ESZYT 6. ROK 1928.

II 15419

AKADEMJA NAUK TECHNICZNYCH

Inż. Dr. KASPER WEIGEL,
PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ
Ingénieur, Professeur à l'Ecole polytechnique de Lwów (Pologne)

Badanie formuł empirycznych przy pomocy szeregów Taylora

Recherche des formules empiriques à l'aide de développement d'après la formule de Taylor

Lwów 1928.
Odbito czcionkami Pierwszej Związkowej Drukarni we Lwowie, ul. Lindego l. 4.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000297724

ZESZYT 6. ROK 1928.

AKADEMJA NAUK TECHNICZNYCH

Inż. Dr. KASPER WEIGEL,
PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ
Ingénieur, Professeur à l'Ecole polytechnique de Lwów (Pologne)

Badanie formuł empirycznych przy pomocy szeregów Taylora

Recherche des formules empiriques à l'aide de développement d'après la formule de Taylor

Lwów 1928.
Odbito czcionkami Pierwszej Związkowej Drukarni we Lwowie, ul. Lindego l. 4.

D/122

BIBLIOTHECA JAGELLONICA
DUBLET

KD 517.513

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW
II 1549

POLITECHNIKA

II - 347810

BPK-B-442/2016

Akc. Nr. 194/50

W zagadnieniach związanych ze zjawiskami przyrody i naukami technicznemi musimy nieraz posługiwać się formułami empirycznemi. Odpowiedni dobór takiej formuły nie jest rzeczą łatwą i dlatego napotyka się w praktyce dość często na formuły empiryczne ułożone dość powierzchownie. Wartość takich formuł bywa często bardzo nieznaczna, a utrzymują się one w praktyce często tylko dlatego, że wyświetlenie należyte sprawy byłoby połączone z wielkiemi kosztami i żmudnemi obliczeniami.

Celem niniejszej rozprawy nie jest podanie sposobów ustawiania formuł empirycznych; natomiast będę się starał przedstawić sposób uzyskania w każdym przypadku konkretnym pewnych wartości liczebnych, które — o ile formuła jest już ustawiona — umożliwią zbadanie, czy wybór jej był odpowiedni, lub — o ile formuły jeszcze nie ułożono — będą służyły jako wskaźniki do jej zbudowania.

W którym przypadku można uważać formułę empiryczną jako odpowiednią?

W tej kwestji należy przyjąć zasadę następującą.

Przypuśćmy, że uzyskaliśmy dla pewnych wartości x_1, $x_2 \ldots$ odpowiadające im wartości y_1, $y_2 \ldots$ i że na podstawie tych wyników ustaliliśmy formułę empiryczną kształtu $y = \varphi(x)$, podczas gdy prawdziwy związek funkcyjny — nam nieznany — opiewa w rzeczywistości w tym przypadku: $y = f(x)$. Otóż jeżeli okaże się, że wartości liczebne pochodnych $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x) \ldots$, (uzyskane ze spostrzeżeń x_1, $x_2 \ldots$ i y_1, $y_2 \ldots$) zgadzają się z odpowiadającemi im wartościami pochodnych $\varphi^{(1)}(x)$, $\varphi^{(2)}(x) \ldots$, możemy twierdzić, że formuła $y = \varphi(x)$ jest ułożona odpowiednio. Aby się o tem przekonać, należy obok wartości liczebnych pochodnych $\varphi(x)$ wyznaczyć także i wartości liczebne odpowiadających im pochodnych $f(x)$. Dla uzyskania tych ostatnich można użyć albo formuły Lagrange'a lub rozwinięcia w szereg Taylora. Zauważyć jednak należy, że dokładność wyznaczenia temi sposobami pochodnych maleje z wzrastającym ich rzędem, tak że pochodne nawet dość niskich

rzędów mogą już wypaść błędnie. Otóż, jak się okazuje, mogą być pochodne, uzyskane przy pomocy rozwinięcia w szereg Taylora odpowiednio skontrolowane, czy nie odbiegają zbytnio od wartości prawdziwych pochodnych funkcji $f(x)$. Dlatego też użyjemy rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg Taylora dla uzyskania wartości liczebnych jej pochodnych, posługując się przy porównywaniu z pochodnemi $\varphi(x)$ tylko temi pochodnemi $f(x)$, które wspomnianą kontrolę zwycięzko przetrwały.

Jak już wspomniałem, jest rzeczą niemożliwą, aby uzyskać wartości pochodnych dowolnego rzędu bezbłędnie. Przyczyną tej okoliczności są błędy teorji, błędy obserwacyjne wielkości x i y, zaokrąglenia rachunkowe i pewne przybliżenia, konieczne dla uzyskania wartości pochodnych; prócz tego mają tu wpływ wielkości interwałów, w jakich spostrzegano funkcję $f(x)$. Okoliczności te powodują, że w praktyce będziemy uważali już wówczas formuły empiryczne za odpowiednie, kiedy zgodność liczebnych wartości pochodnych $\varphi(x)$ i $f(x)$ nastąpi dla kilku rzędów niższych, n. p. dla pochodnych rzędu pierwszego i drugiego, ewentualnie i dla pochodnych rzędu trzeciego.

Oczywiście, mając do wyboru między dwoma formułami empirycznemi, będziemy uważali tę za odpowiedniejszą, lepszą, która wykaże wyżej wspomnianą zgodność dla większej ilości pochodnych niż druga.

Aby móc owo porównanie liczebnych wartości przeprowadzić, rozwijamy — jak wspomniano — funkcję $f(x)$ w szereg Taylora, zakładając tem samem, że funkcja $f(x)$ da się rozwinąć w szereg Taylora. Gdybyśmy mieli w praktyce do czynienia wyjątkowo z funkcją nierozwijalną w szereg Taylora, o czem naturalnie nie wiemy przystępując do badania, wypadną nam później w konsekwencji sprzeczne wyniki, ostrzegające nas o tym fakcie, a temsamem i o tem, że sposób podany przezemnie w tym przypadku zawodzi. W praktyce będzie to jednak wypadek nader rzadki.

