ARCHIWUM
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WE LWOWIE
DZIAŁ III. — TOM VII. — ZESZYT 8.

O zagadnieniu rozstrzygalności w zakresie węższego rachunku funkcyjnego.

(Über das Entscheidungsproblem des engeren logischen Funktionenkalküls).

Napisał

JÓZEF PEPIS

ROZPRAWA DOKTORSKA NA WYDZIALE M
REFERENCI:PROF.E.ŻYLIŃSKI,PROF.DR S

ROZPRAWA DOKTORSKA NA WYDZIALE MAT.-PRZYR.U.J.K.WE LWOWIE
REFERENCI:PROF.E.ŻYLIŃSKI,PROF.DR ST.BANACH,PROF.DR L.CHWISTEK

WE LWOWIE
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO
Z ZASIŁKIEM MINISTERSTWA WYZN. REL. I OŚW. PUBL.
DRUKARNIA NAUKOWA WE LWOWIE, UL. ORMIAŃSKA 8 — TELEFON 253-10
1937
d główny wydawnictw Towarzystwa utrzymuje księgarnia Gubrynowicz i Syn
we Lwowie.
(właśc. Al. Krawczyński).

WYDAWNICTWA
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WE LWOWIE

Prace naukowe, Dział II, matematyczno-przyrodniczy.

I. Weyberg Zygmunt, Podstawy krystalografji, z 124 rys w tekście i 4 tabl., str. XIV i 160 4

II. Zuber Rudolf, Flisz i nafta, z 162 ilustracjami w tekście i 3 tablicami, str. XVI i 350 7

III. Noskiewicz Jan, Die palearktischen Colletes-Arten, mit 40 Textfiguren und 28 Tafeln, S. 532 20

Archiwum Towarzystwa Naukowego, Dział III, matematyczno-przyrodniczy.

Spis rozpraw zawartych w tomach I. do IV. podany jest w każdym tomie.

Tom V. Smulikowski Kazimierz. Materjały do znajomości skał magmowych Śląska Cieszyńskiego, z 4 wykresami i 6 tabl., str. 125 (2 zł.). — Poluszyński Gustaw. Cytologiczne badania nad gametogenezą owadów, z 5 tabl., str. 95 (2 zł.). — Birnbaum Zygmunt Wilhelm. Oszacowanie wartości właściwych problemu Sturma-Liouville'a o spółczynnikach posiadających skończone wahanie, str. 10. — Tenże. O jednoznacznie odwracalnych funkcjach analitycznych, str. 5 (za obie rozprawy 0,25 zł.). — Teisseyre Wawrzyniec. O możliwości objaśnienia złudzeń wizualnych co do t. zw. kanałów Marsa na zasadzie epirogenezy ziemskiej. Pogląd krytyczny na ruchy lądotwórcze w Polsce, str. 26 (0,50 zł.). — Kuntze Roman. Studja porównawcze nad fauną kserotermiczną na Podolu, w Brandenburgii, Austrji i Szwajcarji z 1 ryc. w tekście, str. 81 (1,50 zł.). — Falik Edward i Bieliński Zdzisław. Badania nad średnicą krwinek czerwonych. Zmiany średnicy krwinek w głodzie, str. 11 (0,25 zł.). — Monné Ludwik. Badania porównawcze nad strukturami plazmatycznemi komórek płciowych męskich mięczaków z szczególnem uwzględnieniem brzuchonogów (Gastropoda), z 5 tabl., str. 55 (1 zł.). 7,50

Tom VI. Fuliński Benedykt. Charakterystyka fauny wirków (Turbellaria) w strefie przybrzeżnej Małego Morza, z 3 ryc. w tekście, str. 27 (1 zł.). — Wiśniewski Lesław Wincenty. O rodzajach rodziny Coitocaecidae (Trematoda), z 1 tabl., z 2 ryc. i z 2 tabel. w tekście, str. 13 (1 zł.). — Bryła Stefan i Chmielowiec Alfons. Rezultaty pomiarów mostu żelaznego z kracie złożonej przy pomocy przyrządów Manet Rabut'a. z 5 tabl. i 15 rys. w tekście, str. 15 (1 zł.). — Golański Kazimierz. Składniki plazmatyczne komórek płciowych męskich drewniaka (Lithobius forficatus L.). (Krocionogi). (Myriapoda), z 7 ryc. w tekście i 2 tabl., str. 31 (1,50 zł.). — Rosiński Bolesław ks. Czaszki z półwyspu Gazeli i z wysp Marquesas, z 1 tabl. i 3 rys. w tekście, str. 15 (1 zł.). — Żyliński Eustachy. O układach d'Alemberta, str. 10 (0,50 zł.). — Żejmo-Żejmis Stanisław. Wieś pałucka. Studjum an[illegible] c. w tekście. str. 30 (1,50 zł.). — C[illegible] oże rasowe Żydów kaukaskich, z [illegible] — Matakiewicz Maksymil[illegible] cionowej krzywej prędkości

ARCHIWUM
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO
WE LWOWIE

WYDZIAŁ III MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZY

TOM VII.

WE LWOWIE
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO
Z ZASIŁKIEM MINISTERSTWA WYZN. REL. I OŚW. PUBL.
1937

SPIS RZECZY.

ARCHIWUM
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WE LWOWIE
DZIAŁ III. — TOM VII. — ZESZYT 8.

O zagadnieniu rozstrzygalności w zakresie węższego rachunku funkcyjnego.

(Über das Entscheidungsproblem des engeren logischen Funktionenkalküls).

Napisał

JÓZEF PEPIS

WE LWOWIE
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO
Z ZASIŁKIEM MINISTERSTWA WYZN. REL. I OŚW. PUBL.
DRUKARNIA NAUKOWA WE LWOWIE, UL. ORMIAŃSKA 8 — TELEFON 253-10
1937

Skład główny wydawnictw Towarzystwa utrzymuje księgarnia Gubrynowicz i Syn we Lwowie.
(właśc. Al. Krawczyński).

O zagadnieniu rozstrzygalności w zakresie węższego rachunku funkcyjnego*.

(Über das Entscheidungsproblem des engeren logischen Funktionenkalküls.)

Napisał

Józef Pepis

SPIS RZECZY.

Str.

WSTĘP.

Przy konstruowaniu systemów formalnych postępuje się zwykle, jak wiadomo, w ten sposób, że się zaczyna od wyliczenia znaków, którymi się ma zamiar posługiwać, to jest tzw. znaków systemu. Znaki te albo się efektywnie wypisuje (gdy ich jest skończona ilość), albo się opisuje tylko ich strukturę (gdy ich jest nieskończenie wiele), przy czym ta ostatnia alternatywa zachodzi zawsze dla znaków odgrywających rolę zmiennych (rzeczywistych lub pozornych). Następnie spośród wszystkich kombinacyj skończonych już wyłącznie tylko znaków systemu wyróżnia się przy pomocy

* Praca przedstawiona na posiedzeniu Wydziału III-go Towarzystwa z dn. 15 czerwca 1936 r. przez czł. prof. E. Żylińskiego.

reguł pewne kombinacje znaków, które się nazywa wyrażeniami sensownymi systemu albo krótko wyrażeniami systemu[1]. W końcu spośród wyrażeń systemu wyróżnia się pewną podklasę wyrażeń, tzw. wyrażeń właściwych lub jak się je także często nazywa, tez systemu[2]. Wyróżnienie podklasy wyrażeń właściwych następuje przy pomocy reguł o charakterze rekurencyjnym, precyzujących, które wyrażenia systemu mają być za właściwe uważane, przy czym, jak w każdej rekurencji, musi być podana baza wyjściowa, tzn. pewne wyrażenia systemu muszą być z góry jako właściwe wymienione[3]. Zaś reguły istotnie rekurencyjne, tzw. reguły postępowania są tego rodzaju, że pozwalają z pewnych wyrażeń, o których się już wie, że są właściwe, skonstruować nowe wyrażenia, które też są za właściwe uważane[4]. Te reguły postępowania wraz z tą bazą wyjściową pozwalają nam skonstruować nieograniczoną mnogość wyrażeń właściwych danego systemu.

Gdy mamy przed sobą skończony łańcuch wyrażeń systemu, z których każdy bądź: a) należy do bazy wyjściowej, bądź: b) powstaje z pewnych wyrażeń wyprzedzających rozważane wyrażenie w tym łańcuchu przez zastosowanie jednej z reguł postępowania, wówczas mamy pewność, że każde wyrażenie tego łańcucha, a więc w szczególności ostatnie, jest wyrażeniem właściwym. Ale i na odwrót do każdego wyrażenia właściwego istnieje łańcuch wyrażeń kończący się na danym wyrażeniu właściwym i którego każde wyrażenie

[1] Przy interpretacji wyrażenia sensowne przedstawiają zdania (sądy) przez system sformalizowanej teorii, na skutek czego rozmaici autorowie wprost te wyrażenia sensowne nazywają zdaniami (sądami). Jest jednak zawsze lepiej odgraniczyć formalne przedstawienie systemu od jego późniejszej interpretacji.

[2] Przy interpretacji systemu wyrażeniom właściwym (tezom) odpowiadają twierdzenia odnośnej teorii.

[3] Wyrażenia tej bazy wyjściowej ze względu na ich późniejszą interpretację nazywają powszechnie aksjomatami.

[4] Te reguły postępowania są zwyczajnie sformalizowanymi odpowiednikami logicznych reguł rozumowania. Powiadam: zwyczajnie — gdyż z czysto formalnego punktu widzenia dopuszczalne są także takie reguły postępowania, które bądź nie mają żadnej interpretacji, bądź których nasuwająca się interpretacja jest wręcz z pewnego logicznego punktu widzenia nie do przyjęcia.

posiada jedną z wyżej wymienionych własności a) lub b). W samej rzeczy, dane wyrażenie właściwe, jak w ogóle każde wyrażenie, o którym daje się na podstawie reguł systemu stwierdzić, że jest właściwe, musi powstać z pewnych wyrażeń należących do bazy wyjściowej przez stosowanie, skończoną liczbę razy, reguł postępowania. Te wyrażenia wyjściowe wraz z wyrażeniami pośrednimi, które przy stosowaniu reguł postępowania wypadają, ułożone w odpowiednim porządku, dają takowy łańcuch. Każdy taki łańcuch kończący się na danym wyrażeniu właściwym nazywamy łańcuchem właściwym lub dowodem danego wyrażenia właściwego.

Przystępuję teraz do objaśnienia zasadniczego problemu związanego z danym systemem formalnym, tzw. zagadnienia rozstrzygalności. Niech A będzie dowolnym efektywnie danym wyrażeniem pewnego ściśle określonego systemu. Stawiamy sobie pytanie, czy A jest wyrażeniem właściwym (tezą) tego systemu, czy też nie jest. Nie trudno widzieć, że nie jest na ogół wcale rzeczą łatwą rozstrzygnąć, czy dane nam z góry wyrażenie jest tezą systemu, czy też nie. Jeśli znajdziemy łańcuch właściwy (dowód) na dane wyrażenie A, to wiemy, że A jest tezą systemu. Gorzej się rzecz przedstawia, gdy takiego łańcucha nie znajdziemy: nie możemy wtedy ani twierdzić, że A jest tezą systemu, ani też, że A nie jest tezą. Aby udowodnić, że A jest tezą, należało by znaleźć łańcuch właściwy dla A albo przynajmniej udowodnić, że takowy istnieje. Do twierdzenia, że A nie jest tezą systemu nie wystarcza stwierdzenie, że takiego łańcucha nie umiemy znaleźć, lecz do tego trzeba udowodnić, że taki łańcuch wcale nie istnieje. Naprawdę trudna sytuacja jest zwyczajnie właśnie wtedy, gdy A nie jest tezą systemu, gdyż aby się o tym przekonać trzeba udowodnić, że żaden łańcuch właściwy nie kończy się wyrażeniem A, a to jest, ogólnie biorąc, rzeczą niezmiernie trudną. Zagadnienie znalezienia jednolitego kryterium pozwalającego przy pomocy skończonej liczby działań rozstrzygnąć, czy z góry zadane wyrażenie systemu jest, czy nie jest tezą tego systemu, nazywamy zagadnieniem rozstrzygalności danego systemu (Entscheidungsproblem). Odnośnie do wymagań stawianych takiemu kryterium należy podkreślić, że nie żąda się, aby ilość kroków wzgl. działań przy rozstrzyganiu miała nie przekroczyć pewnej z góry określonej liczby naturalnej. Takie stawianie kwestii byłoby w wysokim stopniu niemądre. Żąda się jedynie i wyłącznie, aby ta potrzebna ilość kroków była w ogóle skończona. Kwestia praktycznej możliwości rozstrzygania jest kwestią zupełnie inną; tu natomiast zakłada się, że mamy dostatecznie dużo czasu do dyspozycji i że rozporządzamy dostatecznie dużymi arkuszami papieru do wypisywania ewentualnych długich rachunków[5].

Zagadnienie rozstrzygalności nasuwa się nie tylko w związku z pojęciem tezy danego systemu, lecz także w związku z każdym pojęciem ściśle sprecyzowanym. Gdy mamy do czynienia z jakimś pojęciem ściśle określonym, wówczas dla każdego przedmiotu jest rzeczą jednoznacznie określoną czy należy albo, czy nie należy do zakresu tego pojęcia. Możliwość każdoczesnego rozstrzygania, która z tych dwóch alternatyw dla danego przedmiotu istotnie zachodzi, nie jest jednak jeszcze przez samą określoność pojęcia zapewniona i znalezienie takiej możliwości wielkie na ogół trudności przedstawia. Że tak jest istotnie, dowodzą najlepiej pojęcia matematyczne. Weźmy dla przykładu chociażby pojęcie liczby rzeczywistej algebraicznej. Pojęcie to jest ściśle określone, gdyż z definicji tego pojęcia wynika, że dla każdej liczby rzeczywistej jest rzeczą jednoznacznie ustaloną, czy ona jest algebraiczna, czy też nie, a jednak już dla bardzo prostych efektywnie danych (przez konstrukcję) liczb rzeczywistych nie umiemy dotychczas rozstrzygnąć, która z obu alternatyw zachodzi. Zagadnienie znalezienia jednolitego kryterium pozwalającego dla danego pojęcia przy pomocy skończonej liczby działań rozstrzygnąć, czy z góry zadany przedmiot (który w ogóle może wchodzić w rachubę)[6] należy, czy też

[5] Należy odróżnić możliwość teoretycznego rozstrzygania od możliwości praktycznej. Pierwsza wyraża, że istnieje taka liczba naturalna n, iż po n krokach zyskuje się rozstrzygnięcie, druga zaś, że liczba n leży w granicach praktycznej wykonalności rachunku. Ponieważ, rzecz jasna, nikt nie może rozsądnie raz na zawsze podać takiej liczby N, aby zwrot: A jest praktycznie rozstrzygalne — był równoznaczny zwrotowi: ilość kroków n potrzebna do rozstrzygania A ma być $< N$, przeto do ścisłego traktowania nadaje się tylko pojęcie teoretycznej rozstrzygalności. W tym też sensie rozumiemy w tej pracy zagadnienie rozstrzygalności.

[6] W przypadku pojęcia liczby rzeczywistej algebraicznej przedmiotami, które w ogóle mogą wchodzić w rachubę, są oczywiście liczby rzeczywiste.

nie należy do zakresu tego pojęcia, nazywamy zagadnieniem rozstrzygalności tego pojęcia.

Jest niewątpliwą zasługą Russella i Whiteheada pokazanie w swym dziele podstawowym Principia Mathematica, że studiowanie pojęć i teoryj matematycznych daje się sprowadzić do studiowania systemów formalnych, że pojęcie zdania matematycznego danej teorii daje się w zupełności zastąpić przez pojęcie wyrażenia sensownego pewnego systemu o niezbyt wielkiej liczbie znaków podstawowych i że wreszcie pojęcie twierdzenia matematycznego daje się sprowadzić do pojęcia wyrażenia właściwego (tezy) systemu o nieskomplikowanych i nielicznych regułach postępowania. Na gruncie tego nie jest rzeczą trudną zrozumieć, że i zagadnienie rozstrzygalności dla pojęć matematycznych sprowadza się do zagadnienia rozstrzygalności pewnych systemów formalnych. Dokładniejsze badania wykazały, że już rozwiązanie zagadnienia rozstrzygalności dla pewnego ściśle sprecyzowanego systemu o względnie prostych regułach postępowania, mianowicie dla tzw. systemu węższego rachunku funkcyj (engerer Funktionenkalkül)[7], miało by kolosalne następstwa dla matematyki i dla zagadnień rozstrzygalności obszernej klasy systemów formalnych o regułach bardziej skomplikowanych. Wobec takiego stanu rzeczy staje się rzeczą zrozumiałą, dlaczego w ostatnich latach wzrok odpowiednich badaczy szczególnie skierowany został na ten właśnie system.

W systemie węższego rachunku funkcyj fundamentalną rolę odgrywają dwa pojęcia: pojęcie tautologii (Allgemeingültigkeit) i pojęcie realizacji (Erfüllbarkeit), i z nimi związane pojęcia rozstrzygalności a więc pojęcie zagadnienia rozstrzygalności dla tautologii (Allgemeingültigkeitsproblem) oraz pojęcie zagadnienia rozstrzygalności dla realizacji (Erfüllbarkeitsproblem). Oba te zagadnienia są sobie równoważne i równoważne zagadnieniu rozstrzygalności dla systemu węższego rachunku funkcyj, przy czym to ostatnie zagadnienie rozstrzygalności rozumiejąc w sensie sprecyzowanym wyżej dla dowolnego systemu formalnego. Równoważność tych trzech zagadnień rozstrzygal-

[7] Wstępne pojęcia z zakresu węższego rachunku funkcyj znajdzie czytelnik w książce: D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik (Berlin, 1928), w szczeg. rozdz. 3.

ności należy zaś rozumieć w tym sensie, że z rozwiązalności jednego z tych zagadnień wynika rozwiązalność dwóch pozostałych. Oto dlaczego wszystkie te trzy zagadnienia rozstrzygalności można uważać za różne postacie jednego wspólnego zagadnienia, które chcemy odtąd krótko nazywać zagadnieniem rozstrzygalności (Entscheidungsproblem). Zależnie od podejścia i metod postępowania korzystnym jest rozważać to tę, to inną postać tego samego zagadnienia, przy czym, jak uczy dotychczasowe doświadczenie, najdogodniejszą w rozważaniach jest ta postać, którąśmy nazwali zagadnieniem rozstrzygalności dla realizacji.

Badania dotyczące zagadnienia rozstrzygalności biegną w dwa różne, nawzajem się uzupełniające, kierunki. Jeden kierunek badań polega na rozwiązywaniu zagadnienia rozstrzygalności dla pewnych przypadków szczegółowych. Drugi zaś kierunek badań ma na celu redukowanie ogólnego zagadnienia rozstrzygalności do pewnych przypadków szczególnych tego zagadnienia. Każdy wynik jednego kierunku daje asumpt do badania w drugim kierunku, chodzi bowiem oto, aby klasę tych przypadków szczególnych zagadnienia, dla których na zasadzie pierwszego kierunku badań osiągnięto rozwiązanie, doprowadzić do zlania się z klasą tych przypadków szczególnych, dla których na zasadzie wyników drugiego kierunku badań, wystarcza znaleźć rozwiązanie. Gdyby to zlanie się nastąpiło, cel byłby osiągnięty: zagadnienie rozstrzygalności było by rozwiązane. Nie należy taić, że są i autorowie, którzy w ogóle nie wierzą w całkowitą rozwiązalność zagadnienia rozstrzygalności, powołując się głównie na pewne wyniki uzyskane przez K. Gödela[8].

Dotychczas uzyskane wyniki tyczą się tak jednego, jak i drugiego kierunku badań. Oto nazwiska autorów, którym zawdzięczamy najważniejsze rezultaty obu kierunków: W. Ackermann, H. Behmann, P. Bernays, K. Gödel, J. Herbrand, L. Kalmár, L. Löwenheim, M. Schönfinkel, K. Schütte i Th. Skolem.

[8] Chodzi tu o pracę: K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I., Monatsh. für Math. und Phys. 38., 1. Heft. Jakkolwiekby się sprawa całkowitej rozwiązalności zagadnienia rozstrzygalności miała, to jednak jedno jest pewne: z powyższej pracy Gödela nie wynika jeszcze niemożliwość całkowitego rozwiązania.

Niniejsza praca poświęcona jest rozwinięciu i uogólnieniu moich własnych wyników zawartych w pracy: Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems[9], które to wyniki odnoszą się do drugiego kierunku badań, a więc polegają na redukowaniu ogólnego zagadnienia rozstrzygalności do pewnych przypadków szczególnych tego zagadnienia.

§ 1. Zagadnienia i kryteria rozstrzygalności dla systemu tzw. logiki zdaniowej.

Najprostszym ale niemniej bardzo ważnym systemem formalnym jest tzw. system logiki zdań (Aussagenkalkül)[10]. System ten wchodzi jako niezbędna część składowa do systemu węższego rachunku funkcyj i dlatego chcemy pokrótce omówić ten system. Oczywiście tylko to, co dla nas w tej pracy ma ważność i z odnośnego punktu widzenia.

Przyjmujemy następujące znaki systemu:

$p_1, p_2, p_3, \ldots$	(litery grające rolę zmiennych zdaniowych),
(	(klamra lewa),
)	(klamra prawa),
—	(znak na negację logiczną),
&	(znak na koniunkcję logiczną),
v	(znak na dyzjunkcję logiczną),
$\rightarrow$	(znak na implikację logiczną),
$\sim$	(znak na równoważność logiczną).

Komentarze umieszczone w nawiasach a tyczące się roli odpowiednich znaków odnoszą się oczywiście tylko do in-

[9] Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), **8**, 1 zeszyt, str. 7—41. Już w dodatku do owej pracy wspomniałem o uzyskaniu przeze mnie nowych wyników. W międzyczasie uzyskałem jednak jeszcze wyniki dalsze.

[10] Zob. rozdział 1-szy książki cytowanej pod [7]; zob. też § 3 książki: D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, I (Berlin, 1934). Logika zdań jest też bardzo dobrze przedstawiona w pracach autorów polskich, jak: Prof. J. Łukasiewicz, Elementy logiki matematycznej (skrypt, 1929); Prof. L. Chwistek, Granice nauki (Książnica-Atlas, 1934); Prof. E. Żyliński, Formalizm Hilberta, I (Archiwum Towarzystwa Naukowego we Lwowie, 1935).

terpretacji logicznej. Z czysto formalnego punktu widzenia z tymi znakami nie jest ani nie powinno być związane żadne znaczenie.

Pojęcie wyrażenia sensownego systemu lub krótko wyrażenia systemu precyzujemy przy pomocy reguł następujących:

1. Każde p_i jest wyrażeniem systemu.

2. Jeśli E jest wyrażeniem systemu, to $\overline{E}$ również.

3. Jeśli E i F są wyrażeniami systemu, to $(E \& F)$, $(E \vee F)$, $(E \rightarrow F)$ oraz $(E \sim F)$ są również wyrażeniami systemu.

Przystępujemy teraz do sprecyzowania pojęcia wyrażenia właściwego (tezy) systemu. Następujące kombinacje znaków systemu są, jak łatwo na podstawie powyższych reguł sprawdzić, wyrażeniami sensownymi systemu:

1) $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$,
2) $((p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$,
3) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)))$,
4) $((p_1 \& p_2) \rightarrow p_1)$,
5) $((p_1 \& p_2) \rightarrow p_2)$,
6) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \& p_3))))$,
7) $(p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$,
8) $(p_2 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$,
9) $((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)))$,
10) $((p_1 \sim p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$,
11) $((p_1 \sim p_2) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$,
12) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_1) \rightarrow (p_1 \sim p_2)))$,
13) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\overline{p_2} \rightarrow \overline{p_1}))$,
14) $(p_1 \rightarrow \overline{\overline{p_1}})$,
15) $(\overline{\overline{p_1}} \rightarrow p_1)$.

Powyższe wyrażenia uważamy za wyrażenia właściwe systemu (jest to tzw. baza wyjściowa)[11]. Ponadto przyjmu-

[11] Te wyrażenia podstawowe zaczerpnęliśmy z książki: D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik I. Znane są oczywiście i systemy, które mają mniejszą ilość wyrażeń podstawowych (aksjomatów), jak np. Whiteheada i Russella (upro-

jemy następujące reguły rekurencyjne do tworzenia dalszych wyrażeń właściwych (są to tzw. reguły postępowania):

1. Jeśli E jest wyrażeniem właściwym systemu, F wyrażeniem systemu, p_i literą zawartą w E i jeśli G jest wynikiem podstawienia w E za p_i, wszędzie gdzie to p_i występuje, wyrażenia F, wówczas G jest wyrażeniem właściwym systemu.

2. Jeśli E jest wyrażeniem właściwym oraz $(E \rightarrow F)$ jest wyrażeniem właściwym, to F jest również wyrażeniem właściwym.

Pierwszą z tych reguł nazywają powszechnie regułą podstawienia, drugą zaś regułą odrywania. Każde wyrażenie, o którym można powiedzieć, że jest wyrażeniem właściwym systemu, musi albo być jednym z wyjściowych wyrażeń podstawowych, albo musi powstać przez kolejne stosowanie jednej z powyższych dwóch reguł postępowania, zaczynając od pewnych wyrażeń bazy wyjściowej.

Skończony łańcuch wyrażeń, którego każde wyrażenie jest bądź jednym z piętnastu wyrażeń właściwych wyjściowych, bądź powstaje z jakiegoś wyrażenia wyprzedzającego rozważane wyrażenie w tym łańcuchu przez zastosowanie reguły podstawienia, bądź też z dwu wyrażeń wyprzedzających rozważane wyrażenie w łańcuchu przez zastosowanie reguły odrywania nazywamy, zgodnie z ogólnymi tendencjami naszkicowanymi we wstępie, łańcuchem właściwym. Przy czym, aby powyżej powiedziane było zupełnie jasne, należy jeszcze sprecyzować, co należy rozumieć pod: wyrażenie G powstaje z wyrażenia E przez zastosowanie podstawienia, oraz pod: wyrażenie F powstaje z dwu wyrażeń E i H przez zastoso-

szczony przez Bernaysa) oraz nawet systemy o jednym wyrażeniu podstawowym (jak np. Nicoda). Systemy te jednak zwyczajnie nie operują na raz wszystkimi znakami logicznymi, ale tylko niektórymi. Pozostałe znaki definiuje się przy pomocy tych, a definicje są, ściśle biorąc, także coś w rodzaju wyrażeń podstawowych, tak że te systemy operują większą ilością wyrażeń podstawowych niż to się zwykle wydaje. Kwestia ilości wyrażeń podstawowych jest zresztą z naszego punktu widzenia kwestią drugorzędną. System powyższy ma głównie ten walor, że jest przejrzysty i że najważniejsze zasady logiki zdań są w nim łatwo wyprowadzalne.

wanie reguły odrywania. Mówimy, zgodnie z regułą podstawienia, że wyrażenie G powstaje z wyrażenia E przez podstawienie, gdy istnieje litera p_i zawarta w E oraz wyrażenie F takie, że G jest wynikiem zastąpienia p_i w E, wszędzie gdzie to p_i tam występuje, przez wyrażenie F. Analogicznie, zgodnie z regułą odrywania, mówimy, że wyrażenie F powstaje z dwu wyrażeń E i H przez zastosowanie reguły odrywania, gdy H jest identyczne z wyrażeniem $(E \rightarrow F)$.

Określimy teraz pojęcie wyrażenia tautologicznego i pojęcie wyrażenia mającego realizację. Jeśli wyrażenia $\overline{E}$, $(E \,\&\, F)$, $(E \vee F)$, $(E \rightarrow F)$, $(E \sim F)$, będziemy rozpatrywali jako funkcje argumentu E, względnie argumentów E i F, określone w zbiorze złożonym z dwóch przedmiotów, które oznaczamy przez $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{F}$[12] i przyjmujące wartości $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{F}$, definiując je przez następującą tabelę równości:

$$
\begin{array}{cccc}
 & \overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{F}, & \overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{P}; & \\
(\mathfrak{P} \,\&\, \mathfrak{P}) = \mathfrak{P}, & (\mathfrak{P} \,\&\, \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}, & (\mathfrak{F} \,\&\, \mathfrak{P}) = \mathfrak{F}, & (\mathfrak{F} \,\&\, \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}; \\
(\mathfrak{P} \vee \mathfrak{P}) = \mathfrak{P}, & (\mathfrak{P} \vee \mathfrak{F}) = \mathfrak{P}, & (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{P}) = \mathfrak{P}, & (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}; \\
(\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}) = \mathfrak{P}, & (\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}, & (\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{P}) = \mathfrak{P}, & (\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}) = \mathfrak{P}; \\
(\mathfrak{P} \sim \mathfrak{P}) = \mathfrak{P}, & (\mathfrak{P} \sim \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}, & (\mathfrak{F} \sim \mathfrak{P}) = \mathfrak{F}, & (\mathfrak{F} \sim \mathfrak{F}) = \mathfrak{P};
\end{array}
$$

wówczas każde wyrażenie sensowne systemu można uważać za funkcję liter p_i występujących w tym wyrażeniu zdefiniowaną dla wartości $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{F}$ i znów przyjmującą te wartości. Tak np. wyrażenie $(p_1 \,\&\, (\overline{p_4} \rightarrow p_3))$ można uważać za funkcję liter p_1, p_3, p_4 występujących w tym wyrażeniu, która np. dla wartości $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{F}$ odpowiednio na argumenty p_1, p_3, p_4 przyjmuje wartość $\mathfrak{P}$, gdyż $(\mathfrak{P} \,\&\, (\overline{\mathfrak{F}} \rightarrow \mathfrak{P}))$ równa się, według powyższej tabeli, kolejno $(\mathfrak{P} \,\&\, (\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}))$, $(\mathfrak{P} \,\&\, \mathfrak{P})$, $\mathfrak{P}$.

D e f i n i c j a 1. *Jeśli E jest wyrażeniem, które rozpatrywane jako funkcja liter p_i występujących w E, w sensie powyżej podanym, przyjmuje przynajmniej dla jednego układu wartości na argumenty wartość $\mathfrak{P}$, wówczas mówimy, że E jest wyrażeniem mającym realizację (erfüllbar). Taki układ wartości $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{F}$ na argumenty, dla którego wyrażenie E przyjmuje wartość $\mathfrak{P}$ nazywamy realizacją wyrażenia E (Erfüllungssystem).*

D e f i n i c j a 2. *Jeśli E jest wyrażeniem, które rozpatrywane jako funkcja liter p_i występujących w E, w sensie wyżej*

[12] Nie trudno się domyślić, że znaki $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{F}$ odpowiadają logicznym wartościom: prawdzie i fałszowi.

podanym, przyjmuje dla każdego układu wartości 𝔓, 𝔉 *na argumenty wartość* 𝔓, *wówczas mówimy, że* E *jest wyrażeniem tautologicznym (allgemeingültig).*

Między realizacją wyrażenia E a tautologią wyrażenia $\overline{E}$ istnieje następujący prosty związek: Dane wyrażenie E ma wtedy i tylko wtedy realizację, gdy wyrażenie $\overline{E}$ nie jest tautologiczne. Gdy E ma realizację, to dla wartości na argumenty, dla których E przyjmuje wartość 𝔓 wyrażenie $\overline{E}$, jak łatwo z powyższej tablicy odczytać, przyjmuje wartość 𝔉; wyrażenie $\overline{E}$ więc nie dla każdego układu wartości 𝔓, 𝔉 na argumenty przyjmuje wartość 𝔓, a więc nie jest tautologiczne. Ale i na odwrót: jeśli $\overline{E}$ nie jest tautologiczne, a więc dla pewnego układu wartości 𝔓, 𝔉 na argumenty przyjmuje wartość 𝔉, wówczas dla tego samego układu wartości wyrażenie E przyjmuje wartość 𝔓 czyli ma realizację. Analogiczny prosty związek istnieje między tautologią wyrażenia E a realizacją wyrażenia $\overline{E}$. Wyrażenie E jest wtedy i tylko wtedy tautologiczne, gdy wyrażenie $\overline{E}$ nie ma realizacji. Z powyższego widać, że zagadnienie rozstrzygalności dla tautologii daje się sprowadzić do zagadnienia rozstrzygalności dla realizacji i na odwrót zagadnienie rozstrzygalności dla realizacji daje się sprowadzić do zagadnienia rozstrzygalności dla tautologii. Oba zagadnienia rozstrzygalności: dla tautologii i realizacji są sobie równoważne i nie przedstawiają w tym systemie żadnych trudności. Wystarczy na zasadzie wyżej powiedzianego pokazać to tylko na jednym z nich, np. na zagadnieniu rozstrzygalności dla realizacji.

Jeśli E jest danym z góry wyrażeniem i jeśli w nim figuruje n różnych liter zmiennych, to E ma wtedy i tylko wtedy realizację, gdy jako funkcja tych n liter jako argumentów chociażby raz przyjmuje wartość 𝔓. Ponieważ jest tylko skończona ilość różnych wartości na argumenty, mianowicie 2^n, więc można wszystkie możliwości przejść i sprawdzić, czy przynajmniej dla jednego układu wartości przyjmuje dane wyrażenie wartości 𝔓. Analogiczna zresztą sytuacja jest w przypadku tautologii: należy przejść wszystkie 2^n kombinacyj wartości na argumenty. Gdy dla każdej takiej kombinacji wartości wypadnie wartość 𝔓, wówczas dane wyrażenie jest tautologiczne, w przeciwnym wypadku zaś nie. W ten oto dość trywialny sposób zyskuje się rozwiązanie zagadnienia rozstrzygalności dla realizacji i tautologii w przypadku systemu logiki zdań.

Inna bardzo rozpowszechniona i poniekąd praktyczniejsza w użyciu metoda rozstrzygania polega na sprowadzeniu wyrażeń do tzw. postaci normalnej, których rozróżnia się dwie: *postać normalną koniunktywną* (konjunktive Normalform) i *postać normalną dyzjunktywną* (disjunktive Normalform). Jeśli przez *elementarną dyzjunkcję* będziemy rozumieli wyrażenie sensowe systemu, w którym spośród znaków —, v, &, →, ~ występują tylko dwa pierwsze, przy czym kreska (pierwszy znak) figuruje tylko bezpośrednio nad literami p_1, p_2, p_3, ... (a więc przede wszystkim jednokrotnie, gdyż w przeciwnym wypadku jakaś kreska stałaby nad inną kreską, a więc nie bezpośrednio nad literą), wówczas przez koniunktywną postać normalną należy rozumieć każde wyrażenie, które powstaje przez kolejne łączenia elementarnych dyzjunkcyj przy pomocy znaku &. Z danego wyrażenia w postaci normalnej koniunktywnej można bezpośrednio, tzn. bez badania głębszego, tylko z zewnętrznej struktury wyrażenia, odczytać czy jest, czy też nie jest tautologiczne. Naprzód pokażemy to dla elementarnych dyzjunkcyj a następnie dla każdego wyrażenia koniunktywnej postaci normalnej. Jeśli E jest elementarną dyzjunkcją, to zależnie od tego czy w E występuje litera p_i taka że ona tam tak nadkreślona jak i nienadkreślona figuruje, czy też nie ma tam takiej litery — E jest lub nie jest wyrażeniem tautologicznym. Występuje bowiem w E litera p_i nadkreślona i ta sama litera równocześnie nienadkreślona, to ponieważ przy jakiejkolwiek kombinacji wartości na argumenty p_i albo $\bar{p}_i$ przyjmuje wartość $\mathfrak{P}$ oraz ponieważ gdy H lub G przyjmuje wartość $\mathfrak{P}$, jak z wyżej podanej tabeli widać, $(H \vee G)$ także ma wartość $\mathfrak{P}$, całe wyrażenie E otrzymuje wartość $\mathfrak{P}$ niezależnie od obioru kombinacji wartości na argumenty, a więc E jest wtedy tautologiczne. Jeśli zaś w E żadna litera p_i nie występuje równocześnie ze swym nadkreśleniem $\bar{p}_i$, wówczas gdy utworzymy kombinację wartości na argumenty w ten sposób, że każdej literze, która w E figuruje bez nadkreślenia przypiszemy $\mathfrak{F}$, zaś każdej literze figurującej w sposób nakreślony $\mathfrak{P}$, wówczas (zważywszy, że $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{F})$ ma wartość $\mathfrak{F}$), dojdziemy do wniosku, że całe wyrażenie E dla tej kombinacji otrzymuje wartość $\mathfrak{F}$, a więc tym samym nie może być tautologiczne.

Możliwość czysto strukturalnego rozstrzygania, czy dana elementarna dyzjunkcja jest tautologiczna, czy nie jest przenosi się natychmiast na dowolne wyrażenia koniunktywnej postaci normalnej. Zauważywszy bowiem, że $(F \mathbin{\&} G)$ wtedy tylko może dla pewnego układu wartości na argumenty przyjąć wartość $\mathfrak{P}$, gdy zarówno F jak i G dla tegoż układu przyjmują wartość $\mathfrak{P}$, dojdziemy do wniosku, że dane wyrażenie w koniunktywnej postaci normalnej wtedy i tylko wtedy jest tautologiczne, gdy każda elementarna dyzjunkcja, będąca składnikiem tej postaci koniunktywnej, jest tautologiczna, przy czym te elementarne dyzjunkcje, z których przy pomocy znaku & zbudowana jest dana postać normalna, nazywamy jej składnikami elementarnymi. A że na podstawie wyżej powiedzianego wiemy, jak z danej elementarnej dyzjunkcji odczytać czy jest tautologiczna, czy nie jest, dla tautologiczności wyrażenia w postaci normalnej koniunktywnej otrzymujemy następujące kryterium:

Dane wyrażenie w koniunktywnej postaci normalnej jest wtedy i tylko wtedy tautologiczne, gdy w każdym składniku elementarnym tego wyrażenia występuje co najmniej jedna litera p_i *tak nadkreślona jak i nienadkreślona.*

Jeśli przez elementarną koniunkcję będziemy rozumieli każde wyrażenie sensowne systemu zawierające spośród znaków —, v, &, →, ∼ tylko pierwszy i trzeci, przy czym kreska (pierwszy znak) figurować może tylko bezpośrednio nad literą (a więc przede wszystkim jednokrotnie, gdyż w przeciwnym wypadku jakaś kreska stałaby nad inną kreską a więc nie bezpośrednio nad literą), wówczas przez dyzjunktywną postać normalną należy rozumieć każde wyrażenie, które powstaje przez kolejne łączenia elementarnych koniunkcyj przy pomocy znaku v. Jak z danej postaci normalnej koniunktywnej można łatwo odczytać czy ona jest tautologiczna, czy nie, tak z danej postaci normalnej dyzjunktywnej można z łatwością odczytać czy ma, czy też nie ma realizacji. Naprzód pokażemy to dla elementarnych koniunkcyj a później dla każdego wyrażenia dyzjunktywnej postaci normalnej.

Jeśli E jest elementarną koniunkcją, to zależnie od tego czy w E występuje litera p_i taka, że ona w tym E zarówno w sposób nadkreślony jak i nienadkreślony figuruje, czy też nie ma tam takiej litery, E nie ma lub ma realizację. Występuje bowiem w E litera p_i nadkreślona i równocześnie ta sama litera nienadkreślona, to ponieważ przy jakiejkolwiek kombinacji wartości na argumenty, p_i albo $\bar{p}_i$ przyjmuje wartość $\mathfrak{F}$ oraz ponieważ gdy H lub G ma wartość $\mathfrak{F}$, jak z wyżej podanej tabeli łatwo odczytać, $(H \& G)$ także ma wartość $\mathfrak{F}$, całe wyrażenie E otrzymuje wartość $\mathfrak{F}$ niezależnie od obioru kombinacji wartości na argumenty, a więc E nie posiada wtedy realizacji.

Jeśli zaś w E żadna litera p_i nie występuje równocześnie ze swym nadkreśleniem $\bar{p}$, wówczas gdy utworzymy kombinację wartości na argumenty taką, że każdej literze która w E figuruje bez nadkreślenia przypiszemy $\mathfrak{P}$, zaś każdej literze figurującej w sposób nadkreślony przypiszemy $\mathfrak{F}$ wówczas (zważywszy, że $(\mathfrak{P} \& \mathfrak{P})$ ma wartość $\mathfrak{P}$) dojdziemy do wniosku, że całe wyrażenie E dla tej kombinacji wartości na argumenty otrzymuje wartość $\mathfrak{P}$, a więc wówczas E ma realizację. Wiemy więc jak z danej elementarnej koniunkcji odczytać czy ona ma realizację, czy też nie ma. Jeśli teraz, podobnie jak w przypadku koniunktywnej postaci normalnej, te elementarne koniunkcje z których przy pomocy znaków v buduje się dana postać normalna dyzjunktywna nazwiemy jej elementarnymi składnikami, to zauważywszy, że $(G \vee H)$ wtedy i tylko wtedy przyjmuje dla danego układu wartości na argumenty wartość $\mathfrak{P}$, gdy przynajmniej jedno z wyrażeń G lub H dla tego układu wartości przyjmuje wartość $\mathfrak{P}$, dojdziemy do wniosku, że dana postać normalna dyzjunktywna wtedy i tylko wtedy ma realizację, gdy co najmniej jeden jej składnik elementarny posiada realizację. Ta ostatnia uwaga wraz z powyższym kryterium dla elementarnych koniunkcyj daje nam dla wyrażeń w dyzjunktywnej postaci normalnej następujące kryterium rozstrzygania:

Dane wyrażenie w dyzjunktywnej postaci normalnej ma wtedy i tylko wtedy realizację, gdy w przynajmniej jednym składniku elementarnym tej postaci normalnej nie ma takiej litery p_i występującej tam zarówno w sposób nadkreślony jak i nienadkreślony.

Jak z kryterium rozstrzygania dla wyrażeń w postaci normalnej (koniunktywnej lub dyzjunktywnej) przechodzi się do kryterium rozstrzygania dla każdego bez wyjątku wyrażenia systemu jest rzeczą powszechnie znaną i dlatego ograniczę się tu tylko do naszkicowania idei, na której to przejście polega.

Aby móc dla zupełnie dowolnego wyrażenia sensownego E systemu rozstrzygnąć czy jest tautologiczne[13], czy nie jest, wystarczyło by mieć postępowanie pozwalające dla E zbudować wyrażenie F w postaci normalnej koniunktywnej takie, aby w F występowały tylko te litery p_i, które w E występują i żeby F jako funkcja tych liter a określona w zbiorze złożonym z dwóch przedmiotów $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{F}$, w sensie wyżej podanym, przedstawiała dokładnie tę samą funkcję co wyrażenie E. W samej rzeczy, jeśli dwa wyrażenia systemu E i F posiadają te same litery[14] i jako funkcje tych liter przedstawiają tę samą funkcję, wówczas oba wyrażenia albo są równocześnie tautologiczne, albo równocześnie nie są tautologiczne. Gdy E jest tautologiczne i gdy na litery występujące w F (a więc i w E) weźmiemy dowolną kombinację wartości $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{F}$, wówczas, z powodu założonej tautologiczności, wyrażenie E dla tej kombinacji daje wartość $\mathfrak{P}$, a więc i wyrażenie F, które przedstawia tę samą funkcję co E, daje dla tejże kombinacji wartość $\mathfrak{P}$, a że kombinacja ta była zupełnie dowolna, więc F daje dla każdej kombinacji wartości na argumenty wartość $\mathfrak{P}$, czyli F także jest tautologiczne. Analogicznie pokazuje się, że z tautologiczności wyrażenia F wynika też tautologiczność dla E, czyli istotnie związek $E \equiv F$ (jeśli dwa wyrażenia E, F przedstawiają tę samą funkcję to piszemy $E \equiv F$) po-

[13] Oczywiście że nie chodzi tu o jakieś w ogóle kryterium rozstrzygania, gdyż takie, polegające na przejściu wszystkich 2^n możliwości, już poznaliśmy, ale o inne polegające na sprowadzeniu do postaci normalnej. Oba te kryteria nie wyczerpują jeszcze wszystkich metod rozstrzygania. I tak np. bardzo ciekawy sposób arytmetycznego rozstrzygania podał J. Herbrand w pracy: Recherches sur la théorie de la démonstration (Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, 1930) w szczeg. str. 24—26. Na innej idei oparte kryterium rozstrzygania podał G. Gentzen w pracy: Untersuchungen über das logische Schließen (Mathematische Zeitschrift, **39**, str. 176—210 oraz str. 405—431), w której zostało też podane kryterium rozstrzygania dla intuicjonistycznej logiki zdaniowej Brouwera-Heytinga.

[14] Założenie, że wyrażenia E i F zawierają te same litery, nie jest zresztą konieczne. Można bowiem uważać wyrażenie za funkcję i takiej zmiennej, która w tym wyrażeniu efektywnie nie występuje, tzw. zmiennej „fikcyjnej".

ciąga za sobą to, że oba wyrażenia E i F są albo równocześnie tautologiczne, albo też równocześnie nietautologiczne. Gdybyśmy teraz do danego wyrażenia E potrafili podać efektywnie wyrażenie F w postaci normalnej takie, że $E \equiv F$ zachodzi, wówczas ponieważ z jednej strony dla wyrażenia F, które jest postaci normalnej koniunktywnej, umiemy rozstrzygnąć czy jest tautologiczne, czy nie jest, a z drugiej strony na zasadzie wyżej powiedzianego E jest z F pod względem tautologiczności równoważne więc umielibyśmy to też dla wyrażenia E.

A teraz pokażemy, jak do dowolnego wyrażenia E systemu można podać wyrażenie F w koniunktywnej postaci normalnej takie, że $E \equiv F$ zachodzi.

Jak się na podstawie tabeli wartości podanej na str. 10 łatwo przekonać, zachodzą dla dowolnych wyrażeń A, B, C następujące wzory:

1. $(A \sim B) \equiv ((\overline{A} \vee B) \,\&\, (A \vee \overline{B}))$,
2. $(A \rightarrow B) \equiv (\overline{A} \vee B)$,
3. $\overline{\overline{A}} \equiv A$,
4. $\overline{(A \vee B)} \equiv (\overline{A} \,\&\, \overline{B})$,
5. $\overline{(A \,\&\, B)} \equiv (\overline{A} \vee \overline{B})$,
6. $((A \,\&\, B) \vee C) \equiv ((A \vee C) \,\&\, (B \vee C))$,
7. $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$.

