PROF. DR. KAZIMIERZ BARTEL

WSTĘP

DO

WYKŁADÓW GEOMETRYI WYKREŚLNEJ.

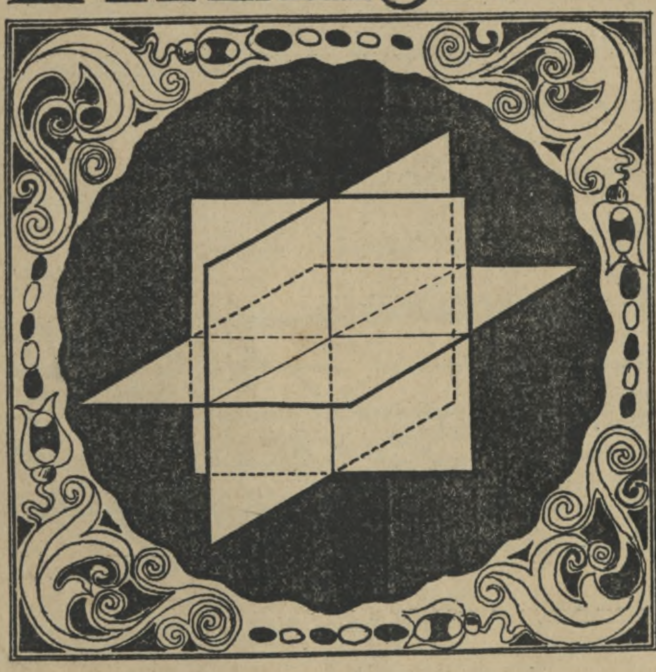
LWÓW, 1913.

Nakładem „Koła mechaników" słuchaczów Politechniki.

Kazimierz Ostrowski

PROF. DR. KAZIMIERZ BARTEL

WSTĘP DO WYKŁADÓW GEOMETRYI WYKREŚLNEJ



LWÓW 1913.
NAKŁADEM »KOŁA MECHANIKOW« SŁU-
CHACZOW POLITECHNIKI.

Rysunki w tekście i winietę tytułową wykonał p. Stanisław Sarna, asystent Politechniki.- Korektę tekstu i rysunków przeprowadził p. Antoni Plamitzer, asystent Politechniki. Odbito w Zakładzie litograficznym Ł. Przysłaka we Lwowie.-

Licząc się z faktem, że wiadomości z geometryi wykreślnej u wstępującej do Szkoły politechnicznej młodzieży nie są jednolite, że absolwenci szkół gimnazyalnych nie mieli sposobności nabrać dostatecznej w geometryi wykreślnej biegłości, poświęcam kilka pierwszych godzin ćwiczeń repetytoryum elementów klasycznej geometryi wykreślnej.

Ilość godzin, które mogę oddać temu repetytoryum jest bardzo nie wielka – z chwilą kiedy nagromadzony na właściwym wykładzie geometryi wykreślnej materyał, może być przedmiotem ćwiczeń – repetytoryum ustępuje tym ćwiczeniom miejsca.

Idąc za życzeniem słuchaczów spisałem wyłożony w bieżącym roku na ćwiczeniach geometryi wykreślnej A materyał, a uzupełniwszy go nieco oddaję do użytku jako „wstęp do wykładów geometryi wykreślnej".

Gruntowne posiadanie wiadomości zawartych we „wstępie" uważam za konieczne do rozumienia moich wykładów geometryi wykreślnej i należytego z nich korzystania. Owo gruntowne posiadanie nie ma polegać bynajmniej na pamięciowem opanowaniu strony teoretycznej czy nawet rysunkowej wyłożonych wiadomości - lecz na zdobyciu oryentacyi w przestrzeni w granicach badanego materyału.

Znajomość geometryi wykreślnej polega bowiem na widzeniu przedmiotów wyobraźni, przy równoczesnej umiejętności rysunkowego przedstawienia tych wyobrażeń.

Jak każda umiejętność matematyczna, jest geometrya wykreślna budową wymagającą dobrych i trwałych fundamentów. Za takie uważam - uwzględniając względy dydaktyczne - klasyczną metodę Monge'a, której dopiero gruntowne posiadanie otwiera wstęp do dalszego studyum podstawowej umiejętności inżynierskiej - jaką jest geometrya wykreślna. -

— . —

„Wstęp do wykładów geometryi wykreślnej" wychodzi jako autograf, nakładem i na dochód, Koła mechaników słuchaczów Politechniki:

Lwów, w maju 1913.

Kazimierz Bartel.

Spis rzeczy.

Rozdział I.

Wyznaczenie położeń punktu, prostej i płaszczyzny.

Rozdział II

strona.

Wzajemne położenia punktu, prostej i płaszczyzny.

Rozdział III.

Proste i płaszczyzny wzajemnie prostopadłe.

Rozdział IV.

Obroty i kłady.

Rozdział V.

Wielościany.-

Rozdział VI.

Wyznaczenie dachów.

Rozdział I.

Wyznaczenie położeń punktu, prostej i płaszczyzny.

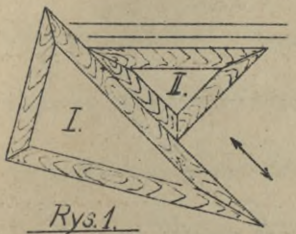
1. O rysunku geometrycznym i jego wykonaniu. Znajomość geometryi wykreślnej łączy się ściśle ze znajomością rysunku geometrycznego, który jest graficznym wyrazem geometrycznych koncepcyj.

Rysunek jest celem geometryi wykreślnej, zatem winien być dokładny, przejrzysty i najstaranniej wykonany.

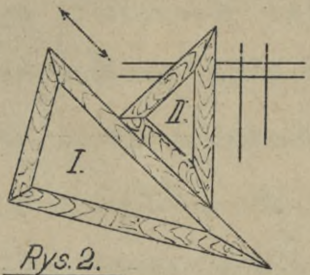
Rysunkowi geometrycznemu od najprostszych zadań począwszy, poświęcona być winna szczególna uwaga i stała dążność opanowania jego techniki. Dokładność rysunku osiągniemy dobrymi przyrządami i zawsze ostrym, dostatecznie twardym ołówkiem.

Jeśli wykonujemy rysunki małe i na małych kartkach, to dwa trójkąty i cyrkiel są wystarczającymi przyrządami. W handlu spotykamy się z dwojakiego rodzaju trójkątami, wykonanemi z drzewa, masy papierowej, celuloidy i. t. d. a mianowicie z trójkątami prostokątnymi równoramiennymi i z trójkątami prostokątnymi, których dalsze kąty wynoszą po 60° i 30°.

Przy pomocy dwóch trójkątów możemy kreślić proste równoległe i prostopadłe do nich - a więc te, które najczęściej w konstrukcyi występują.



Rys. 1.



Rys. 2.

Jeżeli n. p. jak to widzimy na Rys. 1 trójkąt I przytrzymamy lewą ręką, zaś trójkątem II opartym o trójkąt I poruszać będziemy drugą ręką w kierunkach strzałkami oznaczonych - to proste, przeciwprostokątną trójkąta II oznaczone, będą równoległe. Przez obrót trójkąta II (Rys. 2), przy zachowaniu położenia trójkąta I uzyskujemy możność kreślenia prostych do poprzednich prostopadłych.

Gdy rysunek wymaga większego arkusza papieru, do przyrządów wymienionych przybywa <u>deska rysunkowa i kierownica.</u> Przez poruszanie kierownicą, której głowa posuwa się zawsze po lewej krawędzi deski rysujemy proste równoległe - użycie trójkąta umożliwia kreślenie prostych prostopadłych do poprzednich.

Wielkie ułatwienie w uzyskaniu rysunku <u>przej-</u>

czystego przynosi konsekwentne i zawsze celowe stosowanie linij odpowiednich grubości.

Jeżeli rysunek przedstawia konstrukcyjne rozwiązanie pewnego zadania, to są w tem zadaniu pewne linie dane, są linie, których użyliśmy aby dojść do wyniku czyli t. zw. linie konstrukcyjne i wreszcie linie czy też punkty wynikowe. Linie dane wykreślamy zawsze jako pełne, średniej grubości – linie konstrukcyjne wykreślamy możliwie najcieniej pełne, punktowane, kreskowane, punkt i kropka, i dwa punkty i kreska. Linie wynikowe wyróżniają się podwójną grubością od linij danych. Punkty rysujemy zwykle jako kółka o bardzo małej średnicy – punkty wynikowe oznaczamy dwoma kółeczkami współśrodkowemi.

Ale najkonsekwentniej pod względem stosowania linij wykonany rysunek geometryczny nie byłby jeszcze zupełny, gdyby punkta i proste i.t.p. nie były oznaczone, gdyby rysunek nie był „opisany". Staranne opisanie rysunku, należy do najważniejszych zadań rysownika; dopiero opisanie rysunku czyni go czytelnym.

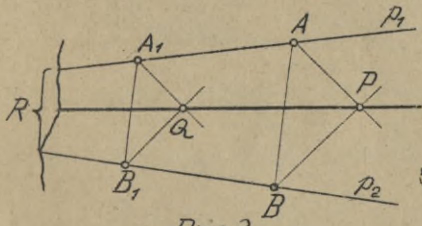
Punkty opisujemy dużemi literami, względnie liczbami arabskiemi lub rzymskiemi.

Proste oznaczamy zawsze małemi literami alfabetu łacińskiego, płaszczyzny małemi literami alfabetu greckiego.

2. <u>Konstrukcye planimetryczne uwzględniające ograniczoną płaszczyznę rysunku.</u> Przy rozwiązywaniu zadań geometrycznych bardzo często liczyć się musimy z tym faktem, że konstrukcya w całości nie zmieści się na płaszczyźnie papieru czy tablicy. W tych wypadkach posługujemy się konstrukcyami, których trzy najważniejsze poznamy.[1]

<u>Zadanie 1.</u> <u>Połączyć punkt P z niedostępnym punktem przecięcia się R prostych p_1 i p_2.</u> (Rys 3.)

a.) Z punktu P prowadzimy dwie dowolne proste PA i PB. Do prostej AB kreślimy w dowolnem miejscu równoległą A_1B_1 a następnie z punktu A_1 równoległą do AP, a z punktu B_1 równoległą do BP. Punkt przecięcia się Q tych prostych jest drugim punktem prostej PR, gdyż punkt R jest środkiem podobieństwa trójkątów ABP i A_1B_1Q.

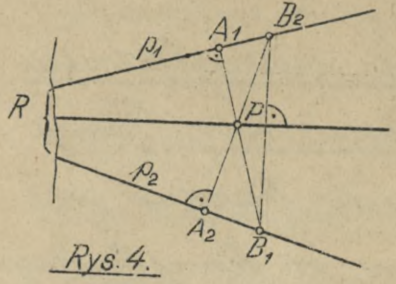


Rys. 3.

b.) Z punktu P (Rys. 4.) kreślimy prostopadłe

1.) Zestawienie tego rodzaju zadań ogłosił wraz z innemi datami bibliograficznemi P. Zühlke p. t. „Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lagerverhältnissen. Teubner 1906.

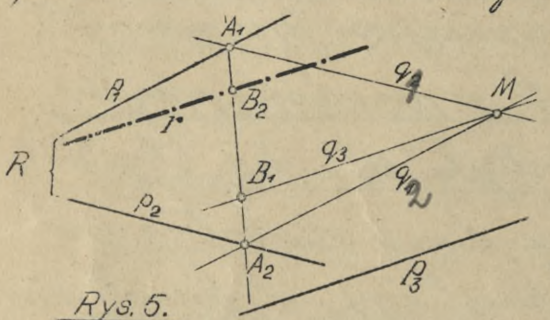
$A_1B_1 \perp p_1$ i $A_2B_2 \perp p_2$; prosta wykreślona z punktu P prostopadle do B_1B_2 przechodzi przez punkt



Rys. 4.

przecięcia się R prostych p_1 i p_2, gdyż proste A_1B_1, A_2B_2 a więc także i prosta PR są wysokościami trójkąta RB_1B_2.

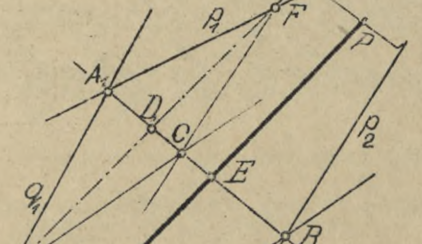
Zadanie 2. Przez niedostępny punkt przecięcia się R dwóch prostych p_1 i p_2... poprowadzić równoległą do trzeciej prostej p_3. - Rys. 5.



Rys. 5.

Kreślimy dowolną prostą A_1A_2 przez punkt A_1 prostą $q_1 \parallel p_2$, przez A_2 – $q_2 \parallel p_1$. Przez punkt przecięcia się M prostych q_1 i q_2 kreślimy prostą q_3 równoległą do p_3, która przetnie prostą A_1A_2 w punkcie B_1. Odcinamy $A_1B_1 = A_2B_2$ - to punkt B_2 jest punktem szukanej prostej r.

Zadanie 3. Wyznaczyć prostą przechodzącą przez dwa niedostępne punkty P i Q. -(Rys. 6.)- Z dowolnego



Rys. 6.

punktu C prostej AB kreślimy proste $l_1 \parallel q_1$ i $l_2 \parallel p_1$. Prosta AG jest równoległa do prostej szukanej, której jeden punkt, a mianowicie E znajdziemy na podstawie proporcyi: AE : AD = AB : AC. Jeżeli punkt C jest środkiem odcinka

AB- to wówczas wystarczy odciąć AD = DE, aby wyznaczyć punkt E.

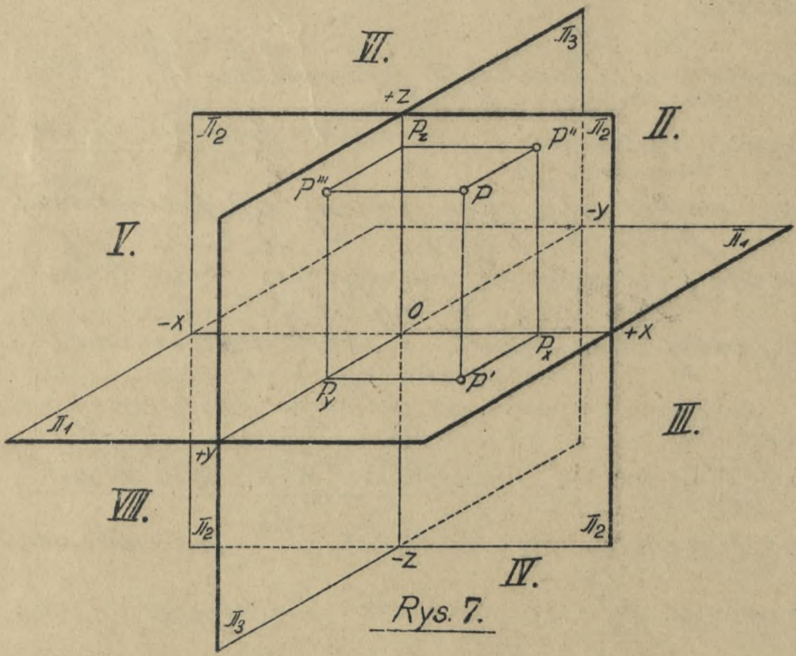
3. Rzuty punktów. Ażeby określić i ustalić położenie dowolnego punktu w przestrzeni posługuje się metodą rzutów prostokątnych trzema wzajemnie do siebie prostopadłemi płaszczyznami, które nazywać będziemy płaszczyznami rzutów. Zwykle jedną płaszczyzną rzutów jest płaszczyzna pozioma π_1, drugą pionowa π_2, a trzecią, prostopadła do obu płaszczyzna boczna π_3, także krzyżową zwana.

Proste poprowadzone z danego punktu P, prostopadle do płaszczyzn rzutów, zwane promieniami rzutów przebijają owe płaszczyzny w punktach, które są rzutami prostokątnemi danego punktu na przyjęte płaszczyzny rzutów. W szczególności punkt przebicia się promienia rzutu z płaszczyzną poziomą nazywać będziemy rzutem poziomym danego punktu i oznaczymy literą P', przebicie się promienia rzutów z płaszczyzną pionową daje rzut pionowy P'' punktu P, a ślad promienia rzutu na płaszczyźnie bocznej jest rzutem bocznym P''' danego punktu.

Płaszczyzny rzutów podzielą przestrzeń na ośm części, a wzajemnie przetną się podług trzech prostych, zwanych osiami układu, trzech wzajemnie do siebie prostopadłych. Prostą przecięcia się płaszczyzn: poziomej i pionowej płaszczyzn. oznaczymy literą x, prostą przecięcia się płaszczyzn π_1 i π_3 oznaczymy literą y, a wreszcie przecięcie się płaszczyzn π_2 i π_3 daje oś z naszego układu (Rys. 7).

Punkt przecięcia się trzech osi układu nazywać będziemy jego <u>początkiem</u> i oznaczymy literą O.

Odległość punktu od <u>płaszczyzny</u> poziomej rzutów równą odcinkowi PP' nazwiemy jego „wysokością”, odległość od płaszczyzny pionowej wyrażona odcinkiem PP'' „głębokością”, zaś odległość punktu od płaszczyzny bocznej mierzona odcinkiem PP''' wyraża t. zw. „szerokość” punktu P.



Rys. 7.

Ażeby módz określić część przestrzeni „ósemkę”, w której punkt nasz się znajduje zachodzi potrzeba względnego oznaczenia „wysokości”, „głębokości” i „szerokości” punktu. Przyjmujemy więc, że „wysokość” wszystkich punktów leżących nad płaszczyzną poziomą jest dodatna, punktów leżących w części $\overline{III}$, $\overline{IV}$, $\overline{VII}$ i $\overline{VIII}$ ujemna. „Głębokość" punktów znajdujących się przed płaszczyzną pionową, a więc w części $\overline{I}$, $\overline{IV}$, $\overline{V}$ i $\overline{VIII}$ dodatna, w innych częściach ujemna; „szerokość" wreszcie punktów w ósemkach $\overline{I}$, $\overline{II}$, $\overline{III}$ i $\overline{IV}$ oznaczamy jako dodatną, w częściach $\overline{V}$, $\overline{VI}$, $\overline{VII}$ i $\overline{VIII}$ jako ujemną. Przez uwzględnienie zatem znaków przy odległościach punktu od płaszczyzn rzutów, wyznaczamy położenie tego punktu w odpowiedniej części przestrzeni.

Przyjmijmy punkt dowolny P, w części n. p. pierwszej przestrzeni i oznaczmy rzuty P', P'', P''' tego punktu. (Rys. 7.) Płaszczyzna poprowadzona przez proste PP' i PP'' przetnie oś x w punkcie P_x, płaszczyznę poziomą π_1 w prostej $P'P_x$ prostopadłej do osi x ów, zaś płaszczyznę π_2 w prostej $P''P_x$ prostopadłej do tejże osi x. Analogicznie płaszczyzna przechodząca przez proste PP' i PP''' przetnie oś y w punkcie P_y, płaszczyznę π_1 podług prostej $P'P_y$ prostopadłej do y, a płaszczyznę π_3 w prostej $P'''P_y$ prostopadłej do y. W końcu płaszczyzna przechodząca przez proste PP'' i PP''' przecina oś z w punkcie P_z, płaszczyznę π_2 w prostej $P''P_z$ — a płaszczyznę π_3 w prostej $P'''P_z$. Wszystkie te płaszczyzny wraz z płaszczyznami układu tworzą równo-

-ległościan prosty. Krawędzie tego równoległościanu czwórkami są równoległe i równe. W szczególności: $PP''' \# P_zP'' \# P_yP' \# OP_x$; $PP'' \# P'P_x \# P'''P_z \# OP_y$; $PP' \# P''P_x \# P'''P_y \# OP_z$. – Krawędzie OP_x, OP_y, OP_z, leżące na osiach układu nazywamy spółrzędnemi punktu P i oznaczamy literami x, y, z. Widzimy więc, że „wysokość" punktu P równa jest odległości rzutu pionowego tego punktu od osi x, równa odległości rzutu bocznego tego punktu od osi y, równa wreszcie spółrzędnej „z" tego punktu. Z rys. 7. czytamy dalej, że „głębokość" punktu P równa jest odległości jego rzutu poziomego od osi x, równa odległości jego rzutu bocznego od osi z i równa jego spółrzędnej „y". Podobnie „szerokość" punktu, jako długość odcinka PP''' zastąpić się da, odległością rzutu pionowego od osi z, albo odległością rzutu poziomego od osi y, lub wreszcie spółrzędną „x" tego punktu.

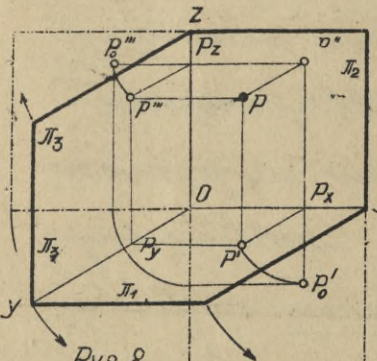
W ten sposób każdemu punktowi w przestrzeni odpowiadają trzy spółrzędne, wyrażające zarówno wysokość, głębokość i szerokość tego punktu jak i część przestrzeni, w której punkt ten się znajduje.

W poszczególnych ośmiu częściach spółrzędne punktów mają następujące znaki:

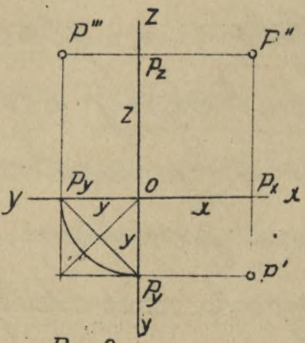
I	$+x, +y, +z$	V	$-x\ +y\ +z$
II	$+x, -y\ +z$	VI	$-x\ -y\ +z$
III	$+x\ -y\ -z$	VII	$-x\ -y\ -z$
IV	$+x\ +y\ -z$	VIII	$-x\ +y\ -z$

4. Sprowadzenie płaszczyzn rzutów do jednej płaszczyzny. Dotychczasowe rozważania nasze odnoszą się do oznaczenia położenia punktu w przestrzeni. Możemy uczynić to w trojaki sposób: przez wyznaczenie, narysowanie rzutów punktu na płaszczyznach π_1, π_2 i π_3, albo przez wymierzenie wysokości, głębokości i szerokości punktu, względnie poznanie jego spółrzędnych. Graficzny sposób oznaczenia położenia punktu w przestrzeni za pomocą jego rzutów pozwala na poznanie spółrzędnych tego punktu, podobnie jak analityczną metodą oznaczony punkt w przestrzeni dozwala na graficzne jego przedstawienie, umożliwia znalezienie rzutów a także i samego punktu.

Zauważmy, że rozporządzać możemy – gdy chodzi o rysunek – jedną tylko płaszczyzną, a nią jest płaszczyzna rysunku. Postąpimy więc w ten sposób, że zachowując płaszczyznę pionową rzutów nieruchomą i utożsamioną z płaszczyzną rysunku, obrócimy płaszczyznę poziomą około osi x w kierunku wskazanym strzałką tak, aż padnie na płaszczyznę rysunku, podobnie postąpimy z płaszczyzną boczną rzutów (Rys. 8). Wraz z płaszczyzną poziomą sprowadzimy do płaszczyzny rysunku rzut poziomy P' punktu, przyczem pozostanie $P''P_x = OP_z = z$ i $P'_0P_x = P'P_x = OP_y = y$. Rzut boczny punktu P''' po obrocie płaszczyzny bocznej zajmie położenie punktu P_0''', przyczem $P_0'''P_z = P'''P_z = OP_y = y$. Ażeby ustalić kwestyę osi y, która jako przecięcie się płaszczyzn π_1 i π_3 po sprowadzeniu tych płaszczyzn do płaszczyzny rysunku, „rozdziela się" zauważmy,



Rys. 8

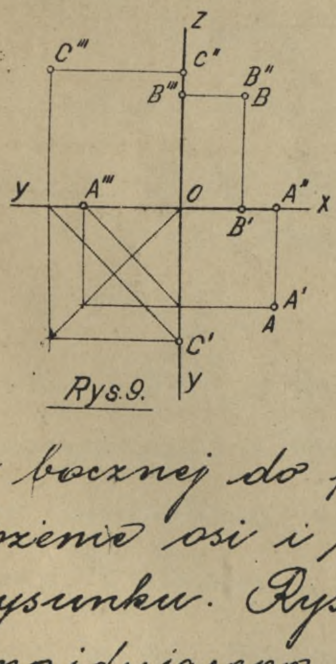


Rys. 8a.

że każda z płaszczyzn rzutów ograniczona jest w obrębie każdej ósemki przestrzeni dwiema osiami, a mianowicie płaszczyzna pozioma ograniczona jest osiami x i y, pionowa osiami x i z, boczna y i z. Zachowując to ograniczenie płaszczyzn rzutów dla każdej części przestrzeni, także i po sprowadzeniu ich do jednej płaszczyzny rysunku, sprawę osi y mamy ustaloną.

Obraz punktu znajdującego się w I-ej części przestrzeni wyrażony metodą rzutów prostokątnych, po sprowadzeniu płaszczyzn rzutów do płaszczyzny pionowej, która jest równocześnie płaszczyzną rysunku, podaje Rys. 8a. Spółrzędną y danego punktu, odmierzoną na osi y jako ograniczającej płaszczyznę poziomą części I-ej przenosimy na oś y przynależną do płaszczyzny bocznej bądź łukiem koła, bądź też dogodniej nawet, przy pomocy dwusiecznej kąta y y. [P' w Rys. 8a równoznaczne jest z P_0' w Rys. 8].

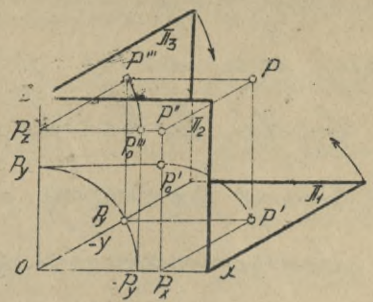
Gdy punkt leży na którejkolwiek z płaszczyzn rzutów lub osi układu, to odpowiednia spółrzędna przyjmuje wartość równą zeru - a w tym wypadku prócz „obrazu" punktu, prócz jego rzutów możemy oznaczyć położenie samego punktu. W rys. 9 punkt A leży na płaszczyźnie poziomej, B na płaszczyźnie pionowej, C na płaszczyźnie bocznej.



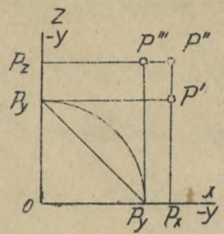
Rys. 9.

5. Punkty w rozmaitych częściach przestrzeni.

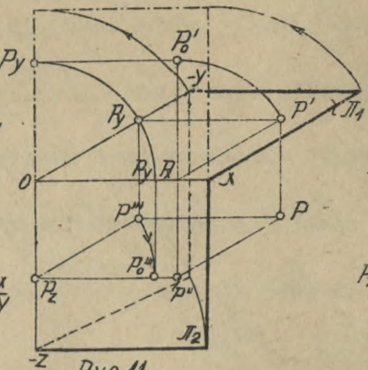
Z przyjętych kierunków obrotów przy sprowadzaniu płaszczyzn: poziomej i bocznej do płaszczyzny rysunku, wynika położenie osi i rzutów punktów na płaszczyźnie rysunku. Rys. 8a przedstawia rzuty punktu znajdującego się w części I-ej przestrzeni. Rys 11) daje wyobrażenie o rzutach punktu w „ósemce" drugiej, Rys. 10 a jest obrazem tego punktu w rzutach prostokątnych. Fig 11 i 11.a, 12 i 12 a, 13 i 13 a,



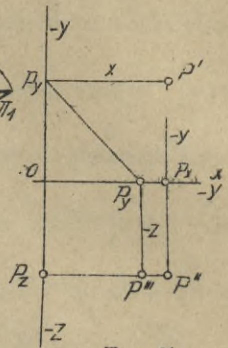
Rys.10.



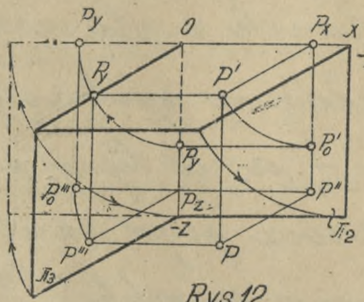
Rys.10a.



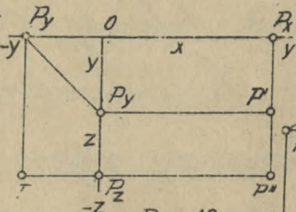
Rys.11.



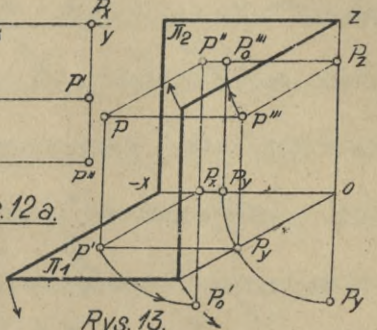
Rys.11a.



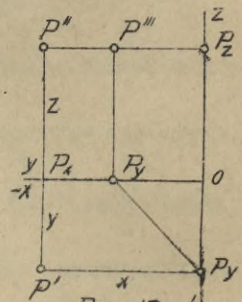
Rys.12.



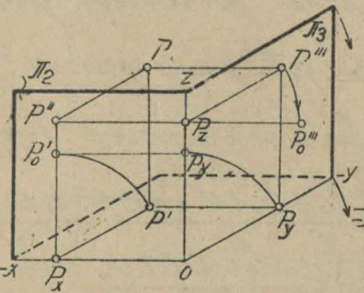
Rys.12a.



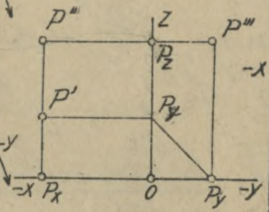
Rys.13.



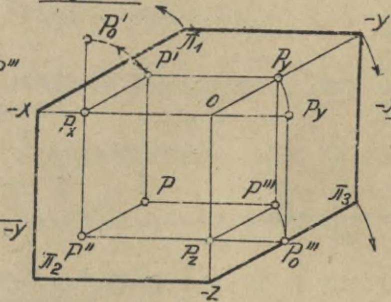
Rys.13a.



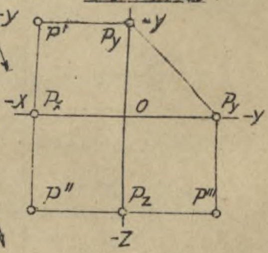
Rys.14.



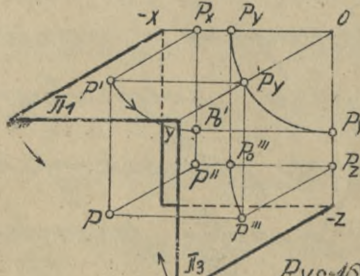
Rys.14a.



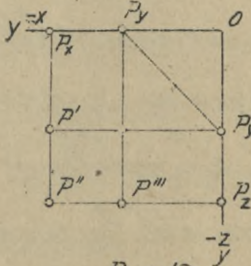
Rys.15.



Rys.15a.



Rys.16.

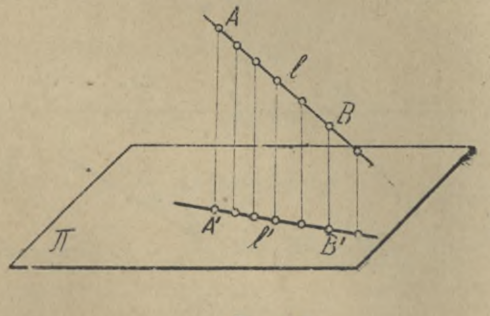


Rys.16a.

14 i 14a, 15 i 15a 16 i 16a pouczają nas o położeniu rzutów punktu P znajdującego się w częściach III, IV, V, VII i VIII przestrzeni.