Będziemy się posługiwali szeregiem Taylora kształtu:

$$f(x_k)=f(x_i)+\frac{x_k-x_i}{1\,!}f^{(1)}(x_i)+$$

$$+\frac{(x_k-x_i)^2}{2\,!}f^{(2)}(x_i)+\ldots\ldots\frac{(x_k-x_i)^n}{n\,!}f^{(n)}\{x_i+\Theta(x_k-x_i)\},\quad .\quad .\quad 1)$$

przyczem: $$0<\Theta<1.$$

Po uporządkowaniu wartości liczebnych x i odpowiadających im y wedle rosnących wartości x, należy wziąć na uwagę $n+1$ par

owych wartości (przyczem liczba n powinna być parzystą) i utworzyć n związków kształtu:

$$f(x_1)-f(x_i)=(x_1-x_i)f^{(1)}(x_i)+$$
$$+\frac{(x_1-x_i)^2}{2!}f^{(2)}(x_i)+\ldots\ldots+\frac{(x_1-x_i)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}\{x_i+\Theta_{i.1}(x_1-x_i)\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$
$$f(x_{n+1})-f(x_i)=(x_{n+1}-x_i)f^{(1)}(x_i)+$$
$$+\frac{(x_{n+1}-x_i)^2}{2!}f^{(2)}(x_i)+\ldots\ldots+\frac{(x_{n+1}-x_i)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}\{x_i+\Theta_{i.n+1}(x_{n+1}-x_i)\},$$

przyczem najkorzystniej będzie, gdy $i=\frac{n}{2}+1$.

Aby móc z powyższych związków korzystać, należy poczynić jeszcze pewne przybliżenia względnie założenia i tak należy:

1. położyć $f^{(n-1)}\{x_i+\Theta(x_k-x_i)\}=f^{(n-1)}(x_i)+(x_k-x_i)\Theta f^{(n)}(x_i)$,

2. przyjąć na razie, że poszczególne Θ różnią się tak niewiele między sobą, że przyjęcie ich jako sobie równych nie wpłynie praktycznie na wyniki liczebne kilku początkowych pochodnych. Wyniknie ztąd n następujących związków:

$$f(x_k)-f(x_i)=(x_k-x_i)f^{(1)}(x_i)+$$
$$+\frac{(x_k-x_i)^2}{2!}f^{(2)}(x_i)+\ldots\ldots+\frac{(x_k-x_i)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_i)+\frac{(x_k-x_i)^n}{(n-1)!}\Theta f^{(n)}(x_i). \quad 3)$$

Po rozwiązaniu tych równań otrzymamy w przybliżeniu wartości liczebne pochodnych do $f^{(n-1)}(x_i)$ włącznie, oraz wartość $\Theta f^{(n)}(x_i)$, przyczem wartości pochodnych rzędów niższych wypadną z reguły dokładniej niż rzędów wyższych.

Aby się przekonać, które z nich mogą być użyte do porównania z odpowiadającemi im pochodnemi $\varphi(x)$, postąpimy dalej w sposób następujący.

Korzystając z uzyskanych wyników, możemy obliczyć poszczególne Θ przy rozwinięciu szeregów o jeden człon mniej na podstawie n związków kształtu:

$$f(x_k)-f(x_i)=(x_k-x_i)f^{(1)}(x_i)+$$
$$+\frac{(x_k-x_i)^2}{2!}f^{(2)}(x_i)+\ldots\ldots+\frac{(x_k-x_i)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(x_i)+$$
$$+\frac{(x_k-x_i)^{n-1}}{(n-2)!}\Theta_{i.k}^{(n-1)}f^{(n-1)}(x_i), \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

uzyskując poszczególne $\Theta^{(n-1)}$, a więc: $\Theta_{i.1}^{(n-1)}$, $\Theta_{i.2}^{(n-1)}$, ... $\Theta_{i.n+1}^{(n-1)}$.

Gdyby niektóre Θ przekroczyły granice dozwolone im teorją, t. j. wypadły ujemne lub większe niż 1, oznaczałoby to, że albo

a) funkcja badana nie jest rozwijalną w szereg Taylora, albo

b) że funkcja powyższa jest wprawdzie rozwijalną w ten szereg, jednak wyniki pochodnych, otrzymane dotychczasowym rachunkiem odbiegają zbytnio od ich wartości rzeczywistych, w konsekwencji czego poszczególne Θ są również błędne.

Dla przekonania się, który z wymienionych przypadków ma miejsce, skracamy poszczególne szeregi jeszcze kolejno o jeden człon, uzyskując wartości:

$$\Theta_{i.1}^{(n-2)},\ \Theta_{i.2}^{(n-2)}\ldots\ldots,\ \Theta_{i.1}^{(n-3)},\ \Theta_{i.2}^{(n-3)}\ldots\ldots \text{ i t. d.}$$

Gdyby się okazało, że Θ złączone z pochodnemi wszystkich niższych rzędów przybierają wartości niedopuszczalne, wówczas można jeszcze spróbować tej samej drogi, biorąc jednak do rachunku większą liczbę spostrzeżeń niż dotychczas (t. j. więcej niż $n+1$), a gdyby i to zawiodło, należy przyjąć, że badana funkcja nie jest rozwijalną w szereg Taylora. W tym przypadku metoda opisana w niniejszej rozprawie oczywiście zawodzi.

Natomiast gdy Θ wszystkich rzędów, począwszy od $\Theta^{(2)}$ aż do $\Theta^{(k)}$ wypadną w granicach od 0 do 1, a wartości Θ poszczególnych rzędów różnią się między sobą nieznacznie, względnie układają się wedle pewnego systemu, można przyjąć, że wartości liczebne pochodnych od pierwszego do k-tego rzędu włącznie są wyznaczone dostatecznie dokładnie dla celów badania formuły empirycznej. Jeśli bowiem Θ, obliczone przy pomocy tychże pochodnych, wykazują powyższe cechy, nie mogą wartości liczebne owych pochodnych odbiegać zbytnio od ich wartości prawdziwych.

Nie poprzestając jednak na tem, należy jeszcze skontrolować wartości poszczególnych pochodnych, korzystając z tego, że można przy ich pomocy uzyskać wartość $f(x)$ dla dowolnego x.

Zakładając, że $\Theta^{(k)}$ wykazały wyżej wymienione własności, utwórzmy:

$$\left.\begin{aligned}
f(x)&=f(x_i)+\frac{x-x_i}{1!}f^{(1)}(x_i)+\ldots\ldots+\frac{(x-x_i)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_i)+\\
&\quad+\frac{(x-x_i)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x_i)\,\Theta_{i.x}^{(k)},\\
&\text{oraz}\\
f(x)&=f(x_k)+\frac{x-x_k}{1!}f^{(1)}(x_k)+\ldots\ldots+\frac{(x-x_k)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_k)+\\
&\quad+\frac{(x-x_k)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x_k)\,\Theta_{k.x}^{(k)},
\end{aligned}\right\}\quad 5)$$

przyczem $\Theta_{i.x}^{(k)}$ i $\Theta_{k.x}^{(k)}$ wyznaczymy przez interpolację, zaś wartość x obierzemy równą lub bliską $\frac{1}{2}(x_i+x_k)$.