Jeśli zauważymy, że każdy spośród znaków &, v, $\rightarrow$, $\sim$, jeśli w ogóle figuruje w danym wyrażeniu, to na podstawie reguły **3**. podanej na str. 8 zawsze za pośrednictwem dwóch wyrażeń i jeśli te dwa wyrażenia nazwiemy odpowiednio l e w ą i p r a w ą r o z c i ą g ł o ś c i ą tegoż znaku[15], wówczas postać normalna koniunktywna daje się jeszcze następująco scharakteryzować: jest to wyrażenie systemu nie zawierające znaków $\rightarrow$, $\sim$ i w którym znak kreski figurować może tylko bezpośrednio nad literami i ponadto w którym w żadnej rozciągłości znaku v nie figuruje znak &. Niech teraz E będzie zupełnie dowolnym wyrażeniem systemu; przez jedno, lub wielokrotne stosowanie wzorów 1. i 2. można przede wszystkim do E sukcesywnie zbudować wyrażenia zawierające

[15] Tak np. w wyrażeniu (E v F) lewą rozciągłością (Wirkungsbereich, l'étendue) jest wyrażenie E, a prawą wyrażenie F.

coraz to mniejszą ilość znaków $\sim$, $\rightarrow$ i stale przedstawiających tę samą funkcję co wyrażenie E, aż dojdziemy do wyrażenia nie zawierającego już więcej znaków $\sim$, $\rightarrow$. Następnie dzięki wzorom 3., 4. i 5. można będzie zbudować sukcesywnie szereg wyrażeń przedstawiających tę samą funkcję co wyrażenie E i w których kreski będą stały na coraz to krótszych wyrażeniach i tylko jednokrotnie, aż dojdziemy do wyrażenia, w którym kreski będą stały już tylko bezpośrednio nad literami. Wreszcie aby się w rozciągłościach znaków v pozbyć znaków & należy tylko stosować wzory 6. i 7. (wzór 6. pozwala się znaków & pozbywać w lewych rozciągłościach znaku v, a wzór 7. pozwala zmienić prawą rozciągłość znaku v na lewą).

Widzimy więc, w jaki to sposób, do dowolnego wyrażenia E systemu, skonstruować wyrażenie F w postaci normalnej koniunktywnej takie, że $E \equiv F$ zachodzi. Ponieważ postać normalną dyzjunktywną można scharakteryzować następująco: jest to wyrażenie systemu nie zawierające znaków $\rightarrow$, $\sim$, w którym znak kreski figurować może tylko bezpośrednio nad literami i w którym w żadnej rozciągłości znaku & nie figuruje znak v-oraz ponieważ zachodzi też wzór:

$$8. \quad ((A \vee B) \mathbin{\&} C) \equiv ((A \mathbin{\&} C) \vee (B \mathbin{\&} C))$$

pozwalający pozbywać się znaku v w lewych rozciągłościach znaku &, więc zupełnie analogiczne postępowanie pozwala nam także do każdego wyrażenia E systemu zbudować wyrażenie F w postaci normalnej dyzjunktywnej takie, że $E \equiv F$ zachodzi (postępowanie różni się tylko tym od poprzedniego, że zamiast wzoru 6. należy teraz uwzględnić wzór 8., a zamiast wzoru 7. — wzór $(A \mathbin{\&} B) \equiv (B \mathbin{\&} A)$).

Zauważymy jeszcze, że podobnie jak z $E \equiv F$ wynika, że E i F są równoważne pod względem tautologii tak z $E \equiv F$ wynika też, że E i F są równoważne pod względem posiadania realizacji. Gdy bowiem dla jakiegoś układu wartości na argumenty E daje $\mathfrak{P}$, wówczas z $E \equiv F$ wynika, że F dla tego samego układu wartości również daje $\mathfrak{P}$ i podobnie na odwrót. Ta uwaga wraz z wyżej powiedzianym daje również możność przeniesienia kryterium rozstrzygalności dla realizacji z wyrażeń w postaci normalnej dyzjunktywnej na dowolne wyrażenia systemu.

A teraz wypada nam jeszcze pomówić o zagadnieniu rozstrzygalności dla pojęcia tezy systemu (wyrażenia właściwego). Kryterium rozstrzygalności dla pojęcia tezy systemu zyskuje się na podstawie, tzw. twierdzenia o zupełności systemu. Twierdzenie to mówi, że pojęcie tezy systemu pokrywa się pod względem zakresu z pojęciem tautologiczności. Z tego wynika, że jeżeli chcemy dla danego wyrażenia systemu rozstrzygnąć czy jest tezą, czy nie — wystarczy rozstrzygnąć czy jest tautologiczne, czy nie, a to umiemy uczynić.

Co się zaś tyczy dowodu twierdzenia o zupełności systemu, to znamy ich nawet kilka. Dowód tej części twierdzenia, która mówi, że każda teza systemu jest wyrażeniem tautologicznym jest bardzo prosty: wystarcza tylko pokazać, że każde z 15 wyrażeń bazy wyjściowej jest tautologiczne i że reguły postępowania (podstawiania i odrywania) stosowane do wyrażeń tautologicznych znów dają wyrażenia wyłącznie tylko tautologiczne, co jest rzeczą bardzo łatwą. Nieco trudniej jest udowodnić odwrotną część twierdzenia mówiącą, że i każde wyrażenie tautologiczne jest tezą systemu. Najczęściej spotykany dowód na to twierdzenie polega na metodzie sprowadzania wyrażeń do postaci normalnej koniunktywnej. Przy tej metodzie udowadnia się naprzód, że każda elementarna dyzjunkcja tautologiczna jest tezą systemu, następnie, że każda tautologiczna postać normalna koniunktywna jest tezą systemu, a w końcu, że metoda polegająca na sukcesywnym przekształcaniu dowolnego wyrażenia systemu na wyrażenia coraz to bardziej zbliżone do postaci normalnej koniunktywnej daje się w systemie sformalizować, a to znów, ściślej mówiąc, znaczy, że te sukcesywne przekształcenia dokonywane na tezach systemu dają znów tylko tezy systemu. Inna metoda dowodu twierdzenia o zupełności pochodzi od Prof. J. Łukasiewicza[16], zaś całkiem ostatnio L. Kalmár[17] podał nowy dowód[18].

[16] J. Łukasiewicz, Ein Vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls, Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, **24** (1931), str. 153—183.

[17] L. Kalmár, Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), **7** (1935), 4 zeszyt, str. 222—243.

§ 2. Zagadnienia rozstrzygalności systemu węższego rachunku funkcyjnego.

Za znaki systemu węższego rachunku funkcyj przyjmujemy przede wszystkim te wszystkie znaki, które figurują już w systemie logiki zdań oraz ponadto następujące:

$F_1^1, F_1^2, F_2^1, F_1^3, \ldots, F_i^k, \ldots$ (znaki na zmienne funkcyjne),

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ (znaki na zmienne rzeczywiste (wolne) przedmiotowe),

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ (znaki na zmienne pozorne przedmiotowe),

E (znak na kwantyfikator szczegółowy).

Komentarze umieszczone w nawiasach tyczą się oczywiście (tak jak przedtem) tylko znaczeń przy interpretacji systemu. Z czysto formalnego punktu widzenia z tymi znakami nie jest ani nie powinno być związane żadne znaczenie.

Pojęcie wyrażenia sensownego, systemu węższego rachunku funkcyj, definiujemy przy pomocy reguł następujących:

1 *Każde p_i jest wyrażeniem systemu.*

2. *Każda kombinacja kształtu $F_i^k(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_k})$ jest wyrażeniem systemu.*

3. *Jeśli A jest wyrażeniem systemu, to również i $\overline{A}$.*

4. *Jeśli A i B są wyrażeniami systemu, to $(A \mathbin{\&} B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$ również są wyrażeniami systemu.*

5. *Jeśli A jest wyrażeniem systemu oraz a_i zawiera się w A, zaś x_k nie zawiera się w A i B jest wynikiem częściowego zastąpienia znaku a_i przez znak x_k w wyrażeniu A, wówczas $(x_k)\, B$ oraz $(E\, x_k)\, B$ również są wyrażeniami systemu.*

Dla przykładu udowodnimy, że

$$((x_1)\,(E\,x_2)\,F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (p_1 \mathbin{\&} F_3^1(a_1)))$$

jest wyrażeniem systemu. Na zasadzie reguły **1.** p_1 jest wyrażeniem systemu, na podstawie reguły **2.** $F_1^2(a_2, a_3)$, $F_3^1(a_1)$ są wyrażeniami. Z tego, że p_1 oraz $F_3^1(a_1)$ są wyrażeniami sy-

[18] Wspomniane dowody twierdzenia o zupełności nie zostały przeprowadzone dla dokładnie tego tu podanego systemu. Przeniesienie jednak tych dowodów na tu podany system nie sprawiłoby żadnych trudności.

stemu wynika na zasadzie reguły **4.**, że i $(p_1 \,\&\, F_3^1(a_1))$ jest wyrażeniem systemu. Ponieważ $F_1^2(a_2, a_3)$ jest wyrażeniem systemu, na podstawie reguły **5.** $(Ex_2)\,F_1^2(a_2, x_2)$ jest także wyrażeniem systemu, a z tego znowu na zasadzie reguły **5.** wynika, że i $(x_1)(Ex_2)\,F_1^2(x_1, x_2)$ jest wyrażeniem systemu. Wreszcie, ponieważ $(p_1 \,\&\, F_3^1(a_1))$ jest wyrażeniem systemu, na zasadzie reguły **4.** również $((x_1)(Ex_2)\,F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (p_1 \,\&\, F_3^1(a_1)))$ jest wyrażeniem.

A teraz zdefiniujemy pojęcie wyrażenia właściwego (tezy) systemu. Następujące dwie kombinacje znaków:

$$((x_1)\,F_1^1(x_1) \rightarrow F_1^1(a_1))$$
$$(F_1^1(a_1) \rightarrow (Ex_1)\,F_1^1(x_1))$$

są, jak łatwo sprawdzić, wyrażeniami sensownymi systemu. Te dwa wyrażenia oraz 15 wyrażeń podanych w § 1., za bazę wyjściową dla systemu logiki zdań, przyjmujemy za wyrażenia właściwe naszego systemu (baza wyjściowa). Ponadto przyjmujemy następujące reguły postępowania:

1) *Jeśli A jest wyrażeniem właściwym systemu, B wyrażeniem systemu, p_i znakiem figurującym w A i jeśli C jest wynikiem podstawienia w A za p_i — wszędzie gdzie to p_i w A występuje — wyrażenia B, wówczas C jest również wyrażeniem właściwym (reguła podstawiania za zmienną zdaniową).*

2) *Jeśli A jest wyrażeniem właściwym systemu, F_i^k znakiem występującym w A, B wyrażeniem systemu zawierającym znaki $a_1, a_2, \ldots, a_k$ oraz jeśli w A każdą występującą kombinację kształtu $F_i^k(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ (każde y_e jest albo jakimś a_j, albo jakimś x_j) zastąpimy przez kompleks znaków, który otrzymujemy z B zastępując w nim (tj. w B) a_1 wszędzie gdzie tylko występuje przez y_1, a_2 wszędzie przez $y_2, \ldots, a_k$ wszędzie gdzie występuje przez y_k i jeśli takim sposobem z A otrzymane wyrażenie oznaczymy przez C, to C jest wyrażeniem właściwym systemu (reguła podstawiania za zmienną funkcyjną).*

3) *Jeśli A jest wyrażeniem właściwym systemu, jeśli znak a_i występuje w A oraz jeśli B jest wynikiem zastąpienia w A znaku a_i, wszędzie gdzie ten znak tam figuruje, przez jeden i ten sam znak a_k, wówczas i B jest wyrażeniem właściwym systemu (reguła podstawiania za zmienną rzeczywistą przedmiotową).*

4) *Jeśli A jest wyrażeniem właściwym i $(A \rightarrow B)$ jest wyraże-*

niem właściwym, wówczas i B jest wyrażeniem właściwym systemu.

5) *Jeśli* $(A \to B)$ *jest wyrażeniem właściwym, jeśli* a_i *występuje w* B, *zaś w* A *nie występuje i* C *jest wynikiem zastąpienia w* B a_i *przez* x_k *nie występujące w* B *wszędzie gdzie to* a_i *tam występuje, wówczas* $(A \to (x_k)\ C)$ *jest wyrażeniem właściwym.*

6) *Jeśli* $(B \to A)$ *jest wyrażeniem właściwym, jeśli* a_i *występuje w* B, *zaś w* A *nie występuje i jeśli* C *jest wynikiem zastąpienia w* B a_i *przez* x_k *nie występujące w* B *wszędzie gdzie to* a_i *tam występuje, wówczas* $((Ex_k)\ C \to A)$ *jest wyrażeniem właściwym.*

Niech A będzie dowolnym wyrażeniem systemu, obieramy sobie jakiś niepusty zbiór $\mathfrak{J}$ (skończony lub nieskończony), każdej literze a_i występującej w A przyporządkowujemy jakiś przedmiot ze zbioru $\mathfrak{J}$, każdemu występującemu w A znakowi F_i^k przyporządkowujemy jakąś k członową funkcję logiczną[19] określoną na zbiorze $\mathfrak{J}$, wreszcie każdej literze p_i występującej w A przyporządkowujemy jedną z wartości $\mathfrak{P}$ albo $\mathfrak{F}$. Obiór zbioru $\mathfrak{J}$ i ustalenie dla danego wyrażenia A takiego przyporządkowania o jakim w tej chwili mówiliśmy nazywamy przyporządkowaniem zasadniczym.

A teraz podamy przepis jednoznacznego przypisywania każdemu wyrażeniu A i każdemu przyporządkowaniu zasadniczemu dla tego wyrażenia jednej z dwóch wartości $\mathfrak{P}$ albo $\mathfrak{F}$. Zaczynamy od wyrażeń najkrótszych, którymi są p_i i kombinacje kształtu $F_i^k(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_k})$. Każdemu wyrażeniu p_i przypisujemy tę z wartości $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{F}$, która przy przyporządkowaniu zasadniczym znakowi p_i została przyporządkowana. Jeśli w przyporządkowaniu zasadniczym wyrażenia $F_i^k(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_k})$ znakowi F_i^k odpowiada funkcja logiczna F oraz znakom $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_k}$ odpowiadają odpowiednio przedmioty $b_1, b_2, \ldots, b_k$, wówczas wyrażeniu $F_i^k(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_k})$ przypisujemy $\mathfrak{P}$ albo $\mathfrak{F}$ zależnie od tego czy układ $b_1, b_2, \ldots, b_k$ spełnia re-

[19] W przypadku $k > 1$ funkcja logiczna k członowa na zbiorze $\mathfrak{J}$ oznacza poprostu k członową relację między elementami z $\mathfrak{J}$. Zaś funkcja logiczna jednoczłonowa oznacza jakąś własność elementów z $\mathfrak{J}$ (terminu „relacja jednoczłonowa“ się nie używa). Dla ujednostajnienia można funkcję logiczną nazywać relacją i w przypadku granicznym $k=1$.

lację F, czy nie spełnia, tzn. zależnie od tego czy $F(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ zachodzi, czy też nie zachodzi. A teraz pokażemy jak z wyrażeń krótszych przejść do dłuższych[20]. Jeśli dane wyrażenie jest kształtu $\overline{A}$, to przy danym przyporządkowaniu zasadniczym przypisujemy mu wartość przeciwną do tej jaką ma wyrażenie krótsze A przy tym samym przyporządkowaniu zasadniczym, czyli w myśl tabeli z § 1. Analogicznie, jeśli dane wyrażenie ma jedną z postaci $(A \,\&\, B)$, $(A \vee B)$ $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$, wówczas przy danym przyporządkowaniu zasadniczym przypisujemy mu tę z wartości $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{F}$, którą znajdujemy, wychodząc z przypisanych już wyrażeniom krótszym A, B, wartości przy tym samym przyporządkowaniu zasadniczym, na podstawie tablicy z § 1. Jeśli dane wyrażenie ma kształt $(x_k)\, A$ i jeśli B jest wyrażeniem będącym wynikiem zastąpienia w A znaku x_k, wszędzie gdzie tam występuje, przez literę a_i nie występującą w A i jeśli przy przyporządkowaniu zasadniczym na wyrażenie $(x_k)\, A$, uzupełnionym przez przyporządkowanie znakowi a_i dowolnego przedmiotu z odnośnego zbioru, wyrażeniu B, które jest krótsze od wyrażenia $(x_k)\, A$, przypisana jest wartość $\mathfrak{P}$ niezależnie od tego, jaki przedmiot temu a_i przyporządkowaliśmy, wówczas wyrażeniu $(x_k)\, A$ przy danym przyporządkowaniu zasadniczym przypisujemy wartość $\mathfrak{P}$, w przeciwnym zaś wypadku znak $\mathfrak{F}$. Jeśli zaś dane wyrażenie ma kształt $(Ex_k)\, A$ i jeśli B jest wyrażeniem będącym wynikiem zastąpienia w A znaku x_k, wszędzie gdzie tam występuje, przez znak a_i nie występujący w A i jeśli przyporządkowanie zasadnicze na wyrażenie $(Ex_k)\, A$ daje się uzupełnić przez przyporządkowanie na a_i takiego przedmiotu z odnośnego zbioru, że wyrażeniu krótszemu B przy tak uzupełnionym przyporządkowaniu zasadniczym przypisane jest $\mathfrak{P}$, wówczas wyrażeniu $(Ex_k)\, A$ przy danym przyporządkowaniu zasadniczym przypisujemy $\mathfrak{P}$, w innym wypadku zaś $\mathfrak{F}$.

Każdemu wyrażeniu przy danym przyporządkowaniu zasadniczym można dać pewną interpretację zdaniową interpretując znaki —, $\&$, v, $\rightarrow$, $\sim$ odpowiednio jako negację, koniunkcję, dyzjunkcję, implikację i równoważność logiczną,

[20] Z dwóch wyrażeń to nazywamy dłuższym, które zawiera więcej znaków systemu niż drugie, przy czym każdy znak należy tyle razy liczyć, ile razy istotnie się powtarza.

znaki zmienne (rzeczywiste) identyfikując przy interpretacji z tym, co im w przyporządkowaniu zasadniczym odpowiada, oraz czytając (x_k), (Ex_k) następująco: „dla każdego przedmiotu x_k zbioru $\mathfrak{J}$“, „istnieje taki przedmiot x_k w zbiorze $\mathfrak{J}$“, czyli interpretując te ostatnie znaki odpowiednio jako kwantyfikatory ogólne i szczegółowe odnoszące się do zbioru $\mathfrak{J}$, gdzie $\mathfrak{J}$ jest zbiorem z przyporządkowania zasadniczego.

Odnośne zdanie może być, zależnie od okoliczności, prawdziwe albo fałszywe. Np. wyrażenie

$$((x_1)\,(Ex_2)\,F_1^2\,(x_1, x_2)\ \&\ F_1^2\,(a_2, a_3)),$$

gdy w przyporządkowaniu zasadniczym obranym zbiorem jest zbiór liczb naturalnych, zaś znakowi F_1^2 odpowiada relacja „$<$“, a literom a_2, a_3 odpowiadają liczby 3, 7, przechodzi w zdanie prawdziwe mówiące, że do każdej liczby naturalnej x_1 istnieje liczba naturalna x_2 większa oraz że 7 jest większe od 3.

Jak łatwo widzieć, każde wyrażenie przy danym zasadniczym przyporządkowaniu przechodzi w zdanie prawdziwe albo fałszywe zależnie od tego czy w wyżej rekurencyjnie podanym sposobie przypisywania wartości odpowiada mu wartość $\mathfrak{P}$ czy $\mathfrak{F}$.

Wprowadzamy następujące definicje:

D e f i n i c j a 3. *Wyrażenie, które choć przy jednym przyporządkowaniu zasadniczym przechodzi w zdanie prawdziwe, nazywamy wyrażeniem mającym realizację (erfüllbar). Przyporządkowanie zasadnicze, przy którym dane wyrażenie przechodzi w zdanie prawdziwe, nazywamy przyporządkowaniem realizującym względnie spełniającym dane wyrażenie (Erfüllungssystem).*

D e f i n i c j a 4. *Wyrażenie, które przy każdym przyporządkowaniu zasadniczym przechodzi w zdanie prawdziwe, nazywamy wyrażeniem tautologicznym (allgemeingültig).*

Jak łatwo widzieć, system węższego rachunku funkcyj jest rozbudowaniem systemu logiki zdań, przy którym pojęcia tu wprowadzone dla całego systemu, przy ograniczeniu się tylko do tej części systemu, która odpowiada logice zdań, zupełnie się pokrywają z odnośnymi pojęciami o tej samej nazwie, wprowadzonymi dla logiki zdań w § 1. Każde wyrażenie tautologiczne w nowym sensie a będące już wyrażeniem systemu logiki zdań jest też tautologiczne w sensie starym oraz na odwrót: każde wyrażenie tautologiczne w starym sensie jest także tautologiczne w sensie nowym. Podobne obowiązuje także, gdy pojęcie wyrażenia tautologicznego zastąpimy pojęciem wyrażenia mającego realizację lub pojęciem wyrażenia właściwego (tezy) systemu.

W związku z tymi trzema pojęciami: wyrażenia tautologicznego, wyrażenia mającego realizację i wyrażenia właściwego systemu — nasuwają się, tak jak w systemie logiki zdań, trzy zagadnienia rozstrzygalności. I tu, podobnie jak tam, wszystkie te trzy zagadnienia są równoważne w tym sensie, że do rozwiązania wszystkich trzech zagadnień wystarczy rozwiązać tylko jedno z nich. Teraz, podobnie jak przedtem, między realizacją jakiegoś wyrażenia A a tautologią wyrażenia $\overline{A}$ zachodzi związek: wyrażenie A wtedy i tylko wtedy ma realizację, gdy $\overline{A}$ nie jest tautologiczne. Jeśli bowiem z jednej strony wyrażenie A ma realizację, to dla przyporządkowania zasadniczego realizującego wyrażenie A wyrażenie $\overline{A}$ przechodzi w zdanie fałszywe, a więc nie może być tautologiczne. Na odwrót: jeśli $\overline{A}$ nie jest tautologiczne, czyli dla pewnego przyporządkowania zasadniczego przechodzi w zdanie fałszywe, wówczas dla tego samego przyporządkowania zasadniczego A przechodzi w zdanie prawdziwe, czyli A ma wówczas realizację. Podobnie między tautologią wyrażenia A a realizacją wyrażenia $\overline{A}$ zachodzi związek: wyrażenie A jest wtedy i tylko wtedy tautologiczne, gdy $\overline{A}$ nie ma realizacji. Gdy bowiem wyrażenie A jest tautologiczne, wówczas dla każdego zasadniczego przyporządkowania przechodzi w zdanie prawdziwe, a więc $\overline{A}$ dla każdego przyporządkowania zasadniczego przechodzi w zdanie fałszywe, czyli nie posiada realizacji. Odwrotnie: gdy $\overline{A}$ nie ma realizacji, wówczas dla każdego przyporządkowania zasadniczego $\overline{A}$ przechodzi w zdanie fałszywe, a więc A w prawdziwe, czyli A jest wtedy tautologiczne.

Z wyżej naprowadzonych związków pomiędzy pojęciem tautologii a pojęciem realizacji wynika natychmiast, że rozwiązanie zagadnienia rozstrzygalności dla realizacji można sprowadzić do rozwiązania zagadnienia rozstrzygalności dla tautologii i na odwrót. Wystarczy to pokazać tylko w jedną stronę; dowód w drugą stronę jest analogiczny. Załóżmy przeto, że mamy jakieś kryterium rozstrzygalności dla tautologii i niech A będzie dowolnym wyrażeniem, o którym chcemy rozstrzygnąć czy ma realizację, czy nie ma. Badamy w tym celu przy pomocy kryterium rozstrzygalności dla tautologii czy $\overline{A}$ jest, czy też nie jest tautologiczne. Jeśli okaże się, że $\overline{A}$ jest tautologiczne, to na podstawie wyżej powiedzianego, A nie ma realizacji, gdy zaś $\overline{A}$ okaże się wyrażeniem nietautologicznym, wówczas A ma realizację.

Widzimy więc istotnie, że mając jakieś kryterium rozstrzygalności dla tautologii zyskuje się natychmiast kryterium rozstrzygalności dla realizacji, a ponieważ zupełnie analogicznie udowodnilibyśmy odwrotne twierdzenie, więc widzimy też, że oba zagadnienia rozstrzygalności pod względem możliwości rozwiązania są równoważne. Jeśli zaś chodzi o trzecie zagadnienie rozstrzygalności, mianowicie dla pojęcia tezy systemu, to i to zagadnienie rozstrzygalności równoważne jest tamtym dwom, podobnie jak to ma miejsce w systemie logiki zdań. I tu, podobnie jak w systemie logiki zdań, dowód polega na tzw. twierdzeniu o zupełności systemu mówiącym, że zakresy pojęcia tezy systemu i pojęcia wyrażenia tautologicznego w zupełności się pokrywają.

Dowód tej części twierdzenia o zupełności, która mówi, że każda teza systemu jest wyrażeniem tautologicznym jest najłatwiejszy; wystarcza bowiem tylko pokazać, że wyrażenia z bazy wyjściowej są wyrażeniami tautologicznymi i że reguły postępowania stosowane do wyrażeń tautologicznych dają znów tylko wyrażenia tautologiczne, a to nie przedstawia żadnych trudności. Istotniejsza część twierdzenia mówiąca, że i na odwrót każde wyrażenie tautologiczne jest tezą systemu została udowodniona w roku 1930 przez K. G ö d e l a[21]. Do powyższego należy dodać, że oryginalny dowód G ö d e l a twierdzenia o zupełności nie był przeprowadzony dla tego samego tu przedstawionego systemu węższego rachunku funkcyj, ale dla systemu równoważnego o innej bazie wyjścio-

[21] K. G ö d e l, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Math. und Phys. 37., 2. Heft. Dowód zupełności zawiera się także, ściśle biorąc, w piątym rozdziale pracy J. H e r b r a n d a, cytowanej pod [13]. Wysłowienie inne twierdzenia o zupełności u H e r b r a n d a jest podyktowane jego finitystycznym stanowiskiem.

wej i innych regułach postępowania; przeniesienie jednak jego dowodu na ten system nie przedstawia żadnych trudności.

Reasumując możemy powiedzieć, że, podobnie jak w systemie logiki zdań, również i w tym systemie wszystkie trzy zagadnienia rozstrzygalności: zagadnienie rozstrzygalności dla tautologii (Allgemeingültigkeitsproblem), zagadnienie rozstrzygalności dla realizacji (Erfüllbarkeitsproblem) i zagadnienie rozstrzygalności dla pojęcia tezy systemu (beweistheoretisches Entscheidungsproblem) są równoważne i mogą być przeto uważane za różne postacie jednego i tego samego problemu, który chcemy nazywać krótko zagadnieniem rozstrzygalności (Entscheidungsproblem). Zagadnienie to dla systemu węższego rachunku funkcyj, któremu poświęcona jest niniejsza praca, przedstawia o wiele większe trudności niż w systemie logiki zdań. Tam, aby np. rozstrzygnąć czy dane wyrażenie A ma realizację, czy nie, wystarczyło przejść po prostu wszystkie 2^n możliwych kombinacyj wartości na argumenty (przyporządkowań zasadniczych), gdzie n jest ilością różnych liter występujących w A i zobaczyć czy przynajmniej dla jednej takiej kombinacji wypada wartość $\mathfrak{P}$. Możliwość takiego prostego kryterium rozstrzygania dla systemu węższego rachunku funkcyj na ogół nie istnieje, gdyż ilość przyporządkowań zasadniczych wchodzących w rachubę w tym wypadku jest nieskończona.

§ 3. Niektóre redukcje zagadnienia rozstrzygalności węższego rachunku funkcyjnego do pewnych przypadków szczególnych tego zagadnienia.

Z trzech równoważnych postaci zagadnienia rozstrzygalności przedmiotem naszych dalszych rozważań będzie prawie wyłącznie postać, którąśmy nazwali zagadnieniem rozstrzygalności dla realizacji. Każdy wynik dotyczący tej postaci daje się oczywiście natychmiast przenieść na dwie postacie pozostałe.

Odnośnie symboliki stosowanej w dalszym ciągu, pragniemy zaznaczyć, że nie będziemy się trzymali ściśle tej, która została podana w dwóch poprzednich paragrafach. Tam, z czysto formalnego stanowiska wskazanym było wymienienie z góry tych znaków, które potrzebne są do zbudowania systemu. Ustalenie z góry kształtu znaków na rozmaite gatunki zmiennych jak: zmiennych zdaniowych, zmiennych przedmiotowych rzeczywistych, zmiennych przedmiotowych pozornych, zmiennych funkcyjnych — uczyniło sformułowanie odnośnych reguł bardziej jednoznacznym i ścisłym niż by to miało miejsce, gdybyśmy się ograniczyli do stwierdzenia, jak to się zwykle czyni, że będziemy mieli do czynienia z rozmaitymi gatunkami liter zmiennych jak: zmienne zdaniowe, zmienne przedmiotowe rzeczywiste, etc. — i że reprezentantów każdego gatunku należy sobie wyobrazić w dowolnych znakach byle od siebie różnych, tzn. że zmienne różnych gatunków mają być w piśmie w jakiś sposób odróżnione i że to samo ma mieć miejsce dla różnych przedstawicieli tego samego gatunku zmiennych. Takie ogólne charakteryzowanie symboliki jest wprawdzie z formalnego punktu widzenia bezsprzecznie mniej ścisłe niż postępowanie użyte w poprzednich paragrafach polegające na dokładnym opisie struktury odnośnych znaków, ale za to praktycznie bardziej dogodne, gdyż umożliwia w danym miejscu wprowadzenie takiej symboliki, która w tym miejscu jest bardziej celowa niż ta, która wypływa z reguł z góry narzuconych. Szczególnie, jeśli chodzi o przedstawienie długiego wyrażenia wzgl. dowodu, to przez stosowną ad hoc obraną symbolikę można dużo zyskać pod względem miejsca i jasności. Z tych też względów zastrzegamy sobie prawo wprowadzenia w stosownych miejscach odpowiedniej symboliki. Z góry jednak już możemy powiedzieć, że zamiast np. znaków F_i^k na zmienne funkcyjne dogodniej jest na ogół posługiwać się, bez obawy dwuznaczności, pojedyńczymi znakami, jak: F, G, H, Φ, Ψ — wskaźnik górny „k" podający liczbę argumentów danej zmiennej można bowiem odczytać na ogół z wypełnionych miejsc na argumenty danej zmiennej funkcyjnej, zaś wskaźnik dolny „i" służący do odróżnienia pomiędzy sobą zmiennych o tej samej liczbie argumentów może być zastąpiony często przez oznaczenie różnych zmiennych różnymi literami. Analogicznie dogodniej jest często zamiast znaków: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ względnie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ używać znaków: $p, q, r, \ldots$ względnie $x, y, z, \ldots$; innym razem znów dogodniej jest zmienne takie, jak x_i odróżnić nie tylko dolnymi wskaźnikami, ale także górnymi i używać znaków $\overset{k}{x}_i$. Dogodnie jest też często nie odróżniać zmiennych rzeczywistych od pozornych, bez obawy dwuznaczności. Odnośnie do nawiasów, to umawiamy się je pomijać tam, gdzie to można bez obawy dwuznaczności uczynić, przy czym w każdym razie będziemy się trzymali, często spotykanej umowy, według której znak v mocniej wiąże niż &, a ten znów mocniej niż $\rightarrow$ i $\sim$.[22] Te uwagi i założenia w związku z symboliką poczyniwszy, wracamy do zagadnienia rozstrzygalności. Chcemy przede wszystkim pokazać, że przy zagadnieniu rozstrzygalności wystarcza się, bez ograniczenia ogólności, zająć wyrażeniami nie zawierającymi zmiennych rzeczywistych przedmiotowych. Do każdego bowiem wyrażenia o zmiennych rzeczywistych możemy podać, z nim pod względem posiadania realizacji równoważne wyrażenie nie zawierające już zmiennych rzeczywistych. Gdy A jest dowolnym wyrażeniem,[23] $x_1, x_2, \ldots, x_n$

[22] Nawiasów używa się w matematyce i logice zazwyczaj w celu oznaczania porządku, w jakim należy wykonać kilka po sobie następujących operacyj. Gdy się więc z góry pewnym operacjom daje pierwszeństwo nazywając je „mocniejszymi" od innych, czyni się poniekąd nawiasy zbędnymi. Nawiasy są także zawsze tam zbędne, gdzie chodzi o wielokrotne dokonanie jednej i tej samej asocjatywnej operacji, gdyż porządek wykonywania tej operacji nie wpływa wtedy na wynik ostateczny. W logice, w przeciwieństwie do matematyki, używa się często zamiast nawiasów innych środków jak punktów (W h i t e h e a d i R u s s e l l, H e r b r a n d) lub jak to czynią Prof. Ł u k a s i e w i c z i Prof. C h w i s t e k, przez stawianie operatorów na początek, tzn. przed ich argumenty można w ogóle pozbyć się nawiasów. Wszystkie te sposoby mają jednak obok swych dobrych stron także i złe strony. Za najgorszy z nich uważamy wspomniany wyżej system punktowy (są też inne systemy punktowe poniekąd lepsze), ponieważ do formalnego, mechanicznego formułowania reguł się nie nadaje, gdyż ciągle wymaga ingerencji w rodzaju podwyższenia liczby punktów (zob. np. w pracach H e r b r a n d a), zaś wielkich walorów praktycznych także nie posiada. Z formalnego punktu widzenia beznawiasowy system pisania pochodzący od Prof. Ł u k a s i e w i c z a należy bezwzględnie uważać za najlepszy; z praktycznego punktu widzenia zaś ma tę wadę, że do czytania wyrażeń napisanych tym systemem należy nabrać specjalnej wprawy, gdyż porządek czytania nie odpowiada tu, jak zwykle, porządkowi pisania znaków (tj. od lewej ku prawej), ale jest inny.

[23] Zamiast dłuższego zwrotu: w y r a ż e n i e w ę ż s z e g o r a c h u n k u f u n k c y j n e g o, gdy nie będzie obawy nieporozumienia, będziemy używali krótszego: w y r a ż e n i e. Na określenie wyrażeń węższego rachunku funkcyjnego w literaturze niemieckiej używa się przeważnie krótkiego terminu: Z ä h l a u s d r u c k.

zmiennymi wolnymi wyrażenia A, wówczas wyrażenie (Ex_1) $(Ex_2)\ldots(Ex_n)\ A$, które nie zawiera już zmiennych wolnych jest z wyrażeniem A pod względem posiadania realizacji równoważne[24]. W samej rzeczy, gdy A posiada realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}$, zaś $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są wartościami na $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $F_1', F_2', \ldots, F_m'$ funkcjami logicznymi na zmienne funkcyjne $F_1, F_2, \ldots, F_m$ figurujące w A i $p_1', p_2', \ldots, p_k'$ wartościami na zmienne zdaniowe figurujące w A, przy których A przechodzi w zdanie prawdziwe A', wówczas układ wartości $F_1', F_2', \ldots, F_m'$; $p_1', p_2', \ldots, p_k'$ odpowiednio na zmienne $F_1, F_2, \ldots, F_m$; $p_1, p_2, \ldots, p_k$ realizuje w sposób oczywisty wyrażenie $(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_n)\ A$ w zbiorze $\mathfrak{J}$. Ale i na odwrót, gdy wyrażenie $(Ex_1)\ (Ex_2)\ldots(Ex_n)\ A$ przechodzi dla układu wartości $F_1'', F_2'', \ldots, F_m''$; $p_1'', p_2'', \ldots, p_k''$ w jakimś zbiorze $\mathfrak{K}$ w zdanie prawdziwe, które oznaczamy przez (Ex_1) $(Ex_2)\ldots(Ex_n)\ A''$, wówczas w zbiorze $\mathfrak{K}$ istnieje n elementów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takich że A'' zachodzi, a to znaczy, że układ $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $F_1'', F_2'', \ldots, F_m''$; $p_1'', p_2'', \ldots, p_k''$ jest układem realizującym wyrażenie A w zbiorze $\mathfrak{K}$. Wyrażenia A i $(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_n)\ A$ są więc istotnie równoważne.

Pokażemy teraz, że przy zagadnieniu rozstrzygalności można się ograniczyć do wyrażeń nie zawierających także zmiennych zdaniowych. Niech A będzie dowolnym wyrażeniem, $F_1, F_2, \ldots, F_m$ jego zmienne funkcyjne, zaś $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jego zmienne zdaniowe. Niech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ oznaczają k zmiennych funkcyjnych jednoczłonowych różnych pomiędzy sobą i różnych od $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Wyrażenie B, które otrzymujemy z A zastępując każde p_i przez $(x)\ G_i(x)$ nie zawiera już zmiennych zdaniowych i jest wyrażeniem równoważnym z A pod względem posiadania realizacji. Gdy bowiem A ma realizację i układ $F_1', F_2', \ldots, F_m'$; $p_1', p_2', \ldots, p_k'$ spełnia wyrażenie A w zbiorze $\mathfrak{J}$, wówczas definiując $G_i'(x)$ dla każdego elementu x z $\mathfrak{J}$ przez równoważności: $G_i'(x) \sim p_i'$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ zyskujemy natychmiast równoważności: $(x)\ G_i'(x) \sim p_i'$[25] $(i=1, 2, \ldots, k)$, z których wynika, że układ $F_1', F_2', \ldots,$

[24] W dalszym ciągu będziemy przeważnie mówili: r ó w n o w a ż n e zamiast: r ó w n o w a ż n e p o d w z g l ę d e m p o s i a d a n i a r e a l i z a c j i.

[25] Dla dalszego zaoszczędzenia nawiasów umawiamy się operatory (x), (Ex) uważać za mocniejsze od operatorów z logiki zdań.

F_m', G_1', G_2',..., G_k' spełnia wtedy wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{Z}$. Odwrotnie, gdy wyrażenie B ma realizację i układ F_1'', F_2'',..., F_m'', G_1'', G_2'',..., G_k'' spełnia B w zbiorze $\mathfrak{K}$, wówczas gdy p_1'', p_2'',..., p_k'' zdefiniujemy przez równoważności $p_i'' \sim (x)$ $G_i''(x)$, układ F_1'', F_2'',..., F_m''; p_1'', p_2'',..., p_k'' spełnia wyrażenie A w zbiorze $\mathfrak{K}$. Mamy więc następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 1. *Przy zagadnieniu rozstrzygalności wystarcza się ograniczyć do wyrażeń nie zawierających ani zmiennych rzeczywistych, ani zmiennych zdaniowych.*

Z twierdzenia tego będziemy w dalszym ciągu tej pracy korzystali. Jedną z bardzo ważnych redukcyj zagadnienia rozstrzygalności jest ta, która wyraża, że można się ograniczyć do wyrażeń tzw. p o s t a c i n o r m a l n e j. Wyrażenie zwie się wyrażeniem w postaci normalnej, gdy w nim wszystkie kwantyfikatory stoją na samym początku, jeden po drugim nie oddzielone od siebie nawiasami i nie zaopatrzone znakami negacji oraz, których zakresy działań (rozciągłości) dosięgają końca wyrażenia. Każde wyrażenie w postaci normalnej daje się napisać w formie $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)A$, gdzie A nie zawiera już kwantyfikatorów, a symbol $(?x)$ stoi zamiast (x) lub (Ex). Znak zapytania w symbolu $(?x)$ ma wyrazić, że $(?x)$ jest jednym z kwantyfikatorów o zmiennej x: ogólnym lub szczegółowym, lecz nie wiadomo dokładnie który.

Możliwość podania do dowolnego wyrażenia wyrażenia z nim równoważnego w postaci normalnej[26] polega, jak wiadomo, głównie na następujących czterech wyrażeniach tautologicznych:

$$p \vee (x)\, F(x) \sim (x)\, (p \vee F(x)),$$
$$p \mathbin{\&} (x)\, F(x) \sim (x)\, (p \mathbin{\&} F(x)),$$
$$p \vee (Ex)\, F(x) \sim (Ex)\, (p \vee F(x)),$$
$$p \mathbin{\&} (Ex)\, F(x) \sim (Ex)\, (p \mathbin{\&} F(x)).$$

Gdy A jest dowolnie danym wyrażeniem, wówczas pozbywamy się w nim przede wszystkim znaków $\rightarrow$ i $\sim$ sposo-

[26] Często słyszy się o „sprowadzeniu“ danego wyrażenia do postaci normalnej, zamiast o podaniu do danego wyrażenia innego wyrażenia w postaci normalnej z nim równoważnego. Jest to oczywiście nieścisłe powiedzenie, gdyż w każdym podobnym wypadku chodzi o podanie i n n e g o wyrażenia, który stoi do danego w pewnej relacji. Podobnych powiedzeń jednak i my używać będziemy, gdyż ułatwiają i upraszczają znakomicie wysłowienie, a istotnego sensu tych powiedzeń zazwyczaj nie trudno się domyślić.

bem znanym z § 1. Następnie dzięki wyrażeniom tautologicznym

$$\overline{(x)\,F(x)} \sim (Ex)\,\overline{F}(x),$$
$$\overline{(Ex)\,F(x)} \sim (x)\,\overline{F}(x),$$
$$\overline{p \,\&\, q} \sim \overline{p} \vee \overline{q},$$
$$\overline{p \vee q} \sim \overline{p} \,\&\, \overline{q},$$
$$\overline{\overline{p}} \sim p$$

można się postarać, aby znak negacji stał na coraz to krótszych wyrażeniach i tylko jednokrotnie, aż wreszcie osiągnie się to, że znak ten stać będzie jedynie nad zmiennymi funkcyjnymi lub ewentualnie jeszcze nad zmiennymi zdaniowymi, gdy takowe w A występują. Po dokonaniu tego można wreszcie przez stosowanie odpowiednią liczbę razy wyżej podanych czterech wyrażeń tautologicznych rozszerzyć kolejno zakresy działań występujących kwantyfikatorów, przesuwając kwantyfikatory coraz bardziej na lewo, aż te kwantyfikatory znajdą się jeden po drugim na początku wyrażenia, a ich zakresy sięgać będą do prawego końca wyrażenia. W ten sposób otrzymamy wyrażenie B postaci normalnej i takie, że nie tylko zajdzie równoważność pod względem posiadania realizacji wyrażeń A i B, ale że wyrażenie $A \sim B$ będzie nawet tautologiczne[27].

Każde wyrażenie postaci normalnej daje się, jak już wiemy, napisać w formie $(?x_1)(?x_2)\dots(?x_n)\ A$, gdzie A nie zawiera już kwantyfikatorów. Układ $(?x_1)(?x_2)\dots(?x_n)$ kwantyfikatorów stojący na początku postaci normalnej chcemy za G ö d e l e m[28] nazywać p r e f i k s e m (Präfix), zaś za prefiksem stojącą i wolną od kwantyfikatorów część wyrażenia postaci nor-

[27] Z tego że A $\sim$ B jest wyrażeniem tautologicznym wynika łatwo, że A i B są równoważne pod względem posiadania realizacji ale nie na odwrót. Relacja pomiędzy wyrażeniami A i B mówiąca, że wyrażenie A $\sim$ B jest tautologiczne jest więc mocniejsza od relacji równoważności dwóch wyrażeń pod względem posiadania realizacji. W książce cytowanej pod [11] (po uwzględnieniu różnic wynikających z innego bardziej finitystycznego stanowiska), mocniejszej relacji odpowiada pojęcie „Ü b e r f ü h r b a r k e i t", zaś słabszej pojęcie „D e d u k t i o n s g l e i c h h e i t". Odróżnienie tych dwóch relacyj jest bardzo ważne, a jednak nie zawsze bywa przestrzegane.

[28] Por. pracę cytowaną w [21], str. 350.

malnej za K a l m á r e m[29] chcemy nazywać j ą d r e m (Kern) tej postaci normalnej[30].

Według powyższego mamy następujące

T w i e r d z e n i e 2. *Przy zagadnieniu realizacji wystarcza się ograniczyć do wyrażeń postaci normalnej* $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\,A$, *gdzie* A *nie zawiera ani zmiennych wolnych, ani zmiennych zdaniowych*[31].

Postać normalna bywa punktem wyjścia prawie wszystkich poszukiwań odnośnie zagadnienia rozstrzygalności, a kształt prefiksu jest zazwyczaj podstawą klasyfikacji wyrażeń. Przy zagadnieniu rozstrzygalności można się ograniczyć jednak już do wyrażeń w postaci normalnej specjalnych typów. W dalszym ciągu tej pracy poznamy cały szereg typów specjalnych, z których każdy dla siebie jest w pewnej mierze już równoważny ogólnej postaci normalnej, gdyż rozwiązanie zagadnienia rozstrzygalności dla wyrażeń jednego z tych typów pociągnęłoby za sobą rozwiązanie ogólnego zagadnienia rozstrzygalności. Przy zagadnieniu rozstrzygalności wyrażeń postaci normalnej, możemy w każdym razie, bez uszczerbku dla ogólności, założyć, że pierwszym kwantyfikatorem prefiksu jest kwantyfikator ogólny a ostatnim szczegółowy. Wyrażenia $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)A$ i $(x)(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)(Ey)[A\,\&\,\&\,\overline{f}(y) \vee f(x)]$ są bowiem, jak łatwo widzieć, tak równoważne pod względem posiadania realizacji jak i równoważne pod względem tautologii, niezależnie od tego, jaką zmienną funkcyjną jest f i czy występuje w A, czy też nie. Prefiks wyrażeń rozpoczynających się kwantyfikatorem ogólnym a koń-

[29] L. K a l m á r, Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, Math. Annalen **108** (1933).

[30] Niektórzy autorowie zamiast terminu: j ą d r o używają terminu: m a t r y c a (die Matrix, la matrice).