6. Rzuty prostej. Przez rzut prostokątny prostej rozumiemy miejsce geometryczne rzutów

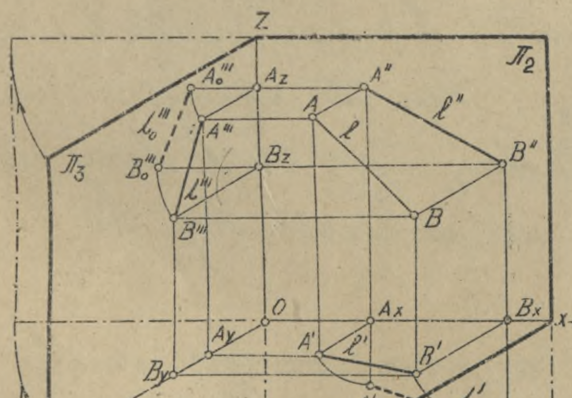
prostokątnych wszystkich punktów tej prostej. Ponieważ płaszczyzna przechodząca przez daną prostą prostopadle do płaszczyzny rzutów t. zw. płaszczyzna rzucająca zawiera w sobie promienie rzucające wszystkich punktów tej prostej - a przecięcie się jej z płaszczyzną rzutów jest linią prostą - więc rzut prostej jest prostą. (Rys. 17).



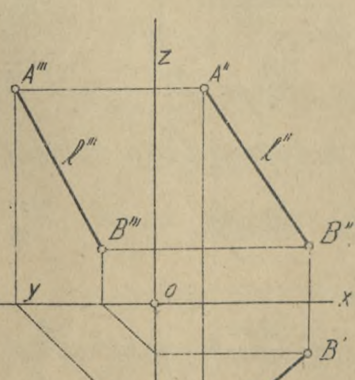
Rys.17.

Prostą wyznaczają dwa jej punkty; znajomość spółrzędnych dwóch punktów prostej określa położenie tej prostej w przestrzeni i dozwala na graficzne wyrażenie tego położenia zapomocą rzutów.

Rys. 18 uzmysławia prostą $\overline{AB}$ i jej rzuty na trzy płaszczyzny, Rys. 18a jest geometrycznym obrazem odcinka $\overline{AB}$ przedstawionym w rzutach prostokątnych.

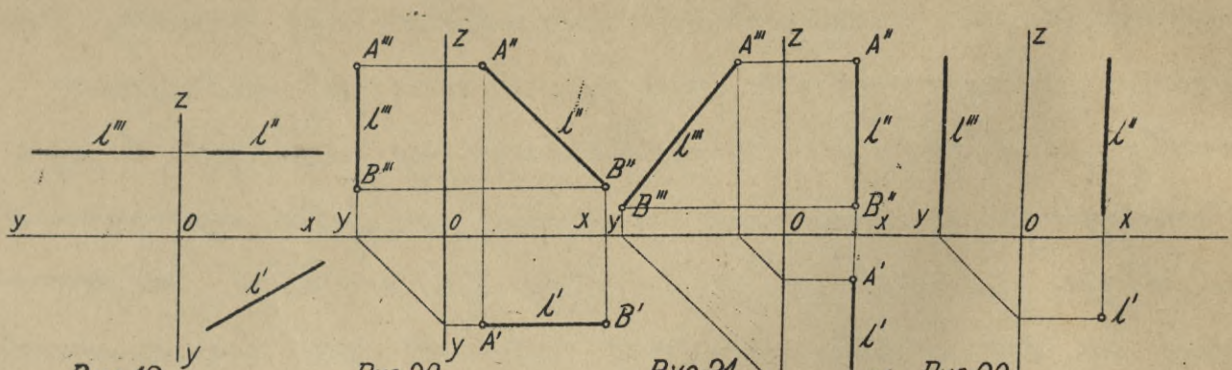


Rys.18.

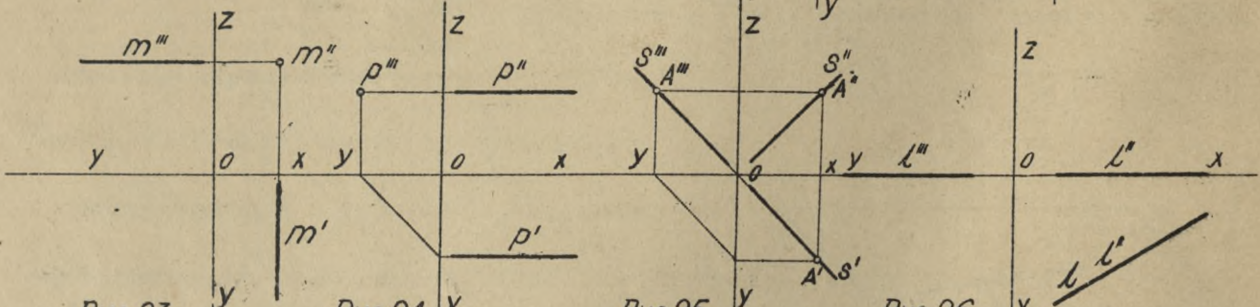


Rys. 18a.

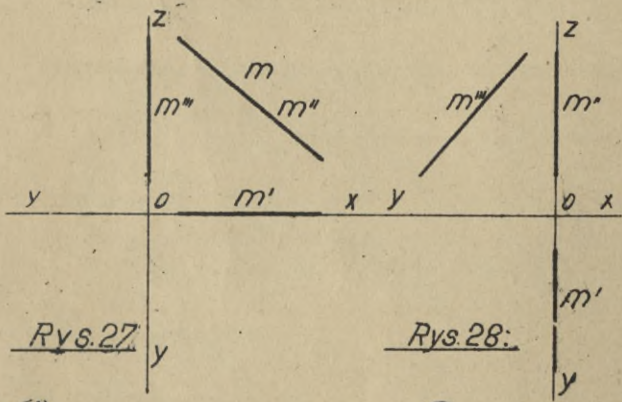
7. Rozmaite położenia prostej względem



Rys.19. Rys.20. Rys.21. Rys.22.



Rys. 23 Rys.24. Rys.25. Rys.26.



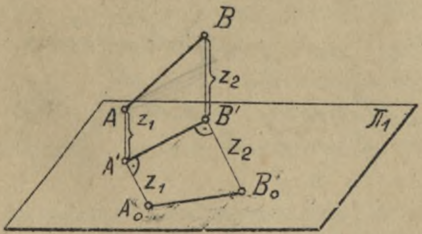
Rys.27 Rys.28:

płaszczyzn rzutów podają figury od 19 do 28 włącznie a mianowicie: Rys.19 $l \parallel \pi_1$; Rys. 20 $l \parallel \pi_2$; Rys. 21 $l \parallel \pi_3$; Rys. 22 $l \perp \pi_1$; Rys. 23 $m \perp \pi_2$; Rys. 24 $p \perp \pi_3$; Rys. 25 prosta s przechodzi przez początek układu; Rys. 26 l leży na π_1 ; Rys. 27 m leży na π_2, a wreszcie Rys. 28 m leży na π_3.

Z dwóch rzutów prostej, a mianowicie rzutu poziomego i pionowego wyznaczymy rzut boczny, wyznaczając rzuty boczne dwóch punktów prostej, w pewnych położeniach wystarczy wyznaczenie jednego punktu, gdy mianowicie kierunek rzutu bocznego prostej odczytać się da z dwóch rzutów znanych.

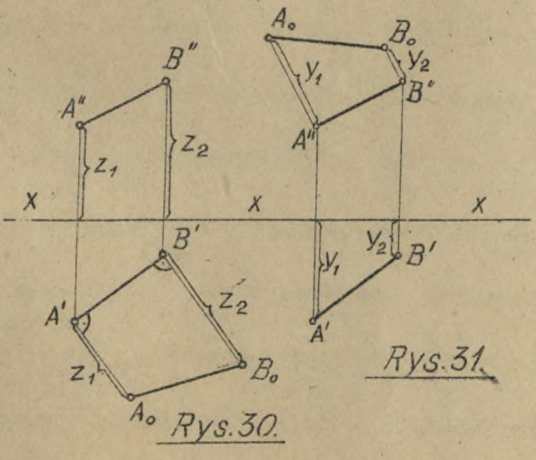
W wypadku przedstawionym Rys. 21 t. j. gdy prosta jest równoległą do π_3 rzuty: poziomy i pionowy, położenia prostej nie wyznaczają. Wyobraźmy bowiem sobie, że przez prostą m przechodzi płaszczyzna prostopadła do osi x – to rzuty poziome i pionowe wszystkich na płaszczyźnie tej znajdujących się prostych schodzą się z rzutami m' i m'' prostej m wskutek czego położenie prostej m wyznaczone nie jest. Ażeby położenie prostej równoległej do π_3 jednoznacznie określić musimy albo: 1.) oznaczyć położenie dwóch punktów tej prostej, albo znać rzut boczny.

8. Kład odcinka.



Rys. 29.

Rzut $A'B'$ odcinka $\overline{AB}$ (Rys. 29) nierównoległego do płaszczyzny rzutów jest mniejszy aniżeli odcinek. – Rzeczywistą wielkość odcinka otrzymamy kładąc trapez $ABA'B'$ na płaszczyznę rzutów nie zmieniając przytem położenia boku $\overline{A'B'}$. Boki równole-



Rys. 30.

Rys. 31.

gle AA' i BB' trapezu są prostopadłe do boku $A'B'$ — a ponieważ ich długości równe są wysokościom A i B — więc trapez $A'B'A_0B_0$ jest wyznaczony. Bok A_0B_0 równy odcinkowi AB jest t. zw. kładem tego odcinka.

Rys. 30 jest kładem odcinka AB na poziomą a rys. 31 kładem tego odcinka na pionową rzutów.

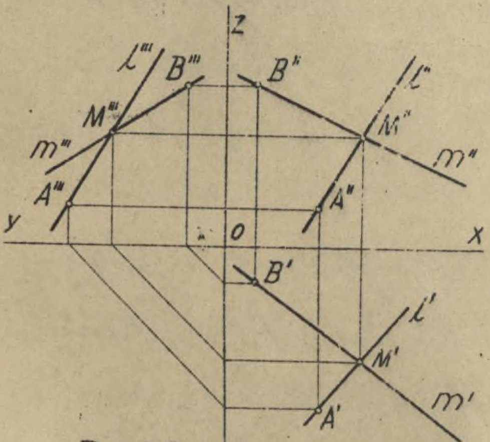
9. Dwie proste. Dwie proste zajmować mogą dwojakie względem siebie położenie: 1.) dwie proste posiadają jeden punkt wspólny i to albo w skończoności albo w odległości nieskończenie dalekiej. O pierwszych mówimy, że „przecinają się" o drugich, że są „równoległe".

2.) Dwie proste nie posiadają punktu wspólnego ani w skończoności, ani też w nieskończoności; położenie tych prostych określamy jako „skośne" lub „wichrowate".

Punktem wyjścia dla graficznego wyrażenia dwóch prostych przecinających się jest fakt, że proste te posiadają jeden punkt wspólny. Rysujemy więc jedną prostą, na niej obierzemy dowolny punkt, przez który poprowadzimy drugą prostą. Z pojęcia rzutu prostej wynika, że gdy punkt leży na prostej, to rzuty tego punktu leżeć będą na rzutach tej prostej. Na odwrót więc:

graficznym wyrazem tego, że punkt pewien leży na prostej jest położenie rzutów tego punktu na rzutach prostej.

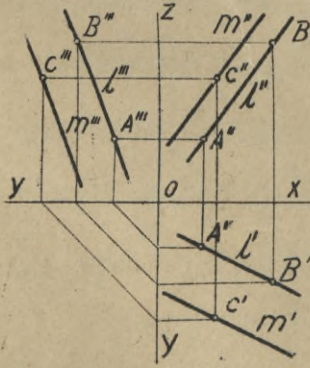
W rys. 32 obraliśmy prostą l a na niej dwa punkty A i M, które pozwoliły wyznaczyć rzut boczny tej prostej. Punkt M uważamy za punkt wspólny dwóch prostych - prowadzimy więc przez M' rzut m' przez M'' rzut pionowy m'' prostej m i w ten sposób prostą m wyznaczymy. Aby wyznaczyć rzut boczny prostej m obierzemy na niej dowolny punkt B i rzut boczny B''' tego punktu połączymy z rzutem bocznym M''' punktu M.



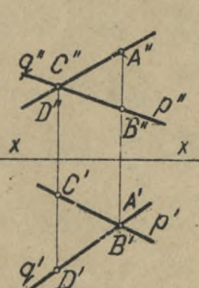
Rys. 32.

Rzuty poziome, pionowe i boczne dwóch prostych równoległych są równoległe - płaszczyzny bowiem rzucające te proste na płaszczyzny rzutów są równoległe (Rys. 33).

Dwie proste skośne nie posiadają punktu wspólnego, punkty przecięcia się rzutów poziomych p' i q' jak i przecięcia się rzutów pionowych p'' i q'' takich prostych są



Rys. 33.



Rys. 34.

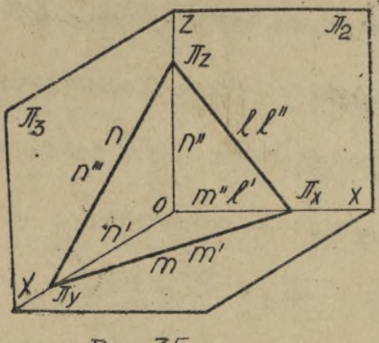
poprzecznymi punktami przecięcia się prostych p i q. (Rys. 34). W rzeczywistości punkt przecięcia się n.p. rzutów poziomych jest rzutem dwóch różnych punktów a mianowicie punktów A i B — podobnie jak w punkcie przecięcia się rzutów pionowych schodzą się rzuty pionowe dwóch punktów prostych — punktu C na prostej p i punktu D leżącego na prostej q.

Z określenia prostych przecinających się i skośnych, jak również z pojęcia rzutu punktu wynika, że gdy prosta łącząca punkt przecięcia się rzutów poziomych z punktem przecięcia się rzutów pionowych jest prostopadła do osi x — to jest to graficznem wyrażeniem tego, że proste p i q przecinają się. Gdy wspomniana prosta nie jest prostopadła do osi x — to wskazuje to na skośne położenie prostych.-

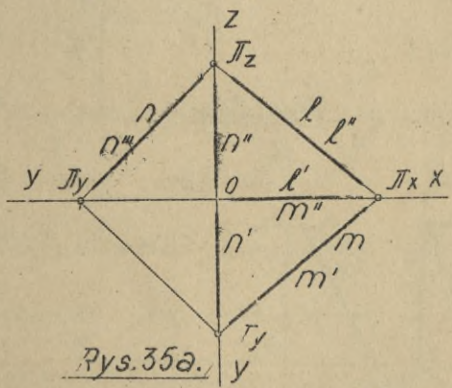
10. <u>Wyznaczenie płaszczyzny.</u> Trzy punkty nie leżące na prostej, albo dwie proste przecinające się względnie równoległe, wyznaczają dowolną ilość punktów i prostych leżących na jednej płaszczyźnie, mówimy, że trzy punkty nie leżące na prostej, albo dwie proste przecinające się lub równoległe wyznaczają płaszczyznę.

Położenie punktu, w odniesieniu do trzech płaszczyzn rzutów, wyznaczone jest <u>rzutami</u> tego punktu, położenie prostej rzutami tejże prostej – wyznaczenie płaszczyzny natomiast wymaga pośrednictwa prostych.

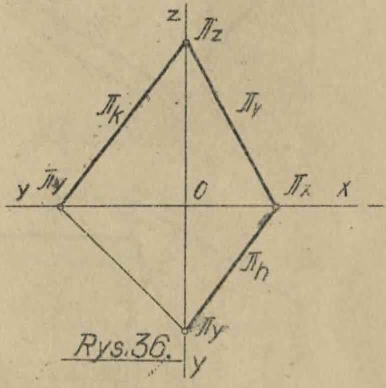
Ponieważ trzy dowolne punkty, względnie dwie proste przecinające się, wyznaczając płaszczyznę nie dozwalają na szybkie uzmysłowienie położenia płaszczyzny w odniesieniu do płaszczyzn rzutów, dlatego chętnie – o ile to możliwe – wyznaczamy płaszczyzny zapomocą dwóch prostych przecinających się, takich jednak, z których jedna leży ~~na~~ na płaszczyźnie poziomej, druga na pionowej. Proste te określają wyraźniej, aniżeli dwie proste



Rys. 35.

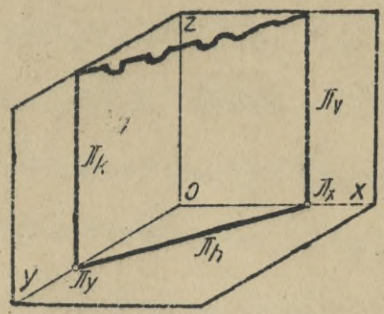


Rys. 35a.

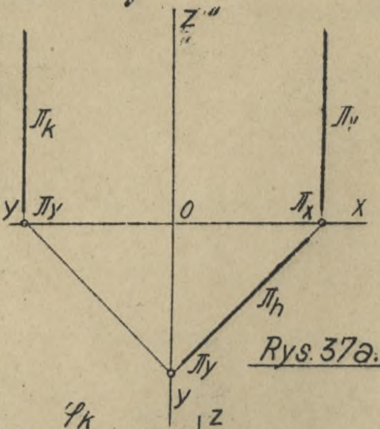


Rys. 36.

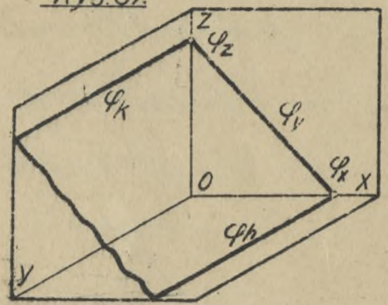
dowolnie w przestrzeni na danej płaszczyźnie leżące, położenie tej płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów, a zwą się śladami płaszczyzny dlatego, że uważać można je równocześnie za proste przecięcia się (ślady) danej płaszczyzny z płaszczyznami rzutów. Takie dwie proste l i m (Rys 35 i 35a) przecinają się w punkcie π_x na osi $\bar{o}\bar{o}$ i wyznaczają dowolną ilość prostych i punkątów płaszczyzny. Prosta n(n', n'', n''') będzie jedną z takich prostych płaszczyzny (l, m), leżącą jednak na płaszczyźnie bocznej. Prostą n uważać można za prostą przecięcia się płaszczyzny (l, m) z rzutnią boczną, czyli za ślad boczny tej płaszczyzny.



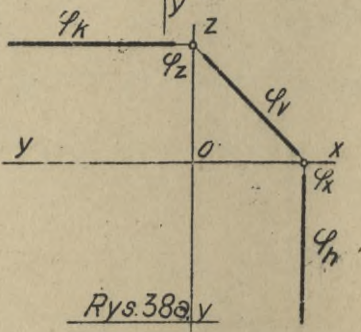
Rys.37.



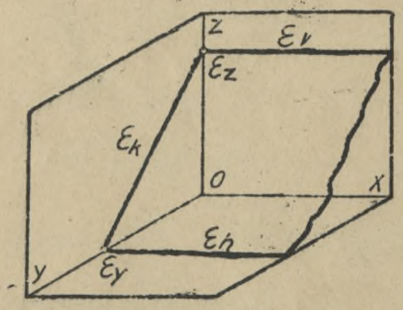
Rys.37a.



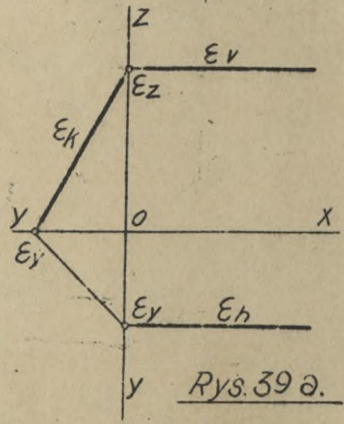
Rys.38.



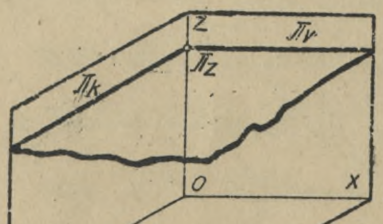
Rys.38a



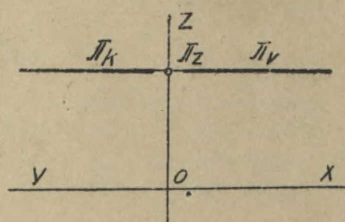
Rys.39.



Rys.39a.



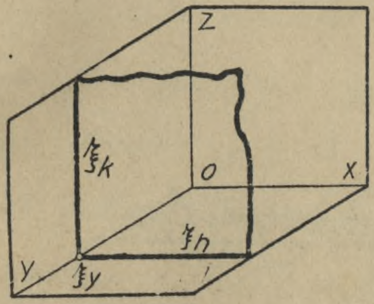
Rys.40.



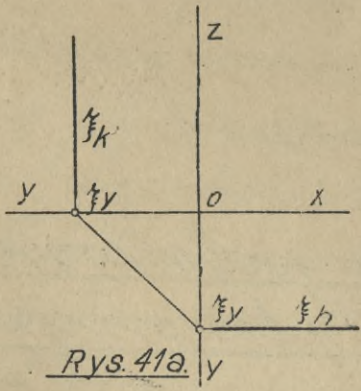
Rys.40a.

Proste wyznaczające płaszczyznę π a będące równocześnie jej śladami oznaczamy sposobem skróconym, a mianowicie: π_x, π_y, π_z (Rys 36), co oznacza kolejno ślad poziomy, pionowy i boczny płaszczyzny π.

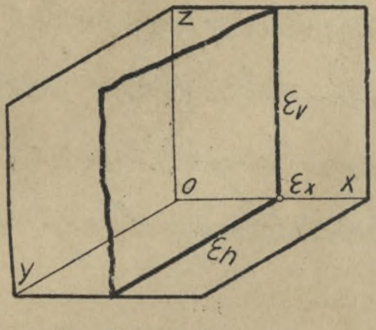
Jeżeli płaszczyzna nie jest ani prostopadłą ani równoległą do żadnej z rzutni



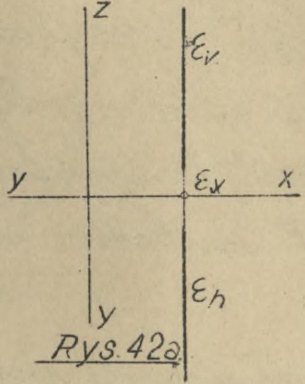
Rys. 41.



Rys. 41a.



Rys. 42.



Rys. 42a.

ani też osi układu (n.p. fig. 26) – to położenie tej płaszczyzny określamy jako dowolne, mówiąc w tem znaczeniu o „płaszczyźnie dowolnej".

Inne położenia określamy jako szczególne. Jeżeli jedna z dwóch prostych wyznaczających płaszczyznę jest prostopadłą do płaszczyzny rzutów – to i odnośna płaszczyzna jest do tejże rzutni prostopadłą i nazywa się „płaszczyzną rzucającą". Mamy tedy płaszczyznę poziomo-rzucającą, czyli prostopadłą do π_1, pionowo-rzucającą czyli prostopadłą do π_2 i krzyżowo-rzucającą t.j. prostopadłą do π_3.

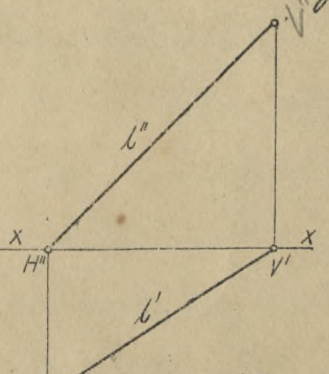
Szczególne położenia płaszczyzn wyrażają załączone rysunki a mianowicie: Rys. 37 i 37a podają obraz płaszczyzny $\perp$ do π_1, Rys. 38 i 38a podają obraz płaszczyzny $\perp$ do π_2, Rys. 39 i 39a pł. $\perp \pi_3$, Rys. 40 i 40a pł. $\parallel \pi_1$, Rys. 41 i 41a pł. $\parallel$ do π_2, wreszcie Rys. 42 i 42a podają obraz płaszczyzny równoległej do π_3

Rozdział II.

Wzajemne położenie punktu, prostej i płaszczyzny.

11. <u>Ślady prostej.</u>- Z pojęcia rzutów prostej (ustęp 6.) wynika, że gdy rzuty punktu leżą na rzutach prostej, to jest to graficznem wyrazem pewnika, że punkt rzutami wyznaczony leży na prostej.

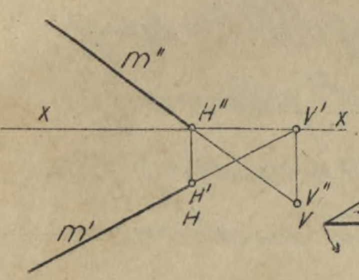
Punkt leżący na danej prostej, a równocześnie na płaszczyźnie rzutów jest punktem przebicia się tej prostej z płaszczyzną rzutów i nazywa się <u>śladem</u> prostej. Z pojęcia tego wynika wprost sposób wyznaczania śladów prostej l danej rzutami l' i l" (Rys. 43). [W dalszym ciągu naszych rozważań używać będziemy przeważnie dwóch tylko rzutów. Rzutem trzecim, który jest zawsze <u>wyznaczony</u> dwoma pierwszymi, posługiwać się będziemy w tych wypadkach, gdy dwa rzuty okażą się niedostatecznymi do rozwiązania zadania, lub użycie rzutu trzeciego rozwiązanie zadania uprości.]



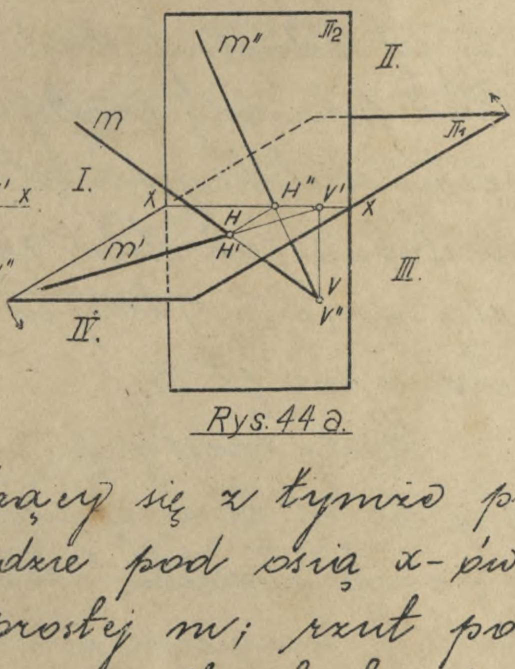
Rys. 43.

Punkt $H(H'H'')$ jest punktem leżącym na prostej l, ale punkt ten leży równocześnie na płaszczyźnie poziomej, gdyż jego rzut pionowy H'' leży na osi x-ów, czyli, że „wysokość" tego punktu równa jest zeru. Punkt H jest więc śladem poziomym prostej $l(l'l'')$. Podobnie punkt $V(V'V'')$ leżący na prostej $l(l'l'')$ jest śladem pionowym tej prostej, gdyż leży równocześnie na pł. pionowej rzutów, „głębokość" punktu V równa jest zeru.

Prosta $m(m'm'')$ (Rys. 44) przebija rzutnię poziomą w punkcie $H(H'H'')$ leżącym w I szej części. Z rys. 44a widoczne jest jednak, że prosta m przebija rzutnię pionową w części IV-tej.



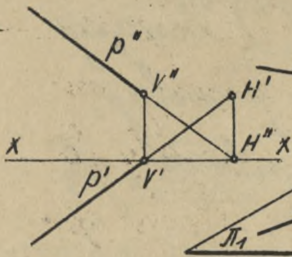
Rys. 44.



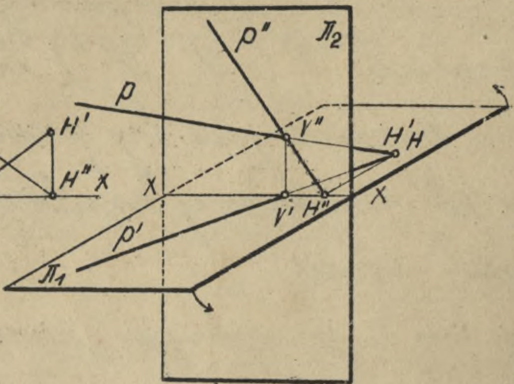
Rys. 44 a.

Rzut pionowy V'' punktu V, schodzący się z tymże punktem V, znajdować się będzie pod osią x-ów na rzucie pionowym m'' prostej m; rzut poziomy V', jak we wszystkich wypadkach leżeć musi na osi x-ów, gdyż „głębokość" punktu V jest zawsze równa zeru.-

Jeżeli więc ślad pionowy prostej leży pod osią x-ów - to jest to dowodem tego, że prosta przebija płaszczyznę pionową w części IV. Rys. 45a wyraża położenie prostej p, która płaszczyznę π_1 przebija w II części przestrzeni. Ślad poziomy po sprowadzeniu płaszczyzny π do pł. rysunku (Rys. 45) leżeć będzie nad osią x-ów.



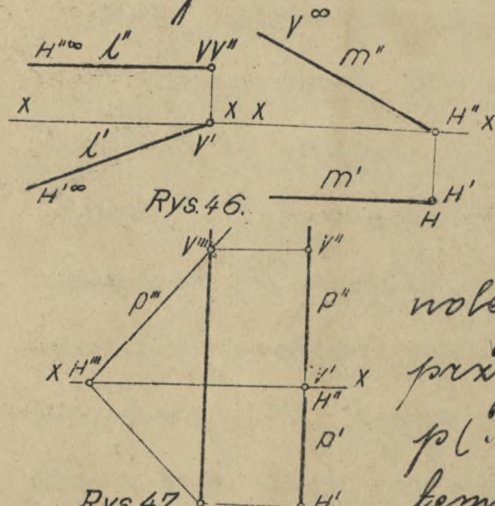
Rys. 45.



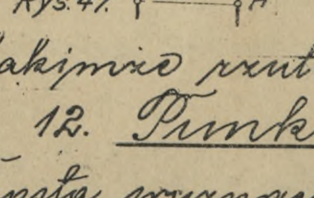
Rys. 45a.

Położenie śladu poziomego nad osią x jest wyrazem tego, że prosta przebija pł. poziomą w II-ej części.

Jeżeli prosta jest równoległą do pł. rzutów, to jej odnośny ślad leży w nieskończoności (Rys. 46). Ślad poziomy prostej l(l'l'') leży w odległości nieskończenie dalekiej na pł. poziomej, podobnie jak ślad pionowy prostej m (m'm'') leży w nieskończoności na pł. π_2.



Rys. 46.



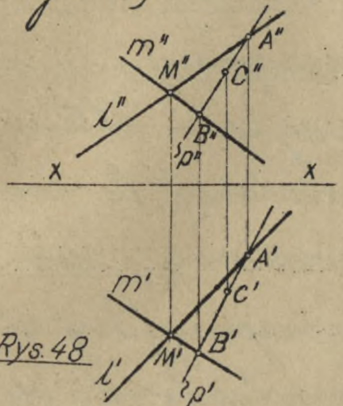
Rys. 47.

Ślady prostej p(p'p''p''') równoległej do pł. bocznej wyznaczone przy pomocy rzutu bocznego prostej p (Rys. 47), przyczem punkt V''' jest rzutem bocznym śladu pionowego, a H''' takimże rzutem śladu poziomego.

12. Punkt i prosta na płaszczyźnie.

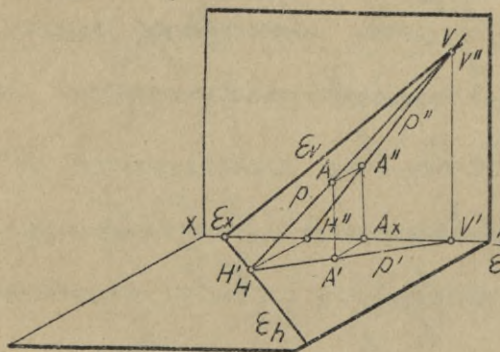
Prosta wyznaczona jest dwoma punktami (ust. 6) - gdy zatem dwa punkty prostej leżą na płaszczyźnie - to wszystkie punkty tej prostej leżą na płaszczyźnie.

Niechaj płaszczyzna ϱ wyznaczona będzie dwiema prostemi przecinającymi się $l(l', l'')$ i $m(m' m'')$ (Rys. 48) - to na płaszczyźnie tej obierzemy dowolną prostą, gdy na prostej l przyjmiemy jeden punkt $A.$ $(A' A'')$, na prostej m drugi punkt $B.$ $(B' B'')$ i punkty te połączymy. Otrzymamy tym sposobem prostą p $(p' p'')$ leżącą na płaszczyźnie ϱ.