Porównanie obu w ten sposób utworzonych wartości $f(x)$ będzie kontrolą miarodajną dla wartości pochodnych. Jeśli różnica między obu wartościami $f(x)$ wypadnie jako wielkość rzędu wyższego niż wpływ przypuszczalny błędów obserwacyjnych i zaokrągleń rachunkowych lub conajwyżej rzędu tego samego, będziemy uważali wyniki uzyskane tą metodą za dostatecznie dokładne; natomiast gdy to nie nastąpi (nawet przy powiększeniu liczby spostrzeżeń użytych do rachunku), należy uważać, że metoda ta nie nadaje się w tym przypadku.

Uzyskane w powyższy sposób wartości liczebne pochodnych w kilku lub kilkunastu miejscach mogą być nietylko użyte dla sprawdzenia zbudowanej poprzednio formuły empirycznej, lecz także mogą służyć jako bardzo silne wskaźniki w przypadku, gdy dopiero przystępujemy do ułożenia formuły.

Nakoniec należy zwrócić uwagę na następujące okoliczności. Wielkości x i y (spostrzeżenia), na podstawie których obliczamy tą metodą pochodne, nie mogą być obarczone zbyt wielkiemi błędami obserwacyjnemi, gdyż w przeciwnym razie tak skażą wyniki rachunkowe, że wartości liczebne pochodnych będą dla naszego celu bez znaczenia. Ponadto musi być ilość spostrzeżeń x i y dość znaczną, a to z tego powodu, że dla uzyskania jaknajlepszych wyników pochodnych $f(x_i)$ użyjemy $n+1$ par spostrzeżeń x i y, przyczem $i=\frac{n}{2}+1$. Jeśli zatem, aby uzyskać wartości dobre trzech pierwszych pochodnych, użyjemy 7-miu par spostrzeżeń, trzeba będzie przy wyznaczaniu pochodnych w miejscu $f(x_4)$ ustawić sześć równań przy pomocy siedmiu par spostrzeżeń od x_1, y_1 do x_7, y_7, dla wyznaczenia pochodnych w miejscu $f(x_5)$ użyć następnych sześciu równań, utworzonych przy pomocy dalszych siedmiu par spostrzeżeń od x_2, y_2 do x_8, y_8 i t. d. Jak zatem widać, sposób powyższy wymaga dość znacznej liczby spostrzeżeń i to dostatecznie dokładnych.

Dla lepszego wyjaśnienia rzeczy podaję następujący przykład.

W przykładzie tym obrano umyślnie z góry związek $y=e^x$, traktując jednak rachunek cały tak, jakby ów związek był nam zupełnie nieznany. Uczyniono to dlatego, aby uzyskać w ten sposób do pewnego stopnia potwierdzenie zasad wypowiedzianych poprzednio, a utworzonych tylko na podstawie logicznego rozumowania (bez ścisłych dowodów matematycznych).

Dane są następujące spostrzeżenia:

$x_1=0{\cdot}00$ $y_1=1{\cdot}000\,000$ $x_3=0{\cdot}10$ $y_3=1{\cdot}105\,171$

$x_2=0{\cdot}05$ $y_2=1{\cdot}051\,271$ $x_4=0{\cdot}15$ $y_4=1{\cdot}161\,834$

(C. d. str. 7-ma).

$f(x_i)-f(x_4)$	$f^{(1)}(x_4)$	$f^{(2)}(x_4)$	$f^{(3)}(x_4)$	$f^{(4)}(x_4)$	$f^{(5)}(x_4)$	$\Theta f^{(6)}(x_4)$
$-0{\cdot}161\,834=$	$-0{\cdot}15$	$+\frac{0{\cdot}022\,5}{2}$	$-\frac{0{\cdot}003\,375}{6}$	$+\frac{0{\cdot}000\,506\,25}{24}$	$-\frac{0{\cdot}000\,075\,937\,5}{120}$	$+\frac{0{\cdot}000\,011\,390\,625}{120}$
$-0{\cdot}110\,563=$	$-0{\cdot}10$	$+\frac{0{\cdot}010\,0}{2}$	$-\frac{0{\cdot}001\,000}{6}$	$+\frac{0{\cdot}000\,100\,00}{24}$	$-\frac{0{\cdot}000\,010\,000\,0}{120}$	$+\frac{0{\cdot}000\,001\,000\,000}{120}$
$-0{\cdot}056\,663=$	$-0{\cdot}05$	$+\frac{0{\cdot}002\,5}{2}$	$-\frac{0{\cdot}000\,125}{6}$	$+\frac{0{\cdot}000\,006\,25}{24}$	$-\frac{0{\cdot}000\,000\,312\,5}{120}$	$+\frac{0{\cdot}000\,000\,015\,625}{120}$
$+0{\cdot}059\,569=$	$+0{\cdot}05$	$+\frac{0{\cdot}002\,5}{2}$	$+\frac{0{\cdot}000\,125}{6}$	$+\frac{0{\cdot}000\,006\,25}{24}$	$+\frac{0{\cdot}000\,000\,312\,5}{120}$	$+\frac{0{\cdot}000\,000\,015\,625}{120}$
$+0{\cdot}122\,191=$	$+0{\cdot}10$	$+\frac{0{\cdot}010\,0}{2}$	$+\frac{0{\cdot}001\,000}{6}$	$+\frac{0{\cdot}000\,100\,00}{24}$	$+\frac{0{\cdot}000\,010\,000{\cdot}0}{120}$	$+\frac{0{\cdot}000\,001\,000\,000}{120}$
$+0{\cdot}188\,025=$	$+0{\cdot}15$	$+\frac{0{\cdot}022\,5}{2}$	$+\frac{0{\cdot}003\,375}{6}$	$+\frac{0{\cdot}000\,506\,25}{24}$	$+\frac{0{\cdot}000\,075\,937\,5}{120}$	$+\frac{0{\cdot}000\,011\,390\,625}{120}$

$x_5 = 0{\cdot}20 \quad y_5 = 1{\cdot}221\,403 \qquad x_8 = 0{\cdot}35 \quad y_8 = 1{\cdot}419\,068$

$x_6 = 0{\cdot}25 \quad y_6 = 1{\cdot}284\,025 \qquad x_9 = 0{\cdot}40 \quad y_9 = 1{\cdot}491\,825$

$x_7 = 0{\cdot}30 \quad y_7 = 1{\cdot}349\,859 \qquad x_{10} = 0{\cdot}45 \quad y_{10} = 1{\cdot}568\,312.$

Dla wyznaczenia wartości pochodnych w miejscu $f(x_4)$ obieramy 7 pierwszych par spostrzeżeń, układając sześć równań, zestawionych schematycznie na str. 8-mej.