[31] Twierdzenie to przenosi się natychmiast na zagadnienie rozstrzygalności dla tautologii. Aby do danego wyrażenia A podać wyrażenie postaci normalnej równoważne z nim pod względem tautologii, wystarcza do A znaleźć postać normalną równoważną z A pod względem realizacji i w tej postaci normalnej każdy kwantyfikator wymienić na przeciwny o tej samej zmiennej (ogólny na szczegółowy i na odwrót) oraz jądro zastąpić zaprzeczeniem. W ten sposób otrzymujemy wyrażenie również w postaci normalnej, równoważne z wyrażeniem A pod względem tautologii.

czących się szczegółowym można w sposób bardziej ścisły zanotować następująco[32]: $(x_\rho)_1^{r_1} (Ex_\rho)_{r_1+1}^{s_1} (x_\rho)_{s_1+1}^{r_2} (Ex_\rho)_{r_2+1}^{s_2} \dots (x_\rho)_{s_{n-1}+1}^{r_n} (Ex_\rho)_{r_n+1}^{s_n}$, gdzie $r_1 < s_1 < r_2 < s_2 \dots < r_n < s_n$. Liczbę n wyrażającą liczbę przejść z kwantyfikatora ogólnego na szczegółowy nazywamy stopniem prefiksu. Istnieje postępowanie znane i często używane, pochodzące od Skolema[33], które pozwala sukcesywnie zmniejszać stopień prefiksu, w tym sensie, że do każdego wyrażenia postaci normalnej o prefiksie stopnia n (gdzie $n > 1$) pozwala skonstruować wyrażenie postaci normalnej o prefiksie stopnia $n-1$ i równoważne z danym pod względem posiadania realizacji. Przez kolejne stosowanie tego postępowania dochodzi się do wyrażenia stopnia pierwszego, tj. wyrażenia postaci normalnej o prefiksie postaci $(x_1)(x_2)\dots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\dots(Ey_s)$. Prefiksy tego typu nazywamy skolemowskimi prefiksami, a postać normalną o skolemowskim prefiksie skolemowską postacią normalną. Zasada postępowania Skolema jest następująca: $(x_\rho)_1^{r_1} (Ex_\rho)_{r_1+1}^{s_1} (x_\rho)_{s_1+1}^{r_2} (Ex_\rho)_{r_2+1}^{s_2} \dots (x_\rho)_{s_{n-1}+1}^{r_n} (Ex_\rho)_{r_n+1}^{s_n} A$ niech będzie dowolnym wyrażeniem stopnia n, $F_1, F_2, \dots, F_k$ niech będą zmiennymi funkcyjnymi tego wyrażenia, F niech oznacza s_1-członową zmienną funkcyjną różną od zmiennych $F_1, F_2, \dots, F_k$. Oznaczmy przez B koniunkcję następujących dwóch wyrażeń:

$$(B_1) \qquad (y_\rho)_1^{r_1} (Ey_\rho)_{r_1+1}^{s_1} F(y_1, y_2, \dots, y_{s_1}),$$

$$(B_2) \quad (x_\rho)_1^{s_1} \Big[F(x_1, x_2, \dots, x_{s_1}) \rightarrow (x_\rho)_{s_1+1}^{r_2} (Ex_\rho)_{r_2+1}^{s_2} \dots \\ \dots (x_\rho)_{s_{n-1}+1}^{r_n} (Ex_\rho)_{r_n+1}^{s_n} A \Big].$$

Wyrażenie B daje się wtedy z łatwością do postaci normalnej

[32] Będziemy odtąd bardzo często skrótu $(x_\rho)_a^b$ względnie $(Ex_\rho)_a^b$ (przy $b > a$) używali na miejscu $(x_a)(x_{a+1})\dots(x_b)$ względnie $(Ex_a)(Ex_{a+1})\dots(Ex_b)$. Symbol ρ, odgrywający rolę zmiennego wskaźnika może oczywiście być zastąpiony przez każdy inny tego rodzaju. Zamiast zmiennej x może wystąpić oczywiście każda inna zmienna pozorna.

[33] Th. Skolem, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze etc. Vidensk.-Selsk. Skrifter, Mat.-Naturw. Klasse, 1920, Nr. 4, str. 1—36, w szczeg. str. 4—6.

$$(y_p)_1^{r_1}(x_p)_1^{r_2}(Ex_p)_{r_2+1}^{s_2}\cdots(x_p)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_p)_{r_n+1}^{s_n}(Ey_p)_{r_1+1}^{s_1}\Big[F(y_1,y_2,\ldots,y_{s_1})\,\&\,(F(x_1,x_2,\ldots,x_{s_1})\rightarrow A)\Big],$$

która jest stopnia $n-1$, sprowadzić i przedstawia wyrażenie równoważne z danym pod względem realizacji. Gdy bowiem wyrażenie dane posiada realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{Z}$ i układ $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ jest układem spełniającym, to definiując funkcję $F'(x_1, x_2, \ldots, x_{s_1})$ przez równoważność

$$F'(x_1,x_2,\ldots,x_{s_1})\equiv(x_p)_{s_1+1}^{r_2}(Ex_p)_{r_2+1}^{s_2}\cdots(x_p)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_p)_{r_n+1}^{s_n}A'\,^{34},$$

uzyskujemy w układzie $F', F_1', F_2', \ldots, F_k'$, jak łatwo widzieć, układ spełniający wyrażenie B w tym samym zbiorze $\mathfrak{Z}$.

Odwrotnie, gdy układ $F'', F_1'', F_2'', \ldots, F_k''$ spełnia wyrażenie B w jakimś zbiorze $\mathfrak{K}$, wówczas $F_1'', F_2'', \ldots, F_k''$ jest układem spełniającym dane wyrażenie w tym samym zbiorze. Przez s_1-r_1 krotne stosowanie reguły logicznej zawartej w wyrażeniu $(x)[F(x)\rightarrow G(x)]\rightarrow[(Ex)F(x)\rightarrow(Ex)G(x)]$ otrzymujemy bowiem z wyrażenia

$$(x_p)_1^{s_1}\Big[F''(x_1,x_2,\ldots,x_{s_1})\rightarrow(x_p)_{s_1+1}^{r_2}(Ex_p)_{r_2+1}^{s_2}\cdots(x_p)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_p)_{r_n+1}^{s_n}A''\Big]$$

wyrażenie

$$(x_p)_1^{r_1}\Big[(Ex_p)_{r_1+1}^{s_1}F''(x_1,x_2,\ldots,x_{s_1})\rightarrow(Ex_p)_{r_1+1}^{s_1}(x_p)_{s_1+1}^{r_2}(Ex_p)_{r_2+1}^{s_2}\cdots(x_p)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_p)_{r_n+1}^{s_n}A''\Big],$$

a z tego wyrażenia przez r_1 krotne stosowanie reguły logicznej zawartej w wyrażeniu $(x)[F(x)\rightarrow G(x)]\rightarrow[(x)F(x)\rightarrow(x)G(x)]$ otrzymujemy

$$(x_p)_1^{r_1}(Ex_p)_{r_1+1}^{s_1}F''(x_1,x_2,\ldots,x_{s_1})\rightarrow$$
$$\rightarrow(x_p)_1^{r_1}(Ex_p)_{r_1+1}^{s_1}(x_p)_{s_1+1}^{r_2}(Ex_p)_{r_2+1}^{s_2}\cdots(x_p)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_p)_{r_n+1}^{s_n}A'',$$

[34] Wynik podstawienia za zmienne funkcyjne $F_1, F_2, \ldots, F_k$ odpowiednio funkcyj $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ w wyrażeniu A, oznaczamy przez A'; podobne znaczenie będzie miało niżej A''. W ogóle w przyszłości będziemy się często posługiwali podobnym znakowaniem bez uprzedniego objaśnienia, gdyż i bez objaśnienia będzie widocznym, o co chodzi.

co, w połączeniu z $(y_\rho)_1^{r_1}(Ey_\rho)_{r_1+1}^{s_1} F''(y_1, y_2, \ldots, y_{s_1})$, daje natychmiast

$$(x_\rho)_1^{r_1}(Ex_\rho)_{r_1+1}^{s_1}(x_\rho)_{s_1+1}^{r_2}(Ex_\rho)_{r_2+1}^{s_2}\cdots(x_\rho)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_\rho)_{r_n+1}^{s_n} A'',$$

które wyraża, że układ $F_1'', F_2'', \ldots, F_k''$ spełnia dane wyrażenie, *c. b. d. o.*

Przy pomocy postępowania skolemowskiego uzyskuje się więc następujące udowodnione, po raz pierwszy w r. 1920, twierdzenie [35]:

Twierdzenie 3. *Przy zagadnieniu rozstrzygalności dla realizacji wystarcza się ograniczyć do wyrażeń postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ *(Skolemowska postać normalna)* [36].

A teraz zajmiemy się zagadnieniem zależności wyrażeń od zbioru z przyporządkowania zasadniczego, tzn. pytaniem w których zbiorach dane wyrażenie może mieć realizację i czy z realizacji danego wyrażenia w jakimś zbiorze nie wynika istnienie realizacji tego wyrażenia także w pewnych zbiorach innych. Jako pierwsze twierdzenie stojące w związku z zagadnieniem zależności wyrażeń od zbioru udowodnimy [37]

[35] Pierwszy dowód tego twierdzenia podany został przez Skolema w pracy cytowanej pod [33]. Wyżej podane postępowanie różni się nieco od oryginalnego postępowania Skolema; jest mianowicie nieco prostsze. W dalszym ciągu poznamy dwie modyfikacje postępowania skolemowskiego, które pozwalają otrzymać twierdzenia o wiele mocniejsze. Jedna z modyfikacyj została podana przez Gödela w pracy: Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Math. und Phys., **40** (1933), str. 433—443, w szczeg. str. 441. — druga przeze mnie w pracy cytowanej pod [9]. w szczeg. str. 25—26.

[36] Twierdzenie powyższe daje oczywiście natychmiast pewien rezultat także dla zagadnienia tautologii: przy zagadnieniu rozstrzygalności dla tautologii wystarcza się ograniczyć do wyrażeń o prefiksie kształtu przeciwnego do $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ (por. uwagę [31]), tzn. kształtu $(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_r)(y_1)(y_2)\ldots(y_s)$.

[37] Twierdzenie to znane jest powszechnie jako tzw. twierdzenie Löwenheima — Skolema. Udowodnione zostało po raz pierwszy przez L. Löwenheima w pracy: Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Annalen **76** (1915), str. 447—470, w szczeg. twierdz. 2, str. 450—456. Dowód prostszy na to twierdzenie i pewne uogólnienie podał później Th. Skolem w pracy cytowanej pod [33], w szczegól. str. 3—10 oraz w pracy: Über einige Grundlagenfragen der Ma-

T w i e r d z e n i e 4. *Każde wyrażenie, które w ogóle posiada realizację, posiada już realizację w zbiorze co najwyżej przeliczalnym.*

Zauważymy najprzód, że twierdzenie to wystarcza udowodnić tylko dla wyrażeń postaci normalnej, gdyż z tych przenosi się natychmiast na dowolne wyrażenia. W samej rzeczy, niech A będzie dowolnym wyrażeniem; na zasadzie wyżej pokazanego można do A podać wyrażenie B w postaci normalnej takie, że $A \sim B$ jest tautologiczne i że B posiada dokładnie te same zmienne funkcyjne co A, które niech będą $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Jeśli teraz układ $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ spełnia wyrażenie A w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}$, wówczas na zasadzie tautologiczności wyrażenia $A \sim B$ ten sam układ spełnia też wyrażenie B. Gdyby teraz dla wyrażeń postaci normalnej twierdzenie było już udowodnione, wyrażenie B miałoby już realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{K}$ co najwyżej przeliczalnym, a wówczas, na zasadzie tautologiczności wyrażenia $A \sim B$, wyrażenie A miałoby również realizację w tym samym zbiorze $\mathfrak{K}$. Niech A oznacza teraz dowolne wyrażenie postaci normalnej: $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_m)\mathfrak{A}$, zaś B wyrażenie $(x)(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_m)(Ey)[\mathfrak{A} \mathbin{\&} \overline{F}(y) \vee F(x)]$. Jak łatwo widzieć, $A \sim B$ jest wyrażeniem tautologicznym i z tego wynika zupełnie analogicznie jak wyżej, że dla dowodu ogólnego twierdzenia wystarcza się ograniczyć do wyrażeń w postaci normalnej, które, podobnie jak B, zaczynają się kwantyfikatorem ogólnym a kończą się szczegółowym. Każde tego rodzaju wyrażenie posiada pewien stopień n [38]. Pokażemy, że można się w dalszym ciągu ograniczyć do przypadku $n = 1$, tzn. do wyrażeń o skolemowskiej postaci normalnej. W samej rzeczy, do każdego wyrażenia stopnia n można przy pomocy skolemowskiego postępowania zbudować wyrażenie stopnia $n - 1$ (o ile $n > 1$), które wtedy i tylko wtedy ma realizację w jakimś zbiorze, gdy dane wyrażenie posiada

thematik, Skrifter det Norske Videnskaps-Akademi, Oslo, Mat.-Naturw. Klasse, 1929, Nr. 4, w szczeg. str. 13—28. Dziś znamy cały szereg dowodów na to twierdzenie; wypadają one zazwyczaj, jakby produkt uboczny, z twierdzeń o charakterze dalej idącym.

[38] Przez stopień takiego wyrażenia należy oczywiście rozumieć stopień jego prefiksu.

realizację w tym samym zbiorze[39]. Z tego wynika natychmiast, że pod założeniem słuszności twierdzenia Löwenheima-Skolema dla wyrażeń stopnia $n-1$ zachodzi też słuszność tego twierdzenia dla wyrażeń stopnia n[40]. Gdybyśmy więc twierdzenie udowodnili dla wyrażeń stopnia pierwszego, na mocy indukcji matematycznej twierdzenie to byłoby udowodnione dla każdego wyrażenia postaci normalnej a tym samym dla każdego w ogóle wyrażenia. A teraz udowodnimy

Twierdzenie 5. *Każde wyrażenie stopnia pierwszego, tzn. o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$, *jeśli w ogóle posiada realizację, posiada już realizację w zbiorze co najwyżej przeliczalnym.*

Załóżmy, że dowolnie dane wyrażenie typu $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, \ldots, y_s)$ posiada realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}$; to zaś znaczy, że istnieje taki układ funkcyj logicznych określonych na zbiorze $\mathfrak{J}$ i układ s funkcyj matematycznych[41] $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $\ldots, \varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ przy których wyrażenie następujące przedstawia zdanie prawdziwe:

[39] Przy dowodzie twierdzenia 3. pokazaliśmy istotnie, że do każdego wyrażenia A stopnia n ($n>1$) o zmiennych funkcyjnych $F_1, F_2, \ldots, F_k$ można skonstruować wyrażenie B stopnia $n-1$, zawierające prócz $F_1, F_2, \ldots, F_k$ jeszcze jedną zmienną funkcyjną F, takie, że gdy $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ jest układem spełniającym wyrażenie A w zbiorze $\mathfrak{J}$, to przy stosownej definicji funkcji F' układ $F_1', F_2', \ldots, F_k', F'$ spełnia wyrażenie B w tym samym zbiorze $\mathfrak{J}$ oraz, że skoro $F_1'', F_2'', \ldots, F_k'', F''$ jest układem spełniającym wyrażenie B w jakimś zbiorze $\mathfrak{K}$, wówczas $F_1'', F_2'', \ldots, F_k''$ jest układem spełniającym wyrażenie A w tym samym zbiorze $\mathfrak{K}$.

[40] Ścisły dowód tej okoliczności jest następujący: Gdy wyrażenie A stopnia n posiada w ogóle realizację, wówczas posiada realizację wyrażenie B stopnia $n-1$ otrzymane przy pomocy skolemowskiego postępowania, które na mocy założenia, jako wyrażenie stopnia $n-1$, posiada wtedy realizację w zbiorze co najwyżej przeliczalnym; wyrażenie A posiada wówczas jednak realizację w tym samym zbiorze, a więc w co najwyżej przeliczalnym.

[41] Między funkcjami logicznymi a matematycznymi określonymi na pewnym zbiorze $\mathfrak{J}$ zachodzi ta różnica, że gdy wartościami pierwszych są wartości logiczne $\mathfrak{P}$ lub $\mathfrak{F}$, wartościami drugich są przedmioty ze zbioru $\mathfrak{J}$.

$$\underset{\mathfrak{J}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{J}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{J}}{(x_r)}\,\mathfrak{A}\,(x_1, x_2, \ldots, x_r;\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r),\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r))$$ [42].

Prawdziwym jest wtedy także zdanie

$$\underset{\mathfrak{K}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(x_r)}\,\mathfrak{A}\,(x_1, x_2, \ldots, x_r;\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r),\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)),$$

przy każdym podzbiorze $\mathfrak{K}$ zbioru $\mathfrak{J}$. Ta ostatnia okoliczność nie wyraża jednak jeszcze, że dane wyrażenie posiada również realizację w zbiorze $\mathfrak{K}$, gdyż do tego trzeba jeszcze, aby funkcje $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, dla wartości $x_1, x_2, \ldots, x_r$ należących do $\mathfrak{K}$, przyjmowały wartości również wyłącznie ze zbioru $\mathfrak{K}$, bo tylko w tym wypadku można ze słuszności zdania

$$\underset{\mathfrak{K}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(x_r)}\,\mathfrak{A}\,(x_1, x_2, \ldots, x_r;\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r),\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r))$$

wnioskować na słuszność zdania

$$\underset{\mathfrak{K}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(x_r)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(Ey_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(Ey_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(Ey_s)}\,\mathfrak{A}\,(x_1, x_2, \ldots, x_r;\ y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

wyrażającego, że dane wyrażenie posiada również realizację w zbiorze $\mathfrak{K}$. Gdybyśmy jednak potrafili dowieść istnienia podzbioru co najwyżej przeliczalnego $\mathfrak{K}$ zbioru $\mathfrak{J}$ takiego, że dla wszelkich wartości $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ze zbioru $\mathfrak{K}$ wartościami funkcyj $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ są wyłącznie elementy z $\mathfrak{K}$, wówczas dane wyrażenie miałoby realizację w $\mathfrak{K}$, a tym samym twierdzenie 5 byłoby udowodnione. Sprawę tę załatwia całkowicie następujący

L e m m a t 1. *Jeśli* $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *są dowolnymi funkcjami określonymi w dowolnym (byle nie pustym) zbiorze* $\mathfrak{J}$ *takimi, że wartości tych funk-*

[42] Fakt, że zdania typu $(x)\,F(x)$, $(Ex)\,F(x)$ są prawdziwe w zbiorze $\mathfrak{J}$ będziemy odtąd często zaznaczali symbolicznie przez $\underset{\mathfrak{J}}{(x)}\,F(x)$, $\underset{\mathfrak{J}}{(Ex)}\,F(x)$. Symbolika ta da nam korzyści, gdy będziemy mieli do czynienia równocześnie z wieloma zbiorami.

cyj też są elementami z $\mathfrak{Z}$, wówczas istnieje podzbiór co najwyżej przeliczalny $\mathfrak{K}$ zbioru $\mathfrak{Z}$, który jest ze względu na te funkcje zamknięty, przy czym zbiór $\mathfrak{K}$ zwie się zamkniętym ze względu na układ funkcyj, gdy wartości każdej funkcji tego układu dla argumentów zaczerpniętych ze zbioru $\mathfrak{K}$ także do zbioru $\mathfrak{K}$ należą. [43]

Dowód. Definiujemy najprzód ciąg $M_1, M_2, M_3, \ldots$ podzbiorów zbioru $\mathfrak{Z}$ w sposób następujący. M_1 niech będzie dowolnym podzbiorem skończonym zbioru $\mathfrak{Z}$; jeśli $M_1, M_2, \ldots, M_i$ są już określone, wówczas przez M_{i+1} należy rozumieć zbiór wszystkich wartości jakie funkcje $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ przyjmują w zbiorze $M_1 + M_2 + \ldots + M_i$. Każdy zbiór M_i jest wtedy skończony. Dla $i = 1$ jest to oczywiście prawdziwe; załóżmy teraz, że $M_1, M_2, \ldots, M_i$ są skończone, wówczas $M_1 + M_2 + \ldots + M_i$ jest

[43] Lemmat ten daje się uogólnić na przeliczalny układ funkcyj, przy czym ilość argumentów każdej takiej funkcji nie musi być równa ilości argumentów każdej innej funkcji tego układu, lecz może być dowolną liczbą naturalną i dla każdej funkcji inną. Uogólniony lemmat daje się też zużytkować do uogólnienia twierdzenia Löwenheima-Skolema na wypadek przeliczalnej mnogości wyrażeń węższego rachunku funkcyj. Odnośne uogólnienie brzmi: Każdy układ przeliczalnej ilości wyrażeń węższego rachunku funkcyj, jeśli w ogóle posiada równoczesną realizację w jakimś zbiorze, posiada też realizację równoczesną w zbiorze co najwyżej przeliczalnym. Ze wspomnianego uogólnienia twierdzenia Löwenheima-Skolema wynika znany paradoks Skolema dla zaksjomatyzowanej teorii mnogości. Aksjomaty Zermelo-Fraenkla dla teorii mnogości są metamatematycznie (tzn. bez wchodzenia w ich matematyczną treść) biorąc, z wyjątkiem tzw. Aussonderungsaxiomu, wyrażeniami węższego rachunku funkcyj, zaś Aussonderungsaxiom daje się przedstawić jako przeliczalny ciąg wyrażeń węższego rachunku funkcyj, czyli cały układ aksjomatów tym samym daje się przedstawić jako przeliczalny ciąg wyrażeń węższego rachunku funkcyj. Wyżej wspomniane uogólnienie tw. Löwenheima-Skolema daje dla owego systemu aksjomatycznego teorii mnogości przeto następujący rezultat: System ten albo w ogóle nie ma realizacji (a więc jest sprzeczny), albo posiada już co najwyżej przeliczalną realizację, co znów w pewnej mierze jest sprzeczne z tzw. Axiomem der Potenzmenge, z którego by wynikało, że każda realizacja jest nieprzeliczalna. Jest to właśnie paradoks Skolema.

zbiorem skończonym i M_{i+1} jako zbiór wartości skończonej ilości funkcyj w skończonym zbiorze także skończony, a tym samym indukcją zupełną zostało pokazane, że każde M_i jest skończone. Kładziemy teraz $\mathfrak{K} = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$. Zbiór $\mathfrak{K}$ jako suma przeliczalnej ilości zbiorów skończonych jest co najwyżej przeliczalny. Z drugiej zaś strony jest ze względu na funkcje $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, \varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ zamknięty. Gdy bowiem $x_1, x_2, \ldots, x_r$ należą do $\mathfrak{K}$, wówczas przy dostatecznie dużym i należą $x_1, x_2, \ldots, x_r$ do $M_1 + M_2 + \ldots + M_i$, a wtedy $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ należy do M_{i+1}, a tym samym także do $\mathfrak{K}$, c. b. d. o.

T w i e r d z e n i e 6. (B e r n a y s a — S c h ö n f i n k l a)[44]. *Każde wyrażenie mające realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{K}$, posiada też realizację w każdym zbiorze $\mathfrak{J}$, którego moc jest większa lub równa mocy zbioru $\mathfrak{K}$.*

Dla dowodu tego twierdzenia i kilku twierdzeń dalszych korzystnym będzie wprowadzenie pewnych rzeczy pomocniczych. Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją matematyczną określoną dla wartości x ze zbioru jakiegoś $\mathfrak{J}$, zaś wartości, jakie funkcja $\varphi(x)$ przyjmuje, niech należą do jakiegoś zbioru $\mathfrak{K}$. Gdy x przebiega wszystkie elementy zbioru $\mathfrak{J}$, $\varphi(x)$ przebiega pewien podzbiór zbioru $\mathfrak{K}$, który chcemy oznaczyć przez $\mathfrak{K}_\varphi$. Zachodzi więc w każdym razie $\mathfrak{K}_\varphi \subset \mathfrak{K}$. Niech $F(x)$ oznacza teraz dowolną funkcję logiczną określoną dla wartości x ze zbioru $\mathfrak{K}$. Między zdaniami $(x) F(\varphi(x))$, $(y) F(y)$ zachodzi wtedy równoważność:

$$\overset{\mathfrak{J}}{\underset{\mathfrak{J}}{(x)}} F(\varphi(x)) \sim \overset{\mathfrak{K}_\varphi}{\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(y)}} F(y).$$

Jeśli $\underset{\mathfrak{J}}{(x)} F(\varphi(x))$ jest prawdziwe i y jest dowolnym elementem zbioru $\mathfrak{K}_\varphi$, wówczas, na mocy definicji zbioru $\mathfrak{K}_\varphi$, y równa się przy pewnym x ze zbioru $\mathfrak{J}$ wartości $\varphi(x)$. Ponieważ $\underset{\mathfrak{J}}{(x)} F(\varphi(x))$

[44] Twierdzenie powyższe zostało udowodnione po raz pierwszy w pracy: P. B e r n a y s - M. S c h ö n f i n k e l, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, Math. Annalen, **99** (1928), str. 342—372, w szczeg. str. 344. Dowód tu podany w zasadzie polega na idei pochodzącej od B e r n a y s a i S c h ö n f i n k l a, wydaje się nam jednak być bardziej przejrzystym i ścisłym, niż dowód oryginalny.

jest prawdziwe, więc także $F(\varphi(x))$, skąd na mocy $y = \varphi(x)$ także $F(y)$, a że y było dowolnym elementem zbioru $\mathfrak{K}_\varphi$, przeto również $\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(y)} F(y)$ jest prawdziwe. Odwrotnie, gdy $\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(y)} F(y)$ jest prawdziwe i x jest dowolnym elementem zbioru $\mathfrak{J}$, wówczas kładąc $y = \varphi(x)$ otrzymujemy $F(\varphi(x))$, gdyż $\varphi(x)$ należy do $\mathfrak{K}_\varphi$, a $\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(y)} F(y)$ jest według założenia prawdziwe. Z prawdziwości $F(\varphi(x))$ dla dowolnego elementu x zbioru $\mathfrak{J}$, wynika zaś prawdziwość zdania $\underset{\mathfrak{J}}{(x)} F(\varphi(x))$. Udowodniliśmy więc prawdziwość równoważności

$$\underset{\mathfrak{J}}{(x)} F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(y)} F(y).$$

Dla dowodu tej równoważności celowym było użycie po prawej stronie innej zmiennej niż po lewej. Możemy jednak teraz zamiast zmiennej y położyć x i otrzymujemy równoważność

$$(1) \qquad \underset{\mathfrak{J}}{(x)} F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x)} F(x).$$

Kładąc w tej równoważności zamiast F funkcję $\overline{F}$ otrzymujemy

$$\underset{\mathfrak{J}}{(x)} \overline{F}(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x)} \overline{F}(x),$$

z czego przez obustronne przeczenie uzyskujemy

$$(2) \qquad \underset{\mathfrak{J}}{(Ex)} F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(Ex)} F(x).$$

Równoważności (1) i (2) można wreszcie zjednoczyć w jedną

$$(3) \qquad \underset{\mathfrak{J}}{(?x)} F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(?x)} F(x).$$[45]

[45] Z równoważności tej uzyskujemy więc równoważności prawdziwe, kładąc zamiast $(?x)$ bądź (x), bądź (Ex). Należy jednak pamiętać, że symbol $(?x)$ musi być po obu stronach równoważności zastąpiony stale przez t e n s a m symbol, tzn. po obu stronach przez (x) lub po obu stronach przez (Ex). Podobne zastrzeżenie obowiązuje w każdym wypadku stosowania symbolu $(?x)$.

Twierdzenie 6 rozbijemy sobie na dwie części. Pierwszą część stanowić będzie następujące

T w i e r d z e n i e 7. *Każde wyrażenie, mające realizację w jakimś zbiorze* $\mathfrak{K}$, *posiada też realizację w każdym zbiorze* $\mathfrak{J}$, *którego moc jest równa mocy zbioru* $\mathfrak{K}$.

Twierdzenie to wystarczy udowodnić dla wyrażeń postaci normalnej, gdyż z tych przenosi się natychmiast na dowolne wyrażenia. Dowód tej okoliczności jest zupełnie podobny do dowodu analogicznej okoliczności przy twierdzeniu 4. Do każdego bowiem wyrażenia A można podać wyrażenie B w postaci normalnej takie że $A \sim B$ jest tautologiczne. Gdy wyrażenie A ma realizację w zbiorze $\mathfrak{K}$, wówczas z tautologii wyrażenia $A \sim B$ wynika, że i wyrażenie B ma realizację w zbiorze $\mathfrak{K}$. Wyrażenie B jako wyrażenie w postaci normalnej posiada jednak wówczas realizację także w zbiorze $\mathfrak{J}$ równej mocy ze zbiorem $\mathfrak{K}$ (zakładamy na chwilę, że dla wyrażeń postaci normalnej twierdzenie zostało udowodnione), z czego znów na mocy tautologiczności wyrażenia $A \sim B$ wynika, że i wyrażenie A posiada realizację w zbiorze $\mathfrak{J}$. Wystarcza więc istotnie się ograniczyć do wyrażeń w postaci normalnej. Niech $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie takim wyrażeniem mającym realizację w zbiorze $\mathfrak{K}$. Układem spełniającym niech będzie układ $F_1, F_2, \ldots, F_k$, gdzie F_i jest funkcją logiczną r_i-członową.

Zachodzi więc tedy

$$(4) \qquad \underset{\mathfrak{K}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Definiujemy teraz funkcję matematyczną $\varphi(x)$ określoną dla wartości x ze zbioru $\mathfrak{J}$ do zbioru $\mathfrak{K}$ następująco: $\varphi(x)$ ma oznaczać ten element zbioru $\mathfrak{K}$, który odpowiada elementowi x zbioru $\mathfrak{J}$ przy jakimś jednojednoznacznym odwzorowaniu zbiorów $\mathfrak{J}$ i $\mathfrak{K}$. Gdy x przebiega wszystkie elementy zbioru $\mathfrak{J}$, wówczas $\varphi(x)$ przebiega oczywiście wszystkie elementy zbioru $\mathfrak{K}$, czyli dla tak zdefiniowanej funkcji $\varphi(x)$ zachodzi równość $\mathfrak{K}_\varphi = \mathfrak{K}$, co w połączeniu z (3) daje dla każdej funkcji logicznej F określonej na zbiorze $\mathfrak{K}$ równoważność

$$(5) \qquad \underset{\mathfrak{J}}{(?x)}\,F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{K}}{(?x)}\,F(x).$$

Definiując teraz funkcje $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ na zbiorze $\mathfrak{J}$ kładąc

(6) $F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}) \equiv F_i(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_{r_i}))$

(dla $x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}$ dowolnych z $\mathfrak{I}$ i dla $i = 1, 2, \ldots, k$) uzyskujemy układ spełniający dane wyrażenie w zbiorze $\mathfrak{I}$. Z (6) wynika bowiem przez wielokrotne stosowanie pewnych zasad logiki zdań

$$\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \mathfrak{A}(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)),$$

dla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dowolnie wziętych ze zbioru $\mathfrak{I}$, czyli zachodzi

$$\underset{\mathfrak{I}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{I}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{I}}{(x_n)}\,[\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{A}(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))],$$

z czego przez n krotne stosowanie reguły logicznej $(x)\,[F(x) \sim G(x)] \rightarrow [(?x)\,F(x) \sim (?x)\,G(x)]$[46] uzyskuje się równoważność

$$(7)\quad \underset{\mathfrak{I}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{I}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{I}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \underset{\mathfrak{I}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{I}}{(?x_2)}\ldots \underset{\mathfrak{I}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))^{47}$$

Przez n krotne stosowanie równoważności (5) otrzymujemy jednak

$$\underset{\mathfrak{I}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{I}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{I}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) \sim \underset{\mathfrak{K}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

co w połączeniu z (7) daje równoważność

$$\underset{\mathfrak{I}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{I}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{I}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \underset{\mathfrak{K}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

---

[46] Reguła ta jednoczy dwie reguły następujące:

$(x)\,[F(x) \sim G(x)] \rightarrow [(x)\,F(x) \sim (x)\,G(x)]$ i $(x)\,[F(x) \sim G(x)] \rightarrow [(Ex)\,F(x) \sim (Ex)\,G(x)]$.

Odnośnie stosowania znaku $(?x)$ por. uwagę poprzednią.

[47] Symbol $(?x_i)$ (przy tym samym i) ma być, zgodnie z uwagą [45], zastąpiony po obu stronach przez ten sam symbol, tzn. po obu stronach przez kwantyfikator ogólny (x_i) lub po obu stronach przez kwantyfikator szczegółowy (Ex_i). Symbole $(?x_i)$ i $(?x_k)$ (przy różnych i, k) mogą jednak być zastąpione równocześnie przez kwantyfikatory przeciwnych gatunków. Np. $(?x_1)$ może oznaczać (x_1), gdy $(?x_2)$ oznacza (Ex_2). Uwaga ta jest ważna, gdyż zawiera zasady poprawnego użycia znaku $(?x)$.

Ponieważ jednak na podstawie (4) $\underset{\mathfrak{K}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(?x_2)}\dots\underset{\mathfrak{K}}{(?x_n)}$ $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest prawdziwe, z ostatniej równoważności uzyskujemy $\underset{\mathfrak{J}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{J}}{(?x_2)}\dots\underset{\mathfrak{J}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \dots, x_n)$, które wyraża, że układ $F_1', F_2', \dots, F_k'$ spełnia dane wyrażenie $(?x_1)$ $(?x_2)\dots(?x_n)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ w zbiorze $\mathfrak{J}$, c. b. d. o.

Twierdzenie 8. *Każde wyrażenie mające realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{K}$ posiada też realizację w każdym zbiorze $\mathfrak{J}$ obejmującym zbiór $\mathfrak{K}$.*

Twierdzenie to wystarczy udowodnić tylko dla wyrażeń postaci normalnej, gdyż z tych przenosi się natychmiast na dowolne wyrażenia. Do każdego bowiem wyrażenia A można podać wyrażenie B w postaci normalnej takie, że $A \sim B$ jest tautologiczne. Gdy wyrażenie A ma realizację w zbiorze $\mathfrak{K}$, wówczas z tautologii wyrażenia $A \sim B$ wynika, że i wyrażenie B ma realizację w zbiorze $\mathfrak{K}$. Wyrażenie B jako wyrażenie w postaci normalnej posiada jednak wówczas realizację w każdym zbiorze $\mathfrak{J}$ obejmującym zbiór $\mathfrak{K}$ (zakładamy, że dla wyrażeń postaci normalnej twierdzenie zostało udowodnione), z czego znowu na podstawie tautologiczności wyrażenia $A \sim B$ wynika, że i wyrażenie A ma realizację w zbiorze $\mathfrak{J}$. Wystarczy się więc istotnie ograniczyć do wyrażeń postaci normalnej. Niech $(?x_1)\,(?x_2)\dots(?x_n)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będzie takim wyrażeniem mającym realizację w zbiorze $\mathfrak{K}$. Układem spełniającym niech będzie układ $F_1, F_2, \dots, F_k$, gdzie F_i jest funkcją logiczną r_i-członową. Zachodzi więc

$$\underset{\mathfrak{K}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(?x_2)}\dots\underset{\mathfrak{K}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Definiujemy teraz funkcję $\varphi(x)$ określoną dla wartości x ze zbioru $\mathfrak{J}$ do zbioru $\mathfrak{K}$ następująco: $\varphi(x)$ ma być równe x, gdy x należy do $\mathfrak{K}$; gdy zaś x jest elementem z $\mathfrak{J}$ nie należącym do $\mathfrak{K}$, $\varphi(x)$ ma być równe a, gdzie a jest dowolnym ale ustalonym elementem z $\mathfrak{K}$. Gdy x przebiega wszystkie elementy zbioru $\mathfrak{J}$, $\varphi(x)$ przebiega, jak łatwo widzieć, wszystkie elementy zbioru $\mathfrak{K}$, podobnie jak to miało miejsce w twierdzeniu 7. Równoważność (3) daje przeto znów równoważność $\underset{\mathfrak{J}}{(?x)}$ $F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{K}}{(?x)}\,F(x)$.

Definiując więc znowu funkcje F_1', F_2', ..., F_k' na zbiorze $\mathfrak{J}$ przez równoważności $F_i'(x_1, x_2, \dots, x_{r_i}) \equiv F_i(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \dots, \varphi(x_{r_i}))$ (dla $x_1, x_2, \dots, x_{r_i}$ ze zbioru $\mathfrak{J}$ i dla $i = 1, 2, \dots, k$) uzyskujemy (dowodem zupełnie tym samym co w twierdzeniu 7) układ spełniający dane wyrażenie $(?x_1)(?x_2)\dots(?x_n)$ $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ w zbiorze $\mathfrak{J}$, c. b. d. o.

Z twierdzeń 7 i 8 otrzymujemy natychmiast twierdzenie 6. Gdy A jest bowiem dowolnym wyrażeniem mającym realizację w zbiorze jakimś $\mathfrak{K}$, a $\mathfrak{J}$ jest dowolnym zbiorem mocy większej niż moc zbioru $\mathfrak{K}$, wówczas gdy przez $\mathfrak{L}$ oznaczymy dowolny podzbiór zbioru $\mathfrak{J}$ równej mocy ze zbiorem $\mathfrak{K}$ na zasadzie twierdzenia 7 dowiadujemy się, że wyrażenie A ma też realizację w zbiorze $\mathfrak{L}$ a z tego na podstawie twierdzenia 8, że A ma też realizację w zbiorze $\mathfrak{J}$ (gdyż zbiór $\mathfrak{J}$ obejmuje zbiór $\mathfrak{L}$), c. b. d. o.

T w i e r d z e n i e 9. *Każde wyrażenie, które w ogóle posiada realizację, posiada także realizację w zbiorze liczb naturalnych.*

Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzeń 4 i 6. Gdy bowiem dane wyrażenie A posiada w ogóle realizację, wówczas na podstawie twierdzenia 4 posiada realizację także w jakimś zbiorze co najwyżej przeliczalnym $\mathfrak{J}$. Ponieważ moc zbioru liczb naturalnych jest większa lub równa mocy zbioru $\mathfrak{J}$, więc na podstawie twierdzenia 6 wyrażenie A posiada realizację także w zbiorze liczb naturalnych, c. b. d. o.

Przystępujemy teraz do pewnego uogólnienia pojęcia wyrażenia i pojęć związanych z tym pojęciem. Uogólnienie to polega na wprowadzeniu znaku identyczności (równości) logicznej do zakresu rozważań. Niech A będzie wyrażeniem (w dotychczasowym sensie) zawierającym zmienną dwuczłonową $G(x, y)$, pozostałe zmienne funkcyjne wyrażenia A niech będą $F_1, F_2, \dots, F_k$. W A na miejsce wszystkich występujących kombinacyj kształtu $G(x, y)$ kładziemy $x = y$, wynik B tych zastąpień nazywamy w y r a ż e n i e m u o g ó l n i o n y m lub w y r a ż e n i e m z i d e n t y c z n o ś c i ą, a wyrażenie A bez identyczności z którego B powstało nazywamy wyrażeniem z nim s p r z ę ż o n y m. Wyrażenie uogólnione B, które zawiera już tylko zmienne funkcyjne $F_1, F_2, \dots, F_k$ (zmienna funkcyjna G w B już nie występuje, znak $=$ figurujący na miejscu zmiennej G uważamy zaś za stałą, a nie za zmienną) nazywamy wyrażeniem posiadającym realizację, gdy istnieje zbiór niepusty $\mathfrak{J}$ oraz układ funkcyj logicznych $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ który wraz z relacją $x = y$[48] (ta ostatnia na miejsce zmiennej funkcyjnej $G(x, y)$) spełnia wyrażenie A. Zupełnie podobnie wprowadza się pojęcie tautologiczności dla wyrażeń uogólnionych. Wyrażenie uogólnione B jest tautologiczne, gdy jakkolwiek obierzemy zbiór $\mathfrak{J}$ i układ funkcyj logicznych $F_1', F_2', \ldots, \ldots, F_k'$ w tym zbiorze, to układ ten wraz z relacją $x = y$ (na miejsce zmiennej funkcyjnej $G(x, y)$) spełnia wyrażenie sprzężone A w starym sensie albo, co na jedno wychodzi, układ $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ spełnia wyrażenie B w sensie nowym. Między pojęciem realizacji a tautologii zachodzą znów, jak łatwo widzieć, związki: a) Dane wyrażenie ma wtedy i tylko wtedy realizację, gdy zaprzeczenie tego wyrażenia nie jest tautologiczne. b) Dane wyrażenie jest wtedy i tylko wtedy tautologiczne, gdy zaprzeczenie tego wyrażenia nie ma realizacji. Oba te związki dowodzą, tak jak przedtem, że z nowymi pojęciami realizacji i tautologii nasuwające się dwa zagadnienia rozstrzygalności są równoważne, tzn., że do rozwiązania obu wystarczy rozwiązać tylko jedno z nich[49]. Ważnym jest jednak fakt, że zagadnienie rozstrzygalności w nowym sensie[50] nie jest wcale trudniejszym od starego zagadnienia rozstrzygalności, gdyż daje się do tego ostatniego sprowadzić. Wyraża to następujące

[48] Relacji tej odpowiada wartość $\mathfrak{P}$, gdy x i y są tymi samymi elementami zbioru $\mathfrak{J}$, gdy x i y są różne pomiędzy sobą, wówczas relacji tej odpowiada $\mathfrak{F}$.

[49] Można oczywiście i pojęcie wyrażenia właściwego (tezy) uogólnić, tak żeby i trzecie zagadnienie rozstrzygalności było, jak przedtem, równoważne dwom poprzednim. Uzyskuje się to, gdy się do poprzedniej bazy wyjściowej dorzuci następujące dwa wyrażenia: $x = x$, $x = y \rightarrow \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]$; — i gdy się nieznacznie zmodyfikuje reguły w sensie odpowiadającym temu, że $x = y$ nie jest zmienną funkcyjną, tzn., że za nią już nic podstawić nie można (poza tym jednak $x = y$ zachowuje w systemie te same prawa co zmienna funkcyjna dwuczłonowa).

[50] Mówimy znów o jednym zagadnieniu rozstrzygalności zamiast o trzech, które na zasadzie ich równoważności można uważać za różne postacie jednego zagadnienia.

Twierdzenie 10. *Do każdego wyrażenia w nowym sensie można podać wyrażenie w starym sensie równoważne z nim pod względem posiadania realizacji.*

Zauważymy przede wszystkim, że w dowodzie tego twierdzenia wystarcza się ograniczyć do takich wyrażeń w nowym sensie, w których wszystkie kwantyfikatory stoją na samym początku jeden po drugim nie oddzielone od siebie nawiasami i nie zaopatrzone znakami negacji, czyli do wyrażeń w postaci normalnej.

Niech A bowiem będzie dowolnym wyrażeniem z identycznością, zaś wyrażenie B niech powstaje przez zastąpienie w A każdej kombinacji typu $x = y$ przez $G(x, y)$, gdzie G jest zmienną funkcyjną nie występującą w A (B jest więc wyrażeniem sprzężonym z A). Do wyrażenia B, które nie zawiera identyczności umiemy już podać wyrażenie C w postaci normalnej takie, że $B \sim C$ jest tautologiczne. Gdy teraz w C za $G(x, y)$ wszędzie podstawimy $x = y$, wówczas otrzymamy wyrażenie D w postaci normalnej takie, że $A \sim D$ jest tautologiczne. Z tautologiczności wyrażenia $A \sim D$ wynika jednak natychmiast równoważność wyrażeń A i D pod względem posiadania realizacji. Gdybyśmy więc do wyrażenia D, które jest w postaci normalnej, umieli podać wyrażenie E bez identyczności i równoważne z D pod względem posiadania realizacji, wówczas wyrażenia A i E również byłyby równoważne. Wystarczy się więc istotnie ograniczyć do wyrażeń w postaci normalnej.

Niech A będzie teraz dowolnym wyrażeniem z identycznością i w postaci normalnej o zmiennych funkcyjnych $F_1, F_2, \ldots, F_m$, przy czym zmienna F_i niech będzie r_i-członowa (dla $i = 1, 2, \ldots, m$). Wyrażenie A daje się więc napisać w postaci $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$, przy czym znak $=$ umieszczony za średnikiem ma wyrażać że A jest wyrażeniem z identycznością. Kładziemy B równe koniunkcji trzech następujących wyrażeń:

(B_1) $\quad (?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; G),$

(B_2) $\quad (x)\,G(x, x) \mathbin{\&} (x)(y)(z)\,[G(y, x) \mathbin{\&} G(y, z) \rightarrow G(x, z)],$

$$(B_3) \quad \sum_{i=1}^{m} (x_1)(x_2)\ldots(x_{r_i})(y_1)(y_2)\ldots(y_{r_i})\Big[F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}) \,\&$$
$$\& \sum_{k=1}^{r_i} G(x_k, y_k) \rightarrow F_i(y_1, y_2, \ldots, y_{r_i})\Big],$$ [51]

gdzie G oznacza zmienną funkcyjną nie występującą w A, zaś wyrażenie B_1 oznacza wynik zastąpienia w A znaku $=$ przez zmienną G. Wyrażenie B nie zawiera już identyczności logicznej i jest, jak to natychmiast pokażemy, równoważne z wyrażeniem A pod względem posiadania realizacji.

Gdy wyrażenie A ma realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}$ i układ funkcyj $F_1'', F_2'', \ldots, F_m''$ jest układem spełniającym, wówczas definiując funkcję G'' przez równoważność $G''(x, y) \equiv \equiv (x = y)$ otrzymujemy natychmiast w $F_1'', F_2'', \ldots, F_m'', G''$ układ spełniający wyrażenie B.

Załóżmy odwrotnie, że wyrażenie B ma realizację, wówczas, na podstawie twierdzenia 9, wyrażenie B posiada też realizację w zbiorze liczb naturalnych $\mathfrak{Z}$. $F_1', F_2', \ldots, F_m', G'$ niech oznacza układ spełniający w tym zbiorze wyrażenie B. Z prawdziwości wyrażenia B_2 w zbiorze $\mathfrak{Z}$ wnioskujemy przede wszystkim, że $G'(x, y)$ jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią. Zwrotność jest bezpośrednio widoczna[52]. Kładąc $z = y$ w wyrażeniu $\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\underset{\mathfrak{Z}}{(z)}[G'(y, x) \,\&\, G'(y, z) \rightarrow G'(x, z)]$ otrzymujemy $\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}[G'(y, x) \,\&\, G'(y, y) \rightarrow G'(x, y)]$, co w połączeniu z zwrotnością daje $\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}[G'(y, x) \rightarrow G'(x, y)]$, czyli symetrię. Symetria funkcji $G'(x, y)$ w połączeniu z $\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\underset{\mathfrak{Z}}{(z)}$ $[G'(y, x) \,\&\, G'(y, z) \rightarrow G'(x, z)]$ daje natychmiast $\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\underset{\mathfrak{Z}}{(z)}$ $[G'(x, y) \,\&\, G'(y, z) \rightarrow G'(x, z)]$, czyli przechodniość. Zbiór liczb

[51] Znak sumacyjny w tym wyrażeniu, jak i w dalszym ciągu tej pracy, oznacza koniunkcję logiczną.