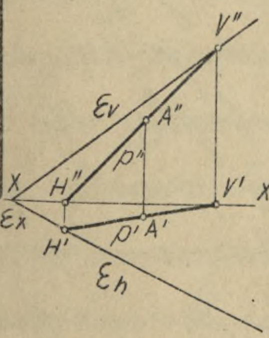


Rys. 48

W ten sam sposób obierzemy prostą na płaszczyźnie wyznaczonej za pomocą dwóch prostych przecinających się nazwanych śladami tej płaszczyzny (ust. 10). (Rys. 49). Na prostej ε_h obierzemy dowolny punkt H, na prostej ε_v dowolny punkt V i punkty te ze sobą połączymy.



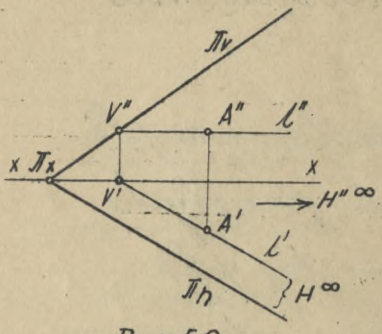
Rys. 49.



Rys. 49a.

W rzutach prostokątnych (Rys. 49a) otrzymamy rzuty p', p'' prostej p, leżącej na płaszczyźnie ε $(\varepsilon_v \varepsilon_h)$, łącząc odpowiednie rzuty punktów H i V obranych na prostych ε_h i ε_v. W szczególności rzut poziomy p' otrzymamy z połączenia punktów H' i V', zaś rzut pionowy p'' z połączenia punktów H'' i V''. Punkty H i V leżące na rzutniach i na prostej p są śladami prostej p. Zatem: <u>gdy płaszczyzna wyznaczona jest śladami - to ślady każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie, leżą na śladach tejże płaszczyzny.</u>

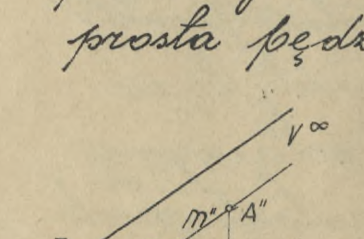
Jeżeli ślad poziomy prostej l leżącej na płaszczyźnie znajduje się w nieskończoności - to prosta będzie $\parallel$ do rzutni poziomej i zwie się <u>tworzącą</u> poziomą tej płaszczyzny (Rys. 50).



Rys. 50.

Przez ruch prostej l równolegle do jej pierwotnego położenia <u>utworzy</u> się płaszczyzna π - przyczem ślad pionowy V prostej l wykreśli ślad pionowy π_v tej płaszczyzny.

Jeżeli ślad pionowy prostej m, leżącej na płaszczyźnie π znajduje się w nieskończoności - to prosta będzie równoległą do rzutni pionowej i zwie się prostą pionowo-tworzącą - ruch bowiem prostej m stale równoległej do swego pierwotnego położenia utworzy płaszczyznę π - ślad poziomy H tej prostej wykreśli ślad poziomy π_h płaszczyzny (Rys. 51).



Rys. 51.

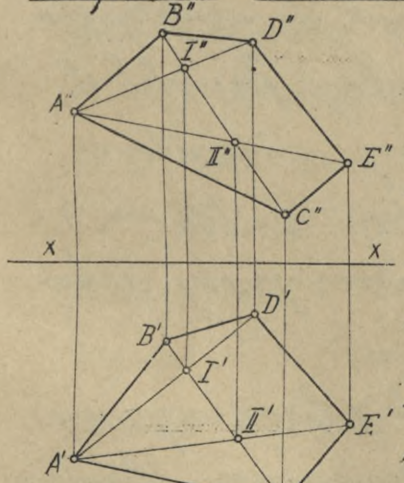
Ponieważ do graficznego wyznaczenia płaszczyzny posługujemy się prostemi - więc pośrednictwa prostych użyć należy, gdy chodzi o obranie dowolnych punktów na płaszczyźnie. Stąd mówimy: punkt leży na płaszczyźnie, gdy leży na prostej leżącej na płaszczyznie.

W rys. 48 punkt C leży na płaszczyznie wyznaczonej dwiema prostemi l i m, gdyż leży na prostej p, leżącej na tejże płaszczyznie.

W rys. 49 i 49a punkt A leży na płaszczyźnie ε $(\varepsilon_L \varepsilon_v)$, bo obraliśmy go na prostej p leżącej na tej płaszczyźnie.

Gdy chodzi o obranie dowolnego punktu na płaszczyźnie danej zapomocą śladów - to zamiast prostej dowolnej obierzemy na tej płaszczyznie prostą tworzącą (Rys. 50 i 51) a na niej punkt.

<u>Zadanie.</u> <u>Narysować pięciokąt płaski dowolnie w przestrzeni leżący.</u> (Rys. 52). Z pięciu wierzchołków żądanego wielokąta trzy n. p. A, B, C przyjąć można zawsze dowolnie - trzy bowiem punkty wyznaczają płaszczyznę. Dalsze natomiast wierzchołki D i E obrać musimy na płaszczyźnie, trzema pierwszymi wyznaczonej. Na jednym boku trójkąta n. p. BC obierzemy dwa punkty



Rys. 52.

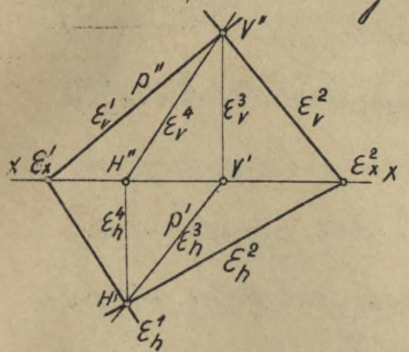
I, (I'. I") i II, (II'II") i połączymy je z wierzchołkiem A. Otrzymane proste IA i IIA leżą na płaszczyźnie

(ABC), gdyż mają po dwa punkty z tą płaszczyzną wspólne. Każdy zatem punkt prostych $\bar{I}A$ i $\bar{II}A$ a więc i punkty D i E leżą na płaszczyźnie (A, B, C) i mogą być uważane za dalsze wierzchołki wielokąta.

Jeśliby płaszczyzna wielokąta wyznaczona była śladami - to wówczas rzuty tego wielokąta wyznaczymy, wyznaczając rzuty punktów leżących na tej płaszczyźnie a obranych za pośrednictwem prostych (ust. 12).

13. Płaszczyzny przesunięte przez prostą. - Przez jedną prostą p przechodzi nieskończenie wiele płaszczyzn, które tworzą t. zw. pęk płaszczyzn - przyczem prostą l nazywamy osią tego pęku. Każda płaszczyzna pęku zwie się jego elementem. Jeżeli oś pęku jest dana, to poszczególne elementy wyznaczyć można w dwojaki sposób: Na prostej p obierzemy dowolny punkt A i przez ten punkt poprowadzimy dowolne proste m_1, m_2, ... m_n. Proste (p, m_1), $(p\ m_2)$, (p, m_3) ...... $(p\ m_n)$ wyznaczają płaszczyzny jako elementy pęku o osi l.

Częściej jednak wyznaczamy płaszczyzny przechodzące przez prostą p, zapomocą śladów tych płaszczyzn. (Rys. 49 i 49 a. i 53). Gdy przez ślad poziomy H (H' H") prostej p poprowadzimy dowolną prostą - to prostą tę uważać można za ślad poziomy płaszczyzny ε przechodzącej przez tę

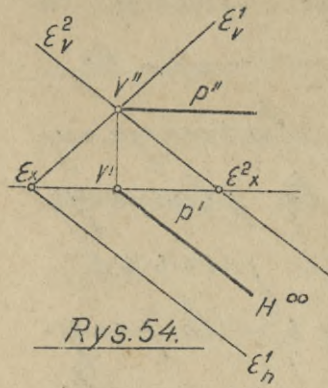


Rys. 53.

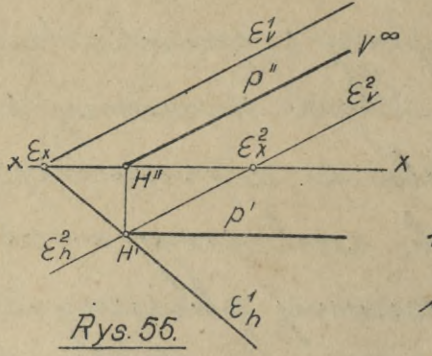
prostą. Ślad poziomy ε_h płaszczyzny ε i prosta p wyznaczają tę płaszczyznę. Jeżeli zechcemy znaleźć jeszcze ślad pionowy płaszczyzny ε - to przejdzie on przez ślad pionowy prostej p a nadto przez punkt ε_x przecięcia się śladu poziomego ε_h z osią x $\overline{o}\overline{o}$. Powiemy więc: <u>ślady płaszczyzn przechodzącej przez prostą przechodzą przez ślady prostej</u>.

Gdy chodzi tedy o wyznaczenie śladów płaszczyzn przechodzących przez prostą - to znajdziemy najpierw ślady prostej, przez ślad poziomy poprowadzimy ślady poziome ε_h^1, ε_h^2 ε_h^3......, a przez ślad pionowy ślady pionowe ε_v^1, ε_v^2, ε_v^3.... płaszczyzn ε^1, ε^2, ε^3...., przyczem odpowiednie ślady przetną się w punktach ε_x^1, ε_x^2 ε_x^3...... leżących na osi x $\overline{o}\overline{o}$.

Jeżeli prosta p jest równoległą do płaszczyzny poziomej - to jej ślad poziomy leży w nieskończoności - ślady poziome płaszczyzn przechodząc przez punkt w nieskończoności na rzucie p' będą równoległe do p'. (Rys. 54.). Analogicznie przedstawi się sprawa z prostą równoległą do



Rys. 54.



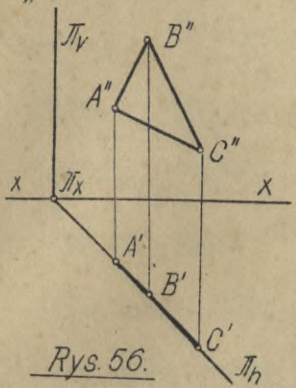
Rys. 55.

płaszczyzny pionowej (Rys. 55), względnie bocznej.

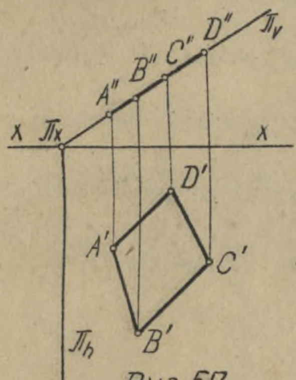
Z dowolnie wielkiej ilości płaszczyzn dających się poprowadzić przez prostą wyróżnić należy płaszczyzny rzucające. Ślad pionowy ε_v^3 płaszczyzny ε^3 poziomo-rzucającej przechodzącej przez prostą p (p', p") jest prostopadły do osi x-ów – ponieważ jednak ślady płaszczyzny przechodzić muszą przez ślady prostej – więc ślad poziomy schodzić się będzie z rzutem poziomym tej prostej (Rys. 53). Rzut poziomy dowolnej prostej leżącej na płaszczyźnie poziomo-rzucającej schodzi się ze śladem poziomym tej płaszczyzny – mówimy więc, że płaszczyzna prostopadła do poziomej „rzuca" w swój ślad poziomy wszystkie na niej znajdujące się proste i stąd nazywamy ją płaszczyzną poziomo-rzucającą.

Analogicznie ślad pionowy ε_v^4 (Rys. 53) płaszczyzny pionowo-rzucającej ε^4 schodzi się z rzutem pionowym tej prostej – ślad poziomy ε_h^4, przechodząc przez ślad poziomy prostej p będzie prostopadły do osi x-ów. Punkt ε_x^4 schodzi się z punktem H". Płaszczyzna pionowo rzucająca „rzuca" w swój ślad pionowy każdą prostą na niej się znajdującą.

Z własności płaszczyzny poziomo-rzucającej π (π_h π_v) (Rys. 56) wynika, że gdy punkt leży na tej płaszczyźnie, to rzut poziomy tego punktu, leży na śladzie poziomym tej płaszczyzny. Podobnie, gdy rzuty pionowe $A''B''$.... punktów A, B.... leżą w śladzie pionowym płaszczyzny pionowo-rzucającej π (π_h π_v) - to punkty leżą na płaszczyźnie. (Rys. 57)



Rys. 56.

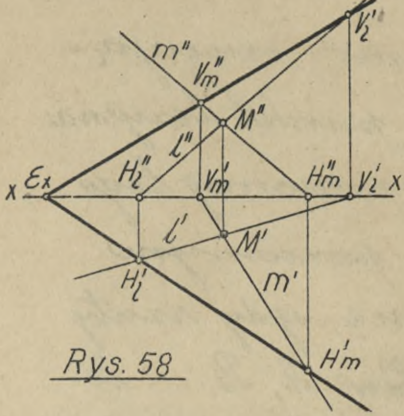


Rys. 57.

14. Wykreślenie śladów płaszczyzny wyznaczonej dwiema prostemi lub trzema punktami.

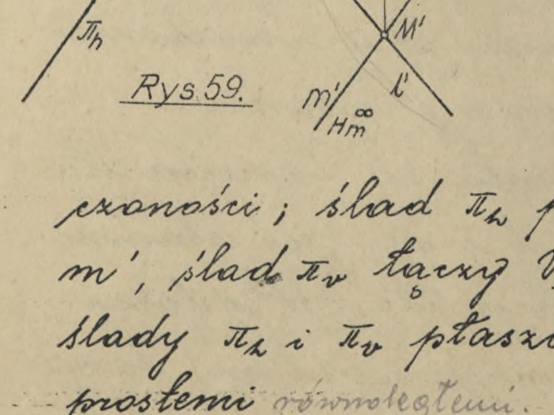
Jak to już w ustępie 10 zauważyliśmy chętniej aniżeli dwiema prostemi przecinającemi się wyznaczamy płaszczyznę jej śladami. W związku z tem zachodzi potrzeba zastąpienia dwóch prostych przecinających się lub równoległych, wyznaczających płaszczyznę śladami tej płaszczyzny, czyli chodzi o wyznaczenie śladów płaszczyzny danej dwiema prostemi.

Z ustępu 13º wynika, że prosta ε_h, łącząca ślady poziome H_l i H_m prostych l i m jest śladem poziomym płaszczyzny (l, m) (Rys. 58). W istocie bowiem prosta leży na płaszczyźnie (l, m) bo ma

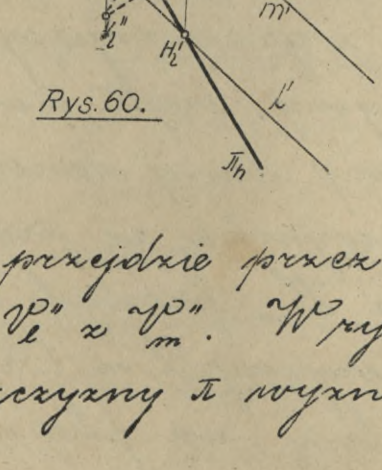


Rys. 58

z nią dwa punkty wspólne H_l i H_m, leży nadto na płaszczyźnie poziomej, bo punkty H_l i H_m są śladami prostych l i m. Prosta ε_v, łącząca ślady pionowe V_l i V_m naszych prostych będzie z tych samych względów śladem pionowym płaszczyzny (l, m). Oba ślady ε_h i ε_v przetną się w punkcie ε_x na osi x ō∞ – będzie to dowodem przecięcia się trzech płaszczyzn: π_1, π_2 i ε. Ślad poziomy płaszczyzny przechodzącej przez dwie proste, wyznaczające tę płaszczyznę przechodzi przez ślady poziome tych prostych – ślad pionowy płaszczyzny jest prostą łączącą ślady pionowe tychże prostych.-



Rys. 59.



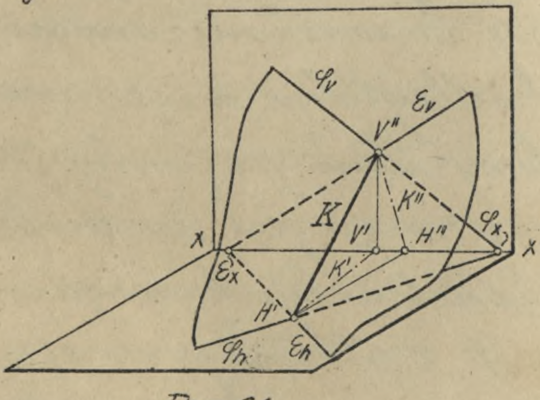
Rys. 60.

Ślad poziomy prostej l (Rys. 59) leży w II-ej części przestrzeni – prosta m jest równoległą do π_1, H_m leży więc w nieskończoności; ślad π_h przejdzie przez H'_m równolegle do m', ślad π_v łączy V''_l z V''_m. W rys. 60 wykreślono ślady π_h i π_v płaszczyzny π wyznaczonej dwiema prostemi równoległemi.

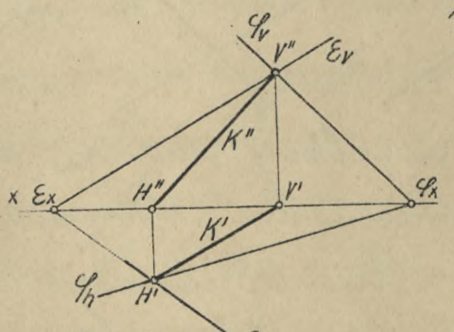
Gdy chodzi o wykreślenie śladów płaszczyzny wyznaczonej trzema punktami n. p. A, B, C – to zadanie sprowadzimy do poprzedniego a mianowicie: punkty A i B łączymy prostą l, punkty B i C prostą m i wykreślimy ślady płaszczyzny wyznaczonej przez dwie proste (l, m) przecinające się w punkcie B. Przez punkt C poprowadzić można także prostą m równoległą do l (A, B) i narysować ślady tak wyznaczonej płaszczyzny.

15. __Prosta przecięcia się dwóch płaszczyzn.__ – Dwie płaszczyzny bez względu na swe położenie wzajemnie przecinają się podług prostej, którą nazywamy __krawędzią__ tych płaszczyzn.

Niechaj zadaniem naszem będzie wykreślenie rzutów krawędzi dwóch płaszczyzn ε i φ wyznaczonych śladami. (Rys. 61). Rozwiązanie zadania leży w stwierdzeniu faktu, że krawędź dwóch płaszczyzn jest prostą leżącą równocześnie na obu płaszczyznach, a ponieważ prostą wyznaczają dwa punkty – więc gdy znajdziemy dwa punkty leżące równocześnie na obu danych płaszczyz-



Rys 61.

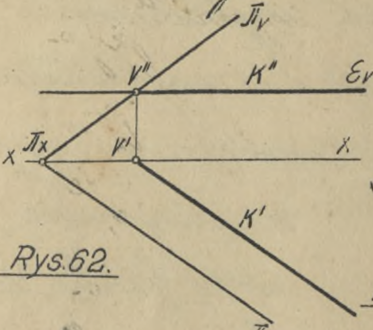


Rys. 61a.

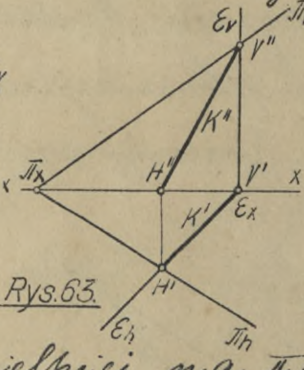
nach – to tym sposobem wyznaczymy krawędź tych płaszczyzn.

Punkt H, (H' H") jest punktem leżącym równocześnie na obu śladach poziomych ε_h i ϑ_h danych płaszczyzn, jest więc jednym z punktów krawędzi – drugim jej punktem jest punkt V, (V' V"), który jako punkt przecięcia się prostej ε_v z prostą ϑ_v jest punktem leżącym na obu płaszczyznach. Prosta (H V) = k jest szukaną krawędzią, łączy bowiem dwa punkty tej krawędzi, które są równocześnie jej śladami. – Rys 61a podaje przeprowadzenie omówionego zadania w rzutach prostokątnych.

W rys. 62 znaleźliśmy rzuty krawędzi płaszczyzny dowolnej π (π_h, π_v) z płaszczyzną $\varepsilon_1 \parallel \pi_1$. Ślad poziomy ε_h płaszczyzny ε leży w nieskończoności, w odległości więc nieskończenie wielkiej na π_h leży ślad poziomy H szukanej krawędzi. Krawędź więc jest równoległą do π_1.



Rys.62.

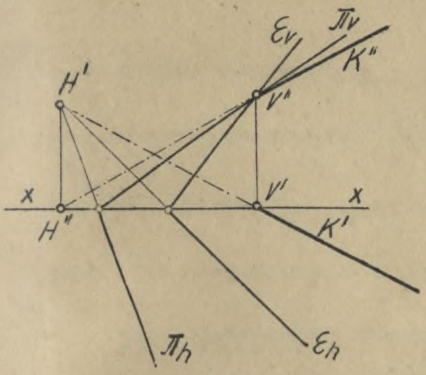


Rys.63.

Rys. 63 podaje konstrukcję krawędzi płaszczyzny dowolnej π (π_h π_v) z płaszczyzną ε(ε_h ε_v) poziomo-rzucającą.

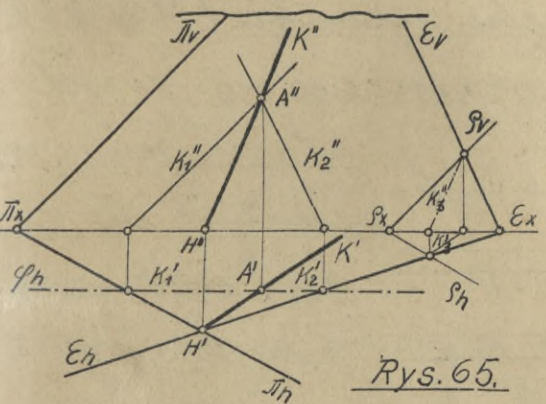
W rys. 64 ślad poziomy szukanej krawędzi nie leży w I-ej części przestrzeni.

<u>Zadanie 1.</u> <u>Wyznaczyć rzuty krawędzi dwóch</u>



Rys. 64.

płaszczyzn π i ε, których ślady pionowe nie przecinają się w obrębie rysunku. (Rys. 65). Ślad poziomy H a więc jeden punkt szukanej krawędzi jest punktem przecięcia się śladów poziomych π_h i ε_h danych płaszczyzn; ponieważ ślad pionowy krawędzi nie leży w obrębie rysunku, więc dowolny punkt A krawędzi połączyć musimy z punktem H.



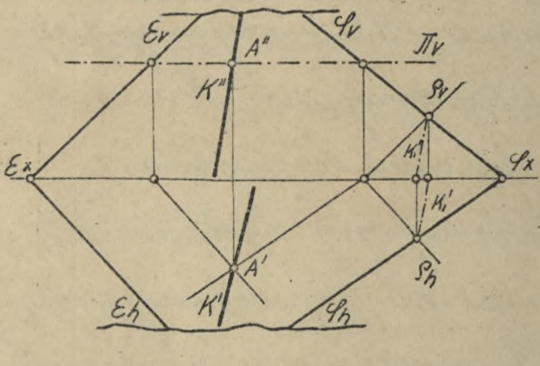
Rys. 65.

Ów punkt dowolny A znajdziemy w sposób następujący: Dane płaszczyzny przetniemy płaszczyzną trzecią φ - znalezione krawędzie owej płaszczyzny z danemi płaszczyznami przecinają się w punkcie A, który jako punkt przecięcia się trzech płaszczyzn, leży także i na szukanej krawędzi danych płaszczyzn. Co do płaszczyzny φ - to położenie jej może być dowolne - w rys. 65 przyjęto płaszczyznę φ równoległą do π_2; za takiem lub też położeniem równoległem do π_1 przemawia jedyne wzgląd konstrukcyjny.

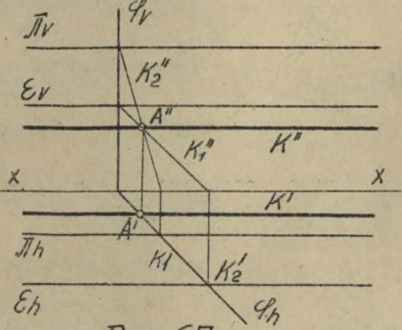
Znając jeden punkt krawędzi dwóch płaszczyzn wyznaczymy także krawędź, gdy zamiast drugiego punktu poznamy kierunek krawędzi. W tym celu do jednej z dwóch danych płaszczyzn poprowadzimy płaszczyznę równoległą $\varrho.(\varrho_h\ \varrho_v)$, wyznaczymy krawędź k^3 tej płaszczyzny z drugą daną płaszczyzną i otrzymujemy w ten sposób kierunek szukanej krawędzi. Prosta bowiem k przecięcia się danych płaszczyzn będzie równoległą do krawędzi k_3. (Rys. 65).

<u>Zadanie 2.</u> <u>Znaleźć rzuty prostej przecięcia się dwóch płaszczyzn, których ślady pionowe i poziome nie przecinają się w obrębie rysunku. (Rys. 66).</u>

<u>Zadanie 3.</u> <u>Znaleźć rzuty przecięcia się dwóch płaszczyzn prostopadłych do π_3 bez posługiwania się płaszczyzną boczną rzutów. (Rys. 67).</u>



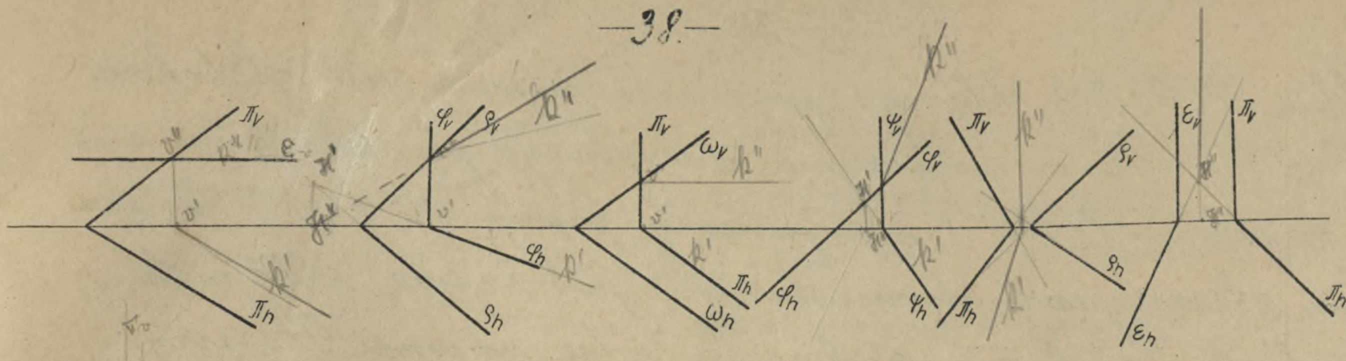
Rys. 66.

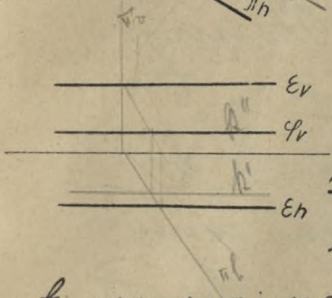


Rys. 67.

Kierunek szukanej krawędzi jest prostopadły do π_3, potrzebny jeden punkt szukamy przy pomocy płaszczyzny, która może być n. p. prostopadłą do π_1.

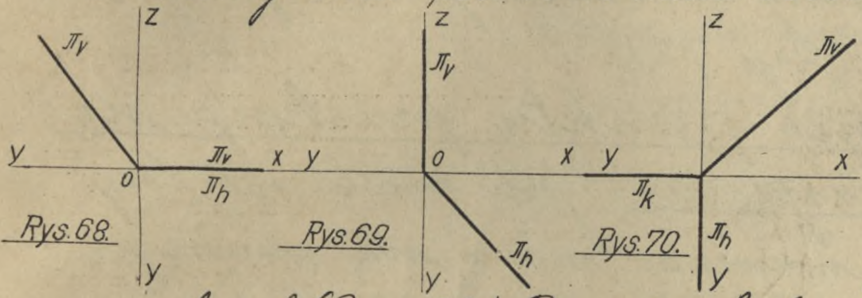
16. <u>Ćwiczenia.</u> Dwie płaszczyzny $\varepsilon^1(\varepsilon^1_h\ \varepsilon^1_v)$ i $\varepsilon^2(\varepsilon^2_h\ \varepsilon^2_v)$ zajmują położenia podane w rysunkach na stronie 38. – Wyznaczyć rzuty krawędzi tych płaszczyzn.





17. Płaszczyzny przechodzące przez osie układu i pł. dwusieczne.

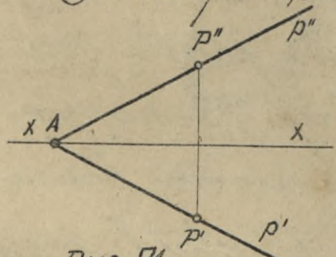
Gdy pł. przechodzącą przez oś x-ów wyznaczyć chcemy jej śladami, to z uwagi na to, że ślady poziomy i pionowy schodzą się z osią x-ów musimy znać położenie śladu bocznego. (Rys. 68). Podobnie do wyznaczenia pł. przechodzącej przez oś z, potrzebna jest znajomość położenia śladu poziomego tej pł. (Rys. 69). Rys. 70 jest obrazem geometrycznym pł. π przechodzącej przez oś y-ów.



Rys. 68. Rys. 69. Rys. 70.

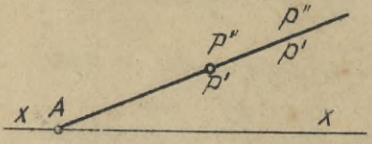
Jeden punkt dowolny i znajomość osi, przez którą pł. przechodzi, płaszczyznę odnośną wyznaczają.–

Takie pł. przechodzące przez osie układu, których każdy punkt jest równo oddalony od dwóch odnośną osią wskazanych płaszczyzn rzutów nazywamy płaszczyznami dwusiecznemi. Przez każdą oś układu przechodzą dwie płaszczyzny dwusieczne.



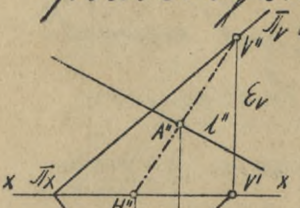
Rys. 71.

Płaszczyzna dwusieczna przechodząca przez część I-szą i III-cią przestrzeni wyznaczona jest osią x-ów i punktem $P(P';P'')$, którego wysokość równa jest głębokości. (Rys. 71). Przez połączenie dowolnego punktu A osi x-ów z punktem $P(P'P'')$ otrzymamy prostą $p(p'p'')$ leżącą na płaszczyźnie dwusiecznej. Jest rzeczą oczywistą, że kąty $p''Ax$ i $p'Ax$ są sobie równe. Płaszczyzna dwusieczna przechodząca przez część II^a i IV^a przestrzeni przechodzi również oś x-ów. Rzuty poziome i pionowe każdego punktu a więc i każdej prostej tej płaszczyzny dwusiecznej nakrywają się. - (Rys. 72).



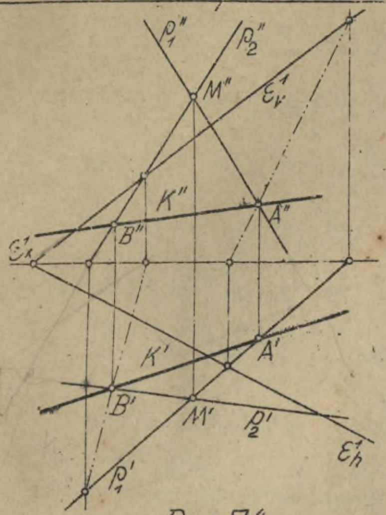
Rys. 72.