Po rozwiązaniu powyższych równań (stosunkowo dość łatwem z powodu symetrycznego układu spółczynników), otrzymujemy następujące wartości:

$$f^{(1)}(x_4) = \mathbf{1{\cdot}1618376}, \quad f^{(2)}(x_4) = \mathbf{1{\cdot}162324}, \quad f^{(3)}(x_4) = \mathbf{1{\cdot}157}, \quad f^{(4)}(x_4) = 0{\cdot}29\dot{3},$$
$$f^{(5)}(x_4) = 4{\cdot}8, \quad \Theta f^{(6)}(x_4) = 138{\cdot}\dot{6}.$$

Aby się przekonać, które z powyższych wyników są dla naszych celów jeszcze dostatecznie dokładne, obliczamy na ich podstawie poszczególne Θ, otrzymując te ostatnie przy uwzględnieniu pochodnych rzędu pierwszego i drugiego:

$$\Theta^{(2)}_{4.1} = +0{\cdot}48, \quad \Theta^{(2)}_{4.2} = +0{\cdot}48, \quad \Theta^{(2)}_{4.3} = +0{\cdot}49, \quad \Theta^{(2)}_{4.5} = +0{\cdot}51,$$
$$\Theta^{(2)}_{4.6} = +0{\cdot}52, \quad \Theta^{(2)}_{4.7} = +0{\cdot}53,$$

zaś przy uwzględnieniu pochodnych rzędu trzeciego:

$$\Theta^{(3)}_{4.1} = \mathbf{+0{\cdot}32}, \quad \Theta^{(3)}_{4.2} = \mathbf{+0{\cdot}33}, \quad \Theta^{(3)}_{4.3} = \mathbf{+0{\cdot}33}, \quad \Theta^{(3)}_{4.5} = \mathbf{+0{\cdot}33},$$
$$\Theta^{(3)}_{4.6} = \mathbf{+0{\cdot}34}, \quad \Theta^{(3)}_{4.7} = \mathbf{+0{\cdot}34}.$$

Przy obliczaniu poszczególnych $\Theta^{(4)}$, (t. j. przy uwzględnieniu i czwartej pochodnej) trzeba było uwzględnić przy wynikach mnożenia więcej miejsc dziesiętnych niż sześć; wyniki jakie otrzymano (po zaokrągleniu), okazały się jak widać z zestawienia nieprzydatne dla naszych celów:

$$\Theta^{(4)}_{4.1} = +0{\cdot}68, \quad \Theta^{(4)}_{4.2} = +0{\cdot}37, \quad \Theta^{(4)}_{4.3} = +0{\cdot}33, \quad \Theta^{(4)}_{4.5} = -0{\cdot}33,$$
$$\Theta^{(4)}_{4.6} = +0{\cdot}45, \quad \Theta^{(4)}_{4.7} = +0{\cdot}90$$

(przy uwzględnieniu tylko 6-ciu miejsc dziesiętnych wypadają: $\Theta^{(4)}_{4.3} = \frac{0}{0}$, $\Theta^{(4)}_{4.5} = 0$).

Jak tedy widzimy można uważać conajwyżej pochodne rzędu trzeciego jako jeszcze dostatecznie dokładnie wyznaczone.

W analogiczny sposób wyznaczamy wartości pochodnych w miejscu $f(x_5)$, posługując się w tym celu spostrzeżeniami od x_2, y_2 do x_8, y_8. Schemat równań wypadnie wówczas następująco:

$f(x_i)-f(x_5)$	$f^{(1)}(x_5)$	$f^{(2)}(x_5)$	$f^{(3)}(x_5)$	$f^{(4)}(x_5)$	$f^{(5)}(x_5)$	$\Theta f^{(6)}(x_5)$
$-0{\cdot}170\,132$	$-0{\cdot}15$	$+\frac{0{\cdot}022\,5}{2}$	i t. d. jak w schemacie poprzednim.			
$-0{\cdot}116\,232$	$-0{\cdot}10$	$+\frac{0{\cdot}010\,0}{2}$				
$-0{\cdot}059\,569$	$-0{\cdot}05$	$+\frac{0{\cdot}002\,5}{2}$				
$+0{\cdot}062\,622$	$+0{\cdot}05$	$+\frac{0{\cdot}002\,5}{2}$				
$+0{\cdot}128\,456$	$+0{\cdot}10$	$+\frac{0{\cdot}010\,0}{2}$				
$+0{\cdot}197\,665$	$+0{\cdot}15$	$+\frac{0{\cdot}022\,5}{2}$				

Rozwiązanie powyższych równań dostarcza nam wyników następujących:

$$f^{(1)}(x_5)=+\mathbf{1{\cdot}221436},\quad f^{(2)}(x_5)=+\mathbf{1{\cdot}220729},\quad f^{(3)}(x_5)=+\mathbf{1{\cdot}224},$$
$$f^{(4)}(x_5)=+2{\cdot}34\dot{6},\quad f^{(5)}(x_5)=0,\quad \Theta.f^{(6)}(x_5)=-170{\cdot}\dot{6};$$

zaś obliczone wartości $\Theta^{(2)}$ i $\Theta^{(3)}$ wypadają:

$$\Theta^{(2)}_{5.2}=+0{\cdot}48,\quad \Theta^{(2)}_{5.3}=+0{\cdot}48,\quad \Theta^{(2)}_{5.4}=+0{\cdot}51,\quad \Theta^{(2)}_{5.6}=+0{\cdot}51,$$
$$\Theta^{(2)}_{5.7}=+0{\cdot}52,\quad \Theta^{(2)}_{5.8}=+0{\cdot}53;$$
$$\Theta^{(3)}_{5.2}=+\mathbf{0{\cdot}31},\quad \Theta^{(3)}_{5.3}=+\mathbf{0{\cdot}31},\quad \Theta^{(3)}_{5.4}=+\mathbf{0{\cdot}30},\quad \Theta^{(3)}_{5.6}=+\mathbf{0{\cdot}31},$$
$$\Theta^{(3)}_{5.7}=+\mathbf{0{\cdot}34},\quad \Theta^{(3)}_{5.8}=+\mathbf{0{\cdot}35}.$$

Wartości $\Theta^{(4)}$ okazują się jak poprzednio niedopuszczalne:

$$\Theta^{(4)}_{5.2}=+0{\cdot}19,\quad \Theta^{(4)}_{5.3}=+0{\cdot}31,\quad \Theta^{(4)}_{5.4}=+1{\cdot}04,\quad \Theta^{(4)}_{5.6}=-0{\cdot}63,$$
$$\Theta^{(4)}_{5.7}=+0{\cdot}10,\quad \Theta^{(4)}_{5.8}=+0{\cdot}10.$$

