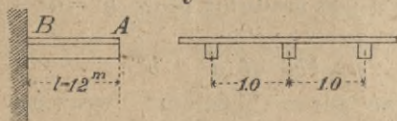
Na tem polega konstrukcyja najkorzystniejszego przekroju. Dzielimy średnicę na trzy części, w punktach C i G wystawiamy prostopadłe i w ten sposób otrzymujemy punkty E i F , wierzchołki prostokąta.

Zauważyć tu jednak musimy, że rów. 227) odnosi się tylko do belki z jednego pnia wyciosanej i to bez względu na kosztą ociosywania. Dla tego nie potrzebujemy go się ściśle trzymać, a tylko pamiętać, że ze względów wytrzymałości wysokość h powinna być większa od szerokości b mniej więcej w stosunku 4:3.

Co do belek z jednego pnia wyciosanych dodać musimy, że w ogóle korzystniej jest belek nie ociosywać, bo wtedy moment oporu jest większy. Zwykle jednak względy ustrojowe zmuszają nas do ociosywania belek.

Przykład. Ganek drewniany szeroki 1,2 m spoczywa na belkach drewnianych jednym końcem wmurowanych czyli wspornikach, oddalonych jeden od drugiego 1 m (rys. 146). Obliczyć wymiary belek, jeżeli ciężar własny i obciążenie tłumem ludzi wynoszą 400 kg/m².

rys. 146



w B, a mianowicie $M = ql \times \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} ql^2$, tu więc, ponieważ $l = 1,2\text{ m}$, $M = \frac{1}{2} 4 \times 120^2 = 28800\text{ kgcm}$. Jeżeli więc $\tau = 80\text{ kg/cm}^2$, to według równ. 222)

$$bh^2 = \frac{6M}{\tau} = \frac{6 \times 28880}{80} = 2160\text{ cm}^3; \text{ a więc}$$

dla $b = 10$,	$h^2 = 216$,	$h = 14,7\text{ cm}$
„ $b = 12$,	$h^2 = 180$,	$h = 13,4\text{ cm}$.

Jako najbardziej odpowiadające równ. 227) wybieramy więc wymiary $b = 10\text{ cm}$, $h = 15\text{ cm}$.

§. 59. Obliczenie belek stropu mieszanego.

Jako przykład obliczenia belek drewnianych i blaszanych podajemy obliczenie belek stropu mieszanego (tabl. II).

Strop mieszany składa się z belek żelaznych B, umieszczonych w odstępach $l_2 = 4,5\text{ m}$ i belek drewnianych K, spoczywających na belkach żelaznych, umieszczonych w odstępach $a < 1\text{ m}$. Rozpiętość belek żelaznych w świetle wynosi 11 m; ponieważ wmurowanie jest za małe, aby można belki przyjąć jako poziomo wmurowane, więc obliczamy je jako w dwu punktach podparte. Teoretyczne punkty podparcia przyjmujemy 15 cm odległe od krawędzi muru, więc rozpiętość teoretyczna $l_1 = l + 0,3\text{ m} = 11,3\text{ m}$. Ciężar własny powały i podłogi wynosi 300 kg/m², obciążenie tłumem ludzi także 300 kg/m². Ciężar własny belki drewnianej przyjmujemy tymczasowo $g_1 = 40\text{ kg/m}$, belki żelaznej $g_2 = 60 + 15\text{ l kg/m}$, dalej dla drzewa $\tau = 80\text{ kg/cm}^2$, dla żelaza $\tau = 1000\text{ kg/cm}^2$.

Najprzód musimy obliczyć odstęp a belek drewnianych. Ponieważ przy murze umieszczamy po jednej belce drewnianej, więc jeżeli przyjmujemy n pól a szerokość belki b, to $l = na + b$, a wstawiając wartość za l i przyjmawszy tymczasowo $b = 0,2\text{ m}$, $11 = na + 0,2$, a stąd $a = \frac{10,8}{n}$.

n musi być liczbą całą, zaś $a < 1 m$, przyjmujemy więc $n=11$, a więc $a = \frac{10,8}{11} = 0,982 m$. Bel ę drewnianą K możemy teraz obli-

czyć według równ. 222) $bh^2 = \frac{6M}{\tau}$. Pierwej jednak musimy wyzna-
 czyć najw. moment M , który dla obciążenia jednostajnego zupełnego
 będzie dla połowy rozpiętości belki według 20) $M = \frac{1}{8} ql_2^2$, przyczem q
 jest obciążenie na jednostkę długości. Ponieważ 1 m belki K niesie
 $a m^2$ powały, a obciążenie na m^2 wynosi $300 + 300 = 600 kg$, więc
 obciążenie belki drewnianej przy uwzględnieniu ciężaru własnego
 równa się $a \cdot 600 + 40 = 0,982 \cdot 600 + 40 kg/m$, a więc

$$g = \frac{0,982 \cdot 600 + 40}{100} = 6,292 kg/cm.$$

Rozpiętość l_2 wynosi $4,5 m = 450 cm$, więc $M = \frac{1}{8} 6,292 \times 450^2 =$
 $159266 kgcm.$ Wstawmy teraz wartość w równ. 222), a otrzymamy
 $bh^2 = \frac{6}{80} 159266 = 11945 cm^3$, więc dla $b = 20 cm$, $h = 24,4 cm$. Po-
 nieważ stosunek podstawy do wysokości jest stosowny, więc zatrzy-
 mujemy jako wymiary belki drewnianej $b = 20 cm$, $h = 25 cm$. W prze-
 ciwnym razie przyjęlibyśmy b większe lub mniejsze, według tego,
 czy wymiar h był za wielki czy za mały.

Znając wymiary, obliczyć możemy ciężar belki drewnianej na m
 bieżący. Przyjawszy ciężar gatunkowy drzewa 0,7, wiemy, że ciężar
 1 dm^3 drzewa jest 0,7 kg, stąd m bieżący belki waży $2 \cdot 2,5 \cdot 10 \cdot 0,7 =$
 $= 35 kg$, a więc trochę mniej, niżesmy pierwotnie przyjęli, przez co
 jednak nie potrzebujemy zmieniać obliczenia belki.

Teraz przystępujemy do obliczenia belki blaszanej. Ciężar po-
 wały i obciążenie tłumem ludzi przenosi się na belkę żelazną w punk-
 tach E i F . Nazwijmy odnośne siły G i G' , to punkt E dźwiga
 $al_2 m^2$ powały i l_2 belki drewnianej, więc $G = al_2 600 + l_2 35$,
 a wstawiwszy wartości $G = 0,982 \cdot 4,5 \cdot 600 + 4,5 \cdot 35 = 2808,9 kg = 2,8 t$.

Siła G' , działająca w punkcie F , jest mniejszą, gdyż szerokość
 paska powały, ciężącego na tym punkcie jest mniejszą, a mianowicie

$$G' : G = \frac{a+b}{2} : a, \text{ a więc } G' = G \frac{a+b}{2a} = 2,8 \frac{0,982+0,2}{2 \cdot 0,982} = 1,68 t.$$

Obliczywszy siły działające na belkę blaszaną, wykreślamy
 wielobok sił, przyjmujemy biegun O tak, że odległość biegunowa we-
 dle podziałki sił wynosi 20 t, kreślimy wielobok sznurowy, zamyka-
 jącą, wyznaczamy oddziaływania i siły poprzeczne wedle § 8. Aby
 wykreślić podziałkę momentów, zastanówmy się, że w rysunku na
 tabl. II 1 cm w podziałce momentów równa się według podziałki
 długości 0,5 m, pomnożonemu przez odległość biegunową, więc przez
 20 t, a zatem według podziałki momentów 1 cm równa się $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10 tm$.
 Możemy więc wykreślić teraz podziałkę momentów.

Dalej uwzględnić jeszcze musimy ciężar wł. sny belki żelaznej g_2 , który możemy przyjąć na 1 m bieżący 70+15 l, a więc $g_2 = 70 + 15 \cdot 11 = 235 \text{ kg/m} = 0,235 \text{ t/m}$. Moment zatem we środku $M_w = \frac{1}{8} g_2 l^2 = \frac{1}{8} 0,235 \cdot 11,3^2 = 3,74 \text{ tm}$. Moment ten wykreślamy według podziałki momentów i kreślimy w znany sposób parabolę, jako linią momentów.

Obliczamy jeszcze moment M_b dla punktu K analitycznie w następujący sposób: Oddziaływanie D_1 równa się połowie wszystkich ciężarów, więc

$$D_1 = \frac{2G' + 10G}{2} = \frac{2 \times 1,68 + 10 \times 2,8}{2} = 15,68 \text{ t,}$$

a moment w punkcie K

$$M_b = 15,68 \times 5,16 - 1,68 \times 4,9 - 5 \cdot 2,8 \times 2 \times 0,982$$

$$M_b = 80,91 - 8,23 - 27,50 = 45,18 \text{ tm.}$$

Podobnie otrzymamy momenty i dla innych punktów dla obciążenia ciężarem powały i tłumem ludzi: do tego musimy jeszcze dodać momenty z ciężaru własnego według wzoru 18) $M = \frac{1}{2} gx(l-x)$. W ten sposób obliczyliśmy

dla $x =$	0	0,25	1,23	2,21	3,20	4,18	5,16	m
M' dla obciążenia ciężarem powały i tłumem ludzi	} = 0	3,92	17,65	28,60	36,99	42,46	45,18	tm
M'' dla ciężaru własnego belki		} = 0	0,32	1,45	2,36	3,03	3,50	3,72
Razem $M =$	0		4,24	19,10	30,96	40,02	45,96	48,90

Podobną tabliczkę otrzymamy dla sił poprzecznych, licząc według równań 8) i 17),

$x =$	0	0,25	1,23	2,21	3,20	4,18	5,16	m
$Q' =$	15,68	14,0	11,2	8,4	5,6	2,8	0	t
$Q'' =$	1,33	1,27	1,04	0,81	0,58	0,24	0,11	t
$Q =$	17,01	{16,95 15,27	{15,04 12,24	{12,01 9,21	{8,98 6,18	{5,84 3,04	{2,91 0,11	t

Teraz możemy przystąpić do obliczenia przekroju belki blaszanej. Przyjmujemy wysokość ścianki, zależną od wysokości, jaką na strop mamy do rozporządzenia, $h_1 = 60 \text{ cm}$, kątowniki wedle równania 208) 70 mm szerokie a 8 mm grube; grubość ścianki byłaby według

$$217) g = 2 \frac{17,010}{1,000 \cdot 60} = 0,6 \text{ cm,}$$

zamiast tego przyjmujemy 8 mm. Dalej

niech będzie szerokość nakładki według 208) 21 cm, a nity o średnicy 16 mm. Po odciągnięciu dziur będzie więc użyteczna szerokość nakładki $b_1 = 21 - 2 \cdot 1,6 = 17,8 \text{ cm}$.

Uwzględniwszy dziury na nity i osłabienie ścianki o 25%, otrzymamy

$$I_1 = \frac{1}{12} [(14,8 - 3,2) 60^3 - (12,4 - 3,2) 58,4^3 - 1,6 \cdot 46^3 + 0,25 \cdot 0,8 \cdot 60^3],$$

$$I_1 = \frac{1}{12} (2\ 505\ 600 - 1\ 832\ 426 - 155\ 738 - 43\ 200) = 39\ 520 \text{ cm}^4.$$

Wedle równania 213) mamy w przybliżeniu grubość nakładki

$$d = \frac{M}{b_1 h_1 \tau} - \frac{2 I_1}{b_1 h_1^2},$$

więc dla $x=5,16$, wstawivszy wartości w *cm* i *kg*,

$$d_6 = \frac{4\ 890\ 000}{17,8 \times 60 \times 1\ 000} - \frac{2 \times 39\ 520}{17,8 \cdot 60^2} = 3,35\ \text{cm},$$

a teraz dokładnie według równania 212)

$$d_6 = \frac{4\ 890\ 000}{17,8 \times 60 \times 1\ 000} - \frac{2 \times 39\ 520}{17,8 \times 60(60 + 2 \times 3,35)} = 3,4\ \text{cm}.$$

Dla $x=0$ otrzymamy z równania 213)

$$d_0 = -\frac{2 \times 39\ 520}{17,8 \times 60^2} = -1,2\ \text{cm}.$$

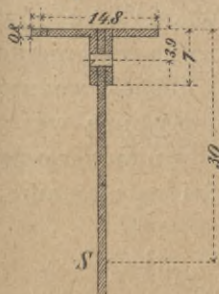
Podobnie otrzymamy i dla innych punktów grubości nakładek, a mianowicie będziemy mieli

$$\begin{array}{cccccccc} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ -12 & -8 & +6 & +17 & +26 & +32 & +34\ \text{mm}. \end{array}$$

Grubość nakładek w pojedynczych punktach wykreśliliśmy na rysunku i końce rzędnych połączyliśmy prostymi. W ten sposób otrzymaliśmy teoretyczną grubość nakładek. Według poprzedniego mamy największą grubość $d_6=34\ \text{mm}$, przyjmujemy więc trzy nakładki, z których pierwsza $12\ \text{mm}$ gruba, a dwie drugie po $11\ \text{mm}$ i wyznaczamy wykreślnie długości nakładek.

Teraz obliczamy jeszcze odstęp nitów, przyjąwszy według 168) jako największy odstęp $20\ g = 20 \times 11 = 22\ \text{cm}$. Obliczamy więc najprzód odstęp nitów poziomych dla $0,25 > x > 0$. Ponieważ tu średnica nitu d' jest 2 razy większa od grubości kątownki, więc musimy liczyć według równania 219) $a = \frac{dg' \tau_2 I}{QS}$. Wstawiamy tedy wartości $\tau_2 = 1\ 400\ \text{kg/cm}^2$, $I = I_1$, bo tu niema żadnej nakładki, $d' = 1,6$, $Q = 17,01\ t = 17\ 010\ \text{kg}$, $S = (14,8 \cdot 0,8) 29,6 + 2,4 \cdot 3,1 \cdot 27,7 = 556,55$ (rys. 147), więc

$$\text{rys: 147. } a = \frac{1,6 \times 0,8 \times 1\ 400 \times 39\ 520}{17\ 010 \times 556,55} = 7,5\ \text{cm}.$$



Gdybyśmy użyli wzoru 218), otrzymalibyśmy

$$a = \frac{\pi 600 \cdot 1,6^2 \cdot 39\ 520}{2 \cdot 17\ 010 \cdot 556,55} = 9,9\ \text{cm},$$

zatrzymujemy więc wynik pierwszy mniejszy.

Dla długości od $x=0,25\ \text{m}$ do początku pierwszej nakładki otrzymamy

$$a = \frac{1,6 \times 0,8 \times 1\ 400 \times 39\ 520}{15\ 270 \times 556,55} = 8,3\ \text{cm}.$$

Od początku pierwszej nakładki do $x=1,23\ \text{m}$ mamy

$$I = I_1 + \frac{1}{12} 21 (62,4^3 - 60^3) = 39\,520 + 47\,198 = 86\,718;$$

$$S = 556,55 + 21 \times 1,2 \times 30,6 = 1\,327,7, \text{ więc}$$

$$a = \frac{1,6 \times 0,8 \times 1\,400 \times 86\,718}{15\,270 \times 1\,327,7} = 7,7 \text{ cm}$$

Dla długości od $x = 1,23 \text{ m}$ do początku drugiej nakładki mamy

$$a = \frac{1,6 \times 0,8 \times 1\,400 \times 86\,718}{12\,240 \times 1\,327,7} = 9,6 \text{ cm.}$$

Podobnie otrzymamy dla długości od początku drugiej nakładki do $x = 2,21 \text{ m}$ $a = 9,5 \text{ cm}$,

dla długości od $x = 2,21 \text{ m}$ do $x = 3,20 \text{ m}$ $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ nakładki, } a = 12,6 \text{ cm,} \\ 3 \text{ nakładki, } a = 13,4 \text{ cm,} \end{array} \right.$
 „ „ „ $x = 3,20 \text{ m}$ „ $x = 4,18 \text{ m}$ — 3 nakładki, $a = 19,9 \text{ cm}$,
 „ „ „ $x = 4,18 \text{ m}$ „ $x = 5,16 \text{ m}$ 3 nakładki, $a = 40,5 \text{ cm}$,
 zamiast tego jednak przyjmujemy $a = 22 \text{ cm}$.

Odstępy a nitów stosować się muszą ze względów konstrukcyjnych także do długości pól, która musi być wielokrotną długości a , przyczem jednak a nie może być większe od wartości obliczonej.

§. 60. Należenia zginające po przekroczeniu granicy sprężystości.

Wiemy z §. 36, że wzór 145) $\nu I = Mv$ ważnym jest tylko do granicy sprężystości.

Gdy obciążenie wzrasta i granica sprężystości zostanie przekroczoną, wzór 145) nie jest już ważnym, zwykle jednak w braku innego, obliczamy nateżenie wedle niego; rozumie się jednak, że tak obliczone nateżenia różnią się od rzeczywistych. Jeżeli ciało obciążamy aż do złamania i obliczamy z wzoru 145) nateżenie w tej chwili powstające, to otrzymamy współczynnik wytrzymałości na złamanie. Przy zginaniu występują jednak nateżenia na ciśnienie i ciągnienie, belka łamie się w ten sposób, że albo ciągnięte włókna się przerywają albo ciśnione zgniatają. Gdyby wzór 145) był ważny aż do złamania, toby musiał współczynnik wytrzymałości μ_2 na złamanie być równy mniejszemu ze współczynników wytrzymałości na ciągnienie μ lub ciśnienie μ_1 . Ponieważ jednak wzór 145) nie jest ważny do złamania, więc okazuje się, że dla μ_2 otrzymujemy inną wartość.

Doświadczenia okazały np. że dla belek drewnianych o przekroju prostokątnym współczynnik wytrzymałości na złamanie μ_2 ma przeciętnie następujące wartości:

	μ_2 w kg/cm^2
drzewo jodłowe	410
„ świerkowe	430

	μ_2 w kg/cm^2
drzewo sosnowe	440
„ modrzewiowe	540
„ dębowe	600
„ bukowe	700

Jeżeli te wartości porównamy z wartościami dla μ i μ_1 na str. 42 i 43, to okazuje się, że dla drzewa w przybliżeniu

$$\mu_2 = \frac{\mu + \mu_1}{2} = \frac{3}{4} \mu.$$

Dla stali otrzymał Bauschinger następujące wyniki:

zawartość węgla w %	spółcz. wytrzymałości		$\frac{\mu_2}{\mu}$
	na ciągnięcie μ kg/cm^2	na złamanie μ_2 kg/cm^2	
0,14	4430	> 7920	> 1,78
0,19	4785	> 8600	> 1,79
0,46	5330	8340	1,56
0,55	5656	8825	1,58
0,66	6295	8600	1,36
0,80	7230	7645	1,06
0,96	8305	8480	1,02

Dla żelaza lanego wyprowadza Bach z doświadczeń następujące prawidła:

Spółczynnik wytrzymałości na zginanie przewyższa współczynnik wytrzymałości na ciągnięcie tem bardziej, im bardziej skupiony jest materiał około osi obojętnej. Bach wyraża tę względność następującym równaniem:

$$\mu_2 = c \sqrt{\frac{e}{e_0}} \mu, \dots \dots \dots 228)$$

przyczem współczynnik c leży między $\frac{6}{5}$ a $\frac{4}{3}$, e i e_0 oznaczają odstęp skrajnego włókna ciągniętego od osi obojętnej i od środka ciężkości części ciągniętej przekroju.

I tak gdy w pewnym wypadku było $\mu = 1369 kg/cm^2$, otrzymał on

a) dla przekroju kwadratowego, którego przekątńia leży w płaszczyźnie obciążenia	μ_2 kg/cm^2 3218 do 3323
b) dla przekroju H	2929 „ 3153
c) „ „ okrągłego	2905 „ 2986

μ_2
kg/cm²

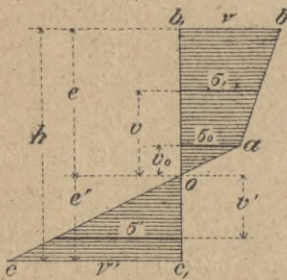
d) dla przekroju kwadratowego	2572 do 2238
e) „ „ „ I	1979 „ 2111

Widzimy z poprzedniego, że natężenia zginające po przekroczeniu granicy sprężystości są różne dla różnych materiałów, a przyczyną tego są rozmaite kształty linii odkształceń dla rozmaitych materiałów. Zastanawiać się więc teraz będziemy osobno nad belkami drewnianymi, osobno nad żelaznami.

§. 61. Natężenia przy złamaniu belek drewnianych.

Jeżeli belkę drewnianą o przekroju prostokątnym obciążymy aż do złamania, to z powodu, że granica sprężystości dla ciągnięcia leży bardzo blisko spółyicznika wytrzymałości, natężenia na ciągnięcie σ' (rys. 148) będą proporcjonalne do odstępów v' od osi obojętnej, dadzą się więc przedstawić prostą Oc . Inaczej rzecz się jednak będzie miała z natężeniami na ciśnienie. Otrzymamy tam prostą Oa do granicy sprężystości i krzywą, zamiast której możemy przyjąć prostą ab . Dla tego założenia jest dla ciśnionej części przekroju aż do granicy sprężystości

rys: 148.



rys: 148. Inaczej rzecz się jednak będzie miała z natężeniami na ciśnienie. Otrzymamy tam prostą Oa do granicy sprężystości i krzywą, zamiast której możemy przyjąć prostą ab . Dla tego założenia jest dla ciśnionej części przekroju aż do granicy sprężystości

$$\sigma = av \quad (228)$$

a po za tą granicą

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha(v_0 + \alpha_1(v - v_0)) = \alpha v_0(1 - \alpha_1) + \alpha \alpha_1 v \\ \sigma_1 &= \sigma_0(1 - \alpha_1) + \alpha \alpha_1 v \quad \dots \quad (229) \end{aligned}$$

Dla części ciągniętej jest

$$\sigma' = av' \quad \dots \quad (230)$$

Suma natężeń dodatnich i ujemnych musi być równą zero, więc gdy szerokość belki b jest stałą

$$-\frac{v'e'}{2} + \frac{\sigma_0 v_0}{2} + \frac{\sigma_0 + v}{2}(e - v_0) = 0$$

a stąd
$$e' = \frac{\sigma_0}{v'} v_0 + \frac{\sigma_0 + v}{v'}(e - v_0) \quad \dots \quad (231)$$

Jeżeli przypuścimy, że równocześnie przerywają się włókna ciągnięte i zgniatają ciśnione, to możemy napisać ze względu

na to, że dla drzewa szpilkowego współczynnik wytrzymałości na ciągnięcie jest dwa razy tak wielki, jak na ciśnienie *),

$$v = \mu = \frac{1}{2} v' = \frac{1}{2} \mu',$$

dalej $\sigma_0 = \frac{1}{2} v = \frac{1}{4} v' = \frac{1}{4} \mu'$, zatem $e' = \frac{1}{4} v_0 + \frac{3}{4} (e - v_0)$.

Wstawmy dalej

$$e = h - e' \text{ i } v_0 = \frac{\sigma_0}{\alpha} = \frac{\sigma_0}{\sigma'} v' = \frac{\sigma_0}{v'} e' = \frac{1}{4} e', \text{ to}$$

$$e' = \frac{1}{16} e' + \frac{3}{4} \left(h - e' - \frac{1}{4} e' \right), \text{ a stąd}$$

$$e' = 0,4 h \dots \dots \dots 232)$$

Oś obojętna leży więc w chwili złamania poniżej osi belki w odległości 0,1 h.

Moment sił zewnętrznych M musi być równy momentowi sił wewnętrznych, więc gdy μ_2 nazwiemy nateżenie przy złamaniu, obliczone z wzoru 145), to

$$M = \frac{bh^2}{6} \mu_2 = b \left(\frac{\mu' e'^2}{6} + \frac{\sigma_0 v_0^2}{6} + \frac{\sigma_0 + \mu}{2} (e - v_0) \left(v_0 + \frac{2\sigma_0 + \mu}{\sigma_0 + \mu} \frac{e - v_0}{3} \right) \right)$$

Po wstawieniu powyższych wartości za v, σ_0 , v_0 , e' otrzymamy

$$h^2 \mu_2 = \left(\mu' e'^2 + \frac{1}{64} \mu' e'^2 + \frac{9\mu'}{8} h \left(v_0 + \frac{4}{3} \frac{e - v_0}{3} \right) \right)$$

$$h^2 \mu_2 = \frac{65}{64} \mu' \cdot 0,16 h^2 = \frac{9}{8} \mu' h \left(0,1 h + \frac{2}{9} h \right) = 0,725 \mu' h^2$$

zatem $\mu_2 = 0,725 \mu' \dots \dots \dots 233)$

W poprzednim paragrafie widzieliśmy, że doświadczenia okazały, że $\mu_2 = 0,75 \mu$, wynik więc doświadczeń jak bardzo zbliżony do teoretycznego i teraz poznajemy prawdziwą przyczynę tego zjawiska.

§. 62. Nateżenie przy złamaniu belek z żelaza spawalnego, zlewego i stali.

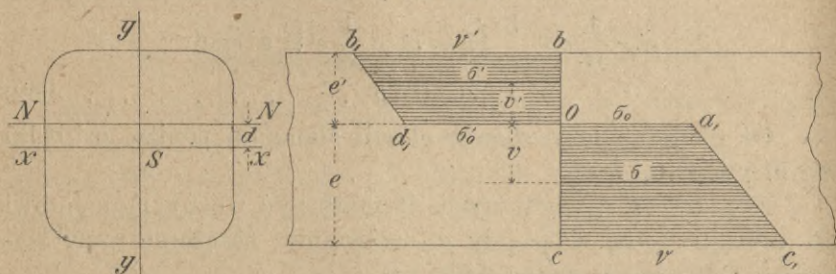
Podobnie jak z belkami drewnianymi ma się rzecz także z belkami z żelaza spawalnego, zlewego i stali. Tu jednak odpowiednio do kształtu krzywej odkształceń, wykazanego w §. 19.,

*) P. str. 43.

linia nateżeń będzie dla ciągnięcia jak i ciśnienia krzywą, zamiast czego możemy podobnie jak dla drzewa przyjąć dwie proste, więc dla ciągnięcia Oa_1 i a_1c_1 , dla ciśnienia Od_1 i d_1b_1 . Linie Oa_1 i Od_1 spadają w tej fazie obciążenia prawie z osią, możemy więc napisać

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \sigma_0' + \alpha' v' \\ \sigma &= \sigma_0 + \alpha v \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 234)$$

rys: 149.



Dla równowagi musi być suma nateżeń równa zeru, więc

$$\int_0^e \sigma dA - \int_0^{e'} \sigma' dA = 0, \text{ a wstawivszy wartości za } \sigma \text{ i } \sigma', \text{ otrzymamy}$$

$$\sigma_0 \int_0^e dA - \alpha \int_0^e v dA - \sigma_0' \int_0^{e'} dA - \alpha' \int_0^{e'} v' dA = 0$$

Nazwijmy $\int_0^e dA = A_1$ powierzchnię części przekroju poniżej osi obojętnej, $\int_0^e v dA = S_1$ moment statyczny tej powierzchni ze względu na oś obojętną, względnie $\int_0^{e'} dA = A_2$ i $\int_0^{e'} v' dA = S_2$ powierzchnię i moment statyczny części przekroju poniżej osi obojętnej, to

$$\sigma_0 A_1 + \alpha S_1 - \sigma_0' A_2 - \alpha' S_2 = 0 \dots \dots 235)$$

Dla żelaza zlewego i stali możemy w przybliżeniu przyjąć $\sigma_0 = \sigma_0'$ i $\alpha = c\alpha'$, więc

$$\sigma_0 (A_1 - A_2) + \alpha (S_1 - cS_2) = 0 \dots \dots 236)$$

Wstawmy wartość za α z rów. 234), to

$$\alpha = \frac{\sigma - \sigma_0}{v} \text{ albo } \frac{v - \sigma_0}{e}, \text{ więc}$$

$$\sigma_0 (A_1 - A_2) + \frac{\nu - \sigma_0}{e} (S_1 - cS_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 237)$$

Wedle doświadczeń Considère'a *) można przyjąć w poprzednim równaniu dla stali miękkiej, $\sigma_0 = 3000 \text{ kg/cm}^2$, $c = 3$. Dla żelaza spawalnego możemy przyjąć $\sigma_0 = 2000 \text{ kg/cm}^2$, c nie znamy z doświadczeń, w braku ich moglibyśmy tymczasowo przyjąć także $c = 3$.

Jeżeli kształt przekroju jest dany, to możemy A_1 , A_2 , S_1 i S_2 wyrazić jako funkcję d , oddalenia osi obojętnej od osi ciężkości i na podstawie równ. 237) wyznaczyć d .

Drugi warunek równowagi brzmi:

$$M = \int_0^e \sigma v dA + \int_0^{c'} \sigma' v' dA.$$

Wstawivszy wartość za σ i σ' z 234), otrzymamy

$$M = \sigma_0 \int_0^e v dA + \alpha \int_0^e v^2 dA + \sigma'_0 \int_0^{c'} v' dA + \alpha' \int_0^{c'} v'^2 dA.$$

Nazwijmy moment bezwładności powierzchni przekroju poniżej osi obojętnej ze względu na oś obojętną I_1 , powierzchni zaś powyżej osi obojętnej I_2 , to możemy napisać

$$M = \sigma_0 S_1 + \alpha I_1 + \sigma'_0 S_2 + \alpha' I_2 \quad \text{albo}$$

$$M = \sigma_0 (S_1 + S_2) + \alpha (I_1 + c I_2)$$

wreszcie

$$M = \sigma_0 (S_1 + S_2) + \frac{\nu - \sigma_0}{e} (I_1 + c I_2) \quad . \quad . \quad . \quad 238)$$

Jeżeli zastosujemy ten wzór do prób wytrzymałości na złamanie, to wstawimy $\nu = \mu$. Spółczynnik wytrzymałości na złamanie w zwykłym rozumieniu będzie

$$\mu_2 = \frac{Me}{I}.$$

Z rów. 238) otrzymamy dla $\mu = \nu$

$$Me = (\mu - \sigma_0) (I_1 + c I_2) + \sigma_0 e (S_1 + S_2), \quad \text{zatem}$$

$$\frac{\mu_2}{\mu} = \frac{I_1 + c I_2}{I} + \frac{\sigma_0 e (S_1 + S_2) - (I_1 + c I_2)}{\mu I} \quad . \quad . \quad 239)$$

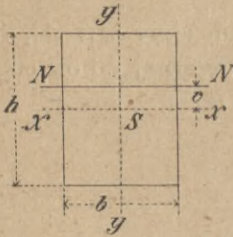
Widzimy więc, że spółczynnik zwiększający (fr. *coefficient de majoration*) $k = \frac{\mu_2}{\mu}$ zależny jest od kształtu przekroju, bo jest tem większy, im większe jest $\frac{e(S_1 + S_2)}{I}$.

*) p. Ann. des ponts et chaussées 1885, str. 574 i nast.

Zastosujmy wzory powyższe do przekrojów prostokątnego i okrągłego.

Dla prostokątu mamy $A_1 = b \left(\frac{h}{2} + v \right)$ (rys. 150)

rys: 150.



$$A_2 = b \left(\frac{h}{2} - v \right), \text{ a więc } A_1 - A_2 = 2bv,$$

$$S_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} + v \right)^2 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} + hv + v^2 \right),$$

$$S_2 = \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - v \right)^2 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - hv + v^2 \right),$$

$$\text{więc } S_1 - 3S_2 = \frac{b}{2} \left(-\frac{h^2}{2} + 4hv - 2v^2 \right).$$

Wstawivszy to w rów. 237), otrzymamy

$$2\sigma_0 bv + \frac{\mu - \sigma_0}{h} \frac{b}{2} \left(-\frac{h^2}{2} + 4hv - 2v^2 \right) = 0$$

albo
$$2\sigma_0 v = \frac{\mu - \sigma_0}{h + 2v} \left(\frac{h^2}{2} - 4hv + 2v^2 \right) \dots \dots \dots 240)$$

Wstawmy n. p. dla stali $\sigma_0 = 3000$, $\mu = 7000 \text{ kg/cm}^2$, to otrzymamy $6000 v = \frac{4000}{h + 2v} \left(\frac{h^2}{2} - 4hv + 2v^2 \right)$.

Stąd otrzymamy $v = 0,09 h \dots \dots \dots 241)$

Obliczmy teraz M wedle wzoru 238), a otrzymamy

$$S_1 + S_2 = b \left(\frac{h^2}{4} + v^2 \right) = b \left(\frac{h^2}{4} + 0,0081 h^2 \right)$$

$$S_1 + S_2 = 0,2581 bh^2$$

$$I_1 + cI_2 = \frac{b}{3} \left[\left(\frac{h}{2} - v \right)^3 + c \left(\frac{h}{2} + v \right)^3 \right] = \frac{bh^3}{3} (0,205 + 3 \times 0,0689) = 0,137 bh^3$$

$$\text{więc } M = 3000 : 0,2581 bh^2 + \frac{4000}{0,59 h} 0,137 bh^3$$

$$M = bh^2 (774,3 + 930) = 1704 bh^2 \dots \dots \dots 242)$$

Moment obliczony wedle zwykłego wzoru jest

$$M_0 = \frac{bh^2}{6} \cdot 7000 = 1167 bh^2,$$

$$\text{zatem } \frac{M}{M_0} = \frac{1704}{1167} = 1,46 \dots \dots \dots 243)$$

Dla koła otrzymamy (rys. 151)

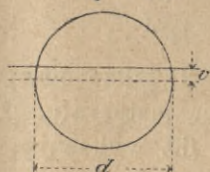
$$A_1 = \frac{d^2 \pi}{8} + dv, \quad A_2 = \frac{d^2 \pi}{8} - dv$$

$$S_1 = \frac{d^2 \pi}{8} (v + 0,21 d) + \frac{dv^2}{2}$$

$$S_2 = \frac{d^2 \pi}{8} (0,21 - v) - \frac{dv^2}{2}, \text{ stąd } A_1 - A_2 = 2dv$$

$$S_1 - 3S_2 = \frac{d^2 \pi}{8} (4v - 0,42d) - 2dv^2.$$

rys:151



Z rów. 237) otrzymamy

$$2dv\sigma_0 + \frac{\mu - \sigma_0}{\frac{d}{2} + v} \left(\frac{d^2 \pi}{8} (4v - 0,42d) - 2dv^2 \right) = 0$$

albo

$$2\sigma_0 v = \frac{\mu - \sigma_0}{d + 2v} \left(4v^2 - \frac{d\pi}{4} (4v - 0,42d) \right) \quad 244)$$

Wstawmy znów dla stali $\sigma_0 = 3000$, $\mu = 7000 \text{ kg/m}^2$, to otrzymamy

$$6000v = \frac{4000}{d + 2v} \left(4v^2 - \frac{d\pi}{4} (4v - 0,42d) \right)$$

a stąd otrzymamy $v = 0,08d \dots \dots \dots 245)$

Obliczmy teraz M wedle wzoru 238), a otrzymamy

$$S_1 + S_2 = \frac{d^2 \pi}{8} (v + 0,21d) + \frac{dv^2}{2} + \frac{d^2 \pi}{8} (0,21d - v) + \frac{dv^2}{2} = 0,164d^3$$

$$I_1 = 0,00686d^4 + \frac{d^2 \pi}{8} (0,2122d + v)^2 + \frac{1}{3} dv^3$$

$$I_1 = 0,00686d^4 + 0,03353d^4 + 0,000171d^4 = 0,04056d^4$$

$$I_2 = 0,00686d^4 + \frac{d^2 \pi}{8} (0,2122d - 0,08d)^2 - \frac{1}{3} dv^3$$

$$I_2 = 0,00686d^4 + 0,00686d^4 - 0,000171d^4 = 0,01355d^4$$

$$I_1 + cI_2 = (0,04056 + 3 \cdot 0,01355)d^4 = 0,0812d^4,$$

więc $M = 3000, 0,164d^3 + \frac{4000}{0,58d} 0,0812d^4 = (492 + 560)d^3$
 $M = 1052d^3 \dots \dots \dots 246)$

Moment obliczony wedle zwykłego wzoru jest

$$M_0 = \frac{\pi d^3}{32} \cdot 7000 = 0,0982 \cdot 7000d^3 = 687,4d^3$$

zatem $\frac{M}{M_0} = \frac{1053}{687,4} = 1,53 \dots \dots \dots 247)$

A zatem dla koła, przy którym materiał jest więcej skupionym, niż dla prostokąta, otrzymujemy $\frac{M}{M_0}$ a zatem $k = \frac{\mu_2}{\mu}$ większe, niż dla prostokąta. Powyższy wynik stwierdziły też doświadczenia z żelazem lanem, przytoczone w §. 60 a także i doświadczenie Considèra, który otrzymał

	spółczynnik zwiększający k	
	żelazo miękkie $\mu' = 1130$	twarde $\mu' = 2230$
I	1,40	1,15
prostokątny	1,82	1,57
okrągły	2,21	1,84

Spółczynnik k zależny jest wedle rów. 239) także od współczynników σ_0 , μ , c , zmienia się więc z jakością materiału. Doświadczenia Bauschingera, przytoczone w §. 60. wykazują, że współczynnik ten jest tem większy, im stal jest miększa.

§. 63. Natężenia zginające w belkach z żelaza lanego, kamienia i betonu. Prawo Bacha.

Już na str. 39. stwierdziliśmy, że dla żelaza lanego niema właściwie żadnej granicy sprężystości, a z rys. 39. widać, że linia odkształceń dla żelaza lanego nie jest wcale prostą, lecz krzywą. Podobnie rzecz się ma z kamieniem, betonem, cementem a w mniejszym nieco stopniu i z drzewem (rys. 40). Otóż prawo H o o k a (str. 34, r. 83) do tych materiałów właściwie się nie stosuje, ściśle rzecz biorąc. Pomimo tego obliczano dotychczas belki z tych materiałów wedle zwykłych wzorów na złamanie i otrzymywano też dziwny wynik, że wytrzymałość na złamanie była znacznie większą, niż wytrzymałość na ciągnięcie. O drzewie mówiliśmy już w §. 61, teraz będziemy mówić o innych, powyżej przytoczonych materiałach.

Prof. B a c h wyznaczył na podstawie doświadczeń równanie krzywej odkształceń w ogólnym kształcie

$$\frac{dl}{l} = \frac{\nu^m}{\varepsilon} \dots \dots \dots 248)$$

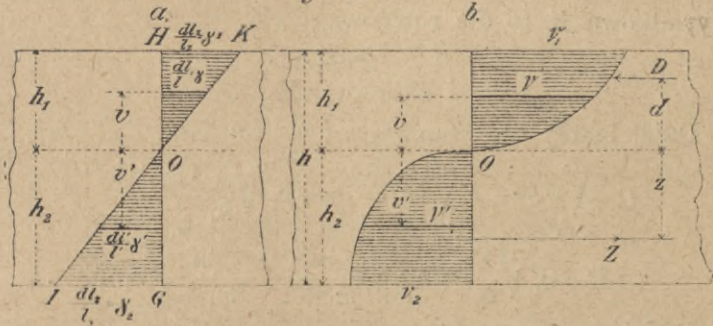
które przechodzi w równanie H o o k a (r. 36.) dla $m=1$. Wartość współczynnika m rozmaita dla różnych materiałów i nie wiele się różniącą od jedności, podajemy w następnej tabliczce:

Materiał	ciągnięcie		ciśnienie	
	ε	m	ε	m
1) żelazo lane	kg/cm^2		kg/cm^2	
przedtem nie obciążone	1338000	1,083	1180000	1,052
obciążone przedtem silnie	1150000	1,1	1170000	1,05

Materiał		ciągnienie		ciśnienie	
		$\frac{\epsilon}{\text{kg/cm}^2}$	m	$\frac{\epsilon}{\text{kg/cm}^2}$	m
2) cementowa zaprawa					
1 cz. cementu	1 $\frac{1}{2}$ cz. piasku	—	—	356000	1,11
1 " "	3 $\frac{1}{2}$ " "	—	—	315000	1,15
1 " "	4 $\frac{1}{2}$ " "	—	—	230000	1,17
3) beton					
1 cz. cementu	2 $\frac{1}{2}$ cz. piasku	5 cz. żwiru	—	—	298000 1,145
1 " "	5 " "	6 " "	—	—	280000 1,137
1 " "	5 " "	10 " "	—	—	217000 1,157
1 " "	2 $\frac{1}{2}$ " "	5 " "	—	—	457000 1,157
1 " "	3 " "	6 " "	—	—	380000 1,164
1 " "	5 " "	10 " "	—	—	367000 1,207

Przyjmujemy tutaj także, jak w §. 36, że przekroje po ugięciu belki pozostają płaskimi, że więc przekrój GH przejdzie

rys: 152.



w położenie JK (rys. 152 a) czyli obróci się około osi obojętnej o kąt JOG . Widzimy więc, że przedłużenia i skrócenia włókien będą proporcjonalne do odległości ich od osi obojętnej, zatem

$$\frac{M}{l} = \gamma = \frac{v^m}{\epsilon} = \alpha v^m \dots \dots \dots 249)$$

$$\text{jeżeli } \alpha = \frac{1}{\epsilon} \dots \dots \dots 250)$$

Spółczynnik α nazwiemy za Bachem współczynnikiem wydłużenia (n. *Dehnungscoefficient*).

Z rysunku wynika wtedy

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl}{l} = \gamma = \gamma_1 \frac{v}{h_1} \\ \gamma' = \gamma_2 \frac{v'}{h_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 251)$$

W ogólności jest współczynnik sprężystości dla ciągnięcia różny, więc

$$\gamma = \alpha_1 v^{m_1}, \quad \gamma' = \alpha v^{m_2}, \quad \dots \dots \dots 252)$$

a stąd

$$\left. \begin{aligned} \gamma = \alpha_1 v^{m_1} \\ \gamma' = \alpha_2 v^{m_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 253)$$

Z rów. 252) i 253) wynika

$$\begin{aligned} v^{m_1} &= \frac{\gamma}{\gamma'} v^{m_2} = \frac{v}{h_1} v^{m_1} \\ v &= v_1 \sqrt{\frac{m_1 v}{h_1}} \\ v' &= v_2 \sqrt{\frac{m_2 v'}{h_2}} \end{aligned} \left\} \dots \dots \dots 254)$$

Jeżeli złożymy ciśnienie w wypadkową D a ciągnięcie w wypadkową Z , to dla równowagi

$$D = Z \dots \dots \dots 255)$$

$$\text{i } Dd + Zz = M \dots \dots \dots 256)$$

Dalej mamy dla szerokości $b = 1 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} D &= \int_0^h v \, dv = v_1 \int_0^{h_1} \sqrt{\frac{v}{h_1}} \, dv = v_1 \sqrt{\frac{1}{h_1} \frac{v^{\frac{1}{m_1} + 1}}{\frac{1}{m_1} + 1}} \Big|_0^{h_1} = \\ D &= v_1 \sqrt{\frac{1}{h_1}} \sqrt{h^{m_1+1}} \frac{m_1}{m_1 + 1} = \frac{m_1}{m_1 + 1} v_1 h_1 \dots \dots 257) \end{aligned}$$

Podobnie otrzymamy

$$Z = \int_0^{h_2} v' \, dv = \frac{m_2}{m_2 + 1} v_2 h_2 \dots \dots \dots 258)$$

$$Dd = \int_0^{h_1} v \, v \, dv = v_1 \int_0^{h_1} \sqrt{\frac{v}{h_1}} \, v \, dv = \frac{m_1}{2m_1 + 1} v_1 h_1^2 \dots \dots 259)$$

$$Zz = \int_0^{h_2} v' \, v' \, dv = v_2 \int_0^{h_2} \sqrt{\frac{v'}{h_2}} \, v' \, dv = \frac{m_2}{2m_2 + 1} v_2 h_2^2 \dots \dots 260)$$

a stąd

$$\frac{m_1}{2m_1 + 1} v_1 h_1^2 + \frac{m_2}{2m_2 + 1} v_2 h_2^2 = M \dots \dots 261)$$

i

$$\frac{m_1}{m_1 + 1} v_1 h_1 = \frac{m_2}{m_2 + 1} v_2 h_2 \dots \dots \dots 262)$$

Z rów. 251) i 253) wynika

$$\frac{\alpha_1 v_1^{m_1}}{\alpha_2 v_2^{m_2}} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{h_1}{h_2} \dots \dots \dots 263)$$

Nareszcie $h = h_1 + h_2 \dots \dots \dots 264)$

Jeżeli znamy m_1, m_2, α_1 i α_2 , to z czterech równań 261), 262), 263) i 264) dadzą się obliczyć cztery nieznanne h_1, h_2, v_1 i v_2 .

Geusen przyjmuje pewne skrócenie w obliczeniu. W materiałach, o których tu mowa, jest współczynnik wytrzymałości na ciągnięcie $\mu' < \mu$ współczynnika wytrzymałości na ciśnienie.

Jeżeli przyjmiemy n tą pewność, to $\tau' = \frac{\mu'}{n}$ jest natężenie dopuszczalne na ciągnięcie.

Zróbmy w 262) $\tau' = v_2$, to

$$v_1 = \frac{m_2}{m_2 + 1} \frac{m_1 + 1}{m_1} \frac{h_2}{h_1} \tau'$$

Nazwijmy

$$\frac{m_2}{m_2 + 1} \frac{m_1 + 1}{m_1} = \varphi \dots \dots \dots 265)$$

$$\text{to } v_1 = \varphi \tau' \frac{h_2}{h_1} \dots \dots \dots 266)$$

Z rów. 262) mamy $v_2 h_2 = \frac{v_1 h_1}{\varphi}$.

Równ. 261) możemy więc napisać

$$v_1 h_1 \left(\frac{h_1 m_1}{2 m_1 + 1} + \frac{m_2}{2 m_2 + 1} \frac{h_2}{\varphi} \right) = M$$

$$\text{albo } \varphi \tau' h_2 \left(h_1 \frac{m_1}{2 m_1 + 1} + \frac{h_2}{\varphi} \frac{m_2}{2 m_2 + 1} \right) = M \dots \dots 267)$$

a że $h_1 = h - h_2$, więc stąd możemy obliczyć h_2 .

Współczynniki m podane powyżej nie są zupełnie dokładne i zmieniają się wedle jakości materiału. Przyjmiemy w przybliżeniu z Bachem dla żelaza lanego $m_1 = 1,04, m_2 = 1,10$, to

$$\varphi = \frac{1,10}{1,04} \frac{2,04}{2,10} = 1,027$$

$$\frac{m_1}{2 m_1 + 1} = \frac{1,04}{3,08} = 0,3377, \quad \frac{1}{\varphi} \frac{m_2}{2 m_2 + 1} = \frac{1}{1,027} \frac{1,10}{3,20} = 0,3346.$$

Dla granitu jest $m_1 = 1,12, m_2 = 1,40$

$$\varphi = \frac{1,40}{1,12} \frac{2,12}{2,40} = 1,10, \quad \frac{m_1}{2 m_1 + 1} = \frac{1,12}{3,24} = 0,35$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{m_2}{2m_2+1} = \frac{1}{1,10} \frac{1,40}{3,80} = 0,34.$$

Z tego widzimy, że w przybliżeniu dla obu materiałów

$$\frac{m_1}{2m_1+1} = \frac{1}{\varphi} \frac{m_2}{2m_2+1} = \frac{1}{3} \dots \dots \dots 268)$$

Jeżeli to wstawimy w rów. 267), to

$$\frac{\varphi \tau' h_2}{3} (h_1 + h_2) = M, \text{ zatem}$$

$$h_2 = \frac{3M}{\varphi \tau' h} \dots \dots \dots 269)$$

Mamy zatem z 266)

$$\nu_1 = \varphi \tau' \frac{h_2}{h_1} = \frac{3M}{hh_1} \dots \dots \dots 270)$$

Dla złamania możemy wstawić μ' zamiast τ' , więc

$$h_2 = \frac{3M}{\varphi \mu' h}.$$

Nazwijmy $h_2 = \alpha h$, to $\mu' = \frac{3M}{\alpha \varphi h_2}$, a że dla szerokości 1 cm

$$W = \frac{h_2}{6}, \text{ więc}$$

$$\mu' = \frac{1}{2\alpha\varphi} \frac{M}{W} \dots \dots \dots 271)$$

Ponieważ $\alpha\varphi$ jest dla granitu i żelaza lanego prawie równe jednostce, więc

$$\mu' = \frac{1}{2} \frac{M}{W} \dots \dots \dots 272)$$

Rzeczywista wytrzymałość na ciągnięcie żelaza lanego i granitu, jest więc prawie równa połowie wytrzymałości, otrzymanej z doświadczeń na złamanie, a obliczonej zwykłym sposobem wedle hipotezy Naviera (proporcjonalność wydłużeń i natężeń), co zgadza się z doświadczeniem. Dla betonu znalazł Carling*) ten stosunek 2,2.

§. 64. Natężenie w belkach, gdy siły nie działają w płaszczyźnie osi głównych.

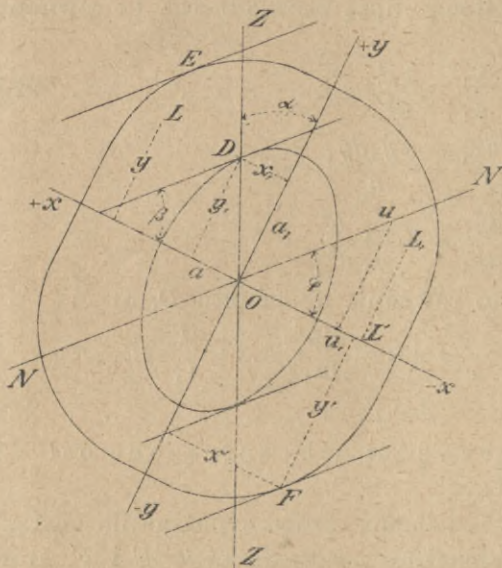
Przypuśćmy, że obciążenie belki działa w płaszczyźnie ZZ, a osi główne przekroju (rys. 153) są XX i YY. Moment sił zewnętrznych ze względu na ten przekrój niech będzie M, to

*) Por. Zeitschr. der öster. Ing. Arch. Ver. 1897 str. 11.

moment ten rozłożyć możemy na dwa momenty składowe, działające w płaszczyznach XX i YY , mianowicie

$M \text{ wst } \alpha$ działający w płaszczyźnie prostopadłej do YY
i $M \text{ dost } \alpha$ " " " " " " XX .

rys:153.



Jeżeli nazwiemy I moment bezwładności ze względu na oś XX , I_1 ze względu na oś YY , to momenty powyższe wywołują następane nateżenia dla dowolnego punktu przekroju L

$$v_1 = \frac{M \text{ dost } \alpha y}{I},$$

$$v_2 = \frac{M \text{ wst } \alpha x}{I_1},$$

a zatem $v = v_1 + v_2 =$

$$= M \left(\frac{y \text{ dost } \alpha}{I} + \frac{x \text{ wst } \alpha}{I_1} \right) \quad 273)$$

Dla punktu L_1 jest x ujemne. Widzimy więc, że w ćwiartkach, przez które przechodzi prosta ZZ będzie v dodatnem, w dwóch innych zaś będzie v ujemnem.

Jeżeli chcemy wyznaczyć położenie osi obojętnej, to zróbmy w rów. 273) $v=0$, więc

$$\frac{y \text{ dost } \alpha}{I} + \frac{x \text{ wst } \alpha}{I_1} = 0$$

Jestto równanie osi obojętnej, które da się napisać też

$$y = -\frac{I}{I_1} x \text{ st } \alpha \quad \dots \dots \dots 274)$$

Jestto równanie linii prostej, zatem oś obojętna jest linią prostą i przechodzi przez środek ciężkości O , bo dla $x=0$, $y=0$.

Niech prosta NN będzie osią obojętną. Dla punktu jej U jest $UU_1=y$, $OU_1=-x$, więc

$$\text{st } \varphi = \frac{UU_1}{OU_1} = -\frac{y}{x},$$

albo po wstawieniu wartości $\neq 274$)

$$\operatorname{st} \varphi = \frac{I}{I_1} \operatorname{st} \alpha \quad \dots \quad 274)$$

A więc położenie osi obojętnej niezależne jest od wielkości obciążenia ani momentu, lecz tylko od przekroju i położenia płaszczyzny obciążenia.

Jeżeli mamy wykreśloną elipsę bezwładności, to równanie jej wedle 168) jest

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1 \quad \dots \quad 275)$$

stad

$$\frac{2x_1 dx_1}{a_1^2} + \frac{2y_1 dy_1}{a^2} = 0,$$

zatem

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x_1 a^2}{y_1 a_1^2}.$$

Jeżeli zastosujemy to równanie do punktu D , to

$$\operatorname{st} \beta = -\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 a^2}{y_1 a_1^2} = \frac{a^2}{a_1^2} \operatorname{st} \alpha = \frac{Aa^2}{Aa_1^2} \operatorname{st} \alpha = \frac{I}{I_1} \operatorname{st} \alpha = \operatorname{st} \varphi$$

a stad

$$\beta = \varphi \quad \dots \quad 276)$$

A zatem oś obojętna jest osią sprzężoną osi ZZ , w której działają siły.

Natężenia ν są, jak wiadomo, proporcjonalne do odstepu od osi obojętnej, więc największe natężenia są w E i F , które to punkty otrzymamy, poprowadziwszy styczne do obwodu przekroju równoległe do osi obojętnej.

Z rów. 273) wynika dla punktu F , zatem $x=x'$, $y=y'$

$$\operatorname{najw} \nu = \frac{M \operatorname{dost} \alpha \cdot y'}{I} + \frac{M \operatorname{wst} \alpha \cdot x'}{I_1} \quad \dots \quad 277)$$

Dla przekroi symetrycznych, których obwód jest prostokątny, więc prostokątu, kształtówki I , U (rys. 154.) największe natężenie jest w rogu A , tu więc

$$y' = e = \frac{h}{2}, \quad x' = e_1 = \frac{b}{2},$$

zatem z rów. 277)

$$\operatorname{najw} \nu = \frac{M \operatorname{dost} \alpha e}{I} + \frac{M \operatorname{wst} \alpha e_1}{I_1},$$

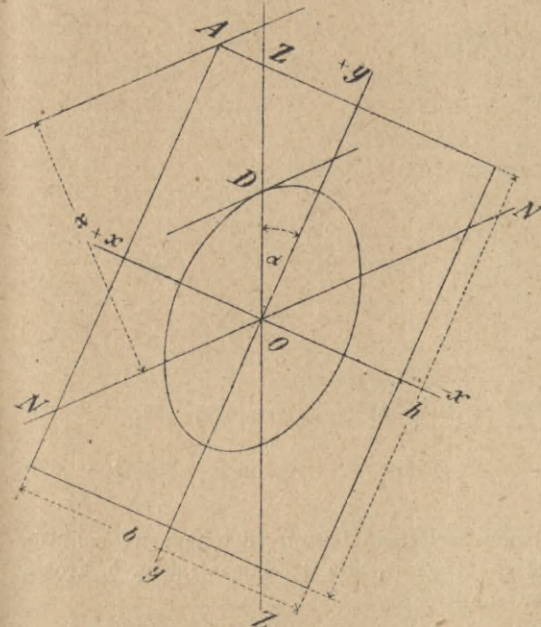
albo gdy nazwiemy $M \operatorname{dost} \alpha = M_1$, $M \operatorname{wst} \alpha = M_2$,

$$\frac{I}{e} = W_1, \quad \frac{I_1}{e_1} = W_2,$$

$$\text{najw } v = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} \dots \dots \dots 278)$$

Jeżeli chcemy obliczyć przekrój dla danego M , to zrobimy najw $v = \tau$. Nazwijmy dalej

rys: 154.



$$W_1 = c W_2 \quad 279)$$

$$\text{to } \tau = \frac{M_1}{W_1} + \frac{c M_2}{W_1},$$

a stąd

$$W_1 = \frac{M_1 + c M_2}{\tau} \quad 280)$$

Jeżeli dla danego przekroju znamy c , to dla danego momentu możemy z 280) obliczyć wprost moment oporn, a stąd liczbę kształtówki lub wymiary prostokątu.

Dla prostokątu

$$W_1 = \frac{bh^2}{b}, \quad W_2 = \frac{hb^2}{b},$$

więc

$$c = \frac{bh^2}{b} \cdot \frac{b}{bh^2} = \frac{h}{b} \quad 281)$$

Wartości c dla kształtówek I i U podajemy w następujących tabliczkach.

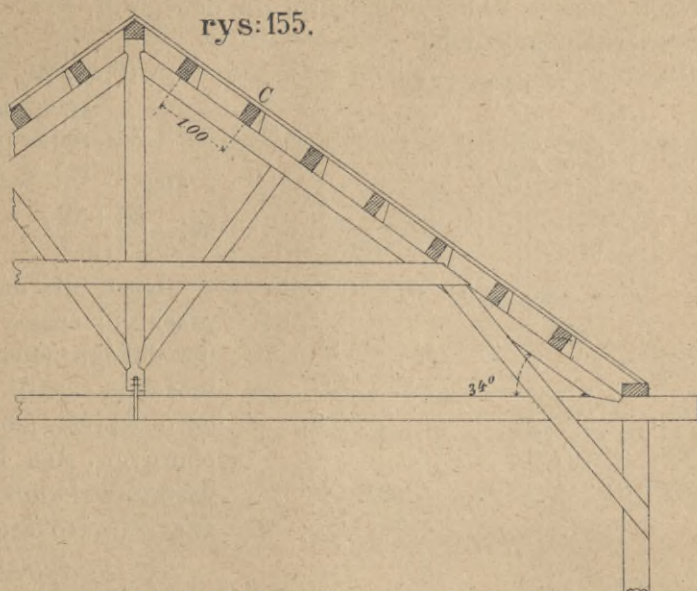
Kształtówki I .

liczba	c	l	c	l	c	l	c	l	c
8	4,96	15	6,55	21	7,56	24a	6,28	30	8,58
10	5,50	16	6,70	22	7,75	25	8,05	32	8,85
12	5,90	18	6,94	22a	5,53	26	8,18	35	9,07
13	6,11	18a	4,78	23	7,73	28	8,32	40	9,40
14	6,12	20	7,34	24	7,88	28a	6,66	45	9,70

Kształtówki U .

liczba	c	l	c	l	c	l	c	l	c
6	3,18	12	5,21	16	6,06	22	7,13	28	7,80
8	3,92	13	5,21	18	6,49	24	7,35	30	7,95
10	4,68	14	5,69	20	6,77	26	7,68		

Przykłady. 1. W punkcie *C* leży na krokwi nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 34^\circ$ (rys. 155) płatw drewniana. Odstęp więźarów wynosi



7 m, ciężar pionowy na m^2 dachu pochylego 120 kg, odstęp płatwi 1 m. Wyznaczyć wymiary płatwi dla $\tau = 80 \text{ kg/cm}^2$. Siła działająca na m. b. krokwi jest $q = 120 \text{ kg/m}$, więc moment największy

$$M = \frac{1}{8} 0,12 \cdot 7^2 = 0,735 \text{ tm} = 73500 \text{ kgcm},$$

kąt $\alpha = 34^\circ$, więc $M_1 = M \text{ dost } 34^\circ = 73500 \times 0,829 = 60931 \text{ kgm}$

$$M_2 = M \text{ wst } 34^\circ = 73500 \times 0,559 = 41088 \text{ kgcm}.$$

Przyjmijmy $\frac{h}{b} = 2$, to $c = 2$, więc wedle 280)

$$\frac{bh^2}{b} = \frac{M_1 + 2M_2}{80} = \frac{60931 + 2 \cdot 41088}{80},$$

$$hb^2 = \frac{6 \cdot 143107}{80} = 10733, \text{ a że } \frac{h}{b} = 2, \text{ więc } h^3 = 20766, h = 27,5.$$

Przyjmijmy więc $b = 14 \text{ cm}$, $h = 28 \text{ cm}$.

Zbadajmy teraz w celu próby, jakie jest natężenie największe w przekroju. Wedle rów. 277) otrzymamy natężenie w punkcie *D*.

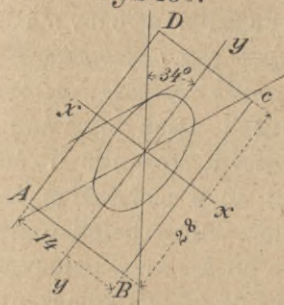
$$\nu = \frac{60931 \cdot 14}{12 \cdot 14 \cdot 28^3} + \frac{41088 \cdot 7}{12 \cdot 28 \cdot 14^3}$$

$\nu = 32,55 + 44,92 = 77,47 \text{ kg/cm}^2$, a zatem nieco mniejsze, niż 80 kg/cm^2 , bośmy wymiary zaokrąglili w górę.

2. Obliczyć łątek z kształtówki I, położonej na krokwi nachylonej pod kątem α , przyczem $\text{st } \alpha = 0,6$. Długość łątki niech będzie 5 m, ciężar jednostajnie rozdzielony na całą długość 1,550 t, więc moment największy

$$M = \frac{1}{8} 1,550 \cdot 6 = 1,1625 \text{ tm} = 116250 \text{ kgcm}.$$

rys:156.



Wedle 280) jest

$$W_1 = \frac{M_1 + cM_2}{\tau}.$$

Mamy dalej

$$\text{st } \alpha = 0,6, \log \text{st } \alpha = 9,77815, \alpha = 30^\circ 57' 50''$$

$$\log M = 5,06540 \quad \log M = 5,06540$$

$$\log \text{dost } \alpha = 9,93323 \quad \log \text{wst } \alpha = 9,71139$$

$$\log M_1 = 4,99863 \quad \log M_2 = 4,77779$$

$$\log M_1 = 99585 \quad \log M_2 = 59950$$

Przyjmijmy $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$, a tymczasowo $c = 8$, to

$$W_1 = \frac{99585 + 8 \cdot 59950}{800} = 723,98 \text{ cm}^3.$$

Z tabl. na str. 161 znajdujemy dla kształtówki l. 30 $W_1 = 733,1$.

Przeliczmy teraz dokładniej. Dla l. 30 jest dokładnie $c = 8,58$.

$$\text{więc } W_1 = \frac{99585 + 8,58 \cdot 59950}{800} = 767,44.$$

A zatem kształtówka l. 30 jest za mała. Przyjąwszy l. 32, otrzymamy $c = 8,85$, więc

$$W_1 = \frac{99585 + 8,85 \cdot 59950}{800} = 787,52,$$

a że dla l. 32 jest $W_1 = 873,3 \text{ cm}^3$, więc kształtówka l. 32 jest wystarczająca.

Ale szerokostopowa kształtówka l. 28 a jest także wystarczającą, bo $W_1 = 733,9$ a $c = 6,66$, więc potrzebne

$$W_1 = \frac{99585 + 6,66 \times 59950}{800} = 623,56 \text{ cm}^3,$$

a zatem kształtówka ta jest aż nadto silną. Ponieważ kształtówka ta waży 61,5 kg/m a l. 32 68,43 kg/m, więc korzystniejszą jest kształtówka l. 28 a.

§. 65. Dźwigary drewniane złożone.

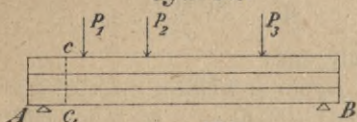
Jeżeli obciążenie jest tak wielkie, że wytrzymałość jednej belki drewnianej o zwykłych wymiarach nie wystarcza, wtedy kładziemy kilka belek jedna na drugiej (rys. 157).

Łatwo zrozumiemy, że belki te położone jedna na drugiej uniosą sumę ciężarów, któreby uniosła każda belka z osobna.

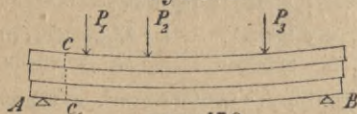
Jeżeli na belkę AB podpartą w dwu punktach działają siły, wtedy każda belka z osobna się ugnie tak, że przekroje, znajdujące się przed ugięciem w linii CC, przesuną się po ugięciu

(rys. 158). Jeżeli przesunięciu temu przeszkodzimy przez to, że wytniemy w belkach zęby (n. *Zahn*) albo wetknijemy kliny (n. *Dübel*, fr. *la clef d'assemblage*) w odpowiednie wycięcia, wtedy belki wszystkie razem wygną się, jak gdyby były jedną belką

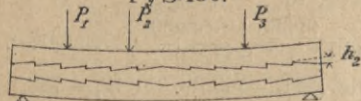
rys:157



rys:158.



rys:159.



(rys. 159). Belki takie nazywamy dźwigarami złożonymi (n. *zusammengesetzter, gekuppelter Balken*, fr. *poutre composé*, a. *built beam*). Jeżeli zważymy, że M jest w prostym stosunku do bh^2 , (rów. 222), to w pierwszym wypadku, gdy kilka belek o wysokościach $h_1, h_2, h_3 \dots$ położymy jedną na drugiej bez połączenia, belki stawiają opór momentowi M_1 , a przytem

$$M_1 : M = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) : h_1^2,$$

jeżeli M oznacza moment, od-

noszący się do belki o wysokości h_1 . Jeżeli te belki połączymy klinami, wtedy w przybliżeniu

$$M_2 : M = (h_1 + h_2 + h_3)^2 : h_1^2,$$

więc M_2 jest o wiele większe od M_1 , a dźwigary złożone mogą o wiele więcej unieść, niż belki jedna na drugiej położone bez połączenia.

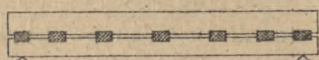
Ponieważ jednak połączenie dźwigarów nie może być w praktyce tak dokładne, aby dźwigary tworzyły jedną belkę, bo już ściśliwość drzewa i wżeranie się między włókna drzewa czelnego sprawia nadzwyczaj małe przesunięcie poziome, więc, aby uwzględnić zmniejszoną przez to wytrzymałość dźwigaru złożonego, należy przyjąć mniejsze natężenie dopuszczalne, o czym poniżej mówić będziemy szczegółowo.

Połączyć belki możemy przez zazębienie albo zaklinowanie. Rozróżniamy więc dźwigary złożone zazębione (n. *verzahnter Balken*, fr. *poutre à crémailleres*, an. *indented beam* (rys. 159) lub klinowane (n. *verdübelter Balken*, an. *built beam with keys*) (rys. 160). Jeżeli odstęp belek dźwigaru jest znaczny, nazywamy dźwigary klockowymi (n. *Klötzelträger*) (rys. 161).

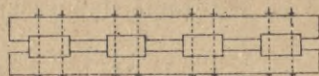
Często wyginają dźwigary zazębione przy wycinaniu zębów w górę, aby powiększyć wytrzymałość. Wskutek sztucznego

wygięcia bowiem powstaje w górnych włóknach ciągnienie, a w dolnych ciśnienie, wskutek zaś obciążenia przeciwnie w dolnych włóknach ciągnienie a w górnych ciśnienie, a stąd natężenie jest mniejsze, niż w belkach pierwotnie prostych, tego jednak w obliczeniach nie uwzględniamy.

rys:160.



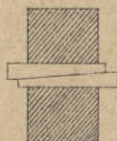
rys:161.



Przy dźwigarach zazębionych muszą być zęby bardzo dokładnie wycięte, aby zęby jednej belki wypełniały zupełnie wycięcia drugiej belki, gdyż inaczej możliwym jest małe przesunięcie belek w kierunku poziomym, a wtedy belki nie działają już jako całość, jako dźwigar złożony, lecz każda belka osobno, przez co wytrzymałość znacznie się zmniejsza.

Jednak chociaż zęby są zupełnie dokładnie wykonane, to później wskutek zsychnania i wżerania się drzewa nie zupełnie przystają. Przy dźwigarach klinowanych nie mamy tych niedogodności, kliny bowiem składają się z dwu części (rys. 162) i da-

rys:162



dzą się wbić tak daleko, że szczelnie wypełniają dziury, a w razie zeschnięcia się drzewa możemy je pobić tak, że znów będą przystawały. Z drugiej strony jednak, jeżeli dźwigar podlega wielkim wstrząśnieniom, kliny rozchełtują się, niedogodność tę możemy jednak usunąć w ten sposób, że zabijamy po dokładnem spojeniu belek gwoździe na cieńszych końcach klinów.

Wiemy, że moment oporu belki jest proporcjonalny do bh^2 , a więc do wysokości w kwadratowym stosunku; ta więc belka ma większy moment oporu, której wysokość jest większa. Ponieważ zaś przy dźwigarze zazębionym tracimy na wysokości przez wycięcie zębów, a przy dźwigarze klinowanym przeciwnie zyskujemy na wysokości wskutek odstępu między belkami, zatem korzystniej jest i z tego względu używać dźwigarów klinowanych.

§. 66. Natężenie dopuszczalne.

Wspominaliśmy już, że dźwigaru złożonego nie jesteśmy w stanie tak wykonać, aby belki nieco się nie przesunęły jedna względem drugiej, wskutek czego dźwigar nie jest tak wytrzymałym, jak dźwigar jednolity. Aby tę okoliczność uwzględnić, musimy więc przy obliczaniu przekroju dźwigaru złożonego przyjąć mniejsze natężenie dopuszczalne, niż dla belki jednolitej. Zachodzi teraz pytanie, o ile należy to natężenie dopuszczalne zmniejszyć.

W roku 1891 ogłosił kapitan inżynier *Maurycy Bock* sprawozdanie *) o licznych doświadczeniach, robionych z drewnianymi dźwigarami złożonymi, które dały następujące wyniki.

Doświadczenia rozpoczęto z dźwigarem złożonym z trzech belek i tylko ześrubowanym. Po obciążeniu nastąpiło jednak natychmiast przesunięcie belek i tak wielkie ugięcie, że okazało się, że śruby wcale nie przyczyniły się do powiększenia wytrzymałości; przy obciążeniu bowiem belki ściskają się i wysokość ich zmniejsza się w ten sposób, że natężenie w śrubach spada do zera. Pomimo, że śruby były tak silnie naciągnięte, że wcisnęły się w drzewo o 5 mm, po obciążeniu stały się w środkowej zwłaszcza części dźwigara nie tylko zupełnie luźne, ale można było jeszcze między podkładką a naśrubkiem wstawić blaszkę 5 do 10 mm grubą. A zatem na tarcie, wywołane naciągnięciem śrub nie możemy wcale liczyć przy dźwigarach złożonych.

Doświadczenia dalsze robione z dźwigarami klinowanymi, zazębionymi i klocekowymi wykazały, że dźwigary łamały się już przy natężeniu 141 do 239 kg/cm^2 , obliczonym z wzoru $vJ = Me$, który, jak wiadomo, ważnym jest jednak tylko do granicy sprężystości.

Dla porównania robiono próby z belkami pojedynczemi, przyczem okazały one wytrzymałość 440 kg/cm^2 , a więc około 2 razy większą.

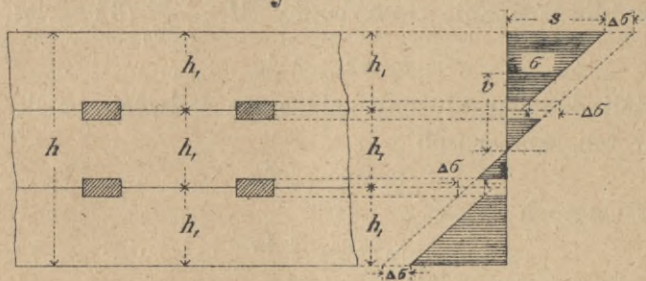
Na podstawie tych doświadczeń ogłosił prof. Melan *) teorię złożonych dźwigarów drewnianych, którą tu wyłożymy.

*) Por. Wochenschrift des österr. Ing. u. Arch. Ver. 1891, str. 21.

**) Por. Wochenschrift des österr. Ing. u. Arch. Ver. 1891, str. 46.

Ponieważ przecięte dla klinów lub zębów włókna skracają się wskutek ciśnienia podobnie, jak i kliny, a to proporcjonalnie do ciśnienia, i ponieważ wykonanie nie może być zupełnie dokładne, następuje małe przesunięcie włókien dwu belek sąsiednich, co spowoduje różnicę natężeń w tych włóknach $\Delta\sigma$. Natężenia w danym przekroju dźwigaru złożonego rozłożą się wtedy w sposób, wskazany na rys. 163.

rys: 163.



Natężenie w odstępie v od osi obojętnej jest wtedy

$$\left. \begin{array}{l} \text{w środkowej belce } \sigma = a v \\ \text{w skrajnych } \sigma_1 = a v - \Delta\sigma \end{array} \right\} \dots \dots \dots 282)$$

gdy v oznacza odstęp włókna danego od osi ciężkości, a a współczynnik, przedstawiający natężenie w odstępie $v=1$.

Suma momentów sił zewnętrznych musi być równą sumie momentów sił wewnętrznych*), a więc moment

$$M = 2 \int_0^{1/2h} \sigma v dA + 2 \int_{1/2h}^{1/2h} \sigma_1 v dA, \text{ jeżeli}$$

$dA = b dv$ oznacza element powierzchni. Wstawiwszy wartość za v z rów. 282), otrzymamy

$$M = 2 a b \int_0^{1/2h} v^2 dv - 2 b \int_{1/2h}^{1/2h} v \Delta\sigma dv, \text{ czyli}$$

$$M = 2 a b \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} - 2 b \Delta\sigma \frac{h^2}{9} = \frac{1}{12} a b h^3 - \frac{2}{9} \Delta\sigma b h^2 \quad \dots \dots \dots 283$$

Nazwijmy teraz natężenie włókna skrajnego belki skrajnej s , to z drugiego równania 282) otrzymamy dla $v = \frac{h}{2}$

*) Por. str. 107.

Melan otrzymał dla belek klinowanych $\beta=7,2$
 " " ząbionych $\beta=4,6$
 " " klocekowych $\beta=3,7$. . . 290)

Ale powyższe wzory Melana nie są zdaniem naszym uzasadnione, bo gdyby były one prawdziwe, otrzymalibyśmy tak małe natężenie dopuszczalne, że użycie dźwigarów złożonych nie byłoby możliwem w praktyce, co się nie zgadza z rzeczywistością. Przyczyną tego jest, że rów. 289) odnosi się do chwili złamania, a nie może być wprost zastosowane do natężenia dopuszczalnego. Jeżeli natężenie dopuszczalne dla belek pojedynczych nazwiemy τ a dla złożonych dźwigarów τ_0 , ciśnienie dopuszczalne na ząb τ' a współczynnik pewności dla ciągnięcia n , względnie dla ciśnienia n' , to

$$\tau_0 = \frac{s_0}{n}, \quad \tau = \frac{s}{n}, \quad \tau' = \frac{z}{n'}, \quad \text{a stąd}$$

$$n\tau_0 = n\tau - \beta\delta n'\tau', \quad \text{zatem}$$

$$\tau_0 = \tau - \beta\delta \frac{n'}{n} \tau' \quad 291)$$

Oprócz tego zwrócić należy uwagę, że Melan wyznaczył β z doświadczeń na złamanie na podstawie wzoru zwykłego, ważnego jednak tylko do granicy sprężystości. Po przekroczeniu tej granicy rozdzielają się natężenia w przekroju zupełnie wedle innego prawa. Jeżeli więc chcemy korzystać z doświadczeń na złamanie, musimy wyznaczyć natężenia, które powstają w chwili złamania i na tej podstawie wyznaczyć współczynniki β .

Granica sprężystości drzewa dla ciągnięcia leży bardzo wysoko tak, że spada prawie ze współczynnikiem wytrzymałości μ , granica sprężystości zaś dla ciśnienia leży 130 do 150 kg/cm^2 . Jeżeli to uwzględnimy, jakoteż i różnice w natężeniu $\Delta\sigma$ włókien sąsiednich dwu belek, to natężenia rozłożą się w chwili złamania w dźwigarze złożonym wedle rys. 164.

Linia natężeń będzie tu kilka razy łamaną. Linie natężeń poza granicą sprężystości cd i fg są naturalnie strómsze, niż inne. Ponieważ przekroje zostały osłabione przez wcięcia na kliny, więc musimy to także uwzględnić i nie przyjmujemy w tych częściach przekroju żadnych natężeń.

Z warunku, że suma natężeń dodatnich i ujemnych musi być równą zeru, da się udowodnić*), że oś obojętna po prze-

*) p. art. autora: „Przegląd Techniczny“ 1891. str. 20.

kroczeniu granicy sprężystości znacznie się zniża (poniżej czwartej części wysokości). Z drugiego warunku, że moment sił zewnętrznych musi być równy momentowi sił wewnętrznych w przekroju, otrzymaliśmy w przybliżeniu $\Delta\sigma$, z którego wynika

- dla dźwigarów klinowanych $\beta=2,1$
- „ „ zazębionych $\beta=1,5$
- „ „ klockowych $\beta=1,1$

Ponieważ to wyznaczenie nie było zupełnie dokładne, przyjmijmy dla pewności

- dla dźwigarów klinowanych $\beta=3$ } . . . 292)
- „ „ zazębionych $\beta=2,2$ }
- „ „ klockowych $\beta=1,6$ }

Teraz trzeba by jeszcze zbadać, jak wielkie możemy przyjąć τ i τ' , względnie jaką przyjmujemy wartość dla n i n' . Podobnie jak dla nitów przyjmowaliśmy większe ciśnienia dopuszczalne na ściankę dziury, niż w ogóle ciśnienie w pręcie, tak i tu możemy przyjąć mniejszy współczynnik pewności dla ciśnienia na kliny, więc gdy n. p. $n=4$, możemy przyjąć $n'=2$,

zatem $\frac{n'}{n} = \frac{1}{2}$.

Ogólnie mamy

$$n' = \frac{z}{\tau'}, \quad n = \frac{s}{\tau}, \quad \text{więc}$$

$$\frac{n'}{n} = \frac{z}{s} \frac{\tau}{\tau'}, \quad \text{a zatem}$$

$$\tau_0 = t - \beta \delta \frac{z}{s} \frac{\tau}{\tau'} \tau'$$

$$\tau_0 = \tau \left(1 - \beta \delta \frac{z}{s} \right) 293)$$

Dla belek klinowanych możemy przyjąć

$s=450 \text{ kg/cm}^2$, $z=120 \text{ kg/cm}^2$ prostopadle do włókien, $\beta=3$, więc

$$\tau_0 = \tau (1 - 0,81 \delta) 294)$$

Dla dwu belek więc $\tau_0=0,80 \tau$, dla trzech $\tau_0=0,73 \tau$.

Dla belek zazębionych przyjmujemy

$$z=450 \text{ kg/cm}^2, \quad s=300 \text{ kg/cm}^2, \quad \beta=2,2,$$

$$\text{więc } \tau_0 = \tau (1 - 1,45 \delta) 295)$$

Dla dwu belek więc $\tau_0=0,64 \tau$, dla trzech $\tau_0=0,52 \tau$.

*) Por. str. 91.

Dla belek klockowych jest

$$s = 450 \text{ kg/cm}^2, z = 300 \text{ kg/cm}^2, \beta = 1,6, \text{ więc}$$

$$\tau_0 = \tau(1 - 1,06 \delta); \dots \dots \dots 296)$$

zatem dla dwu belek będzie $\tau_0 = 0,735 \tau$, dla trzech $\tau_0 = 0,65 \tau$. Dla mostów stałych przyjmujemy zwykle $\tau = 80 \text{ kg/cm}^2$, dla tymczasowych możemy przyjąć od 90 do 110 kg/cm^2). Dla dźwigarów klinowanych z klinami dębowymi możemy przyjąć natężenie dopuszczalne na ciśnienie prostopadłe do włókien dla klinów $\tau' = 50 \text{ kg/cm}^2$, dla mostów tymczasowych 60 kg/cm^2 . Dla dźwigarów klockowych i zazębionych możemy przyjąć τ' większe, bo tu działa ciśnienie w kierunku włókien. Przyjmijmy dla klockowych i zazębionych dźwigarów $\tau' = 60 \text{ kg/cm}^2$, dla mostów tymczasowych 70 kg/cm^2 .

Na tej podstawie zestawiliśmy następną tabliczkę:

		dźwigary							
		klinowane		zazębione		klockowe			
		ilość belek	2	3	2	3	2	3	
mosty stałe kolejowe i dro- gowe		}	$\tau' = 50$	50	60	60	60	60	60 kg/cm^2
			$\tau_0 = 64$	58	51	42	59	51	..
mosty tymcza- sowe	kolei głównej . drugorzędnej . drogowe i . . . dla pieszych . }	}	$\tau' = 60$	60	70	70	70	70	..
			$\tau_0 = 72$	66	58	47	66	59	..
			$\tau_0 = 80$	73	64	52	73	65	..
			$\tau_0 = 88$	80	70	57	81	71	..

Z powyższej tabliczki widzimy, że dźwigary złożone musimy obliczać dla natężeń dopuszczalnych znacznie niższych, mianowicie niższych dla 2 belek o 20 do 30%, dla trzech belek o 17 do 48% tak, że korzyść z użycia dźwigarów złożonych, zwiększająca się w stosunku kwadratowym do wysokości, staje się znów z tego powodu coraz mniejszą, im więcej belek do dźwigaru używamy.

§. 67. Obliczenie przekroju dźwigaru złożonego.

1. Dwie belki.

Nazwijmy wysokość całego dźwigaru (rys. 165) h , wysokość i szerokość jednej belki h' i b , średnicę śruby d , wy-

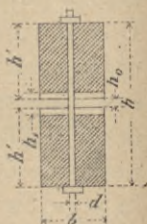
*) p. rozprawkę Bocka: Zeitsch. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1892. str. 405.

sokość klinów i klocków h_1 , zębów h_2 , odstęp między belkami h_0 , to możemy napisać:

a) dla dźwigaru klinowanego:

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{12}(b-d)(h^3 - h_1^3) \\ \tau I &= \frac{1}{2}hM \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 297)$$

rys:165.



Przyjmijmy $h_0 = 0,1 h'$, to $h = 2 h' + h_0 = 2,1 h'$, a stąd $h' = 0,476 h$.

Przyjmijmy dalej tymczasowo $b = 0,75 h'$, $h_1 = 0,3 h'$, $d = 0,1 b$, to wstawivszy te wartości w rów. 297), otrzymamy

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12} 0,9 b [h^3 - (0,3 \times 0,476 h)^3], \text{ a dalej} \\ \tau \cdot \frac{3}{40} 0,75 h [h^3 - 0,0029 h^3] &= \frac{1}{2} h M, \text{ nareście} \end{aligned}$$

$$h = 2,66 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 298)$$

Jestto jednak tylko wartość przybliżona; po dokładnem obliczeniu klinów i śrub i wstawieniu dokładnych wartości w rów. 297) otrzymamy dokładną wartość h .

Jeżeli przyjmiemy wszystkie wartości jak poprzednio, tylko $b = h'$, otrzymamy

$$h = 2,42 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 299)$$

W ogóle jeżeli przyjmiemy szerokość b k razy większą, to wysokość h otrzymamy $\frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ mniejszą.

b) Dźwigar zazębiony.

Tutaj mamy $h = 2 h' - h_2$ (rys. 159). Przyjawszy $h_2 = 0,2 h'$, otrzymamy $h = 1,8 h'$, a stąd $h' = 0,556 h$, dalej gdy $h = \frac{3}{4} h'$ a $d = 0,1 b$, otrzymamy zupełnie w ten sam sposób

$$h = 2,52 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 300)$$

Dla $b = h'$ otrzymamy podobnie

$$h = 2,29 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 301)$$

c) Dźwigar klockowy.

Tutaj znów $h = 2 h' + h_0$. Przyjmijmy $h_0 = 0,4 h'$, to $h = 2,4 h'$, więc $h' = 0,417 h$. Przyjmijmy dalej $b = 0,75 h'$, $h_1 = 0,8 h'$, $d = 0,1 b$, to otrzymamy

$$I = \frac{1}{12} 0,9 \times 0,75 h' (h^3 - 0,8 \times 0,417 h^3) = 0,02205 h^4$$

więc $\tau \cdot 0,02205 h^4 = \frac{1}{2} h M$, a stąd

$$h = 2,83 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 302)$$

Dla $b = h'$ otrzymamy podobnie

$$h = 2,57 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 303)$$

2. Trzy belki.

a) Dźwigar klinowany. Jeżeli wymiary dźwigarów klinowanych (rys. 166) oznaczymy w ten sam sposób, co pierwszej, otrzymamy podobnie

$$I = \frac{1}{12} (b - d) [h^3 - (h' + h_0 + h_1)^3 + (h' + h_0 - h_1)^3] \dots \dots \dots 304)$$

$$\tau I = \frac{1}{2} h M$$

Przyjąwszy tymczasowo, jak pierwszej, $b = 0,75 h'$, $h_0 = 0,1 h'$, otrzymamy $h = 3h' + 2h_0 = 3,2 h'$, a stąd $h' = 0,313 h$.

Wstawiając te wartości w równanie 304), otrzymamy

$$I = 0,01650 h^4, \text{ a stąd}$$

$$h = 3,12 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 305)$$

Dla $b = h'$ otrzymamy podobnie

$$h = 2,83 \sqrt[5]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 306)$$

b) Dźwigar zazębiony. Podobnie otrzymamy dla dźwigarów zazębionych dla tych samych przypuszczeń, co dla dwu belek,

$$h = 3h' - 2h_2 = 2,6h',$$

stąd $h' = 0,385$, $h_2 = 0,2h' = 0,077h$. $I = 0,02166 h^4$,

$$\text{a więc } h = 2,85 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 307)$$

Dla $b = h'$ otrzymamy podobnie

$$h = 2,59 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 308)$$

c) Dźwigar klockowy.

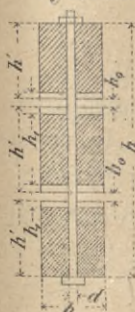
Przyjmijmy, jak pierwszej, $h_0 = 0,4h'$, $h_1 = 0,8h'$, to $h = 3h' + 2h_0 = 3,8h'$, a stąd $h' = 0,263h$. Wtedy otrzymamy dla $b = 0,75h'$, $d = 0,1b$. $I = 0,01198 h^4$ a

$$h = 3,47 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 309)$$

Dla $b = h'$ otrzymamy

$$h = 3,15 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 310)$$

rys.166.

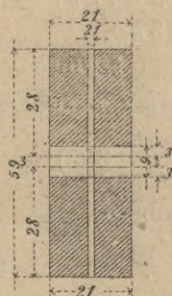


Wzorów dla dźwigarów, składających się z czterech belek, nie podajemy, bo przy tak wielkich wysokościach lepiej użyć belki bratowej, o której poniżej będziemy mówić. Dlatego też w praktyce nie używamy dźwigarów złożonych z więcej belek, niż trzy.

Przykład. Obliczyć przekrój dźwigaru złożonego dla mostu tymczasowego kolei głównej, dla którego najw. $M=7,636 \text{ tm}$.

Jeżeli dźwigar ma być klinowany, to przyjmiemy wedle §. 66. dla dźwigaru dwubelkowego $\tau_0=72$. Otrzymamy zatem dla $b=\frac{3}{4}h'$

rys:167.



$$\text{z r6w. 298) } h=2,66\sqrt[3]{\frac{763600}{72}}=58,57 \text{ cm,}$$

$$\text{a st6d } h'=0,476 \times 58,57=27,29 \approx 28 \text{ cm,}$$

zaś $b=\frac{3}{4} \cdot 28=21 \text{ cm}$. Przekr6j ten przedstawiliŃmy na rys. 167). Dokł6dnie otrzymamy

$$I=\frac{1}{12}(59^3-9^3)(21-2,1)=3222320$$

$$e=29,5$$

$$\text{wi6c } v=\frac{763600 \cdot 29,5}{3222320}=69,9 \text{ kg/cm}^2,$$

a wi6c prawie tyle, coŃmy zał6zyli. JeŃeli dźwigar ma by6 z6z6biony, a $M=7 \text{ tm}$, to przyjmujemy dla dźwigaru dwubelkowego $\tau_0=58 \text{ kg/cm}^2$.

Otrzymamy zatem dla $b=\frac{3}{4}h'$ z r6w. 300) $h=2,52\sqrt[3]{\frac{700000}{58}}=57,8 \text{ cm}$, a st6d $h'=0,556 \times 57,8=32,14 \text{ cm}$, zamiast czego przyjmujemy $h'=33 \text{ cm}$ a

$$b'=\frac{3}{4} \cdot 32=24 \text{ cm.}$$

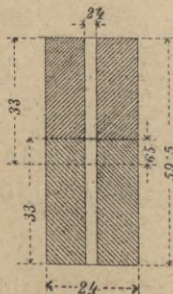
Dokł6dnie otrzymamy (rys. 168)

$$I=\frac{1}{12}(24-2,4)59,5^3=379160$$

$$v=\frac{700000 \cdot 29,75}{379160}=54,9 \text{ kg/m}^2,$$

zatem prawie tyle, coŃmy zał6zyli.

rys:168.



§. 68. Obliczenie klin6w.

Kliny obliczamy wedle wzoru 193) $\sigma=\frac{QS}{I}$, gdzie σ oznacza sił6 Ńcinaj6c6 p6ziom6 w warstwie pp' (rys. 116), S moment pł6szczyzny $pmm''p'$ a I moment bezwł6dnoŃci przekroju.

Dla prostokątu otrzymaliśmy równ 195), mianowicie siłę ścinającą poziomą w warstwie o v odległej od środka ciężkości (rys. 117)

$$\sigma = \frac{QS}{I} = 6 \frac{Q}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{v^2}{h^2} \right)$$

Jeżeli przekrój składa się z dwu belek, to obliczyć mamy siłę ścinającą w środku wysokości, więc dla $y=0$, co wstawimy w równanie 195), otrzymamy

$$\sigma = \frac{3}{2} \frac{Q}{h} \dots \dots \dots 311)$$

Dla trzech belek mamy $y = \frac{h}{6}$, a stąd

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{Q}{h} \dots \dots \dots 312)$$

Ogólnie możemy napisać

$$\sigma = \mu \cdot \frac{Q}{h} \dots \dots \dots 313)$$

przyczem μ oznacza pewien współczynnik, mianowicie dla dźwigaru złożowego z dwu belek $\frac{3}{2}$, z trzech belek $\frac{4}{3}$. Liczby te nie są dla dźwigarów klinowanych i klockowych zupełnie dokładne, ponieważ nie uwzględniliśmy tu odstępów h_0 . Po dokładniejszym obliczeniu otrzymamy następujące wartości dla μ :

	2 belki	3 belki	
dźwigar ząbony . . .	$\mu = 1,5$	1,333	}
„ klinowany . . .	$\mu = 1,497$	1,319	
„ klockowy . . .	$\mu = 1,460$	1,396	
			. . . 314)

a) Odstęp klinów.

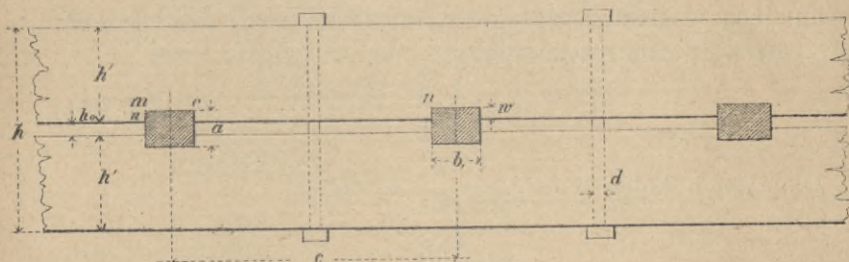
Nazwijmy szerokość klinów b , głębokość wcięcia w , odległość klinów od środka do środka c , szerokość i wysokość belek b i h' (rys. 169) to σc siła ścinająca pozioma, działająca na długości c , wywołuje ciśnienie na powierzchnię mn wcięcia na klin, a zatem gdy r' oznacza natężenie dopuszczalne na ciśnienie na kliny prostopadle do włókien, to

$$\sigma c = \mu \frac{Q}{h} c = b w z, \text{ a stąd}$$

$$c = \frac{b h w r'}{\mu Q} \dots \dots \dots 315)$$

Belka bowiem, starając się przesunąć po drugiej, ciśnię na powierzchnię mn , a ciśnienie to nie powinno wywołać większego natężenia, niż ciśnienie dopuszczalne τ' .

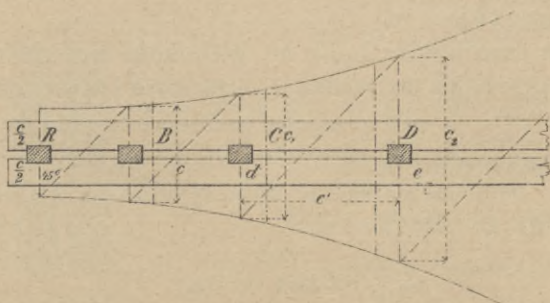
rys: 169.



Tarcia wywołanego naciągnięciem śrub nie uwzględniliśmy tu wcale na podstawie doświadczeń Bocka. Ponieważ jednak przy małych ugięciach tarcie jeszcze działa, więc śruby dajemy tem gęstsze i grubsze, im większa siła poprzeczna Q , a więc niedaleko podpór — rzadsze i cieńsze w pobliżu środka dźwigaru.

Z równ. 315) wynika, że jeżeli wcięcie w jest wszędzie jednakowe (zwykle $w=0,1 h'$ do $0,15 h'$) to c jest zmiennem, a mianowicie odwrotnie proporcjonalnem do siły poprzecznej Q , a więc przy podporach c będzie bardzo małe, a w środku wielkie. Aby wyznaczyć położenie klinów, postępujemy w następnym

rys: 170.



sposób. Obliczamy odległość c z rów. 315), dla rozmaitych punktów belki (rys. 170), wystawiamy w tych punktach pro-

stopadłe i odcinamy do góry i na dół po $\frac{1}{2} c$. Końce prostopadłych łączymy i otrzymamy dwie linie krzywe, których odstęp pionowy w każdym punkcie jest równy obliczonej odległości c . Nazwijmy c' odstęp klinów d i e , to jeżeliby $c' = c_1$, to byłoby $c' < c_2$ i na odwrót, bierzemy więc $c_1 < c' < c_2$ i wyznaczamy wykreślnie odstępy klinów za pomocą przekątnej pod 45° i pionowych.

Jeżeliby przy podporach kliny wypadły zanadto blisko siebie, to przyjmujemy w równaniu 315) nieco większe w , przez co i c się powiększy, w środku belki zaś zmniejszamy w , aby c tak bardzo się nie zmieniało.

Równanie 315) da się jeszcze inaczej napisać. Jeżeli wstawimy wartość dla $h = C \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}$, czyli $h^3 = \frac{C^3 M}{\tau}$, $h = \frac{C^3 M}{\tau h^2}$ w rów.

315), to otrzymamy $c = \frac{bw \tau' C^3 M}{\mu Q \tau h^2}$, a gdy $b = kh'$, $h' = mh$.

$$c = \frac{C^3 m^2 k \tau' w M}{\mu \tau h Q} = C_1 \frac{\tau' w M}{\tau h' Q}, \dots \dots \dots 316)$$

jeśli $C_1 = \frac{C^3 k m^2}{\mu}$.

Wedle poprzedniego możemy przyjąć następujące wartości:

	dźwigar	k	C	m	μ	C_1	$\frac{\tau'}{\tau}$	$C_1 \frac{\tau'}{\tau}$	C_2
2 belki	klingo- wany	$\frac{3}{4}$	2,66	0,476	1,497	2,14	0,8	1,71	1,69
		1	2,42						1,86
	zazę- biony	$\frac{3}{4}$	2,52	0,556	1,5	2,47	1,1	2,72	1,77
		1	2,29						1,94
3 belki	klingo- kowy	$\frac{3}{4}$	2,83	0,417	1,460	2,02	1,0	2,02	1,71
		1	2,57						1,89
	klingo- wany	$\frac{3}{4}$	3,12	0,313	1,319	1,67	0,9	1,50	1,73
		1	2,83						1,90
zazę- biony	$\frac{3}{4}$	2,85	0,385	1,333	1,93	1,4	2,70	1,76	
	1	2,59						1,94	
klingo- kowy	$\frac{3}{4}$	3,47	0,263	1,396	1,55	1,1	1,71	1,70	
	1	3,15						1,87	

We wzorze 316) oznacza M największy moment, wedle którego oblicza się przekrój dźwigaru, Q zaś jest zmienne.

Jeżelibyśmy przyjęli stałe $\frac{w}{h'}$, mianowicie 0,1 dla dźwigarów klinowanych a 0,2 dla zazębionych i klockowych, tobyśmy otrzymali

2 belki			3 belki		
klin.	zazęb.	klock.	klin.	zazęb.	klock.
$C = 0,171$	$0,544$	$0,404$	$0,150$	$0,540$	$0,342 \frac{M}{Q}$

Z zestawienia powyższego widzimy, że odstęp klinów jest mniejszy niż połowa odstepu klocków, który znów jest mniejszy od odstepu zębów.

b) Szerokość klinów.

Połączenie belek może być zniweczone także przez ścięcie klinów. Siła pozioma działająca na klin jest $\sigma c = bw\tau$. Jeżeli nazwiemy natężenie dopuszczalne klina na ścinanie równoległe do włókien τ_2 , to $\sigma c = bw\tau' = bb_1\tau_2$, a stąd

$$b_1 = \frac{\tau'}{\tau_2} w = \frac{\tau'}{8} w \dots \dots \dots 317)$$

jeśli przyjmiemy natężenie na ścinanie dla klinów $\tau_2 = 8 \text{ kg/cm}^2$; więc gdy $z = 50$, względnie 60 kg/cm^2 , to $b_1 = 6w$ lub $7,5w$.

Długość klocków b_1 obliczamy według tego samego równania, ze względu na wywrót zwykle jednak b_1 musimy przyjąć większe.

c) Najmniejszy odstęp klinów lub zębów. Siła ścinająca pozioma może zniszczyć połączenie belek także ścinając dźwigar w płaszczyźnie ne (rys. 169), jeżeli kliny lub zęby zbyt gęsto umieścimy. Aby to nie nastąpiło, musi być dla klinów pionowych

$$\sigma c = bw\tau' \leq \tau_2 (c - b_1) b, \text{ a stąd}$$

$$c \geq \frac{\tau'}{\tau_2} w + b_1 \dots \dots \dots 318)$$

Podobnie otrzymamy dla klinów pochyłych (rys. 171) i zębów z powodu, że tu chodzi o ścinanie na długości $be = c$

$$\sigma c = bw\tau' \leq \tau_2 cb, \text{ a stąd}$$

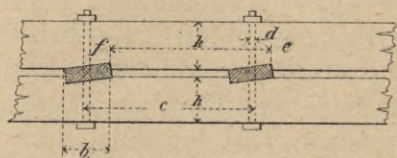
$$c \geq \frac{\tau'}{\tau_2} w \dots \dots \dots 319)$$

Natężenie dopuszczalne τ_2 na ścinanie równoległe do włókien możemy przyjąć od 5 do 9 kg/cm^2 . Dla $\tau_2 = 8 \text{ kg/cm}^2$, $z = 50 \text{ kg/cm}^2$, $b_1 = 6w$ otrzymamy dla klinów pionowych najmn $c = (6,2 + 6)w = 12w$, dla zębów i klinów pochyłych $c = 6,2d$.

Jeśli by z rów. 315) lub 316) wypadło c mniejsze, niż tego wymaga rów. 318), to albo należałoby b_1 zmniejszyć, a aby

zapobiec ścięciu klinów, uzbroić kliny blaszkami żelaznymi 2 do 4 mm grubymi (rys. 172) albo też użyć klinów ukośnych lub zębów, w którymto razie znajduje zastosowanie rów. 319). Ale

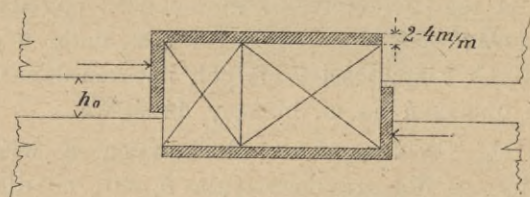
rys: 171.



cóż się stanie, gdy odstęp c obliczony z rów. 315) lub 316), będzie jeszcze mniejszy od najmn c wedle 319)?

Wtedy natężenie albo na ścinanie, albo na ciśnienie będzie większe od dopuszczalnego.

rys: 172.



Zachodzi więc teraz pytanie, kiedy możemy zadość uczynić obu równaniom 316) i 319). Z obu tych równań otrzymamy

$$C_1 \frac{\tau'}{\tau} \frac{w}{h'} \frac{M}{Q} > \frac{\tau'}{\tau_2} w, \text{ a stąd } \frac{\tau}{\tau_2} < \frac{C_1}{h'} \frac{M}{Q} \dots 320)$$

A zatem, aby można było tak urządzić kliny lub zęby, aby natężenie na ciśnienie i ścinanie nie przekraczało dozwolonej granicy, musi być $\frac{M}{Q} \frac{C_1}{h'} > \frac{\tau}{\tau_2}$, a więc gdy np. $\tau=50$, $\tau_2=8$,

$$\frac{\tau}{\tau_2} = 6,3.$$

Wstawiwszy w powyższą nierówność $h' = mh = m C \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}$

otrzymamy
$$\frac{\tau}{\tau_2} < \frac{C^2 k m^3}{\mu} \sqrt[3]{\frac{M^2 \tau}{Q^3}} = C_2 \sqrt[3]{\frac{M^2 \tau}{Q^3}} \dots 321)$$

Spółczynniki C_2 obliczyliśmy i zestawiliśmy w powyższej tabliczce.

Dla danego obciążania jest $\sqrt[3]{\frac{M^2 \tau}{Q^3}}$ stałe, C zależy od ustroju dźwigaru złożonego. A więc gdy C_2 jest za małe, to trzeba się starać przez zmianę ustroju uzyskać C_2 większe, więc użyć dźwigarów zazębionych raczej, niż klockowych lub klinowanych. Dla dźwigarów trzybelkowych jest C_2 prawie takie samo, jak dla dwubelkowych, dla belek klinowanych trochę większe, dla klockowych nieco mniejsze. Wysokość wcięcia lub zęba w nie wchodzi wcale do równ. 320) lub 321), jest więc w tym względzie obojętna.

Jeżeli przyjmiemy obciążenie jednostajne ciągłe, to najw $M = \frac{1}{8} q l^2$, najw $Q = \frac{1}{2} q l$, więc

$$\frac{\tau}{\tau_2} \leq C_2 \sqrt[3]{\frac{l \tau}{8 q}}, \dots \dots \dots 322)$$

Z równania tego widzimy, że niemożność pogodzenia rów. 315) i 319) zdarzyć się może, gdy l i τ są małe a q wielkie, a więc dla małych rozpiętości i małych nateżeń dopuszczalnych a dla wielkich obciążeń na m. bieżący dźwigara.

Wartości C_2 dla dźwigarów klockowych są właściwie za małe, bo obliczone dla przypuszczenia $b_1 = 0$, co dla klocków jest niemożliwe.

Przykład. Dla dźwigaru obliczonego w §. 67. niech będzie na podprorze $Q = 3,5t$, obliczyć odstęp klinów c , szerokość b_1 .

Wedle rów. 315) mamy $c = \frac{bhw \tau'}{\mu Q}$.

Tutaj jest $b = 21 \text{ cm}$, $h = 59 \text{ cm}$, $w = 3 \text{ cm}$, $\tau' = 50 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 1,497$
 $Q = 3500$, więc

$$c = \frac{21 \cdot 59 \cdot 3 \cdot 50}{1,497 \cdot 3500} = 35,5 \text{ cm.}$$

Szerokość klinu b_1 otrzymamy z 317)

$$b_1 = \frac{\tau'}{8} w = \frac{50}{8} \cdot 3 = 19 \text{ cm.}$$

Najmniejszy odstęp klinów wypada z równ. 318)

$$c \geq \frac{\tau'}{\tau_1} w + b_1 = \frac{50}{8} \cdot 3 + 19 = 38 \text{ cm.}$$

Ponieważ powyżej otrzymaliśmy odstęp nieco mniejszy, więc należałoby w tym miejscu użyć klinu pochylego, dla którego

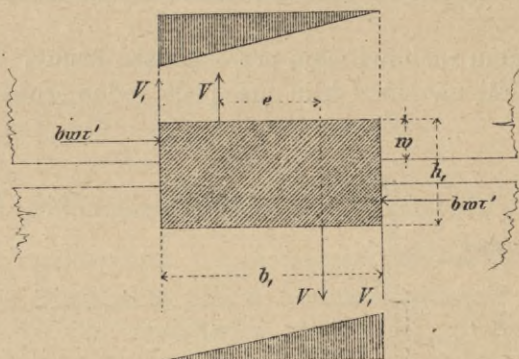
$$\text{najmn } c \geq \frac{50}{8} \cdot 3 = 19 \text{ cm.}$$

§. 60. Obliczenie śrub.

Na klin (rys. 173) działają ciśnienia $\sigma c = bw\tau'$, które tworzą moment $bw\tau'(h_1 - w)$ i wzbudzają oddziaływanie pionowe V i V' , działające w odstępzie e . Dla równowagi musi być $bw\tau'(h_1 - w) = Ve$, a stąd

$$V = \frac{bw\tau'}{e}(h_1 - w) \dots \dots \dots 323)$$

rys: 173.



Odstęp e zależy od punktów zaczepienia sił V , a te od rozkładu ciśnienia na górną i dolną podstawę klocka. Jeżeli powierzchnia nateżenia ma kształt trójkąta, to $e = \frac{1}{3}b_1$, a wtedy

$$V = \frac{3bw\tau'}{b_1}(h_1 - w) \dots \dots \dots 324)$$

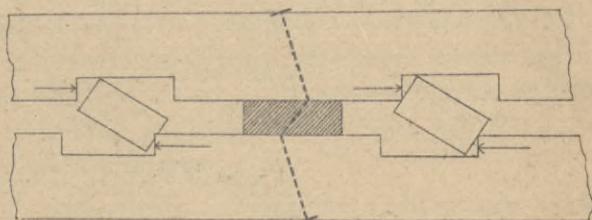
albo, ze względu na 317), gdy b_2 nazwiemy teoretyczną szerokość klocka wedle 317)

$$V = \frac{3bb_2}{b_1}(h_1 - w)\tau_2 \dots \dots \dots 325)$$

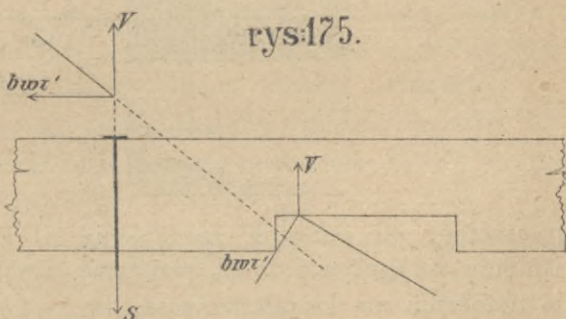
Z rów. 325) widzimy, że jeżeli V jest mniejsze, to e musi być większe i odwrotnie, a zatem, gdyby śruby nie były dostatecznie naciągnięte, to e może się powiększyć, przyczem najw $e = b_1$. Tej skrajnej wartości nie może jednak przybrać e , bo wtedy działałyby siły V_1 w krawędziach klina, co wywołałoby w tych krawędziach nieskończenie wielkie nateżenia, a wskutek tego zgniecenie krawędzi.

Gdyby śrub nie było, belki przesunęłyby się poziomo, a klinyby się obróciły, jak to uwidoczono na rys. 174. Temu

rys: 174.



zamierzonemu ruchowi mają przeszkadzać śruby. Widzimy z rys. 175, że jeżeli na jeden klin przypada jedna śruba, to ciągnięcie



rys: 175.

$S = V = \frac{bw \tau'}{e} (h_1 - w)$. Ponieważ nie chcemy dopuścić zbyt wielkich ciśnień na kliny ani ich obrotu, więc przyjmiemy $e = \frac{1}{3} b$, więc $S = \frac{3bw \tau'}{b_1} (h_1 - w) = \tau' \cdot \frac{d^2 \pi}{4}$, jeżeli τ_1 oznacza natężenie dopuszczalne żelaza na ciągnięcie, które możemy przyjąć 700 kg/cm^2 dla mostów kolejowych a 800 kg/cm^2 dla mostów drogowych, a d średnicę śruby.

A więc
$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{3bw \tau'}{b_1 \tau_1} (h_1 - w) \dots \dots \dots 326)$$

a
$$d = 1,954 \sqrt{\frac{bw \tau'}{b_1 \tau_1} (h_1 - w)} \dots \dots \dots 327)$$

W razie, jeżeli n śrub przypada na jeden klin, to

$$d = 1,954 \sqrt{\frac{bd}{nb_1} \frac{r'}{r_1} (h_1 - w)} \dots \dots \dots 328)$$

W powyższych równaniach b_1 znajduje się w mianowniku, a zatem tem mniej, względnie tem słabszych możemy użyć śrub, im szersze są kloce; przeciwnie rzecz się ma z wysokością kłoców h_1 . W razie gdyby z wzorów powyższych wypadało d za wielkie, możnaby przyjąć $e = \frac{1}{2} b_1$ zamiast $\frac{1}{3} b_1$.

Przykład. Obliczmy dla tego samego przykładu, co poprzednio, wy-
miary śrub.

Według §24) jest $V = \frac{3 \cdot 21 \cdot 3 \cdot 50}{19} (9 - 3) = 2984 \text{ kg}$, zatem gdy $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$,

a na klin przypada jedna śruba, $\frac{d^2 \pi}{4} \cdot 800 = 2984$, stąd

$$d = \sqrt{\frac{2984}{200\pi}} = \sqrt{\frac{14,92}{\pi}} = 2,18 \text{ cm} = 22 \text{ mm}.$$

§. 70. Obliczenie belek żelazno-betonowych.

Wiemy, że spólczynnik wytrzymałości betonu na ciągnię-
nie jest znacznie mniejszym niż na ciśnienie *), zatem przy zła-
maniu ciągnięte włókna przerywają się rychło, gdy wytrzyma-
łość ciśnionych nie została jeszcze wyzyskana. Aby więc po-
większyć wytrzymałość belek i płyt betonowych; wzmacniamy
je wkładając w części ciągnięte pręty żelazne, których wytrzy-
małość na ciągnięnie jest bardzo znaczna. Belki takie nazy-
wamy belkami żelazno-betonowymi (n. *Cementeisen-*
balken, fr. *poutre de beton armé*)

Jeżeli wkładka żelazna składa się z prętów okrągłych, to jest
to ustrój Moniera, jeżeli z kształtówek połączonych ze sobą,
Wünscha, jeżeli beleczki żelazne są w większych odstępach,
Melana, jeżeli płyta betonowa wzmocniona jest żebrami, Hen-
nebique'a.

Jakikolwiek będzie ustrój belki żelazno-betonowej, przy
obliczeniu jej rozróżnić musimy dwie fazy.

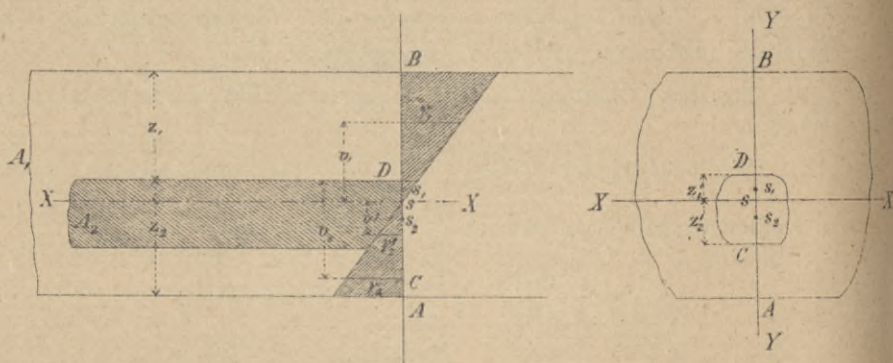
W pierwszej fazie przy mniejszem obciążeniu mamy do
czynienia z belką złożoną z dwu materyałów, betonu i żelaza,
przyczem doświadczenia stwierdziły, że przyczepność między

*) Por. str. 42.

tymi materiałami jest dość wielką, aby przeszkodzić przesu-
nieniu wzajemnemu tych materiałów.

Na rys. 176. widzimy belkę betonową o przekroju A_1 , we-
wnątrz której jest wkładka żelazna o przekroju A_2 . Niechaj

rys: 176.



XX będzie osią obojętną dla obciążenia pionowego, nazwijmy
dalej natężenie w betonie w odstępnie v_1 i v_2 v_1 i v_2 , w żelazie
 v'_1 i v'_2 , to ponieważ wydłużenie i skrócenie włókien jest pro-
porcyonalne do odstępów osi obojętnej, a natężenie propor-
cyonalne do współczynników sprężystości, więc jeżeli współczyn-
nik sprężystości betonu nazwiemy ε a żelaza ε' , to

$$\frac{v_1}{\varepsilon} = \frac{v_2}{\varepsilon}, \quad \frac{v'_1}{\varepsilon'} = \frac{v'_2}{\varepsilon'} \quad . . . \quad 329)$$

jeżeli r oznacza promień krzywizny.

Suma natężeń normalnych musi być równą zeru, więc

$$-\int_0^{z_1} v_1 d^2 A_1 - \int_0^{z'_1} v'_1 d^2 A'_1 + \int_0^{z_2} v_2 d^2 A_2 + \int_0^{z'_2} v'_2 d^2 A'_2 = 0$$

a stąd po wstawieniu wartości z 329)

$$-\varepsilon \int_0^{z_1} v_1 d^2 A_1 - \varepsilon' \int_0^{z'_1} v'_1 d^2 A'_1 + \varepsilon \int_0^{z_2} v_2 d^2 A_2 + \varepsilon' \int_0^{z'_2} v'_2 d^2 A'_2 = 0, \quad . . . \quad 330)$$

Podobnie otrzymamy drugi warunek równowagi

$$M = \frac{\varepsilon}{r} \int_0^{z_1} v_1^2 d_1^2 A_1 + \frac{\varepsilon'}{r} \int_0^{z'_1} v_1'^2 d^2 A'_1 + \frac{\varepsilon}{r} \int_0^{z_2} v_2^2 d^2 A_2 + \int_0^{z'_2} v_2'^2 d^2 A'_2 \quad 331)$$

Te same równania otrzymalibyśmy, gdybyśmy przyjąwszy

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = n \dots \dots \dots 332)$$

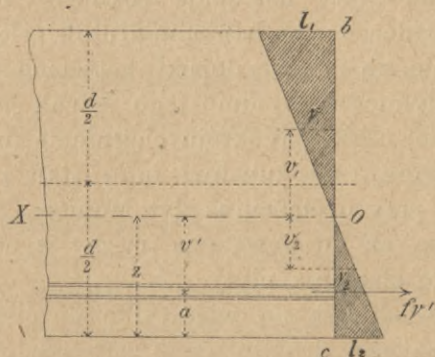
uważali przekrój jako jednolity betonowy, powiększyli jednak elementa przekroju wkładki żelaznej n razy.

Gdy obciążenie jest tak wielkie, że wytrzymałość na ciągnięcie betonu zostanie przewyżczoną, belka pęka ze strony ciągniętej. W drugiej tej fazie pracuje beton w części niepełniętej na ciśnienie, wkładka żelazna na ciągnięcie. O nateżeniach powstających w drugiej fazie pomówimy później.

§. 71. Płyty Moniera. Faza pierwsza.

W płytach Moniera wkładka żelazna składa się z prętów okrągłych, układanych w pewnych odstępach. Zwykle pręty te łączy się prętami poprzecznymi, co jednak nie przyczynia się do zwiększenia wytrzymałości, jak to wykazały doświadczenia duńskie.

rys: 177



Przypuszczamy, że płyty są na dwu końcach podparte. Nazwijmy f grubość warstwy żelaza, rozdzielonej na całą szerokość i przyjmijmy tę szerokość $b=1\text{ cm}$, a otrzymamy w pierwszej fazie (rys. 177) analogicznie do równania 330)

$$-\int_0^{d-z} v_1 dv_1 + \int_0^z v_2 dv_2 + f v' = 0$$

czyli ze względu na 329)

$$\varepsilon(d-z)^2 - \varepsilon z^2 - 2\varepsilon'f(z-a) = 0, \text{ a stąd}$$

$$z = \frac{d^2 + 2afn}{2(d+fn)} \dots \dots \dots 333)$$

Dalej musi być suma momentów sił zewnętrznych i wewnętrznych równą, więc analogicznie do 331)

$$M = \int_0^{d-z} v_1 v_1 dv_1 + \int_0^z v_2 v_2 dv_2 + f' v' v'$$

$$\text{albo } M = \frac{1}{3r} \left[\varepsilon z^3 + \varepsilon (d-z)^3 + 3\varepsilon f (z-a)^2 \right] \quad . \quad . \quad 334)$$

Z równań 329) i 334) otrzymamy wreszcie, nazwawszy natężenia we włóknach skrajnych τ_1 (ciśnienie) i τ_2 (ciągnienie):

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon z}{r} = \frac{3 M z}{z^3 + (d-z)^3 + 3 f n (z-a)^2} \quad . \quad . \quad 335)$$

$$\tau_1 = - \frac{\varepsilon (d-z)}{r} = - \frac{3 M (d-z)}{z^3 + (d-z)^3 + 3 f n (z-a)^2} = - \tau_2 \frac{d-z}{z} \quad . \quad 336)$$

$$v' = \frac{\varepsilon' (z-a)}{r} = \frac{3 M (z-a) n}{z^3 + (d-z)^3 + 3 f n (z-a)^2} = \tau_2 \frac{z-a}{z} n \quad . \quad 337)$$

Z doświadczeń obliczyć możemy moment M , przy którym płyta Moniera się łamie. Jeżeli to M wstawimy w równanie 335, to otrzymamy ciągnienie τ_2 za wielkie, bo przekraczające znacznie współczynnik wytrzymałości. Z tego wynika, że już znacznie przed złamaniem płyty następuje pęknięcie betonu. Rysy te są bardzo mało widoczne, bo istnienie drutów żelaznych nie dozwala na otwieranie się rysów, dopóki natężenie żelaza nie przekracza granicy płynności. Pomimo tego jednak po pęknięciu betonu w ciągnionej części przekroju ciągnienie już tam powstać nie może i wytworzy się zupełnie inny stan równowagi. Dlatego będziemy przy obciążeniu płyt Moniera rozróżniali dwie fazy, pierwszą aż do powstania rysów w betonie, drugą od tej chwili aż do złamania płyty.

Równania powyższe odnoszą się więc tylko do pierwszej fazy, nad równowagą podczas drugiej fazy zastanowimy się później. Teraz zastanowimy się nad współczynnikami wytrzymałości i sprężystości betonu. Prof. Hartig *) dowiódł swemi doświadczeniami, że współczynnik sprężystości zaprawy cementowej ε zmienia się silnie wraz z natężeniem, z jakością i dawnością zaprawy. Tak był n. p. w pewnym wypadku po siedmiu dniach współczynnik sprężystości na ciśnienie $\varepsilon_1 = 141,000 \text{ kg/cm}^2$, po 30

*) Por. Hartiga „Das elastische Verhalten der Mörtel und Mörtelbindematerialien“ Civilingenieur 1893.

dniach jednak już $\varepsilon_1 = 234000 \text{ kg/cm}^2$. Z rys. 178. widzimy, że dla większych ciśnień ε_1 zmniejsza się, a zatem przedłużenia względne stają się stosunkowo coraz większe. Tak było n. p. przy jednym doświadczeniu dla ciągnięcia

$$\tau_2 = 38,6 \text{ kg/cm}^2 \quad \varepsilon_2 = 302700 \text{ kg/cm}^2,$$

dla natężenia $\sigma = 0$ $\varepsilon = 265500 \text{ kg/cm}^2$, a dla ciśnienia $\tau_1 = 127 \text{ kg/cm}^2$ $\varepsilon_1 = 133700 \text{ kg/cm}^2$. Między granicami $\nu_2 = 1 \text{ kg/cm}^2$ i $\nu_1 = 7 \text{ kg/cm}^2$ jest

$$\varepsilon_2 = 266300$$

$$\text{a } \varepsilon_1 = 248200 \text{ kg/cm}^2,$$

a więc prawie równe. Przy innym doświadczeniu było nawet $\varepsilon_2 = 96300 \text{ kg/cm}^2$.

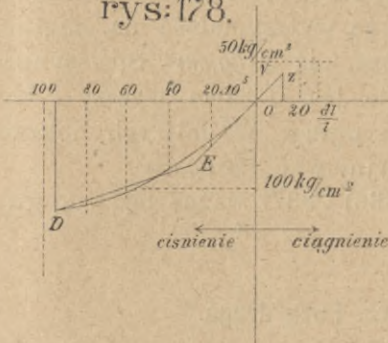
Hartig przypuszcza, że wartości dla ε_1 i ε_2 w praktyce będą nieco niższe, bo do doświadczeń używano najlepszych materiałów i wykonanie było nadzwyczaj staranne. Możemy zatem dla małych

natężeń przyjąć mniej więcej $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 200000 \text{ kg/cm}^2$, a więc gdy dla żelaza $\varepsilon' = 2000000 \text{ kg/cm}^2$, $n = \frac{2000000}{200000} = 10$. Dla wiel-

kich ciśnień może jednak ε_1 być mniejsze, należałoby więc przyjąć przy zgnieceniu $\varepsilon = 100000 \text{ kg/cm}^2$, a więc $n = 20$. W równ. 333), 335), 336) i 337) należy wstawić $n = 10$, bo równania te ważne są tylko do czasu wyczerpania wytrzymałości na ciągnięcie zaprawy cementowej, a więc dla małych jeszcze natężeń.

Co do wytrzymałości betonu i zaprawy cementowej na ciągnięcie i ciśnienie, to wiadomo, że wytrzymałość na ciągnięcie jest o wiele mniejszą od wytrzymałości na ciśnienie. Co do wielkości współczynnika wytrzymałości mamy bardzo rozmaite dane, a to wedle jakości betonu lub zaprawy cementowej, mianowicie stosunku mieszanki i dawności zaprawy. Hartig otrzymał współczynnik wytrzymałości na ciągnięcie czystego cementu po 28 dniach $60,7 \text{ kg/cm}^2$, a zaprawy cementowej $41,3 \text{ kg/cm}^2$.

rys. 178.



Durand-Clay *) zwrócił słusznie na to uwagę, że przy zwykłych próbach na rozerwanie zaprawy cementowej w kształcie ósemki nateżenie w środkowym przekroju nie rozdziela się równomiernie, lecz włókna skrajne są bardziej nateżone. Stąd wynika, że współczynniki wytrzymałości, wyznaczone za pomocą zwyczajnych prób rozerwania, są znacznie mniejsze. W rzeczywistości jest wedle Durand-Clay'a współczynnik wytrzymałości na ciągnięcie o 50% większy, niż wyznaczony na podstawie tych prób. Ponieważ jednak nie możemy liczyć zawsze na najlepszą jakość cementu, ponieważ wytrzymałość betonu jest nieco mniejszą, zatem możemy przyjąć, że wytrzymałość na ciągnięcie betonu będzie nie wiele większa, niż 20 kg/cm^2 . Współczynnik wytrzymałości betonu na ciśnienie jest o wiele wyższy i wynosi od 125 kg/cm^2 do 200 kg/cm^2 i wyżej. W dalszych obliczeniach będziemy dla pewności przyjmować 125 kg/cm^2 .

A zatem wzory 333), 335), 336) i 337) ważne będą do granicy $\tau_2 = 20 \text{ kg/cm}^2$.

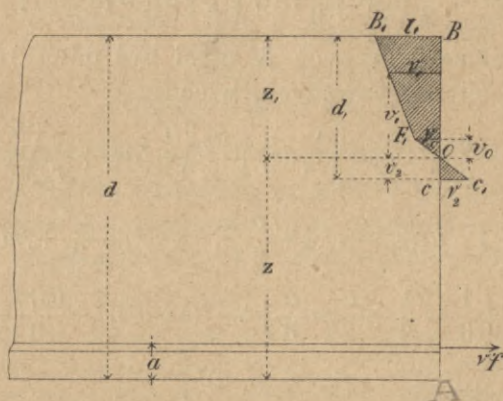
§. 72. Płyty Moniera. Faza druga.

Gdy wytrzymałość na ciągnięcie betonu zostanie wyczerpana, to płyta popęka w dolnej połowie grubości i wtedy w betonie niema już wcale ciągnięcia, a przynajmniej tylko o tyle ono istnieć może, o ile nie przekracza 20 kg/cm^2 . Ciągnięcie wkładki żelaznej wraz z ciśnieniami zaprawy muszą więc równoważyć siły zewnętrzne. Rozkład nateżeń w takim wypadku uwidoczniiony jest na rys. 179. W ciśnionej części przekroju uwzględniamy tu zmienność współczynnika sprężystości betonu, przyczem zamiast krzywej przyjmujemy w przybliżeniu dwie proste OE i ED (rys. 178). Odpowiednie dwie proste OF i FB_1 otrzymujemy też w rys. 179, bo jak wiadomo przedłużenia włókien są proporcjonalne do osi obojętnej, a zarazem odwrotnie proporcjonalne do współczynnika sprężystości i wprost do nateżeń. Linia nateżeń będzie więc linia łamana $C_1F_1B_1$, przyczem przypuszczamy, że na długości AC beton pękł, a więc użyteczna grubość płyty jest tylko $d_1 = BC$.

*) Por. Durand-Clay'a „Essai sur la limite de la résistance à la rupture par traction des ciments et autres matériaux analogues“. Ann. des ponts et chaus. 1895. str. 604.

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{Wtedy jest } v_2 = \frac{\varepsilon}{r} v_2, \\
 &\text{na długości } OF \quad v_1 = \frac{\varepsilon}{r} v_1, \\
 &\text{na długości } FB \quad v_1 = \frac{\varepsilon}{r} (v_0 + \alpha(v_1 - v_0)) = \frac{\varepsilon}{r} v_0 (1 - \alpha) + \frac{\varepsilon}{r} \alpha v_1 \\
 &\text{w żelazie} \quad v' = \frac{\varepsilon'}{r} v_1 = n \frac{\varepsilon}{r} v',
 \end{aligned} \right\} 338)$$

rys: 179.



przyczem α oznacza pewien współczynnik, uwzględniający zmienność współczynnika sprężystości, który możemy przyjąć równy $\frac{1}{2}$.