[52] Gdybyśmy zamiast wyrażenia B_2 wzięli następujące nieco dłuższe wyrażenie $(x)\, G(x, x) \,\&\, (x)(y)\, [G(x, y) \rightarrow G(y, x)] \,\&\, (x)(y)(z)\, [G(x, y) \,\&\, G(y, z) \rightarrow G(x, z)]$, wówczas symetria i przechodniość funkcji $G'(x, y)$ byłyby również bezpośrednio widoczne.

naturalnych rozpada się wobec tego na klasy bez elementów wspólnych i takie, że dwie dowolne liczby z tej samej klasy stoją do siebie w relacji G', zaś dwie liczby z różnych klas nie stoją do siebie w relacji G'. Niech x oznacza teraz dowolną liczbę naturalną, przez $\varphi(x)$ będziemy teraz rozumieli najmniejszą liczbę naturalną tej klasy, do której liczba x wpada. Liczby x i $\varphi(x)$ należą więc w każdym razie do jednej i tej samej klasy, na skutek czego zachodzą:

$$(8{\cdot}1)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\, G'(x, \varphi(x)), \qquad (8{\cdot}2)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\, G'(\varphi(x), x).$$

Oznaczywszy zbiór $\mathfrak{Z}_\varphi$, czyli zbiór tych liczb naturalnych, które przebiega funkcja $\varphi(x)$, gdy x przebiega wszystkie liczby naturalne, dla skrócenia przez $\mathfrak{L}$, mamy na podstawie równoważności (1), (2) i (3) dla każdej funkcji logicznej F następujące równoważności:

$$(9{\cdot}1)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\, F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{L}}{(x)}\, F(x), \qquad (9{\cdot}2)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(Ex)}\, F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{L}}{(Ex)}\, F(x),$$

$$(9{\cdot}3)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(?x)}\, F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{L}}{(?x)}\, F(x).$$

Kładąc w $B_3\, y_k = \varphi(x_k)$ dla $k = 1, 2, \ldots, r_i$ otrzymujemy natychmiast

$$\sum_{i=1}^{m} \underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\, \underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{Z}}{(x_{r_i})} \Big[F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i})\ \&\ \sum_{k=1}^{r_i} G'(x_k, \varphi(x_k)) \rightarrow$$
$$\rightarrow F_i'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_{r_i}))\Big],$$

co w połączeniu z (8·1) daje

$$(10)\quad \sum_{i=1}^{m} \underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\, \underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{Z}}{(x_{r_i})} \Big[F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}) \rightarrow$$
$$\rightarrow F_i'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_{r_i}))\Big].$$

Kładąc w B_3 za x_k (dla $k = 1, 2, \ldots, r_i$) $\varphi(x_k)$, zaś za y_k (dla $k = 1, 2, \ldots, r_i$) x_k otrzymujemy natychmiast

$$\sum_{i=1}^{m} \underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\, \underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{Z}}{(x_{r_i})} \Big[F_i'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_{r_i}))\ \&$$
$$\&\ \sum_{k=1}^{r_i} G'(\varphi(x_k), x_k) \rightarrow F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i})\Big],$$

co w połączeniu z (8·2) daje

$$(11)\quad \sum_{i=1}^{m} \underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\dots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_{r_i})}\Big[F_i'(\varphi(x_1),\varphi(x_2),\dots,\varphi(x_{r_i})) \to F_i'(x_1,x_2,\dots,x_{r_i})\Big].$$

(10) i (11) dają natychmiast

$$(12)\quad \sum_{i=1}^{m} \underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\dots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_{r_i})}\Big[F_i'(x_1,x_2,\dots,x_{r_i}) \sim F_i'(\varphi(x_1),\varphi(x_2),\dots,\varphi(x_{r_i}))\Big].$$

Z przechodniości relacji G' wynikają następujące cztery wzory:

$$(13{\cdot}1)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(x,y)\mathbin{\&}G'(y,\varphi(y)) \to G'(x,\varphi(y))],$$

$$(13{\cdot}2)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(\varphi(x),x)\mathbin{\&}G'(x,\varphi(y)) \to G'(\varphi(x),\varphi(y))],$$

$$(13{\cdot}3)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(\varphi(x),\varphi(y))\mathbin{\&}G'(\varphi(y),y) \to G'(\varphi(x),y)],$$

$$(13{\cdot}4)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(x,\varphi(x))\mathbin{\&}G'(\varphi(x),y) \to G'(x,y)],$$

które w połączeniu z (8·1) i (8·2) dają wzory:

$$(14{\cdot}1)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(x,y) \to G'(x,\varphi(y))],$$

$$(14{\cdot}2)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(x,\varphi(y)) \to G'(\varphi(x),\varphi(y))],$$

$$(14{\cdot}3)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(\varphi(x),\varphi(y)) \to G'(\varphi(x),y)],$$

$$(14{\cdot}4)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(\varphi(x),y) \to G'(x,y)].$$

Przez sylogizm otrzymujemy z wzorów (14·1) i (14·2) wzór:

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(x,y) \to G'(\varphi(x),\varphi(y))],$$

zaś z wzorów (14·3) i (14·4) wzór:

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(\varphi(x),\varphi(y)) \to G'(x,y)],$$

które razem dają

$$(15)\qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(x, y) \sim G'(\varphi(x), \varphi(y))]$$ [53].

Z (12) i (15) wynika natychmiast

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\dots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\,[\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \dots, x_n; G') \sim$$
$$\sim \mathfrak{A}'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n); G')],$$

z czego, na podstawie reguły $(x)\,[F(x) \sim G(x)] \rightarrow [(?x)\,F(x) \sim \sim (?x)\,G(x)]$, wynika

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\dots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \dots, x_n; G') \sim \underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\dots$$
$$\dots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n); G'),$$

a z tego na podstawie B_1 otrzymujemy

$$(16)\qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\dots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n); G').$$

Stosując do (16) n krotnie równoważność (9·3) otrzymujemy

$$(17)\qquad \underset{\mathfrak{L}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{L}}{(?x_2)}\dots\underset{\mathfrak{L}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \dots, x_n; G').$$

Ponieważ liczby $\varphi(x)$ i $\varphi(y)$ należą wtedy i tylko wtedy do jednej i tej samej klasy, gdy są równe[54], przeto zachodzi

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\,[G'(\varphi(x), \varphi(y)) \sim (\varphi(x) = \varphi(y))],$$

z czego przez dwukrotne stosowanie równoważności (9·1) otrzymujemy

$$\underset{\mathfrak{L}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{L}}{(y)}\,[G'(x, y) \sim (x = y)],$$

które wyraża, że relacja $G'(x,y)$ w zbiorze $\mathfrak{L}$ jest identycznością. Uwzględniwszy to we wzorze (17) otrzymujemy

$$\underset{\mathfrak{L}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{L}}{(?x_2)}\dots\underset{\mathfrak{L}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \dots, x_n; =),$$

[53] Wzór ten, wyrażający, że liczby x i y należą do jednej i tej samej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(x)$ i $\varphi(y)$ należą do jednej klasy, jest i bezpośrednio widoczny, gdyż $\varphi(x)$ wzgl. $\varphi(y)$ oznacza przecież najmniejszą liczbę tej klasy, do której x wzgl. y należy.

[54] Ponieważ dana klasa posiada tylko jedną liczbę najmniejszą.

które wyraża, że wyrażenie A ma realizację, a tym samym twierdzenie 10 zostało w zupełności udowodnione. Z powyższego dowodu wynika jednak coś więcej. Można bowiem z niego wywnioskować

Twierdzenie 11. *Każde wyrażenie z identycznością, które w ogóle posiada realizację, posiada już realizację w zbiorze co najwyżej przeliczalnym.*

Najprzód dla wyrażeń w postaci normalnej. Do każdego wyrażenia A w postaci normalnej z identycznością można, jak to w powyższym dowodzie widzieliśmy, skonstruować wyrażenie B bez identyczności równoważne z A pod względem posiadania realizacji i takie, że jeśli B posiada realizację, A posiada realizację w zbiorze liczb $\mathfrak{L}$. Gdy więc A posiada w ogóle realizację, wówczas, na zasadzie równoważności wyrażeń A i B, realizację posiada także wyrażenie B, a z tego wynika, że A ma realizację w zbiorze liczb $\mathfrak{L}$, a więc w zbiorze co najwyżej przeliczalnym. Niech teraz C będzie dowolnym wyrażeniem z identycznością, wówczas, jak to przedtem pokazaliśmy, można podać wyrażenie A w postaci normalnej takie, że $C \sim A$ jest tautologiczne. Jeśli C w ogóle posiada realizację, wówczas, na zasadzie tautologiczności wyrażenia $C \sim A$, realizację posiada również wyrażenie A, które jako wyrażenie w postaci normalnej posiada wtedy także realizację w zbiorze co najwyżej przeliczalnym, z czego, znów na podstawie tautologii wyrażenia $C \sim A$, wynika, że i C ma realizację w tym samym zbiorze co najwyżej przeliczalnym. Twierdzenie 11 zostało więc w zupełności udowodnione.

Chcemy teraz podać dwie modyfikacje postępowania[55] podanego w twierdzeniu 10 i wskazać ich znaczenie. Pierwsza modyfikacja polega na zastąpieniu wyrażenia B_3 przez wyrażenie następujące:

$$(B_4) \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r_i} (x_1)(x_2)\ldots(x_{r_i})(y)\Big[F_i(x_1,x_2,\ldots,x_{r_i}) \,\&\, G(x_k,y) \rightarrow \\ \rightarrow F_i(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_{r_i})\Big].$$

[55] Ideę tego postępowania podali, niezależnie od siebie, K. Gödel w pracy cytowanej pod [21] oraz L. Kalmár w pracy: Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 4 (1929), str. 248—252.

Twierdzimy mianowicie, że koniunkcja trzech wyrażeń B_1, B_2 i B_4 jest również wyrażeniem równoważnym z wyrażeniem $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$ pod względem posiadania realizacji. Gdy układ funkcyj $F_1'', F_2'', \ldots, F_m''$ jest układem spełniającym wyrażenie $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n; =)$ w zbiorze $\mathfrak{J}$, wówczas układ $F_1'', F_2'', \ldots, F_m'', x = y$ spełnia w sposób oczywisty koniunkcję wyrażeń B_1, B_2 i B_4 w tym samym zbiorze. Należy teraz pokazać, że z realizacji wyrażenia $B_1 \mathbin{\&} B_2 \mathbin{\&} B_4$ wynika również realizacja danego wyrażenia $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$, a do tego wystarczy pokazać, że z realizacji wyrażenia B_4 wynika realizacja wyrażenia B_3, gdyż realizacja wyrażenia $B_1 \mathbin{\&} B_2 \mathbin{\&} B_3$ pociąga za sobą — jak to już wiemy — realizację wyrażenia $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$.

Żądane uzyskujemy jednak natychmiast przez m krotne stosowanie następującego lemmatu:

L e m m a t 2. *Jeśli funkcje logiczne $F(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ i $G(x, y)$ spełniają wyrażenie*

$$(18)\quad \sum_{k=1}^{r}(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y)\Big[F(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mathbin{\&} G(x_k, y) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_r)\Big]$$

w jakimś zbiorze, wówczas spełniają też wyrażenie

$$(19)\quad (x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y_1)(y_2)\ldots(y_r)\Big[F(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mathbin{\&} \sum_{k=1}^{r} G(x_k, y_k) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_r)\Big].$$

Pokażemy że z (18) wynika dla $l = 1, 2, \ldots, r$

$$(20)\quad (x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y_1)(y_2)\ldots(y_l)\Big[F(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mathbin{\&} \sum_{k=1}^{l} G(x_k, y_k) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_l, x_{l+1}, \ldots, x_r)\Big].$$

Z (18) wynika natychmiast

$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y)\,[F(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mathbin{\&} G(x_1, y) \rightarrow F(y, x_2, \ldots, x_r)]$,

z czego przez zastąpienie y przez y_1 uzyskujemy

$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y_1)\,[F(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mathbin{\&} G(x_1, y_1) \rightarrow F(y_1, x_2, \ldots, x_r)]$,

czyli (20) zostało dla $l = 1$ udowodnione. Załóżmy teraz, że (20) zachodzi dla jakiegoś $l < r$, czyli że mamy które wyraża, że wyrażenie A ma realizację, a tym samym twierdzenie 10 zostało w zupełności udowodnione. Z powyższego dowodu wynika jednak coś więcej. Można bowiem z niego wywnioskować

Twierdzenie 11. *Każde wyrażenie z identycznością, które w ogóle posiada realizację, posiada już realizację w zbiorze co najwyżej przeliczalnym.*

Najprzód dla wyrażeń w postaci normalnej. Do każdego wyrażenia A w postaci normalnej z identycznością można, jak to w powyższym dowodzie widzieliśmy, skonstruować wyrażenie B bez identyczności równoważne z A pod względem posiadania realizacji i takie, że jeśli B posiada realizację, A posiada realizację w zbiorze liczb $\mathfrak{L}$. Gdy więc A posiada w ogóle realizację, wówczas, na zasadzie równoważności wyrażeń A i B, realizację posiada także wyrażenie B, a z tego wynika, że A ma realizację w zbiorze liczb $\mathfrak{L}$, a więc w zbiorze co najwyżej przeliczalnym. Niech teraz C będzie dowolnym wyrażeniem z identycznością, wówczas, jak to przedtem pokazaliśmy, można podać wyrażenie A w postaci normalnej takie, że $C \sim A$ jest tautologiczne. Jeśli C w ogóle posiada realizację, wówczas, na zasadzie tautologiczności wyrażenia $C \sim A$, realizację posiada również wyrażenie A, które jako wyrażenie w postaci normalnej posiada wtedy także realizację w zbiorze co najwyżej przeliczalnym, z czego, znów na podstawie tautologii wyrażenia $C \sim A$, wynika, że i C ma realizację w tym samym zbiorze co najwyżej przeliczalnym. Twierdzenie 11 zostało więc w zupełności udowodnione.

Chcemy teraz podać dwie modyfikacje postępowania[55] podanego w twierdzeniu 10 i wskazać ich znaczenie. Pierwsza modyfikacja polega na zastąpieniu wyrażenia B_3 przez wyrażenie następujące:

$$(B_4)\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r_i}(x_1)(x_2)\ldots(x_{r_i})(y)\Big[F_i(x_1,x_2,\ldots,x_{r_i})\,\&\,G(x_k,y)\rightarrow$$
$$\rightarrow F_i(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_{r_i})\Big].$$

[55] Ideę tego postępowania podali, niezależnie od siebie, K. Gödel w pracy cytowanej pod [21] oraz L. Kalmár w pracy: Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 4 (1929), str. 248—252.

Twierdzimy mianowicie, że koniunkcja trzech wyrażeń B_1, B_2 i B_4 jest również wyrażeniem równoważnym z wyrażeniem $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$ pod względem posiadania realizacji. Gdy układ funkcyj $F_1'', F_2'', \ldots, F_m''$ jest układem spełniającym wyrażenie $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n; =)$ w zbiorze $\mathfrak{J}$, wówczas układ $F_1'', F_2'', \ldots, F_m'', x = y$ spełnia w sposób oczywisty koniunkcję wyrażeń B_1, B_2 i B_4 w tym samym zbiorze. Należy teraz pokazać, że z realizacji wyrażenia $B_1 \mathbin{\&} B_2 \mathbin{\&} B_4$ wynika również realizacja danego wyrażenia $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$, a do tego wystarczy pokazać, że z realizacji wyrażenia B_4 wynika realizacja wyrażenia B_3, gdyż realizacja wyrażenia $B_1 \mathbin{\&} B_2 \mathbin{\&} B_3$ pociąga za sobą — jak to już wiemy — realizację wyrażenia $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$.

Żądane uzyskujemy jednak natychmiast przez m krotne stosowanie następującego lemmatu:

L e m m a t 2. *Jeśli funkcje logiczne* $F(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ i $G(x, y)$ *spełniają wyrażenie*

$$(18) \quad \sum_{k=1}^{r}(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y)\Big[F(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mathbin{\&} G(x_k, y) \rightarrow \\ \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_r)\Big]$$

w jakimś zbiorze, wówczas spełniają też wyrażenie

$$(19) \quad (x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y_1)(y_2)\ldots(y_r)\Big[F(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} \sum_{k=1}^{r} G(x_k, y_k) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_r)\Big].$$

Pokażemy że z (18) wynika dla $l = 1, 2, \ldots, r$

$$(20) \quad (x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y_1)(y_2)\ldots(y_l)\Big[F(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} \sum_{k=1}^{l} G(x_k, y_k) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_l, x_{l+1}, \ldots, x_r)\Big].$$

Z (18) wynika natychmiast

$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y)[F(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mathbin{\&} G(x_1, y) \rightarrow F(y, x_2, \ldots, x_r)]$,

z czego przez zastąpienie y przez y_1 uzyskujemy

$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y_1)[F(x_1, x_2, \ldots, x_r) \mathbin{\&} G(x_1, y_1) \rightarrow F(y_1, x_2, \ldots, x_r)]$,

czyli (20) zostało dla $l = 1$ udowodnione. Załóżmy teraz, że (20) zachodzi dla jakiegoś $l < r$, czyli że mamy

$$(21)\quad (x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y_1)(y_2)\ldots(y_l)\Big[F(x_1,x_2,\ldots,x_r)\mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&}\sum_{k=1}^{l} G(x_k,y_k)\to F(y_1,y_2,\ldots,y_l,x_{l+1},\ldots,x_r)\Big],$$

a udowodnimy (20) dla $l+1$. Z (18) wynika natychmiast $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y)\,[F(x_1,x_2,\ldots,x_r)\mathbin{\&} G(x_{l+1},y)\to F(x_1,x_2,\ldots,x_l,$ $y,x_{l+2},\ldots,x_r)]$, z czego przez zastąpienie $x_1,x_2,\ldots,x_l$ odpowiednio przez $y_1,y_2,\ldots,y_l$ oraz y przez y_{l+1} uzyskujemy $(y_1)(y_2)\ldots(y_l)(x_{l+1})\ldots(x_r)(y_{l+1})\,[F(y_1,y_2,\ldots,y_l,x_{l+1},\ldots,x_r)\mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} G(x_{l+1},y_{l+1})\to F(y_1,y_2,\ldots,y_{l+1},x_{l+2},\ldots,x_r)]$, co w połączeniu z (21) daje z łatwością

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(y_1)(y_2)\ldots(y_{l+1})\Big[F(x_1,x_2,\ldots,x_r)\mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&}\sum_{k=1}^{l+1} G(x_k,y_k)\to F(y_1,y_2,\ldots,y_{l+1},x_{l+2},\ldots,x_r)\Big],$$

a tym samym (20) zostało indukcją udowodnione. Kładąc w (20) $l=r$ uzyskujemy twierdzenie wyrażone w lemmacie 2.

Wyrażenie $B_1 \mathbin{\&} B_2 \mathbin{\&} B_4$ góruje o tyle nad wyrażeniem $B_1 \mathbin{\&} B_2 \mathbin{\&} B_3$, że daje się sprowadzić do postaci normalnej z na ogół mniejszą liczbą kwantyfikatorów ogólnych. Zastosujmy w szczególności zmodyfikowane to postępowanie do wyrażeń z identycznością, z prefiksem kształtu $(x_1)(x_2)(x_3)$ $(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ i zmiennymi funkcyjnymi co najwyżej dwuczłonowymi. Po uwzględnieniu równoważności $(x)\,[F(x)\mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} G(x)] \sim (x)\,F(x)\mathbin{\&}(y)\,G(y)$ w wyrażeniu $B_1 \mathbin{\&} B_2 \mathbin{\&} B_4$ dojdziemy z łatwością do wniosku, że wyrażenie to w tym przypadku sprowadzić się daje do postaci normalnej z prefiksem znów kształtu $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$. Analogiczne obowiązuje, jak łatwo widzieć, gdy rozpatrujemy wyrażenia o prefiksach $(x_1)(x_2)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)(x_3)$, $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots$ $\ldots(Ey_{s-1})(x_2)(x_3)(Ey_s)$. Mamy więc następujące twierdzenie z którego później korzystać będziemy:

T w i e r d z e n i e 12. *Do każdego wyrażenia z identycznością w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)(x_3)$ $(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ *wzgl.* $(x_1)(x_2)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)(x_3)$ *wzgl.* $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{s-1})(x_2)(x_3)(Ey_s)$ *i o zmiennych funkcyjnych co najwyżej dwuczłonowych można podać równoważne* *z nim pod względem realizacji wyrażenie postaci normalnej, bez identyczności, o odpowiednio tym samym prefiksie, które, prócz zmiennych funkcyjnych zawartych w danym wyrażeniu, zawiera jeszcze jedną zmienną funkcyjną dwuczłonową wchodzącą na miejsce identyczności.*

Poznamy teraz postępowanie pozwalające do każdego wyrażenia z identycznością skonstruować wyrażenie równoważne bez identyczności, które to postępowanie pod pewnym względem praktycznym dogodniejsze jest od poprzednich. Wyrażenie B_3 w postępowaniu wiodącym z wyrażenia A do $B_1 \& B_2 \& B_3$, jako też wyrażenie B_4 w postępowaniu wiodącym z wyrażenia A do $B_1 \& B_2 \& B_4$, jest dość rozwlekłe w przypadku, gdy ilość występujących w danym wyrażeniu A zmiennych funkcyjnych jest dość duża. Konstrukcja, którą teraz poznamy, jest o tyle dogodniejsza, że nie ma w niej odpowiednika wyrażeń B_3 lub B_4, względnie odpowiednik ten nie zależy od ilości występujących w danym wyrażeniu A zmiennych funkcyjnych. Niech A będzie danym wyrażeniem z identycznością, kształtu $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$, zaś $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $G(x, y)$ niech będą zmiennymi funkcyjnymi nie występującymi w A. Koniunkcja C następujących czterech wyrażeń jest wtedy wyrażeniem bez identyczności równoważnym z wyrażeniem A (pod względem realizacji):

$$(C_1) \quad (?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\,F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(C_2) \quad (x)\,G(x,x) \,\&\, (x)(y)(z)\,[G(y,x) \,\&\, G(y,z) \rightarrow G(x,z)],$$

$$(C_3) \quad (x_1)(x_2)\ldots(x_n)\,[F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; G)],$$

$$(C_4) \quad (x_1)(x_2)\ldots(x_n)(y_1)(y_2)\ldots(y_n)\Big[F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, \sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big].$$

Jeśli $F_1, F_2, \ldots, F_m$ są zmiennymi funkcyjnymi wyrażenia A, funkcje $F_1'', F_2'', \ldots, F_m''$ zaś spełniają wyrażenie A w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}$, wówczas, definiując funkcje $F''(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $G''(x, y)$ przez równoważności $F''(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_n; G'')$ i $G''(x, y) \equiv (x = y)$, układ $F_1'', F_2'', \ldots, F_m'', F'', G''$ spełnia, jak łatwo widzieć, w tym samym zbiorze $\mathfrak{J}$ wyrażenie C.

Załóżmy odwrotnie, że wyrażenie C ma realizację, wówczas, na podstawie twierdzenia 9, wyrażenie C posiada też realizację w zbiorze wszystkich liczb naturalnych $\mathfrak{Z}$. $F_1', F_2', \ldots$ $\ldots, F_m', F', G'$ niech oznacza układ spełniający w tym zbiorze wyrażenie C. Z prawdziwości wyrażenia C_2 w zbiorze $\mathfrak{Z}$ wnioskujemy, podobnie jak w twierdzeniu 10, że $G'(x, y)$ jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią. Zbiór liczb naturalnych rozpada się wobec tego znowu na klasy bez elementów wspólnych i takie, że dwie dowolne liczby z jednej i tej samej klasy stoją do siebie w relacji G', zaś dwie liczby wzięte z różnych klas nie stoją do siebie w relacji G'. Przez $\varphi(x)$ rozumiemy znowu, dla każdej liczby x, najmniejszą liczbę tej klasy, do której liczba x wpada, zaś zbiór tych liczb naturalnych, które przebiega $\varphi(x)$, gdy x przebiega wszystkie liczby naturalne, oznaczmy znów przez $\mathfrak{L}$. Podobnie jak w twierdzeniu 10 zachodzą przeto

$$(22)\qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\, G'(x, \varphi(x)),$$

$$(23)\qquad \underset{\mathfrak{L}}{(x)}\,\underset{\mathfrak{L}}{(y)}\,[G'(x, y) \sim (x = y)],$$

oraz dla każdej funkcji logicznej H

$$(24)\qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(?x)}\, H(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{L}}{(?x)}\, H(x).$$

Kładąc w C_4 $y_k = \varphi(x_k)$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$ otrzymujemy

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\Big[F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\&\,\sum_{k=1}^{n} G'(x_k, \varphi(x_k)) \rightarrow$$
$$\rightarrow F'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))\Big],$$

co w połączeniu z (22) daje natychmiast

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\,[F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow F'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))],$$

z czego, przez n krotne stosowanie reguły $(x)\,[F(x) \rightarrow G(x)] \rightarrow$ $\rightarrow [(?x)\,F(x) \rightarrow (?x)\,G(x)]$, uzyskujemy

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\ldots$$
$$\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,F'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)).$$

Ponieważ $\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi na podstawie C_1, przeto z ostatniego wyrażenia uzyskujemy $\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\, F'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))$, z czego przez n krotne stosowanie równoważności (24) uzyskujemy

$$\underset{\mathfrak{L}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{L}}{(?x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{L}}{(?x_n)}\, F'(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{25}$$

Na podstawie C_8 zachodzi $\underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\, [F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; G')]$, a więc tym bardziej[56] $\underset{\mathfrak{L}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{L}}{(x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{L}}{(x_n)}\, [F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; G')]$, z czego przez n krotne stosowanie reguły $(x)\,[F(x) \rightarrow G(x)] \rightarrow [(?x)\,F(x) \rightarrow (?x)\,G(x)]$ uzyskujemy $\underset{\mathfrak{L}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{L}}{(?x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{L}}{(?x_n)}\, F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \underset{\mathfrak{L}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{L}}{(?x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{L}}{(?x_n)}\, \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; G')$, co w połączeniu z (25) daje $\underset{\mathfrak{L}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{L}}{(?x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{L}}{(?x_n)}\, \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; G')$. Na podstawie (23) mamy więc $\underset{\mathfrak{L}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{L}}{(?x_2)} \ldots \underset{\mathfrak{L}}{(?x_n)}\, \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$, które dowodzi, że układ $F_1', F_2', \ldots, F_m'$ spełnia wyrażenie A w zbiorze $\mathfrak{L}$.

Odnośnie ostatniego postępowania, prowadzącego z wyrażenia A do wyrażenia $C_1 \,\&\, C_2 \,\&\, C_3 \,\&\, C_4$, chcemy z jednej strony dodać, że wyrażenie C_4 w nim może, zgodnie z lemmatem 2, być zastąpione przez wyrażenie

$$\sum_{k=1}^{n} (x_1)(x_2) \ldots (x_n)(y) \Big[F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, G(x_k, y) \rightarrow \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\, y, x_{k+1}, \ldots, x_n) \Big];$$

z drugiej zaś strony wyraźnie podkreślić, że to postępowanie[57] nie wszędzie może zastąpić poprzednio podane, gdyż np. już do dowodu twierdzenia 12 służyć nie może.

W twierdzeniach 4, 6, 7, 8, 9 poznaliśmy szereg zależności wyrażeń bez identyczności od zbioru z przyporządko-

[56] Zachodzi stale implikacja $\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}F(x) \rightarrow \underset{\mathfrak{L}}{(x)}F(x)$, gdyż $\mathfrak{L}$ jest podzbiorem zbioru $\mathfrak{Z}$.

[57] Względnie to z ostatnią modyfikacją.

wania zasadniczego. Po uogólnieniu pojęcia wyrażenia nasuwa się, rzecz jasna, pytanie czy twierdzenia te zachowują moc obowiązującą także dla wyrażeń z identycznością. Na podstawie twierdzenia 11 wiemy już, że twierdzenie 4 zachowuje moc obowiązującą. Twierdzenia 6, 8 i 9 przestają być prawdziwe, gdyż np. wyrażenie $(x)(y)[x = y \,\&\, f(x) \vee \overline{f}(x)]$ posiada, jak łatwo widzieć, realizację w zbiorze jedynkowym, zaś nie posiada realizacji w żadnym zbiorze mocy wyższej. Twierdzenie 7 jest nadal prawdziwe, mamy bowiem

T w i e r d z e n i e 13. *Każde wyrażenie z identycznością, mające realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{K}$, posiada też realizację w każdym zbiorze $\mathfrak{J}$, którego moc równa jest mocy zbioru $\mathfrak{K}$.*

Twierdzenie to wystarczy udowodnić dla wyrażeń w postaci normalnej, gdyż z tych przenosi się na dowolne wyrażenia sposobem przez nas wielokrotnie stosowanym, a polegającym na możliwości podania do każdego wyrażenia A, wyrażenia B w postaci normalnej takiego, że $A \sim B$ jest tautologiczne.

Niech więc $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$ będzie dowolnym wyrażeniem z identycznością postaci normalnej mającym realizację w zbiorze $\mathfrak{K}$. Układem spełniającym niech będzie układ $F_1, F_2, \ldots, F_k$, gdzie F_i jest funkcją logiczną r_i-członową. Zachodzi więc przeto

$$(26)\qquad \underset{\mathfrak{K}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =).$$

Definiujemy teraz funkcję matematyczną $\varphi(x)$ określoną dla wartości x ze zbioru $\mathfrak{J}$ do zbioru $\mathfrak{K}$ następująco: $\varphi(x)$ ma oznaczać ten element zbioru $\mathfrak{K}$, który odpowiada elementowi x zbioru $\mathfrak{J}$ przy jednojednoznacznym odwzorowaniu zbiorów $\mathfrak{J}$ i $\mathfrak{K}$, które zakładamy równej mocy. Gdy x przebiega wszystkie elementy zbioru $\mathfrak{J}$, wówczas $\varphi(x)$ przebiega oczywiście wszystkie elementy zbioru $\mathfrak{K}$, czyli dla tak zdefiniowanej funkcji $\varphi(x)$ zachodzi równość $\mathfrak{K}_\varphi = \mathfrak{K}$, z czego dla każdej funkcji logicznej F określonej na zbiorze $\mathfrak{K}$ wynika równoważność

$$(27)\qquad \underset{\mathfrak{J}}{(?x)}\,F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{K}}{(?x)}\,F(x).$$

Definiując teraz funkcje $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ na zbiorze $\mathfrak{J}$ kładąc

$$(28) \quad F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}) \equiv F_i(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_{r_i}))$$

(dla $x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}$ z $\mathfrak{I}$ i dla $i = 1, 2, \ldots, k$), uzyskujemy układ spełniający dane wyrażenie w zbiorze $\mathfrak{I}$. Zachodzi bowiem, jak łatwo widzieć, równoważność

$$(x = y) \equiv (\varphi(x) = \varphi(y)),$$ [58]

która wraz z (28) daje łatwo

$$\underset{\mathfrak{I}}{(x_1)}\underset{\mathfrak{I}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{I}}{(x_n)}[\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; =) \sim \sim \mathfrak{A}(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n); =)],$$

z czego przez n krotne stosowanie reguły logicznej $(x)[F(x) \sim \sim G(x)] \rightarrow [(?x)F(x) \sim (?x)G(x)]$ uzyskuje się najprzód równoważność

$$(29) \quad \underset{\mathfrak{I}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{I}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{I}}{(?x_n)}\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; =) \sim \sim \underset{\mathfrak{I}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{I}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{I}}{(?x_n)}\mathfrak{A}(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n); =).$$

Przez n krotne stosowanie (27) otrzymujemy jednak równoważność

$$\underset{\mathfrak{I}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{I}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{I}}{(?x_n)}\mathfrak{A}(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n); =) \sim \sim \underset{\mathfrak{K}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{K}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(?x_n)}\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =),$$

która w połączeniu z (29) daje

$$\underset{\mathfrak{I}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{I}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{I}}{(?x_n)}\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; =) \sim \sim \underset{\mathfrak{K}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{K}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(?x_n)}\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =).$$

Ponieważ jednak $\underset{\mathfrak{K}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{K}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(?x_n)}\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$ jest na podstawie (26) prawdziwe, z ostatniej równoważności uzyskujemy $\underset{\mathfrak{I}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{I}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{I}}{(?x_n)}\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; =)$, które wyraża, że

---

[58] Czytelnik, który zechciałby sobie zadać trudu znalezienia istotnej przyczyny tego, że twierdzenia 6, 8 i 9 przestają być prawdziwe dla wyrażeń z identycznością, przekonałby się, że jest nią niezachodzenie tej równoważności dla funkcji $\varphi(x)$ z twierdzenia 8.

układ $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ spełnia dane wyrażenie w zbiorze $\mathfrak{J}$, c. b. d. o.

Twierdzenie 9, jak widzieliśmy, nie zachodzi dla wyrażeń z identycznością; gdybyśmy jednak w nim zwrot: które w ogóle posiada realizację zastąpili przez zwrot: które posiada realizację w jakimś zbiorze nieskończonym, wówczas sprawa miałaby się inaczej. Zachodzi bowiem

Twierdzenie 14. *Każde wyrażenie z identycznością, które posiada realizację w jakimś zbiorze nieskończonym (dowolnej mocy), posiada też realizację w zbiorze wszystkich liczb naturalnych.*

Dowód. Niech A będzie dowolnym wyrażeniem z identycznością posiadającym realizację w jakimś zbiorze nieskończonym $\mathfrak{J}$. Przez B oznaczmy następujące wyrażenie: $(x)(Ey)(z)$ $[\overline{F}(x,x) \& F(x,y) \& (F(z,x) \rightarrow F(z,y))]$, przy czym F niech będzie zmienną funkcyjną nie występującą w A. Wyrażenie B ma następujące dwie własności: a) nie posiada realizacji w żadnym zbiorze skończonym[59], b) posiada realizację w każdym zbiorze nieskończonym. Relacja $x < y$ spełnia wyrażenie B w zbiorze wszystkich liczb naturalnych, gdyż zachodzi $(x)(z)[\overline{x < x} \& x < x+1 \& (z < x \rightarrow z < x+1)]$. Wyrażenie bez identyczności B, posiadając realizację w zbiorze przeliczalnym, według twierdzenia 6 posiada realizację w każdym zbiorze nieskończonym, a więc w szczególności w zbiorze $\mathfrak{J}$. Gdy układ $F_1', F_2', \ldots, F_k'$ spełnia wyrażenie A w zbiorze $\mathfrak{J}$, zaś funkcja F' wyrażenie B, wówczas układ $F_1', F_2', \ldots, F_k', F'$ spełnia wyrażenie $A \& B$ w zbiorze $\mathfrak{J}$. Wyrażenie $A \& B$, posiadając realizację, posiada według twierdzenia 11 realizację już w zbiorze co najwyżej przeliczalnym, np. $\mathfrak{K}$. Wynika z tego, że: **1)** wyrażenie A posiada realizację w zbiorze $\mathfrak{K}$; **2)** wyrażenie B posiada realizację w zbiorze co najwyżej przeliczalnym $\mathfrak{K}$. Z **2)** wynika, że zbiór $\mathfrak{K}$ jest dokładnie przeliczalny, gdyż, na podstawie własności a), wyrażenie B nie posiada realizacji w żadnym zbiorze skończonym. Na podstawie **1)** wyrażenie A posiada realizację w zbiorze przeliczalnym,

[59] Dowód własności a), zresztą prosty, znajdzie Czytelnik w pracy: K. Schütte, Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, Math. Ann. **109** (1934).

a więc, według twierdzenia 13, także w zbiorze liczb naturalnych, c. b. d. o.

Rzeczą ciekawą jest, że zachodzi następujące o wiele ogólniejsze

Twierdzenie 15. *Każde wyrażenie z identycznością, posiadające realizację w jakimś zbiorze nieskończonym mocy* $\mathfrak{n}$, *posiada realizację w każdym zbiorze mocy* $\mathfrak{m}$, *spełniającej nierówność* $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$.

Dowód tego twierdzenia rezerwujemy sobie jednak dla osobnej pracy[60].

A teraz udowodnimy następujące

Twierdzenie 16. *Każde wyrażenie zawierające tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne i to w ilości m, posiadające w ogóle realizację, posiada już realizację w zbiorze skończonym o dokładnie* 2^m *elementach*[61].

Twierdzenie to wystarczy udowodnić znów tylko dla wyrażeń w postaci normalnej. Do każdego bowiem wyrażenia A o jednoczłonowych zmiennych funkcyjnych można podać

[60] Twierdzenie 15 daje się zresztą uogólnić na przeliczalny zbiór wyrażeń. Odnośne uogólnienie brzmi: Każdy układ przeliczalnej ilości wyrażeń z identycznością, posiadający równoczesną realizację w jakimś zbiorze nieskończonym mocy $\mathfrak{n}$, posiada równoczesną realizację w każdym zbiorze mocy $\mathfrak{m}$, spełniającej nierówność $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$.

[61] Twierdzenie to rozwiązuje w zupełności zagadnienie rozstrzygalności dla wyrażeń o jednoczłonowych zmiennych funkcyjnych, gdyż dla każdego wyrażenia można zawsze rozstrzygnąć, czy posiada realizację w zbiorze skończonym o danej liczbie elementów. Gdy zbiór posiada dokładnie k elementów $a_1, a_2, \ldots, a_k$, wówczas kwantyfikator ogólny $(x)F(x)$ nad tym zbiorem znaczy tyle, co $F(a_1)\&F(a_2)\&\ldots\&F(a_k)$, zaś kwantyfikator szczegółowy $(Ex)F(x)$ tyle, co $F(a_1) \mathrm{v} F(a_2) \mathrm{v} \ldots \mathrm{v} F(a_k)$. Uwzględniwszy to w danym wyrażeniu, otrzymujemy z łatwością wyrażenie logiki zdań równoważne z danym wyrażeniem pod względem posiadania realizacji, z czego wynika oczywiście rozstrzygalność dla tego ostatniego. Powyższe twierdzenie zostało po raz pierwszy udowodnione przez L. Löwenheima w pracy cytowanej pod [37]; inny dowód został podany później przez H. Behmanna w pracy: Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem, Math. Ann. **86** (1922). Odmienny od tych dowód zawiera cytowana pod [13] teza doktorska Herbranda, w szczeg. str. 52—54, gdzie chodziło o dopasowanie dowodu do, tam zajętego, finitystycznego stanowiska.

wyrażenie B w postaci normalnej o tych samych zmiennych funkcyjnych takie, że $A \sim B$ jest tautologiczne. Jeśli twierdzenie 16 jest prawdziwe dla wyrażenia B w postaci normalnej, wówczas prawdziwość ta przenosi się natychmiast na wyrażenie A. Niech teraz $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie dowolnym wyrażeniem w postaci normalnej o jednoczłonowych zmiennych funkcyjnych $F_1, F_2, \ldots, F_m$ posiadającym realizację. Wyrażenie to posiada, na podstawie twierdzenia 9, wówczas także realizację w zbiorze $\mathfrak{Z}$ wszystkich liczb naturalnych. Jeśli $F_1', F_2', \ldots, F_m'$ jest układem spełniającym, wówczas mamy

$$(30)\qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Relacja $\sum_{i=1}^{m}(F_i'(x) \sim F_i'(y))$ pomiędzy liczbami x i y jest, jak łatwo widzieć, zwrotna, symetryczna i przechodnia, gdyż taką jest relacja równoważności logicznej $\sim$. Zbiór wszystkich liczb naturalnych rozpada się więc na klasy bez elementów wspólnych takie, że dwie liczby x, y wzięte z jednej i tej samej klasy spełniają relację $\sum_{i=1}^{m}(F_i'(x) \sim F_i'(y))$, zaś wzięte z różnych klas jej nie spełniają.

Dla każdej liczby naturalnej x oznaczamy przez $\varphi(x)$ najmniejszą liczbę tej klasy, do której liczba x wpada. Liczby x i $\varphi(x)$ należą więc do jednej klasy; zachodzi więc przeto

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(x)} \sum_{i=1}^{m}(F_i'(x) \sim F_i'(\varphi(x))),$$

z czego uzyskujemy z łatwością

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\,[\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{A}'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))],$$

a z tego przez n krotne stosowanie reguły $(x)[F(x) \sim G(x)] \rightarrow$ $\rightarrow [(?x)F(x) \sim (?x)G(x)]$:

$$(31)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\ldots$$
$$\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))].$$

Jeśli zbiór tych liczb naturalnych, które przebiega $\varphi(x)$, gdy x przebiega wszystkie liczby naturalne oznaczymy przez $\mathfrak{L}$, wówczas mamy na zasadzie równoważności (1) i (3) dla każdej funkcji logicznej F równoważności

$$(32{\cdot}1)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\, F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{L}}{(x)}\, F(x), \qquad (32{\cdot}2)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(?x)}\, F(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{L}}{(?x)}\, F(x).$$

Przez n krotne stosowanie reguły (32·2) otrzymujemy

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) \sim \underset{\mathfrak{L}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{L}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{L}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

co w połączeniu z (31) daje

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \underset{\mathfrak{L}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{L}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{L}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

z czego, na podstawie (30), wynika

$$(33)\qquad \underset{\mathfrak{L}}{(?x_1)}\underset{\mathfrak{L}}{(?x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{L}}{(?x_n)}\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Pokażemy teraz, że zbiór $\mathfrak{L}$ jest skończony i nie zawiera więcej jak 2^m elementów. Liczby $\varphi(x)$ i $\varphi(y)$ należą, w wyżej rozpatrywanym rozbiciu wszystkich liczb naturalnych, wtedy i tylko wtedy do jednej klasy, gdy są równe, ponieważ oznaczają najmniejsze liczby tych klas do których należą, a każda klasa posiada oczywiście tylko jedną liczbę najmniejszą. Mamy przeto

$$\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}\left[\sum_{i=1}^{m}(F_i'(\varphi(x)) \sim F_i'(\varphi(y))) \sim (\varphi(x) = \varphi(y))\right],$$

z czego przez dwukrotne stosowanie równoważności (32·1) uzyskujemy

$$(34)\qquad \underset{\mathfrak{L}}{(x)}\underset{\mathfrak{L}}{(y)}\left[\sum_{i=1}^{m}(F_i'(x) \sim F_i'(y)) \sim (x = y)\right],$$

które wyraża, że relacja $\sum_{i=1}^{m}(F_i'(x) \sim F_i'(y))$ jest w zbiorze $\mathfrak{L}$ identycznością. Załóżmy teraz na chwilę, że zbiór $\mathfrak{L}$ zawiera więcej niż 2^m elementów. Istniało by więc w $\mathfrak{L}$ co najmniej 2^m+1

różnych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_{2^m+1}$. Rozważmy dla $i=1, 2, \ldots, \ldots, 2^m+1$ ciąg m wartości logicznych $F_1'(a_i), F_2'(a_i), \ldots, F_m'(a_i)$. Ponieważ różnych ciągów m wartości logicznych jest 2^m, więc wśród powyższych 2^m+1 ciągów muszą być co najmniej dwa równe, np. α-ty i β-ty. Zachodzi, wtedy $\sum\limits_{i=1}^{m}(F_i'(a_\alpha) \sim F_i'(a_\beta))$, co w połączeniu z (34) daje $a_\alpha = a_\beta$, a więc sprzeczność, gdyż $a_1, a_2, \ldots, a_{2^m+1}$ przedstawiają same różne elementy. Zbiór $\mathfrak{L}$ jest więc istotnie skończony i nie zawiera więcej jak 2^m elementów. Ponieważ dane wyrażenie $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ posiada, na mocy (33), realizację w zbiorze $\mathfrak{L}$, więc posiada realizację w zbiorze o co najwyżej 2^m elementach, z czego, na podstawie twierdzenia 6, wynika, że posiada też realizację w zbiorze o dokładnie 2^m elementach c. b. d. o.

Na zakończenie tego paragrafu chcemy, choć na jednym przykładzie, pokazać czytelnikowi, jakie znaczenie ma zagadnienie rozstrzygalności w zakresie węższego rachunku funkcyjnego dla matematyki. Podamy mianowicie wyrażenie węższego rachunku funkcyjnego, które wtedy i tylko wtedy ma realizację, gdy tzw. wielkie twierdzenie Fermata jest prawdziwe. Z tego wynika oczywiście, że gdyby rozwiązano zagadnienie rozstrzygalności dla węższego rachunku funkcyjnego, wówczas i wielkie twierdzenie Fermata dałoby się rozstrzygnąć [62].

Wspomnianą własność posiada następujące wyrażenie A:
$(Ex)(y)(z)(u)(v)(w)(r)(s)(t)(p)[\overline{F}(y,z) \vee G(x,y,z) \,\&\, \overline{G}(y,z,u) \vee$
$\vee \overline{F}(y,v) \vee \overline{F}(u,w) \vee G(v,z,w) \,\&\, H(x,y,y) \,\&\, \overline{H}(y,z,u) \vee \overline{F}(y,v) \vee$
$\vee \overline{G}(u,z,w) \vee H(v,z,w) \,\&\, K(x,y,y) \,\&\, \overline{K}(y,z,u) \vee \overline{F}(y,v) \vee \overline{H}(u,z,w) \vee$
$\vee K(v,z,w) \,\&\, \overline{F}(u,v) \vee \overline{F}(v,w) \vee \overline{K}(w,y,r) \vee \overline{K}(w,z,s) \vee \overline{K}(w,t,p) \vee$

[62] Twierdzenie Fermata nie odgrywa oczywiście tu żadnej wyjątkowej roli: Z rozwiązalności zagadnienia rozstrzygalności dla węższego rachunku funkcyjnego wynikałaby natychmiast rozstrzygalność obszernej nieskończonej klasy problemów arytmetycznych, m. i. zagadnienia Goldbacha i innych problemów klasycznych. Myliłby się jednak ten czytelnik, który by sądził, że każde klasyczne zagadnienie teorii liczb daje się sprowadzić do zagadnienia rozstrzygalności węższego rachunku funkcyjnego. Autorowi nie jest np. dotychczas wiadomym czy tzw. problem liczb pierwszych bliźniaczych daje się sprowadzić do zagadnienia rozstrzygalności węższego rachunku funkcyj.

$\vee \overline{G}(r, s, p)] \,\&\, (x)(Ey)F(x, y)$, które zawiera zmienne funkcyjne $F(x, y)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$, $K(x, y, z)$.

Załóżmy na chwilę, że wielkie twierdzenie Fermata jest prawdziwe, a udowodnimy, że wyżej podane wyrażenie posiada realizację w zbiorze wszystkich liczb naturalnych, przy czym układem spełniającym są funkcje logiczne $F(x, y)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$, $K(x, y, z)$ zdefiniowane odpowiednio przez $y = x + 1$, $z = x + y$, $z = x \,.\, y$, $z = y^x$. Ponieważ zachodzi w zbiorze liczb naturalnych $(x)(x + 1 = x + 1)$, więc również $(x)(Ey)(x + 1 = y)$, czyli $(x)(Ey)F(x, y)$. Wystarczy, jak łatwo widzieć, jeszcze tylko pokazać, że dla każdego obioru liczb naturalnych $y, z, u, v, w, r, s, t, p$ zachodzi[63]:

(35·1) $(y + 1 \neq z) \vee (1 + y = z)$,

(35·2) $(y + z \neq u) \vee (y + 1 \neq v) \vee (u + 1 \neq w) \vee (v + z = w)$,

(35·3) $1 \,.\, y = y$,

(35·4) $(y \,.\, z \neq u) \vee (y + 1 \neq v) \vee (u + z \neq w) \vee (v \,.\, z = w)$,

(35·5) $y^1 = y$,

(35·6) $(z^y \neq u) \vee (y + 1 \neq v) \vee (u \,.\, z \neq w) \vee (z^v = w)$,

(35·7) $(u + 1 \neq v) \vee (v + 1 \neq w) \vee (y^w \neq r) \vee (z^w \neq s) \vee (t^w \neq p) \vee$
$\vee (r + s \neq p)$.