18. Wyznaczenie punktu przebicia się prostej z płaszczyzną. - Jeśli prosta nie leży na płaszczyźnie, to wówczas ma z nią zawsze jeden punkt wspólny, którym jest punkt przebicia się tejże prostej z ową daną płaszczyzną. Punkt ten wyznaczymy w ten sposób, że przez prostą poprowadzimy dowolną płaszczyznę, znajdziemy krawędź płaszczyzny z daną płaszczyzną, a punkt przecięcia się tej krawędzi z daną prostą jest szukanym punktem. W rys. 73. poprowadziliśmy płaszczyznę poziomo-rzucającą $\varepsilon(\varepsilon_h \varepsilon_v)$ przez daną prostą l, wyznaczyliśmy krawędź k tej płaszczyzny z daną płaszczyzną $\pi(\pi_h \pi_v)$ i tym sposobem znaleźli rzuty A', A'' punktu przebicia.



Rys. 73.

Zadanie 1. Znaleźć rzuty krawędzi płaszczyzny wyznaczonej śladami ε'_h, ε'_v z płaszczyzną wyznaczoną dwiema prostemi p_1 i p_2 (Rys. 74). Ponieważ krawędź dwóch płaszczyzn określić można jako miejsce geometryczne punktów przebicia się prostych jednej płaszczyzny z płaszczyzną drugą - więc prosta łącząca punkty przebicia się A i B prostych p_1 i p_2 z pł ε^1 będzie szukaną krawędzią.-



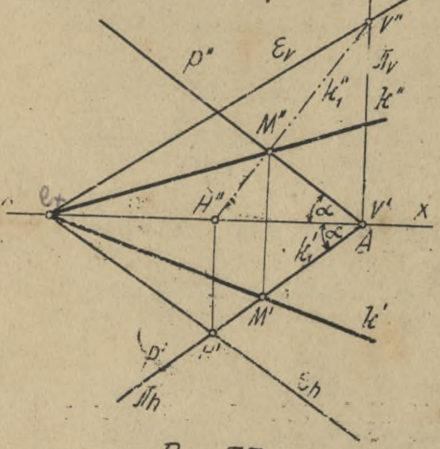
Rys. 74.

Zadanie 2. Wyznaczyć rzuty prostej, przecinającej trzy proste skośne $l_1(l_1' l_1'')$; $l_2(l_2' l_2'')$ i $l_3(l_3' l_3'')$. Przez jedną z trzech prostych skośnych n.p. przez l_3 przesuniemy dowolną płaszczyznę i znajdziemy punkty przebicia się P_1 i P_2 pozostałych prostych (l_1 i l_2) z tą płaszczyzną. Prosta wyznaczona punktami P_1 i P_2 rozwiązuje zadanie, leżąc bowiem na płaszczyźnie przechodzącej przez prostą l_3 i tą prostą także przecina.

Prostych przecinających trzy skośne jest tyle, ile jest płaszczyzn przechodzących przez prostą l_3 - więc nieskończenie wiele.-

Zadanie 3. Przez punkt $P(P'P'')$ poprowadzić prostą przecinającą dwie proste skośne $l_1(l_1' l_1'')$ i $l_2(l_2' l_2'')$. Krawędź płaszczyzn (P, l_1) i (P, l_2) rozwiązuje zadanie.

Zadanie 4. Wyznaczyć rzuty krawędzi płaszczyzny dowolnej $\varepsilon(\varepsilon_h \varepsilon_v)$ z płaszczyzną dwusieczną φ, przechodzącą przez pierwszą i trzecią część przestrzeni.



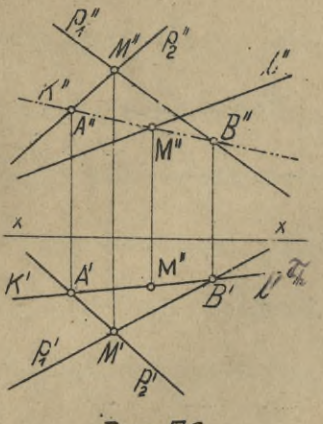
Rys. 75.

Płaszczyznę φ wyznaczymy prostą $(p'p'')$ w myśl ustępu 16. Znajdźmy następnie punkt przebicia się $M(M'M'')$ prostej p z płaszczyzną ε (Rys. 75) - to punkt ten będzie jednym punktem szukanej krawędzi - wszak krawędź dwóch płaszczyzn jest miejscem geometrycznem punktów przebicia się prostej jednej płaszczyzny z płaszczyzną drugą. Ponieważ oś x, należy do płaszczyzny φ, więc jej punkt przebicia się ε_x z pł ε jest drugim punktem naszej krawędzi; proste $(\varepsilon_x . M') = k'$ i $(\varepsilon_x . M'') = k'$ są więc tej krawędzi rzutami.

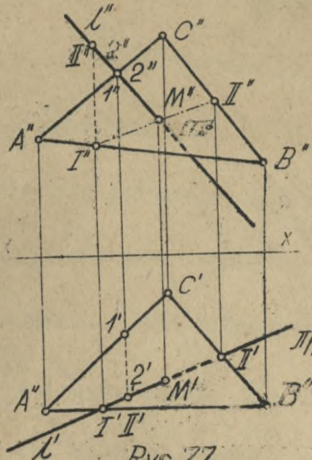
Gdyby punkt ε_x nie leżał w obrębie rysunku, lub płaszczyzna ε nie była wyznaczona śladami, to wówczas prócz prostej prostej $p\,(p'p'')$ przyjmiemy na płaszczyźnie φ drugą prostą, a wyznaczywszy jej punkt przebicia z płaszczyzną ε, połączymy ten punkt z punktem M.

Zadanie 5. Znaleźć rzuty punktu przebicia się prostej $l\,(l'l'')$ z płaszczyzną $\pi = (p_1 . p_2)$ wyznaczoną dwiema prostemi $p_1\,(p_1' p_1'')$ i $p_2\,(p_2' p_2'')$ (Rys. 76).

Przez prostą l prowadzimy płaszczyznę - w na-



Rys. 76.



Rys. 77.

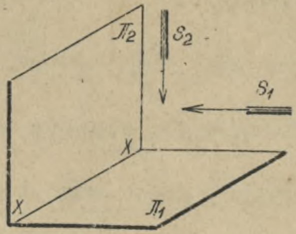
szym wypadku – poziomo-rzucającą τ – szukamy krawędzi k tej płaszczyzny z płaszczyzną wyznaczoną prostemi p_1 i p_2, a punkt przecięcia się krawędzi k z prostą l, rozwiązuje zadanie.

<u>Zadanie 6. Znaleźć rzuty punktu przebicia się prostej l (l' l'') z płaszczyzną trójkąta $A(A'A'')$ $B(B'B'')$ $C(C'C'')$</u> (Rys. 77).

Postępujemy zupełnie jak w zadaniu poprzednim, posługując się płaszczyzną π poziomo-rzucającą przechodzącą przez prostą l.

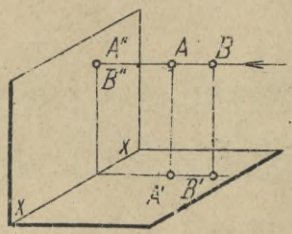
Punkty $\underline{I}(\underline{I}'\underline{I}'')$ i $\underline{II}(\underline{II}'\underline{II}'')$ wyznaczają krawędź płaszczyzny trójkąta i płaszczyzny π, a punkt $M(M'M'')$ jest szukanym punktem przebicia.

Przyjmijmy, że trójkąt A, B, C wykonany jest z materyału nieprzezroczystego – to w następstwie tego założenia, rzuty tego trójkąta zakryją częściowo rzuty prostej l. Aby wyznaczyć rzuty niewidocznej, płaszczyzną trójkąta zakrytej części prostej, zauważmy, że kierunek rzutu jest równocześnie kierunkiem, w którym patrzymy na odnośną płaszczyznę rzutów. Na płaszczyznę pionową patrzymy więc <u>z przodu</u>, w kierunku strzałki s_1 (Rys. 78); na płaszczyznę poziomą w kierunku strzałki s_2.

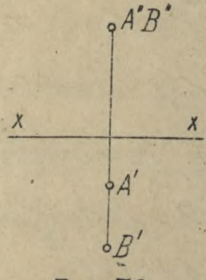


Rys. 78.

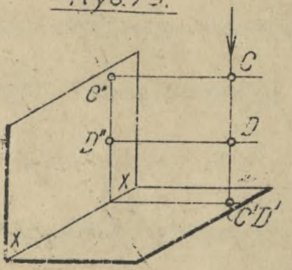
Przyjmijmy dwa punkty A(A'A") i B(B'B") tak położone, że ich rzuty <u>pionowe</u> padają na siebie (Rys. 79 i 79a) to punkt B, którego głębokość jest większa, aniżeli głębokość punktu A uważać będziemy za widoczny, gdy patrzymy na punkty w kierunku rzutu pionowego, rzut pionowy B" punktu B <u>nakrywa</u> rzut A" punktu A. Analogicznie: z dwóch punktów, których rzuty <u>poziome</u> nakrywają się ten uważać będziemy, patrząc w kierunku rzutu poziomego, za widoczny, którego <u>wysokość</u> jest większa. (Rys. 80 i 80a). Rzut poziomy D' punktu D będzie niewidoczny, zakryty widocznym punktem C'



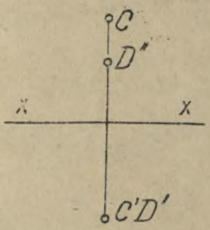
Rys. 79.



Rys. 79a.



Rys. 80.



Rys. 80a.

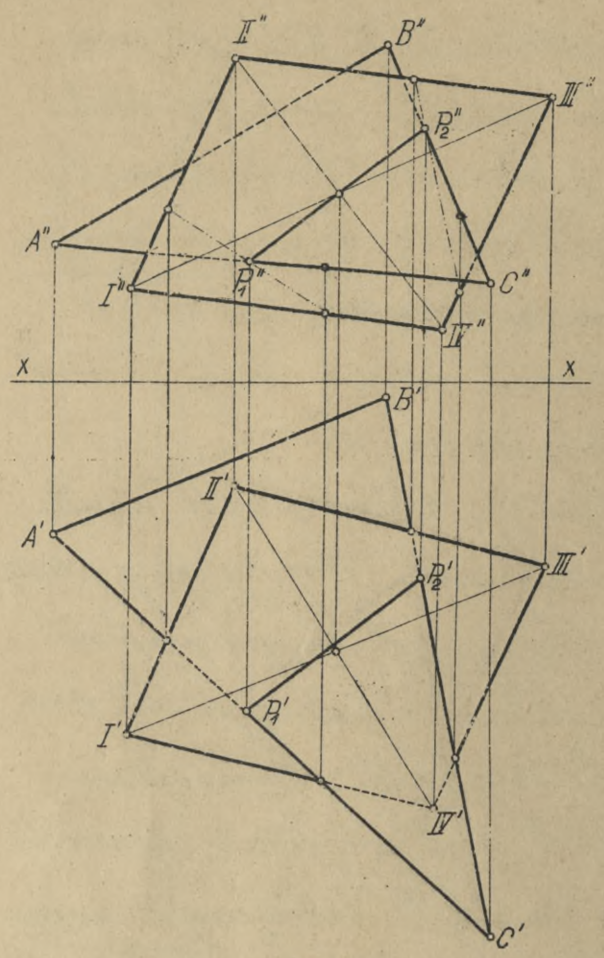
Zastosujmy uwagi powyższe do rozpatrywanego zadania. Położenie prostych l i $\overline{AC}$ jest skośne (rys. 77) punkt przecięcia się ich rzutów pionowych jest skupieniem rzutów pionowych dwóch punktów, jednego 1(1'1") leżącego na prostej $\overline{AC}$ i drugiego 2(2'2") prostej l ($l'l''$). Głębokość punktu 2(2'2'') jest większa aniżeli głębokość punktu 1(1'1''), więc punkt 1 jest niewidoczny w widoku z przodu, przysłonięty punktem 2. Skoro punkt 2 jest widoczny — to widoczną jest także — w widoku z przodu, a więc i w rzucie pionowym — prosta l'', która leży przed trójkątem, aż do punktu przebicia M.

W podobny sposób zbadamy, która część rzutu poziomego l' prostej l jest widoczna. Wystarczy wziąć pod uwagę n. p. punkt $\underline{I}'$, który jest skupieniem rzutów poziomych dwóch punktów — jednego na prostej l, drugiego na boku $\overline{AB}$ trójkąta. Ponieważ wysokość punktu na prostej l jest większa, aniżeli wysokość punktu $\underline{I}''$ na boku $\overline{AB}$ leżącego, więc prosta l leży nad trójkątem, od punktu $\underline{I}'$ do M' jest więc widoczna.

<u>Zadanie 7. Wyznaczyć rzuty linii przenikania się płaszczyzny trójkąta A(A'A''), B(B'B'') i C(C'C'') z płaszczyzną czworoboku $\underline{I}$($\underline{I}'\underline{I}''$), $\underline{II}$($\underline{II}'\underline{II}''$), $\underline{III}$($\underline{III}'\underline{III}''$) i $\underline{IV}$($\underline{IV}'\underline{IV}''$).</u> (Rys. 81). — Znajdujemy punkty przebicia się P_1($P_1'P_1''$) i P_2($P_2'P_2''$) boków trójkąta z czworobokiem — a co do boków widocznych i niewidocznych to postępujemy w sposób wskazany w zadaniu poprzedniem.

19. <u>Prosta równoległa do płaszczyzny.</u>

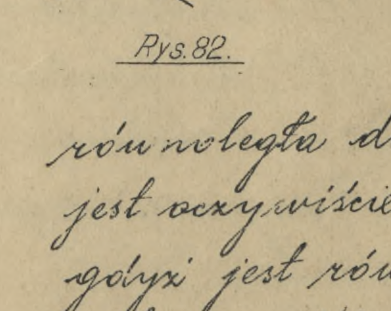
Jeżeli prosta jest równoległa do płaszczyzny — to jest



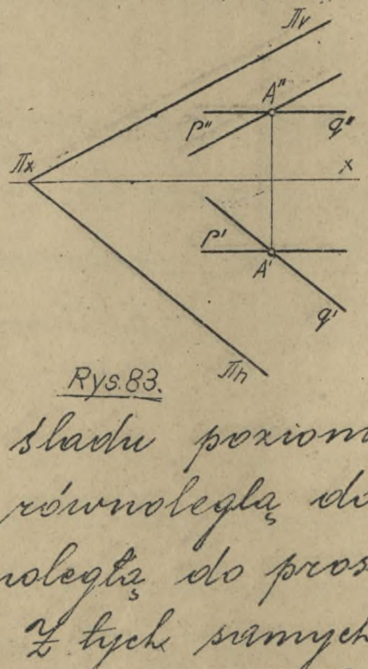
Rys.8

równoległa do każdej prostej przecięcia się tej płaszczyzny z płaszczyzną przechodzącą przez daną prostą.

Przez dowolny punkt w przestrzeni przechodzi nieskończenie wiele prostych równoległych do danej płaszczyzny. Gdy płaszczyzna π wyznaczona jest dwiema prostemi dowolnemi - $p_1 (p_1' p_1'')$ i $p_2 (p_2' p_2'')$ - to prosta $q (q' q'')$ poprowadzona równolegle do jednej z nich np. p_2 jest równoległą do płaszczyzny $\pi (p_1 p_2)$ (Rys. 82).



Rys.82.

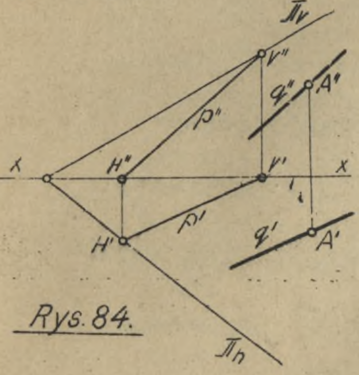


Rys.83.

Gdy płaszczyzna π wyznaczona jest śladami $\pi_h \pi_v$ (Rys. 83) to prosta $q (q' q'')$ równoległa do śladu poziomego tej płaszczyzny jest oczywiście równoległą do płaszczyzny $\pi (\pi_h \pi_v)$, gdyż jest równoległą do prostej π_h leżącej na tej płaszczyźnie. Z tych samych względów prosta $r (r' r'')$ równoległa do śladu π_v jest równole-

-gła do płaszczyzny π.

Zamiast śladów, możemy użyć dowolnej prostej $p(p'p'')$ przyjętej na płaszczyźnie $\pi(\pi_h \pi_v)$ i do niej poprowadzić przez dany punkt $A(A'A'')$ w przestrzeni prostą $q(q'q'')$ równoległą, kreśląc $q' \parallel p'$ i $q'' \parallel p''$. (Rys. 84).

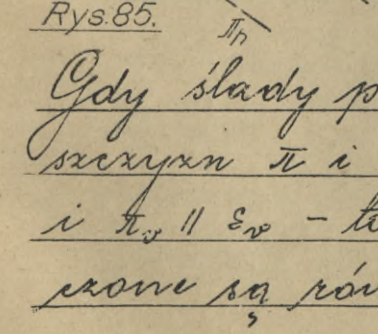


Rys. 84.

30. <u>Dwie płaszczyzny równoległe.</u> - Gdy dwie płaszczyzny są równoległe, to każda prosta jednej płaszczyzny jest równoległą do płaszczyzny drugiej.

Przyjmijmy dowolną płaszczyznę π, wyznaczoną śladami π_h i π_v. (Rys. 83). Jeśli przez dowolny punkt $A(A'A'')$ w przestrzeni poprowadzimy dwie proste $q(q'q'')$ i $r(r'r'')$ równoległe do tej płaszczyzny - to płaszczyzna ε prostemi p i r wyznaczona jest równoległą do płaszczyzny π.

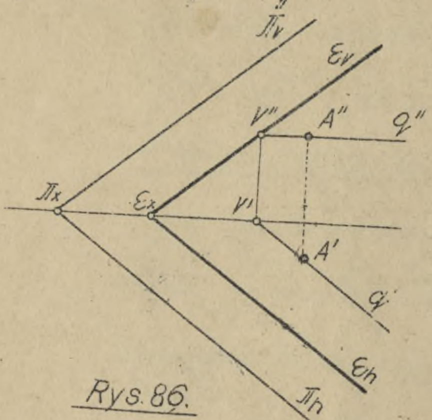
Jeżeli punkt $A(A'A'')$ obierzemy na osi x-ów (Rys. 85) - to proste q i r wyznaczające płaszczyznę ε równoległą do płaszczyzny π, a przechodzącą przez ów punkt, będą tej płaszczyzny śladami. (Patrz. ust. 7) - Zatem:



Rys. 85.

<u>Gdy ślady poziome i ślady pionowe dwóch płaszczyzn π i ε są między sobą równoległe $\pi_h \parallel \varepsilon_h$ i $\pi_v \parallel \varepsilon_v$ - to płaszczyzny śladami tymi wyznaczone są równoległe.</u>

Żadanie. Wyznaczyć ślady płaszczyzny przechodzącej przez punkt A (A' A") równolegle do danej płaszczyzny π (π_h π_v) (Rys. 86). Uwzględniając wypowiedziane powyżej twierdzenie, odnoszące się do położenia śladów płaszczyzn równoległych, wystarczy przez punkt A poprowadzić jedną prostą q (q' q") równoległą do płaszczyzny π i wyznaczyć ślady ε_h i ε_v płaszczyzny ε przez tą prostą przechodzącą, takie jednak, któreby były równoległe do śladów danej płaszczyzny π.



Rys. 86.

Rozdział III.

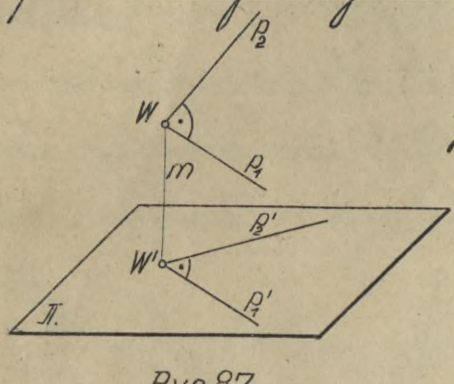
Proste i płaszczyzny wzajemnie prostopadłe. -

21. Kąt dwóch prostych skośnych wyrażamy kątem, którego wierzchołkiem jest dowolny punkt w przestrzeni, a ramionami proste równoległe do owych skośnych. Gdy wierzchołek kąta przyjmiemy na jednej z prostych skośnych - to kąt, którego jednym ramieniem jest owa prosta skośna, a drugim ramieniem prosta do pozostałej skośnej równoległa - wyraża kąt dwóch danych

wichrowatych.

22. Prosta prostopadła do płaszczyzny. Jeżeli prosta p jest prostopadłą do dwóch prostych przecinających się q i r - to jest prostopadłą do płaszczyzny prostemi temi wyznaczonej. Położenie prostej p względem q i r - w ogólnym wypadku - jest skośne.

23. Rzut prostokątny kąta prostego na płaszczyznę jest wówczas kątem prostym, gdy jedno ramię tego kąta jest równoległe do płaszczyzny rzutów. - Przyjmijmy (Rys. 87), że ramię p_1 jest równoległe do płaszczyzny rzutów π, to wówczas $p_1 \parallel p_1'$, zaś promień rzucający $m \perp p_1$.



Rys. 87.

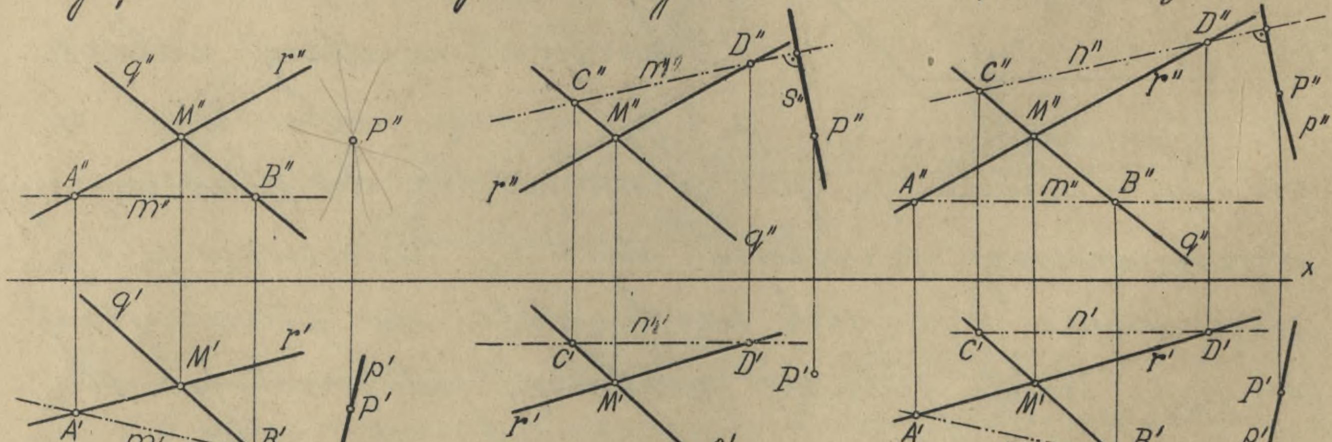
Ponieważ według założenia $p_1 \perp p_2$ - więc wobec tego, że $m \perp p_1$ - prosta p_1 jest prostopadłą do płaszczyzny wyznaczonej prostemi m i p_2. Ponieważ $p_1' \parallel p_1$ więc także i p_1' jest prostopadła do płaszczyzny $(m\,p_2)$. Jeżeli jednak prosta p_1' jest prostopadłą do płaszczyzny $(m\,p_2)$, to jest prostopadłą do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie, a zatem i do prostej p_2'. Tak tedy $p_1' \perp p_2'$ - czyli proste p_1' i p_2' tworzą kąt prosty.

24. Wyznaczyć rzuty p', p'' prostej p przechodzącej przez punkt $P(P'P'')$, a prostopadłej

<u>do płaszczyzny π, wyznaczonej dwiema prostemi przecinającemi się q(q'q") i r(r'r")</u>

Zauważmy przedewszystkiem, że gdy prosta jest prostopadłą do płaszczyzny, to jest prostopadłą do wszystkich prostych tej płaszczyzny.

Na płaszczyźnie π(q, r) (Rys. 88 a.) obierzmy prostą m(m'm"), równoległą do poziomej rzutów, i z punktu P' poprowadźmy prostą p' prostopadłą do m'. Prostą p' uważać można za rzut poziomy nie tylko pewnej jednej prostej p - lecz za rzut poziomy dowolnej ilości prostych, przechodzących przez punkt P, a prostopadłych do prostej m. Rzuty poziome wszystkich tych skośnie położonych



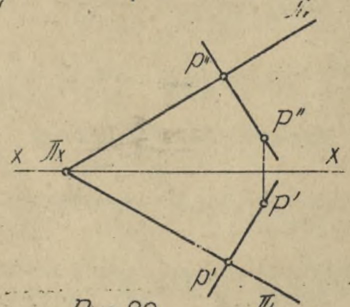
Rys. 88 a. Rys. 88 b. Rys. 88 c.

prostych względem prostej m - schodzić się muszą z prostą p', gdyż prosta m jest równoległą do poziomej, a więc rzut kąta prostego, jaki prosta m tworzy z wszystkiemi prostemi wychodzącemi z punktu P, których rzut poziomy jest prostopadły do m' musi być prosty. Rzut pionowy prostej prostopadłej do m, może więc być zupełnie dowolny.

Obierzmy następnie na płaszczyźnie $\pi(q,r)$ prostą $n(n'n'')$ równoległą do pionowej rzutów — przyczem dla przejrzystości przeprowadźmy konstrukcyę na drugim rysunku, z pierwszego skopiowanym (Rys. 86 b). Z punktu P'' poprowadźmy prostą $s'' \perp n''$, to prostą tę uważać można za rzut pionowy nie tylko pewnej jednej prostej s — lecz za rzut pionowy dowolnej liczby prostych przechodzących przez punkt P a prostopadłych do prostej n. Rzuty pionowe wszystkich tych prostych — skośnie względem prostej n położonych — schodzić się muszą z prostą s', gdyż prosta n jest równoległą do pionowej rzutów, a zatem rzut kąta prostego, jaki prosta n tworzy z wszystkiemi prostemi, wychodzącemi z punktu P, których rzut pionowy jest prostopadły do n'' musi być kątem prostym. Rzut poziomy prostej prostopadłej do n, może być więc zupełnie dowolny.

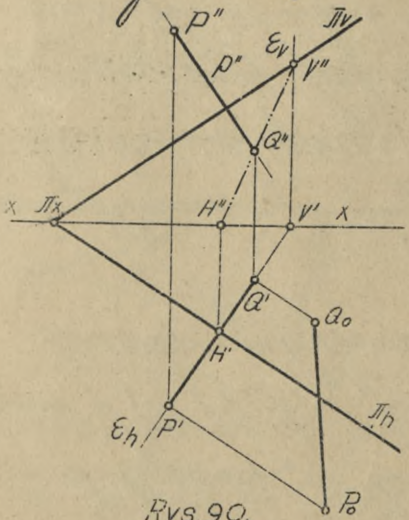
Połączmy teraz konstrukcye przeprowadzone w rysunkach 88 a i 88 b w jeden (Rys. 88 c) i uważajmy prostą s'' za rzut pionowy p'' prostej p — to proste p' i p'' są rzutami jednej prostej p, prostopadłej jednak zarówno do prostej m jak n, a więc prostopadłej do płaszczyzny prostemi tomi, a także prostemi q i r wyznaczonej.

Ponieważ proste m' i n" wyznaczają kierunki śladów płaszczyzny prostemi q i r wyznaczonej - więc rzuty prostej prostopadłej do płaszczyzny, są prostopadłe do śladów tejże płaszczyzny, a to rzut poziomy do śladu poziomego, a rzut pionowy do śladu pionowego (Rys. 89). Naodwrót też: ślady płaszczyzny prostopadłej do prostej są prostopadłe do odpowiednich rzutów tej prostej.



Rys. 89.

Zadanie 1. Znaleźć odległość punktu P(P'P") od płaszczyzny π ($\pi_h \pi_v$). Odcinek łączący punkt P z punktem przebicia się Q prostopadłej p, z punktu P do płaszczyzny π poprowadzonej, jest szukaną odległością. Przez wykonanie kładu tej odległości której rzuty będą nam znane, otrzymamy jej wielkość rzeczywistą (Rys. 90).

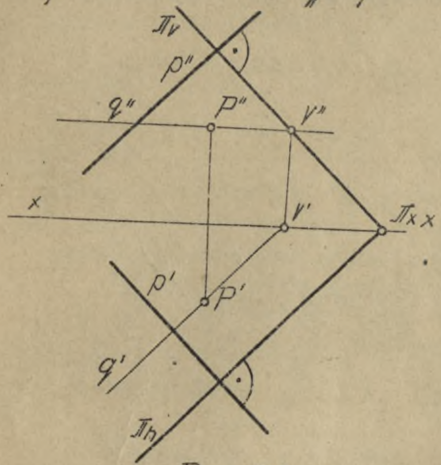


Rys. 90.

Zadanie 2. Znaleźć odległość dwóch płaszczyzn równoległych ε^1(ε^1_h ε^1_v) i ε^2(ε^2_h ε^2_v). Prowadzimy prostą prostopadłą do obu płaszczyzn i znajdziemy kład odcinka zawartego między punktami przebicia się tej prostej z obu płaszczyznami.

Zadanie 3. Wykreślić ślady płaszczyzny pro-

prostopadłej do danej prostej p(p'p") a przechodzącej przez dany punkt P(P'P") (Rys. 91.) Wiemy, że



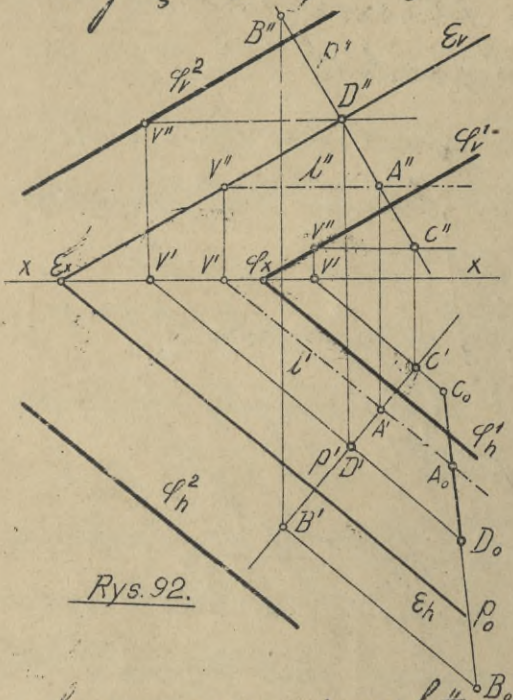
Rys. 91.

ślady szukanej płaszczyzny będą prostopadłe do rzutów prostej p. Tym sposobem znamy kierunki śladów - do zupełnego ich wyznaczenia wystarczy jeden punkt.

Poprowadźmy z punktu P(P'P") prostą q(q'q") równoległą do poziomej, tak jednak, aby było q'⊥p'-to prosta q jest prostopadłą do prostej p- ramię bowiem q jest równoległe do poziomej, a rzut poziomy kąta jaki tworzą proste p i q jest prosty. Ponieważ wszystkie proste płaszczyzny prostopadłej do danej prostej są do danej prostej prostopadłe, więc szukana płaszczyzna przejść musi przez prostą q(q'q") prostopadłej do p(p'p"). - Ślad π_v przejdzie więc przez ślad v" prostej q prostopadle do p" - a ślad poziomy wyjdzie z punktu π_x prostopadle do p'.

Zadanie 4. Wyznaczyć odległość punktu P(P'P") od prostej l(l'l"). Przez punkt P poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do prostej l i znajdziemy punkt przebicia Q prostej l z tą płaszczyzną. Odcinek PQ jest szukaną odległością.

Zadanie 5. Do danej płaszczyzny ε(εh εv) poprowadzić w danej odległości „a" płaszczyznę równoległą. (Rys. 92). W dowolnie obranym punkcie A(A'A") na płaszczyźnie ε poprowadźmy prostą p(p'p") do płaszczyzny ε prostopadłą. Na prostej tej obierzemy dowolny punkt B(B'B") i wykonamy kład $A_0 B_0$ odcinka $\overline{AB}$, kładąc w ten sposób na poziomą prostą p_0. Od punktu A_0 odmierzymy na prostej p_0 daną odległość „a", otrzymane punkty C_0 i D_0 podniesiemy w przestrzeń i przez punkty C(C'C") i D(D'D") poprowadźmy płaszczyzny $\varphi^1(\varphi^1_h\, \varphi^1_v)$ i $\varphi^2(\varphi^2_h\, \varphi^2_v)$ do danej płaszczyzny $\varepsilon(\varepsilon_h\, \varepsilon_v)$ równoległe.