Suma natężeń musi być równą zeru, dlatego

$$- \int_0^{v_2} v_2 dv_2 + \int_0^{v_0} v_1 dv_1 + \int_{v_0}^{z_1} \frac{\varepsilon}{r} (v_0(1 - \alpha) + \alpha v_1) dv_1 - f \frac{v' \varepsilon'}{r} = 0,$$

albo

$$- \frac{\varepsilon}{r} \int_0^{v_2} v_2 dv_2 + \frac{\varepsilon}{r} \int_0^{v_0} v_1 dv_1 + \frac{\varepsilon}{r} v_0(1 - \alpha) \int_{v_0}^{z_1} dv_1 + \frac{\varepsilon \alpha}{r} \int_{v_0}^{z_1} v_1 dv_1 - f n v' \frac{\varepsilon}{r} = 0,$$

$$\text{wreszcie } - \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} v_0(1 - \alpha)(z_1 - v_0) + \frac{\alpha}{2} (z_1^2 - v_0^2) - f n v' = 0.$$

Ale $\frac{v_0^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} - \frac{\alpha v_0^2}{2}$ jest bardzo małym, możemy więc opuścić te wyrazy w porównaniu do z_1^2 i otrzymamy

$$2v_0(1 - \alpha)(z_1 - v_0) + \alpha z_1^2 - 2nf(d - z_1 - a) = 0.$$

Niech będzie $v_0 = \beta z_1$, to

$$2\beta(1-\alpha)(1-\beta)z_1^2 + \alpha z_1^2 - 2nf(d-z_1-a) = 0.$$

$$[2\beta(1-\alpha)(1-\beta) + \alpha]z_1^2 + 2nfz_1 = 2nf(d-a),$$

albo gdy $2\beta(1-\alpha)(1-\beta) + \alpha = \gamma$,

$$z_1 = -\frac{fn}{\gamma} \sqrt{\frac{fn}{\gamma} \left(\frac{fn}{\gamma} + 2(d-a) \right)} \quad \dots \quad 339)$$

Przyjęliśmy wyżej $\alpha = \frac{1}{2}$, dalej możemy przyjąć $\beta = 0,2$, to $\gamma = \frac{2}{3}$, a wtedy

$$z_1 = -\frac{3}{2}fn + \sqrt{\frac{3}{2}fn + \left(\frac{3}{2}fn + 2(d-a) \right)} \quad \dots \quad 340)$$

Moment sił zewnętrznych M musi być dalej równym sumie momentów sił wewnętrznych, więc

$$M = \frac{\varepsilon}{r} \int_0^{v_0} v_1^2 dv_1 + \frac{\varepsilon}{r} v_0(1-a) \int_{v_0}^{z_1} v_1 dv_1 + \frac{\alpha\varepsilon}{r} \int_{v_0}^{z_1} v_1^2 dv_1 + \frac{\varepsilon}{r} \int_0^{v_2} v_2^2 dv_2 + fnv' \frac{\varepsilon}{r}$$

$$M = \frac{\varepsilon}{r} \left[\frac{v_0^3}{3} + \frac{v_0}{2}(1-a)(z_1^2 - v_0^2) + \frac{\alpha}{3}(z_1^3 - v_0^3) + \frac{v_2^2}{3} + fn(d-z_1-a)^3 \right]$$

$$M = \frac{\varepsilon}{r} \left[v_0^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} \right) + \frac{v_0}{2}(1-a)z_1^2 + \frac{\alpha z_1^3}{3} + \frac{v_2^3}{3} + \right. \\ \left. + fn(d-z_1-a)^2 \right]$$

Małe wartości v_0^3 i v_2^2 możemy opuścić w stosunku do z_1^3 i napisać:

$$M = \frac{\varepsilon}{3r} \left[\alpha z_1^3 + \frac{3}{2}v_0(1-a)z_1^2 + 3fn(d-z_1-a)^2 \right],$$

albo gdy wstawimy $v_0 = \beta z_1$,

$$M = \frac{\varepsilon}{3r} \left[\left(\alpha + \frac{3\beta(1-\alpha)}{2} \right) z_1^3 + 3fn(d-z_1-a)^2 \right]$$

Nazwijmy $\alpha + \frac{3\beta(1-\alpha)}{2} = \delta$, to

$$M = \frac{\varepsilon}{3r} \left(\delta z_1^3 + 3fn(d-z_1-a)^2 \right) \quad \dots \quad 341)$$

Jezeli $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0,2$, to $\delta = 0,65$, więc

$$M = \frac{\varepsilon}{3r} \left[0,65z_1^3 + 3fn(d-z_1-a)^2 \right] \quad \dots \quad 342)$$

Ze względu na 338) możemy w końcu napisać:

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{3Mv_2}{\delta z_1^3 + 3fn(d - z_1 - a)^2} \\ \tau_1 &= v_0(1 - \alpha) + \frac{3\alpha Mz_1}{\delta z_1^3 + 3fn(d - z_1 - a)^2} \\ v' &= \frac{3Mn(d - z_1 - a)}{\delta z_1^3 + 3fn(d - z_1 - a)^2} = [\tau_1 - v_0(1 - \alpha)] \frac{n(d - z_1 - a)}{\alpha z_1} \end{aligned} \right\} \dots 343)$$

Jeżeli przyjmiemy $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0,2$, więc $\delta = 0,65$, a $n = 10$, $v_0 = 50 \text{ kg/cm}^2$ i $v_2 = 0,06z_1$, to

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{0,18 Mz_1}{0,65z_1^3 + 30f(d - z_1 - a)^2} \\ \tau_1 &= 25 + \frac{1,5 Mz}{0,65z_1^3 + 30f(d - z_1 - a)^2} \\ v &= \frac{30M(d - z_1 - a)}{0,65z_1^3 + 30f(d - z_1 - a)^2} \end{aligned} \right\} \dots 344)$$

Równania 344) dają nam możność obliczenia największych natężeń, a także wyznaczenia głębokości pęknięć betonu po przewyciężeniu wytrzymałości na ciągnięcie. Jeżeli mianowicie w C jest ciągnięcie równe współczynnikowi wytrzymałości, to musi pęknięcie sięgać do C .

Przykład 1. Obliczmy natężenia dla doświadczenia l. 8. na złamanie płyty Moniera, podanego przez Wayssa w jego broszurze*). Płyta była 100 cm długa, 60 cm szeroka i była w ten sposób podparta, że teoretyczne punkty podparcia leżały około 8 cm od krawędzi płyty, a zatem rozpiętość $l = 84 \text{ cm}$. Płyta niosła przy złamaniu równo rozdzielone obciążenie 1658 kg, więc 2763 kg/m².

Tu jest $d = 4,5 \text{ cm}$, $f = \frac{7 \times 0,6^2 \pi}{60,4} = 0,033 \text{ cm}$, a jest nieznanem, przyjmmy $a = 0,6 \text{ cm}$, to otrzymamy w I. fazie według równ. 333)

$$z = \frac{4,5^2 + 2 \cdot 0,6 \cdot 0,33 \cdot 10}{2(4,5 + 0,033 \cdot 10)} = 2,14 \text{ cm.}$$

Dalej mamy $M = \frac{1}{8} \frac{1658 \cdot 0,84 \cdot 84}{60} = 277 \text{ kgcm}$,

a zatem wedle 335), 336) i 337):

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{3 \cdot 277 \cdot 2,14}{2,14^3 + (4,5 - 2,14)^3 + 3 \cdot 0,033 \cdot 10(2,14 - 0,6)} = 68,8 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_1 &= 68,8 \frac{4,5 - 2,14}{2,14} = 75,7 \text{ kg/cm}^2 \\ v' &= 6,88 \frac{2,14 - 0,6}{2,14} \cdot 10 = 468 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

*) Patrz G. A. Wayss: Das System Monier. Wiedeń 1887.

Otóż ciążnienie $68,8 \text{ kg/cm}^2$ jest za wielkie, musiał więc powstać w betonie rys już znacznie wcześniej. Jeżeli przyjmiemy wytrzymałość betonu na ciążnienie 25 kg/cm^2 , to musiał on pęknąć już przy

$$M = 277 \cdot \frac{25}{888} = 101 \text{ kgcm.}$$

Dla momentu 277 kgcm będzie się więc płyta znajdować w fazie drugiej, możemy więc tu zastosować równ. 340) i otrzymamy

$$z_1 = -\frac{3}{2} 10,0,033 \sqrt{\frac{3}{2} 10,0,033 \left(\frac{3}{2} 10,0,033 + 2(4,5 - 0,6) \right)} = 1,53 \text{ cm,}$$

a według równania 344):

$$\tau_2 = 25 + \frac{0,18 \cdot 277 \cdot 1,53}{0,65 \cdot 1,53^3 + 30 \cdot 0,033(4,5 - 0,6 - 1,53)^2} = 9,7 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau_1 = 25 + \frac{1,5 \cdot 277 \cdot 1,53}{0,65 \cdot 1,53^3 + 30 \cdot 0,033(4,5 - 0,6 - 1,53)^2} = 25 + 80,6 = 105,6 \text{ kg/cm}^2,$$

$$v' = \frac{30 \cdot 277(4,5 - 0,6 - 1,53)}{0,65 \cdot 1,53^3 + 30 \cdot 0,033(4,5 - 0,6 - 1,53)^2} = 2496 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Obliczmy natężenie przy złamaniu płyty Moniera l. 15. doświadczeni duńskich *). Moment otrzymany dla tego wypadku $M = 247 \text{ kgcm}^{**}$) $d = 3 \text{ cm}$, $f = 0,064 \text{ cm}$, $a = 0,75 \text{ cm}$. A zatem otrzymamy wedle równania 340):

$$z_1 = -\frac{3}{2} 10,0,064 + \sqrt{\frac{3}{2} 10,0,064 \left(\frac{3}{2} 10,0,064 + 2(3 - 0,75) \right)} = 1,33 \text{ cm.}$$

Wedle równania 344) otrzymamy dalej:

$$\tau_2 = \frac{0,18 \cdot 247 \cdot 1,33}{0,65 \cdot 1,33^3 + 30 \cdot 0,064(3 - 1,33 - 0,75)^2} = \frac{59,1}{3,154} = 18,7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_1 = 25 + \frac{1,5 \cdot 247 \cdot 1,33}{0,65 \cdot 1,33^3 + 30 \cdot 0,064(3 - 1,33 - 0,75)^2} = 25 + 174 = 199 \text{ kg/cm}^2$$

$$v' = \frac{3,247 \cdot 10(3 - 0,75 - 1,33)}{0,65 \cdot 1,33^3 + 3,10 \cdot 0,064(3 - 1,33 - 0,75)^2} = 2162 \text{ kg/cm}^2.$$

§. 73. Obliczenie wymiarów płyt Moniera.

Teraz nasuwa nam się pytanie, jaką należy przyjąć grubość płyty i wkładki żelaznej dla danego największego momentu M . W zwykłych wypadkach, zwłaszcza gdy istnieje możliwość wypełnienia rysów powstałych w betonie zaprawą cementową, należy obliczyć płyty Moniera ze względu na pęknięcie betonu i złamanie płyty. Należy mianowicie takie przyjąć wymiary płyty i wkładki żelaznej, aby ciążnienie w betonie było nieco niższe od współczynnika wytrzymałości na ciążnienie, a oprócz tego, aby po przewyciężeniu wytrzymałości betonu na ciążnienie, była jeszcze dostateczna pewność przeciw

*) Por. Zeitschrift der österr. Ing. u. Arch. Vereines. 1896 str. 6.

**) Por. moją rozprawkę w Zeitschr. des österr. Ing. u. Arch. Vereines 1896 l. 24.

złamaniu. Ze względu na ciągnięcie w betonie należy obliczyć płyty wedle równ. 333) do 337), przyczem możemy przyjąć $\tau_2 = 15 \text{ kg/cm}^2$, abyśmy mieli niejaka pewność przeciw powstawaniu rysów, a zresztą gdyby nawet rysy powstały, nie byłoby to połączone z niebezpieczeństwem. Jeżeli chcemy stanowczo uniknąć rysów, to musimy zniżyć τ_2 do 10 kg/cm^2 . Jednak takie obliczenie nie dałoby nam jeszcze poglądu na współczynnik pewności przeciw złamaniu. Ponieważ jednak przy obliczeniu belek i płyt zawsze zwracamy uwagę na złamanie i wedle tego obliczamy wymiary, przyjmując pewien współczynnik pewności, zatem wskazaniem jest i tutaj tak samo postępować i dlatego obliczać wymiary ze względu na złamanie wedle równ. 344).

Wiemy, że w pierwszej fazie wkładka żelazna ma mały wpływ na zniżenie ciągnięcia, które mało co mniejsze jest od ciśnienia. Pożyteczność wkładki żelaznej uwydatnia się dopiero w drugiej fazie po przewyciężeniu wytrzymałości betonu na ciągnięcie, sprawia ona wielką wytrzymałość płyty na złamanie; grubość zatem wkładki żelaznej obliczać musimy głównie ze względu na złamanie, a więc wedle wzorów drugiej fazy.

Przytem należy liczyć w ten sposób, że przy *m* tej pewności moment ma być *m* razy większy i wtedy ma być osiągniętym równocześnie współczynnik wytrzymałości na ciśnienie betonu, który przyjmujemy $\tau_1 = 125 \text{ kg/cm}^2$ i wytrzymałości na ciągnięcie żelaza, którą przyjmujemy $\tau = 3500 \text{ kg/cm}^2$. Wtedy otrzymamy z rów. 344):

$$125 = 25 + \frac{1,5 m M z_1}{0,65 z_1^3 + 30f(d - z_1 - a)^2} \quad \text{i}$$

$$3500 = \frac{30 m M (d - z_1 - a)}{0,65 z_1^3 + 30f(d - z_1 - a)^2}, \quad \text{a stąd}$$

$$z_1 = \frac{20}{55} (d - a) = 0,368 (d - a) \quad \dots \quad 345)$$

Z rów. 340) otrzymamy $\frac{2}{3} z_1^2 + 20f z_1 = 20f(d - a)$, albo po wstawieniu wartości z 345):

$$f = 0,0068 (d - a) \quad \dots \quad 346)$$

Dalej otrzymamy, przyjmąwszy $m = 4$,

$$125 - 25 = \frac{6 M z_1}{0,65 z_1^3 + 30f(d - z_1 - a)^2} = \frac{2,16 M (d - a)}{0,0303 (d - a) + 12,3f(d - a)^2}$$

albo $3,03 (d - a)^2 + 1230 (d - a) f = 2,16 M$,

a po wstawieniu wartości za f z 346:

$$d - a = 0,435\sqrt{M} \quad \dots \quad 347)$$

Jeżeli przyjmiemy dla grubości płyty i wkładki żelaznej powyższe wymiary, to otrzymamy w pierwszej fazie po wstawieniu w równ. 333) wartości za f z równ. 346) i przyjąwszy $n=10$.

$$z = \frac{d^2 + 0,136a(d - a)}{2(d + 0,068(d - a))}$$

Przyjmijmy $a=0,1d$, to $z=0,477d$, $z - a=0,377d$,

$$d - z = 0,523d.$$

Dalej mamy z 335):

$$\tau_2 = \frac{3Mz}{z^3 + (d - z) + 30f(z - a)^2} = \frac{3 \cdot M \cdot 0,477d}{0,1085d^3 + 0,1431d^3 + 0,0211d^3}$$

$$\tau_2 = 5,25 \frac{M}{d^2} \quad \dots \quad 348)$$

Jeżeli teraz wstawimy wartość za M z 347), to

$$\tau_2 = \frac{5,25(0,9d)^2}{0,435^2 d^2} = 22,4 \text{ kg/cm}^2.$$

Widzimy więc, że jeżeli przyjmiemy grubość płyty wedle 347), otrzymamy za wielkie natężenie na ciągnięcie betonu. Musimy więc $(d - a)$ przyjąć większe, aby zniżyć ciągnięcie w pierwszej fazie. Z równania 348) otrzymamy

$$d = \sqrt{\frac{5,25M}{\tau_2}}, \text{ a więc}$$

$$\left. \begin{array}{lll} \text{dla } \tau_2 = 15 \text{ kg/cm}^2 & d = 0,592\sqrt{M} & d - a = 0,533\sqrt{M} \\ \text{dla } \tau_2 = 10 \text{ " } & d = 0,725\sqrt{M} & d - a = 0,653\sqrt{M} \end{array} \right\} 349)$$

Jeżeli przyjmiemy $a=0,2d$, to otrzymamy:

$z=0,485d$, $z - a=0,285d$, $d - z=0,515d$, a z rów. 335):

$$\tau_2 = 5,73 \frac{M}{d^2}, \text{ stąd } d = \sqrt{\frac{5,73M}{\tau_2}}, \text{ a zatem}$$

$$\left. \begin{array}{lll} \text{dla } \tau_2 = 15 \text{ kg/cm}^2 & d = 0,618\sqrt{M} & d - a = 0,495\sqrt{M} \\ \text{dla } \tau_2 = 10 \text{ kg/cm}^2 & d = 0,757\sqrt{M} & d - a = 0,606\sqrt{M} \end{array} \right\} 350)$$

Przyjąwszy wymiary płyty wedle 349) i 350) otrzymamy współczynnik pewności przeciw złamaniu większy, niż 4. Jeżeli przytem obliczymy grubość wkładki żelaznej wedle 346), to pewność dla betonu i żelaza będzie równą, co odpowiada racjonalnemu ustrojowi.

Przykład. Niech będzie danem $M=300\text{ kgcm}$; należy obliczyć wymiary płyty Moniera.

Jeżeli przyjmiemy $a=0,1\text{ d}$ a $\tau_2=15\text{ kg/cm}^2$, to z równania 349) mamy $d=0,592\sqrt{300}=10,25\text{ cm}$. Wtedy $a=1,03\text{ cm}$, co zaokrąglimy na $a=11\text{ mm}=1,1\text{ cm}$, więc $d-a=9,2\text{ cm}$. Grubość wkładki żelaznej otrzymamy z 346) $f=0,0068 \times 9,2=0,0626\text{ cm}$; przyjmiemy więc 9 mm grube pręty w odstępach

$$\frac{0,6361}{0,0626}=10,2\text{ cm.}$$

Obliczmy teraz natężenia, któreby powstały przy cztery razy większym momencie, a więc dla $M=4 \times 300=1200\text{ kgcm}$. Wedle rów. 340) i 344) otrzymamy:

$$z_1 = -15f + \sqrt{15f(15f + 2(d-a))} = -0,949 + \sqrt{0,949(0,949 + 18,4)} = 3,36\text{ cm}$$

$$\tau_1 = 25 + \frac{1,5 \cdot 1200 \cdot 3,36}{0,65 \cdot 3,36^3 + 30 \cdot 0,0626(10,3 - 3,36 - 1,1)^2} = 25 + 68 = 93\text{ kg/cm}^2$$

$$v' = \frac{30 \cdot 1200 \cdot (10,3 - 3,36 - 1,1)}{0,65 \cdot 3,36^3 + 30 \cdot 0,0626(10,3 - 3,36 - 1,1)^2} = 2371\text{ kg/cm}^2$$

Natężenia te są znacznie niższe od przyjętych 125 i 3500 kg/cm^2 z powodu tego, żeśmy grubość płyty wyznaczyli z rów. 349) a nie 347) a więc ze względu na pierwszą fazę.

Przypatrzmy się teraz jakie będzie natężenie na ciągnięcie betonu w I. fazie. Z rów. 333) otrzymamy:

$$z = \frac{10,32 + 20,1 \cdot 1,0,0626}{2(10,3 + 10,0,0626)} = 4,92\text{ cm, a z rów. 335) dla } M = 300\text{ kgcm,}$$

$$\tau_2 = \frac{3 \cdot 300 \cdot 4,92}{4,92^3 + (10,3 - 4,92)^3 + 30 \cdot 0,0626(4,92 - 1,1)^2} = 14,65\text{ kg/cm}^2.$$

Ciągnięcie to możemy wedle założenia dopuścić, a przeto sprawdziliśmy, że wymiary wyznaczone na podstawie rów. 349) i 346) okazały się stosowne.

Przy obliczeniu natężeń w chwili złamania przyjmowaliśmy współczynnik pewności $m=4$ i uwzględnialiśmy go w ten sposób, że moment M przyjmowaliśmy m razy większy. Zamiast tego można przyjąć jako ciśnienie dopuszczalne w drugiej fazie

$\tau'_1 = \frac{\tau_1}{4} = 31\text{ kg/cm}^2$, a ciągnięcie dopuszczalne dla żelaza

$$v'_1 = \frac{v'}{m} = \frac{3500}{4} = 875\text{ kg/cm}^2.$$

Wtedy otrzymamy z równania 344):

$$\left. \begin{aligned} \tau'_1 = 31 &= 6,2 + \frac{1,5 M z_1}{0,65 z_1^3 + 30 f (d - z_1 - a)^2} \\ v'_1 = 875 &= \frac{30 M (d - z_1 - a)}{0,65 z_1^3 + 30 f (d - z_1 - a)^2} \end{aligned} \right\} \dots 351)$$

Dla grubszych płyt możnaby przyjąć może $\frac{a}{d}$ mniejsze, niż 0,1, dlatego ustawimy jeszcze równania dla $a=0,05d$.

Otrzymamy wtedy z równ. 346) i 333)

$$z = \frac{d^2 + 0,136a(d-a)}{2(d+0,068(d-a))} = 0,472d, \quad z-a = 0,422d, \quad d-z = 0,528d.$$

Dalej jest wedle rów. 335):

$$\tau_2 = \frac{3.M.0,472}{0,1052d^3 + 0,1472d^3 + 0,0345d^3} = 4,94 \frac{M}{d^2} \quad . \quad . \quad 352)$$

Jeżeli teraz przyjmiemy d wedle równania 347) i wstawimy wartość za M , to

$$\tau_2 = \frac{4,94.0,95^2d^2}{0,435^2d^2} = 23,6 \text{ kg/cm}^2, \text{ a więc za wielkie.}$$

Musimy więc $d-a$ przyjąć większe, jeżeli chcemy w pierwszej fazie zniżyć ciągnięcie betonu.

Z równania 352) mamy $d = \sqrt{\frac{4,94 M}{\tau_2}}$, a więc

$$\text{dla } \tau_2 = 15 \text{ kg/cm}^2 \quad d = \sqrt{\frac{4,94 M}{15}} = 0,574\sqrt{M}, \quad d-a = 0,545\sqrt{M} \quad 353)$$

$$\text{dla } \tau_2 = 10 \text{ kg/cm}^2 \quad d = \sqrt{\frac{4,94 M}{10}} = 0,703\sqrt{M}, \quad d-a = 0,668\sqrt{M} \quad 354)$$

Możemy zatem ogólnie napisać:

$$\text{dla } a=rd, \quad d=u\sqrt{M}, \quad d-a=u(1-r)\sqrt{M}=v\sqrt{M} \quad . \quad 355)$$

Dla $r=$	0,05		0,1		0,2	
	u	v	u	v	u	v
dla $\tau_2=15 \text{ kg/cm}^2 \dots$	0,574	0,574	0,592	0,533	0,618	0,495
dla $\tau_2=10 \text{ kg/cm}^2 \dots$	0,703	0,668	0,725	0,653	0,757	0,606

Dla wartości pośrednich możnaby interpelować według linii prostej.

Wszystkie powyższe wzory ustawiliśmy dla założenia, że współczynnik wytrzymałości betonu na ciśnienie jest 125 kg/cm^2 . Jak zmieniają się powyższe wzory, jeśli współczynnik wytrzymałości na ciśnienie jest większy n. p. 150 kg/cm^2 ?

Jeżeli zastosujemy powyższe wzory pomimo, że możemy liczyć z pewnością na wytrzymałość 150 kg/cm^2 , to nie wyzy-

skaliśmy dostatecznie wytrzymałości betonu na ciśnienie. Z drugiej strony nie możemy znów używać cieńszych płyt, jeżeli nie chcemy przekroczyć ciągnięcia 15 kg/cm^2 w pierwszej fazie. Dlatego też nie możemy przy większej wytrzymałości betonu na ciśnienie oszczędzić na materiale, ale możemy uzyskać większą pewność przeciw złamaniu, jeżeli przytem powiększymy przekrój wkładki żelaznej.

Przyjmijmy więc $\tau_1 = 150 \text{ kg/cm}^2$, $\nu' = 3500 \text{ kg/cm}^2$, $n = 10$, to otrzymamy

$$150 = 25 + \frac{1,5 m M z_1}{0,65 z_1^3 + 30 f (d - z_1 - a)^2} \quad \text{i}$$

$$3500 = \frac{30 n M (d - z_1 - a)}{0,65 z_1^3 + 30 f (d - z_1 - a)^2}, \quad \text{a stąd}$$

$$z_1 = \frac{5}{12} (d - a) = 0,417 (d - a).$$

Z równania 340) otrzymamy $\frac{2}{3} z_1^2 + 20 f z_1 = 20 f (d - a)$,

albo $\frac{2}{3} 0,417^2 (d - a)^2 + 20 f 0,417 (d - a) = 20 f (d - a)$,

$$\text{a więc } f = 0,01 (d - a). \quad \dots \quad 356)$$

Przyjmiemy teraz odrazu większą pewność, więc $m = 5$, wtedy

$$150 - 25 = \frac{7,5 M z_1}{0,65 z_1^3 + 30 f (d - z_1 - a)^2} = 21 \frac{M}{(d - a)^2}, \quad \text{a stąd}$$

$$d - a = 0,410 \sqrt{M}. \quad \dots \quad 357)$$

W pierwszej fazie jest wtedy ze względu na 356) i 333):

$$z = \frac{d^2 + 0,2 a (d - a)}{2 (d + 0,1 (d - a))} \quad \dots \quad 358)$$

Dla $a = 0,1 d$ jest $z = 0,467 d$, $z - a = 0,367 d$, $d - z = 0,533 d$.

Dalej z 335)

$$\tau_2 = \frac{3 M \cdot 0,467 d}{0,467^3 d^3 + 0,533^3 d + 30 \cdot 0,01 \cdot 0,9 \cdot 0,367^2 d^3} = \left. \begin{array}{l} \\ \frac{1,401 M}{0,2895 d^2} = 4,84 \frac{M}{d^2} \end{array} \right\} \quad 359)$$

Jeżeli przyjmiemy d z rów. 357), to $\tau_2 = \frac{4,84 \cdot 0,9^2}{0,41^2} = 23,1 \text{ kg/cm}^2$,

a więc za wielkie. Musimy więc $d - a$ powiększyć.

Z równania 359) mamy $d = \sqrt{\frac{4 \cdot 84 M}{\tau_2}}$, a więc

$$\text{dla } \tau_2 = 15 \text{ kg/cm}^2 \quad d = 0,568 \sqrt{M}, \quad d - a = 0,511 \sqrt{M} \quad 360)$$

$$\text{dla } \tau_2 = 10 \text{ kg/cm}^2 \quad d = 0,696 \sqrt{M}, \quad d - a = 0,626 \sqrt{M} \quad 361)$$

Dla $a=0,2d$ jest $z=0,478d$, $z-a=0,278d$, $d-z=0,522d$.

Dalej mamy

$$\tau_2 = \frac{3 M \cdot 0,478d}{0,478^3 d^3 + 0,522^3 d^3 + 30 \cdot 0,01 \cdot 0,8 \cdot 0,278^2 d^3} = 5,31 \frac{M}{d^2} \quad (362)$$

$$\text{a więc } \tau_2 = \frac{5,31 \times 0,64}{0,412} = 20,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Należy więc d powiększyć. Z równania 362) mamy

$$d = \sqrt{\frac{5,31}{\tau_2} M}, \text{ a więc}$$

$$\text{dla } \tau_2 = 15 \text{ kg/cm}^2 \quad d = 0,595 \sqrt{M}, \quad d-a = 0,476 \sqrt{M} \quad . \quad (363)$$

$$\text{dla } \tau_2 = 10 \text{ kg/cm}^2 \quad d = 0,729 \sqrt{M}, \quad d-a = 0,583 \sqrt{M} \quad . \quad (364)$$

Wzorów 356) do 364) należy tylko wtedy używać, jeżeli stwierdzi się doświadczeniami, że wytrzymałość betonu na ciśnienie wynosi 150 kg/cm^2 lub więcej. Zresztą należałoby przyjmować współczynnik wytrzymałości $= 125 \text{ kg/cm}^2$, a więc używać wzorów 345) do 350).

§. 74. Belki układu Hennebique'a. Faza pierwsza.

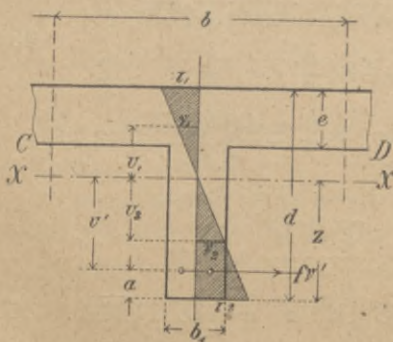
Hennebique wzmacnia płytę betonową żebrami, a przez to powiększa jej wysokość, wkładkę zaś żelazną umieszcza w żebrach. Belka taka jest więc ekonomiczniejsza od belki Moniera, bo materiał jest dalej oddalony od osi obojętnej.

Obliczać belki Hennebique'a możemy wedle ogólnego sposobu podanego w §. 70. Jeżeli chodzi o wzory szczegółowe, to

gdy odstęp żeber jest b , zauważmy belkę o szerokości b (rys. 180.) grubość płyty niech będzie e , cała wysokość d , szerokość żebra b_1 odstęp osi obojętnej od dolnej krawędzi z , warstwy żelaznej a . Grubość tej warstwy równomiernie na całą szerokość płyty rozłożona niech będzie f .

Badajmy najprzód belkę w fazie pierwszej.

rys:180



Tu musimy rozróżnić dwa wypadki, wedle tego czy oś obojętna przecina płytę, czy nie.

a) Oś obojętna nie przecina płyty:

Suma natężeń poziomych musi być równa zeru, więc

$$-b \int_{d-z-e}^{d-z} v_1 dv_1 - b_1 \int_0^{d-z-e} v_1 dv_1 + b_1 \int_0^z v_2 dv_2 + bf \frac{v' \varepsilon'}{r} = 0,$$

a stąd

$$-(d-z)^2 + (d-z-e)^2 - \frac{b_1}{b} (d-z-e)^2 + \frac{b_1}{b} z^2 + 3fn(z-a) = 0,$$

więc

$$z = \frac{1}{2} \frac{e(2d-e) + \frac{b_1}{b} (d-e)^2 + 2afn}{e + \frac{b_1}{b} (d-e) + fn} \dots 365)$$

Dalej musi być suma momentów sił wewnętrznych i zewnętrznych równa, a więc, jeśli M oznacza moment na 1 cm szerokości płyty,

$$bM = b_1 \int_0^{d-z-e} v_1 v_1 dv_1 + b \int_{d-z-e}^{d-z} v_1 v_1 dv_1 + b_1 \int_0^z v_2 v_2 dv_2 + bf v' v',$$

albo

$$M = \frac{\varepsilon}{3r} \left[\varepsilon \frac{b_1}{b} (d-z-e)^3 + \varepsilon [(d-z)^3 - (d-z-e)^3] + \frac{b_1}{b} \varepsilon z^3 + 3f \varepsilon' (z-a)^2 \right]$$

$$M = \frac{\varepsilon}{3r} \left[(d-z)^3 - (d-z-e)^3 + \frac{b_1}{b} (d-z-e)^3 + \frac{b_1}{b} z^3 + 3fn(z-a)^2 \right] 366)$$

Jeżeli 338) porównamy z 336), otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{\varepsilon z}{r} = \frac{3Mz}{(d-z)^3 - (d-z-e)^3 \left(1 - \frac{b_1}{b}\right) + \frac{b_1}{b} z^3 + 3fn(z-a)^2} \\ \tau_1 &= \frac{\varepsilon(d-z)}{r} = \frac{3M(d-z)}{(d-z)^3 - (d-z-e)^3 \left(1 - \frac{b_1}{b}\right) + \frac{b_1}{b} z^3 + 3fn(z-a)^2} \\ &= -\tau_2 \frac{d-z}{z} \\ v' &= \frac{\varepsilon'(z-a)}{r} = \frac{3Mn(z-a)}{(d-z)^3 - (d-z-e)^3 \left(1 - \frac{b_1}{b}\right) + \frac{b_1}{b} z^3 + 3fn(z-a)^2} \\ &= \tau_2 \frac{(z-a)n}{z} \end{aligned} \right\} 367)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{3 M(d-e)}{e^3 + k(d-e)^3 + 3fn(d-e-a)^2} \\ \tau_1 &= \frac{3 Me}{e^3 + k(d-e)^3 + 3fn(d-e-a)^2} \\ \nu' &= \frac{3 Mn(d-a-e)}{e^3 + k(d-e)^3 + 3fn(d-a-e)^2} \end{aligned} \right\} \dots 374)$$

Przyjmijmy dla naszego przykładu $M=1000 \text{ kgcm}$, to otrzymamy

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{3.1000.(29-9,7)}{9,7^3 + 0,1067(29-9,7)^3 + 30,0,094(29-5-9,7)^2} = 25,7 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_1 &= -25,7 \frac{9,7}{29-9,7} = -12,9 \text{ kg/cm}^2 \\ \nu' &= 25,7 \frac{29-5-9,7}{29-9,7} \cdot 10 = 190,4 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

W rzeczywistości próbowano na złamanie belkę taką w Lausanne, dla której jednak było $e=8 \text{ cm}$.

Obliczmy z z równ. 365), a otrzymamy

$$z = \frac{1}{2} \frac{8(2,29-8) + \frac{16}{150}(29-8)^2 + 2.5.0,094.10}{8 + \frac{16}{150}(29-8) + 10.0,09} = 20,4 \text{ cm}.$$

A więc tu rzeczywiście oś obojętna nie przecina płyty i wzór 365) jest tu ważnym.

Wstawmy teraz $M=1000 \text{ kgcm}$, to

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{3.1000.20,4}{8,6^3 - \left(1 - \frac{16}{150}\right)0,6^3 + \frac{16}{150}20,4^3 + 30,0.094(20,4-5)^2} = 27,7 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_1 &= -27,7 \frac{8,6}{20,4} = 18,3 \text{ kg/cm}^2 \\ \nu' &= -27,7 \frac{20,4-5}{20,4} \cdot 10 = 209 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Widzimy, że wyniki powyższe nie o wiele są wyższe od poprzednich.

Ciśnienie jest tu mniejsze od ciągnięcia, dla tej fazy przekrój taki byłby nieodpowiedni, raczej odwrotny byłby wskazany. Inaczej rzecz się ma w fazie drugiej.

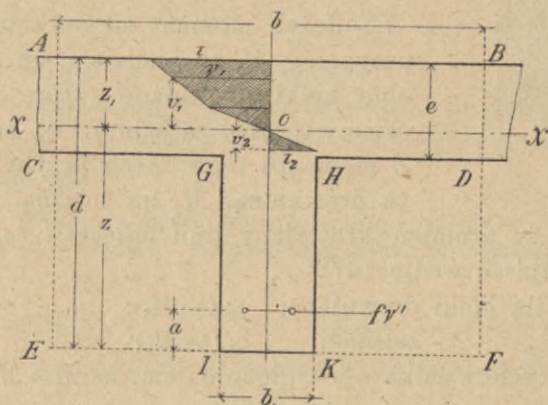
§. 75. Belka Hennebique'a. Faza druga.

Przejdziemy teraz do fazy drugiej, wedle której także obliczymy przekrój wkładki żelaznej. Gdy wytrzymałość betonu na ciągnięcie zostanie przewyżczona i płyta popęka w dolnej części, to ciągnięcie w betonie nie może przekroczyć 20 kg/cm^2 i rozkład natężeń będzie taki, jak to widzimy z rys. 182. Łatwo zrozumiemy, że jeżeli $z_1 < e$, to obojętną jest rzeczą dla rachunku, czy belka ma żebro tylko, czy też jestto belka pełna

o grubości d , bo i tak nie uwzględniamy tej części poniżej CD , z powodu pęknięcia betonu. A zatem możemy wzory otrzymane dla przekroju prostokątnego, zastosować wprost do tego wypadku. Równania 340) i 344) będą i tu ważne.

Jeżeliby nawet punkt O znajdował się nieco poniżej CD , to i w tym wypadku możnaby w przybliżeniu zastosować po-

rys: 182.



wyższe równanie, bo zmniejszenie szerokości dotyczy tylko bardzo małych natężeń.

Przykład. Weźmy tę samą belkę, tylko moment przyjmiemy większy. Przy doświadczeniu w Lausanne złamała się belka dla $M=10880 \text{ kgcm}$.

Z rów. 340) otrzymamy

$$z_1 = -\frac{3}{2} \cdot 10,0,094 + \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 10,0,94 \left(\frac{3}{2} \cdot 10,0,094 + 2(29-5) \right)} = 6,93 \text{ cm}$$

a z rów. 344)

$$\tau_2 = \frac{0,18 \cdot 10880 \cdot 6,93}{0,65 \cdot 6,93^3 + 30 \cdot 0,094(29 - 6,93 - 5)^2} = 13,7 \text{ gg/cm}^2$$

$$\tau_1 = 25 + \frac{1,5 \cdot 10880 \cdot 6,93}{0,65 \cdot 6,93^3 + 30 \cdot 0,094(29 - 6,93 - 5)^2} = 134 \text{ kg/cm}^2$$

$$\gamma' = \frac{30 \cdot 10880 \cdot (29 - 6,93 - 5)}{0,65 \cdot 6,93^3 + 30 \cdot 0,094(29 - 6,93 - 5)^2} = 5360 \text{ kg/cm}^2$$

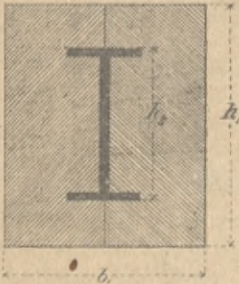
Jeżeli to były pręty stalowe, to możliwe jest to natężenie bez przewrania.

§. 76. Belki z różnego materiału.

Przy obliczaniu belek żelaznobetonowych mieliśmy już do czynienia z belkami złożonymi z różnego materiału. W prak-

tyce inżynierskiej zdarzają się jednak i inne wypadki użycia belek złożonych z równych materyałów lub też kilku belek z różnych materyałów, połączonych w ten sposób, że ugięcie ich jest takie samo. Na rysunku 183. widzimy np. dwie belki

rys:183.



drewniane i żelazną kształtówkę I. Nie są one tak połączone, aby stanowiły jedną całość, mogą się mianowicie jedna względem drugiej przesunąć, ale ugięcie ich musi być takie samo.

Jeżeli moment sił zewnętrznych nazwiemy M , to rozdziela on się na obie belki drewniane (które tu będziemy uważać za jedną) i na żelazną. Z momentu tego niech przypada M_1 na drewnianą, M_2 na żelazną.

Z powodu, że promień krzywizny linii ugięcia r jest ten sam, możemy napisać wedle 147)

$$\text{dla belki drewnianej} \quad \varepsilon_1 I = M_1 r$$

$$\text{„ „ „ żelaznej} \quad \varepsilon_2 I = M_2 r.$$

Z równań tych wynika z uwzględnieniem, że $M = M_1 + M_2$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{\varepsilon_1 I_1}{\varepsilon_1 I_1 + \varepsilon_2 I_2} M, \\ M_2 &= \frac{\varepsilon_2 I_2}{\varepsilon_1 I_1 + \varepsilon_2 I_2} M. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 375)$$

Belkę drewnianą obliczamy teraz w zwykły sposób wedle momentu M_1 , żelazną wedle momentu M_2 . Jeżeli materyał ma być wyzyskany, to powinno równocześnie w belce drewnianej być natężenie dopuszczalne τ_1 , w belce żelaznej τ_2 .

$$\text{A że} \quad \tau_1 I_1 = M_1 e_1,$$

$$\tau_2 I_2 = M_2 e_2,$$

$$\text{więc} \quad \tau_1 = \frac{M_1 e_1}{I_1}, \quad \tau_2 = \frac{M_2 e_2}{I_2}, \quad \text{stąd}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{M_1 e_1 I_2}{M_2 e_2 I_1}, \quad \text{a że wedle 375)} \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{\varepsilon_1 I_1}{\varepsilon_2 I_2},$$

$$\text{więc} \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\varepsilon_1 I_1 \varepsilon_1 I_2}{\varepsilon_2 I_2 \varepsilon_2 I_1} = \frac{\varepsilon_1 e_1}{\varepsilon_2 e_2}, \quad \text{zatem}$$

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\tau_1 \varepsilon_2}{\tau_2 \varepsilon_1} \dots \dots \dots 376)$$

Jeżeli przekroje są symetryczne, to $e_1 = \frac{h_1}{2}$, $e_2 = \frac{h_2}{2}$ więc

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\varepsilon_2 \tau_1}{\varepsilon_1 \tau_2} \dots \dots \dots 377)$$

Dla żelaza możemy przyjąć $\varepsilon_1 = 2000000 \text{ kg/cm}^2$, dla drzewa $\varepsilon_2 = 110000 \text{ kg/cm}^2$, to powinno być

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{2000000}{110000} \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{200}{11} \frac{\tau_1}{\tau_2} = 18,17 \frac{\tau_1}{\tau_2} \dots \dots 378)$$

Jeżeli przyjmiemy np. $\tau_1 = 80 \text{ kg/m}^2$, $\tau_2 = 800 \text{ kg/cm}^2$ to

$$\frac{h_1}{h_2} = 1,82 \dots \dots \dots 379)$$

a więc wysokość belki drewnianej ma być 1,82 razy większą, niż żelaznej. Jeżeli stosunek wysokości jest inny, to jedna belka nie będzie wykorzystaną i będzie pracować poniżej natężenia dopuszczalnego.

Przykład. 1. Niech będzie $h_1 = 24 \text{ cm}$, $b_1 = 24 \text{ cm}$, $h_2 = 14 \text{ cm}$ (rys. 183) $l = 7,7 \text{ cm}$. Wyznaczyć wielkość obciążenia na jednostkę długości, jeżeli $\tau_1 = 80$, $\tau_2 = 800 \text{ kg/cm}^2$.

Tu jest $\frac{h_1}{h_2} = \frac{24}{14} = 17,1$ więc wysokość belki drewnianej jest nieco za mała, belka drewniana nie będzie więc zupełnie wykorzystaną.

$$\text{Tu jest } I_1 = \frac{1}{12} 24^4 = 27648 \text{ cm}^4, I_2 = 659,5$$

$$\text{więc wedle 375), } M_1 = \frac{110060 \cdot 27648}{110000 \cdot 27648 + 2000000 \cdot 659,5} \quad M_2 = \frac{304128}{436028} M = 0,697 M$$

$$M_2 = 0,303 M$$

$$\text{Dalej mamy } M = \frac{1}{8} 97,7^2 = 7,412 q \text{ tm} = 741200 q \text{ kgcm.}$$

$$\text{Więc } M_1 = 0,697 \cdot 741200 q = 517360 q, M_2 = 224600 q \text{ kg/cm}^2.$$

$$\text{Zatem } 80 \cdot 27648 = 517360 q \cdot \frac{24}{2}, \text{ stąd } q = 0,3568 \text{ t/m}^2.$$

Wedle belki żelaznej licząc, otrzymalibyśmy $800 \cdot 94,2 = 22,4600 q$, stąd $q = 0,3355 \text{ t/m}^2$

Z tych dwu wartości zatrzymujemy mniejszą, belka drewniana nie będzie więc zupełnie wykorzystaną, mianowicie będzie

$$v = \frac{0,3355}{0,3568} \cdot 80 = 75,4 \text{ kg/cm}^2.$$

To samo otrzymamy z wzoru

$$v = \frac{1}{12} 24^4 = 517360 \cdot 0,3355 \cdot 12,$$

$$v = \frac{51736 \cdot 0,3355 \cdot 12^2}{24^4} = 75,4 \text{ kg/cm}^2$$

§. 77. Równanie linii ugięcia i ugięcie belki.

Linia ugięcia (n. *Biegungslinie*, fr. *élastique*) nazywamy ugiętą oś belki, jak to wiemy z §. 36. Równanie jej otrzymać możemy łatwo z równania 149) $\varepsilon I = Mr$, które jednak ważne jest tylko do granicy sprężystości.

Promień krzywizny jakiegokolwiek krzywej da się, jak wiemy wyrazić równaniem

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{d^2y / dx^2}$$

W praktyce belki uginają się bardzo mało, linia ugięcia jest więc bardzo płaską tak, że $\frac{dy}{dx} = \text{st } \psi$ jest bardzo małą, więc $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ w stosunku do 1 jest tak małą liczbą, że możemy ją opuścić; otrzymamy więc

$$r = \frac{1}{d^2y / dx^2},$$

albo, gdy będziemy liczyć $+y$ w kierunku z góry na dół,

$$r = - \frac{1}{d^2y / dx^2}.$$

Wstawivszy to w równanie 149), otrzymamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{\varepsilon I} \dots \dots \dots 379)$$

równanie różniczkowe linii ugięcia, w którym moment zginający M wyrazić musimy jako funkcję x .

Równanie to możemy napisać

$$\varepsilon I \frac{d^2y}{dx^2} = -M \dots \dots \dots 380)$$

Jeżeli dalej równanie to będziemy różniczkowali, to otrzymamy najprzód

$$\varepsilon I \frac{d^3y}{dx^3} = - \frac{dM}{dx} = -Q \dots \dots \dots 381)$$

potem
$$\varepsilon I \frac{d^4y}{dx^4} = - \frac{dQ}{dx} = p \dots \dots \dots 382)$$

Niech za belkę BC (rys. 184) o stałym przekroju działa w E siła P , to według równania 6) $O_1 = \frac{Pb}{l}$, $O_2 = \frac{Pa}{l}$. Moment M w punkcie F , a więc dla $x < a$, będzie $M = O_1 x = \frac{Pbx}{l}$, zatem na mocy równania 375)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pbx}{\varepsilon Il}, \text{ a stąd}$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{st } \varphi = -\frac{Pb}{\varepsilon Il} \int x dx + C = -\frac{Pbx^2}{2\varepsilon Il} + C.$$

Dla $x=0$ otrzymamy $\text{st } \varphi_0 = C$, więc

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{Pbx^2}{2\varepsilon Il} + \text{st } \varphi_0 \\ \text{Analogicznie mamy dla części belki } EC & \end{aligned} \right\} a)$$

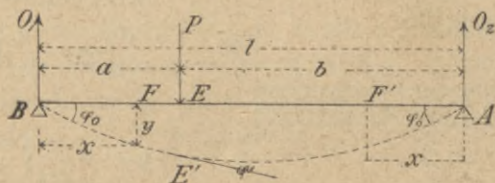
$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx_1} &= -\frac{Pax_1^2}{2\varepsilon Il} + \text{st } \varphi'_0 \end{aligned} \right\}$$

Całkujemy oba równania raz jeszcze, a otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \text{dla części } BE & \quad y = -\frac{Pbx^3}{6\varepsilon Il} + x \text{st } \varphi_0 \\ \text{" " } EC & \quad y = -\frac{Pax_1^3}{6\varepsilon Il} + x_1 \text{st } \varphi'_0 \end{aligned} \right\} b)$$

Nie dodajemy tu ilości stałej C_1 , bo dla $x=0$ i $x_1=0$ jest $y=0$, więc $C_1=0$.

rys:184.



Rzędną y linii ugięcia nazywamy ugięciem (n. *Durchbiegung*).

W celu wyznaczenia niewiadomych $\text{st } \varphi_0$ i $\text{st } \varphi'_0$ ustawmy równania a) i b) dla punktu E . Otrzymamy wtedy

$$\text{st } \varphi_1 = -\frac{Pba^2}{2\varepsilon Il} + \text{st } \varphi_0 = -\left(-\frac{Pab^2}{2\varepsilon Il} + \text{st } \varphi'_0 \right),$$

$$EE' = y_1 = -\frac{Pba^2}{6 \varepsilon Il} + a \operatorname{st} \varphi_0 = -\frac{Pab^3}{6 \varepsilon Il} + b \operatorname{st} \varphi'_0.$$

Z obu tych równań otrzymamy

$$\operatorname{st} \varphi_0 = \frac{Pab}{6 \varepsilon Il} (a+2b) \text{ i } \operatorname{st} \varphi'_0 = \frac{Pab}{6 \varepsilon Il} (2a+b) \left. \vphantom{\operatorname{st} \varphi_0} \right\} c)$$

Wstawivszy te wartości w b), otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } BE \quad y = \frac{Pbx}{6 \varepsilon Il} [a(a+2b) - x^2] \\ \text{dla } EC \quad y = \frac{Pax}{6 \varepsilon Il} [b(2a+b) - x_1^2] \end{array} \right\} \dots 383)$$

Dla punktu E otrzymamy z równania 379)

$$y_1 = \frac{Pa^2b^2}{3 \varepsilon Il} \dots \dots \dots 384)$$

Nie jestto jednak największa rzędna, bo ta jest tam, gdzie styczna pozioma.

Jeżeli $a=b$, więc gdy siła P działa w środku, będzie największe ugięcie y czyli strzałka ugięcia (n. *Biegungspfeil*, fr. *flèche de flexion*).

$$f = \frac{Pl^3}{48 \varepsilon I} = 0,208 \frac{Pl^3}{\varepsilon I} \dots \dots \dots 385)$$

Jeżeli belka jest obciążona na całej długości ciężarem jednostajnie rozłożonym (rys. 185), to według równ. 18)

$$M = \frac{1}{2} qx(l-x), \text{ więc } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{1}{2} qx(l-x)}{\varepsilon I} = -\frac{q}{2 \varepsilon I} x(l-x).$$

Scalkujmy to równanie, a otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2 \varepsilon I} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C \right),$$

a po drugim całkowaniu

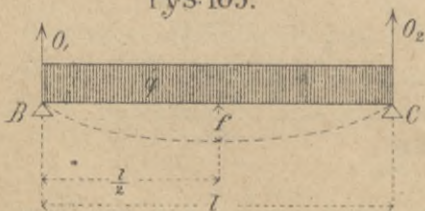
$$y = -\frac{q}{2 \varepsilon I} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} + Cx + C' \right)$$

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C'=0$; dla $x=l$ jest $y=0$, więc

$$\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12} + Cl = 0, \text{ a stąd } C = -\frac{l^3}{12}, \text{ a więc}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2 \varepsilon I} \left(-\frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{l^3}{12} \right) \dots \dots \dots 386)$$

rys. 185.



$$y = \frac{q}{2 \varepsilon I} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{l x^3}{6} + \frac{l^3 x}{12} \right) = \frac{q x}{24 \varepsilon I} (x^3 - 2 l x^2 + l^3) \quad . \quad 387)$$

Ponieważ obciążenie jest symetryczne, więc najw. $y=f$ będzie w środku belki, tam też styczna będzie poziomą, dla $x = \frac{l}{2}$ otrzymamy więc

$$f = \frac{q}{2 \varepsilon I} \left(\frac{l^4}{48} + \frac{l^4}{192} + \frac{l^4}{24} \right) = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{\varepsilon I} \quad . \quad . \quad 388)$$

Ponieważ wedle 147) $\tau I = M e = \frac{q l^2}{8} e$, to gdy

$$e = \frac{h}{2}, \quad \frac{q l^2}{8} = \frac{2 \tau I}{h}, \quad \text{więc}$$

$$f = \frac{5}{384} \frac{16 \tau I l^2}{h \varepsilon I} = \frac{5}{24} \frac{\tau l^2}{\varepsilon h} \quad . \quad . \quad . \quad 389)$$

Jeżeli l będziemy liczyć w m a resztę w cm , to

$$f = \frac{50000}{24} \frac{\tau l^2}{\varepsilon h} m, \quad \text{a gdy dla żelaza } \varepsilon = 2000000,$$

$$f = 0,00104 \frac{\tau l^2}{h} \quad . \quad . \quad . \quad 390)$$

gdzie f i h liczyć należy w cm , τ w kg/cm^2 , l w m .

Przykład. Niech będzie $l=6m$, $q=500 kg/m$, $\tau=1000 kg/cm^2$, to $M = 10,5 \cdot b^2 = 2,25 tm = 225000 kgcm$, więc

$$\frac{M}{\tau} = 225. \quad \text{Zatem przyjmujemy kształtówkę I 20, dla której } \frac{I}{e} = 243.$$

$$\text{Wedle 385) } f = \frac{5}{384} \frac{5.600^4}{2000000.2428} = 1,95 cm = 19,5 mm.$$

$$\text{Wedle 390) } f = 0,00104 \frac{1000.36}{20} = 1,87 cm = 18,7 mm.$$

Wzory powyższe stosują się do belek o przekroju stałym. Jeżeli przekrój jest zmienny, a przypuścimy, że moment bezwładności zmienia się wedle paraboli, to

$$I_x = \frac{4 I_1 x (l-x)}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad 391)$$

jeżeli I_1 oznacza moment bezwładności w środku belki.

$$\text{Wtedy } \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\frac{1}{2} q x (l-x)}{\varepsilon I} = - \frac{q x (l-x) l^2}{8 \varepsilon I_1 x (l-x)} = - \frac{q l^2}{8 \varepsilon I_1}$$

$$\text{Stąd otrzymamy } \frac{dy}{dx} = - \frac{q l^2}{8 \varepsilon I_1} x + C.$$

$$\text{Dla } x = \frac{1}{2} l \quad \frac{dy}{dx} = 0 = - \frac{q l^2}{8 \varepsilon I_1} \frac{1}{2} l + C, \quad \text{a stąd}$$

$$C = \frac{ql^3}{16\epsilon I_1}, \text{ więc}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ql^2}{8\epsilon I_1}x + \frac{ql^3}{16\epsilon I_1} = \frac{ql^2}{8\epsilon I_1} \left(\frac{l}{2} - x \right) \dots \dots \dots 392)$$

Zcałkowawszy raz jeszcze, otrzymamy

$$y = \frac{ql^2}{8\epsilon I_1} \left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

Dla $x=0, y=0$, więc $C_1=0$, zatem

$$y = \frac{ql^2}{16\epsilon I_1} x(l-x) \dots \dots \dots 393)$$

Stąd dla $x = \frac{l}{2}$

$$f = \frac{ql^2}{16\epsilon I_1} \frac{l^2}{4} = \frac{ql^4}{64\epsilon I_1} = 0,156 \frac{ql^4}{\epsilon I_1} \dots \dots \dots 394)$$

W rzeczywistości przekrój nie zmienia się tak bardzo, zatem ugięcie będzie miało wartość między

$$\frac{5}{384} = \frac{1}{76,8} = 0,13 \text{ a } \frac{1}{64} = 0,156 \frac{ql^4}{\epsilon I_1}$$

Dla belek blaszanych lub kratowych równoległych możemy zatem przyjąć w przybliżeniu

$$f = \frac{1}{70} \frac{ql^4}{\epsilon I_1} = 0,143 \frac{ql^4}{\epsilon I_1} \dots \dots \dots 395)$$

Podobnie otrzymamy gdy P działa w środku belki dla przekroju stałego wedle 385)

$$f = 0,208 \frac{Pl^3}{\epsilon I}$$

dla przekroju zmiennego tak, że natężenie dopuszczalne τ i h jest stałym *)

$$f = 0,312 \frac{Pl^3}{\epsilon I} \dots \dots \dots 396)$$

a gdy przytem i wysokość jest zmienna

$$f = 0,416 \frac{Pl^3}{\epsilon I} \dots \dots \dots 397)$$

§. 78. Ugięcie belki jednym końcem utwierdzonej.

Wiemy, że moment M w punkcie C (rys. 186) belki o stałym przekroju jednym końcem utwierdzonej a na drugim cię-

*) p. Rés a l Constructions métalliques str. 554.

żarem P obciążonej, da się wyrazić według równ. 29)

$$M = -P(l-x).$$

A więc według równ. 379) będzie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(l-x)}{\epsilon I},$$

a stąd otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{\epsilon I} \left(lx - \frac{x^2}{2} + C \right),$$

a wreszcie $y = \frac{P}{\epsilon I} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + Cx + C_1 \right).$

Ponieważ dla $x=0$ jest $y=0$ i $\frac{dy}{dx}=0$, więc $C_1=0$ i $C=0$,

a zatem

$$y = \frac{P}{\epsilon I} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) = \frac{Px^2}{6\epsilon I} (3l - x) \dots \dots \dots 398)$$

Ponieważ y rośnie wraz z x , więc najw. $y=f$ będzie dla $x=l$, a mianowicie

$$f = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{\epsilon I} = 0,333 \frac{Pl^3}{\epsilon I} \dots \dots \dots 399)$$

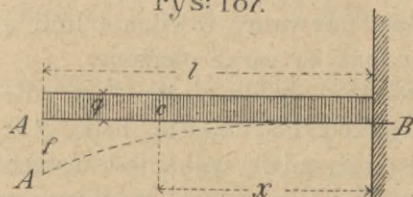
Dla przekroju zmiennego o stałej wysokości otrzymamy wedle Résala

$$f = 0,5 \frac{Pl^3}{\epsilon I} \dots \dots \dots 400)$$

a dla zmiennej wysokości

$$f = 0,667 \frac{Pl^3}{\epsilon I} \dots \dots \dots 401)$$

rys: 187.



Jeżeli belka AB (rys. 187) obciążona jest zupełnie ciężarem jednostajnym q , to moment w punkcie C będzie

$$M = -q(l-x) \frac{l-x}{2} = -\frac{1}{2} q (l-x)^2,$$

więc według 379)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2\epsilon I} (l-x)^2,$$

a stąd otrzymamy $\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2\varepsilon I} \left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} + C \right)$, a wreszcie

$$y = \frac{q}{2\varepsilon I} \left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} + Cx + C_1 \right).$$

Również dla $x=0$ jest $y=0$ i $\frac{dy}{dx}=0$, więc $C=C_1=0$,

a zatem

$$y = \frac{qx^2}{24\varepsilon I} (6l^2 - 4lx + x^2) \dots \dots \dots 402)$$

Ponieważ y wzrasta wraz z x , więc najw. $y=f$ będzie dla $x=l$, a zatem

$$f = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{\varepsilon I} \dots \dots \dots 403)$$

Dla przekroju zmiennego o stałej wysokości otrzymamy wedle Résala

$$f = \frac{1}{4} \frac{ql^4}{\varepsilon I} \dots \dots \dots 404$$

a dla zmiennej wysokości

$$f = \frac{1}{2} \frac{ql^4}{\varepsilon I} \dots \dots \dots 405)$$

Jako belki jednym końcem utwierdzone obliczamy schody, wsporniki, mosty obrotowe i t. d.

§. 79. Belka jednym końcem wmurowana, a w drugim podparta.

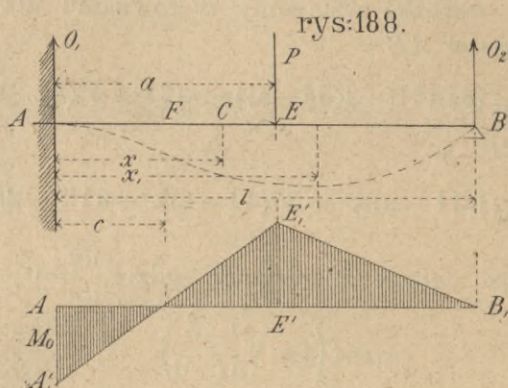
Tam gdzie prawidła statyki nie wystarczają do wyznaczenia oddziaływań, n. p. przy belce jednym końcem utwierdzonej a w drugim podpartej (n. *der an einem Ende eingespannte, am anderem frei aufliegende Träger*, fr. *poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre*, a. *beam fixed at one end and supported at the other*) używamy równania linii ugięcia do wyznaczenia oddziaływań, jak to zaraz okażemy.

Na belkę taką AB (rys. 188) działa ciężar P w odległości a od A . Zastanówmy się najprzód nad częścią belki AE . Nazwijmy M_0 moment w punkcie A , gdzie belka jest utwierdzoną, to dla punktu C będzie $M=M_0+O_1x$, a więc według rów. 379)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_0 + O_1x}{\varepsilon I}, \text{ a stąd}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\varepsilon I} \left(M_0 x + \frac{O_1 x^2}{2} + C \right), \text{ nareszcie}$$

$$y = -\frac{1}{\varepsilon I} \left(M_0 \frac{x^2}{2} + \frac{O_1 x^3}{6} + Cx + C' \right).$$



Dla długości EB , t. j. gdy $x > a$, otrzymamy

$$M = M_0 + O_1 x - P(x - a) = M_0 + (O_1 - P)x + Pa,$$

a więc

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon I} [M_0 + (O_1 - P)x + Pa], \text{ a stąd}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\varepsilon I} \left[M_0 x + (O_1 - P) \frac{x^2}{2} + Pax + C_1 \right],$$

nareszcie

$$y = -\frac{1}{\varepsilon I} \left[(M_0 + Pa) \frac{x^2}{2} + (O_1 - P) \frac{x^3}{6} + C_1 x + C'_1 \right].$$

Dalej mamy $y=0$ dla $x=0$ i $x=l$. $\frac{dy}{dx}=0$ dla $x=0$, ugięcie

w punkcie C i styczną, a więc $\frac{dy}{dx}$, otrzymać musimy z obu

równań dla y i $\frac{dy}{dx}$ te same; ze względu na ogólne warunki równowagi musi być też $P = O_1 + O_2$ i $O_1 l + M_0 - P[l - a] = 0$.

Mamy więc 7 równań, z których wyznaczymy 4 stałe ilości C , C' , C_1 i C'_1 i 3 niewiadome M_0 , O_1 i O_2 . Ostatecznie otrzymamy

$$C=0, C'=0, C_1 = -\frac{Pa^2}{2}, C'_1 = \frac{Pa^3}{6},$$

$$O_1 = P \frac{2l^3 - a^2(3l - a)}{2l^3}, \quad O_2 = P \frac{a^2(3l - a)}{2l^3},$$

$$M_0 = -Pa \frac{2l^2 - a(3l - a)}{2l^2}.$$

Jeżeli te wartości wstawimy w równaniu dla y , otrzymamy dla długości AE

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{Px^2}{12 \varepsilon II^3} [3al(2l^2 - a(3l - a)) - x(2l^3 - a^2(3l - a))] \\ \text{dla długości } EB \\ y &= \frac{Pa^2}{12 \varepsilon II^3} [(3l - a)x^3 - 3l(3l - a)x^2 + 6l^3x - 2al^3] \end{aligned} \right\} \quad 406$$

Największe ugięcie znajdziemy, gdzie $\frac{dy}{dx} = 0$, to jest dla

$$x_1 = l \left(1 - \sqrt{\frac{l-a}{3l-a}} \right) \quad \dots \quad 407$$

a wstawivszy tę wartość w równ. 406), otrzymamy

$$f = \frac{Pa^3}{6 \varepsilon I} (1 - a) \sqrt{\frac{l-a}{3l-a}} \quad \dots \quad 408$$

Moment w punkcie E będzie

$$M_1 = M_0 + O_1 a = Pa^2 \frac{(3l-a)(1-a)}{2l^3} \quad \dots \quad 409$$

W punkcie F , gdzie $M=0$, linia ugięcia ma punkt zwrotny, bo $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Ponieważ $M = M_0 + O_1 x$, więc $M_0 + O_1 c = 0$, a stąd

$$c = -\frac{M_0}{O_1} = \frac{2l^2 - a(3l - a)}{2l^3 - a^2(3l - a)} \cdot a \quad \dots \quad 410$$

Gdy ciężar jest w środku, więc $a = \frac{l}{2}$, otrzymamy

$$O_1 = \frac{11}{16}P, \quad O_2 = \frac{5}{16}P, \quad M_0 = -\frac{3}{16}Pl, \quad \dots \quad 411$$

a moment w E

$$M_1 = +\frac{5}{32}Pl \quad \dots \quad 412$$

Największe ugięcie dla $x_1 = 0,533l$ jest

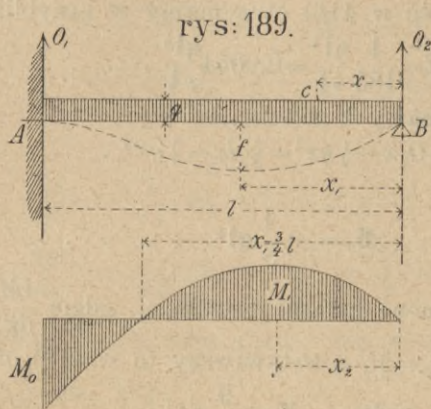
$$f = \frac{1}{48\sqrt{5}} \frac{Pl^3}{\varepsilon I} = \frac{1}{107,3} \frac{Pl^3}{\varepsilon I}, \quad \dots \quad 413$$

a punkt zwrotny dla

$$c = \frac{3}{11}l \quad \dots \quad 414$$

Jeżeli zaś belka AB jest obciążona zupełnie ciężarem jednostajnym q (rys. 189), to otrzymamy moment M w punkcie C

$$M = O_2 x - \frac{1}{2} q x^2,$$



więc według równ. 379)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{\epsilon I} (O_2 x - \frac{1}{2} q x^2),$$

a więc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\epsilon I} \left(\frac{O_2 x^2}{2} - \frac{q x^3}{6} + C \right),$$

a nareszcie

$$y = -\frac{1}{\epsilon I} \left(\frac{O_2 x^3}{6} - \frac{q x^4}{24} + Cx + C_1 \right).$$

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C_1=0$,

„ $x=l$ „ $y=0$, więc $\frac{O_2 l^3}{6} - \frac{q l^4}{24} + Cl=0$, zatem

$$C = -\frac{4O_2 l^2 - q l^3}{24}.$$

Dalej mamy dla $x=l$ $\frac{dy}{dx} = 0$, więc $\frac{O_2 l^2}{2} - \frac{q l^3}{6} + C = 0$,

a wstawivszy wartość za C , otrzymamy

$$O_2 = \frac{3}{8} q l \dots \dots \dots 415)$$

a $C = -\frac{q l^3}{48}$. Możemy więc napisać

$$y = \frac{1}{6 \epsilon I} \left(\frac{q x^4}{4} + \frac{q l^3 x}{8} - \frac{3 q l x^3}{8} \right) = \frac{q x}{48 \epsilon I} (2x^3 + l^3 - 3lx^2) \dots \dots \dots 416)$$

Największe ugięcie będzie dla x_1 , dla którego $\frac{dy}{dx} = 0$, więc dla

$$x_1 = 0,42125l \quad \dots \quad 417)$$

Wstawivszy tę wartość w 416) otrzymamy w przybliżeniu

$$f = \frac{1}{185} \frac{ql^4}{\epsilon I} = 0,0054 \frac{ql^4}{\epsilon I} \quad \dots \quad 418)$$

Momenty otrzymamy z równania

$$M = O_2x - \frac{1}{2} qx^2 = \frac{3}{8} qlx - \frac{1}{2} qx^2, \quad \dots \quad 419)$$

więc dla $x=l$

$$M_0 = -\frac{1}{8} ql^2 \quad \dots \quad 420)$$

Największy moment dodatni jest dla x_2 , gdzie $\frac{dM}{dx} = 0$, więc $\frac{3}{8} ql - qx_2 = 0$, zatem $x_2 = \frac{3}{8}l$, a wstawivszy to w 419), otrzymamy

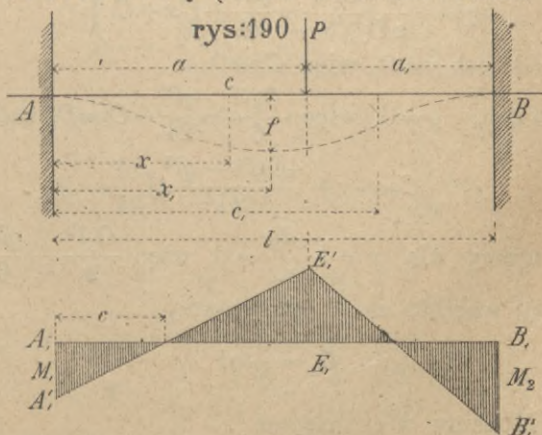
$$\text{najw.} + M = \frac{9}{128} ql^2 \quad \dots \quad 421)$$

Punkt zwrotny jest dla $M=0$, więc $\frac{3}{8} qlx_3 - \frac{1}{2} qx_3^2 = 0$, stąd

$$x_3 = \frac{3}{4}l \quad \dots \quad 422)$$

§. 80. Belka obu końcami poziomo utwierdzona.

Gdy na belkę o stałym przekroju obu końcami poziomo utwierdzoną (n. der an beiden Enden eingespannte



Träger, fr. poutre encastree aux deux extremités, a. beam fixed at both ends) AB (rys. 190) działa ciężar P w punkcie E , powstają

w A i B momenty, które nazwijmy M_1 i M_2 . W dowolnym punkcie C będzie moment M , przyczem jeżeli $x < a$,

$$M = M_1 + O_1 x, \text{ jeżeli } x > a, M = M_1 + O_1 x - P(x - a).$$

A zatem otrzymamy według równ. 379) dla $x < a$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon I} (M_1 + O_1 x),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\varepsilon I} (M_1 x + \frac{O_1 x^2}{2} + C),$$

dla $x > a$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon I} (M_1 + O_1 x - P(x - a)),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\varepsilon I} (M_1 x + \frac{O_1 x^2}{2} - \frac{Px^2}{2} + P a x + C_1).$$

Dla $x=0$ jest $\frac{dy}{dx}=0$, więc $C=0$; dla $x=a$ jest $\frac{dy}{dx}$ w obu równaniach to samo, więc

$$M_1 a + \frac{O_1 a^2}{2} = M_1 a + \frac{O_1 a^2}{2} - \frac{Pa^2}{2} + P a^2 + C_1, \text{ a stąd } C_1 = -\frac{Pa^2}{2}.$$

Dla $x=l_1$ $\frac{dy}{dx}=0$, więc

$$2 M_1 l = Pa^2 - 2 P a l + P l^2 - O_1 l^2 \quad \dots \quad 423)$$

Wstawiwszy wartość za C i C_1 , całkujemy jeszcze równanie dla $\frac{dy}{dx}$, a otrzymamy

$$\text{dla } x < a$$

$$y = -\frac{1}{\varepsilon I} \left(\frac{M_1 x^2}{2} + \frac{O_1 x^3}{6} + C' \right),$$

$$\text{dla } x > a$$

$$y = -\frac{1}{\varepsilon I} \left(\frac{M_1 x^2}{2} + \frac{O_1 x^3}{6} - \frac{Px^3}{6} + \frac{P a x^2}{2} - \frac{P a^2 x}{2} + C_1 \right)$$

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C'=0$; dla $x=a$ jest y to samo w obu równaniach, więc $C_1' = \frac{Pa^3}{6}$; nareszcie dla $x=l$ jest $y=0$, więc

$$3 M_1 l^2 = 3 P a^2 l - 3 P a l^2 + P l^3 - O_1 l^3 - P a^3 \quad \dots \quad 424)$$

W równaniach 423) i 424) mamy dwie niewiadome M_1 i O_1 , które możemy obliczyć. Otrzymamy więc

$$O_1 = \frac{P l^3 - 3 P a^2 l + 2 P a^3}{l^3} = \frac{P a^3 (1 + 2a)}{l^3} \quad \dots \quad 425)$$

a analogicznie otrzymamy

$$O_2 = \frac{Pa^2(l+2a_1)}{l^3} \dots \dots \dots 426)$$

Wstawivszy wartość za O_1 w 423), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= - \frac{Pa a_1^2}{l^2} \\ M_2 &= - \frac{Pa^2 a_1}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 427)$$

a analogicznie

Podstawivszy te wartości w równanie dla y , otrzymamy dla $x < a$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{Pa_1^2 x^2}{6\varepsilon Il^3} (3al - (l+2a)x), \\ &\text{dla } x > a \\ y &= \frac{Px^2}{6\varepsilon Il^3} \left[-(l+2a)a_1^2 x + \right. \\ &\left. + 3aa_1^2 l + xl^3 - 3al^3 + \frac{3a^2 l^3}{x} - \frac{a^3 l^3}{x^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots 428)$$

Największe ugięcie będzie dla x_1 , gdzie $\frac{dy}{dx} = 0$, więc

$$x_1 = \frac{2al}{l+2a}, \text{ a stąd } f_1 = \frac{2Pa_1^2 a^3}{3\varepsilon I(l+2a)^2} \dots \dots 429)$$

Momenty otrzymamy według równań

$$\text{dla } x < a \\ M = - \frac{Pa a_1^2}{l^2} + \frac{Pa_1^2(l+2a)x}{l^3} = \frac{Pa_1^2}{l^3} [(l+2a)x - al], \dots 430)$$

$$\text{dla } x > a \\ M = - \frac{Pa a_1^2}{l^2} + \frac{Pa_1^2(l+2a)x}{l^3} - P(x-a) = \\ = \frac{P}{l^3} \{ (l+2a)a_1^2 x - aa_1^2 l - l^3 x + al^3 \} \dots \dots 431)$$

Największy moment dodatni otrzymamy dla $x=a$, więc

$$\text{najw (+M)} = \frac{2Pa^2 a_1^2}{l^3} \dots \dots \dots 432)$$

Punkty zwrotne otrzymamy dla $x=c$ i $x=c_1$, gdzie $M=0$, więc

$$c = \frac{al}{l+2a}, \quad c_1 = \frac{a+2a_1}{a+3a_1} l \dots \dots \dots 433)$$

Gdy ciężar P działa w środku, więc $a = \frac{l}{2} = a_1$, otrzymamy z równania 428)

$$y = \frac{Px^2}{48 \varepsilon I} (3l - 4x) \dots \dots \dots 434)$$

Największe ugięcie będzie dla $x_1 = \frac{l}{2}$, więc

$$f = \frac{1}{192} \frac{Pl^3}{\varepsilon I} = 0,0052 \frac{Pl^3}{\varepsilon I} \dots \dots \dots 435)$$

Dla przekroju zmiennego a stałego τ i h otrzymamy wedle Résala

$$f = 0,0078 \frac{Pl^3}{\varepsilon I} \dots \dots \dots 436)$$

dla zmiennego zaś h

$$f = 0,0104 \frac{Pl^3}{\varepsilon I} \dots \dots \dots 437)$$

Dalej otrzymamy z równania 427)

$$M_1 = -\frac{Pl}{8} = M_2 \dots \dots \dots 438)$$

a z równania 430)

$$M = \frac{P}{8} (4x - l) \dots \dots \dots 439)$$

Największy moment jest dla $x = \frac{l}{2}$, więc

$$\text{najw } M = +\frac{Pl}{8} \dots \dots \dots 440)$$

Punkt zwrotny jest w punkcie, gdzie $M=0$, więc dla $c = \frac{l}{4}$.

Jeżeli belka AB (rys. 191) jest obciążoną zupełnie ciężarem jednostkowym q , to z powodu symetrii będzie $O_1 = O_2 = \frac{ql}{2}$, a moment w punkcie C będzie

$$M = M_1 + \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

Więc według równ. 379) będzie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon I} \left(M_1 + \frac{qlx}{4} - \frac{qx^2}{2} \right),$$

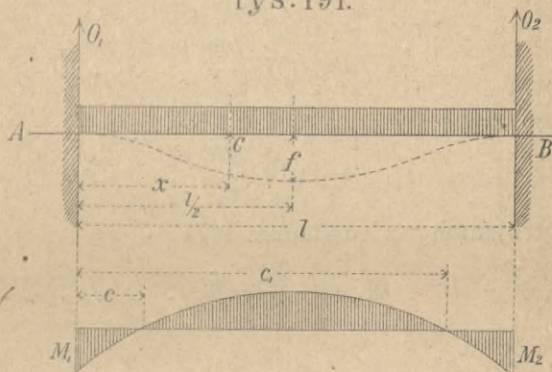
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\epsilon I} \left(M_1 x + \frac{qlx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C \right)$$

Dla $x=0$ jest $\frac{dy}{dx}=0$, więc $C=0$, dalej dla $x=l$ jest

$$\frac{dy}{dx}=0, \text{ więc } M_1 + \frac{ql^3}{4} - \frac{ql^3}{6} = 0, \text{ a stąd}$$

$$M_1 = -\frac{1}{12}ql^2 = M_2 \dots \dots \dots 441)$$

rys: 191.



Wstawivszy wartości, otrzymamy więc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\epsilon I} \left(-\frac{1}{12}ql^2x + \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right), \text{ a stąd}$$

$$y = \frac{1}{\epsilon I} \left(\frac{ql^2x^2}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} \right) = \frac{qx^2}{24\epsilon I} (l^2 - 2lx + x^2) = \frac{qx^2(1-x)^2}{24\epsilon I} \quad 442)$$

Największe ugięcie jest dla $x_1 = \frac{l}{2}$, więc

$$f = \frac{ql^4}{384\epsilon I} = 0,0026 \frac{ql^4}{\epsilon I} \dots \dots \dots 443)$$

Dla zmiennego przekroju a stałego τ i h otrzymamy podobnie

$$f = 0,0054 \frac{ql^4}{\epsilon I} \dots \dots \dots 444)$$

a dla zmiennego h

$$f = 0,0090 \frac{ql^4}{\epsilon I} \dots \dots \dots 445)$$

Moment otrzymamy z równania

$$M = -\frac{1}{12}ql^2 + \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{12}(6lx - 6x^2 - l^2),$$

a więc *najw* M jest dla $x_1 = \frac{l}{2}$, stąd

$$\text{najw } M = +\frac{1}{24}ql^2 \quad \dots \quad 446)$$

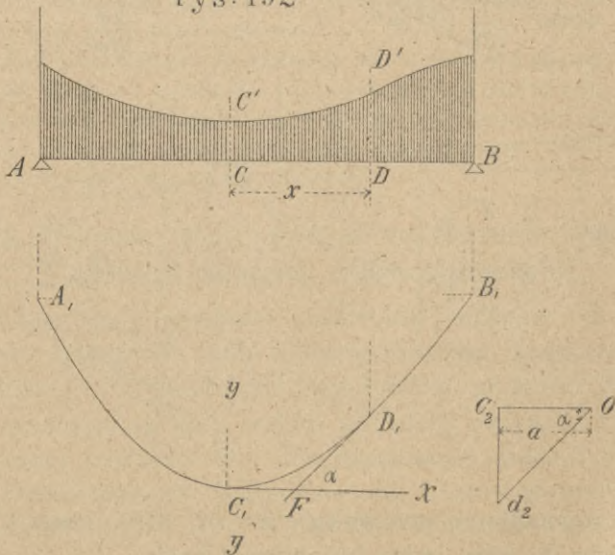
Punkty zwrotne są dla $M = 0$, więc dla $c = 0,2113l$ i $c_1 = 0,7887l$.

Jako belki obu końcami utwierdzone możemy obliczać tylko takie belki, u których przy obciążeniu styczne linii sprężystej na podporach zupełnie się nie zmieniają, co możemy przypuścić tylko wtedy, gdy belkę głęboko wmurujemy (półtora wysokości belki) lub też, gdy końce belki w jakikolwiek sposób przytrzymamy np. śrubami. W przeciwnym razie liczymy belkę taką jako w dwu punktach podparta.

§. 81. Wykreślne wyznaczenie ugięcia belki.

Niechaj belka AB (rys. 192) obciążona będzie ciężarem ciągłym; dla tego obciążenia wykreślmy kszczywą sznurową

rys: 192



$A_1 C_1 D_1 B_1$, to jeżeli do tej krzywej w punkcie C_1 wykreślimy styczne poziome a w punkcie D_1 także styczną, gdy Oe_2 i Od_2 są promienie równoległe do tych stycznych, odcinają one w wieloboku sił długość $c_2 d_2$, przedstawiającą obciążenie $CC'D'D$.

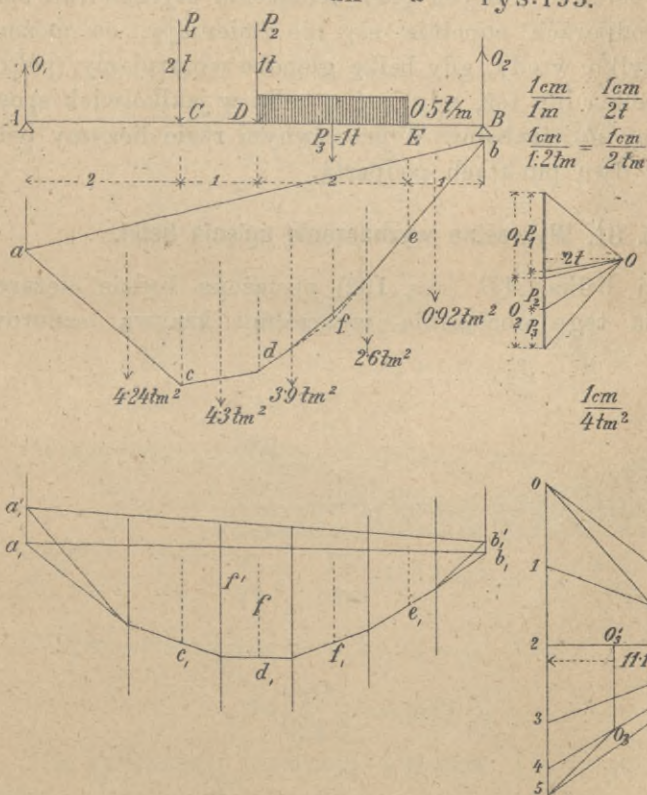
Ze względu na osie $C_1 X$ i $C_1 Y$ mamy

$$\text{st } \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{c_2 d_2}{a} = \frac{1}{a} CC'DD = \frac{1}{a} \int_0^x q dx \quad \dots \quad 446)$$

jeżeli q oznacza ciężar jednostkowy.

Jeżeli rów. 446) zrózniczkujemy, otrzymamy

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{a} \quad \text{rys:193.} \quad \dots \quad 447)$$



Jeśli równanie to porównamy z rów. 379), licząc y w kierunku z dołu do góry, więc zmieniawszy znak,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{\epsilon I}$$

widzimy, że oba równania są identyczne, jeżeli $M=q$ a $\varepsilon I=a$. A zatem linia ugięcia jest linią sznurową, dla której wykreślenia przyjęto powierzchnię momentów jako powierzchnię obciążenia a odległość biegunowa równa się iloczynowi współczynnika sprężystości ε przez moment bezwładności przekroju I .

Prawo to podał pierwszy Mohr.

Musimy tu rozróżnić dwa wypadki: albo przekrój jest stały albo zmienny. W pierwszym wypadku odległość biegunowa jest stałą, w drugim dla każdej części belki zmienia się wraz z εI .

Przypuśćmy najprzód, że przekrój jest stały i zróbmy przykład.

Belka AB (rys. 193) obciążona jest ciężarem $P_1=2t$, $P_2=1t$ i ciężarem jednostajnie ciągłym $0,5t/m$ na długości $2m$. Wyznaczyć należy linię ugięcia.

W zwykły sposób wyznaczyliśmy najprzód linię momentów $acdfeb$. Teraz płaszczyznę momentów uważamy jako płaszczyznę obciążenia, dzielimy ją na paski, wyznaczamy środki ciężkości i powierzchnie pasków. Z rysunku widzimy, że najw. $M=4,32t$, czemu dla $\tau=1000 \text{ kg/cm}^2$ odpowiada $\frac{M}{t} = \frac{422000}{1000} = 432 \text{ cm}^3$. Przyjmiemy zatem kształtówkę I l. 25, przyczem

$I=5554 \text{ cm}^4$. Zatem $\varepsilon I = 2000000 \cdot 5554 \text{ kgcm}^2 = 1110,8 \text{ tm}^2$. Przyjawszy więc $\varepsilon I = 1110,8 \text{ tm}^2$ otrzymalibyśmy ugięcie w podziałce 1:100, zatem za małe. Jeśli chcemy mieć je w naturalnej wielkości, to przyjmiemy εI 100 razy mniejsze, więc $\varepsilon I = 11,1 \text{ tm}^2$. Wykreśliwszy na tej podstawie wielobok a w nim styczną krzywą sznurową, otrzymamy ugięcie w naturalnej wielkości, tu więc najw $y=f=14 \text{ mm}$.

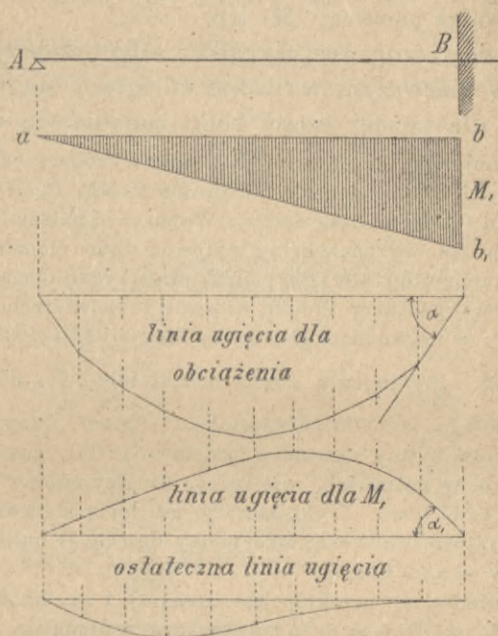
Jeżeli przyjmiemy, że przekrój jest zmienny i np. na długości AC $I_1=\frac{1}{2}I$, na CE $I_2=I$, na EB $I_3=\frac{1}{2}I$, to konstrukcja zmienia się tylko o tyle, że dla kreślenia linii ugięcia na długości AC przyjmiemy $a_1=\frac{1}{2}a$, na CE $a_2=a$, na EB $a_3=\frac{1}{2}a$ a stąd otrzymujemy c_1a_1' zamiast c_1a_1 i e_1b_1' zamiast e_1b_1 , f' też znacznie większe, bo $17,5 \text{ mm}$.

§. 83. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych belki jednym końcem podpartej, drugim utwierdzonej.

Zapomocą poprzedniej konstrukcyi możemy też wyznaczyć moment podporowy belki jednym końcem podpartej, drugim utwierdzonej. Wyznaczamy mianowicie najprzód linię ugięcia belki, uważając ją jako w dwu punktach podpartą. Oprócz tego w B mamy moment M_1 . Przypuszczamy teraz, że na belkę działa tylko moment podporowy M_1 . Linię momentów przedstawia wtedy prosta ab_1 . Wprawdzie wysokość bb_1 nie jest nam znaną, ale tymczasowo przyjmujemy $M_1=1$, wyznaczamy linię ugięcia w tym wypadku dla M_1 i sumujemy ugięcia algebra-

icznie. Wedle założenia musi być ugięcie w $B=0$ i styczna pozioma, a zatem obie linie ugięcia w b muszą mieć styczne nachylone pod tym samym kątem α tylko o przeciwnym znaku. Z tego warunku możemy wyznaczyć wielkość momentu M_1 .

rys: 194

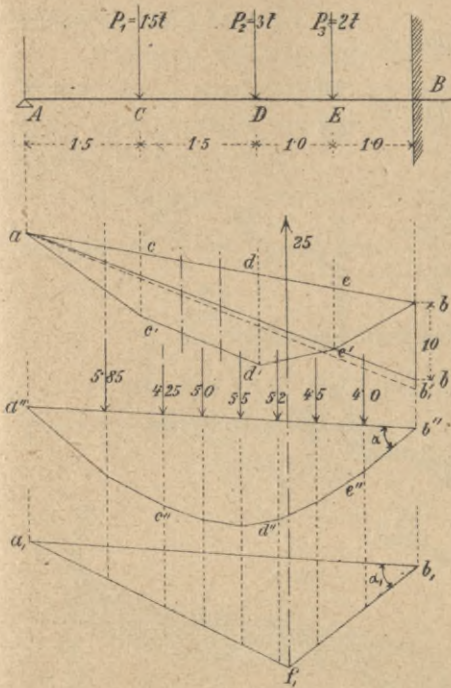


Przykład. Belka AB , podparta w A a utwierdzona w B , (rys. 195) obciążona jest ciężarami $P_1=1.5t$, $P_2=3t$ i $P_3=2t$. Chodzi o wyznaczenie momentów, a przede wszystkim momentu podporowego M_1 w B .

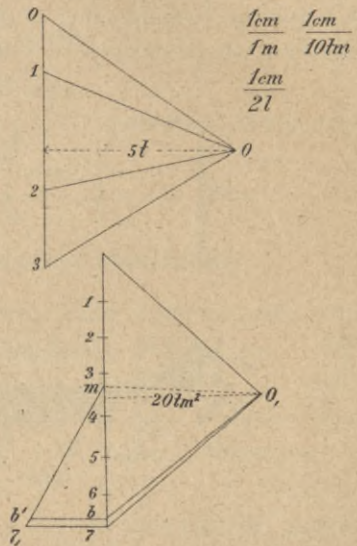
W tym celu kreślimy najprzód linię momentów $ac'd'e'b$ dla belki w dwu punktach podpartej. Powierzchnię tę momentów uważamy jako powierzchnię obciążenia i dla dowolnie przyjętej odległości biegunowej $20tm^2$ kreślimy drugi wielobok sznurowy czyli linię ugięcia $a''c''d''e''b''$.

Ale w B powstaje nieznan nam jeszcze moment podporowy M_1 . Przyjmujemy dowolnie $M_1=10tm$, odcinamy $bb'=10tm$ i otrzymujemy powierzchnię momentów abb' . Dla tej powierzchni momentów, jako powierzchni obciążenia trzeba wyznaczyć teraz linię ugięcia. Ale ponieważ potrzeba nam tylko stycznej linii ugięcia na podporze, stycznej podporowej, więc nie dzielimy tę powierzchnię na paski, lecz w $\frac{1}{3}l$ zaczepiamy całą powierzchnię momentów

$\frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ tm}^2$. Dla tej samej odległości biegunowej 20 tm^2 otrzymamy drugi wielobok sznurowy $a_1 f_1 b_1$. Możemy się jednak nawet obejść bez kreślenia



rys:195.



tego wieloboku, bo wiemy, że oddziaływanie w A przy powierzchni obciążenia abb' będzie $\frac{1}{3}abb' = \frac{1}{3}25 = 8\frac{1}{3} \text{ tm}^2$, w B zaś $16\frac{2}{3} \text{ tm}^2$, zatem jeżeli od punktu m odetniemy $mb = 16\frac{2}{3} \text{ tm}^2$ otrzymamy $\alpha_1 = mO_1b$, gdy $\alpha = mO_17$. Widzimy, że tu $\alpha > \alpha_1$, musimy jednak te kąty zrównać, zatem zrobić $\alpha_1 = O_17$, a w tym celu powiększyć M_1 w stosunku $mb:m7$. Zrobiwszy to wykreślenie, otrzymujemy $bb'_1 = 77_1$, a w ten sposób szukany moment podporowy i zarazem wszystkie inne momenty. Linia zamykająca jest tu ab'_1 kreskowana.

· Moment w B jest więc wedle rysunku $M_1 = 10,9 \text{ tm}$.

§. 84. Belka obu końcami utwierdzona.

Belka AB (rys. 196) obciążona jest ciężarami P_1, P_2, P_3 . Najprzód wykreśliliśmy pierwszy wielobok sznurowy $acdeb$ jak dla belki w dwu punktach podpartej. Niechaj dla belki obu końcami utwierdzonej będzie $a_0 b_0$ zamykająca, to powierzchnia momentu kreskowana

$$aa_0 b_0 bedc = acdeb - aa_0 b_0 - abb_0 = a(c - t_1 - t_2),$$

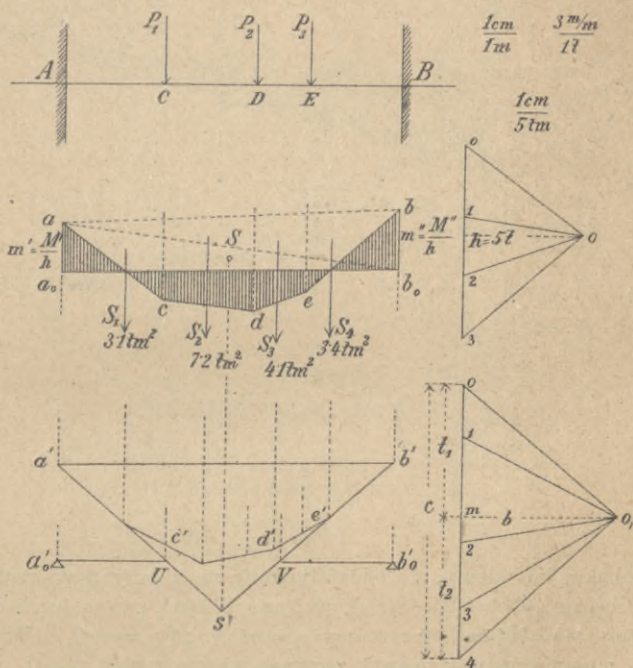
jeżeli a oznacza wspólną podstawę, ac zwykłą powierzchnią momentów $acdeb$, $at_1 = aa_0b$, $at_2 = abb_0$.

Z rysunku mamy

$$at_1 = \frac{l}{2} \cdot aa_0 = \frac{lM'}{2h}$$

$$at_2 = \frac{l}{2} \cdot bb_0 = \frac{lM''}{2h}$$

rys: 196



narescie $ac = \frac{Ml}{h}$, jeżeli M oznacza średni moment belki jedno-przęsłowej.

Kreślmy teraz drugi wielobok sznurowy. Dla powierzchni momentów zwykłej otrzymamy linię ugięcia $a'c'd'e'b'$. Jeżeli jednak chodzi tylko o styczne podporowe, to nie potrzebujemy całego wieloboku kreślić, wystarczają proste $a's'$ i $s'b'$, równoległe do promieni skrajnych O_1O i O_14 . Chcąc uwzględnić też powierzchnie at_1 i at_2 odcinamy w wieloboku sił $m_0 = t_1$ i $4m_0 = t_2$. Wtedy ua'_0 i vb'_0 przedstawiają styczne podporowe belki obu

końcami utwierdzonej. Ponieważ wedle założenia styczne te są poziome, więc $a'_0 \parallel vb'_0 // O_1 m$, a stąd

$$t_1 + t_2 = c, \quad aa_0 b_0 + ab_0 b = acdb,$$

nakoniec $aa_0 b_0 bedc = 0$.

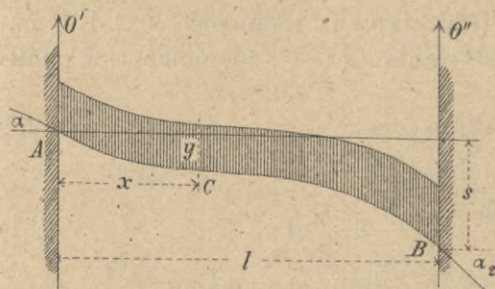
Widzimy więc, że dla belki obu końcami poziomo utwierdzonej linia zamykająca wyrównywa powierzchni momentów, czyli powierzchnie ujemne momentów równają się powierzchni dodatniej momentów.

Z dalszego warunku $m' : m'' = \tau_1 : \tau_2$ możemy wyznaczyć długość aa_0 i bb_0 , przyczem $\frac{aa_0 + bb_0}{2} = \mathfrak{M}$.

§. 85. Belka obu końcami ukośnie utwierdzona.

Niech AB (rys. 197) przedstawia linię ugięcia belki, obu końcami ukośnie utwierdzonej i obciążonej jednostajnie;

rys: 197



katy nachylenia osi belki w A i B niech będą α_1 i α_2 . Nazwijmy dalej $\text{st } \alpha_1 = \tau_1$, $\text{st } \alpha_2 = \tau_2$, a wysokość punktu A nad B niech będzie s .

Według równania 9) możemy napisać:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{\epsilon I}, \quad \text{a stąd}$$

$$\epsilon I \frac{dy}{dx} = -\int M dx + C.$$

Dla $x=0$ jest

$$\frac{dy}{dx} = \tau_1, \quad \text{więc } \epsilon I \tau_1 = C; \quad \text{dla } x=l \text{ jest}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tau_2, \quad \text{więc } \epsilon I \tau_2 = -\int_0^l M dx + C, \quad \text{a stąd}$$

$$\epsilon I (\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l M dx \dots \dots \dots 448)$$

Całkując raz jeszcze, otrzymamy

$$\epsilon I y = -\iint M dx^2 + Cx + C_1.$$

Wyraz $\int \int M dx \cdot dx$ możemy inaczej napisać, całkując częściowo, a mianowicie

$$\int \int M dx \cdot dx = x \int M dx - \int M x dx, \text{ więc}$$

$$\varepsilon Iy = -x \int M dx + \int M x dx + Cx = C_1 + x \left(-\int M dx + C \right) + \int M x dx + C_1,$$

$$\varepsilon Iy = \varepsilon Ix \frac{dy}{dx} + \int M x dx + C_1.$$

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C_1=0$; dla $x=l$ będzie

$$\varepsilon Is = \varepsilon Il \tau_2 + \int_0^l M x dx, \text{ a stąd}$$

$$\varepsilon I(s-l \tau_2) = \int_0^l M x dx \dots \dots \dots 449)$$

Jeżeli q jest ciężar jednostkowy, momenty w A i B nazwiemy M' i M'' a oddziaływania O' i O'' , to moment w punkcie C będzie

$$M = M' + O'x - \frac{1}{2} qx^2 \dots \dots \dots 450)$$

Dla punktu B będzie $M'' = M' + O'l - \frac{1}{2} ql^2$, a stąd

$$O' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{1}{2} ql \dots \dots \dots 451)$$

Wstawivszy to w równanie 450), otrzymamy

$$\begin{aligned} M &= M' + \frac{M'' - M'}{l} x + \frac{1}{2} qlx - \frac{1}{2} qx^2 = \\ &= \frac{M'(l-x) + M''x}{l} + \frac{1}{2} qx(l-x) \dots \dots \dots 452) \end{aligned}$$

Wartość tę podstawimy w 448) i 449) i otrzymamy

$$\begin{aligned} \varepsilon I(\tau_1 - \tau_2) &= \int_0^l \frac{M'(l-x) + M''x}{l} dx + \frac{1}{2} q \int_0^l x(l-x) dx = \\ &= (M' + M'') \frac{l}{2} + \frac{1}{12} ql^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon I(s-l \tau_2) &= \int_0^l \frac{M'(l-x) + M''x}{l} x dx + \frac{1}{2} q \int_0^l x^2(l-x) dx = \\ &= (M' + 2M'') \frac{l^2}{6} + \frac{1}{24} ql^4. \end{aligned}$$

Rozwiązawszy te równania, otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M' &= -\frac{1}{12}ql^2 + 2\varepsilon I \frac{l(2\tau_1 + \tau_2) - 3s}{l} \\ M'' &= -\frac{1}{12}ql^2 - 2\varepsilon I \frac{l(\tau_1 - 2\tau_2) - 3s}{l} \end{aligned} \right\} \dots 453)$$

Z tego otrzymamy τ_1 i τ_2 , a mianowicie

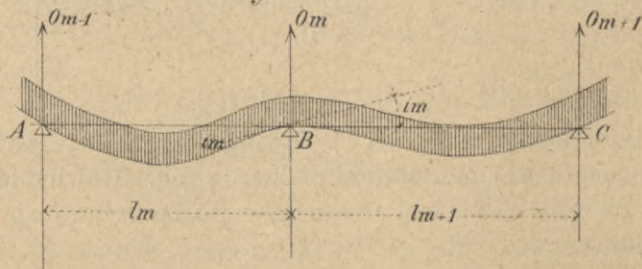
$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{l}{6\varepsilon I} (2M' + M'' + \frac{1}{4}ql^2) + \frac{s}{l} \\ \tau_2 &= -\frac{l}{6\varepsilon I} (M' + 2M'' + \frac{1}{4}ql^2) + \frac{s}{l} \end{aligned} \right\} \dots 454)$$

§. 86. Belka ciągła.

Belkę ciągłą albo wielkoprzęsłową (n. *continuirlicher Träger*, fr. *poutre continue*, an. *continuous beam*, cz. *trám spojity*) nazywamy belką prostą, spoczywającą na kilku podporach.

Tu zastanowimy się tylko nad najprostszym przypadkiem, gdy belka jest jednostajnie zupełnie obciążoną ciężarem jednostkowym q , gdy podpory są równo wysokie a przekrój stały.

rys: 198



Niech ABC (rys. 198) będzie m^{to} i $m+1^{szo}$ przęsła belki ciągłej o równo wysokich podporach, to oba te przęsła możemy uważać jako belki ukośnie utwierdzone, otrzymamy więc z równania 454), zważywszy, że $s=0$, dla przęsła m^{ego} styczną kąta nachylenia linii ugięcia w B $\tau_m = -\frac{l_m}{6\varepsilon I} (M_{m-1} + 2M_m + \frac{1}{4}ql_m^2)$, zaś dla przęsła $m+1^{ego}$ styczną kąta nachylenia linii ugięcia w B także $\tau_m = +\frac{l_{m+1}}{6\varepsilon I} (2M_m + M_{m+1} + \frac{1}{4}ql_{m+1}^2)$.

Jeżeli ε i I są ilościami stałymi, to

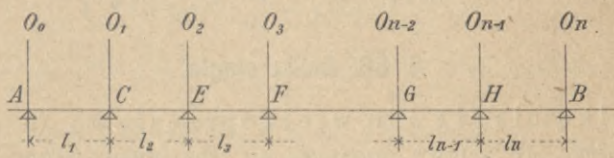
$$l_{m+1}(2M_m + M_{m+1} + \frac{1}{4}ql^2_{m+1}) = -l_m(M_{m-1} + 2M_m + \frac{1}{4}ql^2_m),$$

a stąd

$$M_{m-1}l_m + 2M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}l_{m+1} = -\frac{1}{4}q(l^3_m + l^3_{m+1}) \quad . \quad 455)$$

Zastosujmy to równanie do wszystkich przęseł (rys. 199) i zważmy, że $M_0 = M_n = 0$, a otrzymamy

rys: 199



dla $m=1$

$$2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = -\frac{1}{4}q(l^3_1 + l^3_2),$$

dla $m=2$

$$M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 = -\frac{1}{4}q(l^3_2 + l^3_3),$$

dla $m=n-2$.

$$M_{n-3}l_{n-2} + 2M_{n-2}(l_{n-2} + l_{n-1}) + M_{n-1}l_{n-1} = -\frac{1}{4}q \times (l^3_{n-2} + l^3_{n-1})$$

dla $m=n-1$

$$M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) = -\frac{1}{4}q(l^3_{n-1} + l^3_n)$$

. 456)

Otrzymujemy więc $(n-1)$ równań, które wystarczają do wyznaczenia $(n-1)$ momentów podporowych. Równania te nazywamy równaniami momentów podporowych (*n. Normalgleichungen*).

Wyznaczywszy momenty podporowe, otrzymamy łatwo momenty we wszystkich innych punktach, siły poprzeczne i oddziaływania, a mianowicie momenty według równania 452)

$$M = M' \frac{1-x}{1} + M'' \frac{x}{1} + \frac{1}{2}qx(1-x) \quad . \quad . \quad . \quad 457)$$

Jestto równanie paraboli o osi pionowej.

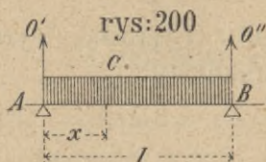
Niechaj będą Q' i Q'' siły poprzeczne w A i B (rys. 200), to moment w C będzie $M = M' + Q'x - \frac{1}{2}qx^2$, więc dla punktu B będzie $M'' = M' + Q'i + \frac{1}{2}ql^2$, a zatem

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{2} ql - \frac{M' - M''}{l} \\ \text{a } Q'' &= -\frac{1}{2} ql - \frac{M' - M''}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 458)$$

Siła poprzeczna w punkcie C będzie

$$Q = Q' - qx \dots 459)$$

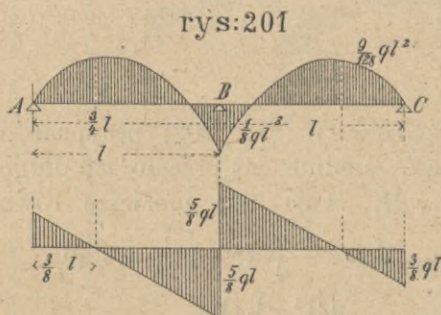
Jestto równanie linii prostej, której nachylenie zależy tylko od q , a więc linie sił poprzecznych będą we wszystkich przekształkach równoległe.



§. 87. Belka ciągła dwu i trzyprzęsłowa.

Zastosujemy tu wzory poprzednie dla belki dwu i trzyprzęsłowej.

Dla belki dwu-przęsłowej (rys. 201) przypuścimy, że $l_1 = l_2 = l$. Tu otrzymamy tylko jedno równanie momentu podporowego



$$\begin{aligned} 2M_1(l+l) &= \\ &= -\frac{1}{4}q(l^3+l^3), \text{ więc} \\ M_1 &= -\frac{1}{8}ql^2 \dots 460)
 \end{aligned}$$

W pierwszym przęśle jest $M' = 0$, $M'' = M_1 = -\frac{1}{8}ql^2$, więc według równania 452)

$$M = -\frac{1}{8}qlx + \frac{1}{2}qx(l-x) = \frac{1}{8}qx(3l-4x) \dots 461)$$

Najw. M jest dla x_1 , dla którego $\frac{dM}{dx} = 0$, więc $\frac{3}{8}ql - qx_1 = 0$, zatem $x_1 = \frac{3}{8}l = 0,375l$,

$$\text{a najw. } (+M) = \frac{1}{8}q \cdot \frac{3}{8}l(3l - \frac{3}{2}l) = \frac{9}{128}ql^2 = 0,07036ql^2 \dots 462)$$

$$M = 0 \text{ dla } 3l = 4x', \text{ więc } x' = \frac{3}{4}l = 0,75l.$$

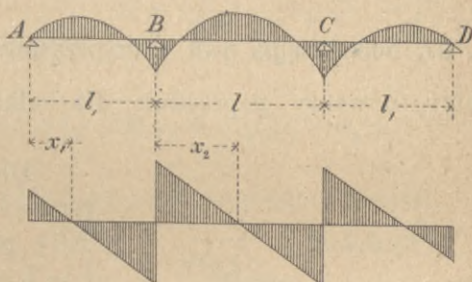
Według 457) będzie dla pierwszego przęśla

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{2}ql - \frac{1}{8}ql = +\frac{3}{8}ql \\ Q'' &= -\frac{1}{2}ql - \frac{1}{8}ql = -\frac{5}{8}ql \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 463)$$

$$\text{a } Q = \frac{3}{8}ql - qx = \frac{1}{8}q(3l - 8x) \dots \dots \dots 464)$$

Parabolą wyrażoną równaniem 461) i prostą, wyrażoną równaniem 463) wykreśliśmy na rysunku 201.

rys: 202



Dla belki trzyprzęsłowej (rys. 202) przypuszczamy, że przęsła skrajne są równe \$l_1\$, średnie zaś przęsło ma długość \$l\$.

Tu \$M_0 = M_4 = 0\$, \$M_1 = M_2\$, więc dwa pierwsze równania 456) dają jedno \$2M_1(l_1 + l) + M_1l = -\frac{q}{4}(l^3 + l_1^3)\$, a stąd

$$M_1 = M_2 = -\frac{q(l^3 + l_1^3)}{4(2l_1 + 3l)} \dots \dots \dots 465)$$

Momenty w pierwszym przęśle otrzymamy z 457), wstawiając \$M' = 0\$ i \$M'' = M_1\$,

$$M = M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2}qx(l_1 - x) \dots \dots \dots 466)$$

Największy moment będzie dla \$x_1\$, gdy \$\frac{dM}{dx} = 0\$, więc

$$\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2}ql_1 - qx_1 = 0, \text{ a stąd } x_1 = \frac{M_1}{ql_1} + \frac{l_1}{2} \dots \dots \dots 467)$$

W drugim przęśle będzie \$M' = M'' = M_1\$, więc

$$M = M_1 + \frac{1}{2}qx(l - x) \dots \dots \dots 468)$$

Największy moment będzie dla x_2 , gdy $\frac{dM}{dx}=0$, więc

$$\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2}ql + qx_2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}l, \text{ zatem najw. } M = M_1 + \frac{1}{8}ql^2 \dots \dots 469)$$

§. 88. Belka ciągła o równych przęsłach.

Dla obciążenia zupełnego jednostajnego upraszczają się bardzo wszystkie wzory, jeżeli wszystkie przęsła są równe. Nie będziemy tu już przeprowadzać zupełnie rachunku, podajemy tylko wyniki, zestawione w następnej tabliczce.

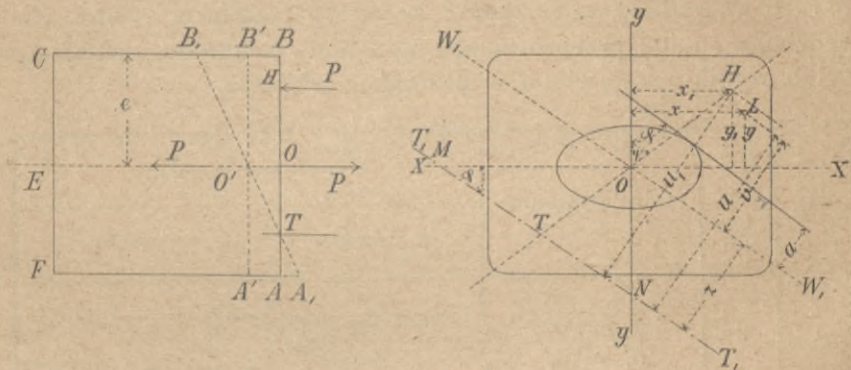
Liczba porządkowa	Ilość przęseł równych	Oddziaływania	Największe momenty	
			dla punktu	wynoszą
1	2	$O_0 = O_2 = \frac{3}{8}ql,$ $O_1 = \frac{10}{8}ql$	B (druga podpora) $x = \frac{2}{3}l$ (pierwsze przęsło)	$-\frac{1}{8}ql^2 = -0,125ql^2$ $+\frac{9}{128}ql^2 = +0,0703ql^2$
2	3	$O_0 = O_3 = 0,4ql,$ $O_1 = O_2 = 1,1ql$	B, C (średnie podpory) $x = 0,4l$ (pierwsze i trzecie przęsło)	$-0,1ql^2$ $+0,08ql^2$
3	4	$O_0 = O_4 = \frac{11}{28}ql =$ $= 0,3929ql$ $O_1 = O_2 = \frac{32}{28}ql =$ $= 1,1428ql,$ $O_3 = \frac{26}{28}ql =$ $= 0,9286ql$	B, D (druga i czwarta podpora) $x = 0,393$ (pierwsze i czwarte przęsło)	$-\frac{3}{28}ql^2 = -0,1071ql^2$ $+0,0771ql^2$
4	5	$O_0 = O_5 = \frac{15}{38}ql =$ $= 0,3948ql$ $O_1 = O_4 = \frac{43}{38}ql =$ $= 1,1315ql$ $O_2 = O_3 = \frac{37}{38}ql =$ $= 0,9737ql$	B, E (druga i piąta podpora) $x = 0,395l$ (pierwsze i piąte przęsło)	$-\frac{4}{38}ql^2 = -0,1053ql^2$ $+0,0798ql^2$

VI. Wytrzymałość złożona na zginanie i ciągnięcie lub ciśnienie.

§. 89. Bryła nateżeń i oś obojętna.

Jeżeli na przekrój belki działa siła doń prostopadła P w dowolnym punkcie przekroju H (rys. 203), to nie zmieniając równowagi możemy umieścić w środku ciężkości O dwie siły

rys: 203



równe P i równoległe do P , ale działające w kierunkach wprost przeciwnych. Mamy wtedy siłę P działającą w osi i moment $M_w = P \cdot HO$. Siła P w osi sprawia w całym przekroju ciągnięcie lub, jak tutaj, ciśnienie, wszystkie włókna skrócą się o OO' , przekrój więc AB zajmie położenie $A'B'$. Moment zaś M wywołuje nateżenia zginające, przekrój obróci się o pewien kąt około O' i zajmie położenie A_1B_1 . Dwa te działania dodają się algebraicznie, a więc także znoszą się po części. Z rysunku widzimy, że w T odkształcenie, a więc i nateżenie jest równe zero. Przez T będzie więc przechodzić oś obojętna (p. §. 36. str. 105) T_1T_1 , równoległa do W_1W_1 , t. j. do osi obojętnej dla samego zginania.

Wiemy, że nateżenia zginające są proporcjonalne do odstępów od osi obojętnej, a więc nateżenie ν w dowolnym punkcie L będzie $\nu = \alpha u$. Suma algebraiczna wszystkich nateżeń równa się sile P , więc

$$P = \iint \nu d^2A = \alpha \iint u d^2A \dots \dots \dots 470)$$

Natężenie w punkcie L możemy jeszcze inaczej wyrazić; natężenie to składa się z ciśnienia $v_1 = \frac{P}{A}$ i natężenia zginającego $v_2 = \frac{M_w v}{I_w}$, a więc

$$v = \frac{P}{A} + \frac{M_w v}{I_w} \dots \dots \dots 471)$$

Jeżeli w każdym punkcie przekroju wystawimy prostopadłą na przekrój, której długość i kierunek odpowiada wielkości i kierunkowi natężenia v , to prostopadłe te utworzą bryłę natężeń, której objętość według 470) równa się sile P .

Nazwijmy natężenie w środku ciężkości przekroju v_0 , to objętość bryły natężeń, która jest walcem ukośnie ściętym, równa się $P = A v_0 = \alpha z A$, więc

$$v_0 = \alpha z = \frac{P}{A} \dots \dots \dots 472)$$

Ponieważ P jest wypadkową wszystkich natężeń v , więc musi być także suma momentów natężeń względem dowolnej osi równa momentowi siły P , a więc $P u_1 = \iint u v d^2 A$, a stąd

$$u_1 = \frac{\iint u v d^2 A}{P} = \frac{\alpha}{P} \iint u^2 d^2 A = \frac{\alpha I_t}{P} \dots \dots \dots 473)$$

jeżeli I_t oznacza moment bezwładności ze względu na $T_1 T_1$.

Siła P zaczepia więc w środku ciężkości bryły natężeń, dlatego też punkt ten H nazywamy środkiem natężenia (ciśnienia lub ciągnięcia) (n. *Mittelpunkt der Spannung*).

Przyjąwszy osie główne elipsy bezwładności jako osie współrzędnych, możemy napisać (por. str. 119)

$$v = x \text{ wst } \varphi + y \text{ dost } \varphi, \text{ a więc}$$

$$v = \alpha (z + x \text{ wst } \varphi + y \text{ dost } \varphi).$$

Jeżeli utworzymy moment siły P ze względu na oś YY i XX , to będzie

$$P x_1 = \iint x v d^2 A \text{ i } P y_1 = \iint y v d^2 A, \text{ albo inaczej}$$

$$P x_1 = \iint x \alpha (z + x \text{ wst } \varphi + y \text{ dost } \varphi) d^2 A = \alpha z \iint x d^2 A + \\ + \alpha \text{ wst } \varphi \iint x^2 d^2 A + \alpha \text{ dost } \varphi \iint x y d^2 A.$$

Dla osi głównych, przechodzących przez środek ciężkości jest

$$\iint x d^2 A = 0 \text{ i } \iint xy d^2 A = 0 \text{ (§. 39), więc}$$

$$\left. \begin{array}{l} Px_1 = \alpha \text{ wst } \varphi I_1 \\ \text{i podobnie } Py_1 = \alpha \text{ dost } \varphi I \end{array} \right\} \dots \dots \dots 474)$$

Z wzoru tego otrzymamy

$$\text{wst } \varphi = \frac{Px_1}{\alpha I_1}, \text{ dost } \varphi = \frac{Py_1}{\alpha I}, \text{ więc}$$

$$v = \alpha \left(z + \frac{Px_1}{\alpha I_1} + \frac{Py_1}{\alpha I} \right) = \frac{P}{\Lambda} \left(1 + \frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{a^2} \right) \dots \dots 475)$$

Natężenie v wywołane jest siłą P działającą w osi, siłą podłużną (n. *Axialkraft*) i momentem $P.HO$. Wiemy z §. 64, że dla momentu HO , którego płaszczyzna różni się od płaszczyzny osi głównych, powstaje oś obojętna $W_1 W_1$, która jest osią sprzężoną osi HO , w której działają siły. Wskutek działania siły P oś obojętna przesuwa się równoległa o z , zatem promień OH , łączący środek ciężkości przekroju z środkiem ciśnienia, i równoległa do osi obojętnej $T_1 T_1$, poprowadzona przez środek ciężkości są osiami sprzężonymi elipsy środkowej bezwładności.

Jeżeli $\psi = 0$, to i $\varphi = 0$, więc gdy środek ciśnienia pada na oś główną, oś obojętna jest prostopadła do niej.

Odległość osi obojętnej od środka ciężkości przekroju O jest wedle 472)

$$z = \frac{P}{A\alpha}, \text{ a że wedle 474) } \alpha = \frac{Py_1}{I \text{ dost } \varphi}, \text{ więc}$$

$$z = \frac{PI}{APy_1} \text{ dost } \varphi = \frac{a^2}{y_1} \text{ dost } \varphi \dots \dots \dots 476)$$

W razie, gdy środek ciśnienia pada na oś główną, więc

$$\psi = \varphi = 0, \text{ z } = \frac{a^2}{y_1} \dots \dots \dots 477)$$

Odstęp u_1 da się obliczyć także na podstawie rów. 473) i 474). Możemy mianowicie napisać

$$u_1 = \frac{\alpha I_r}{P} = \frac{I_r}{Az} = \frac{I_w + Az^2}{Az} = \frac{Aa'^2 + Az^2}{Az} = \frac{a'^2}{z} + z.$$

Mamy więc

$$v_1 = u_1 - z = \frac{a'^2}{z},$$

jeżeli a' oznacza promień bezwładności dla osi $W_1 W_1$, a także $OH \cdot OT = OU^2$ 478)

A zatem OU , odstęp środka O od rzutu punktu styczności elipsy środkowej na OH , jest średnio geometrycznie proporcjonalny między OH i OT . Jeżeli $\psi = 0$, to OH jest połową średnicy elipsy bezwładności.

Na tem polega łatwa konstrukcja w celu wyznaczenia położenia osi obojętnej.

Długością OU zakreślamy koło (rys. 204), a z punktu H kreślimy styczną do koła HL . Wtedy

$$ON = \frac{OL^2}{OH} = \frac{OU^2}{OH} = OT.$$

Jeżeli więc zrobimy $OT = ON$,

to przez T przechodzi oś obojętna.

Jeżeli $OH < OU$, to postępujemy inaczej (rys. 205). W O kreślimy prostopadłą do OH i zataczamy z H łuk promieniem $= OU$, a więc $MH = OU$. Dalej robimy $MN \perp HM$, to

$$OH = \frac{MH^2}{HN} = \frac{OU^2}{HN}.$$

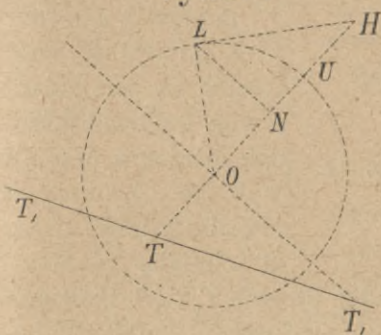
Zróbmy $OT = NH$, to $OH = \frac{OU^2}{OT}$, a więc T jest punktem osi obojętnej.

Jeżeli przeciwnie znamy położenie osi obojętnej, to znajdziemy środek ciśnienia w następujący sposób (rys. 206). Na długości OT , wykreślonej w kierunku osi elipsy sprzężonej do osi obojętnej, zakreślamy półkoło, z punktu O kreślimy łuk promieniem $OM = OU$. Z M spuszcza prostopadłą na OT , tedy

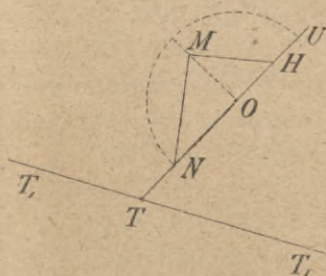
$ON : OM = OM : OT$, więc

$$ON = \frac{OM^2}{OT} = \frac{OU^2}{OT} = OH.$$

rys:204

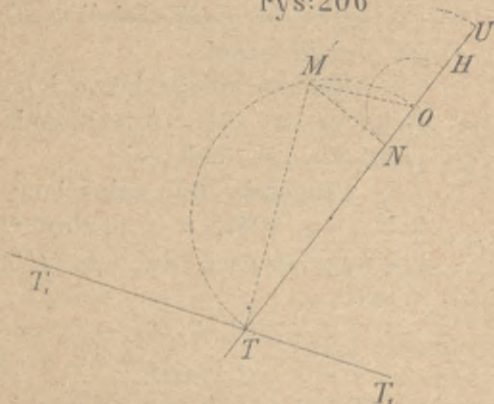


rys:205



Robimy więc $OH=ON$, a H jest środkiem ciśnienia. Z równ. 478) widzimy, że z (rys. 203) jest tem większe, im mniejsze jest v_1 i odwrotnie. Jeżeli oś obojętna porusza się równolegle,

rys:206

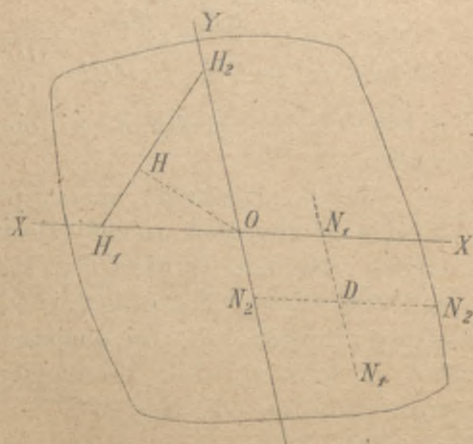


to środek ciśnienia H porusza się w osi sprzężonej do kierunku osi obojętnej i odwrotnie.

Ponieważ $v_1 z = a'^2$, więc gdybyśmy wartości v_1 i z pomieniali, a więc gdybyśmy środek ciśnienia przyjęli w T , to oś obojętna przechodziłaby przez H i byłaby równole-

głą do $T_1 T_1$. Widzimy więc, że każdej prostej $T_1 T_1$, odpowiada pewien punkt H i na odwrót. Dlatego nazywamy punkt H biegunem (n. *Pol*, an. *pole*), równoległą do $T_1 T_1$ po drugiej stronie O w tej samej odległości leżącą, nazywamy biegunową (n. *Polare*, an. *polar*), a prostą $T_1 T_1$ przeciwbiegunową (n. *Antipolare*, an. *antipolar*) i na odwrót H nazywamy przeciwbiegunem (n.

rys:207



Antipol, an. *antipole*) prostej $T_1 T_1$.

Jeżeli OX i OY są osie sprzężone środkowej elipsy bezwładności (rys. 207), a H jest środek ciśnienia, w którym działa siła P , to da ona się rozłożyć na dwie siły P_1 i P_2 , działające w punktach osi H_1 i H_2 , przyczem przypuszczamy, że $H_1 H_2$,

jest równoległą do osi sprzężonej do osi OH . Dla siły P_1 w H_1 otrzymamy oś obojętną $N_1 N_1$, dla siły P_1 w H_2 otrzymamy oś

obojętną N_2N_2 . Gdy obie siły działają w punkcie D , będzie natężenie równe zeru, więc przez D przechodzi oś obojętna.

Gdy siła P poruszać się będzie po H_1H_2 , to oś obojętna będzie miała różne położenia, ale zawsze przechodzić będzie przez D , więc gdy H porusza się po prostej, oś obojętna obraca się około punktu D .

Na mocy poprzedniego stwierdzamy dalej, że gdy w D jest środek ciśnienia, to oś obojętna przechodzi przez H i ma kierunek H_1H_2 . A więc ogólnie napisać możemy: Jeżeli oś obojętna obraca się około pewnego punktu, środek ciśnienia porusza się po linii prostej, która byłaby linią obojętną, gdyby środek ciśnienia był w D .

§. 90. Jądro przekroju.

Jeżeli oś obojętna porusza się stycznie do obwodu przekroju tak, że go nigdzie nie przecina, to środek ciśnienia opisuje linią zamkniętą, ojędrną czyli ordzenną, będącą obwodem powierzchni, którą nazywamy jądrem lub rdzeniem (n. *Kern*, fr. *noyau central*, an. *core heart*, cz. *jądro průřezové*).

Jeżeli środek natężenia leży w jądrze, to oś obojętna leży po za przekrojem, więc w całym przekroju panuje to samo natężenie, ciśnienie lub ciągnięcie. Gdy środek ciśnienia wpada na linię jędrną, linia obojętna jest styczną do przekroju, w całym przekroju panuje to samo natężenie, ciśnienie lub ciągnięcie, a w punkcie styczności natężenie to jest równe zeru. Gdy zaś środek ciśnienia wyjdzie z jądra, oś obojętna przecina przekrój, po jednej stronie osi obojętnej jest więc ciśnienie, po drugiej ciągnięcie.

W celu wyznaczenia ojędrnej wyznaczamy pojedyncze jej punkty, punkty jędrne lub rdzenne (n. *Kernpunkt*, cz. *krajny bod jadrovy*) w sposób w poprzednim paragrafie wskazany, wykreślić lub liczebnie, na podstawie równ. 478). Przytem korzystać będziemy z prawideł tamże wyłożonych, z których wynika, że linii prostej w obwodzie przekroju odpowiada jeden punkt, a każdemu wierzchołkowi, około którego obraca się linia obojętna, linia prosta w ojędrnej. Można udowodnić*), że łukowi koła

*) Por. A. Meyerhofs rozprawka w Zeitschr. d. Ver. deut. Ing. (1898 str. 212).

w obwodzie odpowiada linia jędrna paraboliczna, linii obwodu zaś eliptycznej ojędrna hyperboliczna.

Odstęp punktu jędrnego od środka przekroju nazywamy promieniem jędrnym (n. *Kernweite*). Jeżeli oznaczymy go przez i , to wedle 478)

$$i = \frac{a^2}{e} = \frac{Aa^2}{Ae} = \frac{W}{A} \dots \dots \dots 479)$$

Przykłady. 1. Prostokąt (rys. 208). Tu najłatwiej wyznaczymy ojędrną liczebnie. Gdy oś obojętna będzie DC , to musimy w równ. 479)

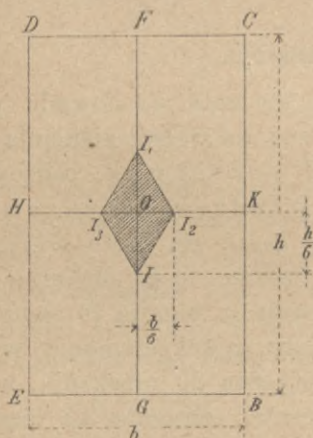
podstawić $e = OF = \frac{h}{2}$, $a^2 = \frac{I}{A} =$

$$= \frac{I_2 bh^3}{bh} = \frac{h^2}{12}, \text{ więc } OI = i_1 =$$

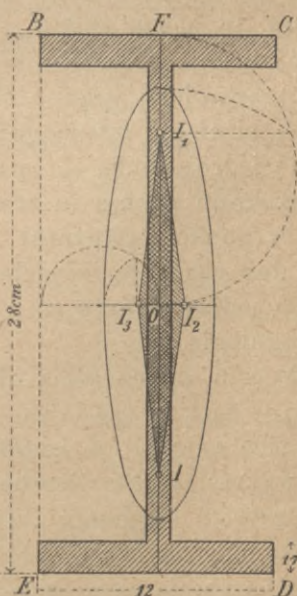
$$= \frac{h^2}{12} : \frac{h}{2} = \frac{h}{6}. \text{ Z powodu symetrii jest}$$

$$OI_1 = OI.$$

rys:208



rys:209



Jeżeli oś obojętna ma położenie

$$DE, \text{ to } e = OH = \frac{b}{2}, a = \frac{I_1}{A} = \frac{b^2}{12},$$

$$\text{więc } OI_2 = OI_3 = i_3 = \frac{b}{6}.$$

Ponieważ dalej wierzchołkom B, C, D, E odpowiadają proste, więc ojędrną otrzymamy, łącząc I_1, I_2, I i I_3 prostymi.