W podobny sposób otrzymamy na podstawie dalszych 6-ciu równań, ułożonych przy pomocy spostrzeżeń od x_3, y_3 do x_9, y_9 (przyczem wyrażenia po stronie prawej zmienią się na: $-0{\cdot}178\,854$, $-0{\cdot}122\,191$, $-0{\cdot}062\,622$, $+0{\cdot}065\,834$, $+0{\cdot}135\,043$ i $+0{\cdot}207\,800$) następujące wartości pochodnych w miejscu $f(x_6)$:

$$f^{(1)}(x_6)=+\mathbf{1{\cdot}284026\dot{}},\quad f^{(2)}(x_6)=+\mathbf{1{\cdot}284729},\quad f^{(3)}(x_6)=+\mathbf{1{\cdot}29},$$
$$f^{(4)}(x_6)=+0{\cdot}2\dot{6},\quad f^{(5)}(x_6)=-3{\cdot}2,\quad \Theta f^{(6)}(x_6)=+149{\cdot}\dot{3},\ \text{a dalej}$$
$$\Theta^{(2)}_{6.3}=+0{\cdot}48,\quad \Theta^{(2)}_{6.4}=+0{\cdot}48,\quad \Theta^{(2)}_{6.5}=+0{\cdot}49,\quad \Theta^{(2)}_{6.7}=+0{\cdot}51,$$
$$\Theta^{(2)}_{6.8}=+0{\cdot}52,\quad \Theta^{(2)}_{6.9}=+0{\cdot}53,$$

$$\Theta^{(3)}_{6.3}=+0{\cdot}32,\quad \Theta^{(3)}_{6.4}=+0{\cdot}33,\quad \Theta^{(3)}_{6.5}=+0{\cdot}33,\quad \Theta^{(3)}_{6.7}=+0{\cdot}33,$$
$$\Theta^{(3)}_{6.8}=+0{\cdot}33,\quad \Theta^{(3)}_{6.9}=+0{\cdot}34.$$

Wartości $\Theta^{(4)}$, które wykazują przekroczenia granic (0, 1) nie podajemy, gdyż nawet, gdyby były zawarte w granicach wspomnianych, byłyby dla naszych celów w obec poprzednich $\Theta^{(4)}$ bezprzedmiotowe.

Wreszcie otrzymujemy na podstawie dalszych 6-ciu równań, których strony lewe zmienimy odpowiednio na:

$$-0{\cdot}188025,\quad -0{\cdot}128456,\quad -0{\cdot}065834,\quad +0{\cdot}069209,$$
$$+0{\cdot}141966,\quad +218453$$

(przy użyciu spostrzeżeń od x_4, y_4 do x_{10}, y_{10}):

$$f^{(1)}(x_7)=+\mathbf{1{\cdot}3498716},\quad f^{2)}(x_7)=+\mathbf{1{\cdot}3496355},\quad f^{(3}(x_7)=+\mathbf{1{\cdot}339},$$
$$f^{(4)}(x_7)=+1{\cdot}78\dot{6},\quad f^{5)}(x_7)=+8,\quad \Theta f^{(6)}(x_7)=-74{\cdot}\dot{6},\ \text{oraz}$$
$$\Theta^{(2)}_{7.4}=+0{\cdot}47,\quad \Theta^{(2)}_{7.5}=+0{\cdot}48,\quad \Theta^{(2)}_{7.6}=+0{\cdot}47,\quad \Theta^{(2)}_{7.8}=+0{\cdot}51,$$
$$\Theta^{2)}_{7.9}=+0{\cdot}52,\quad \Theta^{(2)}_{7.10}=+0{\cdot}53,$$
$$\Theta^{(3)}_{7.4}=+\mathbf{0{\cdot}32},\quad \Theta^{(3)}_{7.5}=+\mathbf{0{\cdot}32},\quad \Theta^{(3)}_{7.6}=+\mathbf{0{\cdot}33},\quad \Theta^{(3)}_{7.8}=+\mathbf{0{\cdot}34},$$
$$\Theta^{3)}_{7.9}=+\mathbf{0{\cdot}34},\quad \Theta^{(3)}_{7.10}=+\mathbf{0{\cdot}35}.$$

$\Theta^{(4)}$ okazują się niedopuszczalne jak poprzednio.

Ponieważ $\Theta^{(4)}$ nie wykazują tych właściwości, jakie poprzednio określiliśmy, przeto tylko wartości 3 pierwszych pochodnych w miejscach $f(x_4)$, $f(x_5)$, $f(x_6)$ i $f(x_7)$ mogą być użyte do porównania z odpowiadającemi im pochodnemi funkcji empirycznej, o ile ta jest dana, względnie mogą być użyte jako wskaźniki przy budowie nowej formuły empirycznej.

Aby mieć w tym względzie pewność, należy przeprowadzić kontrolę, tworząc przy pomocy wartości uzyskanych pochodnych wartości $f(x)$ dla miejsc pośrenich, jak to opisano poprzednio.

Utwórzmy zatem $f(x=0{\cdot}18)$ przy pomocy 3 pochodnych w miejscach $f(x_4=+0{\cdot}15)$ i $f(x_5=+0{\cdot}20)$.

W przypadku pierwszym otrzymamy wartość na odpowiednie $\Theta^{(3)}=+0{\cdot}33$, ze względu na to, że $\Theta^{(3)}_{4.3}=\Theta^{(3)}_{4.5}=+0{\cdot}33$; w przypadku drugim leży odpowiednia wartość $\Theta^{(3)}$ między $\Theta^{(3)}_{5.4}=+0{\cdot}30$ i $\Theta^{(3)}_{5.6}=$ $=+0{\cdot}31$, jednak znacznie bliżej $\Theta^{(3)}_{5.6}$, gdyż $x_4=+0{\cdot}15$ zaś $x_6=$ $=+0{\cdot}25$, zatem przyjmiemy dla odpowiedniego $\Theta^{(3)}$ wartość 0·30.

Rachunek kontrolny przedstawi się zatem następująco:

$$f(x=0{\cdot}18)=1{\cdot}161834+\frac{0{\cdot}03}{1!}1{\cdot}1618376+\frac{0{\cdot}0009}{2!}1{\cdot}1623244+$$
$$+\frac{0{\cdot}000027}{2!}.0{\cdot}33.1{\cdot}157=1{\cdot}197217,\ \text{oraz}$$

$$f(x=0{\cdot}18)=1{\cdot}221403-\frac{0{\cdot}02}{1\,!}1{\cdot}221436+$$
$$+\frac{0{\cdot}0004}{2\,!}1{\cdot}220729-\frac{0{\cdot}000008}{2\,!}.0{\cdot}30.1{\cdot}224=1{\cdot}197217.$$

W podobny sposób można utworzyć kontrolę dla pochodnych w innych miejscach. W naszym przypadku kontrola wykazuje zgodność na 6-tem miejscu dziesiętnem.