Prawdziwość (35·1), (35·3) i (35·5) jest natychmiastowa. Gdy jeden z trzech pierwszych składników dyzjunkcji (35·2) jest prawdziwy, wówczas cała dyzjunkcja jest prawdziwa; gdy wszystkie trzy pierwsze składniki są fałszywe, wówczas zachodzą równości $y + z = u$, $y + 1 = v$, $u + 1 = w$, z których wynika łatwo równość $v + z = w$, czyli prawdziwość ostatniego składnika dyzjunkcji (35·2). Gdy jeden z trzech pierwszych składników dyzjunkcji (35·4) jest prawdziwy, wówczas cała dyzjunkcja jest prawdziwa; gdy wszystkie trzy pierwsze składniki są fałszywe, wówczas zachodzą równości $y \,.\, z = u$, $y + 1 = v$, $u + z = w$, z których wynika łatwo równość $v \,.\, z = w$, czyli prawdziwość czwartego składnika dyzjunkcji (35·4). Gdy jeden z trzech pierwszych składników dyzjunkcji (35·6) jest prawdziwy, wówczas cała dyzjunkcja jest prawdziwa; gdy trzy pierwsze składniki są fałszywe, wówczas za-

[63] Korzystamy tu z zasady $f(1) \rightarrow (Ex) f(x)$, według której istnieje liczba o własności f, gdy 1 jest taką liczbą.

chodzą równości $z^y = u$, $y+1=v$, $u.z=w$, z których wynika łatwo równość $z^v = w$, czyli prawdziwość czwartego składnika dyzjunkcji (35·6). Gdy jeden z pierwszych pięciu składników dyzjunkcji (35·7) jest prawdziwy, wówczas cała dyzjunkcja jest prawdziwa; gdy każdy z pięciu pierwszych składników jest fałszywy, wówczas zachodzą równości $u+1=v$, $v+1=w$, $y^w = r$, $z^w = s$, $t^w = p$, które w połączeniu z — zachodzącą na mocy założonej prawdziwości wielkiego twierdzenia Fermata — nierównością $y^{u+2} + z^{u+2} \neq t^{u+2}$ dają z łatwością nierówność $r+s \neq p$, czyli prawdziwość szóstego składnika dyzjunkcji (35·7). Z prawdziwości wielkiego twierdzenia Fermata wynika więc istotnie istnienie realizacji wyrażenia A. Udowodnimy teraz pewne twierdzenie, z którego pomocą pokażemy, że odwrotnie: z istnienia realizacji wyrażenia A wynika prawdziwość wielkiego twierdzenia Fermata.

Twierdzenie 17. *Każde wyrażenie kształtu* $(Ex)(x_1)(x_2)\ldots(x_n)\,\mathfrak{A}(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,(x)(Ey)\,F(x,y)$, *zawierające prócz* $F(x,y)$ *jeszcze następujące zmienne funkcyjne* $F_1, F_2, \ldots, F_k$, *jeśli w ogóle posiada realizację, wówczas także w zbiorze* $\mathfrak{Z}$ *wszystkich liczb naturalnych i to taką realizację, że przy pewnym układzie* $F', F_1', F_2', \ldots, F_k'$ *zachodzi* $\underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\,\mathfrak{A}'(1,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,F'(x,x+1)$[64].

Dowód. Niech wyrażenie $(Ex)(x_1)(x_2)\ldots(x_n)\,\mathfrak{A}(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,(x)(Ey)\,F(x,y)$ posiada realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{K}$, zaś układem spełniającym niech będzie $F'', F_1'', F_2'', \ldots, F_k''$, gdzie F_i'' jest funkcją r_i-członową (dla $i=1,2,\ldots,k$). Istnieje wówczas w zbiorze $\mathfrak{K}$ element a taki, że zachodzi

(36) $$\underset{\mathfrak{K}}{(x_1)}\,\underset{\mathfrak{K}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{K}}{(x_n)}\,\mathfrak{A}''(a,x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

oraz istnieje funkcja matematyczna $\mu(x)$ zdefiniowana dla elementów zbioru $\mathfrak{K}$, do zbioru $\mathfrak{K}$ taka, że zachodzi

(37) $$\underset{\mathfrak{K}}{(x)}\,F''(x,\mu(x)).$$

[64] Pragnę tu zaznaczyć, że zachodzi twierdzenie o wiele ogólniejsze od twierdzenia 17; dla naszych celów wystarcza jednak powyższy wypadek szczególny.

Definiujemy teraz funkcję matematyczną $\varphi(x)$ w zbiorze $\mathfrak{Z}$, do zbioru $\mathfrak{K}$ rekurencyjnie przez równości:

$$(38{\cdot}1) \qquad \varphi(1) = a,$$

$$(38{\cdot}2) \qquad \varphi(x+1) = \mu(\varphi(x)),$$

oraz funkcje logiczne $F', F_1', F_2', \ldots, F_k'$ w zbiorze $\mathfrak{Z}$ przez równoważności:

$$(39{\cdot}1) \qquad F'(x, y) \equiv F''(\varphi(x), \varphi(y)),$$

$$(39{\cdot}2) \qquad F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}) \equiv F_i''(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_{r_i})),$$

dla $i = 1, 2, \ldots, k$, oraz $x, y; x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}$ dowolnie wziętych z $\mathfrak{Z}$.

Z (39·1) i (39·2) wynikają natychmiast równoważności:

$$(40) \qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\underset{\mathfrak{Z}}{(y)}[F'(x, y) \sim F''(\varphi(x), \varphi(y))],$$

$$(41) \qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}[\mathfrak{A}'(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{A}''(\varphi(x), \varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))].$$

Z (40) wynika w szczególności $\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}[F'(x, x+1) \sim F''(\varphi(x), \varphi(x+1))]$, z czego na podstawie (38·2) i reguły $(x)[F(x) \sim G(x)] \rightarrow [(x)F(x) \sim (x)G(x)]$ wynika

$$(42) \qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}F'(x, x+1) \sim \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}F''(\varphi(x), \mu(\varphi(x))).$$

Z (41) wynika w szczególności $\underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}[\mathfrak{A}'(1, x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{A}''(\varphi(1), \varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))]$, z czego na podstawie (38·1) i reguły $(x)[F(x) \sim G(x)] \rightarrow [(x)F(x) \sim (x)G(x)]$ uzyskujemy

$$(43) \qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\mathfrak{A}'(1, x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\ldots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\mathfrak{A}''(a, \varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)).$$

Zastosowawszy, na mocy (1), słuszną regułę $\underset{\mathfrak{Z}}{(x)}H(\varphi(x)) \sim \underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x)}H(x)$ otrzymujemy równoważności:

$$(44) \qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}F''(\varphi(x), \mu(\varphi(x))) \sim \underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x)}F''(x, \mu(x)),$$

$$(45)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\dots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\,\mathfrak{A}''(a,\varphi(x_1),\varphi(x_2),\dots,\varphi(x_n)) \sim \underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x_1)}\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x_2)}\dots\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x_n)}\,\mathfrak{A}''(a,x_1,x_2,\dots,x_n).$$

(42) i (44) dają

$$(46)\qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,F'(x,x+1) \sim \underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x)}\,F''(x,\mu(x)),$$

zaś (43) i (45) dają

$$(47)\quad \underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\dots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\,\mathfrak{A}'(1,x_1,x_2,\dots,x_n) \sim \underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x_1)}\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x_2)}\dots\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x_n)}\,\mathfrak{A}''(a,x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Ponieważ $\mathfrak{K}_\varphi$ jest podzbiorem zbioru $\mathfrak{K}$, z (37) wynika $\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x)}\,F''(x,\mu(x))$, co w połączeniu z (46) daje

$$(48)\qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,F'(x,x+1).$$

Analogicznie z (36) wynika $\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x_1)}\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x_2)}\dots\underset{\mathfrak{K}_\varphi}{(x_n)}\,\mathfrak{A}''(a,x_1,x_2,\dots,x_n)$, co w połączeniu z (47) daje

$$(49)\qquad \underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\dots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\,\mathfrak{A}'(1,x_1,x_2,\dots,x_n).$$

(48) i (49) dają wreszcie $\underset{\mathfrak{Z}}{(x_1)}\underset{\mathfrak{Z}}{(x_2)}\dots\underset{\mathfrak{Z}}{(x_n)}\,\mathfrak{A}'(1,x_1,x_2,\dots,x_n)\ \&$ $\&\ \underset{\mathfrak{Z}}{(x)}\,F'(x,x+1)$, c. b. d. o.

Wracamy do zagadnienia Fermata. Wyrażenie A jest kształtu rozpatrywanego w twierdzeniu 17, jeśli więc posiada realizację, wówczas na mocy tego twierdzenia istnieją określone w zbiorze wszystkich liczb naturalnych funkcje logiczne $F'(x,y)$, $G'(x,y,z)$, $H'(x,y,z)$, $K'(x,y,z)$ takie, że dla każdego obioru liczb naturalnych $y, z, u, v, w, r, s, t, p, x$ zachodzi:

(50·1) $\overline{F'}(y,z) \vee G'(1,y,z)$,

(50·2) $\overline{G'}(y,z,u) \vee \overline{F'}(y,v) \vee \overline{F'}(u,w) \vee G'(v,z,w)$,

(50·3) $H'(1,y,y)$,

(50·4) $\overline{H'}(y,z,u) \vee \overline{F'}(y,v) \vee \overline{G'}(u,z,w) \vee H'(v,z,w)$,

(50·5) $K'(1,y,y)$,

(50·6) $\overline{K'}(y,z,u) \vee \overline{F'}(y,v) \vee \overline{H'}(u,z,w) \vee K'(v,z,w)$, (50·7) $\overline{F'}(u, v) \vee \overline{F'}(v, w) \vee \overline{K'}(w, y, r) \vee \overline{K'}(w, z, s) \vee \overline{K'}(w, t, p) \vee \overline{G'}(r, s, p)$,

(50·8) $F'(x, x+1)$.

Dla każdej pary x, y liczb naturalnych zachodzi:

(51) $$G'(x, y, x+y).$$

Dowód prowadzimy indukcją ze względu na x. Kładąc w (50·1) $z = y+1$ otrzymujemy $\overline{F'}(y, y+1) \vee G'(1, y, y+1)$, co w połączeniu z $F'(y, y+1)$, które zachodzi na mocy (50·8), daje z łatwością $G'(1, y, y+1)$. Dla $x = 1$ jest więc (51) słuszne. Załóżmy, że dla jakiegoś x zachodzi

(52) $$G'(x, y, x+y).$$

Kładąc w (50·2) za y, z, u, v, w odpowiednio $x, y, x+y, x+1, x+y+1$ otrzymujemy

$$\overline{G'}(x, y, x+y) \vee \overline{F'}(x, x+1) \vee \overline{F'}(x+y, x+y+1) \vee$$
$$\vee\, G'(x+1, y, x+y+1),$$

co w połączeniu z (52), (50·8) i $F'(x+y, x+y+1)$, powstającym z (50·8) przez podstawienie $x+y$ za x, daje $G'(x+1, y, x+y+1)$, a tym samym zostało (51) indukcją udowodnione.

Dla każdej pary x, y liczb naturalnych zachodzi

(53) $$H'(x, y, x.y).$$

Dowód prowadzimy indukcją ze względu na x. Dla $x = 1$ (53) zachodzi na mocy (50·3). Załóżmy, że dla jakiegoś x zachodzi

(54) $$H'(x, y, x.y).$$

Kładąc w (50·4) za y, z, u, v, w odpowiednio $x, y, x.y, x+1, x.y+y$ otrzymujemy $\overline{H'}(x, y, x.y) \vee \overline{F'}(x, x+1) \vee \overline{G'}(x.y, y, x.y+y) \vee H'(x+1, y, x.y+y)$, co w połączeniu z (54), (50·8) i $G'(x.y, y, x.y+y)$, powstającym z (51) przez zastąpienie x przez $x.y$, daje $H'(x+1, y, x.y+y)$, czyli $H'(x+1, y, (x+1).y)$, a tym samym (53) zostało indukcją udowodnione.

Dla każdej pary liczb naturalnych x, y zachodzi

(55) $$K'(x, y, y^x).$$

Dowód prowadzimy indukcją ze względu na x. Dla $x = 1$ (55) zachodzi na mocy (50·5). Załóżmy, że dla jakiegoś x zachodzi

(56) $$K'(x, y, y^x).$$

Kładąc w (50·6) za y, z, u, v, w odpowiednio $x, y, y^x, x+1$, $y^x . y$ otrzymujemy $\overline{K'}(x, y, y^x) \vee \overline{F'}(x, x+1) \vee \overline{H'}(y^x, y, y^x . y) \vee$ $\vee K'(x+1, y, y^x . y)$, co w połączeniu z (56), (50·8) i $H'(y^x, y, y^x . y)$, powstającym z (53) przez zastąpienie x przez y^x, daje $K'(x+1, y, y^x . y)$, czyli $K'(x+1, y, y^{x+1})$, a tym samym (55) zostało indukcją udowodnione.

Dla każdej trójki liczb naturalnych x, y, z i dla każdej liczby $n > 2$ zachodzi

(57) $$\overline{G'}(x^n, y^n, z^n).$$

Kładąc w (50·7) za $u, v, w, y, r, z, s, t, p$ odpowiednio $n-2$, $n-1, n, x, x^n, y, y^n, z, z^n$ otrzymujemy

$$\overline{F'}(n-2, n-1) \vee \overline{F'}(n-1, n) \vee \overline{K'}(n, x, x^n) \vee \overline{K'}(n, y, y^n) \vee \overline{K'}(n, z, z^n) \vee$$
$$\vee \overline{G'}(x^n, y^n, z^n),$$

co w połączeniu z $F'(n-2, n-1), F'(n-1, n)$ i $K'(n, x, x^n)$, $K'(n, y, y^n)$, $K'(n, z, z^n)$, powstającymi przez podstawienie łatwo z (50·8) i (55), daje $\overline{G'}(x^n, y^n, z^n)$, a więc (57).

Teraz możemy wnioskować na prawdziwość twierdzenia Fermata. Gdyby bowiem dla pewnych liczb x, y, z, n, gdzie $n > 2$ zachodziła równość $x^n + y^n = z^n$, wówczas — ponieważ na mocy (51) zachodzi $G'(x^n, y^n, x^n + y^n)$ — mielibyśmy $G'(x^n, y^n, z^n)$, co przeczy wzorowi (57).

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 18. *Wielkie zagadnienie* Fermata *daje się sprowadzić do zagadnienia rozstrzygalności węższego rachunku funkcyjnego.*

§ 4. O odwzorowaniach zbiorów nieskończonych i przedstawialnościach w tych zbiorach dowolnych funkcyj logicznych.

Twierdzenie 19. *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqq 2$ *jest*

$$(x)(y)(Ez)\,\Phi(z, y, x) \rightarrow (x_p)_1^{n-1}(v_n)(Ev_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

wyrażeniem tautologicznym.

Dowód prowadzimy indukcją ze względu na n. Dla $n = 2$ twierdzenie zachodzi, gdyż $(x)(y)(Ez)\,\Phi(z, y, x) \rightarrow (x_1)(v_2)(Ev_1)$ $\Phi(v_1, v_2, x_1)$ jest w sposób oczywisty tautologiczne (następnik tej implikacji różni się od poprzednika tylko w oznaczeniu zmiennych).

Załóżmy teraz, że dla pewnej liczby n

$$(x)(y)(Ez)\,\Phi(z,y,x) \rightarrow (x_\rho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right]$$

jest tautologiczne. Ponieważ $(x)(y)(Ez)\,\Phi(z,y,x) \rightarrow (x_n)(v_{n+1})(Ev_n)\,\Phi(v_n,v_{n+1},x_n)$ jest w sposób oczywisty tautologiczne, więc także

$$(58)\quad (x)(y)(Ez)\,\Phi(z,y,x) \rightarrow$$
$$\rightarrow (x_\rho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right] \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (x_n)(v_{n+1})(Ev_n)\,\Phi(v_n,v_{n+1},x_n).$$

Następnik tej implikacji daje się z łatwością przekształcić w wyrażenie

$$(x_\rho)_1^n(v_{n+1})\left\{(v_n)(Ev_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right] \mathbin{\&}\right.$$
$$\left.\mathbin{\&}(Ev_n)\,\Phi(v_n,v_{n+1},x_n)\right\},$$

które pociąga za sobą, na mocy reguły $(x)F(x) \mathbin{\&} (Ex)\,G(x) \rightarrow (Ex)\,[F(x) \mathbin{\&} G(x)]$, wyrażenie

$$(x_\rho)_1^n(v_{n+1})(Ev_n)\left\{(Ev_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right] \mathbin{\&} \Phi(v_n,v_{n+1},x_n)\right\},$$

dające się łatwo sprowadzić do wyrażenia

$$(x_\rho)_1^n(v_{n+1})(Ev_\rho)_1^n\left[\sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right].$$

Następnik implikacji (58) pociąga więc za sobą ostatnie wyrażenie, co w połączeniu z (58) daje wyrażenie

$$(x)(y)(Ez)\,\Phi(z,y,x) \rightarrow (x_\rho)_1^n(v_{n+1})(Ev_\rho)_1^n\left[\sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right],$$

czyli prawdziwość twierdzenia 19 dla $n+1$. Twierdzenie 19 zostało więc tym samym w zupełności udowodnione.

T w i e r d z e n i e 20. *Dla każdej liczby naturalnej $n \geqq 2$ jest*

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x,z,y) \rightarrow (v_1)(Ex_\rho)_1^{n-1}(Ev_\rho)_2^n\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right]$$

wyrażeniem tautologicznym.

Dowód prowadzimy indukcją ze względu na n. Dla $n=2$ twierdzenie zachodzi, gdyż $(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x,z,y) \rightarrow (v_1)(Ex_1)(Ev_2)\,\Phi(v_1,v_2,x_1)$ jest w sposób oczywisty tautologiczne.

Załóżmy teraz, że dla pewnej liczby n

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x,z,y) \rightarrow (v_1)(Ex_p)_1^{n-1}(Ev_p)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

jest tautologiczne. Ponieważ $(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x,z,y) \rightarrow (v_n)(Ex_n)(Ev_{n+1})\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)$ jest w sposób oczywisty tautologiczne, więc także wyrażenie

$$(59)\quad (x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x,z,y) \rightarrow$$
$$\rightarrow (v_1)(Ex_p)_1^{n-1}(Ev_p)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \,\&$$
$$\& \,(v_n)(Ex_n)(Ev_{n+1})\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n).$$

Następnik tej implikacji daje się z łatwością przekształcić w wyrażenie $(v_1)(Ex_p)_1^{n-1}(Ev_p)_2^{n-1}\left\{(Ev_n)\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \,\& \,(v_n)(Ex_n)(Ev_{n+1})\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)\right\}$, które pociąga, na mocy reguły $(Ex)F(x) \,\&\, (x)G(x) \rightarrow (Ex)[F(x) \,\&\, G(x)]$, wyrażenie $(v_1)(Ex_p)_1^{n-1}(Ev_p)_2^{n-1}(Ev_n)\left\{\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \,\&\, (Ex_n)(Ev_{n+1})\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)\right\}$, dające się łatwo sprowadzić do wyrażenia

$$(v_1)(Ex_p)_1^n(Ev_p)_2^{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right].$$

Następnik implikacji (59) pociąga więc za sobą ostatnie wyrażenie, co w połączeniu z (59) daje przez sylogizm wyrażenie

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x,z,y) \rightarrow (v_1)(Ex_p)_1^n(Ev_p)_2^{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right],$$

czyli prawdziwość twierdzenia 20 dla $n+1$. Dowód indukcyjny został więc wykończony.

T w i e r d z e n i e 21. *Dla każdej liczby naturalnej $n \geqq 2$ prawdziwość wyrażenia*

$$(60)\quad (x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})\,[\Phi(x,y,z) \,\&\, \Phi(x,\overset{*}{y},\overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y} \,\&\, z = \overset{*}{z}]$$

pociąga za sobą prawdziwość wyrażenia

$$(61)\quad (v_1)(\overset{*}{v}_1)(x_\rho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\rho)_1^{n-1}(v_n)(\overset{*}{v}_n)\Big\{\Big[(v_1=\overset{*}{v}_1)\ \&\ (Ev_\rho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\ \&\ (E\overset{*}{v}_\rho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i)\Big] \rightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n-1}(x_i=\overset{*}{x}_i)\ \&\ (v_n=\overset{*}{v}_n)\Big)\Big\}.$$

Wyrażenie (60) jest, jak łatwo przy uwzględnieniu reguły $x = \overset{*}{x}\ \&\ f(\overset{*}{x}) \rightarrow f(x)$ widzieć, równoważne wyrażeniu

$$(62)\quad (x)(\overset{*}{x})(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[x=\overset{*}{x}\ \&\ \Phi(x,y,z)\ \&\ \Phi(\overset{*}{x},\overset{*}{y},\overset{*}{z}) \rightarrow z=\overset{*}{z}\ \&\ y=\overset{*}{y}],$$

zaś wyrażenie (61) jest równoważne, na mocy równoważności $[(Ex)f(x) \rightarrow p] \sim (x)[f(x) \rightarrow p]$, (gdzie p nie zawiera zmiennej x), wyrażeniu

$$(63)\quad (v_\rho)_1^n(\overset{*}{v}_\rho)_1^n(x_\rho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\rho)_1^{n-1}\Big\{v_1=\overset{*}{v}_1\ \&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\ \&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n-1}x_i=\overset{*}{x}_i\ \&\ v_n=\overset{*}{v}_n\Big\}.$$

Zamiast więc pokazać, że (60) pociąga (61) dla każdej liczby $n \geqq 2$, wystarczy pokazać, że (62) pociąga (63) dla każdego $n \geqq 2$. To ostatnie pokażemy indukcją ze względu na n, przy czym dla uproszczenia rachunku posługiwać się będziemy zmiennymi rzeczywistymi.

Z (62) wynika z łatwością przez zmianę zmiennych i przez przejście ze zmiennych pozornych do rzeczywistych $\{v_1 = \overset{*}{v}_1\ \&\ \Phi(v_1, v_2, x_1)\ \&\ \Phi(\overset{*}{v}_1, \overset{*}{v}_2, \overset{*}{x}_1) \rightarrow x_1 = \overset{*}{x}_1\ \&\ v_2 = \overset{*}{v}_2\}$, a więc też (63) dla $n = 2$. Załóżmy teraz, że z (62) wynika (63) dla pewnego n; pod założeniem prawdziwości wyrażenia (62) mamy więc prawdziwość wyrażenia $\Big\{v_1 = \overset{*}{v}_1\ \&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\ \&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n-1}x_i = \overset{*}{x}_i\ \&\ v_n = \overset{*}{v}_n\Big\}$, z czego na podstawie reguły $(A \rightarrow B) \rightarrow (A\ \&\ C \rightarrow B\ \&\ C)$ wynika z łatwością

$$(64)\quad \left\{v_1 = \overset{*}{v}_1 \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n} \Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i) \rightarrow \right.$$
$$\left. \rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} x_i = \overset{*}{x}_i \mathbin{\&} v_n = \overset{*}{v}_n \mathbin{\&} \Phi(v_n, v_{n+1}, x_n) \mathbin{\&} \Phi(\overset{*}{v}_n, \overset{*}{v}_{n+1}, \overset{*}{x}_n)\right\}.$$

Z (62) wynika z łatwością $\{v_n = \overset{*}{v}_n \mathbin{\&} \Phi(v_n, v_{n+1}, x_n) \mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} \Phi(\overset{*}{v}_n, \overset{*}{v}_{n+1}, \overset{*}{x}_n) \rightarrow x_n = \overset{*}{x}_n \mathbin{\&} v_{n+1} = \overset{*}{v}_{n+1}\}$, a z tego $\left\{\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \overset{*}{x}_i \mathbin{\&}\right.$

$$\mathbin{\&} v_n = \overset{*}{v}_n \mathbin{\&} \Phi(v_n, v_{n+1}, x_n) \mathbin{\&} \Phi(\overset{*}{v}_n, \overset{*}{v}_{n+1}, \overset{*}{x}_n) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \overset{*}{x}_i \mathbin{\&}$$

$\left.\mathbin{\&} v_{n+1} = \overset{*}{v}_{n+1}\right\}$, co w połączeniu z (64) daje

$$\left\{v_1 = \overset{*}{v}_1 \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n} \Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \overset{*}{x}_i \mathbin{\&}\right.$$

$\left.\mathbin{\&} v_{n+1} = \overset{*}{v}_{n+1}\right\}$, czyli (63) dla $n+1$.

Nasz dowód indukcyjny został tym samym wykończony.

T w i e r d z e n i e 22. *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqq 2$ *prawdziwość wyrażenia*

$$(65)\qquad (y)(z)(x)(\overset{*}{x})\,[\Phi(x, y, z) \mathbin{\&} \Phi(\overset{*}{x}, y, z) \rightarrow x = \overset{*}{x}]$$

pociąga za sobą prawdziwość wyrażenia

$$(66)\quad (x_\rho)_1^{n-1}(v_n)(\overset{*}{x}_\rho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_n)(v_1)(\overset{*}{v}_1)\left\{\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i = \overset{*}{x}_i) \mathbin{\&} v_n = \overset{*}{v}_n \mathbin{\&}\right.\right.$$
$$\mathbin{\&} (Ev_\rho)_2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&}$$
$$\left.\left. \mathbin{\&} (E\overset{*}{v}_\rho)_2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i)\right] \rightarrow (v_1 = \overset{*}{v}_1)\right\}.$$

Wyrażenie (65) jest, jak łatwo przy uwzględnieniu reguły $x = \overset{*}{x} \mathbin{\&} f(\overset{*}{x}) \rightarrow f(x)$ widzieć, równoważne wyrażeniu

$$(67)\quad (z)(y)(\overset{*}{z})(\overset{*}{y})(x)(\overset{*}{x})\,[z = \overset{*}{z} \mathbin{\&} y = \overset{*}{y} \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \Phi(x, y, z) \mathbin{\&} \Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \overset{*}{z}) \rightarrow x = \overset{*}{x}],$$

zaś wyrażenie (66), na mocy równoważności $[(Ex) f(x) \rightarrow p] \sim$ $\sim (x)[f(x) \rightarrow p]$ (gdzie p nie zawiera zmiennej x) wyrażeniu

$$(68)\quad (x_\rho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\rho)_1^{n-1}(v_\rho)_1^n(\overset{*}{v}_\rho)_1^n\Big\{\Big[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i=\overset{*}{x}_i)\ \&\ v_n=\overset{*}{v}_n\ \&$$
$$\&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},\overset{*}{x}_i)\Big]\rightarrow(v_1=\overset{*}{v}_1)\Big\}.$$

Zamiast więc pokazać, że (65) pociąga (66) dla każdej liczby naturalnej $n\geq 2$, wystarczy pokazać, że (67) pociąga (68) dla $n\geq 2$. To ostatnie udowodnimy indukcją ze względu na n, przy czym dla uproszczenia rachunku znów posługiwać się będziemy zmiennymi rzeczywistymi.

Z (67) wynika przez zmianę zmiennych z łatwością wyrażenie

$$(x_1)(v_2)(\overset{*}{x}_1)(\overset{*}{v}_2)(v_1)(\overset{*}{v}_1)\,[x_1=\overset{*}{x}_1\ \&\ v_2=\overset{*}{v}_2\ \&$$
$$\&\ \Phi(v_1,v_2,x_1)\ \&\ \Phi(\overset{*}{v}_1,\overset{*}{v}_2,\overset{*}{x}_1)\rightarrow v_1=\overset{*}{v}_1],$$

a więc też (68) dla $n=2$. Załóżmy teraz, że (67) pociąga (68) dla pewnego n. Pod założeniem prawdziwości (67) zachodzi więc

$$(69)\quad \Big[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i=\overset{*}{x}_i)\ \&\ v_n=\overset{*}{v}_n\ \&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&$$
$$\&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},\overset{*}{x}_i)\Big]\rightarrow(v_1=\overset{*}{v}_1).$$

Z (67) wynika łatwo $[x_n=\overset{*}{x}_n\ \&\ v_{n+1}=\overset{*}{v}_{n+1}\ \&\ \Phi(v_n,v_{n+1},x_n)\ \&\ \Phi(\overset{*}{v}_n,\overset{*}{v}_{n+1},\overset{*}{x}_n)]\rightarrow v_n=\overset{*}{v}_n$, z czego na mocy reguły $(A\rightarrow B)\rightarrow\rightarrow(A\ \&\ C\rightarrow B\ \&\ C)$ uzyskuje się bez trudności wyrażenie

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i=\overset{*}{x}_i)\ \&\ v_{n+1}=\overset{*}{v}_{n+1}\ \&\ \sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&$$
$$\&\ \sum_{i=1}^{n}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},\overset{*}{x}_i)\Big]\rightarrow\sum_{i=1}^{n-1}(x_i=\overset{*}{x}_i)\ \&\ v_n=\overset{*}{v}_n\ \&$$
$$\&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i,\overset{*}{v}_{i+1},\overset{*}{x}_i),$$

które w połączeniu z (69) daje przez sylogizm wyrażenie

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i=\overset{*}{x}_i)\ \&\ v_{n+1}=\overset{*}{v}_{n+1}\ \&\ \sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&$$
$$\&\ \sum_{i=1}^{n}\Phi(\overset{*}{v},\overset{*}{v}_{i+1},\overset{*}{x}_i)\Big]\rightarrow(v_1=\overset{*}{v}_1),$$

czyli (68) dla $n+1$.

Twierdzenie 22 zostało więc w zupełności udowodnione.

Twierdzenie 23. *Jeśli funkcja logiczna* $\Phi(x, y, z)$ *odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny elementy* x *zbioru* $\mathfrak{J}$ *na pary* $[y, z]$ *elementów z* $\mathfrak{J}$, *wówczas funkcja logiczna* $(Ev_\rho)_2^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$ *odwzorowuje* (*dla* $n \geqq 2$) *w sposób jednojednoznaczny elementy* v_1 *zbioru* $\mathfrak{J}$ *na* n *członowe układy* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ *elementów z* $\mathfrak{J}$.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcja $(Ev_\rho)_2^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$ należała do jednojednoznacznego odwzorowania zbioru $\mathfrak{J}$ na n członowe układy elementów z $\mathfrak{J}$ jest by zachodziło, co następuje:

a) Do każdego elementu v_1 zbioru $\mathfrak{J}$ ma istnieć obraz $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$:

$$(v_1)(Ex_\rho)_1^{n-1}(Ev_\rho)_2^n\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right].$$

b) Do każdego n członowego układu $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ elementów z $\mathfrak{J}$ ma istnieć w odwzorowaniu odwrotnym obraz v_1:

$$(x_\rho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right].$$

c) Odwzorowanie ma być jednoznaczne:

$$(v_1)(\overset{*}{v}_1)(x_\rho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\rho)_1^{n-1}(v_n)(\overset{*}{v}_n)\Bigg\{\Bigg[(v_1 = \overset{*}{v}_1)\ \&$$

$$\&\ (Ev_\rho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\ \&$$

$$\&\ (E\overset{*}{v}_\rho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i)\Bigg] \rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_i = \overset{*}{x}_i)\ \&\ (v_n = \overset{*}{v}_n)\right)\Bigg\}.$$

d) Odwzorowanie odwrotne ma być jednoznaczne:

$$(x_\rho)_1^{n-1}(v_n)(\overset{*}{x}_\rho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_n)(v_1)(\overset{*}{v}_1)\Bigg\{\Bigg[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i = \overset{*}{x}_i)\ \&$$

$$\&\ v_n = \overset{*}{v}_n\ \&\ (Ev_\rho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\ \&$$

$$\&\ (E\overset{*}{v}_\rho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i)\Bigg] \rightarrow (v_1 = \overset{*}{v}_1)\Bigg\}.$$

Gdy funkcja $\Phi(x, y, z)$ odwzorowuje w sposób jedno-jednoznaczny elementy x zbioru $\mathfrak{I}$ na pary $[y, z]$ elementów z $\mathfrak{I}$, wówczas spełnione są następujące warunki:

a*) Do każdego elementu x zbioru $\mathfrak{I}$ istnieje obraz:

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, z, y).$$

b*) Do każdej pary $[y, z]$ elementów z $\mathfrak{I}$ istnieje w odwzorowaniu odwrotnym obraz:

$$(x)(y)(Ez)\,\Phi(z, y, x).$$

c*) Odwzorowanie jest jednoznaczne:

$$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[\Phi(x, y, z)\ \&\ \Phi(x, \overset{*}{y}, \overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y}\ \&\ z = \overset{*}{z}].$$

d*) Odwzorowanie odwrotne jest jednoznaczne:

$$(y)(z)(x)(\overset{*}{x})[\Phi(x, y, z)\ \&\ \Phi(\overset{*}{x}, y, z) \rightarrow x = \overset{*}{x}].$$

Na mocy twierdzeń 19, 20, 21, 22 wynika jednak, że a*) pociąga za sobą a), b*) pociąga za sobą b), c*) pociąga za sobą c), d*) pociąga za sobą d), co dowodzi prawdziwości twierdzenia 23.

T w i e r d z e n i e 24. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dana funkcja logiczna* $\Phi(x, y, z)$ *dała się w zbiorze* $\mathfrak{I}$ *przedstawić w postaci* $R_1(x, y)\ \&\ R_2(x, z)$ *jest zachodzenie* $(x)(y)(z)(u)(v)[\Phi(x, y, u)\ \&\ \Phi(x, v, z) \rightarrow \Phi(x, y, z)]$ *w zbiorze* $\mathfrak{I}$.

Warunek ten jest konieczny, gdyż zachodzi stale

$$(x)(y)(z)(u)(v)[R_1(x, y)\ \&\ R_2(x, u)\ \&\ R_1(x, v)\ \&\ R_2(x, z) \rightarrow R_1(x, y)\ \&\ R_2(x, z)].$$

Warunek ten jest jednak też dostateczny, gdyż przez dwukrotne zastosowanie reguły $(x)[f(x) \rightarrow p] \rightarrow [(Ex) f(x) \rightarrow p]$ uzyskujemy z niego wyrażenie $(x)(y)(z)[(Eu)\,\Phi(x, y, u)\ \&\ (Ev)\,\Phi(x, v, z) \rightarrow \Phi(x, y, z)]$, które w połączeniu z wyrażeniem tautologicznym $(x)(y)(z)[\Phi(x, y, z) \rightarrow (Eu)\,\Phi(x, y, u)\ \&\ (Ev)\,\Phi(x, v, z)]$ daje równoważność $(x)(y)(z)[\Phi(x, y, z) \sim (Eu)\,\Phi(x, y, u)\ \&\ (Ev)\,\Phi(x, v, z)]$. Ta ostatnia zaś równoważność dowodzi, że zajdzie $\Phi(x, y, z) \equiv R_1(x, y)\ \&\ R_2(x, z)$ skoro położymy $R_1(x, y) \equiv (Eu)\,\Phi(x, y, u)$ i $R_2(x, z) \equiv (Ev)\,\Phi(x, v, z)$.

Z twierdzenia 24 wynika w szczególności ścisły dowód na przedstawialność każdej funkcji $\Phi(x, y, z)$, która w sposób jednoznaczny (nie koniecznie jednojednoznaczny!) odwzorowuje elementy x zbioru $\mathfrak{Z}$ na pary $[y, z]$ elementów z $\mathfrak{Z}$, w postaci $R_1(x,y) \mathbin{\&} R_2(x,z)$[65]. Gdy bowiem $[y, u]$ i $[v, z]$ są równocześnie obrazami elementu x, to wobec założonej jednoznaczności odwzorowania musi być $y = v$ i $u = z$, z czego wynika, że $[y, z]$ jest również obrazem elementu x, a tym samym warunek z twierdzenia 24 jest spełniony.

T w i e r d z e n i e 25. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcja logiczna* $\Phi(x, y, z)$ *dała się w zbiorze* $\mathfrak{Z}$ *przedstawić w postaci* $R_1(x, y) \vee R_2(x, z)$ *jest zachodzenie* $(x)(y)(z)(u)(v)[\Phi(x, y, z) \to \Phi(x, y, u) \vee \Phi(x, v, z)]$ *w zbiorze* $\mathfrak{Z}$.

Równoważność $\Phi(x, y, z) \equiv R_1(x, y) \vee R_2(x, z)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy równoważność $\overline{\Phi}(x,y,z) \equiv \overline{R}_1(x,y) \mathbin{\&} \overline{R}_2(x, z)$. Warunkiem jednak koniecznym i dostatecznym na to, aby ta ostatnia równoważność zachodziła przy pewnych R_1 i R_2 jest, na podstawie twierdzenia 24, zachodzenie, w rozważanym zbiorze, wyrażenia $(x)(y)(z)(u)(v)[\overline{\Phi}(x, y, u) \mathbin{\&} \overline{\Phi}(x, v, z) \to \overline{\Phi}(x, y, z)]$, które jest jednak równoważne wyrażeniu $(x)(y)(z)(u)(v)[\Phi(x,y,z) \to \Phi(x,y,u) \vee \Phi(x,v,z)]$.

Ponieważ wyrażenie $R_1(x, y) \vee R_2(x, z)$ jest równoważne wyrażeniom $(\overline{R}_1(x, y) \to R_2(x, z))$, $(\overline{R}_2(x, z) \to R_1(x, y))$, więc twierdzenie 25 dostarcza również kryterium na przedstawialność danej funkcji $\Phi(x, y, z)$ w postaci $(R_1(x, y) \to R_2(x, z))$ względnie też w postaci $(R_1(x, z) \to R_2(x, y))$.

T w i e r d z e n i e 26. *Jeśli funkcja logiczna* $R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z)$ *odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny elementy* x *zbioru* $\mathfrak{Z}$ *na pary* $[y, z]$ *elementów z* $\mathfrak{Z}$, *wówczas funkcja logiczna* $(Ev_\rho)_2^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2(v_i, x_i))\right]$ *odwzorowuje (dla* $n > 1$) *w sposób jednojednoznaczny elementy* v_1 *zbioru* $\mathfrak{Z}$ *na* n *członowe układy* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ *elementów z* $\mathfrak{Z}$.

[65] Ta ostatnia przedstawialność jest intuicyjnie jasna, gdyż zamiast mówić: „$[y,z]$ jest obrazem elementu x" można mówić: „y jest pierwszym członem pary będącej obrazem elementu x o r a z z jest drugim członem pary będącej obrazem elementu x". Ścisły dowód jest jednak konieczny.

Twierdzenie 26 uzyskujemy bezpośrednio z twierdzenia 23, kładąc tam $R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z)$ za $\Phi(x, y, z)$.

T w i e r d z e n i e 27. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby się* $n+1$ *członowa funkcja logiczna* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *dała w zbiorze* $\mathfrak{I}$ *przedstawić w postaci* $R_1(x, x_1) \mathbin{\&} R_2(x, x_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} R_n(x, x_n)$ *jest zachodzenie wyrażenia*

$$(x)(\overset{1}{x_\varrho})_1^n(\overset{2}{x_\varrho})_1^n\ldots(\overset{n}{x_\varrho})_1^n[R(x, \overset{1}{x_1}, \overset{1}{x_2}, \ldots, \overset{1}{x_n}) \mathbin{\&} R(x, \overset{2}{x_1}, \overset{2}{x_2}, \ldots, \overset{2}{x_n}) \mathbin{\&} \ldots$$
$$\ldots \mathbin{\&} R(x, \overset{n}{x_1}, \overset{n}{x_2}, \ldots, \overset{n}{x_n}) \rightarrow R(x, \overset{1}{x_1}, \overset{2}{x_2}, \ldots, \overset{n}{x_n})].$$

Warunek jest konieczny gdyż, jak się łatwo można przekonać, wyrażenie

$$(x)(\overset{1}{x_\varrho})_1^n(\overset{2}{x_\varrho})_1^n\ldots(\overset{n}{x_\varrho})_1^n\Big[\sum_{i=1}^{n} R_i(x, \overset{1}{x_i}) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n} R_i(x, \overset{2}{x_i}) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n} R_i(x, \overset{n}{x_i}) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} R_i(x, \overset{i}{x_i})\Big]$$

jest tautologiczne.

Jeśli przez $(Ex_\varrho)\overset{n}{\underset{1}{\dotplus}}{}^{i}$ oznaczać będziemy (dla $i = 1, 2, \ldots, n$) układ $n-1$ kwantyfikatorów szczegółowych, który otrzymujemy z układu $(Ex_\varrho)_1^n$ przez wykreślenie kwantyfikatora (Ex_i), wówczas stosując n^2-n razy regułę $(x)[f(x) \rightarrow p] \rightarrow [(Ex)f(x) \rightarrow p]$ do wyrażenia

$$(x)(\overset{1}{x_\varrho})_1^n(\overset{2}{x_\varrho})_1^n\ldots(\overset{n}{x_\varrho})_1^n[R(x, \overset{1}{x_1}, \overset{1}{x_2}, \ldots, \overset{1}{x_n}) \mathbin{\&} R(x, \overset{2}{x_1}, \overset{2}{x_2}, \ldots, \overset{2}{x_n}) \mathbin{\&} \ldots$$
$$\ldots \mathbin{\&} R(x, \overset{n}{x_1}, \overset{n}{x_2}, \ldots, \overset{n}{x_n}) \rightarrow R(x, \overset{1}{x_1}, \overset{2}{x_2}, \ldots, \overset{n}{x_n})],$$

otrzymujemy z łatwością wyrażenie

$$(x)(\overset{1}{x_1})(\overset{2}{x_2})\ldots(\overset{n}{x_n})[(E\overset{1}{x_\varrho})\overset{n}{\underset{1}{\dotplus}}{}^{1} R(x, \overset{1}{x_1}, \overset{1}{x_2}, \ldots, \overset{1}{x_n}) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (E\overset{2}{x_\varrho})\overset{n}{\underset{1}{\dotplus}}{}^{2} R(x, \overset{2}{x_1}, \overset{2}{x_2}, \ldots, \overset{2}{x_n}) \mathbin{\&} \ldots$$
$$\ldots \mathbin{\&} (E\overset{n}{x_\varrho})\overset{n}{\underset{1}{\dotplus}}{}^{n} R(x, \overset{n}{x_1}, \overset{n}{x_2}, \ldots, \overset{n}{x_n}) \rightarrow R(x, \overset{1}{x_1}, \overset{2}{x_2}, \ldots, \overset{n}{x_n})],$$

podczas gdy odwrócenie tego wyrażenia

$$(x)(\overset{1}{x_1})(\overset{2}{x_2})\ldots(\overset{n}{x_n})[R(x, \overset{1}{x_1}, \overset{2}{x_2}, \ldots, \overset{n}{x_n}) \rightarrow (E\overset{1}{x_\varrho})\overset{n}{\underset{1}{\dotplus}}{}^{1} R(x, \overset{1}{x_1}, \overset{1}{x_2}, \ldots, \overset{1}{x_n}) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (E\overset{2}{x_\varrho})\overset{n}{\underset{1}{\dotplus}}{}^{2} R(x, \overset{2}{x_1}, \overset{2}{x_2}, \ldots, \overset{2}{x_n}) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} (E\overset{n}{x_\varrho})\overset{n}{\underset{1}{\dotplus}}{}^{n} R(x, \overset{n}{x_1}, \overset{n}{x_2}, \ldots, \overset{n}{x_n})]$$

jest, jak łatwo widzieć, wyrażeniem tautologicznym. Definiując funkcje logiczne $R_1(x, y), R_2(x, y), \ldots, R_n(x, y)$ przez równoważności $R_i(x, \overset{i}{x}_i) \equiv (E\overset{i}{x}_\rho)\overset{n}{\underset{1}{\neq}}{}_i\, R(x, \overset{i}{x}_1, \overset{i}{x}_2, \ldots, \overset{i}{x}_n)$ (dla $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$) mamy

$$(x)(\overset{1}{x}_1)(\overset{2}{x}_2)\ldots(\overset{n}{x}_n)\,[R(x, \overset{1}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n) \sim R_1(x, \overset{1}{x}_1) \mathbin{\&} R_2(x, \overset{2}{x}_2) \mathbin{\&} \ldots$$
$$\ldots \mathbin{\&} R_n(x, \overset{n}{x}_n)],$$

czyli równoważność $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv R_1(x, x_1) \mathbin{\&} R_2(x, x_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} R_n(x, x_n)$.

Twierdzenie 24 jest, jak łatwo widzieć, szczególnym przypadkiem twierdzenia 27 dla $n = 2$.

T w i e r d z e n i e 28. *Każda funkcja logiczna $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, która w sposób jednoznaczny (a więc tym bardziej gdy w jednojednoznaczny) odwzorowuje elementy x zbioru $\mathfrak{J}$ na n członowe układy $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ elementów z $\mathfrak{J}$, daje się przedstawić w postaci $R_1(x, x_1) \mathbin{\&} R_2(x, x_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} R_n(x, x_n)$.*

Ścisły dowód tego, intuicyjnie jasnego, twierdzenia otrzymujemy z twierdzenia 27. Gdy układy $[\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \ldots, \overset{1}{x}_n], [\overset{2}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots$ $\ldots, \overset{2}{x}_n], \ldots, [\overset{n}{x}_1, \overset{n}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n]$ są równocześnie obrazami elementu x, w odwzorowaniu przy pomocy funkcji $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wówczas z powodu założonej jednoznaczności tego odwzorowania, wszystkie te układy muszą być identyczne, czyli zachodzi $\overset{k}{x}_i = \overset{l}{x}_i$ dla $i, k, l = 1, 2, \ldots, n$, a więc w szczególności $\overset{1}{x}_i = \overset{i}{x}_i$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$, co dowodzi że układ $[\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \ldots$ $\ldots, \overset{1}{x}_n]$ jest identyczny z układem $[\overset{1}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n]$. Układ $[\overset{1}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n]$ jest więc także obrazem elementu x, czyli warunek z twierdzenia 27 jest spełniony.