2. Przekrój I (rys. 209). Przyjęliśmy tu ten sam przekrój, co na rys. 99. (str. 124) i wykreśliśmy elipsę środkową bezwładności. Gdy teraz oś obojętna ma położenie BC , otrzymamy za pomocą konstrukcyi, naznaczonej na rysunku, a opisanej w poprzednim paragrafie, punkt jędrny I , przyczem $OI = OI_1$. Gdy oś obojętna jest BE ,

żony jest FG , a odnośny punkt jędrny 2. Dla położenia KL otrzymamy po-
pobnie punkt 3, dla EA punkt 4, nareszcie dla AB punkt 5. Gdy punkty
te połączymy prostymi, otrzymamy ojędrną. Zakrzywienia DL i EK
uwzględnimy, kresząc dla pośredniego położenia stycznej oś sprzężoną WS .
Po przeprowadzeniu konstrukcyi znajdziemy punkt z' i zamiast prostej
 23 , otrzymamy łuk paraboli 23 , a analogicznie łuk paraboli 34 .

4. Koło. Tu $a = \frac{d}{4}$, (rys.

211), $e = \frac{d}{2}$, więc

$i = \frac{a^2}{e} = \frac{d^2}{16} : \frac{d}{2} = \frac{d}{8}$. Dla koła
więc elipsa bezwładności jest
kołem o średnicy o połowę mniej-
szej, a jądro przekroju także
kołem o średnicy $\frac{d}{4}$.

5. Koło wydrążone,
pierścien (rys. 212). Tu

$$a = \frac{1}{4} \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \quad c = \frac{d_1}{2}.$$

Zatem

$$i' = \frac{d_1^2 + d_2^2}{16} : \frac{d_1}{2} = \frac{1}{8} \left(d_1 + \frac{d_2^2}{d_1} \right)$$

Dla $d_2 = 0$ otrzymujemy $i' = \frac{d_1}{8}$,

jak pierwej.

Jeżeli porównamy jądra
koła pełnego i pierścienia o tej
samej powierzchni, to o-
trzymamy

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2), \quad d^2 = d_1^2 - d_2^2.$$

Nazwijmy

$$d_1 : d = x, \text{ to } i' = \frac{1}{8} \left(d_1 + \frac{d_1^2 - d^2}{d_1} \right),$$

zatem

$$\frac{i'}{i} = \left(d_1 + \frac{d_1^2 - d^2}{d_1} \right) : d =$$

$$\left(2d_1 - \frac{d^2}{d_1} \right) : d = 2x - \frac{1}{x} \quad . \quad 480)$$

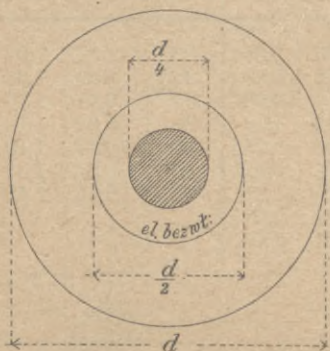
Stąd otrzymamy dla

$x = 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6$

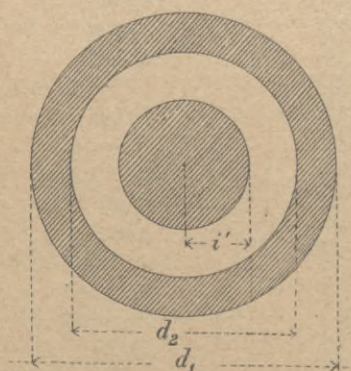
$\frac{i'}{i} = 2,33 \quad 3,50 \quad 4,80 \quad 5,67 \quad 6,71 \quad 7,75 \quad 8,78 \quad 9,80 \quad 10,82 \quad 11,83$

Widzimy więc, że promień jędrny pierścienia jest znacznie większy,
niż koła o tym samym przekroju.

rys:211



rys:212



Stąd otrzymamy dla

$x = 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6$

$\frac{i'}{i} = 2,33 \quad 3,50 \quad 4,80 \quad 5,67 \quad 6,71 \quad 7,75 \quad 8,78 \quad 9,80 \quad 10,82 \quad 11,83$

Widzimy więc, że promień jędrny pierścienia jest znacznie większy,
niż koła o tym samym przekroju.

§. 91. Największe natężenie.

Natężenia w dowolnym punkcie L (rys. 203) obliczyć możemy według wzoru 475)

$$v = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{a^2} \right).$$

Jeżeli siła P działa w osi głównej np. w osi OY , to $x_1 = 0$, więc

$$v = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{yy_1}{a^2} \right) = \frac{P}{A} + \frac{Py_1y}{Aa^2} = \frac{P}{A} + \frac{My}{I} \dots 481)$$

bo $M = Py_1$, jak równ. 471).

Największe v będzie dla *najw.* $y = e$, a ponieważ powinno się równać τ , więc

$$\tau = \frac{P}{A} + \frac{Me}{I} \dots \dots \dots 482)$$

Jeżeli $M_1 = Px_1$, to możemy równ. 475) także inaczej napisać:

$$v = \frac{P}{A} + \frac{M_1x}{I_1} + \frac{My}{I} \dots \dots \dots 483)$$

Widzimy więc, że moment $M_w = P \overline{HO}$ możemy rozłożyć na momenty $M = Py_1$ i $M_1 = Px_1$, działające ze względu na osie główne i natężenie, wywołane przez oba momenty i siłę P , dodać.

§. 92. Wyznaczenie największych natężeń za pomocą jądra.

Niechaj w H (rys. 213) działa siła P prostopadle do przekroju, to wedle poprzedniego oś obojętna T_1T_1 będzie równoległą do osi sprzężonej do OH W_1W_1 .

Moment $M = P \cdot HO$ da się rozłożyć na prostopadły i równoległy do WW_1 . Tylko składowy moment prostopadły do WW wywołuje natężenia i obrót około T_1T_1 . Moment ten nazwijmy

$$M' = P \cdot HE = P \cdot OH \text{ wst } \alpha = M \text{ wst } \alpha.$$

A więc natężenie największe w I wedle 471)

$$\text{najw. } v = \frac{P}{A} + \frac{M \text{ wst } \alpha \cdot IF}{I_w}$$

$$\begin{aligned} I_w &= A \cdot (OS \text{ wst } \alpha)^2, \text{ więc } v = \frac{P}{A} + \frac{M \cdot \text{wst } \alpha \cdot OI_1 \text{ wst } \alpha}{A \cdot OS^2 \text{ wst}^2 \alpha} = \\ &= \frac{P}{A} + \frac{M \cdot OI_1}{A \cdot OS^2}. \end{aligned}$$

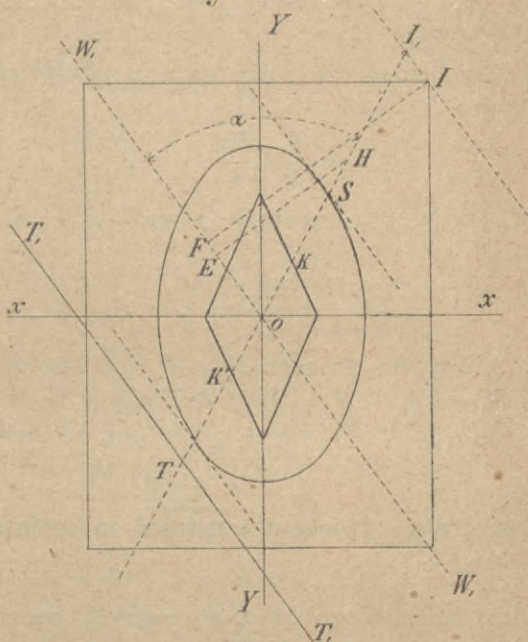
Wedle 479) mamy dalej $OK' \cdot OI_1 = OS^2$, wstawmy to w poprzednie równanie, a otrzymamy

$$\text{najw. } \nu = \frac{P}{A} + \frac{M \cdot OI_1}{A \cdot OK' \cdot OI_1} = \frac{P}{A} + \frac{M}{A \cdot OK'} \quad . \quad . \quad 484)$$

Dalej mamy

$$\text{najw. } \nu = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot HO}{A \cdot OK'} = \frac{P}{A} \frac{OK' + HO}{OK'} = \frac{P}{A} \cdot \frac{K'H}{OK'} \quad . \quad 485)$$

rys:213.



A więc największe natężenie w warstwie skrajnej równa się ilorazowi $\frac{P}{A}$ (natężenie średniemu) więcej momentowi M podzielonemu przez iloczyn powierzchni A przez promień jędrny OK' , mierzony po przeciwnej stronie środka ciężkości.

W razie, jeżeli P i M pozostają te same, a zmienia się tylko położenie linii HO , natężenie największe jest tem większe, im mniejszy jest promień jędrny OK' .

Jeżeli siła P jest równa zero, a w przekroju działa tylko moment M w płaszczyźnie OH , to z rów. 484) otrzymamy

$$\text{najw. } \nu = \frac{M}{A \cdot OK'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 486)$$

Rozwiązanie zagadnienia wyznaczenia nateżeń w belkach, gdy siły nie działają w płaszczyźnie osi głównych, omawianego w §. 64., jest przy użyciu jądra przekroju daleko prostszem.

Przykłady. 1. Kształtówka l. 28a użyta jest jako platew nachylona do pionu pod kątem α , przyczem $\sin \alpha = 0,6$. Długość platwi niech będzie 5 m, ciężar jednostajnie rozdzielony na całą długość 1,55 t, więc moment największy $M = 116250 \text{ kgcm}$ (por. str. 203).

Na rysunku 214. wykreśliłmy jądro przekroju. Mamy

$$A = 78,85, \quad OK' = 2,4 \text{ cm},$$

więc wedle 486) w C

$$\text{najw. } \nu = \frac{116250}{78,85 \cdot 2,4} = 614,3 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Zróbmy ten sam przykład, co na str. 202. Obliczyć należy nateżenie największe platwi (rys. 215), przyczem $M = 73500 \text{ kgcm}$. Wedle rysunku

$$A = 14,28 = 392 \text{ cm}^2. \quad OK' = 2,5 \text{ cm},$$

więc

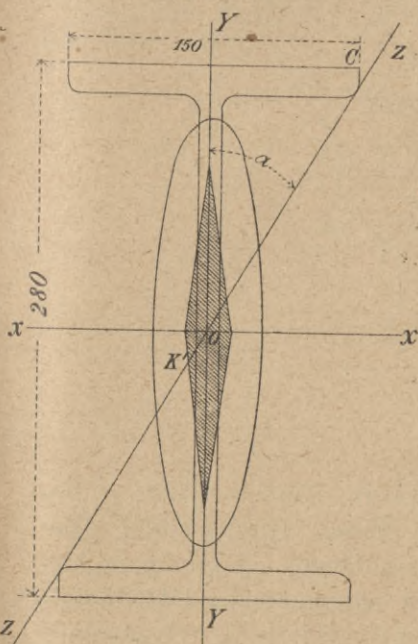
$$\text{najw. } \nu = \frac{73500}{392 \cdot 2,5} = 75 \text{ kg/cm}^2.$$

Na stronie 202 otrzymaliśmy

$$\nu = 77,47 \text{ kg/cm}^2,$$

a więc wynik nie o wiele się różniący. Naturalną jest rzeczą, że wynik będzie tem dokładniejszy, im dokładniej odczytamy OK' . Należałoby więc jądro konstruować w naturalnej wielkości.

rys: 214



VII. Wytrzymałość na wyboczenie.

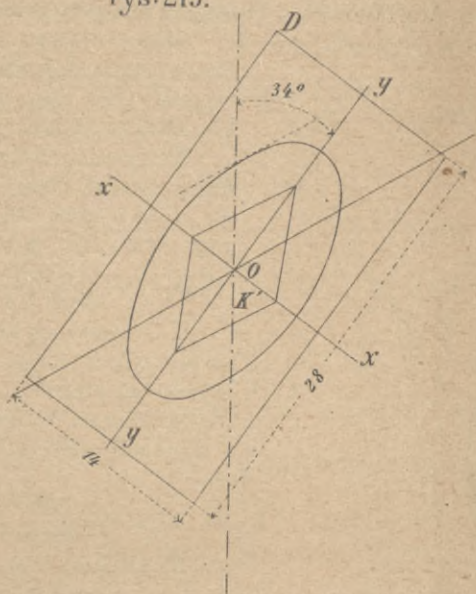
§. 93. Wzory zasadnicze Eulera i Rankina.

Jeżeli na pręt prosty BD działa siła P (rys. 216) w osi, to według równania 431) $P = A\tau$, 487) gdy A oznacza przekrój, a τ nateżenie dopuszczalne na ciśnienie.

Powyższe równanie ważne jest jednak tylko do pewnej granicy. Jeżeli wysokość pręta jest większą, niż pięciokrotny najmniejszy jego wymiar, wtedy jak to doświadczenie okazuje, pręt, który wtedy nazywamy słupem (n. Säule, a. column), wyboczy się pod działaniem siły P i przybiera kształt BED ,

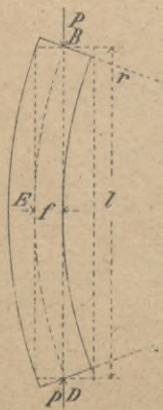
a zniszczenie słupa nastąpi nie przez zgniecenie, lecz przez złamanie. Wytrzymałość słupa w tym wypadku nazywamy wy-

rys: 215.



trzymałością na wyboczenie (n. *Knickfestigkeit*, fr. *resistance au flambage*, a. *resistance of flexure*) Gdyby siła P działała zupełnie środkowo, t. j. gdyby jej kierunek wpadał z matematyczną dokładnością

rys: 216.



w oś i gdyby materiał słupa był zupełnie jednorodny, nie byłoby żadnej przyczyny wygięcia osi raczej w kierunku BED , niż w innym. Ponieważ jednak w praktyce nie możemy przypuścić zupełnie jednorodnego i równo gęstego materiału, i że siła zaczepia zupełnie dokładnie w środku ciężkości przekroju, zatem oprócz ciśnienia powstaje w słupie także pewien moment, który sprawia, że słup się wybacza.

Przypuśćmy najprzód, że siła P działa w odstępnie g (rys. 217) od osi, przyczem to g jest tak małe, że możemy je w stosunku do y opuścić, to słup BD , którego

oba końce mogą się obracać około stałych punktów B i D , wyboczy się. Nazwijmy r promień krzywizny linii ugięcia w punkcie C , to według 379) otrzymamy

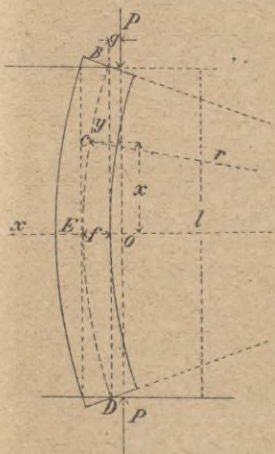
$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{\epsilon I}$$

Moment sił zewnętrznych w punkcie C jest $M = Py$, widzimy więc, że tu linia momentów jest identyczną z linią ugięcia. Dalej mamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{\epsilon I}. \text{ Nazwijmy } v = \frac{dy}{dx}, \text{ to } \frac{dv}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = -\frac{Py}{\epsilon I}, \text{ a więc } \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{v dv}{dy} = -\frac{P}{\epsilon I} y.$$

rys: 217.



$$\int v dv = -\frac{P}{\epsilon I} \int y dy, \text{ a stąd}$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{P}{\epsilon I} \frac{y^2}{2} + C, \text{ więc}$$

$$v = \frac{dy}{dx} \sqrt{2C - \frac{Py^2}{\epsilon I}},$$

Rozdzielwszy niewiadome, otrzymamy

$$\frac{dy}{\sqrt{2C - \frac{Py^2}{\epsilon I}}} = dx, \text{ a więc}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2C\epsilon I}{P} - y^2}} = \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} \int dx.$$

Wykonawszy całkowanie, otrzymamy

$$\text{łuk wst} \left(y \sqrt{\frac{P}{2C\epsilon I}} \right) = x \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} + C_1, \text{ więc}$$

$$y \sqrt{\frac{P}{2C\epsilon I}} = \text{wst} \left(x \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} + C_1 \right), \text{ czyli}$$

$$y = \sqrt{\frac{2C\epsilon I}{P}} \text{wst} \left(x \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} + C_1 \right) \dots \dots \dots 488)$$

Jestto równanie sinusoidy.

Ponieważ z powodu symetrii łuk BE jest przystający do łuku ED , więc musi być

wst $\left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right) = \text{wst} \left(C_1 - x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right)$, a więc

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \text{ lub } \frac{3\pi}{2} \text{ i t. d., a zatem}$$

wst $\left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right) = \text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right)$, wreszcie

$$y = \sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P}} \text{ dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right) \dots \dots \dots 489)$$

Dla $x = \frac{l}{2}$ będzie

$$g = \sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P}} \text{ dost} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right),$$

a więc ze względu na 488)

$$y = g \frac{\text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right)}{\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right)} \dots \dots \dots 490)$$

Dla $x=0$ otrzymamy we środku pręta

$$f = \frac{g}{\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right)}, \text{ a zatem}$$

$$y = f \text{ dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right) \dots \dots \dots 491)$$

Jeżeli teraz przypuścimy, że siła działa w osi, więc $g=0$, to według 490) byłoby $y=0$, gdyby $\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right)$ nie było także $=0$. Wyboczenie może więc wtedy tylko nastąpić, gdy $\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}\right) = 0$, a więc, gdy $\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} = \frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3\pi}{2}$ i t. d., ogólnie $\frac{m\pi}{2}$, gdy m jest nieparzystą liczbą całą.

Stąd wynika

$$\frac{P}{\varepsilon I} = \frac{m^2 \pi^2}{l^2}, \text{ więc}$$

$$P = \frac{\varepsilon I m^2 \pi^2}{l^2}.$$

Dla $m=1$ otrzymamy najmniejszą siłę P , zdolną sprawić wyboczenie, mianowicie

$$P = \frac{\varepsilon \pi^2 I}{I^2} \dots \dots \dots 492)$$

Dla $g=0$ otrzymamy $f=0$, więc nieoznaczone, pręt zatem będzie w równowadze, jakakolwiek będzie strzałka f^*). Z poprzedniego zdawałoby się wprawdzie, że równowaga będzie tylko dla pewnych wartości P , zmieniających się w sposób nieciągły, jednak to nie zgadza się z rzeczywistością. Powodem tego jest, że przy wywodzie wzoru 492) przyjęliśmy dla promienia wartość przybliżoną zamiast dokładnej

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ **)}$$

Ponieważ nie znamy strzałki f , więc i największego momentu $M=Pf$, zatem, aby moment ten nie wywołał za wielkich natężeń, nie możemy wcale dopuścić wyboczenia; a więc musi być

$$P < \frac{\varepsilon I \pi^2}{l^2},$$

a przyjąwszy n^{ta} pewność

$$P < \frac{\pi^2 \varepsilon I}{n l^2} \dots \dots \dots , 493)$$

Wzór ten ustawił pierwszy Euler, dlatego nazywamy go wzorem Eulera.

W pewnych wypadkach możemy zadość uczynić obu równaniom 487) i 493). Z równania 487) obliczymy przekrój A , a potem staramy się taki nadać kształt przekrojowi, aby I było wielkie i aby zadość uczynić równaniu 493). Z równań 487) i 493) otrzymamy

$$A \tau < \frac{\varepsilon I \pi^2}{n l^2}, \text{ czyli}$$

$$\frac{A l^2}{I} = \left(\frac{l}{a} \right)^2 < \frac{\varepsilon \pi^2}{n \tau} = \frac{\varepsilon \pi^2}{\mu} = C \dots \dots \dots 494)$$

*) Według dokładniejszej teorii Obrębowicza każdej sile $P_1 > P$ odpowiada inny stan równowagi i inna strzałka f . (Obrębowicz: O wytrzymałości prętów na wyboczenie 1885). Stwierdzają to i doświadczenia Bauschingera (p. Mittheil. 1887).

**) Grashof: Festigkeitslehre 1866 str. 112.

$C = \frac{\varepsilon\pi^2}{\mu}$ jestto, jak widzimy, stała ilość dla danego materiału.

Wstawivszy wartości, otrzymamy

dla żelaza spawalnego:

$$\varepsilon = 2\,000\,000 \frac{kg}{cm^2}, \quad \mu = 3\,200 \frac{kg}{cm^2}, \quad C = 6\,179,$$

dla żelaza lanego:

$$\varepsilon = 1\,000\,000 \frac{kg}{cm^2}, \quad \mu = 7\,500 \frac{kg}{cm^2}, \quad C = 1\,316,$$

dla stali miękkiej:

$$\varepsilon = 2\,200\,000 \frac{kg}{cm^2}, \quad \mu = 5\,400 \frac{kg}{cm^2}, \quad C = 4\,021.$$

Słup dany nie powinien się wyboczyć w żadnym kierunku; jeżeli więc długości nie podparte i momenty bezwładności w innych kierunkach są inne, to musimy i dla tych innych kierunków tak samo liczyć. Przytem chodzi nam, jak zawsze, tak i tu o to, aby pewność we wszystkich kierunkach była równa. Jeżeli długość niepodpartą w drugim kierunku nazwiemy l' , a odnośny moment bezwładności I' , to musi być również $\frac{Al'^2}{I'} = C$, co porównawszy z równaniem 494), otrzymamy

$$\frac{I}{I'} = \frac{l^2}{l'^2} \dots \dots \dots 495)$$

Gdy przekrój otrzymany z równań 487) i 495) jest w praktyce za mały do wykonania, lub też, gdy dla powierzchni przekroju, z równania 487) wyznaczonej, nie możemy znaleźć tak wielkiego momentu bezwładności, aby zadość uczynić równaniu 494), tedy musimy przyjąć zamiast A powierzchnię przekroju A_2 , większą od A . Jeżeli uzyskany moment bezwładności jest teraz I_2 , to mamy zamiast równania 494) teraz $\frac{Al^2}{I_2} \leq C$.

Zamiast tego możemy napisać $\frac{A_2 l^2}{I_2} \frac{A}{A_2} \leq C$, albo $\frac{A_2 l_2^2}{I_2} \leq C$, jeżeli $l_2^2 = \frac{l^2 A}{A_2}$, a więc

$$l_2 = l \sqrt{\frac{A}{A_2}} \dots \dots \dots 496)$$

Wzory powyższe polegają na przypuszczeniu, że siła P działa zupełnie środkowo, co w praktyce rzadko tylko możemy urzeczywistnić. Zresztą wzory te ważne są tylko do granicy sprężystości. Po za nią ε nie jest ilością stałą, lecz jest funkcją nateżenia. Tymczasem z wzoru Eulera nie możemy wcale nateżenia wyznaczyć i to jest dalszą jego niedogodnością.

Nazwijmy v nateżenie pręta wyboczonego (rys. 216) w punkcie E , gdzie największe ugięcie f . Wyrazić je możemy według równ. 482)

$$v = \frac{P}{A} + \frac{P/e}{I} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{ef}{a^2} \right),$$

gdzie e oznacza oddalenie skrajnej warstwy przekroju od osi a $I = Aa^2$.

Jeżeli w przybliżeniu przypuścimy, że ugięta oś BED jest łukiem kołowym, to $f = \frac{l^2}{8r}$.

Dalej mamy wedle 147) i 149) $\tau I = M\varepsilon$, i $\varepsilon I = Mr$, a stąd

$$r = \varepsilon \frac{I}{M} = \varepsilon \frac{e}{\tau}, \text{ więc } f = \frac{l^2 \tau}{8 \varepsilon e}, \text{ zatem}$$

$$v = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{l^2 \tau}{8 \varepsilon e a^2} \right) = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{\tau}{8 \varepsilon} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \right).$$

Jeżeli nazwiemy teraz $\alpha = \frac{\tau}{8 \varepsilon}$, to

$$v = \frac{P}{A} \left(1 + \alpha \frac{l^2}{a^2} \right),$$

jeżeli zaś zamiast v wstawimy τ , otrzymamy

$$\tau = \frac{P}{A} \left(1 + \alpha \frac{l^2}{a^2} \right) \dots \dots \dots 497)$$

a stąd

$$A = \frac{P}{\tau} \left(1 + \alpha \frac{l^2}{a^2} \right) = \frac{P}{\tau} \left(1 + \alpha \frac{Al^2}{I} \right) = \frac{P I}{\tau} \dots \dots \dots 498)$$

Wzór ten ustawił najprzód Rankine na podstawie doświadczeń Hodgkisona. Według Rankina współczynnik wyboczenia (n. *Knickungskoefficient*) α jest dla żelaza kutego dla obu końców płaskich $\alpha = \frac{1}{36000} = 0,000028$, dla jednego końca płaskiego a drugiego zaokrąglonego $\alpha = \frac{1}{18000} = 0,000055$, dla

obu końców zaokrąglonych $\alpha=0,00011$, Gerber przyjmuje dla końców nitowanych $\alpha=0,0001$. Możemy więc przyjąć w przecięciu współczynnik wybożenia dla żelaza spawalnego i zlewnego

$$\alpha=0,00009 \quad \dots \dots \dots 499)$$

Dla żelaza lanego przyjąć możemy według doświadczeń Bauschingera współczynnik wybożenia we wzorze Rankina

$$\alpha=0,00022, \quad \dots \dots \dots 500)$$

jeżeli leizna jest jednostajna, a dziura w słupach o przekroju rurowych jest zupełnie w środku. Dla większych słupów lanych leżących, w których zatem leizna nie jest równo gęstą, możemy przyjąć

$$\alpha=0,00063. \quad \dots \dots \dots 501)$$

Dla drzewa jest współczynnik wybożenia

$$\alpha=0,00015 \quad \dots \dots \dots 502)$$

Dla przekroju prostokątnego mamy, gdy $h < b$, $A = hb$,

$$J = \frac{1}{12}bh^3, \quad \text{więc} \quad \frac{I}{A} = \frac{h^2}{12} = a^2,$$

co wstawivszy w równanie 498), otrzymamy

$$A = \frac{P}{\tau} \left(1 + 0,00015 \frac{l^2}{a^2} \right) = \frac{P}{\tau} \left(1 + 0,0018 \frac{l^2}{h^2} \right) \quad \dots \quad 503)$$

Dla kwadratu $b = h$, więc $A = b^2$, $a^2 = \frac{b^2}{12}$, a zatem

$$A = h^2 = \frac{P}{\tau} \left(1 + 0,0018 \frac{l^2}{b^2} \right), \quad \text{a stąd}$$

$$b^2 = A = \frac{P}{2\tau} + \sqrt{\frac{P^2}{4\tau^2} + 0,0018 \frac{l^2 P}{\tau}} \quad \dots \dots \quad 504)$$

Gdybyśmy liczyli tylko na czyste ciśnienie, to otrzymalibyśmy

$$A_0 = \frac{P}{\tau} \quad \dots \dots \dots 505)$$

Wstawivszy to w równ. 498), otrzymamy wzór Rankina

$$A = A_0 \left(1 + \alpha \left(\frac{l}{a} \right)^2 \right) = A_0 \zeta \quad \dots \dots \dots 506)$$

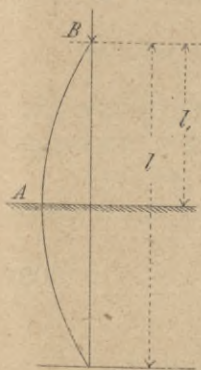
Z wzoru tego widzimy, że ponieważ ζ jest zawsze większe, niż jedność, więc $A > A_0$. Współczynnik ζ nazywamy więc współczynnikiem zwiększającym.

Widzimy więc, że gdy licząc wedle wzoru Eulera może być $A = A_0$, jeżeli tylko zadość uczynimy rów. 493), tu musi być zawsze $A > A_0$.

§. 94. Wyznaczenie długości wolnej.

Poprzednie wzory są ważne tylko wtedy, gdy oba końce słupa są wolne, to jest mogą się obracać około środków ciężkości przekrojów końcowych. Jeżeli jeden lub oba końce są przytrzymane lub utwierdzone, wtedy wzory się zmieniają. Możemy jednak poprzednich wzorów z małą odmianą i tutaj użyć, jak to zaraz wyłożymy.

rys:218.



rys:219.



1) Jeden koniec utwierdzony, drugi wolny. Tu słup AB (rys. 218) wygina się tak, jak połowa BE (rys. 215) słupa w poprzednim wypadku, więc możemy zatrzymać te same wzory, rów. 494) lub 498), wstawivszy tylko w nie $l=2l_1$, pierwsza strona równania 494) będzie więc cztery razy większą, niż w przypadku, opisanym w poprzednim paragrafie, a więc wytrzymałość słupa o tym samym przekroju jest cztery razy mniejszą.

2) Jeden koniec utwierdzony drugi przytrzymany. Przekrój B (rys. 219) jest przytrzymany, jeżeli może się wprawdzie obracać około swego środka ciężkości, lecz punkt ten zostać musi na prostej DB .

Ponieważ belka jest w B przytrzymana, więc powstaje tu oddziaływanie poziome N , a więc moment w punkcie C jest $M=P-N(l_1-x)$. Według równ. 379) będzie więc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v_1 = -\frac{M}{\epsilon I} = -\frac{N}{\epsilon I}(l_1-x) - \frac{P}{\epsilon I}y.$$

Różniczkujemy to równanie, a otrzymamy

$$\frac{dv_1}{dx} = -\frac{N}{\epsilon I} - \frac{P}{\epsilon I} \frac{dy}{dx},$$

$$\text{a } \frac{d^2v_1}{dx^2} = -\frac{P}{\epsilon I} \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{\epsilon I} v_1. \quad (507)$$

Równanie to jest analogiczne do równania

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{\epsilon I}y,$$

któreśmy mieli w poprzednim paragrafie, otrzymamy więc podobnie, jak tam (równ. 488)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P}} \operatorname{wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right), \text{ albo}$$

$$\frac{N}{\varepsilon I} (l_1 - x) - \frac{P}{\varepsilon I} y = \sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P}} \operatorname{wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right), \text{ a stąd}$$

$$y = \frac{\varepsilon I}{P} \left[\frac{N}{\varepsilon I} (l_1 - x) - \sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P}} \operatorname{wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right) \right]. \quad 508)$$

Dalej mamy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{N}{P} - \frac{\varepsilon I \sqrt{2C}}{P} \operatorname{dost} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right).$$

Dla $x=0$ jest $\frac{dy}{dx}=0$, więc

$$N = -\varepsilon I \sqrt{2C} \operatorname{dost} C_1,$$

dla $x=0$ jest $y=0$, więc

$$\frac{N l_1}{\varepsilon I} = \sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P}} \operatorname{wst} C_1, \text{ a zatem}$$

$$\operatorname{st} C_1 = -l_1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \dots \dots \dots 509)$$

Dla $x=l_1$ jest $y=0$, więc

$$\sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P}} \operatorname{wst} \left(C_1 + l_1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right) = 0$$

$C \geq 0$, gdyż $N > 0$, a zatem

$$\operatorname{wst} \left(C_1 + l_1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right) = 0, \text{ więc}$$

$$C_1 + l_1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} = \pi \text{ lub } 2\pi \text{ i t. d.}$$

Stąd zaś wynika, że

$$\operatorname{st} l_1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} = -\operatorname{st} C_1, \text{ a ze względu na 509)}$$

$$\operatorname{st} l_1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} = l_1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}}$$

Najmniejsza wartość, dla której $\operatorname{st} \varphi = \varphi$, jest $\varphi=0$, druga wartość $\varphi^0 = 257^\circ 27'$, przyczem $\operatorname{st} \varphi = \varphi = 4,493$. Pierwsza jest niemożliwą, bo P nie jest $=0$, więc

$$l_1 \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} = 4,493, \text{ a stąd}$$

$$P = \frac{4,493^2 \epsilon I}{l_1^2} = \frac{2\pi^2 \epsilon I}{l^2} = \frac{\pi^2 \epsilon I}{l^2}, \text{ gdy}$$

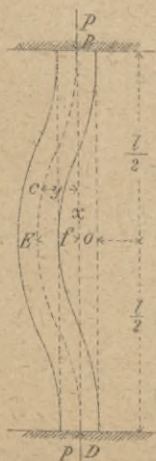
$$l = \frac{1}{\sqrt{2}} l_1 = 0,707 l_1 \dots \dots \dots 510)$$

A więc możemy użyć poprzednich wzorów 494) i 497), jeżeli zamiast l wstawimy odpowiednią długość wedle równania 510). Długość ta, którą trzeba wstawić we wzory 494) i 497) zamiast l , aby obliczyć wytrzymałość słupów jednym lub oboma końcami utwierdzonych lub przytrzymanych, nazywa się długością wolną (n. *freie Länge*, f. *longueur de sinusoité*).

W tym wypadku $l = \frac{1}{\sqrt{2}} l_1$, zatem ze względu na równanie 498) wytrzymałość jest dwa razy większą, niż w przypadku, opisanym w poprzednim paragrafie.

3) Oba końce utwierdzone (rys. 220). Tu w punktach B i D powstają momenty z powodu symetrii równe, które nazwiemy M_1 , a więc w punkcie C będzie moment $M = M_1 + Py$, zatem na podstawie równania 379) będzie

rys:220.



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_1 + Py}{\epsilon I},$$

a stąd podobnie jak w §. 93., gdy

$$v = \frac{dy}{dx}, \quad v \, dv = \frac{d^2 y}{dx^2} dy = - \frac{M_1 + Py}{\epsilon I} dy.$$

Gdy równanie to scałkujemy, otrzymamy

$$\frac{v^2}{2} = - \frac{M_1}{\epsilon I} y - \frac{Py^2}{2 \epsilon I} + C, \text{ naraście}$$

$$v = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2C - \frac{2M_1}{\epsilon I} y - \frac{Py^2}{\epsilon I}}. \quad 511)$$

Dalej będziemy mieli

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2C \epsilon I - \frac{2M_1}{P} y - y^2}} =$$

$$= \int \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} dx = x \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} + C_1.$$

Wyraz pierwszy scałkowawszy, otrzymamy

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P} - \frac{2M_1 y}{P} - y^2}} = \text{łuk wst} \frac{2y + \frac{2M_1}{P}}{\sqrt{\frac{8C\varepsilon I}{P} + \frac{4M_1^2}{P^2}}} = x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} + C_1,$$

$$\text{a stąd } y = -\frac{M_1}{P} \pm \sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P} + \frac{M_1^2}{P^2}} \text{ wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right).$$

Ponieważ część linii ugięcia EB jest przystająca do części ED , więc

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \text{ lub } \frac{3\pi}{2} \text{ i t. d., a zatem}$$

$$y = -\frac{M_1}{P} \pm \sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P} + \frac{M_1^2}{P^2}} \text{ dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right).$$

Dla $x = \frac{l_1}{2}$ jest $y=0$, więc

$$0 = -\frac{M_1}{P} + \sqrt{\frac{2C\varepsilon I}{P} + \frac{M_1^2}{P^2}} \text{ dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right), \text{ a zatem}$$

$$y = -\frac{M_1}{P} + \frac{M_1}{P} \frac{\text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right)} = \frac{M_1}{P} \left[\frac{\text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right)} - 1 \right]. \quad 512)$$

Dla $x=0$ jest $y=f$, więc

$$f = \frac{M_1}{P} \left[\frac{1}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right)} - 1 \right], \text{ zatem}$$

$$y = -\frac{M_1}{P} + \left(f + \frac{M_1}{P} \right) \text{ dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right) \quad \dots \quad 513)$$

Dalej otrzymamy z równania 512)

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \frac{M_1}{P} \frac{\text{wst} \left(x \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right)}.$$

Dla $x = \frac{l_1}{2}$ jest $\frac{dy}{dx} = 0$, więc albo $\frac{M_1}{P} = 0$, co nie może być,

lub też

$$\frac{\text{wst} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right)} = \text{st} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} \right) = 0.$$

A więc $\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} = \pi$ lub 2π itd., ogólnie $m\pi$. Stąd otrzymamy

$$P = \frac{4m^2\pi^2\varepsilon I}{l_1^2}.$$

Najmniejsza siła P , która sprawia wyboczenie, jest dla $m=1$

$$P = \frac{4\pi^2\varepsilon I}{l_1^2} \dots \dots \dots 514)$$

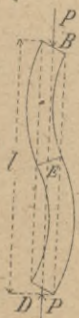
Wzór ten przeistoczy się we wzór 492), jeżeli podstawimy

$$l = \frac{l_1}{2} \dots \dots \dots 515)$$

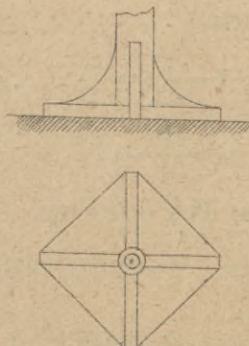
Długość wolna jest więc tu równa połowie długości słupa.

4. Oba końce i środek słupa przytrzymane (rys. 221). Tu obie połowy słupa BE i ED odkształcają się tak, jak słup BED (rys. 216), więc długość wolna $l = \frac{l_1}{2}$, a zatem wytrzymałość na wyboczenie jest cztery razy większą, niż w przypadku opisanym w poprzednim paragrafie.

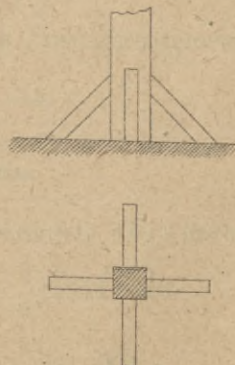
rys:221.



rys:222.



rys:223.



Zrobić tu musimy jeszcze uwagę, że koniec słupa wtedy tylko możemy uważać za utwierdzony, jeżeli tam styczna linii ugięcia nie zmienia się podczas wyboczenia, a więc gdy przy-

porami (rys. 222) lub zastrzałami (rys. 223) zabezpieczymy niezmiennosc stycznej. W braku przypór lub zastrzałow musimy uważać koniec belki tylko jako przytrzymany.

§. 95. Wzory Tetmajera.

Powiedzieliśmy powyżej, że wzór Eulera może być ważnym tylko do granicy sprężystości. Obok niego wyprowadziliśmy wzór Rankina. Doświadczenie musiało rozstrzygnąć, wedle którego wzoru należy w praktyce obliczać. Doświadczenia takie robili między innymi Bauschinger w Monachium i Tetmajer w Zurychu. Z doświadczeń tych pokazało się najprzód, że w rzeczywistości wzór Eulera daje wyniki zgodne z prawdą, ale tylko dla prętów wysmukłych, dla wielkich wartości $\frac{l}{a}$. Dla prętów o mniejszych wartościach $\frac{l}{a}$ nie da się zastosować wprost wzór Rankina, bo współczynnik wybożenia α nie jest ilością stałą ani nawet funkcją $\frac{l}{a}$, jak to się Tetmajerowi pierwotnie zdawało, ale wogóle współczynnik zwiększający ζ jest funkcją $\frac{l}{a}$ i to funkcją prostolinijną. Zamiast współczynnika zwiększającego można wprowadzić w rachunek jego odwrotność $\zeta' = \frac{1}{\zeta}$, współczynnik zmniejszający (*n. Abminderungscoefficient*), a zatem

$$A = \frac{A_0}{\zeta'}, \quad \tau_w = \frac{P}{A\zeta'} = \frac{\tau_w}{\zeta'} \dots \dots \dots 516)$$

$$\text{zatem } \tau_w = \frac{P}{A} = \tau\zeta' \dots \dots \dots 517)$$

Tetmajer otrzymał: a) dla drzewa

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } 1,8 < \frac{l}{a} < 100 \quad \zeta' = 1 - 0,00662 \frac{l}{a} \\ \text{„ } 100 < \frac{l}{a} \quad \dots \quad \zeta' = 3268 \left(\frac{a}{1}\right)^2 \end{array} \right\} \dots \dots 518)$$

Na tej podstawie obliczyliśmy następującą tabliczkę:

Zastosowana nauka sprężystości i wytrzymałości. Na podstawie doświadczeń opracował L. Tetmajer, profesor szkoły politechnicznej w Wiedniu. 2-ie zupełnie przerobione wydanie. Lipsk i Wiedeń 1904 (Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre von L. von Tetmajer).

Pod tym napisem leży przed nami drugie wydanie dzieła o sprężystości i wytrzymałości znakomitego profesora wiedeńskiego Tetmajer'a; Wydanie to drugie zostało tak dalece przerobione i pomnożone, że możemy uważać je jako nowe dzieło.

Jak wiadomo, Tetmajer był dyrektorem wielkiej doświadczalni mechanicznej w Zurychu. Mianowany profesorem w Wiedniu, postarał się o urządzenie podobnej doświadczalni przy tamtejszej szkole politechnicznej. To też słuszenie czytamy na tytułowej karcie dopisek „na podstawie doświadczeń“. Dzieło jego to nie zwykła książka, traktująca o powyższych przedmiotach, to owoc niejednokrotnych badań i doświadczeń własnych. Układ dzieła jest odmienny od układu zazwyczaj przyjętego. Autor mówi najprzód o nateżeniach i odkształceniach wogóle, o momentach drugiego stopnia i jądrze przekroju, a potem omawia wytrzymałość normalną, na zginanie, na ścinanie i na skręcenie, wreszcie rozmaite rodzaje wytrzymałości złożonych.

Cały wykład jest oryginalny, a sposób wykładu ścisły i związły. Autor ilustruje rozmaite prawa wynikami doświadczeń własnych i obcych. Wobec obfitości treści, nie podobna mi omawiać dzieła szczegółowo. Ci, którzy się tym dziełem nauki zajmują, nie omieszkają zapewne zapoznać się z tem dziełem. Tu mogę tylko przykładowo podnieść niektóre ustępy.

I tak już przy omawianiu współczynnika sprężystości ϵ autor wyjaśnia znaczenie jego geometryczne w stosunku do linii odkształceń. Jest on mianowicie proporcjonalny do stycznej kąta nachylenia prostej, wyprowadzonej z punktu zerowego do dowolnego punktu linii odkształceń. Można by dać także inne określenie geometryczne, a mianowicie jako styczną kąta nachylenia stycznej geometrycznej do osi odcinków.

Autor oblicza także przesunięcie wskutek działania siły poprzecznej, a odkształcenie belek zginanych wyznacza nie tylko ze względu na momenty, ale także i siły poprzeczne.

Znany jest sposób autora obliczania słupów na wyboczenie. Autor na podstawie nowszych doświadczeń ustawił dla współczynnika zmniejszającego φ' nowe wzory i tablice. Mamy wogóle przekrój pożyteczny

$$A = \frac{P}{\tau \varphi'} = \frac{A_0}{\varphi'} \dots \dots \dots (1).$$

Otóż dla φ' otrzymuje on:

Dla drzewa miękkiego, dla $\mu = 280 \text{ kg/cm}^2$:

$$\text{dla } 5 < \frac{l}{a} < 100 \quad \varphi' = 1,04 - 0,00693 \frac{l}{a}$$

$$\text{„ } 100 < \frac{l}{a} \quad \varphi' = 3525 \left(\frac{a}{l}\right)^2.$$

Stąd obliczył on następującą tabliczkę:

$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'
10	0,979	60	0,632	110	0,293	160	0,136
15	0,943	65	0,596	115	0,268	165	0,129
20	0,907	70	0,561	120	0,246	170	0,121
25	0,871	75	0,525	125	0,225	175	0,114
30	0,839	80	0,493	130	0,207	180	0,107
35	0,804	85	0,457	135	0,193	185	0,104
40	0,771	90	0,421	140	0,179	190	0,096
45	0,736	95	0,387	145	0,168	195	0,093
50	0,700	100	0,353	150	0,157	200	0,089
55	0,664	105	0,321	155	0,146		

Dla żelaza łanego leżąco otrzymał on przy $\mu = 8000 \text{ kg/cm}^2$:

$$\text{dla } 8 < \frac{l}{a} < 80 \quad \varphi' = 0,97 - 0,015 \frac{l}{a} + 0,000066 \left(\frac{l}{a}\right)^2$$

$$\text{„ } 80 < \frac{l}{a} \quad \varphi' = 3525 \left(\frac{a}{l}\right)^2.$$

Stąd otrzymamy następującą tabliczkę:

$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'
10	0,827	50	0,386	90	0,152	130	0,073
15	0,760	55	0,345	95	0,137	135	0,068
20	0,697	60	0,309	100	0,123	140	0,063
25	0,636	65	0,275	105	0,112	145	0,059
30	0,580	70	0,245	110	0,102	150	0,055
35	0,526	75	0,218	115	0,093	155	0,051
40	0,476	80	0,194	120	0,086	160	0,048
45	0,429	85	0,171	125	0,079	165	0,045
						170	0,043

Dla żelaza spawalnego otrzymał on przy $\mu = 3500 \text{ kg/cm}^2$:

$$\text{dla } 10 < \frac{l}{a} < 112 \quad \varphi' = 0,866 - 0,037 \frac{l}{a}$$

$$\text{„ } 112 < \frac{l}{a} \quad \varphi' = 5640 \left(\frac{a}{l}\right)^2.$$

Stąd otrzymujemy następującą tabliczkę:

$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'
15	0,810	65	0,624	115	0,427	165	0,207
20	0,791	70	0,606	120	0,392	170	0,195
25	0,773	75	0,587	125	0,361	175	0,184
30	0,754	80	0,569	130	0,334	180	0,174
35	0,736	85	0,550	135	0,309	185	0,165
40	0,717	90	0,531	140	0,288	190	0,156
45	0,699	95	0,513	145	0,268	195	0,148
50	0,680	100	0,494	150	0,251	200	0,141
55	0,661	105	0,476	155	0,235		
60	0,643	110	0,457	160	0,220		

Dla żelaza zlewego otrzymał on przy $\mu = 3800 \text{ kg/cm}^2$:

$$10 < \frac{l}{a} < 105 \quad \varphi' = 0,816 - 0,0030 \frac{l}{a}$$

$$105 < \frac{l}{a} \quad \varphi' = 5584 \left(\frac{a}{l}\right)^2.$$

Stąd otrzymamy następującą tabliczkę:

$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'	$\frac{l}{a}$	φ'
15	0,771	65	0,621	115	0,423	165	0,205
20	0,756	70	0,606	120	0,388	170	0,193
25	0,741	75	0,591	125	0,357	175	0,182
30	0,726	80	0,576	130	0,331	180	0,171
35	0,711	85	0,561	135	0,307	185	0,163
40	0,696	90	0,546	140	0,285	190	0,155
45	0,681	95	0,531	145	0,266	195	0,147
50	0,666	100	0,516	150	0,248	200	0,140
55	0,651	105	0,501	155	0,232		
60	0,636	110	0,486	160	0,218		

W słupach kamiennych nie spostrzegł on prawidłowego wpływu wysokości na wytrzymałość.

Autor podaje także króciutką teorię obliczenia belek żelazno-betonowych, przyjmuje linię nateżeń prostolinią i $u=12-15$. W drugiej fazie, wedle której należy obliczać wymiary, przyjmuje on za Ritterem błędnie położenie osi obojętnej takie same, jak gdyby istniały ciągnięcia w betonie, pomimo tego, że ich wedle przypuszczenia niema.

Pominąwszy tę usterkę, polecić mogę dzieło powyższe jak najgoręcej.

Dr. M. Thullie.

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
15	0,901	65	0,570	115	0,255	165	0,124
20	0,868	70	0,537	120	0,234	170	0,117
25	0,834	75	0,503	125	0,216	175	0,110
30	0,801	80	0,470	130	0,199	180	0,105
35	0,768	85	0,437	135	0,185	185	0,098
40	0,735	90	0,404	140	0,172	190	0,093
45	0,702	95	0,371	145	0,160	195	0,089
50	0,669	100	0,338	150	0,150	200	0,084
55	0,636	105	0,306	155	0,140	205	0,078
60	0,603	110	0,278	160	0,132	210	0,076

b) Żelazo lane:

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } 5 < \frac{l}{a} < 80 \quad \zeta' &= 1 - 0,01546 \frac{l}{a} + 0,00068 \left(\frac{l}{a}\right)^2 \\ \text{" } 80 < \frac{l}{a} \quad \zeta' &= 3368 \left(\frac{a}{l}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad 519)$$

Stąd obliczyliśmy następującą tabliczkę:

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
10	0,852	50	0,397	90	0,141	130	0,098
15	0,783	55	0,355	95	0,134	135	0,094
20	0,718	60	0,317	100	0,127	140	0,091
25	0,656	65	0,282	105	0,121	145	0,088
30	0,590	70	0,251	110	0,116	150	0,085
35	0,542	75	0,223	115	0,111		
40	0,490	80	0,198	120	0,106		
45	0,442	85	0,150	125	0,102		

c) Żelazo spawalne i zlewne. Wpływ kształtu prętów na wyboczenie nie dał się dotychczas wykazać. Pręty nitowane zachowują się jak lite, o ile odstęp nitów nie przewyższa 70 razy grubości nitowanej ścianki pręta, nity wypełniają dokładnie dziury na nity, a osłabienie przekroju przez dziury na nity nie przekracza 12%.

Wyboczenie prętów wysmukłych $\left(\frac{l}{a} > 100\right)$ odbywa się zwykle powoli, a odkształcenia są przeważnie sprężyste. Pręty, dla których $\frac{l}{a} < 100$, wybaczają się najczęściej nagle, często dopiero przy granicy wytrzymałości.

Ponieważ przy obliczaniu prętów z żelaza spawalnego i zlewne przyjmujemy zwykle wytrzymałość na ciśnienie

równą wytrzymałości na ciągnięcie, więc dla wyznaczenia współczynnika zmniejszającego przyjmiemy: dla żelaza spawalnego $\mu=3,6 t/cm^2$, dla zlewne go bardzo miękkiego $\mu=4 t/cm^2$ i na tej podstawie możemy dla obu tych materiałów w przecięciu napisać:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } 10 < \frac{l}{a} > 10 \quad \zeta' = 0,81 - 0,032 \frac{l}{a} \\ \text{„ } \frac{l}{a} > 110 \quad \zeta' = 5394 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \end{array} \right\} \dots 520)$$

Stąd otrzymamy następującą tabliczkę:

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
15	0,76	75	0,57	135	0,30	195	0,14
20	0,75	80	0,55	140	0,28	200	0,13
25	0,73	85	0,54	145	0,26	205	0,13
30	0,71	90	0,52	150	0,24	210	0,12
35	0,70	95	0,51	155	0,22	215	0,12
40	0,68	100	0,49	160	0,21	220	0,11
45	0,67	105	0,47	165	0,20	225	0,11
50	0,65	110	0,45	170	0,19	230	0,10
55	0,64	115	0,41	175	0,18	235	0,10
60	0,62	120	0,38	180	0,17	240	0,09
65	0,60	125	0,35	185	0,16	245	0,09
70	0,59	130	0,32	190	0,15	250	0,09

§. 96. Obliczenie wymiarów.

Przy użyciu równań 494), 498) lub 517) zachodzi ta okoliczność, że do obliczenia szukanego przekroju potrzebnym jest nieznaną jeszcze promień bezwładności tegoż przekroju. Musimy sobie tedy przy obliczeniach radzić w rozmaity sposób.

Najprzód wyjaśnić musimy kwestyę, czy przy obliczeniu wymiarów na wyboczenie należy odcigać dziury na nity, w ogóle osłabienie przekroju, czy nie. Otóż rozumie się, że przekrój *A*, który wypada z wzoru 516) lub 498), oznacza przekrój użyteczny, to jest przekrój po odciągnięciu dziur na nity lub innych osłabień, ale przy wyznaczeniu promienia bezwładności *a* nie uwzględniamy osłabienia przekroju, a liczymy dla przekroju pełnego, bo na wyboczenie, a zatem i na kształt linii ugięcia mają większy wpływ przekroje pełne, niż w pewnych tylko punktach osłabione. Stwierdził to doświadczalnie F o e p p l*).

*) p. p. Zapiski doświadczalni mechaniczno-techn. 1897 zeszyt 25.

Rozumie się, że aby słup działał jako całość, muszą być kształtówki i blachy z których się składa, odpowiednio połączone. Tetmajer otrzymał doświadczalnie, że możemy słup uważać jako całość, jeżeli odstęp nitów jest mniejszy niż 55 cm, jeżeli nity wypełniają dobrze dziury i jeśli osłabienie przez nity nie wynosi więcej, niż 12%.

Mając P i τ , otrzymujemy $A_0 = \frac{P}{\tau}$. Wiemy, że $A > A_0$ z dwu powodów, mianowicie z powodu dziur, a dalej z powodu wyboczenia. Można by więc tymczasowo przyjąć A , obliczyć dla tego przyjętego A promień bezwładności a , a znając $\frac{l}{a}$ obliczyć A . Pokazałoby się wtedy prawdopodobnie, że to obliczone A jest inne od przyjętego, trzeba by drugi raz, a może trzeci raz jeszcze liczyć.

Aby to obliczenie żmudne ułatwić, będziemy się starali ustawić pewne wzory dla a dla rozmaitych przekrojów. Mając takie wzory, możemy już z większą dokładnością odrazu przyjmując stosunek $\frac{l}{a}$ i obliczenie znacznie skrócić.

Na str. 110 i następnych podaliśmy w ostatniej rubryce wzory dla promieni bezwładności dla rozmaitych przekroi. To samo dla rozmaitych kształtówek podaliśmy na str. 161 do 172. Dla rachunku najwygodniej jest jednak, jeśli wyrazimy promień bezwładności a jako funkcję powierzchni A . Postaramy się ustawić takie wzory dla przekroi najczęściej w praktyce się zdarzających.

1. Kwadrat. $a = 0,2887\sqrt{A}$ 521)

2. Prostokąt o podstawie b

$$a = 0,2887\frac{A}{b}$$
 522)

3. Elipsa (rys. 74)

$$a = \frac{h}{4}, \text{ a że } A = \frac{\pi bh}{4}, \text{ więc } a = \frac{A}{\pi b}$$
 523)

4. Koło (rys. 75)

$$a = \frac{d}{4} = 0,282\sqrt{A}$$
 524)

5. Pierścień kołowy (rys. 86)

$$a = \frac{1}{4}\sqrt{d^2 + d_1^2}$$
 525)

Jeżeli wstawimy $d_1 = nd$, to

$$a = \frac{d}{4} \sqrt{1+n^2} = 0,282 \sqrt{A \frac{1+n^2}{1-n^2}} \quad . . . \quad 526)$$

6. Kątówka równoramienna *).

Ze względu na oś poziomą $a = 1,4 + 0,07 A \quad . . . \quad 527)$

" " " " główną najmn. $a = 0,9 + 0,044 A \quad . . . \quad 528)$

7. Kątówka nierównoramienna (rys. 137)

Ze względu na oś $X_1 X_1 \quad a = 1,3 + 0,11 A$
 " " " " $Y_1 Y_1 \quad a' = 1,3 + 0,05 A$
 " " " " główną najmn. $a = 0,9 + 0,042 A$ } . . . 529)

8. Dla przekroju teowego

rys: 224

(rys. 224) nazwijmy

$$m = \frac{h}{b}, \quad n = \frac{d}{d_1}, \quad p = \frac{h}{d_1},$$

to dla osi XX

$$a = 0,2887 \frac{h}{1+mn} \sqrt{mn(4-mn)} \quad . \quad 530)$$

dla osi YY jest

$$a' = 0,2887 \sqrt{\frac{1}{1+mn}} \quad . \quad 531)$$

Dla kształtówek \perp według normalii austriackich jest $m = 0,77$, $n = 1$, więc $a = 0,3225 h$, $a' = 0,216 b$. Licząc dokładniej otrzymamy:

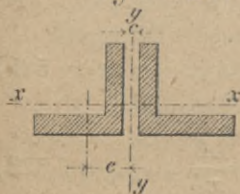
$$a = a' = 0,95 + 0,064 A \quad . . . \quad 532)$$

Dla kształtówek wysokościennych otrzymamy

$$a = 1,3 + 0,077 A$$

$$a' = 1,55 + 0,026 A \quad . . . \quad 533)$$

rys: 225.



9. Jeżeli przekrój składa się z dwu kątówek (rys. 225) i nazwiemy I_1 , A_1 i a_1 moment bezwładności, przekrój i promień bezwładności jednej kątówki, to

$$a^2 = \frac{I}{A} = \frac{2I_1}{2A_1} = \frac{I_1}{A_1} = a_1^2, \text{ a zatem}$$

$$a = a_1 = 1,4 + 0,07 A \quad . \quad 534)$$

*) Por. wyprowadzenie tych wzorów w rozprawce autora: Weiterer Beitrag zur Berechnung der Stäbe auf Knickfestigkeit. Z. d. öster. Ing. u. Arch. Ver. 1892. M. 50 i 51.

Dla osi YY jest

$$a'^2 = \frac{I'}{A} = \frac{2(I_1 + A_1 e^2)}{2A_1} = a_1 + e^2$$

Dalej mamy $e = e_1 + \frac{c}{2}$. Obliczywszy e dla kątówek rozmaitych i dla $c=0, 1, 2\text{ cm}$, napisać możemy

$$a'^2 = (0,45 + 0,033 c) A + 1,8 c - 1,7 \dots 535)$$

10. Przyjmijmy teraz przekrój złożony z blachy stojącej i dwu kątówek (rys. 225) i nazwijmy powierzchnię jednej kątówki A_1 , blachy stojącej $A_2 = nA_1$, to $A = (2+4) A$,

Wtedy otrzymamy

$$a'^2 = \frac{2}{2+n} a_1'^2 + \frac{nh^2 + be^2 - 3(2+n)e^2}{3+2n}$$

Jeżeli $n=1, h=6e$, to

$$a = 0,206 A - 1,13 \dots 536)$$

Jeżeli $n=3$ do 4 , to średnio

$$a'^2 = 0,25 + 0,032 A + 0,182 h^2 \dots 537)$$

Dla osi YY otrzymamy ogólnie

$$a'^2 = \frac{2}{2+n} a_1'^2 + \frac{2e'^2}{2+n}$$

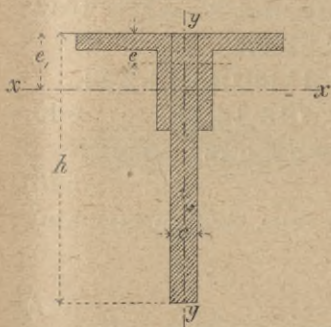
Dla $n=1, c=1\text{ cm}$,

$$a'^2 = 0,217 A - 0,11 \dots 538)$$

Dla $n=3$ do $4, c=2\text{ cm}$

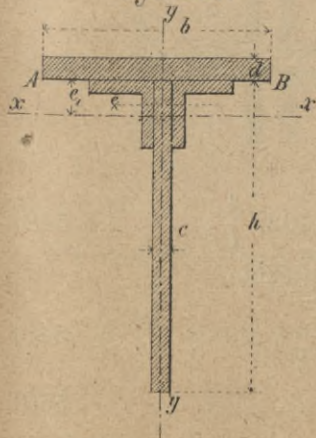
$$a'^2 = 0,07 A + 0,68 \dots 539)$$

rys:226.



11. Przyjmijmy przekrój złożony z blachy stojącej, dwu kątówek i nakładki (rys. 227) i nazwijmy przekrój jednej kątówki A_1 , blachy stojącej $A_2 = nA_1$, nakładki $A_3 = n_1 A_1$, to

rys:227.



$$A = (2+n+n_1) A_1$$

Dla osi XX otrzymamy wtedy

$$a'^2 = \frac{2}{(2+n+n_1)} a_1'^2 + \frac{6e^2 + nh^2 + n_1 d^2}{3(2+n+n_1)} - e_1^2$$

Dla $n=3, n_1=4$ i $n=4, n_1=10$ otrzymamy średnio

$$a'^2 = 0,008 A + 0,076 h^2 \dots 540)$$

Dla osi YY dla $c=2\text{ cm}$, n i n_1 jak pierwszej,

$$a'^2 = 0,017 A + 0,044 b^2 \dots 541)$$

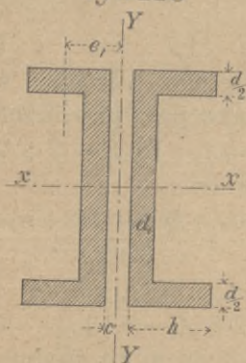
12. Dla U w ek (rys. 133) otrzymamy ze względu na oś XX

$$a = 2,2 + 0,147 A \dots \dots \dots 542)$$

$$\text{dla osi } YY \ a' = 1,0 + 0,03 A \dots \dots \dots 543)$$

13. Jeżeli przekrój składa się z dwu uwek (rys. 228) a przekrój, moment i promień bezwładności jednej uwiki nazwiemy A_1 , I_1 i a_1 , to ze względu na oś XX

rys:228



$$a^2 = \frac{I}{A} = \frac{2 I_1}{2 A_1} = a_1^2, \text{ więc}$$

$$a = a_1 = 2,2 + 0,147 A \dots 544)$$

Dla osi YY jest

$$a'^2 = \frac{2(I_1 + A_1 e_1^2)}{2 A_1} = a_1'^2 + e_1^2.$$

Wstawivszy wartość za e_1^2 , otrzymamy w przybliżeniu

$$a'^2 = 0,0002 A^2 + 0,043 A + 2,3 + c(0,013 A + 1,8) \dots 545)$$

14. Dla czterech ćwierćkołówek otrzymamy

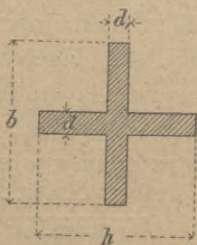
$$a = 3,7 + 0,045 cm \dots \dots \dots 546)$$

15. Dla przekroju krzyżowego (rys. 229) otrzymamy dla osi poziomej

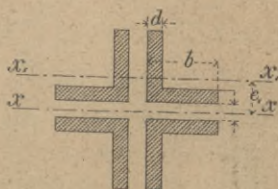
$$a = 0,2887 b \sqrt{\frac{1}{1 + mn}} \dots \dots \dots 547)$$

jak 531) dla przekroju teowego.

rys:229



rys:230



$$\text{Jeżeli } b = h, \ d = d_1, \ a = 0,2045 \ b = 0,1022 \frac{A}{d} \dots \dots \dots 548)$$

Dla osi pionowej otrzymamy analogicznie

$$a' = 0,2887 h \sqrt{\frac{mn}{1 + mn}} \dots \dots \dots 549)$$

$$\text{a dla } m = n = 1, \text{ jak pierwej, } a' = 0,1022 \frac{A}{d} \dots \dots \dots 550)$$

16. Jeżeli przekrój krzyżowy składa się z 4 kątownek (rys. 230) i jeśli nazwiemy przekrój, moment i promień bezwładności jednej kątownki A_1, I_1, a_1 , to

$$a^2 = \frac{I}{A} = \frac{4(I_1 + A_1 e_1^2)}{4A_1} = a_1^2 + e_1^2 \dots 551)$$

Po wstawieniu wartości za e_1^2 otrzymamy w przybliżeniu

$$a^2 = (0,225 + 0,017c)A + 1,8c - 1,7 \dots 552)$$

17. Jeżeli przekrój składa się z 4 kątownek i dwu wstęg (rys. 231) i jeżeli nazwiemy przekrój 4 kątownek, ich moment i promień bezwładności A_4, I_4 i a_4 a krzyża z wstęg A_5, I_5, a_5 , to

$$a^2 = \frac{I}{A} = \frac{I_4 + I_5}{A_4 + A_5}$$

Jeżeli $A_5 = mA_4$, to

$$a^2 = \frac{a_4^2 + ma_5^2}{1+m}, \dots 553)$$

przyczem a_4 i a_5 należy obliczać ze wzorów 552) i 550).

18. Jeżeli przekrój składa się z 4 kątownek i wstęgi (rys. 232) i jeżeli nazwiemy przekrój, moment i promień bezwładności jednej kątownki A_1, I_1 i a_1 a przekrój wstęgi $A_2 = nA_1$, to

$$A = 4A_1 + A_2 = (4+n)A_1,$$

a ze względu na oś XX

$$a^2 = \frac{4}{4+n}(a_1^2 + e_1^2) \dots 554)$$

Dla $d=2\text{ cm}$ i $n=3$ do 4 otrzymamy

$$a^2 = 0,075A + 1,0 \dots 555)$$

Jeżeli zamiast 4 użyjemy 6 kątownek, to otrzymamy

$$a^2 = \frac{6}{6+n}(a_1^2 + e_1^2) \dots 556)$$

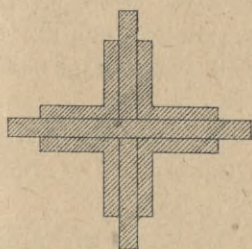
a dla $d=2\text{ cm}$ i $n=3$ do 4

$$a^2 = 0,075A + 1,2 \dots 557)$$

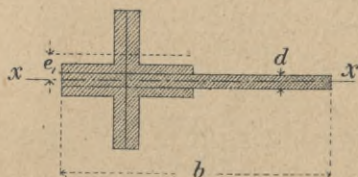
19. Dla kształtówek I otrzymamy w przybliżeniu

$$\begin{aligned} a &= 3,9 + 0,107A \\ a' &= 1,4 + 0,018A \end{aligned} \dots 558)$$

rys:231

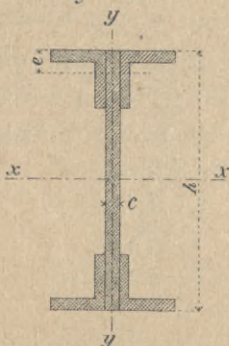


rys:232



20. Dla przekroju I , składającego się ze ścianki i czterech kątownek (rys. 233) otrzymamy, gdy znów wartość dla jednej kątownki oznaczymy znaczkiem 1:
 $A = (4+n) A_1$

rys: 233



$$a^2 = \frac{4}{4+n} a_1^2 + \frac{(9,72+n) h^2}{12(4+n)} \quad 559)$$

Dla $n=1,5$ do 3 otrzymamy średnio
 $a^2 = -0,453 + 0,308 A + 0,129 h^2 \quad 560)$

Dla osi YY możemy użyć wzoru 554). Jeżeli wstawimy $n=1,5$ do 3 i $d=1$ cm, otrzymamy

$$a'^2 = 0,106 A - 0,1 \quad 561)$$

21. Dla przekroju składającego się z 4 kątownek, połączonych kratą, otrzymamy a^2 z 559), wstawiając $n=0$, więc

$$a^2 = a_1^2 + 0,2025 h^2 = -0,7 + 0,119 A + 0,2025 h^2 \quad 562)$$

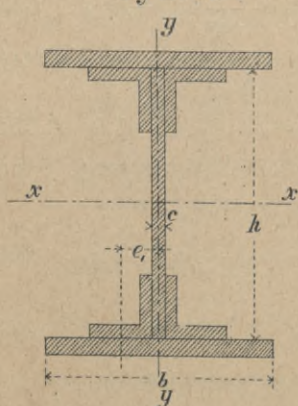
Dla osi YY możemy użyć wzorów 551) i 552).

22. Jeżeli przekrój Iowy składa się z 4 kątownek i 2 nakładek (rys. 234), to $A=2(2+n) A_1$.

Dla osi XX jest

$$a^2 = \frac{3,708 A_1 + (1,6+n) h^2 - 5,6}{4(2+n)} \quad 563)$$

rys: 234



W praktyce jest $n=1,2$ do 2, więc w przecięciu

$$a^3 = 0,036 A + 0,21 h^2 - 0,4 \quad 564)$$

Dla osi YY jest

$$a'^2 = \frac{2}{2+n} (a_1^2 + e_1^2) + \frac{nb^2}{12(2+n)} \quad 565)$$

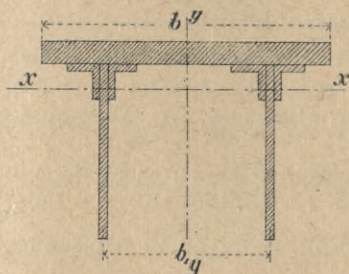
albo po wstawieniu wartości za e_1

$$a'^2 = 0,071 A - 1,2 + 0,0366^2 + (0,06 A + 1,13) c \quad 566)$$

23. Dla przekroju dwuteowego (rys. 235) niech będzie a_5 promień bezwładności połowy

przekroju ze względu na oś XX , który obliczyć należy wedle wzoru 540), to $A=2A_5$, $I=2I_5$, więc

rys:235



$$a^2 = \frac{2 I_5}{2 A_5} = a_1^2, \text{ stąd } a = a_1 \quad 567)$$

Ze względu na YY, chcąc wyznaczyć a' , otrzymamy

$$A = (4 + 2n + n_1) A_1,$$

$$a'^2 = \frac{4}{4 + 2n + n_1} (0,476 A_1 - 0,7) + \frac{2 + n}{2(4 + 2n + n_1)} b_1^2 + \frac{n_2}{12(4 + 2n + n_1)} b^2 \quad 568)$$

W praktyce jest $n=2$ do 7, $n_1=0$ do 15, średnio możemy napisać

$$a'^2 = 0,004 A - 0,1 + 0,178 b_1^2 + 0,04 b^2 \quad 569)$$

§. 97. Przykłady obliczenia wymiarów.

1. Słup drewniany o przekroju kwadratowym obciążony jest w kierunku osi siłą $P=36t$. Długość wolna wynosi 3m. Napięcie dopuszczalne na ciśnienie należy przyjąć 70 kg/cm^2 i wyznaczyć wymiary przekroju słupa.

Bez względu na wyboczenie mamy $A_0 = \frac{3600}{70} = 51,4 \text{ cm}^2$. Przekrój A musi być większy, przyjmijmy więc jako pierwsze przybliżenie $A = 60 \text{ cm}^2$. Wedle 521) jest $a = 0,2887 \sqrt{60} = 2,29 \text{ cm}$.

Wtedy $\frac{l}{a} = \frac{300}{2,29} = 134$, zatem $\zeta = 0,186$, a więc

$$A = A_0 : \zeta = 51,4 : 0,186 = 276,4 \text{ cm}^2.$$

Widzimy, że A wypadło znacznie większe, niż przyjęte, jako drugie przybliżenie przyjmijmy więc $A = 200 \text{ cm}^2$, to $a = 0,2887 \sqrt{200} = 4,08 \text{ cm}$.

Wtedy $\frac{l}{a} = \frac{300}{4,08} = 74$. Dla $\frac{l}{a} = 74$ jest $\zeta = 0,510$, więc

$$A = A_0 : \zeta = 51,4 : 0,510 = 101 \text{ cm}^2, \text{ a } a = 0,2887 \sqrt{101} = 2,895 \text{ cm}.$$

Przyjeliśmy więc a za wielkie, przyjmijmy teraz

$$a = 3,5 \text{ cm}, \text{ więc } \frac{l}{a} = \frac{300}{3,5} = 86, \text{ a zatem } \zeta = 0,430.$$

$$\text{Stąd } A = 51,4 : 0,43 = 119 \text{ cm}^2, \text{ a } a = 0,2887 \sqrt{119} = 3,15.$$

Przyjmijmy jeszcze raz $a = 3,2$, to $\frac{l}{a} = \frac{300}{3,2} = 94$, $\zeta = 0,378$.

$$A = 51,4 : 0,378 = 136 \text{ cm}^2, \text{ stąd } a = 0,2887 \sqrt{136} = 3,37.$$

Naostatek przyjmijmy $a = 3,3$, to $\frac{l}{a} = \frac{300}{3,3} = 91$, $\zeta = 0,399$,

$$A = 51,4 : 0,399 = 128,8 \text{ cm}^2, \text{ a } a = 0,2887 \sqrt{128,8} = 3,28.$$

Zgodność jest tu już dostateczna, zatrzymamy więc $A=128,8$, więc bok kwadratu $a=\sqrt{128,8}=11,35$, zamiast czego przyjmijmy $c=12\text{ cm}$.

Ponieważ c zaokrąglamy na całe centymetry, więc przy przyjmowaniu A lepiej było odrazu przyjmować c w całych centymetrach.

2 Jak gruby ma być słup kwadratowy, obciążony siłą osiową $P=21000\text{ kg}$, przyczem dolny koniec jest wpuszczony w cokół kamienny a górny zapomocą kleszczy ochroniony przed wygięciem. Wysokość słupa wynosi $l_1=3,75\text{ m}$.

Tu wedle 510) $l=0,707 \times 3,75$. Ze względu, że może utwierdzenie nie jest zupełne, przyjmijmy dla bezpieczeństwa $l=0,8 \cdot 3,75=3,0\text{ cm}$. Dalej

mamy $A_0=\frac{21000}{70}=300\text{ cm}^2$, a stąd byłoby $c=\sqrt{300}=17,3$. Ze względu na wyboczenie przyjmijmy $c=20$, stąd $a=0,2887 \times 20=5,774\text{ cm}$. Więc

$$\frac{l}{a}=\frac{300}{5,77}=52, \text{ a } \zeta=0,656, \text{ więc } A=300:0,656=458, \text{ c}=21,4.$$

Teraz chodziłoby tylko jeszcze o zbadanie, czy wystarczy przyjąć $c=21$ czy też 22 cm . Probujemy $c=21$, to $a=6,06\text{ cm}$, $\frac{l}{a}=\frac{300}{6,06}=49,5$, $\zeta=0,072$, $A=300:0,672=446,5$, $c=21,1$.

Jak widzimy różnica tu jest bardzo mała, moglibyśmy więc przyjąć $c=21$, a gdy chcemy być bardzo ostrożni, $c=22\text{ cm}$.

3. Obliczyć wymiary słupa z żelaza lanego o przekroju kołowym pełnym, gdy $P=30000\text{ kg}$, gdy wysokość $l_1=4\text{ m}$, a oba końce są utwierdzone.

Wedle 515) $l=\frac{400}{2}=200\text{ cm}$. Dalej mamy $A_0=\frac{30000}{800}=37,5\text{ cm}^2$, stąd $d=7\text{ cm}$.

Przyjmijmy jako pierwsze przybliżenie $d=9\text{ cm}$, to wedle 524) $a=\frac{2}{3}=2,25$,

stąd $\frac{l}{a}=\frac{200}{2,25}=89$, stąd $\zeta=0,143$, $A=37,5:0,143=262$, $d=18,3\text{ cm}$. Mu-

simy więc przyjąć d większe, przyjmijmy $d=15\text{ cm}$, to

$$a=\frac{15}{4}=3,75, \frac{l}{a}=\frac{200}{3,75}=53,3, \zeta=0,370, \text{ więc } A=37,5:0,37=101,3\text{ cm}^2, d=11,3\text{ cm}.$$

Wystarczy więc d mniejsze, przyjmijmy $d=13\text{ cm}$, więc $a=\frac{13}{4}=3,25$,

$\frac{l}{a}=\frac{200}{3,25}=61,5$, $\zeta=0,307$, więc $A=37,5:0,307=122\text{ cm}^2$, $d=12,5\text{ cm}$. War-

tość ta tak już bliską jest przyjętej, że możnaby zatrzymać $d=13\text{ cm}$. Do-

kładniej możnaby przyjąć $d=12,8\text{ cm}$, zatem $a=3,2$, $\frac{l}{a}=\frac{200}{3,2}=62,5$, $\zeta=0,300$,

zatem $A=37,5:0,3=125\text{ cm}^2$, $d=12,6$. Zatrzymujemy więc $d=128\text{ mm}$, a moglibyśmy też przyjąć $d=127\text{ mm}$.

4. Dla tego samego wypadku obliczyć słup z żelaza lanego, którego grubość ścian wynosi $\frac{1}{10}d$.

Wtedy wewnętrzna średnica $d_r=d-0,2d=0,8d$, przekrój

$$A=\frac{\pi}{4}(d^2-d_1^2)=0,283d_1^2, \text{ a według 525) } a=\frac{1}{4}\sqrt{d^2+0,8^2d^2}=0,32d.$$

Ponieważ słup wydrążony musi być grubszym, więc przyjmmy od razu $d=16\text{ cm}$, to $a=0,32 \cdot 16=5,12\text{ cm}$, zatem $\frac{l}{a}=\frac{200}{5,12}=39$, $\zeta=0,500$.

Dalej mamy $A_0=\frac{30000}{800}=37,5\text{ cm}^2$ więc $A=37,5:0,5=75\text{ cm}^2$, stąd

$$d=\sqrt{\frac{75}{0,288}}=16,28\text{ cm}.$$

Różnica jest mała, przyjmijmy jeszcze $d=16,2\text{ cm}$ to $a=0,32 \cdot 16,2=5,18$

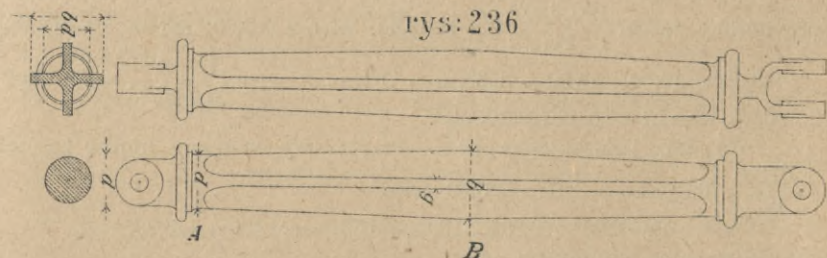
zatem $\frac{l}{a}=\frac{200}{5,18}=38$, $\zeta=0,511$, zatem $A=37,5:0,511=73,4$

a stąd $d=\sqrt{\frac{73,4}{0,288}}=16,1$, zatrzymujemy więc $d=162\text{ mm}$, grubość ścian po 16 cm , więc $d_1=130\text{ mm}$.

Porównując wyniki dla przekroju pełnego i wydrążonego, widzimy, że dla słupa pełnego przekrój wynosi 125 cm^2 , dla wydrążonego $73,4\text{ cm}^2$.

5. Zastrzał z lanego żelaza w wiązaniu dachowym pracuje na ciśnienie $P=16\text{ t}$. Zastrzał ma $1,5\text{ m}$ długości, na końcach przegibnie połączoney.

Jak wiemy przy wyboczeniu powstaje moment największy we środku pręta, a więc właściwie tam tylko potrzebujemy przekroju według równań (498) lub (516). Ku końcom mogą być przekroje mniejsze, a na końcach tylko takie, jakich wymaga ciśnienie bez względu na wyboczenie. Dla oszczędności materiału dajemy też rzeczywiście często prętom, narażonym na wyboczenie, przekrój zmienny (rys. 236), a mianowicie w środku B największy



na wyboczenie, a przy końcach A tylko na ciśnienie. Przekroje pośrednie dałyby się także obliczyć w ten sposób, aby natężenie było wszędzie jednakowe,*) musielibyśmy zrobić jednak pewne przypuszczenie co do kształtu przekrojów. Zamiast tego przyjęć możemy w praktyce linię zarysu AB w przybliżeniu n. p. paraboliczną. Prętów takich używamy często w więzrach dachowych.

Przekrój A (rys. 236) obliczamy więc na ciśnienie, zatem

$$A_0=\frac{16000}{800}=20\text{ cm}^2, \text{ a stąd } d=5,05\text{ cm}=51\text{ mm}.$$

*) P. Dwelshauvers-Dery: *Principes de la résistance des matériaux* str. 130—136 i Obrębowicz: O wytrzymałości prętów na wyboczenie.

Przekrój A_1 we środku zastrzału przyjmijemy w kształcie krzyża i obliczać będziemy na wyboczenie. Według równania 548) mamy $a = 0,1022 \frac{A}{d}$. Przyj-

mijmy tymczasowo $d = 1,5 \text{ cm}$, dalej mamy $A_0 = 20 \text{ cm}$. Przyjmijmy $A = 45 \text{ cm}$,
to $a = 0,1022 \frac{45}{1,5} = 3,066 \text{ cm}$, zatem $\frac{l}{a} = \frac{150}{3,07} = 49$, stąd $\zeta = 0,406$,

$A = 20 : 0,406 = 49,3 \text{ cm}^2$. Dalej mamy $A = bd + (b-d)d = 2bd - d^2$. Dla $A = 49$
otrzymamy $49 = 2b \cdot 1,5 - 2,25$, stąd $b = 46,75 : 3 = 15,58 \text{ cm}$, więc dokładniej
 $a = 0,2045 \cdot 15,58 = 3,19$, stąd $\frac{l}{a} = \frac{150}{3,19} = 47$, $\zeta = 0,424$, $A = 20 : 0,424 = 47,2 \text{ cm}^2$.

Możemy więc zatrzymać wymiary $b = 156 \text{ mm}$, $d = 15 \text{ mm}$.

6. Wyznaczyć numera kształtówek słupa z żelaza spawalnego, złożonego z czterech kątownek (rys. 230) należyście znitowanych, jeżeli długość wolna wynosi 4 m , a odstęp kątownek 1 cm . Siła, działająca w osi słupa, jest $P = 42 \text{ t}$ a natężenie dopuszczalne $\tau = 700 \text{ kg/cm}^2$. Bez względu na wyboczenie otrzymamy $A_0 = \frac{42000}{700} = 60 \text{ cm}^2$. Ze względu na 2 dziury na nity

około 4 cm^2 i wyboczenie przyjmijmy $A = 80 \text{ cm}^2$, zatem przekrój jednej ką-

tówki 20 cm^2 . Przyjmijmy kątownki $\frac{100 \cdot 100}{11}$ o przekroju $20,95 \text{ cm}^2$ $v = 7,14$,

więc $e = 2,86$, $e_1 = 2,86 + 0,5 = 3,36 \text{ cm}^2$, zatem wedle 561) $a^2 = a_1^2 + e_1^2 =$

$= 3,01^2 + 3,36^2 = 9,06 + 11,29 = 20,35 \text{ cm}^2$, $a = 4,51 \text{ cm}$. A więc $\frac{l}{a} = \frac{400}{4,51} = 89$,

stąd $\zeta = 0,52$, więc $A = 60 : 0,52 = 115 \text{ cm}^2$. Przyjęte kątownki zatem nie wystarczają, przyjmując należy większe. Dla $A = 100 \text{ cm}^2$, otrzymamy $A_1 = 25 \text{ cm}^2$,
przyjmijmy zatem $\frac{120 \cdot 120}{11}$. Tu $v = 8,64$, więc $e = 3,86$, zatem $a^2 = 3,66^2 +$

$+ 3,86^2 = 13,40 + 14,90 = 28,30$, $a = 5,32 \text{ cm}$. A więc $\frac{l}{a} = \frac{400}{5,32} = 75$, stąd
 $\zeta = 0,57$, więc $A = 60 : 0,57 = 105 \text{ cm}^2$.

Wymiary jeszcze są za małe. Przyjmijmy następny numer kątownki

$\frac{120 \cdot 120}{12}$. Tu jest $v = 8,61$, $e = 3,89$, więc

$a^2 = 3,65^2 + 3,89^2 = 13,32 + 15,13 = 28,45$, $a = 5,33$,

prawie to samo, co pierwszej, więc

$\frac{l}{a} = \frac{400}{5,33} = 75$, $\zeta = 0,57$, $A = 60 : 0,57 = 105 \text{ cm}^2$.

Cztery kątownki $\frac{120 \cdot 120}{12}$ mają przekrój $4 \times 27,54 = 110,16 \text{ cm}^2$, od tego dwie
dziury na nity $2 \times 2 \times 1,2 = 4,8$, zatem $A = 110,16 - 4,8 = 105,36 \text{ cm}^2$. Prze-

krój zatem jest zupełnie wystarczający, zatrzymujemy kątownki $\frac{120 \cdot 120}{12}$.

7. Jaki ciężar unieść może bezpiecznie słup, złożony z 4 ćwierćkołówek $l. 20, 6 \text{ m}$ wysoki, w obu końcach wolny, jeżeli natężenie dopuszczalne przyjmijemy 1000 kg/cm^2 ?

Dla 4 ćwierćkołówek $l. 20$ jest według str. 172. $a = 7,94$, zatem

$\frac{l}{a} = \frac{600}{7,94} = 75,5$, stąd $\zeta = 0,57$.

Wedle 516) jest $P = A\tau\zeta' = 4.21,57.1000.0,57 = 49180 \text{ kg}$.

Jeżeliśmy przyjęli $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$, toby było

$$P = 4.21,57.800.57 = 39344 \text{ kg}.$$

§. 98. Wytrzymałość słupów żelaznych w razie pożaru.

Wiadomo nam z §. 18., że żelazo pod wpływem wysokiej ciepłoty ma mniejszą wytrzymałość, a do tego podczas pożaru słupy żelazne są niejednostajnie ogrzane, bo od strony pożaru ciepłota dochodzi do 600^0 , a ze strony przeciwnej trafia je struga zimnej wody z sikawki straży pożarnej. Wskutek tego oś słupa pierwotnie prosta wygina się i nateżenia z tego powodu wzrastają.

Dlatego też, jeżeli obliczamy słupy żelazne w budynkach, które mogą być narażone na pożar, słupy nie osłonięte murem lub cementem, to musimy przyjąć takie wymiary, aby słupy te i podczas pożaru nie okazały się za słabe.

Pod tym względem badali słupy żelazne doświadczalnie Bauschinger, a także M. Möller i R. Lüthmann. Möller dochodzi na podstawie tych doświadczeń do wniosku, że słupy żelazne będą bezpieczne i podczas pożaru, jeśli je obliczać będziemy wedle wzoru Rankina, jednak przyjmując wyższy współczynnik wyboczenia.

Möller proponuje przyjmować

$$\text{dla żelaza lanego} \quad A = \frac{P}{1200} \left(1 + 0,0004 \frac{l^2}{a^2} \right) \quad . \quad 570)$$

$$\text{" " spawalnego} \quad A = \frac{P}{1000} \left(1 + 0,0004 \frac{l^2}{a^2} \right) \quad . \quad 571)$$

Obliczywszy słupy żelazne wedle tych wzorów, mamy jeszcze jakąś pewność, bo słupy w ogniu łamią się wedle doświadczeń dopiero dla żelaza lanego przy $\mu = 1500 \text{ kg/cm}^2$ a dla żelaza spawalnego przy $\mu = 1200 \text{ kg/cm}^2$ dla rur a 1400 kg/cm^2 dla prętów pełnych.

§. 99. Słupy obciążone mimośrodkowo.

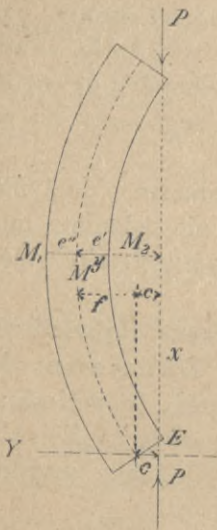
Jeżeli na słup działają siły P w kierunku równoległym do osi, przyczem kierunek ten odległy jest od osi o c , (rys. 237) to mamy do czynienia z obciążeniem mimośrodkowem.

Przypuśćmy najprzód, że siła P działa w osi głównej, tak, że wygięcie nastąpi w płaszczyźnie drugiej osi głównej. Jeżeli

przez E położymy osie współrzędnych i nazwiemy rzędne punktu M osi x i y , to możemy wyrazić natężenie w punkcie M_1

$$\left. \begin{aligned} v'' &= \frac{P}{A} + \frac{Pye''}{I} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{Aye''}{I} \right) \\ \text{natężenie w punkcie } M_2 \\ v' &= -\frac{P}{A} \left(\frac{Aye'}{I} - 1 \right) \end{aligned} \right\} . \quad 572)$$

rys:237



W środku ciężkości M jest średnie ciśnienie $\frac{P}{A}$, oś obojętna leży oddalona od osi ciężkości o z , przyczem wedle 477)

$$z = \frac{a^2}{y} = \frac{I}{Ay}, \text{ zatem } zy = a^2.$$

Jeżeli f jest ugięcie słupa w środku, to najw $y = f + c$, więc największe natężenie

$$\left. \begin{aligned} v'' &= \frac{P}{A} \left(\frac{A(f+c)e''}{I} + 1 \right) = \frac{P}{A} \left(\frac{f+c}{i_1} + 1 \right) \\ v' &= \frac{P}{A} \left(\frac{A(f+c)e'}{I} - 1 \right) = \frac{P}{A} \left(\frac{f+c}{i_2} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad 573)$$

Strzałkę $f+c$ mamy teraz obliczyć. Analogicznie do §. 93 mamy i tu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{\epsilon I}$$

a stąd, podobnie, jak tam (równ. 491), otrzymamy dla $x = 0$ w środku pręta

$$f + c = \frac{c}{\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} \right)} \dots \dots \dots 574)$$

Zamiast $\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} \right)$ możemy zazwyczaj z dostateczną dokładnością podstawić pierwsze dwa wyrazy szeregu dostawy

$$\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} \right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} \right)^2 = 1 - \frac{l^2 P}{8 \epsilon I}, \text{ więc}$$

$$f + c = \frac{c}{1 - \frac{l^2 P}{8 \epsilon I}} \dots \dots \dots 575)$$

§. 100. Natężenie dopuszczalne.

Z wzoru 575) wynika dla $c=0$ $f=0$, a gdy to wstawimy w rów. 573), otrzymamy $\nu'' = \nu' = \frac{P}{A}$, a zatem dla zwykłego ciśnienia bez uwzględnienia wybożenia.* Ponieważ skutek wybożenia przy $c=0$ t. j. przy obciążeniu środkowem dla wielkiego $\frac{l}{a}$ A wzrasta znacznie, więc mogłoby się zdarzyć, że obliczając wedle 573) przy obciążeniu mimośrodkowem otrzymalibyśmy mniejsze wymiary, niż przy obciążeniu środkowem, co jest wprost sprzecznem z prawdą. Dlatego też już z powodów teoretycznych, a także na mocy doświadczeń Tetmajera należy przyjmować dopuszczalne natężenie nie tylko mniejsze ze względu na mimośród c ale także i na stosunek $\frac{l}{a}$.

Z wzoru 573) otrzymamy, wstawivszy

$$\nu'' = \tau_w, \quad \frac{P}{A} = \tau_0, \quad \frac{Ae''}{I} = \frac{Ae''}{Aa^2} = \frac{1}{i}, \quad \text{więc}$$

$$\tau_0 = \frac{P}{A} = \frac{\tau_w}{1 + \frac{f+c}{i}} \dots \dots \dots 576)$$

Tetmajer na mocy doświadczeń przyjmuje zamiast wzoru 576) wzór

$$\tau_0 = \frac{P}{A} = \frac{\tau_w}{1 + \vartheta \frac{f+c}{i}} \dots \dots \dots 577)$$

przyczem ϑ oznacza pewien współczynnik zależny od materiału i od $\frac{l}{a}$, wyznaczony doświadczalnie a τ_w natężenie dopuszczalne na wybożenie, wyznaczone wedle 517).

Tetmajer podaje następujące współczynniki ϑ

1. Drzewo

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } \frac{l}{a} < 90 \quad \vartheta &= 0,00039 \left(\frac{l}{a} \right)^2 - 1,0115 \frac{l}{a} + 0,93 \\ \text{„ } \frac{l}{a} > 90 \quad \vartheta &= 2,058 \left(\frac{a}{l} \right)^2 - 4 \left(\frac{a}{l} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 578)$$

Z tego otrzymamy następującą tabliczkę:

$\frac{l}{a} =$	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
$\vartheta =$	0,65	0,62	0,58	0,54	0,50	0,46	0,43	0,40	0,36	0,33	0,31

$$\frac{l}{a} = 75 \quad 80 \quad 85 \quad 90 \quad 95 \quad 100 \quad 105 \quad 110 \quad 115 \quad 120 \quad 125$$

$$\vartheta = 0,28 \quad 0,26 \quad 0,24 \quad 0,22 \quad 0,20 \quad 0,18 \quad 0,16 \quad 0,15 \quad 0,14 \quad 0,13 \quad 0,12$$

$$\frac{l}{a} = 130 \quad 135 \quad 140 \quad 145 \quad 150$$

$$\vartheta = 0,11 \quad 0,10 \quad 0,10 \quad 0,09 \quad 0,09$$

2. Dla żelaza lanego otrzymał Tetmajer

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } \frac{l}{a} < 100 \quad \vartheta = 0,0001437 \left(\frac{l}{a} \right)^2 - 0,03174 \frac{l}{a} + 2,077 \\ \text{" } \frac{l}{a} > 100 \quad \vartheta = 3537 \left(\frac{a}{l} \right)^2 - 1,370 \frac{a}{l} \end{array} \right\} \quad 579)$$

Stąd otrzymujemy następującą tabliczkę:

$$\frac{l}{a} = 20 \quad 25 \quad 30 \quad 35 \quad 40 \quad 45 \quad 50 \quad 55 \quad 60$$

$$\vartheta = 1,5 \quad 1,37 \quad 1,25 \quad 1,14 \quad 1,04 \quad 0,94 \quad 0,85 \quad 0,77 \quad 0,69$$

$$\frac{l}{a} = 65 \quad 70 \quad 75 \quad 80 \quad 85 \quad 90 \quad 95 \quad 100 \quad 105$$

$$\vartheta = 0,62 \quad 0,56 \quad 0,51 \quad 0,46 \quad 0,42 \quad 0,38 \quad 0,36 \quad 0,34 \quad 0,31$$

$$\frac{l}{a} = 110 \quad 115 \quad 120 \quad 125 \quad 130 \quad 135 \quad 140 \quad 145 \quad 150$$

$$\vartheta = 0,28 \quad 0,26 \quad 0,24 \quad 0,22 \quad 0,20 \quad 0,18 \quad 0,17 \quad 0,16 \quad 0,15$$

3. Dla żelaza spawalnego i zlewnego mamy:

$$\frac{l}{a} < 70 = 70 \quad 75 \quad 80 \quad 85 \quad 90 \quad 95 \quad 100 \quad 105$$

$$\vartheta = 1,00 \quad 1,00 \quad 0,93 \quad 0,86 \quad 0,80 \quad 0,75 \quad 0,70 \quad 0,65 \quad 0,61$$

$$\frac{l}{a} = 110 \quad 115 \quad 120 \quad 125 \quad 130 \quad 135 \quad 140 \quad 145 \quad 150 \quad 155$$

$$\vartheta = 0,57 \quad 0,53 \quad 0,50 \quad 0,46 \quad 0,43 \quad 0,40 \quad 0,38 \quad 0,38 \quad 0,33 \quad 0,31$$

$$\frac{l}{a} = 160 \quad 165 \quad 170 \quad 175 \quad 180 \quad 185 \quad 190 \quad 195 \quad 200$$

$$\vartheta = 0,29 \quad 0,27 \quad 0,26 \quad 0,24 \quad 0,22 \quad 0,20 \quad 0,18 \quad 0,17 \quad 0,16$$

§. 101. Przykłady.

1. Słup drewniany o długości 4 m i przekroju kwadratowym 20×20 cm jest obciążony z obu stron siłami 10 t, które zaczepiają w odstępach $c=10$ cm od środka, a więc w środku krawędzi. Jakie natężenie powstaje w słupie?

$$\begin{aligned} \text{Tu jest } \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} &= \sqrt{\frac{10000 \cdot 12}{120000 \cdot 20^4}} = \frac{1}{400}, \text{ dost } \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\varepsilon I}} = \text{dost } \frac{200}{400} = \text{dost } 0,5 \\ &= \text{dost } \cdot \frac{0,5 \cdot 180}{\pi} = \text{dost } 28,4' = 0,879. \end{aligned}$$

W przybliżony sposób otrzymalibyśmy

$$1 - \frac{400^2}{8} \cdot \frac{10000 \cdot 12}{120000 \cdot 20^4} = 1 - \frac{1}{8} = 0,875.$$

A więc wedle 574)

$$f + c = \frac{c}{0,879}, f + 10 = \frac{10}{0,879} = 11,38, \text{ stąd } f = 1,38 \text{ cm.}$$

Wedle 577) otrzymamy $\tau_w = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{f+c}{8} \right) =$

Tu $a = 0,2887 \cdot 20 = 5,774$, $\frac{l}{a} = \frac{400}{5,77} = 69$, więc $\mathcal{S} = 0,31$, $i = \frac{20}{6} = 3,33$, stąd

$$\tau_w = \frac{10000}{400} \left(1 + 0,31 \frac{11,38}{3,33} \right) = 25(1 + 1,06) = 51,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle 517) $\tau_w = \tau \zeta'$, stąd $\tau = \frac{\tau_w}{\zeta'}$. Dla $\frac{l}{a} = 69$ jest $\zeta' = 0,543$, więc

$$\tau = \frac{51,5}{0,543} = 95 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle wzoru teoretycznego 577) otrzymamy jednak

$$v'' = \frac{10000}{400} \left(\frac{400 \cdot 11,38 \cdot 10 \cdot 12}{20^4} + 1 \right) = 25(3,414 + 1) = 110,4 \text{ kg/cm}^2,$$

$$v' = -25(3,414 - 1) = 70,6 \text{ kg/cm}^2.$$

Z obu tych wzorów zatrzymamy wyniki większe. Widzimy w obu wypadkach, że wymiary są za małe.

Przyjąwszy $23 \times 23 \text{ cm}$, otrzymamy

$$\sqrt{\frac{10000 \cdot 12}{12000 \cdot 23^4}} = \frac{1}{529}, \text{ dost } \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{\epsilon I}} = \text{dost } \frac{200}{529} = \text{dost } 0,378.$$

Więc dost $\frac{0,378 \cdot 180}{\pi} = \text{dost } 21,66^\circ = 0,919.$

A więc $f + 10 = \frac{10}{0,929} = 10,76$, zatem $f = 0,76 \text{ cm}$.

Wedle 573) mamy

$$v'' = \frac{10000}{529} \left(\frac{529 \cdot 10,76 \cdot 10 \cdot 12}{23^4} + 1 \right) = 18,9(2,441 + 1) = 65 \text{ kg/cm}^2.$$

$$v' = -18,9(2,441 - 1) = -27,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle 577) otrzymamy, ponieważ tu $a = 0,2887 \cdot 23 = 6,64$

$$\frac{l}{a} = \frac{400}{6,64} = 60, \text{ więc } \mathcal{S} = 0,36, i = \frac{23}{6} = 3,83, \text{ stąd}$$

$$\tau_w = \frac{10000}{529} \left(1 + 0,36 \frac{10,76}{3,83} \right) = 18,9(1 + 1,01) = 38 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle 517) jest $\tau = \frac{\tau_w}{\zeta'}$, a że dla $\frac{l}{a} = 60$, jest $\zeta' = 0,603$, więc

$$\tau_w = \frac{38}{0,603} = 63 \text{ kg/cm}^2.$$

Tu, jak widzimy, wyniki obu wzorów teoretycznego i doświadczalnego zgadzają się dostatecznie.

Zostawimy tu wymiar $23 \times 23 \text{ cm}$.

2. Jaka siłę wytrzyma słup o przekroju I l. 20, obciążony mimośrodowo w odstępnie 5 cm od osi ścianki, dla długości wolnej 3 m . Natężenie dopuszczalne niech będzie 1000 kg/cm^2 .

Przyjąwszy tymczasowo $f = 0$, otrzymamy z 573)

$$P = \frac{A v''}{\frac{A c e''}{I} + 1}$$

Przypuścimy tymczasowo ze względu na założenie $f = 0$

$$v'' = 800 \text{ kg/cm}^2, \text{ to } P = \frac{37,55 \cdot 800}{\frac{37,55 \cdot 5 \cdot 4,8}{155,5} + 1} = \frac{30040}{6,826} = 4400 \text{ kg}.$$

Szukajmy teraz dla $P = 4400 \text{ kg}$ v'' , to otrzymamy z 575)

$$f + 5 = \frac{5}{1 - \frac{300^2}{8 \cdot 200000 \cdot 155,5}} = \frac{5}{0,8408} = 5,947$$

Więc wedle 573)

$$v'' = \frac{4400}{37,55} \left(\frac{37,55 \cdot 5,947 \cdot 4,8}{155,5} + 1 \right) = 117,18 (7,05 + 1) = 1006 \text{ kg/cm}^2.$$

Możemy zatem zatrzymać siłę 4400 kg . Gdyby różnica była większa, trzeba by odpowiednio siłę zmienić i rachować raz jeszcze.

Spróbujemy jeszcze obliczyć natężenie wedle Tetmajera. Tu wedle tablicy na str. 161

$$a = 2,03. \frac{l}{a} = \frac{300}{2,03} = 148, \text{ więc } \vartheta = 35, i = 0,859, \text{ więc}$$

$$\tau_w = \frac{4400}{37,55} \left(1 + 0,35 \cdot \frac{5,947}{0,859} \right) = 117,18 (1 + 2,423) = 400,9.$$

$$\text{Dla } \frac{l}{a} = 148 \text{ jest } \zeta = 0,25, \text{ więc } \tau = \frac{400,9}{0,25} = 804 \text{ kg/cm}^2.$$

Poprzedni wynik był większy, więc go zostawimy.

3. Obliczmy znowu siłę, jaką wytrzyma słup o przekroju tym samym i tym samym mimośrodku dla długości wolnej 4 m . Natężenie dopuszczalne niech i tu będzie 1000 kg/cm^2 .

Przyjąwszy tymczasowo $f = 0$ a v'' ze względu na to przyjęcie i wielkie l tu tylko 700 kg/cm^2 , otrzymamy

$$P = \frac{37,55 \cdot 700}{\frac{37,55 \cdot 5 \cdot 4,8}{155,5} + 1} = \frac{26285}{6,826} = 3851 \text{ kg},$$

zamiast czego przyjmijmy okrągło $P = 3850 \text{ kg}$. Z rów. 575) otrzymamy

$$f + 5 = \frac{5}{1 - \frac{400^2}{8 \cdot 200000 \cdot 155,5}} = \frac{5}{1 - 0,2476} = 6,645 \text{ cm}.$$

Więc wedle 573)

$$v'' = \frac{3850}{37,55} \left(\frac{37,55 \cdot 6,645 \cdot 4,8}{155,5} + 1 \right) = 102,6 (7,70 + 1) = 892 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle Tetmajera otrzymamy, ponieważ tu

$$a = 2,03, \quad \frac{l}{a} = \frac{400}{2,03}, \quad \text{więc } \vartheta = 0,166, \quad \zeta' = 0,14, \quad i = 0,859, \quad \text{więc}$$

$$\tau_w = \frac{3850}{37,55} \left(1 + 0,166 \frac{6,645}{0,859} \right) = 102,6(1 + 1,284) = 234 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{a dalej } \tau = \frac{234}{0,14} = 1671 \text{ kg/cm}^2.$$

Stąd widzimy więc, że tu natężenie z uwzględnieniem wybożenia jest prawie dwa razy większem. Musimy tu przyjąć P znacznie mniejsze. Ponieważ we wzorze 577) ϑ , A i i są stałe a $f + c$ wedle 575) dla mniejszego P jest mniejsze, zatem P jest większe, więc

$$P > 3851 \cdot \frac{1000}{1671} = 2304 \text{ kg}.$$

Przyjmijmy $P = 2350 \text{ kg}$, to

$$f + \delta = \frac{5}{1 - \frac{400^2}{8 \cdot 2000000 \cdot 155,5}} = \frac{5}{1 - 0,151} = \frac{5}{0,849} = 5,889 \text{ cm},$$

$$\text{zatem } \tau_w = \frac{2350}{37,55} \left(1 + 0,166 \frac{5,889}{0,859} \right) = 62,58(1 + 1,138) = 140 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{a stąd } \tau = \frac{140}{0,14} = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

4. Słup z żelaza lanego niesie na lewym wsporniku ciężar $8t$, na prawym równocześnie $28t$; jakie wymiary ma mieć ten słup, jeżeli natężenie dopuszczalne przyjmiemy 1000 kg/cm^2 ?

Wypadkowa $36t$ leży w odstępnie od D (rys. 238) o $\frac{28}{36} \cdot 38 = 29,5 \text{ cm}$, zatem od B o $3,5 \text{ cm}$ na prawo.

Przypuśćmy ze względu na wybożenie i mimośród $t_0 = 250 \text{ kg/cm}^2$. Wtedy

$$A = \frac{36000}{250} = 144 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2).$$

Jeżeli $d_1 = 0,8d$, to

$$A = \frac{\pi d^2}{4} (1 - 0,64) = 0,09 \pi d^2, \quad \text{stąd } d = \sqrt{\frac{144}{0,09 \pi}} = 22,57,$$

zamiast czego przyjmiemy $d = 23 \text{ cm}$, $g = 23 \text{ mm}$. Dalej mamy

$$a = \frac{1}{4} \sqrt{23^2 + 18,4^2} = 7,36 \text{ cm}, \quad i = \frac{2a^2 54,17}{d^3 11,5} = 4,71 \text{ cm}, \quad \frac{l}{a} = \frac{445}{7,36} = 60,5.$$

Wedle 575) mamy

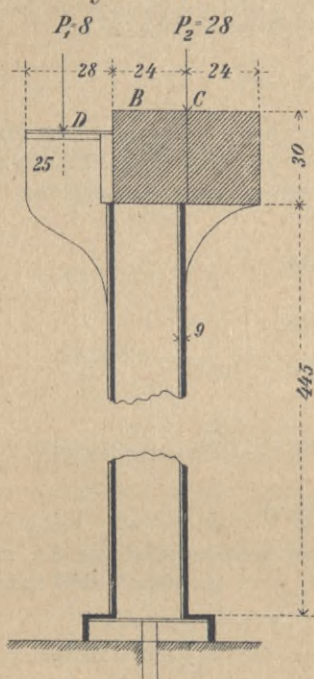
$$f + c = \frac{3,5}{1 - \frac{445^2}{8 \cdot 1000000 \cdot 0,0491(23^4 - 18,4^4)}} = \frac{3,5}{1 - 0,11} = 3,93 \text{ cm}.$$

Zatem wedle 573) i 576)

$$\nu'' = \frac{36000}{149,6} \left(1 + \frac{3,93}{4,71} \right) = 235,16 \cdot 1,835 = 431 \text{ kg/cm}^2.$$

Dalej otrzymamy $\nu' = 235,16(0,835 - 1) = -38,8 \text{ kg/cm}^2$.

rys: 238.



$$\text{więc } \tau_w = \frac{36000}{149,6} \left(1 + 0,68 \frac{3,93}{4,71} \right) = 235,16 \cdot 1,568 = 369 \text{ kg/cm}^2.$$

Jeżeli jednak obliczymy wedle wzoru Tetmajera 577), to dla

$$\frac{l}{a} = 60,5 \quad \zeta = 0,68 \quad \text{a} \quad \zeta' = 0,314,$$

a dalej

$$\tau = \frac{369}{0,314} = 1168 \text{ kg/cm}^2.$$

Tu więc wzór teoretyczny daje stanowczo za mały wynik, wedle wzoru Tetmajera τ jest za wielkie musimy przyjąć d większe.

Przyjmujemy $d = 25 \text{ cm}$, $g = 2,5$
 $d_1 = 29 \text{ cm}$, to

$$a = \frac{1}{4} \sqrt{25^2 + 20^2} = 8,0 \text{ cm},$$

$$i = \frac{64}{12,5} = 5,02 \text{ cm},$$

$$\frac{l}{a} = \frac{445}{8} = 55,6.$$

Wedle 575) mamy

$$f+c = \frac{3,5}{1 - \frac{445^2}{8 \cdot 1000000 \cdot 0,0491(25^4 - 20^4)}} = \frac{3,5}{1 - 0,08} = 3,80.$$

Dla $\frac{l}{a} = 55,6$ mamy $d = 0,76$, $\zeta' = 0,35$, więc

$$\tau_w = \frac{36000}{176,7} \left(1 + 0,76 \frac{3,80}{5,02} \right) = 203,7 \times 1,575 = 321 \text{ kg/cm}^2, \text{ a dalej}$$

$$\tau = \frac{321}{0,75} = 917 \text{ kg/m}^2.$$

Ponieważ dla $a = 24 \text{ cm}$ τ byłoby prawdopodobnie większe, niż 1000 kg/cm^2 , więc zatrzymamy $d = 25$, $g = 25 \text{ cm}$.

Właściwie wskutek zwiększenia d zmniejszy się także c i τ będzie jeszcze mniejsze.

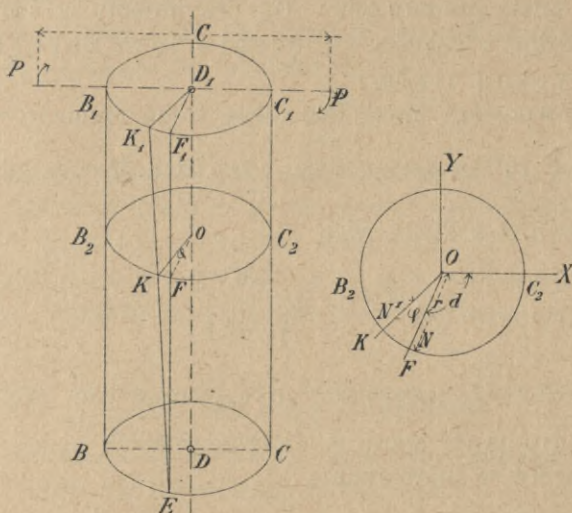
Z powyższych przykładów widzimy, że właściwie należałoby obliczać wedle obu wzorów, teoretycznego 573) i Tetmajera 577) i przyjmować natężenie większe, otrzymane z obu wzorów. Wzory Tetmajera dają większe wyniki dla natężenia, jeśli $\frac{l}{a}$ jest większe, a także dla lanego żelaza wogóle z powodu stosunkowo małego ζ' .

VIII. Wytrzymałość na skręcanie.

§. 102. Wzory zasadnicze.

Jeżeli siły, działające na ciało, sprowadzić się dadzą dla pewnego przekroju do pary sił, której płaszczyzna jest równoległa do tego przekroju, a więc prostopadła do osi, to ciało to pracuje na skręcanie.

rys:239



Na ciało $BCEB_1C_1$ działa w płaszczyźnie $B_1C_1F_1$ (rys. 239) moment Pc . Wskutek tego nastąpi przesunięcie punktów tego i innych przekrojów i tak punkt F_1 przesunie się do K_1 , F do K i t. d. Przesunięcia te są różne, w pewnym włóknie jednak DD_1 są zerem, a włókno to nazywamy osią skręcania.

Zauważmy punkt N w przekroju B_2C_2F , a zrozumiemy, że przesunięcie punktu N będzie $NN' = \overline{ON}\varphi = r\varphi$, a przesunięciu temu będzie odpowiadać napięcie ścinające σ , a więc $\sigma = m \cdot r\varphi$, gdy m jest ilością stałą.

Jeżeli napięcie to rozłożymy na składowe σ_x i σ_y , działające w kierunkach osi OX i OY , to $\sigma_x = \sigma \operatorname{wst} \alpha$, a $\sigma_y = \sigma \operatorname{dost} \alpha$. Dla równowagi musi być

$$\int \sigma_x d^2 A = 0 \text{ i } \int \sigma_y d^2 A = 0,$$

a gdy wstawimy wartości,

$$\int \sigma \text{ wst } \alpha d^2 A = m \varphi \int r \text{ wst } \alpha d^2 A = m \varphi \int x d^2 A = 0$$

$$\text{ i } \int \sigma \text{ dost } \alpha d^2 A = m \varphi \int r \text{ dost } \alpha d^2 A = m \varphi \int y d^2 A = 0,$$

a więc

$$\int x d^2 A = 0 \text{ i } \int y d^2 A = 0 \quad \dots \dots \dots 580)$$

Równania te wypełniają się wtedy, gdy początek współrzędnych, gdzie przesunięcie = 0, przyjmiemy w środku ciężkości przekroju, a więc oś skręcenia jest zarazem osią geometryczną ciała.

Dla równowagi musi być także suma momentów w przekroju $B_2 C_2 F$ równa zeru, więc $\int \sigma r d^2 A + M = 0$, gdy $M = Pc$, czyli $m \varphi \int r^2 d^2 A + M = 0$, więc

$$m \varphi = - \frac{M}{\int r^2 d^2 A}.$$

Wyraz $\int r^2 d^2 A = I_0$ nazywamy biegunowym momentem bezwładności (fr. *moment d'inertie polaire*).

Wstawmy w to równanie

$$m \varphi = \frac{\sigma}{v} \text{ i } I_0 = \int r^2 d^2 A = \int (x^2 + y^2) d^1 A = \int x^2 d^2 A +$$

$$+ \int y^2 d^2 A + 2 \int xy d^2 A = I_1 + I_2 + 2K, \text{ a jeżeli osi } OX \text{ i } OY \text{ są}$$

osiąmi głównymi, to $K = 0$, więc $I_0 = I_1 + I_2$. Dla przekroju kołowego, kwadratu i wieloboków regularnych jest $I_1 = I_2$, więc $I_0 = 2I$.

Możemy zatem napisać

$$\sigma = - \frac{Mr}{I_1 + I_2} = - \frac{Mr}{I_0} \quad \dots \dots \dots 581)$$

Z równania tego wynika, że największe natężenie σ jest dla *najw.* r , a więc dla najdalszych punktów obwodu.

Kąt φ nie jest stałym dla wszystkich przekrojów, lecz zmienia się od przekroju do przekroju. Niechaj zmiana kąta φ

na jednostkę długości będzie ψ , to możemy w przybliżeniu przyjąć, że kąt φ jest proporcjonalny do długości z , więc $\varphi = z\psi$.

Przesunięcie punktu N , jest, jak wiemy, równe $r\varphi$, dla przekroju o dx oddalonego będzie zaś $r(\varphi + d\varphi)$, przesunięcie więc względne $\frac{r d\varphi}{dz} = r\psi$; współczynnik ψ nazywamy współczynnikiem sprężystości na skręcenie (fr. *coefficient d'élasticité de torsion*).

Planat udowadnia, że $\psi = \frac{1}{2}\varepsilon$ do $\frac{3}{8}\varepsilon$ wedle tego, czy skręcenie jest małe czy znaczne.

Jeżeli ε_1 nazwiemy współczynnik sprężystości poprzecznej, to $\sigma = \varepsilon_1 r\psi$, a zatem ze względu na 581)

$$\psi = -\frac{M}{\varepsilon_1 I} \dots \dots \dots 582)$$

Teorya ta opiera się na przypuszczeniu, że przekrój poprzeczny pozostaje płaskim po skręceniu i że natężenia są prostopadłe do promieni wodzących danych punktów. Przypuszczenia te sprawdzają się jednak tylko przy przekroju kołowym. Dla innych przekrojów wzory powyższe są tylko przybliżone.

§. 103. Wał pełny i wydrążony.

Dla przekroju kołowego (rys. 239) możemy napisać na podstawie równ. 581) bez względu na znak

$$M = \frac{I_0 \sigma}{r} = \frac{(I + I_1) \sigma}{r}$$

Ponieważ dla koła jest

$$I = I_1 = \frac{\pi}{64} d^4, \text{ więc } I_0 = \frac{\pi}{32} d^4, \text{ a } r = \frac{d}{2}$$

Jeżeli więc chcemy dopuścić natężenie ścinające τ_1 , to

$$M = \frac{\pi}{32} \frac{d^4 \tau_1}{\frac{d}{2}}, \text{ a stąd}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M}{\pi \tau_1}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau_1}} \dots \dots \dots 583)$$

Dla przekroju rurowego (rys. 86) jest

$$I_0 = I + I_1 = 2I = 2 \frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4), \text{ a stąd}$$

$$M = \frac{\pi (d^4 - d_1^4) \tau_1}{32 \frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4 - d_1^4}{16 d} \cdot \tau_1 = 0,196 \frac{d^4 - d_1^4}{d} \tau_1, \text{ więc}$$

$$d_1 = \sqrt[4]{d^4 - 1,502 \frac{M d}{\tau_1}} \dots \dots \dots 584)$$

Dla przyjętego d da się więc d_1 łatwo obliczyć.

Nazwawszy $\frac{d_1}{d} = n$, otrzymamy $M = 0,196 \frac{1 - n^4}{1} \tau_1$, a stąd

$$d = \sqrt[3]{1,172 \frac{M}{\tau_1 (1 - n^4)}} \dots \dots \dots 585)$$

§. 104. Przekrój kwadratowy.

Jeżeli bok kwadratu jest a , to możemy, w przybliżeniu licząc, zastosować także wzór 581). Tu jest

$$I_0 = 2 \cdot \frac{1}{14} a^4 = \frac{1}{6} a^4,$$

więc bez względu na znak będzie

$$\text{najw } \sigma = \frac{Mr}{\frac{1}{6} a^4} = \frac{M \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}}{\frac{1}{6} a^4} = \frac{3 \sqrt{2} M}{a^3}.$$

Jeżeli natężenie dopuszczalne jest τ_1 , to $\tau_1 a^3 = 3 \sqrt{2} M = 4,243 M$, więc

$$a = \sqrt[3]{\frac{4,243 M}{\tau_1}} = 1,62 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau_1}} \dots \dots \dots 586)$$

Według dokładniejszej teorii (p. Kluger: Wykład wytrzymałości materiałów str. 328) otrzymamy

$$\text{najw } \sigma = 4,5 \frac{M}{a^3},$$

a stąd wstawivszy τ_1 za $\text{najw } \sigma_1$ będziemy mieli

$$a = \sqrt[3]{\frac{4,5 M}{\tau_1}} = 1,65 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau_1}} \dots \dots \dots 587)$$

IX. Belki kratowe i więzary dachowe.

§. 105. Uwagi ogólne.

Wyłożywszy wszystkie rodzaje wytrzymałości, przystępujemy teraz do zespołów, które obliczamy według zasad, poznanych w poprzednich rozdziałach, nad którymi jednak tutaj osobno bliżej się zastanowimy.

Według równania 147)

$$\frac{M}{\tau} = \frac{I}{e},$$

zatem moment oporu belki, a więc i obciążenie, które belka unieść może, jest tem większe, im większy jest moment bezwładności. Ponieważ

$$I = \int \int d^2 A y^2,$$

więc moment bezwładności jest tem większy, im większe y . Najkorzystniejszy rozkład materiału byłby więc w przekroju o wielkiej wysokości, w którym materiał byłby skupiony w warstwach skrajnych. Belka o takim przekroju składa się z dwu oddzielnych podłużnych części t. z. pasów (n. *Gurt*, *Gurtung*, fr. *semelle*, *plate-bande*, an. *chord*, *boom*), które musimy o tyle połączyć, aby tworzyły całość. W belce blaszanej ścianka łączy oba pasy; jeżeli zamiast ścianką łączymy pasy dla oszczędności materiału prętami ułożonymi w kratę, wtedy belkę tę nazywamy belką kratową (n. *Gitterträger*, fr. *poutre en treillis*, an. *trellis girder*, *frame*, cz. *nosník přihradovy*).

Belka kratowa składa się więc z pasu górnego (n. *Obergurt*, fr. *semelle superieure*, an. *top-chord*, *upper-boom*, cz. *pas horní*), pasu dolnego (n. *Untergurt*, fr. *semelle inférieure*, an. *bottom-chord*, *lower boom*, cz. *pas spodní*) i części łączących oba pasy czyli kraty (n. *Gitterwerk*, fr. *assemblage du treillis*, an. *trellis work*, *web*, cz. *pruty vypluvací*). W każdym przekroju pracuje jeden pas na ciągnienie, drugi na ciśnienie, jeden zatem stara się przedłużyć się, drugi skrócić. W obu pasach działają zatem siły wprost przeciwne, które przenoszą się przez kratę i znoszą, jeżeli oba pasy mają tworzyć jedną belkę. Aby siły te przenieść z jednego pasu na drugi, musimy je rozłożyć w dwu kierunkach, łączymy zatem pasy dwoma rzędami pod rozmaitymi kątami nachylonych prętów, ułożonych w kratę. Pręty te nazy-

wamy krzyżulcami (n. *Gitterstäbe*, fr. *barre de remplissage*, *bracon*, *étresillon*, an. *brace*).

Przy obliczeniu belki kratowej przypuszczamy najprzód, że krzyżulce z pasami i części pasów nawzajem połączone są w węzłach (n. *Knoten*, fr. *noeud*, an. *knot*, *apex*, cz. *styčnik*) przegibnie i spółśrodkowo, wskutek czego mogą w krzyżulcach i pasach działać tylko siły podłużne w kierunku osi pręta. Każda inna siła, działająca nie w kierunku osi pręta, musiałaby sprawić obrót pręta około sworznia. Jeżeli więc panuje równowaga, siły działają w kierunku osi pręta.

Dalszem przypuszczeniem jest, że siły zewnętrzne działają tylko w węzłach, a krzyżulce przedstawiamy sobie tymczasowo bez ciężkości.

Nareszcie przypuszczamy, że krzyżulce są proste, a wskutek tego i działania siły w kierunku osi pręta powstaje we wszystkich przekrojach jednego pręta nateżenie jednakowe. Przekroje prętów obliczamy zatem tak, aby nateżenie było równe nateżeniu dopuszczalnemu. Widzimy stąd że przy belkach kratowych wyzyskujemy materiał zupełnie, bo we wszystkich częściach belki mamy jednakową pewność gdy, tymczasem w belce blaszanej nateżenie w warstwach skrajnych jest wielkie, a blisko osi ciężkości bardzo małe; materiał więc nie jest zupełnie wyzyskany.

§. 106. Warunki wyznaczalności.

Przy obliczeniu belek kratowych chodzi nam o wyznaczenie sił wewnętrznych, działających w krzyżulcach i częściach pasów w kierunku ich osi. Dla każdego węzła z osobna muszą być siły zewnętrzne, działające na ten węzeł i siły wewnętrzne prętów, wychodzących zeń, w równowadze, więc możemy dla każdego węzła ustawić dwa równania na tej podstawie, że suma składowych poziomych i suma składowych pionowych tych sił jest równą zeru; dla m węzłów otrzymamy więc $2m$ równań. W tych równaniach zawarte są jednak trzy równania, którebyśmy mogli ustawić dla sił zewnętrznych. Siły zewnętrzne bowiem muszą być między sobą w równowadze, gdyż inaczej cała belka musiałaby się poruszyć, a więc sumy składowych sił zewnętrznych pionowych, poziomych i momentów muszą być równe zeru. Z tego wynika, że nie możemy dowolnie przyjąć

wszystkich sił zewnętrznych, lecz że muszą one zadość uczynić trzem warunkom. Z tych $2m$ równań, któreśmy otrzymali, dadzą się ustawić trzy równania, określające warunki równowagi sił zewnętrznych. Reszty $2m - 3$ równań możemy użyć do wyznaczenia nieznanych sił wewnętrznych. Jeżeli tedy n oznacza ilość krzyżulców i części pasów, to mamy n niewiadomych sił wewnętrznych, do których wyznaczenia potrzebujemy n równań.

Jeżeli $2m - 3 = n$, 588)

to wtedy mamy właśnie dostateczną ilość równań do wyznaczenia sił wewnętrznych; belkę taką nazywamy belką kratową statycznie wyznaczalną (n. *statisch bestimmt*, fr. *stricte, indéformable* cz. *přihradovina tuha*), Jeżeli $2m - 3 > n$, wtenczas mamy więcej równań, niż niewiadomych, a więc równania te określają jeszcze $2m - 3 - n$ warunków, które dla równowagi muszą być spełnione. Ponieważ przy zmianie obciążenia takiej belki musi ona zmienić swój kształt, aby dopełnić warunków równowagi, więc belkę taką nazywamy chwiejną lub niesamoistną (n. *labil, unselbstständig* fr. *insuffisant, déformable, cz. netuhá, vratká*) Przykładem belki kratowej chwiejnej są mosty wiszące.

Jeżeli nakoniec $2m - 3 < n$, wtenczas nie możemy wyznaczyć statycznie wszystkich niewiadomych, belka taka jest statycznie niewyznaczalną (n. *statisch unbestimmt*, fr. *hyperstatique, surabondant*). Jeżeli $2m - 3 - n = 1$, to belka kratowa jest niewyznaczalną 1go rzędu, jeżeli brakuje do wyznaczenia niewiadomych 2 równań, to belka kratowa jest niewyznaczalną 2go rzędu i t. d. Chcąc wyznaczyć siły wewnętrzne belki statycznie niewyznaczalnej, musimy ustawić jeszcze $n - 2m + 3$ równań, a to albo czyniąc pewne przypuszczenia lub też badając odkształcenia belki według prawideł sprężystości.

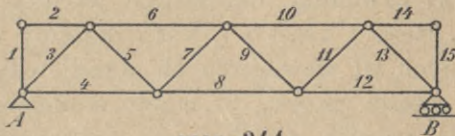
Dla belki kratowej AB (rys. 240) jest $n = 15$, $m = 9$, więc $2m - 3 = 15 = n$. Belka ta jest zatem statycznie wyznaczalną.

Dla belki CD (rys. 241) mamy $n = 26$, $m = 14$, $2m - 3 = 28 - 3 = 25 < n$. Belka ta jest więc statycznie niewyznaczalną 1go rzędu, bo $n - 2m + 3 = 1$.

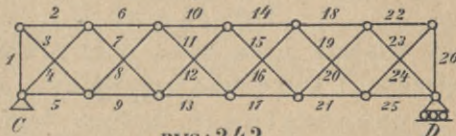
Dla belki AB (rys. 242) mamy $n = 22$, $m = 12$, $2m - 3 = 24 - 3 = 21 < n$, więc belka jest niewyznaczalną pierwszego rzędu. Możemy z niej jednak łatwo otrzymać statycznie wyznaczalną, opuściwszy jeden krzyżulec np. 12, gdyż wtedy będzie $2m - 3 = n$.

Dla belki AB (rys. 243) jest $n = 8$, $m = 6$, więc $2m - 3 = 12 - 3 = 9 > 8$. Belka ta jest zatem niesamoistną pierwszego rzędu. Chcąc zrobić z niej kra-

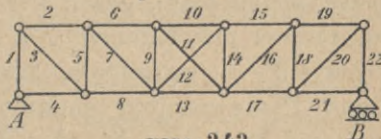
rys: 240



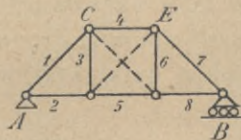
rys: 241



rys: 242



rys: 243



townicę statycznie wyznaczalną, musielibyśmy dodać jeszcze jeden krzyżulec np. ED , aby $2m - 3 = n$. Gdybyśmy dodali jeszcze drugi krzyżulec np. CF , to wtedy $2m - 3$ byłoby $> n$, otrzymalibyśmy więc belkę kratową niewyznaczalną 1 go rzędu.

Dotychczas przypuszczaliśmy, że siły zewnętrzne a zatem i oddziaływania są już wyznaczone. Belka może być jednak także statycznie niewyznaczalną ze względu na rodzaj podparcia. Zależy to od ustroju łożysk. Jeżeli łożysko jest wałkowe (n. *Walzenlager*), to jest składa się z kilku wałków, to dla równowagi oddziaływanie może być tylko prostopadłe do podstawy, na której leżą wałki, bo gdyby było ukośne, to składowa równoległa do podstawy wywołałaby obrót wałków. Jeżeli to się nie dzieje, to oddziaływanie jest prostopadłe do podstawy wałków, zwykle zatem pionowe. Jeżeli łożysko składa się z dwu części połączonych za pomocą sworznia, więc przegibnie, to kierunek oddziaływania musi przechodzić przez sworznień. Łožysko takie nazywamy kołyskowym (n. *Kipplager*).

Jeżeli urządzimy łożysko kołyskowe i wałkowe zarazem, to znamy punkt zaczepienia i kierunek oddziaływania, pozostaje tylko jedna niewiadoma, wielkość oddziaływania.