Wartości trzech pierwszych pochodnych mogą nam w omawianym przypadku posłużyć jako wskaźniki do ułożenia odpowiedniej formuły zbliżonej do funkcji prawdziwej. I tak zauważyć należy, że wartości pochodnych równają się w przybliżeniu odpowiednim wartościom y. Zatem można przyjąć (założywszy, że nie znamy zupełnie prawdziwego kształtu funkcji, obranej w niniejszym przykładzie), że funkcja opiewa: $y=e^{a\cdot x}$, przyczem $a=\text{const}$. Biorąc na uwagę każdą parę spostrzeżeń, można łatwo przekonać się, że $a=1$, zatem związek między x i y opiewa w tym przypadku: $y=e^{x}$. Naturalnie, że wartości pochodnych mogą być tylko w wyjątkowych przypadkach tak charakterystyczne, jak to miało miejsce w naszym przykładzie, zawsze jednak będą stanowiły wielkie ułatwienie przy układaniu odpowiedniej formuły empirycznej. Ponieważ funkcja była faktycznie obrana z góry (choć rachunek tak przeprowadzony, jakbyśmy jej nie znali), można się przekonać na tym przykładzie, jak bardzo odbiegają wartości pochodnych rzędu czwartego, uzyskane rachunkiem od ich wartości rzeczywistych z chwilą, gdy $\Theta^{(4)}$ przybierają wartości teorją niedozwolone, względnie nie są sobie bliskie i nie układają się systematycznie.

Metodę powyższą można zastosować do badania względnie po części i ustawiania formuł empirycznych o kilku zmiennych niezależnych. Wzór (1) będzie miał wówczas kształt następujący:

$$\left.\begin{aligned}
&f(x_k, y_k, z_k\ldots)=f(x_i, y_i, z_i\ldots)+\\
&+\frac{1}{1\,!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k-x_i)+\frac{\partial f}{\partial y}(y_k-y_i)+\frac{\partial f}{\partial z}(z_k-z_i)+\ldots\right]^{(1)}_{x_i,\,y_i,\,z_i\ldots}+\\
&+\frac{1}{2\,!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k-x_i)+\frac{\partial f}{\partial y}(y_k-y_i)+\frac{\partial f}{\partial z}(z_k-z_i)+\ldots\ldots\right]^{(2)}_{x_i,\,y_i,\,z_i\ldots}+\ldots\ldots+\\
&+\frac{1}{(n-1)\,!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k-x_i)+\frac{\partial f}{\partial y}(y_k-y_i)+\frac{\partial f}{\partial z}(z_k-z_i)+\ldots\right]^{(n-1)}_{x_i,\,y_i,\,z_i\ldots}+\\
&+\frac{1}{n\,!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k-x_i)+\frac{\partial f}{\partial y}(y_k-y_i)+\frac{\partial f}{\partial z}(z_k-z_i)+\ldots\right]^{(n)}_{\substack{x_i+\Theta(x_k-x_i)\\ y_i+\Theta(y_k-y_i)\\ z_i+\Theta(z_k-z_i)}},
\end{aligned}\right\}\quad 6)$$

zaś związki (3) przemienią się, przyjmując formę:

$$\left.\begin{aligned}
&f(x_k, y_k, z_k \ldots) - f(x_i, y_i, z_i \ldots) = \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k - x_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_k - y_i) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_k - z_i) + \ldots\ldots\right]^{(1)}_{x_i,\, y_i,\, z_i \ldots} + \\
&+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k - x_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_k - y_i) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_k - z_i) + \ldots\ldots\right]^{(2)}_{x_i,\, y_i,\, z_i \ldots} + \ldots\ldots \\
&+ \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k - x_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_k - y_i) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_k - z_i) + \ldots\ldots\right]^{(n-1)}_{x_i,\, y_i,\, z_i \ldots} + \\
&+ \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k - x_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_k - y_i) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_k - z_i) + \ldots\right]^{(n)}_{x_i,\, y_i,\, z_i \ldots} . \Theta.
\end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Oczywiście, że w tym przypadku nastąpi znaczne powiększenie pracy rachunkowej. I tak, biorąc na uwagę funkcję tylko dwu zmiennych niezależnych, trzeba będzie dla wyznaczenia wartości liczebnych pochodnych cząstkowych pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu (przyczem te ostatnie będą z reguły zanadto błędne), uwzględnić we wzorze (7) także i pochodne cząstkowe rzędu czwartego.

Wzór ten przyjmie w tym przypadku kształt następujący:

$$\left.\begin{aligned}
&f(x_k, y_k) - f(x_i, y_i) = (x_k - x_i)\frac{\partial f}{\partial x}_{x_i,\, y_i} + (y_k - y_i)\frac{\partial f}{\partial y}_{x_i,\, y_i} + \\
&+ \tfrac{1}{2}(x_k - x_i)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_{x_i,\, y_i} + (x_k - x_i)(y_k - y_i)\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}_{x_i,\, y_i} + \\
&+ \tfrac{1}{2}(y_k - y_i)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_{x_i,\, y_i} + \tfrac{1}{6}(x_k - x_i)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}_{x_i,\, y_i} + \\
&+ \tfrac{1}{2}(x_k - x_i)^2 (y_k - y_i)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}_{x_i,\, y_i} + \tfrac{1}{2}(x_k - x_i)(y_k - y_i)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}_{x_i,\, y_i} + \\
&+ \tfrac{1}{6}(y_k - y_i)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}_{x_i,\, y_i} + \tfrac{1}{6}(x_k - x_i)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}_{x_i,\, y_i} . \Theta + \\
&+ \tfrac{2}{3}(x_k - x_i)^3 (y_k - y_i)\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\, \partial y}_{x_i,\, y_i} . \Theta + (x_k - x_i)^2 (y_k - y_i)^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2}_{x_i,\, y_i} . \Theta + \\
&+ \tfrac{2}{3}(x_k - x_i)(y_k - y_i)^3 \frac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y^3}_{x_i,\, y_i} . \Theta + \tfrac{1}{6}(y_k - y_i)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}_{x_i,\, y_i} . \Theta,
\end{aligned}\right\} \quad 7\,a)$$

będzie zatem zawierał 14 niewiadomych, a temsamem trzeba będzie ustawić 14 analogicznych związków dla ich wyznaczenia.