T w i e r d z e n i e 29. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby się $n + 1$ członowa funkcja logiczna $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dała w zbiorze $\mathfrak{J}$ przedstawić w postaci $R_1(x, x_1) \vee R_2(x, x_2) \vee \ldots \vee R_n(x, x_n)$ jest prawdziwość następującego wyrażenia w zbiorze $\mathfrak{J}$:*

$$(x)(\overset{1}{x}_\rho)_1^n(\overset{2}{x}_\rho)_1^n\ldots(\overset{n}{x}_\rho)_1^n\,[R(x, \overset{1}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n) \rightarrow R(x, \overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \ldots, \overset{1}{x}_n) \vee$$
$$\vee R(x, \overset{2}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{2}{x}_n) \vee \ldots \vee R(x, \overset{n}{x}_1, \overset{n}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n)].$$

Równoważność $\overline{R}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \overline{R}_1(x, x_1) \,\&\, \overline{R}_2(x, x_2) \,\&$ $\&\ldots\&\, \overline{R}_n(x, x_n)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy równoważność $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv R_1(x, x_1) \vee R_2(x, x_2) \vee \ldots \vee R_n(x, x_n)$ zachodzi. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na zachodzenie, przy pewnych funkcjach $R_1(x, x_1), R_2(x, x_2), \ldots, R_n(x, x_n)$, pierwszej równoważności jest, na podstawie twierdzenia 27, zachodzenie

$$(x)(\overset{1}{x}_\rho)_1^n(\overset{2}{x}_\rho)_1^n\ldots(\overset{n}{x}_\rho)_1^n[\overline{R}(x, \overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \ldots, \overset{1}{x}_n) \,\&\, \overline{R}(x, \overset{2}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{2}{x}_n) \,\&\ldots$$
$$\ldots\&\, \overline{R}(x, \overset{n}{x}_1, \overset{n}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n) \rightarrow \overline{R}(x, \overset{1}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n)],$$

co jest jednak równoważne zachodzeniu wyrażenia

$$(x)(\overset{1}{x}_\rho)_1^n(\overset{2}{x}_\rho)_1^n\ldots(\overset{n}{x}_\rho)_1^n[R(x, \overset{1}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n) \rightarrow R(x, \overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \ldots, \overset{1}{x}_n) \vee$$
$$\vee R(x, \overset{2}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{2}{x}_n) \vee \ldots \vee R(x, \overset{n}{x}_1, \overset{n}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n)],$$ c. b. d. o.

Twierdzenie 30. *Jeśli dla funkcji logicznej* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *zdefiniowanej w zbiorze* $\mathfrak{S}$ *następujące dwa warunki są spełnione*:

a) $$(x)(x_\rho)_1^n(y_\rho)_1^n[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&$$
$$\&\, R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i = y_i)],$$

b) $$(x_\rho)_1^n(Ex)R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$ [66]

wówczas, przy stosownej funkcji $f(x)$, *każda* n *członowa funkcja logiczna* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *daje się przedstawić równocześnie w postaci* $(Ex)[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ *oraz w postaci* $(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$, *tzn., że przy stosownej funkcji* $f(x)$ (*a mianowicie przy* $f(x) \equiv (Ey_\rho)_1^n[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ *oraz przy* $f(x) \equiv (y_\rho)_1^n[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$) *zachodzi podwójna równoważność*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv$$
$$\equiv (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)].$$

Kładąc $f(x) \equiv (Ey_\rho)_1^n[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ mamy przede wszystkim stale $[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \sim$

[66] Warunki a) i b) dają się, jak łatwo widzieć, wtedy i tylko wtedy spełnić w zbiorze $\mathfrak{S}$ przez jakąś funkcję $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gdy moc $\mathfrak{m}$ tego zbioru spełnia równanie $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$, które dla $n > 1$ jest równoważne równaniu $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.

$\sim \{(Ey_p)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& F(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \& R(x, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)\}$, na mocy a) zachodzi jednak, jak łatwo widzieć, stale

$$\{(Ey_p)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& F(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \& \\ \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \sim \{R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Obie otrzymane równoważności dają nam natychmiast równoważność

$[f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \sim \{R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& F(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)\}$, z której otrzymujemy łatwo $(Ex)[f(x) \& R(x, x_1,$ $x_2, \ldots, x_n)] \sim \{(Ex) R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$. Ponieważ jednak na mocy b) $(Ex) R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi, z ostatniej równoważności wynika łatwo

$$(70) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

Z wyrażenia tautologicznego $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& F(x_1,$ $x_2, \ldots, x_n) \to (Ey_p)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ uzyskujemy $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)$, a z tego $F(x_1,$ $x_2, \ldots, x_n) \to [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)]$, które daje natychmiast

$$(71) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)].$$

Na mocy a) zachodzi dalej $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& R(x, y_1,$ $y_2, \ldots, y_n) \& F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a więc także $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& (Ey_p)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& F(y_1, y_2, \ldots,$ $y_n)] \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, czyli $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& f(x) \to F(x_1,$ $x_2, \ldots, x_n)$, z czego na mocy logiki zdań, wynika łatwo $R(x,$ $x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \{[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)] \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$. Z ostatniego wyrażenia uzyskuje się wyrażenie $(Ex) R(x, x_1,$ $x_2, \ldots, x_n) \to (Ex)\{[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)] \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, z którego, ponieważ na mocy b) zachodzi $(Ex) R(x, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$, wynika $(Ex)\{[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)] \to F(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)\}$. Z tego wyrażenia uzyskujemy, przez zastosowanie reguły $(Ex)[f(x) \to p] \to [(x) f(x) \to p]$, $(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to$ $\to f(x)] \to F(x_1 x_2, \ldots, x_n)$, co w połączeniu z (71) daje równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)]$. Ta ostatnia równoważność wraz z równoważnością (70) dowodzi, że dla $f(x) \equiv (Ey_p)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$, pod założeniami a) i b), zachodzi istotnie podwójna równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv (x)[R(x, x_1,$ $x_2, \ldots, x_n) \to f(x)]$. Kładąc tu $\overline{f}(x)$ za $f(x)$ oraz $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ za $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, otrzymujemy dla $\overline{f}(x) \equiv (Ey_p)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots$

$\ldots, y_n) \,\&\, \bar{F}(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \, \bar{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[\bar{f}(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \bar{f}(x)]$, z czego wynika łatwo, że podwójna równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ zachodzi także dla $f(x) \equiv (y_p)_1^n \,[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$, a tym samym twierdzenie 30 zostało w zupełności udowodnione.

Jak widzieliśmy, to przy założeniach a) i b) dla każdej funkcji logicznej $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ podwójna równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ posiada co najmniej dwa rozwiązania na $f(x)$, gdyż funkcje $(Ey_p)_1^n \,[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ i $(y_p)_1^n \,[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ nie są na ogół identyczne. Ciekawym jest jednak fakt, że prócz tych dwóch rozwiązań, rozważana podwójna równoważność, a więc tym bardziej każda pojedyncza $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ i $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$, posiada jeszcze na ogół nieskończenie wiele dalszych rozwiązań, które tworzą zbiór na ogół mocy $2^{\mathfrak{n}}$, gdzie $\mathfrak{n}$ oznacza moc niewiększą od mocy zbioru $\mathfrak{J}$, w którym rozważamy funkcje $F(x_1, x_2, \ldots, x_n), R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Gdy są dane funkcje $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ w zbiorze $\mathfrak{J}$, przy czym zakładamy, że warunki a) i b) są spełnione, wówczas zbiór $\mathfrak{J}$ można rozbić na trzy zbiory $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ bez elementów wspólnych, zaliczając element dany x do zbioru $\mathfrak{J}_1$, wzgl. $\mathfrak{J}_2$, wzgl. $\mathfrak{J}_3$ zależnie od tego czy $(Ex_p)_1^n \,[F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, wzgl. $(Ex_p)_1^n \,[\bar{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, wzgl. $(x_p)_1^n \,\bar{R}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi. Jeśli teraz $f(x)$ oznacza dowolne rozwiązanie podwójnej równoważności $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$, wówczas, jak łatwo sprawdzić, dla elementów x zbioru $\mathfrak{J}_1$ musi zajść $f(x)$, dla elementów x zbioru $\mathfrak{J}_2$ musi zajść $\bar{f}(x)$. Na zbiorze $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$ funkcja $f(x)$ jest więc jednoznacznie określona, zaś co do wartości funkcji $f(x)$ na zbiorze $\mathfrak{J}_3$ nic wywnioskować nie można. Definiując odwrotnie funkcję $f(x)$ przypisując jej dla elementów z $\mathfrak{J}_1$ prawdę, dla elementów z $\mathfrak{J}_2$ fałsz, zaś dla elementów z $\mathfrak{J}_3$ zupełnie dowolnie prawdę lub fałsz, otrzymujemy, jak łatwo widzieć, za każdym razem rozwiązanie rozważanej podwójnej równoważności. Istnienie więcej rozwiązań tej podwójnej równoważności polega więc na zupełnej swobodzie w określeniu wartości funkcji $f(x)$ na zbiorze $\mathfrak{J}_3$. Ponieważ zbiór $\mathfrak{J}_3$ może być nieskończony i to nawet mocy $\mathfrak{m}$, gdzie $\mathfrak{m}$ jest mocą całego zbioru $\mathfrak{J}$, a zbiór wszystkich różnych funkcji logicznych $f(x)$ swobodnie określonych na zbiorze mocy $\mathfrak{m}$ jest mocy $2^{\mathfrak{m}}$, więc zbiór wszystkich rozwiązań rozpatrywanej podwójnej równoważności może być nieskończony i to nawet mocy $2^{\mathfrak{m}}$.

Przykładami można pokazać, że ta okoliczność ostatnia istotnie dla każdej liczby pozaskończonej $\mathfrak{m}$ i każdej liczby naturalnej n ma miejsce. Wśród tych rozwiązań wyróżniają się dwa: jedno odpowiadające przypisywaniu każdemu elementowi z $\mathfrak{J}_3$ wartości „fałsz", zaś drugie odpowiadające przypisywaniu każdemu elementowi z $\mathfrak{J}_3$ wartości „prawda". Pierwsze wyróżnione rozwiązanie jest, jak łatwo sprawdzić, identyczne z $(Ey_p)_1^n\,[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$, drugie zaś identyczne z $(y_p)_1^n\,[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n)]$. W przypadku, gdy zbiór $\mathfrak{J}_3$ jest pusty, co wtedy i tylko wtedy ma miejsce, gdy $(x)(Ex_p)_1^n\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi, nie ma już żadnej swobody przy definiowaniu funkcji $f(x)$ i przeto wszystkie rozwiązania tej podwójnej równoważności się zlewają. W szczególności zachodzi więc wtedy równoważność $(Ey_p)_1^n\,[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, F(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv$ $\equiv (y_p)_1^n\,[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$. Tyle co do podwójnej równoważności. Co się tyczy pojedynczych równoważności $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ i $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$, to mają one tym bardziej na ogół nieskończenie wiele rozwiązań, gdyż każde rozwiązanie podwójnej równoważności jest oczywiście rozwiązaniem każdej pojedynczej. Każda pojedyncza równoważność posiada na ogół jednak jeszcze inne rozwiązania różne od rozpatrywanych wyżej rozwiązań wspólnych, przy czym na ogół nieskończenie wiele i to także mocy $2^{\mathfrak{m}}$. Rozważmy najprzód równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&$ $\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$. Jeśli $f(x)$ jest jakimś rozwiązaniem powyższej równoważności, wówczas na zbiorze $\mathfrak{J}_2$ $f(x)$ przyjmuje stale wartość „fałsz". Z $(Ey_p)_1^n\,[\overline{F}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, R(x, y_1,$ $y_2, \ldots, y_n)]$ wynika bowiem najprzód $(Ey_p)_1^n\,[(z)\,\{R(z, y_1, y_2, \ldots$

$\ldots, y_n) \rightarrow \overline{f}(z)\} \mathbin{\&} R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$, a z tego $\overline{f}(x)$. O zachowaniu się funkcji $f(x)$ na zbiorze $\mathfrak{I}_3$ nic wywnioskować nie można, jak to już z rozważań nad podwójną równoważnością wynika. Co do zachowania się na zbiorze $\mathfrak{I}_1$, to rozważmy najprzód następującą relację $(Ex_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, którą dla skrócenia oznaczać będziemy przez $G(x, y)$. Relacja $G(x, y)$ jest na zbiorze $\mathfrak{I}_1$ zwrotna, symetryczna i przechodnia. Ponieważ zbiory $\mathfrak{I}_1$ i $\mathfrak{I}_3$ nie mają elementów wspólnych, przeto dla każdego elementu x zbioru $\mathfrak{I}_1$ zachodzi $(x_p)_1^n \overline{\overline{R}}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, z czego wynika $(Ex_p)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(Ex_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, czyli $G(x, x)$. Symetryczność relacji $G(x, y)$ wynika z komutatywności koniunkcji logicznej, zaś z $(Ex_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ oraz $(Ey_p)_1^n [R(y, y_1, y_2, \ldots, y_n) \mathbin{\&} R(z, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ wynika, na mocy a), łatwo $(Ex_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(z, x_1 x_2, \ldots, x_n)]$, a tym została i przechodniość udowodniona. Relacja $G(x, y)$ rozbija więc zbiór $\mathfrak{I}_1$ na klasy bez elementów wspólnych i takie, że dwa dowolnie wzięte elementy z jednej i tej samej klasy spełniają stale $G(x, y)$, zaś dla elementów x i y wziętych z dwóch różnych klas $G(x, y)$ nie zachodzi. Zbiór tych klas oznaczmy przez Ω_1. O funkcji $f(x)$ możemy teraz udowodnić, że istnieje podzbiór $\mathfrak{K}_1$ zbioru $\mathfrak{I}_1$, który z każdą klasą będącą elementem zbioru Ω_1 ma element wspólny, przy czym na zbiorze $\mathfrak{K}_1$ stale $f(x)$ jest prawdziwe. Weźmy jakąś klasę będącą elementem zbioru Ω_1 pod rozwagę: y niech będzie dowolnym jej elementem. Ponieważ y należy do zbioru $\mathfrak{I}_1$ więc zachodzi $(Ex_p)_1^n [F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, co w połączeniu z równoważnością $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ex)(f(x) \mathbin{\&} R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n))$ daje przede wszystkim $(Ex_p)_1^n [(Ex)(f(x) \mathbin{\&} R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, które daje się przekształcić łatwo w $(Ex)(f(x) \mathbin{\&} (Ex_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)])$, czyli w $(Ex)(f(x) \mathbin{\&} G(x, y))$. W każdej klasie będącej elementem zbioru Ω_1 istnieją więc elementy x, dla których $f(x)$ zachodzi, a tym samym istnieje zbiór $\mathfrak{K}_1$, o żądanych własnościach. — Jeśli odwrotnie na $\mathfrak{K}_1$ weźmiemy dowolny podzbiór zbioru $\mathfrak{I}_1$, posiadający z każdą klasą będącą elementem zbioru Ω_1 element wspólny i funkcję $f(x)$ zdefiniujemy jak następuje: dla elementów zbioru $\mathfrak{K}_1$ $f(x)$ przypiszemy prawdę, dla pozostałych elementów zbioru $\mathfrak{J}_1$ i dla wszystkich elementów zbioru $\mathfrak{J}_3$ przypiszemy dowolne wartości, zaś dla elementów zbioru $\mathfrak{J}_2$ $f(x)$ przypiszemy fałsz, wówczas każda tak zdefiniowana funkcja $f(x)$ czyni zadość równoważności $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$ $\equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$. Gdy $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi, wówczas dla elementów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ znajdujemy przede wszystkim element y taki, że $R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi, co na mocy b) jest możliwe. Element y wpada, jak pokażemy, do klasy $\mathfrak{J}_1$. Z $R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wynika $\overline{(x_p)_1^n\, \overline{R}(y, x_1, x_2, \ldots}$ $\ldots, x_n)$, co dowodzi, że y nie wpada do $\mathfrak{J}_3$. Do klasy $\mathfrak{J}_2$ y także należeć nie może, gdyż z $(Ey_p)_1^n\,[\overline{F}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&$ $\& \,R(y, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ oraz $R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wynika, na mocy a), łatwo $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. W zbiorze Ω_1 istnieje więc klasa, do której y wpada. Niech x będzie elementem wspólnym tej klasie i zbiorowi $\mathfrak{K}_1$; zachodzi więc $f(x)$ i $G(x, y)$. Z $G(x, y)$, czyli z $(Ey_p)_1^n\,[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, R(y, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$, i z $R(y,$ $x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wynika jednak, na mocy a), $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, co w połączeniu z $f(x)$ daje wreszcie $(Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1,$ $x_2, \ldots, x_n)]$. Załóżmy odwrotnie, że dla pewnego x $f(x) \,\&$ $\& \,R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi. Element x nie należy do klasy $\mathfrak{J}_3$, gdyż z $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wynika $\overline{(x_p)_1^n\, \overline{R}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)}$. Z $f(x)$ wynika, że x także do $\mathfrak{J}_2$ nie należy, gdyż dla każdego elementu z $\mathfrak{J}_2$ zachodzi $\overline{f}(x)$. Element x należy przeto do $\mathfrak{J}_1$, z czego wynika że $(Ey_p)_1^n\,[F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, R(x, y_1,$ $y_2, \ldots, y_n)]$ zachodzi, co w połączeniu z $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i a) daje łatwo $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Funkcja $f(x)$ spełnia więc istotnie równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)]$. Struktura wszystkich rozwiązań równoważności tej została więc w zupełności odkryta. Ponieważ w obiorze zbioru $\mathfrak{K}_1$ istnieje swoboda, przy czym na ogół na nieskończenie wiele sposobów, tworzących nawet mnogość mocy $2^{\mathfrak{m}}$, można obrać zbiór $\mathfrak{K}_1$, przeto równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$ $\equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ posiada prócz rozwiązań podwójnej równoważności $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x,$ $x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ jeszcze na ogół nieskończenie wiele innych rozwiązań.

Zajmiemy się teraz zbadaniem struktury wszystkich rozwiązań równoważności $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$. Jeśli $f(x)$ jest jakimś rozwiązaniem tej równoważności, wówczas na zbiorze $\mathfrak{J}_1$ $f(x)$ stale jest prawdziwe. Z równoważności $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ i z $(Ex_\rho)_1^n$ $[F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ wynika bowiem najprzód $(Ex_\rho)_1^n\,[(z)\,(R(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(z)) \mathbin{\&} R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, a z tego łatwo $f(x)$. O zachowaniu się funkcji $f(x)$ na zbiorze $\mathfrak{J}_3$ nic wywnioskować nie można, jak to już z poprzednich rozważań wynika. Pozostaje jeszcze zbiór $\mathfrak{J}_2$. Relacja $(Ex_\rho)_1^n$ $[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, którą oznaczyliśmy przez $G(x, y)$ jest również na zbiorze $\mathfrak{J}_2$ zwrotna, symetryczna i przechodnia (symetryczną i przechodnią jest ona na całym zbiorze $\mathfrak{J}$, zwrotną zaś tylko na zbiorze $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$). Zbiór $\mathfrak{J}_2$ rozpada się znowu na klasy o wiadomych własnościach. Zbiór tych klas oznaczmy przez Ω_2. Twierdzimy, że istnieje podzbiór $\mathfrak{K}_2$ zbioru $\mathfrak{J}_2$, który z każdą klasą należącą do Ω_2 posiada element wspólny, na którym $f(x)$ jest stale fałszywa. Niech y będzie dowolnym elementem dowolnej klasy będącej elementem zbioru Ω_2. Ponieważ y należy do $\mathfrak{J}_2$, więc zachodzi $(Ex_\rho)_1^n$ $[\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, co w połączeniu z równoważnością $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ daje przede wszystkim $(Ex_\rho)_1^n\,[(Ex)\,(R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} \overline{f}(x)) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, które daje się przekształcić w $(Ex)\,(\overline{f}(x) \mathbin{\&} (Ex_\rho)_1^n\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)])$, czyli w (Ex) $(\overline{f}(x) \mathbin{\&} G(x, y))$. W każdej klasie będącej elementem zbioru Ω_2 istnieje więc element x, dla którego $\overline{f}(x)$ zachodzi, a tym samym istnieje zbiór $\mathfrak{K}_2$ o żądanych własnościach. — Jeśli odwrotnie na $\mathfrak{K}_2$ weźmiemy dowolny podzbiór zbioru $\mathfrak{J}_2$, który z każdą klasą będącą elementem zbioru Ω_2 posiada element wspólny i funkcję $f(x)$ zdefiniujemy, przypisując jej na zbiorze $\mathfrak{K}_2$ „fałsz“, na zbiorze $\mathfrak{J}_3$ i na pozostałej części zbioru $\mathfrak{J}_2$ przypisując jej dowolne wartości, zaś na zbiorze $\mathfrak{J}_1$ przypisując jej „prawdę“, wówczas każda tak zdefiniowana funkcja $f(x)$ czyni zadość równoważności $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$ $\equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$. Jeśli dla elementów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz x $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzą, wówczas i $f(x)$ zajść musi. Element x nie należy bowiem do $\mathfrak{J}_3$, gdyż z $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wynika $\overline{(x_p)_1^n \overline{R}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, nie należy też do $\mathfrak{J}_2$, gdyż z $(Ey_p)_1^n [\overline{F}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ i z $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wynika, na mocy a), łatwo $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Element x należy więc do $\mathfrak{J}_1$, z czego wynika, ponieważ funkcja $f(x)$ na zbiorze $\mathfrak{J}_1$, przyjmuje tylko „prawdę", że $f(x)$ zachodzi. Załóżmy teraz, że dla pewnych elementów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi $(x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$. Znajdujemy przede wszystkim element y taki, że $R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi, co jest możliwe na mocy b). Z $R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wynika $\overline{(x_p)_1^n \overline{R}(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, co dowodzi, że y nie jest elementem zbioru $\mathfrak{J}_3$. Załóżmy na chwilę, że y jest elementem zbioru $\mathfrak{J}_2$, czyli że wpada do jakiejś klasy zbioru Ω_2, której wspólny element ze zbiorem $\mathfrak{K}_2$ oznaczmy przez x. Zachodzi więc $(Ey_p)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(y, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$, co w połączeniu z $R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ daje na mocy a) $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, z czego na mocy $(x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$, wynika $f(x)$, a więc sprzeczność, gdyż na zbiorze $\mathfrak{K}_2$ funkcja $f(x)$ „prawdy" nie przyjmuje. Element y jest więc elementem zbioru $\mathfrak{J}_1$, czyli że $(Ey_p)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(y, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ zachodzi, co w połączeniu z $R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ daje na mocy a) łatwo $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Funkcja $f(x)$ spełnia więc istotnie równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$.

Badanie rozwiązań równoważności $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ możnaby również sprowadzić do badania równoważności typu przeciwnego przez przejście do $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& \overline{f}(x)]$. Przy takim przejściu zbiory $\mathfrak{J}_1$ i $\mathfrak{J}_2$ jako też wartość „prawda" i „fałsz" zamieniają swe role.

A teraz chcemy pokazać, jak można konstruować przykłady dowodzące, że wyżej naprowadzone okoliczności odnośnie wielości rozwiązań tak rozważanej podwójnej równoważności, jak i pojedynczych istotnie zajść mogą.

Niech $\mathfrak{m}$ będzie dowolną liczbą kardynalną pozaskończoną zaś $\mathfrak{J}$ dowolnym zbiorem mocy $\mathfrak{m}$. Niech $\mathfrak{n}$ będzie dowolną liczbą kardynalną $\leq \mathfrak{m}$. Ponieważ zachodzi, jak wiadomo, równość $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$, przeto zbiór $\mathfrak{J}$ daje się rozbić na dwa zbioru $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ bez elementów wspólnych i takich, że $\mathfrak{M}$ będzie mocy $\mathfrak{m}$ zaś $\mathfrak{N}$ mocy $\mathfrak{n}$. Ponieważ zachodzi również równość

$\mathfrak{m} . \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, przeto zbiór $\mathfrak{M}$, który jest mocy $\mathfrak{m}$, daje się dalej rozbić na klasy bez elementów wspólnych, z których każda jest mocy $\mathfrak{m}$ i zbiór Ω tych klas także jest mocy $\mathfrak{m}$. Niech dalej $H(x, y)$ będzie funkcją logiczną określoną na całym zbiorze $\mathfrak{I}$ i charakteryzującą powyższe rozbicie na klasy należące do Ω, tzn., że $H(x, y)$ ma wtedy i tylko wtedy być prawdziwe, gdy x i y są elementami zbioru $\mathfrak{M}$ i należą do jednej i tej samej klasy zbioru Ω. Wreszcie przez $\mathfrak{L}$ oznaczmy, istniejący na mocy pewnika wyboru[67] zbiór, który z każdej klasy należącej do Ω zawiera jeden element i dalszych elementów nie posiada. $S(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ niech będzie funkcją logiczną, która elementy x zbioru $\mathfrak{I}$ odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny na wszystkie n członowe układy $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ takich elementów (taka funkcja istnieje, gdyż zachodzi równość $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$), zaś $K(x, y)$ niech będzie funkcją logiczną również określoną na całym zbiorze $\mathfrak{I}$, która w sposób jednojednoznaczny odwzorowuje elementy x zbioru $\mathfrak{L}$ na elementy y zbioru $\mathfrak{I}$ (taka funkcja istnieje, gdyż zbiory $\mathfrak{L}$ i $\mathfrak{I}$ są oba mocy $\mathfrak{m}$). Funkcja logiczna $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zdefiniowana na zbiorze $\mathfrak{I}$ przez definicję

$$(72) \quad R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Eu)(Ev)\,[S(u, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, K(v, u) \,\&\, H(x, v)]$$

spełnia wówczas warunki a) i b) oraz wszystkie rozwiązania podwójnej równoważności $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ w zbiorze $\mathfrak{I}$ tworzą, przy wszelkim $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, zbiór mocy $2^{\mathfrak{m}}$. Warunek a) jest spełniony, gdyż z $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ wynika najpród istnienie elementów u, v, $\overset{*}{u}$, $\overset{*}{v}$ takich, że $S(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $K(v, u)$, $H(x, v)$, $S(\overset{*}{u}, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $K(\overset{*}{v}, \overset{*}{u})$, $H(x, \overset{*}{v})$ zachodzą. $H(x, v)$ i $H(x, \overset{*}{v})$ dają $H(v, \overset{*}{v})$, co dowo-

[67] Z pewnika wyboru korzystaliśmy już wyżej, np. tam gdzieśmy korzystali z zachodzenia równości $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ dla każdej liczby kardynalnej pozaskończonej $\mathfrak{m}$. Twierdzenie bowiem o zachodzeniu dla każdej liczby kardynalnej pozaskończonej równości $\mathfrak{m} . \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ opiera się w sposób istotny na pewniku wyboru, gdyż jest, jak to pokazał A. Tarski (Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix, Fundamenta Mathematicae, **5** (1924), str. 147—154), wręcz mu równoważne.

dzi że v i $\overset{*}{v}$ należą do jednej i tej samej klasy zbioru Ω. Ponieważ z $K(v, u)$ i $K(\overset{*}{v}, \overset{*}{u})$ wynika, że v i $\overset{*}{v}$ należą do zbioru $\mathfrak{L}$ i ponieważ każda klasa z Ω posiada tylko jednego przedstawiciela w zbiorze $\mathfrak{L}$, przeto musi zajść $v = \overset{*}{v}$. Z $v = \overset{*}{v}$, $K(\overset{*}{v}, \overset{*}{u})$ wynika dalej $K(v, \overset{*}{u})$, co w połączeniu z $K(v, u)$ daje $u = \overset{*}{u}$, jako że element v może mieć tylko jeden obraz w $\mathfrak{J}$. Z $u = \overset{*}{u}$ i $S(\overset{*}{u}, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ wynika $S(u, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, które w połączeniu z $S(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ daje $x_i = y_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, jako że odwzorowanie S jest jednojednoznaczne. Zachodzi również b), gdyż jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dowolne elementy z $\mathfrak{J}$, wówczas znajdujemy przede wszystkim element u taki, że $S(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi, co na podstawie założeń poczynionych dla S jest możliwe; następnie do elementu u znajdujemy element x taki, że $K(x, u)$ jest prawdziwe, co na mocy założeń przyjętych o odwzorowaniu K jest możliwe. Jeśli uwzględnimy, że $H(x, x)$ zachodzi, wówczas (72) da nam $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. — Ponieważ warunki a) i b) są spełnione, więc podwójna równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, $F(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n) \equiv (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ posiada przy każdym F rozwiązania. Pokażemy teraz, że zbiór tych rozwiązań przy każdym F jest mocy $2^{\mathfrak{n}}$. Pokażemy w tym celu, że zbiór tych x, dla których $(x_p)_1^n \overline{R}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi, czyli zbiór $\mathfrak{J}_8$, jest identyczny ze zbiorem $\mathfrak{R}$. Załóżmy na chwilę, że istotnie $\mathfrak{J}_8 = \mathfrak{R}$ zachodzi, wówczas i $\mathfrak{J}_8$ jest mocy $\mathfrak{n}$. Ponieważ jednak, jak już wiemy, wszystkie rozwiązania powyższej podwójnej równoważności poza zbiorem $\mathfrak{J}_8$ są identyczne, zaś na zbiorze $\mathfrak{J}_8$ przebiegają wszystkie wogóle możliwe funkcje logiczne, przeto zbiór tych wszystkich rozwiązań jest istotnie mocy $2^{\mathfrak{n}}$. Mamy teraz pokazać, że $\mathfrak{J}_8 = \mathfrak{R}$ zachodzi, a do tego wystarczy pokazać, jak łatwo widzieć, że zbiór tych x, dla których $(Ex_p)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi jest identyczny ze zbiorem $\mathfrak{M}$. Z $(Ex_p)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i z (72) wynika $H(x, v)$ dla pewnego v, a z tego przynależność x do $\mathfrak{M}$. Jeśli odwrotnie x należy do $\mathfrak{M}$, wówczas wpada do pewnej klasy zbioru Ω, której przedstawicielem w zbiorze $\mathfrak{L}$ niech będzie element v. Zachodzi więc $H(x, v)$ i do elementu v możemy w odwzorowaniu przez funkcję K znaleźć obraz u, tak że $K(v, u)$ zachodzi. Wreszcie do elementu u możemy znaleźć elementy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takie, żeby $S(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodziło. Z $S(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $K(v, u)$ i $H(x, v)$ wynika jednak, na mocy (72), $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a więc także $(Ex_\rho)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Prócz rozwiązań, tworzących zbiór mocy $2^{\mathfrak{n}}$, podwójnej równoważności

$$(73) \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv$$
$$\equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)],$$

przy $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zdefiniowanym przez (72), każda pojedyncza równoważność posiada jeszcze dalsze rozwiązania, które tworzą zbiory dokładnie mocy $2^{\mathfrak{m}}$ o ile $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nie jest stałą, tzn. dla pewnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ przyjmuje „prawdę" a dla innych przyjmuje „fałsz". Dla $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stale „prawdziwej" równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&$ $\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ posiada rozwiązania, prócz tych, które są rozwiązaniami podwójnej równoważności (73), i one tworzą mnogość mocy $2^{\mathfrak{m}}$, zaś równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$ $\equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ w tym wypadku żadnych dalszych rozwiązań nie posiada, tzn. posiada tylko te rozwiązania, które są rozwiązaniami podwójnej równoważności (73). Dla $F(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ stale „fałszywej" sprawa się ma odwrotnie: równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ żadnych dalszych nie posiada, zaś równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$ $\equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$, posiada dalsze i one tworzą zbiór mocy $2^{\mathfrak{m}}$. Okoliczności powyższe polegają głównie na tym, że relacja $(Ex_\rho)_1^n\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$' którą oznaczyliśmy przez $G(x, y)$ jest teraz z relacją $H(x, y)$ identyczna. Z $G(x, y)$, tj. z $(Ex_\rho)_1^n\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(y, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)]$ wynika najprzód istnienie elementów $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $u, v, \overset{*}{u}, \overset{*}{v}$ takich, że $S(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $K(v, u)$, $H(x, v)$, $S(\overset{*}{u}, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $K(\overset{*}{v}, \overset{*}{u})$, $H(y, \overset{*}{v})$ zachodzą. Ponieważ odwzorowanie przez funkcję $S(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest jednoznaczne, przeto z zachodzenia $S(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $S(\overset{*}{u}, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wynika $u = \overset{*}{u}$, co w połączeniu z $K(\overset{*}{v}, \overset{*}{u})$ daje $K(\overset{*}{v}, u)$. Z $K(v, \overset{*}{u})$ i $K(v, u)$ wynika dalej $v = \overset{*}{v}$, a to uwzględnione w $H(y, \overset{*}{v})$

daje $H(y,v)$, a z tego i z $H(x,v)$ otrzymujemy wreszcie $H(x,y)$. Odwrotnie, z $H(x,y)$ wynika $G(x,y)$. Gdy $H(x,y)$ zachodzi, wówczas x i y należą do jednej i tej samej klasy zbioru Ω, której wspólny ze zbiorem $\mathfrak{L}$ element oznaczmy przez v. Zachodzi wtedy $H(x,v)$ i $H(y,v)$. Znajdujemy następnie element u taki, że $K(v,u)$ zachodzi, co jest możliwe, ponieważ v jest elementem z $\mathfrak{L}$. Wreszcie do elementu u znajdujemy n członowy układ $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ taki, że $S(u, x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$ zachodzi, co jest również możliwe ponieważ funkcja $S(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ odwzorowuje wszystkie elementy x zbioru $\mathfrak{J}$ na n członowe układy $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Z $S(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $K(v,u)$, $H(x,v)$ i $H(y,v)$ wynika, na mocy (72), łatwo $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a więc także $(Ex_\rho)_1^n\ [R(x, x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, czyli $G(x,y)$. Z identyczności relacyj $G(x,y)$ i $H(x,y)$ wynika natychmiast równość $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, a tym samym każda klasa będąca elementem zbioru Ω_1 wzgl. Ω_2 jest mocy $\mathfrak{m}$. Jeśli Ω_1 i Ω_2 nie są puste (Ω_1 może być, jak łatwo widzieć, wtedy tylko puste, kiedy $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest stale „fałszywe", zaś Ω_2 wtedy tylko, gdy $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest stale „prawdziwe"), wówczas $\mathfrak{K}_1$ i $\mathfrak{K}_2$ można „wybrać" na $2^{\mathfrak{m}}$ sposobów i z tego wynika łatwo wyżej powiedziane odnośnie rozwiązań rozważanych pojedynczych równoważności w przypadku, gdy funkcja $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nie jest stałą. Gdy Ω_1 wgl. Ω_2 jest puste (Ω_1 i Ω_2 równocześnie nie mogą być puste), wówczas $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest, jak już wiemy stałą, i łatwo sprawdzić, że i w tym przypadku sprawa rozwiązań rozważanych równoważności ma się tak, jak myśmy to wyżej powiedzieli.

W powyższych rozważaniach $\mathfrak{n}$ było dowolną liczbą kardynalną $\leqq \mathfrak{m}$. Kładąc w szczególności $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$, otrzymujemy przykład, w którym podwójna równoważność (73) posiada rozwiązania tworzące zbiór mocy $2^{\mathfrak{m}}$. Biorąc zaś w szczególności $\mathfrak{n} = 0$, otrzymujemy przykład, w którym ta równoważność posiada 2^0 rozwiązań, czyli tylko jedno. Widzimy więc, że może zajść wypadek taki, że podwójna równoważność (73) posiada tylko jedno rozwiązanie, podczas gdy każda pojedyncza równoważność ma ich nieskończenie wiele i to o mocy $2^{\mathfrak{m}}$. Ciekawym jest, że relacje $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ takie, dla których to zachodzi, mogą być podane dla każdego n przez złożenie jednej relacji trójczłonowej. Gdy relacja $\Phi(x,y,z)$ odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy x zbioru $\mathfrak{J}$ o mocy $\mathfrak{m}$ na wszystkie pary $[y, z]$ elementów z $\mathfrak{J}$, wówczas, na zasadzie twierdzenia 23, $(Ev_\rho)_2^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&\, \Phi(v_{n-1}, x_n, x_{n-1})\right]$ odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny elementy v_1 z $\mathfrak{J}$ na wszystkie n członowe układy $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n]$ elementów z $\mathfrak{J}$; tę relację oznaczmy przez $S(v_1, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Przez $H(x, y)$ oznaczmy relację $(Er)(Es)(Et)[\Phi(x, r, s) \,\&\, \Phi(y, r, t)]$. Jest to, na podstawie założeń zrobionych o Φ, jak łatwo widzieć, relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia, która rozbija zbiór $\mathfrak{J}$ na klasy bez elementów wspólnych, przy czym każda z tych klas jest mocy $\mathfrak{m}$, a zbiór Ω tych klas również jest mocy $\mathfrak{m}$. Jeśli dalej przez a oznaczymy dowolny element zbioru $\mathfrak{J}$, wówczas zbiór tych x, dla których $(Ez)\,\Phi(x, z, a)$ zachodzi, z każdej klasy zbioru Ω zawiera dokładnie jeden element i innych elementów w ogóle nie posiada. Zbiór tych x oznaczmy przez $\mathfrak{L}$. Relacja $\Phi(x, y, a)$ odwzorowuje wtedy elementy x zbioru $\mathfrak{L}$ na elementy y zbioru $\mathfrak{J}$; oznaczmy ją przez $K(x, y)$. Uwzględniwszy to wszystko w (72) dojdziemy do wniosku, że dla relacji $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zdefiniowanej przez równoważność

$$R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1}(Ev)(Er)(Es)(Et)\Big[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&\,$$
$$\& \,\Phi(v_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \,\&\, \Phi(v, v_1, a) \,\&\, \Phi(x, r, s) \,\&\, \Phi(v, r, t)\Big]$$

podwójna równoważność (73) posiada tylko jedno rozwiązanie, podczas gdy każda pojedyncza posiada ich więcej i one tworzą zbiór mocy $2^{\mathfrak{m}}$.

Naturalnie gdy $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nie jest stałą. Gdy $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest stale prawdziwa wzgl. stale fałszywa, wówczas równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ wzgl. równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$ $\equiv (Ex)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, f(x)]$, prócz jednego wspólnego rozwiązania, żadnych dalszych nie posiada.

T w i e r d z e n i e 31. *Jeśli dla funkcyj logicznych* $R_1(x, y)$, $R_2(x, y), \ldots, R_n(x, y)$ *zdefiniowanych w zbiorze* $\mathfrak{J}$ *następujące dwa warunki są spełnione:*

$$(x)\,(x_\rho)_1^n\,(y_\rho)_1^n\Big[R_1(x,x_1)\,\&\,R_2(x,x_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,x_n)\,\&$$

$$\&\,R_1(x,y_1)\,\&\,R_2(x,y_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,y_n)\rightarrow\sum_{i=1}^{n}(x_i=y_i)\Big],$$

$$(x_\rho)_1^n\,(Ex)\sum_{i=1}^{n}(R_1(x,x_1)\,\&\,R_2(x,x_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,x_n)),$$

wówczas każda n członowa funkcja logiczna $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *daje się, przy stosownej funkcji* $f(x)$, *przedstawić w postaci* $(Ex)\,[f(x)\,\&\,R_1(x,x_1)\,\&\,R_2(x,x_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,x_n)]$ *oraz równocześnie w postaci* $(x)\,[R_1(x,x_1)\,\&\,R_2(x,x_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,x_n)\rightarrow f(x)]$, *tzn., że przy stosownej funkcji* $f(x)$ (*a mianowicie przy* $f(x)\equiv$ $\equiv(Ey_\rho)_1^n\,[R_1(x,y_1)\,\&\,R_2(x,y_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,y_n)\,\&\,F(y_1,y_2,\ldots,y_n)]$ *oraz przy* $f(x)\equiv(y_\rho)_1^n\,[R_1(x,y_1)\,\&\,R_2(x,y_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,y_n)\rightarrow$ $\rightarrow F(y_1,y_2,\ldots,y_n)]$) *zachodzi podwójna równoważność*

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv(Ex)\,[f(x)\,\&\,R_1(x,x_1)\,\&\,R_2(x,x_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,x_n)]$$
$$\equiv(x)\,[R_1(x,x_1)\,\&\,R_2(x,x_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,x_n)\rightarrow f(x)].$$

Twierdzenie 31 otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 30 przez podstawienie $R_1(x,x_1)\,\&\,R_2(x,x_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,x_n)$ za $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Co do rozwiązań podwójnej równoważności $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv(Ex)\,[f(x)\,\&\,R_1(x,x_1)\,\&\,R_2(x,x_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,x_n)]\equiv$ $\equiv(x)\,[R_1(x,x_1)\,\&\,R_2(x,x_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,x_n)\rightarrow f(x)]$, jako też pojedynczych z których się ta podwójna równoważność składa, to obowiązuje zupełnie analogiczne do powiedzianego i udowodnionego odnośnie do równoważności (70), (71) i (73): Prócz naprowadzonych wyżej dwóch rozwiązań istnieją na ogół jeszcze dalsze i moc zbioru wszystkich rozwiązań wyraża się liczbą kardynalną $2^{\mathfrak{n}}$, gdzie $\mathfrak{n}$ jest liczbą kardynalną mniejszą lub równą mocy zbioru $\mathfrak{J}$.

T w i e r d z e n i e 32. *Jeśli dla funkcyj logicznych* $R_1(x,y)$, $R_2(x,y),\ldots,R_n(x,y)$ *zdefiniowanych w zbiorze* $\mathfrak{J}$ *następujące dwa warunki są spełnione:*

$$\sum_{i=1}^{n}(x)\,(y)\,(z)\,[R_i(x,y)\,\&\,R_i(x,z)\rightarrow y=z],$$

$$(x_\rho)_1^n\,(Ex)\sum_{i=1}^{n}(R_1(x,x_1)\,\&\,R_2(x,x_2)\,\&\ldots\&\,R_n(x,x_n)),$$

wówczas dla każdej funkcji $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *przy stosownej funkcji* $f(x)$ (*a mianowicie przy* $f(x)\equiv(Ey_\rho)_1^n\,[R_1(x,y_1)\,\&$

$\& R_2(x, y_2) \& \ldots \& R_n(x, y_n) \& F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ *oraz również przy* $f(x) \equiv (y_p)_1^n [R_1(x, y_1) \& R_2(x, y_2) \& \ldots \& R_n(x, y_n) \to F(y_1, y_2, \ldots, y_n)])$ *zachodzi podwójna równoważność* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex) [f(x) \& R_1(x, x_1) \& R_2(x, x_2) \& \ldots \& R_n(x, x_n)] \equiv (x) [R_1(x, x_1) \& R_2(x, x_2) \& \ldots \& R_n(x, x_n) \to f(x)]$.

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 31 zauważywszy, że z warunku $\sum_{i=1}^{n} (x)(y)(z)[R_i(x, y) \& R_i(x, z) \to y = z]$ wynika pierwszy warunek w twierdzeniu 31.

Gdy $R(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ jest funkcją logiczną, która w sposób jednojednoznaczny odwzorowuje elementy x zbioru $\mathfrak{J}$ na n członowe układy $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ elementów z $\mathfrak{J}$, wówczas warunki a) i b) w twierdzeniu 30 są spełnione i przeto zachodzi:

T w i e r d z e n i e 33. *Jeśli funkcja logiczna* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy* x *zbioru* $\mathfrak{J}$ *na wszystkie* n *członowe układy* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *elementów z* $\mathfrak{J}$, *to dla każdej funkcji* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *przy stosownej funkcji* $f(x)$ *(a mianowicie przy* $f(x) \equiv (Ey_p)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ *oraz przy* $f(x) \equiv (y_p)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \to F(y_1, y_2, \ldots, y_n)])$ zachodzi podwójna równoważność

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv$$
$$\equiv (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)].$$

Zbadamy teraz kwestię ilości rozwiązań na $f(x)$ powyższej podwójnej równoważności i każdej pojedynczej, z których się ona składa. Ponieważ w powyższym twierdzeniu o funkcji $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zakładamy, że w sposób jednojednoznaczny odwzorowuje elementy x zbioru $\mathfrak{J}$ na n członowe układy $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ elementów z $\mathfrak{J}$, przeto prócz warunków a) i b) z twierdzenia 30 jeszcze dwa następujące warunki są spełnione:

c) $(x)(Ex_p)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

d) $(x)(y)(x_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x = y]$.

Z warunku c) wynika, że zbiór $\mathfrak{J}_3$, tzn. zbiór tych x dla których $(x_p)_1^n \overline{R}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi, który to zbiór ma, jak wiemy, decydujący wpływ na ilość rozwiązań podwójnej równoważności (73), jest zbiorem pustym i przeto podwójna równoważność (73) posiada w tym twierdzeniu tylko jedno rozwiązanie. W szczególności zachodzi więc teraz równoważność

$(Ey_\rho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\&\, F(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv (y_\rho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$.[68] Co się zaś tyczy pojedynczych równoważności (70) i (71), to i one posiadają pod założeniami twierdzenia 33 tylko jedno rozwiązanie, a mianowicie to wspólne. Relacja bowiem $(Ex_\rho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, którą oznaczyliśmy przez $G(x, y)$ jest teraz na zbiorze $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$ identycznością logiczną, tzn., że zachodzi równoważność $G(x, y) \equiv (x = y)$ na zbiorze $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$. Na zasadzie zwrotności relacji $G(x, y)$ zachodzi bowiem implikacja $(x = y) \rightarrow G(x, y)$, zaś na podstawie warunku d) odwrotna implikacja $G(x, y) \rightarrow (x = y)$. Relacja $G(x, y)$ rozbija więc teraz zbiór $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$ na klasy posiadające tylko po jednym elemencie i przeto zbiory „wybrane“ $\mathfrak{K}_1$ i $\mathfrak{K}_2$, które mają, jak wiemy, decydujący wpływ na ilość rozwiązań równoważności (70) i (71), są teraz jednoznacznie określone i odpowiednio identyczne ze zbiorami $\mathfrak{J}_1$ i $\mathfrak{J}_2$.