Jeżeli łożysko jest tylko kołyskowe, to znamy punkt zaczepienia oddziaływania, ale nie znamy kierunku i wielkości oddziaływania, są tu więc dwie niewiadome. Wreszcie gdy łożysko jest stałe, to nie znamy ani punktu zaczepienia, ani kierunku, ani wielkości oddziaływania. Mamy tu trzy niewiadome.

Dla belki w dwu punktach podpartej musi być jedno łożysko kołyskowe, drugie kołyskowe i wałkowe. Mamy wtedy $1 + 2 = 3$ niewiadome, które dadzą się wyznaczyć z trzech równań równowagi sił zewnętrznych.

W ogóle jeżeli mamy a niewiadomych podporowych, to trzy z nich dadzą się wyznaczyć z 3 równań, wyrażających równowagę sił zewnętrznych, zatem pozostaje $(a - 3)$ niewiadomych. Z uwzględnieniem niewiadomych podporowych możemy zatem napisać zamiast 588) jako warunek wyznaczalności belki

$$2m - 3 = n + (a - 3), \text{ zatem}$$

$$2m = n + a \dots\dots\dots 589)$$

Jeżeli nazwiemy ilość łożysk stałych kolebkowych s , ilość wałkowych kolebkowych w , to $a = 2s + w$, więc $2m = 2s + w + n \dots\dots\dots 590)$

Dla belki kratowej AB (rys. 242) jest $n = 15$, $m = 9$, $s = 1$, $w = 1$, więc $2m = 18$, $2s + w + n = 2 + 1 + 15 = 18$. Zatem belka jest statycznie wyznaczalną. Gdyby w B było także łożysko stałe kołyskowe, toby było $s = 2$, więc $2s + w + n = 4 + 15 = 19$, belka byłaby z powodu łożysk statycznie niewyznaczalną.

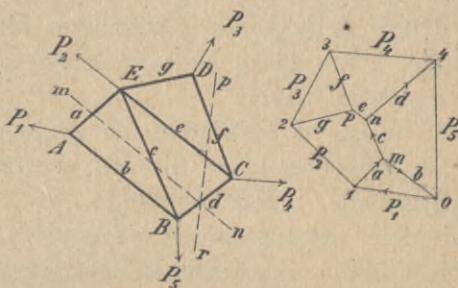
§. 107. Wyznaczenie wykresne sił wewnętrznych za pomocą metody wielobokowej.

Dla równowagi sił zewnętrznych powinien, jak wiemy, zamknąć się wielobok sił i wielobok sznurowy. Oprócz tego muszą być dla każdego węzła siły zewnętrzne i wewnętrzne w równowadze, a więc dla każdego węzła musi się odnośny wielobok sił zamknąć. Jeżeli zaczniemy od węzła, w którym schodzą się dwa pręty, to kierunki i wielkości wszystkich sił z wyjątkiem wielkości dwu sił wewnętrznych przeciętych prętów są wiadome, możemy więc wykreślić wielobok sił i wyznaczyć niewiadome. Idziemy teraz do następnego węzła, w którym schodzą się trzy pręty, z tych jeden, dla którego wyznaczyliśmy już siłę wewnętrzną. Mamy więc znów tylko dwie niewiadome i po-

stępujemy, jak pierwej. W ten sposób dalej postępując, możemy wyznaczyć wszystkie siły wewnętrzne. Ułatwimy sobie przytem wykreślenie, jeżeli wieloboków sił dla pojedynczych węzłów nie będziemy kreślić osobno, lecz wszystkie na jednym rysunku.

Na rysunku 244. widzimy belkę kratową, na którą działają siły. Dla równowagi dają one zamknięty wielobok sił, a także

rys: 244



wielobok sznurowy dla jakiegokolwiek bieguna musi się zamknąć (na rysunku opuściliśmy wielobok sznurowy). Wykreślmy teraz wielobok sił dla węzła A , gdzie schodzą się tylko dwa pręty, w których siły działające nazwijmy a i b . W wieloboku sił 01 przedstawia siłę P_1 , poprowadźmy $1m \parallel AE$ i $0m \parallel AB$, to te dwie proste przetną się w punkcie m , a proste Om i $1m$ przedstawiają kierunki i wielkości sił wewnętrznych a i b . Z kierunku strzałek w wieloboku $01m$ poznamy, że siły a i b działają w kierunku od węzła A , a więc przedstawiają ciągnięcie. Idziemy teraz do węzła B . Tu znamy P_5 i b , niewiadome są c i d , które otrzymamy, kreśląc w podobny sposób wielobok sił dla węzła B $40mn$, a więc $mn = c$, $n4 = d$. I tu obie siły są dodatnie t. j. przedstawiają ciągnięcie. W podobny sposób postępując dalej, otrzymamy wykreślenie siły wewnętrzne, działające we wszystkich częściach belki czyli tak zwany plan sił (n. *Kräftenplan*, fr. *épure*, an. *force diagram*).

Metodę tę podał najpierw Maxwell*) w roku 1864, a Cremona**) w roku 1872. Nazywają ją metodą Cremony,

*) *On reciprocal figures and diagrams of forces*. 1864.

**) *Le figure reciproche nella statica grafica*. Milano 1872.

choć raczej należałoby ją nazwać metodą Maxwella lub metodą wielobokową (n. *Polygonalmethode*).

Z rys. 244. widzimy, że plan sił łączy się ściśle z wielobokiem sił. Nim więc przystąpimy do wykreślenia planu sił, musimy najprzód mieć wykreślony wielobok sił i wyznaczone wielkości oddziaływań. Boki planu sił są na mocy konstrukcyi równoległe do prętów belki kratowej.

§. 108. Metoda przecięć.

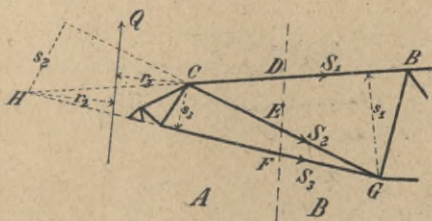
a) Analityczna.

Druga metoda wyznaczenia sił wewnętrznych belki kratowej jest metoda przecięć (n. *Schnittmethode*, an. *method of sections*). Analitycznie zastosował pierwszy tę metodę Ritter (1861), dlatego nazywamy ją metodą Rittera.

Jeżeli belkę kratową przetniemy na dwie części *A* i *B*, to jeżeli chcemy, aby część *A* pozostała w równowadze, musimy przyłożyć siły wewnętrzne przeciętych prętów w punktach, gdzieśmy je przecięli. Jeżeli przetniemy trzy pręty nieprzecinające się w jednym punkcie, to dadzą się siły wewnętrzne tych prętów wyznaczyć, gdyż dla równowagi możemy trzy równania ustawić. Niech *CD*, *CE* i *GF* (rys. 245) będą trzy przecięte pręty, to gdy prawą część belki odejmiemy, dla równowagi za-

czepiamy dotychczas nieznanne siły wewnętrzne prętów S_1, S_2, S_3 . Wypadkową sił zewnętrznych, czyli dla belki prostej siłą poprzeczną niech będzie *Q*. Chcąc wy-

rys:245



obieramy za punkt obrotu dla momentów punkt przecięcia się *G* dwu drugich sił S_2 i S_3 , których moment zatem jest równy zeru. Mamy więc $Qr_1 + S_1s_1 = 0$, a stąd

$$S_1 = -\frac{Qr_1}{s_1}, \dots \dots \dots 591)$$

jeżeli r_1 i s_1 nazwiemy prostopadłe, spuszczone z *G* na kierunki sił *Q* i S_1 .

Podobnie otrzymamy $On = S_2$, zrobiwszy $1n \parallel IB$ a $On \parallel S_2$ i $Op = S_3$, zrobiwszy $1p \parallel GC$ a $Op \parallel S_3$. Siły S_2 i S_3 możemy też inaczej wyznaczyć, znamy bowiem ich wypadkową $1m$. Rozkładamy więc ją według znanych kierunków CA i GA , robimy $1r \parallel CA$ i $mr \parallel AG$ i otrzymujemy $S_2 = 1r$ i $S_3 = rm$. Tok sił S_1 , S_2 i S_3 wyznaczamy, jak poprzednio, z wieloboku sił; widzimy więc, że siły S_2 i S_3 działają od przekroju, więc sprawiają ciągnięcie, przeciwnie S_1 ciśnienie.

Metodę przecięć możemy zastosować także przy kreśleniu planu sił, który kreślimy przecinając po kolei belkę w ten sposób, aby przeciąć zawsze tylko dwa pręty, których sił wewnętrznych nie znamy. Wtedy wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie przekroju i siły wewnętrzne, działające w przeciętych prętach, muszą dać zamknięty wielobok sił. Ze względu na to, że wielkość tylko dwu sił jest nieznaną, wielobok ten da się wykreślić. Postępując tak dalej, otrzymujemy plan sił.

W rys. 244 przecięliśmy naprzód siły a i b i wykreśliliśmy wielobok sił P_1 a i b . Teraz tniemy wedle linii mn , przecinamy więc znaną nam siłę a , dalej c i d . Siły P_1 , P_3 a , c i d muszą być w równowadze. Mamy wykreślone $P_5 = 40$, $P_1 = 01$, $a = 1m$. Z m wykreślamy $mn \parallel c$ a $4n \parallel d$. Linie te przecinają się w n , mamy więc $mn = c$, $n4 = d$. Tok sił w wieloboku sił jest P_5 , P_1 , a , c , d , więc c i d są ciągnięcia.

Dalej przecinamy belkę wedle linii pr , d jest tu znane, nieznajome e i f , itd.

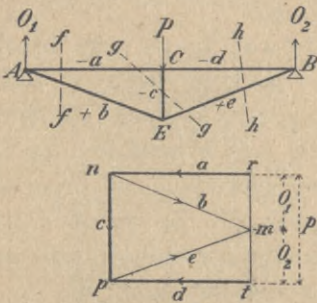
Chcąc porównać obie metody, wielobokową i metodę przecięć, zauważyć musimy, że przy metodzie wielobokowej otrzymujemy, wykreśliwszy plan sił, siły wewnętrzne we wszystkich prętach, podczas gdy przy metodzie przecięć musimy dla każdej trójki sił robić osobny rysunek. Jeśli zatem mamy dla danego obciążenia belki wyznaczyć siły wewnętrzne wszystkich części belki, to użyjemy z korzyścią metody wielobokowej. Jeśli zaś dla pewnego obciążenia mamy wyznaczyć siłę wewnętrzną tylko jednego lub dwu prętów, używamy metody przecięć Rittera lub Culmanna, gdyż nią prędzej dojdziemy do celu.

§. 109. Belka wzmocniona.

Jako przykład metody wielobokowej wyznaczymy w przybliżeniu siły wewnętrzne belki wzmocnionej (n. *armiter*

Träger, fr. *poutre armée à un seul poinçon*, an. *triangular truss*) (rys. 247), przypuszczając, że połączenia w węzłach są przegibne i, że działa na nią siła P w punkcie C . Stąd wynika, że $O_1 = O_2 = \frac{P}{2}$, a pro-

rys: 247



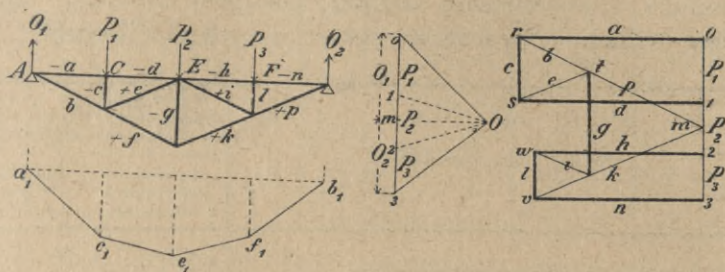
sta $rtmr$ jest wielobokiem sił zewnętrznych. Chcąc wykreślić plan sił, przecinamy belkę naprzód w prostej ff' , kreślimy $rn \parallel AC$, $mn \parallel AE$. Proste te przecinają się w punkcie n , więc $rn = a$, $mn = b$. Kierunek sił w wieloboku oznaczony strzałkami jest $mrnm$, a więc w a jest do przekroju, zatem siła ta sprawia ciśnienie, w b od przekroju, więc ciśnienie. Teraz tniemy belkę

w prostej gg' i kreślimy wielobok sił: $O_1 = mr$, $a = rn$, dalej $np \parallel CE$. Nie znając wielkości tej siły, musimy kreślić teraz w przeciwnym kierunku, więc $mp \parallel BE$. Proste te przecinają się w punkcie p , więc $np = c$, $mp = e$. Na koniec tniemy belkę w prostej hh' i kreślimy wielobok sił, więc $O_1 = mr$, $P = rt$, dalej $tp \parallel CB$. Nie znając wielkości tej siły, musimy kreślić znów w przeciwnym kierunku, więc $mp = e$. Ponieważ wielobok sił musi się zamknąć, więc prosta $tp \parallel CB$ musi przechodzić przez punkt p , a $tp = d$, co stanowi zarazem próbę dokładności rysunku.

Na rysunku 248. widzimy belkę podwójnie wzmoconioną (fr. *poutre à trois poinçons*, an. *compound triangular truss*), na którą działają w węzłach C , E i F siły P_1 , P_2 i P_3 . Najprzód musimy w znany sposób wyznaczyć oddziaływania O_1 i O_2 . W tym celu wykreślamy wielobok sił, przyjmujemy biegun O , kreślimy wielobok sznurowy, zamykając a_1 b_1 i równoległy do niej promień Om , wtedy mamy $O_1 = mO$ i $O_2 = 3m$. Teraz mamy wszystkie siły zewnętrzne i kreślimy osobno wielobok sił O_123m i plan sił podobnie, jak powyżej.

Powyżej przypuściliśmy, że połączenia węzłowe są przegibne, a obciążenie działa tylko w węzłach. Często przypuszczenia te w praktyce się nie stwierdzają.

rys: 248



Jeżeli obciążenie działa na pasie górnym belki, wtedy części pasu górnego pracują jako belki drugorzędne na zginanie i przenoszą siły na węzły. Pas górny jest więc nie tylko ciśnionym, ale i zginanym. Obliczać go zatem należy dla wytrzymałości złożonej.

Jeżeli pas nie jest przerwany w węzłach, lecz jest ciągły od A do B , to tworzy on belkę ciągłą i ciśnienie w węzłach należałoby obliczać wedle teorii belki ciągłej. Jednak ponieważ wskutek odkształcenia całej belki wysokość podpór ciągłego pasu się zmienia, a wskutek tego w znacznej mierze także i ciśnienia na węzły, więc chcąc dokładnie liczyć, należałoby uwzględnić tę okoliczność, co wymaga żmudnego rachunku i wyłożone będzie dopiero w teorii mostów*). Zwykle więc tego wcale nie uwzględniamy i uważamy części pasu jako w dwu punktach podparte.

§. 110. Obciążenie dachów.

Według metody wielobokowej wyznaczamy też siły wewnętrzne, działające w więzarach dachowych.

Więzarem dachowym czyli wiązaniem pełnym (n. *Dachbinder*, *Bundgespärre*, fr. *ferme*, an. *roof framing*, *roof truss*) nazywamy parę krokwi, wzmocnionych odpowiedniemi wiązaniem i działających jako belka kratowa, niosąca cały ciężar stały zeskładu dachu, jakoteż i obciążenia śniegiem i wiatrem. Dla obliczenia więzarów dachowych musimy więc przedewszystkiem znać

*) por. Mosty drewniane II. str. 76.

obciążenie dachów, które składa się z ciężaru własnego, z ciężaru śniegu i parcia wiatru. Ciężar własny jestto ciężar więzby dachu i ciężar pokrycia. Ciężary te przyjąć możemy dla pewnego obliczenia w przybliżeniu według następczej tabliczki, później należy dokładnie wyznaczyć ciężar i liczyć raz jeszcze.

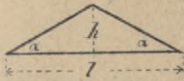
Różaj pokrycia dachu	ciężar własny w kg na $1 m^2$ dachu pochylego bez ciężaru więzarów głównych	
	dla więzby drewnianej z krokiewiami	dla więzby żelaznej z kątownkami
Dach pokryty cementem drzewnym . . .	160	—
„ „ dachówką podwójnie . . .	180	—
„ „ „ pojedynczo . . .	105	—
„ „ łupkiem . . .	75	50
„ blaszany na opierzeniu . . .	40	48
„ „ „ kątownkach . . .	—	25
„ z blachy falistej na kątownkach . . .	—	22—24
„ tekturowy na opierzeniu . . .	30	—
„ pokryty gontem podwójnie . . .	40	—
„ „ „ pojedynczo . . .	35	—
„ „ szkłem na kątownkach . . .	—	50
„ „ strzechą . . .	65	—
„ „ strzechą z gliną . . .	76	—
„ „ asfaltem na glinie . . .	76	—
„ „ „ „ cemente . . .	105	—

Do tego ciężaru dodać należy ciężar więzarów głównych, który możemy przyjąć jak następuje:

dla dachów drewnianych, które podparte są murami pośrednimi na m^2 powierzchni pochylej	10 do 20 kg/m^2
dla dachów nie podpartych murami pośrednimi	20 „ 30 „
dla dachów żelaznych lekkich na m^2 rzutu	14 „ 20 „
„ „ „ cięższych „	20 „ 30 „

Nachylenie dachu zależne jest od materiału pokrycia. W przecięciu możemy przyjąć nachylenie według następczej tabliczki, jeżeli kąt nachylenia dachu do poziomu (rys. 249) nazwiemy α , wysokość h a rozpiętość l . Nachylenie może być jednak także więzby strome.

rys: 249



Rodzaj pokrycia	$\frac{h}{l}$	α
strzechą . . .	$\frac{1}{2} - \frac{3}{5}$	45° - 50°
gontem . . .	$\frac{1}{3}$	33 $\frac{1}{3}$ °
dachówką zwyczaj.	$\frac{1}{5} - \frac{1}{3}$	22° - 34°
„ zakład.	$\frac{1}{6} - \frac{1}{3}$	18° - 33 $\frac{1}{3}$ °
łupkiem . . .	$\frac{1}{4}$	26° - 33 $\frac{1}{3}$ °
„ angielsk.	$\frac{1}{5}$	21 $\frac{3}{4}$ °
blachą . . .	$\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$	18° - 11°
blachą falistą .	$\frac{1}{3}$ - $\frac{2}{5}$	34° - 39°
szkłem . . .	$\frac{1}{7} - \frac{1}{3}$	16° - 45°
tekturą . . .	$\frac{1}{20} - \frac{1}{10}$	5° - 11°
cementem drzew.	$\frac{1}{20} - \frac{1}{40}$	6° - 3°

Na metr kwadratowy rzutu poziomego możemy więc przyjąć z uwzględnieniem nachylenia następujące wartości :

Rodzaj pokrycia	Ciężar własny g w kg na m^2 rzutu poziomego dla $\frac{h}{l} =$											
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	
krokwie drewniane	cementem drzewnym . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	161	160
	gontem pojedynczo . . .	49	42	39	38	—	—	—	—	—	—	—
	gontem podwójnie . . .	56	48	45	43	—	—	—	—	—	—	—
	dachówką pojedynczo . . .	148	126	117	—	—	—	—	—	—	—	—
	„ podwójnie . . .	183	156	146	—	—	—	—	—	—	—	—
	łupkiem	105	90	84	81	—	—	—	—	—	—	—
tekturą	42	36	34	32	32	31	31	31	31	—	—	
blachą cynkową lub żel.	—	—	45	44	42	42	41	—	—	—	—	
krokwie żelazne	na kalionkach	blachą falistą cynk.	—	—	27	26	25	25	25	24	—	—
		„ „ żelazną	—	—	25	24	23	23	22	22	—	—
		„ płaską . . .	—	—	28	27	26	26	26	25	—	—
		łupkiem	71	60	56	54	—	—	—	—	—	—
		blachą na opierzeniu .	—	—	54	52	51	50	49	49	49	—

Warstwa śniegu, która się osadza na dachach w naszych okolicach, nie jest zwykle grubsza, niż 0,60 m. Wysoko w górach warstwa ta jest jednak znacznie większą, dosięga nawet 2 m wysokości. Przyjąwszy wysokość warstwy 0,65 m i zważywszy, że śnieg jest około 8 razy lżejszy od wody, otrzymamy ciężar śniegu na m^2 rzutu $s = 0,65 \frac{1000}{8} = 81,5 kg$, okrągło

$$s = 80 \frac{kg}{m^2} \dots \dots \dots 592)$$

Dla budowli wysoko w górach położonych musimy jednak ciężar śniegu przyjąć większy odpowiednio do grubości warstwy.

Zwykle przyjmujemy, że obciążenie śniegu jest równe na całej powierzchni dachu; możliwem jest jednak, że wskutek wiatru jedna połać jest obciążona śniegiem, druga prawie wcale nie. Czasem może to sprawić w niektórych prętach większe nateżenie, w takim razie należałoby to uwzględnić.

Koachlin i Landsberg przyjmują więc, że śnieg może być tylko na jednej połaci, Breymann jednak twierdzi słusznie, że na drugiej połaci należy przynajmniej przyjąć połowę obciążenia.

Na stromej połaci śnieg nie może się utrzymać, dlatego liczymy powyższe obciążenie tylko do $\alpha = 35^\circ$, przy $\alpha = 40^\circ$ przyjmujemy tylko połowę obciążenia, a przy $\alpha = 50^\circ$ nie przyjmujemy wcale żadnego obciążenia śniegiem.

Dalszą siłę działającą na dachy jest parcie wiatru (n. *Winddruck*, fr. *pression du vent*, an. *wind pressure*). Z doświadczenia wiemy, że ciśnienie wiatru na płaszczyznę prostopadłą do kierunku wiatru $w = \frac{kg}{m^2} w = 0,13 v^2 \dots \dots \dots 560)$

gdy v oznacza chyżość wiatru na sekundę w metrach. Że parcie wiatru jest proporcjonalne do kwadratu chyżości, pojmiemy, gdy się zastanowimy, że im większa chyżość wiatru, tem większa jest siła uderzeń cząsteczek powietrza o powierzchnię i tem więcej cząstek uderza o powierzchnię.

Chyżość wiatru i odpowiednie parcie na m^2 w kg są następujące:

	v	w
silny wiatr	15 m na sek.	29 $\frac{kg}{m^2}$
bardzy silny wiatr	20 " " "	52 " "
lekka burza	25 " " "	82 " "
silna burza	30 " " "	117 " "
silny wichur	40 " " "	208 " "
najsilniejszy wichur	50 " " "	325 " "

W naszych okolicach v rzadko kiedy bywa większe, niż 30 m, którąto wartość po zaokrągleniu przyjmujemy przy obliczaniu dachów, a zatem $w = 120 \frac{kg}{m^2}$. Szczególniej w miastach, gdzie dachy są poczęści zasłonięte innymi budynkami, powyższa

wartość jest zupełnie wystarczająca; w miejscach jednak wolnych niezaskłoniętych, zwłaszcza wysoko położonych i wystawionych na działanie wiatrów dla wież, kominów wysokich powinniśmy przyjąć większe ciśnienie, a mianowicie do $250 \frac{kg}{m^2}$, gdyż stwierdzono doświadczalnie, że parcie wiatru w górze jest znacznie większe, niż przy ziemi, gdzie także zmniejsza się chyżość wiatru. Zresztą trudno przypuszczać, aby największy wichur wywierał parcie na dach równocześnie z największym obciążeniem śniegu. Nie potrzebujemy zatem liczyć na wyjątkowe, może raz w kilkanaście lat zdarzające się wichry zwłaszcza, iż przy obliczaniu przekroju przypuszczamy jakąś pewność, a materiał wytrzymać może takie pojedyncze nadzwyczajne natężenia.

Normy przyjęte przez austr. tow. inżynierów i architektów w Wiedniu brzmią:

<i>Obciążenie wiatrem i śniegiem.</i>		Nazwa ciśnienia:	Ciśnienie
1.	Ciśnienie śniegu na płaszczyznę poziomą	.	75 kg m ²
2.	Parcie wiatru na płaszczyznę prostopadłą do kierunku wiatru	.	150 „ „

Kierunek parcia wiatru należy przyjąć przy obliczeniu poziomy.

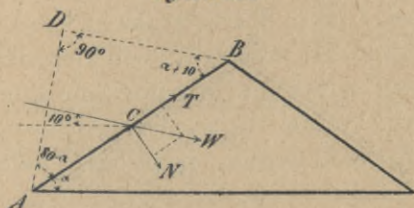
Jeżeli jako największe obciążenie przyjmujemy równoczesne obciążenie śniegiem i wiatrem, to można jako ciśnienie śniegu wstawić tylko $\frac{1}{2}$ do $\frac{3}{4}$ powyżej podanych wartości, wedle tego, czy dach jest stromy czy płaski

Stalność budowli szczególnie wystawionych na parcie wiatru n. p. kominów należy obliczać tak, aby przy najmniej dwukrotnej pewności przeciw przewrotowi w żadnym przekroju poziomym nie przekroczyć natężenia dopuszczalnego. Jako powierzchnię, na którą wiatr działa, należy przyjąć rzut pionowy kownika.

Najeźściej kierunek wiatru jest do poziomu nachylony pod kątem 10° (rys. 250), tak też go zawsze przyjmować będziemy.

Powodem tego jest tarcie przy ziemi, które zmniejsza chyżość wiatru i nachyla jego kierunek. Ciśnienie na połącz AB o szerokości 1 m otrzymamy, spuściwszy z A prostopadłą na kierunek wiatru, a z B na AD ,

rys:250



a zatem na m^2 dachu pochyłego $w_1 = w \frac{AD}{AB}$.

Z rysunku widzimy, że jeżeli kąt nachylenia dachu do poziomu jest α , $\frac{AD}{AB} = \text{wst } (\alpha + 10)$, więc

$$w w_1 = w \text{ wst } (\alpha + 10) \dots \dots \dots 594)$$

Rozłóżmy parcie W na siłę prostopadłą do dachu N i równoległą T . Z rysunku widzimy, że

$$N = W \text{ wst } (\alpha + 10) \text{ a } T = W \text{ dost } (\alpha + 10).$$

Siła T posuwa prąd wiatru wzdłuż połaci. Ponieważ tarcie wiatru o dach jest stosunkowo małe, więc zwykle nie uwzględniamy go wcale, tylko siłę prostopadłą do połaci N .

Mamy zatem na m^2 dachu pochylego

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{N}{AB} = w_1 \text{ wst } (\alpha + 10) \\ &= w \text{ wst}^2 (\alpha + 10) = 120 \text{ wst}^2 (\alpha + 10) \end{aligned} \right\} \frac{kg}{m^2} \dots \dots \dots 595)$$

Jednak doświadczenia Loessla udowodniły, że parcie N jest większe i wzrasta nie w stosunku do kwadratu, lecz do pierwszej potęgi dost $(\alpha + 10)$.

Radzimy więc używać nadal wzoru

$$n = \frac{N}{AB} = w \text{ wst } (\alpha + 10) = 120 \text{ wst } (\alpha + 10) \dots 596)$$

a zatem wzoru identycznego w wzorem 594).

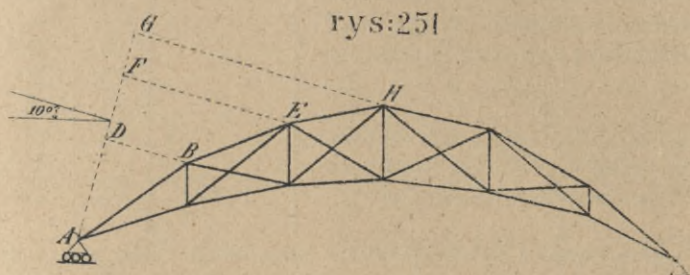
Przy dachach wielobocznych nachylenie dachu zmienia się ciągle, musimy zatem dla każdego nachylenia obliczać parcie według 596). Możemy to zrobić także wykreślnie.

Rów. 595) możemy także inaczej napisać, zważywszy że $\text{wst } (\alpha + 10) = \frac{AD}{AB}$, zatem $n = 120 \frac{AD}{AB}$, więc $N = 120 \cdot AD$. Parcie prostopadłe do połaci na i m szerokości jest więc równe 120 razy rzut połaci na kierunek wiatru. Jeżeli szerokość paska jest b , to musimy jeszcze przez nią pomnożyć.

Dla dachu wielobocznego (rys. 251) wynika z tego łatwa konstrukcyja. Z A prowadzimy AG prostopadłe do kierunku wiatru i rzucamy na nie punkty załamania powierzchni dachu B , E , H , // do kierunku wiatru. Parcia są wtedy proporcjonalne do AD , DE , EH . Aby otrzymać parcie, pomnożyć należy te długości przez 120 b .

Jeżeli przedmiot, o który wiatr uderza ma powierzchnię krzywą, to parcie wiatru jest mniejsze, niż na powierzchnię płaską o tym samym rzucie pionowym, więc $W = \delta A w \dots 597)$

eżeli δ jest współczynnik, w parcie wiatru na jednostkę kwadratową a A rzut pionowy powierzchni.



Jeżeli obliczenie parcia oprzemy wtedy na wzorze Loessa (s. 595), to otrzymamy wedle Mayera

dla walca (przekrój koło) . . . $\delta = 0,848$
 „ graniastosłupa („ ośmiokąt) . . . $\delta = 0,890$

Wzory te zastosujemy przy obliczeniu parcia wiatru na kominy.

Brune oblicza parcie na stożek i półkulę i otrzymuje dla stożka $\delta = \frac{1}{2}$ dost α , jeżeli α jest kąt nachylenia boków stożka do osi a dla półkuli $\delta = 0,207$.

Normy przyjęte przez austr. Towarzystwo inżynierów i architektów we Wiedniu:

Obciążenie dachów.

L. p.	Pokrycie dachu	Nachylenie wyrażone stosunkiem $\frac{2h}{l}$	Obciążenie w kg na m ² rzutu poziomego bez ciężaru więzarów gł.		
			Ciężar własny	Śnieg i parcie wiatru	Obciąż. całkowite
1	Dachówką pojedynczo	1 : 1.25	135	125	260
2	„ podwójnie	1 : 1.25	165	125	290
3	„ zakładkową	1 : 2.85	100	90	190
4	Łupkiem pojedynczo	1 : 2.25	75	95	170
5	„ podwójnie	1 : 2.25	115	95	210
6	Błachą żelaz. lub cynk. na opierzeniu	1 : 4	40	75	115

L. p.	Rodzaj pokrycia	Nachylenie wyrażone stosunkiem $\frac{2h}{l}$	Obciążenie w kg na m^2 rzutu poziomego bez ciężaru więzarów gł.		
			Ciężar własny	Śnieg i parcie wiatru	Obciąż. całko- wite
7	Tekturą dachową	1 : 4	40	75	115
8	Szkłem na listwach		—	—	—
	Odstęp listw 0.45 cm grub. szkła 4 mm		20	75	95
	" " 0.55 " " " 5 "		25	75	100
	" " 0.55 " " " 6 "		30	75	105
9	Blachą falistą na płatwiach z kątówek		25	75	100
10	Cementem drzewnym z 10 cm podło- żem żwirowem bez krokwi . .	1 : 18	165	75	240

Ciężary własne zawierają ciężar wszystkich części pokrycia dachu wraz z krokwiami, lecz bez więzarów głównych. Ciężar więzarów głównych można przyjąć wedle ciężaru pokrycia i dla rozpiętości do 16 m dla

a) żelaznych więzarów 10 do 20 $\frac{kg}{m^2}$ rzutu poziomego

b) drewnianych " 20 do 30 " " "

Dla dachów o innych nachyleniach, niż podano w tablicy, wystarczy zmienić ciężar w stosunku długości krokwi.

Rozporządzenie pruskie z r. 1897 dozwala przyjmować dla żelaza spawalnego w więzarach dachowych następujące natężenie:

przy uwzględnieniu ciężaru własnego i śniegu	1200 kg/cm^2
" " " " śniegu i wiatru (150 kg/m^2)	1600 "
natężenie na ścinanie nitów	1000 "
a ciśnienie na ściankę dziury	2000 "

Natężenia te wydają się nam za wielkie.

§. III. Ogólne warunki równowagi dachu.

Najprzód uważać będziemy dach jako całość i badać go, czy siły działające nań nie potrafią go wywrócić albo przesunąć (rys. 252), co zwłaszcza możliwem jest przy dachach wysokich.

Wiatr W usiłuje dach obrócić około krawędzi B . Moment tu występujący dla głębokości $=1$ jest $M=N.BE=N(A'E-A'B)$

$$=nl\left(\frac{l}{2}-b \text{ dost } \alpha\right), \text{ a że } \frac{b}{2}=l \text{ dost } \alpha, \text{ więc } M=nl\left(\frac{l}{2}-\frac{b^2}{2l}\right)=$$

$$=\frac{n}{2}(l^2-b^2). \text{ Ciężar własny dachu, który niech wynosi } g \text{ } kg/m^2$$

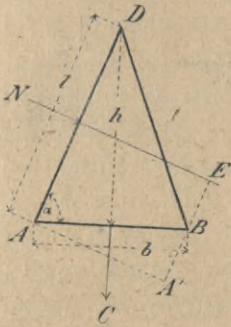
powierzchni pochyłej, jest całkowity $C=g, 2l$, zatem moment je-

$$\text{go ze względu na punkt } B \quad M'=-2gl \cdot \frac{b}{2}=glb.$$

Dla równowagi musi więc być

$$bgl \underset{>}{=} \frac{n}{2}(l^2 - b^2), \text{ stąd}$$

rys: 252



$$g \underset{<}{=} \frac{n}{2bl}(l^2 - b^2) \dots \dots \dots 598)$$

Przesunąć w kierunku poziomym dach usiłuje składowa pozioma siły $NN \text{ wst } \alpha$, czemu sprzeciwia się tarcie, wywołane ciężarem $2gl$ i składowa pozioma parcia wiatru $N \text{ dost } \alpha$. Jeżeli współczynnik tarcia nazwiemy f , to $f(2gl + nl \text{ dost } \alpha) = nl \text{ wst } \alpha$. Wstawmy dost $\alpha = \frac{b}{2l}$, wst $\alpha = \frac{h}{l}$,

$$\text{to } 2g + \frac{nb}{2l} \underset{>}{=} \frac{nh}{fl}, \text{ a stąd}$$

$$g \underset{\leq}{=} \frac{n}{4fl}(2h - fb) \dots \dots \dots 599)$$

Jeżeliby g było mniejsze, niż wypada z rów. 598) i 599), to musielibyśmy więzary zakotwić, aby przeszkodzić czyto przesunięciu czyto przewrotowi.

§. 112. Wyznaczenie sił wewnętrznych dla obciążenia pionowego.

Dach musi być nie tylko jako całość w równowadze, lecz także nateżenie we wszystkich prętach nie powinno przekraczać nateżenia dopuszczalnego. Będziemy się więc starali wyznaczyć siły wewnętrzne, działające w prętach i to najprzód wykreślnie.

Siły wewnętrzne więzarów dachu wyznaczamy najlepiej według metody wielobokowej. Dla danego obciążenia wyznaczamy najprzód oddziaływania, a potem wykreślamy plan sił, jakto na przykładzie zaraz zobaczymy. Możemy przytem albo obliczać siły wewnętrzne dla obciążenia równoczesnego śniegiem i wiatrem, albo podzielić konstrukcję i osobno wyznaczyć siły wewnętrzne dla obciążenia ciężarem własnym i śniegiem, a osobno dla parcia wiatru.

Ten drugi sposób jest z tego względu lepszy, że dla niektórych prętów otrzymamy największe nateżenie dla obciążenia śniegiem i wiatrem. Dlatego lepiej badać osobno wpływ ciężaru własnego i śniegu a osobno wiatru, a dopiero potem nateżenia kombinować w ten sposób, aby dały największe nateżenie.

Tu więc najprzód wyznaczmy siły wewnętrzne dla obciążenia pionowego. Przedewszystkiem musimy wyznaczyć ciężary węzłowe, to jest ciężary, działające w węzłach. Obciążenie przenosi się na więzary główne albo za pomocą płatew w węzłach, albo też i między węzłami. W tym ostatnim wypadku obliczamy przecież więzar tak, jakby ciężary działały w węzłach, a tylko pas górny więzaru obliczamy nietylko na ciśnienie, ale i na zginanie, wywołane momentem obciążenia, działającego między węzłami.

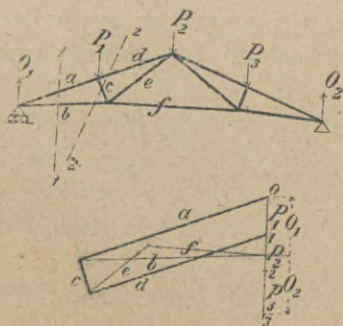
Jeżeli a oznacza odstęp więzarów, g ciężar własny na m^2 powierzchni pochyłej i s ciężar śniegu na m^2 rzutu, to na długość krokwi l_1 działa ciężar $G = gal_1 + sal_1$ dost a .

Jeżeli odstęp węzłów jest równy, to na jeden węzeł przypada długość $l_1 =$ odstępowi węzłów, na pierwszy węzeł połowa tej długości. Przy dachach w kształcie ostrosłupa więzary nie są równoległe, wtedy obciążenie na m b. więzaru jest zmienne, a to wedle powierzchni dachu, która na odpowiednie części więzaru przypada.

Znając ciężary węzłowe, wyznaczamy najprzód oddziaływania. Jeśli więzar i obciążenie jego są symetryczne, to $O_1 = O_2 =$ połowie obciążenia; jeżeli niema symetrii, to wyznaczamy oddziaływania wykreślnie zapomocą wieloboku sznurowego. Teraz możemy przystąpić do wykreślenia planu sił wedle §. 107.

Podajemy tu kilka planów sił dla obciążenia pionowego już bez dalszych objaśnień, przyjąwszy obciążenie symetryczne,

rys: 253

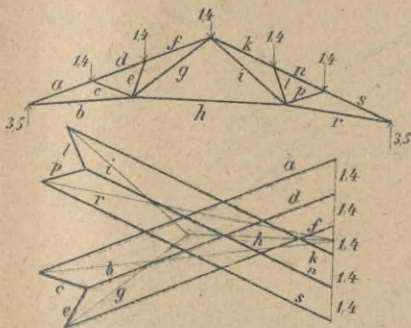


w którymto razie $O_1 = O_2 =$ połowie obciążenia. Z powodu symetrii jest tu górna połowa planu sił zupełnie przystającą do dolnej, dlatego też kreślimy zwykle tylko połowę planu sił. Rysunek 253 przedstawia więzar francuski układu Polonceau (n. *derfranzösische oder Pol-*

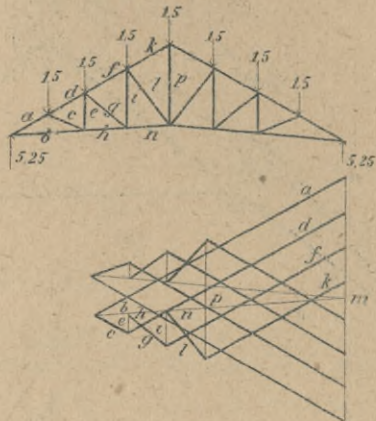
lonceau Dachstuhl, fr. *ferme système Polonceau*, an. *french roof truss*) rys. 254 przedstawia więzar belgijski, 255 więzar angielski (n. *englischer Dachbinder*, an. *english roof*), rys. 256.

wieżar mansardowy (fr. *comble à la Mansard*, an. *mansard roof*)
 Czasem, jak w rysunku na tabl. III., przedstawiającym złożony

rys:254



rys:255

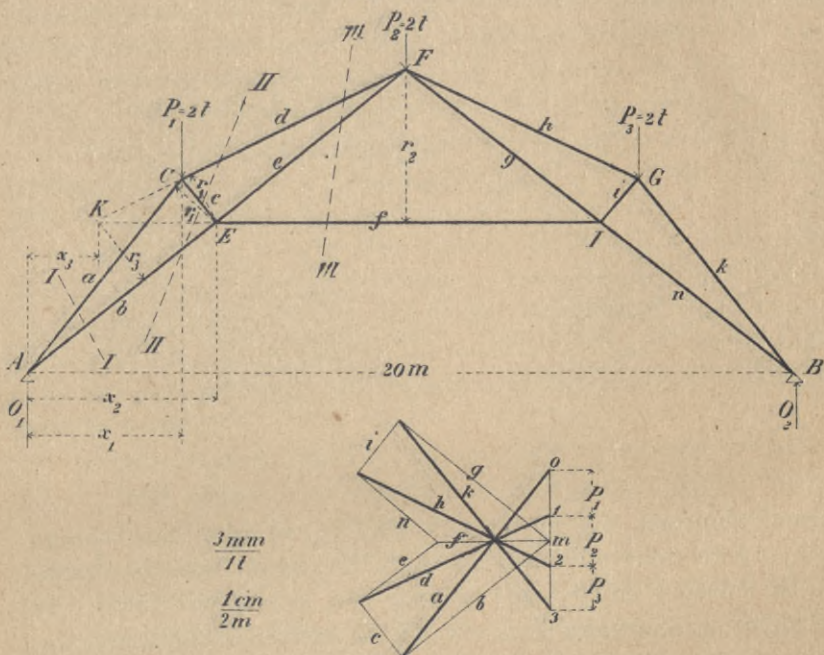


wieżar Polonceau, nie możemy znaleźć przekroju, dla którego byłyby tylko dwie siły niewiadome. W zwykły sposób wyznaczyć tu możemy siły wewnętrzne a, b, c, d, e, f , ale teraz, czy przetniemy w kierunku $I I$, czy $II II$, zawsze mamy trzy niewiadome, nie możemy więc ich wykreślnie wyznaczyć.

Musimy zatem tu poradzić sobie inaczej, przeciąć wieżar płaszczyzną $III III$ i wyznaczyć sposobem Rittera siłę m . Znając ją, możemy kreślić dalej plan sił, zaczynając od sił m, r i s i kreśląc dalej siły n, h, k, l, g . — Możemy też poradzić sobie w inny sposób i to metodą Culmanna. Przetnijmy wieżar po linii $IV IV$. Siły wewnętrzne h, k, l, s_1 i r_1 i zewnętrzne P_4 i P_5 są w równowadze. Złożmy P_4 i P_5 w zwykły sposób w wypadkową R' , to ponieważ $P_4 = P_5$, więc wypadkowa działa w środku odległości między P_4 i P_5 . Jeżelibyśmy złożyli R' z k , to wypadkowa musiałaby iść przez S , wypadkowa R'' zaś reszty sił h, l, s_1 i r_1 musi przechodzić przez F . Dla równowagi muszą kierunki obu wypadkowych wpadać na siebie, więc kierunek R'' jest SF . Poprowadźmy w wieloboku sił $33' \parallel k$, a $53' \parallel SF$, to $33' = k$. Znając k , możemy dla przecięcia $II II$ wyznaczyć niewiadome g i h .

Liczebnie wyznaczamy siły wewnętrzne za pomocą sposobu Rittera (§. 108). Jako przykład obliczymy siły wewnętrzne więzaru mansardowego

rys: 256



rys. 256). Niech będzie $l=20m$, $P_1=2t$, $P_2=2t$, $P_3=2t$, więc $O_1=3t$, a otrzymamy najprzód dla przecięcia $I I$ ze względu na punkt C :

$$O_1 x_1 - b \cdot CE = 0, \text{ stąd } b = O_1 \frac{x_1}{CE} = 3 \frac{4,1}{1,45} = 8,2 t.$$

Ze względu na punkt E mamy

$$O_1 x_2 - a r_1 = 0, \text{ stąd } a = - \frac{O_1 x_2}{r_1} = - 3 \frac{5}{1,5} = 10,3 t.$$

Przetnijmy teraz więzar w kierunku $II II$, a otrzymamy ze względu na punkt F

$$O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) - c \cdot EF = 0, \text{ a stąd}$$

$$c = \frac{O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)}{EF} = \frac{3 \times 10 - 2 \times 5,9}{6,4} = 2,85 t,$$

a ze względu na punkt E

$$O_1 x_2 - P_1 (x_2 - x_1) + d \cdot r_1 = 0, \text{ a stąd}$$

$$d = \frac{P_1 (x_2 - x_1) - O_1 x_2}{r_1} = - \frac{2 (5 - 4,1) - 3,5}{1,5} = - 8,8 \text{ t.}$$

Przetnijmy nakoniec więzar w kierunku III III, a otrzymamy ze względu na punkt F

$$O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) - f r_2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$f = \frac{O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)}{r_2} = \frac{3 \cdot 10 - 2 (10 - 4,1)}{4} = 4,55 \text{ t.}$$

Dalej ze względu na punkt K przecięcia się d i f mamy

$$O_1 x_3 + P_1 (x_1 - x_3) - e r_3 = 0, \text{ a zatem}$$

$$e = \frac{O_1 x_3 + P_1 (x_1 - x_3)}{r_3} = \frac{3 \times 1,5 + 2 (4,1 - 1,5)}{2} = 4,85 \text{ t.}$$

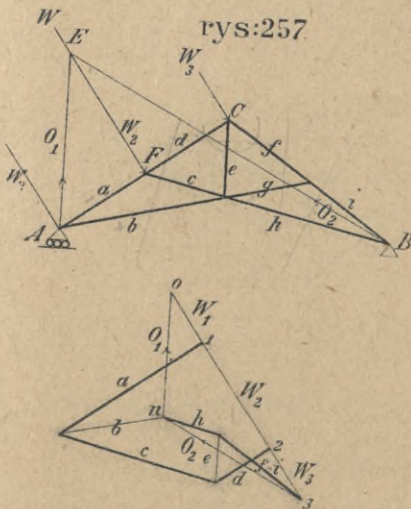
§. 113. Parcie wiatru.

Zastanówmy się teraz nad wpływem parcia wiatru na więzar, a najprzód wyznaczmy oddziaływania. Musimy tu przytem

rozróżnić dwa wypadki, gdy jedno łożysko jest wałkowe lub też oba stałe.

Jeżeli bowiem jedno łożysko jest wałkowe, to oddziaływanie na tej podporze może być tylko pionowe, oddziaływanie zaś na drugiej podporze wyznaczyć łatwo możemy wykreślnie z wieloboku sił. Niechaj na więzar *ACB* (rys. 257) działa wiatr z lewej strony prostopadle do *AC*. Wypadkowa parcia na połącz *AC* działa w punkcie

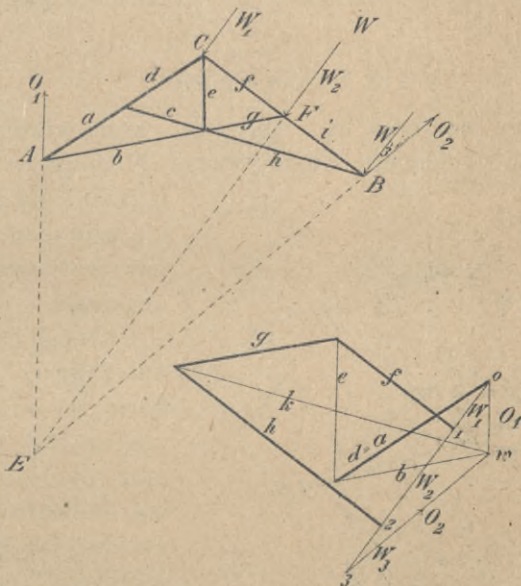
F. Jeżeli w *A* jest łożysko wałkowe, to oddziaływanie *O*₁ jest pionowe. Oddziaływanie *O*₂ w punkcie *B* musi wraz z *O*₁ równoważyć parcie wiatru *W*, mieć więc kierunek *BE*, bo te trzy



siły muszą się przecinać w jednym punkcie. Jeżeli $O_3 = W = W_1 + W_2 + W_3$, a zrobimy $3n \parallel BE$ i $On \parallel AE$, to otrzymamy oddziaływania. Znając oddziaływania, możemy w zwykły sposób wykreślić plan sił.

Jeżeli wiatr wieje z prawej strony (rys. 258), to oddziaływanie w A pionowe przecina się z wypadkową parcia W w E , zatem oddziaływanie O_2 ma kierunek EB . Wykreślamy zatem $W = O_3$, dalej $3n \parallel EB$ i $On \parallel AE$, to $nO = O_1$, $3n = O_2$. Po wyznaczeniu oddziaływań łatwym jest dalsze wykreślenie planu sił.

rys:258

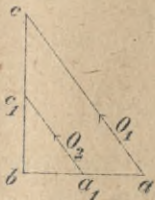


Jeżeli oba łożyska są stałe, to właściwie oddziaływania nie są statycznie wyznaczalne.

Przypuśćmy, że więzar spoczywa na płytach żelaznych i że przesunięciu sprzeciwia się tylko tarcie. W takim wypadku tarcie jest proporcjonalne do ciśnienia pionowego. Niech będzie ciśnienie na jednej podporze bc (rys. 259), na drugiej bc_1 , to tarcia proporcjonalne do ciśnień będą ab i a_1b , zatem oddziaływania ac , i a_1c_1 muszą być równoległe. Ponieważ muszą one równoważyć się z parciem W , więc muszą być równoległe do kierunku wiatru. Wielkość oddziaływania wyznaczymy wtedy łą-

two (rys. 260.), wypadek ten sprowadzając do wypadku belki zwykłej. Jeżeli $O_3 = W$, to obieramy dowolnie biegun O , kreślimy promienie OO i O_3 , a do nich równoległe wielobok sznurowy EIG . EG jest zamkniętą, więc gdy $Om \parallel EG$, będzie $mO = O_1$ a $3m = O_2$.

rys:259



Wykreślenie planu sił nie przedstawia teraz żadnych trudności.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie oddziaływań rachunkiem, to postępować będziemy w następujący sposób.

Jeżeli w F zaczepia parcie wiatru W (rys. 261.), to rozkłada się ono na $H = W \text{ wst } \alpha$ i $V = \frac{W}{\text{dost } \alpha}$, oddziaływanie O_2 w B rozkłada się także na H_2 i V_2 . Dla równowagi mamy

$W \text{ wst } \alpha - H = 0$,
 $O_1 + V_2 - W \text{ dost } \alpha = 0$,
 i ze względu na A

$$V_2 \cdot 2ld \text{ dost } \alpha - W \frac{l}{2} = 0, \text{ stąd mamy}$$

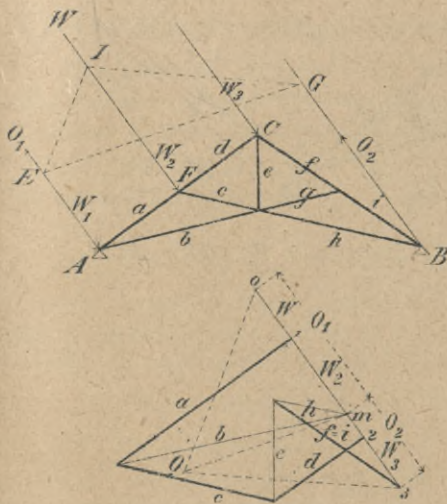
$$H = W \text{ wst } \alpha \quad (600)$$

$$V_2 = \frac{W}{4 \text{ dost } \alpha} \quad (601)$$

$$O_1 = W \text{ dost } \alpha - \frac{W}{4 \text{ dost } \alpha} = \frac{W}{4} \text{ dost } \alpha \times \left(4 - \frac{1}{\text{dost}^2 \alpha} \right)$$

$$O_1 = \frac{W}{4} \text{ dost } \alpha \times \left(3 - \text{st}^2 \alpha \right) \quad (602)$$

rys:260



Jeżeli wiatr działa z prawej (rys. 262.), to mamy

$$W \text{ wst } \alpha - H = 0.$$

$$O_1 + V_2 - W \text{ dost } \alpha = 0 \text{ i ze względu na } B$$

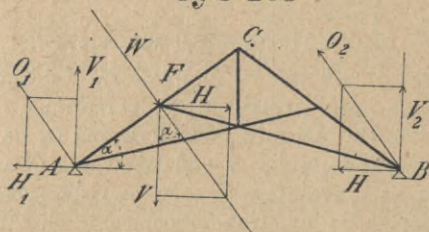
$$V_1 = \frac{W}{4} \operatorname{dost} \alpha (3 - \operatorname{st}^2 \alpha) \quad \dots \quad 607)$$

$$H_2 = \frac{W \operatorname{wst} \alpha}{1 + 3 \operatorname{dost}^2 \alpha - \operatorname{wst}^2 \alpha} \quad \dots \quad 608)$$

$$H_1 = \frac{W \operatorname{wst} \alpha (3 \operatorname{dost}^2 \alpha - \operatorname{wst}^2 \alpha)}{1 + 3 \operatorname{dost}^2 \alpha - \operatorname{wst}^2 \alpha} \quad \dots \quad 609)$$

Jeżeli dach jest wieloboczny, należy wyznaczyć za pomocą wieloboku sznurowego lub rachunkiem wielkość, kierunku i położenie wypadkowej parcia, poczem można użyć powyższych sposobów oznaczenia oddziaływań.

rys:263



§. 114. Obliczenie więzaru Polonceau złożonego jako przykład.

Jako przykład obliczymy siły wewnętrzne i przekroje wszystkich prętów więzaru żelaznego systemu złożonego Polonceau (tabl. III). Rozpiętość wynosi 18 m, odległość wiązań pełnych 5,0 m, dach ma być pokryty blachą na kątówkach, łożysko wałkowe na lewej podporze. Natężenie dopuszczalne ma wynosić $800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Dla pokrycia blachą przyjmujemy $\frac{h}{l} = \frac{1}{6}$, więc $h = 3,0$ m. Ciężar własny pokrycia wynosi według tablicy 25 kg na m^2 dachu pochylego. Ciężar więzarów dla dachów lekkich 14 kg na m^2 . Obliczmy ciężar P_2 , działający w węźle C. Na ten węzeł przenosi się połowa ciężaru z pola AC i połowa z CE, więc z powierzchni dachu $\frac{AE}{2} 5,0 = 2,37 \times 5,0 = 11,85 \text{ m}^2$. A więc ciężar

$$P_2 = 11,85 \times 39 = 462,15 \text{ kg/m}^2.$$

Ciężar śniegu przyjmujemy według rów. 592) równy 80 kg na m^2 rzutu poziomego, a więc na C działa $2,25 \times 5,0 \times 80 = 1,25 \times 80 = 900$ kg, zatem $P_2 = 462,15 + 900 = 1362,15 \text{ kg} = 1,4 \text{ t}$.

Kreślmy teraz wielobok sił dla obciążenia pionowego, przy czem

$$P_1 = P_9 = \frac{P_2}{2} = 0,7 \text{ t} \quad \text{a} \quad P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = P_7 = P_8.$$

Ponieważ więzary i jego obciążenie są symetryczne, więc wykreśliłyśmy tylko połowę wieloboku sił i planu sił. Dla wyznaczenia siły wewnętrznej k użyliśmy konstrukcji pomocniczej, opisanej w §. 112. Dla kontroli obliczymy jeszcze siłę wewnętrzną m w następujący sposób.

Przecinamy więzar po linii III III i ze względu na F ustawiamy równanie momentów:

$$\begin{aligned} (O_1 - P_1) 9 - 3 P_2 \times 5,0 - m \times 2,50 &= 0, \text{ czyli} \\ (5,6 - 0,7) 9 - 3 \times 1,4 \times 4,5 &= m \times 2,50, \text{ a stąd} \\ m &= 10,00 \text{ t.} \end{aligned}$$

któryto wynik zgodny jest z wynikiem, uzyskanym sposobem wykreślnym.

Teraz obliczymy siły, wywołane parciem wiatru i to najprzód działającego z lewej strony. Parcie na m^2 pochyłej powierzchni dachu jest według 596) $w_1 = w \text{ wst } (\alpha + 10)$, przyczem $w = 120 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ a $\alpha = 18^\circ 26'$. A więc $n = 120 \text{ wst } 28^\circ 26' = 120 \times 0,476 = 57,12 \text{ kg/m}^2$.

Parcie wiatru na węzeł C będzie więc

$$N_2 = n \times 2,37 \times 5,0 = 57,12 \times 11,85 = 676,9 \text{ kg} = 0,677 \text{ t.}$$

Wypadkowa parcia wiatru zaczepia w punkcie E . Oddziaływanie O_1 , wywołane parciem wiatru na lewej (wałkowej) podporze, musi mieć kierunek pionowy; wyznaczmy zatem kierunek oddziaływania O_2 na drugiej (stałej) podporze, łącząc punkt przecięcia się L oddziaływania O_1 i wypadkowej parcia wiatru z podporą. Kreślimy teraz w zwykły sposób plan sił, wyznaczwszy znów k zapomocą konstrukcyi pomocniczej. Widzimy, że w tym wypadku $r_1 = -h_1 = -d_1 = -a_1$, $s_1 = -l_1$, $f_1 = -b_1$ a $n_1 = k_1 = g_1 = e_1 = c_1 = 0$.

Teraz przyjmujemy wiatr z prawej strony, wypadkowa parcia zaczepia w punkcie K . Znowu wyznaczmy kierunek oddziaływania na stałej podporze w ten sposób, że połączymy punkt przecięcia oddziaływania O_1 , (które musi być pionowe) z wypadkową parcia wiatru z podporą B . Wykreśliwszy wielobok sił zewnętrznych $O_5 a O$, mamy $O_5 = O_1$ i $Oa = O_2$. Kreślimy teraz plan sił, przyczem znów w znany sposób wyznaczamy k_1 .

Wyniki w ten sposób otrzymane, ułożyliśmy w tabliczce, umieszczonej na tabl. III.

Do siły wewnętrznej, wywołanej ciężarem własnym i obciążeniem śniegiem, dodajemy siłę wewnętrzną, wywołaną wiatrem z lewej lub z prawej strony tak, abyśmy otrzymali największą siłę.

Teraz przystępujemy do obliczenia przekrojów:

a) Ściągna wykonane jako taśmy grubości 10 mm.

Dla ściągien e , k , e_1 i k_1 obliczamy szerokość taśmy dla $P = 4,65 \text{ t}$ i otrzymujemy

$$b = \frac{P}{1 \times \tau} = \frac{4650}{800} = 5,81 \text{ cm.}$$

Ponieważ dla przytwierdzenia ściągna potrzebny jest jeden nit średnicy 20 mm, więc szerokość taśmy będzie 78 mm, zamiast czego przyjmujemy 80 mm.

Ponieważ dalsze ściągna wypadłyby bardzo szerokie, wykonamy je więc z wstęg podwójnych.

Dla ściągien l i l_1 obliczamy szerokość taśmy dla $P = 12,17 \text{ t}$ i otrzymujemy

$$b = \frac{P}{2 \tau} = \frac{12170}{2 \times 800} = \frac{1217}{160} = 7,6 \text{ cm,}$$

do tego dodajemy dziurę na nity 20 mm średnicy, zatem $b = 9,6 \text{ cm}$, zamiast czego przyjmujemy 100 mm.

Podobnie otrzymamy dla ścięgien

$$\begin{array}{cccc} m, & s, s_1, & f, f_1, & b, b_1 \\ b = 100, & 130, & 200, & 230, \text{ mm} \end{array}$$

Dla ścięgien f, f_1, b, b_1 potrzeba uwzględnić 2 dziury na nity.

Uwaga. Szerokości wstęp można przyjmować tylko wyrażone w całych centymetrach, gdyż fabryki wyrabiają wstęgi, zwiększając ich szerokość tylko w cm .

b) Zastrzały obliczamy na wyboczenie wedle §. 96.

Dla zastrzałów c, c_1, n, n_1 , przyjmiemy pojedynczą kątownkę równoramienną. $P = 2,04 t$, zatem

$$A_0 = \frac{P}{\tau} = \frac{2040}{800} = 2,55 \text{ cm}^2.$$

Ponieważ zastrzał narażonym jest na wyboczenie, zatem musimy przyjąć jego powierzchnię większą, a więc 5 cm^2 , i obliczyć promień bezwładności przekroju a ze wzoru 527)

$$a = 1,4 + 0,07 A = 1,4 + 0,35 = 1,75 \text{ cm},$$

zatem
$$\frac{l}{a} = \frac{52,5}{1,75} = 30.$$

Wedle tabliczki na str. 300 wynosi współczynnik zmniejszający $\zeta' = 0,71$, zatem $A = 2,55 : 0,71 = 3,59 \text{ cm}^2$.

Jeżeli do tego dodamy powierzchnię dziury nitu 12 mm grubego, wynoszącą około $0,7 \text{ cm}^2$, otrzymamy $A = 4,29 \text{ m}^2$. Kątownka najmniejsza jest $\frac{45 \times 45}{5}$; ale wedle tablicy kątownek na stronie 166 wynosi promień bezwładności dla tej kątownki tylko $1,35 \text{ cm}$. Otrzymaliśmy tu z wzoru 527) za wiele z tej przyczyny, że wzór ten podaje wartości dla kątownek średniej wielkości, a nie najmniejszych. Przeliczmy zatem jeszcze raz dla $\frac{l}{a} = \frac{52,5}{1,35} = 40$. Współczynnik

zmniejszający wynosi teraz $\zeta' = 0,68$, zatem $A = 2,55 : 0,68 = 3,75 \text{ cm}^2$. Dodawszy powierzchnię dziury na nit, otrzymujemy $A = 3,75 + 0,7 = 4,45$. Najmniejsza kątownka $\frac{45 \cdot 45}{5}$ jest więc za małą. Weźmiemy następną $\frac{45 \times 45}{6}$. Dla tej

jest $a = 1,34$, zatem $\frac{l}{a} = \frac{52,5}{1,34} = 31$, $\zeta' = 0,71$, więc $A = 2,55 : 0,71 = 3,59$. Dodawszy powierzchnię dziury na nit otrzymamy $A = 3,59 + 0,7 = 4,29 \text{ cm}^2$. Zatem kątownka $\frac{45 \times 45}{6}$ jest wystarczającą.

c) Krokwie wykonamy z dwóch kątownek leżących w odstępnie 10 mm Siła wewnętrzna w krokwiach rośnie od $28,36$ do $29,76 \text{ ton}$. Ze względów ustrojowych przyjmiemy przekrój dla wszystkich części krokwi jednakowy, musimy go zatem liczyć wedle największej siły $29,76 t$. Ponieważ pojedyncze więzary muszą być ze sobą połączone żelaznymi płatwiami przytwierdzonymi w węzłach do kątownek, więc długość wolna na wyboczenie w kierunku obu osi głównych przekroju (poziomej i pionowej) jest ta sama i wynosi $l = 2,37 \text{ m}$.

Z wzorów 534 i 535 łatwo się przekonamy, że promień bezwładności jest mniejszy dla osi poziomej, obliczymy więc krokwie na wyboczenie ze względu na oś poziomą i siłę $P = 29,76 t$.

$$A_0 = \frac{P}{\tau} = \frac{29760}{800} = 37,2 \text{ cm}^2.$$

Przyjmijmy jednak $A=80 \text{ cm}^2$ i obliczymy promień bezwładności z wzoru 534)

$$a = 1,4 + 0,07 \times 40 = 4,2 \text{ cm},$$

$\frac{l}{a} = \frac{2,37}{4,2} = 56,4$. Z tablicy mamy $\zeta' = 0,64$; $A = 37,2 : 0,64 = 58,1 \text{ cm}^2$, do tego powierzchnia 2 nitów 20 mm średnicy 5 cm^2 , więc $A = 58,1 + 5 = 63,1 \text{ cm}^2$.

Powierzchnia jednej kątownki będzie zatem $32,5 \text{ cm}^2$.

Jeżeli przyjmijmy 2 kątownki $\frac{120 \times 120}{15}$ o powierzchni $2 \times 33,93$, to wedle tablicy $a = 3,62 \text{ cm}$, zatem

$$\frac{l}{a} = \frac{2,37}{3,62} = 65, \text{ a stąd } \zeta' = 0,60, \text{ więc}$$

$$A = 37,2 : 0,60 = 62 \text{ cm}^2.$$

Dziury na 2 nity o średnicy 24 mm wynoszą $2 \times 2,4 \times 1,4 = 6,72 \text{ cm}^2$ więc potrzebny przekrój wynosi $62 + 6,72 = 68,72 \text{ cm}^2$, gdy rzeczywisty jest

67,86. Kątownki $\frac{120 \times 120}{15}$ są za małe, użyjemy więc następných $\frac{140 \times 140}{13}$.

Licząc jeszcze raz otrzymamy wedle tablicy $a = 4,27$; $\frac{l}{a} = \frac{237}{4,27} = 55, \zeta' = 0,64, A = 3,72 : 0,64 = 58 \text{ cm}^2$. Do tego dziury na 2 nity więc $A = 58 + 5 = 63 \text{ cm}^2$. Zostawimy więc te kątownki, bo poprzednie były za małe.

Gdyby przekrój uzyskany przez przyjęte kątownki był za mały lub za wielki, należałoby przyjąć inne kątownki i obliczenie jeszcze raz przeprowadzić.

§. 115. Belka pochyło leżąca.

Przy obliczeniach więzarów dachowych drewnianych uważać musimy na oddziaływania jednej części więzaru na drugą, które zależne są od sposobu połączenia tych części.

Dla lepszego zrozumienia rzeczy zastanówmy się nad najprostszym przypadkiem, gdy belka pochyła jest AB podparta jest w dwu punktach (rys. 264). Siła P , działająca pionowo, rozdziela się na N i T . Siła $N = P \text{ dost } \alpha$ działa prostopadłe na belkę i wywołuje moment

$$M = \frac{N x_1 (l_1 - x_1)}{l_1} = \frac{P \text{ dost } \alpha \frac{x}{\text{dost } \alpha} \left(\frac{l-x}{\text{dost } \alpha} \right)}{l} = \frac{P x (l-x)}{l},$$

a więc taki sam, jak gdyby siła P działała na rzut belki AB .

Oprócz tego działa jednak siła $T = P \text{ wst } \alpha$ i wywołuje w AC ciśnienie, w CB ciągnienie. Przekrój obliczamy wtedy

wedle wzoru $\tau = \frac{T}{A} + \frac{Me}{I}$.

Jeżeli belka oparta jest o ziemię i o mur pionowy (rys. 265). i jeżeli przyjmiemy w A oddziaływanie normalne, a więc

poziome, to dla równowagi muszą się siły O_1 , P i H przecinać w jednym punkcie C' , a zatem w B musi powstać oprócz oddziaływania pionowego $V_1 = P$ także poziome H , przyczem

$$H = P \operatorname{tg} \varphi \quad (610)$$

Siła H powstaje w B wskutek tarcia. Kąt φ , a więc i siła H , jest tem większy, im niżej jest punkt A , największe może być

$$H = Pf = P \operatorname{tg} \varphi,$$

gdy f nazwiemy współczynnikiem a φ kątem tarcia (n. *Reibungswinkel*).

Ale i w punkcie A może powstać tarcie i wtedy oddziaływanie w A nie będzie pionowe, lecz w ogóle pochyle (r. 266), nachylone do poziomu pod kątem φ' .

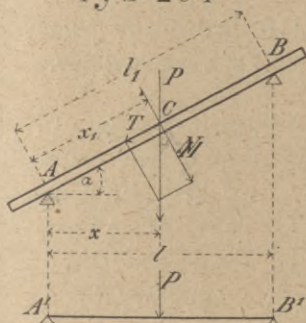
Granicą równowagi będzie położenie AB , dla którego kąt $\varphi = \varphi' = \varrho$.

Jakże się zachowują części składowe dachu drewnianego? Zależy to wszystko od rodzaju podparcia. Gdyby położyć krokiew na dwu murach w płaszczyznach pochyłych (r. 267), belka zachowa się, jak w r. 264. Oddziaływania $\frac{T}{2}$ mogą powstać

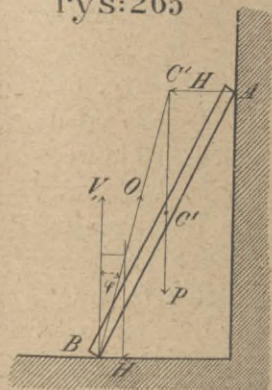
tylko wskutek tarcia. Ustrój ten możliwymby był więc tylko

dla małej siły T , więc dla małego β . Przy większem nachyleniu należałoby zakotwić belkę, aby przeszkodzić przesunięciu.

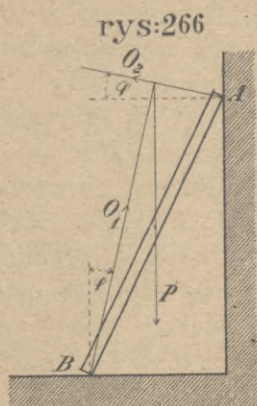
rys:264



rys:265



Jeżeli ta sama belka oparta jest na murze i słupie płaszczyznami poziomymi (rys. 268), to oddziaływania będą tylko pionowe i obliczaćby należało momenty, jak dla rzutu tej belki. widzimy więc, ile zależy przy belkach i więzarach drewnianych od sposobu połączenia.

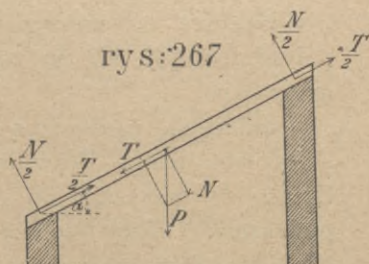


rys:266

§. 116. Drewniany pojedynczy dach krokwiowy.

Najprostszy dach drewniany składa się z więzarów złożonych z dwu krokwi, połączonych jętą, i nazywa się pojedynczym dachem krokwiowym (n. einfaches Sparrendach)

(rys. 269). Przypuśćmy, że obciążenie działa tylko pionowo, przy obliczeniu dachów drewnianych zwykle bowiem uwzględniamy tylko składową pionową parcia wiatru, bo i tak obliczenie nie może być z powodu połączeń zupełnie dokładnem. Dokładniejsze obliczenie sił wywołanych wiatrem nie przedstawiałoby zresztą poważnych trudności. Ciężary, działające na krokwie, składają się w siły wypadkowe, działające w środku krokwi.



rys:267

Niech będzie wypadkowa ciężarów na lewej połaci P , na prawej P' (rys. 269), krokwie opierają się jedna na drugiej w C , wywierają więc wzajemnie ciśnienie na siebie O_1 i O_2 , przy czem $O_1 = O_2$ i ma ten sam kierunek. Jeżeli teraz odejmiemy BC , to zamiast tej krokwi musimy zaczepić siłę O_1 i otrzymamy dla równowagi krokwi AC ze względu na punkt A

$$O_1 a \text{ dost } (a_1 - \varepsilon) = P \frac{a}{2} \text{ dost } \varepsilon \dots \dots \dots 611)$$

Podobnie otrzymamy dla krokwi BC ze względu na punkt B

$$O_2 a \text{ dost } (\alpha_2 - \varepsilon) = P' \frac{a}{2} \text{ dost } \varepsilon,$$

a że $O_1 = O_2$, więc $\frac{P}{\text{dost } (\alpha_1 - \varepsilon)} = \frac{P'}{\text{dost } (\alpha_2 - \varepsilon)}$,

a gdy $\alpha_2 = 180 - \alpha_1$,
 więc $-P \text{ dost } (\alpha_1 - \varepsilon) =$
 $= P' \text{ dost } (\alpha_1 - \varepsilon),$

a stąd

$$\text{st } \alpha_1 = \frac{P + P'}{(P - P') \text{ st } \varepsilon} \quad . \quad 612)$$

Oddziaływania w A i B są ukośne, rozkładamy je na V_1 i H_1 jakoteż V_2 i H_2 .

Dla równowagi mamy dalej

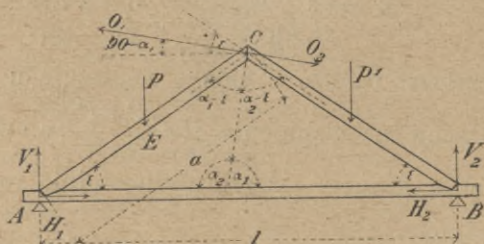
$$H_1 = H_2 = O_1 \text{ wst } \alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad 613)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 - P + O_1 \text{ dost } \alpha_1 = 0, \text{ więc } V_1 &= P - O_1 \text{ dost } \alpha_1 \\ V_2 &= P' + O_1 \text{ dost } \alpha_1 \end{aligned} \right\} . \quad 614)$$

Z rów. 611) otrzymamy dalej

$$O_1 = \frac{P \text{ dost } \varepsilon}{2 \text{ dost } (\alpha_1 - \varepsilon)} = \frac{P}{2 (\text{dot } \alpha_1 + \text{st } \varepsilon) \text{ wst } \alpha_1},$$

rys:269



a po wstawieniu wartości za $\text{dot } \alpha_1$

$$O_1 = \frac{P + P'}{4 \text{ wst } \alpha_1 \text{ st } \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad 615)$$

Wstawivszy to w rów. 613) i 614), otrzymamy

$$H_1 = H_2 = H = \frac{P + P'}{4 \operatorname{st} \varepsilon} \dots \dots \dots 616)$$

$$V_1 = P - O_1 \operatorname{dost} \alpha_1 = P - \frac{P + P'}{4 \operatorname{st} \alpha_1 \operatorname{st} \varepsilon} = P - \frac{P - P'}{4} = \frac{3P + P'}{4} \dots 617)$$

$$V_2 = P' + O_1 \operatorname{dost} \alpha_1 = P' + \frac{P - P'}{4} = \frac{3P' + P}{4} \dots \dots 618)$$

Dla obciążenia symetrycznego jest $P = P'$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$,

$$\text{więc } O_1 = \frac{P}{2 \operatorname{st} \varepsilon}, V_1 = V_2 = P, H = \frac{P}{2} \operatorname{dot} \alpha \dots \dots 619)$$

Jeżeli chcemy znaleźć siłę wewnętrzną T w AC , to zauważmy węzeł A . Siły H , T i V_1 zmniejszone o $\frac{P}{2}$, bo P rozdziela się po połowie na A i C , muszą dać zamknięty wielobok sił,

$$T = \left(V_1 - \frac{P}{2} \right) \operatorname{dosiecz} \varepsilon = \left(\frac{3P + P'}{4} - \frac{P}{2} \right) \operatorname{dosiecz} \varepsilon = \frac{P + P'}{4 \operatorname{wst} \varepsilon} \dots 620)$$

Przy obliczaniu krokwi zważyć jeszcze musimy, że jest ona obciążoną na całej długości ciężarem jednostkowym $\frac{P}{a}$. Ciężar ten działa pionowo, a więc prostopadłe do krokwi składową

$\frac{P}{a} \operatorname{dost} \varepsilon$, a w kierunku osi $\frac{P}{a} \operatorname{wst} \varepsilon$. Ponieważ oprócz tego działa tu ciśnienie T , więc przekrój obliczać będziemy według

wzoru

$$T = \frac{T + \frac{P}{a} \operatorname{wst} \varepsilon}{A} + \frac{M_e}{I} = \frac{O + \frac{P}{a} \operatorname{wst} \varepsilon}{bh} + \frac{\frac{1}{8} \frac{P}{a} \cdot a^2 \operatorname{dost} \varepsilon \frac{1}{2} h}{\frac{1}{12} bh^3} =$$

$$= \frac{\frac{P + P'}{4 \operatorname{wst} \varepsilon} + \frac{P}{a} \operatorname{wst} \varepsilon}{bh} + \frac{3 Pa \operatorname{dost} \varepsilon}{4 bh^2}, \dots \dots 621)$$

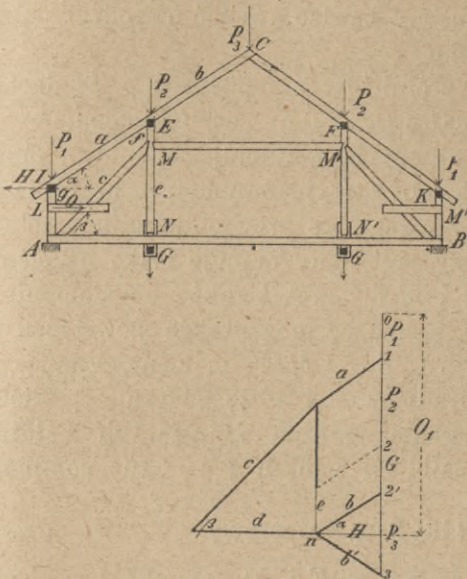
przyczem należy jeszcze T zniżyć ze względu na wyboczenie. Jęta AB pracuje na ciągnięcie $H = \frac{P + P'}{4 \operatorname{st} \varepsilon}$, a ewentualnie obciążona być może jeszcze ciężarem jednostajnie rozłożonym.

§. 117. Dach płatwowy z podwójnym więzarem i kolanem.

Nie możemy tu zastanawiać się nad wszystkimi rodzajami więzarów, wyznaczymy tylko jeszcze dla przykładu siły wewnętrzne kilku więzarów, a najprzód dla dachu płatwowego

z podwójnym wieszarem i kolanem (n. *Pfettendach mit doppeltem Hängewerk und Kniestock*) (rys. 270).

rys. 270



Zaczynając od punktu *C*, rozkładamy siłę P_3 na dwie składowe b i b' wykreślnie, robiąc $2'3 = P_3$ i kreśląc $2'n \parallel CE$ i $3n \parallel CF$. Analitycznie mamy

$$b = \frac{P_3}{2 \operatorname{wst} \alpha} \quad (622)$$

Od połączenia w *E* zależy, czy siła ta przenosi się na *EI*, czy też przejmuje ją płatew *E*. Przy małym zacięciu na nakładkę możemy przyjąć, że siła b przenosi się cała na *EI*, więc $a = b$, zaś siła P_2 przenosi się cała na

platew *E* i słup pod nią stojący. W części słupa *EM* powstaje więc siła zewnętrzna $f = P_2$, a gdy wskutek obciążenia belki *AB* działają w *N* i *N'* ciężary *G*, więc w *MN* panuje ciągnienie $e = G$. Na węzeł *M* rozpornicy działa więc siła $G + P_2$, która rozkłada się na *c* id, przyczem

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{G + P_2}{\operatorname{wst} \beta} \\ d &= (G + P_2) \operatorname{dot} \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (623)$$

Siła *H* działająca w *I* jest

$$H = \frac{P_3}{2} \operatorname{dot} \alpha \dots \dots \dots (624)$$

Siła ta wywróciłaby słup *AI*, gdyby nie kleszcze *L*, w których powstaje siła *O*, równoważąca siłę *H*, a więc tworząc moment ze względu na punkt *A*, otrzymamy

$$H \cdot AI = O \cdot AL, \text{ zatem } O = H \cdot \frac{AI}{AL} \dots \dots \dots (625)$$

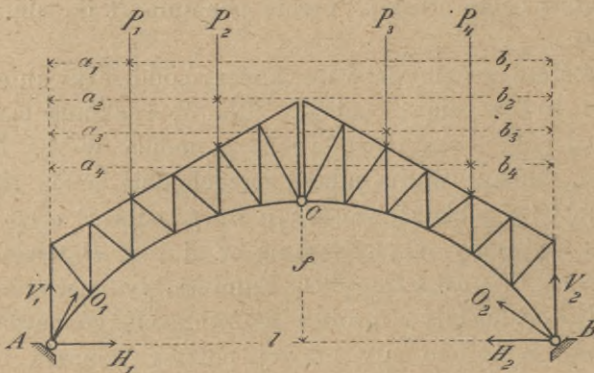
BE , a gdy ten jest oprócz tego połączony z krokwią, więc i siła f przenosi się w E . Złożmy więc f i P_2 a wypadkową m_2 rozłożmy na siły e i g , a otrzymamy $mn=e$, $2n=g$.

Przechodząc teraz do F mamy $d_1=P_3$. W A ciężar P_4 spoczywa znów na prętach AG i AB . Rozłożmy więc P_4 na b i c , a otrzymamy $4p=b$, $p_3=c$, b jest ciągnienie, c ciśnienie. W B schodzą się siły c , d_1 i e , złożywszy je, otrzymamy mp . A zatem $d_2=pr$, a oprócz tego działa w B parcie poziome rm . Siła b zaczepta w G i wywołuje moment w punkcie G zastrzału AE . Za pomocą wieloboku sznurowego wyznaczyliśmy jego wielkość.

§. 119. Więzar łukowy trójprzegubowy.

Jeżeli urządzimy oba łożyska stałe ale przegibne, to oddziaływania nawet dla obciążenia pionowego mogą być ukośne, a więzar staje się łukowym. Aby był on statycznie wyznaczalnym, musimy jeszcze urządzić trzeci przegub (n. *Gelenke*, a. *joint*), zapomocą którego łączymy obie połowy więzaru w ten sposób, że mogą się około przegubu obracać. Zwykle pas górny

rys:272



jest prosty, dolny zakrzywiony wedle paraboli (rys. 272). Mogą jednak i oba pasy być zakrzywione.

Jeżeli na dźwigar taki działają siły pionowe P_1, P_2, P_3, P_4 , to powstające ukośne oddziaływania O_1, O_2 dadzą się rozłożyć na V_1 i H_1, V_2 i H_3 . Dla równowagi musi być

$$H_1 = H_2 = H \dots \dots \dots 626)$$

W przegubach A, B i C momenty muszą być dla równowagi równe zero, więc ze względu na ten punkt A napiszemy

$$\Sigma Pa + V_2 l = 0, \text{ stąd } V_2 = \frac{\Sigma Pa}{l} \dots \dots \dots 627)$$

Analogicznie otrzymamy

$$V_1 = \frac{\Sigma Pb}{l} \dots \dots \dots 628)$$

W punkcie C moment jest równy zero, więc

$$V_1 \frac{l}{2} - Hf + P_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) + P_2 \left(\frac{l}{2} - a_2 \right) = 0, \text{ stąd}$$

$$H = \frac{1}{f} \left((V_1 - P_1 - P_2) \frac{l}{2} + P_1 a_1 + P_2 a_2 \right) =$$

$$\frac{1}{2f} \left(P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2) + P_3 b_3 \right) + P_4 b_4 - P_1 l - P_2 l + 2 P_1 a_1 + 2 P_2 a_2$$

$$H = \frac{1}{2f} (P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_1 b_1 + P_4 b_4) \dots \dots \dots 629)$$

A więc składowe pionowe oddziaływania są takie same, jak oddziaływania belki prostej, parcie poziome H da się obliczyć z rów. 629).

Wykreślnie możemy łatwo wyznaczyć oddziaływania (r. 273), rozkładając każdą siłę z osobna. Siła P_1 rozkłada się w kierunku Ae_1 i $e_1 B$, bo z powodu, że momenty w A, B i C są równe zero, oddziaływania muszą przechodzić przez A, C i B . Siła P_1 daje więc oddziaływania $e_1 a$ i $a_1 f_1$, siła P_2 $a_2 e_2$ i $a_2 f$ itd.

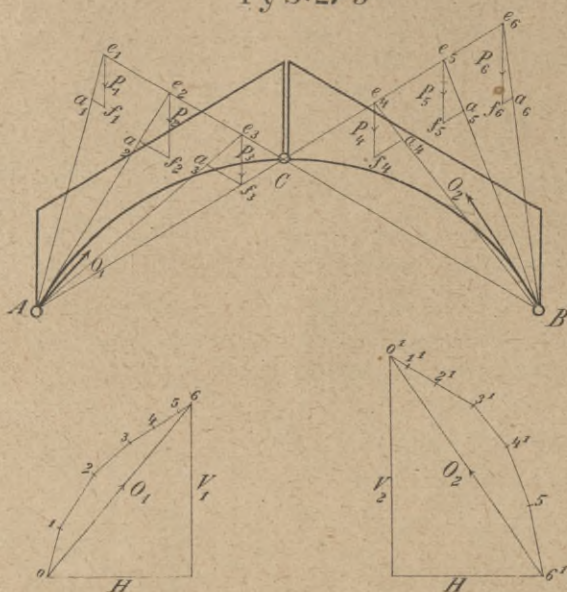
Teraz składamy oddziaływania w A i w B wieloboku sił i otrzymujemy $O_1 = 06$ i $O_2 = 6'C'$. Zamiast wyznaczenia oddziaływania dla każdej siły z osobna możemy złożyć najprzód siły lewej połowy a osobno siły prawej połowy więzara i dopiero wyznaczać oddziaływania.

Zupełnie w ten sam sposób wyznaczamy oddziaływania parcia wiatru.

W rys. 274. wyznaczyliśmy w ten sposób oddziaływania, że złożyliśmy parcia W_1, W_2, W_3, W_4 w wypadkową R , poczem wyznaczamy kierunki oddziaływań BC i AF .

W wieloboku sił wyznaczamy wedle tego wielkość $O_1 = 00$ i $O_2 = 40$. Znając oddziaływania, możemy teraz w zwykły sposób wyznaczyć plan sił dla lewej połowy, postępując z lewej ku prawej a dla prawej, postępując z prawej ku lewej.

rys:273



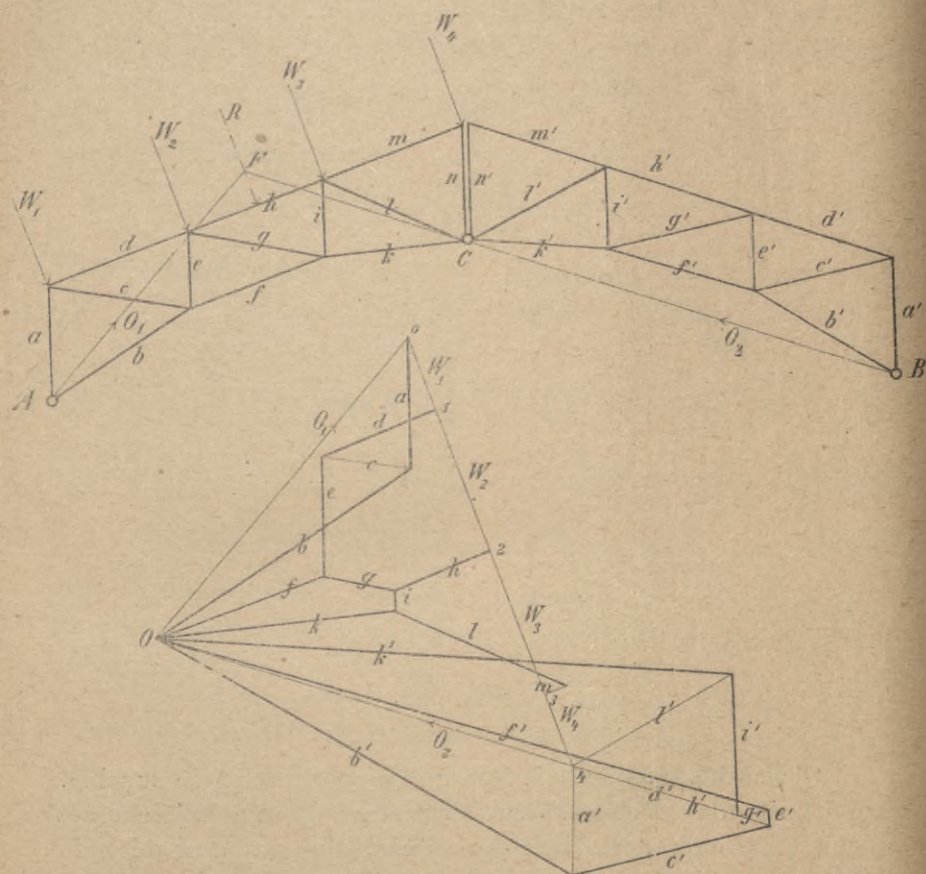
Obciążenie śniegiem nie jest tu najniekorzystniejsze zupełnie, lecz da się dla każdego pręta wyznaczyć pewne najniekorzystniejsze częściowe. Nie sądzimy jednak, aby przy dachach było potrzebnem takie badanie, wystarczy tylko, gdy przyjmijemy obciążenie ściegiem raz całkowite, drugi raz tylko dla jednej połaci i dla każdego pręta zatrzymamy wyniki niekorzystniejsze.

§. 120. Dachy baniaste.

Dach baniasty (n. *das Kuppeldach*) ma powierzchnię dachową powstałą wskutek obrotu krzywej płaskiej około osi pionowej przestrzeni, nad którą budujemy dach. Dźwigające części ustrojowe, składają się tu głównie z krokwi, które urządzamy pod różnymi kątami środkowymi w południkach, które

połączone są poziomymi pierścieniami w równoleżnikach. W trapezach, w ten sposób powstałych, urządzi się podwójne przeką-

rys: 274.



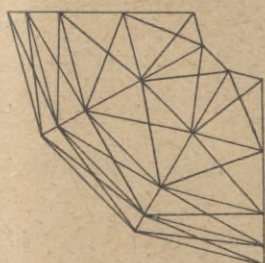
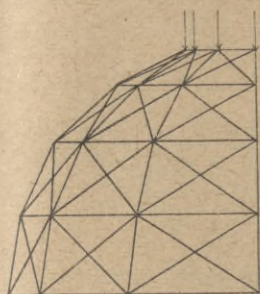
tnie gibkie (rys. 275). Zwykle górny pierścień obciążony jest latarnią.

Obliczenie bani podał pierwszy Schwedler (1866), dokładniejsze Foepl i Müller Breslau (1892).

§. 121. Obciążenie bani ciężarem własnym.

Każdy pierścień niesie ciężar odnośnej strefy bani i przenosi go na krokwie. Jeżeli ciężary stref są P_1, P_2, P_3 itd., przy-

rys: 275



czem ciężar latarni zawarty już jest w P_1 , to jeżeli rzut poziomy bani jest umiarem wielobok, o n bokach, w węzłach jednej

krokwi zaczepiają ciężary $\frac{P_1}{n}, \frac{P_2}{n}, \frac{P_3}{n}$ itd., a wszystkie krokwie są obciążone jednakowo. Dolne końce krokwi opierają się o pierścień mурowy (n. *Mauerring*), który opiera się parciu poziomemu, a na sam mur działa tylko ciężar pionowy.

Dla każdej krokwi otrzymamy więc oddziaływanie pionowe

$$V = \frac{1}{n} (P_1 + P_2 + P_3 + \dots) \quad . \quad 630$$

Siły wewnętrzne w krokwi najłatwiej wyznaczyć wykreślnie (rys. 276).

Wykreślmy wielobok sił 01234 i badajmy równowagę

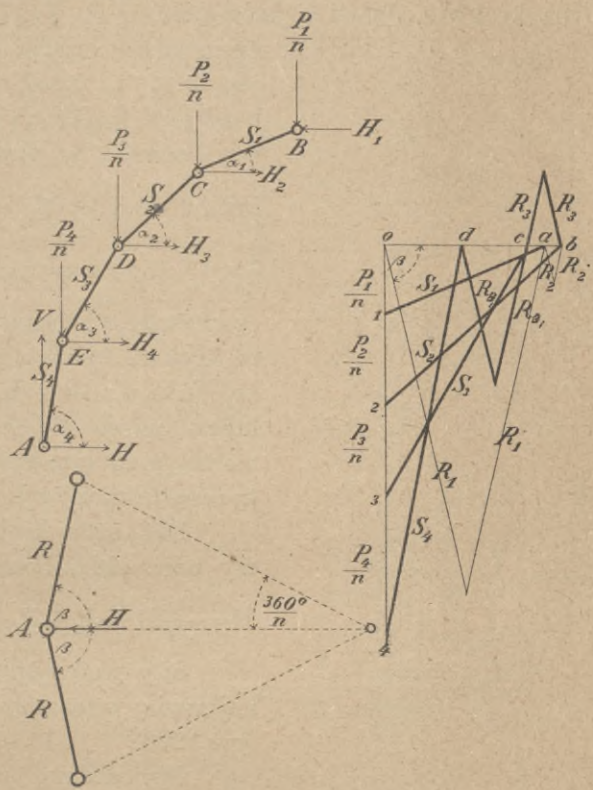
w B . Siły $\frac{P_1}{n}, S_1$ i H_1 tworzą zamknięty trójkąt sił, więc $1a \parallel S_1, 0a$ pozioma.

Wykreśliwszy wielobok sił dla węzła C , otrzymamy $2b = S_2, ba = H_2$. Jeśli to samo powtórzymy w D , to otrzymamy $S_3 = 3c, cb = -H_3$, więc już ciągnięcie, to samo $-H_4 = dc$, wreszcie $-H = od$.

Siły H są wypadkowe ciśnięć, względnie ciągnięć pierścieniowych R , które ze względu na symetrię są równe. Znając siłę H , łatwo teraz rozłożyć ją wykreślnie na dwie siły R , działające w pierścieniu, nachylone do H pod kątami β . Zrobiliśmy to na rysunku.

Uwaga. Na rys. 276. siły poziome H_1, H_2, H_3, \dots, H są wszystkie rysowane cienkimi liniami, gdyż H_3, H_4 i H pada na H_2 , nie można więc było uwidocznić ciśnień i ciągnięć.

rys: 276



Analitycznie wyznaczyć możemy siły wewnętrzne, ustawiając równania równowagi dla rozmaitych węzłów. I tak otrzymamy dla B

$$\frac{P_1}{n} + S_1 \text{ wst } \alpha_1 = 0, \text{ stąd } S_1 = - \frac{P_1}{n \text{ wst } \alpha_1},$$

Dla punktu C mamy $\frac{P_2}{n} + S_2 \text{ wst } \alpha_2 - S_1 \text{ wst } \alpha_1 = 0$, stąd

$$S_2 = S_1 \frac{\text{wst } \alpha_1}{\text{wst } \alpha_2} - \frac{P_2}{n \text{ wst } \alpha_2} = - \frac{P_1 + P_2}{n \text{ wst } \alpha_2}$$

ogólnie

$$S_m = - \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_m}{n \text{ wst } \alpha_m} \dots \dots \dots 631)$$

Dla punktu *B* mamy dalej

$$S_1 \text{ dost } \alpha_1 - H_1 = 0, \text{ stąd } H_1 = S_1 \text{ dost } \alpha_1 = -\frac{P}{n} \text{ dost } \alpha_1.$$

$$\text{A że } H_1 = 2R \text{ dost } \beta, \text{ więc } R_1 = -\frac{P \text{ dost } \alpha_1}{2n \text{ dost } \beta}.$$

Dla *C* otrzymamy

$$S_2 \text{ dost } \alpha_2 - S_1 \text{ dost } \alpha_1 - H_2 = 0, \text{ a gdy } H_2 = 2R_2 \text{ dost } \beta,$$

$$R_2 = -\frac{(P_1 + P_2) \text{ dost } \alpha_2 + P_1 \text{ dost } \alpha_1}{2n \text{ dost } \beta}$$

ogólnie

$$R_m = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1}) \text{ dost } \alpha_{m-1} - (P_1 + \dots + P_m) \text{ dost } \alpha_m}{2n \text{ dost } \beta} \quad . \quad 632)$$

Z rysunku widzimy, że $2\beta + \frac{360}{n} = 180$, więc

$$\beta = 90 - \frac{180}{n}, \text{ dost } \beta = \text{wst } \frac{180}{n}, \text{ zatem}$$

$$R_m = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1}) \text{ dost } \alpha_{m-1} - (P_1 + P_2 + \dots + P_m) \text{ dost } \alpha_m}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}} \quad . \quad 633)$$

Dla najniższego punktu *A* mamy

$$S_4 \text{ dost } \alpha_4 + H = 0, \text{ więc}$$

$$R_5 = \frac{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \text{ dost } \alpha_4}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 634)$$

§. 122. Obciążenie bani śniegiem i wiatrem.

Tu przypuszczamy, że bania jest tak płaską, że w ogóle wiatr ma mały wpływ na siły wewnętrzne. W przybliżeniu obliczamy więc parcie wiatru dla średniego nachylenia we wszystkich częściach bani stałe i uwzględniamy tylko składową pionową parcia, którą dodajemy do ciężaru śniegu.

Niech ciężar śniegu i wiatru na jednej strefie nazywa się *Q* z odpowiednim znaczkim, to ponieważ wedle 631) *S_m* siła wewnętrzna w krokwi jest największa dla obciążenia zupełnego, otrzymamy więc

$$\text{najw } S'_m = - \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m}{n \text{ wst } \alpha_m} \dots \dots \dots 635)$$

Jeżeli chcemy zbadać najniekorzystniejsze obciążenie pierścieni, to widzimy z 633), że wielkość, a nawet i znak R_m zależy od wielkości obu wyrazów w liczniku. I tak w m tym pierścieniu będzie *najw.* ciśnienie, jeżeli w r. 633) będzie licznik ujemny, a że $\alpha_m > \alpha_{m-1}$, więc licznik będzie ujemny, gdy $P_1 + P_2 + P_{m-1}$ będą jak najmniejsze, a więc równe zero, zaś P_m jak największe. A więc n. p. w trzecim pierścieniu mają być dla *najw.* ciśnienia I. i II. strefa nieobciążona a trzeci pierścień obciążony. Obciążenie dalszych pierścieni jest obojętnem. Przeciwnie dla *najw.* ciągnięcia muszą być strefy wewnątrz pierścienia obciążone, dany pierścień zaś nie.

Wobec tego otrzymamy największe siły wewnętrzne w pierścieniach.

najw. ciśnienie:

pierścień latarniowy $\text{najw } (-R_1) = - \frac{Q_1 \text{ dost } \alpha_1}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

„ drugi $\text{najw } (-R_2) = - \frac{Q_2 \text{ dost } \alpha_2}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

„ trzeci $\text{najw } (-R_3) = - \frac{Q_3 \text{ dost } \alpha_3}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

„ murowy $\text{najw } (-R_4) = 0$

najw. ciągnięcie:

pierścień latarn. $\text{najw } R_1 = 0$

„ drugi $\text{najw } R_2 = \frac{Q_1 (\text{dot } \alpha_1 - \text{dot } \alpha_2)}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

„ trzeci $\text{najw } R_3 = \frac{Q_1 + Q_2 (\text{dot } \alpha_2 - \text{dot } \alpha_3)}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

„ murowy $\text{najw } R_m = \frac{(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{m-1}) \text{ dot } \alpha_{m-1}}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

636)

Chcąc wyznaczyć największe siły w przekątniach pomysły, że przez środek przecinających się przekątne położymy

płaszczyznę południkową. Niechaj jedna połowa bani będzie obciążona tylko ciężarem własnym, druga zaś połowa ciężarem własnym i ruchomym, to ponieważ wtedy będzie największa różnica w siłach wewnętrznych krokwi obu połów, zatem i siły wewnętrzne w przekątniach będą wtedy największe.

Gdyby cała bania była obciążona tylko ciężarem własnym, to w pierwszej strefie byłoby $S_1 = -\frac{P_1}{n \operatorname{wst} \alpha_1}$, dla obciążenia zupełnego ciężarem własnym i ruchomym $S'_1 = -\frac{P_1 + Q_1}{n \operatorname{wst} \alpha_1}$, różnica zatem wynosiłaby $\Delta S = \frac{Q}{n \operatorname{wst} \alpha}$. W rzeczywistości, gdy jedna połowa jest obciążona ciężarem ruchomym, a druga nie, różnica będzie mniejsza, lecz aby uniknąć zawilych obliczeń, przyjmujemy niekorzystniej, niż w rzeczywistości, $\Delta S = \frac{Q}{n \operatorname{wst} \alpha}$. Gdy tedy kąt między przekątnią a więcej obciążoną krokwią jest γ , to siła wewnętrzna największa w przekątnej będzie

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Q}{n \operatorname{wst} \alpha_1 \operatorname{dost} \gamma_1} \\ a \text{ podobnie w innych strefach} \\ Z_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{n \operatorname{wst} \alpha_2 \operatorname{dost} \gamma_2} \\ Z_3 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{n \operatorname{wst} \alpha_3 \operatorname{dost} \gamma_3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 637)$$

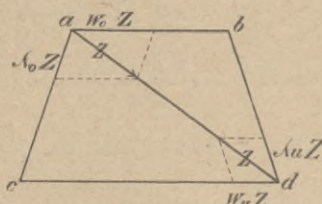
§. 123. Obliczenie dokładniejsze sposobem Müllera Breslaua.

Poprzedni sposób Schwedlera jest tylko przybliżony. dokładniejszy podał Müller Breslau w r. 1892.

Dowodziliśmy, że w każdym trapezie (rys. 277), powstałym z dwu krokwi i dwu części pierścienia znajdują się dwie przekątne gibkie. Jako gibkie nie mogą być ciśnione i w razie, gdyby w jednej z nich powstało ciśnienie, wygięłaby się i przestałaby działać, natomiast druga byłaby ciągnioną. Obliczamy więc je w ten sposób, że przyjmujemy zawsze tylko jedną przekątnię w trapezie i to ciągnioną. Gdyby wypadło z rachunku ciśnienie, trzeba by rachunek powtórzyć dla drugiej przekątnej.

Siła wewnętrzna Z działająca w przekątnej ad rozkłada się w a na $\omega_0 Z$ i $\lambda_0 Z$, w d na $\omega_u Z$ i $\lambda_u Z$. Wartości ω_0 , λ_0 , ω_u , λ_u , dadzą się dla każdego trapezu obliczyć lub wyznaczyć łatwo wykreślnie. Jeżeli więc uwzględnimy siły $\omega_0 Z$, $\lambda_0 Z$, $\omega_u Z$ i $\lambda_u Z$, to możemy teraz w dalszem badaniu przekątnie opuścić i pozostają nam tylko krokwie i pierścienie.

rys:277



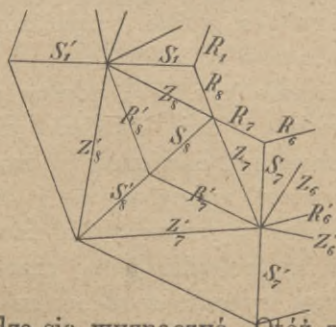
* Jeżeli oznaczymy sumy sił wewnętrznych w krokwiach i pierścieniach \mathfrak{S} i \mathfrak{R} , to z rys. 278 otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_8 &= S_8 + \lambda_0 Z_8 + \lambda_0 Z_7 \\ \mathfrak{S}'_8 &= S'_8 + \lambda'_u Z'_8 + \lambda'_u Z'_7 \\ \mathfrak{R}_8 &= R_8 + \omega_0 Z_8 \\ \mathfrak{R}'_8 &= R'_8 + \omega_u Z_8 + \omega'_u Z'_8 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 638)$$

Zauważmy teraz węzeł E przedstawiony na rys. 279 w obu rzutach. Siłę P , działającą w E rozłożmy na siłę P' , działającą w płaszczyźnie krokwi i P'' , działającą prostopadłe do tej płaszczyzny.

Jeżeli mamy siłę P' i siłę wewnętrzną \mathfrak{S} , to dla sił \mathfrak{S} , \mathfrak{S}' , P' i H da się wykreślić zamknięty wielobok sił i da się wyznaczyć siła H , która jest znów wypadkową sił P'' , \mathfrak{R}_n i \mathfrak{R}_{n-1} . Jeżeliśmy wyznaczyli H a znamy też P'' , to znów z wieloboku sił, znajdującego się w innej, ale wykreślonego w tej samej płaszczyźnie, dadzą się wyznaczyć \mathfrak{R}_n i \mathfrak{R}_{n-1} .

rys:278

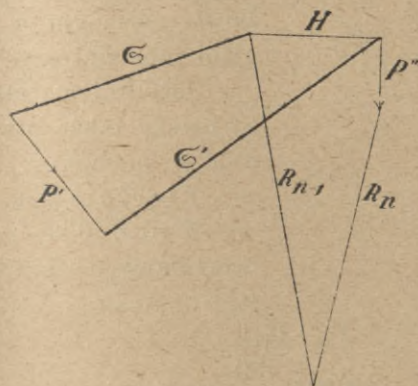
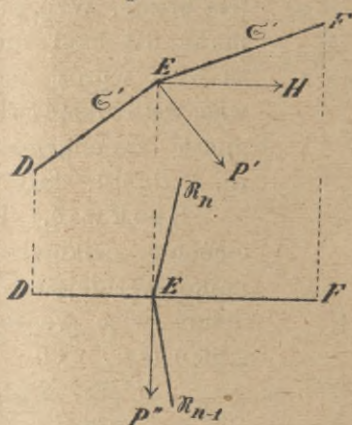


Widzimy więc, że jeżeli znamy oprócz siły P także i jedną siłę wewnętrzną \mathfrak{S} , inne siły wewnętrzne dadzą się wyznaczyć. Otóż zaczynając od pierścienia latarniowego, mamy $\mathfrak{S} = 0$, a więc wyznaczymy wszystkie siły we-

wewnętrzne dla tego węzła. Dla węzła pierścienia drugiego znamy już \mathcal{E} .

Po wyznaczeniu sił \mathcal{E} , \mathcal{R} i stosunków λ i w możemy wyznaczyć też na podstawie rów. 638) siły Z , R i S . Przedtem należy dla węzłów bez przekątni wyznaczyć R i S i tak uzyskać pewną ilość znanych ilości, które wprowadzić należy do rów. 638) dla wyznaczenia nieznanych *).

rys:279



wierzchni obrotowej. I tu więc otrzymujemy krokwie, pierścienie i przekątnie, jak w bani, a obliczenie jest zupełnie podobne jak bani.

*) Landsberg podaje w swej „Statik der Hochbauconstructionen“ III. wyd. str. 257. przykład dokładnego obliczenia bani według powyższego sposobu.

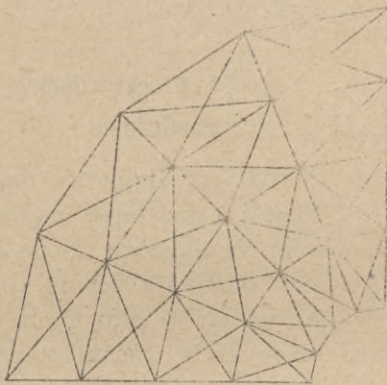
§. 124. Płaskie dachy namiotowe.

Dachy namiotowe mają kształt ostrosłupa, najczęściej regularnego. Mogą się one składać z pewnej ilości więzarów głównych, ułożonych w kierunku promieni, wtedy oblicza się je jak zwykle więzary dachowe, wedle obciążenia, które na każdy więzar przypada. W nowszych czasach jednak często nie daje się wcale więzarów, lecz krokwie łączy się kratą, zwłaszcza przy dachach płaskich, wszystkie więc części dźwigające ustroju leżą w powierzchni ostrosłupa tak, jak w bani w po-

Chociaż rozmaita pochyłość powierzchni dachu nie stanowi różnicy w ustroju, to przecież będziemy osobno mówić o dachach płaskich, a osobno o stromych z powodu, że przy płaskich uwzględnia się ciężar śniegu, przy stromych zaś parcie wiatru.

Płaskie dachy namiotowe, używane nad teatrem, cyrkiem itd. możemy uważać za dachy baniaste, w których linia rodząca

rys:280



jest prosta. Wzory otrzymane dla bani możemy tu więc wprost zastosować, wstawiając tylko zamiast zmiennego kąta α_{m-1} , α_m itd. stały kąt α .

Krokwie. Tu obciążenie całkowite jest najkorzystniejsze, otrzymamy więc wedle 631) i 635) (rys. 280)

$$S_m = - \frac{\sum_{n_1} P + \sum_{n_1} Q}{n \text{ wst } \alpha}, \quad (639)$$

jeżeli G i T oznaczają obciążenia pierścieni ciężarem własnym i śniegiem lub wiatrem.

Jeżeli niema latarni, to należy także uwzględnić w sumach P_0 i Q_0 .

Pierścienie.

Z rów. 633) i 636) otrzymamy, wstawiając $\alpha_m = \alpha_{m-1} = \alpha$,

$$R_m = - \frac{P_m + Q_m}{2 n \text{ wst } \frac{180}{n}} \quad \dots \quad (640)$$

Dla pierścienia murowego zaś otrzymamy

$$\text{najw. } R_r = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_{r-1} + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{r-1}}{2 n \text{ dost } \frac{180}{4}} \text{ dot } \alpha \quad (641)$$

Krata. Największe siły wewnętrzne w przekątniach otrzymamy z równ. 637), jeśli w niem wstawimy $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \dots$, a zatem w pierwszym pierścieniu

$$Z_1 = \frac{Q_1}{n \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dost} \gamma_1},$$

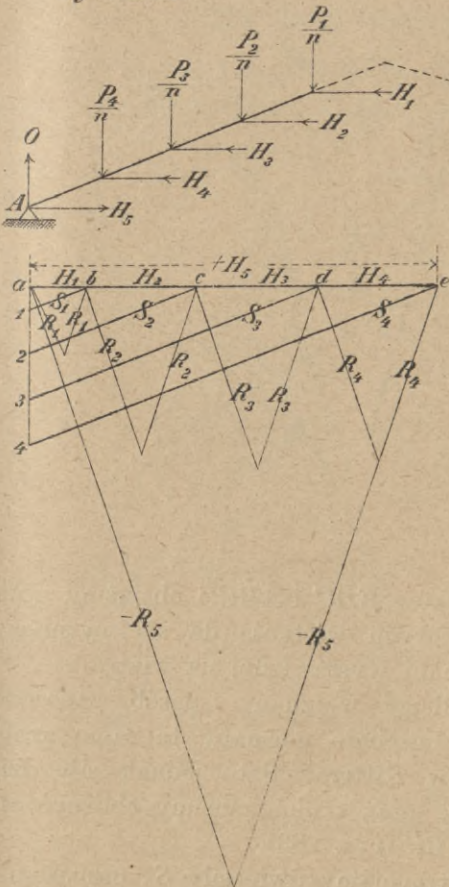
a w innych pierścieniach

$$Z_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{n \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dost} \gamma_2}$$

$$Z_3 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{n \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dost} \gamma_3}$$

... .. 642)

rys:281



Wykreślenie wyznaczamy siły wewnętrzne zupełnie tak, jak w bani (rys. 281).

Zróbmy

$$\frac{P_1}{n} = 01, \frac{P_2}{n} = 12, \text{ itd.}$$

i potem kreślimy dla poszczególnych węzłów wieloboki sznurowe, to otrzymamy $1b = S_1, 2c = S_2, 3d = S_3$ i t. d., dalej $ab = H_2, bc = H_2, cd = H_3, de = -H_4$, wreszcie $ae = H_5$. Siły H rozkładamy potem w zwykły sposób na siły R .

§. 125. Dachy wieżowe czworoboczne.

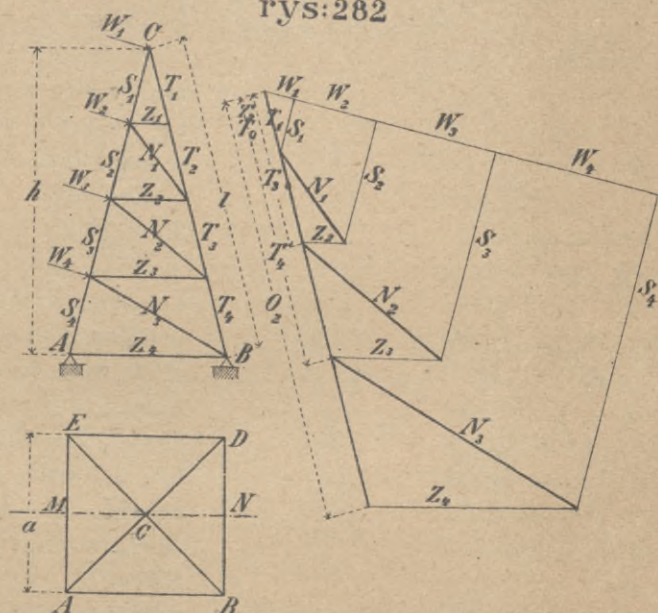
Tutaj wprowadzamy jako obciążenie pionowe tylko ciężar własny, bo śnieg nie

może się na wieży utrzymać. Siły wewnętrzne w prętach dachu wskutek ciężaru własnego dadzą się obliczyć zupełnie w ten sam sposób, jak to wyłożono w poprzednim paragrafie. Tu więc

tylko będziemy mówić o siłach, powstałych z powodu parcia wiatru, które tu gra wielką rolę.

Przypuśćmy, że mamy obliczyć dach wieżowy, ostrosłupowy czterościenny, gdy wiatr działa na płaszczyznę AEC (rys. 282). Aby wyznaczyć siły wewnętrzne w płaszczyznach ABC i EDC , pomyślmy sobie w płaszczyźnie symetrii MN urojony więzar pionowy, którego rzut pionowy jest przystają-

rys:282



cym do rzutu pionowego boków EDC i ABC i obciążmy go siłami W_1, W_2, W_3 i W_4 , których wielkość da się wyznaczyć proporcjonalnie do powierzchni wystawionej na wiatr.

Wykreślenie wyznaczyliśmy w znany sposób zapomocą planu sił siły wewnętrzne, liczebnie możnaby to samo zrobić zapomocą sposobu momentów Rittera. Sąto jednak siły działające w więzarze urojonym, teraz z nich musimy obliczyć siły rzeczywiste, działające w ABC (rys. 283).

I tak zamiast siły S otrzymamy dwie siły S' , przyczem $2S'$ dost $(90 - \epsilon) = S$, stąd

$$S' = \frac{S}{2 \text{ wst } \epsilon} \dots \dots \dots 643)$$

Dalej otrzymamy

$$Z' = \frac{1}{2} Z, \dots \dots \dots 644)$$

a wręście $2 N'$ dost $\gamma = N$, stąd

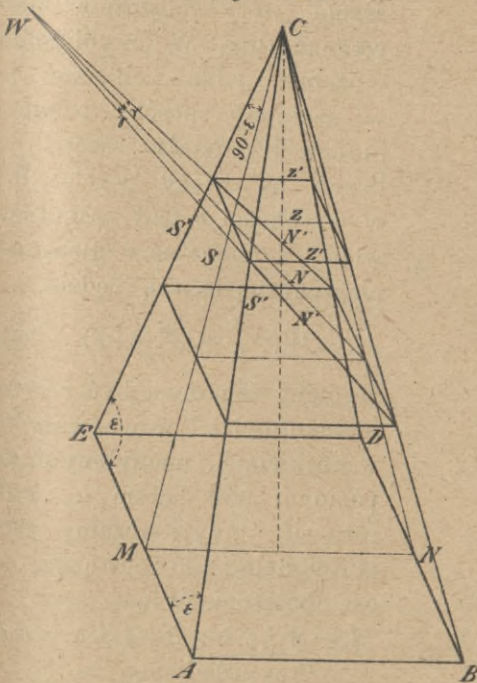
$$N' = \frac{N}{2 \text{dost} \gamma} \dots \dots \dots 645)$$

Sprowadzenie sił więzaru urojonego na siły więzaru rzeczywistego można wykonać i wykreślić przez proste rozkładanie sił w wskazany wyżej sposób.

§. 126. Dachy wieżowe ośmioboczne.

Dla uproszczenia rachunku przyjmiemy tu kierunek poziomy wiatru i będziemy obliczać tak, jakby połącze dachu były pionowe. Ponieważ dachy takie są strome, więc błąd, który przytem popełniamy, nie jest wielkim.

rys:283



Jeśli bok ośmiokąta nazwiemy a , wysokość ostrosłupa h , parcie wiatru na $m^2 w$, to parcie na płaszczyznę mnO (rys. 285) jest

$$W_0 = \frac{ah}{2} w.$$

Na płaszczyznę noO działa parcie

$$\begin{aligned} \frac{ahw}{2} \text{wst}(90 - \gamma) = \\ = \frac{ahw}{2} \text{dost} \gamma, \end{aligned}$$

które rozkłada się na W_1 i W_2 (r. 284). Parcie W_2 znosi się z ta-

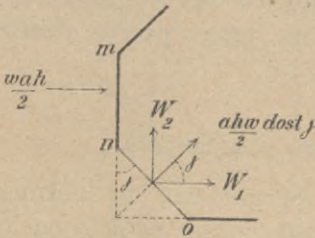
kiemże parciem, pochodzącym z płaszczyzny mrO , parcia zaś

$$W_1 = \frac{ahw}{2} \text{dost}^2 \gamma \text{ dodają się. Całe więc parcie na dach wynosi}$$

$W = W_0 + 2 W_1 = \frac{ahw}{2}(1 + 2 \text{dost}^2 \gamma)$, a że tu $\gamma = 45^\circ$, więc

$$W = \frac{ahw}{2}(1 + 2 \text{dost}^2 45^\circ) = ahw \dots \dots \dots 646)$$

rys:284

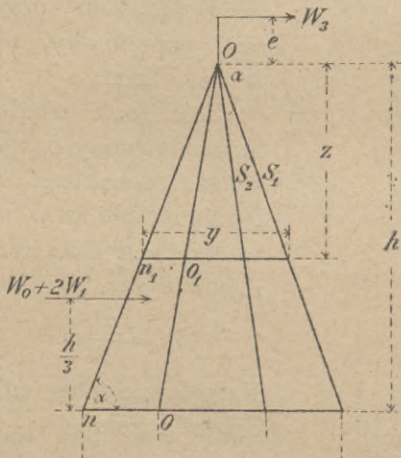


Parcie to zaczepia w jednej trzeciej wysokości dachu. Dla części ostrosłupa o wysokości z nazwijmy x długość boku $n_1 o_1$, to $W_2 = wxz \dots \dots \dots 647)$

a że $\frac{x}{z} = \frac{a}{h}$, więc $x = \frac{a}{h} z$,

stąd $W_2 = w \frac{a}{h} z^2 \dots \dots \dots 648)$

rys:285



Dokładne obliczenie sił wewnętrznych jest trudne, bo zespół jest statycznie niewyznaczalny. W przybliżeniu możemy jednak obliczyć je w następujący sposób. Niechaj oprócz W_2 działa jeszcze na krzyż na wieży parcie W_3 w wysokości e nad szczytem, wtedy moment ze względu na płaszczyznę $m_1 n_1 o_1$ będzie

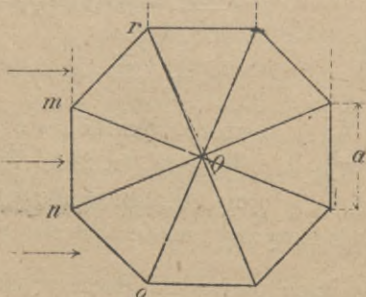
$$M_2 = W_2 \cdot \frac{z}{3} + W_3(e + z) \dots \dots \dots 649)$$

Moment ten musi być równy momentowi sił wewnętrznych w krokwiach, nachylonych do poziomu pod kątem α , które to siły przypuszczamy proporcjonalne do odstępów od osi obojętnej. Więc

$$M_2 = 2 S_1 y \text{ wst } \alpha + 2 S_2 x \text{ wst } \alpha$$

Przypuściliśmy, że

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{y}{2}}{x} = \frac{y}{x}, \text{ więc } S_2 = S_1 \frac{x}{y}$$



$$\text{stad } M_2 = 2 S_1 \text{ wst } \alpha \left(y + \frac{x^2}{y} \right) = \frac{2 S_1 \text{ wst } \alpha}{y} (x^2 + y^2),$$

$$\text{a wienc } S_1 = \frac{M_2 y}{2(x^2 + y^2) \text{ wst } \alpha} \quad \dots \dots \dots 650)$$

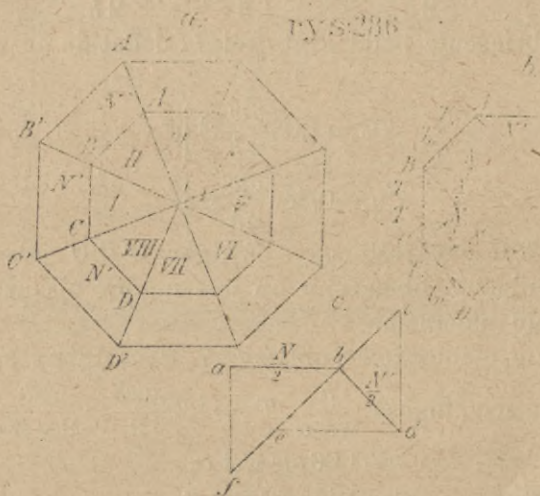
$$\text{a } S_2 = \frac{M_2 x}{2(x^2 + y^2) \text{ wst } \alpha} \quad \dots \dots \dots 651)$$

Jeżeli ośmiobok jest regularny, to $y = x + 2x \text{ dost } 45^\circ = 2,414x$, S_1 jest zawsze większe, niż S_2 , a że wiatr może wiać z każdej strony, więc w każdej krokwi S_1 może być dodatnie lub ujemne. Największa więc siła wewnętrzna we wszystkich krokwiach jest

$$\text{najw } S = \pm \frac{M_2 y}{2(x^2 + y^2) \text{ wst } \alpha} \quad \dots \dots \dots 652)$$

a dla wieloboku regularnego, wstawiwszy $y = 2,414x$, otrzymamy

$$\text{najw } S = \pm 0,427 \frac{M_2}{y \text{ wst } \alpha} \quad \dots \dots \dots 653)$$



rys. 286

Jeżeli teraz chcemy zbadać siły wewnętrzne w pierścieniach i kracie, to przypuśćmy, że na pewną część powierzchni boku ostrosłupa $B'C'O$ (rys. 286) działa parcie wiatru N , na odnośne części boku $A'B'O$ i $C'D'O$ N' .

$$\text{Wedle poprzedniego } N' = N \text{ dost } 45^\circ \quad \dots \dots \dots 654)$$

W B działają siły $\frac{N}{2}$ i $\frac{N'}{2}$. Jeśli ich wypadkową rozłożymy w kierunku płaszczyzn boków, to otrzymamy siły T i T_0 .

Z rys. 285 c) widzimy, że

$$\left. \begin{aligned} T'_0 = be + bf = ec + cf = 3 \cdot eb = 3 \cdot \frac{N}{2} \text{ dost } 45^\circ = 1,06 N \\ \text{zaś } T'_u = \frac{N'}{2} = 0,354 N. \end{aligned} \right\} \cdot 655)$$

W płaszczyźnie $OB'C'$ działają z obu stron siły T i znoszą się, przekątnie więc wcale nie pracują. Inaczej rzecz się ma z płaszczyzną $OB'A'$. Tu działa z jednej strony siła T'_0 , z drugiej T'_u , pierwsza trzy razy większa od drugiej. Siły te muszą być przeniesione na punkty podparcia $A'B'$. Belka kratowa więc w płaszczyźnie $OB'A'$ musi te siły przenieść i działa jako belka jednym końcem utwierdzona.

Obciążenie ze strony krawędzi OB' jakoteż i OA' zmienia się wedle powierzchni obciążenia trójkątnej. A więc na powierzchni I od szczytu aż do wysokości z

$$N_z = wx \frac{z}{2}, \text{ a gdy } x = \frac{a}{h} z, N_z = \frac{wa}{2h} z^2.$$

Zatem obciążenie belki kratowej II dodatnie do wysokości z jest

$$\left. \begin{aligned} T'_{0z} = 1,06 \frac{aw}{2h} z^2 \\ T'_{uz} = 0,354 \frac{aw}{2h} z^2 \end{aligned} \right\} \cdot \dots \cdot 656)$$

W rys. 287 wykreśliśmy dźwigar $C'D'O$ jako jednym końcem utwierdzony, obciążony on jest u góry obciążeniem dodatnim, u dołu ujemnem.

Obciążenie jednostkowe obliczymy w następujący sposób dla

$$z = h, \text{ a więc na długość } \frac{h}{\text{wst } \alpha}. T'_0 = 1,06 \frac{awh}{2} = \frac{ph}{2 \text{ wst } \alpha}, \text{ stąd}$$

$$p = 1,06 aw \text{ wst } \alpha,$$

podobnie mamy

$$p' = 0,354 aw \text{ wst } \alpha.$$

Dla m tego węzła pasu górnego otrzymamy

$$D_m \text{ dost } \varphi_m = O_{m+1} \text{ dost } \beta - O_m \text{ dost } \beta.$$

Jeśli M_m i M_{m-1} oznaczają momenty ze względu na węzły m i $m-1$, to

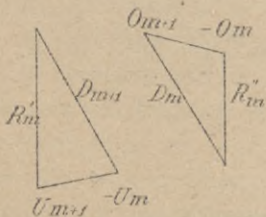
$$O_{m+1} \text{ dost } \beta = \frac{M_m}{b_m}, \quad O_m \text{ dost } \beta = \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}},$$

$$\text{więc } D_m \text{ dost } \varphi_m = \frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}}.$$

Jeżeli teraz wstawimy wartości za p i p' , to $p-p'=0,71 aw$,
 stąd $D_m=0,235 e_m d_m w$ 658)

Aby wyznaczyć siłę wewnętrzną w pierścieniu a , wykreślmy wielobok sił dla węzła m' , przypuszczając, że $p'=0$ i nazwijmy w tym wypadku siłę w rozporze R'_m . Z rysunku 288. widzimy, że

rys: 288



$$-\frac{R_m}{D_{m+1}} = \frac{b_{m+1}}{d_{m+1}}$$

Wedle 657) jest dla $p'=0$,

$$D_{m+1} = \frac{e_{m+1} d_{m+1} p}{3 a}$$

więc

$$R'_m = \frac{e_{m+1} b_{m+1} p}{3 a}$$

Jeżeli teraz przyjmiemy $p=0$, to dla węzła m otrzymamy po wykreśleniu wieloboku sił podobnie

$$-\frac{R''_m}{D_m} = \frac{b_{m-1}}{d_m}, \text{ a z r6w. 657) } D_m = \frac{e_m d_m p'}{3 a}, \text{ wi6c}$$

$$R''_m = \frac{e_m b_{m-1} p'}{3 a}$$

Zatem jeřli p i p' działają r6wnoczeřnie,

$$R_m = -\frac{1}{3} (b_{m+1} e_{m+1} p - b_{m-1} e_m p') \quad . . . \quad 659)$$

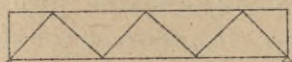
Do tych sił, wywołanych parciem wiatru, naleŹy dodać siły wskutek cięŹaru wlasnego, które wyznaczyć możemy łatwo wedle §. 124.

§. 127. Cz6ści składowe i rodzaje belek kratowych.

Belka kratowa, jak wiemy, składa się z dwu pas6w, g6rnego i dolnego, i z kraty, powstałej z krzyŹulc6w. Według układu krzyŹulc6w rozr6żniamy rozmaite rodzaje kraty. A mianowicie, jeŹeli krata składa się z dwu rz6d6w krzyŹulc6w (rys. 289 i 290), wtedy nazywamy ją kratą pojedynczą (n. einfaches Gitterwerk, fr. treillis simple). JeŹeli mamy trzy rz6dy krzyŹulc6w (ryc. 291), to nazywamy kratę złoŹoną (n. combinirtes Gitterwerk). Kratę powstałą z kilku r6wnych krat pojedynczych, przesuniętych o pewną cz6ść odległ6ści dwu węzł6w

(rys. 292), nazywamy kratą wielokrotną (n. *mehrtheiliges Gitterwerk*, fr. *treillis multiple*, an. *multiple system*). Liczbę, oznaczającą ilość krat składowych, a zatem także ilość części, na które podzielony został jeden krzyżulec (np. *ab* na cztery części), nazywamy liczbą podziału (n. *Theilungszahl*). Jeżeli liczba podziału jest 2, 3 i t. d., to nazywamy kratę dwukrotną, trzykrotną i t. d. (n. *zweiteilig*, *dreitheilig*, fr. *double*, *triple*). Rysunek 293 przedstawia kratę dwukrotną złożoną, tu więc chcąc wyznaczyć liczbę podziału patrzymy, na ile części zostały podzielone krzyżulce pionowe.