* * *

W praktyce zdarza się często, że wartości $f(x)$ wykazują dość dużą dyspersję. Nasuwa się tedy pytanie, czy i wówczas można zastosować metodę opisaną powyżej.

Otóż okazuje się, że metoda powyższa może i w tych przypadkach dostarczyć wartości pochodnych funkcji, jednak pod warunkiem, że ilość materjału jest odpowiednio wielka.

Powodem dyspersji wartości $f(x)$ mogą być: *a)* błędy przypadkowe, *b)* pominięcie pewnych mało uchwytnych czynników, t. j. zaniedbanie jednej lub więcej zmiennych niezależnych, *c)* błędy grube. Mając do dyspozycji wielką ilość x i y dzieli się je na odpowiednie grupy, tworząc dla każdej grupy wartości średnie X i Y. W przypadku *a)* X i Y będą wartościami najbardziej prawdopodobnemi dla każdej grupy, w przypadku *b)* będą utworzone dla wartości średnich zmiennych zaniedbanych, zaś wartości x i y, obarczone błędami grubemi dadzą się łatwo spostrzec.

Po uporządkowaniu wartości x wedle ich wielkości, obieramy dowolnie małe interwały Δx, tworząc w ten sposób grupy x i odpowiadających im $y=f(x)$. W każdej grupie urabiamy średnie wartości X i Y; zatem jeśli na i-tą grupę składa się r_i wartości x i y, będzie:

$$X_i=\frac{\Sigma(x)_i}{r_i}, \qquad Y_i=\frac{\Sigma(y)_i}{r_i}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Wartości X można nawet w przypadku, gdy pochodzą ze spostrzeżeń, przyjąć przy obiorze dostatecznie małych interwałów Δx za bezbłędne, natomiast muszą być uwzględnione w rachunku dalszym błędy średnie wielkości Y.

Błędy średnie spostrzeżeń y w poszczególnych grupach są określone związkiem:

$$\mu_i=\frac{\Sigma(\lambda^2)_i}{r_i-1}, \quad \text{(przyczem } \lambda=Y-y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

zaś błędy średnie wartości Y należy obliczać przy pomocy wzoru:

$$m_i=\frac{\Sigma(\lambda^2)_i}{r_i(r_i-1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

Na tem miejscu można omówić sprawę wykluczania spostrzeżeń obarczonych błędami grubemi. Każdy badacz powinien mieć tyle doświadczenia, aby mógł ocenić jak wielki błąd λ może uważać w praktyce jeszcze za przypadkowy. Teoretyczne kryterjum daje się ustawić tylko pod założeniem najbardziej prawdopodobnej repartycji błędów przypadkowych. Z założenia tego wynika, że przy pewnej ilości spostrzeżeń r, powinien tylko jeden błąd λ przekroczyć pewną ściśle określoną wielokrotność błędu średniego μ. I tak przy ilości spostrzeżeń:

$r=6$	powinien	tylko	jeden	błąd	λ	przekroczyć	wartość	1·38 μ
$r=7$	„	„	„	„	„	„	„	1·48 μ
$r=8$	„	„	„	„	„	„	„	1·53 μ
$r=9$	„	„	„	„	„	„	„	1·59 μ
$r=10$	„	„	„	„	„	„	„	1·64 μ
$r=11$	„	„	„	„	„	„	„	1·69 μ
$r=12$	„	„	„	„	„	„	„	1·73 μ
$r=13$	„	„	„	„	„	„	„	1·77 μ
$r=14$	„	„	„	„	„	„	„	1·80 μ
$r=15$	„	„	„	„	„	„	„	1·83 μ

i t. d.

Wartości powyższe odnoszą się właściwie do błędów prawdziwych, możemy je jednak odnieść z wielkiem przybliżeniem i do błędów pozornych λ. Jeśli zatem w pewnym przypadku wypadnie więcej błędów λ większych niż podane powyżej wartości, można je wszystkie z wyjątkiem jednego uważać za błędy grube i odnośne spostrzeżenia wykluczyć. Uwagi powyższe dodałem tylko dla lepszego wyświetlenia kwestji omawianej, gdyż jak wspomniałem, największą rolę w przypadku wyłączania spostrzeżeń spełnia doświadczenie badacza z uwzględnieniem okoliczności towarzyszących przy pomiarze.

Stosując metodę podaną powyżej, otrzymamy po urobieniu $n+1$ wartości średnich X i Y, zamiast n równań kształtu (3), n równań błędów (które mogą zawierać conajwyżej $n-1$ niewiadomych):

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{i.1} &= f(X_i)-f(X_1)+(X_1-X_i)f^{(1)}(X_i)+\frac{(X_1-X_i)^2}{2!}f^{(2)}(X_i)+\ldots\\
&\ldots+\frac{(X_1-X_i)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(X_i)+\frac{(X_1-X_i)^{n-1}}{(n-2)!}\Theta f^{(n-1)}(X_i)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_{i.n+1} &= f(X_i)-f(X_{n+1})+(X_{n+1}-X_i)f^{(1)}(X_i)+\\
&+\frac{(X_{n+1}-X_i)^2}{2!}f^{(2)}(X_i)+\ldots\ldots+\frac{(X_{n+1}-X_i)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(X_i)+\\
&+\frac{(X_{n+1}-X_i)^{n-1}}{(n-2)!}\Theta f^{(n-1)}(X_i),
\end{aligned}\right\}\quad 11)$$

przyczem równaniom tym odpowiadają wagi:

$$\left.\begin{aligned}
p_{i.1} &= 1:\left(\frac{\Sigma(\lambda^2)_1}{r_1(r_1-1)}+\frac{\Sigma(\lambda^2)_i}{r_i(r_i-1)}\right),\ \ldots\ldots\\
p_{i.n+1} &= 1:\left(\frac{\Sigma(\lambda^2)_{n+1}}{r_{n+1}(r_{n+1}-1)}+\frac{\Sigma(\lambda^2)_i}{r_i(r_i-1)}\right).
\end{aligned}\right\}\quad 12)$$

Następnie ustawiamy równania normalne, otrzymując po ich rozwiązaniu wartości liczebne pochodnych $f^{(1)}(X_i)\ldots f^{(n-2)}(X_i)$, oraz wartość $\Theta f^{(n-1)}(X_i)$. Po wstawieniu tych wartości do równań błędów (11) wyznaczamy błędy $\lambda_{i.1}\ldots\ldots\lambda_{i.n+1}$, oraz błąd średni jednostkowy:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\Sigma p \lambda \lambda}{n-k}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

k jest tu ilością niewiadomych, zatem dla $k=n-1$ przemienia się wzór (13) na:

$$\mu_0 = \sqrt{\Sigma p \lambda \lambda}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13\,a)$$