T w i e r d z e n i e 34. *Jeśli funkcja logiczna* $[R_1(x, x_1) \,\&$ $\&\, R_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, x_n)]$ *odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy* x *zbioru* $\mathfrak{J}$ *na wszystkie* n *członowe układy* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *elementów z* $\mathfrak{J}$, *to dla każdej funkcji logicznej* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *przy stosownej funkcji* $f(x)$ (*a mianowicie przy* $f(x) \equiv (Ey_\rho)_1^n [R_1(x, y_1) \,\&\, R_2(x, y_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, y_n) \,\&\, F(y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n)]$ *oraz przy* $f(x) \equiv (y_\rho)_1^n [R_1(x, y_1) \,\&\, R_2(x, y_2) \,\&\, \ldots \,\&$ $\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, y_n) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$) *zachodzi podwójna równoważność*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[f(x) \,\&\, R_1(x, x_1) \,\&\, R_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\& \\ \&\, \ldots \,\&\, R_n(x, x_n)] \equiv \\ \equiv (x)[R_1(x, x_1) \,\&\, R_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, x_n) \rightarrow f(x)].$$

Twierdzenie 34 otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 31, gdyż oba warunki z twierdzenia 31 są spełnione w przypadku gdy funkcja $[R_1(x, x_1) \,\&\, R_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, x_n)]$ odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny elementy x zbioru $\mathfrak{J}$ na n członowe układy takich elementów. Do tego samego wyniku można dojść, podstawiając w twierdzeniu 33 $[R_1(x, x_1) \,\&$ $\&\, R_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, x_n)]$ za $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

[68] Jak z dowodu widać, równoważność ta zachodzi już pod założeniami a), b) i c), gdyż z warunku d) nie korzystaliśmy na razie. Możnaby pokazać, że i warunek b) jest zbędny.

Co się tyczy ilości rozwiązań podwójnej równoważności z twierdzenia 34 i każdej pojedynczej, z których się ona składa, to istnieje tylko jedno, wspólne rozwiązanie, jak to już z dowodu twierdzenia 33 wynika. Zachodzi więc w szczególności równoważność $(Ey_p)_1^n [R_1(x, y_1) \,\&\, R_2(x, y_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, y_n) \,\&\, \&\, F(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv (y_p)_1^n [R_1(x, y_1) \,\&\, R_2(x, y_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, y_n) \rightarrow \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$.

Jako szczególny wniosek z twierdzenia 34 można uważać następujące

Twierdzenie 35. *Każda funkcja logiczna $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ daje się w każdym zbiorze nieskończonym przedstawić w postaci $(Ex)[S_1(x, x_1) \,\&\, S_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, S_n(x, x_n)]$.*

Gdy $\mathfrak{J}$ jest zbiorem nieskończonym, wówczas na mocy zachodzącej dla każdej liczby kardynalnej pozaskończonej $\mathfrak{m}$ równości $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$ i — twierdzenia 28 można znaleźć funkcje logiczne $R_1(x, y), R_2(x, y), \ldots, R_n(x, y)$ takie, że funkcja $[R_1(x, x_1) \,\&\, \&\, R_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_n(x, x_n)]$ odwzorowuje jednojednoznacznie elementy x zbioru $\mathfrak{J}$ na n członowe układy $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ takich elementów. Jeśli teraz $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest dowolną funkcją logiczną określoną na zbiorze $\mathfrak{J}$, to na podstawie twierdzenia 34 zachodzi dla pewnej funkcji $f(x)$ w każdym razie równoważność $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[f(x) \,\&\, R_1(x, x_1) \,\&\, R_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \ldots \,\&\, R_n(x, x_n)]$. Definiując teraz funkcje logiczne $S_1(x, y), S_2(x, y), \ldots, S_n(x, y)$ przez równoważności $S_i(x, y) \equiv (f(x) \,\&\, R_i(x, y))$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ otrzymujemy $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ex)[S_1(x, x_1) \,\&\, \&\, S_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, S_n(x, x_n)]$, c. b. d. o.

Przedstawialność, o której mowa w twierdzeniu 35, dla przypadku zbioru przeliczalnego, została zużytkowana przez K. Gödela (por. uwagę [35]) do zagadnienia rozstrzygalności. Na str. 33 podaliśmy tzw. postępowanie Skolema pozwalające do każdego wyrażenia stopnia n skonstruować wyrażenie stopnia $n - 1$ zawierające, prócz zmiennych funkcyjnych danego wyrażenia, jeszcze jedną zmienną funkcyjną $F(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_{s_1})$ i równoważne z danym wyrażeniem pod względem posiadania realizacji; wyrażenie skonstruowane stopnia $n - 1$, które było koniunkcją dwóch wyrażeń B_1 i B_2 oznaczyliśmy tam przez B. Jeśli w tym wyrażeniu zamiast $F(x_1, x_2, \ldots, x_{s_1})$ weźmiemy $(Ex)[S_1(x, x_1) \,\&\, S_2(x, x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, S_{s_1}(x, x_{s_1})]$, gdzie $S_1(x, y), S_2(x, y), \ldots, S_{s_1}(x, y)$ są zmiennymi funkcyjnymi różnymi pomiędzy sobą i różnymi od zmiennych funkcyjnych wyrażenia danego (stopnia n), wówczas otrzymamy wyrażenie także równoważne z danym wyrażeniem pod względem posiadania realizacji i dające się także do postaci normalnej stopnia $n-1$ sprowadzić[69]. Wprawdzie wprowadza się takim sposobem s_1 nowych zmiennych funkcyjnych zamiast jednej, ale jest i pewien zysk, gdyż zamiast s_1 członowej zmiennej funkcyjnej wprowadza się tylko dwuczłonowe. Jest to gödelowska modyfikacja postępowania Skolema.

Twierdzenie 36. *Jeśli dla funkcji logicznej $\Phi(x, y, z)$ zdefiniowanej w zbiorze $\mathfrak{J}$ następujące dwa warunki są spełnione:*

a*) $(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[\Phi(x, y, z) \,\&\, \Phi(x, \overset{*}{y}, \overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y} \,\&\, z = \overset{*}{z}]$,

b*) $(x)(y)(Ez)\Phi(z, y, x)$,

to dla każdej funkcji logicznej n członowej $(n > 1)$ $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)$[70] zachodzi przy stosownej funkcji $f(v_1)$ (a mianowicie przy $f(v_1) \equiv (Ey_\rho)_1^{n-1}(Ev_\rho)_2^n \Big[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \,\&\, \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, y_i)\Big]$ oraz przy $f(v_1) \equiv (y_\rho)_1^{n-1}(v_\rho)_2^n \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, y_i) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n)\Big]$) podwójna równoważność

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1}\Big[f(v_1) \,\&\, \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\Big] \equiv$$
$$\equiv (v_\rho)_1^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow f(v_1)\Big].$$

Biorąc w twierdzeniu 30 na $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkcję logiczną zdefiniowaną przez równoważność $R(v_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_\rho)_2^{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\Big]$ otrzymujemy z a) i b) dwa warunki, które na mocy twierdzeń 21 i 19 wynikają

[69] Dowód przebiega w zasadzie równolegle do dowodu ze str. 33 i 34. Należy teraz jednak jeszcze uwzględnić twierdzenie Löwenheima — Skolema (twierdzenie 9), twierdzenie 35 (dla zbioru liczb naturalnych) i równoważność $[(Ex)f(x) \rightarrow p] \equiv (x)[f(x) \rightarrow p]$.

[70] Ostatnią zmienną oznaczamy przez v_n, zamiast przez x_n, aby móc zamiast $\sum_{i=1}^{n-2} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&\, \Phi(v_{n-1}, x_n, x_{n-1})$ pisać krócej $\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)$. Analogicznie w innych podobnych wypadkach.

odpowiednio z warunków a*) i b*) i przeto dają się przez te zastąpić. Uwzględniwszy to, otrzymujemy natychmiast twierdzenie 36. Co się tyczy ilości rozwiązań na $f(v_1)$ podwójnej równoważności w tym twierdzeniu, to prócz wymienionych dwóch rozwiązań, które są na ogół różne od siebie, istnieją podobnie jak dla podwójnej równoważności z twierdzenia 30, na ogół jeszcze dalsze a moc zbioru wszystkich rozwiązań wyraża się zawsze liczbą kardynalną $2^{\mathfrak{n}}$, gdzie $\mathfrak{n}$ jest liczbą kardynalną mniejszą lub równą mocy zbioru $\mathfrak{J}$. Ciekawym jest, że dla każdego zbioru nieskończonego $\mathfrak{J}$ i dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{n}$ mniejszej lub równej mocy zbioru $\mathfrak{J}$ można rzeczywiście podać przykłady na funkcje $\Phi(x, y, z)$ dla których warunki a*) i b*) są spełnione i dla których zbiór wszystkich rozwiązań $f(v_1)$ podwójnej równoważności z twierdzenia 36 jest dokładnie mocy $2^{\mathfrak{n}}$. Co się zaś tyczy pojedynczych równoważności, z których się ta podwójna składa, to mogą one posiadać, podobnie jak to miało miejsce w twierdzeniu 30, jeszcze dalsze rozwiązania. Bliższe zbadanie tej kwestii pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 37. *Jeśli dla funkcyj logicznych $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ zdefiniowanych w zbiorze $\mathfrak{J}$ następujące dwa warunki są spełnione*

$$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[R_1(x,y) \,\&\, R_2(x,z) \,\&\, R_1(x,\overset{*}{y}) \,\&\, R_2(x,\overset{*}{z}) \rightarrow$$
$$\rightarrow y = \overset{*}{y} \,\&\, z = z^*],$$
$$(x)(y)(Ez)[R_1(z,y) \,\&\, R_2(z,x)],$$

to dla każdej funkcji logicznej n członowej $(n > 1)$ $F(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}, v_n)$ zachodzi przy stosownej funkcji $f(v_1)$ (a mianowicie przy

$$f(v_1) \equiv (Ey_\rho)_1^{n-1}(Ev_\rho)_2^n\left[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \,\&\, \sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\right.$$
$$\left.\& R_2(v_i, y_i))\right]$$ *oraz przy* $$f(v_1) \equiv (y_\rho)_1^{n-1}(v_\rho)_2^n\left[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\right.$$
$$\left.\& R_2(v_i, y_i)) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n)\right]$$ *) podwójna równoważność*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1}\left[f(v_1) \,\&\, \sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\right.$$
$$\left.\& R_2(v_i, x_i))\right] \equiv (v_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \rightarrow f(v_1)\right].$$

Twierdzenie 37 otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 36, kładąc $R_1(x,y) \& R_2(x,z)$ za $\Phi(x,y,z)$.

Twierdzenie 38. *Jeśli dla funkcyj logicznych $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ zdefiniowanych w zbiorze $\mathfrak{Z}$ następujące dwa warunki są spełnione*

$$(x)(y)(z)[(R_1(x,y) \& R_1(x,z) \rightarrow y = z) \& (R_2(x,y) \& R_2(x,z) \rightarrow y = z)],$$

$$(x)(y)(Ez)[R_1(z,y) \& R_2(z,x)],$$

to dla każdej funkcji logicznej n członowej $(n>1)$ $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)$ zdefiniowanej w $\mathfrak{Z}$ zachodzi przy stosownej funkcji $f(v_1)$ (a mianowicie przy $f(v_1) \equiv (Ey_\rho)_1^{n-1}(Ev_\rho)_2^n\left[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \& \sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \& R_2(v_i, y_i))\right]$ *oraz przy* $f(v_1) \equiv (y_\rho)_1^{n-1}(v_\rho)_2^n\left[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \& R_2(v_i, y_i)) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n)\right]$) *podwójna równoważność*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1}\left[f(v_1) \& \sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \& R_2(v_i, x_i))\right] \equiv (v_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \& R_2(v_i, x_i)) \rightarrow f(v_1)\right].$$

Twierdzenie to otrzymujemy łatwo z twierdzenia 37. Wystarczy tylko zauważyć, że warunek $(x)(y)(z)[(R_1(x,y) \& R_1(x,z) \rightarrow y = z) \& (R_2(x,y) \& R_2(x,z) \rightarrow y = z)]$ pociąga za sobą pierwszy warunek z twierdzenia 37. Co się tyczy ilości rozwiązań podwójnej równoważności z twierdzenia 37 i 38, i pojedynczych, z których się ta podwójna składa, to kwestia ta przedstawia się zupełnie tak samo jak w twierdzeniu 36: prócz wymienionych dwóch rozwiązań istnieją na ogół jeszcze dalsze, których może być nawet nieskończenie wiele.

Twierdzenie 39. *Gdy funkcja logiczna $\Phi(x, y, z)$ odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy x zbioru $\mathfrak{Z}$ na pary $[y, z]$ takich elementów, wówczas dla każdej funkcji logicznej n członowej $(n > 1)$ $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)$ zachodzi przy stosownej funkcji $f(v_1)$ (a mianowicie przy*

$$f(v_1) \equiv (Ey_\rho)_1^{n-1}(Ev_\rho)_2^n\left[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \& \sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, y_i)\right]$$

oraz przy $f(v_1) \equiv (y_\rho)_1^{n-1} (v_\rho)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, y_i) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \right]$) *podwójna równoważność*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1} \left[f(v_1) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \right] \equiv$$
$$\equiv (v_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow f(v_1) \right]$$

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 36. Wystarczy tylko zauważyć, że gdy funkcja $\Phi(x, y, z)$ odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy x zbioru $\mathfrak{J}$ na wszystkie pary $[y, z]$ takich elementów, wówczas warunki a*) i b*) z twierdzenia 36 są spełnione.

Podwójna równoważność w tym twierdzeniu, jako też każda pojedyncza z których się ta podwójna składa, posiada tylko jedno rozwiązanie na $f(v_1)$. Wynika to już z rozważań nad twierdzeniem 33, gdyż twierdzenie 39 można także otrzymać z twierdzenia 33 przy uwzględnieniu twierdzenia 23. Musi wobec tego zajść w szczególności równoważność

$$(Ey_\rho)_1^{n-1} (Ev_\rho)_2^n \left[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, y_i) \right] \equiv$$
$$\equiv (y_\rho)_1^{n-1} (v_\rho)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, y_i) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \right] [71].$$

T w i e r d z e n i e 40. *Gdy funkcja logiczna* $R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z)$ *odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy* x *zbioru* $\mathfrak{J}$ *na wszystkie pary* $[y, z]$ *elementów z* $\mathfrak{J}$, *wówczas dla każdej funkcji logicznej* n *członowej* $(n > 1)$ $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)$ *zachodzi przy stosownej funkcji* $f(v_1)$ (*a mianowicie przy* $f(v_1) \equiv (Ey_\rho)_1^{n-1} (Ev_\rho)_2^n \left[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2(v_i, y_i)) \right]$ *oraz przy* $f(v_1) \equiv (y_\rho)_1^{n-1} (v_\rho)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2(v_i, y_i)) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \right]$) *podwójna równoważność*

[71] Równoważność ta zachodzi zresztą już przy słabszych założeniach o funkcji $\Phi(x, y, z)$ niż założenia w twierdzeniu 39. Mianowicie już przy założeniach:
$(x)(Ey)(Ez)\Phi(x, y, z)$ i $(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[\Phi(x, y, z) \mathbin{\&} \Phi(x, \overset{*}{y}, \overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y} \mathbin{\&} z = \overset{*}{z}]$.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_p)_1^{n-1} \Big[f(v_1) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} R_2(v_i, x_i)) \Big] \equiv (v_p)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2(v_i, x_i)) \to f(v_1) \Big].$$

Twierdzenie to wynika natychmiast z twierdzenia 37, gdyż skoro funkcja logiczna $R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z)$ odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy x zbioru $\mathfrak{J}$ na wszystkie pary $[y, z]$ takich elementów, wówczas oba warunki z twierdzenia 37 są spełnione. Twierdzenie 40 można jednak także otrzymać z twierdzenia 39, podstawiając $R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z)$ za $\Phi(x, y, z)$, z czego wynika natychmiast, wobec uwag poczynionych w związku z twierdzeniem 39, że i podwójna równoważność z twierdzenia 40, jak również i każda pojedyncza, z których się ta podwójna składa, posiada tylko jedno rozwiązanie na $f(v_1)$. Zachodzi więc w szczególności równoważność

$$(Ey_p)_1^{n-1} (Ev_p)_2^n \Big[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} R_2(v_i, y_i)) \Big] \equiv (y_p)_1^{n-1} (v_p)_2^n \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2(v_i, y_i)) \to$$

$$\to F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \Big],$$

która to równoważność zachodzi zresztą już przy następujących, o wiele słabszych założeniach: $(x)(Ey)(Ez)[R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z)]$, $(x)(y)(z)[R_1(x, y) \mathbin{\&} R_1(x, z] \to y = z]$ i $(x)(y)(z)[R_2(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z) \to y = z]$.

T w i e r d z e n i e 41. *Gdy dla funkcyj logicznych* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *i* $f(x)$ *zachodzą następujące dwa warunki:*

$$(x_p)_1^n (Ex) R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(x)(y)(x_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} f(x) \to f(y)],$$

wówczas zachodzi równoważność

$$(Ex)[f(x) \mathbin{\&} R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)].$$

Z $(x)(y)(x_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} f(x) \to f(y)]$ wynika łatwo implikacja $[f(x) \mathbin{\&} R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \to [R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(y)]$, a z tego łatwo implikacja $(Ex)[f(x) \mathbin{\&} R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \to (y)[R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(y)]$, która po zmianie zmiennej y na x daje

$$(Ex)[f(x) \mathbin{\&} R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \to (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x)].$$

Zachodzi jednak również implikacja odwrotna $(x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)] \rightarrow (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, gdyż z $(x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ wynika przede wszystkim prawdziwość wyrażenia $(x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x) \,\&$ $\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, a z tego łatwo prawdziwość wyrażenia $(Ex)\,R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, co w połączeniu z $(Ex)\,R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, prawdziwym na mocy zachodzenia $(x_p)_1^n\,(Ex)\,R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, daje istotnie $(Ex)\,[f(x) \,\&$ $\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$.

Twierdzenie 42. *Gdy dla funkcji logicznej* $R(x, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ *zachodzą następujące dwa warunki:*

$$(x_p)_1^n\,(Ex)\,R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(x)\,(y)\,(x_p)_1^n\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (x = y)],$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $f(x)$ *zachodzi równoważność*

$$(Ex)\,[f(x) \,\&\, R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv (x)\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)].$$

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 41. Wystarczy tylko zauważyć, że z prawdziwości $(x)\,(y)\,(x_p)_1^n$ $[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (x = y)]$ wynika, dla każdego $f(x)$, $(x)\,(y)\,(x_p)_1^n\,[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, R(y, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n) \,\&\, f(x) \rightarrow f(y)]$.

Twierdzenie 43. *Gdy dla funkcyj logicznych* $\Phi(x, y, z)$ *i* $f(x)$ *zachodzą warunki:*

$$(x)\,(y)\,(Ez)\,\Phi(z, y, x),$$

$$(v_p)_1^{n-1}\,(\overset{*}{v}_p)_1^{n-1}\,(x_p)_1^n \left[\sum_{i=1}^{n-2} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&\, \Phi(v_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \,\&\right.$$
$$\left. \&\, \sum_{i=1}^{n-2} \Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, x_i) \,\&\, \Phi(\overset{*}{v}_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \,\&\, f(v_1) \rightarrow f(\overset{*}{v}_1)\right],$$

wówczas zachodzi równoważność

$$(Ev_p)_1^{n-1}\left[f(v_1) \,\&\, \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \equiv$$
$$\equiv (v_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow f(v_1)\right].$$

Twierdzenie 43 otrzymujemy z twierdzenia 41 przy uwzględnieniu twierdzenia 19. Kładąc bowiem w twierdzeniu 41 za $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkcję zdefiniowaną przez równoważność

$R(v_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_p)_2^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$ otrzymujemy z jednej strony z warunku pierwszego warunek wynikający na mocy twierdzenia 19 z warunku $(x)\,(y)\,(Ez)\,\Phi\,(z, y, x)$, a więc dający się przez ten ostatni zastąpić. Z drugiej strony warunek drugi twierdzenia 41 przechodzi przy tym podstawieniu, po uwzględnieniu równoważności $[(Ex)\,F\,(x) \rightarrow p] \sim$ $\sim (x)\,[F\,(x) \rightarrow p]$ i po odpowiednim oznaczeniu zmiennych, w drugi warunek twierdzenia 43.

T w i e r d z e n i e 44. *Gdy dla funkcji logicznej* $\Phi\,(x, y, z)$ *zachodzą następujące dwa warunki:*

$$(x)\,(y)\,(Ez)\,\Phi\,(z, y, x),$$

$$(y)\,(z)\,(x)\,(\overset{*}{x})\,[\Phi\,(x, y, z)\ \&\ \Phi\,(\overset{*}{x}, y, z) \rightarrow x = \overset{*}{x}],$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $f\,(x)$ *i dla każdej liczby naturalnej* $n > 1$ *zachodzi równoważność*

$$(Ev_p)_1^{n-1}\left[f\,(v_1)\ \&\ \sum_{i=1}^{n-1}\Phi\,(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \equiv$$

$$\equiv (v_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi\,(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow f\,(v_1)\right].$$

Kładąc w twierdzeniu 42 za $R\,(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkcję zdefiniowaną przez równoważność $R\,(v_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv$ $\equiv (Ev_p)_2^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi\,(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$ otrzymujemy z warunków twierdzenia 42 dwa warunki wynikające na podstawie twierdzeń 19 i 22 odpowiednio z warunków $(x)\,(y)\,(Ez)\,\Phi\,(z, y, x)$ i $(y)\,(z)\,(x)\,(\overset{*}{x})\,[\Phi\,(x, y, z)\,\&\,\Phi\,(\overset{*}{x}, y, z) \rightarrow x = \overset{*}{x}]$, a więc dające się przez te ostatnie zastąpić.

T w i e r d z e n i e 45. *Gdy dla funkcyj logicznych* $R_1\,(x, y)$, $R_2\,(x, y)$ i $f\,(x)$ zachodzą następujące dwa warunki:

$$(x)\,(y)\,(Ez)\,[R_1\,(z, x)\ \&\ R_2\,(z, y)],$$

$$(v_p)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_p)_1^{n-1}(x_p)_1^n\left[\sum_{i=1}^{n-2}(R_1\,(v_i, v_{i+1})\ \&\ R_2\,(v_i, x_i))\ \&\ R_1\,(v_{n-1}, x_n)\ \&\right.$$

$$\&\ R_2\,(v_{n-1}, x_{n-1})\ \&\sum_{i=1}^{n-2}(R_1\,(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1})\ \&\ R_2\,(\overset{*}{v}_i, x_i))\ \&\ R_1\,(\overset{*}{v}_{n-1}, x_n)\ \&$$

$$\left.\&\ R_2\,(\overset{*}{v}_{n-1}, x_{n-1})\,\&\,f\,(v_1) \rightarrow f\,(\overset{*}{v}_1)\right],$$

wówczas zachodzi równoważność

$$(Ev_p)_1^{n-1}\left[f(v_1)\,\&\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v,x_i))\right]\equiv$$
$$\equiv(v_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,x_i))\rightarrow f(v_1)\right].$$

Twierdzenie to otrzymujemy z twierdzenia 43 podstawiając $R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ za $\Phi(x,y,z)$.

T w i e r d z e n i e 46. *Gdy dla funkcyj logicznych* $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ *zachodzą następujące dwa warunki:*

$$(x)(y)(Ez)[R_1(z,x)\,\&\,R_2(z,y)],$$
$$(y)(z)(x)(\overset{*}{x})[R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)\,\&\,R_1(\overset{*}{x},y)\,\&\,R_2(\overset{*}{x},z)\rightarrow x=\overset{*}{x}],$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $f(x)$ *i dla każdej liczby naturalnej* $n>1$ *zachodzi równoważność*

$$(Ev_p)_1^{n-1}\left[f(v_1)\,\&\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,x_i))\right]\equiv$$
$$\equiv(v_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i,v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i,x_i))\rightarrow f(v_1)\right].$$

Twierdzenie 46 otrzymujemy z twierdzenia 44 podstawiając $R_1(x,y)\,\&\,R_2(x,z)$ za $\Phi(x,y,z)$.

T w i e r d z e n i e 47. *Gdy* $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *jest funkcją logiczną, dla której następujące dwa warunki są spełnione:*

$$(x_p)_1^n(Ex)\,R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n),$$
$$(x)(x_p)_1^n(y_p)_1^n\left[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,R(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=y_i\right],$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *zachodzi implikacja*

$$(x)(Ey_p)_1^n[R(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\,\&\,F(y_1,y_2,\ldots,y_n)]\rightarrow$$
$$\rightarrow(x_p)_1^n F(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Z $(x)(Ey_p)_1^n[R(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\,\&\,F(y_1,y_2,\ldots,y_n)]$ i z pierwszego warunku wynika łatwo $(x_p)_1^n(Ex)(Ey_p)_1^n[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&$ $\&\,R(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\,\&\,F(y_1,y_2,\ldots,y_n)]$.
Z drugiego warunku otrzymujemy łatwo

$R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\&\,R(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\,\&\,F(y_1,y_2,\ldots,y_n)\rightarrow$ $\rightarrow F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, a z tego łatwo $(x_p)_1^n(Ex)(Ey_p)_1^n[R(x,x_1,x_2,\ldots,$

$\ldots, x_n) \mathbin{\&} R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \mathbin{\&} F(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \to (x_p)_1^n F(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$, co w połączeniu z poprzednio otrzymanym daje $(x_p)_1^n$ $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Twierdzenie 48. *Gdy dla funkcji logicznej* $R(x, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ *spełniony jest warunek*:

$$(x)(Ex_p)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *zachodzi implikacja*

$$(x_p)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x)(Ex_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} F(x_1, x_2, \ldots, x^n)].$$

Dowód. Z $(x_p)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i z według założenia prawdziwego wyrażenia $(x)(Ex_p)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wynika przez n krotne stosowanie reguły $[(x) F(x) \mathbin{\&} (Ex) G(x)] \to$ $\to (Ex)[F(x) \mathbin{\&} G(x)]$ natychmiast

$$(x)(Ex_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)], \text{ c. b. d. o.}$$

Twierdzenie 49. *Gdy dla funkcji logicznej* $R(x, x_1,$ $x_2, \ldots, x_n)$ *spełnione są następujące trzy warunki*:

$$(x_p)_1^n (Ex) R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(x)(x_p)_1^n (y_p)_1^n \left[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} \right.$$
$$\left. \mathbin{\&} R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \to \sum_{i=1}^{n}{}' x_i = y_i\right],$$

$$(x)(Ex_p)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *zachodzą równoważności*:

$$(x)(Ex_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \sim$$
$$\sim (x_p)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(Ex)(x_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \sim$$
$$\sim (Ex_p)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Dowód. Zachodzenie pierwszej równoważności wynika bezpośrednio z twierdzeń 47 i 48. Kładąc w pierwszej równoważności $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ za $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ otrzymujemy $(x)(Ex_p)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&} \overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \sim (x_p)_1^n \overline{F}(x_1,$ $x_2, \ldots, x_n)$, a z tego przez obustronne przeczenie łatwo

$$(Ex)\,(x_p)_1^n\,[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n) \rightarrow F(x_1,x_2,\ldots,x_n)] \sim$$
$$\sim (Ex_p)_1^n\,F(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Twierdzenie 50. *Gdy funkcja logiczna* $R(x,x_1,x_2,\ldots$ $\ldots,x_n)$ *odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny elementy* x *zbioru* $\mathfrak{I}$ *na* n *członowe układy* $[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ *elementów z* $\mathfrak{I}$, *wówczas dla każdej funkcji logicznej* $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *określonej na* $\mathfrak{I}$ *zachodzą równoważności*:

$$(x)\,(Ex_p)_1^n\,[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)\ \&\ F(x_1,x_2,\ldots,x_n)] \sim$$
$$\sim (x_p)_1^n\,F(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$
$$(Ex)\,(x_p)_1^n\,[R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n) \rightarrow F(x_1,x_2,\ldots,x_n)] \sim$$
$$\sim (Ex_p)_1^n\,F(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Twierdzenie to otrzymujemy bezpośrednio z twierdzenia 49. Wystarczy tylko zauważyć, że gdy funkcja $R(x,x_1,x_2,\ldots$ $\ldots,x_n)$ odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy x zbioru $\mathfrak{I}$ na wszystkie n członowe układy $[x_1,$ $x_2,\ldots,x_n]$ takich elementów, wówczas wszystkie trzy warunki z twierdzenia 49 są spełnione.

Twierdzenie 51. *Gdy dla funkcji logicznej* $\Phi(x,y,z)$ *spełnione są następujące dwa warunki*:

$$(x)\,(y)\,(Ez)\,\Phi(z,y,x),$$
$$(x)\,(y)\,(z)\,(\overset{*}{y})\,(\overset{*}{z})\,[\Phi(x,y,z)\ \&\ \Phi(x,\overset{*}{y},\overset{*}{z}) \rightarrow y=\overset{*}{y}\ \&\ z=\overset{*}{z}],$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ zachodzą implikacje:

$$(v_1)\,(Ev_p)_2^n\,(Ex_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\ \&\right.$$
$$\left.\&\ F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\right] \rightarrow (x_p)_1^n\,F(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

$$(Ex_p)_1^n\,F(x_1,x_2,\ldots,x_n) \rightarrow (Ev_1)\,(v_p)_2^n\,(x_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i) \rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\right].$$

Biorąc w twierdzeniu 47 na $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funkcję zdefiniowaną przez równoważność $R(v_1,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n) \equiv$ $\equiv (Ev_p)_2^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right]$ otrzymujemy z warunków twierdzenia 47 dwa warunki wynikające, na podstawie twierdzeń 19 i 21, odpowiednio z warunków $(x)(y)(Ez)\Phi(z,y,x)$ i $(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[\Phi(x,y,z) \& \Phi(x,\overset{*}{y},\overset{*}{z}) \rightarrow y=\overset{*}{y} \& z=\overset{*}{z}]$, a więc dające się przez te ostatnie zastąpić. Z implikacji w twierdzeniu 47 uzyskujemy przez to podstawienie z łatwością implikację

$$(v_1)(Ev_p)_2^n(Ex_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i) \& \right.$$
$$\left. \& F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\right] \rightarrow (x_p)_1^n F(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Kładąc w tej implikacji $\overline{F}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ za $F(x_1,x_2,\ldots$ $\ldots,x_n)$ i korzystając z zasady logiki zdań $(p\rightarrow q)\rightarrow(\overline{q}\rightarrow\overline{p})$ otrzymujemy łatwo również implikację

$$(Ex_p)_1^n F(x_1,x_2,\ldots,x_n) \rightarrow (Ev_1)(v_p)_2^n(x_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\right].$$

Twierdzenie 52. *Gdy dla funkcji logicznej* $\Phi(x,y,z)$ *spełniony jest warunek:*

$$(x)(Ey)(Ez)\Phi(x,z,y),$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *zachodzą implikacje:*

$$(x_p)_1^n F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\rightarrow(v_1)(Ev_p)_2^n(Ex_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i) \& \right.$$
$$\left. \& F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\right],$$

$$(Ev_1)(v_p)_2^n(x_p)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\rightarrow F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},v_n)\right]\rightarrow$$
$$\rightarrow (Ex_p)_1^n F(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Biorąc w twierdzeniu 48 na $R(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funkcję logiczną zdefiniowaną przez równoważność $R(v_1,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},$ $v_n)\equiv(Ev_p)_2^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i,v_{i+1},x_i)\right]$ otrzymujemy z warunku twierdzenia 48 warunek wynikający na podstawie twierdzenia 20 z warunku $(x)(Ey)(Ez)\Phi(x,z,y)$, a więc dający się przez ten ostatni zastąpić. Z implikacji w twierdzeniu 48 uzyskujemy przez to podstawienie z łatwością

$$(x_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (v_1)(Ev_\rho)_2^n (Ex_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&}\right.$$
$$\left.\mathbin{\&} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\right].$$

Kładąc w tej ostatniej implikacji $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ za $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i uwzględniając zasadę $[p \rightarrow q] \rightarrow [\overline{q} \rightarrow \overline{p}]$ uzyskujemy również implikację

$$(Ev_1)(v_\rho)_2^n (x_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\right] \rightarrow (Ex_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Twierdzenie 53. *Gdy dla funkcji logicznej* $\Phi(x, y, z)$ *spełnione są następujące trzy warunki:*

$$(x)(y)(Ez)\,\Phi(z, y, x),$$
$$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})\,[\Phi(x, y, z) \mathbin{\&} \Phi(x, \overset{*}{y}, \overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y} \mathbin{\&} z = \overset{*}{z}],$$
$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, z, y),$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *zachodzą równoważności:*

$$(x_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (v_1)(Ev_\rho)_2^n (Ex_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&}\right.$$
$$\left.\mathbin{\&} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\right],$$

$$(Ex_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ev_1)(v_\rho)^n (x^\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\right].$$

Twierdzenie 53 otrzymujemy natychmiast z twierdzeń 51 i 52 przy uwzględnieniu zasady logicznej $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \sim q)]$.

Twierdzenie 54. *Gdy funkcja logiczna* $\Phi(x, y, z)$ *odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy* x *zbioru* $\mathfrak{J}$ *na wszystkie pary* $[y, z]$ *elementów z* $\mathfrak{J}$, *wówczas dla każdej funkcji logicznej* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *określonej na zbiorze* $\mathfrak{J}$ *zachodzą równoważności:*

$$(x_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (v_1)(Ev_\rho)_2^n (Ex_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&}\right.$$
$$\left.\mathbin{\&} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\right],$$

$$(Ex_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ev_1)(v_\rho)_2^n (x_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow \right.$$
$$\left. \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \right].$$

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 53, gdyż dla funkcji $\Phi(x, y, z)$ odwzorowującej wszystkie elementy x zbioru $\mathfrak{I}$ na wszystkie pary $[y, z]$ takich elementów wszystkie trzy warunki twierdzenia 53 są spełnione.

Twierdzenie 55. *Gdy dla funkcyj logicznych $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ spełnione są dwa następujące warunki:*

$$(x)(y)(Ez)[R_1(z,y) \,\&\, R_2(z,x)],$$
$$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[R_1(x,y) \,\&\, R_2(x,z) \,\&$$
$$\& \, R_1(x,\overset{*}{y}) \,\&\, R_2(x,\overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y} \,\&\, z = \overset{*}{z}],$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzą implikacje:

$$(v_1)(Ev_\rho)_2^n (Ex_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \,\& \right.$$
$$\left. \& \, F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \right] \rightarrow (x_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(Ex_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (Ev_1)(v_\rho)_2^n (x_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\& \right.$$
$$\left. \& \, R_2(v_i, x_i)) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \right].$$

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 51 przez podstawienie $R_1(x,y) \,\&\, R_2(x,z)$ za $\Phi(x,y,z)$.

Twierdzenie 56. *Gdy dla funkcyj logicznych $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ spełnione są dwa następujące warunki:*

$$(x)(y)(Ez)[R_1(z,y) \,\&\, R_2(z,x)],$$
$$(x)(y)(z)[(R_1(x,y) \,\&\, R_1(x,z) \rightarrow y = z) \,\&\, (R_2(x,y) \,\&\, R_2(x,z) \rightarrow$$
$$\rightarrow y = z)],$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzą implikacje:

$$(v_1)(Ev_\rho)_2^n (Ex_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, x_{n-1}, v_n) \right] \rightarrow (x_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(Ex_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (Ev_1)(v_\rho)_2^n (x_\rho)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big].$$

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 55. Wystarczy tylko zauważyć, że drugi warunek twierdzenia 55 wynika łatwo z warunku $(x)(y)(z)[(R_1(x,y) \,\&\, R_1(x,z) \rightarrow y = z) \,\&\, (R_2(x,y) \,\&\, R_2(x,z) \rightarrow y = z)]$, a więc daje się przez ten ostatni zastąpić.

T w i e r d z e n i e 57. *Gdy dla funkcyj logicznych $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ spełniony jest warunek:*

$$(x)(Ey)(Ez)[R_1(x,z) \,\&\, R_2(x,y)],$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzą implikacje:

$$(x_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (v_1)(Ev_\rho)_2^n (Ex_\rho)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big],$$

$$(Ev_1)(v_\rho)_2^n (x_\rho)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big] \rightarrow (Ex_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 52 przez podstawienie $R_1(x,y) \,\&\, R_2(x,z)$ za $\Phi(x,y,z)$.

T w i e r d z e n i e 58. *Gdy dla funkcyj $R_1(x,y), R_2(x,y)$ spełnione są następujące trzy warunki:*

$$(x)(y)(Ez)[R_1(z,y) \,\&\, R_2(z,x)],$$

$$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})[R_1(x,y) \,\&\, R_2(x,z) \,\&\, R_1(x,\overset{*}{y}) \,\&\, R_2(x,\overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y} \,\&\, z = \overset{*}{z}],$$

$$(x)(Ey)(Ez)[R_1(x,z) \,\&\, R_2(x,y)],$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzą równoważności:

$$(x_\rho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (v_1)(Ev_\rho)_2^n (Ex_\rho)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big],$$

$$(Ex_p)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ev_1)(v_p)_2^n (x_p)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big].$$

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzeń 55 i 57 przy uwzględnieniu zasady logicznej $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \sim q)]$.

T w i e r d z e n i e 59. *Gdy dla funkcyj logicznych* $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ *spełnione są następujące trzy warunki:*

$$(x)(y)(Ez)[R_1(z, y) \,\&\, R_2(z, x)],$$

$$(x)(y)(z)[(R_1(x, y) \,\&\, R_1(x, z) \rightarrow y = z) \,\&\, (R_2(x, y) \,\&\, R_2(x, z) \rightarrow y = z)],$$

$$(x)(Ey)(Ez)[R_1(x, z) \,\&\, R_2(x, y)],$$

wówczas dla każdej funkcji logicznej $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *zachodzą równoważności:*

$$(x_p)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (v_1)(Ev_p)_2^n (Ex_p)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big],$$

$$(Ex_p)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ev_1)(v_p)_2^n (x_p)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big].$$

Twierdzenie 59 otrzymujemy natychmiast z twierdzeń 56 i 57 przy uwzględnieniu zasady logicznej $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \sim q)]$.

T w i e r d z e n i e 60. *Gdy funkcja logiczna* $R_1(x, y) \,\&\, R_2(x, z)$ *odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy* x *zbioru* $\mathfrak{J}$ *na wszystkie pary* $[y, z]$ *elementów z* $\mathfrak{J}$, *wówczas dla każdej funkcji logicznej* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *określonej na zbiorze* $\mathfrak{J}$ *zachodzą równoważności:*

$$(x_p)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (v_1)(Ev_p)_2^n (Ex_p)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big],$$

$$(Ex_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ev_1)(v_\varrho)_2^n (x_\varrho)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \Big].$$

Twierdzenie 60 otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 54 przez podstawienie $R_1(x,y) \,\&\, R_2(x,z)$ za $\Phi(x,y,z)$. Twierdzenie 60 można także otrzymać z twierdzenia 58, gdyż przy założeniach twierdzenia 60 wszystkie trzy warunki twierdzenia 58 są spełnione.

W paragrafie tym wskazaliśmy na szereg przedstawialności dowolnych funkcyj logicznych. Przedstawialności te zachodzą w zbiorze $\mathfrak{J}$, gdy wszystkie elementy x tego zbioru dają się odwzorować w sposób jednojednoznaczny na wszystkie pary $[y, z]$ elementów z $\mathfrak{J}$, czyli gdy moc $\mathfrak{m}$ zbioru $\mathfrak{J}$ czyni zadość równaniu $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. Ponieważ zachodzi $\aleph_0^2 = \aleph_0$, więc przedstawialności te zachodzą w każdym razie w zbiorach przeliczalnych. Wprawdzie w następnym paragrafie, przy zastosowaniu tych przedstawialności do redukowania zagadnienia rozstrzygalności, jedynie z tego szczególnego przypadku korzystać będziemy (przy uwzględnieniu twierdzenia 9), to jednak warto podkreślić, że te przedstawialności są słuszne w ogóle w każdym zbiorze nieskończonym. Równość bowiem $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ zachodzi, jak już zaznaczyliśmy, w ogóle dla każdej liczby kardynalnej pozaskończonej $\mathfrak{m}$, o ile naturalnie przyjmujemy pewnik Zermelo [72].

Co się tyczy w szczególności twierdzeń 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39 i 40, to odróżniliśmy w nich podwójne równoważności od pojedynczych, z których się te podwójne składają. Na zastosowania tych pojedynczych równoważności wskazałem już w swojej pracy wymienionej pod [9]. Podwójne równoważności pozwalają jednak uzyskać o wiele lepsze wyniki, przy stosowaniu ich do zagadnienia rozstrzygalności, niż pojedyncze, gdyż na nich polega nowa metoda podstawiania (tzw. metoda podwójnego wzgl. kombinowanego pod-

[72] Dla pewnych zbiorów nieskończonych (prócz zbiorów przeliczalnych np. także dla zbiorów mocy continuum) można się obejść bez pewnika Zermelo. Nie stoi to oczywiście w żadnej sprzeczności z wyżej powiedzianym jako też z uwagą [67], według której całkiem ogólny wypadek (tj. dla wszystkich zbiorów nieskończonych na raz) wymaga koniecznie pewnika wyboru.

stawiania). Bliższe szczegóły poznamy w paragrafie następnym; tu chciałem jednak jeszcze tylko wskazać główną myśl, na której metoda kombinowanego podstawiania polega. Weźmy jedną z tych podwójnych równoważności pod uwagę, np.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1}\left[f(v_1) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \equiv$$
$$\equiv (v_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \to f(v_1)\right].$$

Wykazuje ona, że każdą funkcję logiczną w każdym zbiorze nieskończonym można przedstawić przez wyrażenie o samych tylko kwantyfikatorach szczegółowych i równocześnie przez wyrażenie o samych tylko kwantyfikatorach ogólnych, posługując się przy tym wyłącznie dwiema funkcjami: jedną jednoczłonową i jedną trójczłonową. Znaczenie tej podwójnej równoważności jest jeszcze bardziej widoczne, gdy się ją przedstawia przez koniunkcję następujących dwóch pojedynczych równoważności [73]:

$$(74{\cdot}1) \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&} f(v_1)\right],$$

$$(74{\cdot}2) \quad \overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&} \overline{f}(v_1)\right],$$

lub też przez koniunkcję następujących dwóch pojedynczych równoważności:

$$(75{\cdot}1) \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (v_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \to f(v_1)\right],$$

$$(75{\cdot}2) \quad \overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (v_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, v_i) \to \overline{f}(v_1)\right].$$

[73] Że zachodzenie powyższej podwójnej równoważności jest równoznaczne z zachodzeniem koniunkcji (74·1) & (74·2), wzgl. koniunkcji '75·1) & (75·2), jest natychmiastowe.

Równoważności (74·1) i (74·2), wzgl. (75·1) i (75·2), pouczają, że z wyrażenia przedstawiającego dowolną funkcję można przejść do wyrażenia przedstawiającego negację tej funkcji przez zastąpienie funkcji $f(v_1)$ przez jej negację. W szczególności wynika z tego, że przy tym przejściu kwantyfikatory szczegółowe nie przechodzą w ogólne, wzgl. kwantyfikatory ogólne w szczegółowe, jak to ma zwykle miejsce przy przejściu do negacji, lecz pozostają niezmienione i na tym właśnie polega główne znaczenie tych równoważności.

Co się tyczy zaś twierdzeń takich, jak 49, 50, 53, 54, 58, 59, 60, to służą one do zmiany kształtów prefiksów do czego się bardzo nadają, gdyż równoważności, o których w nich mowa, pozwalają w pewnej mierze dowolny układ kwantyfikatorów ogólnych zastąpić przez jeden kwantyfikator ogólny i układ kwantyfikatorów szczegółowych, wzgl. odwrotnie — dowolny układ kwantyfikatorów szczegółowych przez jeden kwantyfikator szczegółowy i układ kwantyfikatorów ogólnych.

§ 5. Dalsze redukcje ogólnego zagadnienia rozstrzygalności.

Dla wyrażeń węższego rachunku funkcyjnego, jako też dla wyrażeń uogólnionych przez wprowadzenie identyczności logicznej, przyjmujemy następującą definicję:

Definicja 5. *Dane wyrażenie będziemy nazywali α-wyrażeniem, gdy to wyrażenie, jeśli w ogóle posiada realizację, wówczas także w pewnym zbiorze, którego moc czyni zadość równaniu* $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.

Z powyższej definicji wynika przede wszystkim, że każde wyrażenie, w ogóle nie posiadające realizacji, jest α-wyrażeniem. Następnie, że każde bez wyjątku wyrażenie bez identyczności jest α-wyrażeniem. W samej rzeczy, jeśli A jest dowolnym wyrażeniem bez identyczności, to albo A w ogóle nie ma realizacji i przeto jest α-wyrażeniem, albo posiada, na mocy twierdzenia 9, realizację w zbiorze przeliczalnym i przeto również jest α-wyrażeniem, jako że zachodzi $\aleph_0^2 = \aleph_0$. W zakresie wyrażeń bez identyczności pojęcie α-wyrażenia nie wypowiada więc nic ciekawego.

Co się zaś tyczy wyrażeń z identycznością, to rzecz się przedstawia zgoła inaczej: niektóre są α-wyrażeniami, inne zaś nie są. Są α-wyrażeniami przede wszystkim te wyrażenia z identycznością, które w ogóle realizacji nie posiadają. Można jednak podać liczne przykłady wyrażeń z identycznością mające realizację, które są α-wyrażeniami. Takim jest np. wyrażenie $(x)(x = x)$ [74], gdyż posiada realizację w każdym bez wyjątku zbiorze. Z licznymi mniej trywialnymi przypadkami będziemy mieli do czynienia później. Jako przykład wyrażenia, które nie jest α-wyrażeniem może służyć $(Ex)(Ey)\overline{(x = y)}\ \&\ \&\ (x)(y)(z)[(x = y) \vee (x = z) \vee (y = z)]$, gdyż posiada, jak łatwo widzieć, realizację jedynie w zbiorze złożonym z dwóch przedmiotów, a jest oczywiście $2^2 \neq 2$.