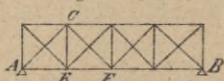
rys:289



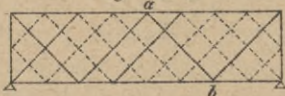
rys:290



rys:291



rys:292



rys:293



Według nachylenia krzyżulców rozróżniamy następujące rodzaje krat: kratę równoramienną (n. *Netzwerk*, fr. *système triangulaire*, an. *triangular system*) (rys. 289), składającą się z samych trójkątów równoramiennych i kratę prostokątną lub przedziałową (n. *Fachwerk*, fr. *système quadrangulaire*, an. *quadrangular system*) (rys. 290), składającą się z trójkątów prostokątnych.

Krzyżulce dzielą się według nachylenia na pionowe (n. *Verticale*, fr. *poinçon*, *montant*) i przekątne (n. *Diagonalen*, fr. *diagonale*, a. *diagonal-brace*, cz. *příčka*), a według rodzaju nateżenia na krzyżulce ciągnione (n. *Zugstäbe*, fr. *tirant*, an. *tie*) i ciśnione (n. *Druckstäbe*, a. *strut*).

Chcąc oznaczyć równocześnie nachylenie i rodzaj nateżenia krzyżulców, używamy następujących nazw. Nazywamy krzyżulec ciągniony pionowy słupem wiszącym (n. *Hängesäule*), krzyżulec ciągniony nachylony ścięgnem (n. *Zugband*, fr. *bragon*, *contrefiche*, an. *tie*, cz. *táhlo*), krzyżulec ciśniony pionowy

Chcąc oznaczyć równocześnie nachylenie i rodzaj nateżenia krzyżulców, używamy następujących nazw. Nazywamy krzyżulec ciągniony pionowy słupem wiszącym (n. *Hängesäule*), krzyżulec ciągniony nachylony ścięgnem (n. *Zugband*, fr. *bragon*, *contrefiche*, an. *tie*, cz. *táhlo*), krzyżulec ciśniony pionowy

Chcąc oznaczyć równocześnie nachylenie i rodzaj nateżenia krzyżulców, używamy następujących nazw. Nazywamy krzyżulec ciągniony pionowy słupem wiszącym (n. *Hängesäule*), krzyżulec ciągniony nachylony ścięgnem (n. *Zugband*, fr. *bragon*, *contrefiche*, an. *tie*, cz. *táhlo*), krzyżulec ciśniony pionowy

słupem (n. *Säule*, fr. *poteau*, *montant vertical*, an. *post*, cz. *sloupec*), krzyżulec ciśniony nachylony zastrzałem (n. *Strebe*, fr. *montant*, a. *standart*, *strut*, cz. *vzpěra*).

Belki kratowe rozróżniamy według kształtu pasów na belki równoległe (n. *Parallelträger*, fr. *poutre en semelle paralleles*, a. *parallel boomed girder*, cz. *nosnik přimopasovy*) o pasach równoległych i na belki wieloboczne (n. *Träger mit polygonalen Gurten*, a. *girder with inclined flanges*, cz. *nosnik křivopasovy*) (rys. 294) o pasach w kształcie wieloboku lub krzywej.

rys:294

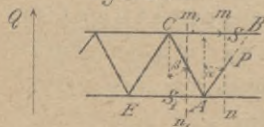


Te ostatnie belki nazywamy rozmaicie według kształtu pasów; belki takie, używane prawie wyłącznie jako belki mostowe, są przedmiotem teorii mostów.

§. 128. Analityczne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej.

Dla belek kratowych równoległych o kracie pojedynczej da się metoda przecięć znacznie uprościć. Aby wyznaczyć siłę S , działającą w pasie górnym, przecinamy belkę w kierunku mn (rys. 295) i ustawiamy równanie momentów ze względu na przeciwległy węzeł A . Nazwawszy M moment sił zewnętrznych ze względu na punkt A a h wysokość belki, otrzymamy $M + Sh = 0$, a stąd

rys:295



$$S = -\frac{M}{h} \dots \dots \dots 660$$

Podobnie otrzymamy siłę, działającą w pasie dolnym AE ,

$$S' = +\frac{M'}{h}, \dots \dots \dots 661$$

jeżeli M' jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt C . Widzimy więc, że siły, działające w pasach belki kratowej równoległej, są proporcjonalne do momentu sił zewnętrznych, przyczem w pasie górnym powstaje ciśnienie, a w pasie dolnym ciągnienie.

W celu wyznaczenia sił zewnętrznych w krzyżulcach korzystamy z prawidła, że dla równowagi suma pionowych składowych musi być równą zeru, więc $Q + P \text{ dost } \alpha = 0$, stąd

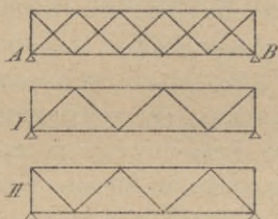
$$P = -Q \text{ siecz } \alpha \dots \dots \dots 662$$

tylko $\frac{1}{n}$ część obciążenia na jeden układ, a więc także $\frac{Q}{n}$ i $\frac{M}{n}$. Dla krzyżulców otrzymujemy w ten sposób odrazu siły wewnętrzne, dla pasów zaś dodajemy siły wewnętrzne, otrzymane dla każdego układu z osobna.

§. 131. Belka kratowa Howe'a.

Belka Howe'a (rys. 292) jestto belka drewniana, mająca kratę złożoną ze sztucznem natężeniem, które sprawiamy, naciągając słupy wiszące, zakończone śrubami. Ciągnięcie to sztuczne wywołuje w przekątniach AC i CF ciśnienie równe z powodu symetrii. Ciśnienia te robimy tak wielkie, aby zrównoważyły największości ciągnięcia, wywołanego obciążeniem w krzyżulcach ciągnionych; natężenie tych krzyżulców dla obciążonej belki będzie więc równe zeru. Łatwo pojmujemy, że przez to wzrosną siły wewnętrzne krzyżulców ciśnionych w dwójnasób, bo do ciśnienia, wywołanego obciążeniem, dodaje się jeszcze ciśnienie sztuczne.

rys: 297.



Zastrzały AC , które wskutek obciążenia są ciśnione, a więc te, które byłyby zastrzałami, gdyby sztucznego natężenia nie było, nazywamy zastrzałami głównymi (n. *Hauptstrebe*, an. *main brace*), krzyżulce zaś ciągnione wskutek obciążenia a ciśnione sztucznie, nazywamy zastrzałami drugorzędnymi, odporami, odstrzałami (n. *Gegenstrebe*, fr. *contrelie*, an. *conterstrut*).

Ponieważ w zastrzałach drugorzędnych dla belki obciążonej niema wcale żadnego natężenia, więc w przybliżeniu możemy belkę Howe'a obliczać tak, jakby zastrzałów drugorzędnych nie było. Największa zaś siła wewnętrzna zastrzałów drugorzędnych jest dla belki nieobciążonej równą połowie siły wewnętrznej zastrzałów głównych, bo, jak wspomnieliśmy, siła wewnętrzna P , wywołana natężeniem sztucznem, równa się sile wewnętrznej P' , wywołanej obciążeniem, a zatem siła działająca w zastrzałach głównych jest $2P$, a w zastrzałach drugorzędnych równa tylko sile P , wywołanej natężeniem sztucznem.

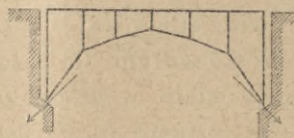
C. Teorya sklepień.

X. Sklepienia kolebkowe.

§. 132. Łuki i sklepienia.

Dotychczas mówiliśmy o belkach prostych, które cisną na podpory tylko w kierunku pionowym, tu będziemy zastanawiać się nad belkami, działającymi nawet przy obciążeniu pionowym na podpory w kierunku ukośnym i dążącymi do ich oddalenia (rys. 298). Belki takie nazywamy w ogóle belkami rozporowemi lub rozpornicami (n. *Sprengswerksträger*, fr. *poutre à jambettes*, a. *strut framed girder*).

rys:298



Jeżeli belka jest ciągle krzywą, nazywamy ją belką łukową lub łukiem (n. *Bogenträger*, fr. *poutre en arc*, a. *arched girder*), a jeżeli materiałem tej belki jest cegła lub kamień, nazywamy ją sklepieniem

(n. *Gewölbe*, fr. *voûte*, an. *vault*). Powierzchnię wewnętrzną wklęsłą sklepienia nazywamy podniebieniem (n. *Gewölbsleibung*, fr. *intrados*, an. *intrados*), powierzchnię zewnętrzną wypukłą nazywamy grzbietem (n. *Gewölbsrücken*, fr. *extrados*, an. *extrados*, *back of the vault*).

Gdy podniebienie sklepienia jest częścią powierzchni walca, sklepienie nazywamy kolebkowym lub beczułkowym (n. *Tonnengewölbe*, fr. *voûte cylindrique, en berceau*, a. *barrel-vault*). W tym rozdziale będziemy mówić tylko o takich sklepieniach, później dopiero zastanawiać się będziemy także nad innymi rodzajami sklepień.

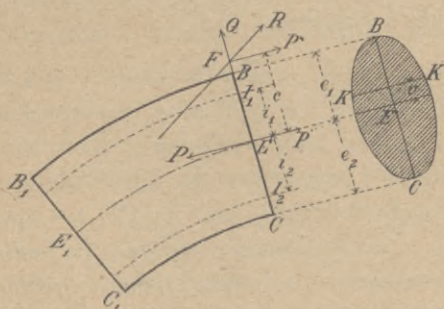
§. 133. Siła podłużna i momenty jędrne.

Sklepienie, jak widzimy, różni się od łuku tylko materiałem i odpowiednim mu przekrojem. Teorya sklepień da się więc wyprowadzić z ogólnej teoryi łuków, o tem więc teraz mówić będziemy.

Nazwijmy linię, łączącą środki ciężkości wszystkich przekrojów łuku, osią łuku (n. *Axe des Bogens*, fr. *axe de l'arc*,

an. axis of the arch) i przypuścmy, że belkę łukową przecięliśmy prostopadle do osi EE' (rys. 299) płaszczyzną BC i że R jest

rys:299



wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, działających na lewą część łuku. Wypadkowa R nie będzie tu pionową, jak w belce prostej, bo wskutek odpowiednio urządzonych podpór oddziaływania dla łuku są ukośne, a belka działa na podpory rozpierająco, co jest główną cechą belek łukowych.

Przypuścmy, że wypadkowa R przecina płaszczyznę przekroju BC w F . Siłę R rozkładamy na dwie składowe P i Q , z których pierwsza P działa w kierunku prostopadłym do przekroju, a więc równoległe do osi, a druga Q działa w kierunku prostopadłym do osi i nazywa się siłą poprzeczną (n. *Transversalkraft*). Te siły zewnętrzne muszą być w równowadze z siłami wewnętrznymi, działającymi w tym przekroju. Wszystkie te siły wewnętrzne możemy rozłożyć na siły prostopadłe do przekroju, wywołujące natężenia normalne i siły, działające w płaszczyźnie przekroju, wywołujące natężenia ścinające.

Umieścmy w punkcie E dwie siły równe siłę P i działające wprost przeciwnie a równoległe do osi. Przez to nie naruszamy równowagi układu sił i otrzymamy:

1) siłę P , zaczepioną w środku ciężkości przekroju E , zwaną siłą podłużną (n. *Axialkraft, Längskraft*. fr. *composante tangentielle*).

2) parę sił, czyli moment $M = Pc$,

3) siłę poprzeczną Q .

Siła podłużna P rozkłada się jednostajnie na całym przekroju, gdyż zaczepia w środku ciężkości przekroju, więc natężenie wskutek siły podłużnej

$$v' = \frac{P}{A}, \dots \dots \dots 664)$$

jeżeli A oznacza przekrój. To natężenie jest tu ciśnieniem, które oznaczamy znakiem $+$.

Chcąc wyznaczyć natężenie v'' , powstałe z działania momentu M , musielibyśmy uwzględnić także promień krzywizny osi $=r$. Jednak gdy promień krzywizny jest dość wielki w stosunku do wysokości belki, — wtedy w przybliżeniu można użyć tych samych wzorów, co do belki prostej. Możemy więc napisać, nazwawszy v_e'' natężenie we włóknie kk_1 , odległym o v od osi ciężkości, powstałe wskutek działania momentu, wedle 145)

$$v_e'' = \frac{Mv}{I}, \dots \dots \dots 665)$$

jeżeli I oznacza moment bezwładności.

Natężenie więc ogólne w odległości v od osi ciężkości będzie podobnie, jak według równania 482),

$$v_v = v' + v_e'' = \frac{P}{A} + \frac{Mv}{I} \dots \dots \dots 666)$$

Müller Breslau otrzymał po długim wywodzie, uwzględniając krzywiznę osi, dla v_e dokładniejszą wartość:

$$v_e = \frac{P}{A} + \frac{Mv}{I} + \frac{M}{Ar} \dots \dots \dots 667)$$

a Šolin jeszcze dokładniej

$$v_e = \frac{P}{A} + \frac{Mr}{B} \frac{v}{r+v} + \frac{M}{Ar} \dots \dots \dots 668)$$

$$B = \iint \frac{rv^2}{r+v} d^2A \dots \dots \dots 669)$$

Weyrauch obliczył B i I dla rozmaitych przekrojów i otrzymał $\frac{I}{B}$

dla $\frac{r}{h}$	koło lub elipsa	kwadrat lub prostokąt	przekrój I
1	1,1452	1,1833	1,2614
5	1,0050	1,0060	1,0082
10	1,00022	1,0015	1,0021
20	1,0003	1,0004	1,0005
40	1,0000	1,0001	1,0001.

Widzimy więc, że już dla $r=20h$ możemy śmiało przyjąć $I=B$, a wtedy wzór 668) przechodzi w 667).

Zważywszy jednak, że gdy r jest stosunkowo wielkie, to $\frac{M}{A}$ jest bardzo małym, możemy w praktyce wyraz ten opuścić, przez co otrzymamy równanie 666)

W przekroju BC nateżenie jest największe dla najbardziej oddalonych włókien, otrzymujemy więc dla $v=e_1$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{P}{A} + \frac{Me_1}{I} + \frac{M}{Ar} \\ v_2 &= \frac{P}{A} - \frac{Me_2}{I} + \frac{M}{Ar} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 670)$$

Dla wielkiego r ostatni wyraz możemy opuścić i otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{P}{A} + \frac{Me_1}{I} \\ v_2 &= \frac{P}{A} - \frac{Me_2}{I} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 671)$$

Niech będzie a promieniem bezwładności, to $I=Aa^2$. Wstawwszy tę wartość i $Pc=M$ w równanie 671), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{Pe_1}{Aa^2} (a^2 + c) = \frac{Pe_1}{I} (e_1 + c) \\ v_2 &= \frac{Pe_2}{Aa^2} (a^2 - c) = \frac{Pe_2}{I} (e_2 - c) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 672)$$

Wiemy z §. 90, że

$$\frac{a^2}{e_1} = i_2 = EI_2 \quad \text{i} \quad \frac{a^2}{e_2} = i_1 = EI_1.$$

Długości i_1 i i_2 sąto promienie jędrne. Możemy więc napisać

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{Pe_1}{I} (i_2 + c) \\ v_2 &= \frac{Pe_2}{I} (i_1 - c) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 673)$$

Jeżeli w całym przekroju ma istnieć tylko ciągnienie lub tylko ciśnienie, to v_1 i v_2 muszą mieć jednakowe znaki. Jeżeli więc ma być tylko ciśnienie w przekroju, to $P > 0$, aby więc $v_1 > 0$ i $v_2 > 0$, musi być

$$i_2 + c > 0 \quad \text{i} \quad i_1 - c > 0,$$

zatem

$$i_1 > c > -i_2 \dots \dots \dots 674)$$

Wiemy, że punkty I_1 i I_2 są odległe od osi o i_1 i i_2 , są to, jak wiemy z §. 90, punkty jędrne.

Wypadkowa R musi więc przecinać przekrój w jądrze t. j. między punktami jędrnymi I_1 i I_2 , jeżeli cały przekrój ma być wystawiony na ciśnienie. Linia łącząca punkty I poszczególnych przekrojów, nazywa się linią jędrną (n. *Kernlinie*).

Linia, łącząca punkty zaczepienia wypadkowej R , czyli środki ciśnienia poszczególnych przekrojów, nazywa się linią ciśnienia (n. *Stützlinie*, fr. *courbe de pressions*, an. *line of resistance*, cz. *čara tlakova*), wykreślił ją pierwszy Méry (1842). Możemy więc powiedzieć:

Nateżenia normalne w przekroju mają wszystkie ten sam znak, jeżeli linia ciśnienia nie wychodzi z jądra.

Jeżeliby $P < 0$, wtedy w całym przekroju byłoby ciągnięcie. Przy mostach i sklepieniach, gdy obciążenie jest tylko pionowe, z góry na dół, P jest zawsze > 0 , a więc gdy linia ciśnienia nie wychodzi z jądra, w całym przekroju panuje ciśnienie; jeżeli zaś linia ciśnienia wychodzi z jądra, to w tym przekroju nateżenia są dodatnie i ujemne.

Rów. 673) możemy jeszcze napisać

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{Pe_1(i_2 + c)}{Aa^2} = \frac{P i_2 + c}{A i_2} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{c}{i_2} \right) \\ v_2 &= \frac{Pe_2(i_1 - c)}{Aa^2} = \frac{P i_1 - c}{A i_1} = \frac{P}{A} \left(1 - \frac{c}{i_1} \right) \end{aligned} \quad \dots \quad 675)$$

Nazwijmy M_2 , moment sił zewnętrznych ze względu na punkt rdzenny I_2 , momentem jędrnym dolnym (n. *unteres Kernmoment*), to

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= P(c + i_2) \\ \text{Odpowiedni moment jędrny} & \\ \text{górny (n. oberes Kernmoment) będzie } M_1 &= P(c - i_2) \end{aligned} \right\} \dots \quad 676)$$

Wtedy otrzymamy z równania 673)

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{Pe_1(i_2 + c)}{I} = \frac{M_2 e_1}{I} \\ v_2 &= \frac{Pe_2(i_1 - c)}{I} = \frac{M_1 e_1}{I} \end{aligned} \right\} \dots \quad 677)$$

a więc wzory takie same, jak dla belki prostej, jeżeli tylko zamiast momentów zwykłych wstawimy momenty jędrne.

Z równ. 675) i 676) otrzymamy dalej

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{M_2}{A i_2} = v_0 \left(1 + \frac{c}{i_2} \right) \\ v_2 &= \frac{M_1}{A i_1} = v_0 \left(1 - \frac{c}{i_1} \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad 679)$$

$$\text{jeżeli } \frac{P}{A} = v_0 \dots \dots \dots 680)$$

Sklepienia mają zwykle przekrój poprzeczny prostokątny, a wiemy, z §. 90, że dla przekroju prostokątnego jest

$$i_1 = \frac{a^2}{e_2} = \frac{1}{6} h, \quad i_2 = \frac{a^2}{e_1} = \frac{1}{6} h, \quad \dots \dots \dots 681)$$

$$\text{więc } i + i_2 = \frac{1}{3} h \dots \dots \dots 682)$$

Widzimy zatem, że w sklepieniu o przekroju prostokątnym, średnia trzecia część przekroju, poprowadzonego pionowo przez oś, stanowi jądro, poza które nie powinna wychodzić linia ciśnienia, jeżeli całe sklepienie ma pracować na ciśnienie.

§. 134. Warunki równowagi sklepienia.

Mamy trzy warunki równowagi sklepienia:

1) Środek ciśnienia (fr. *centre de pression*) czyli punkt zaczepienia wypadkowej, na szew działającej, powinien leżeć w przekroju, aby nie nastąpił wywrót i załamanie się sklepienia. Jeżeli jednak sklepienie składa się z kłińców, połączonych zaprawą, to ponieważ na wytrzymałość zaprawy na ciągnięcie nie możemy na pewne liczyć, więc w sklepieniu takim i w ogóle w budowlach murowanych nie dopuszczamy wcale ciągnięcia. W takim razie środek ciśnienia powinien leżeć w jądrze t. j. w średniej trzeciej części szwu. A zatem ponieważ odnosi się to do wszystkich murów, więc linia ciśnienia powinna leżeć w średniej trzeciej części sklepienia.

Warunek ten nie odnosi się do sklepień litych, betonowych albo żelazno-betonowych, u których możemy pewne ciągnięcie dopuścić. Tam więc linia ciśnienia może wyjść z jądra.

rys: 300



2) Wypadkowa nie powinna być odchyloną od prostopadłej na szew więcej, niż wynosi kąt tarcia, aby nie nastąpiło przesunięcie kłińców. Wypadkowa *R* (rys. 300) rozkłada się na dwie siły *P* i *Q*.

Składowa *Q*, działająca w płaszczyźnie szwu, stara się przesunąć kliniec *A* po kliniec *B*, przeciw czemu działa tarcie $T = P \cdot f = P \cdot \text{st } \varrho$, jeżeli *f* jest współczynnikiem tarcia i gdy przyjmiemy $f = \text{st } \varrho$, a ϱ na-

zwiemy kątem tarcia (n. *Reibungswinkel*, a. *angle of friction*). Dla równowagi musi być $T \geq Q$, jeżeli pominiemy zupełnie wytrzymałość zaprawy, a więc $P \sin \varrho \geq P \sin \alpha$, jeżeli α jest kątem nachylenia wypadkowej na szew, a stąd nareście

$$\varrho \geq \alpha \dots \dots \dots 683)$$

Jako współczynnik tarcia między kamieniem i kamieniem możemy przyjąć z Ponceletem $f=0,58$ czyli $\varrho=30^\circ$ bez zaprawy a $f=0,7$, więc $\varrho=35^\circ$ z zaprawą starą. Dla świeżej zaprawy jest f bardzo małe. Średnio więc możemy przyjąć $f=0,4$, $\varrho=22^\circ$.

3) Trzecim warunkiem równowagi jest, że natężenie nie powinno przekraczać współczynnika wytrzymałości. Jeśli przyjmiemy stosowną pewność, to natężenie nie powinno być większem, niż dopuszczalne.

Największe natężenie w danym szwie znajdziemy z równania 677), wstawivszy dla przekroju prostokątnego odnośne wartości, a mianowicie

$$e=e_2=\frac{h}{2}, \quad a^2=\frac{1}{12}h^2, \quad i_1=i_2=\frac{h}{6}, \quad I=\frac{1}{12}bh^3.$$

W ten sposób otrzymamy

$$v_1 = \frac{P \frac{1}{2} h}{\frac{1}{12} h h^3} \left(\frac{h}{6} + c \right), \text{ a stąd}$$

$$v_1 = \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6c}{h} \right) \dots \dots \dots 684)$$

$$\text{i podobnie } v_2 = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{6c}{h} \right) \dots \dots \dots$$

Jeżeli siła P obliczona jest na jeden metr szerokości sklepienia, to $b=1 \text{ m}=100 \text{ cm}$. Wyrażivszy P w kg , a h i c w cm , otrzymamy

$$v_1 = \frac{P}{100 h} \left(1 + \frac{6c}{h} \right) \left[\frac{kg}{cm^2} \dots \dots \dots 685) \right]$$

$$v_2 = \frac{P}{100 h} \left(1 - \frac{6c}{h} \right) \left[\frac{kg}{cm^2} \dots \dots \dots \right]$$

Dla $c=0$, t. j. gdy wypadkowa działa w osi,

$$v_1 = v_2 = \frac{P}{bh} = v_0 \dots \dots \dots 686)$$

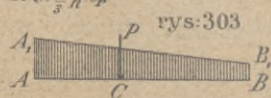
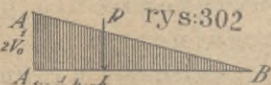
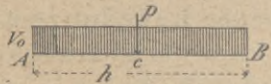
Jeżeli $c = \frac{1}{6} h$, t. j. jeżeli wypadkowa działa w punkcie jędrnym górnym, to

$$v_1 = \frac{2P}{bh} = 2v_0 \left. \vphantom{\frac{2P}{bh}} \right\} \dots \dots \dots 687) \\ v_2 = 0$$

Widzimy więc, że gdy wypadkowa działa w punkcie jędrnym, to natężenie w krawędzi bliższej tego punktu wzrasta do podwójnej wielkości, w krawędzi zaś dalszej spada do zera.

Jeżeli natężenie w każdym punkcie przekroju przedstawimy rzędnymi, to dla natężenia jednostajnego (rys. 301) powierzchnia natężeń, którą tu otrzymujemy, jako przekrój bryły natężeń (§. 89), przedstawia prostokąt. Wypadkowa P działa według tegoż paragrafu w środku ciężkości prostokąta.

rys:301



Jeżeli P działa w punkcie jędrnym I (rys. 302), to według równ. 687) w punkcie A natężenie jest dwa razy większe niż poprzednio, więc

$$AA_1 = \frac{2P}{bh} = 2v_0, \text{ w punkcie } B \text{ zaś}$$

równe zero, a że przytem środek ciężkości powierzchni natężeń leży w jednej trzeciej wysokości, więc powierzchnia ta będzie trójkątem. W ogóle, działa siła P , jak wiemy, w C (rys. 303) w rzucie środka ciężkości powierzchni natężeń, które zmieniają się wedle linii prostej. W środku ciężkości przekroju O natężenie

rys:304



nie jest zawsze $v_0 = \frac{P}{A}$. Na tem i na

rów. 679) polega następną konstrukcyą. Zróbmy $OO_1 = v_0$ (rys. 304). Połączmy O_1 z I_1 i I_2 aż do przecięcia się z kierunkiem siły P i wykreślmy C_1B_1

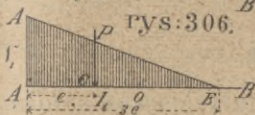
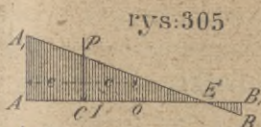
i $C_2A_1 \parallel AB$, to $AA_1 = v_1$, $BB_1 = v_2$, bo $CC_2 : v_0 = (i_2 - c) : i_2$, $CC_1 = AA_1 = v_0 \frac{i_2 - c}{i_2}$, a ze względu, że tu C jest ujemne, $AA_1 = v_2$.

Dalej mamy $CC_1 : v_0 = (i_1 + c) : i_1$, stąd $CC_1 = v_0 \frac{i_1 + c}{i_1} = v_1$.

Jeżeli środek ciśnienia C wyjdzie poza jądro, to ciśnienie w A wzrasta, a w C powstaje ciągnienie (rys. 305). Jeżeli nie zważamy na bardzo małą zresztą wytrzymałość zaprawy na ciągnienie, to ponieważ na długości EB ciągnienie

powstać nie może (rys. 306), więc tam szew się otworzy, a cała siła P rozkłada się na długości $AE=3e$, otrzymamy więc natężenie w A

$$v_1 = \frac{2P}{b \cdot 3e} = \frac{2P}{3be} \dots \dots \dots 688)$$



Najkorzystniej byłoby dla sklepienia, gdyby wszędzie $e=0$, tj. gdyby linia ciśnienia wpadała w oś, bo wtedy w każdym przekroju natężenie rozdzielałoby się równo na przekrój, byłoby więc stosunkowo najmniejsze. Jednak to w rzeczywistości rzadko

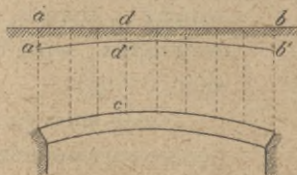
się zdarza, bo choćby dla pewnego obciążenia linia ciśnienia wpadła na oś, to dla innego obciążenia linia ciśnienia zmienia swój kształt.

§. 135. Obciążenie sklepienia.

Na sklepieniu działa najprzód ciężar stały, a zatem ciężar własny sklepienia i nadsypki względnie nadmurowania wraz z zeskładem, na niej leżącym (podłoga, droga itd.). Ciśnienie ziemi przyjmujemy, działające w kierunku pionowym, co wprawdzie nie jest zupełnie słusznem, ale dla sklepień płaskich lub o niewielkiej nadsypce możemy zrobić śmiało to przypuszczenie. Tylko dla sklepień o wielkiej nadsypce i tunelowych musimy uwzględnić dokładnie kierunek ciśnienia ziemi, o tem jednak teraz mówić nie będziemy. Całe obciążenie sklepienia sprowadzamy zwykle na ciężar odpowiedniej masy materiału, z którego zrobione sklepienie, więc np. kamienia lub cegły, a to w ten

sposób, że zmieniamy odosne rzędne w odwrotnym stosunku ciężarów gatunkowych. Niech będzie n p. ciężar gatunkowy ziemi 1,8, a muru 2,2, to zmieniamy rzędną cd (rys. 307) na cd' , tak aby $cd':cd = 1,8 : 2,2$, a więc $cd' = cd \cdot \frac{1,8}{2,2}$.

rys. 307.



Zrobiwszy to samo z innymi rzędnymi i połączywszy ich końce, otrzymamy linię $a'b'$, którą nazywamy sprowadzoną

linią obciążenia (n. *reducirte Belastungslinie*). Obciążenie tłumem ludzi, wozami lub parowozami sprowadzamy także na ciężar bryły muru o wysokości y . Mamy wtedy na $1 m^2$ ciężar bryły muru $y \gamma_m = p$, a więc

$$y = \frac{p}{\gamma_m} \dots \dots \dots 689)$$

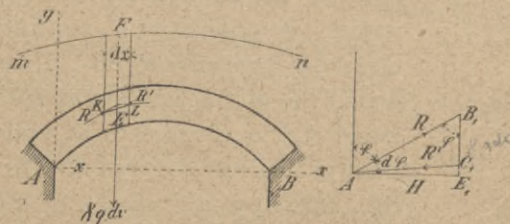
Obciążenie p przyjąć możemy z tabliczki, dołączonej na końcu książki.

§. 136. Linia ciśnienia.

Linia ciśnienia jestto, jak wiemy, linia łącząca środki ciśnienia wszystkich szwów sklepienia i musi leżeć w średniej trzeciej części sklepienia, jeżeli chcemy uniknąć ciągnięcia. Kierunek szwów w sklepieniu mały ma wpływ na linię ciśnienia, ważny on jest tylko ze względu na warunek, aby kąt między prostopadłą na szew a wypadkową nie był większy, niż kąt tarcia. Najlepiej więc byłoby, gdyby szwy były prostopadłe do linii ciśnienia, ponieważ jednak trudno to urzeczywistnić, dlatego robimy je prostopadłymi do osi sklepienia lub do podniebienia. Gdy na razie zważać nie będziemy na ten warunek, możemy przyjąć dowolny kierunek szwów. Przyjmiemy więc pionowy kierunek, wzajemne zaś oddalenie szwów bardzo małe. Jeżeli sklepienie jest płaskie i mało obciążone, to różnica może być większa i wtedy lepiej kreślić szwy prostopadłe do osi.

Jeżeli przekroje są dość bliskie, to w praktyce różnica między linią ciśnienia a wielobokiem sznurowym dla przekrojów pionowych jest tak mała, że następnie uważać będziemy te dwie linie jako identyczne. Jeżeli linia łącząca środki ciężkości

rys.308



klińców wypada poza ich podstawę, to linia ciśnienia leży zewnątrz, inaczej zaś wewnątrz wieloboku sznurowego.

Niech mn (rys. 308) będzie sprowadzoną linią obciążenia, a KL

częścią linii ciśnienia. Wytnijmy w odległości x od podpory A pasek o grubości dx płaszczyznami pionowymi i nazwijmy śre-

dnia wysokość paska $EF = q$, to powierzchnia jego jest qdx a ciężar γqdx . Aby pasek ten utrzymać w równowadze, musimy zastąpić ciśnienia obu stron sklepienia wypadkowemi R i R' , działającymi w K i L . Trzy te siły muszą być w równowadze i tworzyć zamknięty wielobok sił. Siły R i R' mają równą i wprost przeciwną składową poziomą H , którą nazywamy parciem poziomem (n. *Horizontalschub*, fr. *poussée horizontale*), a zatem parcie poziome nie zmienia się i jest stałem dla jakiegokolwiek przekroju. Z rysunku widzimy, że $R = \frac{H}{\text{wst } \varphi}$

a $R' = \frac{H}{\text{wst } (\varphi + d\varphi)}$, jeżeli φ jest kątem nachylenia siły R do pionowej, dalej R dost $\varphi = \gamma qdx + R'$ dost $(\varphi + d\varphi)$, a stąd

$$H \text{ dot } \varphi = H \text{ dot } (\varphi + d\varphi) + \gamma qdx, \text{ a więc}$$

$$H [\text{dot } (\varphi + d\varphi) - \text{dot } \varphi] = -\gamma qdx, \text{ albo}$$

$$H d \text{ dot } \varphi = -\gamma qdx \text{ i } \frac{d \text{ dot } \varphi}{dx} = -\frac{\gamma q}{H}.$$

A że $\text{dot } \varphi = \frac{dy}{dx}$, gdy y jest rzędną linii ciśnienia, więc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\gamma q}{H}, \quad \dots \dots \dots 690)$$

Jestto równanie różniczkowe linii ciśnienia. Całkując je, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \text{dot } \varphi = -\frac{\gamma}{H} \int q dx + C, \text{ a stąd}$$

$$y = -\frac{\gamma}{H} \int dx \int q dx + Cx + C_1. \quad \dots \dots \dots 691)$$

Jestto równanie linii ciśnienia, z którego widzimy, że dla danego q mamy tu jeszcze trzy niewiadome H , C i C_1 . Trzy te niewiadome możemy albo wyznaczyć na podstawie prawideł sprężystości, albo licząc w przybliżeniu, odpowiednio przyjąć. Jeżeli promień krzywizny linii ciśnienia nazwiemy r , to wiemy z matematyki, że

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{d^2y/dx^2},$$

a wstawivszy wartość z 690), otrzymamy

$$r = -\frac{(1 + \text{dot}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} H}{\gamma q} = -\frac{H}{\gamma q \text{ wst}^3 \varphi} \quad \dots \dots \dots 692)$$

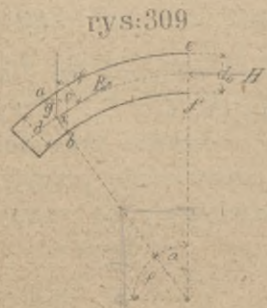
Promień krzywizny r będzie najmniejszym, gdy $\gamma x \text{ wst}^3 \varphi$ będzie największe, więc dla $\varphi = 90^\circ$, gdzie linia ciśnienia jest poziomą. Jeżeli przyjmiemy w przybliżeniu, że linia ciśnienia wpada na oś, to będzie ona wtedy miała poziomą styczną w kluczu. Nazwijmy r_0 odnośny promień krzywizny linii ciśnienia, a więc według przypuszczenia i osi sklepienia, a q_0 wysokość obciążenia w kluczu, to z równania 692) otrzymamy

$$r_0 = - \frac{H}{\gamma q_0}, \text{ a stąd} \\ H = - \gamma r_0 q_0 \dots \dots \dots 693)$$

A więc jeżeli linia ciśnienia wpada na oś, parcie poziome równa się iloczynowi z promienia krzywizny osi w kluczu przez obciążenie jednostkowe tamże. Ponieważ jednak przypuszczenie to rzadko się sprawdza dokładnie, więc wartość dla H , otrzymaną z równ. 693), można uważać tylko jako wartość przybliżoną, która różni się mniej lub więcej od wartości prawdziwej.

§. 137. Grubość sklepienia.

Z poprzedniego paragrafu wiemy, że $R = \frac{H}{\text{wst } \varphi}$, jeżeli φ oznacza kąt nachylenia do pionu stycznej do linii ciśnienia w danym szwie ab (rys. 309), prostopadłym na oś. Jeżeli przypuścimy znowu, że linia ciśnienia wpada na oś, a zatem natężenie w przekroju jest równem, to kąt φ będzie kątem nachylenia stycznej do osi w punkcie g . Jeżeli chcemy, aby natężenie było w całym sklepieniu jednokowe, to nazwawszy d_0 i d grubości sklepienia w kluczu i w danym szwie ab , możemy ustawić proporcją $d_0 : d =$



$= H : R$, gdy na ab działa wypadkowa R , a na ef , gdzie według założenia linia ciśnienia jest poziomą, tylko parcie poziome H . Obie siły działają w środkach ciężkości przekrojów, więc ciśnienia rozdzielają się równo na przekrój, aby więc ciśnienia były równe, grubości sklepień muszą być proporcjonalne do sił, na przekroje działających. Wstawiwszy wartość za R ,

otrzymamy

$$d_0 : d = H : \frac{H}{\text{wst } \varphi}, \text{ a stąd } d = \frac{d_0 H}{H \text{wst } \varphi} = \frac{d_0}{\text{wst } \varphi},$$

nareszcie
$$d = \frac{d_0}{\text{dost } \alpha} = d_0 \text{ siecz } \alpha, \dots \dots \dots 694)$$

jeżeli $\alpha = 90 - \varphi$.

Poprowadźmy z b pionową a z a poziomą, a otrzymamy $cb = ab \text{ dost } \alpha$, czyli $cb = d \text{ dost } \alpha = d_0$.

Widzimy więc, że jeżeli linia ciśnienia wpada na oś, rzuty pionowe wszystkich szwów powinny być równe grubości sklepienia w kluczu. Ponieważ jednak linia ciśnienia rzadko kiedy wpada zupełnie na oś, więc do prawidła tego należy się tylko w przybliżeniu stosować.

W praktyce możemy to prawidło zresztą zastosować tylko do pewnych granic. Dla $\alpha = 60^\circ$ otrzymamy już bowiem $d = d_0 \text{ siecz } 60^\circ = 2d$, a dla większego α d wzrastałoby bardzo znacznie. Tymczasem w praktyce nie robimy grubości d' na podporze większej, niż $2d_0$.

Jeżeli grubość sklepienia wzrasta według równania 694), a linia ciśnienia wpada na oś, to natężenie ν jest wszędzie jednakowe, a mianowicie

$$\nu = \frac{H}{d_0}, \dots \dots \dots 695)$$

jeżeli H wyznaczmy na długość sklepienia równą jedności, a stąd

$$d_0 = \frac{H}{\tau} = \frac{\gamma r_1 q_1}{\tau}, \dots \dots \dots 696)$$

jeżeli zamiast ν wstawimy τ natężenie dopuszczalne na ciśnienie.

Równanie 696) polega na najkorzystniejszym przypuszczeniu, że linia ciśnienia wpada na oś, da więc nam zwykle za małe wymiary. Wiemy mianowicie z §. 134., że gdy np. linia ciśnienia dotyka linii jędrnej, to ciśnienie wzrasta w dwójnasób. Z tego powodu przyjmujemy zwykle d_0 i d_1 (na podporze) według wzorów praktycznych, a potem kreśląc linię ciśnienia badamy, czy w sklepieniu panuje równowaga i czy natężenie nie jest za wielkie.

Jeżeli przyjmiemy kształt osi sklepienia wedle linii ciśnienia przy obciążeniu połową ciężaru ruchomego, to możemy obliczać grubość sklepienia wedle 695). Uwzględnić jednak jeszcze

musimy także wedle Tolkmitta obciążenie jednostronne, o czem obszerniej mówić będziemy gdzieindziej*).

Podajemy tu zresztą także kilka wzorów praktycznych i tak:

Lesguiller przyjmuje $d_0 = 0,2\sqrt{l} + 0,1m$, gdy l oznacza rozpiętość w m ;

Rondelet $d_0 = 0,0208l + 0,1624$ aż do $d_0 = 0,0416l + 0,3248m$;

Fontenay dla sklepień bardzo obciążonych $d_0 = 0,7r + 0,32m$, gdy r oznacza promień krzywizny;

Rankine dla łuków kołowych $d_0 = 0,346\sqrt{r}$, a dla łuków koszykowych spłaszczonych $d_0 = 0,412\sqrt{r}$;

Krohn
$$d_0 = \frac{l^2(g + 1,8p)}{2f(x - 35)} \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ w t i m,}$$

$$d_1 = d_0 \left(1 + 1,6 \frac{f}{l} \right) \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

gdy g i p oznaczają ciężar własny i obciążenie zmienne na jednostkę długości a f strzałkę sklepienia*).

Wzory te, jak widzimy, różnią się bardzo, co łatwo zrozumiemy, bacząc na to, że grubość sklepienia nie zależy tylko od rozpiętości, ale od obciążenia i kształtu sklepienia. Dlatego wzory te mogą służyć tylko jako wskazówki przy tymczasowym przyjęciu grubości sklepienia. Dokładnie wyznaczyć możemy grubość sklepienia dopiero po wyznaczeniu sił wewnętrznych, działających w sklepieniu.

§. 138. Grubość sklepień betonowych i Moniera.

Grubość sklepień betonowych może być mniejsza, niż sklepień kamiennych lub ceglanych, bo dla betonu możemy dopuścić choć małe ciągnięcie, linia więc ciśnienia może tu nieco wychodzić z jądra o tyle, aby ciągnięcie nie przekraczało 2 do 3 kg/cm^2 .

Housselle przyjmuje

$$d_0 = 0,2 + 0,022r \dots \dots \dots 697)$$

*) por. Mosty kamienne str. 39.

**) Wzory Croizette-Desnoyers'a i inne, por. Mosty kamienne str. 41.

Jeżeli sklepienie zbudowaliśmy wedle linii ciśnienia, a także dla płaskich sklepień odcinkowych ($\frac{f}{l} = \frac{1}{10}$) można dla mostów drogowych zejść z grubością jeszcze niżej, możemy mianowicie przyjąć

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= 0,12 + 0,004 l \\ d_1 &= (1,5 + 0,015 l) d_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 698)$$

Jeżeli beton wzmocnimy siatką drucianą, te możemy jeszcze mniejsze przyjąć wymiary, ale tylko ze względu na ciężar ruchomy. Wkładka żelazna wspomaga bowiem beton skutecznie zwłaszcza, gdy występuje ciągnienie, tu więc możemy przyjąć natężenie dopuszczalne na ciągnienie śmiało 10, a nawet do 15 kg/cm^2 .

Jednak natężenie na ciągnienie w sklepieniu występuje tylko, gdy linia ciśnienia wychodzi z jądra. Jeżelibyśmy przyjęli taki kształt sklepienia, że linia ciśnienia nie wychodzi wcale z jądra, lub też wychodzi tak mało, że ciągnienie nie jest większe, niż 3 kg/cm^2 , wkładki żelaznej nie potrzeba.

Housselle przyjmuje dla sklepień Moniera

$$d_0 = 0,05 + 0,01 r \dots \dots \dots 699)$$

§. 139. Obliczenie natężeń w sklepieniach Moniera.

Niech będzie P (rys. 310) siła prostopadła do przekroju sklepienia, zaczepiająca w C i wywołująca natężenia, zaznaczone na rysunku. Rozpatrywać będziemy najprzód fazę pierwszą, więc przyjmujemy dla tych stosunkowo niewielkich natężeń linię natężeń $A'B'$ prostą. Według Melana uwzględnimy teraz wpływ wkładki żelaznej w ten sposób, że przekrój zwiększymy o $\frac{\epsilon'}{\epsilon} = n$ razy większy przekrój wkładki żelaznej, przy czym ϵ' oznacza współczynnik sprężystości żelaza, a ϵ współczynnik sprężystości betonu*).

Środek ciężkości S_1 idealnego, jednorodnego przekroju otrzymamy z równań:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{f m n}{d + n f} \\ \text{i} \quad e_2 &= \frac{d m}{d + n f} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 700)$$

*) Por. str. 225.

a moment bezwładności ze względu na oś ciężkości S_1

$$I = \frac{d^3}{12} + de_1^2 + nfe_2^2, \dots \dots \dots 701)$$

gdzie f oznacza grubość warstwy żelaznej rozłożonej równomiernie na jednostkę szerokości przekroju.

Po wstawieniu wartości za e_1 i e_2 z 700) i 701) otrzymamy:

$$I = \frac{d^3}{12} + \frac{dfm^2n}{d + nf} \dots \dots \dots 702)$$

Nazwijmy a ramię bezwładności a i odstęp jędrny, to:

$$a^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{d^3}{12} + \frac{dfm^2n}{d + nf}}{\frac{d^2 + dfm^2n}{d + nf}} = \frac{d^3}{12(d + nf)} + \frac{dfm^2n}{(d + nf)^2},$$

$$a^3 = \frac{d^4 + dfn(d^2 + 12m^2)}{12(d + nf)^2} \dots \dots \dots 703)$$

Dalej jest:

$$i_1 = \frac{a^2}{\frac{d}{2} - e_1}, \quad i_2 = \frac{a^2}{\frac{d}{2} + e_1} \dots \dots \dots 704)$$

a największe natężenia:

$$\left. \begin{array}{l} \text{na ciśnienie betonu} \quad \tau_1 = \frac{P(i_2 + e + e_1) \left(\frac{d}{2} + e_1 \right)}{I} \\ \text{na ciągnienie} \quad \tau_2 = \frac{P(e + e_2 - i_1) \left(\frac{d}{2} - e_1 \right)}{I} \\ \text{na ciągnienie żelaza} \quad \nu' = \frac{P(e + e_1 - i_1) e_2 n}{I} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 705)$$

Jako przykład obliczmy na podstawie tych wzorów natężenia w węzłowiwniu strony obciążonej próbnego sklepienia wiedeńskiego*). Tam było $P = \frac{41695}{100} \text{ kg} = 416,95 \text{ kg}$, $c = 31,5 \text{ cm}$, $d = 60 \text{ cm}$, $n = 10$. Wkładka żelazna składała się z drutów 14 mm grubych w odstępnie 6,5 cm, więc $f = \frac{1,539}{6,5} = 0,2368 \text{ cm}$. Niech będzie $a = 6 \text{ cm}$, więc $m = 30 - 6 = 24 \text{ cm}$, to:

$$e_2 = \frac{10 \cdot 0,2368 \cdot 24}{60 + 10 \cdot 0,2368} = 0,91 \text{ cm},$$

*) Por. Bericht des Gewölbeausschusses 1895 str. 125.

$$e_2 = \frac{60 \cdot 24}{60 + 10 \cdot 0,2368} = 23,09 \text{ cm.}$$

Dalej mamy:

$$I = \frac{60^3}{12} + \frac{60 \cdot 10 \cdot 0,2368 \cdot 24^2}{60 + 10 \cdot 0,2368} = 18000 + 1312 = 19312 \text{ cm}^4,$$

zatem:
$$a^2 = \frac{I}{A} = \frac{19312}{62,368} = 309,63 \text{ cm}^2.$$

stąd:
$$i_1 = \frac{309,63}{30 - 0,91} = \frac{309,63}{29,09} = 10,64 \text{ cm,}$$

$$i_2 = \frac{309,63}{30 + 0,91} = \frac{309,63}{30,91} = 10,02 \text{ cm.}$$

Dla sklepienia betonowego byłoby $i_1 = i_2 = \frac{60}{6} = 10 \text{ cm}$, widzimy więc, że uwzględniając wkładkę żelazną, otrzymujemy tylko mało większy odstęp jądry.

Dalej otrzymamy według 705):

$$\tau_1 = \frac{416,95(31,5 + 0,91 + 10,02)(30 + 0,91)}{19312} = \frac{416,95 \cdot 42,43 \cdot 30,91}{19312}$$

$$\tau_1 = 28,32 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_2 = \frac{416,95(31,5 + 0,91 - 10,64)(30 - 0,91)}{19312} = \frac{416,95 \cdot 21,77 \cdot 29,09}{19312}$$

$$\tau_2 = 13,67 \text{ kg/cm}^2$$

$$v' = \frac{416,95 + 21,77 + 23,09 \cdot 10}{19312} = 108,5 \text{ kg/cm}^2.$$

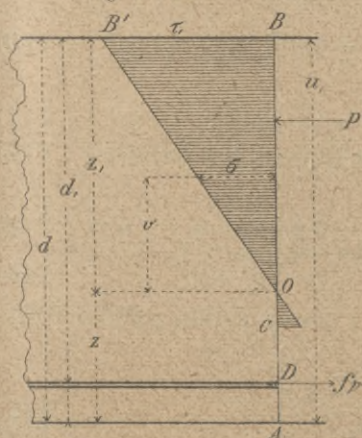
Zauważmy teraz sklepienie w drugiej fazie, gdy już wytrzymałość betonu na ciągnięcie została przewyżczoną, a po

stronie ciągniętej belki powstały szczeliny (rys. 311). Wtedy powstają tylko na małej długości CO ciągnięcia, w górnej części przekroju zaś OB ciśnienia i w zakładce żelaznej ciągnięcie. Przyjmujemy tu linię nateżeń OB , prostą, bo wprowadzenie dokładniejszej krzywej lub łamanej linii nateżeń ma mały wpływ na ostateczny wynik, a utrudnia bardzo rozwiązanie zadania.

Dla uproszczenia opuścimy też małe nateżenia na ciągnięcie

w betonie zupełnie, wtedy ciśnienie betonu i ciągnięcie żelaza musi być w równowadze z siłami zewnętrznymi.

rys:311



Stąd otrzymamy:

$$\frac{\tau_1 z_1}{2} - \nu' f = P \quad \dots \quad 706)$$

$$i \quad \frac{\tau_1 z_1}{2} \frac{2z_1}{3} + \nu' f (d_1 - z_1) = P(z_1 - u_1) \quad \dots \quad 707)$$

$$a \quad \nu' = \frac{n \tau_1 (d_1 - z_1)}{z_1}, \quad \dots \quad 708)$$

przyczem należy przyjąć $n=20$.

Z równań 706) i 708) otrzymujemy:

$$a \text{ z } 707) \text{ i } 708): \left. \begin{aligned} \frac{\tau_1 z_1}{2} - \frac{n \tau_1 (d_1 - z_1)}{z_1} f = P \\ \frac{\tau_1 z_1^2}{3} + \frac{n \tau_1 (d_1 - z_1)^2}{z_1} = P(z_1 - u_1) \end{aligned} \right\} \dots \quad 709)$$

Z obu tych równań otrzymamy:

$$\tau_1 = \frac{P}{\frac{z_1}{2} - \frac{nf(d_1 - z_1)^2}{z_1}} = \frac{P(z_1 - u_1)}{\frac{z_1^2}{3} + \frac{nf(d_1 - z_1)^2}{z_1}}$$

a stąd:

$$\frac{z_1^2}{3} + \frac{nf(d_1 - z_1)^2}{z_1} = (z_1 - u_1) \left(\frac{z_1}{2} - \frac{nf(d_1 - z_1)}{z_1} \right) = \frac{z_1^2}{2} - nf(d_1 - z_1) + \frac{u_1 z_1}{2} + \frac{nf u_1 (d_1 - z_1)}{z_1},$$

a w końcu:

$$z_1^3 - 3u_1 z_1^2 + 6nf(d_1 - u_1)z_1 - 6nfd_1(d_1 - u_1) = 0 \quad \dots \quad 710)$$

Wstawmy dalej:

$$z_1 = y + u_1, \text{ więc } y = z_1 - u_1 \quad \dots \quad 711)$$

$$\text{to } y^3 + (6nf(d_1 - u_1) - 3u_1^2)y - (6nf(d_1 - u_1)^2 + 2u_1^3) = 0 \quad \dots \quad 712)$$

Wstawmy dalej:

$$p = 2nf(d_1 - u_1) - u_1^2 \text{ a } q = -(3nf(d_1 - u_1)^2 + u_1^3) \quad \dots \quad 713)$$

$$\text{to } y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \quad \dots \quad 714)$$

Wyznaczywszy w ten sposób z_1 , mamy potem z 706) i 708):

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 = \frac{P}{\frac{z_1}{2} - \frac{nf(d_1 - z_1)}{z_1}} \\ \nu' = \frac{n \tau_1 (d_1 - z_1)}{z_1} \end{aligned} \right\} \dots \quad 715)$$

Przykład. Obliczmy na podstawie tych wzorów natężenia w węzłowie nieobciążonej strony sklepienia próbnego wiedeńskiego. Tam było $P=314\text{kg}$, $d_1=54\text{ cm}$, $u_1=-25\text{ cm}$, $n=20\text{ cm}$, $f=0,2368\text{ cm}$.

A zatem:

$$p=2 \cdot 20 \cdot 0,2368 (54 + 25) - 25^2 = 152$$

$$q = -(3 \cdot 20 \cdot 0,2368 (54 + 25)^2 - 25^3) = -87023,$$

zatem według 714): $y = 53,26\text{ cm}$, stąd: $z_1 = y + u_1 = 53,26 - 25 = 28,25\text{ cm}$.

Wedle 715) otrzymamy wtedy:

$$\tau_1 = \frac{314}{14,1 - \frac{20 \cdot 0,2368 \cdot 25 \cdot 75}{28,25}}$$

$$\tau_1 = 32,1\text{ kg/cm}^2,$$

a
$$v' = \frac{20(54 - 28,25)}{28,25} 32,1 = 585,2\text{ kg/cm}^2.$$

Wiemy, że w pierwszej fazie wkładka żelazna mało zmniejsza ciągnienie w betonie, sprawia ona jednak znacznie większą pewność sklepienia w drugiej fazie, grubość więc jej musi być obliczoną ze względu na drugą fazę.

Należy przytem tak liczyć, aby przy r -krotnej pewności przyjmować n razy większą siłę P , działającą na przekrój, która wywołała równocześnie natężenie, równe współczynnikowi betonu na ciśnienie 125 kg/cm^2 i współczynnikowi żelaza na ciągnienie 3500 kg/cm^2 .

Możemy więc napisać ze względu na 715):

$$125 = \frac{rP}{\frac{z_1}{2} - \frac{20f(d_1 - z_1)}{z_1}} \dots \dots \dots 716)$$

i
$$3500 = \frac{20rP \frac{d_1 - z_1}{z_1}}{\frac{z_1}{2} - \frac{20f(d_1 - z_1)}{z_1}} = \frac{40rP(d_1 - z_1)}{z_1^2 - 40f(d_1 - z_1)} \dots \dots \dots 717)$$

Podzielmy równanie 716) przez 717), to otrzymamy:

$$\frac{125}{3500} = \frac{rP}{20rP \frac{d_1 - z_1}{z_1}} = \frac{z_1}{20(d_1 - z_1)} = \frac{5}{140},$$

a stąd: $7z_1 = 5d_1 - 5z_1, \quad 12z_1 = 5d_1,$

$$z_1 = \frac{5}{12} d_1 = 0,4167 d_1 \dots \dots \dots 718)$$

Wstawmy tę wartość za z_1 w równanie 710), to otrzymamy:
 $0,0724 d_1^3 - 0,52 d_1^2 u_1 + 50 f(d_1 - u_1) d_1 - 120 f d_1 (d_1 - u_1) = 0$,
 a stąd:

$$f = \frac{0,0724 d_1^2 - 0,52 d_1 u_1}{70(d_1 - u_1)}$$

albo
$$f = 0,001034 \frac{d_1}{d_1 - u_1} (d_1 - 7,19 u) \dots \dots \dots 719)$$

Widzimy więc, że grubość wkładki żelaznej nie zależy tu tylko od grubości d_1 , ale też i od odstepu linii ciśnienia od krawędzi przekroju, że więc możnaby ją przyjąć zmienną i w ogóle opuścić, gdy $u_1 \approx \frac{d_1}{7,19} = 0,139 d_1$.

Przytem należy jeszcze zauważyć, że dla rej pewności przyjęliśmy tylko rP zamiast P , nie powiększyliśmy jednak u_1 . Byłoby więc wskazaniem w praktyce przyjąć np. dwa razy tak wielkie obciążenie ruchome, dla tego obciążenia wyznaczyć linię ciśnienia i według tego wprowadzić do równania 719) u_1 .

Grubość sklepienia d należy obliczyć w ten sposób, aby ciągnięcie w betonie nie przekraczało 10 do 15 kg/cm^2 .

§. 140. Związek między linią ciśnienia a linią obciążenia.

Zastanówmy się teraz nad tem, jaki zachodzi związek między linią ciśnienia a linią obciążenia.

rys: 312

Równanie 692) brzmi

$$r = - \frac{H}{\gamma q \operatorname{wst}^3 \varphi},$$

Wstawivszy $\varphi = 90 - \alpha$, otrzymamy

$$r = - \frac{H}{\gamma q \operatorname{dost}^3 \alpha}.$$

Jeżeli oś sklepienia jest linią kołową (rys. 312), a linia ciśnienia ma wpadać na oś, to r musi być stałem, a więc

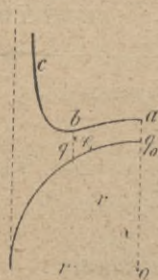
$$q = - \frac{H}{\gamma r \operatorname{dost}^3 \alpha}.$$

Dla klucza jest $\alpha = 0$, więc

$$q_0 = - \frac{H}{\gamma r},$$

co wstawivszy w poprzednie równanie, otrzymamy

$$q = q_0 \operatorname{siecz}^3 \alpha \dots \dots \dots 720)$$



Jestto równanie linii obciążenia dla sklepienia kolistego. Dla $\alpha=90^\circ$ jest siecz $\alpha = \infty$, więc $q = \infty$, a zatem w sklepieniu półkolistem musiałyby być obciążenie na podporach nieskończenie wielkie, aby linia ciśnienia wpadała na oś. Dla zwykłych obciążeń będzie więc linia ciśnienia w sklepieniu półkolistem na podporach znacznie zbaczać od osi (rys. 313). Wynika z tego, że sklepienia półkoliste nie są korzystne pod względem rozkładu nateżeń i że korzystniejsze są sklepienia odcinkowe, gdzie największe α (rys. 312) wynosi 40° do 50° , a najwięcej 70° .

rys:313.



rys:314.



Przy sklepieniach półkolistych trzeba, jeśli to możliwe, na podporze skupiać wielkie ciężary. N. p. przy mostach dadzą się z korzyścią urządzić w tych miejscach wieżyczki, posągi i t. d.

W razie, gdy sklepienie jest obciążone ciężarem skupionym w kluczu, to w tym punkcie linia ciśnienia załamuje się, wtedy obieramy dla sklepienia kształt ostrołuku (rys. 313).

Zbadajmy jeszcze linię obciążenia dla sklepienia eliptycznego (rys. 315). Jeżeli w kluczu przyjmiemy początek współrzędnych, to

$$b - y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (721)$$

a więc

$$\frac{dy}{dx} = + \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wreście

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (722)$$

Jeżeli wartość za $\frac{d^2y}{dx^2}$

wstawimy z równ. (722) w rów. (690) to otrzymamy

$$\frac{ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = - \frac{\gamma q}{H}, \text{ a stąd}$$

bez względu na znak $q = \frac{abH}{\gamma(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$, a więc ze względu na 721)

$$q = \frac{b^2H}{\gamma(\bar{a}^2 - x^2)(b - y)} = \frac{b^4H}{\gamma a^2(b - y)^3} \dots \dots \dots 723)$$

A więc dla klucza, gdy $y=0$,

$$q_0 = \frac{bH}{\gamma a^2}, \text{ a stąd}$$

$$H = \frac{a^2 q_0 \gamma}{b} \dots \dots \dots 724)$$

Dla $a=b=r_w$ przechodzi to równanie w rów. 693). Jeżeli wartość za H wstawimy w 723), to

$$q = \frac{b^3 q_0}{(b - y)^3} = q_0 \left(\frac{b}{b - y} \right)^3 \dots \dots \dots 725)$$

Jestto równanie linii obciążenia sklepienia eliptycznego. Z powyższego równania otrzymamy dla $b=y$, to jest dla węzłowie, $z = \infty$, podobnie jak dla sklepienia kolistego.

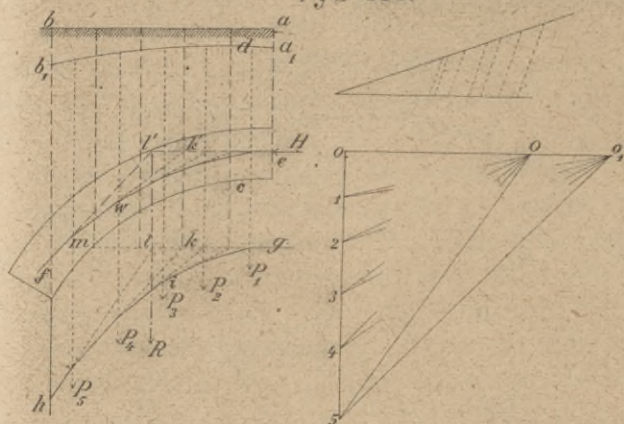
§. 141. Przybliżone wyznaczenie linii ciśnienia w sklepieniu symetrycznem.

Sposób wyznaczenia przybliżonego linii ciśnienia najlepiej poznamy na przykładzie. Rys. 316 przedstawia połowę sklepienia symetrycznego i symetrycznie obciążonego, ab jest linią obciążenia, $a_1 b_1$ sprowadzoną linią obciążenia, do której wykreślenia użyliśmy kąta proporcjonalnego. Sklepienie wraz z obciążeniem dzielimy na pewną ilość (na rysunku 5) równo grubych pasków.

Srodki ciężkości ich możemy bez wielkiego błędu przyjąć w połowie grubości pasków, w pionowych połowiących działają więc ciężary pasków P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , proporcjonalne do długości tych pionowych cd . Szerokość sklepienia zwykle przyjmujemy w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku równą 1 m. Kreślimy teraz wielobok sił, wielkości sił P_1, P_2, \dots możemy wykreślić w tonach wedle przyjętej podziałki, lub też przyjąć jako siły P_1, P_2, \dots , pewną część (na rysunku $\frac{1}{3}$) pionowych cd , które są proporcjonalne do tych ciężarów. W takim razie trzeba by wyznaczyć odpowiednią podziałkę, aby potem

móc wyznaczyć wielkość parcia. Lepiej jednakże kreślić wielobok sił wedle przyjętej podziałki, wyznaczwszy ciężary pa-sków. Ponieważ sklepienie jest symetryczne, więc linia ciśnienia będzie miała w kluczu styczną poziomą.

rys: 316.



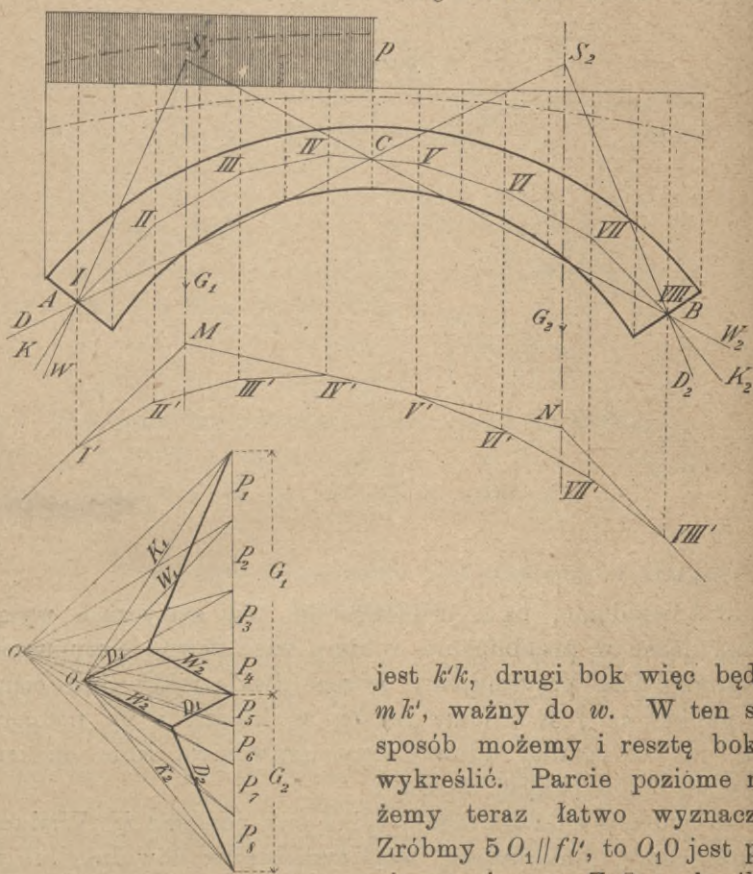
Jak wiadomo, linia ciśnienia nie jest statycznie wyznaczalną, licząc w przybliżeniu, robimy więc pewne przypuszczenia, mianowicie przyjmujemy jeszcze dwa punkty linii ciśnienia, punkty e i f w środku szwów w kluczu i na podporze, gdyż, jak to później udowodnimy, prawdziwa linia ciśnienia zbliża się jak najwięcej do osi.

W punkcie e działa zatem tylko siła pozioma H . Wielkości jej nie znamy, przyjmujemy więc tymczasowo dowolnie lub według równ. 693) $H=OO$, prowadzimy z O promienie i osobno wykreślamy wielobok sznurowy gih . Jeżelibyśmy wielobok ten zaczęli kreślić w e , punkt h nie wypadłby na f , gdyż H nie wyznaczyliśmy statycznie, lecz przyjęliśmy dowolnie. Musimy więc zmienić H tak, aby linia ciśnienia przechodziła przez e i f .

W tym celu przedłużamy boki skrajne wieloboku sznurowego aż do przecięcia się w punkcie l i wiemy, że w pionowej przez l działa wypadkowa R wszystkich ciężarów, działających na połowę sklepienia. Pierwszy bok szukanej połowy linii ciśnienia jest H , który przecina się z wypadkową w l' , więc je-

żeli ostatni bok, linii ciśnienia ma przechodzić przez f , to kierunek jego musi być $f'l'$. Kierunek wypadkowej sił P_1, P_2, P_3, P_4 ,

rys:317.



jest $k'k'$, drugi bok więc będzie $m'k'$, ważny do w . W ten sam sposób możemy i resztę boków wykreślić. Parcie poziome możemy teraz łatwo wyznaczyć. Zróbmy $5 O_1 \parallel f'l'$, to O_1O jest parciem poziomem. Z O_1 wykreślimy promienie, to kreśląc wielobok

sznurowy równoległy do tych promieni z punktu e , przyjsie musimy do punktu f , a $ewmf$ jest linią ciśnienia.

§. 142. Sklepienie niesymetrycznie obciążone.

Przypuśćmy teraz, że sklepienie ACB (r. 317) jest do połowy obciążone ciężarem ruchomym. Chodzi o wykreślenie linii ciśnienia dla przypuszczenia, że linia ciśnienia przechodzi przez A, C i B . W tym celu kreślimy wielobok sił, przyjmujemy do-

wolnie biegun O , kreślimy promienie, a równoległe do nich wielobok sznurowy $I', II' \dots VIII'$. Przypuśćmy na chwilę, że tylko lewa strona sklepienia AC jest obciążona, prawa zaś wcale nie (nawet ciężarem własnym), to linia ciśnienia po prawej stronie będzie prosta, a że musi przechodzić przez C i B , więc prostą BC . Wypadkowa G_1 ciężarów $I' II' III' IV'$ przechodzi przez M , na pionowej MS_1 przecinają się więc skrajne boki wieloboku sznurowego, zatem ostatni bok musi być AS_1 . Z tego wynika, że dla tego obciążenia powstanie oddziaływanie W_1 i W_2 , które łatwo w wieloboku sił wyznaczymy.

Przypuśćmy teraz, że tylko prawa strona sklepienia CB jest obciążoną, linia ciśnienia po lewej stronie będzie prosta AC , wypadkowa G_2 ciężarów $V' VI' \dots VIII'$ przechodzi przez NS_2 , ostatni bok wieloboku sznurowego jest BS_2 , oddziaływania dla tego obciążenia D_1 i D_2 .

Jeżeli teraz równocześnie obciążona jest prawa i lewa strona sklepienia, to w A działają równocześnie D_1 i W_1 , w B D_2 i W_2 , czyli w A K_1 , w B K_2 , które łatwo z wieloboku sił wyznaczyć. K_1 i K_2 przecinają się w O_1 , który jest prawdziwym biegunem, z którego wykreśliwszy promienie a równoległe do nich wielobok sznurowy, otrzymamy linię ciśnienia przechodzącą przez A , C i B .

Zupełnie tak samo postępujemy, jeśli sklepienie samo jest już niesymetrycznem.

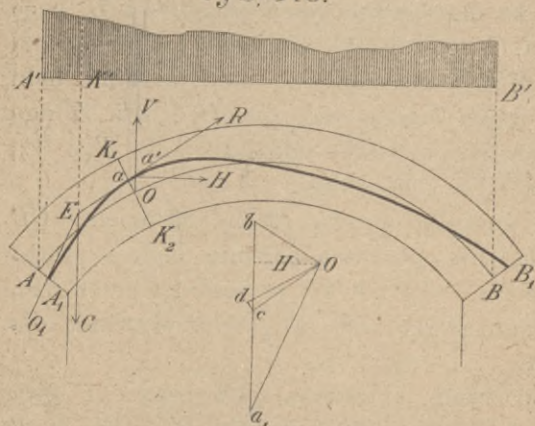
§. 143. Siły zewnętrzne.

W poprzednich paragrafach zrobiliśmy pewne dowolne przypuszczenia; aby tego uniknąć i wyznaczyć prawdziwą linię ciśnienia, musimy bliżej zbadać natężenia w sklepieniu i wynikające stąd odkształcenia. Ponieważ sklepienie jest tylko szczegółowym wypadkiem łuku, więc cała dalsza teoria w celu wyznaczenia prawdziwej linii ciśnienia odnosi się w ogóle do łuku.

Niech $A_1 a B_1$ będzie linią ciśnienia dla danego obciążenia (rys. 318). Wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych R przecina przekrój $K_1 K_2$ w punkcie a i jest styczną w punkcie a' na pionowej przez O do linii sznurowej, której odległością biegunową jest składowa pozioma H . Wypadkową R otrzymamy, składając oddziaływanie O_1 z obciążeniem na długości $A'K'=C$, z czego

wynika, że siły O_1 , C i R przecinają się w jednym punkcie E . Moment sił zewnętrznych ze względu na punkt O jest równy momentowi wypadkowej R albo sumie momentów jej składowych H i V ; możemy więc napisać:

rys: 318.



$M = H\eta$, gdy $Oa' = \eta$, bo V przechodząc przez O nie daje żadnego momentu. Widzimy więc, że odstęp pionowy między osią a linią ciśnienia jest proporcjonalny do momentu sił zewnętrznych, czyli innymi słowy: oś łuku jest zamykającą

linii ciśnienia (twierdzenie Winklera). Jeżeli chodzi tylko o wielkość momentów a nie o środki ciśnienia, to chcąc uzyskać momenty w n razy większej podziałce, przyjmijmy odległość biegunową n razy mniejszą. Odstęp środków ciśnienia od osi jest wtedy n razy większy, niż w rzeczywistości.

Jeżeli w odnośnym wieloboku sił poprowadzimy $Oc \parallel R$, a $Od \parallel$ do stycznej osi w punkcie O , wtedy $Oc = R$, $Od = P$, siłę podłużną, $cd = Q$, siłę poprzeczną.

Jeżeli więc znamy w łuku linię ciśnienia, to możemy wyznaczyć wszystkie siły zewnętrzne. Zadaniem naszym będzie teraz wykreślić dla każdego danego obciążenia odpowiednią linię ciśnienia.

Wiemy z §. 136, że dla określenia linii ciśnienia potrzeba wyznaczenia trzech niewiadomych. W tym celu albo uciekamy się do prawideł sprężystości i badamy odkształcenie łuku, lub też budujemy łuk w ten sposób, aby trzem danym warunkom zadość uczynić, urządzając przeguby (n. Gelenk, fr. charnière, an. joint, cz. kloub).

Przeguby, wprowadzone w użycie najprzód przez Gerbera, sąto połączenia zawiasowe dwóch zupełnie odrębnych części, na które belka została podzieloną, albo właściwiej je-

szczeby można powiedzieć, sąto połączenia przegibne dwóch belek (nie zaś dwóch prętów tej samej belki).

Jeżeli więc w któremkolwiek miejscu łuku urządzimy przegub, obie części mogą być tylko wtedy w równowadze, jeżeli w miejscu przegubu jest moment $=0$, gdyż inaczej musiałyby się część jedna około osi przegubu obrócić. Stąd wynika, że linia ciśnienia musi przechodzić przez przegub. Urządziwszy więc n przegubów, otrzymujemy dla równowagi jeszcze n równań, mianowicie, że momenty sił zewnętrznych dla tych punktów są równe zeru. A że, jakto przedtem udowodniliśmy, dla łuku brakują nam trzy równania, więc urządziwszy trzy przeguby w łuku, możemy siły zewnętrzne zupełnie dokładnie wyznaczyć. W praktyce spotykamy łuki żelazne o trzech, o dwóch przegubach i bez przegubu, w sklepieniach w najnowszych czasach zaczęto także używać przegubów. Dla łuków i sklepień dwu i bezprzegubowych musimy się uciec do prawideł sprężystości, jakto już wyżej wspomnieliśmy.

§. 144. Odkształcenie łuku.

Niech będzie ACB (rys. 319) osią łuku, którego długość od przekroju utwierdzonego A nazwijmy $s=AD$, kąt zaś nachylenia stycznej w punkcie D do poziomu niech będzie φ . Wskutek obciążenia ilości φ i s zmienia się o $\Delta\varphi$ i Δs . Nim je wyznaczymy, określimy zależność ilości s i φ , mianowicie otrzymamy, jeżeli s wzrośnie o $ds=DG$

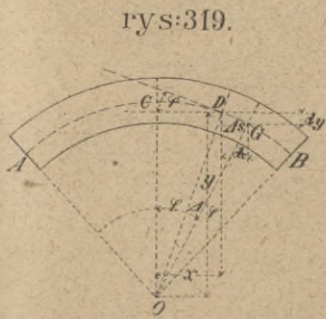
$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \operatorname{dost} \varphi \\ dy &= - ds \operatorname{wst} \varphi \end{aligned} \right\} \quad . \quad 726)$$

Przy odkształceniu zmieniają się te wszystkie długości, gdy więc Δs nazwalimy zmianę

długości s , to nazwiemy Δds zmianą długości ds . Różniczkując równanie 726), otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta dx &= \Delta ds \operatorname{dost} \varphi - ds \Delta \varphi \operatorname{wst} \varphi, \\ \Delta dy &= - \Delta ds \operatorname{wst} \varphi - ds \Delta \varphi \operatorname{dost} \varphi, \end{aligned}$$

a wstawiwszy za $\operatorname{dost} \varphi$ i $\operatorname{wst} \varphi$ wartość z równ. 726), otrzymamy



rys. 319.

$$\Delta dx = \frac{\Delta ds}{ds} dx + \Delta \varphi dy = d \Delta x,$$

$$\Delta dy = \frac{\Delta ds}{ds} dy - \Delta \varphi dx = d \Delta y,$$

gdyż z powodu, że odkształcenia te są bardzo małe, możemy przyjąć $\Delta dx = d \Delta x$ i $\Delta dy = d \Delta y$. Całkujemy teraz te równania, to

$$\Delta x = \int_0^x \frac{\Delta ds}{ds} dx + \int_0^x \Delta \varphi dy \quad 727)$$

$$\Delta y = \int_0^x \frac{\Delta ds}{ds} dy - \int_0^x \Delta \varphi dx$$

Δds jestto zmiana długości, nieskończenie małej cząstki łuku ds , a iloczyn $\frac{\Delta ds}{ds}$ jest więc względną zmianą długości łuku, możemy zatem napisać wedle rów 34)

$$\frac{\Delta ds}{ds} = - \frac{P}{\epsilon A} = - \frac{v'}{\epsilon} \quad 728)$$

Dajemy znak —, bo P , oznaczając ciśnienie, skraca łuk.

Dla wynalezienia $\Delta \varphi$ musimy wyznaczyć działanie momentu M . Wskutek działania momentu M zmienia się kąt $d\varphi$

o $\Delta d\varphi$ (rys. 320). Z tego wynika, że $D'L' = ds_1$ przedłuża się o Δds_1 , a przedłużenie to możemy wyrazić analogicznie do równ. 34)

$$\frac{\Delta ds_1}{ds_1} = - \frac{v_e''}{\epsilon},$$

gdy v_e'' oznacza natężenie wskutek działania momentu M w warstwie odległej o v od osi obrotowej, a wstawiwszy wartość za v_e'' z równ. 665)

$$\Delta ds_1 = - \frac{Mv}{\epsilon I} ds_1 \quad . . 729)$$

Z rysunku widzimy, że

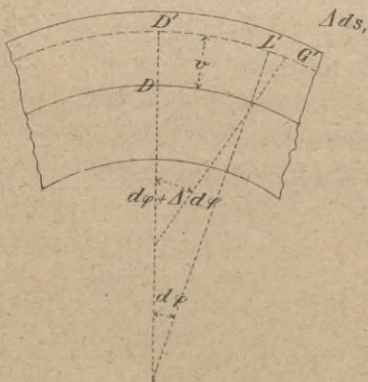
$$\Delta ds_1 = v \Delta d\varphi, \text{ więc}$$

$$\Delta d\varphi = \frac{\Delta ds_1}{v} = - \frac{M}{\epsilon I} ds_1, \text{ a stąd}$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = - \frac{M}{\epsilon I} \quad 730)$$

ponieważ $ds_1 = ds$.

rys:320.



Z uwzględnieniem krzywizny otrzymał Weyrauch, gdy t oznacza ilość stopni C zmiany ciepłoty a α współczynnik rozszerzalności

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \alpha t - \left(P + \frac{M}{r} \right) \frac{1}{\varepsilon A} \dots \dots \dots 731)$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = - \frac{M}{\varepsilon I} - \left(P + \frac{M}{r} \right) \frac{1}{\varepsilon A r} \dots \dots \dots 732)$$

Całkujemy teraz równania 728) i 730) i mamy

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= - \int_0^x \frac{P}{\varepsilon A} ds \\ \Delta \varphi &= - \int_0^x \frac{M}{\varepsilon I} ds \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 733)$$

Gdy kształt łuku jest dany, wtedy znana jest zależność między zmiennymi x, y, s i φ i zapomocą powyższych równań możemy wyznaczyć odkształcenie łuku.

§. 145. Wyznaczenie trzech warunków.

Łuk bezprzegubowy (n. *Bogenträger ohne Gelenke*) jestto łuk, którego oba końce są tak utwierdzone, że styczne podporowe się nie zmieniają, a więc i sklepienie jest także łukiem bezprzegubowym. Ponieważ w łuku takim obie podpory są stałe, więc dla $x=l$ możemy napisać trzy następujące równania:

$$\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta \varphi = 0 \dots 734)$$

Te trzy równania wystarczą do wyznaczenia sił zewnętrznych, jakto udowodniliśmy wyżej.

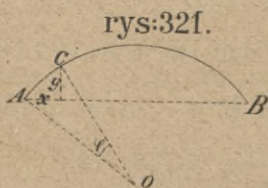
Niech ACB (rys. 321) przedstawia oś łuku, to pierwsze równanie możemy ze względu na równ. 727) napisać

$$\Delta x = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} dx + \int_A^B \Delta \varphi dy = 0,$$

albo całkując częściowo

$$0 = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} dx + \left(\Delta \varphi \cdot y \right)_A^B - \int_A^B y \frac{d\Delta \varphi}{ds} ds.$$

Dla A i B jest $y=0$, więc drugi wyraz odpada i możemy napisać



rys:321.

$$0 = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} dx - \int_A^B y \frac{d\Delta\varphi}{ds} ds.$$

Wstawmy teraz wartości z równ. 728) i 730), a otrzymamy

$$0 = - \int_A^B \frac{P}{\varepsilon A} dx + \int_A^B \frac{My}{\varepsilon I} \dots \dots \dots 735)$$

ε jest liczbą stałą, a dla przekroju stałego możemy I i A także wyłączyć przed znak i napisać

$$\int_A^B My ds - \frac{I}{A} \int_A^B P dx = 0 \dots \dots \dots 736)$$

Z uwzględnieniem krzywizny otrzymuje Müller Breslau

$$\int_A^B My ds + \frac{I}{A} \int_A^B P \left(y \frac{ds}{r} - dx \right) = 0 \dots \dots \dots 737)$$

Gdy promień łuku jest wielki, równ. 737) przechodzi w równ. 736).

Dla łuków nie bardzo grubych, gdy I jest małe, drugi wyraz daje stosunkowo tak małe wartości, że możemy wpływ siły podłużnej P opuścić i w przybliżeniu napisać

$$\int_A^B M y ds = 0 \dots \dots \dots 738)$$

W ten sam sposób postępując, otrzymamy z drugiego równania 734)

$$\int_A^B M x ds + \frac{I}{A} \int_A^B P dy = 0 \dots \dots \dots 739)$$

Z uwzględnieniem krzywizny jest wedle Müllera Breslawa

$$\int_A^B M x ds + \frac{I}{A} \int_A^B P \left(x \frac{ds}{r} + dy \right) = 0, \dots \dots \dots 740)$$

któreto równanie dla wielkiego r przechodzi w rów. 739).

Jeśli opuścimy wpływ siły podłużnej, to otrzymamy

$$\int_A^B M x ds = 0 \dots \dots \dots 741)$$

Trzecie równanie brzmi $\Delta\varphi=0$; według równania 733)

$$0 = \Delta\varphi = - \int_A^B \frac{M}{\varepsilon I} ds \dots \dots \dots 742)$$

a dla przekroju stałego

$$\int_A^B M ds = 0 \dots \dots \dots 743)$$

Wedle Müllera Breslaua otrzymamy z uwzględnieniem krzywizny

$$\int_A^B M ds + \frac{I}{A} \int \frac{P}{r} ds = 0, \dots \dots \dots 744)$$

któreto równanie przechodzi dla wielkiego r w rów. 743). Na trzech zasadniczych równaniach (736), (739) i (742), względnie przybliżonych bez uwzględnienia krzywizny i siły podłużnej (równaniach 738), (741), (743), polega cała dalsza teoria belek łukowych, a więc i sklepień.

§. 146. Przybliżone wyznaczenie prawdziwej linii ciśnienia.

Ta linia ciśnienia jest prawdziwą, która wypełnia wszystkie trzy powyżej podane warunki, a że brakowało nam tylko trzy równania, więc teraz mamy tyle równań, ile niewiadomych, a zatem niewiadome dadzą się ściśle wyznaczyć. Linia ciśnienia jest więc zupełnie wyznaczalna temi równaniami.

Będziemy teraz szukać tej prawdziwej linii ciśnienia, odpowiadającej trzem warunkom, a to w ten sposób, że najprzód wyszukamy linię ciśnienia, odpowiadającą jednemu warunkowi, potem zmienimy ją tak, aby nie przestając odpowiadać pierwszemu warunkowi, odpowiadała i drugiemu, a nareszcie i trzeciemu.

Każdy wielobok uważać możemy jako wielobok sznurowy dla pewnego obciążenia, a więc i oś ACB (tabl. IV.) niech będzie wielobokiem sznurowym dla pewnego obciążenia i parcia poziomego. Przypuśćmy dalej, że LK jest linią zamykającą dla belki zwykłej, obu końcami utwierdzonej, to wtedy odstępki pionowe między LK a osią będą dla pewnego parcia poziomego równe momentom M , a na mocy równania (743), które tu także jest ważne

$$\int_A^B M_b ds = 0$$

Równ. (743) bowiem powstało z warunku $\Delta\varphi = 0$, który i tu musi być wypełnionym (por. §. 84).

Niech będzie $a' a'_1 a'_2 \dots a'_{11}$ prawdziwą linią ciśnienia i przypuśćmy na chwilę, że jest także wielobokiem sznurowym dla tej samej belki zwykłej obu końcami utwierdzonej i tego samego parcia poziomego, co wielobok b , ale dla danego rze-

czywistego obciążenia, i że linia LK jest znów linią zamykającą. Wtedy odstęp między linią zamykającą a wielobokiem α będą równe momentom M_a i tu będzie także:

$$\int_A^B M_a ds = 0.$$

Wiemy, że dla łuku linią zamykającą jest oś łuku, więc momenty dla łuku będą $M = M_a - M_b$, 745) jako z rysunku widzimy.

Pomnożywszy to równanie przez $x ds$, otrzymamy

$$Mx ds = M_a x ds - M_b x ds.$$

Scałkujmy to równanie, to

$$\int Mx ds = \int M_a x ds - \int M_b x ds = 0$$

według równania 741), a zatem

$$\int M_a x ds = \int M_b x ds \quad 746)$$

Analogicznie możemy napisać na podstawie równań 738) i 743)

$$\int M_a y ds = \int M_b y ds \quad 747)$$

$$i \int M_a ds = \int M_b ds \quad 748)$$

Te trzy równania posłużą nam do wyznaczenia prawdziwej linii ciśnienia, a mianowicie w równ. 746) i 748) zrobimy obie strony równania $= 0$, przez co będą też sobie równe. W tym celu dzielimy najprzód rozpiętość na równą liczbę części (na rysunku na 10 części); rozpiętość jest tu $l = 16 m$, strzałka $f = 4 m$, $d_0 = 1 m$, $d_1 = 1,7 m$, nadsypka $2 m$, ciężar ruchomy $1200 \frac{kg}{m^2}$. Jeśli

ciężar kamienia jest $2,4 \frac{t}{m^2}$, nadsypki $1,6 \frac{t}{m^2}$, to $h_0 = \frac{1200}{1600} = 0,75 m$.

Ciężar stały takiego pasma i ciężar ruchomy działa w praktyce dość dokładnie w pionowej, połowiącej ten pasek. Wykreślamy więc te linie połowiące przez $e_1, e \dots e_{10}$, jako kierunek sił działających i na linii pionowej przez A wykreślamy wielobok sił dla danego obciążenia. Tu przypuszczamy, że obciążoną jest ciężarem ruchomym lewa połowa sklepienia, wykreślamy więc według §. 135. sprowadzoną linią obciążenia i wyznaczamy cięż-

żary pasków. Np. ciężar paska pierwszego jest $2,4 \times 1,6 \times 1 \times 5,5 = 21,12t$. Reszta ciężarów będzie proporcjonalna do średnich wysokości pasków (w pionowych przez e).

Przyjąwszy tymczasowo jako odległość biegunową połowę rozpiętości i biegun w punkcie D , kreślimy promienie i w zwykły sposób wielobok sznurowy ENF . Teraz szukamy linii zamykającej, któraby zadość uczyniła równaniu

$$\int_A^B M_a ds = 0.$$

Przyjąwszy w przybliżeniu $ds = dx$, otrzymujemy

$$\int_A^B M_a dx = 0,$$

co znaczy, że powierzchnia między linią zamykającą a wielobokiem sznurowym a ma być $=0$, oczywiście, gdy uwzględnimy znaki rzędnych.

Przyjęcie dx zamiast ds jest przy łuku bezprzegubowym tem bardziej dopuszczalne, że błąd ten poczęści znosi błąd wskutek przyjęcia stałego momentu bezwładności. W sklepieniu jest zawsze grubość sklepienia w kluczu najmniejsza, więc moment bezwładności w węzłowie $I_1 > I_0$ moment bezwładności w kluczu.

Jeżeli I jest zmienne, to według 735) mamy zamiast M wyraz $\frac{M}{I}$ we wszystkich następnych wzorach, więc $\frac{M}{I} ds$ zamiast $M ds$. Jeżeli przyjmujemy, że moment bezwładności zmienia się w przybliżeniu wedle równania $I = I_0 \frac{ds}{dx}$, to otrzymamy $\frac{M dx}{I_0 ds} ds = \frac{M}{I_0} dx$. A że I_0 jest stałe, więc można wyłączyć przed znak całkowania i otrzymujemy $M dx$.

Wykreślimy teraz najprzód linią $L_3 K_3$, równoległą do EF , oceniwszy na oko, że powierzchnia między $L_3 K_3$ a $ENF = 0$. Dobrze także użyć w tym celu linii prostej, wykreślonej na kalce, którą przesuwamy równoległe do linii EF , aż powierzchnie po obu stronach linii będą równe. Gdyby linia ciśnienia była parabola, to $L_3 K_3$ przechodziłaby w $\frac{2}{3}$ wysokości w środku.

Teraz sprawdzimy, czy rzeczywiście.

$$\int_A^B M_a dx = 0.$$

Jeżeli nazwiemy odcinki pionowe między wielobokiem a a zamykającą v , to powierzchnia momentów

$$A = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \frac{e}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} e + \dots + \frac{v_9 + v_{10}}{2} \cdot e + \frac{v_{10} + v_{11}}{2} \frac{e}{2},$$

$$A = e \left(\frac{v_0 - v_1}{4} + v_1 + v_2 + \dots + v_9 + v_{10} + \frac{v_{11} - v_{10}}{4} \right) = em \quad . \quad 749)$$

Dodawanie rzędnych v możemy uskutecznić cyrklem i w ten sposób otrzymamy sumę m (tu $m = +17 \text{ mm}$), którą mamy jeszcze pomnożyć przez e , aby otrzymać A .

Jeżeli powierzchnia nie jest $=0$, lecz np. $=+f$ (tu $17 \cdot 16 = =272 \text{ mm}^2$), wtedy posuniemy linią $L_3 K_3$ do góry o długość $\Delta a = \frac{f}{l}$. A że $l = ne$, (tu $10e$), więc $\Delta a = \frac{e \cdot m}{nm} = \frac{e}{n} \dots \dots 750)$

W ten sposób otrzymamy prostą $L_2 K_2$, a powierzchnia będzie teraz dokładnie $=0$.

Chodzi teraz o to, aby

$$\int_A^B M_a x ds = 0,$$

albo w przybliżeniu $\int_A^B M_a x dx = 0,$

tj. aby moment statyczny tej powierzchni ze względu na AE był $=0$. Obliczmy moment statyczny tej powierzchni, rozkładając ją na trapezy i przypuszczając, że środek ciężkości trapezu jest w połowie szerokości. Otrzymamy więc:

$$S = \frac{v_0 + v_1}{2} \frac{e}{2} \cdot \frac{c}{4} + \frac{v_1 + v_2}{2} e \cdot 1e + \frac{v_2 + v_3}{2} e \cdot 2e + \dots + \frac{v_9 + v_{10}}{2} \cdot e \cdot 9e + \frac{v_{10} + v_{11}}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot 9,75e, \text{ czyli}$$

$$s = \frac{e^2}{2} \left[\frac{v_0}{8} + \frac{9v_1}{8} + (1+2)v_2 + (2+3)v_3 + (3+4)v_4 + (4+5)v_5 + \dots + (8+9)v_9 + \left(9 + \frac{9,75}{2}\right)v_{10} + \frac{9,75}{2}v_{11}, \right]$$

więc w mm^3 będzie

$$S = \frac{e^2}{2} \left(-\frac{20,5}{8} - \frac{9}{8} 13,4 - 3,1 + 5 \cdot 3,8 + 7 \cdot 7,9 + 9 \cdot 9,3 + + 11 \cdot 8,8 + 13 \cdot 6,6 + 15 \cdot 2,5 - 17 \cdot 4,4 + - 13,87 \cdot 14 - 4,87 \cdot 20,5 \right), \text{ a stąd } S = 8,3 e^2.$$

Musimy więc moment statyczny powierzchni powiększyć o $-S$ (tu $o = 8,3 e^3 mm^3$) przeto, że prostą $L_2 K_2$ obrócimy około punktu I o pewien kąt, aż przyjdzie w położenie $L_1 K_1$,

Długość $L_1 L_2$ wyznaczymy w następujący sposób: Przez obrót linii zamykającej w kierunku odwrotnie, jak wskazówki na zegarze, powiększy się z lewej strony powierzchnia dodatnia, zaś z prawej ujemna. Moment statyczny, jaki przeto powstanie, ma być:

$$-S = +IL_1 L_2 \frac{1}{6} l - IK_1 K_2 \frac{5}{6} l = -\frac{2}{3} l \cdot IL_1 L_2 = \\ = \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{2} L_1 L_2 \cdot \frac{1}{2} l = -\frac{l^2}{6} L_1 L_2, \text{ a stąd}$$

$$L_1 L_2 = \frac{6S}{l^2} \dots \dots \dots, \text{ 751)}$$

Tu otrzymamy $L_1 L_2 = \frac{6 \cdot 8,3 e^2}{(10e)^2} = 0,5 mm$. A że $IK_1 K_2 = IL_1 L_2$, więc warunek pierwszy nie został naruszony. Linia zamykająca $L_1 K_1$ odpowiada więc teraz dwom pierwszym warunkom.

Teraz szukamy linii zamykającej dla osi łuku, jako wieloboku sznurowego w ten sam sposób i znajdziemy LK , równoległą do AB , bo jeżeli suma powierzchni momentów jest równa zeru, to z powodu symetrii drugi warunek będzie już przeto także wypełniony. Środek ciężkości bowiem tak ujemnej części powierzchni, jak i dodatniej, leży w prostej CD , a że te powierzchnie są równe, więc momenty statyczne muszą być równe z przeciwnym znakiem, a zatem

$$\int_A^B M_b x dx = 0.$$

Chodzi jeszcze o wypełnienie trzeciego warunku:

$$\int_A^B M_a y ds = \int_A^B M_b y ds,$$

czyli w przybliżeniu

$$\int_A^B M_a y dx = \int_A^B M_b y dx.$$

Rzędne ac wyobrażają nam, jak wiemy, momenty M_a . Uważajmy M_a jako siły działające poziomo w odpowiednich punktach osi b , oddalonych od linii AB o y np. $a_1 c_1$ w b_1 , $a_2 c_2$ w b_2 itd., wtedy otrzymamy łatwo

$$\int_A^B M_a y dx,$$

wykreślając na dowolnej linii RS wielobok sił, a potem wielobok sznurowy. Powierzchnie przedstawiają się tu jako trapezy i trójkąty. Środki ciężkości znajdują się w jednej trzeciej lub w przybliżeniu w połowie podstaw. Zatem od C odcinamy $Cf_1 = \frac{1}{2}u_1$, $f_1f_2 = u_2$, f_2f_3 w przeciwnym kierunku $= u_3$ itd., a ponieważ powierzchnia momentów powinna być równa zeru, więc ostatni punkt wieloboku f_{11} zejdzie się z punktem C .

Przyjmmy tymczasowo jako odległość biegunową CD , połączmy D z wszystkimi punktami wieloboku sił, z punktów k_1, k_2 itd. ponad środkami ciężkości trapezów poprowadźmy poziome i wykreślmy wielobok sznurowy DTU . Z §. 7. wiemy, że odcinek UD prostej AB równoległej do wypadkowej między skrajnymi bokami wieloboku sznurowego DTU , pomnożony przez odległość biegunową $DC = h_1$, równy jest sumie momentów statycznych sił M_a , więc według równań 4) i 183)

$$UD = \frac{1}{h_1} \int_A^B M_a y dx \quad 752)$$

To samo robimy, chcąc wyznaczyć

$$\int_A^B M_b y dx.$$

Tu M_b są równe rzędnym między osią łuku a linią zamykającą LK . Wykreślmy w ten sam sposób wielobok sznurowy czyli raczej z powodu symetrii tylko połowę wieloboku, a otrzymamy

$$Ct = \frac{1}{2h_1} \int_A^B M_b y dx \quad 753)$$

Aby zadość uczynić równaniu 747), musiałoby być:

$$\int_A^B M_a y dx = \int_A^B M_b y dx \text{ czyli } 2h_1 Ct = h_1 \cdot UD, \text{ albo}$$

$$2Ct = UD \quad 754)$$

Rzeczywiście jednak $2Ct \geq UD$, więc aby uzyskać równ. 754) musimy, ponieważ $2Ct$ jest dla danego kształtu łuku stałym, zmienić tak UD , aby $UD = 2Ct$.

W naszym przykładzie jest $2Ct > UD$, a mianowicie ponieważ $2Ct = n \cdot UD$, więc UD trzeba n razy powiększyć. Ponieważ $UD = \frac{1}{h} \int_A^B M_a y dx$, więc UD będzie n razy większe, jeżeli M_a czyli rzędne wieloboku sznurowego a powiększymy n

razy. Rzędne zaś wieloboku tego będą n razy większe, jeżeli do wykreślenia go użyjemy odległości biegunowej n razy mniejszej, a zatem $b = \frac{AD}{n} = AD \cdot \frac{UD}{2 Ct}$.

Teraz dwojaki jest sposób wykreślenia prawdziwej linii ciśnienia, albo mnożymy wszystkie rzędne wieloboku a przez $n = \frac{2 Ct}{UD}$ i wykreślamy je według znaku powyżej lub poniżej linii LK — albo wyznaczysz prawdziwą odległość biegunową, szukamy takiego bieguna, aby linie zamykające obu wieloboków zeszły się razem i aby można jeden na drugi położyć. Wykreślimy dowolną prostą BD_1 , zrobmy $BP = UD$, $BP' = 2 Ct$, wykreślimy potem DD_1 równoległe do PP' , a będziemy mogli napisać:

$$BD_1 = BD \cdot \frac{BP'}{BP} = AD \cdot \frac{2 Ct}{UD} = \frac{AD}{n} = b.$$

Prawdziwą odległością biegunową jest więc BD_1 .

Według pierwszego sposobu mamy powiększyć wszystkie rzędne M_a w stosunku $BP:BP'$, co zrobić możemy zapomocą kąta proporcjonalnego PBP' . Sposób ten jest łatwy i dokładny, jako próbę użyć możemy drugiego sposobu, a to jak następuje: Kreślimy DF_1 równoległe do L_1K_1 , przez co otrzymujemy $OF_1 = V_1$ i $F_1 10 = V_2$, oddziaływania pionowe belki prostej. Z punktu F_1 ciągniemy poziomą F_1D'' , równoległą do zamykającej LK , gdyż L_1K_1 musi być poziomą, jeżeli chcemy położyć wielobok a na wielobok b i uzyskać $M = M_a - M_b$ i robimy $F_1D'' = BD_1$. D'' jest wtedy prawdziwym biegunem, gdyż odległość biegunowa $F_1D'' = BD_1 = b$, a równoległa do nowej zamykającej LK dzieli wielobok sił na V_1 i V_2 . Teraz kreślimy promienie i linią ciśnienia, punkt początkowy a' , a może i więcej punktów, wyznaczamy jako kontrolę według poprzedniego sposobu.

Drugą próbą rzetelności konstrukcyi jest ta okoliczność, że punkty przecięcia się wieloboku a z linią zamykającą m i n leżą w pionowych punktach przecięcia się linii ciśnienia z LK — m' i n' . Dalej boki skrajne wieloboku sznurowego muszą się przecinać w pionowej przez środek ciężkości wszystkich ciężarów GG' , a nakoniec sumy powierzchni powyżej osi i poniżej osi muszą być sobie równe

Otrzymawszy tak prawdziwą linię ciśnienia, mamy momenty ze względu na oś $M = bz$, jeżeli z oznacza pionowy odstęp między osią a linią ciśnienia.

Chodzi jeszcze o największe nateżenie, które obliczymy według rów. 685) $v_1 = \frac{P}{100h} \left(1 + \frac{6c}{h}\right)$. Widzimy, że v_1 może być największe dla największego P lub największego c . Na tablicy jest P i c największe na podporze A . Dla szwu gl , prostopadłego do osi w A , znajdziemy P , robiąc $or \parallel gl$, a $D''r \parallel$ do stycznej do osi w A , to $P = D''r = 102,5 t = 102500 \text{ kg}$. Dalej mamy $c = Aa' = 0,10 \text{ m} = 15 \text{ cm}$, $h = 1,6 \text{ m} = 160 \text{ cm}$, więc

$$\text{najw. } v = \frac{102500}{100 \cdot 160} \left(1 + \frac{6 \cdot 10}{160}\right) = 8,8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

a więc dla muru kamiennego nateżenie stosowne.

Gdybyśmy chcieli otrzymać wynik dokładniejszy, to należałoby się dla stałego I trzymać wzorów 736), 739) i 743):

$$\left. \begin{aligned} \int_A^B My ds - \frac{I}{A} \int_A^B P dx &= 0, \\ \int_A^B Mx ds + \frac{I}{A} \int_A^B P dy &= 0, \\ \int_A^B M ds &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Względnie jeżeli $I = I_0 \frac{ds}{dx}$ i $A = A_0 \frac{ds}{dx}$ są stałe,

$$\left. \begin{aligned} \int_A^B My dx - \frac{I_0}{A_0} \int_A^B P dx &= 0 \\ \int_A^B Mx dx + \frac{I_0}{A_0} \int_A^B P dy &= 0 \\ \int_A^B M dx &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 755)$$

Z tego widzimy, że pierwszy warunek

$$\int_A^B M_a dx - \int_A^B M_b dx = 0$$

jest dokładny, żadnej zmiany tu nie trzeba.

Drugi warunek musimy napisać

$$\int_A^B M_a x dx = \int_A^B M_b x dx + \frac{I_0}{A_0} \int_A^B P dx \dots \dots \dots 756)$$

Jeżeli więc w zwykły sposób wyznaczmy powierzchnie momentów a i b , to jeszcze należy w każdym punkcie a siłę podłużną P odciąć pionowo od pewnej poziomej. Końce tych rzędnych połączone dadzą linię krzywą A_2B_2 , a

$$\int_A^B P dx = \text{pow. } A_1A_2B_2B_1.$$

rys: 322.



Jeżeli łuk jest symetryczny, to

$$\int_A^B M_b x dx = 0, \text{ więc}$$

$$\int_A^B M_a x dx = \frac{I_0}{A_0} \int_A^B P dx,$$

a nie jest równe zero, jak to pierwiej robiliśmy. Z uwzględnieniem tego robimy obrót L_2K_2 w położenie L_1K_1 .

Trzeci warunek otrzymamy z 755)

$$\int_A^B M_a y dx + \frac{I_0}{A_0} \int_A^B P dy = \int_A^B M_b y dx. \dots 757)$$

Tu więc musimy jeszcze utworzyć

$$\int_A^B P dy = \text{pow. } (A_0 C_0 C'_0 A'_0 + B_0 B'_0 D'_0 D_0).$$

Otrzymamy więc z 752)

$$h_1 UD + \frac{I_0}{A_0} \int_A^B P dy = h_1 2 Ct.$$

Jeżeli $\frac{I_0}{A_0} \int_A^B P dy = A_1$, to

$$UD = 2 Ct - \frac{A_1}{h_1} \dots 758)$$

Jeżeli to równanie się nie ziszcza, to należy UD , zatem odległość biegunową odpowiednio zmienić, aby zadość uczynić temu równaniu.

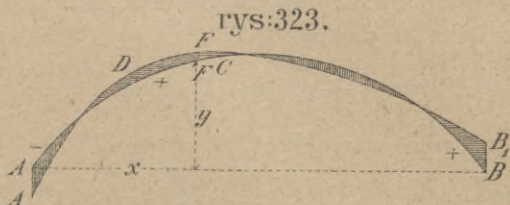
Różnica w wielkości parcia poziomego przy zastosowaniu tych poprawek jest jednak zwykle tak mała, że w zwyczajnych wypadkach nie potrzeba uwzględniać wpływu siły podłużnej P .

§. 147. Położenie powierzchni momentów.

Niech będzie ACB (rys. 323) osią łuku, A_1DB_1 prawdziwą linią ciśnienia, to rzędne między temi dwiema liniami będą, jak wiemy, proporcjonalne do momentów. Pierwszy warunek $\int_A^B Mx dx = 0$ oznacza, że suma powierzchni dodatnich jest równa sumie powierzchni ujemnych tj poniżej osi leżących. Drugi i trzeci warunek brzmi:

$$\int_A^B My dx = 0 \text{ i } \int_A^B My^2 dx = 0,$$

co da się słowami tak wyrazić: moment statyczny powierzchni ujemnych musi być równy momentowi statycznemu powierzchni dodatnich także względu na oś odcinków, jak i rzędnych. $\int_A^B My dx$ nie oznacza wprawdzie momentu statycznego powierzchni momentów ze



względem na AB , bo y oznacza odstęp punktu osi od AB . Ale różnica jest bardzo mała tak, że możemy $\int_A^B My dx$ uważać w przybliżeniu jak moment statyczny. Wiemy, że moment statyczny jest iloczynem z powierzchni przez odległość środka ciężkości od danej linii, a więc gdy powierzchnie dodatnie i ujemne i ich

momenty statyczne są równe, to i odległość środka ciężkości powierzchni ujemnych i dodatnich od obu osi musi być równą, czyli innymi słowy: środek ciężkości części ujemnych musi schodzić się ze środkiem ciężkości części dodatnich.

Aby tego ostatniego warunku dopełnić, musi linia ciśnienia przecinać oś najmniej w trzech punktach, bo jeżeliby przecinała tylko w dwóch punktach, to otrzymalibyśmy dwie części tego samego znaku, a wyżej jedną część przeciwnego tak, że środki ciężkości nie mogłyby się schodzić.

Powyższa ulepszona metoda Burra wyznaczenia prawdziwej linii ciśnienia zaleca się zwłaszcza tem, że jest bardzo przejrzystą i jasną, a nadewszystko ogólną. Jeżeli przytem uwzględnimy skrócenie osi wskutek siły podłużnej, to otrzymamy wedle Kecka*) dla sklepienia parabolicznego podniesienie się linii ciśnienia w kluczu o c , a zniżenie na podporach o $2c$, przyczem

$$c = \frac{1}{3} \frac{d^2}{f}, \dots \dots \dots 759)$$

jeśli d oznacza grubość a f strzałkę sklepienia.

§. 148. Ciśnienie sklepienia na krążyny.

Przy budowie sklepień używamy osobnego rodzaju rusztowań, które mają podierać niedokończony jeszcze sklepienie, dopóki nie założymy klucza, poczem już sklepienie nie potrzebuje podparcia. Rusztowania te nazywamy krążynami (*Lehrgerüst*, fr. *cintre*).

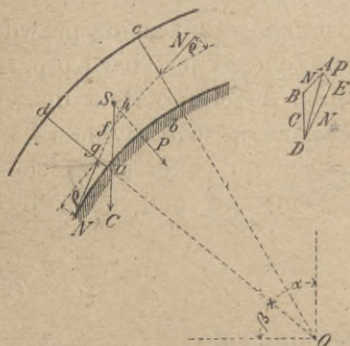
Aby obliczyć wymiary krążyn, musimy poznać ciśnienie, jakie wywiera sklepienie podczas budowy na krążyny

Wszystkie klince nachylone pod kątem mniejszym do poziomu, niż kąt tarcia wynosi, nie cisną wcale na krążyny, dopiero gdy $\beta > \rho$ (rys. 324), kliniec cisnie na krążyny i wywołuje oddziaływanie P prostopadłe do podniebienia. Zastanówmy się nad równowagą klinca takiego $abcd$. Ciężar jego C działa w środku ciężkości S , kliniec leżący na danym klincu wywierają ciśnienie N , działające także pod kątem tarcia. Siły N , N_1 , C i P muszą być w równowadze i dać się złożyć w zamknięty

*) Keck: *Elastizitätslehre* str. 338.

wielobok sił. Jeżeli N jest dane, C obliczamy, kreślimy $AB=N$ i $BD=C$, wypadkowa tych dwóch sił jest AD , z punktu ich przecięcia się f kreślimy $fh \parallel AD$ do przecięcia się z siłą P , którą z poprzednimi składamy. Kierunek wypadkowej N_1 znamy, bo działa ona pod kątem tarcia φ do prostopadłej na ad , kreślimy więc $DE \parallel gh$ i otrzymujemy w wieloboku sił $DE=N_1$ i $AE=P$.

rys:324.



Znając teraz N_1 , możemy wyznaczyć w ten sam sposób ciśnienie następnego klinca na krążynę.

Jeżeli punkt g wypada zewnątrz przekroju, to konstrukcja ta nie jest ważną. Wtedy musimy przypuścić mniejszy kąt tarcia, niż φ — albo, co na jedno wychodzi, obracć punkt g blisko krawędzi a . Możemy przyjąć $ag=2$ do 5 cm .

W rys. 325 zrobiliśmy tę konstrukcję dla sześciu klinców

A, B, C, D, E i F . Zaczynamy od najwyższego klinca F . Tu, rozumie się, $N=O$, a siły P_1 i C_1 przecinają w S_1 , skąd prowadzimy N_1 pod kątem φ do prostopadłej na szew ab . Przeprowadzwszy tak konstrukcję dla wszystkich 6 klinców, otrzymamy w wieloboku sił P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i P_6 . Z rysunku widzimy, że proste, przedstawiające ciśnienia N , są zbieżne, a ciśnienie P ku dołowi coraz mniejsze. Dodajmy jeszcze jeden kliniec G , którego ciężar jest C_0 , to z powodu zbieżności prostych, przedstawiających ciśnienia N , otrzymamy odnośne ciśnienia na krążyny P mniejsze, niż w pierwszym przypadku. A więc największe ciśnienie na krążyny pod pewnym klincem powstaje zawsze wtedy, gdy jest on najwyższym klincem. Ciśnienia te największe wzrastają ku kłuczowi. Z rysunku widzimy, że przez dodanie klinca G ciśnienia wywarte przez poprzednie klíny maleją, a kliniec A nie wywiera już wcale ciśnienia na krążyny.

Najw. P możemy łatwo wyznaczyć liczebnie, gdyż wtedy $N=0$ (rysunek 326), $AE=C \text{ wst } \alpha$, więc

$$AD=N_1 = \frac{AE}{\text{dost } \varphi} = \frac{C \text{ wst } \alpha}{\text{dost } \varphi}.$$

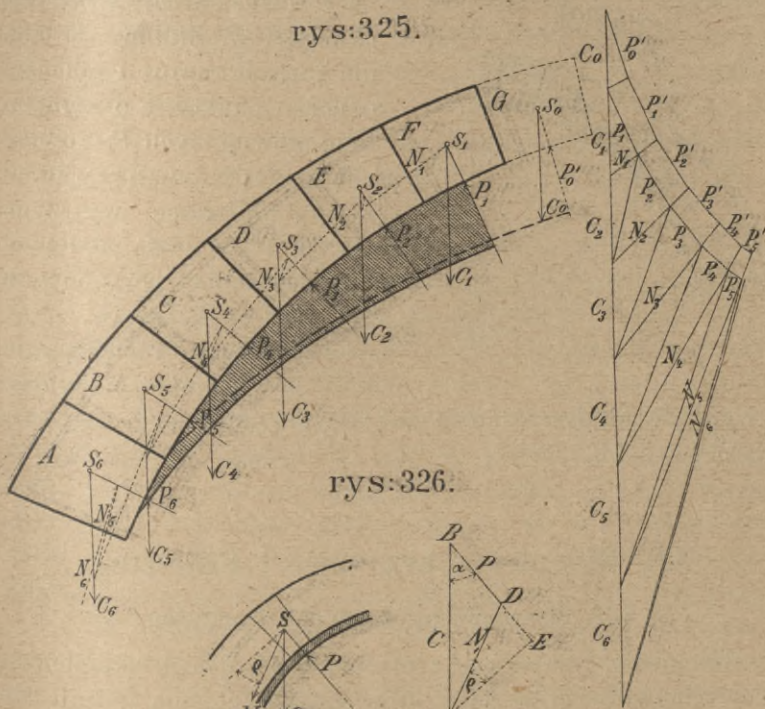
Dalej mamy

$$P = BD = C \text{ dost } \alpha - AE \text{ st } \varrho = C \text{ dost } \alpha - C \text{ wst } \alpha \text{ st } \varrho \text{ albo}$$

$$P = C (\text{dost } \alpha - \text{wst } \alpha \text{ st } \varrho) = C (\text{dost } \alpha - f \text{ wst } \alpha), \dots 759)$$

jeżeli f jest współczynnikiem tarcia.

rys:325.



rys:326.

Dla $\alpha = 90 - \varrho$ jest

$$P = C \left(\text{wst } \varrho - \text{dost } \varrho \frac{\text{wst } \varrho}{\text{dost } \varrho} \right) = 0.$$

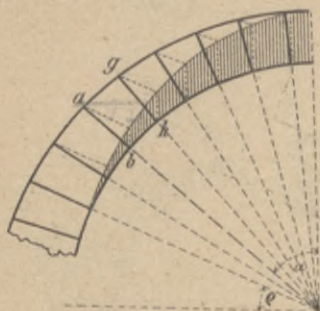
Kąt ϱ jest według §. 134. w przecięciu dla ciosów bez zaprawy 30° , z zaprawą starą 35° , świeżą zaś bardzo mały, co najwyżej przyjąć więc możemy $\varrho = 22^\circ$, $f = 0,4$. Dla cegły jest średnio $\varrho = 46^\circ$, dla pewności przyjąć możemy $\varrho = 35^\circ$.

Konstrukcyja linii najw. P wynika z poprzedniego. Jeżeli chodzi o ciśnienie klinca $abgh$ bardzo wąskiego, to ciężar jego będzie proporcjonalny do grubości sklepienia ab , mianowicie

$C = ab \cdot b_1 \cdot 1 \cdot \gamma$, jeżeli b_1 jest szerokością klinca. Przyjmmy $b_1 = 1$, to $C = \gamma \cdot ab$.

Jeżeli w rys. 327 zrobimy $AB = db$, jeżeli z a poprowadzimy poziomą i ad pod kątem ϱ do poziomej, a z b pionową bd , to $adb = ABD$, bo wszystkie kąty równe, a $ab = AB$. Więc $bd = BD = P$. Zrobmy to samo dla innych szwów i połączmy odnośne punkty, a otrzymamy linię największych P . Powierzchnię kreskowaną przyjąć możemy, obliczając wytrzymałość krążyn, jako powierzchnię obciążenia, pomnożywszy ją przez γ . Będzie to wprawdzie obciążenie trochę za wielkie, bo ciśnienia największe

rys:327.



nie wystąpią nigdy równocześnie, ale przypuszczenie to jest na korzyść pewności.

XI. Sklepienia krzyżowe i baniaste.

§. 149. Sklepienie krzyżowe nad kwadratem.

Sklepienie, powstające z przecięcia się dwóch sklepień kolebkowych o równej strzałce, których podniebienia w linii przecięcia się tworzą kąt wypukły, nazywany sklepieniem krzyżowym (n. *Kreuzgewölbe*, fr. *voûte des arêtes, croisée*, an. *cross-vault*) (tabl. V.). Linie, powstające na podniebieniu z przecięcia się dwu sklepień AE i CF , nazywamy żyłami (n. *Grathbogen*, fr. *nervure*, an. *nerve*), pas zaś, wystający z żyły dla wzmocnienia lub ozdoby, żebrem (n. *Grath, Rippe*, fr. *arêtier de voûte, ogive*, an. *groin rib*).

Przypuśćmy najprostszy przypadek, że sklepienie krzyżowe powstaje z dwu sklepień kolebkowych o jednakim przekroju, przecinających się pod kątem prostym. Podzielmy oba te sklepienia płaszczyznami pionowymi, prostopadłymi do osi, na równą ilość pasków, które możemy uważać jako sklepienia kolebkowe i wykreślmy w każdym w znany sposób linią ciśnienia (przekrój

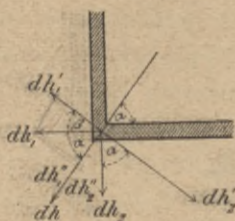
AC). Jeżeli następne paski ku środkowi sklepienia położone np. *ef* mają tę samą grubość, to przekrój ich tworzy część przekroju skrajnego paska *AC*, linii ciśnienia nie potrzebujemy więc osobno szukać, lecz jest ona częścią linii ciśnienia paska *AC*. Wszystkie te paski wywierają pewne ciśnienia ukośne np. w *ef* R_e na żebra, które da się rozłożyć na parcie poziome H_e i ciśnienie pionowe V_e . Łatwo zrozumiemy, że jeżeli sklepienie ma stałą grubość i jest jednostajnie obciążone, parcie poziome H_e będzie dla wszystkich jednakowo grubych pasków to samo $=H_1$, a więc także i w pasku *eg*. Dwie te siły H_1 dają wypadkową poziomą w płaszczyźnie żebra $H = H_1 \sqrt{2} = ei$. Siły pionowe V_e zaś dodają się, a więc $V = 2 V_e$.

Teraz przystępujemy do sprawdzenia równowagi żebra, które dzielimy na części, odpowiadające podziałowi pasków sklepienia. Na każdy kliniec żebra działają oprócz ciężaru własnego żebra siły V i H , któreto wszystkie siły dają w każdym punkcie ukośną wypadkową R_1, R_2 itd., a które wyznaczamy z wieloboku sił. W naszym przykładzie żebro wystaje na dół o 15 cm, tu więc siły H działają w połowie grubości sklepienia, a nie żebra, więc w punktach odległych od grzbietu o 15 cm. Szukamy teraz parcia poziomego, przypuszczając, że linia ciśnienia przechodzi przez środek szwów w węzłowniu i w kluczu, a gdy obciążenie jest symetryczne, linia ciśnienia w kluczu jest poziomą.

Aby wykreślić linią ciśnienia, przyjmujemy podobnie, jak przy sklepieniu kolebkowem, mO , tymczasowo jako parcie poziome, prowadzimy promień i kreślimy wielobok sznurowy *suw*, wychodząc ze środka szwu w kluczu. Wielobok ten sznurowy w ogólności nie zejdzie się z przyjętym punktem *t* w węzłowniu, bo parcie poziome przyjęliśmy dowolnie, musimy je więc odpowiednio zmienić. Przez punkt *p* przecięcia się boków skrajnych wieloboku przechodzi wypadkowa wszystkich sił, działających na połowę sklepienia, jeżeli więc linia ciśnienia ma przechodzić przez *t*, to ostatni bok musi mieć kierunek *pt*. Bok ten wykreślimy aż do przecięcia się z R_7 w *n*. Wypadkowa sił $V_0, R_1, R_2, R_3, R_4, \dots, R_6$ przechodzi przez punkt *y*, który łączymy z *n* i otrzymujemy w ten sposób *nz*. Postępując tak dalej, wykreślimy całą linią ciśnienia *tnzs*. Parcie poziome wyznaczymy łatwo, zrobiwszy *lO* równoległą do *pt*. *O* jest więc biegunem, z którego poprowadziwszy promienie, możemy kreślić przez s

Parcia poziome dh_1 i dh_2 składają się w wypadkową dh (rys. 329). Siły dh_1 i dh_2 dadzą się rozłożyć na składowe w kierunku przekątnej dh''_1 i dh''_2 i siły prostopadłe do przekątnej dh'_1 i dh'_2 .

rys:329.



Z rysunku mamy $dh'_1 = dh_1 \text{ wst } \alpha$
 $dh''_1 = dh_1 \text{ dost } \alpha$, $dh'_2 = dh_2 \text{ dost } \alpha$,
 $dh''_2 = dh_2 \text{ wst } \alpha$, więc
 $dh = dh''_1 + dh''_2 = dh_1 \text{ dost } \alpha + dh_2 \text{ wst } \alpha$.
 Jeżeli więc wypadkowa ma mieć kierunek żebra, to składowe prostopadłe doń muszą się znosić, więc

$$dh'_1 = dh_1 \text{ wst } \alpha = dh'_2 = dh_2 \text{ dost } \alpha,$$

a stąd

$$\text{st } \alpha = \frac{dh_2}{dh_1} = \frac{qw^2 dx}{2f_2} \frac{2f_1}{qx^2 dw} = \frac{w^2 dx f_1}{x^2 dw \cdot f_2},$$

a że $w = x \text{ st } \alpha$, $dw = \text{st } \alpha \cdot dx$, więc

$$\text{st } \alpha = \frac{x^2 \text{st}^2 \alpha \cdot dx \cdot f_1}{x^2 \text{st}^2 \alpha \cdot dx \cdot f_2} = \text{st } \alpha \cdot \frac{f_1}{f_2}, \text{ stąd } f_1 = f_2.$$

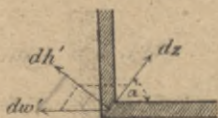
A zatem jeżeli wypadkowa parę poziomych ma być w płaszczyźnie przekątnej, to dla obu przyległych pasków muszą być strzałki takie same.

Jeżeli linie szczytów, NS i MS (rys. 328) są poziome, to musi być $f_1 = f_2$. Ale nawet gdyby były one liniami krzywymi, to wskazanem jest, aby przynajmniej przyległe paski miały tę samą strzałkę.

Jeżeli siły dh'_1 i dh'_2 się nie znoszą, lecz $dh'_1 - dh'_2 = dh'$, to siła ta rozkłada się (rys. 330) na dw_1 i dz .

Siła $dw_1 = \frac{dh'}{\text{wst } \alpha}$ działa na łęg czołowy, siła zaś $dz = dh' \text{ dot } \alpha$ na żebro.

rys:330.

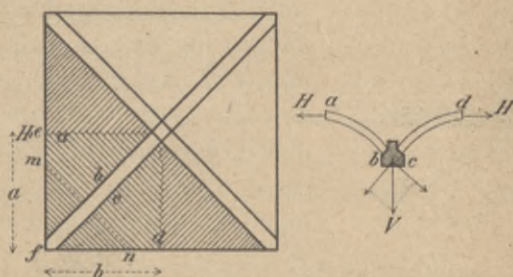


§. 151. Sklepienie krzyżowe w jedlinkę.

Dotychczas przypuszczaliśmy, że paski, na które podzieliliśmy sklepienie, działają jako sklepienia kołbkowe i nie przenoszą na sąsiednie paski żadnych nateżeń ścinających.

Jeżeli jednak sklepiemy warstwami ukośnemi czyli w jedlinkę (rys. 331), to wtedy inny jest rozkład sił, na co pierw-

rys:331.



szy zwrócił uwagę Wittmann. Sklepienie dzielimy znów na paski w kierunku szwów. Jeden taki pasek ab opiera się w a na drugim pasku, w b na żebrze. Szukamy najprzód dla tego paska linii ciśnienia w znany sposób. Parcie poziome w a dwóch pasków symetrycznych daje wypadkową siłę poziomą H_1 , działającą w osi sklepienia na mur przyczółkowy w punkcie e . Także wszędzie na długości ef inne paski n. p. mn , wywierają ukośne ciśnienie na mur przyczółkowy. Ciśnienia na żebro zaś składają się jako symetryczne na ciśnienie pionowe V , które działa jako obciążenie żebra. Żebra, jako sklepienia kolebkowe, badamy w znany sposób, a wykreślenie linii ciśnienia nie przedstawia tu najmniejszej trudności.

Widzimy z poprzedniego, że przy sklepieniu w jedlinkę mury przyczółkowe wystawione są na ciśnienie poziome prostopadle do muru a żebra na ciśnienie pionowe.

Jeżeli sklepienie zbudowane jest nad prostokątem, to da się podobnie, jak w poprzednim paragrafie, dowieść, że ciśnienie na żebro tylko wtedy jest pionowe, jeśli

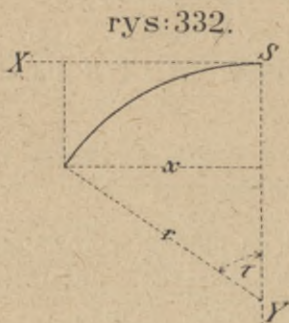
$$\frac{f_2}{f_1} = \text{st}^4 \alpha = \frac{a^4}{b^4} \dots \dots \dots 763)$$

§. 152. Sklepienie baniaste.

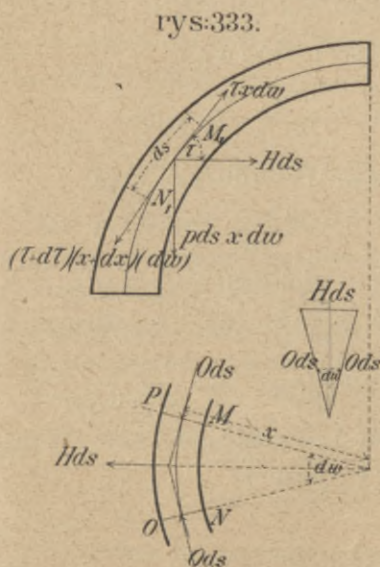
Sklepienie, którego podniebienie jest powierzchnią obrotową, utworzoną ruchem krzywej wypukłej około osi pionowej, nazywamy sklepieniem baniastem, banią lub kopułą (n. *Kuppelgewölbe*, *Kesselgewölbe*, fr. *voûte en dôme*, *voûte en demi*

globe, an. spherical-vault, domical-vault). Wyznaczenie sił wewnętrznych w bani jest trudne, dla uproszczenia więc przyjmijmy, że obciążenie jest stałe i tak rozdzielone na poszczególne pierścienie, że albo cały pierścień jest obciążony, albo też wcale nieobciążony. Dalej przypuszczamy na razie, że powierzchnia ciśnienia wpada, na średnią powierzchnię bani, to jest powierzchnię, przechodzącą przez oś każdego przekroju południkowego.

Ciężar własny bani, a względnie obciążenie, sprawiają odkształcenie, pierścienie pojedyncze zwięzają się skutkiem ciśnień, powstałych w pierścieniach w kierunku obwodu koła, które nazywamy z tego powodu ciśnieniami obwodowymi (n. Ringspannung) (rys. 332). Tu więc mamy oprócz ciśnień w kierunku południka, jak przy sklepieniu kolebkowym, także ciśnienia obwodowe.



Początek współrzędnych przyjmijmy w kluczu bani S (rys. 332) a oś pionową bani za oś Y, prostopadłą do niej SX za oś X.



Zbadajmy teraz wycinek kuli MNOP (rys. 333). Jeżeli nateżenie styczne w kierunku południka nazwiemy t , to gdy długość łuku wynosi $x dw$, siła na $PMNO$ wynosi $t x dw$.

Na PM i ON działają ciśnienia obwodowe na jednostkę o , więc na ds ods . Oprócz tego działa obciążenie $pds x dw$. Z rysunku widzimy, że

$$Hds = 2 ods \operatorname{wst} \frac{dw}{2},$$

a że w bardzo małe, więc

$$\operatorname{wst} \frac{dw}{2} = \frac{dw}{2},$$

zatem $Hds = odsdw \dots \dots \dots 764)$

Dla równowagi mamy

$$txdw \text{ dost } \tau - (t+dt)(x+dx) dw \text{ dost } (\tau+d\tau) + odsdw = 0.$$

Opuściwszy bardzo małe drugiego i trzeciego stopnia, otrzymamy

$$tx \text{ wst } \tau d\tau - dtx \text{ dost } \tau - tdx \text{ dost } \tau - ods = 0, \\ d(tx \text{ dost } \tau) = ods \dots \dots \dots 765)$$

Dalej dla równowagi w kierunku pionowym

$$pdsxdw - txdw \text{ wst } \tau + (t+dt)(x+dx) \text{ wst } (\tau+d\tau) = 0,$$

a stąd zważywszy, że $\text{wst } (\tau+d\tau) = \text{wst } \tau + \text{dost } \tau d\tau$, opuściwszy nieskończenie małe wyższych rzędów, otrzymamy

$$pxds - tdx \text{ wst } \tau - xdt \text{ wst } \tau - tx \text{ dost } \tau d\tau = 0 \\ - pxds = +d(tx \text{ wst } \tau) \dots \dots \dots 766)$$

Rów. 765) i 767) wskazują związek sił t i R dla dowolnych obciążeń i powierzchni.

§. 153. Bania kulista.