Rys. 92.

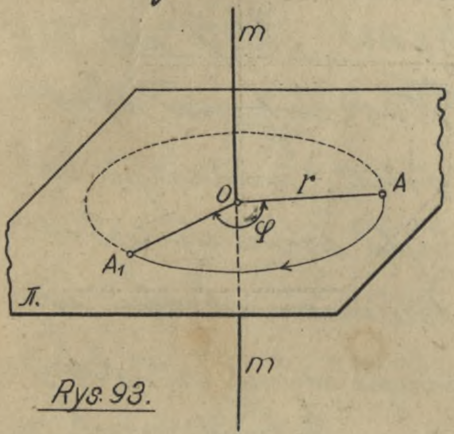
Rozdział IV.

Obroty i kłady.-

25. Obrót punktu około prostej. Rozwiązanie bardzo wielu a przytem i bardzo ważnych zadań geometrycznych polega na zmianie położenia punktów i prostych w przestrzeni. Taką zmianę położenia najchętniej uskuteczniamy zapomocą obro-

tu punktu lub prostej około osi obrotu. Gdy chodzi o rozwiązanie pewnego zadania - to oś obrotu zawarta jest w warunkach tego zadania - zapoznanie się z samą metodą obrotów wymaga byśmy oś tę przyjęli z góry.

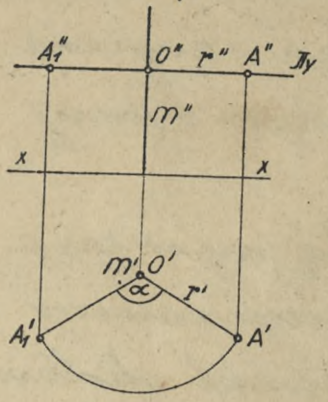
Przyjmijmy więc dowolną prostą m w przestrzeni jako oś obrotu i punkt A. Zadaniem naszem jest obrócić dany punkt około osi o pewien kąt. Przedewszystkiem przez dany punkt poprowadźmy płaszczyznę π prostopadłą do osi obrotu, t. zw. płaszczyznę obrotu. Punkt obracać się będzie około osi obrotu m na płaszczyźnie obrotu π. (Rys. 93).



Rys. 93.

Punkt przebicia się O osi obrotu z płaszczyzną obrotu nazywa się środkiem obrotu, zaś odcinek łączący środek obrotu z punktem A jest promieniem obrotu r. Promieniem obrotu r przenieśliśmy punkt A w położenie A_1, wykonując obrót o dany kąt φ.

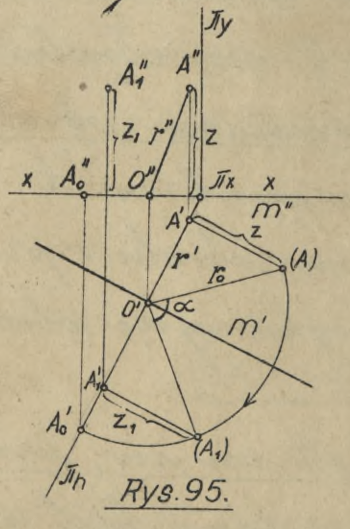
Zadanie 1. Obrócić punkt A około osi m, prostopadłej do płaszczyzny poziomej, o dany kąt α. (Rys. 94). Płasz—czyzna obrotu π, przechodząca przez dany punkt A prostopadle do osi obrotu m, jest w tym wypadku płaszczyzną równoległą do poziomej. Określamy położenie środka obrotu O, a przez to rzuty r' r'' promienia obrotu r. Ze względu na położenie płaszczyzny obrotu rzut poziomy



Rys. 94.

koła, jakie zakreśla obracający się punkt A, będzie w tym wypadku kołem. Rzuty A_1' i A_1'' wyznaczają położenie punktu A po dokonanym obrocie.-

<u>Zadanie 2.</u> <u>Obrócić punkt A, leżący dowolnie w przestrzeni, około osi m leżącej na poziomej.</u> (Rys. 95). Płaszczyzna obrotu π jest w tym wypadku poziomo-rzucająca. Punkt przebicia się osi obrotu, czyli środek obrotu O, połączony z punktem A daje promień obrotu, wyrażony rzutami: poziomym r' i pionowym r''. Aby

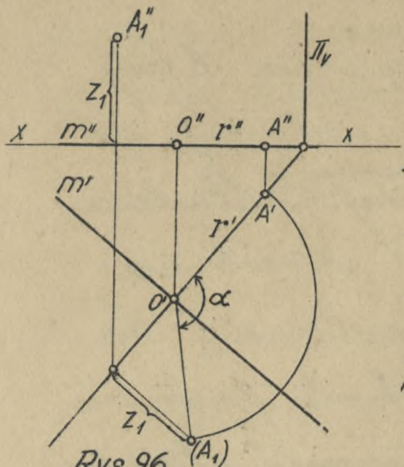


Rys. 95.

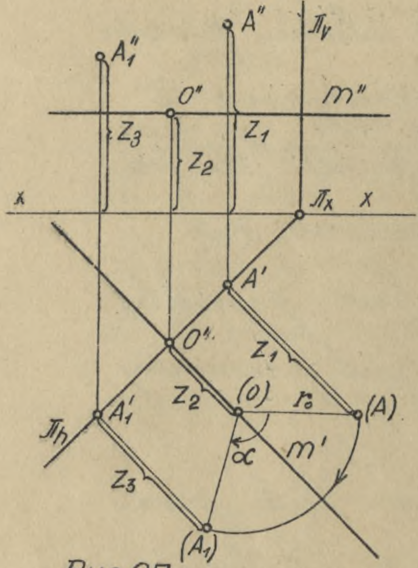
dokonać obrotu punktu A połóżmy płaszczyznę obrotu π na płaszczyznę poziomą, obracając ją około jej śladu poziomego. Dokonanie kładu płaszczyzny samej niczem się nie ujawni - wraz z płaszczyzną π kładziemy jednak na płaszczyznę poziomą także i promień obrotu, którego kład r_0 wyraża dokonany kład pł. obrotu. Promieniem r_0 zakreślimy łuk wyrażający dany kąt α i otrzymujemy kład punktu A po obrocie, który oznaczamy znakiem (A_1). Wskaźnik „1" przy literze A oznacza punkt po obrocie, ujęcie zaś litery A_1 w nawias oznacza, że położenie punktu tego na płaszczyźnie rzutów, jak się wyrazamy znajduje się w kładzie. Chodzi teraz o to, aby z punktem (A_1) wrócić na płaszczyznę obrotu, albo raczej, aby położoną na płaszczyznę poziomą płaszczyznę obrotu podnieść w jej pierwotne położenie. Przy podnoszeniu płaszczyzny obrotu punkt (A_1) obróci się około śladu poziomego π_z, jako osi obrotu, a gdy płaszczyzna π zajmie właściwe sobie położenie prostopadłe do poziomej, rzut poziomy A_1' punktu A_1 padnie na ślad π_z. Odcinek $(A_1)A_1'$ wyraża wysokość punktu A_1, przy pomocy której znajdziemy rzut pionowy A_1'' punktu A_1.

Gdybyśmy obracali punkt (A) tak, aż łuk punktem tym zakreślony przetnie ślad π_z – to tym sposobem sprowadzamy punkt A aż na płaszczyznę poziomą. Położenie punktu oznaczone jest w rys. 95 literą A_0'.

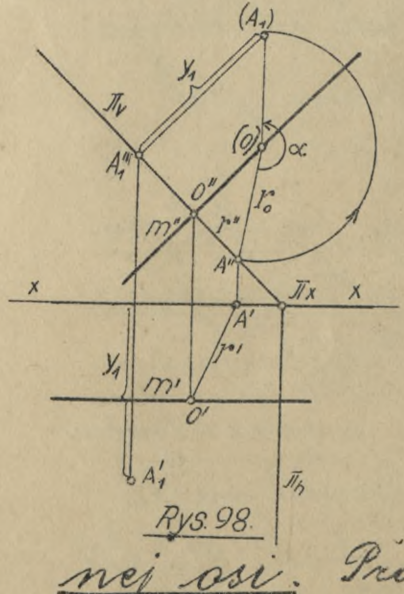
<u>Zadanie 3.</u> <u>Obrócić punkt A, leżący na pł. poziomej, około osi m, również na tej płaszczyźnie położonej o dany kąt α.</u> (Rys. 96). – Postępujemy zupełnie tak samo, jak w zadaniu poprzedniem. Prowadzimy płaszczyznę obrotu π prostopadle do osi m, wyznaczamy środek obrotu O i kładziemy płaszczyznę π na płaszczyznę poziomą.


Rys. 96

Ponieważ promień obrotu leży w tym wypadku na płaszczyźnie poziomej, więc wspomniany kład płaszczyzny obrotu niczem się nie ujawni. Obróciwszy punkt A o kąt α, podnosimy płaszczyznę obrotu, a wraz z nią i punkt A_1 i znajdujemy rzuty A_1' A_1'' punktu A po obrocie.


Rys. 97.

Zadanie 4. Obrócić punkt A, około osi m, równoległej do płaszczyzny poziomej o dany kąt α. (Rys. 97). — I w tym wypadku płaszczyzna obrotu będzie poziomo rzucająca. Kład tej płaszczyzny na poziomą ujawni się kładem promienia obrotu, którego oba punkty końcowe leżą w przestrzeni, w odróżnieniu od zadań poprzednich, gdzie środek obrotu O leżał na poziomej. Pozatem postępujemy jak w zadaniu 3.


Rys. 98.

Ćwiczenie: Punkt A leżący na płaszczyźnie pionowej obrócić około osi równoległej do pionowej o dany kąt α. (Rys. 98).

26. Obrót prostej około danej osi. Prosta i oś obrotu mogą być skośne, mo-

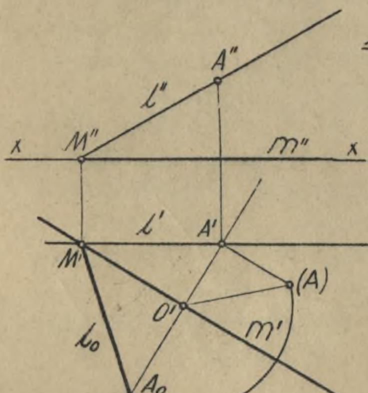
gą przecinać się, lub być do siebie równoległe.

Gdy położenie prostej i osi obrotu jest skośne - to z uwagi na to, że prostą wyznaczają dwa punkta, obrotu prostej dokonamy obracając dwa dowolne punkta prostej około osi o ten sam kąt i w tym samym kierunku.

Gdy prosta i oś obrotu przecinają się, to punkt przecięcia się M, jest punktem stałym prostej, który udziału w obrocie nie bierze, przez który prosta stale podczas obrotu przechodzi. W tym więc przypadku - o ile punkt M leży w obrębie rysunku - wystarczy obrócić jeden dowolny punkt prostej i połączyć go z punktem wspólnym M.

Podobnie prosta równoległa do osi obrotu, podczas obrotu równoległą do osi pozostaje, przechodząc stale przez nieskończenie oddalony punkt przecięcia się prostej z osią.

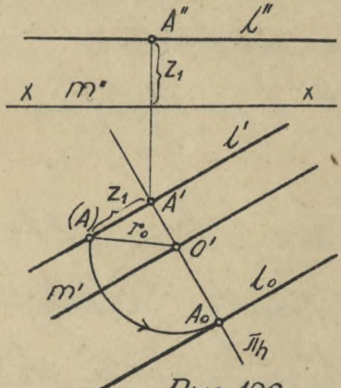
Zadanie 1. Około osi m leżącej na poziomej obrócić prostą l, przecinającą oś m w punkcie M tak, aż prosta padnie na poziomą. (Rys. 99). Na prostej l obierzemy dowolny punkt A i obrócimy go w poznany w ust. 25 zad. 2 sposób, około osi m, aż padnie na poziomą. Prosta l_0 łącząca punkt A_0 z punktem M' wyznacza położenie



Rys. 99.

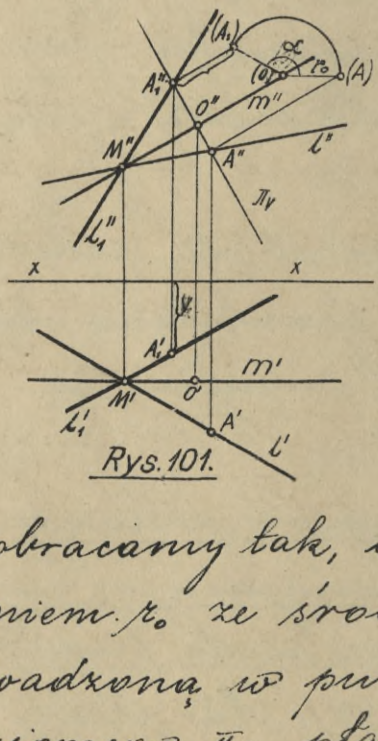
prostej l po dokonanym obrocie. -

Zadanie 2. Około osi m leżącej na poziomej, obrócić prostą l równoległą do niej, w ten sposób, aż prosta l padnie na poziomą. (Rys. 100).



Rys. 100.

Zadanie 3. Prostą l, przecinającą oś obrotu m, równoległą do pionowej, w punkcie M - obrócić o dany kąt α. (Rys. 101). Obracamy dowolny punkt prostej l około osi m (ust. 25 ćwiczenie) o dany kąt α i łączymy go ze stałym punktem M, otrzymując rzuty l_1' i l_1'' prostej l po obrocie.

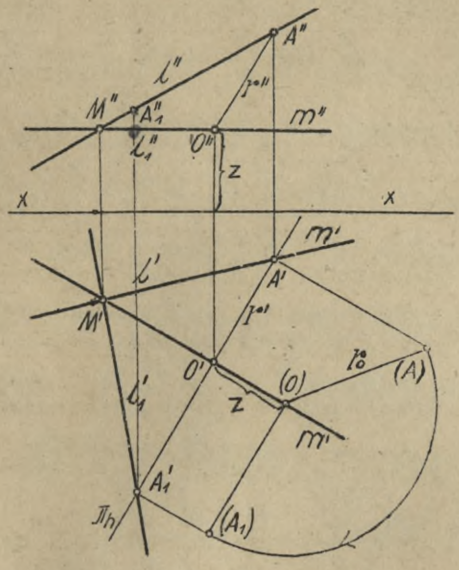


Rys. 101.

Zadanie 4. Dana jest oś obrotu równoległa do poziomej i prosta l przecinająca ją - obrócić prostą l około m tak, aby l była równoległą do poziomej. (Rys. 102).

Dowolny punkt A prostej l obracamy tak, aż łuk koła zakreślonego promieniem r_0 ze środka (O), przetnie prostą wyprowadzoną w punkcie (O) równolegle do śladu poziomego π_h płaszczyzny obrotu. Wysokość bowiem punktu A po obrocie, a więc punktu A_1, równa wtedy będzie odległości prostej m od płaszczyzny poziomej rzutów.

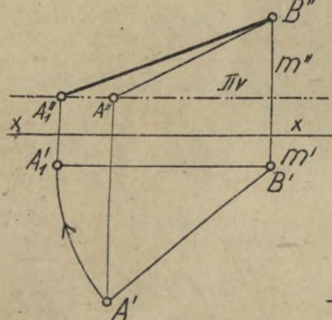
Zadanie 5. Wyznaczyć rzeczywistą wielkość



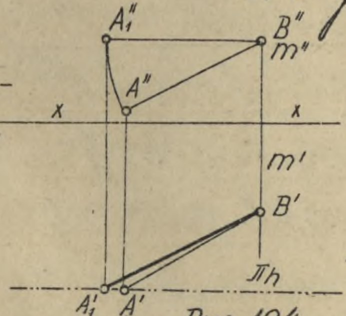
Rys. 102.

odcinka $A(A'A'')$ i $B(B'B'')$.

Przez jeden z punktów końcowych odcinka np. B poprowadzimy prostą prostopadłą do poziomej (Rys. 103) i około niej, jako osi, obrócimy punkt A tak, aby głębokość jego równa była głębokości punktu B. Odcinek $\overline{A_1B}$ równy co do długości odcinkowi AB zajmuje położenie równoległe do pionowej - jego więc rzut pionowy $\overline{A_1''B_1''}$ wyraża rzeczywistą wielkość odcinka $\overline{AB}$.



Rys. 103.

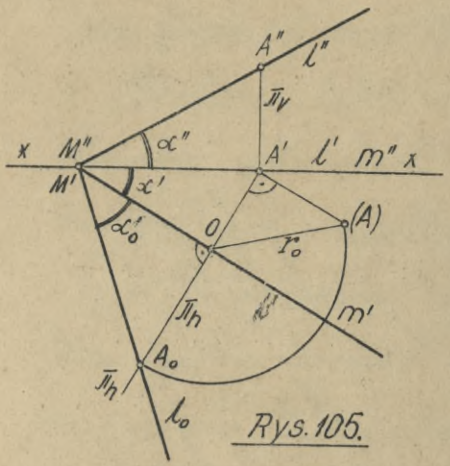


Rys. 104.

W rys. 104 nadaliśmy odcinkowi $\overline{AB}$ położenie równoległe do poziomej znajdując w ten sposób jego rzeczywistą wielkość równą rzutowi $A_1'B'$.

27. <u>Kład płaszczyzny.</u> Niechaj dana będzie oś obrotu m leżąca na poziomej (Rys. 105) i prosta <u>l</u> przecinająca tę oś a leżąca na pionowej. Zadaniem naszem jest obrócić prostą l, około osi m tak, aż prosta l padnie na płaszczyznę poziomą. W tym celu obieramy na prostej l dowolny punkt $A(A'A'')$, wyznaczamy ślady π_h, π_v

płaszczyzny obrotu prostopadłej do osi obrotu i przeprowadzamy obrót punktu A jak w zad. 2 ust. 25.



Rys. 105.

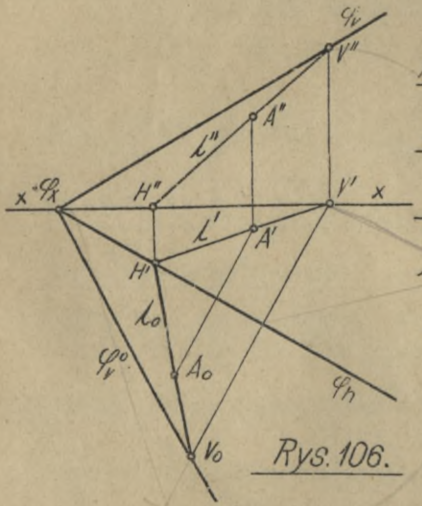
Punkt A_0 połączony z punktem $M' \equiv M''$ wyznacza kład l_0 prostej l. Ponieważ odcinek $\overline{M''A''}$ leży na pł. pionowej, więc przedstawia się w rzeczywistej wielkości — kład więc prostej l na poziomą wielkości tej nie zmieni czyli $\underline{M''A'' = M'A_0}$.

W stwierdzeniu tego faktu leży drugie rozwiązanie rozpatrywanego zadania. Zamiast bowiem obracać punkt A około prostej m, wystarczy zakreślić ze środka $M' \equiv M''$ łuk koła promieniem $\overline{M''A''}$ aż do przecięcia się ze śladem π_h płaszczyzny obrotu, a otrzymany punkt połączyć z punktem M'.

Proste l i m, wyznaczając płaszczyznę ε są równocześnie tej płaszczyzny śladami. Przez obrót prostej l około osi m i położenie jej na poziomą, dokonaliśmy, jak się wyrażamy, kładu płaszczyzny ε. Kąt α_0 zawarty między prostemi m i l_0, wyraża rzeczywistą wielkość kąta zawartego między prostemi l i m, więc między śladami płaszczyzny ε.

Kład płaszczyzny polega jednak nie tylko na „kładzie" śladu pionowego na pł. poziomą lub odwrotnie, ale także na kładzie wszystkich punktów i prostych danej płaszczyzny, przyczem ten kład punktów i prostych dokonywamy niekoniecznie przy równoczesnym kładzie odpowiedniego śladu. Przez wykonanie więc „kładu" płaszczyzny wielokąta płaskiego, którego rzuty są znane poznamy jego właściwy kształt i wielkość jego pola. Przez wykonanie kładu płaszczyzny wyznaczonej rzutami dwóch prostych poznamy prawdziwą wielkość kąta jaki te dwie proste tworzą.

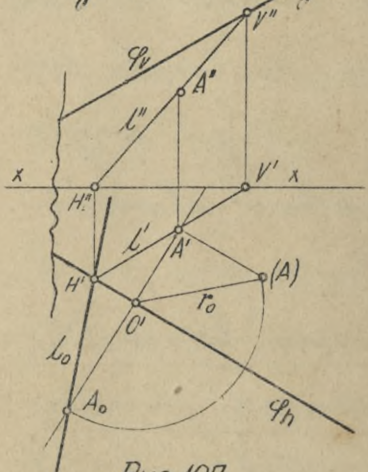
Kład płaszczyzny wogóle daje nam możność rozwiązywania całego szeregu zadań, w których w grę wchodzą stosunki miarowe, w których zatem chodzi o pewne wielkości.



Rys. 106.

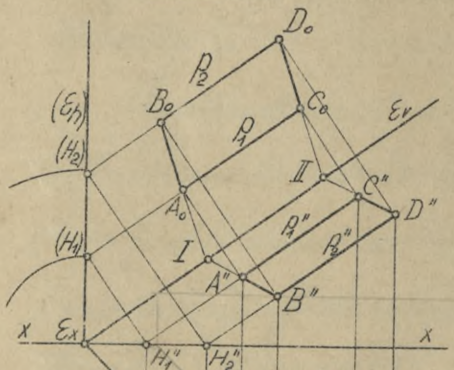
Zadanie 1. Wykonać kład płaszczyzny $\varphi,(\varphi_h, \varphi_v)$ wraz z prostą $l,(l'l")$ i punktem $A,(A'A")$ na tej płaszczyźnie leżącymi. – W sposób omówiony w ustępie poprzednim wykonamy kład dowolnego punktu V, obranego na śladzie pionowym φ_v a więc i kład samego śladu pionowego na poziomą. (Rys. 106). Prosta łącząca punkt V_0 ze śladem poziomym H' prostej l, jest kładem tej prostej. Aby wyznaczyć położenie kładu A_0 punktu A na prostej l_0 zauważyć wystarczy, że kład ten leżeć będzie na śladzie poziomym płaszczyzny obrotu, poprowadzonej przez punkt A prostopadle do osi obrotu, którą jest ślad poziomy φ_h płaszczyzny φ. Punkt A_0 jest więc punktem przecięcia się prostej l_0 z prostą wyprowadzoną z punktu A' prostopadle do φ_h.

Kład prostej l i punktu A płaszczyzny φ wykonać można także omijając kład śladu pionowego tej płaszczyzny. W przypadku gdy φ_x płaszczyzny φ nie leży w obrębie rysunku (Rys. 107) użycie konstrukcyi rysunku 106 jest niemożliwe. W tedy też obracamy punkt A około śladu φ_h na poziomą, a kład A_0 łączymy ze śladem H', otrzymując żądany kład płaszczyzny.



Rys. 107.

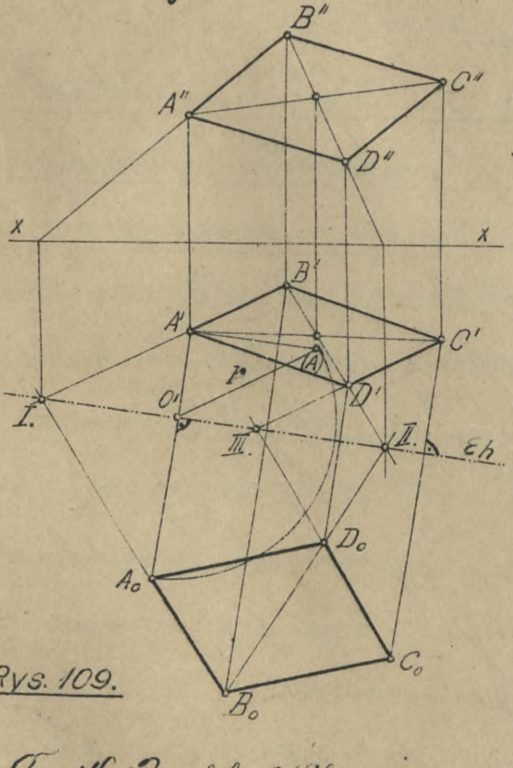
<u>Zadanie 2.</u> <u>Na pionową rzutów położyć płaszczyznę $\varepsilon(\varepsilon_h \varepsilon_v)$ wraz z leżącym na niej czworokątem $A(A'A'')$, $B(B'B'')$, $C(C'C'')$ i $D(D'D'')$</u> (Rys. 108). - Na płaszczyźnie danej śladami ε_h i ε_v wyznaczyliśmy dwie proste pionowo-tworzące $p_1(p_1' p_1'')$ i $p_2(p_2' p_2'')$ a na nich wierzchołki czworokąta.



Rys. 108.

Około śladu pionowego ε_v jako osi obrotu, położyliśmy ślad poziomy ε_h na pionową, posługując się kładem śladu poziomego H_1 prostej p_1. - Koło zakreślone promieniem $\overline{\varepsilon_x H_2'}$ z punktu ε_x, jako środka, przecina prostą (ε_h) w punkcie (H_2), który jest kładem śladu poziomego prostej p_2. Proste (p_1) i (p_2) wyprowadzone z punktów (H_1) i (H_2) równolegle do śladu ε_v są kładem prostych p_1 i p_2 na pionową rzutów. ~~(Proste prostopadłe do ε_v są kładem prostych p_1 i p_2 na pionową rzutów.)~~ Proste prostopadłe do ε_v z punktów A'', B'', C'', D'' poprowadzone wyznaczają na (p_1) i (p_2) kłady A_o B_o C_o D_o wierzchołków czworokąta.

Dokładność konstrukcji sprawdzić można przez przedłużenie boków $A''B''$ i A_oB_o, które przecinąc się winny w punkcie I leżącym na osi obrotu ε_v, podobnie jak proste $C''D''$ i C_oD_o przetną się przy dokładnej konstrukcji w punkcie II, leżącym również na prostej ε_v.

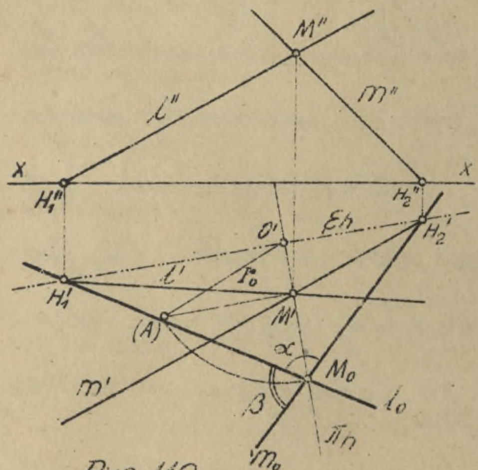


Rys. 109.

Najczęściej kładu pł. dokonujemy tak, jak to wskazaliśmy w rys. 107, bez kładu śladu tej płaszczyzny.

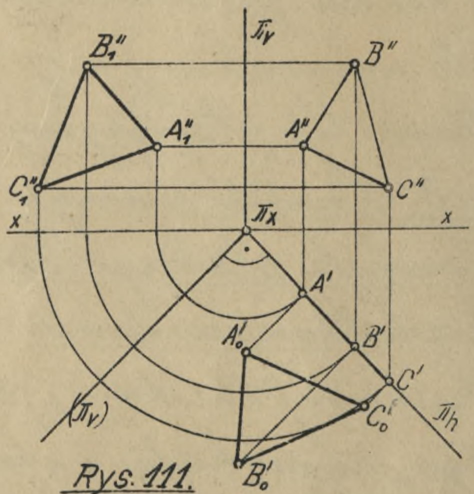
Zadanie 3. Znaleźć rzeczywistą wielkość czworokąta płaskiego, którego rzuty wierzchołków są dane. (Rys. 109). – Szukamy śladu ε_h płaszczyzny tego czworokąta i około tego śladu, jako osi obrotu obracamy jeden wierzchołek na poziomą. Obrót dalszych punktów wykonywamy uwzględniając, że boki i przekątne danego czworokąta przecinają oś obrotu ε_h, w punktach I, II, III, przez które każdy odnośnych prostych przejdą.

<u>Zadanie 4.</u> <u>Wyznaczyć rzeczywistą wielkość kąta, którego rzuty $l'l''$ i $m'm''$ ramion l i m i rzuty wierzchołka $M(M'M'')$ są dane.</u> (Rys. 110). – Postąpimy jako w zadaniu poprzedniem. Proste l i m obrócimy około śladu poziomego lub pionowego ich płaszczyzny na płaszczyznę rzutów. Wystarczy w celu dokonania obrotu prostych, obrócić wierzchołek $M(M'M'')$ kąta i kład jego M_0 połączyć ze śladami H_1 i H_2 ramion l i m.



Rys. 110.

<u>Zadanie 5.</u> <u>Wykonać kład płaszczyzny poziomo-rzucającej wraz z leżącym na niej trójkątem.</u> – Kład na płaszczyznę poziomą otrzymamy, odmierzając na prostopadłych w punktach A', B' i C' do prostej π_h poprowadzonych wysokości poszczególnych punktów.

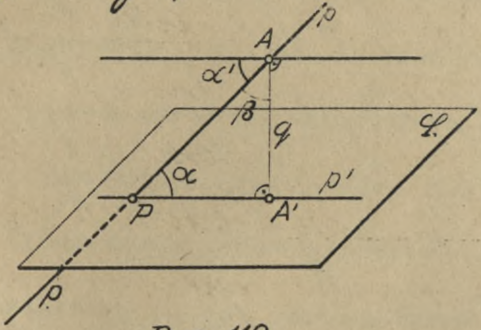


Rys. 111.

Sprawę kładu płaszczyzny π na poziomą rzutów tłomaczy dostatecznie rysunek 111.

28 <u>Kątem nachylenia prostej do pła-</u>

szczyzny nazywamy kąt jaki tworzy prosta ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę. Gdy chodzi więc o wyznaczenie kąta nachylenia prostej p do płaszczyzny φ (Rys. 112) wyznaczymy punkt przebicia się prostej p z płaszczyzną φ, a następnie punkt przebicia A' prostej q, wyprowadzonej z dowolnego punktu A prostej p prostopadle do płaszczyzny φ, z tą płaszczyzną.

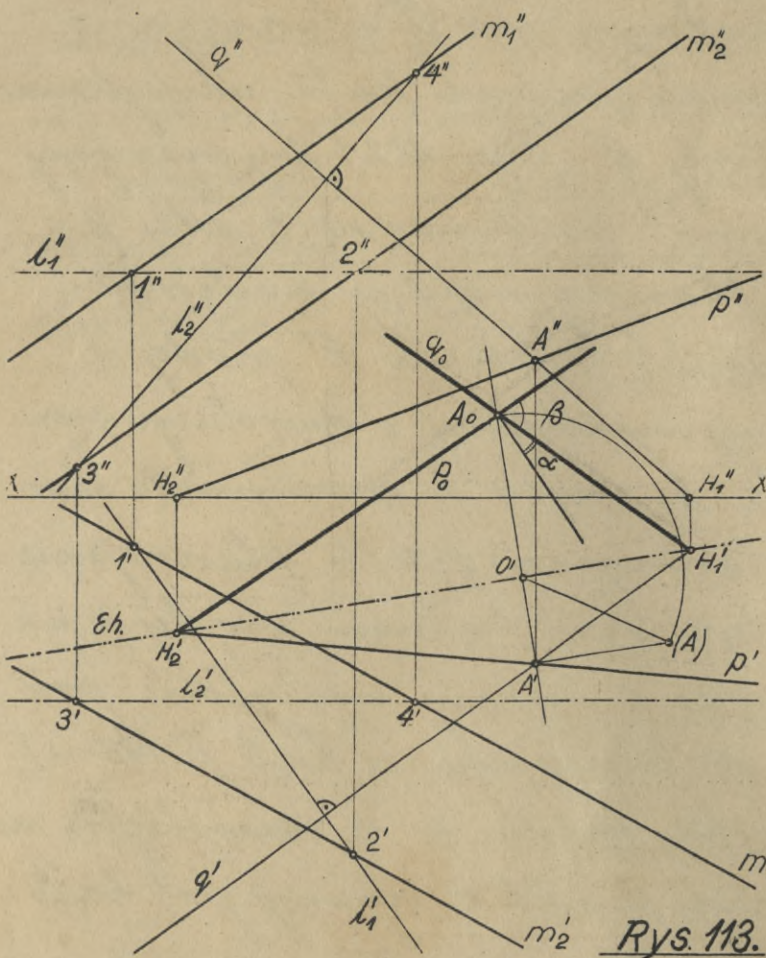


Rys. 112.