Błędy średnie po wyrównaniu poszczególnych równań (11) są określone związkami:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{i.1} &= \frac{\mu_0}{\sqrt{p_{i.1}}} = \mu_0 \sqrt{\frac{\Sigma(\lambda^2)_1}{r_1(r_1-1)} + \frac{\Sigma(\lambda^2)_i}{r_i(r_i-1)}}, \ldots \\ \ldots \mu_{i.n+1} &= \frac{\mu_0}{\sqrt{p_{i.n+1}}} = \mu_0 \sqrt{\frac{\Sigma(\lambda^2)_{n+1}}{r_{n+1}(r_{n+1}-1)} + \frac{\Sigma(\lambda^2)_i}{r_i(r_i-1)}}. \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Celem przekonania się, które wartości pochodnych otrzymaliśmy przy pomocy równań normalnych jeszcze dostatecznie dokładnie, należy ustawić równania wag, wyznaczyć przez ich rozwiązanie spółczynniki wag $Q_{1.1}$, $Q_{1.2}$ . . . . . , a następnie obliczyć błędy średnie niewiadomych (t. j. błędy śr. wartości pochodnych i $\Theta f^{(n-1)}(X_i)$):

$$\mu_{f(1)} = \mu_0 \sqrt{Q_{1.1}}, \qquad \mu_{f(2)} = \mu_0 \sqrt{Q_{2.2}} \text{ i t. d. } . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

Wymaga to jednak długich i żmudnych obliczeń; przypuszczam zatem, że w praktyce będzie można poprzestać na obliczeniu błędów średnich po wyrównaniu, podanych związkami (14) i po ich wielkości można będzie ocenić, czy dokładność równań (11) jest wystarczająca do wyznaczenia kilku pochodnych najniższych rzędów.

O ile zatem ocena powyższa wypadnie korzystnie, obliczamy z równań (11) (uwzględniając wartości $\lambda_{i.k}$) poszczególne Θ od $\Theta^{(2)}$ począwszy, orjentując się wedle wskazówek podanych poprzednio na str. 6-tej, które wartości pochodnych wyznaczono dostatecznie dokładnie dla celów badania formuły empirycznej.

Ostateczne sprawdzenie tego faktu przeprowadza się, jak poprzednio, przy pomocy wzoru (5) (przy uwzględnieniu oczywiście poszczególnych $\lambda_{i.k}$).

Badanie formuły empirycznej w sposób opisany powyżej wymaga bardzo wielkiego nakładu pracy rachunkowej, dlatego można w praktyce często ograniczyć się do zbadania jej tylko w pewnych miejscach, n. p. początkowych, środkowych i końcowych, co z reguły okaże się wystarczające.

RÉSUMÉ.

Etant données les valeurs x_1, y_1, x_2, y_2...., on a choisi une formule empirique $y=\varphi(x)$, pendant que la véritable fonction (inconnue pour nous) est $y=f(x)$. Cette dernière doit être remplacée par la formule $y=\varphi(x)$, si les valeurs de coefficients différentiels $\varphi^{(1)}(x)$, $\varphi^{(2)}(x)$, $\varphi^{(3)}(x)$..... sont suffisamment rapprochées des valeurs correspondantes de $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$..... (En pratique nous nous contentons ordinairement d'une approximation suffisante des trois paires de valeurs ci-dessus nommées).

Pour gagner la conviction de ce fait, il faut calculer les valeurs de coefficients différentiels $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$..... On les obtient à l'aide de développement de la fonction $f(x)$ d'après la formule de Taylor (voir les formules (1) et (2)) et en cas de $n+1$ paires des valeurs de x et y résultent n équations en forme (3).

Supposant le nombre n assez grand, on peut accepter les valeurs de Θ égales et la résolution de n équations nous donne les valeurs approchées de coefficients différentiels $f^{(1)}(x_i)$ jusqu'a $f^{(n-1)}(x_i)$ et de $\Theta f^{(n)}(x_i)$.

Pour constater, lesquels de ces résultats sont déterminés avec une exactitude suffisante pour notre but, on abrège les formules (3) en les obtenant en forme (4).

De cette manière nous pouvons calculer les valeurs de tous les $\Theta^{(n-1)}$ et, par des abréviations analogues, aussi les valeurs de $\Theta^{(n-2)}$, $\Theta^{(n-3)}$..... $\Theta^{(2)}$.

Si les valeurs de $\Theta^{(2)}$ jusqu'à $\Theta^{(k)}$ sont comprises entre 0 et 1, les Θ de chaque ordre ne diffèrent pas beaucoup entre eux, ou se montrent d'une manière systématique, on doit les accepter suffisamment rapprochées de leurs valeurs vraies, et en conséquence la précision des valeurs de coefficients différentiels $f^{(1)}(x_i)$ jusqu'à $f^{(k)}(x_i)$ est aussi suffisante pour le controle de $\varphi^{(1)}(x_i)$, $\varphi^{(2)}(x_i)$,..... .....$\varphi^{(k)}(x_i)$, (tandis que $f^{(k+1)}(x_i)$, $f^{(k+2)}(x_i)$...., liés avec des Θ qui se présenteraient autrement sont à rejeter).

Si les dites conditions n'ont pas lieu la méthode fait défaut.

Un dernier controle des valeurs obtenues nous donne la formule (5).

Pour mieux relever l'influence de Θ qui satisfont les conditions présentées ci-dessus, on a donné un exemple; on y voit bien, que les valeurs de coefficients différentiels $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$, sont bien rapprochées de leurs valeurs vraies, tandis que les valeurs de $f^{(4)}(x)$ sont inexactes.

Les formules (6) et (7) se rapportent aux fonctions avec plusieurs variables indépendantes. En cas de deux variables la formule (7) prend la forme (7 *a*).

* * *

En cas d'une assez grande dispersion des valeurs $f(x)$, on partage les valeurs x par intervalles Δx (qui doivent être arbitrairement petits), en formant dans chaque colonne — construite de cette manière — les valeurs moyennes X et $Y=f(X)$ (voir la formule (8)). Supposant le nombre des intervalles $n+1$ nous aurons n équations en forme (11) qui remplaceront n équations (3).

A cause des écarts λ dans les équations (11) et de différents poids q qui leur répondent (voir la formule (12)), il faut appliquer la méthode des moindres carrés et c'est pourquoi le nombre des inconnues k doit être $n-1$ au maximum. La résolution des équations de condition nous donne les valeurs des dérivées.

Le reste du calcul se montre comme au cas précédant.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

S. 61

S - 96

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Biblioteka Politechniki Krakowskiej
II-347810
Kdn. 524. 13. IX. 54

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000297724

Z

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
II-347810

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000297724