Jeżeli bania jest kulistą, to x i ds należy wprowadzić dla koła. Wedle rys. 332 jest $x = r \text{ wst } \tau$, $ds = r d\tau$. Jeżeli jeszcze przyjmiemy p dla całej kuli stałe, to z 766) wynika

$$- pr \text{ wst } \tau \cdot r d\tau = d(tr \text{ wst}^2 \tau), \text{ a stąd}$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d(tr \text{ wst}^2 \tau) = - pr^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \text{wst } \tau d\tau.$$

Jeżeli zaczynamy od punktu S , to $\tau_0 = 0$, więc

$$tr \text{ wst}^2 \tau = pr^2 \text{dost } \tau \int_0^{\tau} = - pr^2 (1 - \text{dost } \tau), \text{ stąd}$$

$$t = \frac{pr(1 - \text{dost } \tau)}{\text{wst}^2 \tau} = - \frac{pr}{1 + \text{dost } \tau} \dots \dots \dots 767)$$

Jeżeli wstawimy tę wartość w rów. 765), to otrzymamy

$$ord\tau = d\left(-\frac{pr}{1 + \text{dost } \tau} r \text{ wst } \tau \text{ dost } \tau\right) = - pr^2 d \frac{\text{wst } \tau \text{ dost } \tau}{1 + \text{dost } \tau},$$

$$\text{zatem } o = - pr \frac{\text{dost } 2 \tau + \text{dost}^3 \tau}{(1 + \text{dost } \tau)^2} \dots \dots \dots 768)$$

W kluczu $\tau = 0$, więc

$$t_0 = -\frac{pr}{2}, \quad o = -\frac{pr}{2} \dots \dots \dots 769)$$

Zatem w kluczu jest ciśnienie jednostajne na wszystkie strony równe $\frac{pr}{2}$ na jednostkę powierzchni.

Dla półkuli jest na równiku $\tau = \frac{\pi}{2}$, więc

$$\frac{t\pi}{2} = -pr, \quad \frac{o\pi}{2} = +pr \quad \dots \dots \dots 770)$$

Zatem na równiku jest ciśnienie południkowe dwa razy większe niż w kluczu, zaś natężenie obwodowe jest dodatnie, ciągnienie, co do wielkości równe natężeniu południkowemu.

Dla pewnego kąta τ_1 staje się $o=0$. Z rów. 768) otrzymamy

$$0 = -pr \frac{\text{dost } 2 \tau_1 + \text{dost }^3 \tau_1}{1 + \text{dost } \tau_1^3}, \quad \text{a stąd } \text{dost } \tau_1 = 0,618$$

$$\tau_1 = 51^\circ 50' \dots \dots \dots 771)$$

A zatem dla kątów τ mniejszych niż τ_1 , powstają ciśnienia obwodowe, dla większych niż τ_1 ciągnienia.

Powyższe wyniki dadzą się więc zastosować tylko wtedy, gdy ciągnienia tak wielkie są możliwe. Jeżeli mamy do czynienia z banią murowaną z kamienia lub cegły, nie możemy dopuścić wcale ciągnienia, zatem albo ciągnienie musimy znieść pierścieniem żelaznym albo też pogrubić przekrój bani tak, aby linia ciśnienia na dolnej części nie wpadając wprawdzie w oś, jednak nie wychodziła z jądra przekroju.

§. 154. Wykreślne wyznaczenie natężeń w bani.

Na powyższej podstawie wyznaczmy teraz wykreślnie linie ciśnienia i natężenie obwodowe w bani.

Jeżeli wytniemy z bani wycinek płaszczyznami pionowymi, przechodzącymi przez oś bani, a odchyłonymi o bardzo mały kąt α , to siły obwodowe O (rys. 334), działające z obu stron, dają wypadkową H . Wielkość jej otrzymamy z wieloboku sił, z którego widzimy, że

$$H = 2 O \text{ wst } \frac{\alpha}{2} \dots \dots \dots 772)$$

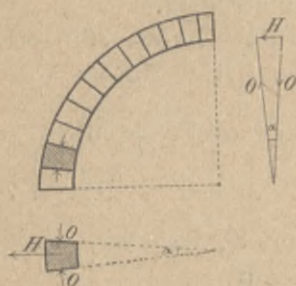
Z równania tego wyznaczmy α , dla którego $H = 0$, a mianowicie

$$2 \text{ wst } \frac{\alpha}{2} = 1,$$

a stąd $\alpha = 60^\circ$.

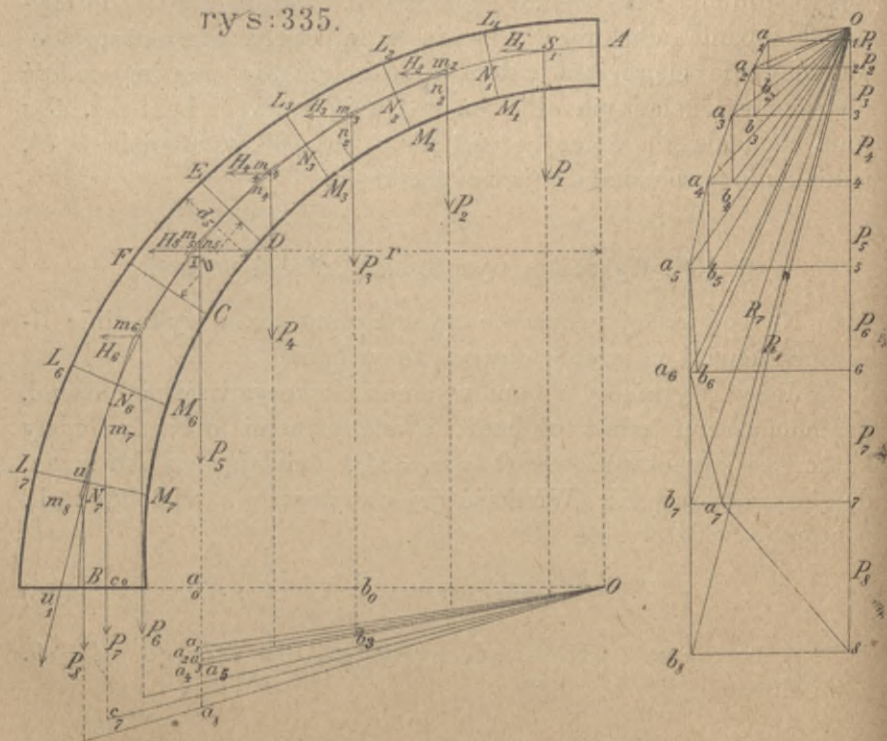
Jeżeli więc obliczać będziemy ciężary wycinka dla $\frac{1}{8}$ okręgu koła, to H , które z konstrukcyi otrzymamy, będzie równe O , ciśnieniu obwodowemu.

rys:334.



Na rysunku 335. wykreśli-
liśmy w przybliżeniu linię ciśnie-
nia w następujący sposób. Szwami,
stojącymi prostopadle na linii
środkowej, a których oddalenia
 b , mierzone na tej linii, są ró-
wne, podzieliliśmy najprzód po-
łowę przekroju bani na 8 części.
Objętość pierścienia, utworzo-
nego ruchem obrotowym po-
wierzchni $CDEF$ około osi AO ,

rys:335.



jest według twierdzenia Guldin'a równą powierzchni $CDEF$, pomnożonej przez drogę środka ciężkości I , a więc, gdy grubość pierścienia $=d$, a odległość punktu I od osi $=r$, to objętość równa się $bd2r\pi$. Ciężar $\frac{1}{3}$ pierścienia będzie więc

$$P_5 = \frac{1}{3} \gamma bd2r\pi = \frac{\gamma bdr\pi}{3}, \dots \dots \dots 773)$$

jeżeli γ jest ciężarem jednostki sześcienniej.

Podobnie możemy obliczyć wszystkie inne ciężary, albo możemy też resztę ciężarów wyznaczyć wykreślnie w następujący sposób. Z równania 773) widzimy, że ciężary P są proporcjonalne dla stałego b do d i r . Przyjmijmy taką podziałkę sił, ażeby $d_5 = a_0 a_5 = P_5$ i odetnijmy od a_0 wszystkie długości d na prostej $a_0 a_5$. Tak otrzymane punkty połączymy z O , to punkty przecięcia się z pionowemi, poprowadzonymi ze środków ciężkości odnośnych powierzchni wyznaczają nam ciężary P . Np. dla wyznaczenia P_3 odcinamy $a_0 a_3$, równe grubości trzeciego pierścienia, spuszczone ze środka ciężkości pionową, łączymy a_3 z O , a długość $b_0 b_3$ przedstawia ciężar P_3 . Z konstrukcyi bowiem wypada, że $a_0 a_3 : b_0 b_3 = Oa_0 : Ob_0$, więc

$$b_0 b_3 = a_0 a_3 \frac{Ob_0}{Oa_0} = \frac{d_3 r_3}{r_5}, \text{ a że } d_3 r_3 : d_5 r_5 = P_3 : P_5, \text{ więc}$$

$$d_3 = \frac{d_5 r_5 P_3}{r_3 P_5}, \text{ a zatem } b_0 b_3 = \frac{d_5 r_5 P_3}{r_3 P_5} \cdot \frac{r_3}{r_5} = \frac{d_5 P_3}{P_5}$$

Jeżeli więc zrobiliśmy $d_5 = P_5$, to $b_0 b_3 = P_3$.

Wyznaczywszy w ten sposób wszystkie ciężary P , wykreśliśmy wielobok sił i kreślimy linią ciśnienia, przypuszczając, że wpada, o ile to możliwem, na linią środkową. Wypadkowa z ciężaru i ciśnień obwodowych w pierwszym pierścieniu ma więc przechodzić przez środek szwu $L_1 M_1$, a więc mieć kierunek $S_1 N_1$. Jeżeli w wieloboku sił zrobimy Oa_1 równoległe do $S_1 N_1$, to $a_1 l = H_1$. Prosta $S_1 N_1$ przecina P_2 w punkcie m_2 , do siły R_1 przychodzi tu siła P_2 , wypadkowa tych sił jest Ob_2 . Z punktu m_2 kreślimy więc $m_2 n_2 // Ob_2$ aż do przecięcia się z siłą H_2 , która musi być tak wielką, aby wypadkowa wszystkich sił przechodziła przez N_2 , a więc miała kierunek $n_2 N_2$. Wykreśliwszy $Oa_2 // n_2 N_2$, otrzymamy wielkość tej wypadkowej, przyczem $H_2 = b_2 a_2$. Podobnie postępujemy dalej, $n_2 N_2$ przedłużamy do siły P_3 do punktu m_3 , kreślimy $m_3 n_3 // Ob_3$ i rysujemy $n_3 N_3$ aż do m_4 . W wieloboku sił robimy $Oa_3 // n_3 N_3$ a $H_3 = b_3 a_3$.

W ten sam sposób postępujemy dopóty, aż z konstrukcyi wypadłaby siła H ujemna, jak na przykład tu $H_7 = -b_7 a_7$. Ponieważ jednak, jeżeli na wytrzymałość zaprawy zważać nie będziemy, mur nie może pracować na ciągnięcie, więc przypuszczamy, że w tym pierścieniu $H_7 = 0$, a zatem, że niema tu żadnych ciśnień obwodowych. Wskutek tego jednak wypadkowa $R_7 = Ob_7$, a nie Oa_7 , zaś linia ciśnienia oddala się od linii środkowej, gdyż zrobiwszy $m_7 u // Ob_7$, nie przetniemy szwu $L_7 M_7$ we środku, lecz w punkcie u obok środka N_7 . Prosta $m_7 u$ przedłużamy aż do m_8 , punktu przecięcia się z P_8 . I tu także ciśnienie obwodowe przypuszczamy równe zeru, a stąd otrzymujemy $R_8 = Ob_8$, a ostatni bok wieloboku sznurowego $m_8 u_1 // Ob_8$. Jeżeli u_1 leży w średniej trzeciej części sklepienia, jeżeli wypadkowa na jakikolwiek szew nie jest więcej odchyłona od prostopadłej na szew, niż kąt tarcia wynosi, a ciśnienie nie przekracza dozwolonej granicy, wtedy równowaga jest zapewniona i w całej bani panuje tylko ciśnienie. Jeżeliby zaś linia ciśnienia wychodziła ze średniej trzeciej części przekroju, to albo musielibyśmy pogrubić banię w tem miejscu lub też obręczami żelaznymi znieść ciągnięcie obwodowe, któreby w dolnej części bani powstało, gdyby linia ciśnienia i tam nie zbaczała od osi. Jeżeli ciężary obliczaliśmy wedle 773), to otrzymane H dają nam wprost O , ciśnienia obwodowe.

W rysunku 335. przyjęliśmy grubość bani wzrastającą ku dołowi, gdybyśmy przyjęli ją równą, linia ciśnienia wypadłaby o wiele niekorzystniej, a punkt, w którym ciśnienia obwodowe stają się równe zeru, wypadłby wyżej. Dlatego należy przyjmować grubość sklepienia w kluczu małą i zwiększać ją ku dołowi.

§. 155. Sklepienie klasztorne.

Sklepienie, powstające z przecięcia się dwóch sklepień kołbkowych o równej strzałce, których podniebienia w zyle tworzą kąt wklęsły, nazywamy sklepieniem klasztorne (n. *Klostergewölbe*, fr. *voûte cloisonée*, *voûte en arc de cloiture*, an. *crossed vault*).

Obliczenie dokładne sklepienia takiego jest bardzo trudne i dotychczas zadanie to pozostało nierozwiązane. Podamy tu według Foepppla tylko niektóre wskazówki, jakby można

w przybliżony sposób wykreślić linię ciśnienia w sklepieniu klasztorne. Przypuściwszy sklepienie założone na wieloboku regularnym, symetryczne i symetrycznie obciążone, dojdziemy do wniosku, że z powodu symetrii w płaszczyznach żył powstają tylko natężenia normalne, więc ponieważ płaszczyzny te są pionowe, natężenia będą poziome. Ciśnienia te, które działają poziomo na części sklepienia klasztornego w żyłach, nazywamy ciśnieniami żyłowymi (n. *Gratspannung*). Ciśnienia te, działające na jedną część sklepienia klasztornego, ograniczoną dwiema żyłami, składają się, a wypadkowa działa w płaszczyźnie ją połowiącej.

Widzimy więc, że teoria sklepień klasztornych podobną jest do teorii sklepień baniastych i rzeczywiście bania jest właściwie sklepieniem klasztorne, założone na wieloboku o nieskończonej ilości boków czyli na kole. Ciśnienia żyłowe odpowiadają ciśnieniom obwodowym w bani, ta tylko zachodzi tu różnica, że, gdy tam ciśnienia obwodowe były w tym samym pierścieniu stałe, tu nie wiemy dokładnie, jak się ciśnienia żyłowe rozdzielają w kierunku poziomym.

W płaszczyźnie, połowiącej części sklepienia zawarte między dwiema żyłami, kreślimy więc zupełnie w ten sam sposób, jak dla bani, linię ciśnienia, przyjmując z początku, że linia ciśnienia wpada w oś, potem, aby uniknąć ciągnięcia, odступujemy od tego przypuszczenia i przyjmujemy natężenia żyłowe, równe zeru.

Linia ta ciśnienia nie powinna wychodzić z jądra i za-
dość czynić i dwom drugim warunkom równowagi.

XII. Przyczółki, filary i kominy.

§. 156. Linia ciśnienia.

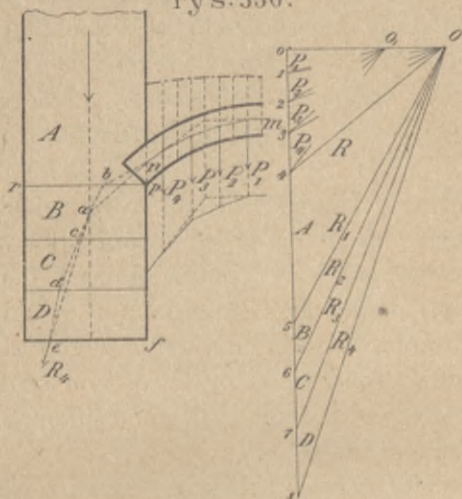
Budowlę, na której opiera się sklepienie lub jakakolwiek inna belka, nazywamy w budowie mostów przyczółkiem (n. *Widerlager*, fr. *culée*, *abutement*, an. *land pier*). Jeżeli na budowlu takiej opierają się z dwóch stron sklepienia lub inne belki, nazywamy ją filarem (n. *Pfeiler*, fr. *pilier*, *pile*, an. *pier*). W budownictwie często opiera się sklepienie o ścianę murowaną, która tu zastępuje miejsce przyczółka. Warunki równowagi

przyczółka, filaru kamiennego lub ściany są te same, co sklepienia, dla zbadania więc równowagi najlepiej wykreślić linią ciśnienia.

Na rysunku 336. wykreśliśmy linię ciśnienia w ścianie w następujący sposób. Najprzód wyznaczaliśmy w zwykły sposób

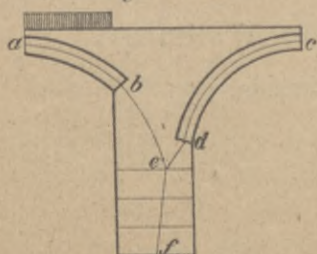
przybliżony linią ciśnienia mn w sklepieniu i otrzymaliśmy parcie ukośne R , działające w punkcie n na ścianę. Następnie podzieliliśmy ścianę na warstwy poziome i obliczyliśmy ciężary warstw A , B , C i D . Parcie R przecina się z kierunkiem ciężaru A w punkcie a i daje wypadkową R_1 , która przecina szew pr w punkcie b . Z siłą R_1 składamy teraz ciężar

rys: 336.



B , otrzymujemy R_2 , którą to siła działa na następny szew w c . Podobnie otrzymujemy siły R_3 i R_4 , działające w punktach d i e . Punkty te połączone dają linią ciśnienia $bcde$, która, jak widzimy, w tym wypadku wychodzi z trzeciej części przekroju, w krawędzi f powstanie więc ciągnięcie. Chcąc temu zapobiec, musielibyśmy powiększyć grubość ściany u podstawy.

rys: 337.



Podobnie postępujemy w celu wykreślenia linii ciśnienia w filarze (rys. 337). Jeżeli oba sklepienia opierające się na filarze mostowym są równe i równo obciążone, to parcie ukośne, składając się, dają wypadkową pionową, filar wtedy obciążony jest tylko pionowo. Jeżeli zaś sklepienia są nierówne, leżą nie

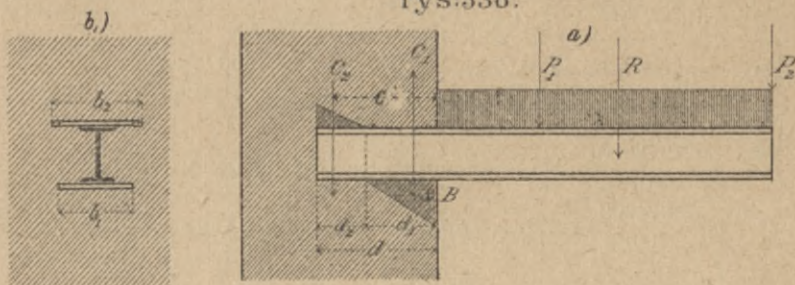
w tej samej wysokości, lub są nareście nierówno obciążone, jak tu, to musimy wykreślić dla obu sklepień osobno linie ci-

śnienia *ab* i *cd*, mur podzielić na warstwy poziome i składać ciśnienia ukośne z ciężarami warstw muru, jak poprzednio. W ten sposób otrzymaliśmy linią ciśnienia *bef*, która, jak widzimy, nie wychodzi tutaj z jądra przekroju.

§. 157. Wmurowanie belki wspornikowej.

Jeżeli belka jest jednym końcem utwierdzoną w ścianie, to moment M_0 w punkcie *B* (rys. 338*a*) obliczamy wedle §. 13

rys:338.



Utwierdzenie belki w murze musi więc być także, aby ciężar muru nad belką wywierał ze względu na *B* większy moment, a więc aby

$$C_2 c > M_0 \quad 774)$$

i aby natężenie największe powstające w murze, nie przekroczyło dozwolonej granicy.

Jak się natężenia te rozkładają, nie możemy dokładnie wiedzieć, ponieważ jednak

$$C_1 = C_2 + R, \quad 775)$$

jeżeli R oznacza całe obciążenie belki, więc też i $d_1 > d_2$. La uen stein przyjmuje

$$d_1 = d \left(\frac{1}{2} + \frac{dR}{14M_0} \right) \quad 776)$$

Dla zmniejszenia natężeń dobrze jest użyć płyt z żelaza lanego (rys. 338*b*), które przenoszą siły na większą powierzchnię. Jeżeli dopuścimy ciśnienie τ na mur, to według rów. 687).

$$b_2 = \frac{2C_2}{(d-d_1)\tau}, \quad b_1 = \frac{2C_1}{d_1\tau} \quad 777)$$

$\tau = \frac{2P}{3.8}$

Siłę C_2 wyznaczymy, tworząc moment ze względu na punkt S , mianowicie $C_2 \frac{2d}{3} = M_0$, stąd

$$C_2 = \frac{3 M_0}{2 d} \dots \dots \dots 778)$$

Przykład. Przypuśćmy, że obliczyliśmy w danym wypadku moment w B i że $M_0 = 1,2 tm$ a $R = 1,5 t$ to jeżeli grubość muru wynosi $60 cm$, a belka sięga przez całą grubość, to wedle 776)

$$d_1 = 60 \left(\frac{1}{2} + \frac{60 \cdot 1500}{14 \cdot 120000} \right) = 33 cm, \quad d_2 = 60 - 33 = 27 cm.$$

Wedle 778) $C_2 = \frac{3 \cdot 120000}{2 \cdot 60} = 3000 kg,$

a $C_1 = C_2 + R = 3000 + 1500 = 4500 kg.$

Jeżeli przyjmiemy dla muru ceglanego na cemencie $\tau = 10 kg/cm^2$, to wedle 777)

$$b_2 = \frac{2 \cdot 3000}{10 \cdot 27} = 22,2 cm, \text{ zamiast czego przyjmiemy } b_2 = 23 cm,$$

$$b_1 = \frac{2 \cdot 4500}{10 \cdot 33} = 27,3 cm, \text{ zamiast czego przyjmiemy } b_1 = 28 cm.$$

§. 158. Linie wyznaczne przekroju prostokątnego.

Gdy na przyczółek lub filar działa siła ukośna, środek ciśnienia, jak wiemy, oddala się od środka przekroju, zastosować tu więc musimy prawidła wytrzymałości złożonej, o której mówiliśmy w rozdziale VI. Jeżeli przyczółki lub filary są kamienne, to ponieważ wytrzymałość zaprawy na ciągnięcie jest bardzo mała, więc dla pewności przypuszczamy, że jest równą zeru. Wtedy nateżenia rozdzielają się nie na cały przekrój, lecz tylko po jednej stronie osi obojętnej, nie możemy więc używać wprost wzorów rozdziału VI. Ta część przekroju, na którą teraz działa cała siła, nazywa się przekrojem skutecznym (n. *wirksamer Querschnitt*). I w tym wypadku pozostaje jednak ważnem, że objętość bryły nateżeń równa się sile P , działającej prostopadle na przekrój i że środek ciężkości bryły nateżeń odpowiada środkowi ciśnienia. W §. 134. już wspominaliśmy o tym wypadku, tu zastanowimy się nad nim trochę bliżej i to najprzód dla przekroju prostokątnego.

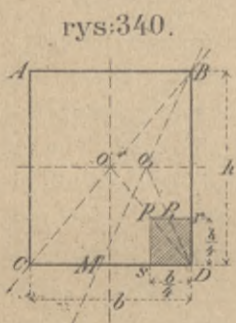
Dopóki siła P zaczepia w jądrze, oś obojętna nie przecina przekroju, więc obliczamy nateżenia według rozdziału VI. Dopiero gdy środek ciężkości wypada poza jądro, oś obojętna

Środek ciężkości trójkąta MND leży w S w prostej OD w odległości $\frac{OD}{3}$ od MN , nazwijmy v_0 natężenie w środku ciężkości, to według równania 472)

$$v_0 = \frac{P}{\frac{1}{2} 4 u \cdot 4 t} = \frac{P}{8 ut}, \text{ a więc natężenie w } D$$

$$v_1 = \frac{3 P}{8 ut} \dots \dots \dots 779)$$

Chcąc wyznaczyć linie wyznacznice dla tego przypadku, zastanówimy się nad wypadkiem granicznym, gdy obojętna ma położenie CB (rys. 340). Łatwo znajdziemy odnośny środek ciśnienia w punkcie P , robiąc $OP = PD$. Jeżeli obojętna obraca się około B i przyjdzie w położenie BM , to P_1 znajdziemy, połowiąc MB , a potem połowiąc O_1D . Z konstrukcji tej wynika, że gdy obojętna obraca się około B z położenia BC aż do BD , to środek ciśnienia porusza się po



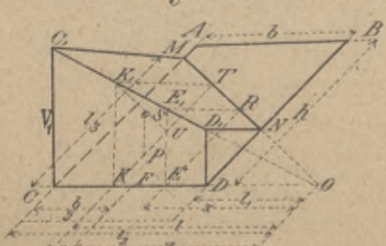
po linii $Pr \parallel CD$, przyczem $Dr = \frac{h}{4}$.

Jeżeli podobnie obojętna obraca się około C , to P porusza się w $Ps \parallel BD$. Takie same prostokąty otrzymamy we wszystkich rogach przekroju, w jednym z nich leżeć musi środek ciśnienia, jeśli obojętna ma odcinać trójkąt.

2. Oś obojętna odcina czworobok (rys. 341).

Tu bryła natężeń jest ostrosłupem ściętym, którego wierzchołkiem jest punkt O . Przetnijmy ją płaszczyzną pionową równoległą do AC w odległości x od O , a otrzymamy trójkąt EE_1R ,

rys:341.



kotórego powierzchnia

$$A = \frac{1}{2} EE_1 \cdot ER =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{v_1 x}{l_2} \cdot \frac{l_3 x}{l_2} = \frac{v_1 l_3 x^2}{2 l_2^2}.$$

Objętość ostrosłupa ściętego jest więc

$$P = \frac{v_1 l_3}{2 l_2^2} \int_{l_1}^{l_2} x^2 dx =$$

$$= \frac{v_1 l_3 (l_2^3 - l_1^3)}{6 l_2^2},$$

$EE_1 x = v_1 l_2$
 $ER x = v_1 l_2$

a stąd

$$v_1 = \frac{6Pl_2^2}{l_3(l_2^3 - l_1^3)} \dots \dots \dots 780)$$

Jeżeli przez środek ciężkości bryły nateżeń S poprowadzimy płaszczyznę pionową, równoległą do AC , to możemy napisać

$$l \frac{v_1 l_3}{2l_2^2} \int_{l_1}^{l_2} x^2 dx = \int_{l_1}^{l_2} \frac{v_1 l_3 x^3}{2l_2^2} dx, \text{ a stąd}$$

$$l = \frac{3}{4} \frac{l_2^4 - l_1^4}{l_2^3 - l_1^3} \dots \dots \dots 781)$$

Długość KP łatwo wyznaczymy, gdyż $KU = \frac{1}{2}KT$, a $UP = \frac{1}{3}KU$, więc

$$KP = \frac{KT}{3} = \frac{l_3 l}{3l_2} \dots \dots \dots 782)$$

Dla danej obojętnej MN mamy też dane l_1, l_2 i l_3 , możemy więc łatwo wyznaczyć środek ciśnienia P . W odwrotnym wypadku, t. j. gdy dany jest środek ciśnienia P , więc i długość $KF=c$, najlepiej będzie przyjąć dowolnie O , a stąd obliczyć według rów. 781) l , po niewielu próbach znajdziemy prawdziwy punkt O , dla którego l odpowiada danemu punktowi P . Długość l_3 obliczamy potem z równ. 782), a v_1 z rów. 780). Można też punkt O wprost wyznaczyć: Barkhausen otrzymuje wzór następujący

$$z = \frac{b}{12c} (b + \sqrt{b^2 - 12c}) \dots \dots \dots 783)$$

Gdy $c=0$, tj. gdy P leży w osi głównej (rys. 342), $z = \infty$, a więc obojętna jest równoległa do CD , a według 782) $GP = \frac{1}{3}GT$, wtedy największe nateżenie w $CD = v_1$. Bryła nateżeń jest wtedy graniastosłupem trójkątnym, więc $P = v_1 b = \frac{v_1 3u}{2} \cdot b$;

$$v_1 = \frac{2}{3} \frac{P}{ub} \dots \dots \dots 784)$$

Linie wyznacznice, które możemy wyznaczyć podobnie, jak poprzednio, są w tym wypadku krzywe uz i zt i proste ts, ss_1 i s_1u (rys. 343), pięcioboków takich krzywoliniwnych otrzymamy cztery przy wszystkich bokach przekroju. Krzywe uz i zt są styczne do do poziomych r_1u , względnie rt i linii jędrnych w_1z , względnie wz .

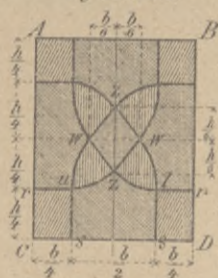
rys:342



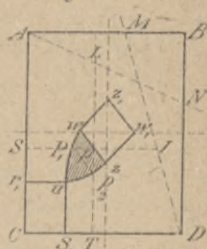
3. Oś obojętna odcina pięciobok. Środek ciśnienia znajduje się wtedy w trój-

kątach krzywolinijskich uwz , tw_1 i t. d. (rys. 344), które nam jeszcze z całego przekroju pozostały, Dokładne wyznaczenie nateżeń jest w tym wypadku trudne, w przybliżeniu jednak licząc,

rys:343.



rys:344.



postępujemy w ten sposób. Rozkładamy siłę P , działającą w punkcie P na dwie siły P_1 i P_2 , działające w liniach wyznaczonych, przyczem $P_1 P_2 \parallel wz$. Ponieważ P_1 leży na linii wyznacznej, więc oś obojętna musi być w położeniu granicznym między przypadkiem, gdy odcina czworobok lub pięciobok, a więc przechodzi przez wierzchołek D . Zastosowując wyniki otrzymane w poprzednim przypadku (równ. 782), zrobimy $P_1 I \parallel CD$ i $SI = 3 SP_1$, więc DM jest osią obojętną dla siły P_2 . Największe nateżenie będzie tu oczywiście w wierzchołku C , obliczamy je dla siły P_1 i P_2 osobno według równania 780) i dodajemy wyniki. Dokładniej wyznaczyć możemy nateżenia sposobem ogólnym, który później podamy.

§. 159. Koło pełne.

Zastanowimy się teraz jeszcze nad przypadkiem, gdy przekrój filarów jest kołem pełnym, idąc za wywodami Obrębowicza.

Jądrom koła jest, jak wiemy*), kołem spółśrodkowym o promieniu cztery razy mniejszym (rys. 345). Jeżeli punkt zaczepienia wychodzi po za jądro i znajduje się na osi OY , to obojętna AB będzie równoległą do osi OX . Weźmy pod uwagę pasek ER o grubości dy , to $y=r$ dost φ ,

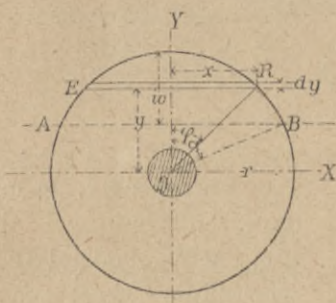
$$dy = -r \operatorname{wst} \varphi d\varphi, \quad x = r \operatorname{wst} \varphi.$$

*) p. str. 282.

Wysokość odcinka będzie $w = r(1 - \text{dost } \alpha) = 2r \text{ wst}^2 \frac{\alpha}{2}$. Za

dalekoby nas zaprowadziło zastanawianie się nad tym przypadkiem szczegółowe, jak dla przekroju prostokątnego, podamy tu tylko wyniki do których doszedł Obrębowicz w swej cennej, wyżej wzmiankowanej pracy. Otrzymuje on największe natężenie w punkcie C .

rys. 345.



$$\nu_1 = \frac{P}{r} \frac{wr^2}{S}, \dots \quad (785)$$

a oddalenie punktu zaczepienia siły P od środka koła

$$\eta_1 = \frac{\frac{\alpha}{4} - \frac{\text{wst } 2\alpha}{6} + \frac{\text{wst } 4\alpha}{48}}{\text{wst } \alpha - \frac{\text{wst}^3 \alpha}{3} - a \text{ dost } \alpha} r \quad (786)$$

Obrębowicz obliczył na podstawie tych równań następującą tabliczkę:

α^0	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\eta_1}{r}$	1,000	0,993	0,974	0,945	0,900	0,849	0,790	0,725	0,658	0,589
$\frac{wr^2}{S}$	∞	710,7	90,9	27,45	12,02	6,448	3,971	2,683	1,949	1,500
α^0	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	
$\frac{\eta_1}{r}$	0,523	0,460	0,404	0,356	0,316	0,286	0,265	0,254	0,250	
$\frac{wr^2}{S}$	1,210	1,017	0,884	0,792	0,728	0,685	0,657	0,642	0,637	

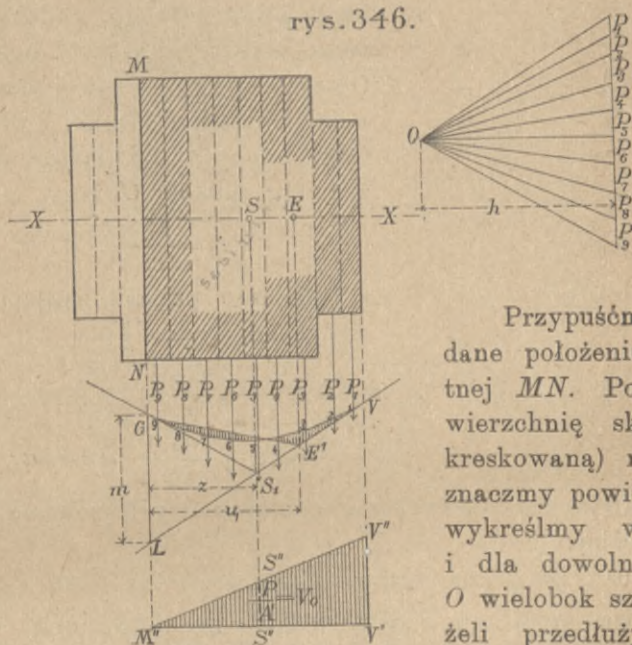
Jeżeli mamy dany punkt zaczepienia, to wyszukujemy z powyższej tabliczki $\frac{wr^2}{S}$ i obliczamy z równania 785) ν_1 . W razie potrzeby interpolujemy, najlepiej wykreślnie, kreśląc linie krzywe dla $\frac{\nu_1}{r}$ i $\frac{wr^2}{S}$.

§. 160. Przekrój nieregularny. Siła działa w osi głównej.

Jeżeli przekrój jest nieregularnym, to wyznaczenie liczebne natężeń byłoby nadzwyczaj trudnem. Wtedy uciekamy się do sposobu wykreślnego.

Przypuśćmy najprzód, że siła działa w osi głównej XX (rys. 347) w E , to oś obojętna MN będzie prostopadła do tej osi.

rys. 346.



Przypuśćmy, że mamy dane położenie osi obojętnej MN . Podzielmy powierzchnię skuteczną (tu kreskowaną) na paski, oznaczymy powierzchnie ich, wykreślmy wielobok sił i dla dowolnego bieguna O wielobok sznurowy. Jeżeli przedłużymy prawy bok skrajny do pionowej przez MN , to wedle równ.

5) moment statyczny powierzchni skutecznej ze względu na MN jest

$$M = m \cdot h = A' \cdot z, \quad \dots \dots \dots 787)$$

zaś moment bezwładności

$$I = 2h \text{ pow. } G_0 8 \dots 1 L = 2h \cdot A_1 \quad \dots \dots \dots 788)$$

Wedle 473) jest $u_1 = \frac{\alpha I}{P}$. Wstawiwszy za α wartość z równ.

$$472), \text{ to } u_1 = \frac{I}{P} \cdot \frac{P}{A'z} = \frac{I}{A'z} = \frac{I}{M} = \frac{2hA_1}{mh} = \frac{2A_1}{m}, \text{ a stąd}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} u_1 m \quad \dots \dots \dots 789)$$

Ale z rysunku widzimy, że $GE'L = \frac{1}{2} mu$, więc $GE'L = A_1 = \text{pow. } G_{067} \dots L$. A zatem powierzchnia między wielobokiem sznurowym a prostymi GE' i $E'V$ jest równa zero. Jeżeli więc nie znamy środka ciśnienia E , to znajdziemy go w ten

sposób, że kreślimy taką prostą GE' , aby powierzchnia rzeczona, tu kreskowana, była równa zeru.

Natężenie teraz łatwo wyznaczyć. Punkt S_1 przecięcia się boków skrajnych wyznacza nam położenie środka ciężkości powierzchni skutecznej. Natężenie w S jest wedle 472) $v_0 = \frac{P}{A'} = s's''$.

Połączmy $s''_2 M'$, a otrzymamy linię natężenia i największe natężenie $V'V''$.

Odwrotnie jeżeli dany jest środek ciśnienia, a szukamy osi obojętnej, to dzielimy cały przekrój na paski, kreślimy wielobok sznurowy. Przedłużamy teraz prawy bok skrajny, znajdujemy E na przecięciu się z pionową przez E i kreślimy z E' teraz taką prostą $E'G$, która wyrównywa powierzchnie. Pionowa przez G oznacza położenie osi obojętnej.

§. 161. Przekrój nieregularny, siła działa nie na osi głównej.

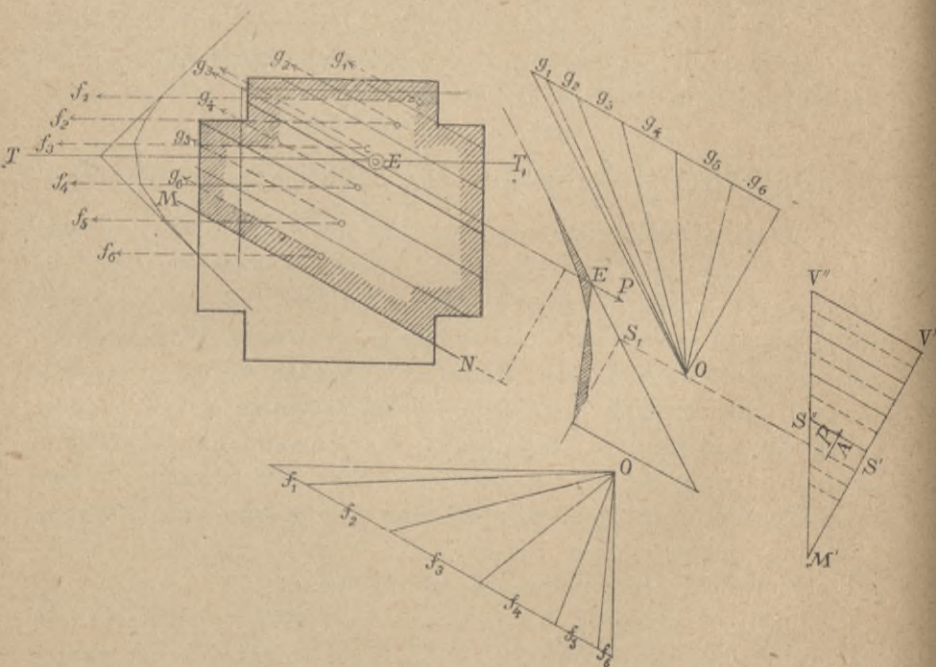
Jeżeli środek ciśnienia nie leży na osi głównej bezwładności, wyznaczenie osi obojętnej i natężeń staje się trudnem. Jeżeli cały przekrój pracuje, to jak wiemy z §. 64., kierunek osi obojętnej jest znany. Oś obojętka jest wtedy równoległą do osi elipsy środkowej bezwładności, sprzężonej do osi, poprowadzonej przez środek przekroju i środek ciśnienia. Gdy część przekroju nie pracuje, należałoby dla powierzchni skutecznej narysować nową elipsę środkową i do niej zastosować powyższe prawidło. Ponieważ jednak położenie osi obojętnej nie jest znaniem, nie możemy tego uczynić. Tu więc nieznanym jest nie tylko kierunek, ale i położenie osi obojętnej.

Jeżeli oś obojętka MN jest dana (rys. 347), to powierzchnię skuteczną dzielimy na paski, w środkach ciężkości ich zaczepiamy powierzchnie $g_1, g_2 \dots g_6$, kreślimy wielobok sił i sznurowy i w podobny sposób co poprzednio, wyznaczamy przez wyrównanie powierzchni momentów E' , na prostej EE' leży więc środek ciśnienia E . Aby wyznaczyć dokładnie położenie punktu E , zauważmy, że $M'V''$ przedstawia linię natężeń. Jeżeli więc każde g pomnożymy przez odnośne natężenia, lub gdy boki pierwszego wieloboku przedłużymy do MN , to odcinki przedstawiają nam siły f , a gdy je zapomocą wieloboku sznurowego złożymy, to otrzymamy, rozumie się, ten sam kierunek wypadko-

wej EE' . Jeżeli jednak zmienimy kierunek sił na poziomy, to wielobok sił odnośny wyznaczy nam kierunek wypadkowej TT_1 , a punkt przecięcia się tych dwu kierunków środek ciśnienia E .

Jeżeli przeciwnie dany jest środek ciśnienia, a szukamy osi obojętnej, to możemy to zrobić tylko przez próby. Przyjmujemy więc najprzód kierunek MN dowolnie, może równoległy do osi sprzężonych elipsy bezwładności środkowej całego prze-

rys. 347



kroju, dzielimy cały przekrój na paski i wyrównujemy powierzchnię momentów jak w poprzednim paragrafie. W ten sposób znajdziemy położenie osi obojętnej MN . Teraz musimy zbadać, czy kierunek był dobrze obranym, kreślimy więc wielobok sił i sznurowy f . Punkt przecięcia się boków skrajnych wyznacza nam położenie wypadkowej TT_1 . Jeżeli kierunek MN był dobrze dobrany, to TT_1 przechodzi przez E , jeśli zaś nie przechodzi przez środek ciśnienia E , trzeba ten kierunek odpowiednio zmienić. Po kilku próbach albo zapomocą konstrukcyi

podanej przez H ü p p n e r a *) dojdziemy do tego, że TT_1 przechodzi przez środek ciśnienia. Największe natężenie jest wtedy VV' .

§. 162. Kominy fabryczne.

Powyższe wywody znajdują zastosowanie przy obliczeniu wytrzymałości kominów fabrycznych.

Uwzględnić należy przy takim obliczeniu ciężar własny i parcie wiatru. Ciężar własny da się dla danego kominu łatwo wyznaczyć, potrzeba tylko w obliczeniu uwzględnić dokładnie ciężar gatunkowy danego muru. Parcie wiatru należy tu przyjąć większe, niż przy zwykłych budowlach, z powodu wysokości, a także ze względu na powiększenie natężeń z powodu wahnień sprężystych i możliwego skrzywienia osi kominu. W Niemczech przyjmują zwykle $w=125\text{ kg/m}^2$, co jest za mało, w Austrii 150 kg/m^2 . Jednak z powyższych powodów radzi G ö b e l **) przyjmować parcie wiatru $w=200\text{ kg/m}^2$ w kierunku poziomym.

Z powodu, że powierzchnia kominu jest krzywą, parcie jest mniejsze, niżby wypadło na rzut pionowy kominu, a mianowicie współczynnik δ , którym pomnożyć mamy rzut, wynosi, jak o tem mówiliśmy na str. 339, dla przekroju kołowego 0,848, dla ośmioboku 0,890, dla sześcioboku około 0,790. A więc przyjmując cały rzut pionowy jako powierzchnię, możemy odpowiednio zmniejszyć parcie, przyjmując więc dla koła 170 kg/m^2 , dla ośmioboku 178 kg/m^2 , dla sześcioboku 158 kg/m^2 .

Dla danego przekroju mn (rys. 349) należy wyznaczyć C i W i punkt zaczepienia parcia wiatru E . Gdy dwie te siły złożymy, otrzymamy wypadkową R , przecinającą przekrój w k . Tu uwzględniamy tylko składową pionową wypadkowej C , a długość $OK=w$ otrzymamy

$$w = \frac{W}{c} h \dots \dots \dots 790)$$

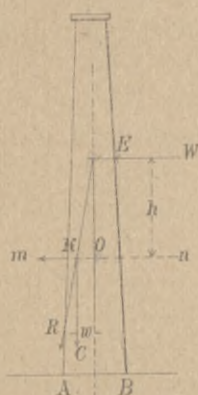
Znając środek ciśnienia k i siłę C możemy wyznaczyć teraz natężenie w przekroju mn . Badanie to przeprowadzić należy

*) P. Civilingenieur 1885 str. 39. Patrz także Schepp: „Zur Ermittlung der Druckvertheilung in Mauérwerksschnitten. Centr. d. Bayverv. 1889.

**) P. Göbel: Standfertigkeit der Schornsteine. Zeitschrift des Vereines deutsch. Ingenieure. 1898. str. 180.

przedewszystkiem dla podstawy AB , ale także jeszcze dla jednego lub dwu przekrojów wyższych, bo chociaż dla wyższych przekrojów siła W się zmniejsza, to zmniejsza się też i C a także i grubość ścian, mogą być więc czasem wy-

rys. 348



żej nateżenia większe.

Dla tak wielkiego parcia wiatru, jakie rzadko kiedy się może przytrafić, nie możemy żądać, aby linia ciśnienia nie wychodziła z jądra, z drugiej znów strony nie wystarcza też, aby nie wychodziła z przekroju. Należy więc dopuścić wyjście jej z jądra, ale ciśnienie nie powinno przekraczać dozwolonej granicy, na ciągnięcie zaś wcale nie liczymy, przypuszczając, że

szew się otworzy. Mamy więc wtedy wypadek, o którym mówiliśmy w dwu poprzednich paragrafach.

Zajść tu mogą trzy przypadki. Przekrój może być *a*) okrągły, *b*) wieloboczny z dwiema osiami symetrii, *c*) całkiem nieregularny. W wypadku *b*) postępować należy wedle §. 160, w *c*) wedle §. 161, dla wypadku *a*) Keck *) obliczył tablice, które wyznaczenie nateżeń znacznie ułatwiają.

Rys. 349. przedstawia przekrój komina okrągłego, którego powierzchnia

$$A = (r^2 - r_1^2)\pi \quad \text{a} \quad u_1 = \frac{I}{M}$$

według 789). Jeżeli nazwiemy największe nateżenie w B v , a

$$\frac{C}{A} = \frac{C}{(r^2 - r_1^2)\pi} = v',$$

to możemy napisać

$$v = v \cdot v' \quad \dots \quad 791)$$

a wartość współczynnika v da się obliczyć.

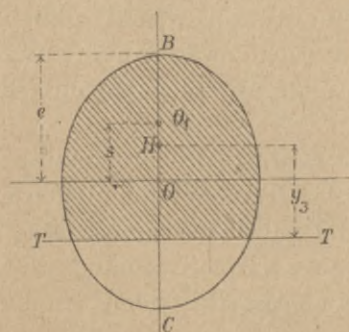
*) P. Keck: *Excentrische Druckbelastung cylind. Mauerkörper. Zeit. d. hann. Ing. u. Arch. Verein.* 1882. str. 627.

Goebel podaje dla współczynnika v następującą tabliczkę:

$\frac{w}{r}$	$\frac{r_1}{r}$						
	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	1,0	1,0	1,0	1,00	1,00	1,00	1,00
0,05	1,2	1,16	1,15	1,13	1,12	1,11	1,10
0,10	1,4	1,32	1,29	1,27	1,24	1,24	1,20
0,15	1,6	1,48	1,44	1,40	1,37	1,33	1,30
0,20	1,8	1,64	1,59	1,54	1,49	1,44	1,40
0,25	2,0	1,80	1,73	1,67	1,61	1,55	1,50
0,30	2,23	1,96	1,88	1,81	1,73	1,66	1,60
0,35	2,48	2,12	2,04	1,94	1,85	1,77	1,70
0,40	2,76	2,29	2,20	2,07	1,98	1,88	1,80
0,45	3,11	2,51	2,39	2,23	2,10	1,99	1,90
0,50	3,55	2,80	2,61	2,42	2,26	2,10	2,00
0,55	4,15	3,14	2,89	2,67	2,42	2,26	2,17
0,60	4,96	3,58	3,24	2,92	2,64	2,42	2,26
0,65	6,60	4,34	3,80	3,30	2,92	2,64	2,42
0,70	7,48	5,40	4,65	3,86	3,33	2,95	2,64
0,75	9,93	7,26	5,97	4,81	3,93	3,33	2,89
0,80	13,87	10,05	8,80	6,53	4,93	3,96	3,27
0,85	21,08	15,55	13,32	10,43	7,16	4,50	3,77
0,90	38,25	30,80	25,80	19,85	14,60	7,13	4,71
0,95	96,10	72,20	62,20	50,20	34,60	19,80	6,72
1,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Jäcker podaje też przybliżony sposób wyznaczenia wykreślonego największego ciśnienia *). Jeżeli siła P (rys. 350) zaczepia w H , to wedle 484), gdy i_1 nazwiemy promień jądry, natężenie w B

rys. 350



$$v_1 = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot y_1}{A i_1} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_1}{i_1} \right) = v_0 \left(1 + \frac{y_1}{i_1} \right),$$

zaś w C

$$v_2 = v_0 \left(1 - \frac{y_1}{i_2} \right) \quad . \quad . \quad 792)$$

Wobec tego v_1 wzrasta proporcjonalnie do y_1 i da się przedstawić linią prostą MN (rys. 351).

Po przekroczeniu linii jądrowej ciśnienie wzrasta dalej wedle linii krzywej, zamiast której Jäcker przyjmuje parabolę. Wy-

*) P. Oest. Wochensch. für d. öff. Baudienst. str. 271.

znacza on jeden punkt ten krzywej T , leżący na linii ON dla $y=y_2$, przyczem, jak autor udowadnia,

$$\frac{y_2}{i} = \frac{e}{s}, \dots \dots \dots , \dots \dots \dots 793)$$

jeżeli s oznacza odstęp środka ciężkości O_1 połowy przekroju od osi przez środek ciężkości O .

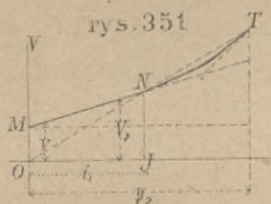
D. Budowle ziemne.

XIII. Równowaga stoków.

§. 163. Zasady.

Będziemy teraz badali prawa równowagi budowli takich, których materiałem jest ziemia, a więc n. p. wałów, rowów,

przekopów. Przypuszczamy przytem, że ziemia jest ciałem jednorodnem i niesprężystem o małej spójności. Tu więc nie będziemy mogli zastosowywać prawideł o wytrzymałości, wyłożonych w poprzednich rozdziałach, lecz zato uwzględniać będziemy także tarcie, tj. opór, jaki powstaje przy ruchu względnym dwóch



ciał lub dwóch części tego samego ciała, przylegających jedna do drugiej.

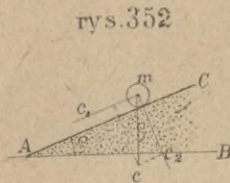
Z fizyki wiemy, że tarcie jest wprost proporcjonalne do ciśnienia prostopadłego na płaszczyznę zetknięcia obu ciał, a niezależne od wielkości powierzchni zetknięcia; spójność zaś jest niezależną od ciśnienia prostopadłego a proporcjonalną do powierzchni przekroju. Chcąc przesunąć cząstki ziemi, musimy przewyciężyć obie te siły.

Powierzchnię ziemi nachyloną ku poziomowi, nazywamy stokiem (n. *Böschung*, fr. *talus*) a styczną kąta nachylenia stoku do poziomu czyli stosunek wysokości do rzutu pionowego stoku stoczystością (n. *Neigung der Böschung*, fr. *pente*, a. *sloping*). Zastanawiać się będziemy głównie nad stokami, któ-

rych stoczystość w każdym punkcie jest ta sama, czyli nad stokami płaskimi, a ilekroćbyśmy mieli rozpatrywać stoki o zmiennej stoczystości, osobno to zaznaczymy.

§. 164. Równowaga ziemi niespoistej.

Wiemy, że powierzchnia wody w stanie równowagi jest poziomą. Piasek, żwir i ziemia sypka, których spójność jest bardzo mała, utrzymują się w równowadze, chociaż ich powierzchnia jest nachyloną, ale tylko do pewnej granicy, gdy stoczystość nie przekroczy pewnej wartości ρ (rys. 352).



Dla tego największego kąta ρ niech się znajduje punkt materialny m na powierzchni AC właśnie w stanie równowagi tak, że najmniejsze powiększenie kąta ρ jużby wywołało stoczenie się punktu m . Ciężar tego punktu c rozdziela się na c_1 i c_2 , przyczem $c_1 = c \text{ wst } \rho$, $c_2 = c \text{ dost } \rho$. Siła

c_1 stara się poruszyć punkt w kierunku CA , c_2 zaś przyciska go do płaszczyzny i wywołuje tarcie. Jeżeli współczynnik tarcia nazwiemy f , to dla równowagi musi być $c_1 = f c_2$, czyli $c \text{ wst } \rho = = f c \text{ dost } \rho$, a stąd $f = \text{st } \rho$ 794)

Ponieważ kąt ρ zależny jest tylko od współczynnika tarcia, dlatego nazywamy go kątem tarcia (n. *Reibungswinkel*, fr. *angle de frottement*) (p. §. 134). Stok dla którego ziemia sypka utrzymuje się w równowadze, a więc nachylony pod kątem tarcia do poziomu, nazywamy stokiem naturalnym, stokiem usypu (n. *natürliche Böschung*, fr. *talus naturel*, a. *plane of repose*). Stok naturalny i kąt tarcia ziemi niespoistej, wyznaczyć można, sypiąc ziemię i podgartując ją pod górę. Ziemia ułoży się wtedy w stoku naturalnym.

§. 165. Równowaga ziemi spoistej.

Jeżeli stok AB (rys. 353.) jest za stromy, wtedy ziemia nie może utrzymać się w równowadze i część ziemi ABD się usuwa. Część tej ziemi nazywamy odłamem, a powierzchnia AD , jak doświadczenia Forchheimera i Leygue'a okazują, mało się co różni od płaszczyzny. Przyjmować więc ją będziemy

najdalszą od tej, która potrzebną jest do równowagi tj. $\frac{P}{Q}=1$. Jeżeli przeto w jakimkolwiek danym przypadku wyznaczymy, stosunek $\frac{P}{Q}$ dla każdej płaszczyzny pęku płaszczyzn, przechodzących przez A , to płaszczyzna, dla której $\frac{P}{Q}$ będzie największością, będzie tą płaszczyzną, w której nastąpi usunięcie, gdy największość ta przekracza wartość $=1$. Warunkiem równowagi będzie więc, by *najw.* $P \leq 1$, bo wtedy $\frac{P}{Q}$ dla innych płaszczyzn będzie tem bardziej < 1 . My zajmować się będziemy wypadkiem granicznym i badać, jak wielkie może być α , aby stok był jeszcze w równowadze, zatem

$$\text{najw. } \frac{P}{Q} = 1 \dots \dots \dots 797)$$

Dla tego wypadku musi być pochodna funkcyi $\frac{P}{Q}$ równą zeru, czyli

$$\frac{d\left(\frac{P}{Q}\right)}{d\psi} = 0, \text{ a więc } \frac{Q dP - P dQ}{Q^2 d\psi} = 0, \text{ stąd}$$

$QdP - PdQ = 0$, a nareszcie uwzględnivszy rów. 797), otrzymamy

$$1 = \text{najw. } \frac{P}{Q} = \frac{dP}{dQ} \dots \dots \dots 798)$$

Na podstawie tych równań możemy w każdym szczegółowym przypadku wyznaczyć kąt ψ .

Z równ. 797) i 795) wynika $C \text{ wst } \psi = C f \text{ dost } \psi + cl$, a więc

$$c = \frac{C}{l} (\text{wst } \psi - \text{st } \varrho \text{ dost } \psi) = \frac{C}{1} \frac{\text{wst } (\psi - \varrho)}{\text{dost } \varrho} \dots \dots \dots 799)$$

§. 166. Naziom płaski i nieobciążony.

Jeżeli powierzchnia ziemi BD , którą także nazywamy naziomem (o stoczystości mniejszej, niż stok naturalny; powierzchnię o stoczystości większej zowiemy stokiem) (rys. 354) jest płaszczyzną nachyloną pod kątem β do poziomu, wtedy ciężar odłamu możemy wyznaczyć, nazwawszy γ ciężar gatunkowy

ziemi, w następnym sposobie: $C = \gamma \Delta ABD = \frac{1}{2} \gamma \dot{A}D \cdot AD \cdot \text{wst}(\alpha - \psi)$,
 a wstawiając za AD wartość l , a $AB = \frac{h}{\text{wst} \alpha}$, otrzymamy

$$C = \frac{1}{2} \gamma h l \frac{\text{wst}(\alpha - \psi)}{\text{wst} \alpha}.$$

Według równań 795), 796),
 i 797) mamy

$$\frac{P}{Q} = \frac{C \text{ wst} \psi}{C f \text{ dost} \psi + c l} = 1,$$

a stąd wstawiając wartość za C
 $f = \text{st} \varrho$, otrzymamy

$$\frac{P}{Q} = \frac{\gamma h l \text{ wst} \psi \text{ wst}(\alpha - \psi)}{\gamma h l \text{ wst}(\alpha - \psi) \text{ dost} \psi \text{ st} \varrho + 2 c l \text{ wst} \alpha} = 1 \quad \dots \quad 800)$$

Różniczkujemy osobno licznik, a osobno mianownik tego
 wyrazu, a otrzymamy wedle 798)

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dQ} &= \frac{-\text{wst} \psi \text{ dost}(\alpha - \psi) + \text{dost} \psi \text{ wst}(\alpha - \psi)}{[\text{wst}(\alpha - \psi) \text{ wst} \psi - \text{dost}(\alpha - \psi) \text{ dost} \psi] \text{ st} \varrho} = \\ &= \frac{\text{wst}(2\psi - \alpha)}{\text{dost}(2\psi - \alpha) \text{ st} \varrho} = \frac{\text{st}(2\psi - \alpha)}{\text{st} \varrho} = 1, \end{aligned}$$

a stąd $\text{st}(2\psi - \alpha) = \text{st} \varrho$, a więc $2\psi - \alpha = \varrho$, a zatem

$$\psi = \frac{\varrho + \alpha}{2} \quad \dots \quad 801)$$

a więc płaszczyzna odłamupółowikąt, zawarty między
 stokiem rzeczywistym a naturalnym.

Równanie 800) możemy inaczej napisać

$\gamma h \text{ wst} \psi \text{ wst}(\alpha - \psi) = \gamma h \text{ wst}(\alpha - \psi) \text{ dost} \psi \text{ st} \varrho + 2 c \text{ wst} \alpha$, a stąd

$$h = \frac{2 c \text{ wst} \alpha}{\gamma \text{ wst}(\alpha - \psi) [\text{wst} \psi - \text{dost} \psi \text{ st} \varrho]} = \frac{2 c \text{ wst} \alpha \text{ dost} \varrho}{\gamma \text{ wst}(\alpha - \psi) \text{ wst}(\psi - \varrho)}$$

Oba kąty w mianowniku możemy inaczej wyrazić, a mianowicie

$$\alpha - \psi = \alpha - \frac{\varrho + \alpha}{2} = \frac{\alpha - \varrho}{2}, \text{ zaś } \psi - \varrho = \frac{\varrho + \alpha}{2} - \varrho = \frac{\alpha - \varrho}{2}, \text{ a więc}$$

$$h = \frac{2 c \text{ dost} \varrho \text{ wst} \alpha}{\gamma \text{ wst}^2 \frac{\alpha - \varrho}{2}} \quad \dots \quad 802)$$

Z tego wzoru możemy obliczyć wysokość stoku, przy której się stok jeszcze może przy spójności c utrzymać; kąt β , jak widzimy, w tym wypadku zupełnie nie wchodzi w rachubę, a więc tu jest h od stoczystości naziomu niezależnym.

§. 167. Stok pionowy.

Dla stoku pionowego $\alpha = 90^\circ$; nazwijmy odnośną wysokość stoku h_0 (n. *Standhöhe*), to z równania 801) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 h_0 &= \frac{2c \operatorname{dost} \varrho}{\gamma \operatorname{wst}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{2c \left(\operatorname{dost}^2 \frac{\varrho}{2} - \operatorname{wst}^2 \frac{\varrho}{2}\right)}{\gamma \left(\operatorname{wst} 45^\circ \operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} - \operatorname{dost} 45^\circ \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{2c \left(\operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} + \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right) \left(\operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} - \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)}{\gamma \left[\frac{1}{2}\sqrt{2} \left(\operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} - \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2} \\
 &= \frac{4c \left(\operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} + \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)}{\gamma \left(\operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} - \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{4c \left(1 + \operatorname{st} \frac{\varrho}{2}\right)}{\gamma \left(1 - \operatorname{st} \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{4c}{\gamma} \operatorname{st} \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right) \quad . \quad 803)
 \end{aligned}$$

Znając odwrotnie h_0 , możemy obliczyć c , a mianowicie

$$c = \frac{\gamma h_0}{4} \operatorname{dot} \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 804)$$

Wstawiając tę wartość w równanie 802), otrzymamy

$$h = \frac{h_0 \operatorname{dost} \varrho \operatorname{wst} \alpha}{2 \operatorname{wst}^{\frac{\alpha - \varrho}{2}} \operatorname{st} \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 805)$$

Z pierwszej wartości h_0 otrzymamy też

$$c = \frac{\gamma h_0}{2} \frac{\operatorname{wst}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right)}{\operatorname{dost} \varrho},$$

a wstawiając to w 802)

$$h = h_0 \frac{\operatorname{wst}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right) \operatorname{wst} \alpha}{\operatorname{wst}^2 \frac{\alpha - \varrho}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 806)$$

Wzory te służą do obliczenia wysokości stoku pochylego dla jakiegokolwiek kąta α . Otu obliczył z równań 805) i 806) następną tabliczkę dla wartości $\frac{h}{h_0}$:

$\frac{h}{h_0} =$		Wartości dla dot ρ						
		1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
Wartości dla dot α	0,20	1,71	1,64	1,59	1,55	1,52	1,49	1,47
	0,25	1,99	1,89	1,82	1,75	1,70	1,66	1,63
	0,30	2,35	2,19	2,08	1,99	1,91	1,86	1,81
	0,35	2,79	2,56	2,39	2,27	2,17	2,08	2,02
	0,40	3,36	3,02	2,78	2,60	2,46	2,35	2,26
	0,45	4,11	3,60	3,24	3,00	2,81	2,66	2,54
	0,50	5,11	4,34	3,84	3,48	3,22	3,02	2,87
	0,55	6,47	5,31	4,58	4,08	3,72	3,45	3,24
	0,60	8,41	6,63	5,53	4,83	4,33	3,97	3,69
	0,65	11,28	8,40	6,77	5,76	5,08	4,58	4,22
	0,70	15,77	10,90	8,42	6,96	6,00	5,33	4,84
	0,75	23,26	14,63	10,69	8,52	7,16	6,25	5,60
	0,80	37,41	20,47	13,92	10,61	8,65	7,39	6,51
	0,85	68,21	30,26	18,67	13,46	10,59	8,82	7,63
	0,90	157,39	48,55	26,65	17,51	13,18	10,65	9,01
	0,95	645,69	86,59	38,61	23,50	16,73	13,03	10,79
1,00	∞	204,69	61,95	32,86	21,77	16,21	12,98	
1,05	—	840,78	113,03	48,60	29,21	20,57	15,88	
1,10	—	∞	260,64	79,01	40,81	26,73	19,74	
1,15	—	—	1072,65	142,23	60,35	35,87	25,04	
1,20	—	—	∞	328,14	95,93	50,09	32,53	

Przykład. Mamy wykopać rów głęboki 9 m w ziemi, dla której $\rho=32^\circ$, więc dot $\rho=1,6$ a $h_0=1$ m. — Jaka może być stoczystość?

Tu mamy $h=9$, $h_0=1$, więc $\frac{h}{h_0}=9$, liczbę tę szukamy w ostatniej kolumnie i znajdujemy 10,6 α co odpowiada dot $\alpha=0,90$, a więc $\alpha=48^\circ$.

§. 168. Wyznaczenie wykreślne stoczystości.

Na podstawie powyższych równań możemy wykreślnie wyznaczyć stoczystość, stok pionowy lub spójność, jeżeli znanym jest kąt tarcia.

1. Dane są α , h i ρ , wyznaczyć należy c (rys. 355). Z rów. 802) wynika

$$c = \frac{\gamma h \operatorname{wst}^2 \frac{\alpha - \rho}{2}}{2 \operatorname{dost} \rho \operatorname{wst} \alpha}$$

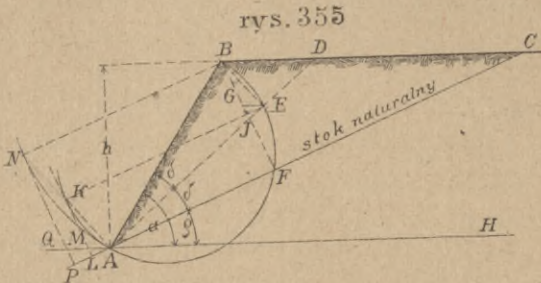
albo, gdy nazwiemy,

$$AB = l = \frac{h}{\operatorname{wst} \alpha},$$

$$c = \gamma \frac{l \operatorname{wst}^2 \frac{\alpha - \rho}{2}}{2 \operatorname{dost} \alpha},$$

a gdy $\alpha - \varrho = 2\delta$, więc $c = \frac{l \operatorname{wst}^2 \delta}{2 \operatorname{dost} \alpha}$ 807)

Spółowiwszy kąt $\alpha - \varrho$, otrzymamy kąt δ . Z B spuszczone prostopadłe na AD i AC , to B, E, F i A muszą leżeć na półkole.



Z E kreślimy poziomą EG , a wtedy $c = \frac{\gamma \cdot EG}{2}$. Aby się o tem przekonać, zrobimy $EI \parallel AC$, to

$$EG = \frac{EI}{\operatorname{dost} \varrho} = \frac{BE \operatorname{wst} \delta}{\operatorname{dost} \varrho} = \frac{l \cdot \operatorname{wst}^2 \delta}{\operatorname{dost} \varrho},$$

zatem ze względu na 807)

$$EG = \frac{2c}{\gamma} 808)$$

Udowodniliśmy, że półkole założone na AB przechodzi przez F i E . Poprowadźmy styczną do koła $KL \parallel BF$, to $AKL \cong BEI$, bo $AK = BE$ a boki równoległe. Stąd łatwo udowodnić, że

$$AM = EG = \frac{2c}{\gamma} 809)$$

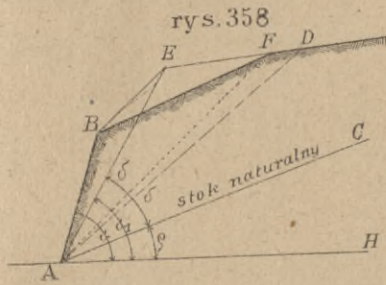
Nareszcie jeżeli z B zatoczmy łuk promieniem BA i wykreślimy styczną $NP \parallel BF$, to $AQ = 2AM$, jak to się da łatwo udowodnić z podobieństwa trójkątów, zatem

$$AQ = \frac{4c}{\gamma} 810)$$

2. Dane α , c i ϱ , szukana wysokość h . Połowimy kąt CAB i kreślimy $AN \perp AD$, odcinamy teraz $AQ = \frac{4c}{\gamma}$ i przez punkt Q kreślimy QN prostopadłą do AC . Z punktu N kreślimy

§. 170. Wyznaczenie stoku naturalnego, spójności i ciężaru gatunkowego.

Mówiliśmy poprzednio, jak się wyznacza stok naturalny dla ziem niespoistych. Dla ziem spoistych najlepiej wyznaczać h_0 i ρ z doświadczeń; w tym celu trzeba ziemię skopywać pionowo. Wykop musi być dość długi o zmiennej głębokości, należy go zostawić najlepiej przez cały rok, aby się przekonać, o ile wpływy atmosferyczne zmniejszają spójność. Największa wysokość, przy której stok pionowy się utrzyma, będzie h_0 . To samo możemy zrobić dla innych kątów α i otrzymamy odnośne h . Z tych wartości możemy wtedy wyznaczyć c i ρ na



na podstawie równań 804) i 805). Na podstawie doświadczeń Kavena możemy przyjąć dla ziem zbitych $c=225\text{ kg/m}^2$, a że należy uwzględnić współczynnik pewności 1,5, więc przyjmujemy zwykle $c=150\text{ kg/cm}^2$ 811)

W tym samym stosunku zmniejszamy też i kąt tarcia.

Możemy dalej przyjąć

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla zwykłej ziemi zbitej } h_0=1 \text{ do } 3 \text{ m} \\ \text{dla zbitego iłu lub gliny } h_0=2 \text{ do } 5 \text{ m} \end{array} \right\} \dots 812)$$

Dla bezpieczeństwa lepiej przy obliczeniu przyjmować mniejsze wartości t. j. 1 względnie 2 m. Na wielkość tarcia i spójności ma znaczny wpływ atmosfera. Ważną okolicznością pod tym względem jest ilość wody, znajdującej się w ziemi, zwłaszcza gliniastej. Gdy glina jest tylko zwilżoną, spójność jest wielka, gdy jest suchą zupełnie — mała, a gdy przesiąknięta wodą — prawie żadna. Dlatego też przy budowlach ziemnych bardzo ważną rzeczą jest odpowiednie odwodnienie.

Poniżej podajemy tabliczkę, w której podaliśmy według Rebhanna i Otta kąt tarcia ρ , ciężar metra sześciennego γ i spójność c dla rozmaitych ziem. Nie potrzebujemy dodawać, że są to tylko wartości przeciętne. Przy większych budowlach ziemnych dobrze jest robić, jeśli czas na to pozwala, z daną ziemią osobne doświadczenia dla wyznaczenia c i ρ .

Materiał	kąt tarcia ρ	ciężar gatunko- wy γ	spój- ność c	st ρ	dot ρ
		$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{kg}{m^2}$		
Ziemia roślinna sypka sucha	35°	1420	250	0,700	1,428
„ „ „ wilgotna	40°	1580	250	0,839	1,192
„ „ „ nasycona wodą	30°	1800	—	0,577	1,732
„ „ „ sucha ubita	42°	1680	500	0,900	1,111
„ „ „ wilgotna ubita	65°	1880	—	2,145	1,466
Gлина sypka sucha	40°	1500	600	0,839	0,192
„ „ „ wilgotna	45°	1550	930	1,000	1,000
„ „ „ nasycona wodą	20°	2000	400	0,364	2,747
„ „ „ ubita sucha	42°	1790	—	0,900	1,111
„ „ „ naturalnie wilgotna	70°	1850	—	2,748	0,364
Piasek suchy miałki	35°	1500	10	0,700	1,428
„ „ „ gruby	35°	1640	20	0,700	1,428
„ „ „ wilgotny	40°	1770	100	0,839	1,192
„ „ „ nasycony wodą	30°	1950	60	0,577	1,732
Żwir graniasty (tłuczony)	45°	1800	1500	1,000	1,000
„ „ „ okrągły (rzeczny)	30°	1800	1500	0,577	1,732
Zboże	25°	759	—	0,466	2,145
Srut.	23°	6800	—	0,424	2,356

Müller Breslau podaje następną krótką tabliczkę:

Rodzaj ziemi	γ kg/m^3	ρ
Ziemia roślinna sucha	1500	40°
„ „ „ mokra	1500—1700	30°—35°
Gлина sucha	1500—1660	40°—46°
„ „ „ mokra	1900—2000	20°
Piasek mokry	1860	25°
„ „ „ suchy	1640	35°
Żwir mokry	1600—1770	35°—40°

Keck podaje następujące wartości:

Rodzaj ziemi	γ kg/m^3	ρ
Il suchy	1500	40°—46°
„ „ „ mokry	1900	20°—25°
Gлина sucha	1600	40°—50°
„ „ „ mokra	1950	20°—25°
Ziemia roślinna mokra	1650	30°—35°
Piasek, żwir rzeczny	1600—1860	30°
Żwir tłuczony	1600	35°—40°

Według 805) pierwszy wyraz równa się h_1 , wysokości stoku ziemi nieobciążonej, więc

$$h = h_1 - \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma \operatorname{wst} (\alpha - \beta)} \dots \dots \dots 814)$$

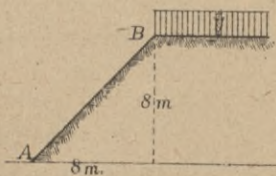
Dla naziomu poziomego $\beta = 0$, więc

$$h = h_1 - \frac{2q}{\gamma} \dots \dots \dots 815)$$

A zatem dla naziomu poziomego obciążenie na wysokości h_1 ma ten skutek, jak gdyby stok był o $2h$ wyższym. Pochodzi to stąd, że obciążenie powiększa wprawdzie tarcie, ale nie spójność, gdy przy stoku wyższym obie siły wzrastają.

Przykład. Na poziomym naziomiu stoku wysokiego 8 m (rys. 361) mamy złożyć kamienie; jak wysoką może być warstwa tych kamieni bez narażenia stoku na usunięcie?

rys. 361



Mamy dane $\operatorname{st} \alpha = 1$, $h_0 = 1$, ciężar gatunkowy ziemi $\gamma = 1420 \text{ kg/m}^3$, ciężar gatunkowy kamienia $\gamma_1 = 2300 \text{ kg/m}^3$, kąt tarcia $\rho = 35^\circ$. Tu obciążenie na m^2 będzie $q = \gamma y = 2300 y$, jeżeli y oznacza wysokość kamieni. Dla $\operatorname{st} \alpha = 1,0$ otrzymamy $\operatorname{wst} \alpha = 0,707$, $\alpha = 45^\circ$, dalej będzie

$$\operatorname{dost} \rho = 0,819, \frac{\alpha - \rho}{2} = \frac{10}{2} = 5^\circ, 45^\circ + \frac{\rho}{2} = 52^\circ 30', \operatorname{wst} \frac{\alpha - \rho}{2} = 0,087, \operatorname{wst}^2 \frac{\alpha - \rho}{2} =$$

$$= 0,00757, \operatorname{st} 62^\circ 30' = 1,921. \text{Więc } h_1 = 1 \frac{0,707 \times 0,819}{2 \times 1,421 \times 0,00757} = 19,85 \text{ m, zatem}$$

$$h = 19,85 - \frac{2 \times 2300 y}{1420} = 19,85 - 3,24 y = 8 \text{ m, stąd } y = 3,66 \text{ m.}$$

§. 173. Wykreślne wyznaczenie stoku ziemi jednostajnie obciążonej.

Jeżeli w równowadze niestalej utrzymuje się stok AB obciążony ciężarem q (rys. 362), to ciężar ten q zamieniamy, jak wiadomo, na warstwę ziemi o wysokości $h_1 = \frac{q}{\gamma}$. Z poprzedniego paragrafu wiemy, że płaszczyzna odłamu pozostaje ta sama, co dla stoku nieobciążonego, otrzymujemy ją przez spłowienie kąta BAC . Odłam więc stanowi powierzchnia $ABIFD$, którą zamieniamy na trójkąt, robiąc ze względu na 815) $I_1 I = IB = h_1$,

$I_1 B_1 // BD$ i przedłużając AB aż do B_1 . Dalsza konstrukcja pozostaje ta sama, $AQ = \frac{4c}{\gamma}$. Punkt B_1 jest punktem paraboli spójności.

§. 174. Naziom dowolny częściowo obciążony.

Jeżeli naziom dowolnie zakrzywiony jest częściowo obciążony (rys. 363), to właściwie płaszczyzna odłamu nie pozostaje ta sama, co dla ziemi nieobciążonej, mało się jednak różni. Przyjąwszy znów płaszczyznę tę samą połowiącą kąt BAC , zamieniamy

$$ABE_1 D_1 D$$

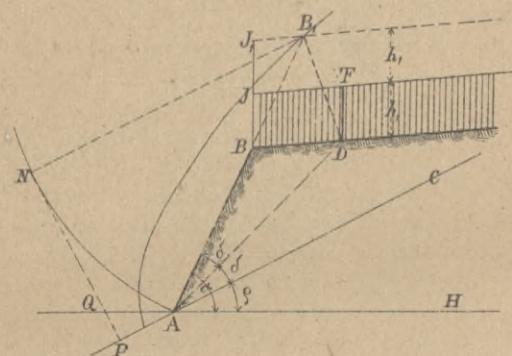
na trójkąt $AB_1 D_1$, którego wierzchołek leży w odległości $2h_1$ od ED .

Dalsza konstrukcja pozostaje ta sama, zatem $AQ = \frac{4c}{\gamma}$. W ten sposób możemy wyznaczyć c , spójność potrzebną do równowagi stałej. Jeżeli rzeczywista spójność jest c' , to $\frac{c'}{c} = n$ jest stosunkiem pewności.

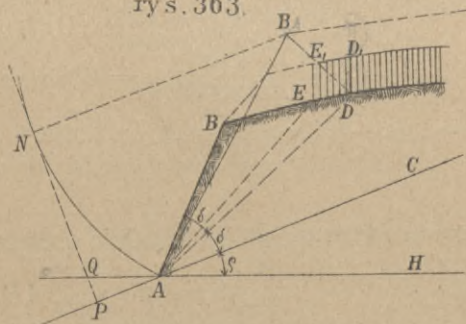
§. 175. Stok zakrzywiony.

W rów. 802) im mniejsze jest α przy danem γ , c i ϱ , tem mniejsze jest $\text{wst } \alpha$ i $\text{wst } \frac{\alpha - \varrho}{2}$. Ponieważ jednak $\text{wst } \frac{\alpha - \varrho}{2}$ jest

rys. 362



rys. 363.



w mianowniku w drugiej potędze, więc wpływ mianownika przeważa, zatem h jest większe.

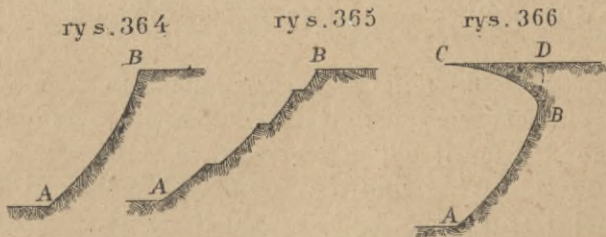
Możemy ogólnie napisać według 802)

$$h = C_1 \frac{\text{wst } \alpha}{\text{wst}^2 \frac{\alpha - \varrho}{2}} \dots \dots \dots 816)$$

Otóż niech będzie $\varrho = 30^\circ$,

to dla $\alpha = 40^\circ \quad 50^\circ \quad 60^\circ \quad 70^\circ$
według 816) $h = 107,5 \quad 25,4 \quad 12,9 \quad 3,11 C_1$.

Widzimy stąd, że im większe α , tem mniejsze h i odwrotnie im mniejsze jest h , tem większe jest α ; z czego wynika, że dla wyższych części stoku może być stoczystość większa. Jeżelibyśmy więc nasyp (rys. 364) w myśli podzielili na warstwy poziome i dla każdej z nich wyznaczyli kąt nachylenia stoku, to otrzymalibyśmy stok krzywy AB u dołu mniej, u góry więcej stromy. Przy większych nasypach urządzamy rzeczywiście w praktyce stok krzywy, lub też jako przybliżony kształt stok z ławeczkami (rys. 365).



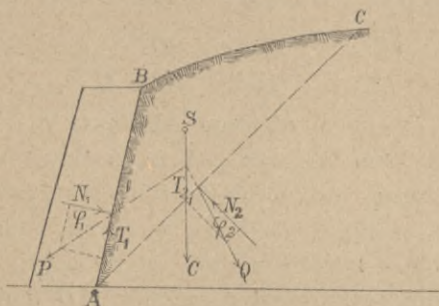
Winkler wyznacza równanie krzywej AB (rys. 364) z którego się okazuje, że krzywa ta ma właściwie kształt ABC (rys. 366), kształt, jak widzimy, nieprawdopodobny, gdyż przytem nie uwzględniono tych okoliczności, że ziemia złamałaby się pod własnym ciężarem w linii BD ; w rzeczywistości więc ziemia usuwa się w linii ABD *).

*) Bliższe szczegóły z teorii stoków znajdzie czytelnik w wybornem dziele A. v. Kavena „*Theorie der Böschungen*“, 1885.

XIV. Parcie ziemi obliczone sposobem analitycznym.

§. 176. Ogólne zasady.

Jeżeli stoczystość jest tak wielka, że stok spójnością i tarcie nie może się utrzymać, wtedy, aby zapobiec usunięciu się ziemi, budujemy ścianę murowaną AB (rys. 367), przypierającą do stoku, którą nazywamy murem oporowym (n. *Stützmauer*, fr. *mur de soutienement*, an. *retaining wall*, h. *muro de sostenimiento*). Zada-
rys. 367



nieniem naszym jest teraz obliczyć parcie, które ziemia wywiera na mur, a które nazywamy parciem ziemi (n. *Erd-
druck*, fr. *poussée des
erres*, an. *pressure of earth*). Wyłożymy tu najpierw teorię parcia ziemi, tak zwaną dawniejszą według Ponceleto, Rebhanna i Otta, a potem wspomnimy także o innych teoryach.

Gdyby ściana AB miała się poddać, to ziemiaby się usunęła w płaszczyźnie odłamu AC , a więc parcie odłamu ABC na ścianę AB musiałyby przewyciężyć tarcie wzdłuż AB i AC i spójność w płaszczyźnie AC . Ponieważ jednak spójność ziemi nasypanej jest bardzo małą i bardzo zmienną według stopnia wilgoci i ponieważ spójność i tarcie nie działają równocześnie, lecz tarcie występuje dopiero wtedy, gdy spójność zostanie zniweczona, więc zwykle nie uwzględniamy jej w obliczeniu w praktyce dla większej pewności. Gdyby nawet spójność w rzeczywistości równocześnie działała z tarcie, to działałaby tylko korzystnie i zmniejszałaby parcie ziemi; nie uwzględniając jej więc, przypuszczamy warunki najniekorzystniejsze.

Później podamy sposoby uwzględnienia spójności, którego zachodzi potrzeba w niektórych wypadkach. Obecnie pozostaje zatem do uwzględnienia tylko tarcie, którego klin (n. *Keil*, fr. *coin de poussée*) ABC ma pokonać przy usunięciu się podczas ruchu po płaszczyznach AB i AC i ciężar klina C , działający

w jego środku ciężkości S . Ciężar klina C wywołuje oddziaływania N_1 i N_2 , prostopadłe do AB i AC . Podczas ruchu powstaje także tarcie T_1 i T_2 . Jeżeli kąt tarcia między ziemią a murem nazwiemy ϱ_1 , a między ziemią a ziemią ϱ_2 , to $T_1 = -N_1 \operatorname{st} \varrho_1$, $T_2 = N_2 \operatorname{st} \varrho_2$. Nazwijmy P wypadkową z T_1 i N_1 , a Q z T_2 i N_2 , to

$$P = \sqrt{N_1^2 + N_1^2 \operatorname{st}^2 \varrho_1} = N_1 \sqrt{1 + \operatorname{st}^2 \varrho_1} =$$

$$= N_1 \operatorname{siecz} \varrho_1 = \left. \begin{array}{l} \frac{N_1}{\operatorname{dost} \varrho_1} \\ \text{a } Q = \frac{N_2}{\operatorname{dost} \varrho_2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 817)$$

Jeżeli kąt nachylenia między P i N_1 nazwiemy φ_1 , a φ_2 między Q i N_2 , to

$$P = \frac{N_1}{\operatorname{dost} \varphi_1}, \quad Q = \frac{N_2}{\operatorname{dost} \varphi_2}, \quad \dots \dots \dots 818)$$

a więc ze względu na równ. 817)

$$\varrho_1 = \varphi_1, \quad \varrho_2 = \varphi_2 \quad \dots \dots \dots 819)$$

Widzimy więc, że podczas ruchu klina ABC odłam wywierać musi parcia na ścianę AB i płaszczyznę odłamu, które są nachylone do AB i AC pod odnośnymi kątami tarcia. Dla równowagi muszą też siły P , Q i C przecinać się w jednym punkcie. Nad tym ostatnim warunkiem zastanowimy się później.

§. 177. Ogólne wyznaczenie powierzchni odłamu i parcia ziemi.

Kąt tarcia ϱ_1 między murem a ziemią jest zwykle większy, niż kąt tarcia ϱ_2 między ziemią a ziemią. Zresztą, choćby on był mniejszym, w naszej jest mocy uczynić ścianę AB więcej szorstką i zwiększyć tarcie tak, że możemy zawsze przyjąć, że kąt tarcia $\varrho_1 > \varrho_2$. W takim razie przy usunięciu się ziemi, zostaje przy murze bardzo cienka warstwa ziemi, w ziemi tworzy się szczelina, a przy usunięciu odbywa się ruch ziemi po ziemi, musimy zatem uwzględnić współczynnik tarcia między ziemią a ziemią, a więc ten sam kąt tarcia ϱ_2 . Nadal przyjmować więc będziemy $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ i otrzymamy z rys. 368, rozłożywszy siłę C na składowe P i Q , $P:C = ad:db = \operatorname{wst} \eta : \operatorname{wst} \gamma$. Dalej mamy $\eta = \varphi - \varrho$, $\delta = 180 - \alpha - \varrho$, $\gamma = 180 - \eta - \delta = \alpha + \varrho - \varphi + \varrho = \alpha + 2\varrho - \varphi$, więc $P:C = \operatorname{wst}(\varphi - \varrho) : \operatorname{wst}(\alpha + 2\varrho - \varphi)$, stąd

$$P = \frac{C \operatorname{wst}(\varphi - \varrho)}{\operatorname{wst}(\alpha + 2\varrho - \varphi)} = \frac{C \operatorname{wst}(\alpha - \psi - \varrho)}{\operatorname{wst}(2\varrho + \psi)} \quad 820$$

jeżeli $\psi = \alpha - \varphi$.

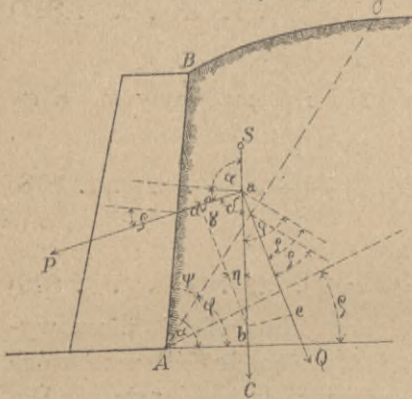
P więc zależne jest od kątów φ i ψ , których jeszcze nie znamy. Łatwo jednak zrozumiemy, że ziemia usunie się w tej płaszczyźnie, a więc dla takiego kąta φ , dla którego P jest największe. Szukać zatem będziemy teraz wartości kąta φ lub ψ , dla którego P jest największym, przyczem jednak musimy także ciężar C wyrazić jako funkcją φ lub ψ , jak to pokażemy poniżej w szczegółowych przypadkach.

Gdy $\alpha = 180 - \varrho$ (rys. 369), otrzymamy z równania 820)

$$P = \frac{C \operatorname{wst}(\varphi - \varrho)}{\operatorname{wst}(180 - \varphi + \varrho)} = \frac{C \operatorname{wst}(\varphi - \varrho)}{\operatorname{wst}(\varphi - \varrho)} = C \quad 821$$

Jeżeli naziom jest symetryczny do pionowej AC , to łatwo zrozumiemy, że ponieważ płaszczyzna AB jest zupełnie syme-

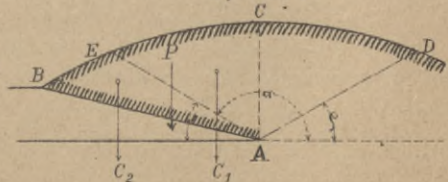
rys. 368



rys. 369



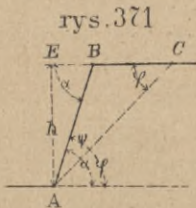
rys. 370



tryczną do AD tj. do stoku naturalnego, więc płaszczyzna odłamania musi być pionową, a parcie ziemi w tym wypadku pionowe równa się ciężarowi ziemi ABC , nad murem leżącej.

Gdy $\alpha > 180 - \varphi$, wtedy ciśnienie P jest także pionowe, (rys. 370) i równe ciężarowi ziemi nad murem leżącej, bo wtedy ziemia nie może się usuwać w płaszczyźnie AB , lecz w razie poddania się muru utworzy się w powierzchni AE , nachylonej pod kątem φ do poziomu szczelina i na tej płaszczyźnie ziemia będzie się usuwała. Rozłożyć więc możemy wtedy ABC na AEC i ABE , a z poprzedniego wiemy, że, jeżeli naziom jest symetryczny do AC , to C_1 parcie na AE jest pionowe i równe ciężarowi klina AEC . Z parciem tem złożymy jeszcze ciężar C_1 klina ABE , gdyż klin ten, nie usuwając się, działa tylko na mur swym ciężarem, a więc wypadkowe parcie P będzie pionowe i równe ciężarowi klina ABC , czyli ziemi nad murem leżącej i zaczepiać będzie w jego środku ciężkości.

Twierdzenie to ważne jest także dla $\alpha = 180^\circ$ czyli dla muru poziomego, na który parcie ziemi jest pionowe i równe ciężarowi ziemi nad murem leżącej, w przybliżeniu nawet wtedy, gdyby naziom nie był nawet symetryczny do AC .



Aby się przekonać o rzetelności równania 820), zastosujemy ten wzór do parcia wody, a przyjmąwszy $\varphi = 0$, musimy otrzymać znane wzory dla parcia wody (rys. 371).

Nie znając kąta φ , przyjmijmy go z początku dowolnie, niech więc będzie AC płaszczyzną odłamu, to otrzymamy z równania 820)

$$P = \frac{C \operatorname{wst} \varphi}{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi)}, \text{ ciężar zaś odłamu będzie}$$

$$C = \gamma_w ABC = \gamma_w \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} \lambda_w h (EC - EB) = \frac{1}{2} \gamma_w h + \\ + (h \operatorname{dot} \varphi - h \operatorname{dot} \alpha) = \frac{1}{2} \gamma_w h^2 \frac{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{wst} \alpha \operatorname{wst} \varphi}$$

Wstawiwszy wartość za C w równanie dla P , otrzymamy

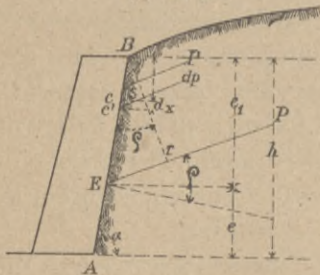
$$P = \frac{1}{2} \gamma_w h^2 \frac{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{wst} \alpha \operatorname{wst} \varphi} \cdot \frac{\operatorname{wst} \varphi}{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi)} = \frac{1}{2} \gamma_w \frac{h^2}{\operatorname{wst} \alpha} \quad \dots 822)$$

znany wzór hydrostatyczny.

§. 178. Ogólne wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi.

Nazwijmy p parcie ziemi na część muru BC (rys. 372) przyczem rzut pionowy długości BC niech się nazywa x . Jeżeli x wzrośnie o dx , to p wzrośnie o dp , parcie na część muru CC' . Całe parcie P na mur AB będzie

rys. 372



$$P = \int_0^h dp.$$

Moment siły dp ze względu na punkt B jest $dp \cdot Bs = dp \cdot BC$ dost $\sphericalangle CBs = dp \cdot BC$ dost $\varrho =$

$$= dp \cdot \frac{x}{\text{wst } \alpha} \text{ dost } \varrho.$$

Moment siły wypadkowej P będzie więc $P \cdot Br = P \cdot BE$ dost $\varrho = P \frac{e_1}{\text{wst } \alpha}$ dost $\varrho = \frac{\text{dost } \varrho}{\text{wst } \varrho} \int_0^h x dp$, a stąd

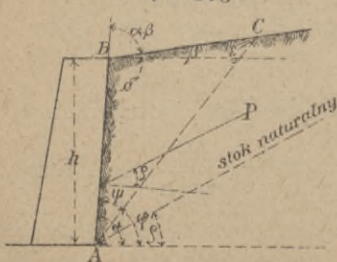
$$e_1 = \frac{1}{P} \int_0^h x dp \dots \dots \dots 823)$$

W szczególnych wypadkach wyznaczamy dp , wstawiamy w równanie 823) i otrzymujemy w ten sposób e_1 , a stąd $e = h - e_1$.

§. 179. Wyznaczenie parcia ziemi, gdy naziom jest płaszczyzną nachyloną do poziomu pod kątem β .

Przyпускаmy, że naziom nachylony jest do poziomu pod kątem β (rys. 373) mniejszym od ϱ .

rys. 373



Parcie ziemi wyznaczamy według równania 820). W tym celu jednak musimy wprzód obliczyć ciężar odłamu C , Z rysunku otrzymamy

$$C = \gamma \cdot ABC = \frac{1}{2} \gamma \cdot AB \cdot AC \text{ wst } \psi.$$

Z trójkąta ABC mamy

$$AB : AC = \text{wst } \varepsilon : \text{wst } (\delta + \beta),$$

przyczem

$$\varepsilon = 180 - \psi - \delta - \beta = 180 - \psi +$$

—(180 — $\alpha + \beta$) = $\alpha - \beta - \psi$, a więc $AB:AC = \text{wst}(\alpha - \beta - \psi) : \text{wst}(\alpha - \beta)$, stąd $AC = \frac{AB \text{ wst}(\alpha - \beta)}{\text{wst}(\alpha - \beta - \psi)}$.

Z rysunku mamy dalej $AB = \frac{h}{\text{wst } \alpha}$. Wstawivszy wartości za AB i AC , otrzymamy $C = \frac{\gamma h^2 \text{ wst}(\alpha - \beta) \text{ wst } \psi}{2 \text{ wst}^2 \alpha \text{ wst}(\alpha - \beta - \psi)}$.

Wstawmy tę wartość w 820), a otrzymamy

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{ wst}(\alpha - \beta) \text{ wst } \psi \text{ wst}(\alpha - \varrho - \psi)}{2 \text{ wst}^2 \alpha \text{ wst}(\alpha - \beta - \psi) \text{ wst}(2\varrho + \psi)}$$

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{ wst}(\alpha - \beta) \text{ wst } \psi [\text{wst}(\alpha - \varrho) \text{ dost } \psi - \text{dost}(\alpha - \varrho) \text{ wst } \psi]}{2 \text{ wst}^2 \alpha [\text{wst}(\alpha - \beta) \text{ dost } \psi - \text{dost}(\alpha - \beta) \text{ wst } \psi] (\text{wst } 2\varrho \text{ dost } \psi + \text{dost } 2\varrho \text{ wst } \psi)}$$

Podzielmy licznik i mianownik przez $\text{wst}(\alpha - \beta) \text{ wst}^2 \psi$, a otrzymamy

$$P = \frac{\gamma h^2 [\text{wst}(\alpha - \varrho) \text{ dost } \psi - \text{dost}(\alpha - \varrho)]}{2 \text{ wst}^2 \alpha (\text{dost } \psi - \text{dost}(\alpha - \beta)) (\text{wst } 2\varrho \text{ dost } \psi + \text{dost } 2\varrho)}$$

albo

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{ wst}(\alpha - \varrho) [\text{dost } \psi - \text{dost}(\alpha - \varrho)]}{2 \text{ wst}^2 \alpha \text{ wst } 2\varrho (\text{dost } \psi - \text{dost}(\alpha - \beta)) (\text{dost } \psi + \text{dost } 2\varrho)}$$

Załóżmy $x = \text{dost } \psi$, to

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{ wst}(\alpha - \varrho)}{2 \text{ wst}^2 \alpha \text{ wst } 2\varrho} \frac{x - \text{dost}(\alpha - \varrho)}{(x + \text{dost } 2\varrho)(x - \text{dost}(\alpha - \beta))}, \text{ czyli}$$

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{ wst}(\alpha - \varrho)}{2 \text{ wst}^2 \alpha \text{ wst } 2\varrho} \cdot U, \quad \dots \dots \dots 824)$$

gdy

$$U = \frac{x - \text{dost}(\alpha - \varrho)}{(x + \text{dost } 2\varrho)[x - \text{dost}(\alpha - \beta)]}, \quad \dots \dots \dots 825)$$

czyli $U = \frac{x - \text{dost}(\alpha - \varrho)}{x^2 + x[\text{dost } 2\varrho - \text{dost}(\alpha - \beta)] - \text{dost } 2\varrho \text{ dost}(\alpha - \beta)}$

P będzie największe, gdy U będzie największe, więc gdy

$\frac{dU}{dx} = 0$. Różniczkując funkcję U , otrzymamy

$$\frac{x^2 + x[\text{dost } 2\varrho - \text{dost}(\alpha - \beta)] - \text{dost}(\alpha - \beta) \text{ dost } 2\varrho + [x - \text{dost}(\alpha - \varrho)][2x + \text{dost } 2\varrho - \text{dost}(\alpha - \beta)]}{(x^2 + x[\text{dost } 2\varrho - \text{dost}(\alpha - \beta)] - \text{dost}(\alpha - \beta) \text{ dost } 2\varrho)^2} = 0.$$

Aby wyraz lewy równał się zeru, musi być albo licznik równy zeru albo mianownik równy ∞ . W tym ostatnim wy-

padku musiałyby być $x = \text{dot } \psi = \infty$, a więc $\psi = 0$, co jest niemożliwem. A zatem musi być licznik $= 0$, więc

$$x^2 - x [\text{dot } 2 \varrho - \text{dot } (\alpha - \beta)] - \text{dot } (\alpha - \beta) \text{dot } 2 \varrho - 2x^2 + \\ - x \text{dot } 2 \varrho + x \text{dot } (\alpha - \beta) + 2x \text{dot } (\alpha - \varrho) + \\ + \text{dot } (\alpha - \varrho) (\text{dot } 2 \varrho - \text{dot } (\alpha - \beta)) = 0, \text{ czyli } x^2 - 2x \text{dot } (\alpha - \varrho) = \\ = \text{dot } (\alpha - \varrho) \text{dot } 2 \varrho - \text{dot } (\alpha - \beta) [\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } 2 \varrho], \text{ a stąd}$$

$$x = \text{dot } (\alpha - \varrho) + \\ \pm \sqrt{\text{dot}^2 (\alpha - \varrho) + \text{dot } (\alpha - \varrho) \text{dot } 2 \varrho - \text{dot } (\alpha - \beta) [\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } 2 \varrho]},$$

czyli

$$x = \text{dot } \psi =$$

$$= \text{dot } (\alpha - \varrho) \pm \sqrt{[\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } 2 \varrho] [\text{dot } (\alpha - \varrho) - \text{dot } (\alpha - \beta)]}.$$

Ponieważ kąt ψ jest ostry, więc $\text{dot } \psi > 0$, dlatego przyjmujemy tylko znak górny, więc

$$\text{dot } \psi = x = \text{dot } (\alpha - \varrho) +$$

$$+ \sqrt{[\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } 2 \varrho] [\text{dot } (\alpha - \varrho) - \text{dot } (\alpha - \beta)]} . \quad 826)$$

Wprowadziwszy tę wartość za x w równanie 825), otrzymalibyśmy *najw* U . Lecz wzór byłby za zawiły, postąpimy więc inaczej.

Niech będzie

$$U = \frac{F(x)}{f(x)} = \\ = \frac{x - \text{dot } (\alpha - \varrho)}{x^2 + x [\text{dot } 2 \varrho - \text{dot } (\alpha - \beta)] - \text{dot } 2 \varrho \text{dot } (\alpha - \beta)}, \text{ to}$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{F_1(x)f(x) - f_1(x)F(x)}{f(x)^2} = 0,$$

jeżeli $F_1(x)$ i $f_1(x)$ nazwiemy pochodne funkcji $F(x)$, względnie $f(x)$.

Ponieważ $f(x)$ nie jest $= \infty$, więc licznik musi być $= 0$, zatem $f(x) F_1(x) = f_1(x) F(x)$, a stąd

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \text{najw } U \dots \dots \dots 827)$$

Wykonajmy naznaczone działanie, a otrzymamy

$$\text{najw } U = \frac{1}{2x + \text{dot } 2 \varrho - \text{dot } (\alpha - \beta)}.$$

Podstawiając w to równanie wartość z równania 826), otrzymamy

$$\text{najw } U = \frac{1}{2 \text{dot } (\alpha - \varrho) + 2 \sqrt{[\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } 2 \varrho] [\text{dot } (\alpha - \varrho) + \\ - \text{dot } (\alpha - \beta)]} + \text{dot } 2 \varrho - \text{dot } (\alpha - \beta)}$$

czyli

$$\text{najw } U = \frac{1}{[\sqrt{\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } 2\varrho} + \sqrt{\text{dot } (\alpha - \varrho) - \text{dot } (\alpha - \beta)}]^2}$$

a wstawivszy tę wartość w równanie 824), otrzymamy nareszcie

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst } (\alpha - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst } 2\varrho [\sqrt{\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } 2\varrho} + \sqrt{\text{dot } (\alpha - \varrho) - \text{dot } (\alpha - \beta)}]^2} \quad . \quad . \quad 828)$$

Chcąc wynaleść położenie punktu zaczepienia parcia ziemi, zastosujemy tu ogólne równanie 823).

Równanie 828) możemy napisać $P = ah^2$, gdzie a jest pewnym współczynnikiem, zależnym od α , β i ϱ , ale niezależnym od h .

Analogicznie możemy wyrazić parcie na część muru od wierzchołka aż do głębokości x $p = ax^2$, a więc $\frac{dp}{dx} = 2ax$. Wstawivszy to w równanie 823), otrzymamy

$$e_1 = \frac{1}{P} \int_0^h x dp = \frac{1}{h^2} \int_0^h 2ax^2 dx = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{2}{3}h, \text{ a więc}$$

$$e = h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 829)$$

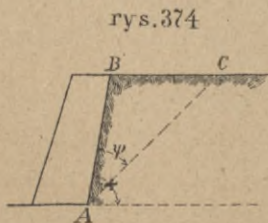
Punkt zaczepienia parcia ziemi leży więc dla naziomu płaskiego w jednej trzeciej części wysokości stoku.

§. 180. Parcie ziemi dla naziomu poziomego.

Dla poziomego naziomu (rys. 374) jest $\beta = 0$, więc otrzymamy z równania 828)

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst } (\alpha - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst } 2\varrho [\sqrt{\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } 2\varrho} + \sqrt{\text{dot } (\alpha - \varrho) - \text{dot } \alpha}]^2}$$

Podstawmy $\text{dot } \alpha = a$, $\text{dot } \varrho = r$, a więc



rys. 374

$$\begin{aligned} \text{dot } 2\varrho &= \frac{1 - \text{st}^2 \varrho}{2 \text{st } \varrho} \\ &= \frac{\text{dot}^2 \varrho - 1}{2 \text{dot } \varrho} = \frac{r^2 - 1}{2r}, \\ \text{dot } (\alpha - \varrho) &= \frac{\text{dot } \alpha \text{dot } \varrho + 1}{\text{dot } \varrho - \text{dot } \alpha} \\ &= \frac{ar + 1}{r - a}, \text{ a będziemy mieli} \end{aligned}$$

$$P = \frac{\gamma h (\text{wst } \alpha \text{ dost } \varrho - \text{dost } \alpha \text{ wst } \varrho)}{4 \text{ wst}^2 \alpha \text{ wst } \varrho \text{ dost } \varrho \left[\sqrt{\frac{ar+1}{r-a} + \frac{r^2-1}{2r}} + \sqrt{\frac{ar+1}{r-a} - a} \right]^2}$$

a podzieliwszy licznik i mianownik przez $\text{wst}^2 \alpha \text{ wst } \varrho \text{ dost } \varrho$,

$$P = \frac{\gamma h^2 \left(\sqrt{1+a^2} \sqrt{1+r^2} - a \sqrt{1+a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} \right)}{4 \left[\sqrt{\frac{ar^2+r+r^3+a}{2r(r-a)}} + \sqrt{\frac{1+a^2}{r-a}} \right]^2};$$

nareszcie

$$P = \frac{\gamma h^2 (r-a)^2 \sqrt{(1+a^2)(1+r^2)}}{2 \left[\sqrt{(1+r^2)(a+r)} + \sqrt{2r(1+a^2)} \right]^2} \dots 830)$$

Na podstawie tego równania obliczyliśmy następną tabliczkę:

P	Wartość dla $a = \text{dot } \alpha$													
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	
1,0	0,044	0,052	0,056	0,064	0,068	0,071	0,089	0,108	0,112	0,118	0,131	0,142	0,159	
1,1	0,052	0,060	0,065	0,073	0,077	0,080	0,097	0,117	0,121	0,128	0,139	0,149	0,166	
1,2	0,060	0,068	0,073	0,081	0,085	0,089	0,106	0,126	0,130	0,137	0,148	0,158	0,174	
1,3	0,068	0,076	0,081	0,089	0,094	0,098	0,114	0,134	0,138	0,146	0,156	0,166	0,182	
1,4	0,075	0,084	0,089	0,097	0,102	0,105	0,123	0,142	0,146	0,154	0,164	0,175	0,190	
1,5	0,083	0,092	0,098	0,105	0,110	0,113	0,131	0,150	0,154	0,161	0,172	0,182	0,197	
1,6	0,091	0,099	0,105	0,113	0,118	0,121	0,138	0,158	0,162	0,169	0,179	0,188	0,204	
1,7	0,098	0,107	0,113	0,121	0,125	0,129	0,147	0,166	0,170	0,177	0,186	0,195	0,212	
1,8	0,106	0,115	0,120	0,128	0,132	0,136	0,154	0,173	0,177	0,185	0,193	0,202	0,218	
1,9	0,113	0,122	0,127	0,136	0,139	0,143	0,161	0,180	0,184	0,192	0,201	0,209	0,225	
2,0	0,120	0,129	0,135	0,143	0,147	0,150	0,168	0,187	0,192	0,199	0,208	0,216	0,231	

§. 181. Parcie ziemi, gdy naziom nachylony do poziomu pod kątem tarcia.

Gdy naziom nachylony jest do poziomu pod kątem tarcia (rys. 375) czyli $\beta = \varrho$, wtedy wstawiając tę wartość w równ.

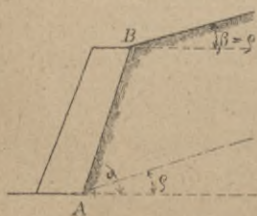
826), otrzymamy $\text{dot } \psi = \text{dot } (\alpha - \varrho)$, a więc

$$\psi = \alpha - \varrho \dots 831)$$

t. j. płaszczyzna odłamu jest równoległą do stoku naturalnego. Według 824) i 825) mamy więc

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst } (\alpha - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{ wst } 2\varrho (\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } 2\varrho)}$$

rys. 375



$$= \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst} 2 \varrho \left(\frac{\text{dost}(\alpha - \varrho)}{\text{wst}(\alpha - \varrho)} + \frac{\text{dost} 2 \varrho}{\text{wst} 2 \varrho} \right)}, \text{ a stąd}$$

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}^2(\alpha - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst}(\alpha - \varrho)} \dots \dots \dots 832)$$

§. 182. Parcie ziemi na mur pionowy.

Gdy mur jest pionowy (rys. 376), to $\alpha=90^\circ$. Wstawiawszy to w równanie 825), otrzymamy

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{dost} \varrho}{2 \text{wst} 2 \varrho [\sqrt{\text{st} \varrho + \text{dot} 2 \varrho} + \sqrt{\text{st} \varrho - \text{st} \beta}]^2} =$$

$$= \frac{\gamma h^3}{4 \text{wst} \varrho \left[\sqrt{\text{st} \varrho + \frac{1 - \text{st}^2 \varrho}{2 \text{st} \varrho}} + \sqrt{\text{st} \varrho - \text{st} \beta} \right]^2}$$

albo

$$P = \frac{\gamma h^2 \cdot 2 \text{st} \varrho}{4 \text{wst} \varrho [\sqrt{\text{st}^2 \varrho + 1} + \sqrt{2 \text{st} \varrho (\text{st} \varrho - \text{st} \beta)}]^2} =$$

$$= \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \text{st}^3 \varrho}}{2 [\sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho} + \sqrt{2 \text{st} \varrho (\text{st} \varrho - \text{st})}]^2} \dots \dots \dots 833)$$

Na podstawie tego wzoru obliczoną tabliczkę podajemy poniżej częściowo według Otta:

$\frac{P}{\gamma h^2} =$		Wartość dla $\text{st} \beta$										
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,1
Wartość dla $\text{st} \varrho$	1,0	0,089	0,093	0,099	0,105	0,112	0,121	0,133	0,148	0,169	0,204	0,354
	0,9	0,099	0,104	0,110	0,118	0,128	0,139	0,153	0,178	0,215	0,372	—
	0,8	0,110	0,117	0,126	0,135	0,148	0,164	0,188	0,227	0,390	—	—
	0,7	0,125	0,134	0,144	0,157	0,175	0,199	0,240	0,410	—	—	—
	0,6	0,143	0,155	0,169	0,187	0,213	0,255	0,428	—	—	—	—
	0,5	0,168	0,183	0,202	0,228	0,267	0,400	—	—	—	—	—
	0,4	0,199	0,220	0,247	0,291	0,464	—	—	—	—	—	—
	0,3	0,243	0,270	0,314	0,479	—	—	—	—	—	—	—

Jeżeli oprócz tego naziom jest poziomy, czyli $\beta=0$, wtedy

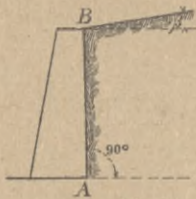
$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho}}{2 [\sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho} + \sqrt{2 \text{st}^2 \varrho}]^2},$$

a wstawiawszy $r = \text{dot} \varrho$, otrzymamy

$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}}{2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} + \sqrt{2 \frac{1}{r^2}} \right]^2} = \frac{\gamma h^3 r \sqrt{1+r^2}}{2 [\sqrt{2} + \sqrt{1+r^2}]^2} \dots 834)$$

To samo otrzymamy z równania 830), wstawivszy $\alpha = 90^\circ$, więc dot $a = a = 0$.

rys.376



Gdy naziom jest równoległy do stoku naturalnego to $\beta = \varrho$, a więc z 833) otrzymujemy

$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho}}{2 [\sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho}]^2} = \frac{\gamma h^2}{2 \sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho}} = \frac{\gamma h^2}{2 \text{ siecz } \varrho} = \frac{\gamma h^2}{2} \text{ dost } \varrho \dots 835)$$

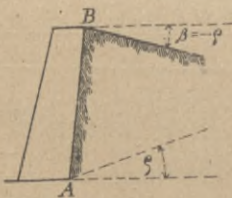
To samo możemy wprost otrzymać z równania 832), wstawivszy $\alpha = 90^\circ$.

§. 183. Parcie ziemi przy naziomie spadającym.

Gdy naziom spada, β jest ujemne. Możemy więc użyć poprzednich wzorów, wstawivjąc tylko w nie $-\beta$ zamiast $+\beta$.

Tylko, gdy ziemia spada pod kątem tarcia (rys. 377), możemy odnośny wzór inaczej napisać. Wtedy mamy $\beta = -\varrho$.

rys.377



Ogólnie otrzymamy z równania 828)

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{ wst } (\alpha - \varrho)}{2 \text{ wst}^2 \alpha \text{ wst}^2 \varrho [\sqrt{\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } 2\varrho} + \sqrt{\text{dot } (\alpha - \varrho) + \text{dot } (\alpha + \varrho)}]^2} \dots 836)$$

a gdy mur jest pionowy, czyli $\alpha = 90^\circ$, otrzymamy z równania 833) po wstawieniu $\beta = -\varrho$

$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho}}{2 [\sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho} + \sqrt{4 \text{st}^2 \varrho}]^2} = \frac{\gamma h^2 \text{ siecz } \varrho}{2 [\text{ siecz } \varrho + 2 \text{ st } \varrho]^2} = \frac{\gamma h^2 \frac{1}{\text{dost } \varrho}}{2 \left(\frac{1 + 2 \text{ wst } \varrho}{\text{dost } \varrho} \right)^2}$$

nareszcie

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{ dost } \varrho}{2 (1 + 2 \text{ wst } \varrho)^2} \dots \dots \dots 837)$$

§. 184. Wyznaczenie parcia ziemi dla naziomu pochyłego, zakończony płaszczyzną poziomą.

Gdy naziom wznosi się pod kątem β aż do pewnej wysokości h_1 , a potem zakończony jest płaszczyzną poziomą (rysunek 378), to ciężar odłamu

$$C = \gamma(AED = BEC).$$

Dalej mamy

$$AED = \frac{1}{2} H \cdot ED = \frac{1}{2} H (FD - EF) = \\ = \frac{1}{2} H^2 (\text{dot } \varphi - \text{dot } \alpha),$$

podobnie

$$BEC = \frac{1}{2} h_1^2 (\text{dot } \beta - \text{dot } \alpha), \text{ więc}$$

$$C = \frac{1}{2} \gamma H^2 (\text{dot } \varphi - \text{dot } \alpha) + \\ - \frac{1}{2} \gamma h_1^2 (\text{dot } \beta - \text{dot } \alpha), \text{ albo}$$

$$C = \gamma \frac{H^2}{2} [\text{dot } \varphi - \text{dot } \alpha) +$$

$$- \left(\frac{h_1}{H}\right)^2 (\text{dot } \beta - \text{dot } \alpha)] =$$

$$= \frac{\gamma H^2}{2} (\text{dot } \varphi - k), \dots \dots \dots 838)$$

gdzie $k = \text{dot } \alpha + \left(\frac{h_1}{H}\right)^2 (\text{dot } \beta - \text{dot } \alpha), \dots \dots \dots 839)$

któryto wyraz jest od φ niezależnym.

Podstawiawszy w równanie 820) wartość za C , otrzymamy

$$P = \frac{\gamma H^2}{2} (\text{dot } \varphi - k) \frac{\text{wst } (\varphi - \varrho)}{\text{wst } (\alpha + 2 \varrho - \varphi)}, \text{ czyli}$$

$$P = \frac{\gamma H^2 (\text{dot } \varphi - k) (\text{wst } \varphi \text{ dost } \varrho - \text{wst } \varrho \text{ dost } \varphi)}{2 (\text{wst } (\alpha + 2 \varrho) \text{ dost } \varphi - \text{dost } (\alpha + 2 \varrho) \text{ wst } \varphi)},$$

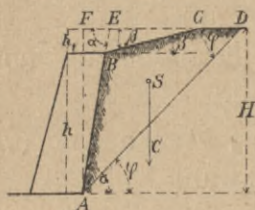
a podzieliwszy przez $\text{wst } \varphi$ licznik i mianownik

$$P = \frac{\gamma H^2 (\text{dost } \varphi - k) (\text{dost } \varrho - \text{wst } \varrho \text{ dot } \varphi)}{2 (\text{wst } (\alpha + 2 \varrho) \text{ dot } \varphi - \text{dost } (\alpha + 2 \varrho))}$$

$$= \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho (\text{dot } \varphi - k) \text{dot } \varrho - \text{dot } \varphi)}{2 \text{wst } (\alpha + 2 \varrho) [\text{dot } \varphi - \text{dot } (\alpha + 2 \varrho)]},$$

a gdy $x = \text{dot } \varphi, P = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho (x - k) (\text{dot } \varrho - x)}{2 \text{wst } (\alpha + 2 \varrho) [x - \text{dot } (\alpha + 2 \varrho)]} = \\ = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho}{2 \text{wst } (\alpha + 2 \varrho)} \cdot U, \dots \dots \dots 840)$

rys. 378



gdymath display="block">U = \frac{(x - k) (\operatorname{dot} \varphi - x)}{x - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)}

Jeżeli U , a więc i P , ma być największym, to $\frac{dU}{dx} = 0$, więc

$$\frac{dU}{dx} = \frac{[x - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)] (\operatorname{dot} \varphi - 2x + k) - (x - k) \operatorname{dot} \varphi - x}{[x - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)]^2} = 0.$$

Ponieważ ani $x = \operatorname{dot} \varphi$, ani $\operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)$ nie mogą być równe ∞ , więc musi być $[x - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)] \operatorname{dot} \varphi - 2x + k + - (x - k) (\operatorname{dot} \varphi - x) = 0$, czyli $x (\operatorname{dot} \varphi + k) - 2x^2 + 2x \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) + - x (\operatorname{dot} \varphi + k) + x^2 = \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) (\operatorname{dot} \varphi + k) - k \operatorname{dot} \varphi$, stąd $x^2 + - 2x \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) = - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) \operatorname{dot} \varphi + k (\operatorname{dot} \varphi - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi))$
a więc $x = \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) +$

$$\pm \sqrt{\operatorname{dot}^2 (\alpha + 2 \varphi) - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) \operatorname{dot} \varphi + k (\operatorname{dot} \varphi - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi))}, \text{ albo}$$

$$x = \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) +$$

$$\pm \sqrt{\operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) [\operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) - \operatorname{dot} \varphi] + k (\operatorname{dot} \varphi - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi))},$$

wreszcie $x = \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) +$

$$\pm \sqrt{[k - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)] [\operatorname{dot} \varphi - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)]}.$$

Dla najw U przyjmujemy tylko znak górny, więc

$$x = \operatorname{dot} \varphi = \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) +$$

$$+ \sqrt{[k - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)] [\operatorname{dot} \varphi - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)]}. \quad \dots \quad 841)$$

Według równ. 827) otrzymamy, przyjmawszy $U = \frac{F(x)}{f(x)}$,

$$\text{najw } U = \frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{\operatorname{dot} \varphi - 2x + k}{1} = \operatorname{dot} \varphi - 2x + k, \text{ więc}$$

$$\text{najw } U = \operatorname{dot} \varphi + k - 2 \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi) +$$

$$= 2 \sqrt{[k - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)] [\operatorname{dot} \varphi - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)]},$$

$$\text{stąd najw } U = [\sqrt{k - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)} - \sqrt{[\operatorname{dot} \varphi - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)]}]^2$$

Wstawiwszy tę wartość w 840), otrzymamy

$$P = \frac{\gamma H^2 \operatorname{wst} \varphi}{2 \operatorname{wst} (\alpha + 2 \varphi)} [\sqrt{k - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)} - \sqrt{[\operatorname{dot} \varphi - \operatorname{dot} (\alpha + 2 \varphi)]}]^2 \quad 842)$$

Jeżeli przytem mur jest pionowy, to $\alpha = 90^\circ$, $\operatorname{dot} 90^\circ = 0$, więc według równania 839)

$$k = \left(\frac{h_1}{H} \right)^2 \operatorname{dot} \beta.$$

Wstawiwszy to w równ. 841), otrzymamy dla muru pionowego

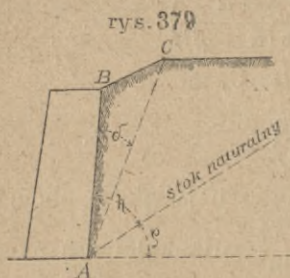
$$P = \frac{\gamma H^2 \operatorname{wst} \varphi}{2 \operatorname{dost} 2 \varphi} \left[\sqrt{\frac{h_1^2 \operatorname{dot} \beta}{H^2} + \operatorname{st} 2 \varphi} - \sqrt{\operatorname{dot} \varphi + \operatorname{st} 2 \varphi} \right] \quad 843)$$

Dla $\rho=33^\circ$ i $\beta=\rho$ otrzymamy z równ. 843) następną tabliczkę:

$\frac{h_1}{h}=0,$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$P=0,134$	0,158	0,182	0,200	0,217	0,228	0,240	0,251	0,262	0,272
$\frac{h_1}{h}=1$	2	3	4	5	6	10	∞		
$P=0,282$	0,330	0,353	0,366	0,376	0,384	0,394	0,419	$\gamma h^2.$	

§. 185. Wysokość punktu zaczepienia parcia ziemi dla naziomu płaskiego, zakończonego płaszczyzną poziomą.

Dokładne wyznaczenie punktu zaczepienia w sposób analityczny jest bardzo zawilem, wykreślnie rozwiążemy to zagadnienie daleko łatwiej. Teraz ograniczymy się więc na podaniu wyników odnośnych badań



Ponceleta, Rebhanna i Culmanna, a mianowicie, że **najw $e=0,375 h$** . 844) i to dla $\delta=\frac{1}{3}\eta$ (rys. 379).

Widzimy więc, że dla innych wartości δ leży e w ciasnym granicach między $0,333 h$ i $0,375 h$.

§. 186. Uwzględnienie ciężaru ruchomego.

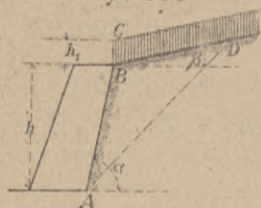
Jeżeli obciążenie ziemi wynosi $q \frac{kg}{m^2}$, to da się ono zastąpić warstwą ziemi o wysokości h_1 (rys. 380), której ciężar równałby się obciążeniu q . A więc, gdy ciężar gatunkowy ziemi jest γ , to ciężar m^2 warstwy ziemi o wysokości h_1 jest γh_1 , a więc $\gamma h_1=q$, a stąd

$$h_1 = \frac{q}{\gamma} \dots \dots \dots 845)$$

Jeżeli więc teraz wyznaczmy parcie ziemi na ścianę AC, a od tego odciagniemy parcie ziemi na długości BC, to otrzymamy parcie ziemi na AB z uwzględnieniem obciążenia.

Wpływ obciążenia możemy też inaczej uwzględnić, a mianowicie podobnie, jak w §. 172, wstawiając we wzory wyznaczające ciężar odłamu C dla naziomu płaskiego zamiast γh wyraz

rys. 380



$$\gamma h + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\operatorname{wst}(\alpha - \beta)} =$$

$$= \gamma h \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst}(\alpha - \beta)} \right) = \gamma h c,$$

jeżeli $c = 1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst}(\alpha - \beta)}$, przy czem $l = AD$ zostawiamy niezmiennione.

Otrzymamy więc ciężar odłamu z uwzględnieniem obciążenia $C' = Pc$, jeżeli C oznacza ciężar odłamu bez uwzględnienia obciążenia. Dalej otrzymamy

$$P' = Pc = P \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst}(\alpha - \beta)} \right), \quad \dots \quad 846)$$

a dla naziomu poziomego, ponieważ $\beta = 0$,

$$P' = P \left(1 + \frac{2q}{\gamma h} \right) \quad \dots \quad 847)$$

Dla dróg przyjmujemy zwykle jako największe obciążenie tłum ludzi lub wozów, zatem $q = 400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$, dla kolei zaś możemy przyjąć przy obciążeniu parowozami przeciętnie $q = 1400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$, którego wartość zresztą zależy od ciężaru parowozów, rozstępu osi i szerokości nasypu. A więc gdy n. p. $\gamma = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$, to

$$\text{dla dróg } h_1 = \frac{400}{1600} = \frac{1}{4} \text{ m,}$$

$$\text{dla kolei } h_1 = \frac{1400}{1600} = \frac{7}{8} \text{ m,}$$

Wskutek obciążenia zmienia się punkt zaczepienia parcia ziemi, a mianowicie, ponieważ obciążenie działa u góry, punkt zaczepienia podniesie się. Postępując według ogólnej metody (§. 178), otrzymamy z równania 846)

$$P' = Pc = c_1 h^2 \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst}(\alpha - \beta)} \right)$$

dla naziomu płaskiego, bo wtedy parcie P jest proporcjonalne do h^2 , przyczem c_1 oznacza liczbę stałą. Możemy wtedy też napisać

$$P = c_1 h \left(h + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma \operatorname{wst}(\alpha - \beta)} \right) = c_1 h (h + c_2),$$

a stąd dla wysokości x (rys. 381)

$$p' = c_1 x (x + c_2), \text{ a dalej } dp' = 2c_1 x dx + c_1 c_2 dx.$$

Według metody ogólnej (rów. 823) mamy

$$e'_1 = \frac{1}{P} \int_0^h x dp' = \frac{1}{c_1 h (h + c_2)} \left[\int_0^h 2c_1 x^2 dx + \int_0^h c_1 c_2 x dx \right],$$

a scałkowawszy, otrzymamy

$$e'_1 = \frac{1}{h(h+c_2)} \left(\frac{2h^3}{3} + \frac{h^2}{2} c_2 \right), \text{ a więc}$$

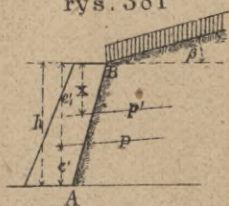
$$e' = h \cdot e'_1 = \frac{6h^2(h+c_2) - 4h^3 - 3h^2c_2}{6h(h+c_2)} \text{ czyli}$$

$$e' = \frac{2h^2 + 3hc_2}{6(h+c_2)} = \frac{h}{3} \frac{h + \frac{3}{2}c_2}{h+c_2}, \dots \dots \dots 848)$$

przyczem

$$c_2 = \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma \operatorname{wst}(\alpha - \beta)} \dots \dots \dots 849)$$

rys. 381



Z równania 848) widzimy, że e jest zawsze większe niż $\frac{h}{3}$, a mianowicie otrzymamy granice

$$\text{dla } q=0 \quad c_2=0, \quad \text{więc } e' = \frac{h}{3},$$

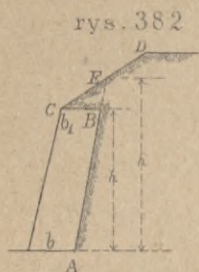
$$\text{dla } q = \infty \quad c_2 = \infty, \quad \text{więc } e' = \frac{h}{2}.$$

A zatem punkt zaczepienia parcia ziemi obciążonej leży między granicami $0,33h$ a $0,5h$. Jeżeli $\beta=0$, więc gdy naziom jest poziomy, mamy $c'_2 = \frac{2q}{\gamma}$, więc

$$e' = \frac{h}{3} \frac{h + \frac{3q}{\gamma}}{h + \frac{2q}{\gamma}} \dots \dots \dots 850)$$

§. 187. Parcie ziemi, gdy mur nakryty jest ziemią.