Prosta $p' \equiv PA'$ jest rzutem prostokątnym prostej p na płaszczyznę φ; kąt więc α mierzy nachylenie prostej p do płaszczyzny φ. Oczywiście, że kąt $\beta = (90 - \alpha)$, zaś kąt α', jaki zamyka prosta p z równoległą do p' przechodzącą przez punkt A, równy jest kątowi α.

Wystarczy wobec tego z dowolnego punktu prostej p poprowadzić prostopadłą q do danej płaszczyzny i wyznaczyć wielkość kąta o ramionach p i q.

Zadanie 1. Wyznaczyć wielkość kąta nachylenia prostej $p(p'p'')$ do płaszczyzny π danej dwiema prostemi równoległemi $m_1(m_1'm_1'')$ i $m_2(m_2'm_2'')$. (Rys. 113). — Z punktu A prostej p prowadzimy prostopadłą do płaszczyzny $\pi(m_1 m_2)$ i szukamy kąta nachylenia tych



Rys. 113.

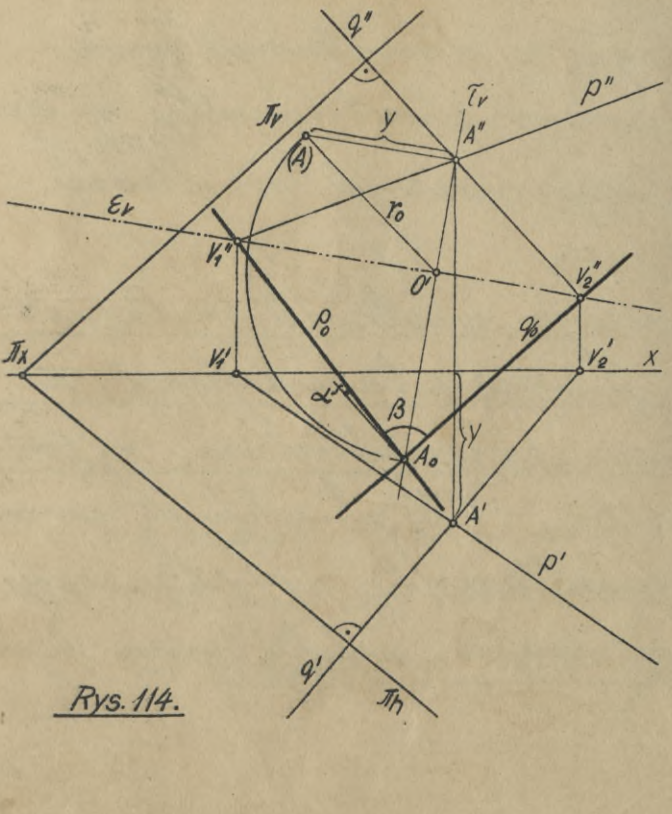
prostych.

Jeśli płaszczyzna π dana jest śladami, lub gdy, (~~lub gdy~~) ślady te z danych prostych wyznaczyć się dadzą, to konstrukcyjnie zadanie znacznie się upraszcza. (Patrz Rys. 114.).

<u>Zadanie 2.</u> <u>Wyznaczyć kąt nachylenia prostej $p(p'\,p'')$ do płaszczyzny poziomej.</u>

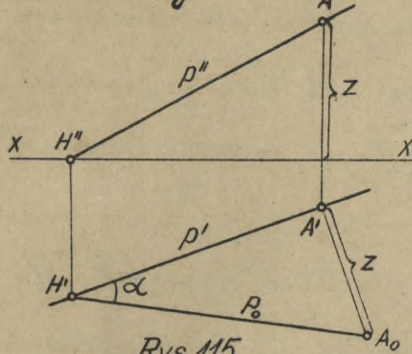
<u>Rozwiązanie 1:</u> Płaszczyznę poziomo rzucającą poprowadzoną przez prostą, kładziemy na poziomą - p_0 wyraża prostą p, zaś p' jest rzutem tej prostej na poziomą. (Rys. 115).

<u>Rozwiązanie 2:</u> Przez dowolny punkt $A\,(A'\,A'')$ prostej $p(p'\,p'')$ (Rys. 116)

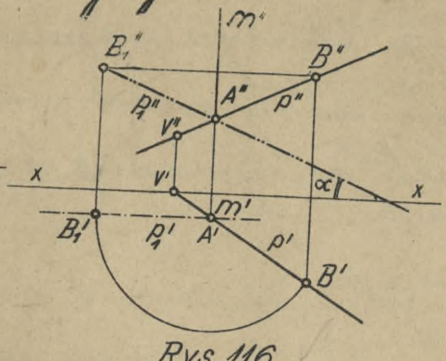


Rys. 114.

poprowadźmy prostą $m(m' m'')$ prostopadłą do poziomej i około niej jako osi obrotu obróćmy prostą p tak, aby po obrocie była równoległą do pionowej. W tym celu na prostej p przyjmujemy drugi punkt dowolny $B(B' B'')$ i ten około osi obracamy w położenie B_1 $(B_1' B_1'')$ takie, aby prosta p_1' była równoległą do osi x. Kąt, jaki prosta p_1'' zamyka z osią x-ów, względnie z dowolną prostą do niej równoległą, równy jest kątowi jaki prosta p zawiera z płaszczyzną poziomą rzutów.

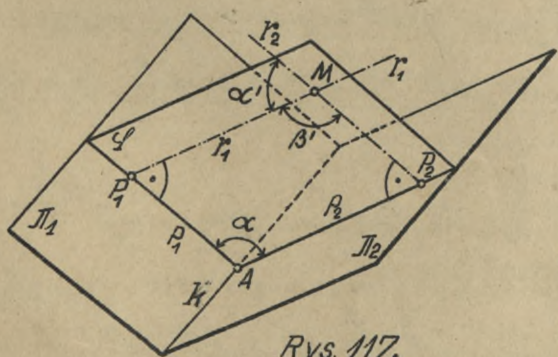


Rys. 115.



Rys. 116.

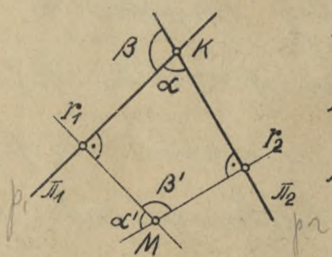
29. Kąt dwu płaszczyzn. — W dowolnym punkcie A krawędzi dwóch płaszczyzn π_1 i π_2 (Rys. 117) poprowadźmy płaszczyznę φ do tej krawędzi prostopadłą. Oczywiście, że i naodwrót krawędź k będzie do pł. φ, a więc i do wszystkich jej prostych prostopadłą, a zatem także prostopadłą do prostych przecięcia się p_1 i p_2 płaszczyzny φ z płaszczyznami π_1 i π_2. Proste p_1 i p_2 są zatem prostopadłe do



Rys. 117.

krawędzi k w punkcie A. Kąt, którego wierzchołkiem jest dowolny punkt A krawędzi k dwóch danych płaszczyzn, a którego ramionami są proste p_1 i p_2 prostopadłe do tej krawędzi a leżące na tych płaszczyznach nazywamy kątem nachylenia tych płaszczyzn.

Obierzmy na płaszczyźnie q dowolny punkt M i z punktu tego wyprowadźmy prostą r_1 prostopadłą do p_1 i r_2 prostopadłą do p_2 (Rys. 118). Jeżeli płaszczyzny π_1 i π_2 przyjmiemy jako prostopadłe do płaszczyzny rysunku - to z rysunku 118 najwyraźniej czytamy:



Rys. 118.

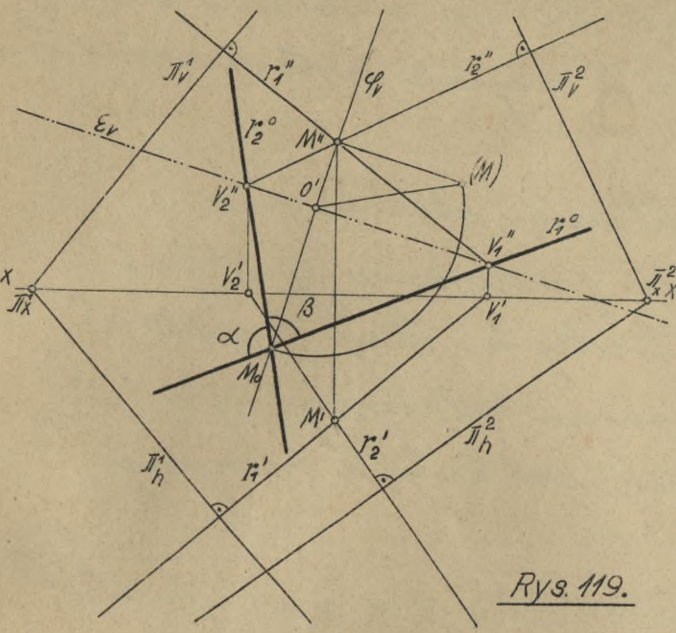
$$\alpha + \beta' = 180°$$
$$\alpha + \beta = 180°$$
zatem: $\beta = \beta'$

następnie: $\alpha + \beta' = 180°$
$$\alpha' + \beta' = 180°$$

więc: $\alpha = \alpha'$

Znaczy to, że wielkość kąta dwu płaszczyzn wyraża kąt, którego wierzchołkiem jest dowolny punkt przestrzeni, a którego ramiona są prostopadłe do tych płaszczyzn.

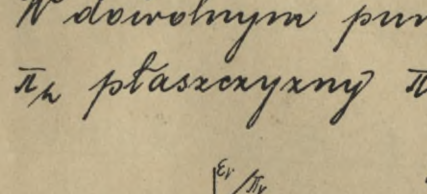
Niechaj dane będą dwie płaszczyzny $\pi^1(\pi_h^1 \pi_v^1)$ i $\pi^2(\pi_h^2 \pi_v^2)$. (Rys. 119). Celem wyznaczenia ich kąta nachylenia obieramy dowolny punkt $M(M' M'')$ w przestrzeni, z którego prowadzimy prostą $r_1(r_1' r_1'')$



Rys. 119.

prostopadłą do π^1 i prostą r_2 prostopadłą do π^2 i szukamy rzeczywistej wielkości kąta o ramionach r_1 i r_2, kładąc owe ramiona - w naszym wypadku na pionową płaszczyznę rzutów. Oczywiście, że w przypadku, gdy płaszczyzna jedna lub obie, wyznaczone będą dowolnemi prostemi nie zaś śladami, nic się w rozwiązaniu zadania nie zmieni.

<u>Zadanie 1.</u> <u>Znaleźć rzeczywistą wielkość kąta płaszczyzny dowolnej $\pi(\pi_h \pi_v)$ i pł. poziomej (Rys. 120).</u>
W dowolnym punkcie $H(H' H'')$ śladu poziomego π_h płaszczyzny π prowadzimy płaszczyznę $\varepsilon(\varepsilon_h \varepsilon_v)$ do śladu π_h prostopadłą. Kąt, którego wierzchołkiem jest punkt $H(H' H'')$, a ramionami ślad ε_h i krawędź k płaszczyzn π i ε, jest kątem nachylenia płaszczyzny π do płaszczyzny poziomej. Rzut pionowy tego kąta oznaczyliśmy literą α'' - rzuty poziome obu ramion ε_h i k' schodzą się. Rzeczywistą wielkość szukanego kąta α znajdziemy obra-



Rys. 120.

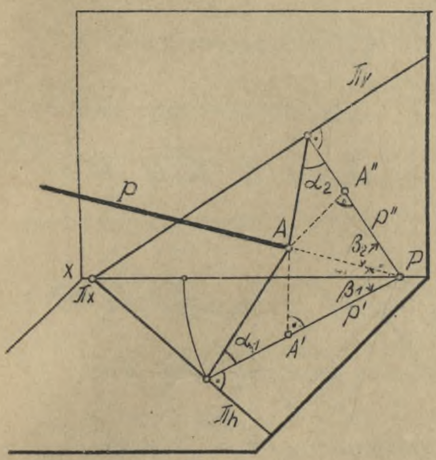
cając prostą k około osi ε_v i kładąc ją na pionową. Punkt $H(H'H'')$ znajdzie się po obrocie w punkcie H_1 na osi x, a krawędź k zajmie położenie oznaczone literą k_1.

Kąt α znajdziemy także kładąc płaszczyznę ε na poziomą około jej śladu poziomego ε_h. Kładem ujawni się kładem k_0 prostej k. Kąt $\beta = (180 - \alpha)$ nazywamy kątem zewnętrznym płaszczyzny π i pł. poziomej, w odróżnieniu od kąta α zwanego kątem wewnętrznym.

Prosta k, leżąca na płaszczyźnie π i prostopadła do śladu poziomego (pionowego) tej płaszczyzny nazywa się <u>linią największego spadu</u> tej płaszczyzny. <u>Kąt nachylenia dowolnej płaszczyzny do pł. rzutów wyraża się więc kątem nachylenia linii największego spadu tej płaszczyzny do płaszczyzny rzutów.</u>

<u>Zadanie 2.</u> <u>Przez dany punkt $M(M'M'')$ poprowadzić płaszczyznę nachyloną do pł. poziomej rzutów pod kątem α_1, a do pionowej pod kątem α_2.</u> – Przypuśćmy, że szukaną płaszczyzną jest płaszczyzna $\pi(\pi_h \pi_v)$ (Rys. 121). Z dowolnego punktu P przyjętego na osi x-ów poprowadzimy prostą p prostopadłą do owej płaszczyzny, a przebijającą ją w punkcie A. Kąt nachylenia tej prostej do płaszczyzny poziomej będzie

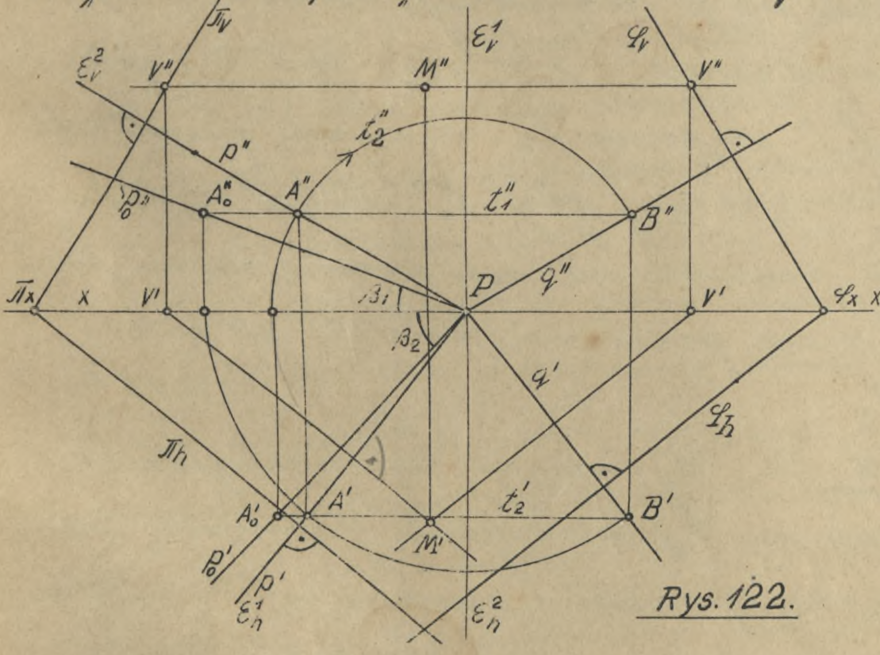
$\beta_1 = (90 - \alpha_1)$ do pł. pionowej rzutów $\beta_2 = (90° - \alpha_2)$.
Zadanie nasze ogranicza się do wyznaczenia



Rys. 121.

prostej p – żądana płaszczyzna przejdzie przez punkt M prostopadłe do prostej p.

Celem wyznaczenia położenia prostej p, obróćmy płaszczyznę poziomo-rzucającą $\varepsilon^1(p\,p')$ około śladu pionowego na pionową rzutów. Punkt P, dowolnie obrany na osi x, położenia nie zmieni, a prosta p padnie na pionową rzutów jako p_0'', (Rys. 122) przyczem kąt $(x\,P\,p_0'') = \beta_1 = (90° - \alpha_1)$



Rys. 122.

Obróćmy następnie płaszczyznę pionowo rzucającą $\varepsilon^2(p\,p'')$ około śladu poziomego na poziomą rzutów, to prosta p padnie na poziomą rzutów jako p_0', a kąt $(x\,P\,p_0') = \beta_2 = (90 - \alpha_2)$.

Odcinki $\overline{P A_0''} = P A_0'$ odmierzone na prostych p_0'' i p_0' reprezentują kłady odcinka $\overline{AP}$ (Rys. 122) raz na pionową, drugi raz na poziomą.

Niechaj teraz płaszczyzna ε_1 wraz z prostą p leżąca na pionowej (po dokonanym poprzednio obrocie) obraca się około śladu pionowego. Punkt A zakreśla łuk koła $t_1 (t_1' t_1'')$. Równocześnie niechaj płaszczyzna ε^2 leżąca na poziomej wraz z prostą p, obraca się około śladu poziomego ε_h^2 - to punkt A zakreśli łuk koła $t_2 (t_2' t_2'')$.

Punkt przecięcia się łuków t_1 i t_2 jest punktem A szukanej prostej p; rzuty t_1' i t_2' przecinają się w punkcie A', który jest rzutem poziomym, a t_1'' i t_2'' przecinają się w punkcie A'', który jest rzutem pionowym punktu A.

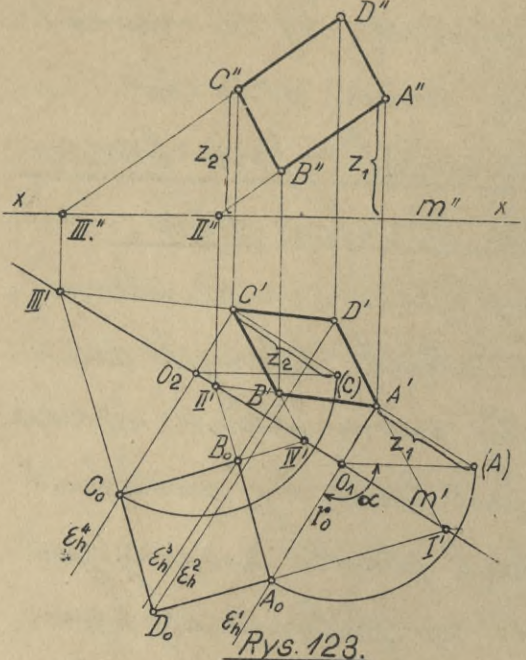
Płaszczyzna $\pi (\pi_h \pi_v)$ przechodząca przez punkt $M (M' M'')$ prostopadle do p rozwiązuje zadanie. Zadanie ma dwa rozwiązania - $\pi (\pi_h \pi_v)$ i $S (S_h S_v)$ gdy - jak w Rys. 122 t_1'' przecina t_2'' w dwóch punktach A'' i B'', jedno rozwiązanie, gdy t_1'' styka się z kołem t_2'' i wreszcie zadanie nie ma rozwiązania rzeczywistego, gdy t_1'' nie przecina koła t_2'' w punktach rzeczywistych.

30. <u>Ćwiczenia.</u> 1. Wyznaczyć kąt nachylenia dowolnej płaszczyzny a.) z płaszczyzną pionową rzutów; b.) z płaszczyzną poziomo-rzucającą.; c.) z płaszczyzną pionowo-rzucającą; d.) z pł. równoległą do osi x-ów; e.) z pł. równoległą do poziomej rzutów f.) z pł. równoległą do pionowej rzutów.

2.) wyznaczyć kąt jaki zawiera płaszczyzna poziomo-rzucająca a.) z pionowo rzucającą, b.) z równoległą do osi x-ów, c.) przechodzącą przez oś x-ów.

31. <u>Rzuty dowolnie w przestrzeni leżącego, określonego, płaskiego wielokąta.</u> — W ustępie 12 poznaliśmy sposoby kreślenia rzutów wielokątów <u>nieokreślonych</u>, t. zn. takich, których ani wielkość, ani też kształt nie były nam dane, a zadanie uwarunkowane było jedynie tem, by wielokąt był <u>płaski</u>. Gdy jednak wielokąt płaski znany jest nam co do kształtu i wielkości, a położenie jego w przestrzeni, zaczem nieuwarunkowane, ma być dowolne, to rzuty tego wielokąta znajdziemy w sposób następujący: Na jednej z płaszczyzn rzutów narysujemy żądany wielokąt, przyjmiemy nadto na tej płaszczyźnie dowolną prostą i około niej, jako osi, obrócimy dany wielokąt o dowolny kąt, podnosząc go z kładu w przestrzeń.

Rys. 123 podaje obrót kwadratu $A_o B_o C_o D_o$ przyjętego na poziomej, około osi m o kąt α. Przez punkt A_o prowadzimy płaszczyznę obrotu, rysując jedynie potrzebny nam do konstrukcyi jej ślad poziomy ε_h^1. Ze środka obrotu O_1 promieniem r_o, zakreślamy łuk koła odpowiadający przyjętemu kątowi α, o jaki kwadrat w przestrzeni podnieść zamierzamy. Łuk koła



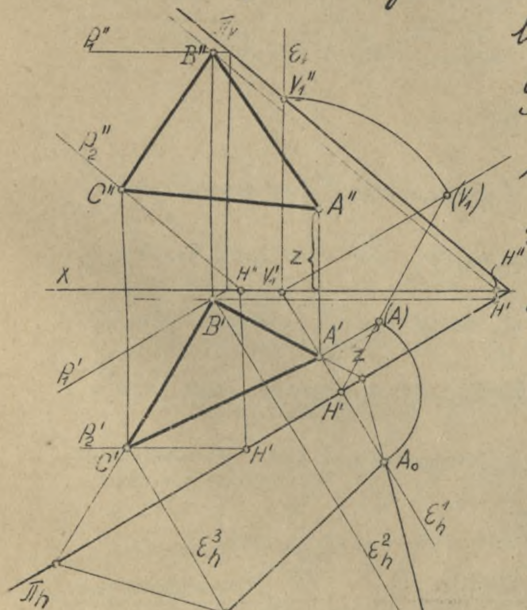
Rys. 123.

nakreśliliśmy na położonej około śladu ε_h^1 na pł. poziomą, płaszczyznie obrotu; obrócony punkt (A) należy podnieść w przestrzeń co uskutecznimy, prowadząc prostopadłą z tego punktu do ε_h^1. Równocześnie odcinek $\overline{A'(A)}$ wyraża wysokość, podniesionego w przestrzeń punktu A. Dalsze punkta znajdziemy, uwzględniając ten fakt, że boki kwadratu, oś obrotu m przecinają. Prosta więc A_oD_o przecina oś m w punkcie $\underline{I}'$, który połączony z A' daje rzut tej prostej podniesionej w przestrzeń. Ślad poziomy ε_h^2 płaszczyzny obrotu przechodzącej przez punkt D_o wyznacza punkt D'. W ten sposób postępując, znajdziemy rzuty poziome wszystkich czterech wierzchołków kwadratu, obróconego około osi m o kąt α.

Co się tyczy rzutu pionowego, to punkt A" jest już nam znany. Punkt B" leżeć będzie na prostej $\underline{II}$"A". Aby zachować możliwą dokładność w konstrukcji, punkt C" znaleźliśmy nie przy pomocy punktu IV" - gdyż przecięcie się prostej C"IV" z prostą C'C" odbyłoby się pod kątem zbyt ostrym - lecz znaliczyliśmy wprost wysokość punktu C przy pomocy jego kładu. Punkt D" leżeć będzie oczywiście na prostej określonej punktami III" i C".

32. <u>Rzuty określonego wielokąta leżącego na danej płaszczyźnie.</u> - Jeżeli wielokąt leżeć ma na pewnej, śladami danej płaszczyźnie - to w tym wypadku „kąt podnoszenia" z kładu jest znany, równy mianowicie kątowi nachylenia tej płaszczyzny do tej płaszczyzny rzutów, na której wielokąt jest dany.-

Przykładem omawianej zagadnienia kwestyi jest Rys. 124, gdzie dane są ślady π_h, π_v płaszczyzny π i na poziomej leżący <u>trójkąt równoboczny $A_0 B_0 C_0$.</u> Przy pomocy płaszczyzny $\varepsilon^1(\varepsilon^1_h\ \varepsilon^1_v)$ wyznaczyliśmy kąt β, jaki pł. π zawiera z poziomą rzutów i około π_h podnieśli punkt A_0 na pł. π.

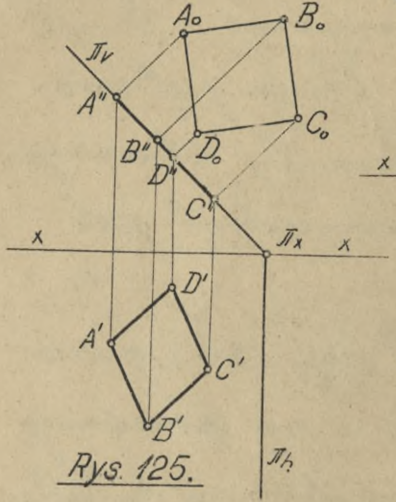


Rys. 124.

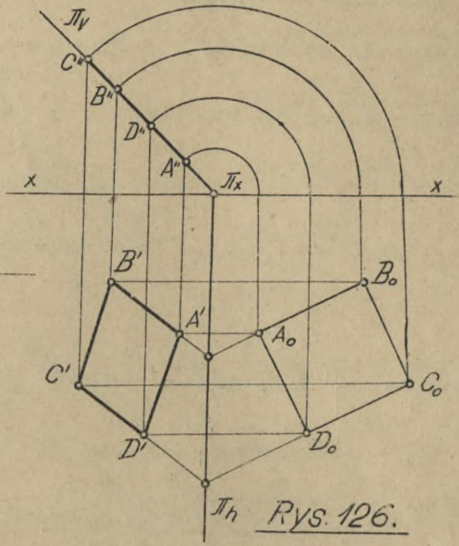
W poznany już sposób podniesiemy dalsze wierzchołki, znajdując najpierw ich rzuty poziome B' i C'. Rzut pionowy A" punktu A znaleźliśmy uwzględniając jego <u>wysokość</u> równą odcinkowi A'(A).

Rzut pionowy B" punktu B wyznaczyliśmy przy pomocy prostej $p_1(p_1'\ p_1'')$ poziomo-tworzącej pł. π. Punkt C" wreszcie otrzymaliśmy za pośrednictwem prostej pionowo tworzącej poprowadzonej przez punkt C na płaszczyźnie π.

<u>Zadanie 1.</u> <u>Wyznaczyć rzuty kwadratu leżącego na płaszczyźnie pionowo-rzucającej.</u> — Rozwiązanie zadania widoczne jest bezpośrednio z Rys. 125. Rzuty poziome $A'B'C'D'$ wierzchołków wyznaczyliśmy, odmierzając ich głębokości równe odcinkom $\overline{A_oA''}$, $\overline{B_oB''}$, $\overline{C^oC''}$, $\overline{D^oD''}$. —

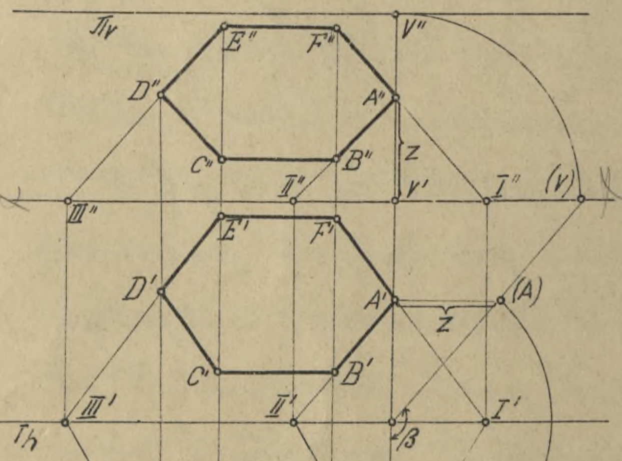


Rys. 125.



Rys. 126.

Gdy kwadrat dany jest na poziomej, to konstrukcję wyznaczającą rzuty tego kwadratu, podniesionego na pł. pionowo-rzucającą podaje Rys. 126.

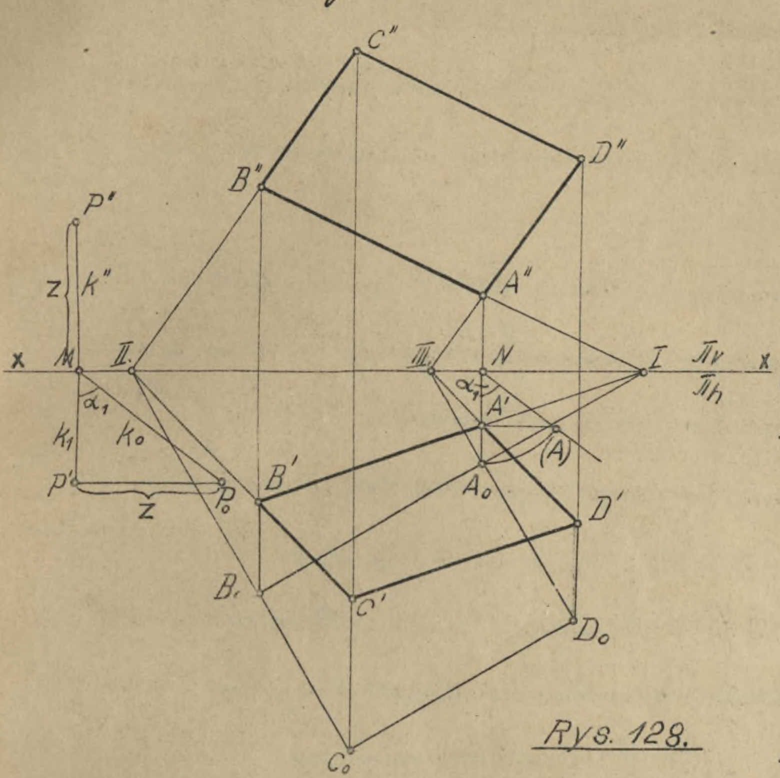


Rys. 127.

<u>Zadanie 2.</u> <u>Wyznaczyć rzuty umiarowego sześciokąta, leżącego na płaszczyźnie π (π_h π_v) równoległej do osi x-ów</u> (Rys. 127.).

Zadanie 3. Znając kład $A_0B_0C_0D_0$ (Rys. 128) wykreślić rzuty prostokąta leżącego na płaszczyźnie π przechodzącej przez oś x, a wyznaczonej punktem $P(P'P'')$.

Celem wyznaczenia kąta nachylenia α płaszczyzny π do poziomej wykonajmy kład na poziomą, linii największego spadu $k(k'k'')$ płaszczyzny π. W tym celu kreślimy w punkcie P' prostopadłą do k' i odmierzamy $\overline{P'P_0} = \overline{MP''} = z$. Kąt (P_0MP') jest szukanym kątem α_1, o jaki obrócimy nasz prostokąt około osi z-ów, sprowadzając go tym sposobem na płaszczyznę π.



Rys. 128.

Podnosimy o kąt α_1 punkt A, znajdując jego rzut poziomy A' i pionowy A'', przyczem $\overline{A'(A)} = \overline{A''N}$ jest wysokością punktu A. Rzuty dalszych wierzchołków otrzymamy, obracając w poznany w ust. 26 sposób, boki prostokąta, przecinające oś obrotu w punktach $\overline{I}$, $\overline{II}$ i $\overline{III}$.