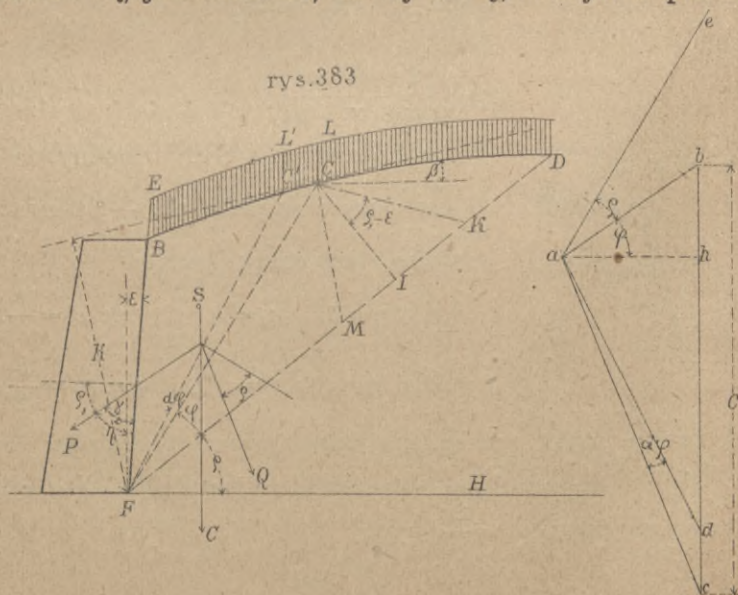
Jeżeli wierzch muru CB (rys. 382) jest nakryty ziemią, wtedy liczymy parcie ziemi na AE i odciągamy od tego parcie na BE , a w ten sposób otrzymamy parcie na AB . Zachodzi tu jednak ta trudność, że nie znając grubości muru b_1 u wierzchu, nie znamy też z początku wysokości h_0 . Musimy więc grubość wierzchu muru b_1 tymczasowo przyjąć w przybliżeniu. Ze względów praktycznych musi być b_1 przynajmniej $=0,5\text{ m}$.



XV. Parcie ziemi wyznaczone wykreślnie.

§. 188. Zasady.

Przypuśćmy, że prosta FC (rys. 383) jest przecięciem się płaszczyzny odłamu z płaszczyzną rysunku. Ciężar odłamu C rozkłada się, jak wiadomo, na siły P i Q , nachylone pod kątem



tarcia q do prostopadłych na proste FB i FC . Przyjmijmy jednak ogólnie, że parcie P jest nachylone do prostopadłej na FB

pod innym kątem φ_1 . Rozłóżmy siłę C wykreślnie, a mianowicie zróbmy $C=bc$, poprowadźmy $ba \parallel P$ i $ca \parallel Q$, a wtedy $ab=P$ a $ac=Q$.

Jeżeli teraz prostą FC odchylimy od $d\varphi$ tak, że przyjdzie w położenie FC' , to o ten sam kąt $d\varphi$ odchyli się siła Q , co musimy uwzględnić także w wieloboku sił, robiąc $\sphericalangle cad=d\varphi$. Jeżeli więc bc przedstawia ciężar $C=\gamma \cdot FCLEB=\gamma A$, licząc na długość $1m$ w kierunku prostopadłym do rysunku, to długość dc przedstawia ciężar $dC=FCLL'C'=\gamma dA$, przyczem γ oznacza ciężar gatunkowy ziemi. A więc $A:dA=bc:dc$, a pomnożywszy drugą stronę proporcji przez $\frac{1}{2}ah$, otrzymamy

$$A:dA=abc:adc \dots \dots \dots 851)$$

Wielobok sił możemy w jakiegokolwiek podziałce wykreślić, możemy więc także wybrać taką, aby $ac=FC$, a wtedy $FCC'=adc$, bo z powodu, że kąt $d\varphi$ jest nieskończenie małym, możemy przyjąć $ad=ac$, również $FC=FC'$; mamy więc dwa boki i kąt między nimi zawarty równe, dalej mamy $dC=cd=-\gamma(FCC'+h_1CC'$ dost $\beta)$, jeżeli $h_1=CL$ oznacza sprowadzoną wysokość obciążenia a β kąt nachylenia prostej CC' do poziomu. Możemy teraz napisać

$$dC=\gamma dA=\gamma FCC' \left(1+\frac{h_1 CC' \text{ dost } \beta}{FCC'}\right)=\gamma adc \left(1+\frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}\right),$$

jeżeli wstawimy

$$adc=FCC' \text{ i } \frac{h}{2}=\frac{FCC'}{CC'},$$

a stąd wynika

$$dA=adc \left(1+\frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}\right)$$

Według równ. 851) mamy $A=dA \cdot \frac{abc}{adc}$, a wstawiwszy wartość za dA

$$A=adc \left(1+\frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}\right) \frac{abc}{adc}=abc \left(1+\frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}\right) \dots 852)$$

Zróbmy $ae \parallel FC$, to $\sphericalangle cae=90+\varphi$, ale także $\sphericalangle cae=-cah+hae=cah+\varphi+\varphi$, a stąd $\sphericalangle cah=90-\varphi$, a więc $\sphericalangle ach=90-cah=\varphi$.

Poprowadźmy teraz $CI \perp FD$, to $FCI \cong ach$, bo $FC=ac$, $\varphi=\sphericalangle ach$, a drugi kąt jest prostym, więc $CI=ah$. Z rysunku

widzimy, że $\eta = \gamma + \varepsilon = 90 - \varrho_1 + \varepsilon$, jeżeli ε oznacza kąt nachylenia ściany do pionu. Dalej mamy $\sphericalangle bah = 90 - \eta$, bo $ab \parallel P$, a ah poziomą. Wstawimy wartość za η , otrzymamy $\sphericalangle bah = \varrho_1 - \varepsilon$. Poprowadźmy CK pod kątem $\varrho_1 - \varepsilon$ do CI , to otrzymamy $FCK \cong abc$, bo wszystkie boki są równoległe, a $CI = ah$. Stąd wynika ze względu na równanie 852)

$$A = FCK \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'} \right) \dots \dots \dots 853)$$

Dla $p=0$ jest $h_1=0$, więc $A = FCK$, a zatem dla ziemi nieobciążonej prosta FC połowi powierzchnię $FBCK$.

Chcąc wyznaczyć parcie P , ustawimy proporcją $P:C = ab:bc = CK:FK$. Zróbmy $KM = KC$, to otrzymamy $P:C = KM:FK$, a pomnożywszy drugą stronę równania przez $\frac{1}{2} CI$, otrzymamy $P:C = KMC:FKC$. Ponieważ zaś $C = \gamma A = \gamma FCK \left(1 + \frac{2h_1}{h} \text{ dost } \beta \right)$, więc

$$P = C \frac{KMC}{FKC} = \gamma KMC \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'} \right) \dots \dots \dots 854)$$

Ciężar graniastosłupa o podstawie KMC a wysokości równej jedności jest więc proporcjonalny do parcia ziemi P na mur AB . Graniastosłup KMC nazywamy dlatego graniastosłupem parcia (n. *Druckprisma*). Dla $p=0$ jest $h_1=0$, więc

$$P = \gamma_1 KMC, \dots \dots \dots 855)$$

a zatem dla ziemi nieobciążonej ciężar graniastosłupa parcia równa się parciu ziemi na ścianę AB . Jeżeli jak zwykle przyjmujemy $\varrho_1 = \varrho$, to kąt $ICK = \varrho - \varepsilon$.

§. 189. Parcie ziemi na mur płaski dla naziomu płaskiego.

Według równania 853) mamy

$$A = FCK \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'} \right),$$

z rysunku zaś 384 widzimy, że

$$A = FBC + h_1 BC \text{ dost } \beta; \text{ a więc}$$

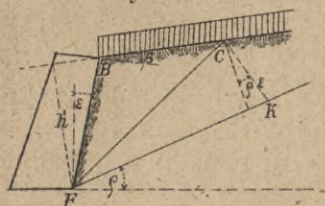
$$A = FBC \left(1 + \frac{h_1 BC \text{ dost } \beta}{\frac{1}{2} BC \cdot h'} \right) = FBC \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'} \right),$$

zatem porównawszy z równ. 853), otrzymamy

$$FBC = FCK \dots \dots \dots 856)$$

A zatem, jeżeli naziom jest płaski, a ziemia jednostajnie obciążona, to położenie płaszczyzny odłamu jest niezależne od obciążenia, ponieważ i tu prosta FC połowi powierzchnię $FBCK$.

rys. 384

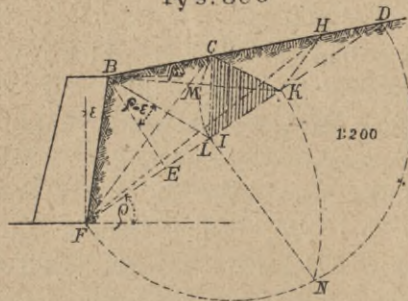


W dalszym ciągu będziemy więc wyznaczać zawsze płaszczyznę odłamu bez względu na obciążenie, które dopiero uwzględnimy, mnożąc graniastosłup parcia czynnikiem $(1 + \frac{2h_1}{h'})$ dost β . W przybli-

żeniu licząc, postępować tak będziemy także wtedy, gdy naziom jest krzywy.

Jeżeli więc ziemia jest nieobciążoną, to $FBC = FCK$ (rysunek 385), a stąd $BM = MK$. Można by zatem wyznaczyć położenie prostej FC ,

rys. 385.



próbując tak, aby BM było równe MK , przyczem CK ma być nachylone do prostopadłej na FD pod kątem $\varrho_1 - \epsilon$. Spuścimy z punktu B prostopadłą BE na FD i wykreślimy BL pod kątem $\varrho_1 - \epsilon$, to prosta BL będzie

równoległą do CK i nazywa się kierującą (n. *Orientierungslinie, Hauptlinie, Stellungslinie*), bo wskazuje kierunek prostej CK .

W tym wypadku mamy $\sphericalangle BFL = 90^\circ - \varrho - \epsilon$, a więc kąt $FBE = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle BFL = \varrho + \epsilon$, zatem $\sphericalangle FBL = \sphericalangle FBE + \varrho_1 - \epsilon$, lub

$$\sphericalangle FBL = \varrho + \varrho_1 \dots \dots \dots 857)$$

Jeżeli, jak zwykle, $\varrho = \varrho_1$, to

$$\sphericalangle FBL = 2\varrho, \dots \dots \dots 858)$$

tak też na przyszłość będziemy przyjmować.

A więc kierująca nachyloną jest pod kątem $\varrho + \varrho_1$, względnie 2ϱ do ściany FB i to dla naziomu o do-

wolnym kształcie, bo przy udowodnieniu tego twierdzenia nie potrzebowaliśmy przypuszczać, że naziom jest płaski.

Płaszczyzną odłamu możemy też wprost wyznaczyć łatwą konstrukcją, którą zaraz uzasadnimy. Z rys. 385 wynika, że jeżeli zrobimy

$KH \parallel FC$, będzie $FCD \sim KHD$, a stąd $FK:FD=CH:CD$.

Ponieważ $KH \parallel CF$, więc $FCK=FCH$, a że także $FCK=FBC$, więc $FBC=FCH$, a stąd $BC=CH$.

Wstawmy tę wartość za CH w poprzednią proporcję, a otrzymamy

$FK:FD=BC:CD$, a z trójkątów $BLD \sim CKD$

$BC:CB=LK:KD$, a więc

$FK:FD=LK:KD$, lub

$FK:FD=(FK-FL):(FD-FK)$.

Pomnożywszy wyrazy skrajne i średnie, otrzymamy

$FK \cdot FD - \overline{FK}^2 = FK \cdot FD - FD \cdot FL$, więc

$FK^2 = FD \cdot FL$ 859)

a zatem FK jest średnio geometrycznie proporcjonalną między długościami FD i FL .

Stąd wypływa łatwa konstrukcja wyznaczania punktu K . Zatoczmy nad FD półkole, wykreślmy kierującą BL , zróbmy $LN \perp FD$, wyznaczmy N , punkt przecięcia się LN z kołem, zróbmy $FN=FK$, to FN , a więc i FK , będzie średnio geometrycznie proporcjonalną między FD i FL , a więc, jeżeli zrobimy $KC \parallel BL$, prosta FC będzie śladem płaszczyzny odłamu.

Przykład. Na rysunku 385 jest $\varepsilon=8^\circ 45'$, $\alpha=90-\varepsilon=81^\circ 15'$, $\rho=35^\circ$, $\text{st } \beta=0,2$, $\beta=11^\circ 18'$, $h=3,8 \text{ m}$. Wykreślnie otrzymujemy dla $\gamma=1,8$ $P=\gamma \cdot CIK=\gamma \frac{1}{2} 1,96 \times 1,7=1,8 \times 1,516=2,73 \text{ t}$. Analitycznie otrzymamy (z równania 828)

$$P = \frac{1,8 \cdot 3,8^2 \text{ wst}(81^\circ 15' - 35^\circ)}{2 \text{ wst}^2 81^\circ 15' \text{ wst} 70^\circ [\sqrt{\text{dot } 46^\circ 15' + \text{dot } 70^\circ + \text{dot } 46^\circ 15' - \text{dot } 69^\circ 57'}]^2} = 2,77 \text{ t}$$

W uwzględnieniu małej podziałki zgodność jest dostateczną.

Jeżeli punkt D wypada poza papier, wtedy użyjemy następnej konstrukcji pomocniczej. Wyznaczmy jak zwykle kierującą BL (rys. 386), poprowadźmy $LL' \parallel BD$. Zatoczmy nad FB półkole, wystawmy $L'N' \perp FB$ i zróbmy $FK'=FN'$, to FK' będzie średnią geometrycznie proporcjonalną między FL' i FB .

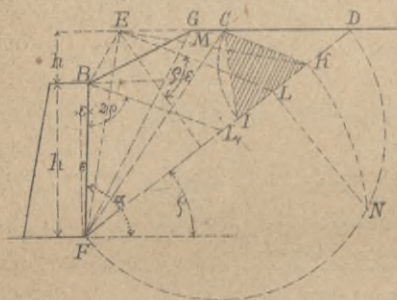
Przykład. Na rysunku 390 jest $h=4\text{ m}$, $h_1=1,2\text{ m}$, $\beta=26^\circ$, $\rho=36^\circ 53'$, $\varepsilon=4^\circ$, $\alpha=86^\circ$. Wykreślnie dla $\gamma=1,8$ mamy $P=\gamma$. $CIK=1,8 \frac{1}{2} 2,2 \times 2,1 = 4,16$. Analitycznie mamy według 839)

$$k = \text{dot } \alpha + \left(\frac{h_1}{H}\right)^2 (\text{dot } \beta - \text{dot } \alpha) = 0,07 + \left(\frac{1,2}{5,2}\right)^2 (2,05 - 0,07) = 0,07 + 0,1055 = 0,1755,$$

a według równ. 842)

$$P = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \rho}{2 \text{wst } (\alpha + 2\rho)} [\sqrt{k - \text{dot } (\alpha + 2\rho)} - \sqrt{\text{dot } \rho - \text{dot } (\alpha + 2\rho)}]^2 = \frac{1,8 \times 5,2^2 \text{wst } 36^\circ 53'}{2 \text{wst } 159^\circ 46'} [\sqrt{k - \text{dot } 159^\circ 46'} - \sqrt{\text{dot } 36^\circ 53' - \text{dot } 159^\circ 46'}]^2 = 4,1 t.$$

rys. 390

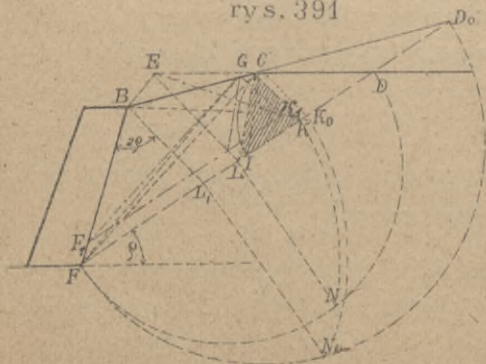


Chcąc się przekonać, w jakim stosunku do wysokości ściany FB zmienia się parcie, wyznaczmy miejsce geometryczne punktów K (rys. 391), których w znany sposób użyć możemy do wykreślenia trójkątów parcia.

Przypuśćmy najprzód, że ziemia ograniczona jest jedną płaszczyzną BD_0 i wyznaczmy dla tego wypadku w zwykły

sposób punkt K_0 . Ponieważ prosta, poprowadzona równolegle do kierującej z K_0 , trafia nie BG , lecz jej przedłużenie w punkcie C , więc punktu K_0 nie możemy użyć do wyznaczenia trójkątu parcia. Wiemy jednak, że prosta BK_0 jest miejscem

rys. 391



geometrycznem punktów K dla odłamów nie sięgających jeszcze płaszczyzny GD . Graniczny punkt K_1 znajdziemy, poprowadziwszy $GK_1 \parallel BL_1$, a zrobiwszy dalej $K_1F_1 \parallel KF$, otrzymamy

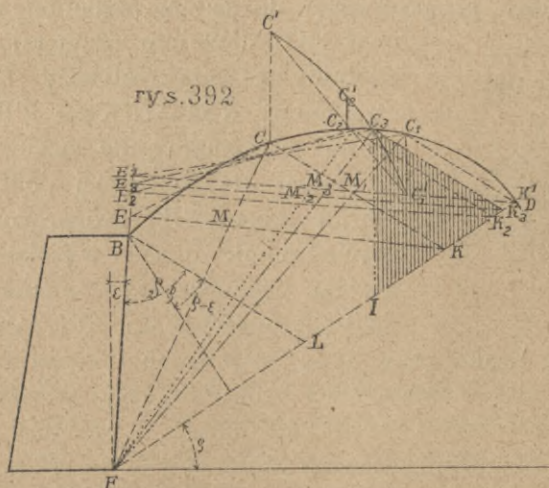
punkt F_1 i płaszczyznę odłamu F_1G , do której będą równoległe wszystkie płaszczyzny odłamu po lewej stronie F_1G .

Chcąc otrzymać parcie dla całej wysokości FB , kreślimy FG , dalej $BE \parallel FG$, $EL \parallel BL_1$ i w zwykły sposób wyznaczamy punkt K . Gdyby punkt E był stałym, toby EK było miejscem geometrycznym punktów K . Ponieważ jednak dla punktów, wyżej F leżących, linia FG , więc i BE , pochyla się i punkt E posuwa się na prawo, a z nim i prosta EK , więc widzimy, że punkty K będą leżeć na krzywej, której dwa punkty K i K_1 i styczną EK znamy; możemy więc ją łatwo wykreślić.

Znając punkty K łatwo możemy wyznaczyć dla jakiegokolwiek wysokości ściany parcie ziemi, które dla części ściany FF_1 nie będzie proporcjonalne do kwadratu wysokości. Płaszczyzny odłamu po prawej stronie F_1G nie będą też równoległe, ale zbieżne ku gorze.

§. 191. Parcie ziemi o naziomie dowolnego kształtu na mur płaski.

Jeżeli ziemia jest ograniczona dowolną krzywą powierzchnią BCD (rys. 392), wyszukujemy płaszczyznę odłamu zapomo-



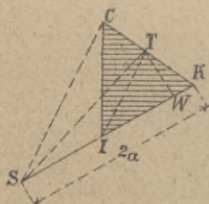
próbowania. Obieramy mianowicie dowolnie punkt C , kreślimy CK równoległe do kierującej BL , zamieniamy powierzchnię FBC na trójkąt FEC , łączymy E z K , a jeżeli FC jest pł-

szczyzną odłamu, EM powinno być równe MK . Prawdopodobnie pokaże się, że tak nie jest, tu n. p. jest $MK > EM$. Wykreślamy teraz w C pionową i robimy $MK - EM = CC'$, wtedy CC' oznacza wielkość błędu dla przyjętej linii odłamu FC . Obieramy teraz punkt C_1 na prawo od C t. j. w stronie większego odcinka prostej EK i powtarzamy konstrukcję. Tu pokazuje się, że $E_1M_1 > M_1K_1$. Tu znów robimy $C_1C'_1 = -(M_1K_1 - E_1M_1)$ i otrzymujemy drugi punkt linii błędu. Gdyby linia błędu $C'C'_1$ była prostą, toby błąd w C_2 był równy zeru. Dla tego punktu powtórzywszy konstrukcję, otrzymaliśmy $C_2C'_2 = M_2K_2 - E_2M_2$. Mamy więc trzy punkta krzywej błędu $C'C'_2C'_1$, która przecina naziom w C_3 . Jeżeli dla tego punktu powtórzymy konstrukcję, otrzymamy oba odcinki równe. Dalsze wykreślenie trójkąta parcia ziemi przeprowadza się zupełnie tak samo, jak w poprzednich ustępach.

§. 192. Wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi.

W poprzednich ustępach otrzymywaliśmy jako wynik konstrukcyi trójkąt, który jest proporcjonalny do parcia ziemi. Chcąc trójkąty te, otrzymane dla różnych wyrokności muru porównać, musimy je sprowadzić do jednej wspólnej podstawy (rys. 393) dowolnie przyjętej $KS = 2a$.

rys. 393



Zrobimy to, wykreśliwszy $IT \parallel CS$ i otrzymamy $KST = CIK = \alpha$. TW . W ten sposób otrzymamy dla każdej wysokości muru dla tej samej podstawy $2a$ pewną prostą TW , proporcjonalną do parcia ziemi. Jeżeli wysokości muru uważać będziemy jako odcinki, a długości, proporcjonalne do parcia, wy-

kreślimy jako rzędne (rys. 394), to wierzchołki rzędnych połączone dadzą linię krzywą DB , która wskazuje w jaki sposób parcie ziemi wzrasta z wysokością muru. Z rys. 394 widzimy, że parcie ziemi na część muru EE_1 równa się $U_1E_1 - UE = U_1W = dy$. Moment tego parcia ze względu na punkt F jest $(h - x)$ dost τdy . Jeżeli momenty parć na dx scałkujemy od 0 do h , to otrzymamy moment siły wypadkowej P , więc

$$Pe \text{ dost } \tau = \int_0^h (h - x) \text{ dost } \tau dy = (h - x) \text{ dost } \tau y \Big|_0^h - \int_0^h y (-dx) \text{ dost } x.$$

Wstawiwszy granice 0 i h , otrzymamy pierwszy wyraz równy zeru, a więc podzieliwszy obie strony równania przez dost τ , będziemy mieli

$$Pe = \int_0^h y dx = A,$$

jeżeli $A = \text{pow. } BFD$, a stąd

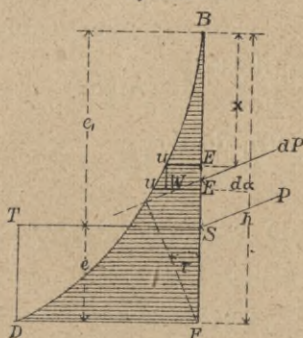
$$e = \frac{A}{P} \dots \dots \dots 860)$$

Ponieważ $P = FD$, więc

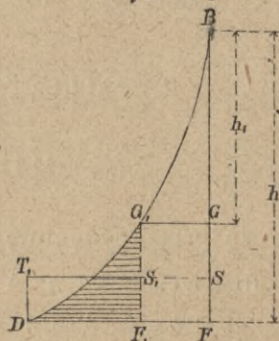
$$A = FD \cdot e \dots \dots \dots 861)$$

a stąd wypływa konstrukcyja następująca: Zamieniamy płaszczyznę FBD w jakikolwiek sposób na prostokąt o podstawie FD , a wysokość jego $FS = e$ na mocy równ. 861).

rys. 394



rys. 395



Ponieważ na wysokość h parcie $= P = DF$, zaś na wysokość h_1 $P_1 = GG_1$, więc parcie na część muru GF $P' = P - P_1 = FD - GG_1 = F_1D$. Punkt zaczepienia parcia ziemi G' da się w zupełnie ten sam sposób wyznaczyć, jeżeli powierzchnię DF_1G_1 zamienimy na prostokąt $F_1S_1T_1D$ o podstawie DF_1 , to F_1S_1 wyznacza wysokość punktu zaczepienia S nad podstawą.

Dla ziemi obciążonej musimy parcie ziemi P i p , a zatem i każdą rzędną y , pomnożyć według równania 854) przez

$\left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}\right)$, albo dodać do każdej rzędnej $y' = y \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}$

(rys. 396). Dla $x=0$ jest $y'=0$, a dla $x=h$ jest

$$y' = FC = FD \cdot \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}$$

Tu więc dodać musimy do pow. FD jeszcze powierzchnię FBC , a zresztą postępujemy, jak pierwej. Robimy więc

$$CDTZ = CBD, \text{ a wysokość } CZ = e'$$

Jeżeli naziom jest płaski, to wiemy, że dla ziemi nieobciążonej $P = bh^2$, a więc $y = bx^2$, gdzie b jest stałym współczynnikiem, a zatem linia BD (rys. 397) jest parabolą.

Dla ziemi obciążonej mamy

$$P_1 = bh^2 \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}\right), \text{ więc}$$

$$y_1 = bx^2 \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}\right)$$

h' zmienia się proporcjonalnie do x , a więc $h' = h'_1 \frac{x}{h}$, jeżeli h'_1 oznacza h' dla wysokości h . A więc

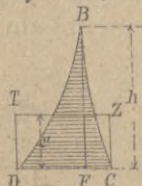
$$y_1 = y + \frac{2bx^2 h_1 \text{ dost } \beta}{x} = y + \frac{2bh_1 h \text{ dost } \beta}{h'_1} x = y + y'$$

Widzimy zatem, że $y' = \frac{2bh_1 h \text{ dost } \beta}{h'_1} x$, więc jest funkcją pierwszego stopnia, linia BC jest zatem prostą. Długość FC otrzymamy, wstawiwszy $x=h$, więc $FC = \frac{2bh_1 h^2 \text{ dost } \beta}{h'_1}$, a zważywszy, że $FD = bh^2$,

$$FC = FD \cdot \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'_1} \dots \dots \dots 862)$$

Parcie ziemi dla jakiegokolwiek wysokości ściany możemy też przedstawić powierzchnią w ten sposób, że trójkąt parcia

rys. 396



rys. 397



KCI (rys. 398) zamieniamy na FBR , którego jednym bokiem FB , robiąc $FN=IK$, $FG=CS$, $GM \parallel FN$, dalej łączymy N z B i kreślimy $MR \parallel BN$, to

$$FBR = MFN = CIK.$$

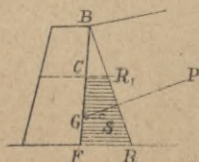
Powierzchnia FBR przedstawia więc parcie na ścianę FB . Łatwo jednak pojmujemy, że parcie ziemi na ścianę F_1B przedstawia trójkąt F_1R_1B , jeżeli naziom jest płaski, gdyż w takim

razie parcia są proporcjonalne do kwadratów wysokości, a więc $P:P_1 = \overline{FB}^2:\overline{F_1B}^2$, a z rysunku widzimy, że $\overline{FB}^2:\overline{F_1B}^2 = \overline{FRB}:\overline{F_1R_1B}$, więc $P:P_1 = \overline{FRB}:\overline{F_1R_1B}$, zatem gdy $P = \overline{FRB}$, to $P_1 = \overline{F_1R_1B}$.

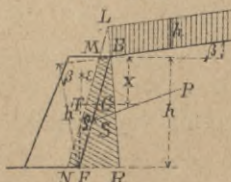
Z poprzedniego wynika też, że $F_1R_1RF = FBR - F_1BR_1 = P - P_1$, a więc równa się parciu na część ściany FF_1 . Podobnie otrzymamy parcie na dowolną część ściany F_1F_2 równe powierzchni $F_1F_2R_2R_1$. Widzimy więc, że parcie w każdym punkcie ściany FB wyraża się odnośną rzędną prostej BR , jeżeli BF przyjmiemy jako oś odcinków. Wypadkowa tych wszystkich sił zaczepiać więc musi w środku ciężkości odnośnej powierzchni, a więc dla całej wysokości FB w $\frac{1}{3}$ wysokości tej linii, bo FBR jest trójkątem.

Jeżeli mamy wyznaczyć punkt zaczepienia parcia ziemi na część muru FC (rys. 399), to wyszukujemy środek ciężkości S trapezu FCR_1R , skąd prowadzimy poziomą SG , a punkt G jest punktem zaczepienia parcia ziemi na część ściany FC .

rys. 399



rys 400



Jeżeli chcemy uwzględnić wpływ obciążenia ziemi, to musimy w razie, jeżeli naziom jest płaski, dodać do trójkąta FBR

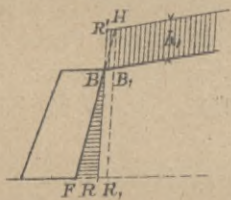
(rys. 400) równoległobok $FBMN$. Wiemy bowiem, że $P_1 = -P + P'$, przyczem $P' = \frac{2bh_1 h x \text{ dost } \beta}{h_1'}$, a więc wzrasta w prostym stosunku do x . Warunkowi temu odpowiada dla wysokości x powierzchnia równoległoboku $MBCT = CT \cdot x = \frac{P'}{\gamma}$, a stąd $CT = NF = \frac{2bh_1 h \text{ dost } \beta}{\gamma h_1'}$. Zważywszy, że $P = bh^2 = \gamma \cdot FBR = \gamma \frac{1}{2} FR \cdot h$, a stąd $bh = \gamma \cdot \frac{FR}{2}$, to wstawiając tę wartość w równanie dla NF , otrzymamy

$$NF = FR \frac{h_1 \text{ dost } \beta}{h_1'} \dots \dots \dots 863)$$

Trapez $NMBR$ nazywamy trapezem parcia (n. *Drucktrapez*). Punkt zaczepienia parcia G wyznaczymy, jak pierwiej, poprowadziwszy ze środka ciężkości trapezu S poziomą SG .

Trapez parcia możemy otrzymać też wykreślić w następujący sposób. Jeżeli obciążenie przedstawimy warstwą ziemi h_1 (rys. 401), to przedłużmy FB aż do przecięcia się z $R'H$ w H . Dla ściany FH wyznaczmy w zwykły sposób trójkąt parcia FHR_1 . Dla ściany BH będzie wtedy parcie BB_1H , a zatem parcie na FB przedstawia trapez BB_1R_1F . Ponieważ

rys. 401

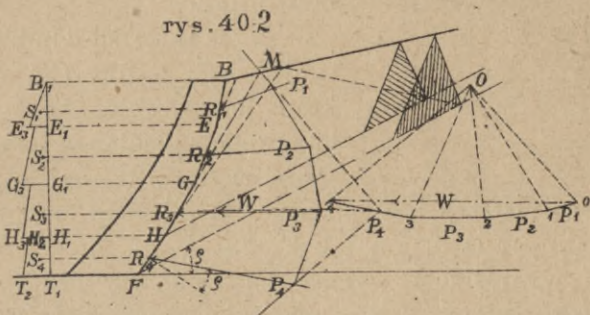


parcie na mur nieobciążony FB jest FBR , przyczem $BR \parallel HR_1$, jeżeli jakość ziemi jest na całej wysokości ta sama, więc możemy postępować odwrotnie, wyznaczyć trójkąt parcia FBR , dla ziemi nieobciążonej, przedłużyć FB do H , a z H wykreślić HR , równoległą do RR_1 , wtedy BB_1R_1F jest trójkątem parcia.

Jeżeli naziom nie jest płaskim, to otrzymalibyśmy zamiast trójkąta i trapezu figury ograniczone liniami krzywymi, dlatego lepiej zastosować wtedy pierwiej podany sposób wyznaczenia punktu zaczepienia (rys. 396).

§. 193. Parcie ziemi na mur krzywy.

Chcąc wyznaczyć parcie ziemi na mur krzywy FB (rys. 402), dzielimy linią FB na pewną ilość części tak, aby pojedyncze części FH , HG itd. można uważać jako proste. Dla każdej z nich obliczamy lub wykreślamy parcie ziemi na tę część ściany, a więc np. na FH różnicę parcia na ścianę FM i HM . Dla wyznaczenia punktu zaczepienia parcia na część muru FH



najlepiej wykreślić, jeżeli naziom jest płaski, trapez parcia $T_1T_2H_2M_1$ według poprzedniego paragrafu, wyznaczyć środek ciężkości trapezu S_4 i wykreślić poziomą S_4R_4 . R_4 jest wtedy punktem zaczepienia parcia ziemi na FH . To samo robimy i z innymi częściami ściany i otrzymamy punkt zaczepienia R_1, R_2 i R_3 , w których odnośne parcia P_1, P_2 i P_3 działają pod kątem tarcia do prostopadłej na kierunku tej części muru. Znając wielkości i kierunki sił P_1, P_2, P_3 i P_4 , składamy je w zwykły sposób z pomocą wieloboku sił i wieloboku sznurowego i otrzymujemy kierunek, wielkość i punkt zaczepienia wypadkowej W .

Gdy naziom nie jest płaskim, wtedy tok konstrukcyi pozostaje ten sam, tylko punkty zaczepienia wyznaczamy według pierwszej metody.

§. 194. Odpór ziemi.

Jeżeli ciśnienie prostopadłe N ściany FB (rys. 403) na ziemię jest równe parciu ziemi na ścianę, to ściana i ziemia pozostają w równowadze. Przypuśćmy teraz, że ciśnienie N wzrasta, to w takim razie, aby równowaga nie została zniweczona,

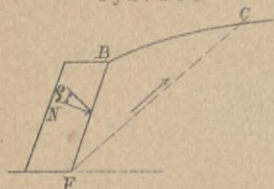
musi wzrastać też ciśnienie ziemi. Dziać się to może jednak tylko do pewnej granicy, gdy bowiem N przekroczy tę granicę, część ziemi się usunie, a odłam FBC poruszy się w kierunku FC .

Ciśnienie ziemi więc, które zostaje wzbudzone ciśnieniem zewnętrznem, nazywamy odporem ziemi (n. *passiver Erddruck*, *Erdschub*, fr. *butée des terres*) w przeciwstawieniu do parcia ziemi (n. *activer Erddsuck*, fr. *poussée des terres*), o którym dotąd mówiliśmy.

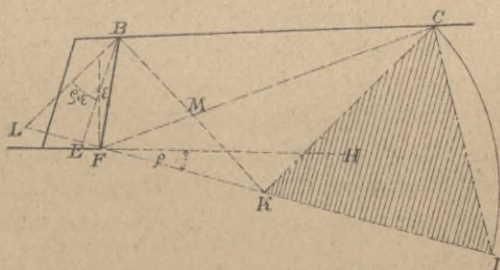
Ponieważ ruch ten nastąpi w kierunku FC , a nie CF , więc tarcie, które jest zawsze przeciwne kierunkowi ruchu, działać będzie w kierunku przeciwnym. Rozumując w ten sam sposób, co pierwej, otrzymamy więc odnośne wzory, jeżeli zamiast kąta tarcia ϱ przyjmiemy kąt $(-\varrho)$.

Po wykreślnem wyznaczeniu odporu ziemi mamy więc tylko dwie zmiany, a mianowicie stok naturalny FK (rys. 404)

rys. 403



rys. 404



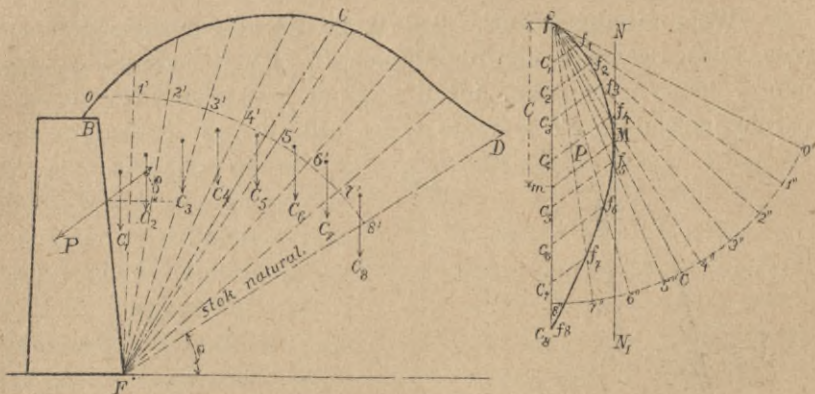
wykreślamy pod kątem ϱ poniżej osi, a kierującą prowadzimy nie pod kątem $\varrho - \varepsilon$, lecz $-\varrho - \varepsilon = -(\varrho + \varepsilon)$, a więc pod kątem $(\varrho + \varepsilon)$ po lewej stronie prostopadłej BE na stok naturalny, a więc BL . Przyjmujemy teraz punkt C tak, aby gdy poprowadzimy $CK \parallel BL$ i połączymy F z C a B z K , było $BM = MK$. Jeżeliby $BM \geq MK$, to obieramy inny punkt C , aż dopóki nie znajdziemy punktu, który temu warunkowi zadość czyni. Zrobiwszy $KI = KC$, otrzymamy wreszcie trójkąt odporu.

Odpór ten w sposób wyznaczony nie działa jednak od razu. Gdy siła N (rys. 403) ciśnie ziemię, to z powodu ściśliwości ziemi nastąpi najpierw mały ruch ściany FB , potem dopiero po ściśnięciu ziemi zaczyna działać odpór.

§. 195. Wyznaczenie wykresłne parcia ziemi sposobem Pilleta.

Prosty sposób wyznaczenia parcia ziemi podaje Pillet. Przypuśćmy ogólnie, naziom dowolnie zakrzywiony (rys. 405). Wykreślmy FD stok naturalny i podzielmy powierzchnię FOD

rys. 405



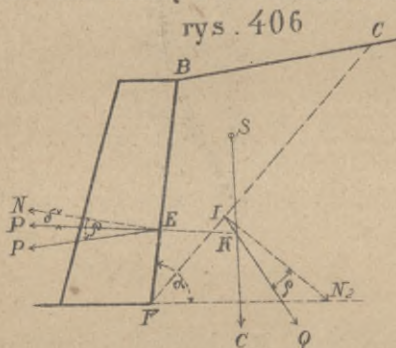
na pewną ilość klinów z wierzchołkiem F . Najlepiej przyjmować przytem kąty równe. W tym celu zataczamy łuk promieniem FO i dzielimy łuk OS' na pewną ilość (tu 8) równych części, poczem kreślimy promienie FO , $F1$, $F2$ itd. Wyznaczamy powierzchnię klinów i odnośne ciężary odcinamy na pionowej f_0c_8 . Ciężary te rozkładają się na P i Q , P działa pod kątem φ_1 do prostopadłej na FB , a więc w kierunku naznaczonym na rysunku, Q zaś nachylone jest pod kątem φ do prostopadłej na $F1$, $F2$, $F3$ itd. Żywy jest przytem $\varphi_1 = \varphi$. Kierunek sił Q wyznaczymy łatwo. Dla FD kierunek Q jest pionowy. Jeżeli teraz zatoczmy łuk $8''0''$ tym samym promieniem i odetniemy równe takie same odcinki, wręście wykreślimy promienie f_07'' , f_06'' ... f_00'' , to przedstawiają one kierunki sił Q . Z punktów

$c_1, c_2, c_3 \dots c_7$ kreślimy teraz równoległe do P a punkty przecięcia się f łączymy krzywą. Dla rozmaitych płaszczyzn odłamu otrzymujemy więc rozmaite parcia P , prawdziwą będzie płaszczyzna, dla której P jest największe. Jeżeli teraz poprowadzimy NN_1 styczną do krzywej parć, to otrzymamy punkt styczności M' a $M'm$ przedstawia szukane parcie P . Jeżeli zrobimy $5''C=5'C$, to FC jest płaszczyzną odłamu.

XVI. Inne teorie parcia ziemi.

§. 196. Poprawka do równowagi w spoczynku.

Wspominaliśmy już w §. 176, że dla równowagi klina FBC (rys. 406) trzy siły nań działające C , Q i P muszą się przecinać w jednym punkcie. Jeżeli naziom jest płaskim, wiemy, że parcie na ścianę FB wzrasta w stosunku kwadratowym, a punkt



zaczepienia siły P leży w $\frac{1}{3}$ wysokości ściany, w punkcie E . Ponieważ ciśnienie na płaszczyznę FC musi analogicznie także wzrastać w stosunku kwadratowym, więc ciśnienie Q działa także w jednej trzeciej prostej FC , więc w I .

Jeżeli teraz wykreślimy siły Q i P , działające pod kątem tarcia ϕ na płaszczyzny FB i FC , to trzy te siły C , Q i P nie przetną się w ogólności w jednym punkcie, z czego wynika, że trzy te siły nie równoważą się, lecz jako wypadkową dają parę sił. Pochodzi to stąd, że za wiele znanych ilości przyjęliśmy, gdy tymczasem równanie momentów tych sił, nie zużytkowane dotychczas, określa jedną z tych ilości.

Oto zarzut, jaki słusznie robią dawnej teorii parcia ziemi, która dotychczas ogólnie używana, dawała wyniki dość zgodne z praktyką. Widząc sprzeczność, jaka się mieści w dawnej teorii, próbowano wielu uczonych utworzyć inne teorie, wycho-

dzące z równowagi w masie ziemi nieograniczonej, które w przeciwieństwie do dawniejszej teorii nazywamy *nowsze* i.

Zanim jednak zastanawiać się będziemy nad zasadami nowszej teorii, pokażemy, jak zapomocą stosownej poprawki możemy zadość uczynić koniecznemu warunkowi przecinania się trzech sił C , P i Q w jednym punkcie.

Dawna teoria zapomina, że tarcie jest siłą bierną, która działa tylko o tyle, o ile tego potrzeba do przeszkodzenia ruchowi, a więc do równowagi w spoczynku. Jeśli siła zaczepiająca wzrasta, to wzrasta i tarcie do pewnej granicy, przy której jest równe fN_1 i fN_2 . Jeśli więc przyjmujemy tarcia fN_1 i fN_2 , to jest to słusznie tylko wtedy, gdy siła zaczepna (parcie) jest tak wielka, że tarcie przewycięża, więc podczas ruchu odłamu. Wtedy jednak niema równowagi i dla tego wypadku trzy siły C , E i Q nie potrzebują się przecinać w jednym punkcie.

Widzimy więc, kiedy można używać wprost dawnej teorii parcia ziemi i że w stanie spoczynku parcie działa inaczej, niżby z dawnej teorii wypadało.

Jeżeli zważymy odłam FBC , to zobaczymy, że wywiera on parcie na FB tylko wtedy i o tyle, o ileby przy usunięciu ściany FB odłam się usunął. Jeżeli np. $\alpha = \varrho$, to nie potrzeba wcale ściany. Stąd można wnioskować, że nim na ścianę FB odłam wyrwie parcie, musi być całe tarcie na FC wyczerpane, a więc możemy przyjąć, że parcie Q działa w każdym razie pod kątem ϱ do prostopadłej na FC .

Przeciwnie działa podczas równowagi, a więc w stanie spoczynku, tarcie na FB tylko o tyle, o ile potrzeba go do zachowania równowagi. W ogólności więc działa zamiast siły P siła P' pod kątem $\delta < \varrho$ do prostopadłej. Jeżeli teraz siły P' , C i Q mają być w równowadze, to muszą się przecinać w jednym punkcie i to posłuży nam do wyznaczenia siły P' i kąta δ .

Jeżeliśmy w jakikolwiek sposób wyznaczyli kierunek płaszczyzny odłamu, to przeto jest wyznaczony kierunek siły Q . Położenie siły ciężkości C jest także znane, chodzi więc tylko o punkty zaczepienia sił P' i Q i kierunek siły P' .

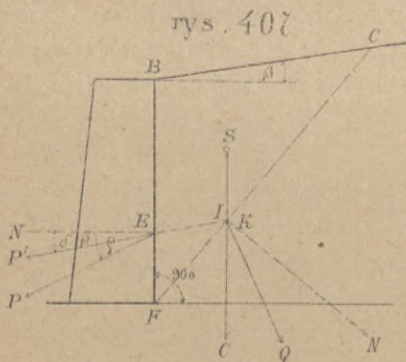
Otóż wiadome, że przy naziomie płaskim punkt zaczepienia parcia ziemi P lub P' leży w jednej trzeciej wysokości ściany. Doświadczenia *Gobina* potwierdziły pośrednio to twier-

dzenie, gdyż wykazały, że parcie wzrasta w przybliżeniu w stosunku kwadratu wysokości, z czego łatwo można wywnioskować, że punkt zaczepienia parcia leży w $\frac{1}{3}$ wysokości ściany. Analogicznie musimy przyjąć, że siła Q zaczepia w $\frac{1}{3}$ wysokości płaszczyzny odłamu, bo niema powodu, aby odłam znajdujący się między dwiema płaszczyznami, działał według innego prawa na jedną płaszczyznę, niż na drugą.

Przyjmujemy więc, że parcie zaczepia w E , przyczem $FE = \frac{1}{3}FB$, a siła Q w I , przyczem $FI = \frac{1}{3}FC$. Kierunek parcia P' jest wtedy wyznaczony warunkiem, że trzy siły P' , Q i C przecinają się w jednym punkcie K . Gdy więc połączymy punkt przecięcia się sił C i Q z F , otrzymamy kierunek parcia ziemi w stanie spoczynku, które to parcie nazwiemy geostatycznym w przeciwieństwie do geodynamicznego w stanie ruchu.

§. 197. Poszczególne wypadki.

Podaliśmy powyżej ogólną regułę dla wyznaczenia parcia geostatycznego, której jednak w niektórych wypadkach nie można użyć. Teraz zrobimy pewne założenia co do kierunku ściany i naziomu.

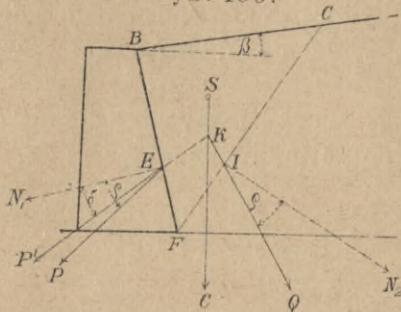


Jeżeli ściana jest pionową, to przecina kierunek siły P płaszczyznę odłamu w $\frac{1}{3}FC$ w punkcie I (rys. 407), punkty K i I wpadają więc na siebie, a parcie geostatyczne na ścianę pionową jest równoległe do naziomu.

Jeżeli naziom wznosi się pod kątem β do poziomu, to $\delta = \beta$, jeżeli jest poziomy, $\delta = 0$. Przy spadającym naziomie musiałoby być parcie P' skierowane w górę. To trudno przypuścić, ten wypadek rzadko zresztą zdarzający się w praktyce, wymagałby osobnych doświadczeń, gdyż, przyjmawszy $\delta = 0$, trudno zrozumieć, w jaki sposób równowaga zostaje zachowaną.

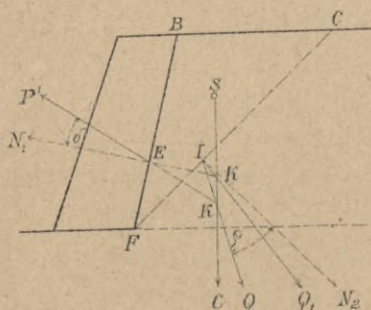
Jeżeli ściana jest nachyloną na zewnątrz (rys. 408, ε ujemne), wtedy przecina kierunek siły C płaszczyznę odłamu FC w pierwszej trzeciej części, więc K znajduje się wyżej FC i w największej liczbie wypadków będzie wtedy $\delta < \varrho$ i dodatnie.

rys. 408.



Jeżeli ściana jest pochylona na wewnątrz (ε dodatnie, rys. 409) wtedy przecina kierunek siły C prostą FC w środkowej trzeciej części, zatem punkt K znajduje się poniżej FC . Jeżeli teraz połączymy K z F , to otrzymamy kierunek siły P' . Może tu łatwo się zdarzyć, że δ będzie ujemnym. Ponieważ trudno nam to przypuścić, prawdopodobnie będzie więc w takim razie parcie $P' = N$ prostopadłe na ścianę. Jako przecięcie parcia N z C otrzymamy punkt K_1 , który połączony z I wyznacza parcie Q_1 na płaszczyznę odłamu, odchyłone od prostopadłej o kąt mniejszy niż ϱ .

rys. 409



§. 198. Wyznaczenie płaszczyzny odłamu.

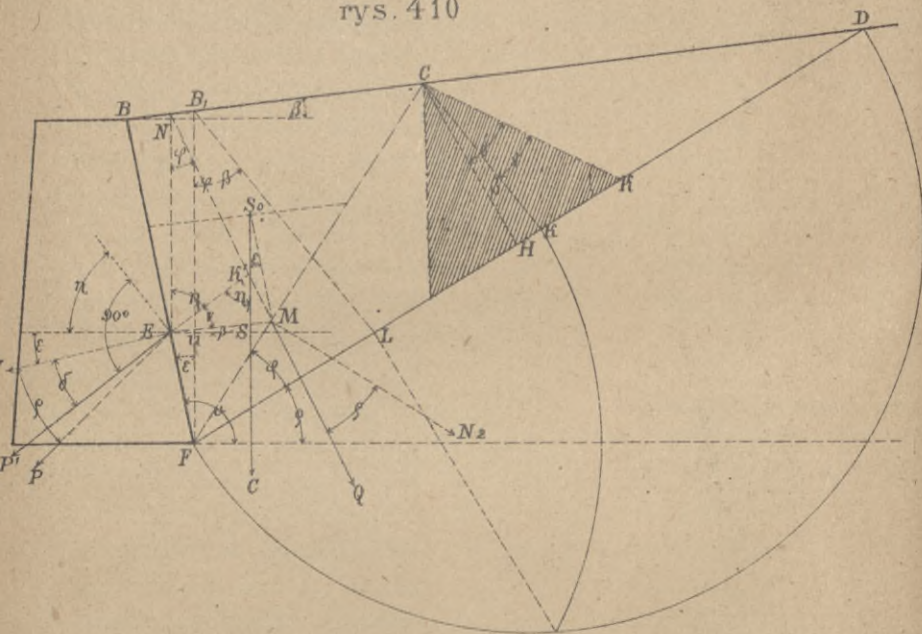
Dotychczas nie mówiliśmy w jaki sposób wyznaczamy płaszczyznę odłamu, zastanowimy się teraz nad tem, bo z kątem δ , który tworzy parcie ziemi z prostopadłą na ścianę, zmienia się też i położenie płaszczyzny odłamu. Będzie więc inna płaszczyzna odłamu dla stanu spoczynku, a inna dla stanu ruchu. Pierwsza nie jest właściwie płaszczyzną odłamu, gdyż podczas ruchu objawia się inna płaszczyzna odłamu; nazywamy

jednak także tę płaszczyznę płaszczyzną odłamu, dla której parcie geostatyczne jest największe.

Położenie płaszczyzny odłamu jest zależne od kąta δ , który znów zależny jest od położenia płaszczyzny odłamu. Wyznaczenie płaszczyzny odłamu wprost byłoby więc niemożliwym, gdyby nam nie przyszło w pomoc twierdzenie Almquista, które w tem miejscu podamy.

Na rys. 410 mamy wyznaczyć płaszczyznę odłamu FC , gdy ściana FB jest pochylona na zewnątrz pod kątem ε .

rys. 410



Wykreślmy pionową FB_1 i wyznaczmy najprzód płaszczyznę odłamu dla tej pomyślanej ściany pionowej. Wtedy jest parcie geostatyczne równoległe do BD , więc nachylone do poziomej pod kątem β , kreślimy zatem kierującą B_1L pod kątem $\varrho + \beta$, a z pomocą punktu L otrzymamy jak zwykle, K_1 , kreślimy $K_1C \parallel LB$ a FC jest płaszczyzną odłamu dla ściany pionowej FB_1 .

Otóż da się udowodnić, że tę samą płaszczyznę odłamu otrzymamy i dla ściany FB , nachylonej pod dowolnym kątem ε .

Jeżeli bowiem FC jest płaszczyzną odłamu, to możemy łatwo wynaleść środek ciężkości odłamu i położenie siły C . Przedłużmy kierunek siły Q do punktu przecięcia się K' , to $K'E$ jest kierunkiem parcia geostatycznego P' , który zawiera z prostopadłą kąt δ . Wykreślmy teraz prostą CK pod kątem $\delta + \varepsilon$ do prostopadłej CH , to jeżeli FC jest płaszczyzną odłamu, musi być $FBC = FCK$, co zaraz udowodnimy.

Widzimy, że $\eta + \delta + \varepsilon = 90^\circ$, więc i kąt przy K $\eta_1 = \eta$. Także $\sphericalangle ENM = CFD = \varphi$, bo NE i NM zawierają z prostopadłymi na FD i FC ten sam kąt φ . A więc w trójkątach $EK'N$ i FCK są po dwa kąty równe, zatem $EK'N \sim FCK$. Stąd wynika

$$FK : FC = EN : NK' \quad 864)$$

Dalej mamy

$$\sphericalangle K'FM = \nu = \delta + \varepsilon - \beta, = \sphericalangle K_1CK_1 \text{ a } FK_1C = \mu = \eta + \delta + \varepsilon - \beta = \nu + \eta = \sphericalangle NEM.$$

W trójkątach ENM i FCK_1 są więc po 2 kąty równe, a więc $ENM \sim FCK_1$, a stąd

$$FC : FK_1 = MN : EN \quad 865)$$

Z równań 864) i 865) wynika

$$FK : FK_1 = MN : NK' = ME : ES.$$

Z konstrukcyi środka ciężkości wynika, że

$$SS_0M \simeq FEU, \text{ bo } \sphericalangle SS_0M = \varepsilon \text{ a } \sphericalangle ENF = \sphericalangle S_0SM \\ \text{ a } SS_0 = FE, \text{ więc } EU = SM \text{ i } ES = UM, \text{ więc}$$

$$FK : FK_1 = ME : UM = BC : B_1C \quad 866)$$

Dalej mamy

$$FCK : FCK_1 = FK : FK_1 \\ FBC : FB_1C = BC : B_1C,$$

więc ze względu na 866)

$$FCK : FCK_1 = FBC : FB_1C \\ FCK : FBC = FCK_1 : FB_1C.$$

A że $FCK_1 = FB_1C$, więc także $FCK = FBC$, co było do udowodnienia.

A więc FC jest powierzchnią odłamu także dla ściany pochylej FB i wogóle dla jakiegokolwiek ściany, sięgającej do BD .

Za pomocą tego twierdzenia, któreśmy udowodnili, możemy łatwo wyznaczyć płaszczyznę odłamu dla dowolnie na-

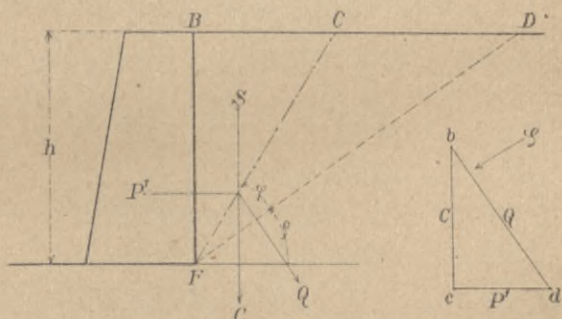
chylonych ścian, wyszukawszy ją dla odnośnej ściany pionowej. Wyznaczenie parcia geostatycznego nie podlega wedle powyższego żadnej trudności.

Prawie zawsze jest $P' > P$ t. j. parcie geostatyczne (w stanie spoczynku) jest większe niż parcie geodynamiczne (w stanie ruchu). Dla płynów było to prawo dawne znane, mianowicie prawo, że parcie hydrostatyczne jest większe niż hydrodynamiczne.

§. 199. Wyznaczenie analityczne parcia geostatycznego dla ściany pionowej i naziomu poziomego.

Wiemy, że dla ściany pionowej jest parcie geostatyczne P' równoległe do naziomu, w tym wypadku (rys. 411) więc poziome.

rys. 411.



Jeżeli $bc=C$, $bd \parallel Q$, cd poziome, to $cd=P'$. Z rysunku widzimy, że $\angle cbd = CFD = \varphi$, zatem

$$P' = C \operatorname{st} \varphi = \frac{1}{2} \gamma h \cdot BC \operatorname{st}_\rho \varphi = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{st} (90 - \varphi - \rho) \operatorname{st} \varphi,$$

$$P' = \frac{\gamma h^2 \operatorname{st} \varphi}{2 \operatorname{st} (\varphi + \rho)} = \frac{\gamma h^2}{2} U. \quad \dots \quad 867)$$

P' jest więc funkcją φ , szukamy największości tej funkcji, to będzie rzeczywiste P' . Dla $\operatorname{najw} U = \frac{\operatorname{st} \varphi}{\operatorname{st} (\varphi + \rho)}$ musi być

$$\frac{dU}{d\varphi} = 0 = \frac{\operatorname{st} (\varphi + \rho)}{\operatorname{dost}^2 \varphi} - \frac{\operatorname{st} \varphi}{\operatorname{dost}^2 (\varphi + \rho)}. \quad \text{A stąd}$$

$$\operatorname{wst} (\varphi + \rho) \operatorname{dost} (\varphi + \rho) = \operatorname{wst} \rho \operatorname{dost} \varphi$$

$$\operatorname{wst} (2\varphi + 2\rho) = \operatorname{wst} 2\varphi.$$

Ponieważ $2(\varphi + \rho)$ nie może być równem 2ρ , więc kąty te muszą się dopełniać do 180° , zatem $2\varphi = 180 - 2\rho - 2\rho$,
 $4\varphi = 180 - 2\rho$

$$\varphi = \frac{1}{2}(90 - \rho) \dots \dots \dots 868)$$

A więc płaszczyzna odłamu połowi kąt między ścianą a stokiem naturalnym.

Wstawmy teraz wartość za φ z rów. 868) w rów. 867)

$$U = \frac{\text{st } \varphi \left(45 - \frac{\rho}{2}\right)}{\text{st} \left(45 + \frac{\rho}{2}\right)} = \text{st}^2 \left(45 - \frac{\rho}{2}\right),$$

zatem
$$P' = \frac{\gamma h^2}{2} \text{st}^2 \left(\frac{90 - \rho}{2}\right) \dots \dots \dots 869)$$

Zwykle jest ρ od 30° do 45° , otrzymamy więc

dla $\rho =$	30	33	35	37	40	45 ^o
P'	0,1667	0,1474	0,1355	0,1243	0,1087	0,0858 γh^2 .

Dla odporu należy tylko zmienić znak parcia, otrzymamy

więc
$$P'' = \frac{\gamma h^2}{2} \text{st}^2 \left(\frac{90 + \rho}{2}\right) \dots \dots \dots 870)$$

Stąd otrzymamy dla

$\rho =$	30	33	35	37	40	45 ^o
$P'' =$	1,400	1,696	1,845	2,011	2,298	2,914 γh^2 .

Widzimy stąd jak ogromna jest różnica między parciem czynnym a odporem ziemi.

§. 200. Nowsze teorye.

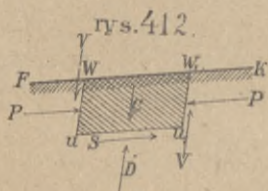
Zadaleko zaprowadziłoby nas opisanie wszystkich teoryj parcia ziemi, które podali Rankine, Considère, Lévy, St. Venant, Winkler, Scheffler, Mohr, Boussinesq i inni. Wspominamy tu tylko o ogólnych zarysach nowszej teoryj według streszczenia Müllera-Breslaua*).

Nowsza teorya parcia ziemi zastanawia się nad natężeniami, panującymi w ziemi o naziomie dowolnym, zresztą nieograniczonej. Wytnijmy w myśli nieskończenie mały równoległobok UWW_1U_1 (rys. 412) tuż przy powierzchni ziemi płaszczyznami pionowymi i badajmy siły, jakie nań działają. Siły,

*) *Graphische Statik*. 1881.

działające w nieskończenie bliskich płaszczyznach UW i U_1W_1 , możemy przyjąć jako równe, oznaczamy je więc literą V . Dla równowagi muszą być też i siły P , działające pod kątem

na te płaszczyzny równe i równoległe do naziomu. Ciśnienie pionowe na dno D musi być $= C$, a ponieważ suma momentów musi być $= 0$, więc $S = 0$ i $V = 0$. Stąd wyprowadza nowsza teoria (Rankine, Boussinesq) następujące wnioski:



1. Parcie ziemi na powierzchnię pionową jest równoległe do naziomu.

2. Parcie ziemi na powierzchnię równoległą do naziomu jest pionowe.

Wniosek pierwszy prowadzi do parcia geostatycznego, drugi znany jest nam z §. 197.

Jeżeli twierdzenie pierwsze zastosujemy wprost do parcia ziemi na mur, to pomijamy tarcie między ścianą a murem, przez co otrzymujemy parcie geostatyczne a nie geodynamiczne.

Inni, jak Weyrauch (*Theorie des Erddruckes auf Grund der neueren Anschauungen 1884*), wyznaczają inny kierunek parcia na dowolną płaszczyznę, mianowicie kąt δ , o który odchyła się tu parcie od prostopadłej na płaszczyznę. Niektórzy, jak Lévy i Winkler, przyjmują nawet, że $\delta = \varrho$; wszyscy jednak wychodzą z ogólnych nateżeń ziemi o dowolnym naziomie, zresztą nieograniczonej. Wyniki w ten sposób otrzymane zastosowują wprost do parcia ziemi na stałe ściany, mówiąc, że gdy pomyślimy sobie przez ziemię położoną płaszczyznę i gdy przypuścimy, że ziemia po jednej stronie tej płaszczyzny nagle stwardnieje, to stan równowagi przez to się nie zmienia. Słusznie zauważa tu Weyrauch, że tak nie jest, że po stwardnieniu ziemi będzie wprawdzie panować równowaga, ale nie ta sama, że siły układające się w równowagę będą prawdopodobnie teraz inne. Dlatego sami autorowie nowszych teorii ograniczają ważność ich tylko do pewnych wypadków. Weyrauch wyznacza mianowicie podobnie, jak w ciałach sprężystych, osie główne nateżeń i twierdzi, że nowsza teoria jest wtedy prawdziwą, jeśli obie osie przecinają naziom. Sprawdza się to zawsze

przy naziomie poziomym, gdy $\varepsilon \leq 0$ i pod pewnymi warunkami przy naziomie spadającym.

Zresztą i w tych wypadkach wyniki, otrzymane według nowszej teoryi nie zgadzają się z praktyką, ani z doświadczeniem i dają za wielkie parcie.

Dlatego też nie będziemy się dalej zastanawiać nad nowszą teoryą i zadowolimy się dawniejszą, stosowując przytem, gdzie tego potrzeba, naszą poprawkę.

Doświadczenia prof. Engelsa *) stwierdziły, że rzeczywistość parcie ziemi w stanie spoczynku na ścianę pionową jest poziome, mały ruch jednak, do którego stwierdzenia potrzeba aż przyrządu zwierciadłowego, wystarczy, aby wywołać tarcie. Ponieważ w praktyce możemy śmiało dopuścić prawie zawsze tak małe ruchy, zatem możemy też uwzględnić tarcie, chociaż ono w stanie spoczynku nie istnieje.

XVII. Parcie ziemi na sklepienie.

§. 201. Sklepienie owalne.

W §. 135. nie uwzględnialiśmy parcia ziemi na sklepienie, lecz tylko jej ciężar pionowy. Z §. 177 wynika, że możemy tak postępować, dopóki grzbiet sklepienia lub nadmurowania nie jest bardziej nachylony do poziomu niż stoku naturalnego. Przy sklepieniach owalnych, jajowatych i tunelowych musimy jednak z powodu większego nachylenia uwzględnić także wielkość i kierunek ukośnego parcia na sklepienie, przyczem zastosowujemy tylko znane już prawidła. Tok postępowania pokazemy na przykładzie.

Na tabl. VI. wykreśliliśmy sklepienie owalne z wielką nadsypką symetryczne i symetrycznie obciążone, to samo, dla którego Ott wyznaczył linią ciśnienia w swym podręczniku (*Vorträge über Bautechnik I. Theil*). Przypuszczamy, że grzbiet sklepienia jest wieloboczny; jeśli tak nie jest, to zamiast krzywej przyjmujemy wielobok w nią wpisany lub opisany. Na każdy kliniec wyznaczamy parcie ziemi $P_1, P_2, P_3 \dots P_7$, według dawnej metody, przyczem przyjmujemy kąt tarcia $\varrho = 35^\circ$, ciężar

*) *Zeitschrift des Bauwesens*, 1896 str. 409.

gatunkowy ziemi $\gamma_z = 1,8 \frac{t}{m^3}$, kamienia $\gamma_k = 2,3 \frac{t}{m^3}$. Dla pierwszych dwóch kłinców jest $\alpha > 180 - \varrho$, więc parcie jest pionowe i równe ciężarowi ziemi, leżącej nad kłincami. Następne parcia są nachylone do prostopadłej na ścianę o kąt ϱ obliczyliśmy je według wzoru 830) i 832), po części korzystaliśmy także z tablic, obliczonych dla tych równań. Ponieważ mamy tu wyznaczyć parcie na część ściany, więc obliczywszy parcie dla całej ściany przedłużonej aż do naziomu, wykreślaliśmy trójkąt parcia. Dla danej ściany otrzymaliśmy więc według §. 192 trapez parcia, który nam służył do wyznaczenia wielkości i punktu zaczepienia parcia (rys. 408). Aby rysunek na tabl. VI. uczynić wyraźnym, opuściliśmy na nim te przedwstępne konstrukcye, znane nam zresztą z §. 197.

Teraz wyznaczamy ciężar kłinców $G_1, G_2 \dots G_7$, mnożymy powierzchnie przekroju kłinców przez długość $= 1$ i przez ciężar gatunkowy $\gamma_k = 2,3 \frac{t}{m^3}$.

Wyznaczywszy w ten sposób wszystkie siły działające na sklepienie, przystępujemy do wykreślenia linii ciśnienia według §. 141. Przyjmujemy więc najprzód dowolnie parcie poziome $H = 0, a$, zaczepiamy go w e w połowie wysokości klucza i na tej podstawie wykreślamy linią ciśnienia (kreskowaną na tablicy). Ostatni jej bok cd przedłużony przecina się z pierwszym w punkcie d , przez który przechodzi wypadkowa R wszystkich sił, działających na prawą stronę sklepienia. Jeżeli przypuścimy, że linia ciśnienia przechodzi przez środek podstawy f , to fd jest ostatnim bokiem wieloboku sznurowego, a więc zrobiwszy $bo \parallel fd$ otrzymamy prawdziwy biegun O . Wykreślamy teraz drugi raz linią ciśnienia (pełno wyciągniętą na tablicy), przechodzącą przez punkty e i f . Linia ta ciśnienia wychodzi w punkcie g z jądra. Z kształtu jej jednak widzimy, że cała leży poniżej osi sklepienia, co sprzeciwia się prawidłu, wypowiedzianemu w §. 147, że suma powierzchni dodatnich ma być równa sumie powierzchni ujemnych. Prawdziwa linia ciśnienia leżeć będzie więc nieco wyżej, niż linia pełna wyciągnięta, należałoby zatem przyjąć punkt e nieco wyżej, może w $\frac{2}{3}$ wysokości klucza, a wtedy punkt g wejdzie w jądro i w sklepieniu nie będzie ciągnięcia.

§. 202. Sklepienie tunelowe.

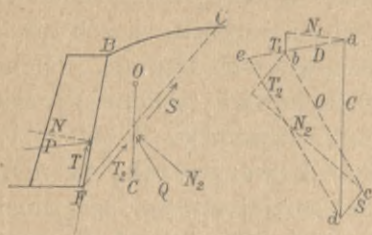
Linie ciśnienia w sklepieniu tunelowym możnaby wyznaczyć według poprzedniego paragrafu. Jeżeli jednak tunel leży głęboko pod naziemem, otrzymalibyśmy w ten sposób parcie ziemi znacznie większe, niż w rzeczywistości istnieje. Głębiej położone warstwy ziemi i skały mają bowiem spójność zwykle tak wielką, że jej pominąć zupełnie nie możemy. Wielki wpływ na parcie ziemi ma też także kierunek warstw tak, że nieraz parcie jest większe z jednej, niż z drugiej strony osi tunelu. Spójność ziemi i kierunek warstw zmieniają się jednak często dla tego samego tunelu tak, że w praktyce nieraz widzimy, że w niektórych miejscach tunel obejść się może czasem zupełnie bez sklepienia, a w innych grubość sklepienia jest nader zmienną. Obliczenie sklepienia tunelowego jest więc zwykle niemożliwe dla nieznaności sił, nań działających. Jeżeli jednak potrafimy wyznaczyć siły zewnętrzne, czyto jako zwykle parcie ziemi, czy też praktycznie, badając zachowanie się tymczasowego rusztowania drewnianego, to wykreślenie linii ciśnienia nie będzie przedstawiać żadnych trudności.

§. 203. Uwzględnienie spójności.

Powiedzieliśmy wyżej, że zwykle przy wyznaczaniu parcia ziemi nie uwzględniamy spójności. Zdarzają się jednak wypadki, że to jest koniecznem lub przynajmniej wskazanem. Koniecznem jest ono przy parciu na sklepienie tunelowe, a wskazanem przy murach w przekopach, gdzie mur przylega do ziemi naturalnej, nienasypanej, wykazującej mniejszą lub większą spójność.

Zaznaczamy tu w krótkości, w jaki sposób należałoby uwzględnić spójność, która, jak wiadomo, proporcjonalną jest do powierzchni odłamu. Jeżeli więc spójność na jednostkę kwadratową nazwiemy c , to cała spójność S w wyznaczonej w zwykły sposób płaszczyźnie odłamu FC (rys. 413) będzie $S=cl$. Wykreślmy teraz wielobok sił, zrobmy $ad=C$, $dc\parallel FC$ i równe S , dalej $cb\parallel Q$ i $ab\parallel P$, to $ab=P$. Nie uwzględnivszy spójności, otrzymalibyśmy $P=ae$, przyczem $ae > ab$. Jeżeli spójność przyjmujemy większą, to ab będzie mniejsze, może się nawet stać zerem, wtedy niema wcale parcia.

Wyznaczenie to nie jest dokładnem, bo S zmienia się proporcjonalnie do l , które jest funkcją φ , może więc przy uwzględnieniu spójności otrzymamy inną płaszczyznę usuwową.



W przybliżeniu możemy też uwzględnić spójność według prof. Skibińskiego, przyjmując zamiast kąta φ większy kąt ϱ , wyznaczony z paraboli

spójności. Dla tego większego kąta przeprowadzamy wtedy obliczenie w zwykły sposób. Przybliżone te sposoby są tem bardziej wystarczające, że zwykle dokładnie nie znamy, jak wielką jest spójność.

E. Mury oporowe.

XVIII. Stałość murów oporowych.

§. 204. Ogólne zasady.

W §. 176. podaliśmy określenie muru oporowego. Składa się on z warstw poziomych lub też pochyłych. Jeżeli wyznaczymy siły, działające na każdą warstwę, tj. ciężar muru i parcie ziemi, znajdziemy środek ciśnienia czyli punkt zaczepienia wypadkowej, działającej na szew, a jeżeli środki ciśnienia wszystkich szwów połączymy, otrzymamy, jak wiemy, linią ciśnienia.

Warunki równowagi murów oporowych są te same, co sklepień, filarów i przyczółków, a więc według §. 134:

1. Środek ciśnienia powinien leżeć w jądrze tj. w średniej trzeciej części szwu, aby zaprawa nie pracowała na ciągnięcie. Przy murach litych betonowych lub żelazno-betonowych, możemy dopuścić pewne ciągnięcie, linia ciśnienia może też wyjść z jądra.

2. Wypadkowa powinna być odchylną od prostopadłej na szew więcej, niż wynosi kąt tarcia.

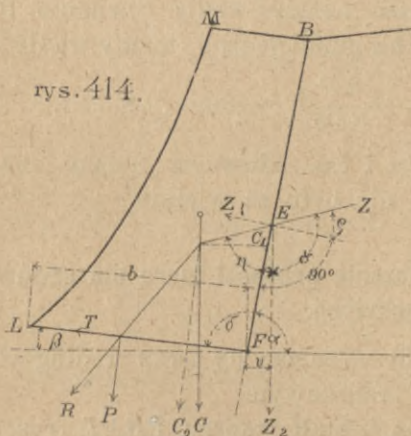
3. Natężenie nie powinno przekraczać współczynnika wytrzymałości. Jeśli przyjmiemy stosowną pewność, to natężenie powinno być większe, niż dopuszczalne.

Jeżeli na mur oporowy pionowy lub mało pochylony działa tylko parcie ziemi i ciężar własny muru, to linia ciśnienia wpada u góry muru, gdzie parcie równe zeru, na oś i oddala się dla dolnych części muru coraz bardziej od osi. Dlatego w zwykłych wypadkach wystarcza, gdy sprawdzimy, czy te trzy warunki wypełniają się dla podstawy muru. W wypadkach bardziej zawiłych potrzeba badanie rozciągnąć i do innych szwów.

§. 205. Ogólne wyznaczenie grubości muru oporowego.

Jeżeli Z jest parciem ziemi na mur $FBML$ (rys. 414) a C ciężarem tego muru, to dwie te siły złożone dają wypadkową R ,

która przecina podstawę muru FL w punkcie G . Rozłożmy wszystkie te trzy siły na składowe równoległe i prostopadłe do FL , to otrzymamy siły Z_1, Z_2, C_1, C_2, P i T . Z rysunku widzimy, że $P = C_2 + Z_2$ a $T =$



rys. 414.

$= Z_1 - C_1$, dalej, że $C_1 = C \text{ wst } \beta$,
 $C_2 = C \text{ dost } \beta$,
 $Z_1 = Z \text{ wst } \eta$,
 $Z_2 = Z \text{ dost } \eta$.

Dalej widzimy, że $\nu = \delta - 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ - \nu + \phi$, a wstawivszy wartość za ν , otrzymamy $\gamma = 180^\circ - \delta + \phi$. Dalej mamy $\eta = 180^\circ - \gamma$ albo $\eta = 180^\circ - (180^\circ - \delta + \phi) = \delta - \phi$.

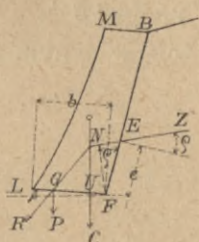
Wstawivszy tę wartość za η , otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= Z \text{ wst } (\delta - \phi), & Z_2 &= Z \text{ dost } (\delta - \phi), & \text{ a więc} \\ P &= C \text{ dost } \beta + Z \text{ dost } (\delta - \phi) \\ T &= C \text{ wst } \beta - Z \text{ wst } (\delta - \phi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 871)$$

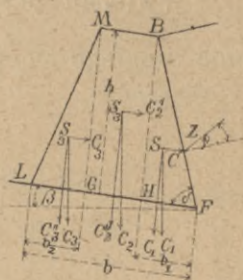
a stąd
$$\text{st } \phi = \frac{T}{P} = \frac{C \text{ wst } \beta - Z \text{ wst } (\delta - \phi)}{C \text{ dost } \beta + Z \text{ dost } (\delta - \phi)} \dots \dots \dots 872)$$

czyimy ciężar części składowych przekroju i rozłożymy każdy z nich na składowe równoległe i prostopadłe do podstawy FL . Wtedy otrzymamy moment ciężaru C ze względu na F

rys. 415



rys. 416



$$Ca = C_1'' \frac{2}{3} b_1 + C_2'' \left(b_2 + \frac{b - b_1 - b_2}{2} \right) + C_3'' \left(b - \frac{2b_2}{3} \right) + (C_1' + C_2') \frac{h}{3} - C_2' \frac{h}{2}.$$

Z rysunku widzimy, że

$$C_1 = \gamma \frac{b_1 h}{2}, \text{ więc } C_1'' = \gamma \frac{b_2 h}{2} \text{ dost } \beta, \quad C_1' = \gamma \frac{b_1 h}{2} \text{ wst } \beta,$$

$$C_2 = \gamma (b - b_1 - b_2) h, \text{ więc } C_2'' = \gamma (b - b_1 - b_2) h \text{ dost } \beta, \\ C_2' = \gamma (b - b_1 - b_2) h \text{ wst } \beta,$$

$$C_3 = \gamma \frac{b_2 h}{2}, \text{ więc } C_3'' = \gamma \frac{b_2 h}{2} \text{ dost } \beta, \quad C_2' = \gamma \frac{b_2 h}{2} \text{ wst } \beta.$$

Wstawiwszy te wartości w poprzednie równanie, otrzymamy:

$$Ca = \gamma h \text{ dost } \beta \left[\frac{1}{3} b_1^2 + \frac{(b_1 - b_2)^2 - b_1^2}{2} + \left(b - \frac{2b_2}{3} \right) \frac{b_2}{2} \right] + \\ - \gamma h^2 \text{ wst } \beta \left(\frac{b_1 + b_2}{6} + \frac{b - b_1 - b_2}{2} \right)$$

$$Ca = \gamma \frac{h \text{ dost } \beta}{2} \left[b^2 - (b_2 + h \text{ st } \beta) b + \frac{b_2^2 - b_1^2}{3} + \frac{2}{3} (b_1 + b_2) h \text{ st } \beta \right] \quad . \quad 876$$

Wstawiwszy wartości za C i Ca w rów. 873), otrzymamy

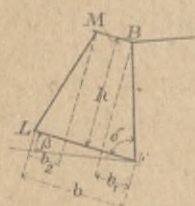
$$\frac{2}{3} b = \frac{\frac{\gamma}{2} h \text{ dost } \beta [b^2 - (b_2 + h \text{ st } \beta) b + \frac{b_2^2 - b_1^2}{3} + \frac{2}{3} (b_1 + b_2) h \text{ st } \beta] + Z e \text{ dost } \varrho}{\frac{1}{2} \gamma h (2b - b_1 - b_2) \text{ dost } \beta + Z \text{ dost } (\delta - \varrho)}.$$

Stąd otrzymamy wreszcie, uporządkowawszy równanie według b ,

$$b^2 + \left[b_2 - 2b_1 + 3h \operatorname{st} \beta + \frac{4Z \operatorname{dost}(\delta - \varrho)}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \right] b = b_2^2 - b_1^2 + 2(b_1 + b_2)h \operatorname{st} \beta + \frac{6Ze \operatorname{dost} \varrho}{\gamma h \operatorname{dost} \beta}, \quad \dots \quad 877)$$

a więc równanie drugiego stopnia, które w danym wypadku możemy łatwo rozwiązać.

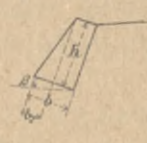
rys. 417



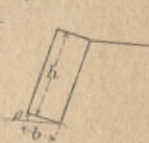
rys 418



rys.419



rys.420



Z równ. 877) otrzymamy dla pojedynczych wypadków następujące wzory:

1. Dla $b_1 = b_2$ (rys. 417) otrzymamy:

$$b^2 + \left(-b_1 + 3h \operatorname{st} \beta + \frac{4Z \operatorname{dost}(\delta - \varrho)}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \right) b = -4b_1 h \operatorname{st} \beta + \frac{6Ze \operatorname{dost} \varrho}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \quad \dots \quad 878)$$

2. Dla $b_2 = 0$ (rys. 418) otrzymamy:

$$b^2 + \left(-2b_1 + 3h \operatorname{st} \beta + \frac{4Z \operatorname{dost}(\delta - \varrho)}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \right) b = -b_1^2 + 2b_1 h \operatorname{st} \beta + \frac{6Ze \operatorname{dost} \varrho}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \quad \dots \quad 879)$$

3. Dla $b_1 = 0$ (rys. 419) otrzymamy, zważywszy, że $\delta = 90^\circ$,

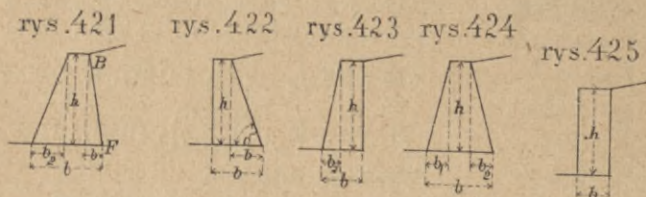
$$b^2 + \left(b_2 + 3h \operatorname{st} \beta + \frac{4Z \operatorname{wst} \varrho}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \right) b = b_2^2 + 2b_2 h \operatorname{st} \beta + \frac{6Ze \operatorname{dost} \varrho}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \quad \dots \quad 880)$$

4. Dla $b_1 = b_2 = 0$, a więc dla przekroju prostokątnego (rys. 420) mamy

$$b^2 + \left(3h \operatorname{st} \beta + \frac{4Z \operatorname{wst} \varrho}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \right) b = \frac{6Ze \operatorname{dost} \varrho}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \quad \dots \quad 881)$$

§. 207. Analityczne wyznaczenie grubości murów dla szwów poziomych.

Jeżeli szwy muru podporowego są poziome, (rys. 421), to otrzymamy odnośne wzory dla przekroju trapezowego, wstawiając w równ. 877) $\beta=0$, więc $\sin \beta=0$, $\cos \beta=1$. Mamy więc

$$b^2 + \left(b_2 - 2b_1 + \frac{4Z \operatorname{dost}(\delta - \varrho)}{\gamma h} \right) b = b_2^2 - b_1^2 + \frac{6Ze \operatorname{dost} \varrho}{\gamma h} \quad . \quad 882)$$


Z równania tego otrzymamy znowu w szczególnych wypadkach

1. Dla $b_2=0$ (rys. 422)

$$b^2 + \left(-2b_1 + \frac{4Z \operatorname{dost}(\delta - \varrho)}{\gamma h} \right) b = -b_1^2 + \frac{6Ze \operatorname{dost} \varrho}{\gamma h} \quad . \quad 883)$$

2. Dla $b_1=0$ będzie $\delta=90^\circ$ (rys. 423), więc

$$b^2 + \left(b_2 + \frac{4Z \operatorname{wst} \varrho}{\gamma h} \right) b = b_2^2 + \frac{6Ze \operatorname{dost} \varrho}{\gamma h} \quad , \quad . \quad 884)$$

3. Dla $b_1=b_2$ (rys. 424) otrzymamy

$$b^2 + \left(-b_1 + \frac{4Z \operatorname{dost}(\delta - \varrho)}{\gamma h} \right) b = \frac{6Ze \operatorname{dost} \varrho}{\gamma h} \quad . \quad 885)$$

4. Dla $b_1=b_2=0$ (rys. 425), a więc dla przekroju prostokątnego będzie

$$b^2 + \frac{4Z \operatorname{wst} \varrho}{\gamma h} b = \frac{6Ze \operatorname{dost} \varrho}{\gamma h} \quad . \quad . \quad . \quad 886)$$

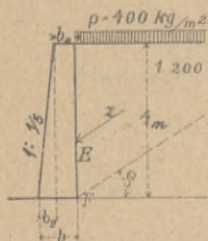
Podobnie dadzą się ustawić wzory dla murów zakrzywionych lub wielobocznych, ale są one jeszcze zawilsze, więc je pomijamy. Obliczenia tego rodzaju należą do nauki o budowlach ziemnych. Obliczając grubości muru zbiorników wody, tam itd. możemy zatrzymać te same wzory, wstawiając w nie tylko dla wody $\varrho=0$.

Dla przekonania się, czy drugi warunek równowagi jest wypełnionym, mianowicie czy $\varphi \leq \varrho$, musimy jeszcze obliczyć

st φ według rów. 872), Gdyby kąt φ był większy od kąta tarcia, to należałoby użyć albo szwów ukośnych, lub też pogrubić mur, a przez to powiększyć jego ciężar.

Przykład. Mur podporowy 4 m wysoki podtrzymuje drogę, dla której $\rho = 400 \text{ kg/m}^2$. Niech będzie $\rho = 33^\circ$, $\gamma_z = 1,8 \text{ t/m}^3$, $\gamma_m = 2,3 \text{ t/m}^3$. Nachylenie przedniej ściany jest $1 : \frac{1}{2}$. Jak wielka ma być szerokość muru u podstawy b .

rys. 426



Najprzód wyznaczmy parcie ziemi Z . Dla $\rho = 33^\circ$ jest $\dot{\rho} = 1,54$, $\text{st } \rho = 0,649$. Według tablicy w §. 182 mamy dla $\text{st } \beta = 0$ i $\text{st } \rho = 0,7$ współczynnik 0,125, dla $\text{st } \rho = 0,6$ 0,143, więc dla $\text{st } \rho = 0,649$ otrzymamy 0,134, zatem $F = 0,134 \cdot 1,8 \cdot 4^2 = 3,86 \text{ t}$. Dalej mamy wedle 845 $h_1 = \frac{400}{1800} = 0,222$, a wedle 847)

$$Z = 3,86 \left(1 + \frac{2 \cdot 400}{1800 \cdot 4} \right) = 3,86 \cdot 1,11 = 4,29 \text{ t}$$

Wreście wedle 850)

$$\begin{aligned} FE = e' &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4 + 3 \cdot 0,222}{4 + 2 \cdot 0,222} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4,666}{4,444} = \frac{1}{3} \cdot 1,05 = 1,4 \text{ m} \end{aligned}$$

Teraz przystąpimy do obliczenia grubości muru. Wedle założenia

$$b_2 = \frac{h}{5} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ m}, \text{ więc wedle 884)}$$

$$b^2 + \left(0,8 + \frac{4 \cdot 4,29 \text{ wst } 33^\circ}{2,3 \cdot 4} \right) b = 0,8^2 + \frac{6 \cdot 4,29 \cdot 1,4 \text{ dost } 33^\circ}{2,3 \cdot 4}$$

Dalej mamy $\text{wst } 33^\circ = 0,515$, $\text{dost } 33^\circ = 0,839$, co wstawiawszy, otrzymamy

$$b^2 + 1,80 b = 3,80, \text{ stąd } b = -0,9 + \sqrt{0,9^2 + 3,8} = 1,25 \text{ m}$$

$b_0 = 1,25 - 0,8 = 0,45 \text{ m}$. Gdyby b_0 wypadło mniejsze, niż $0,4 \text{ m}$, należałoby ze względu na wykonanie przyjąć inne nachylenie ściany przedniej i powtórzyć rachunek dopóty, aż $b_0 \geq 0,4 \text{ m}$.

§. 208. Wykreślne wyznaczenie grubości muru oporowego.

Jeżeli mamy dany przekrój muru $FBML$ (rys. 427), to łatwo obliczymy ciężar C muru na jednostkę długości w kierunku prostym do rysunku. Parcie ziemi Z i punkt zaczepienia E wyznaczamy w znany sposób. Dwie te siły $Z = Oa$ i $C = ab$ składamy za pomocą wieloboku sił i otrzymujemy wypadkową R , przecinającą podstawę w punkcie S . Jeżeli, jak tu, środek ciśnienia G leży w jądrze t. j. środkowej trzeciej części podstawy, to nie tylko równowaga jest zapewniona, ale też cała podstawa pracuje na ciśnienie. Jeżeli G wypadło poza punkt

czyć ciężar paska, który dodajemy lub odejmujemy (wtedy ciężar ujemny do góry działający) i złożyć w zwyczajny sposób tę dodatkową siłę z poprzednim R .

rys. 428.



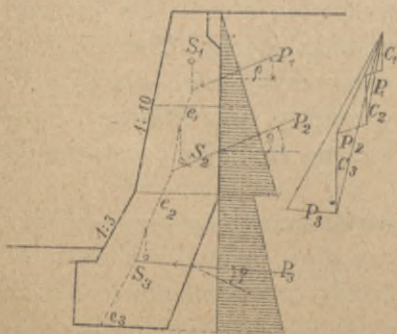
Są także inne sposoby, prowadzące wprost (nie przez próbowanie) do wyznaczenia grubości muru, jak np. metoda prof. Rychtera (Przegląd Techniczny 1877), Crugnoli (Eisenbahn 1882), które jako więcej zawile pomijamy, gdyż wyznaczenie grubości muru według powyższej metody jest w praktyce dostatecznie dokładnem.

Jeżeli przekrój muru jest zawilszy, podcięty (r. 429) lub ograniczony liniami krzywymi, to dzielimy go na paski (w rys. 429 trzy), wyznaczamy dla każdego z nich wedle poprzedniego parcia ziemi na każdy pasek P_1 , P_2 i P_3 i ich punkty zaczepienia. Wyznaczamy środki ciężkości pasków i ciężary ich C_1 , C_2 i C_3 i składamy siły po kolei zapomocą wieloboku sił. Punkty przecięcia się wypadkowych na szew e_1 , e_2 i e_3 połączone dają linię ciśnienia, która nie powinna wychodzić z średniej trzeciej części przekroju (dla wyrazistości rysunku linia ciśnienia jest opuszczoną).

§. 209. Parcie geostatyczne przy wyznaczaniu grubości muru oporowego.

Dotychczas używaliśmy do wyznaczenia grubości muru podporowego parcia geodynamicznego. O ile to tyczy przewrotu

rys. 429



lub przesunięcia muru, jestto usprawiedliwionem. Jeżeli jednak chcielibyśmy poznać natężenie w murze podczas spokoju, to należałoby wyznaczyć parcie geostatyczne i na podstawie tego obliczyć natężenie według znanych prawideł.

A może się zdarzyć wypadek, że przy parciu geostatycznym leży linia ciśnienia

nia wewnątrz przekroju muru, przy parciu geostatycznym zewnątrz przekroju. Jak wtedy utrzymuje się równowaga i jakie są wtedy natężenia?

Ponieważ dla parcia geostatycznego wypadkowa przecina podstawę poza przekrojem muru, to musiałby się mur przewrócić. Ale skoro zacznie się ruch, występuje całe tarcie na powierzchni muru i musimy się liczyć tylko z mniejszem i korzystniej działającym parciem geodynamicznem, wskutek tego wypadkowa odchyli się o tyle, że przecina podstawę wewnątrz przekroju. Ruch więc muru ustaje, poczem znowu występuje parcie geostatyczne. Widzimy zatem, że w takim razie możliwy jest tylko bardzo mały ruch, tylko otwarcie szwów, potem panuje znów równowaga. Ale jak wytłómaczymy sobie tę równowagę? Otóż musimy tu znów przypomnąć, że tarcie jest tylko oporem, siłą bierną, która w stanie spoczynku działa tylko o tyle, o ile tego potrzeba do utrzymania równowagi. A więc wystąpi dla stanu równowagi tylko tyle tarcia, aby wypadkowa przechodziła przez zewnętrzną krawędź muru, aby jeszcze równowaga była zachowaną. W rzeczywistości nie może jednak wypadkowa przechodzić przez samą krawędź, bo wtedy byłoby natężenie tam nieskończenie wielkie. Musiałby się mur wtedy na krawędzi skruszyć, a wypadkowa przesunie się od krawędzi na wewnątrz o 2 do 5 cm.

Z powyższego widzimy, że mur podporowy, obliczony według parcia geodynamicznego (dawnej teorii) w ten sposób, aby linia ciśnienia nie wychodziła z jądra, nie wywróci się nawet w tym wypadku, jeżeliby linia ciśnienia geostatyczna wychodziła z przekroju. Z drugiej strony będzie w stanie spoczynku w murze, obliczonym według dawnej metody, linia ciśnienia wychodzić często poza jądro, w skutek czego wystąpi ciągnięcie, a z powodu małej wytrzymałości zaprawy na ciągnięcie, otwarcie szwu i bardzo mały ruch muru.

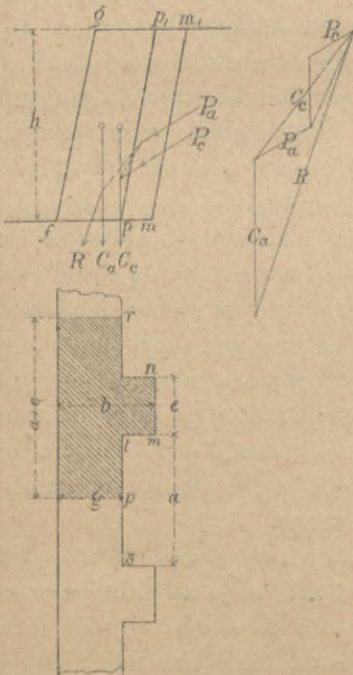
Tam więc, gdzie taki mały ruch muru i otwarcie szwów nie jest szkodliwym, więc zwykle przy murach podporowych, możemy używać bez obawy dawnej teorii parcia ziemi, jak to zresztą praktyka nas uczy, jeżeli tylko materiał jest dość wytrzymały. Przy przyczółkach jednak mostów sklepionych i w ogóle wszędzie tam, gdzie nie możemy dopuścić żadnego na-

wet małego ruchu, należałoby uwzględnić parcie geostatyczne. Przy niskich przyczółkach, gdzie przeważa parcie sklepienia, jest parcie geostatycznie korzystniejsze od geodynamicznego. Przeciwnie przy wysokich przyczółkach, gdzie przeważa parcie ziemi, a linia ciśnienia zwraca się ku wewnętrznej stronie (ku osi mostu), tam działa parcie geostatyczne niekorzystniej i należałoby je koniecznie uwzględnić, bo w takim razie nawet mały ruch przyczółka może spowodować pęknięcie sklepienia. W praktyce jednak takich przyczółków unikamy.

§. 210. Mury oporowe z przyporami.

Czasem robimy mury oporowe z przyporami (n. *Strebe Pfeiler*, fr. *contrefort*) (rys. 430). Wtedy obliczamy parcie nie na 1 m bieżący, lecz na długość a i c . Parcie P_c działa wtedy w powierzchni mn , parcie P_a w pr . Parcia te składamy z ciężarami C_a i C_c , zaczepiającymi w środku ciężkości przekroju fgp_1p i fgm_1m . Wypadkowa R przecina podstawę w e , któryto punkt nie powinien wychodzić poza punkt jędrny.

rys. 430



Co do grubości g , to na długości a działa siła P_a . Składowa pozioma tej siły H_a równo rozdzielona na st czyli na jednostkę H wywołuje w tej części muru nateżenia zginające. Mamy przytem w przybliżeniu, zważywszy, że siła H nie rozdziela się równo na przekrój, lecz działając w jednej trzeciej wysokości wywołuje 2 razy tak wielkie nateżenie, niż gdyby działała we środku,

$$2 \frac{Ha^2}{8} = \frac{hg^2}{6} \tau, \text{ a stąd}$$

$$a = 2g \sqrt{\frac{h\tau}{6H}} \dots \dots \dots 887)$$

$$g = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{6H}{h\tau}} \dots \dots \dots 888)$$

τ oznacza tu dodatkowe natężenie wskutek wypadkowej R . Dlatego przyjmujemy zwykle τ bardzo małe, $\tau=1$ do $1,5 \text{ kg/cm}^2$.*).

Aby uniknąć natężeń na zginanie w murze między przyporami, używają zamiast muru płaskiego sklepień (rys. 431). Tu także podwójną siłę H uważać należy za obciążenie sklepienia i wyznaczyć linię ciśnienia, a osobno badać równowagę filarów między sklepieniami.

rys. 431



§. 211. Korzystny przekrój muru oporowego.

Chcąc wyznaczyć najkorzystniejszy przekrój muru podporowego, musimy zważyć najprzód na oszczędność materiału, potem na wielkość wykopu i na inne względy.

Pod względem oszczędności materiału są leżące mury najlepsze i to tem korzystniejsze, im mniejszy kąt α . Gdy $\alpha=0$, ziemia utrzymuje się sama, muru wtedy wcale nie potrzeba.

Z drugiej strony im mniejszy kąt α , tem większy jest wykop, który także kosztuje, a właśnie dla zmniejszenia wykopu używamy bardzo często murów podporowych. Czasem chodzi nam o to, aby przystęp był łatwiejszy np. przy bulwarach, wtedy budujemy mur wewnątrz pionowy, zewnątrz trochę pochyły.

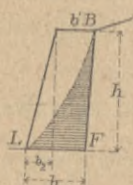
Dobry przekrój muru powinien być dalej taki, aby pewność była w całej wysokości jednakowa. To jednak nie da się osiągnąć, gdyż dla wierzchu muru ciśnienie jest równem zero, teoretycznie więc grubość muru powinna być na wierzchu równą zero i wzrastać wraz z ciśnieniem, a więc, jeżeli łożysko jest płaskim, przekrój powinien mieć kształt FBL (rys. 432).

*) Inny dokładniejszy sposób obliczenia podaje Haeseler w *Handbuch der Ingenieurwissenschaft* 1. t. 2. Oddział str. 297.

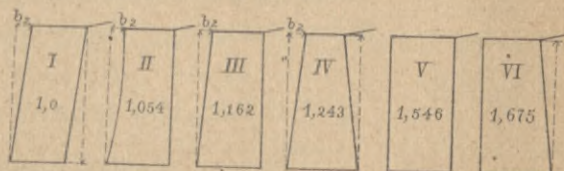
Ze względów praktycznych nie możemy jednak budować takich murów, bo pominąwszy, że oprócz parcia ziemi mogą działać i siły przypadkowe, lecz także wpływ powietrza działa szkodliwie na mur i zmniejsza jego przekrój, a wpływ ten jest największym na wierzchu muru. Szerokość wierzchu muru BM przyjmujemy więc zwykle $\approx 0,4 m$.

Występ muru b_1 przyjmujemy zwykle $0,1 h$ do $0,2 h$. — Ott obliczył dla występu $b_2 = \frac{h}{10}$ kilka murów podporowych

rys.432.



rys.433.



rozmaitych kształtów dla tej samej wysokości nasypu i tego samego materiału i otrzymał względne ilości materiału, któreśmy w rys. 433 wpisali. Widzimy więc, że mur leżący (I) potrzebuje jak najmniej materiału, o mało co więcej potrzebuje mur II wewnątrz pionowy, zewnątrz paraboliczny. Z powodu łatwości wykonania i niewielkiej potrzebnej ilości materiału w praktyce najczęściej spotykamy się z kształtem III.

Ponieważ, jak wiadomo, najkorzystniejszy jest kształt przekroju budowli murowanej, gdy linia ciśnienia spada z osią, więc gdy chcemy się do tego pravidła zastosować, otrzymujemy mury o przekroju podcięтым (rys. 429) albo nawet zakrzywionym (rys. 402). Oszczędność materiału może wynieść w stosunku do przekroju prostokątnego do 35%. O korzyściach tego rodzaju przekrojów traktuje zresztą nauka o budowlach ziemnych, do której czytelników odsyłamy.

§. 212. Parcie ziemi na przyczółek.

Jeżeli oprócz parcia ziemi działa na mur inna siła ukośna, np. parcie sklepienia, wtedy linia ciśnienia wyjść może z jądra niekoniecznie w podstawie, lecz w którymkolwiek innym szwie,

na NU jest, jak wiadomo, pionowe i równe ciężarowi ziemi, nad NU leżącej, który to ciężar składamy razem z ciężarem muru nad rs i otrzymujemy C_6 . Siły te składamy jedną po drugiej za pomocą wieloboku sił w zwykły sposób. A więc przedłużamy R aż do przecięcia się z C_1 w punkcie a i kreślimy wypadkową $ab \parallel O6$, dalej $bc \parallel C7$. Przedłużywszy bc do przecięcia się z rs w punkcie E_1 , otrzymujemy punkt linii ciśnienia. Wypadkową $O7$ składamy teraz z C_7 , robimy więc $cd \parallel O8$, $df \parallel O9$. Przecięcie się tej prostej z drugim szwem w E_2 daje nam następny punkt linii ciśnienia. $O9$ składamy teraz z C_8 i P_3 , a więc robimy najprzód $fg \parallel O10$, potem $gE_3 \parallel O11$. Przecięcie się gE_3 z podstawą daje nam środek ciśnienia podstawy. Linia ciśnienia jest linia łącząca środki ciśnień na pojedyncze szwy, a więc $eE_1E_2E_3$ (na rysunku dla wyrazistości opuszczona).

W tym wypadku widzimy, że linia ciśnienia nie wychodzi wcale z jądra w podstawie, a nawet leży za blisko środka podstawy, potrzebaby więc zmniejszyć przekrój muru i powtórzyć konstrukcyę raz jeszcze, aby się przekonać, czy mur nie pracuje na ciągnięcie.

Jeżeli parcie ziemi jest stosunkowo większe, a więc przy wysokich przyczółkach, zdarza się często, że linia ciśnienia w środku wysokości zbliża się do ojędrnej zewnętrznej, potem zaś zwraca się na wewnątrz i zbliża się do ojędrnej wewnętrznej.



I. DODATEK.

Literatura.

Podajemy tu w porządku chronologicznym spis podręczników i ważniejszych (bo ilość ich jest nader wielka) artykułów, jako też nowszych dzieł o statyce budowli, przyczem nadmienić musimy, że przytaczamy tu także dzieła, z których przy układaniu podręcznika wcale nie korzystaliśmy :

1. Ogólne dzieła.

- Rebhann: *Theorie der Holz- u. Eisenconstructionen*. Wiedeń 1856.
Rankine W. J. M.: *Manuel of civil engineering*. Londyn 1862.
12 wydanie 1877.
Bresse: *Cours de mécanique appliquée*. Paryż 1859, 3 wyd. 1880.
Grashof: *Festigkeitslehre*. Berlin 1866.
Winkler E.: *Die Lehre von der Elasticität u. Festigkeit*. Praga 1867.
Heinzerling F.: *Die angreifenden und widerstehenden Kräfte*. Berlin 1867. 2 wyd. 1876.
Collignon: *Cours de mécanique appliquée*. Paryż 1870.
Frauenholz: *Bauconstruction für Ingenieure*. Mnichów 1875.
Ritter A.: *Lehrbuch der Ingenieurmechanik*. Hanower 1875.
3 wyd. 1885.
Kluger: Wykład wytrzymałości materyałów. Paryż 1876.
Ott: *Vorträge über Baumechanik*. Praga 1877—1880., 3 wyd. 1888—1893.
Navier: *Mechanik der Baukunst, bearbeitet von Westphal und Föppl*. Hanower 1879.
Holzhey: *Vorträge über Baumechanik*. Wiedeń 1872—1879.
Résal H.: *Traité de la mécanique générale*.
Hintz L.: *Baustatik*. Weimar 1882.
Herrmann: *Die Statik der Bauwerke*. Brunswik 1882.
Jay du Bois: *The strains in framed structures*. Nowy Jork 1883.
Vigreux L.: *Traité théorique et pratique de la résistance des matériaux*. Paryż 1885.
Flamant: *Stabilité des constructions*. Paryż 1886.

- Planat: *Pratique de la mécanique appliquée*. Paryż 1887., 2 wydanie 1899.
- Tetmajer: *Baumechanik*. II. część. Zurych 1889.
- Landsberg Theod.: *Die Statik der Hochbauconstructionen*. Darmstadt. 2 wyd. 1889.
- Madamet A.: *Résistance des matériaux*. Paryż 1891.
- Vigreux: *Revue technique de l'exposition universelle*. Paryż 1891.
- Canevazzi S.: *Meccanica applicata delle construzioni*. Turyn 1891.
- Pillet J.: *Traité de stabilité des constructions*. Paryż 1895.
- Vonderlinn J.: *Statik für Hoch- und Tiefbautechniker*. Stuttgart 1896, 2 wyd. 1902.
- Resal Jean: *Résistance des matériaux*. Paryż 1898.

2. Statyka wykreslna.

- Culmann: *Graphische Statik*. Zurych 1 wyd. 1866, 2 wyd. 1875.
- Bauschinger: *Elemente der graphischen Statik*. Mnichów 1871, 2 wyd. 1880.
- Favaro: *La statica grafica*. Wenecya 1873.
- Levy: *La statique graphique et ses applications aux constructions*. Paryż 1874, 2 wyd. 1888.
- Cremona L.: *Elementi di calcolo grafico*. Turyn 1874.
- Abakanowicz B.: *Zarys statyki wykreslnej*. Lwów 1876.
- Du Bois: *Elements of graphical statics*. Nowy York 1876.
- Klasen: *Graphische Ermittlung der Spannungen*. Wiedeń 1878.
- Cremona L.: *Le figure reciproche nella statica grafica*. Medyolan 3 wyd. 1879.
- Eddy: *New constructions in graphical statics*. Londyn 1880, 2 wyd. 1888.
- Müller Breslau: *Elemente der graphischen Statik*. Berlin 1881, 3 wyd. 1887—1892.
- Baldermann: *Graphische Integration. Allg. Bauzeitung*. 1881.
- Chalmers: *Graphical determination of forces*. Londyn 1881.
- Maurer: *Statique graphique*. Paryż 1882, 2 wyd. 1885.
- Stelzel: *Graphische Statik*. Gradec 1882.
- Ott: *Graphische Statik*. 1874, 4 wyd. Praga 1883—1885.
- Hausser et Cunq.: *Statique graphique appliquée*. Paryż 1886.
- Ritter W.: *Anwendungen der graphischen Statik*. 1 część Zurych 1888.

- Köchlin: *Applications de la statique graphique*. Paryż 1889.
Lauenstein B.: *Die graphische Statik*. Stuttgart 1—4 wyd.
1890—1898.
Keck W.: *Vorträge über graphische Statik*. Hannover 1894.

3. Teorya belek.

- Clapeyron: *Calcul d'une poutre élastique, reposant librement sur des appuis inégalement espacés*. 1857.
Winkler E.: *Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Praga 1867.
Mohr: *Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstruktionen, Zeit. der Arch. oder Ing. Ver. zu Hannover* 1868.
Ritter A.: *Theorie und Berechnung der eisernen Dach- und Brückenconstruktionen*. 1870, 3 wydanie 1873.
Wöhler: *Die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl*. Berlin 1870.
Winkler E.: *Vorträge über Brückenbau*. 1875.
Spangenberg: *Ueber das Verhalten der Metalle bei wiederholten Anstrengungen*. Berlin 1875.
Tetmajer: *Die äusseren und inneren Kräfte an st. bestimmten Construktionen*. Zurych 1875.
Hulewicz: *Obliczenie wytrzymałości belek wieloprzęsłowych*. Paryż 1876.
Bauschinger: *Mittheilungen ans dem mech. technischen Laboratorium der k. k. Hochschule in München*, zeszyt I. 1877.
Winkler E.: *Wahl der zulässigen Inanspruchnahme der Eisenconstruktionen*. Wiedeń 1877.
Winkler E.: *Versuche über die Knickfestigkeit eiserner Säulen*. Civiling. 1878.
Abakanowicz: *Integrator, krzywa całkowita i jej zastosowanie*. Warszawa 1880, 2 wydanie Paryż 1886.
Burr: *A course on the stresses in bridge and roof trusses*. Nowy York 1880.
Foepppl: *Theorie des Fachwerks*. Lipsk 1880.
Wehage: *Spannungen in verbogenen Körpern*. Civiling. 1880.
Hulewicz: *Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées*. Ann. d. ponts et chaus. 1882.
Wittmann: *Statik der Hochbauconstruktionen II. Holzconstruktionen*. Mnichów 1882.

- Ritter W.: *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken*. Zurych 1883.
- Wittmann: *Statik der Hochbauconstructionen III. Eisenconstruction*. Mnichów 1884, 2 wyd. 1893.
- Dwelshavers-Dery: *Principes de la résistance des matériaux*. Leodyum 1884.
- Tetmajer L.: *Mittheilungen der Anstalt zur Prüfung der Baumaterialien*. Zurych 1884—1901.
- Obrębowicz: O wytrzymałości na wyboczenie. Rocznik Akademii Umiejętności. Kraków 1885.
- Smith R.: *Stress diagrams of solid structures*. 1889.
- Bach: *Elasticität und Festigkeit*. Berlin 1889—1890, 2 wyd. 1894.
- Ritter W.: *Das Fachwerk*. Zurych 1890.
- Miceau et Petit: *Congrès international des procédés de construction*. Paryż 1891.
- Keck: *Die Elasticitätslehre*. Hannover 1892—1893.
- Hartig: *Vergleichende Versuche über die Festigkeitseigenschaften metallener Gliederkette*. Civilingen. 1892.
- Résal Jean: *Construction métalliques, élasticité et résistance des matériaux, fonte, fer et acier*. Paryż 1892.
- Jasiński F. S.: *Opiat razwytia teorii prodalnaho izhyba*. Petersburg 1893; to samo po francusku 1894 i po polsku 1895.
- Fidler T. Claxton: *A practical treatise on bridge construction*. Londyn 1893.
- Bovey Henry: *Theory of structures and strength of materials*. Nowy York 1893.
- Tetmajer: *Gesetze der Knickfestigkeit der technisch wichtigsten Materialien*. Zurych 1896, 2 wyd. 1901.
- Dechamps: *Les principes de la constructions des charpentes métalliques*. Leodyum 2 wyd. 1898.
- Planat: *Recherches sur lu théorie des ciments armés*. Paryż 1898.

4. Teorya sklepień.

- Scheffler: *Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken*. Brunzswik 1857.
- Schwedler: *Zur Theorie der Gewölbe*. Zeitschrift für Bauwesen. Berlin 1859.
- Fabré: *Theorie des voûtes élastiques et dilatables*. 1859.

- Hagen: *Form und Stärke gewölbter Bögen*. 1862.
- Harlacher: *Stützlinie im Gewölbe*. *Technische Blätter*. Praga 1870.
- Dupuit: *Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie*. 1870.
- Heinzerling: *Theorie, Construction und statische Berechnung der Brückengewölbe*. *Allgem. Bauzeitung*. 1872.
- Chrzanowski T.: *Teorya sklepień*. Warszawa 1877.
- Szystowski: *Nowy sposób kreślenia krzywej ciśnienia*. Paryż 1877.
- Wittmann: *Statik der Hochbauconstruction. I. Theil*. Praga 1879.
- Winkler E.: *Ueber die Lage der Stützlinie im Gewölbe*. *Deutsche Bauzeitung*. 1879.
- Foeppl: *Theorie der Gewölbe*. Lipsk 1880.
- Ritter Fr.: *Zur Theorie der Gewölbe etc. Allg. Bauzeit.* 1881.
- Groeger J.: *Die Statik der Tunnelgewölbe in druckreichen Gebirge*. Praga 1881.
- Rytiř. *Beitrag zur Statik der Gewölbe*. *Mitth. der Arch. und Ing. Ver. Böhmen*. 1884.
- Perrodil: *Arc d'expérience en maçonnerie An. d. ponts et chaus.* 1882.
- Barkhausen: *Druckvertheilung in rechteckigen Mauerquerschnitt*, *Z. des hann. Ing. und Arch. Verh.* 1883.
- Obrębowicz: *Oznaczenie naprężeń, wywołanych działaniem sił prostopadłych do przekroju*. *Przegląd Techn.* 1884.
- Tolkmitt G.: *Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölber Brücken*. Berlin 1895.

5. Budowle ziemne i mury oporowe.

- Rebhann: *Theorie des Erddruckes und der Futtermauern*. Wiedeń 1871.
- Mohr: *Beitrag zur Theorie des Erddruckes*. *Zeits. der hann. Ing. und Arch. Ver.* 1871.
- Winkler E.: *Neue Theorie des Erddruckes*. Wiedeń 1872.
- Wittmann: *Geometrische Erddrucktheorie*. *Zeits. für Baukunde*. 1878.
- Wittmann: *Statik der Hochbauconstructionen. I. Theil*. 1879.
- Weyrauch: *Theorie des Erddruckes*. Wiedeń 1881.

- Dubosque: *Murs de soutènement et ponts en maçonnerie*. Paryż 1881.
- Forchheimer: *Erddruckversuche*. *Zeits. der öster. Ing. und Arch. Ver.* 1882—1883.
- Gobin: *Détermination précise de la stabilité des murs de soutènement*. Paryż 1884.
- Flamant: *La poussée des terres*. *Ann. des pont. et chaus.* 1883.
- Thullie: *Einige Bemerkungen über die ältere Erddrucktheorie*. *Wochens. des öster. Ing. und Arch. Verein.* 1884.
- Skibiński: *Parcie ziemi na podstawie nowych doświadczeń*. *Czasop. Techn. i Zeits. des öster. Ing. und Arch. Ver.* 1885.
- Thullie: *Doświadczenia Gobina w kwestyi parcia ziemi*. *Czasop. Techn. i Wochenbl. für Baukunde.* 1885.
- Kaven A. v.: *Anwendungen der Theorie der Böschungen*. Lipsk 1885.
- Leygue M. L.: *Poussée des terres*. *Ann. d. pont et chaus.* 1885.
- Häselser E.: *Stütz und Futtermauern*. *Handb. d. Ing.* I. tom, II. oddz. 3 wyd. Lipsk 1897.

II. DODATEK.

Tablice obciążeń stropów.

1. Ciężar własny stropów drewnianych

(według Hintza).

Rodzaj stropu	Odstęp belek od środka do środka			
	0,9 m		1,2 m	
	Wymiary belek			
	$\frac{20}{25}$	$\frac{25}{30}$	$\frac{20}{25}$	$\frac{25}{30}$
ciężar w kg na m ²				
Belki z pojedynczem dyłowaniem .	61	81	56	66
Pojedynczy strop kasetowy	122	144	112	132
Strop zawijany z gliną	201	228	198	213

2. Ciężar własny stropów sklepionych
(według Hintza).

Rodzaj stropu	Ciężar w $\frac{kg}{m^2}$
Strop na $\frac{1}{2}$ cegły z nadmurowaniem i podłogą	375
„ „ $\frac{1}{2}$ „ „ bez podłogi	325
„ „ $\frac{1}{4}$ „ „ i podłogą	250
„ „ $\frac{1}{4}$ „ „ bez podłogi	200

3. Ciężar zmienny
(częściowo według Hintza).

Użytek ubikacyi	$\frac{kg}{m^2}$	Użytek ubikacyi	$\frac{kg}{m^2}$
Pomieszkание	250	Spichrz kupiecki	760
Sala balowa	400	„ na sól	600
Strych na siano	406	Obciążenie tłumem ludzi	450
„ „ zboże	457		

4. Ciężar stropów
wedle Vonderlinna.

Ustrój	ciężar		
	własny	ru- chomy	zupełny
	kg/m^2		
a) w mieszkaniach albo fabrykach z lekkimi maszynami:			
Strop sklepiony na $\frac{1}{4}$ cegły z nadmurowaniem między żelaznymi dźwigarami o rozp. 1 m do 1,5 m z wyprawą i podłogą	300	200	500
Dtto na $\frac{1}{2}$ cegły	400	200	600
Dtto „ „ „ dla rozp. 2 do 3 m	500	200	700
Strop z blachy falistej, blach wypukłych lub kształtówek z betonem między dźwigarami (beton 13 cm gr.)	250	200	450
Strop belkowy drewniany z podłogą pojed.	80	200	280
Strop belkowy drewniany z podłogą podwójną i sufitem	100	200	300
Strop z dylów gipsowych z dźwigarami żelaznymi gr. 20 cm	200	200	400
Strop gipsowo-betonowy z dźwigarami i podłogą	300	200	500

Ustrój	ciężar		
	własny	ru- chomy	zupełny
	kg/m ²		
Strop z płyt Moniera gr. 5 cm, wypełnieniem żużłowem, podłogą, sufitem z dźwigarami	330	200	530
Strop z cegieł próżnych z dźwigarami i podłogą	270	200	470
b) We fabrykach z ciężkimi maszynami, spichlerzach i lokalnościach do tańca:			
Strop belkowy dylowy z dyliną w spichrzech na sól	200	600	800
Strop belkowy pół zawijany dla sal balowych, spichrów na siano i zboże	350	350	700
Strop dylowy w spichrzech towarowych	250	750	1000
Strop sklepiony na 1/2 cegły między dźwigarami o rozpiętości 1 m do 1,5 m w fabrykach i magazynach	450	500	950
Dtto na 1 cegłę dla rozp. 2 do 3 m	650	500	1150
Strop z blachy falistej, wypukłej lub kształtówek z betonem 20 cm grub.	350	500	850

5. Ciężar stropów i obciążenia

wedle rozporządzenia policji budowniczej w Berlinie.

	ciężar własny kg/m ²	zupełny kg/m ²
Strop belkowy w domach mieszkalnych	250	500
„ „ we fabrykach i magazynach	250	750
„ „ w spichrzech na zboże	—	850—1000
„ sklepiony z kamieni porowatych w budynkach mieszkalnych	350	600
Strop sklepiony we fabrykach	—	1000
„ „ pod przejazdami i podwórzami	—	1250
„ z blachy falistej	—	500—1000
Schody sklepione	500	1000

6. Ciężary i obciążenia

wedle tow. austr. inż. i arch. w Wiedniu przyjęte przez magistraty w Wiedniu i Linczu.

a) Ciężar własny stropów. kg/m²

1. Zwyczajny strop belkowy z nadsypką 8 cm, z podłogą, trzcinowa-
niem i wyprawą powały 240
2. Zwyczajny strop zbity z nadsypką 8 cm, zresztą jak pod 1. 300

	<i>kg/m²</i>
3. Zwykły strop zbity z nadsypką 8cm, trzciniowaniem i wyprawą posadzką z leżącego bruku ceglanego lub z płyt kamiennych . . .	350
4. Strop belkowy między dźwigarami, zresztą jak pod 1. włącznie z ciężarem dźwigarów	270
5. Sklepienie ceglane 15cm grube między dźwigarami z nadsypką 6cm w kluczu, trzciniowaniem, posadzką i dźwigarami:	
a) przy odstępach dźwigarów do 1,4m	500
b) " " " " 1,4m do 3m	570
6. Sklepienie 10cm grube z cegieł odsadzkowych, zresztą jak pod 5.:	
a) przy odstępach dźwigarów do 1,2m	400
b) " " " " od 1,2 do 2,0m	450
7. Strop z blachy falistej między dźwigarami wraz z powalą i posadzką i średnią nadsypką 9cm wraz z ciężarem dźwigarów . . .	210
8. Sklepienie betonowe z wyprawą, nadsypką i podłogą:	
a) 7,5cm gr. 11,5cm strzałka, wysokość ustroju 30cm	410
b) 8,5cm gr. 23cm strzałka, wysokość ustroju 40m	500
9. Sklepienie Moniera:	
a) 5cm gruba 26cm strzałka, wys. ustr. 40cm	320
b) 5cm gr. 45cm strzałka, wys. ustr. 52cm z posadzką cementową 5cm i wypełnieniem pachwin żużlem	390
10. Strop z blachy falistej między dźwigarami z powalą i posadzką i średnią nadsypką 12cm z dźwigarami	280
Dla każdego centymetra większej nadsypki zwiększa się ciężar o	14

b) Ciężar zmienny;

Nazwa obciążonej ubikacji	ciężar w <i>kg/m³</i>
Zwykły strych	150
Zwykłe mieszkanie	250
Biblioteki, sale balowe	350
Schody i korytarze	400
Kancelarye, pracownie, magazyny na piętrach i w przedziałach parteru	450
Dtto w parterze	550
Spichrz na ziarno i zboże	500
Lodownie na warstwę lodu 1m	750

7. Ciężar towarów

nasypanych i nałożonych w magazynach.

Słoma i siano	100 <i>kg/m³</i>
Pszenica	760 "
Żyto	680 "
Jęczmień gruby	640 "
" drobny	510 "
Owies	430 "
Groch, soczewica	850 "

Torf	600	kg/m ²
Węgiel brunatny	650	"
„ kamienny	900	"
Koks	450	"
Półki na akta, szafy z książkami itd.	500	"
Mąka	700	"
Grys	650	"
Proso	650	"
Ziemniaki	700	"
Cukier	750	"

Ułożone w workach o 20% mniej.

III. DODATEK.

Tablice liczbowe.

1. Tablica średnicy, obwodu i powierzchni kół, kwadratów, sześciątów, pierwiastków i odwrotności.

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześciąt <i>n</i> ³	Pierwiastki		Odwrotność $\frac{100}{n}$
	Obwód <i>nπ</i>	Powierzchnia $\frac{n^2π}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	
1	3,14	0,79	1	1	1,000	1,000	100,00
2	6,28	3,14	4	8	1,414	1,260	50,00
3	9,42	7,07	9	27	1,732	1,442	33,33
4	12,57	12,57	16	64	2,000	1,587	25,00
5	15,71	19,63	25	125	2,236	1,710	20,00
6	18,85	28,27	36	216	2,449	1,817	16,67
7	21,99	38,48	49	343	2,646	1,913	14,29
8	25,13	50,27	64	512	2,828	2,000	12,50
9	28,27	63,62	81	729	3,000	2,080	11,11
10	31,42	78,54	100	1000	3,162	2,154	10,00
11	34,56	95,03	121	1331	3,317	2,224	9,09
12	37,70	113,10	144	1728	3,464	2,289	8,33
13	40,84	132,73	169	2197	3,606	2,351	7,69
14	43,98	153,94	196	2744	3,742	2,410	7,14
15	47,12	176,71	225	3375	3,873	2,466	6,67
16	50,26	201,06	256	4096	4,000	2,520	6,25
17	53,41	226,98	289	4913	4,123	2,571	5,88
18	56,55	254,47	324	5832	4,243	2,621	5,56
19	59,69	283,53	361	6859	4,359	2,668	5,26
20	62,83	314,16	400	8000	4,472	2,714	5,00
21	65,97	346,36	441	9261	4,583	2,759	4,76
22	69,11	380,13	484	10648	4,690	2,802	4,55

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcian <i>n</i> ³	Pierwiastki		Od- wro- tność $\frac{100}{n}$
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2π}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	
23	72,26	415,48	529	12167	4,796	2,844	4,35
24	75,40	452,39	576	13824	4,899	2,884	4,17
25	78,54	490,87	625	15625	5,000	2,924	4,00
26	81,68	530,93	676	17576	5,099	2,962	3,85
27	84,82	572,55	729	19683	5,196	3,000	3,70
28	87,97	615,75	784	21952	5,291	3,037	3,57
29	91,11	660,52	841	24389	5,385	3,072	3,45
30	94,25	706,86	900	27000	5,477	3,107	3,33
31	97,39	754,77	961	29791	5,568	3,141	3,23
32	100,53	804,25	1024	32768	5,657	3,175	3,13
33	103,67	855,30	1089	35937	5,745	3,207	3,03
34	106,81	907,92	1156	39304	5,831	3,240	2,94
35	109,96	962,11	1225	42875	5,916	3,271	2,86
36	113,10	1017,88	1296	46656	6,000	3,302	2,78
37	116,24	1075,21	1369	50653	6,083	3,332	2,70
38	119,38	1134,11	1444	54872	6,164	3,362	2,63
39	122,52	1194,59	1521	59319	6,245	3,391	2,56
40	125,66	1256,64	1600	64000	6,325	3,420	2,50
41	128,81	1320,25	1681	68921	6,403	3,448	2,43
42	131,95	1385,44	1764	74088	6,481	3,476	2,38
43	135,09	1452,20	1849	79507	6,557	3,503	2,33
44	138,23	1520,52	1936	85184	6,633	3,530	2,27
45	141,37	1590,43	2025	91125	6,708	3,557	2,22
46	144,51	1661,90	2116	97336	6,782	3,583	2,17
47	147,65	1734,94	2209	103823	6,856	3,609	2,13
48	150,80	1809,56	2304	110592	6,928	3,634	2,08
49	153,94	1885,74	2401	117649	7,000	3,659	2,04
50	157,08	1963,50	2500	125000	7,071	3,684	2,00
51	160,22	2042,82	2601	132651	7,141	3,708	1,96
52	163,36	2123,72	2704	140608	7,211	3,732	1,92
53	166,50	2206,18	2809	148877	7,280	3,756	1,89
54	169,65	2290,22	2916	157464	7,348	3,780	1,85
55	172,79	2375,83	3025	166375	7,416	3,803	1,82
56	175,93	2463,01	3136	175616	7,483	3,826	1,79
57	179,07	2551,76	3249	185193	7,550	3,848	1,75
58	182,21	2642,08	3364	195112	7,616	3,871	1,72
59	185,35	2733,97	3481	205379	7,681	3,893	1,69
60	188,50	2827,44	3600	216000	7,746	3,915	1,67
61	191,64	2922,47	3721	226981	7,810	3,936	1,63
62	194,75	3019,07	3844	238328	7,874	3,958	1,61
63	197,92	3117,25	3969	250047	7,937	3,979	1,59
64	201,06	3216,99	4096	262144	8,000	4,000	1,56
65	204,20	3318,31	4225	274625	8,062	4,021	1,54
66	207,35	3421,19	4356	287496	8,124	4,041	1,52
67	210,49	3525,66	4489	300763	8,185	4,061	1,49
68	213,63	3631,69	4624	314432	8,246	4,082	1,47

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki		Od- wro- tność $\frac{100}{n}$
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	
69	216,77	3739,28	4761	328509	8,307	4,102	1,45
70	219,91	3848,45	4900	343000	8,367	4,121	1,43
71	223,05	3959,19	5041	357911	8,426	4,141	1,41
72	226,19	4071,50	5184	373248	8,485	4,160	1,39
73	229,34	4185,39	5329	389017	8,544	4,179	1,37
74	232,48	43,0084	5476	405224	8,602	4,198	1,35
75	235,62	4417,86	5625	421875	8,660	4,217	1,33
76	238,76	4536,46	5776	438976	8,718	4,236	1,32
77	241,90	4656,63	5929	456533	8,775	4,254	1,30
78	245,04	4778,36	6084	474552	8,832	4,273	1,28
79	248,19	4901,67	6241	493039	8,888	4,291	1,27
80	251,33	5026,55	6400	512000	8,944	4,309	1,25
81	254,47	5153,00	6561	531441	9,000	4,327	1,23
82	257,61	5281,02	6724	551368	9,055	4,345	1,22
83	260,75	5410,61	6889	571787	9,110	4,362	1,20
84	263,89	5541,77	7056	592704	9,165	4,379	1,19
85	267,04	5674,50	7225	614125	9,219	4,397	1,18
86	270,18	5808,80	7396	636056	0,274	4,414	1,16
87	273,32	5944,68	7569	658503	9,327	4,431	1,15
88	276,46	6082,12	7744	681472	9,381	4,448	1,14
89	279,60	6221,14	7921	704969	9,434	4,465	1,12
90	282,74	6361,73	8100	729000	9,487	4,481	1,11
91	285,88	6503,88	8281	753571	0,539	4,498	1,10
92	289,03	6647,61	8464	778688	9,592	4,514	1,09
93	292,17	6792,91	8649	804357	9,644	4,531	1,08
94	295,31	6939,78	8836	830584	9,695	4,547	1,06
95	298,45	7088,22	9025	857375	9,747	4,563	1,05
96	301,59	7238,23	9216	884736	9,798	4,579	1,04
97	304,73	7389,81	9409	912673	9,849	4,595	1,03
98	307,88	7542,96	9604	941192	9,899	4,610	1,02
99	311,02	7697,68	9801	970299	9,950	4,626	1,01
100	314,16	7853,98	10000	1000000	10,00	4,642	1,00
101	317,30	8011,85	10201	1030301	10,05	4,657	0,990
102	320,44	8171,28	10404	1061208	10,10	4,672	0,980
103	323,58	8332,29	10609	1092727	10,15	4,687	0,971
104	326,73	8494,87	10816	1124864	10,20	4,703	0,962
105	329,87	8659,01	11025	1157625	10,25	4,718	0,952
106	333,01	8824,73	11236	1191016	10,30	4,733	0,943
107	336,15	8992,02	11449	1225043	10,34	4,747	0,935
108	339,29	9160,88	11664	1259712	10,39	4,762	0,926
109	342,43	9331,32	11881	1295029	10,44	4,777	0,917
110	345,58	9503,32	12100	1331000	10,49	4,791	0,909
111	348,72	9676,89	12321	1367631	10,54	4,806	0,901
112	351,86	9852,03	12544	1404928	10,58	4,820	0,893
113	355,00	10028,7	12769	1442897	10,63	4,835	0,885

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześciąt <i>n</i> ³	Pierwiastki		Od- wro- tność $\frac{100}{n}$
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	
114	358,14	10207,0	12996	1481544	10,68	4,849	0,877
115	361,28	10386,9	13225	1520875	10,72	4,863	0,870
116	364,42	10568,3	13456	1560896	10,77	4,877	0,862
117	367,57	10751,3	13689	1601613	10,82	4,891	0,855
118	370,71	10935,9	13924	1643032	10,86	4,905	0,847
119	373,85	11122,0	14161	1685159	10,91	4,919	0,840
120	376,99	11309,7	14400	1728000	10,95	4,932	0,833
121	380,13	11499,0	14641	1771561	11,00	4,946	0,826
122	383,27	11689,9	14884	1815848	11,05	4,960	0,820
123	386,42	11882,3	15129	1860867	11,09	4,973	0,813
124	389,56	12076,3	15376	1906624	11,14	4,987	0,806
125	392,70	12271,8	15625	1953125	11,18	5,000	0,800
126	395,84	12469,0	15876	2000376	11,22	5,013	0,794
127	398,98	12668,0	16129	2048383	11,27	5,026	0,787
128	402,12	12868,0	16384	2097152	11,31	5,040	0,781
129	405,27	13069,8	16641	2146689	11,36	5,053	0,775
130	408,41	13273,2	16900	2197000	11,40	5,066	0,769
131	411,54	13478,2	17161	2248091	11,45	5,079	0,763
132	414,69	13684,8	17424	2299968	11,49	5,092	0,758
133	417,83	13892,9	17689	2352637	11,53	5,104	0,752
134	420,97	14102,6	17956	2406104	11,58	5,117	0,746
135	424,12	14313,9	18225	2460375	11,62	5,130	0,741
136	427,26	14526,8	18496	2515456	11,66	5,142	0,735
137	430,40	14741,2	18769	2571353	11,70	5,155	0,730
138	433,54	14957,2	19044	2628072	11,75	5,168	0,725
139	436,68	15174,7	19321	2685619	11,79	5,180	0,719
140	439,82	15393,8	19600	2744000	11,83	5,192	0,714
141	442,96	15614,5	19881	2803221	11,87	5,205	0,709
142	446,11	15836,8	20164	2863288	11,92	5,217	0,704
143	449,25	16060,6	20449	2924207	11,96	5,229	0,699
144	452,39	16286,0	20736	2985984	12,00	5,241	0,694
145	455,53	16513,0	21025	3048625	12,04	5,254	0,690
146	458,67	16741,6	21316	3112136	12,08	5,266	0,685
147	461,81	16971,7	21609	3176523	12,12	5,278	0,680
148	464,96	17203,4	21904	3241792	12,17	5,290	0,676
149	468,10	17436,7	22201	3307949	12,21	5,301	0,671
150	471,24	17671,5	22500	3375000	12,25	5,313	0,667
151	474,38	17907,9	22801	3442951	12,29	5,325	0,662
152	477,52	18145,9	23104	3511808	12,33	5,337	0,658
153	480,66	18385,4	23409	3581577	12,37	5,348	0,654
154	483,81	18626,5	23716	3652264	12,41	5,360	0,649
155	486,95	18869,2	24025	3723875	12,45	5,372	0,645
156	490,09	19113,5	24336	3796416	12,49	5,383	0,641
157	493,23	19359,3	24649	3869893	12,53	5,395	0,637
158	496,37	19606,7	24964	3944312	12,57	5,406	0,633
159	499,51	19855,7	25281	4019679	12,61	5,417	0,629

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki		Od- wro- tność $\frac{1000}{n}$
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	
160	502,65	20106,2	25600	4096000	12,65	5,428	6,25
161	505,80	20358,4	25921	4173281	12,69	5,440	6,21
162	508,94	20612,0	26244	4251528	12,73	5,451	6,17
163	512,08	20867,2	26569	4330747	12,77	5,463	6,13
164	515,22	21124,1	26896	4410944	12,81	5,474	6,10
165	518,36	21382,5	27225	4492125	12,85	5,485	6,06
166	521,50	21642,5	27556	4574296	12,88	5,496	6,02
167	524,65	21904,0	27889	4657463	12,92	5,507	5,99
168	527,79	22167,1	28224	4741632	12,96	5,518	5,95
169	530,93	22431,8	28561	4826809	13,00	5,529	5,92
170	534,07	22698,1	28900	4913000	13,04	5,540	5,88
171	537,21	22965,9	29241	5000211	13,08	5,550	5,85
172	540,35	23235,3	29584	5088448	13,11	5,561	5,81
173	543,50	23506,2	29929	5177717	13,15	5,572	5,78
174	546,64	23778,8	30276	5268024	13,19	5,583	5,75
175	549,78	24052,9	30625	5359375	13,23	5,593	5,71
176	552,92	24328,6	30976	5451776	13,27	5,605	5,68
177	556,06	24605,8	31329	5545233	13,30	5,615	5,65
178	559,20	24884,6	31684	5639752	13,34	5,625	5,62
179	562,35	25165,0	32041	5735339	13,38	5,636	5,59
180	565,49	25447,0	32400	5832000	13,42	5,646	5,56
181	568,63	25730,5	32761	5929741	13,45	5,657	5,52
182	571,77	26015,6	33124	6028568	13,49	5,667	5,49
183	574,91	26302,3	33489	6128487	13,53	5,677	5,46
184	578,05	26590,5	33856	6229504	13,56	5,688	5,43
185	581,19	26880,3	34225	6331625	13,60	5,698	5,41
186	584,34	27171,7	34596	6434856	13,64	5,708	5,38
187	587,48	27464,7	34969	6539203	13,67	5,718	5,35
188	590,62	27759,2	35344	6644672	13,71	5,729	5,32
189	593,76	28055,3	35721	6751269	13,75	5,739	5,29
190	596,90	28352,9	36100	6859000	13,78	5,749	5,26
191	600,04	28652,2	36481	6967871	13,82	5,759	5,24
192	603,19	28953,0	36864	7077888	13,86	5,769	5,21
193	606,33	29255,4	37249	7189057	13,89	5,779	5,18
194	609,47	29559,3	37636	7301884	13,93	5,789	5,15
195	612,61	29864,8	38025	7414875	13,96	5,799	5,13
196	615,75	30171,9	38416	7529536	14,00	5,809	5,10
197	618,89	30480,6	38809	7645373	14,04	5,819	5,08
198	622,04	30790,8	39204	7762392	14,07	5,828	5,05
199	625,18	31102,6	39601	7880599	14,11	5,838	5,02
200	628,32	31416,0	40000	8000000	14,14	5,848	5,00
201	631,46	31730,9	40401	8120601	14,18	5,858	4,98
202	634,60	32047,5	40804	8242408	14,21	5,867	4,95
203	637,74	32365,5	41209	8365427	14,25	5,877	4,93
204	640,88	32685,2	41616	8489664	14,28	5,887	4,90

Liczba <i>n</i>	K o l o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
205	644,08	33006,4	42025	8615125	14,82	5,896
206	647,17	33329,2	42436	8741816	14,35	5,906
207	650,31	33653,6	42849	8869743	14,39	5,915
208	653,45	33979,5	43264	8998912	14,42	5,925
209	656,59	34307,0	43681	9129329	14,46	5,934
210	659,73	34636,1	44100	9261000	14,49	5,944
211	662,87	34966,8	44521	9393991	14,53	5,953
212	666,02	35299,0	44944	9528128	14,56	5,963
213	669,16	35632,8	45369	9663597	14,59	5,972
214	672,30	35968,2	45796	9800344	14,63	5,981
215	675,44	36305,1	46225	9938375	14,66	5,991
216	678,58	36643,6	46656	10077696	14,70	6,000
217	681,73	36983,7	47089	10218313	14,73	6,009
218	684,86	37325,3	47524	10360232	14,76	6,018
219	688,01	37668,6	47961	10503459	14,80	6,028
220	691,15	38013,4	48400	10648000	14,83	6,036
221	694,29	38359,7	48841	10793861	14,87	6,046
222	697,43	38707,7	49284	10941048	14,90	6,055
223	700,58	39057,1	49729	11089567	14,93	6,064
224	703,72	39408,2	50176	11239424	14,97	6,073
225	706,86	39760,9	50625	11390625	15,00	6,082
226	710,00	40115,1	51076	11543176	15,03	6,091
227	713,14	40470,9	51529	11697083	15,07	6,100
228	716,28	40828,2	51984	11852352	15,10	6,109
229	719,42	41187,2	52441	12008989	15,13	6,118
230	722,57	41547,7	52900	12167000	15,17	6,126
231	725,71	41909,7	53361	12326391	15,20	6,136
232	728,85	42273,3	53824	12487168	15,23	6,145
233	731,99	42638,6	54289	12649337	15,26	6,153
234	735,13	43005,4	54756	12812904	15,30	6,162
235	738,27	43373,7	55225	12977875	15,33	6,171
236	741,42	43743,6	55696	13144256	15,36	6,180
237	744,56	44115,1	56169	13312053	15,39	6,188
238	747,70	44488,2	56644	13481272	15,43	6,197
239	750,84	44862,8	57121	13651919	15,46	6,206
240	753,98	45239,0	57600	13824000	15,49	6,214
241	757,12	45616,8	58081	13997521	15,52	6,223
242	760,27	45996,2	58564	14172488	15,56	6,232
243	763,41	46377,1	59049	14348907	15,59	6,240
244	766,55	46759,6	59536	14526784	15,62	6,249
245	769,69	47143,6	60025	14706125	15,65	6,257
246	772,83	47529,3	60516	14886936	15,68	6,266
247	775,97	47916,5	61009	15069223	15,72	6,274
248	779,11	48305,2	61504	15252992	15,75	6,282
249	782,26	48695,6	62001	15438249	15,78	6,291
250	785,40	49087,5	62500	15625000	15,81	6,300

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
251	788,54	49481,0	63001	15813251	15,84	6,308
252	791,68	49876,0	63504	16003008	15,87	6,316
253	794,82	50272,7	64009	16194277	15,91	6,325
254	797,96	50670,9	64516	16387064	15,94	6,333
255	808,11	51070,6	65025	16581375	15,97	6,341
256	804,25	51472,0	65536	16777216	16,00	6,350
257	807,39	51874,9	66049	16974593	16,03	6,358
258	810,53	52279,4	66564	17173512	16,06	6,366
259	813,67	52685,4	67081	17373979	16,09	6,374
260	816,81	53093,0	67600	17576000	16,12	6,383
261	819,96	53502,2	68121	17779581	16,16	6,391
262	823,10	53913,0	68644	17984728	16,19	6,399
263	826,24	54325,3	69169	18191447	16,22	6,407
264	829,38	54739,2	69696	18399744	16,25	6,415
265	832,52	55154,7	70225	18609625	16,28	6,423
266	835,66	55571,8	70756	18821096	16,31	6,431
267	838,81	55990,4	71289	19034163	16,34	6,439
268	841,95	56410,6	71824	19248832	16,37	6,447
269	845,09	56832,3	72361	19465109	16,40	6,455
270	848,23	57255,7	72900	19683000	16,43	6,463
271	851,37	57680,6	73441	19902511	16,46	6,471
272	854,51	58107,0	73984	20123648	16,49	6,479
273	857,65	58535,1	74529	20346417	16,52	6,487
274	860,80	58964,7	75076	20570824	16,55	6,495
275	863,94	59393,9	75625	20796875	16,58	6,503
276	867,08	59828,6	76176	21024576	16,61	6,511
277	870,22	60263,0	76729	21253933	16,64	6,519
278	873,66	60698,9	77284	21484952	16,67	6,526
279	876,50	61136,3	77841	21717639	16,70	6,534
280	879,65	61575,4	78400	21952000	16,73	6,542
281	882,79	62016,0	78961	22188041	16,76	6,550
282	885,93	62458,1	79524	22425768	16,79	6,558
283	889,07	62901,9	80089	22665187	16,82	6,565
284	892,21	63347,2	80656	22906304	16,85	6,573
285	895,35	63794,1	81225	23149125	16,88	6,581
286	898,50	64242,6	81796	23393656	16,91	6,588
287	901,64	64692,6	82369	23639908	16,94	6,596
288	904,78	65144,2	82944	23887872	16,97	6,604
289	907,72	65597,4	83521	24137569	17,00	6,611
290	911,06	66052,1	84100	24389000	17,03	6,619
291	914,20	66508,5	84681	24642171	17,06	6,627
292	917,35	66966,3	85264	24897088	17,09	6,634
293	920,49	67425,8	85849	25153757	17,12	6,642
294	923,63	67886,8	86436	25412184	17,15	6,649
295	926,77	68349,4	87025	25672375	17,18	6,657
296	929,91	68813,6	81616	25934336	17,20	6,664

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcian <i>n</i> ³	Pierwiastki	
	Obwód <i>uπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
297	933,05	69279,3	88209	26198073	17,23	6,672
298	936,19	69746,7	88804	26463592	17,26	6,679
299	939,34	70215,5	89401	26730899	17,29	6,687
300	942,48	70686,0	90000	27000000	17,32	6,694
301	945,62	71158,0	90601	27270901	17,35	6,702
302	948,76	71631,6	91204	27543608	17,38	6,709
303	951,90	72106,8	91809	27818127	17,41	6,717
304	955,04	72583,5	92416	29094464	17,44	6,724
305	958,19	73061,8	93025	28372625	17,46	6,731
306	961,33	73541,7	93636	28652616	17,49	6,739
307	964,47	74023,2	94249	28934443	17,52	6,746
308	967,61	74506,2	94864	29218112	17,55	6,753
309	970,75	74990,8	95481	29503629	17,58	6,761
310	973,89	75476,9	96100	29791000	17,61	6,768
311	977,04	75964,7	96721	30080231	17,64	6,775
312	980,18	76453,9	97344	30371328	17,66	6,782
313	983,32	76944,9	97969	30664297	17,69	6,790
314	986,46	77437,3	98596	30959144	17,72	6,797
315	989,60	77931,3	99225	31255875	17,75	6,804
316	992,74	78426,9	99856	31554496	17,78	6,811
317	995,88	78924,1	100489	31855013	17,80	6,818
318	999,03	79422,8	101124	32157432	17,83	6,826
319	1002,2	79923,1	101761	32461759	17,86	6,833
320	1005,3	80425,0	102400	32768000	17,89	6,840
321	1008,5	80928,4	103041	33076161	17,92	6,847
322	1011,6	81433,4	103684	33386248	17,94	6,854
323	1014,7	81940,0	104329	33698267	17,97	6,861
324	1017,5	82448,1	104976	34012224	18,00	6,868
325	1021,0	82957,9	105625	34328125	18,03	6,875
326	1024,2	83469,2	106276	34645976	18,06	6,882
327	1027,3	83982,0	106929	34965783	18,08	6,889
328	1030,4	84496,5	107584	35287552	18,11	6,896
329	1033,6	85012,5	108241	35611289	18,14	6,903
330	1036,7	85530,1	108900	35937000	18,17	6,910
331	1039,9	86049,2	109561	36264691	18,19	6,917
332	1043,0	86569,9	110224	36594368	18,22	6,924
333	1046,2	87092,2	110889	36926037	18,25	6,931
334	1049,3	87616,1	111556	37259704	18,28	6,938
335	1052,4	88141,5	112225	37595375	18,30	6,945
336	1055,6	88668,5	112896	37933056	18,33	6,952
337	1058,7	89197,1	113560	38272753	18,36	6,959
338	1061,9	89727,2	114244	38614472	18,38	6,966
339	1065,0	90259,0	114921	38958219	18,41	6,973
340	1068,1	90792,2	115600	39304000	18,44	6,979
341	1071,3	91327,1	116281	39651821	18,47	6,986

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcián n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
342	1074,4	91863,5	116964	40001688	18,49	6,993
343	1077,6	92401,2	117649	40353607	18,52	7,000
344	1080,7	92941,1	118336	40707584	18,55	7,007
345	1083,9	93482,2	119025	41063625	18,57	7,014
346	1087,0	94024,9	119716	41421726	18,60	7,020
347	1090,4	94569,2	120409	41781923	18,63	7,027
348	1093,1	95115,1	121104	42144192	18,66	7,034
349	1096,4	95662,5	121801	42508549	18,68	7,040
350	1099,6	96211,5	122500	42875000	18,71	7,047
351	1102,7	96762,0	123201	43243551	18,74	7,054
352	1105,8	97314,2	123904	43614208	18,76	7,061
353	1109,0	97867,9	124609	33986977	18,79	7,067
354	1112,6	98423,2	125316	44361864	18,81	7,074
355	1115,3	98980,0	126025	44738875	18,84	7,081
356	1118,4	99538,5	126736	45118116	18,87	7,087
357	1121,6	100098	127449	45499293	18,89	7,094
358	1124,7	100660	128164	45882712	18,92	7,101
359	1127,8	101223	128881	46268279	18,95	7,107
360	1131,0	101788	129600	46656000	18,97	7,114
361	1134,1	102354	130321	47045881	19,00	7,120
362	1137,3	102922	131044	47437928	19,03	7,127
363	1140,4	103491	131769	47832147	19,05	7,133
364	1143,5	104062	132496	48228544	19,08	7,140
365	1146,7	104635	133225	48627125	19,11	7,147
366	1149,8	105209	133956	49027896	19,13	7,153
367	1153,0	105785	134689	49430863	19,16	7,160
368	1156,1	106362	135424	49836032	19,18	7,166
369	1159,3	106941	136161	50243409	19,21	7,173
370	1162,4	107521	136900	50653000	19,24	7,179
371	1165,5	108103	137641	51064811	19,26	7,185
372	1168,7	108687	138384	51478848	19,29	7,192
373	1171,8	109272	139129	51895117	19,31	7,198
374	1175,0	109859	139876	52313624	19,34	7,205
375	1178,1	110447	140625	52734375	19,36	7,211
376	1181,2	111037	141376	53157376	19,39	7,218
377	1184,4	111628	142129	53582533	19,42	7,224
378	1187,5	112221	142884	54010152	19,44	7,230
379	1190,7	112816	143641	54439939	19,47	7,237
380	1193,8	113412	144400	54872000	19,49	7,243
381	1196,9	114009	145161	55306341	19,52	7,249
382	1200,1	114609	145924	55742968	19,54	7,256
383	1203,2	115210	146689	56181887	19,57	7,262
384	1206,4	115812	147456	56623104	19,60	7,268
385	1209,5	116416	148225	57066625	19,62	7,275
386	1212,7	117021	148996	57512456	19,65	7,281
387	1215,8	117629	149769	57960603	19,67	7,287

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcián <i>n</i> ³	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
388	1218,9	118237	150544	58411072	19,70	7,294
389	1222,1	118847	151321	58863869	19,72	7,300
390	1225,2	119459	152100	59319000	19,75	7,306
391	1228,4	120073	152881	59776471	19,77	7,312
392	1231,5	120688	153664	60236288	19,80	7,319
393	1234,6	121304	154449	60698457	19,82	7,325
394	1237,8	121922	155236	61162984	19,85	7,331
395	1240,9	122542	156025	61629876	19,88	7,337
396	1244,1	123163	156816	62099136	19,90	7,343
397	1247,2	123786	157609	62570773	19,92	7,350
398	1250,4	124412	158404	63044792	19,95	7,356
399	1253,5	125036	159201	63521199	19,98	7,362
400	1256,6	125664	160000	64000000	20,00	7,368
401	1259,8	126293	160801	64481201	20,03	7,374
402	1262,9	126924	160604	64964808	20,05	7,380
403	1266,1	127556	162409	65450327	20,07	7,386
404	1269,2	128190	163216	65939264	20,10	7,392
405	1272,3	128825	164025	66430125	20,12	7,399
406	1275,5	129462	164836	66923416	20,15	7,405
407	1278,6	130101	165649	67419143	20,17	7,411
408	1281,8	130741	166464	67917312	20,20	7,417
409	1284,9	131382	167281	68417929	20,22	7,423
410	1288,1	132026	168100	68921000	20,25	7,429
411	1291,1	132671	168921	69426531	20,27	7,435
412	1294,3	133317	169744	69934528	20,30	7,441
413	1297,5	133965	170569	70444997	20,32	7,447
414	1300,6	134614	171396	70957944	20,35	7,453
415	1303,8	135266	172225	71473375	20,37	7,459
416	1306,9	135918	173056	71991296	20,40	7,465
417	1310,0	136572	173889	72511713	20,42	7,471
418	1313,2	137228	174724	73034632	20,45	7,477
419	1316,3	137886	175561	73560059	20,47	7,483
420	1319,5	138545	176400	74088000	20,49	7,489
421	1322,6	139205	177241	74618461	20,52	7,495
422	1325,8	139867	178084	75151448	20,54	7,501
423	1328,9	140531	178929	75686967	20,57	7,507
424	1332,0	141196	179776	76225024	20,59	7,513
425	1335,2	141863	180625	76755625	20,62	7,518
426	1338,3	142531	181476	77308776	20,64	7,524
427	1341,5	143201	182329	77854488	20,66	7,530
428	1344,6	143872	183184	78402752	20,69	7,536
429	1347,7	144546	184041	78953589	20,71	7,542
430	1350,9	145220	184900	79507000	20,74	7,548
431	1354,0	145897	185761	80062991	20,76	7,554
432	1357,2	146574	186624	80621568	20,78	7,559

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcian <i>n</i> ³	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
433	1360,3	147254	187489	81182737	20,81	7,565
434	1393,5	147935	188356	81746504	20,83	7,571
435	1366,6	148617	189225	82312875	20,86	7,577
436	1369,7	149301	190096	82881856	20,88	7,583
437	1372,9	149987	190969	83453453	20,90	7,589
438	1376,0	150674	191844	84027672	20,93	7,594
439	1379,2	151363	192721	84604519	20,95	7,600
440	1382,3	152053	193600	85184000	20,98	7,606
441	1385,4	152745	194481	85766121	21,00	7,612
442	1388,6	153439	195364	86350388	21,02	7,617
443	1391,7	154134	196249	86938307	21,05	7,623
444	1394,9	154831	197136	87529384	21,07	7,629
445	1398,0	155529	198025	88121125	21,10	7,635
446	1401,2	156229	198916	88716536	21,12	7,640
447	1404,3	156930	199809	89314623	21,14	7,646
448	1407,4	157633	200704	89915392	21,17	7,652
449	1410,6	158337	201601	90518849	21,19	7,657
450	1413,7	159044	202500	91125000	21,21	7,663
451	1416,9	159751	203401	91733851	21,24	7,669
452	1420,0	160460	204304	92345408	21,26	7,674
453	1423,1	161171	205209	92959677	21,28	7,680
454	1426,3	161884	206106	93546664	21,31	7,686
455	1429,4	162597	207025	94196375	21,33	7,691
456	1332,6	163313	207936	94818816	21,35	7,697
457	1435,7	164030	208849	95443993	21,38	7,703
458	1438,9	164749	209764	96071912	21,40	7,708
459	1442,0	165469	210681	96702579	21,42	7,714
460	1445,1	166191	211600	97336000	21,45	7,719
461	1448,3	166914	212521	97972181	21,47	7,725
462	1451,4	167639	213444	98611128	21,49	7,731
463	1454,6	168365	214369	99252847	21,52	7,736
464	1457,7	169093	215296	99897344	21,54	7,742
465	1460,8	169823	216225	100544625	21,56	7,747
466	1464,0	170554	217156	101194696	21,59	7,753
467	1467,1	171287	218089	101847563	21,61	7,758
468	1470,3	172021	219024	102503232	21,66	7,764
469	1473,4	172757	219961	103161709	21,66	7,769
470	1476,5	173495	220900	103823000	21,68	7,775
471	1479,7	174234	221841	104487111	21,70	7,780
472	1482,8	174975	222784	105154048	21,73	7,786
473	1486,0	175717	223729	105823817	21,75	7,791
474	1489,1	176460	224676	106496424	21,77	7,797
475	1492,3	177206	225625	107171875	21,79	7,802
476	1495,4	177953	226576	107850176	21,82	7,808
477	1498,5	178701	227529	108531333	21,84	7,813
478	1501,7	179451	228484	109215352	21,86	7,819

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcian <i>n</i> ³	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
479	1504,8	180203	229441	109902239	21,89	7,824
480	1508,0	180956	230400	110592000	21,91	7,830
481	1511,1	181713	231361	111284641	21,93	7,835
482	1514,3	182467	232324	111980168	21,95	7,841
483	1517,4	183225	333289	112678587	21,98	7,746
484	1520,5	183985	234256	113379904	22,00	7,851
485	1523,7	184746	235225	114084125	22,02	7,857
486	1526,8	185508	236196	114791256	22,05	7,862
487	1530,0	186273	237169	115501803	22,07	7,868
488	1533,1	187038	238144	116214272	22,09	7,873
489	1536,2	187806	239121	116930169	22,11	7,878
490	1539,4	188575	240100	117649000	22,14	7,884
491	1542,5	189345	241081	118370771	22,16	7,889
492	1545,7	190117	242064	119095488	22,18	7,894
493	1548,8	190891	243049	119823157	22,20	7,900
494	1552,0	191666	244036	120553784	22,23	7,905
495	1555,1	192443	245025	121287375	22,25	7,910
496	1558,2	193221	246016	122023936	22,27	7,916
497	1561,4	194001	247009	122763473	22,29	7,921
498	1564,5	194782	248004	123505992	22,32	7,926
499	1567,7	195565	249001	124251499	22,34	8,932
500	1570,8	196350	250000	125000000	22,36	7,937
501	1573,9	197136	251001	125751501	22,38	7,942
502	1577,1	197924	252004	126506008	22,41	7,948
503	1580,2	198713	253009	127263527	22,43	7,953
504	1583,4	199504	254016	128024064	22,45	7,958
505	1586,5	200297	255025	128787625	22,47	7,963
506	1589,6	201091	256036	129554216	22,49	7,969
507	1592,8	201886	257049	130323843	22,52	7,974
508	1595,9	202683	258064	131096512	22,54	7,979
509	1599,1	203483	259081	131872229	22,56	7,984
510	1602,2	204283	260100	132651000	22,58	7,990
511	1605,4	205084	261121	133432831	22,61	7,995
512	1608,5	205888	262144	134217728	22,63	8,000
513	1611,6	206693	263169	135005697	22,65	8,005
514	1614,8	207500	264196	135796744	22,67	8,010
515	1617,9	208308	265225	136590875	22,69	8,016
516	1621,1	209117	266256	137388096	22,72	8,021
517	1624,2	209929	267289	138188413	22,74	8,026
518	1627,3	210742	268324	138991832	22,76	8,031
519	1630,5	211556	269361	139798359	22,78	8,036
520	1633,6	212372	270400	140608000	22,80	8,041
521	1636,8	213190	271441	141420761	22,83	8,047
522	1639,9	214009	272484	142236648	22,85	8,052
523	1643,1	214830	273529	143055667	22,87	8,057

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
524	1646,2	215652	274576	148877824	22,89	8,062
525	1649,3	216476	275625	144703125	22,91	8,067
526	1652,5	217301	276676	145531576	22,93	8,072
527	1655,6	218128	277729	146363183	22,96	8,077
528	1658,8	218957	278784	147197952	22,98	8,082
529	1661,9	219787	279841	148035889	23,00	8,088
530	1665,1	220619	280900	148877000	23,02	8,093
531	1668,2	221452	281961	149721291	23,04	8,098
532	1671,3	222287	283024	150568768	23,07	8,103
533	1674,5	223124	284089	151419437	23,09	8,108
534	1677,6	223962	285156	152273304	23,11	8,113
535	1680,8	224801	286225	153130375	23,13	8,118
536	1683,8	225642	287296	153990656	23,15	8,123
537	1687,0	226484	288369	154854153	23,17	8,128
538	1690,2	227329	289444	155720872	23,19	8,133
539	1693,3	228175	290521	156590819	23,22	8,138
540	1696,5	229023	291600	157464000	23,24	8,143
541	1699,6	229872	292681	158340421	23,26	8,148
542	1702,7	230722	293764	159220088	23,28	8,153
543	1705,9	231574	294849	160103007	23,30	8,158
544	1709,0	232428	295936	160989184	23,32	8,163
545	1712,2	233283	297025	161878625	23,35	8,168
546	1715,3	234140	298116	162771336	23,37	8,173
547	1718,5	234999	299209	163667323	23,39	8,178
548	1722,6	235859	300304	164566592	23,41	8,183
549	1724,7	236720	301401	165469149	23,43	8,188
550	1727,8	237584	302500	166375000	23,45	8,193
551	1731,0	238448	303601	167284151	23,47	8,198
552	1734,2	239315	304704	168196608	23,50	8,203
553	1737,3	240182	305809	169112377	23,52	8,208
554	1740,4	241052	306916	170031464	23,54	8,213
555	1743,6	241923	308025	170953875	23,56	8,218
556	1746,7	242795	309136	171879616	23,58	8,223
557	1749,7	243670	310249	172808693	23,60	8,228
558	1753,0	244545	311364	173741112	23,62	8,233
559	1756,1	245423	312481	174676879	23,64	8,238
560	1759,3	246301	313600	175616000	23,66	8,243
561	1762,4	247182	314721	176558481	23,69	8,248
562	1765,5	248064	315844	177504328	23,71	8,252
563	1768,7	248974	316969	178453547	23,73	8,257
564	1771,8	249893	318096	179406144	23,75	8,262
565	1775,0	250719	319225	180362125	23,77	8,267
566	1778,1	251608	320356	181321496	23,79	8,272
567	1781,3	252497	321489	182284263	23,81	8,277
568	1784,4	253389	322624	183250432	23,83	8,282
569	1787,6	254282	323761	184220009	23,85	8,287

Liczba <i>n</i>	K o l o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
570	1791,7	255177	324900	185193000	23,88	8,291
571	1793,9	256073	326041	186169411	23,90	8,296
572	1797,0	256970	327184	187149248	23,92	8,301
573	1800,1	257870	328329	188132517	23,94	8,306
574	1803,3	258770	329476	189119224	23,96	8,311
575	1806,4	259673	330625	190109375	23,98	8,315
576	1809,7	260577	331776	191102976	24,00	8,320
577	1812,8	261482	332929	192100033	24,02	8,325
578	1815,8	262389	334084	193100552	24,04	8,330
579	1819,0	263298	335241	194104539	24,06	8,335
580	1822,1	264209	336400	195112000	24,08	8,340
581	1825,3	265120	337561	196122941	24,10	8,344
582	1828,4	266034	338724	197137368	24,12	8,349
583	1831,6	266949	339889	198155287	24,15	8,354
584	1834,7	267865	341056	199176704	24,17	8,359
585	1837,8	268784	342225	200201625	24,19	8,363
586	1841,0	269703	343396	201230056	24,21	8,368
587	1844,1	270624	344569	202262003	24,23	8,373
588	1847,3	271547	345744	203297472	24,25	8,378
589	1850,4	272472	346921	204336469	24,27	8,382
590	1853,5	273398	348100	205379000	24,29	8,387
591	1856,7	274325	349281	206425071	24,31	8,392
592	1859,8	275254	350464	207474688	24,33	8,397
593	1863,0	276185	351649	208527857	24,35	8,401
594	1866,1	277117	352836	209584584	24,37	8,406
595	1869,3	278051	354025	210644875	24,39	8,411
596	1872,4	278987	355216	211708736	24,41	8,415
597	1875,5	279924	356409	212776173	24,43	8,420
598	1878,7	280862	357604	213847192	24,45	8,425
599	1881,8	281802	358801	214921799	24,47	8,430
600	1885,0	282744	360000	216000000	24,50	8,434
601	1888,1	283687	361201	217081801	24,52	8,439
602	1891,2	284632	362404	218167208	24,54	8,444
603	1894,4	285579	363609	219256227	24,56	8,448
604	1897,5	286526	364816	220348864	24,58	8,453
605	1900,7	287476	366025	221445125	24,60	8,458
606	1903,8	288426	367236	222545016	24,62	8,462
607	1907,0	289380	368449	223648543	24,64	8,467
608	1910,1	290334	369664	224755712	24,66	8,472
609	1913,2	291290	370881	225866529	24,68	8,476
610	1916,4	292247	372100	226981000	24,70	8,481
611	1919,5	293206	373321	228099131	24,72	8,486
612	1922,7	294167	374544	229220928	24,74	8,490
613	1925,8	295129	375769	230346397	24,76	8,495
614	1928,9	296093	376996	231475544	24,78	8,499

Liczba <i>n</i>	K o l o		Kwadrat n^2	Sześcián n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
615	1932,1	297058	378225	232608375	24,80	8,504
616	1935,2	298025	379456	223744896	24,82	8,509
617	1938,4	298993	380689	234885113	24,84	8,513
618	1941,5	299963	381924	236029032	24,86	8,518
619	1944,7	300935	383161	237176659	24,88	8,522
620	1947,8	301908	384400	238328000	24,90	8,527
621	1950,9	302882	385641	239483061	24,92	8,532
622	1954,1	303859	386884	240641848	24,94	8,536
623	1957,2	304837	388129	281804367	24,96	8,541
624	1960,4	305816	389376	242970624	24,98	8,545
625	1963,5	306797	390625	244140625	25,00	8,550
626	1966,6	307779	391876	245314376	25,02	8,554
627	1969,8	308763	393129	246491883	25,04	8,559
628	1972,9	309749	394384	247673152	25,06	8,563
629	1976,1	310736	395641	248858189	25,08	8,568
630	1979,2	311725	396900	250047000	25,10	8,573
631	1982,3	312716	398161	251239591	25,12	8,577
632	1985,5	313708	399424	252435968	25,14	8,582
633	1988,6	314701	400689	253636137	25,16	8,586
634	1991,8	315697	401956	254840104	25,18	8,591
635	1994,9	316693	403225	256047875	25,20	8,595
636	1998,1	317691	404496	257259456	25,22	8,600
637	2001,2	318691	405769	258474853	25,24	8,604
638	2004,3	319692	407044	259694072	25,26	8,609
639	2007,5	320695	408321	260917119	25,28	8,613
640	2010,6	321700	409600	262144000	25,30	8,618
641	2013,8	322706	410881	263374721	25,32	8,622
642	2016,9	323714	412164	264609288	25,34	8,627
643	2020,0	324723	413449	265847704	25,36	8,631
644	2023,2	325734	414736	267089984	25,38	8,636
645	2026,3	326746	416025	268336125	25,40	8,640
646	2029,5	327760	417316	269586136	25,42	8,645
647	2032,6	328776	418609	270840023	25,44	8,649
648	2035,8	329793	419904	272097792	25,46	8,653
649	2038,9	330811	421201	273359449	25,48	8,658
650	2042,0	331832	422500	274625000	25,50	8,662
651	2045,2	332853	423801	275894451	25,52	8,667
652	2048,3	333877	425104	277167808	25,53	8,671
653	2051,5	334902	426409	278445077	25,55	8,676
654	2054,6	335928	427716	279726264	25,57	8,680
655	2057,7	336956	429025	281011375	25,59	8,684
656	2060,9	337986	430336	282300416	25,61	8,689
657	2064,0	339017	431649	183593393	25,63	8,693
658	2067,2	340050	432964	284890312	25,65	8,698
659	2070,3	341084	434281	286191179	25,67	8,702
660	2073,5	342120	435600	287496000	25,69	8,707

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
661	2076,6	343158	436921	288804781	25,71	8,711
662	2079,7	344196	438244	290117528	25,73	8,715
663	2082,9	345238	439569	291434247	25,75	8,720
664	2086,0	346280	440896	292754944	25,77	8,724
665	2089,2	347324	442225	294079625	25,79	8,728
666	2092,3	348369	443556	295408296	25,81	8,733
667	2095,4	349416	444889	296740963	25,83	8,737
668	2098,6	350464	446224	298077632	25,85	8,742
669	2101,7	351514	447561	299418309	25,87	8,746
670	2104,9	352566	448900	300763000	25,88	8,750
671	2108,0	353619	450241	302111711	25,90	8,755
672	2111,2	354674	451584	303464448	25,92	8,759
673	2114,3	355730	452929	304821217	25,94	8,763
674	2117,4	356788	454276	306182024	25,96	8,768
675	2120,6	357848	455625	307546875	25,98	8,772
676	2123,7	358909	456976	308915776	26,00	8,776
677	2126,9	359972	458329	310288733	26,02	8,781
678	2130,0	361036	459684	311665752	26,04	8,785
679	2133,1	362102	461041	313046839	26,06	8,789
680	2136,3	363169	462400	314432000	26,08	8,794
681	2139,4	364238	463761	315821241	26,10	8,798
682	2142,6	365308	465124	317214568	26,12	8,802
683	2145,7	366380	466489	318611987	26,13	8,807
684	2148,9	367454	467856	320013504	26,15	8,811
685	2152,0	368529	469225	321419125	26,17	8,815
686	2155,1	369605	470596	322828856	26,19	8,819
687	2158,3	370684	471969	324242703	26,21	8,824
688	2161,4	371764	473344	325660672	26,23	8,828
689	2164,6	372846	474721	327082769	26,25	8,832
690	2167,7	373929	476100	328509000	26,27	8,837
691	2170,8	375014	477481	329939371	26,29	8,841
692	2174,0	376100	478864	331373888	26,31	8,845
693	2177,1	377188	480249	332812557	26,32	8,849
694	2180,3	378277	481636	334255384	26,34	8,854
695	2183,4	379368	483025	335702375	26,36	8,858
696	2186,6	380460	484416	337153536	26,38	8,862
697	2189,7	381554	485809	338608873	26,40	8,866
698	2192,8	382650	487204	340068392	26,42	8,871
699	2196,0	383747	488601	341532099	26,44	8,875
700	2199,1	384846	490000	343000000	26,46	8,879
701	2202,3	385946	491401	344472101	26,48	8,883
702	2205,4	387048	492804	345948408	26,50	8,887
703	2208,5	388151	494209	347428927	26,51	8,892
704	2211,7	389257	495616	348913664	26,53	8,896
705	2214,8	390363	497025	350402625	26,55	8,900
706	2218,0	391472	498436	351895816	26,57	8,904
707	2221,1	392581	499849	353393243	26,59	8,908

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześciang n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
708	2224,3	393693	501264	354894912	26,61	8,913
709	2227,4	394806	502681	356400829	26,63	8,917
710	2230,5	395920	504100	357911000	26,65	8,921
711	2233,7	397036	505521	359425431	26,66	8,925
712	2236,8	398152	506944	360944128	26,68	8,929
713	2240,0	399273	508369	362467097	26,70	8,934
714	2243,1	400394	509796	363994344	26,72	8,938
715	2246,2	401516	511225	365525875	26,74	8,942
716	2249,4	402640	512656	367061696	26,76	8,946
717	2252,5	403766	514089	368601813	26,78	8,950
718	2255,7	404893	515524	370146232	26,80	8,954
719	2258,8	406021	516961	371694959	26,81	8,959
720	2262,0	407151	518400	373248000	26,83	8,963
721	2265,1	408283	519841	374805361	26,85	8,967
722	2268,2	409416	521284	376367048	26,87	8,971
723	2271,4	410551	522729	377933067	26,89	8,975
724	2274,5	411688	524176	379503424	26,91	8,979
725	1277,7	412826	525625	331078125	26,93	8,983
726	2280,8	413965	527076	382657176	26,94	8,988
727	2283,9	415106	528529	384240583	26,96	8,992
728	2287,1	416249	529984	385828352	26,98	8,996
729	2290,2	417394	531441	387420489	27,00	9,000
730	2293,4	418540	532900	389017000	27,02	9,004
731	2296,5	419687	534361	390617891	27,04	9,008
732	2299,7	420836	535824	392223168	27,06	9,012
733	2302,8	421987	537289	393832837	27,07	9,016
734	2305,9	423139	538756	395446904	27,09	9,020
735	2309,1	424293	540225	397065375	27,11	9,025
736	2312,2	425447	541696	398688256	27,13	9,029
737	2315,4	426605	543169	400315553	27,15	9,033
738	2318,5	427763	544644	401947272	27,17	9,037
739	2321,6	428923	546121	403583419	27,18	9,041
740	2324,8	430085	547600	405224000	27,20	9,045
741	2327,9	431248	549081	406869021	27,22	9,049
742	2331,1	432413	550564	408518488	27,24	9,053
743	2334,2	433579	552049	410172407	27,26	9,057
744	2337,4	434747	553536	411830784	27,28	9,061
745	2340,5	435917	555025	413493625	27,29	9,065
746	2343,6	437088	556516	415160936	27,31	9,069
747	2346,8	438260	558009	416832723	27,33	9,073
748	2349,9	439434	559504	418508992	27,35	9,077
749	2253,1	440610	561001	420189749	27,37	9,082
750	2356,2	441788	562500	421875000	27,39	9,086
751	2359,3	442966	564001	423564751	27,40	9,090
752	2362,5	444147	565504	425259008	27,42	9,094

Liczba <i>n</i>	K o l o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
753	2365,6	445329	567009	426957777	27,44	9,098
754	2368,8	446512	568516	428661064	27,46	9,102
755	2371,9	447698	570025	430368875	27,48	9,106
756	2375,0	448884	571536	432081216	27,50	9,110
757	2378,2	450073	573049	433798093	27,51	9,114
758	2381,3	451262	574564	435519512	27,53	9,118
759	2384,5	452454	576081	437245479	27,55	9,122
760	2387,6	453647	577600	438976000	27,57	9,126
761	2390,8	454842	579121	440711081	27,59	9,130
762	2393,7	456038	580644	442450728	27,60	9,134
763	2397,0	457236	582169	444194947	27,62	9,138
764	2400,1	458436	583696	445943744	27,64	9,142
765	2403,3	459636	585225	447697125	27,66	9,146
766	2406,5	460838	586756	449455096	27,68	9,150
767	2409,6	462042	588289	451217663	27,69	9,154
768	2412,7	463248	589824	452984832	27,71	9,158
769	2416,0	464455	591361	454756609	27,73	9,162
770	2419,0	465664	592900	456533000	27,75	9,166
771	2422,2	466874	594441	458314011	27,77	9,170
772	2425,3	468086	595984	460099648	27,78	9,174
773	2428,5	469299	597529	461889917	27,80	9,177
774	2431,6	470514	599076	463684824	27,82	9,181
775	2434,7	471731	600625	465484375	27,84	9,185
776	2437,9	472949	602176	467288576	27,86	9,189
777	2441,0	474169	603729	469097433	27,87	9,193
778	2444,2	475390	605284	470910952	27,89	9,197
779	2447,3	476613	606841	472729139	27,91	9,201
780	2450,4	477837	608400	474552000	27,93	9,205
781	2453,6	479063	609961	476379511	27,95	9,209
782	2456,7	480291	611524	478211768	27,96	9,213
783	2459,7	481520	613089	480048687	27,98	9,217
784	2463,0	482751	614656	481890304	28,00	9,221
785	2466,2	483983	616225	483736625	28,02	9,225
786	2469,3	485217	617796	485587656	28,04	9,229
787	2472,4	486452	619369	487443403	28,05	9,233
788	2475,5	487690	620944	489303872	28,07	9,237
789	2478,7	488928	622521	491169069	28,09	9,240
790	2481,9	490168	624100	493039000	28,11	9,244
791	2485,0	491410	625681	494913671	28,12	9,248
792	2488,1	492653	627264	496793088	28,14	9,252
793	2491,3	493898	628849	498677257	28,16	9,256
794	2494,4	495144	630436	500566184	28,18	9,260
795	2497,6	496392	632025	502459875	28,20	9,264
796	2500,7	497641	633616	504358336	28,21	9,268
797	2503,9	498893	635209	506261573	28,23	9,272
798	2507,0	500146	636804	508169592	28,25	9,275

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
799	2510,1	501400	638401	510082399	28,27	9,279
800	2513,5	502656	640000	512000000	28,28	9,283
801	2516,4	503913	641601	513922701	28,30	9,287
802	2519,6	505172	643204	515849440	28,32	9,291
803	2522,7	506433	644809	517788662	28,34	9,295
804	2525,8	507696	646416	519718146	28,35	9,299
805	2529,0	508959	648025	521660125	28,37	9,302
806	2532,1	510224	649636	523606616	28,39	9,306
807	2535,3	511491	651249	525557943	28,41	9,310
808	2538,4	512759	652864	527514112	28,43	9,314
809	2541,6	514029	654481	529475129	28,44	9,318
810	2544,7	515301	656100	531441000	28,46	9,322
811	2547,8	516574	657721	533411731	28,48	9,325
812	2551,0	517849	659344	535387328	28,50	9,329
813	2554,1	519125	660969	537367797	28,51	9,333
814	2557,3	520403	662596	539353144	28,53	9,337
815	2560,4	521682	664225	541343375	28,55	9,341
816	2563,5	522963	665856	543338496	28,57	9,345
817	2566,7	524246	667489	545338513	28,58	9,348
818	2569,8	525530	669124	547343432	28,60	9,352
819	2573,0	526816	670761	549353259	28,62	9,356
820	2576,1	528103	672400	551368000	28,64	9,360
821	2579,3	529392	674041	553387661	28,65	9,364
822	2582,4	530682	675684	555412248	28,67	9,367
823	2585,5	531974	677329	557441767	28,69	9,371
824	2588,6	533268	678976	559476224	28,71	9,375
825	2591,8	534563	680625	561515625	28,72	9,379
826	2595,0	535860	682276	563559976	28,74	9,383
827	2598,1	537160	683929	565609283	28,76	9,386
828	2601,2	538458	685584	567663552	28,78	9,390
829	2604,4	539759	687241	569722789	28,79	9,394
830	2607,5	541062	688900	571787000	28,81	9,398
831	2610,7	542367	690561	573856191	28,83	9,402
832	2613,8	543673	692224	575930368	28,84	9,405
833	2617,0	544981	693889	578009537	28,86	9,409
834	2620,1	546290	695556	580093704	28,88	9,413
835	2623,2	547601	697225	582182875	28,90	9,417
836	2626,4	548913	698896	584277056	28,91	9,420
837	2629,5	550227	700569	586376253	28,93	9,424
838	2632,6	551542	702244	588480472	28,95	9,428
839	2635,8	552860	703921	590589719	28,97	9,432
840	2638,9	554178	705600	592704000	28,98	9,435
841	2642,1	555498	707281	594823321	29,00	9,439
842	2645,2	556820	708964	596947688	29,02	9,443
843	2648,4	558144	710649	599077107	29,03	9,447

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
844	2651,5	559469	712336	601211584	29,05	9,450
845	2654,7	560795	714025	603351125	29,07	9,454
846	2657,8	562123	715716	605495736	29,09	9,458
847	2660,9	563452	717409	607645423	29,10	9,461
848	2664,1	564784	719104	609800192	29,12	9,465
849	2667,2	566117	720801	611960049	29,14	9,469
850	2670,4	567452	722500	614125000	29,16	9,473
851	2673,5	568787	724201	616295051	29,17	9,476
852	2676,6	570125	725904	618470208	29,19	9,480
853	2679,8	571464	727609	620650477	29,21	9,483
854	2682,9	572805	729316	622835864	29,22	9,487
855	2686,1	574147	731025	625026375	29,24	9,491
856	2689,2	575491	732736	627222016	29,26	9,495
857	2692,4	576836	734449	629422793	29,27	9,499
858	2695,5	578183	736164	631628712	29,29	9,502
859	2698,6	579532	737881	633839779	29,31	9,506
860	2701,8	580882	739600	636056000	29,33	9,509
861	2704,9	582234	741321	638277381	29,34	9,513
862	2708,1	583589	743044	640503928	29,36	9,517
863	2711,2	584942	744769	642735647	29,38	9,520
864	2714,3	586298	746496	644972544	29,39	9,524
865	2717,5	587655	748225	647214625	29,41	9,528
866	2720,7	589015	749956	649461896	29,43	9,532
867	2723,8	590377	751689	651714363	29,45	9,535
868	2726,9	591739	753424	653972032	29,46	9,539
869	2730,1	593103	755161	656234909	29,48	9,543
870	2733,2	594469	756900	658503000	29,50	9,546
871	2736,3	595836	758641	660776311	29,51	9,550
872	2739,5	597206	760384	663054848	29,53	9,554
873	2742,6	598577	762129	665338617	29,55	9,557
874	2745,8	599948	763876	667627624	29,56	9,561
875	2748,9	601322	765625	669921875	29,58	9,565
876	2752,0	602697	767376	672221376	29,60	9,568
877	2755,2	604074	769129	674526133	29,61	9,572
878	2758,3	605451	770884	676836152	29,63	9,575
879	2761,5	606832	772641	679151439	29,65	9,579
880	2764,6	608214	774400	681472000	29,67	9,583
881	2767,7	609597	776161	683797841	29,68	9,586
882	2770,9	610981	777924	686128968	29,70	9,590
883	2774,0	612368	779689	688465387	29,72	9,594
884	2777,2	613756	781456	690807104	29,73	9,597
885	2780,3	615145	783225	693154125	29,75	9,601
886	2783,5	616536	784996	695506456	29,77	9,604
887	2786,6	617928	786769	697864103	29,78	9,608
888	2789,8	619322	788544	700227072	29,80	9,612
889	2792,9	620718	790321	702595369	29,82	9,615

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcián n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
890	2796,0	622115	792100	704969000	29,88	9,619
891	2799,2	623514	798881	707347971	29,85	9,623
892	2802,3	624915	795664	709732288	29,87	9,626
893	2805,4	626316	797449	712121957	29,88	9,630
894	2808,6	627720	799236	714516984	29,90	9,633
895	2811,7	629124	801025	716917375	29,92	9,637
896	2814,9	630532	802816	719323186	29,93	9,641
897	2818,0	631940	804609	721734273	29,95	9,644
898	2821,2	633350	806404	724150792	29,97	9,648
899	2824,3	634768	808201	726572699	29,98	9,651
900	2827,4	636174	810000	729000000	30,00	9,655
901	2830,6	637589	811801	731432701	30,02	9,658
902	2833,7	639005	813604	733870808	30,03	9,662
903	2836,9	640422	815409	736314327	30,05	9,666
904	2840,0	641841	817216	738763264	30,07	9,669
905	2843,1	643262	819025	741217625	30,08	9,673
906	2846,3	644685	820836	743677416	30,10	9,676
907	2849,4	646109	822649	746142643	30,12	9,680
908	2852,6	647534	824464	748613312	30,13	9,683
909	2855,7	648961	826281	751089429	30,15	9,687
910	2858,9	650390	828100	753571000	30,17	9,690
911	2862,0	651820	829921	756058031	30,18	9,694
912	2865,1	653251	831744	758550528	30,20	9,698
913	2868,3	654686	833569	761048497	30,22	9,701
914	2871,4	656121	835396	763551944	30,23	9,705
915	2874,6	657557	837225	766060875	30,25	9,708
916	2877,7	658995	839056	768575296	30,27	9,712
917	2880,8	660433	840889	771095213	30,28	9,715
918	2884,0	661875	842724	773620632	30,30	9,719
919	2887,1	663318	844561	776151559	30,32	9,722
920	2890,3	664763	846400	778688000	30,33	9,726
921	2893,4	666209	848241	781229961	30,35	9,729
922	2896,6	667656	850084	783777448	30,36	9,733
923	2899,7	669102	851929	786330467	30,38	9,736
924	2902,8	670556	853776	788889024	30,40	9,740
925	2906,0	672008	855625	791453125	30,41	9,743
926	2909,1	673462	857476	794022776	30,43	9,747
927	2912,3	674917	859329	796597983	30,45	9,750
928	2915,4	676374	861184	799178752	30,46	9,754
929	2918,5	677832	863041	801765089	30,48	9,757
930	2921,7	679292	864900	804357000	30,50	9,761
931	2924,8	680754	866761	806954491	30,51	9,764
932	2928,0	682217	868624	809557568	30,53	9,768
933	2931,1	683682	870489	812166237	30,55	9,771
934	2934,3	685148	872356	814780504	30,56	9,775

Liczba <i>n</i>	K o l o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcian <i>n</i> ³	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
935	2937,4	686616	874225	817400375	30,58	9,778
936	2940,5	688086	876096	820025856	30,59	9,782
937	2943,7	689557	877969	822656953	30,61	9,785
938	2946,8	691029	879844	825293672	30,63	9,789
939	2950,0	692504	881721	827936019	30,64	9,792
940	2953,1	693979	883600	830584000	30,66	9,796
941	2956,2	695457	885481	833237621	30,68	9,799
942	2959,4	696936	887364	835896888	30,69	9,803
943	2962,5	698416	889249	838561807	30,71	9,806
944	2965,7	699898	891136	841232384	30,72	9,810
945	2968,8	701382	893025	843908625	30,74	9,813
946	2972,0	702867	894916	846590536	30,76	9,817
947	2975,1	704352	896809	849278123	30,77	9,820
948	2978,2	705842	898704	851971392	30,79	9,824
949	2981,4	707332	900601	854670349	30,81	9,827
950	2984,5	708824	902500	857375000	30,82	9,830
951	2987,7	710317	904401	860085351	30,84	9,834
952	2990,8	711811	906304	862801408	30,85	9,837
953	2993,9	713307	908209	865523177	30,87	9,841
954	2997,1	714805	910116	868250664	30,89	9,844
955	3000,2	716304	912025	870983375	30,90	9,848
956	3003,4	717805	913936	873722816	30,92	9,851
957	3006,5	719308	915849	876467493	30,94	9,855
958	3009,7	720812	917764	879217912	30,95	9,858
959	3012,8	722317	919681	881974079	30,97	9,861
960	3015,9	723825	921600	884736000	30,98	9,865
961	3019,1	725333	923521	887503681	31,00	9,868
962	3022,2	726844	925444	890277128	31,02	9,872
963	3025,4	728356	927369	893056347	31,03	9,875
964	3028,5	729869	929296	895841344	31,05	9,878
965	3031,6	731384	931225	898632125	31,06	9,882
966	3034,8	732901	933156	901428696	31,08	9,885
967	3037,9	734419	935089	904231063	31,10	9,889
968	3041,1	735939	937024	907039232	31,11	9,892
969	3044,2	737460	938961	909853209	31,13	9,896
970	3047,4	738983	940900	912673000	31,15	9,899
971	3050,5	740507	942841	915498611	31,16	9,902
972	3053,6	742033	944784	918330048	31,18	9,906
973	3056,8	743561	946729	921167317	31,19	9,909
974	3059,9	745090	948676	924010424	31,21	9,913
975	3063,1	746621	950625	926859375	31,23	9,916
976	3066,2	748153	952576	929714176	31,24	9,919
977	3069,3	749687	954529	932574893	31,26	9,923
978	3072,5	751222	956484	935441352	31,27	9,926
979	3075,6	752760	958441	938313739	31,29	9,929
980	3078,8	754298	960400	941192000	31,31	9,933

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
981	3082,0	755888	962361	944076141	31,32	9,986
982	3085,0	757380	964324	946966168	31,34	9,940
983	3088,2	758928	966289	949862087	31,35	9,943
984	3091,3	760468	968256	952763904	31,37	9,946
985	3094,5	762015	970225	955671625	31,38	9,950
986	3097,6	763563	972196	958585256	31,40	9,953
987	3100,8	765112	974169	961504803	31,42	9,956
988	3104,0	766564	976144	964430272	31,43	9,960
989	3107,0	768216	978121	967361669	31,45	9,963
990	3110,2	769770	980100	970299000	31,46	9,966
991	3113,3	771326	982081	973242271	31,48	9,970
992	3116,5	772884	984064	976191488	31,50	9,973
993	3119,6	774443	986049	979146657	31,51	9,977
994	3122,8	776003	988036	982107784	31,53	9,980
995	3125,9	777566	990025	985074875	31,54	9,983
996	3129,0	779129	992016	988047936	31,56	9,987
997	3132,2	780695	994009	991026973	31,58	9,990
998	3135,3	782261	996004	994011992	31,59	9,993
999	3138,5	783830	998001	997002999	31,61	9,997



Ważniejsze omyłki.

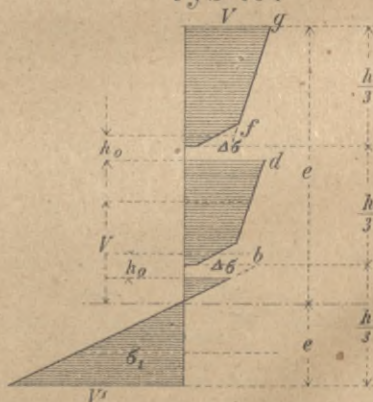
Str.	zamiast	czytaj
8 w. 8 z góry	P_1	$\frac{P_1}{P_2}$
24 „ 2 „	$\frac{d^2 M}{dx}$	$\frac{d^2 M}{dx^2}$
42 „ 14 z dołu 2 kolumna	$\frac{kg}{cm^3}$	kg/m^3
48 „ 1 z góry „	$\frac{kg}{m^3}$	kg/m^3
48 „ 4 z dołu	2700	12700
44 „ 2 z góry	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{m^2}$
45 „ 14 z dołu	$\mu \sqrt[3]{\frac{a'b'}{ab}}$	$\mu ab \sqrt[3]{\frac{a'b'}{ab}}$
51 „ 15 „	OO_1 , przyczem O_1E	OB'_1 , przyczem B'_1E
57 „ 15 do 18 z dołu	cyfry umieszczone w czwartej i szóstej kolumnie mają być w piątej i siódmej	
63 „ 13 z dołu	$\delta = \delta' + c\delta$	$\delta = \alpha' + c\delta$
70 „ 2 z góry	$\frac{\alpha}{\alpha_m}$	$\frac{\alpha_m}{\alpha}$
72 „ 6 z dołu	male	stale
73 „ 11 „	160	16
74 „ 6 „	$\frac{A}{A}$	$\frac{A}{A_0}$
77 „ 16 „	kg/cm^3	kg/cm^2
77 „ 14 „	$\sqrt{\frac{P}{n}}$	$\sqrt{\frac{P}{n}}$
79 „ 5 z góry	+ 20000	- 20000
79 „ 8 z dołu	$m - 0,35$	$m - 0,45$
79 „ 6 „	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_1}{d_2}$
80 „ 2 z góry	$m/3$	m/s
81 „ 18 z dołu	208	108
81 „ 8 „	0,07 mm	0,07 cm
82 „ 1 z góry	88)	91)

<i>Str.</i>	<i>zamiast</i>	<i>czytaj</i>
83 w. 13 z góry	$874 d^2$	$864 d^2$
83 " 14 "	0,033	0,034
85 " 15 "	żelazo twarde	żelazo lane
86 " 1 "	ciśnienie	ściananie
90 " 5 "	$\frac{\pi d^2}{dg}$	$\frac{\pi d^2}{5 g}$
97 " 1 "	P	P'
97 " 2 z dołu	τ_2	τ_1
99 " 13 z góry	$\frac{d^2 b}{\tau_1 4}$	$\frac{d^2 \tau}{\tau_1 4}$
100 " 6 z góry	$d \approx 0,75 b, d_1 = 2c$	średnica sworznia $d \approx 0,75 b$, średnica oka $d_1 = \frac{2}{3} b + d$
100 " 2 z dołu	$\frac{\mu d_2^2 \pi}{4}$	$\frac{\mu d_1^2 \pi}{4}$
101 " 2 z góry	P	P''
101 " 3 "	$d = \frac{5}{16} d_1$	$h = \frac{5}{16} d_1$
101 " 9 "	Grubość	Średnicę
101 " 8 z dołu	$\frac{d_1 \pi}{4} \tau$	$\frac{d_1^2 \pi}{4} \tau$
103 " 10 "	$(b + 2t)$	$(b_1 + 2t)$
103 " 1 "	$\frac{4000}{14(14,3 + 4)} = 16,0$	$\frac{4000}{14(14,3 + 4)} = 16,0$
104 " 14 "	τ	τ_2
104 " 2 "	dla	dla tych
105 " 3 z góry	$27 bl$	$45 bl$
105 " 5 "	$141)$	$140)$
105 " 7 "	$141)$	$141 a)$
105 " 8 "	$\frac{27 \times 20 \times 40}{7(3 \times 20 + 2 \times 20)} = \frac{21600}{700} = 31$	$\frac{45 \times 20 \times 40}{7(3 \times 20 + 2 \times 20)} = \frac{360}{7} = 51,4$
106 " 4 z dołu	do osi	od osi
107 " 12 "	ciężkości belki	ciężkości przekroju belki
113 " 1 "	$2,5981 r^4$	$2,5981 r^2$
114 " 3 "	$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) =$	$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) =$
118 " 13 "	$I = I + Ae^2$	$I_1 = I + Ae^2$
120 " 8 z góry	I_y wst 45°	I_y wst $2^\circ 45'$
122 " 15 z dołu	$\beta = \varphi_0$	$\beta = - \varphi_0$
122 " 5 "	$I = (I_x + I) - I_1$	$I = (I_x + yI) - I_1$
123 " 7 z góry	$\frac{c}{\sqrt{I_m}}$	$\frac{c}{\sqrt{I_m}}$ (rys. 96 A)
125 " 14 "	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$
126 " 7 "	$(5 - 0,81)$	$(5 - 0,8) 0,8$
126 " 10 "	0,4	0,8. 0,4
126 " 13 "	$154)$	$151)$

<i>Str.</i>	<i>zamiast</i>	<i>czytaj</i>
126 w. 22 z dołu	$\frac{1}{8}(0,8 \cdot 5^2 + (7,5 - 0,8^3))$	$\frac{1}{3}(0,8 \cdot 5^3 + (7,5 - 0,8))$
126 " 20 "	7,5 ²	7,5 ³
126 " 17 "	(2,5 - 1,3)	(2,1 - 0,5)
126 " 16 "	8,67 = - 15,15	11,56 = - 18,04
126 " 14 "	$\frac{2(-15,15)}{18,66 - 52,36} = \frac{30,30}{33,70} = 0,891$	$\frac{2(-18,04)}{18,66 - 52,36} = \frac{36,08}{33,70} = 1,070$
126 " 13 "	41° 57' 28"	46° 56' 42"
126 " 12 "	20° 58' 34"	23° 28' 21"
126 " 11 "	15,16 = 45,65 + 2,39 + 10,13	18,04 = 44,06 + 2,95 + 13,18
126 " 10 i 9 z dołu	∅	∅ ₀
126 " 8 z dołu	58·14	60,20
126 " 7 "	18,36 + 52,36 - 58,17 = 12,85	18,66 + 52,36 - 60,20 = 10,82
126 " 6 "	12,82	10,82
126 " 3 "	$\sqrt{\frac{58,17}{9,36}} = 2,493$	$\sqrt{\frac{60,20}{9,36}} = 2,516$
126 " 3 "	$\sqrt{\frac{12,85}{9,36}} = 1,172$	$\sqrt{\frac{10,85}{9,36}} = 1,075$
129 " 1 "	$\frac{\text{wst}^2 \varphi}{\text{dost}^2 \beta}$	$\frac{\text{wst}^2 \varphi}{\text{wst}^2 \beta}$
129 " 8 z góry	$\frac{OR^2 a^2}{\text{wst}^2 \beta q^2}$	$\frac{OR^2 a'^2}{\text{wst}^2 \beta q^2}$
131 " 8 "	$I_y'^2$	I_y'
131 " 18 z dołu	$I + I$	$I + I_1$
131 " 7 "	$e_1 e_3$	$e_1 e_2$
132 " 10 "	$b_{2n} - 1 d^2 2n - 2$	$b_{2n} - 2 d^2 2n - 2$
133 " 10 "	$\frac{a'}{3}$	$\frac{a}{3} (($
136 " 12 z góry	$\frac{Py^2}{a}$	$\frac{Py}{a}$
144 " 6 z dołu	107)	142)
146 " 1 "	$\frac{M}{I} \nu u dv$	$\frac{M}{I} \nu u dv$
150 rys. 120	$\sigma' dv u$	$\sigma' du du$
151 " 122	prosta da najw σ'	proste dO najw σ'
165 w. 3 z dołu	171	117
172 " 5 "	3,92 8,83 8,83	2,74 4,42 4,42
172 " 4 "	5,23 12,3 12,3	3,70 6,09 6,09
172 " 3 "	6,53 15,9 15,9	4,62 7,94 7,94
172 " 2 "	7,83 19,5 19,5	5,54 9,73 9,73
172 " 1 "	9,14 23,0 23,0	6,46 11,53 11,53
177 " 4 z góry	$h = 0,9 h$	$h_2 = 0,9 h$
182 " 7 z dołu	60	70
188 " 4 "	$(e - v_0)$	$(e - v_0)$
191 " 3 "	$\frac{\mu^2}{\mu}$	$\frac{\mu_2}{\mu}$

Str.	zamiast	czytaj
195 w. 5 "	M	dl
201 " 17 "	$\frac{bh^2}{b}, W_2 = \frac{hb^2}{b}$	$\frac{bh^2}{6}, W_2 = \frac{bh^2}{6}$
201 " 18 "	$\frac{bh^2}{b}$	$\frac{bh^2}{6}$
202 " 8 z dołu	$\frac{bh^2}{b}$	$\frac{bh^2}{6}$
203 " 2 z góry	$5m$	$6m$
203 " 11 "	4,77779	4,77679
203 " 12 "	$\log M_1 = 99585$	$M_1 = 99685$
203 " 12 "	$\log M_2 = 59950$	$M_2 = 59812$
203 " 14 "	$\frac{99585 + 8 \cdot 59950}{800} = 723,48$	$\frac{99685 + 8 \cdot 59812}{800} = 722,78$
203 " 17 "	$\frac{99585 + 8,58 \cdot 59950}{800} = 767,44$	$\frac{99685 + 8,58 \cdot 59812}{800} = 766,09$
203 " 20 "	$\frac{99585 + 8,85 \cdot 59990}{800} = 787,52$	$\frac{99685 + 8,85 \cdot 59812}{800} = 786,28$
203 " 12 z dołu	$\frac{99585 + 6,66 \cdot 59950}{800} = 623,56$	$\frac{99685 + 6,66 \cdot 59812}{800} = 622,52$

rys: 164

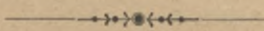


208 opuszczony rys. 164

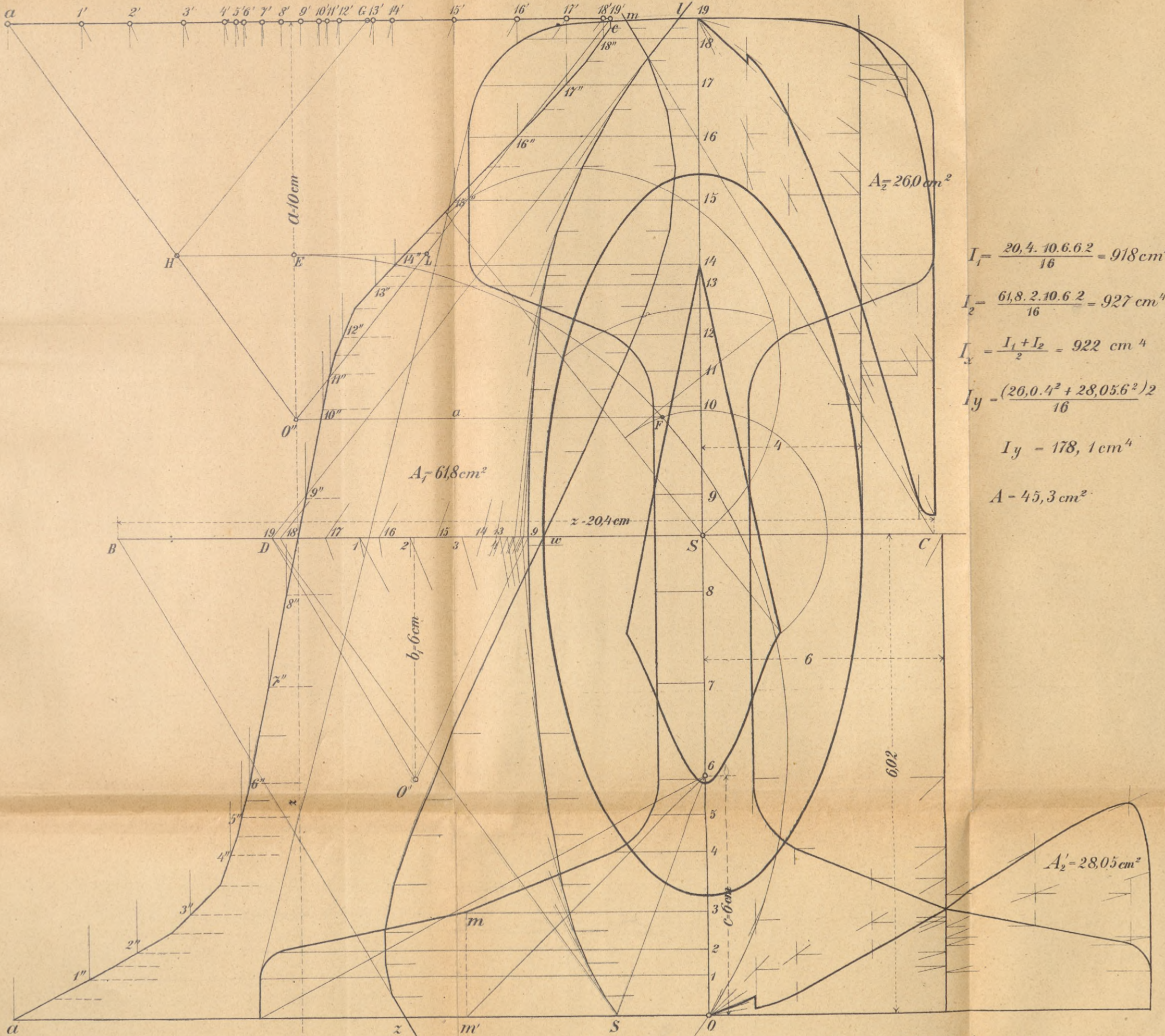
210 w. 11 z dołu	t	τ
210 " 7 "	0,81	0,80
210 " 8 "	1,45	1,46
210 " 2 "	0,52	0,51
211 " 4 z góry	0,65	0,65
211 " 6 "	kg/cm	kg/cm^2
211 " 18 "	kg/cm^2	kg/cm^2
211 " 19 "	42 51	41 52
211 " 21 "	47	46

<i>Str.</i>	<i>zamiast</i>	<i>czytaj</i>
211 w. 22 "	52	51
211 " 23 "	57	56
215 " 6 "	<i>y</i>	<i>u</i>
215 " 2 z dołu	<i>bwz</i>	<i>bwτ'</i>
217 " 4 z góry	<i>d i e</i>	<i>C i D</i>
217 " 15 "	$\frac{w}{h}$	$\frac{w}{h'}$
218 " 3 "	<i>C</i>	<i>c</i>
218 " 9 "	<i>bwτ</i>	<i>bwτ'</i>
218 " 14 "	<i>z</i>	<i>τ'</i>
218 " 4 z dołu	<i>z</i>	<i>τ'</i>
218 " 3 "	<i>d</i>	<i>w</i>
221 " 1 z góry	§. 60.	§. 61.
222 " 6 z dołu	$\tau' \cdot \frac{d^2\pi}{4}$	$\tau'_1 \cdot \frac{d^2\pi}{4}$
222 " 1 "	<i>bd</i>	<i>bw</i>
223 " 2 z góry	<i>bd</i>	<i>bw</i>
224 " 2 z dołu	$v_1^2 d^2 A'_1$	$v'_1{}^2 d^2 A'_1$
228 " 8 "	do osi	do odstępów od osi
229 " 7 "	$\frac{v'\varepsilon'}{\tau}$	$\frac{v'\varepsilon'}{r}$
229 " 4 "	$\frac{v_0^2}{2} v_0$	$\frac{v_0^2}{2} + v_0$
230 " 5 z góry	$-\frac{fn}{\gamma} \sqrt{\quad}$	$-\frac{fn}{\gamma} + \sqrt{\quad}$
230 " 8 "	$\frac{3}{2} fn +$	$\frac{3}{2} fn$
230 " 12 "	$(d - z_1 - a)^3$	$(d - z_1 - a)^2$
231 " 7 "	<i>Mz</i>	<i>Mz₁</i>
231 " 8 "	<i>v</i>	<i>v'</i>
231 " 6 z dołu	277	244
231 " 4 "	277 68,8	244 06,5
231 " 3 "	68,8 75,7	60,5 60,6
231 " 2 "	6,88 468	60,5 412
231 " 7 "	0,33	0,033
231 " 9 "	60,4	60,4
232 " 1 z góry	68,8	60,5
232 " 7 "	$0,033 \sqrt{\quad}$	$0,033 + \sqrt{\quad}$
232 " 15 z dołu	3,247	3,247
233 " 2 "	$0,0303(d - a)$	$0,0303(d - a)^3$
234 " 7 z góry	$0,068(d - a)$	$0,068(d - a)$
234 " 11 "	$(d - z)$	$(d - z)^3$
235 " 14 z dołu	10,32	10,3 ²
236 " 8 "	interpolować	interpolować

<i>Str.</i>	<i>zamiast</i>	<i>czytaj</i>
236 w. 10 "	0,574	0,545
238 " 8 z góry	kg/cm^3	kg/cm^2
238 " 11 "	kg/cm^3	kg/cm^2
244 " 3 z dołu	$M_2 e_2 I_3$	$M_2 e_2 I_1$
244 " 15 "	I	I_1
244 " 14 "	I	I_2
274 rys. 203.	punkt styczności elipsy U ma być na linii OH .	
277 " 3 z góry	od rzutu punktu	od punktu
277 " 6 "	OH	OU
292 " 12 "	0,0063	0,00068
298 " 2 z dołu	3268	3368
299 " 5 z góry	0,105	0,104
299 " 10 "	0,078	0,079
299 " 14 "	3368	1272
300 " 6 "	$\frac{l}{a} > 10$	$\frac{l}{a} < 110$
304 " 16 "	0,045	0,0173 A
306 " 12 z dołu	a^8	a^2
307 " 13 z góry	36	3,6
308 " 10 "	3,0 cm	3,0 m
317 " 11 z dołu	t_0	τ_0
320 " 10 "	$fy^2 d^2 A + \dots$ więc $I_0 = I + I_1$	$fy^2 d^2 A = I + I_1$
365 " 6 z góry	dost $\alpha_2 + P_1$ dost α_1	dot $\alpha_2 + P_1$ dot α_1
365 " 8 "	dost $\alpha_m - 1$	dot $\alpha_m - 4$
366 " 11, 10 i 9 z dołu	dost α_1	dost α
370 " 14 z dołu	G i T	P i Q
370 " 3 z dołu	$\frac{P_m + Q_m}{2n}$ wst $\frac{180}{n}$	$\frac{P_m + Q_m}{2n}$ dot α wst $\frac{180}{n}$
387 " 10 "	$(c - i_2)$	$(c - i_1)$
387 " 7 "	$M_1 e_1$	$M_1 e_2$
398 " 10 "	$i_2 + e + e_1$	$i_2 + c + e_1$
401 " 11 "	n	r
410 " 6 z góry	Δx	Δy
416 " 3 z dołu	- 3,1	- 3.3,1
424 " 1 "	$\frac{AE}{\text{dost } \varphi}$	$\frac{AE}{\text{dost } \rho}$
501 " 9 z góry	do równowagi	dla równowagi



$n = 15,07 \text{ cm}$



$$I_1 = \frac{20,4 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2}{16} = 918 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{61,8 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2}{16} = 927 \text{ cm}^4$$

$$I_x = \frac{I_1 + I_2}{2} = 922 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{(26,0 \cdot 4^2 + 28,05 \cdot 6^2) \cdot 2}{16}$$

$$I_y = 178,1 \text{ cm}^4$$

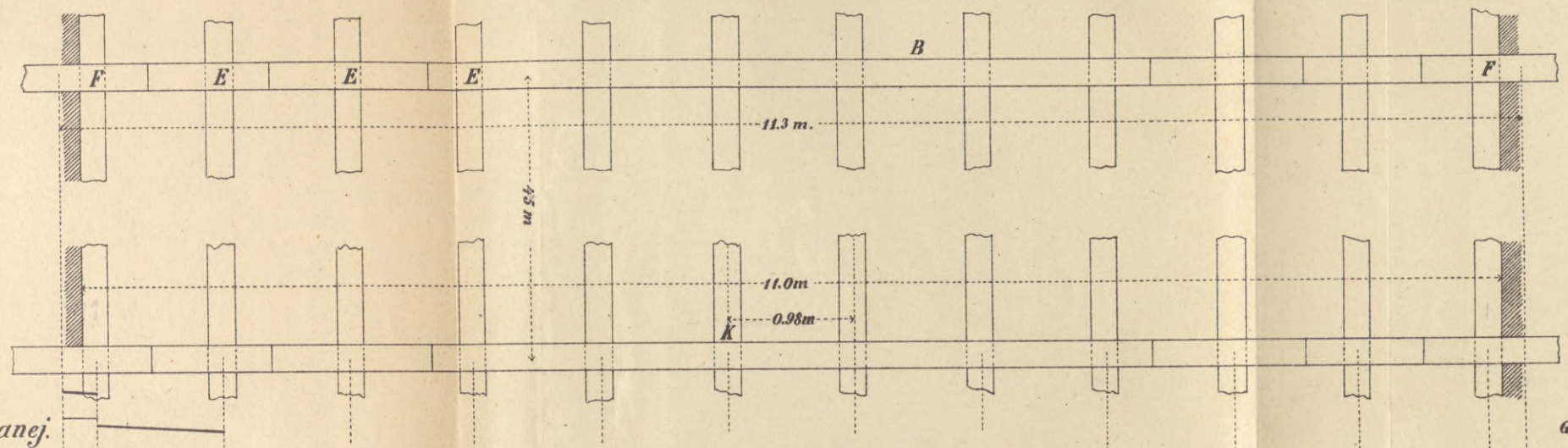
$$A = 45,3 \text{ cm}^2$$

1 0,5 0 1 2 2:1 dla przekroju szyny.
1 0,5 0 1 2 3 4 5 1:1 dla innych długości.

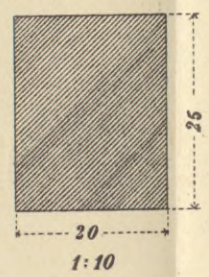


Rzut poziomy układu belek.

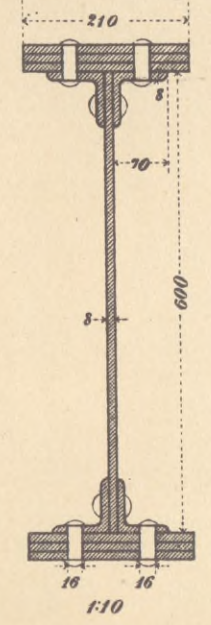
Tabl. II.



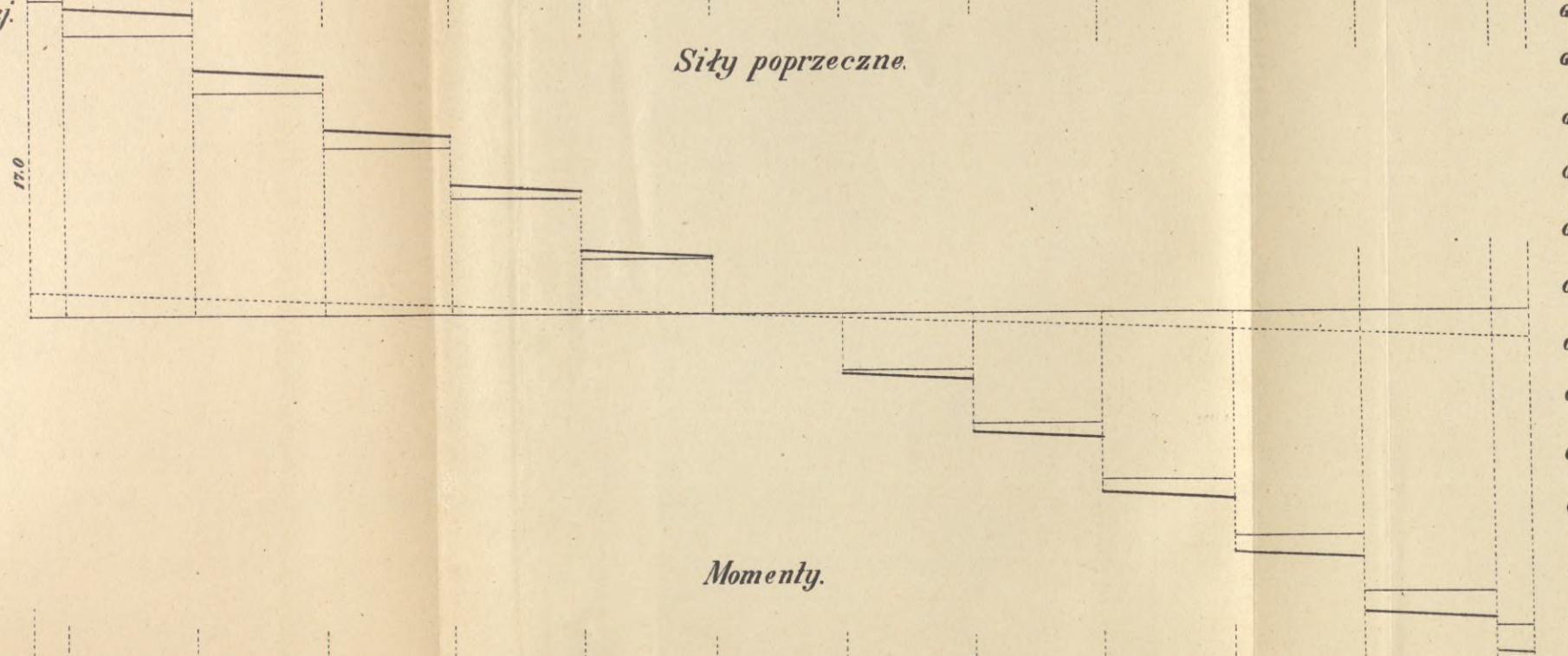
Przekrój belki drewnianej.



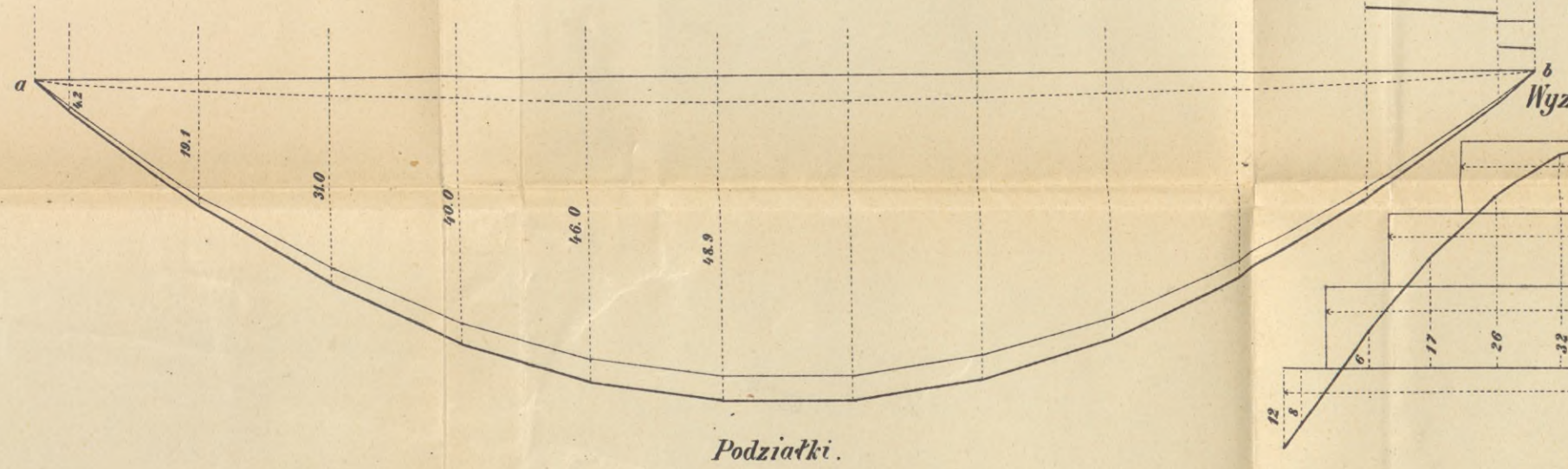
Przekrój belki blaszanej.



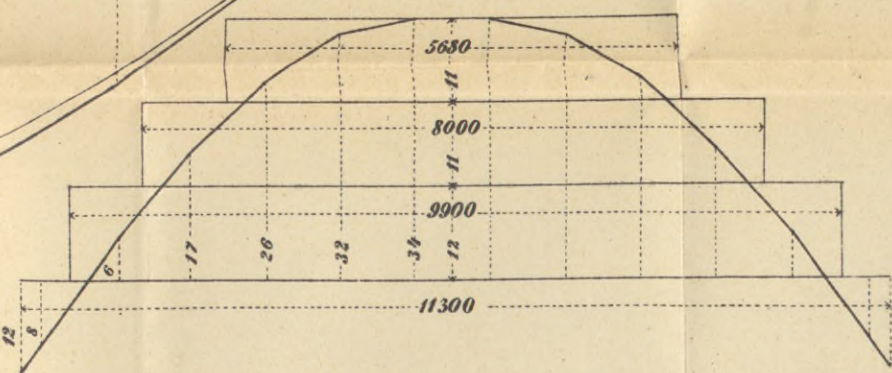
Siły poprzeczne.



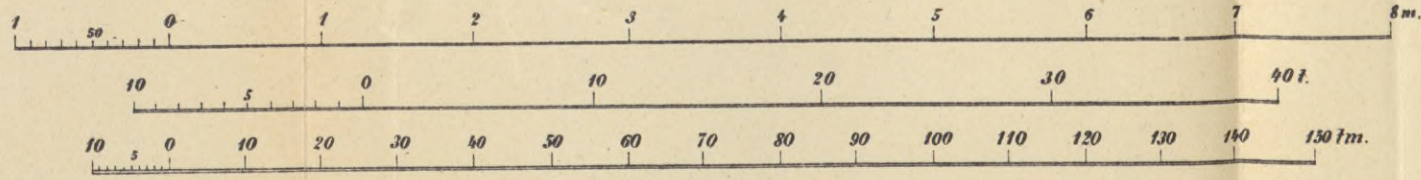
Momenty.



Wyznaczenie długości nakładek.



Podziałki.





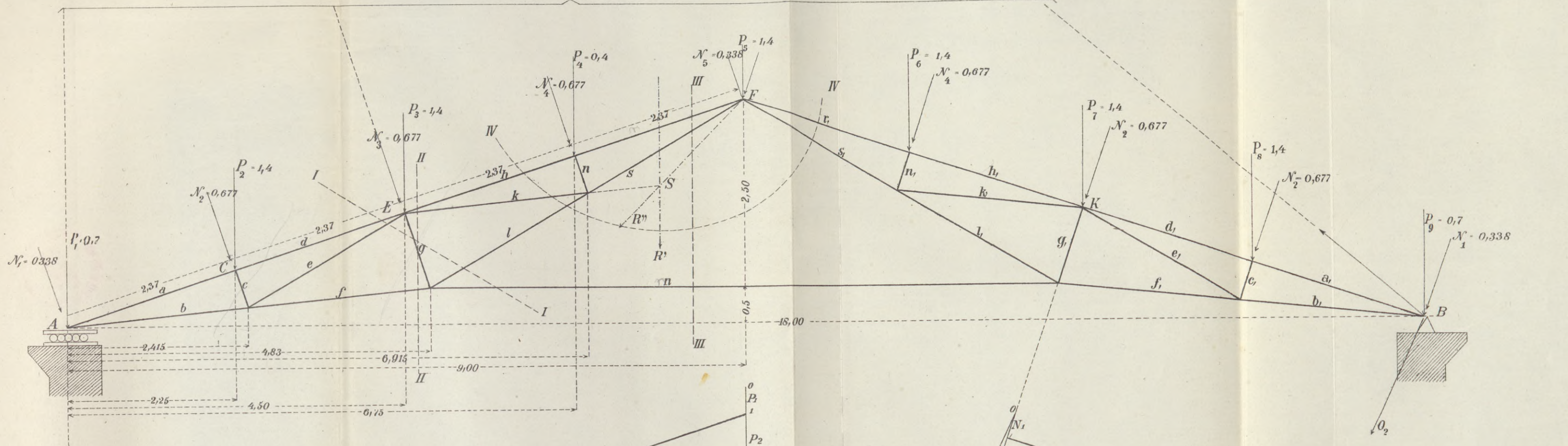
High pressure

Intensity

Pressure



Dach systemu Polonceau złożonego



Obciążenie pionowe

Wiatr z prawej

Zastrzały

Krokwie

Ściągna

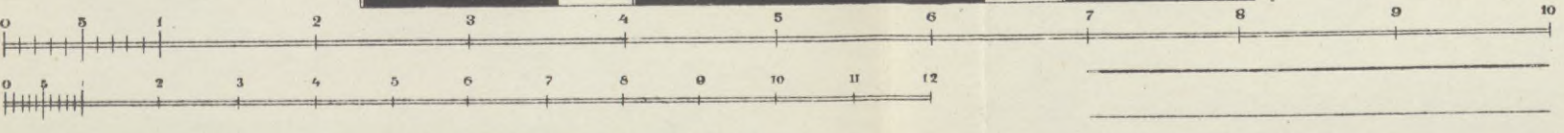
Zastrzały

Prawa połowa ciężaru
Siły wewnętrzne w tornach

Sewa połowa ciężaru
Siły wewnętrzne w tornach

Dział	z powodu ciężaru własnego i obciążenia		z powodu wiatru		Kajowiczka siła
	z lewej	z prawej	z lewej	z prawej	
a	- 22,30	- 7,04	- 3,36	-	- 29,34
b	+ 24,25	+ 6,60	+ 3,75	+	+ 27,85
c	- 4,36	- 0,67	0	-	- 2,03
d	- 21,90	- 7,04	- 3,36	-	- 28,94
e	+ 3,10	+ 1,55	0	+	+ 4,65
f	+ 18,10	+ 5,07	+ 3,75	+	+ 23,17
g	- 2,78	- 1,40	0	-	- 4,18
h	- 21,30	- 7,04	- 3,36	-	- 28,34
k	+ 3,10	+ 1,55	0	+	+ 4,65
l	+ 8,42	+ 3,60	+ 0,65	+	+ 11,95
n	- 1,36	- 0,67	0	-	- 2,03
r	- 20,00	- 7,04	- 3,36	-	- 27,94
s	+ 11,55	+ 5,07	+ 0,65	+	+ 16,65
m	+ 10,00	+ 1,51	+ 1,51	+	+ 11,51

Podziałka dla dachu i parcia wiatru
Podziałka dla obciążenia pionowego



Ścianienia
Ciągnięcia

Dział	z powodu ciężaru własnego i obciążenia		z powodu wiatru		Kajowiczka siła
	z lewej	z prawej	z lewej	z prawej	
a	- 22,30	- 7,04	- 3,36	-	- 29,34
b	+ 24,25	+ 6,60	+ 3,75	+	+ 27,85
c	- 4,36	- 0,67	0	-	- 2,03
d	- 21,90	- 7,04	- 3,36	-	- 28,94
e	+ 3,10	+ 1,55	0	+	+ 4,65
f	+ 18,10	+ 5,07	+ 3,75	+	+ 23,17
g	- 2,78	- 1,40	0	-	- 4,18
h	- 21,30	- 7,04	- 3,36	-	- 28,34
k	+ 3,10	+ 1,55	0	+	+ 4,65
l	+ 8,42	+ 3,60	+ 0,65	+	+ 11,95
n	- 1,36	- 0,67	0	-	- 2,03
r	- 20,00	- 7,04	- 3,36	-	- 27,94
s	+ 11,55	+ 5,07	+ 0,65	+	+ 16,65
m	+ 10,00	+ 1,51	+ 1,51	+	+ 11,51

План системы водопровода

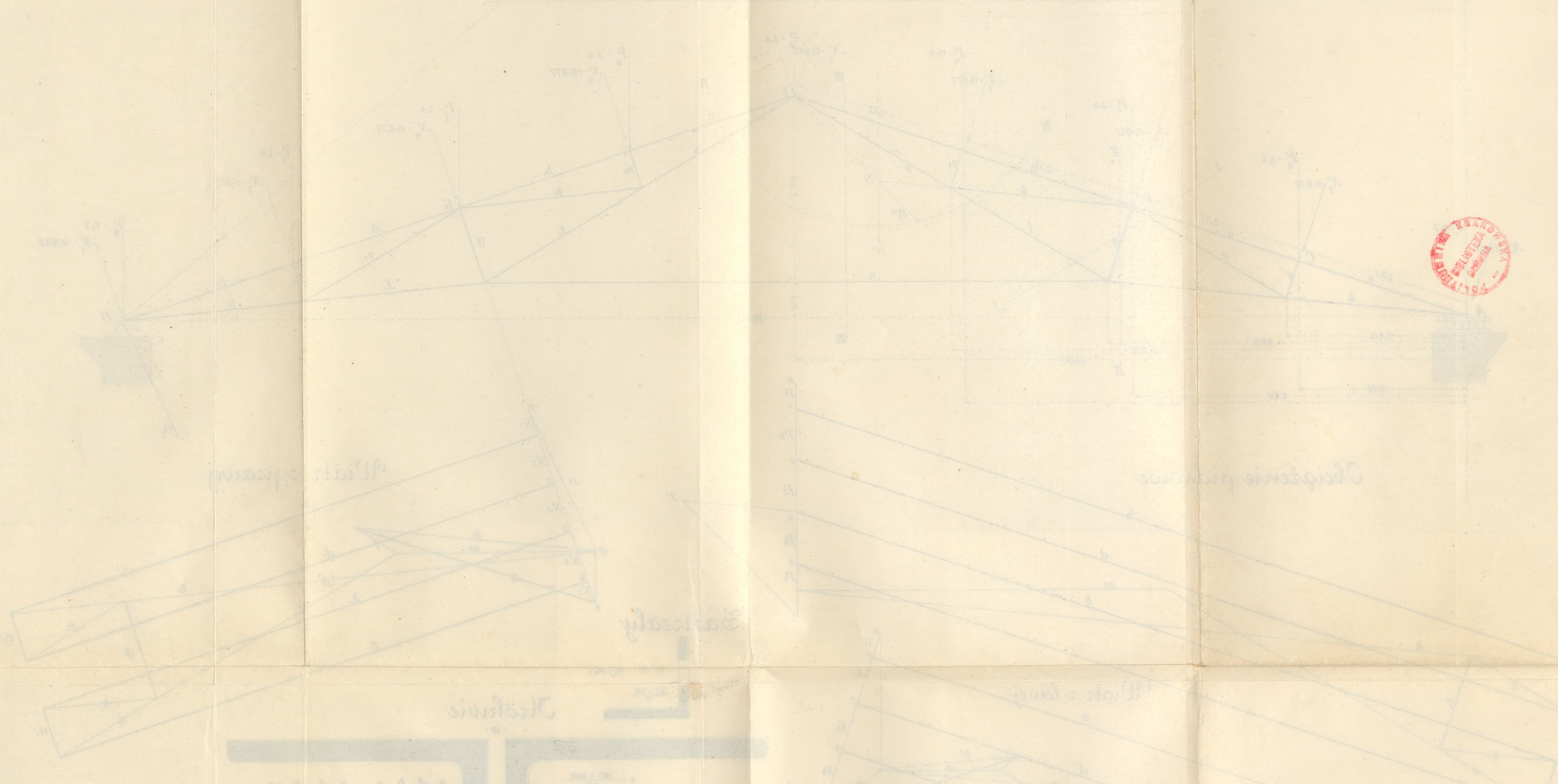


Таблица № 1

№	Длина	Диаметр	Объем	Средняя скорость	Расход
1	100	100	0.785	1.0	0.785
2	150	100	1.178	1.0	1.178
3	200	100	1.571	1.0	1.571
4	250	100	1.964	1.0	1.964
5	300	100	2.357	1.0	2.357
6	350	100	2.750	1.0	2.750
7	400	100	3.143	1.0	3.143
8	450	100	3.536	1.0	3.536
9	500	100	3.929	1.0	3.929
10	550	100	4.322	1.0	4.322
11	600	100	4.715	1.0	4.715
12	650	100	5.108	1.0	5.108
13	700	100	5.501	1.0	5.501
14	750	100	5.894	1.0	5.894
15	800	100	6.287	1.0	6.287
16	850	100	6.680	1.0	6.680
17	900	100	7.073	1.0	7.073
18	950	100	7.466	1.0	7.466
19	1000	100	7.859	1.0	7.859

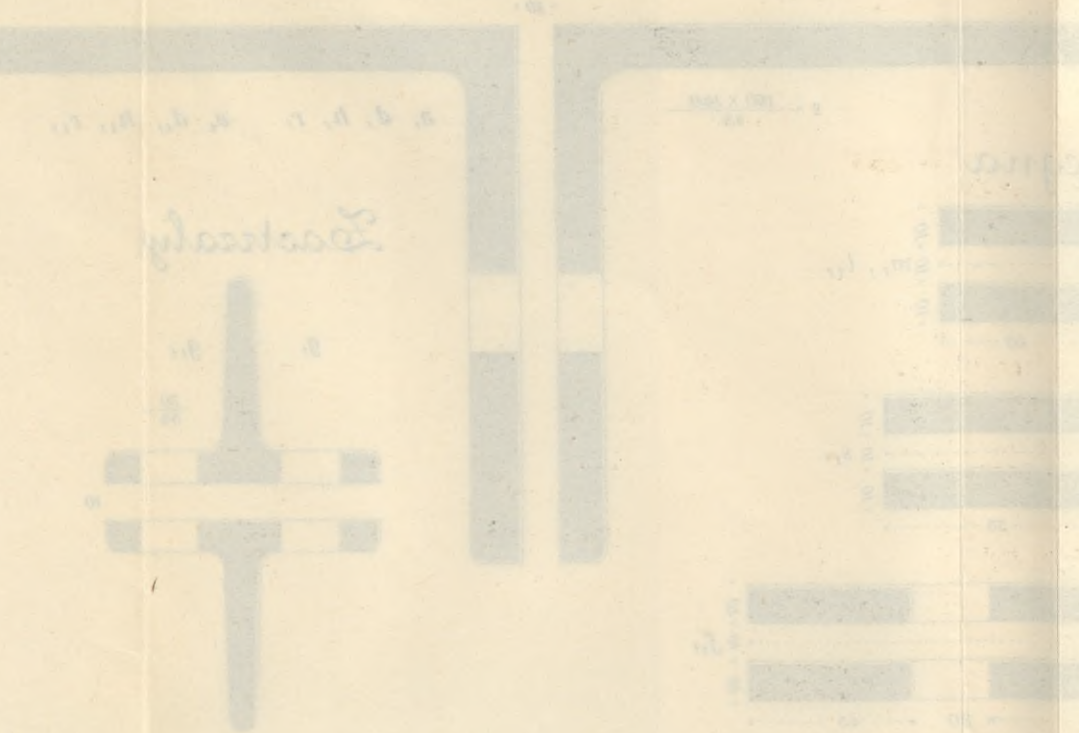
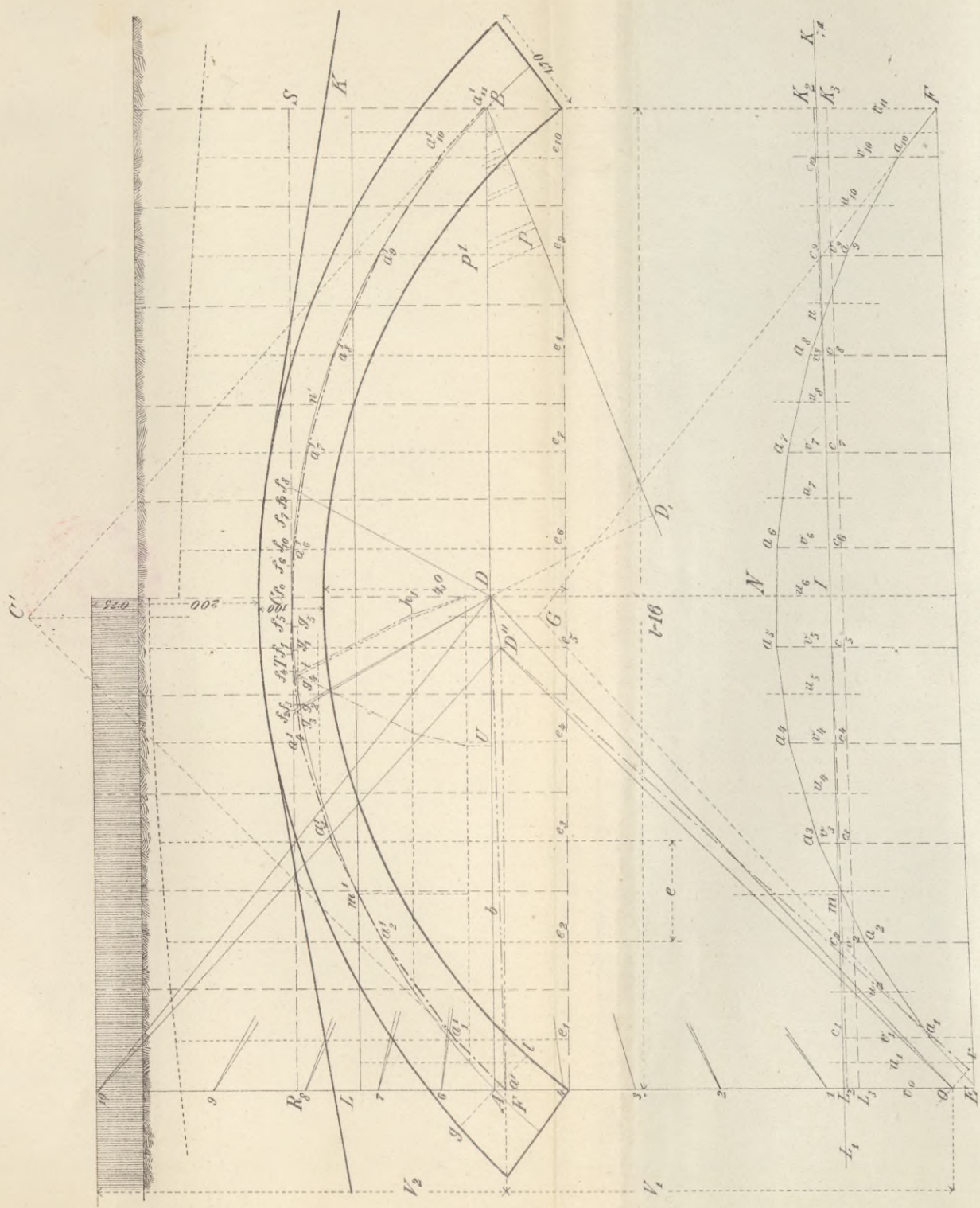


Таблица № 2

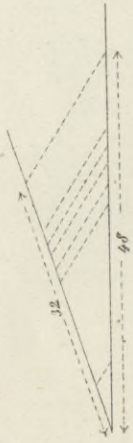
№	Длина	Диаметр	Объем	Средняя скорость	Расход
1	100	100	0.785	1.0	0.785
2	150	100	1.178	1.0	1.178
3	200	100	1.571	1.0	1.571
4	250	100	1.964	1.0	1.964
5	300	100	2.357	1.0	2.357
6	350	100	2.750	1.0	2.750
7	400	100	3.143	1.0	3.143
8	450	100	3.536	1.0	3.536
9	500	100	3.929	1.0	3.929
10	550	100	4.322	1.0	4.322
11	600	100	4.715	1.0	4.715
12	650	100	5.108	1.0	5.108
13	700	100	5.501	1.0	5.501
14	750	100	5.894	1.0	5.894
15	800	100	6.287	1.0	6.287
16	850	100	6.680	1.0	6.680
17	900	100	7.073	1.0	7.073
18	950	100	7.466	1.0	7.466
19	1000	100	7.859	1.0	7.859

Wyznaczenie prawdziwej linii ciśnienia w sklepieniu.

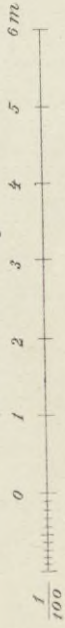


Kąty proporcjonalności.

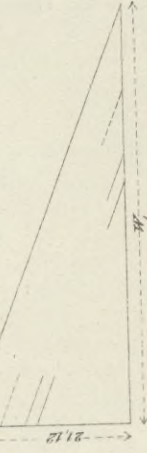
dla wyznaczenia linii sprowadzonej obciążenia.



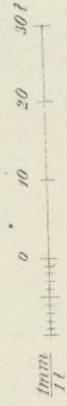
Podziałka długości.



dla wyznaczenia ciężaru paszków.



Podziałka sil.



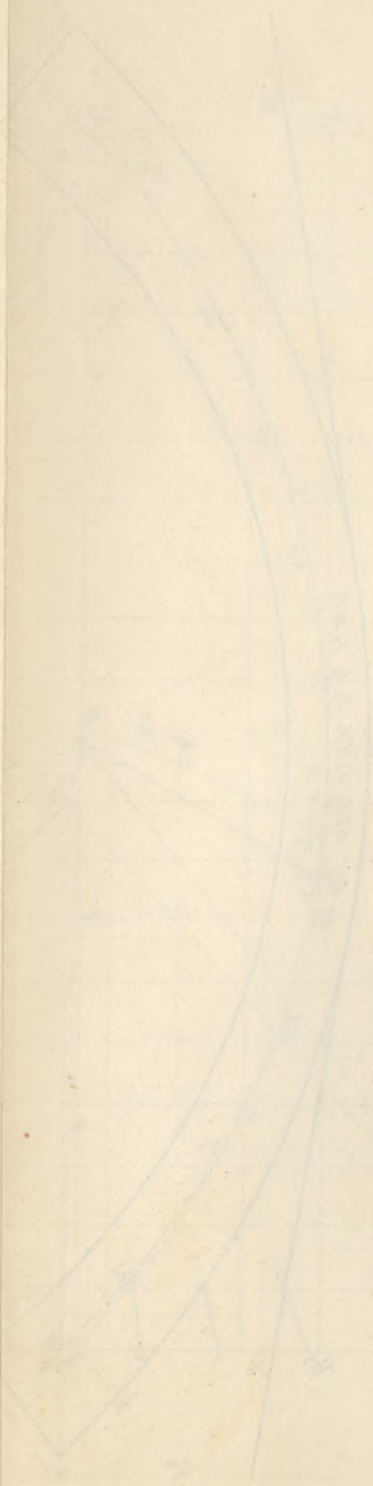
Handwritten text, possibly a title or page number, located at the top left of the page.

Handwritten text, possibly a title or page number, located in the upper middle section of the page.



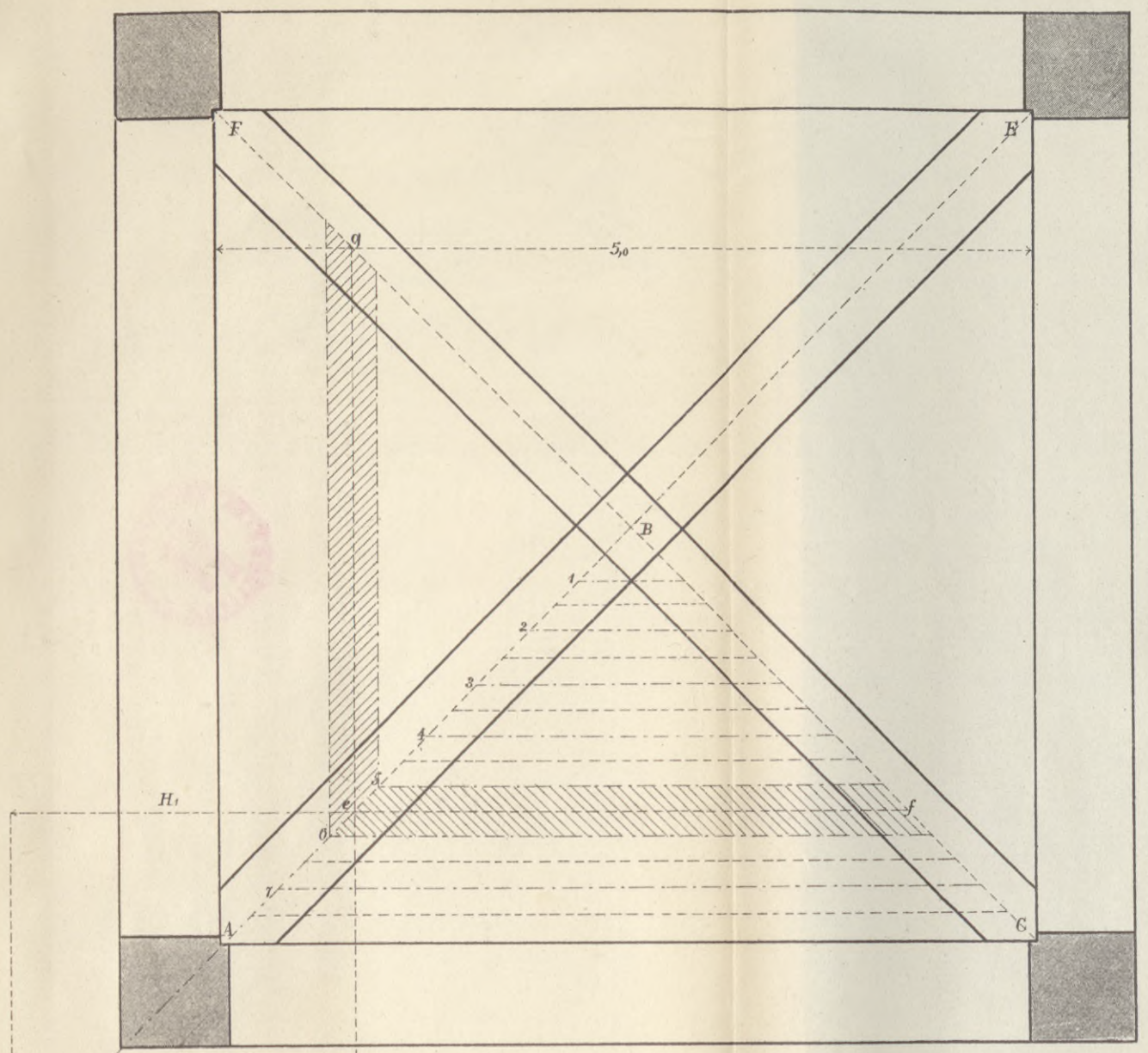
Handwritten text, possibly a title or page number, located in the lower middle section of the page.

Handwritten text, possibly a title or page number, located in the lower left section of the page.

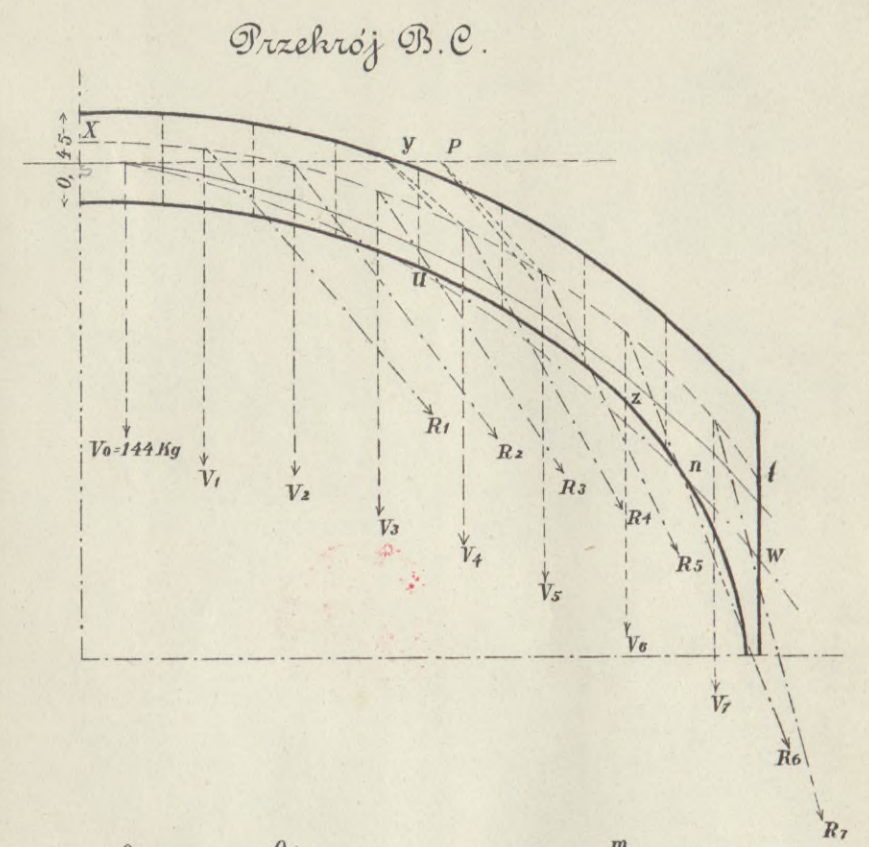


Handwritten text, possibly a title or page number, located at the bottom of the page.

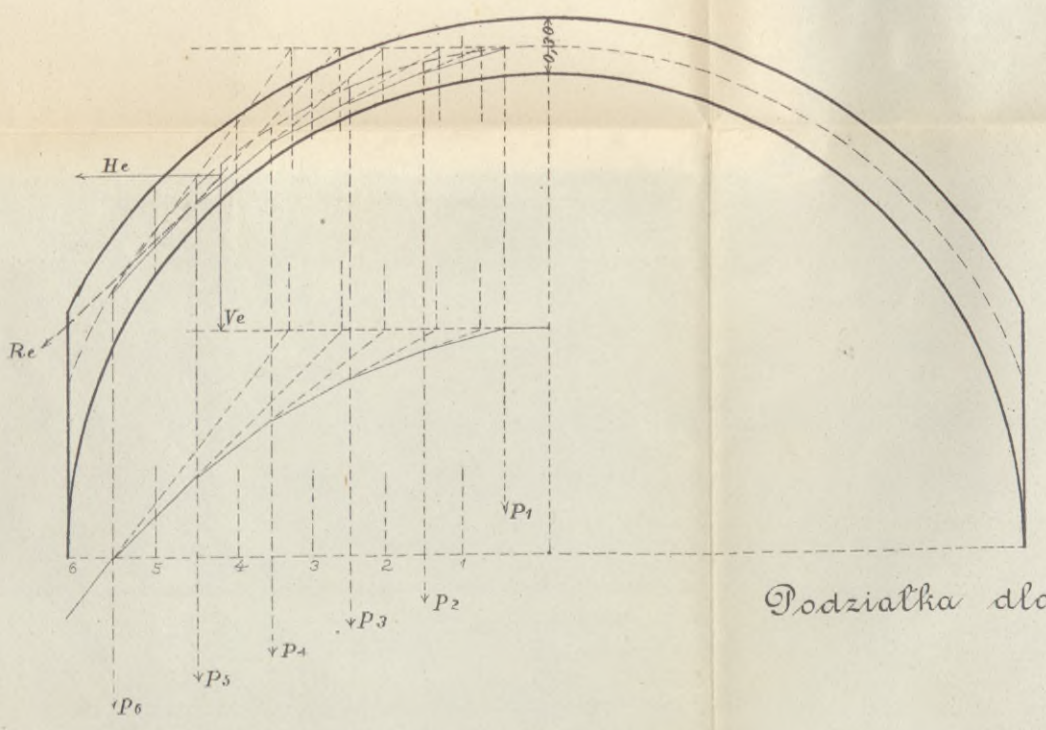
Wykreślne wyznaczenie linii ciśnienia w sklepieniu krzyżowym



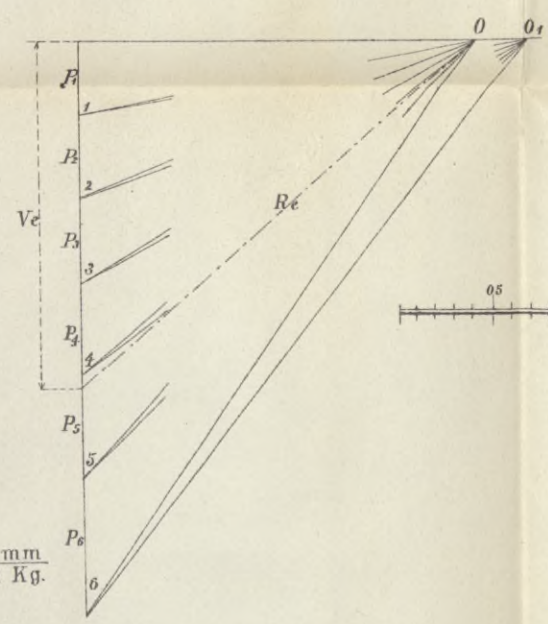
Przekrój A.C.



Podziałka dla sił $\frac{1 \text{ mm}}{16 \text{ Kg.}}$



Podziałka dla sił $\frac{1 \text{ mm}}{2 \text{ Kg.}}$



Podziałka 1:40

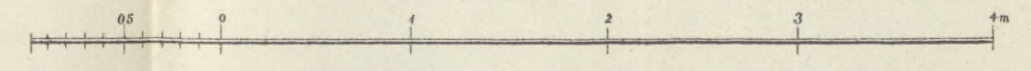


Fig. 1.

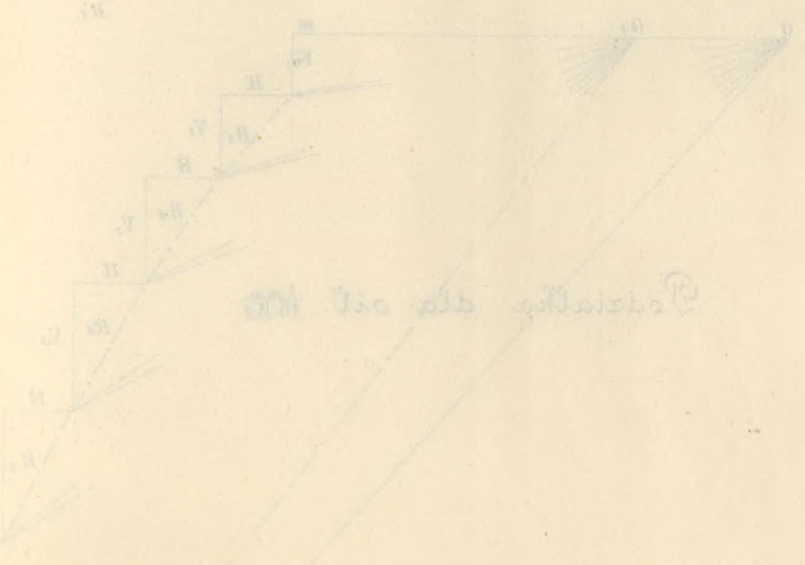
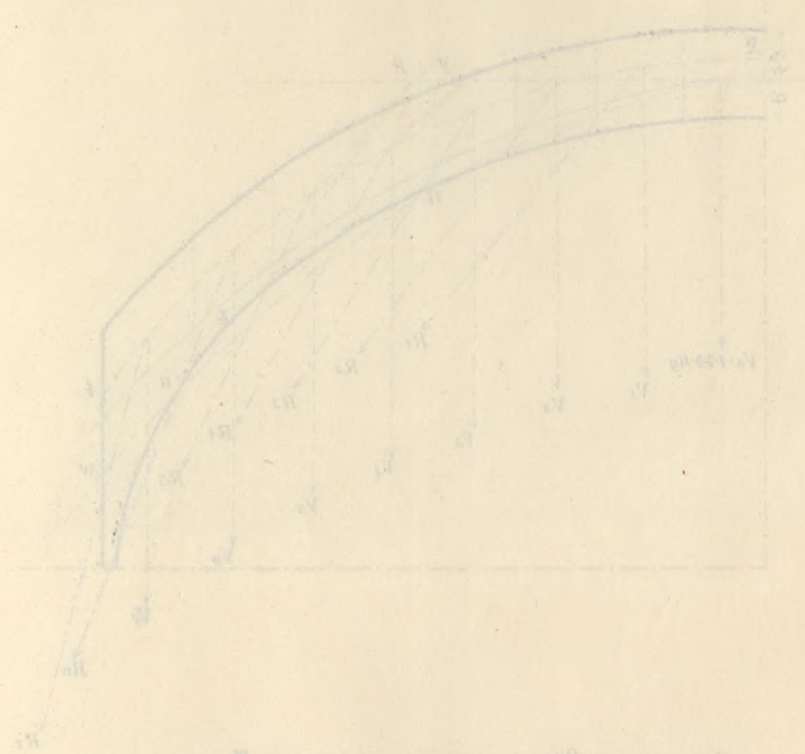


Fig. 2.

Fig. 3.

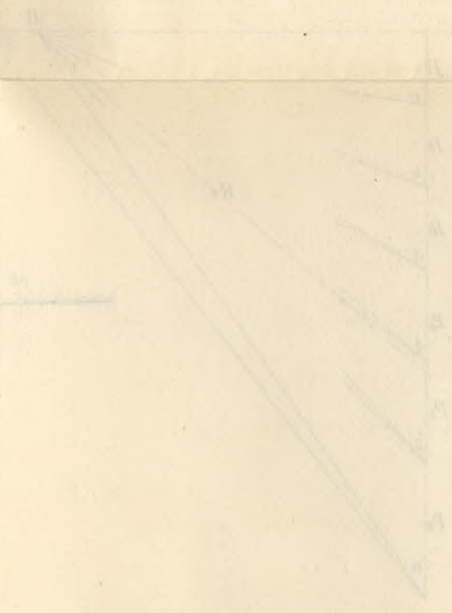


Fig. 4.

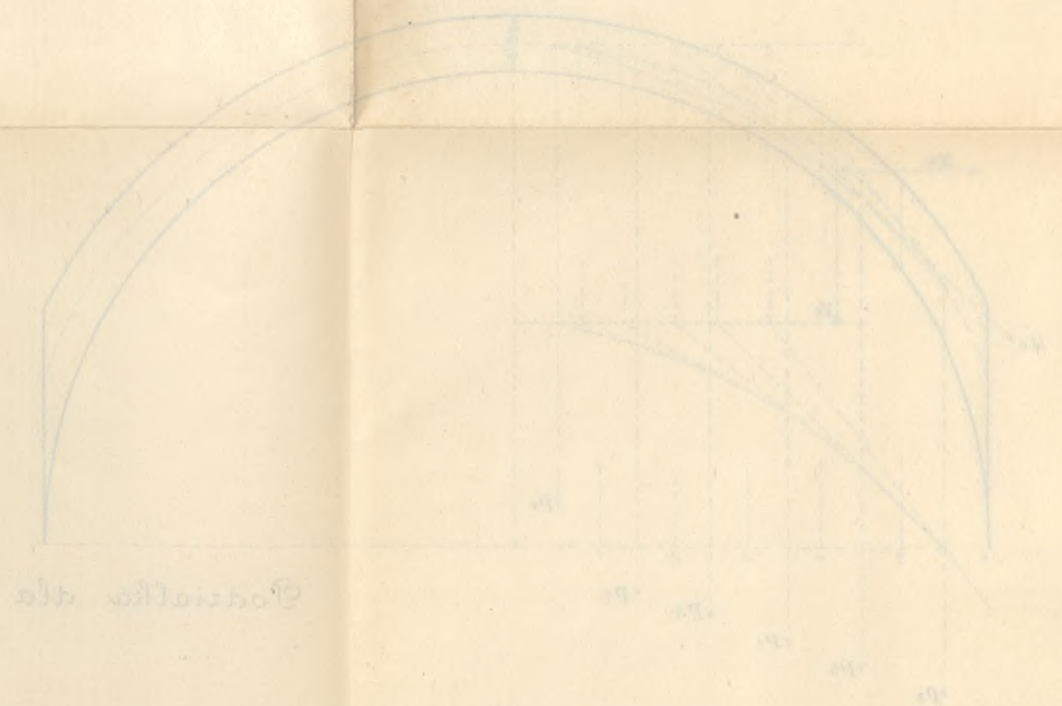
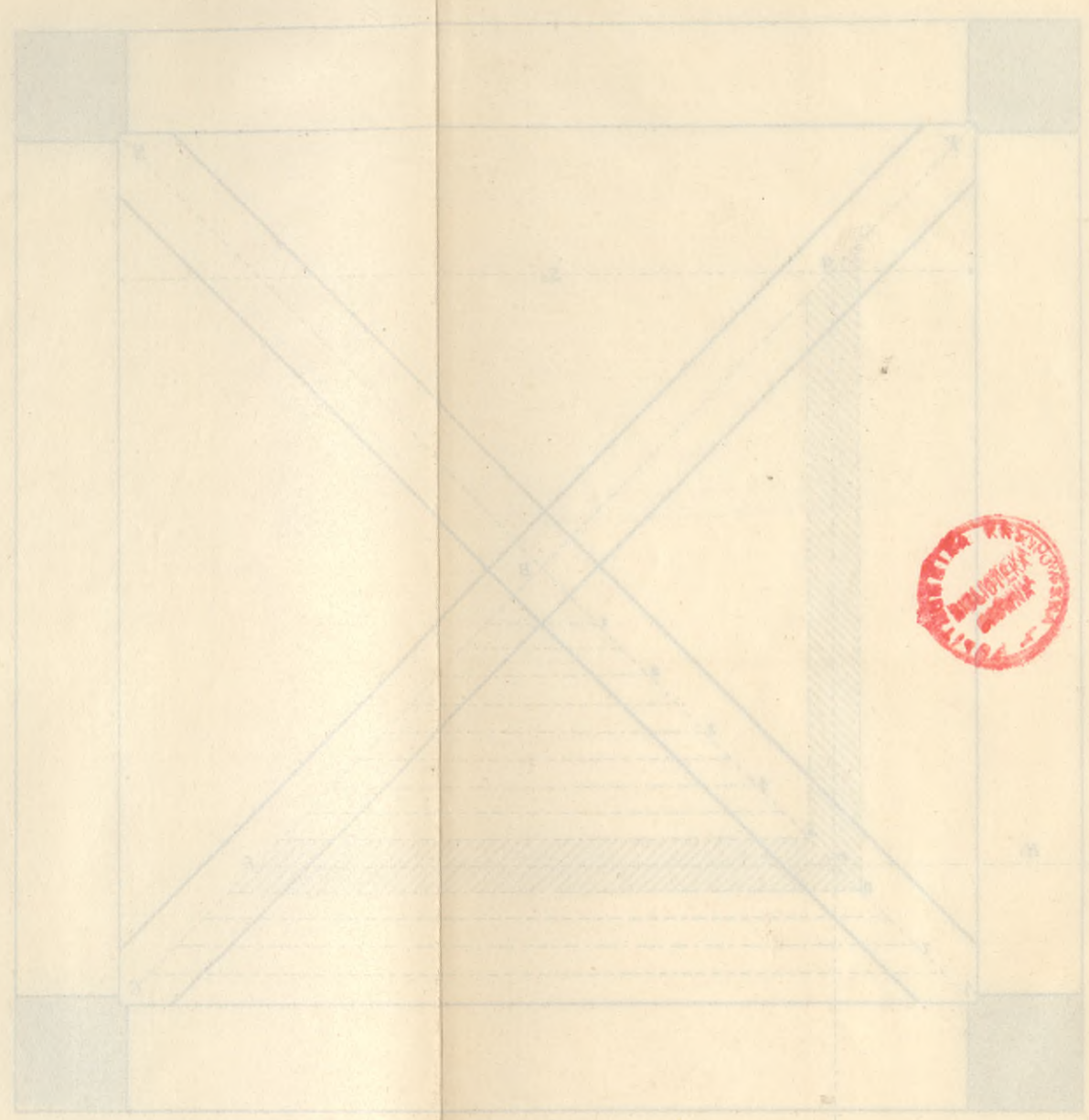


Fig. 5.





1918





Biblioteka Politechniki Krakowskiej



W-11220

Politechnika Krakowska

Biblioteka Główna



10000060317