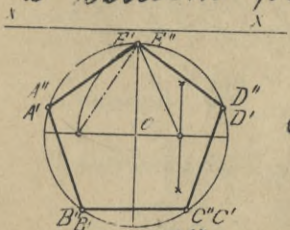
33. Ćwiczenia. 1.) Wyznaczyć punkt przecięcia się trzech płaszczyzn $\varepsilon^1(\varepsilon^1_h \varepsilon^1_v)$, $\varepsilon^2(\varepsilon^2_h \varepsilon^2_v)$ i $\varepsilon^3(\varepsilon^3_h \varepsilon^3_v)$.

2. Przez prostą $l(l'l'')$ poprowadzić pł ε prostopa-

dłą do danej płaszczyzny $\pi(\pi_h \pi_v)$.

Przez dowolny punkt A prostej l poprowadźmy prostą m prostopadłą do pł. π, to proste l i m wyznaczają płaszczyznę $\varepsilon = (l.m)$ prostopadłą do π.

3. Wyznaczyć rzeczywistą wielkość pięcioboku umiarowego $(ABCDE)$, którego rzut poziomy nakrywa się z rzutem pionowym.



Uwaga: Pięciobok ten leży na płaszczyźnie dwusiecznej przechodzącej przez drugą i czwartą część przestrzeni.

4. Wyznaczyć płaszczyznę symetrji kąta nachyleń dwóch danych płaszczyzn $\pi(\pi_h \pi_v)$ i $\varepsilon(\varepsilon_h \varepsilon_v)$.

5. Dany jest trójkąt (ABC) leżący na płaszczyźnie $\pi(\pi_h \pi_v)$; wyznaczyć punkty osobliwe tego trójkąta.

6. Dane są trzy punkty ABC i płaszczyzna $\pi(\pi_h \pi_v)$. Wyznaczyć na pł. π punkt D równo oddalony od punktów A, B i C.

Poprowadźmy przez środek O koła opisanego na trójkącie ABC prostą l prostopadłą do płaszczyzny (ABC) i wyznaczmy punkt $D = (l \cdot \pi)$ przebicia się tej prostej z płaszczyzną π.

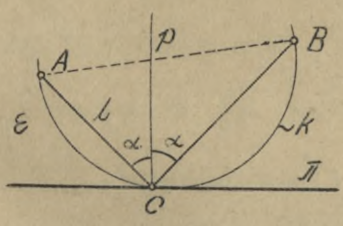
7. Obrócić punkt A około dowolnie (dowolnie) w przestrzeni leżącej prostej l tak, aby po obrocie padł na daną płaszczyznę $\pi(\pi_h \pi_v)$.

Poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę obrotu τ prostopadłą do l i wyznaczmy krawędź $k = (\tau \cdot \pi)$ przecięcia się płaszczyzn ε i π, to punkt A po dokonanym obrocie musi się znajdować na tej krawędzi.

8. Na płaszczyźnie $\pi_1(\pi_h, \pi_v)$ leży punkt A, a na pł. $\varepsilon_1(\varepsilon_h, \varepsilon_v)$ punkt B; na danych płaszczyznach wyznaczyć najkrótszą drogę, łączącą punkty A i B.

Obróćmy pł. ε wraz z punktem B tak około krawędzi $l = (\pi . \varepsilon)$ płaszczyzn π i ε, aż padnie na pł. π; otrzymany po obrocie punkt B_0 połączmy z punktem A, to odcinek $\overline{AB_0}$ rozwiązuje zadanie.

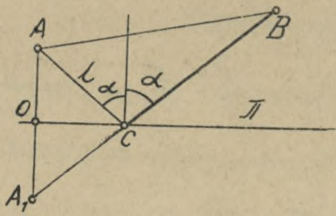
9. Dane dwa punkty A i B i kierunek promienia światła l, przechodzącego przez A. Wyznaczyć taką płaszczyznę π, by promień l po odbiciu przeszedł przez punkt B i był prostopadły do l.



Na płaszczyźnie $\varepsilon = (l . B)$ zakreślamy koło k o średnicy $\overline{AB}$ i punkt C, przecięcia się koła k z prostą l, połączmy z punktem B. W otrzymanym trójkącie prostokątnym ABC społówmy kąt prosty i poprowadźmy płaszczyznę π prostopadłą do dwusiecznej p.

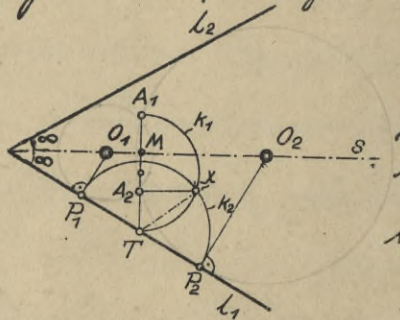
Na rysunku przyjęto płaszczyznę ε za płaszczyznę rysunku, a pł. π prostopadłą do pł. rysunku.

10. Dana płaszczyzna π, (π_h, π_v) i dwa punkty $A(A' A'')$ i $B(B' B'')$; wyznaczyć kierunek światła przechodzącego przez punkt A, aby po odbiciu od płaszczyzny π przeszedł przez punkt B.



Na prostej poprowadzonej z punktu A prostopadle do płaszczyzny π odłóżmy odcinek $\overline{OA_1} = \overline{OA}$, wyznaczmy punkt C przebicia prostej BA_1 z płaszczyzną π, to prosta AC wyznacza kierunek światła.

11. Na płaszczyźnie $\pi_1 (\pi_2, \pi_v)$ dane są proste l_1, l_2 i punkt A_1. Wyznaczyć środki kół stycznych do prostych l_1 i l_2, a przechodzących przez p. A.



Z punktu A_1 poprowadźmy prostą prostopadłą do dwusiecznej s (kąta nachylenia prostych l_1 i l_2) i odłóżmy odcinek $\overline{MA_2} = \overline{MA_1}$. Aby wyznaczyć środki kół stycznych np. do prostej l_1, a przechodzących przez punkty A_1 i A_2, przedłużmy prostą A_1A_2 aż do punktu T przecięcia się z prostą l_1, zakreślmy na odcinku $\overline{AT}$ jako na średnicy koło k_1 i z punktu A_2 poprowadźmy $\overline{A_2X} \perp A_1T$. Zakreślmy następnie z punktu T jako środka koło k_2 o $r = \overline{TX}$; wyznaczmy punkty P_1 i P_2 przecięcia się koła k_2 z prostą l_1 i poprowadźmy w tych punktach proste prostopadłe do l_1. Proste te przetną symetralną s w punktach O_1 i O_2, które są środkami szukanych kół, gdyż z rysunku mamy:

$$\overline{TA_1} \cdot \overline{TA_2} = \overline{TX}^2 = \overline{TP_1}^2 = \overline{TP_2}^2.$$

12. Dane dwa punkty A, B i prosta $l(l'l'')$, wyzna-

szyć prostokąt o przekątni AB, którego trzeci wierzchołek leży na prostej l.

Przez środek O odcinka $\overline{AB}$ i przez prostą l przesuwamy płaszczyznę $\varepsilon = (O.l)$; na pł. ε zakreślamy z punktu O jako środka koło k o promieniu $r = \overline{OA} = \overline{OB}$ i wyznaczamy punkty przecięcia się prostej l z kołem k.

13. Dane dwie płaszczyzny $\pi, (\pi_h, \pi_v)$, $\varepsilon, (\varepsilon_h, \varepsilon_v)$ i prosta $l\,(l'l'')$; przez prostą l przesunąć taką płaszczyznę φ, aby krawędzie $k_1 = (\pi \cdot \varphi)$ i $k_2 = (\varepsilon \cdot \varphi)$ przecięcia się płaszczyzn π i ε z płaszczyzną φ były do siebie <u>prostopadłe.</u>

Wyznaczmy punkty $A = (l \cdot \pi)$, $B = (l \cdot \varepsilon)$ przebicia się prostej l z płaszczyznami π i ε, a nadto krawędź $m = (\pi \cdot \varepsilon)$ płaszczyzn π i ε. Na płaszczyźnie $\tau = (m \cdot O)$, przechodzącej przez m i środek O odcinka $\overline{AB}$, zakreślmy z punktu O jako środka koło k o promieniu $r = \overline{OA} = \overline{OB}$, i wyznaczmy punkty C i D przecięcia się tego koła z prostą m. Punkty C, D wraz z punktami A i B rozwiązują zadanie.

14. Dana prosta $l\,(l'\,l'')$ i dwie płaszczyzny $\varepsilon, (\varepsilon_h\, \varepsilon_v)$, tat $\pi, (\pi_h\, \pi_v)$; wyznaczyć na prostej l środki kul stykających się z danemi płaszczyznami.

Środki O_1 i O_2 tych kul schodzą się z punktami przebicia prostej l z pł. dwusiecznemi φ_1 i φ_2 kątów nachyleń danych płaszczyzn ε i π.

15. Dany punkt A na płaszczyźnie $\pi, (\pi_h, \pi_v)$ i

tat.

i punkt $B(B'B'')$ dowolnie w przestrzeni leżący; wyznaczyć środek kuli przechodzącej przez punkt B, a stycznej w punkcie A do płaszczyzny π.

W punkcie A poprowadźmy prostą prostopadłą do π i wyznaczmy punkt przebicia tej prostej z płaszczyzną symetryi odcinka $\overline{AB}$.

16. Dana płaszczyzna $\pi, (\pi_h, \pi_v)$ i trzy punkty A, B, C, leżące na płaszczyźnie $\varepsilon, (\varepsilon_h, \varepsilon_v)$; wyznaczyć środek O kuli K stycznej do pł. π, a przechodzącej przez punkty A, B, C.

Poprowadźmy, przez środek M koła k_1, opisanego na trójkącie (ABC), prostą l prostopadłą do pł. ε tego trójkąta, to na prostej l znajduje się środek O kuli K. Przez prostą l poprowadźmy płaszczyznę φ prostopadłą do pł. π i wyznaczmy krawędzie $m_1 = (\varphi \cdot \varepsilon)$ i $m_2 = (\varphi \cdot \pi)$ przecięcia się tej płaszczyzny z płaszczyznami ε i π. Płaszczyzna φ przetnie kulę K w kole k_2, które jest styczne do prostej m_2 i przechodzi przez punkty 1 i 2, przecięcia się prostej m_1 z kołem k_1. Wykonajmy kład płaszczyzny φ wraz z punktami 1, 2 i prostą m_2, to wyznaczony środek O koła k_2 — przechodzącego przez punkty 1 i 2 a stycznego do prostej m_2 (ćwiczenie 11) — jest szukanym środkiem kuli K.

17. Dane są dwie proste równoległe a i b; wyznaczyć oś walca obrotowego o promieniu $r = 5\,cm$, któ-

rego tworzącemi są proste a i b.

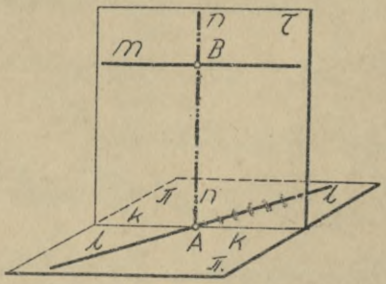
Poprowadźmy płaszczyznę ε prostopadłą do a, i wyznaczmy punkty A i B przebicia się prostych a i b z płaszczyzną ε. Przez środek O_1 — koła k, o r = 5 cm. leżącego na pł. ε a przechodzącego przez punkty A i B — poprowadźmy prostą m, prostopadłą do pł. ε, to prosta ta rozwiązuje zadanie.

18. Dane są trzy proste skośne a, b i c. Prosta a jest tworzącą, a proste b, i c są stycznemi walca obrotowego; wyznaczyć oś tego walca.

Poprowadźmy przez proste b i c płaszczyzny ε_1 i ε_2 równoległe do prostej a, (a temsamem styczne do walca), a nadto płaszczyznę π prostopadłą do a. Wyznaczmy punkt A przebicia się prostej a z pł. π, a nadto krawędzie $l_1 = (\pi \cdot \varepsilon_1)$ i $l_2 = (\pi \cdot \varepsilon_2)$ przecięcia się pł. π z płaszczyznami ε_1 i ε_2. Na pł. π wyznaczmy środki O_1 i O_2 kół stycznych do prostych l_1 i l_2, a przechodzących przez punkt A (ćwiczenie 11), i w punktach tych poprowadźmy proste m_1 i m_2 prostopadłe do pł. π. Proste m_1 i m_2 (równoległe do prostej a) są osiami walców obrotowych.

19. Wyznaczyć najkrótszą odległość dwóch prostych skośnych l i m.

Przez prostą l poprowadźmy płaszczyznę π równoległą do prostej m, a przez prostą m płaszczyznę τ prostopadłą do pł. π. Wyznaczmy krawędź $k=(\pi\cdot\tau)$ płaszczyzn π i τ i w punkcie $A=(l\cdot k)$, przecięcia się prostych l i k, poprowadźmy prostą n prostopadłą do płaszczyzny π. Prosta n przetnie się z prostą m w punkcie $B=(n\cdot m)$, a odcinek $\overline{AB}$ wyznacza najkrótszą odległość prostych l i m.-



Rozdział V.

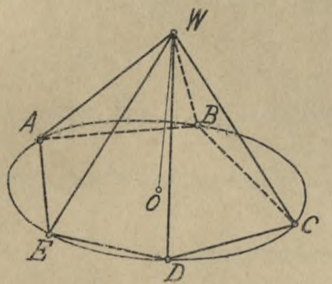
Wielościany.-

34. Określenie i podział wielościanów.-

Utwór przestrzenny, ograniczony wielokątami płaskimi nazywamy wielościanem. Wielokąty owe nazywamy ścianami, a boki tych wielokątów krawędziami wielościanu. W każdej krawędzi schodzą się dwie ściany. Wierzchołki wielokątów są równocześnie wierzchołkami wielościanu, w których schodzą się przynajmniej trzy krawędzie i trzy ściany wielościanu.

Do wielościanów należą między innymi t. zw. ostrosłupy i graniastosłupy. Ostrosłup ograniczony jest jednym wielokątem, zwanym podstawą i trójkątami, które tworzą ściany boczne ostrosłupa. Punkt, w którym schodzą się wierzchołki ścian boczcznych jest wierzchołkiem ostrostupa.

Jeżeli podstawa ostrostupa jest wielokątem, na którym opisać można koło, który posiada zatem środek geometryczny a rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy schodzi się z tym środkiem - to ostrostup nazywamy prostym. (Rys. 129).



Rys. 129.

Jeżeli podstawą ostrostupa prostego jest wielokąt umiarowy - to ostrostup nazywać będziemy umiarowym.

Jeżeli podstawą ostrostupa jest n-kąt to ostrostup nazywa się n-ścienny, a ilość jego ścian wynosi (n + 1).

"Wielościan ograniczony dwoma przystającymi wielokątami, których płaszczyzny są równoległe i równoległobokami, których bokami przeciwległymi są dwa odpowiednie boki wielokątów, nazywamy graniastostupem.

Owe wielokąty stanowią podstawy, a równoległoboki ściany boczne graniastostupa.

Proste przecięcia się ścian bocznych tworzą krawędzie boczne, boki zaś podstawy są krawędziami podstawowemi graniastostupa względnie ostrostupa."[1] -

35. Rzuty wielościanów. Dla nadania rzutom

[1] Jeżeli krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy - to graniastostup nazywa się prostym w odróżnieniu od ukośnego. -

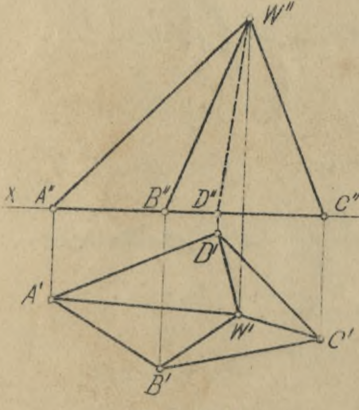
wielościanów większej przejrzystości rysujemy je przy założeniu, że wielościan jest utworem materyalnym i nieprzeźroczystym. W następstwie tego założenia w widoku z przodu z punktu leżącego w nieskończoności, czyli w rzucie pionowym, pewne krawędzie wielościanu zakryte będą ścianami przedniemi. Rz. ty pionowe tych krawędzi nie oznaczymy liniami pełnemi, lecz przerywanemi.

Analogicznie przedstawi się sprawa w rzucie poziomym, który uważać można za widok z góry, z punktu leżącego w nieskończoności.

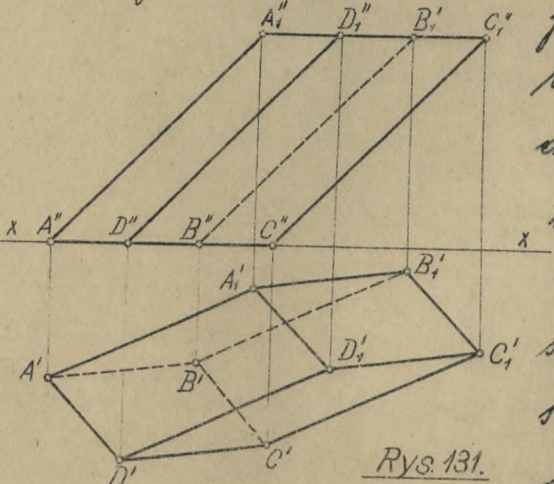
W przypadkach wątpliwych użyjemy metody badania krawędzi niewidocznych, poznanej w ust. 18. str. 43.

Rys. 130 podaje rzuty czworościennego ostrosłupa ukośnego, którego podstawa znajduje się na płaszczyźnie poziomej.

Rys. 131 przedstawia graniastosłup, czworościenny, ukośny.

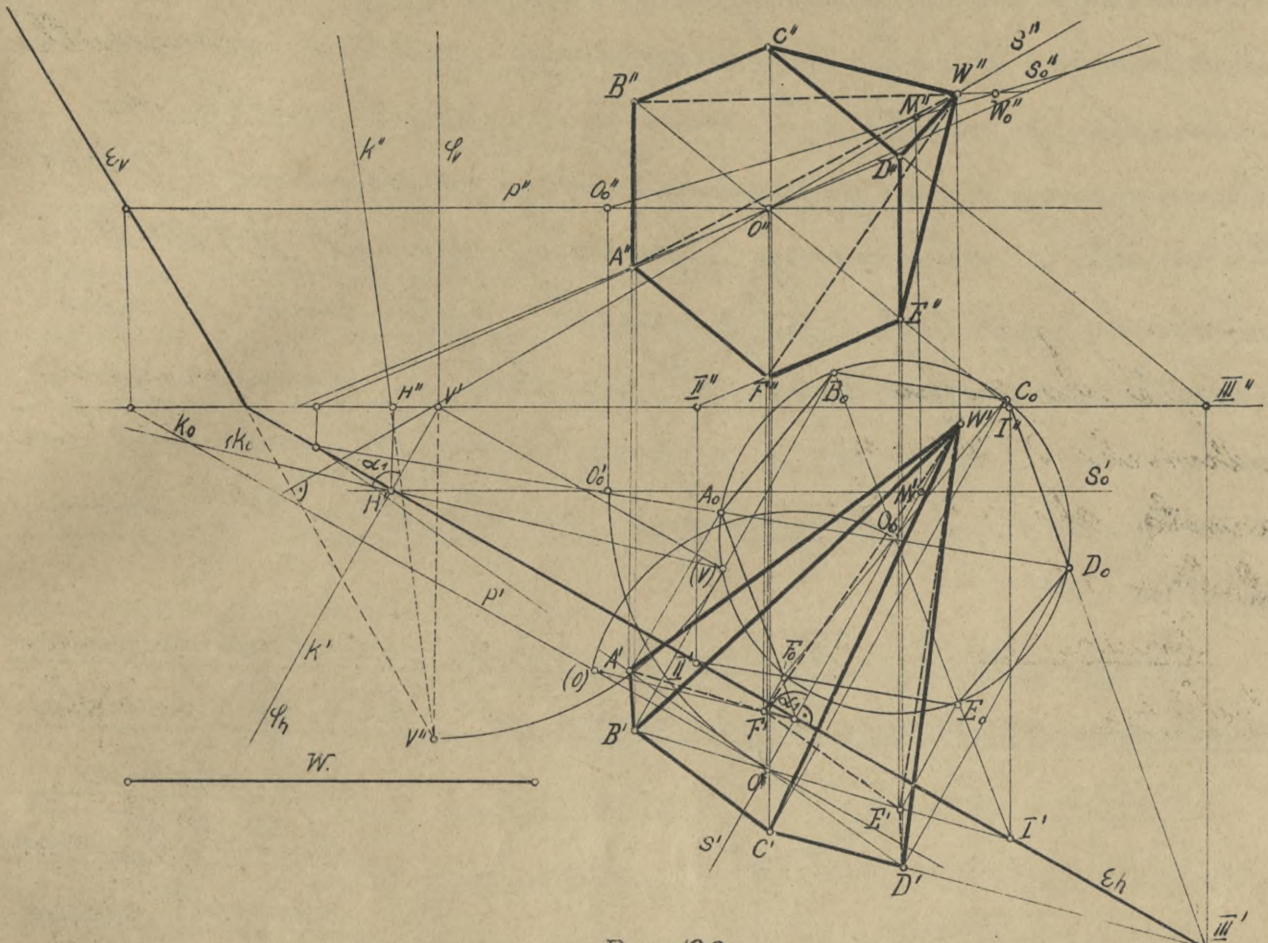


Rys. 130.



Rys. 131.

Zadanie 1. Wykreślić rzuty umiarowego, sześciościennego prostego ostrosłupa o danej wysokości „w", danym kładzie A_0 B_0 C_0 D_0 E_0 F_0 podstawy i danem



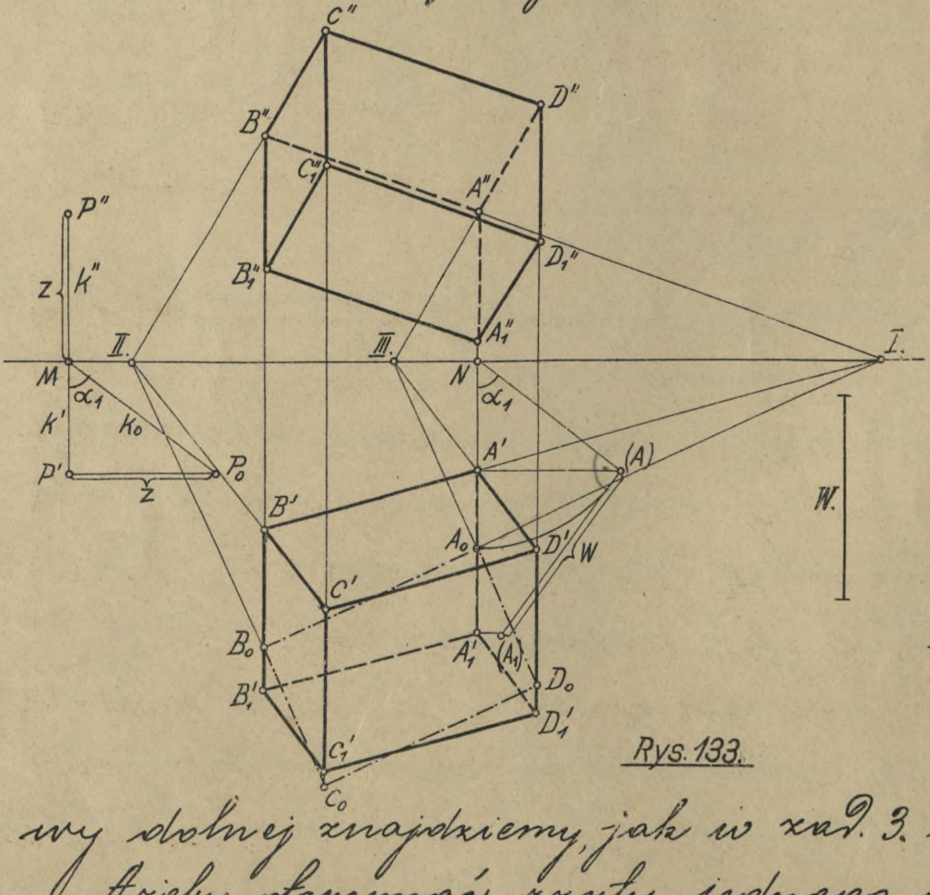
Rys. 132.

położeniu płaszczyzny $\varepsilon(\varepsilon_h \varepsilon_v)$ tej podstawy. (Rys. 132).-

Szukamy kąta nachylenia α_1 płaszczyzny ε do płaszczyzny poziomej. Około śladu ε_h obracamy punkt $O(O_o)$ o kąt α_1 i otrzymujemy rzuty O' i O'' punktu O położonego na płaszczyznę ε. Wysokość punktu O równa jest odcinkowi $\overline{(O)O'}$. Przy pomocy punktu przecięcia się $\underline{I'}$ $\underline{II''}$ prostej B_oE_o z osią obrotu ε_h, otrzymamy rzut poziomy $B'E'$ i pionowy $B''E''$ prostej BE leżącej na pł. ε. W ten sam sposób - poznamy zresztą w Rozdz. IV. ust. 32.-

znajdziemy rzuty dalszych wierzchołków wielokąta podstawy. W celu wyznaczenia rzutów wierzchołka, wykreślimy rzuty $s's''$ prostej s prostopadłej do płaszczyzny ε, a poprowadzonej w punkcie $O(O'O'')$. Na prostej s obierzemy dowolny punkt $M(M'M'')$, obrócimy ją tak, aby zajęła położenie s_0 równoległe do poziomej; od punktu O_0'' odmierzymy odcinek $O_0''W_0'' = w$ i z punktem W wrócimy na prostą $s(s's'')$, otrzymując rzuty W' i W'' wierzchołka W.

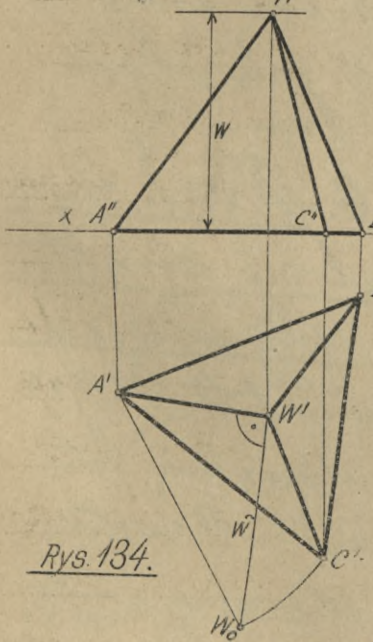
Zadanie 2. Wykreślić rzuty prostego graniastosłupa o danej wysokości „w", którego podstawa dolna $A_0B_0C_0D_0$, dana na pł. poziomej (Rys. 133), spoczywać ma na płaszczyźnie przechodzącej przez oś x-ów, a wyznaczonej punktem $P(P'P'')$. –



Rys. 133.

Rzuty podstawy dolnej znajdziemy, jak w zad. 3. strona: 78.

Ażeby otrzymać rzuty jednego wierzchołka podstawy górnej, poprowadzimy prostopadłą w punkcie (A) do prostej N(A) i odetniemy odcinek $\overline{(A)(A_1)}$= = w. Prosta równoległa do A'(A) wyznaczy na prostopadłej wyprowadzonej w punkcie A' do osi x-ów, punkt A_1', który jest rzutem poziomym szukanego wierzchołka. Odcinając NA_1'' = $A_1'(A_1)$ otrzymamy rzut pionowy A_1'' punktu A_1. Przez poprowadzenie równoległych do krawędzi podstawy dolnej od punktu A_1 (A_1' A_1'') począwszy, otrzymamy rzuty podstawy górnej - a więc i rzuty żądanego graniastosłupa.

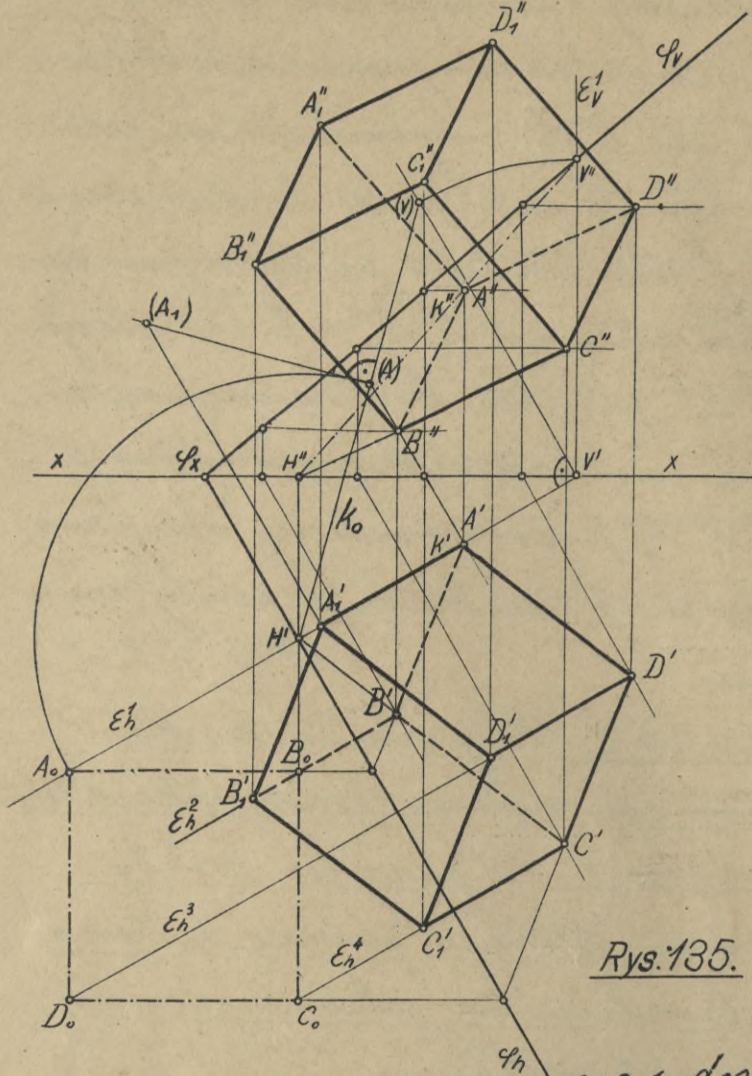


Rys. 134.

Zadanie 3. Wykreślić rzuty umiarowego czworościanu (Rys. 134).

Zadanie 4. Wykreślić rzuty sześcianu, którego jedna ściana leży dowolnie na płaszczyźnie φ (φ_z φ_v) (Rys. 135). -

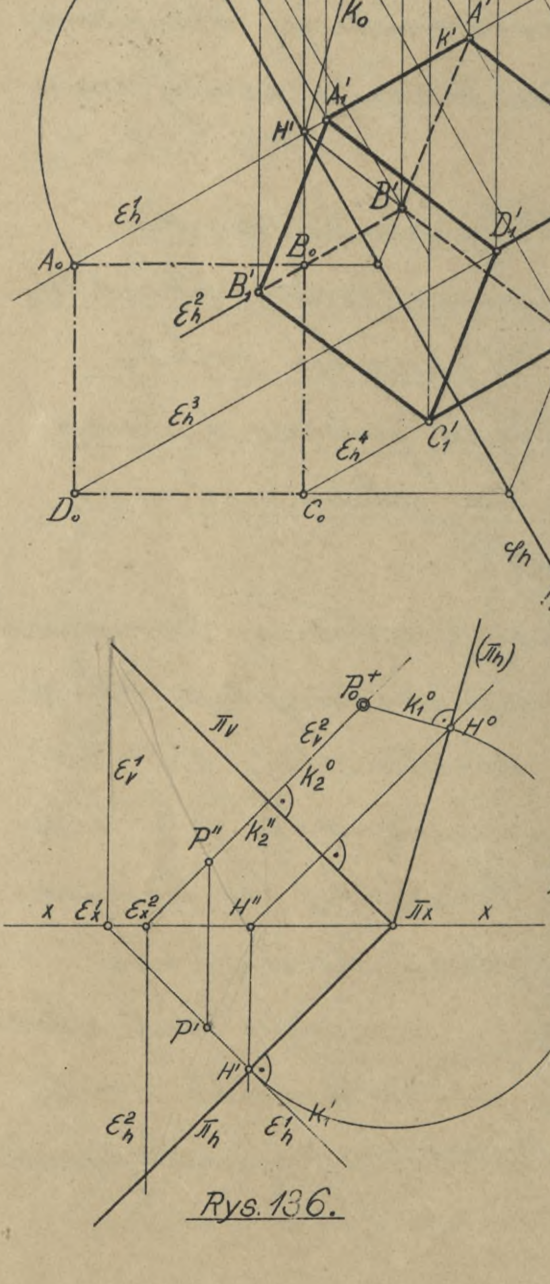
Przyjęty na poziomej kwadrat $A_0B_0C_0D_0$ podniesiemy na pł. φ. Płaszczyzna obrotu ε' (ε_z' ε_v') tworzy z płaszczyzną φ (φ_z φ_v) krawędź k(k' k"). Wykonamy kład k_0 tej krawędzi, znajdując w ten sposób kąt nachylenia płaszczyzny φ do poziomej - a więc kąt obrotu. W poznany już sposób otrzymamy rzuty kwadratu. Na prostej, wykreślonej prostopadle



Rys. 135.

do prostej k_0, w punkcie (A) odmierzymy odcinek $(A)A_1$ równy krawędzi sześcianu, a prosta prostopadła do ε_h^1 z punktu (A_1) poprowadzona, wyznacza punkt A_1', — więc rzut poziomy punktu A_1. Dalsze wierzchołki znajdziemy jako w zadaniu 2-im.

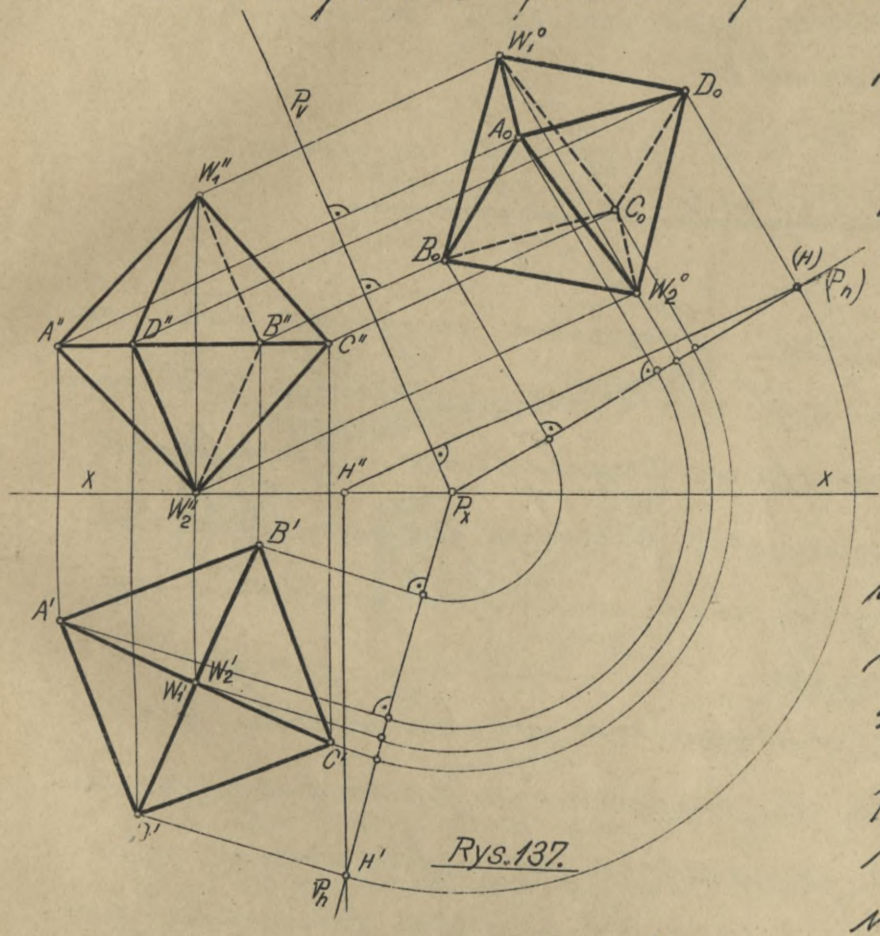
36. Rzut prostokątny punktu na dowolną płaszczyznę.



Rys. 136.

Przyjmijmy punkt P $(P' P'')$ w przestrzeni i dowolną płaszczyznę π $(\pi_h \pi_v)$. - Prosta, prostopadła do płaszczyzny π, z punktu P wyprowadzona przebija ją w punkcie P^+, który jest rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π. Ale rzut prostokątny P^+ punktu P na płaszczyznę π znajdziemy także w sposób następujący. Przez punkt P poprowadźmy płaszczyznę poziomo-rzucającą ε^1 prostopadłą do płaszczyzny π i płaszczyznę pionowo-rzucającą ε^2 również do pł. π prostopadłą.-

Płaszczyzna ε^1 przetnie płaszczyznę π w prostej k_1, płaszczyzna zaś ε^2 w prostej k_2 - punkt przecięcia się prostych k_1 i k_2 jest rzutem prostokątnym P^+ punktu P na płaszczyznę π.



Rys. 137.

Celem wykonania kładu płaszczyzny π wraz z punktem P na płaszczyznę pionową rzutów (Rys. 136), wykonamy w poznany już sposób kład śladu poziomego na pionową rzutów, około śladu π_v jako osi obrotu, obracając ślad poziomy H prostej k_1. Prosta k_1^o prostopadła do (π_h) jest kładem prostej k_1, kład k_2^o prostej k_2 schodzi się z rzutem pionowym tejże prostej. Punkt przecięcia się P_o^+ prostych k_1^o i k_2'' jest kładem, na pł. pionową rzutu prostokątnego punktu P na pł. π.

Zadanie: Ośmiościan umiarowy rzucić na dowolną płaszczyznę i wykonać kład tego rzutu na pionową. (Rys. 137).

Rozdział VI.

Wyznaczenie dachów.

37. Uwagi ogólne. Punktem wyjścia dla rozważań naszych jest założenie, że wszystkie płaszczyzny dachu mają jednakowe nachylenie. W praktyce przyjęcie takie odnosi się prawie jedynie do budynków wolnostojących, chociaż i tutaj czyni się częste z reguły wyjątki.

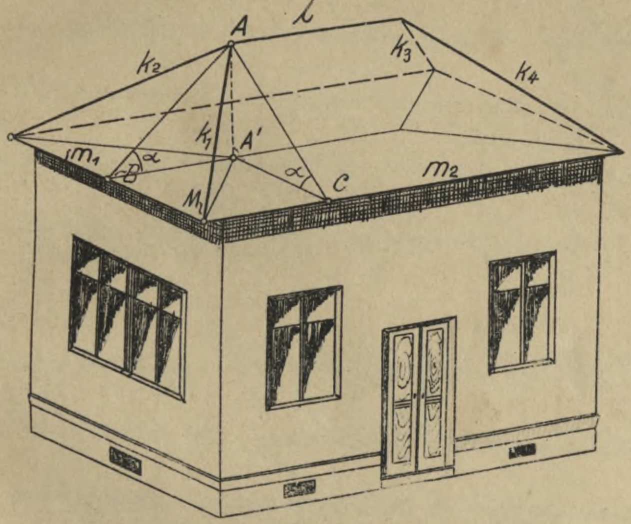
Zadanie nasze polega na wyznaczeniu, przeważnie jednego tylko, a mianowicie poziomego rzutu linii wzajemnego przecięcia się płaszczyzn dachu zwanych połaciami. Najniższa krawędź połaci nazywa się okapem, krawędzie najwyższe dachu zwane liniami grzbietowemi, tworzą grzbiet dachu, pozostałe krawędzie zwą się narożami.

Weźmy pod uwagę dach, którego połacie (Rys. 138) nachylone do poziomej pod kątem α, przecinają się w narożach k_1, k_2, k_3, k_4, a którego linią grzbiełową jest prosta l.

Przez punkt A poprowadzimy dwie płaszczyzny π^1 i π^2, jedną prostopadłą do okapu m_1, drugą prostopadłą do okapu m_2.

Prosta AA_1 jest krawędzią płaszczyzn π^1 i π^2; punkt zaś A^1 jest rzutem punktu A na pł. okapu. -

Otrzymane trójkąty $AA'B$ i $AA'C$ są przystające, gdyż: 1.) oba są prostokątne, 2.) przyprostokątna AA' dla obu trójkątów jest wspólna i 3.) kąty w wierzchołkach B i C są równe i równe kątowi α.



Rys. 138.

Oczywiście, że $\overline{A'B} = \overline{A'C}$ co oznacza, że punkt A' leży na dwusiecznej kąta, którego ramionami są okapy m_1 i m_2;

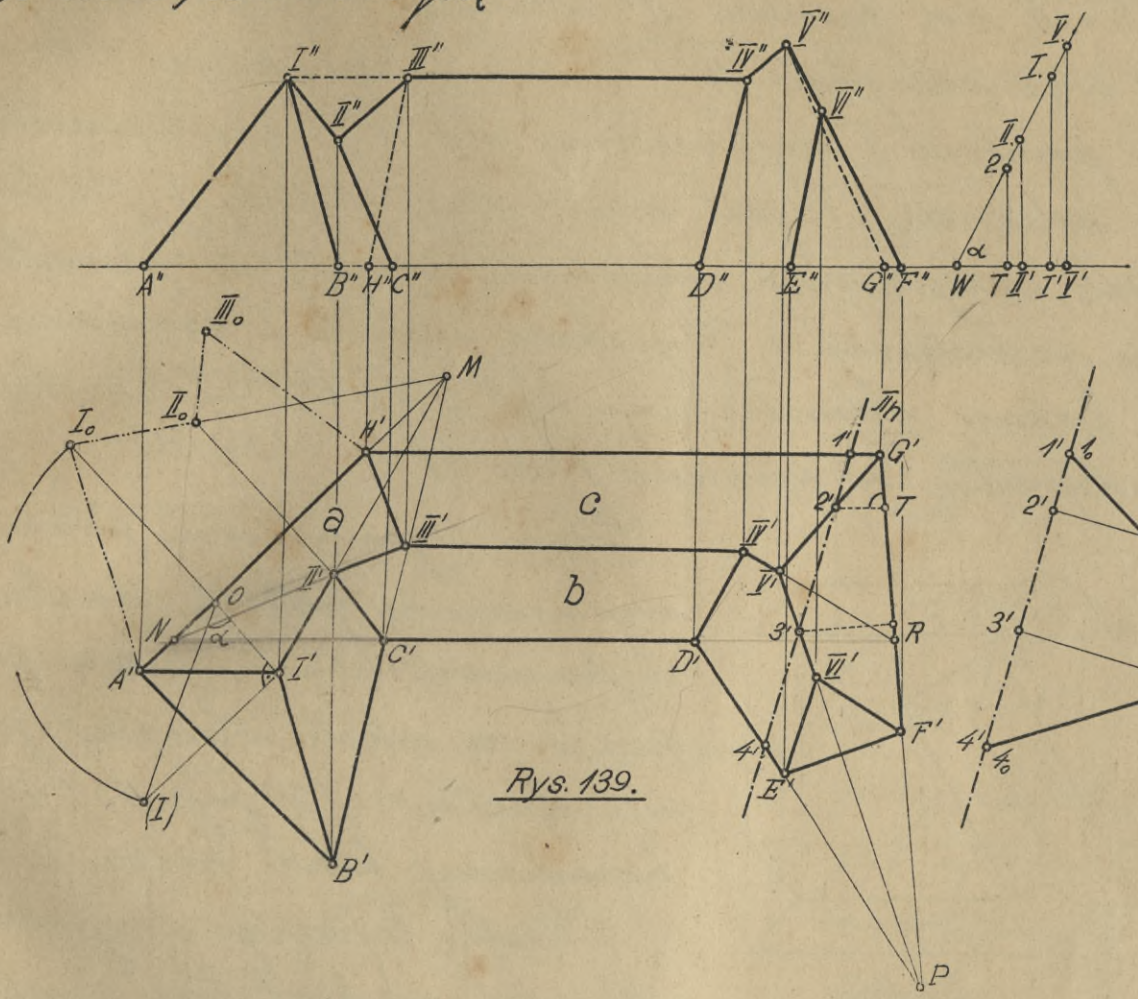
Prosta AA' jest rzutem krawędzi k_1 na płaszczyznę okapu, a więc także i na poziomą. W ten sposób udowodniliśmy następujące twierdzenie: <u>Jeżeli dwie połacie dachu mają jednakowe nachylenie do płaszczyzny poziomej, która jest płaszczyzna okapów dachu — to rzut poziomy linii przecięcia się tych połaci jest</u>

dwusieczną kąta, którego ramionami są okapy tych połaci.

Gdy okapy m_1 i m_2 są równoległe – to krawędź k_1 będzie do nich równoległa i w równej od obu odległości. Na twierdzeniu wypowiedzianem wyżej opiera się wyznaczanie dachów, które polega właśnie na wykreśleniu krawędzi przecięcia się połaci.

38. Przykłady. Niechaj zadaniem naszem będzie wyznaczenie rzutu poziomego i pionowego dachu (Rys. 139) przy danym rzucie poziomym okapu i danym kącie nachylenia a połaci do poziomej.

Dwusieczne kątów $A'B'C'$ i $B'A'H'$ przecinają się w punkcie $\underline{I}'$, który połączony z punktem M wyznacza rzut poziomy krawędzi grzbietowej $\underline{I}'M$. Dwusieczna kąta $B'C'D'$ przecina prostą $\underline{I}'M$ w punkcie $\underline{II}'$, z którego wyjdzie krawędź grzbietowa połaci $\underline{a}$ i $\underline{b}$. Krawędzie okapów $C'D'$ i NH' są śladami poziomymi płaszczyzn połaci $\underline{a}$ i $\underline{b}$; punkt przecięcia się N tych śladów jest śladem poziomym krawędzi grzbietowej połaci $\underline{a}$ i $\underline{b}$, rzut poziomy tej krawędzi jest wyznaczony punktami $N\,\underline{II}'$. Dwusieczna kąta $NH'G'$ jest rzutem poziomym krawędzi połaci $\underline{a}$ i $\underline{c}$. Ponieważ proste $H'G$ i $C'D'$ są równoległe - więc linia grzbietowa jako przecięcie się połaci c i b wychodzi z punktu III' i jest do nich równoległą.-

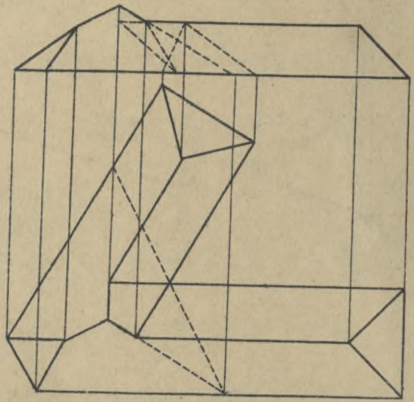


Rys. 139.

W ten sam sposób znajdziemy rzuty poziome dalszych linij grzbietowych i narożyj.

Azeby znaleźć rzut pionowy dachu, a raczej jego linij grzbietowych i narożyj, znajdźmy wysokość punktu I, którego punkt I' jest rzutem poziomym. Odległość punktu I' od wszystkich trzech krawędzi, a mianowicie A'B', B'C' i A'H' jest jednakowa i równa rzutowi linii największego spadu którejkolwiek z trzech połaci schodzących się w punkcie $\underline{I}$.

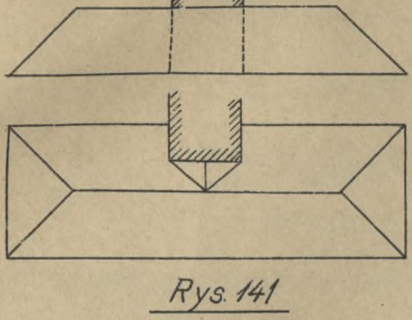
Jeżeli od punktu W na osi x-ów odmierzymy więc odległość $\overline{W\underline{I}'}$ równą odcinkowi $\overline{\underline{I}'O}$ i w punkcie $\underline{I}'$ wykreślimy do $W\underline{I}'$ prostopadłą - to odcinek $\overline{\underline{I}\underline{I}'}$ jest wysokością punktu I. W ten sposób znajdziemy wysokości wszystkich punktów linii grzbietowej. - Wysokość punktu I znajdziemy także odmierzając kąt $\alpha = \measuredangle(\underline{I}'O(\underline{I}))$ i kreśląc prostopadłą w punkcie $\underline{I}'$ do $O\underline{I}'$.


Rys. 140.

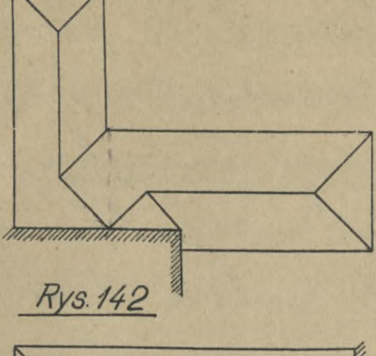
Celem wyznaczenia prawdziwej wielkości połaci dachu, wykonamy kład ich na pł. poziomą około okapów, jako osi obrotów. W rys. 139 wykonaliśmy kład połaci a.

W celu lepszego zoryentowania się w kształcie dachu przecinamy go płaszczyznami poziomo-rzucającemi i wykonywamy kład tego przekroju na pł. rysunku.-

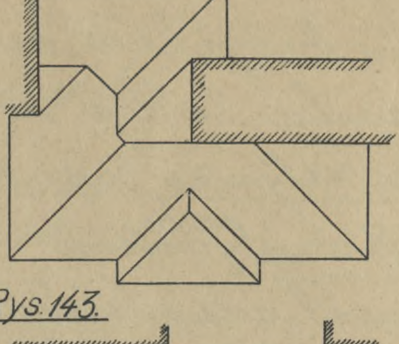
W rys. 139 podany jest przekrój dachu pł. poziomo-rzucającą π. Kład przekroju wykonany jest po jego poprzedniem przesunięciu równoległem. Wysokość punktu 2 jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego, którego jedną



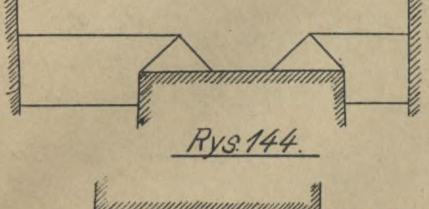
Rys. 141



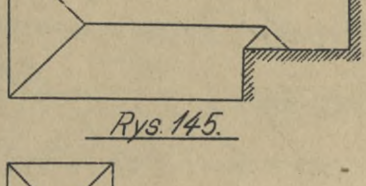
Rys. 142



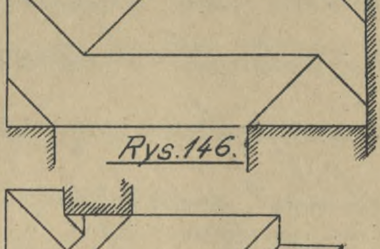
Rys. 143.



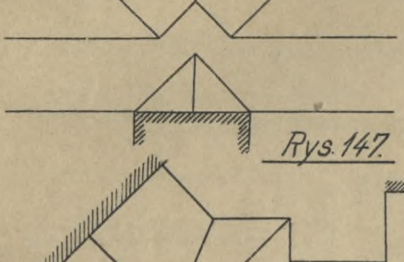
Rys. 144.



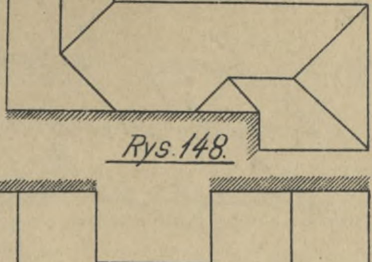
Rys. 145.



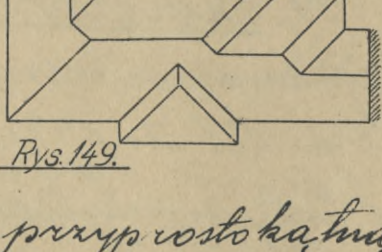
Rys. 146.



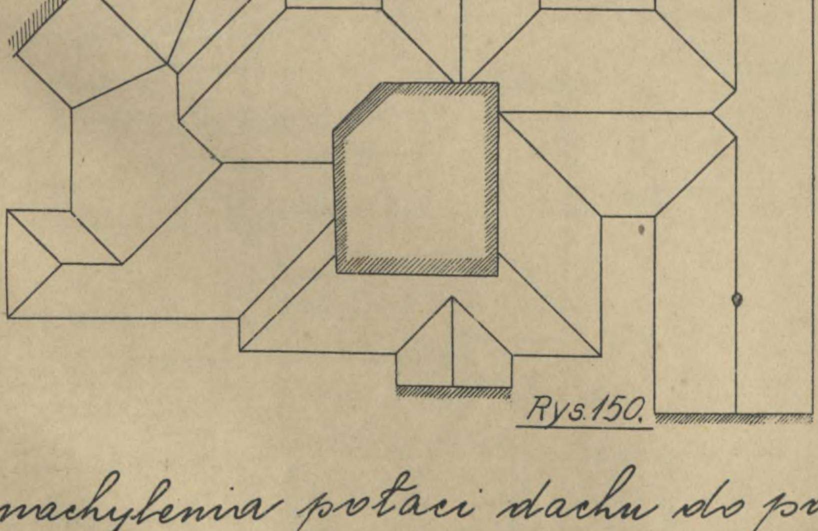
Rys. 147.



Rys. 148.



Rys. 149.

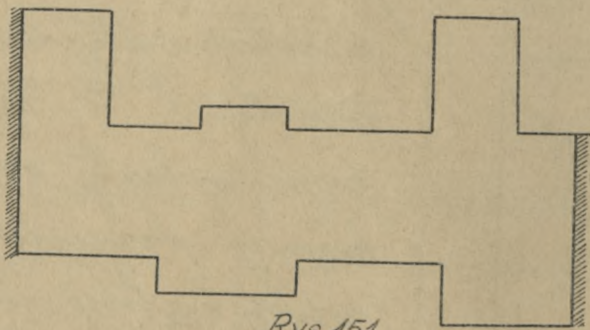


Rys. 150.

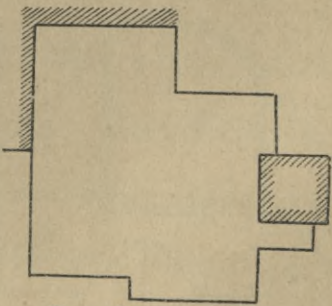
przyprostokątną jest odcinek $\overline{2'T}$ prostopadły do prostej $F'G$. Kąt przeciwległy szukanej przeciwprostokątnej równy jest kątowi nachylenia połaci dachu do poziomu, a więc kątowi α. Odmierzymy więc $\overline{2'T} = \overline{WT}$, a odcinek $\overline{2T} = \overline{2'2_0}$. – W ten sam sposób znaleźliśmy wysokość punktu 3.

Jeżeli budynek nie jest wolno stojący, lecz przylega do budynków sąsiednich, to przy wyznaczeniu dachu liczyć się musimy z tem, że woda nie może spływać na ściany budynku sąsiedniego. – Uwzględnienie tego warunku wymaga włączenia odpowiednich połaci dachu, których zadaniem jest skierowanie odpływu wody w odpowiednich kierunkach, z ominięciem ściany budynku sąsiedniego. Przykłady takich dachów podają rysunki od 140 – 150.

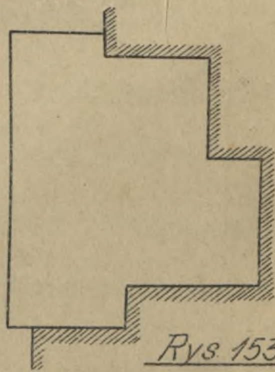
39. Ćwiczenia. Wyznaczyć rzuty poziome i pionowe naroży i linij grzbietowych dachów, (Rys. 151 do 157), których rzuty poziome okapów i kąty nachylenia połaci są dane. –



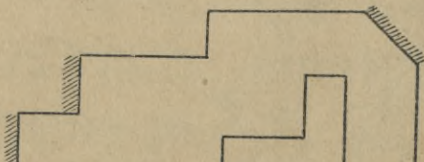
Rys. 151.



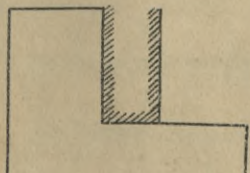
Rys. 152.



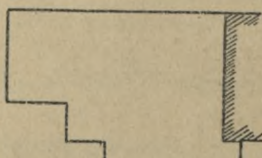
Rys. 153.



Rys. 154.



Rys. 155.



Rys. 156.

Rys. 157.

Literatura.

a.) dzieła podstawowe i podręczniki.

Monge, G., Géométrie descriptive. Leçons données à l' École normale l'an III de la république. Paris 1798. 2-7 édition 1800-1847.

Monge, G., Darstellende Geometrie, herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von Robert Haussner. Leipzig 1900.

Hachette, Jean Nicolas, Traité de géométrie descriptive. Paris 1822.

Sapalski, Fr., Geometrya wykreślna z zastosowaniem do perspektywy. Warszawa 1822.

Schreiber, Guido, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Karlsruhe 1828 – 1839.

Leroy, Traité de géométrie descriptive suivie de la méthode de plans cotés... Paris 1834.

de Fourcy, Lefébure, uebersetzt von Georg Mayer, Abhandlung über descriptive Geometrie. München 1837.

—— Geometrya wykreślna I i II. Warszawa 1849.

Adhémar, J., Géométrie descriptive, Paris 1841.

Gugler, Bernhard, Lehrbuch der descriptiven Geometrie. I. Auflage: Nürnberg 1841., IV. Auflage: Stuttgart 1874.

Olivier Théodore, Cours de géométrie descriptive. Paris 1843. Deuxième édition 1852.

Stampfl, J., Lehrbuch der darstell. Geometrie und ihrer Anwendungen. Wien 1847.

Franke, T., Lehrbuch der descriptiven Geometrie. Leipzig 1849.

Baum, C., Die darstell. Geometrie. Wiesbaden 1851.

Bellavitis, G., Lezioni di geometria descrittiva. Padova 1851.

Hönig, J., Anleitung zum Studium der darstell. Geom. Wien 1855.

Schnedar, R., Lehrbuch der darstl. Geometrie. Brünn 1856. 5te Aufl. 1873.

Pohlke, K., Darstellende Geometrie, Berlin 1860 – 1876.

de la Gournerie, Jules, Traité de géométrie descriptive. 3 parties. Paris 1860 – 1864. Seconde éd. 1873-1885.

Beksø, W. H., Die darstell. Geometrie. II Aufl. Halle 1869-71.
Muszkowski, Karol, Geometrya wykreślna dla szkół średnich. Lwów 1875.
Wierzbicki, Daniel, Geometrya wykreślna. Kraków 1875.
Mannheim, A., Cours de géométrie descriptive de l'école polytechnique, Paris 1880. Deuxième éd. 1886.
Javary, A. Traité de géométrie descriptive. Paris 1881.
Sagayło, Ernest, Wykład geom. wykreślnej. Paryż 1882.
Caron, J., Cours de géométrie descriptive. Paris 1882.
Schmidt, August, Elemente der darstell. Geometrie. Wiesbaden 1882.
Menger, J., Lehrbuch der darstell. Geom. für Oberrealschulen. Wien 1882.
Peschka, Gustav Darstell. Geometrie. I Aufl. Wien 1883. II Aufl. 1899.
Kiaes, J., Cours élémentaire de géométrie descriptive. Ouvrage entièrement refondu par M. Niewenglowski. Sixième édition. Paris 1883.
Prix, E., Elemente der darstell. Geometrie. I Teil. Leipzig 1883
Wiener, Christian, Lehrbuch der darstell. Geometrie. I Bd. Leipzig 1884.
Łazarski, Mieczysław, Zasady geometryi wykreślnej dla wyższych szkół realnych. Lwów 1889. 3cie wydanie 1906.
Vonderlinn, J., Lehrbuch der Projektionszeichnens. Stuttgart 1889.
Streissler, J., Elemente der darstell. Geometrie. 3e Aufl. Brünn 1894.
Antomari, X. Cours de géométrie descriptive. Paris 1897.
Tapla, Teodor, Vademecum der darst. Geom. 1. Aufl. Wien 1898. II Aufl. 1909.
Brisse, Ch., Cours de géométrie descriptive. Paris 1898.
Martin, E., & Pernot, F., Cours de géométrie descriptive. Paris 1898.
Sturm, R., Elemente der darstell. Geom. 2 Aufl. Leipzig 1900.
Schröder, John, Darstell. Geometrie I Band. Sammlung Schubert L. XV. Berlin und Leipzig 1900.
Bernhard, M., Darstell. Geometrie, 3 Aufl. Stuttgart 1901.
Beyel, Christian, Darstell. Geom. mit einer Samlung von 1800 Dispositionen in Aufgaben. Leipzig 1901.
Feldblum, M., Geometrya wykreślna. Warszawa 1902.
Geyger, Erich, Die angewandte darstell. Geom. Leipzig 1902.
Łazarski, Mieczysław, Zasady geometryi wykr. I Tom. Lwów 1903.
Haussner, Robert, Darstell. Geom. I Teil. Samlung Göschen. N. 142. Leipz. 1904.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstell. Geometrie, I. Teil, sechste Auflage. Leipzig. 1905.
Smolik, F. Elemente der darstell. Geom. III.e Aufl. Wien 1906.
Loria, Gino, Vorlesungen über darstell. Geometrie, deutsch von Fr. Schütte. I. Teil. Leipzig 1907.
Barchanek Klemens, Lehr- und Übungsbuch der darstell. Geom. für Oberrealschulen. 2 Aufl. Wien 1907.
Müller, E., Lehrbuch der darstell. Geom. für technische Hochschulen. I Bd. Leipzig 1908.
Enriques, Fr., Lezzioni di geometria descrittiva. Bologna 1908.
Mattauch, J., Lehr- und Aufgabenbuch der darstell. Geom. Wien. 1910.
Fano, G., Lezzioni di geometria descrittiva. 1910.
v. Dalwigk, F., Vorlesungen über darstell. Geom. I Band. Leipzig 1911.
Schmid, Theodor, Darstell. Geom. I Bd. Sammlung Schubert LXV. Berlin und Leipzig 1912.
Hauck, G., Vorlesungen über darstell. Geom. I. Bd. Leipzig 1912.
Rohn, K. u. Papperitz, E., Lehrbuch der darstell. Geom. I. Band. Vierte Auflage. Leipzig 1913.

6, Zbiory zadań i ćwiczeń.

Mikoletzky, Josef, Aufgaben aus d. darstell. Geometrie. Wien. 1877.
Steiner, J., Sammlung von Maturitätsfragen aus der darstell. Geom. Wien 1887.
Gerke, R., Aufgabensammlung aus d. darstell. Geom. 2. Auflage Hannover 1889.
Sailer, E., Die Aufgaben aus d. darstell. Geom. München 1899.
Beyel, Christian, Darstell. Geom. mit einer Samlung von 1800 Dispositionen zu Aufgaben. Leipzig 1901.
Schill, R., Maturitätsaufgaben aus d. darstell. Geom. Wien 1904-1908.
Ilnicki, Emilian, Maturitätsaufgaben aus darstell. Geom. Wien. 1908.
Einhorn, M., Maturitätsaufgaben aus d. darstell. Geom. I Heft. Zürich 1908.
Heller, Josef, Fr. Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus d. darstell. Geom. für Realschulen I. u. II Teil. 3. Auf. Wien. 1911.
F. G. M. Exercices de géométrie descriptive. Quatrième éd. Paris 1909.+)

+) Dzieło szczególnie polecenia godne.

Postrzeżone omyłki w tekście.

Strona 4:	Uwaga 1., zamiast: „innemi"	ma być:	„cennemi"
" 23:	3 w. od góry, zamiast: „graficznem"	" :	„graficznymi".
" 29:	13 w. od dołu, zamiast: „prostą l"	" :	„prostą p".
" 29:	5 od dołu, zamiast: „osi l"	ma być:	„osi p"
" 39:	7 w. od góry, zamiast: „również oś"	" :	„również przez oś"
" 52:	10 w. " dołu, zamiast: „prostopadłej"	" :	„prostopadłą".
" 65:	3 w. od dołu, zamiast: „poziomą"	ma być:	„pionową".