Wyróżniamy pewną trójczłonową zmienną funkcyjną $\Phi(x, y, z)$, którą będziemy nazywali zmienną funkcyjną „wyróżnioną“, i tworzymy przy jej pomocy wyrażenie

$$(76)\quad (x)(y)(Ez)\,\Phi(z, y, x)\ \&\ (x)(\overset{*}{x})(y)(z)\,[\Phi(x, y, z)\ \&\ \&\ \Phi(\overset{*}{x}, y, z) \rightarrow x = \overset{*}{x}]\ \&\ (x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z)\ \&\ \&\ (x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})\,[\Phi(x, y, z)\ \&\ \Phi(x, \overset{*}{y}, \overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y}\ \&\ z = \overset{*}{z}].$$

Następnie wyróżniamy dwie zmienne funkcyjne dwuczłonowe $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$, które będziemy nazywali zmiennymi „wyróżnionymi“ dwuczłonowymi, i przy ich pomocy tworzymy wyrażenie

$$(77)\quad (x)(y)(Ez)\,(R_1(z, y)\ \&\ R_2(z, x))\ \&\ (x)(\overset{*}{x})(y)(z)\,[R_1(x, y)\ \&\ \&\ R_2(x, z)\ \&\ R_1(\overset{*}{x}, y)\ \&\ R_2(\overset{*}{x}, z) \rightarrow x = \overset{*}{x}]\ \&\ \&\ (x)(Ey)(Ez)\,(R_1(x, y)\ \&\ R_2(x, z))\ \&\ (x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})\,[R_1(x, y)\ \&\ \&\ R_2(x, z)\ \&\ R_1(x, \overset{*}{y})\ \&\ R_2(x, \overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y}\ \&\ z = \overset{*}{z}],$$

oraz wyrażenie

$$(78)\quad (x)(y)(Ez)\,(R_1(z, y)\ \&\ R_2(z, x))\ \&\ (x)(\overset{*}{x})(y)(z)\,[R_1(x, y)\ \&\ \&\ R_2(x, z)\ \&\ R_1(\overset{*}{x}, y)\ \&\ R_2(\overset{*}{x}, z) \rightarrow x = \overset{*}{x}]\ \&\ (x)(Ey)(Ez)\,(R_1(x, y)\ \&\ \&\ R_2(x, z))\ \&\ (x)(y)(z)\,[R_1(x, y)\ \&\ R_1(x, z) \rightarrow y = z]\ \&\ \&\ (x)(y)(z)\,[R_2(x, y)\ \&\ R_2(x, z) \rightarrow y = z].$$

[74] Że to wyrażenie nie zawiera żadnej zmiennej funkcyjnej nie powinno nikogo razić, gdyż i takie wyrażenia są dopuszczalne. Do każdego zresztą wyrażenia A z identycznością logiczną nie zawierającego żadnej zmiennej funkcyjnej można podać wyrażenie ze zmiennymi funkcyjnymi, które poza tym posiada te same własności co A. Takim wyrażeniem jest np. $(x)(f(x) \vee \overline{f(x)})\ \&\ A$.

Przyjmujemy następujące definicje:

Definicja 6. *Dane wyrażenie A zawierające zmienne wyróżnione* $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ *będziemy nazywali* β*-wyrażeniem, gdy jest z wyrażeniem A & (77) równoważne pod względem posiadania realizacji. Każdy układ spełniający wyrażenie A & (77) spełnia tym bardziej wyrażenie A; taki układ będziemy nazywali realizacją wyróżnioną wyrażenia A.*

Definicja 7. *Dane wyrażenie A zawierające zmienną funkcyjną wyróżnioną* $\Phi(x, y, z)$ *będziemy nazywali* γ*-wyrażeniem, gdy jest z wyrażeniem A & (76) równoważne pod względem posiadania realizacji. Każdy układ spełniający wyrażenie A & (76) spełnia tym bardziej wyrażenie A; taki układ spełniający będziemy nazywali realizacją wyróżnioną wyrażenia A.*

Z powyższych definicyj wynikają natychmiast następujące dwa twierdzenia:

Twierdzenie 61. *Wyrażenie A, które prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych* R_1, R_2 *zawiera jeszcze zmienne funkcyjne* $F_1, F_2, \ldots, F_k$, *jest wtedy i tylko wtedy* β*-wyrażeniem, gdy istnieje zbiór* $\mathfrak{J}$ *i układ funkcyj* $R_1', R_2', F_1', F_2', \ldots, F_k'$ *zdefiniowanych w* $\mathfrak{J}$ *spełniający wyrażenie A taki, że funkcja* $R_1'(x,y)$ & $R_2'(x,z)$ *odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy x zbioru* $\mathfrak{J}$ *na wszystkie pary* $[y,z]$ *takich elementów. Taki właśnie układ spełniający jest realizacją wyróżnioną wyrażenia A.*

Twierdzenie 62. *Wyrażenie A, które prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej* Φ *zawiera jeszcze zmienne funkcyjne* $F_1, F_2, \ldots, F_k$, *jest wtedy i tylko wtedy* γ*-wyrażeniem, gdy istnieje zbiór* $\mathfrak{J}$ *i układ funkcyj* $\Phi', F_1', F_2', \ldots, F_k'$ *zdefiniowanych* w $\mathfrak{J}$ *spełniający wyrażenie A taki, że funkcja* $\Phi'(x, y, z)$ *odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy x zbioru* $\mathfrak{J}$ *na wszystkie pary* $[y, z]$ *elementów z* $\mathfrak{J}$. *Taki właśnie układ spełniający jest realizacją wyróżnioną wyrażenia A.*

Z powyższego wynika dalej

Twierdzenie 63. *Każde* β*-wyrażenie, jak i każde* γ*-wyrażenie, jest* α*-wyrażeniem.*

Do dowodu wystarczy tylko zauważyć, że moc zbioru, w którym dane β-wyrażenie wzgl. γ-wyrażenie ma realizację wyróżnioną, czyni zadość równaniu $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.

T w i e r d z e n i e 64. *Dane wyrażenie A zawierające zmienne wyróżnione R_1, R_2 jest wtedy i tylko wtedy β-wyrażeniem, gdy jest z wyrażeniem A & (78) równoważne pod względem posiadania realizacji. Każdy układ spełniający wyrażenie A & (78) jest realizacją wyróżnioną wyrażenia A.*

Twierdzenie to powiada, że w definicji β-wyrażenia (definicja 6) wyrażenie (77) może być zastąpione przez wyrażenie (78).

Dowód twierdzenia 64 polega na fakcie, że dwie funkcje logiczne R_1', R_2' spełniają wtedy i tylko wtedy w pewnym zbiorze $\mathfrak{J}$ wyrażenie (77), gdy spełniają wyrażenie (78). Że ten fakt ma istotnie miejsce, pokazuje się następująco:

a) Załóżmy, że R_1', R_2' spełniają wyrażenie (77). Pokażemy, że spełniają także wyrażenie (78). Do dowodu tego ostatniego potrzeba tylko pokazać, że zachodzi

$$(79)\quad (x)(y)(z)\,[R_1'(x,y) \mathbin{\&} R_1'(x,z) \rightarrow y=z] \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} (x)(y)(z)\,[R_2'(x,y) \mathbin{\&} R_2'(x,z) \rightarrow y=z],$$

gdyż pozostałe składniki koniunkcji (78) są składnikami koniunkcji (77). Kładąc w wyrażeniu prawdziwym

$$(80)\quad (x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})\,[R_1'(x,y) \mathbin{\&} R_2'(x,z) \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} R_1'(x,\overset{*}{y}) \mathbin{\&} R_2'(x,\overset{*}{z}) \rightarrow y=\overset{*}{y} \mathbin{\&} z=\overset{*}{z}]$$

$\overset{*}{y}$ za y otrzymujemy

$$(81)\quad (x)(y)(z)(\overset{*}{z})\,[R_1'(x,y) \mathbin{\&} R_2'(x,z) \mathbin{\&} R_2'(x,\overset{*}{z}) \rightarrow z=\overset{*}{z}].$$

Kładąc zaś w (80) z za $\overset{*}{z}$ otrzymujemy

$$(82)\quad (x)(y)(\overset{*}{y})(z)\,[R_1'(x,y) \mathbin{\&} R_1'(x,\overset{*}{y}) \mathbin{\&} R_2'(x,z) \rightarrow y=\overset{*}{y}].$$

Z (81) i (82) otrzymujemy, przez stosowanie reguły $(x)[f(x) \rightarrow p] \rightarrow [(Ex)\,f(x) \rightarrow p]$, odpowiednio

$$(83)\quad (x)(z)(\overset{*}{z})\,[((Ey)\,R_1'(x,y) \mathbin{\&} R_2'(x,z) \mathbin{\&} R_2'(x,\overset{*}{z})) \rightarrow z=\overset{*}{z}]$$

i

$$(84)\quad (x)(y)(\overset{*}{y})\,[(R_1'(x,y) \mathbin{\&} R_1'(x,\overset{*}{y}) \mathbin{\&} (Ez)\,R_2'(x,z)) \rightarrow y=\overset{*}{y}].$$

Z zachodzenia (77) wynika dalej $(x)(Ey)(Ez)(R_1'(x,y) \mathbin{\&} R_2'(x,z))$, a z tego $(Ey)\,R_1'(x,y)$ oraz $(Ez)\,R_2'(x,z)$, które uwzględnione w (83) i (84) dają

(85) $(x)(z)(\overset{*}{z})\,[R_2'(x,z)\ \&\ R_2'(x,\overset{*}{z}) \rightarrow z=\overset{*}{z}]$,

i

(86) $(x)(y)(\overset{*}{y})\,[R_1'(x,y)\ \&\ R_1'(x,\overset{*}{y}) \rightarrow y=\overset{*}{y}]$.

Wreszcie z (85) i (86) uzyskuje się przez zmianę zmiennych natychmiast (79).

b) Załóżmy odwrotnie, że R_1', R_2' spełniają wyrażenie (78). Pokażemy, że spełniają także wyrażenie (77). Do dowodu tego ostatniego potrzeba tylko pokazać, że zachodzi (80), a to wynika natychmiast z (79).

Twierdzenie 65. *Gdy w dowolnym γ-wyrażeniu A za zmienną funkcyjną $\Phi(x,y,z)$ podstawimy wyrażenie $R_1(x,y)\ \&\ \&\ R_2(x,z)$* [75] *i wyjdzie wyrażenie B, to B jest β-wyrażeniem równoważnym z A pod względem posiadania realizacji.*

Dowód. Gdy $F_1, F_2, \ldots, F_k, \Phi$ są to zmienne funkcyjne wyrażenia A, wówczas zmiennymi funkcyjnymi wyrażenia B są $F_1, F_2, \ldots, F_k, R_1, R_2$. Gdy wyrażenie A posiada w ogóle realizację, wówczas jako γ-wyrażenie posiada realizację wyróżnioną $F_1', F_2', \ldots, F_k', \Phi'$ w jakimś zbiorze $\mathfrak{I}'$. Funkcja logiczna $\Phi'(x,y,z)$ daje się wtedy na mocy twierdzenia 24 przedstawić w postaci $R_1'(x,y)\ \&\ R_2'(x,z)$, gdyż odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny wszystkie elementy x zbioru $\mathfrak{I}'$ na wszystkie pary $[y,z]$ takich elementów. Jak łatwo widzieć, spełnia wówczas układ $F_1', F_2', \ldots, F_k', R_1', R_2'$ wyrażenie B i jest realizacją wyróżnioną tego wyrażenia [76].

Gdy odwrotnie układ $F_1'', F_2'', \ldots, F_k'', R_1'', R_2''$ spełnia wyrażenie B w jakimś zbiorze $\mathfrak{I}''$, wówczas układ $F_1'', F_2'', \ldots$ $\ldots, F_k'', R_1''(x,y)\ \&\ R_2''(x,z)$ spełnia, jak łatwo widzieć, wyrażenie A w zbiorze $\mathfrak{I}''$.

Z powyższego wynika przede wszystkim, że wyrażenia A i B są równoważne pod względem posiadania realizacji, a następnie, że B jest β-wyrażeniem. To ostatnie otrzymuje się, jak następuje: Gdy B ma w ogóle realizację, wówczas,

[75] Por. podaną w paragrafie 2 regułę podstawiania za zmienne funkcyjne.

[76] W tym miejscu należy zauważyć, że gdy w wyrażeniu (76) za zmienną funkcyjną $\Phi(x,y,z)$ podstawimy $R_1(x,y)\ \&\ R_2(x,z)$, wówczas wychodzi wyrażenie (77).

jak udowodniliśmy, A posiada realizację. Z istnienia realizacji wyrażenia A wynika jednak, jak również pokazaliśmy, istnienie realizacji wyróżnionej wyrażenia B.

Twierdzenie 66. *Do każdego wyrażenia A można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, γ-wyrażenie B, które prócz zmiennej wyróżnionej Φ zawiera tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne*[77].

Dowód. Niech A będzie dowolnie danym wyrażeniem o wieloczłonowych zmiennych funkcyjnych $F_1, F_2, \dots, F_k$ i o jednoczłonowych $g_1, g_2, \dots, g_l$[78], przy czym liczba argumentów zmiennej F_i niech będzie r_i (dla $i = 1, 2, \dots, k$). Niech dalej $f_1, f_2, \dots, f_k$ będą zmiennymi funkcyjnymi jednoczłonowymi różnymi pomiędzy sobą i różnymi od $g_1, g_2, \dots, g_l$. Wreszcie B niech oznacza wyrażenie, które powstaje z A przez zastąpienie zmiennej funkcyjnej $F_i(x_1, x_2, \dots, x_{r_i-1}, v_{r_i})$ przez wyrażenie

$$(v_p)_1^{r_i-1}\left[\sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j) \rightarrow f_i(v_1)\right] \quad (\text{dla } i = 1, 2, \dots, k).$$

Wyrażenie B zawiera prócz zmiennej funkcyjnej trójczłonowej Φ jeszcze tylko jednoczłonowe $f_1, f_2, \dots, f_k, g_1, g_2, \dots$ $\dots, g_l$ i jest, jak pokażemy, γ-wyrażeniem równoważnym z A pod względem posiadania realizacji.

Gdy wyrażenie A posiada w ogóle realizację, wówczas na mocy twierdzenia 9 także w zbiorze wszystkich liczb naturalnych $\mathfrak{Z}$. Niech $F_1', F_2', \dots, F_k', g_1', g_2', \dots, g_l'$ będzie układem spełniającym wyrażenie A w zbiorze $\mathfrak{Z}$. Niech dalej $\Phi'(x, y, z)$ oznacza jakąś funkcję logiczną, która w sposób jednojednoznaczny odwzorowuje wszystkie liczby naturalne x na wszystkie pary $[y, z]$ liczb naturalnych (na $\Phi'(x, y, z)$ można wziąć np. funkcję $x = 2^{y-1}.(2z-1)$). Funkcje $f_1', f_2', \dots, f_k'$ definiujemy teraz przez równoważności

[77] Z twierdzenia tego wynika, że przy zagadnieniu rozstrzygalności wystarcza się ograniczyć do wyrażeń, które prócz zmiennych funkcyjnych jednoczłonowych zawierają jeszcze tylko jedną trójczłonową. Przypominamy twierdzenie 16, według którego zagadnienie rozstrzygalności dla wyrażeń zawierających wyłącznie tylko zmienne funkcyjne jednoczłonowe jest w zupełności rozwiązane.

[78] Może być oczywiście również $l=o$.

$$f_i'(v_1) \equiv (Ey_\rho)_1^{r_i-1} (Ev_\rho)_2^{r_i} \Big[F_i'(y_1, y_2, \ldots, y_{r_i-1}, v_{r_i}) \;\&\; \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi'(v_j, v_{j+1}, y_j) \Big]$$

dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

Układ funkcyj $f_1', f_2', \ldots, f_k', g_1', g_2', \ldots, g_l', \Phi'$ jest wtedy realizacją wyróżnioną wyrażenia B, gdyż na mocy twierdzenia 39 zachodzą, jak łatwo widzieć, równoważności

$$F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i}) \equiv (v_\rho)_1^{r_i-1} \Big[\sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi'(v_j, v_{j+1}, x_j) \rightarrow f_i'(v_1) \Big]$$

dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Więc gdy wyrażenie A ma realizację, wówczas B ma realizację wyróżnioną. Gdy odwrotnie, wyrażenie B ma realizację i $f_1'', f_2'', \ldots, f_k'', g_1'', g_2'', \ldots, g_l'', \Phi''$ jest układem spełniającym wyrażenie B w jakimś zbiorze $\mathfrak{Z}''$, a funkcje $F_1'', F_2'', \ldots, F_k''$ zdefiniujemy przez równoważności

$$F_i''(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i}) \equiv (v_\rho)_1^{r_i-1} \Big[\sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi''(v_j, v_{j+1}, x_j) \rightarrow f_i''(v_1) \Big],$$

dla $i = 1, 2, \ldots, k$, wówczas funkcje $F_1'', F_2'', \ldots, F_k'', g_1'', g_2'', \ldots, g_l''$ spełniają wyrażenie A w tym samym zbiorze. Więc gdy wyrażenie B ma realizację, wówczas także wyrażenie A. Z powyższego wynika, że wyrażenia A i B są równoważne pod względem posiadania realizacji i że B jest ponadto γ-wyrażeniem, c. b. d. o.

W dowodzie tego twierdzenia można by było wyrażenie $(v_\rho)_1^{r_i-1} \Big[\sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j) \rightarrow f_i(v_1) \Big]$ zastąpić przez wyrażenie $(Ev_\rho)_1^{r_i-1} \Big[\sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j) \;\&\; f_i(v_1) \Big]$ nie zmieniając poza tym przeprowadzonego rozumowania [79].

T w i e r d z e n i e 67. *Do każdego wyrażenia A można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, β-wyrażenie B, które prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnio-*

[79] W tym rozumowaniu z podwójnej równoważności twierdzenia 39 właściwie nie korzystamy, lecz tylko z pojedynczych z których się ta podwójna składa. W dalszym ciągu tej pracy poznamy jednak miejsca, gdzie się w sposób istotny z podwójnej równoważności korzysta.

nych R_1, R_2 zawiera jeszcze tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne [80].

Niech A będzie dowolnie danym wyrażeniem o wieloczłonowych zmiennych funkcyjnych $F_1, F_2, \ldots, F_k$ i o jednoczłonowych $g_1, g_2, \ldots, g_l$, przy czym liczba argumentów zmiennej F_i niech będzie r_i (dla $i = 1, 2, \ldots, k$). Niech dalej $f_1, f_2, \ldots, f_k$ będą zmiennymi funkcyjnymi jednoczłonowymi różnymi pomiędzy sobą i różnymi od $g_1, g_2, \ldots, g_l$. Wreszcie B niech oznacza wyrażenie, które powstaje z A przez podstawienie wyrażenia $(v_\rho)_1^{r_i-1} \left[\sum_{j=1}^{r_i-1} (R_1(v_j, v_{j+1}) \,\&\, R_2(v_j, x_j)) \rightarrow f_i(v_1) \right]$ (dla $i = 1, 2, \ldots, k$) za zmienną funkcyjną $F_i(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i})$.

Wyrażenie B zawiera prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych R_1, R_2 jeszcze tylko jednoczłonowe $f_1, f_2, \ldots \ldots, f_k, g_1, g_2, \ldots, g_l$ i jest β-wyrażeniem równoważnym z A pod względem posiadania realizacji. Dowód tych okoliczności przebiega równolegle do dowodu podobnych okoliczności z twierdzenia 66, tylko zamiast twierdzeniem 39 należy się teraz posługiwać twierdzeniem 40. Inny dowód twierdzenia 67 otrzymamy, stosując do twierdzenia 66 bezpośrednio twierdzenie 65.

Twierdzenie 68. *Do każdego γ-wyrażenia w postaci normalnej stopnia n (gdzie $n > 1$) zawierającego prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej Φ jeszcze tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, γ-wyrażenie w postaci normalnej stopnia $n - 1$ zawierające prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej Φ jeszcze tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne.*

Gdy A jest dowolnie danym γ-wyrażeniem zawierającym prócz zmiennej funkcyjnej Φ jeszcze tylko jednoczłonowe $f_1, f_2, \ldots, f_k$ posiadającym stopień n ($n > 1$), wówczas A daje się napisać w postaci

$$(x_\rho)_1^{r_1} (Ex_\rho)_{r_1+1}^{s_1} (x_\rho)_{s_1+1}^{r_2} (Ex_\rho)_{r_2+1}^{s_2} \ldots$$
$$\ldots (x_\rho)_{s_{n-1}+1}^{r_n} (Ex_\rho)_{r_n+1}^{s_n} \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_{s_n}),$$

[80] Twierdzenie 67 obejmuje już znane twierdzenie Löwenheima (por. § 4 pracy cytowanej pod [37]), według którego przy zagadnieniu rozstrzygalności wystarcza się ograniczyć, bez ujmy dla ogólności, do wyrażeń o zmiennych funkcyjnych co najwyżej dwuczłonowych.

gdzie jest $r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \ldots < r_n < s_n$. Aby otrzymać γ-wyrażenie B stopnia $n-1$ równoważne z A pod względem posiadania realizacji i zawierające, prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej Φ, jeszcze tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne, należy do A zastosować podane na str. 33 postępowanie Skolema, ale z modyfikacją taką, że zamiast zmiennej funkcyjnej $F(x_1, x_2, \ldots, x_{s_1-1}, v_{s_1})$ należy teraz wziąć wyrażenie $(Ev_\rho)_1^{s_1-1}\left[f_{k+1}(v_1)\,\&\,\sum_{j=1}^{s_1-1}\Phi(v_j, v_{j+1}, x_j)\right]$, przy czym f_{k+1} jest dowolną, byle od $f_1, f_2, \ldots, f_k$ różną, zmienną funkcyjną[81]. Tak otrzymane wyrażenie B zawiera, prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej Φ, jeszcze tylko jednoczłonowe $f_1, f_2, \ldots, f_k, f_{k+1}$ i daje się sprowadzić do postaci normalnej stopnia $n-1$. To jest natychmiastowe.

Gdy A ma w ogóle realizację, wówczas jako γ-wyrażenie posiada także realizację wyróżnioną, np. $f_1', f_2', \ldots, f_k', \Phi'$ w zbiorze $\mathfrak{I}'$. Definiując funkcję f_{k+1}' przez równoważność

$$f_{k+1}'(v_1) \equiv (Ey_\rho)_1^{s_1-1}(Ev_\rho)_2^{s_1}(x_\rho)_{s_1+1}^{r_2}(Ex_\rho)_{r_2+1}^{s_2}\ldots$$
$$\ldots(x_\rho)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_\rho)_{r_n+1}^{s_n}\left[\mathfrak{A}'(y_1, y_2, \ldots, y_{s_1-1}, v_{s_1}, x_{s_1+1}, \ldots, x_{s_n})\,\&\right.$$
$$\left.\&\sum_{i=1}^{s_1-1}\Phi'(v_i, v_{i+1}, y_i)\right],$$

zyskujemy w układzie $f_1', f_2', \ldots, f_k', f_{k+1}', \Phi'$ realizację wyróżnioną wyrażenia B, jak to z łatwością można (przy uwzględnieniu twierdzenia 39) udowodnić. A więc gdy A ma realizację, wówczas B posiada realizację wyróżnioną.

Gdy odwrotnie B posiada realizację $f_1'', f_2'', \ldots, f_k'', f_{k+1}'', \Phi''$ w zbiorze $\mathfrak{I}''$, wówczas $f_1'', f_2'', \ldots, f_k'', \Phi''$ spełnia wyrażenie A, jak to można z łatwością pokazać rozumowaniem podobnym do rozumowania ze str. 34. A więc gdy B ma realizację, wówczas także i wyrażenie A.

Z powyższego wynika, że wyrażenia A i B są równoważne i że B jest w dodatku γ-wyrażeniem.

Twierdzenie 69. *Do każdego β-wyrażenia w postaci normalnej stopnia n (gdzie $n > 1$), które zawiera prócz zmien-*

[81] Ta modyfikacja postępowania Skolema pozwala nam obniżyć stopień wyrażenia z n na $n-1$, posługując się przy tym jedynie jednoczłonową zmienną funkcyjną f_{k+1} (zamiast s_1 członowej).

nych funkcyjnych wyróżnionych R_1, R_2, jeszcze tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne, można podać równoważne z nim pod względem posiadania realizacji β-wyrażenie w postaci normalnej stopnia $n-1$, które zawiera prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych R_1, R_2 jeszcze tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne.

Dowód przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 68; przy postępowaniu Skolema należy jednak teraz uwzględnić wyrażenie $(Ev_p)_1^{s_1-1}\left[f_{k+1}(v_1) \mathbin{\&} \sum_{j=1}^{s_1-1}(R_1(v_j, v_{j+1}) \mathbin{\&} R_2(v_j, x_j))\right]$ zamiast wyrażenia $(Ev_p)_1^{s_1-1}\left[f_{k+1}(v_1) \mathbin{\&} \sum_{j=1}^{s_1-1}\Phi(v_j, v_{j+1}, x_j)\right]$.

Twierdzenie 70. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, γ-wyrażenie w skolemowskiej postaci normalnej $(x_1)(x_2)\ldots$ $\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$, które prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej $\Phi(x, y, z)$ zawiera jeszcze tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne.*

Dowód. Gdy A jest dowolnie danym wyrażeniem, wówczas znajdujemy najprzód, na mocy twierdzenia 66, równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, γ-wyrażenie B zawierające, prócz wyróżnionej zmiennej funkcyjnej Φ jeszcze tylko jednoczłonowe $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Wyrażenie B można sobie wyobrazić, bez ujmy dla ogólności, w postaci normalnej $(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Wyrażenie $(x)(?x_1)(?x_2)\ldots(?x_n)(Ey)[\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathbin{\&}$ $\mathbin{\&} f_1(x) \vee \overline{f_1}(y)]$ jest wtedy również γ-wyrażeniem o tych samych zmiennych funkcyjnych co B i równoważne z B, a więc i z A, pod względem posiadania realizacji. Prefiks tego wyrażenia zaczyna się kwantyfikatorem ogólnym a kończy się szczegółowym i przeto posiada pewien stopień, np. n. Stosując teraz $n-1$ razy twierdzenie 68 otrzymamy γ-wyrażenie stopnia pierwszego zawierające, prócz zmiennej wyróżnionej Φ, jeszcze tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne i równoważne z A pod względem posiadania realizacji, c. b. d. o.

Twierdzenie 71. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, β-wy-*

rażenie o skolemowskim prefiksie $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots\ldots(Ey_s)$, *które prócz zmiennych wyróżnionych* R_1, R_2 *zawiera jeszcze tylko jednoczłonowe zmienne funkcyjne.*

Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu twierdzenia 70. Różnica jest tylko ta, że zamiast twierdzeń 66 i 68 należy teraz uwzględnić twierdzenia 67 i 69. Inny dowód otrzymujemy, stosując do twierdzenia 70 bezpośrednio twierdzenie 65.

Udowodnimy teraz pewne twierdzenie, które nam pozwoli znacznie zaostrzyć twierdzenia 70 i 71. Do tego twierdzenia będzie nam potrzebny następujący

L e m m a t 3. *Do 2. r, zdefiniowanych w pewnym zbiorze* $\mathfrak{J}$, *funkcyj logicznych n członowych* $H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ *istnieje wtedy i tylko wtedy funkcja logiczna* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *czyniąca zadość warunkom*

a) $(x_1)(x_2)\ldots(x_n)[H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))]$ *(dla* $i = 1, 2, \ldots, r$*), gdy zachodzą (dla* $i, k = 1, 2, \ldots, r$*) warunki*

b) $(x_1)(x_2)\ldots(x_n)[H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))]$[82].

D o w ó d. Gdy warunki a) są spełnione przez jakąś funkcję $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wówczas dla $i, k = 1, 2, \ldots, r$ zachodzi

[82] Powyższy lemmat daje się w rozmaitych kierunkach uogólnić. Jedno takie uogólnienie brzmi: D o $r.$ $(s+1)$, z d e f i n i o w a n y c h w p e w n y m z b i o r z e $\mathfrak{J}$, f u n k c y j l o g i c z n y c h $H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $G_{k,i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (d l a $i=1, 2, \ldots, r$; $k=1, 2, \ldots, s$) i s t n i e j e w t e d y i t y l k o w t e d y u k ł a d s f u n k c y j l o g i c z n y c h $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(k=1, 2, \ldots, s)$ c z y n i ą c y c h z a d o ś ć w a r u n k o m

c) $(x_1)(x_2)\ldots(x_n)\Big[H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \sum_{l=1}^{s}\big(F_l(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_{l,i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)\Big]$

(d l a $i=1, 2, \ldots, r$), g d y z a c h o d z i

d) $(x_1)(x_2)\ldots(x_n)\Big[H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \sum_{l=1}^{s}\big(G_{l,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_{l,i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)\Big]$ d l a $i, k = 1, 2, \ldots, r$.

Warunki b) i d) należy właściwie uwzględnić tylko dla $i \neq k$, gdyż w wypadku $i = k$ warunki te są w sposób trywialny spełnione. Warunki te są też wtedy zawsze spełnione, gdy dla $i, k = 1, 2, \ldots, r$ oraz $i \neq k$ zachodzi $(x_1)(x_2)\ldots(x_n)\big[\overline{H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\big]$.

$H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))$
oraz
$H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n))$,
a więc także
$H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \& (F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, z czego, na mocy zasady logiki zdań $(p \sim q) \& (p \sim t) \rightarrow (q \sim t)$, uzyskuje się

$$H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow$$
$$\rightarrow (G_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

a tym samym warunki b) są spełnione.

Gdy odwrotnie warunki b) są spełnione, wówczas definiujemy w zbiorze $\mathfrak{I}$ najprzód funkcję matematyczną $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, której wartościami mogą być tylko liczby naturalne $1, 2, \ldots, r$, w sposób następujący: Jeśli dla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ze zbioru $\mathfrak{I}$ istnieje taka liczba i, że $H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi, wówczas $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ma oznaczać najmniejszą liczbę o tej własności. Gdy zaś takiej liczby i nie ma, wówczas ma być $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Jeśli teraz zdefiniujemy w zbiorze $\mathfrak{I}$ funkcję logiczną $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ przez równoważność

$$(87) \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv G_{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wówczas funkcja ta czyni zadość warunkom a) (dla $i = 1, 2, \ldots, r$)

Z definicji funkcji $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wynika bowiem przede wszystkim zachodzenie implikacji $H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow$ $\rightarrow H_{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, która w połączeniu z zachodzącą na mocy b), implikacją $H_{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow$ $\rightarrow (G_{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ daje natychmiast $H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (G_{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, z czego na mocy (87) wynika

$$H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

dla $i = 1, 2, \ldots, r$, czyli warunki a) są spełnione.

T w i e r d z e n i e 72. *Do każdego wyrażenia węższego rachunku funkcyj można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie o skolemowskim prefiksie* $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$, *które zawiera tylko jedną zmienną funkcyjną.*

D o w ó d. Gdy A jest dowolnie danym wyrażeniem, wówczas można, na mocy twierdzenia 3, przede wszystkim podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie B w skolemowskiej postaci normalnej $(x_\rho)_1^p$ $(Ex_\rho)_{p+1}^q \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ $(p < q)$. Niech $F_1, F_2, \ldots, F_n$ będą wszystkimi różnymi zmiennymi funkcyjnymi wyrażenia B, przy czym liczba argumentów zmiennej F_i niech wyniesie r_i (dla $i = 1, 2, \ldots, n$). Niech będzie dalej $r = n + Max(r_1, r_2, \ldots, r_n) + 1$ i $F(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ dowolną r członową zmienną funkcyjną, zaś $y_1, y_2, \ldots, y_n$ niech będą zmiennymi pozornymi różnymi pomiędzy sobą i różnymi od $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Jeśli teraz przez $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ oznaczymy wynik zastąpienia w $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ każdej kombinacji kształtu $F_i(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots$ $\ldots, x_{\alpha_{r_i}})$ przez $F(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{r_i}}, y_i, y_i, \ldots, y_i)$[83] (dla $i = 1, 2, \ldots, n$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r_i} = 1, 2, \ldots, q$), wówczas koniunkcja C wyrażeń

$$(C_1) \quad (y_\rho)_1^n (x_\rho)_1^p (Ex_\rho)_{p+1}^q \Bigg[\sum_{i=1}^{p} F(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_i, x_i, \ldots, x_i) \rightarrow$$
$$\rightarrow \Bigg(\sum_{i=p+1}^{q} F(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_i, x_i, \ldots, x_i) \,\&$$
$$\& \,\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_n)\Bigg)\Bigg],$$

$$(C_2) \qquad (Ez_\rho)_1^n (Ez) F(z_1, z_2, \ldots, z_n, z, z, \ldots, z),$$

zawiera tylko jedną zmienną funkcyjną F, daje się sprowadzić do skolemowskiej postaci normalnej o prefiksie $(y_\rho)_1^n (x_\rho)_1^p$ $(Ex_\rho)_{p+1}^q (Ez_\rho)_1^n (Ez)$ i jest wyrażeniem równoważnym z B — a więc także z A — pod względem posiadania realizacji. To ostatnie pokazuje się w sposób następujący:

Gdy wyrażenie B ma realizację i $F_1', F_2', \ldots, F_n'$ jest układem spełniającym to wyrażenie w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}'$, zaś $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dowolne przedmioty w liczbie n, różne od siebie i różne od wszystkich elementów zbioru $\mathfrak{J}'$, wówczas

[83] Pierwsze n argumentów należy wypełnić po kolei przez $y_1, y_2, \ldots, y_n$, dalsze r_i po kolei przez $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{r_i}}$, zaś pozostałe przez y_i (pozostają argumenty wolne, gdyż z równości $r = n + Max(r_1, r_2, \ldots$ $\ldots, r_n) + 1$ wynika natychmiast $r - n - r_i > o$).

istnieje funkcja logiczna $F'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ zdefiniowana w zbiorze $\mathfrak{Z}' + \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i zadość czyniąca następującym warunkom:

1)) Funkcja $F'(a_1, a_2, \ldots, a_n, x, x, \ldots, x)$ charakteryzuje zbiór $\mathfrak{Z}'$, tzn., że zachodzi $F'(a_1, a_2, \ldots, a_n, x, x, \ldots, x)$ wtedy i tylko wtedy dla elementu x z $\mathfrak{Z}' + \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, gdy x należy już do $\mathfrak{Z}'$.

2)) $F'(a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}, a_i, a_i, \ldots, a_i)$ jest równoważne z $F'_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i})$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$ i dla $x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}$ ze zbioru $\mathfrak{Z}'$.

3)) $F'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ jest fałszywe, gdy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nie są odpowiednio równe elementom $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Gdy w zbiorze $\mathfrak{Z}' + \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ zdefiniujemy funkcje logiczne $H_i(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $G_i(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n+2$ przez równoważności:

$$H_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = a_i \;\&\; \sum_{i=n+1}^{r-1} x_i = x_r\right),$$

$$H_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} x_k = a_k \;\&\; \sum_{k=n+1}^{n+r_i} \overline{\sum_{l=1}^{n} x_k = a_l} \;\&\; \sum_{k=n+r_i+1}^{r} x_k = a_i\right)$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$H_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \equiv \overline{\sum_{i=1}^{n} x_i = a_i},$$

$$G_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) \equiv \overline{\sum_{i=1}^{n} x_r = a_i},$$

$$G_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \equiv F'_i(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+r_i})$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$G_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \equiv (\overline{x_1 = x_1}),$$

wówczas zachodzenie warunku 1)), dla pewnej funkcji $F'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, jest równoważne, jak łatwo widzieć, zachodzeniu

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,[H_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) \rightarrow (F'(x_1, x_2, \ldots, x_r) \sim \sim G_1(x_1, x_2, \ldots, x_r))];$$

zachodzenie warunku 2)), dla pewnej funkcji $F'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, jest równoważne zachodzeniu

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,[H_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \rightarrow (F'(x_1, x_2, \ldots, x_r) \sim \sim G_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r))]$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$;

zaś zachodzenie warunku 3)) dla pewnej funkcji $F'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ jest równoważne zachodzeniu

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,[H_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \rightarrow (F'(x_1, x_2, \ldots, x_r) \sim G_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r))].$$

Równoczesne więc zachodzenie warunków 1)), 2)) i 3)) dla pewnej funkcji $F'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ jest przeto równoważne zachodzeniu

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,[H_i(x_1, x_2, \ldots, x_r) \rightarrow (F'(x_1, x_2, \ldots, x_r) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_r))],$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n+2$, co znów — na mocy lemmatu 3 — jest równoważne zachodzeniu

$$(88)\quad (x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,[H_k(x_1, x_2, \ldots, x_r) \,\&\, H_i(x_1, x_2, \ldots, x_r) \rightarrow (G_k(x_1, x_2, \ldots, x_r) \sim G_i(x_1, x_2, \ldots, x_r))]$$

dla $i, k = 1, 2, \ldots, n+2$, przy czym $i \neq k$.

Pokażemy teraz, że zachodzi

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,\overline{[H_k(x_1, x_2, \ldots, x_r) \,\&\, H_i(x_1, x_2, \ldots, x_r)]},$$

dla $i, k = 1, 2, \ldots, n+2$ oraz $i \neq k$, tzn., że poprzednik implikacji z (88) jest fałszywy, a więc, że (88) jest prawdziwe:

Z $H_1(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ wynika, jak łatwo widzieć, $\overline{x_{n+1} = x_r}$, zaś z $H_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ (dla $i = 1, 2, \ldots, n$) wynika $x_{n+1} = x_r$; zachodzi więc

$$(89{\cdot}1)\quad (x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,\overline{[H_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) \,\&\, H_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)]}$$
$$\text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Z $H_1(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ wynika, jak łatwo widzieć, $\sum_{i=1}^{n} x_i = a_i$, gdy $H_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ wyraża coś wręcz przeciwnego; zachodzi więc

$$(89{\cdot}2)\quad (x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,\overline{[H_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) \,\&\, H_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_r)]}.$$

Z $H_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ (gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$) wynika, jak łatwo widzieć, $x_r = a_i$, zaś z $H_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ (gdzie $k = 1, 2, \ldots, n$) wynika z tego samego powodu $x_r = a_k$; zachodzi więc dla $i \neq k$ oraz $i, k = 1, 2, \ldots, n$[84]

[84] Z $x_r = a_i$ oraz $x_r = a_k$ wynika $a_i = a_k$, co dla $i \neq k$ zajść nie może, gdyż elementy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są same różne.

(89·3) $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,[\overline{H_{k+1}(x_1,x_2,\ldots,x_r)\,\&\,H_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_r)}]$.

Z $H_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ (gdzie $i=1,2,\ldots,n$) wynika, jak łatwo widzieć, $\sum_{k=1}^{n} x_k = a_k$, podczas gdy z $H_{n+2}(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ wynika $\overline{\sum_{k=1}^{n}} x_k = a_k$; zachodzi więc dla $i=1,2,\ldots,n$

(89·4) $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,[\overline{H_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_r)\,\&\,H_{n+2}(x_1,x_2,\ldots,x_r)}]$.

Z (89·1), (89·2), (89·3) i (89·4) wynika natychmiast

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_r)\,[\overline{H_k(x_1,x_2,\ldots,x_r)\,\&\,H_i(x_1,x_2,\ldots,x_r)}],$$

dla $i,k=1,2,\ldots,n+2$ oraz $i\neq k$, c. b. d. o.

Przy pomocy lemmatu 3 udowodniliśmy, że istnieje funkcja logiczna $F'(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ zdefiniowana w zbiorze $\mathfrak{J}'+\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ i zadość czyniąca warunkom 1)), 2)) i 3)). Pokażemy teraz, że funkcja $F'(x_1,x_2,\ldots,x_r)$[85] spełnia wyrażenie C w zbiorze $\mathfrak{J}'+\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$.

Z $(x_p)_1^p\,(Ex)_{p+1}^q\,\mathfrak{A}'(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ i z warunku 2)) wynika bowiem najprzód $(x_p)_1^p\,(Ex)_{p+1}^q\,\mathfrak{B}'(x_1,x_2,\ldots,x_q;a_1,a_2,\ldots,a_n)$[86], z czego na podstawie warunku 1)) wynika

$$(90)\quad (x_p)_1^p\,(Ex_p)_{p+1}^q\left[\sum_{i=1}^{p} F'(a_1,a_2,\ldots,a_n,x_i,x_i,\ldots,x_i)\rightarrow\right.$$
$$\rightarrow\Big(\sum_{i=p+1}^{q} F'(a_1,a_2,\ldots,a_n,x_i,x_i,\ldots,x_i)\,\&$$
$$\left.\&\,\mathfrak{B}'(x_1,x_2,\ldots,x_q;a_1,a_2,\ldots,a_n)\Big)\right],$$

przy czym kwantyfikatory w (90) odnoszą się już do zbioru $\mathfrak{J}'+\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$.

Gdybyśmy teraz w (90) elementy $a_1,a_2,\ldots,a_n$ zastąpili przez dowolne elementy $y_1,y_2,\ldots,y_n$ ze zbioru $\mathfrak{J}'+\{a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n\}$, wówczas (90) przeszłoby znów w zdanie prawdziwe,

[85] Pod $F'(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ należy właściwie rozumieć jakąś funkcję zadość czyniącą warunkom 1)), 2)) i 3)), gdyż warunki te nie określają takiej funkcji jednoznacznie.

[86] Kwantyfikatory w tym wyrażeniu odnoszą się do zbioru $\mathfrak{J}'$, zaś $\mathfrak{B}'$ oznacza, jak się łatwo można domyślić, wynik zastąpienia F przez F' w $\mathfrak{B}$.

gdyż, w przypadku gdy elementy $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nie są odpowiednio równe $a_1, a_2, \ldots, a_n$, poprzednik $\sum_{i=1}^{p} F'(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_i, x_i, \ldots, x_i)$ implikacji

$$\Big[\sum_{i=1}^{p} F'(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_i, x_i, \ldots, x_i) \rightarrow \\ \rightarrow \Big(\sum_{i=p+1}^{q} F'(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_i, x_i, \ldots, x_i) \,\&\, \\ \&\, \mathfrak{B}'(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big)\Big]$$

jest na mocy warunku 3)) fałszywy, a tym samym cała implikacja prawdziwa, niezależnie od tego, jakie elementy weźmiemy na $x_1, x_2, \ldots, x_q$ [87].

Wynika z tego więc

$$(y_\varrho)_1^n (x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q \Big[\sum_{i=1}^{p} F'(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_i, x_i, \ldots, x_i) \rightarrow \\ \rightarrow \Big(\sum_{i=p+1}^{q} F'(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_i, x_i, \ldots, x_i) \,\&\, \\ \&\, \mathfrak{B}'(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big)\Big],$$

czyli że funkcja $F'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ spełnia wyrażenie C_1 w zbiorze $\mathfrak{I}' + \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Funkcja $F'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ spełnia jednak także C_2, gdyż zachodzi na mocy 1)) $(Ez) F'(a_1, a_2, \ldots, a_n, z, z, \ldots, z)$ (z uwzględnieniem tego, że zbiór $\mathfrak{I}'$ nie jest pusty), a więc także $(Ez_\varrho)_1^n (Ez) F'(z_1, z_2, \ldots, z_n, z, z, \ldots, z)$.

Pozostaje nam teraz pokazać, że odwrotnie z istnienia realizacji wyrażenia C wynika istnienie realizacji wyrażenia B.

Gdy jakaś funkcja $F''(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ spełnia wyrażenie C w jakimś zbiorze $\mathfrak{I}''$, wówczas zachodzi

$$(91)\quad (y_\varrho)_1^n (x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q \Big[\sum_{i=1}^{p} F''(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_i, x_i, \ldots, x_i) \rightarrow \\ \rightarrow \Big(\sum_{i=p+1}^{q} F''(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_i, x_i, \ldots, x_i) \,\&\, \\ \&\, \mathfrak{B}''(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big)\Big]$$

oraz

[87] Ale oczywiście ze zbioru $\mathfrak{I}' + \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

(92) $(Ez_p)_1^n (Ez) F''(z_1, z_2, \ldots, z_n, z, z, \ldots, z)$.

Z (92) wynika istnienie w zbiorze $\mathfrak{J}''$ $n+1$ elementów $b_1, b_2, \ldots, b_n, b$ takich, że zachodzi $F''(b_1, b_2, \ldots, b_n, b, b, \ldots, b)$. Z (91) wynika następnie

$$(x_p)_1^p (Ex_p)_{p+1}^q \Big[\sum_{i=1}^{p} F''(b_1, b_2, \ldots, b_n, x_i, x_i, \ldots, x_i) \rightarrow$$
$$\rightarrow \Big(\sum_{i=p+1}^{q} F''(b_1, b_2, \ldots, b_n, x_i, x_i, \ldots, x_i) \,\&$$
$$\& \,\mathfrak{B}''(x_1, x_2, \ldots, x_q; b_1, b_2, \ldots, b_n)\Big)\Big]$$

oraz

(93) $(x_p)_1^p (Ex_p)_{p+1}^q \mathfrak{B}''(x_1, x_2, \ldots, x_q; b_1, b_2, \ldots, b_n)$,

przy czym w (93) kwantyfikatory odnoszą się tylko do podzbioru $\mathfrak{K}$ zbioru $\mathfrak{J}''$, scharakteryzowanego przez funkcję logiczną $F''(b_1, b_2, \ldots, b_n, x, x, \ldots, x)$[88] (zbiór $\mathfrak{K}$ nie jest pusty, gdyż element b w każdym razie do niego należy).

Jeśli teraz w zbiorze $\mathfrak{K}$ zdefiniujemy funkcje logiczne $F_1'', F_2'', \ldots, F_n''$ przez równoważności

$$F_i''(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}) \equiv F''(b_1, b_2, \ldots, b_n, x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}, b_i, b_i, \ldots, b_i)$$

(dla $i = 1, 2, \ldots, n$), wówczas, na mocy (93) i definicji wyrażenia $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_n)$, zachodzi w zbiorze $\mathfrak{K}$

$$(x_p)_1^p (Ex_p)_{p+1}^q \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_q),$$

co dowodzi, że układ $F_1'', F_2'', \ldots, F_n''$ spełnia wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{K}$. Wyrażenia B i C, i przeto także A i C, są więc istotnie równoważne, a tym samym twierdzenie 72 zostało całkowicie udowodnione.

T w i e r d z e n i e 73. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, γ-wyrażenie w skolemowskiej postaci normalnej, które prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej $\Phi(x, y, z)$ zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną.*

Gdy A jest dowolnie danym wyrażeniem, wówczas znajdujemy do niego, na mocy twierdzenia 72, najprzód równo-

[88] To znaczy, że te i tylko te elementy x należą do $\mathfrak{K}$, dla których $F''(b_1, b_2, \ldots, b_n, x, x, \ldots, x)$ zachodzi. Ponieważ zachodzi $F''(b_1, b_2, \ldots, b_n, b, b, \ldots, b)$, więc b jest elementem zbioru $\mathfrak{K}$.

ważne wyrażenie B w skolemowskiej postaci normalnej zawierające tylko jedną zmiennę funkcyjną $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Wyrażenie B daje się napisać w postaci $(x_\rho)_1^r (Ex_\rho)_{r+1}^s$ $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, gdzie $r < s$, zaś $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ można sobie wyobrazić — bez uszczerbku dla ogólności — w koniunktywnej postaci normalnej $\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{B}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, gdzie $\mathfrak{B}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ oznaczają (dla $i = 1, 2, \ldots, m$) elementarne dyzjunkcje. Składniki dyzjunkcji $\mathfrak{B}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ (dla $i = 1, 2, \ldots, m$) są albo postaci $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})$, albo postaci $\overline{F}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})$. Wynik zastąpienia w $\mathfrak{B}_i(x_1, x_2, \ldots x_s)$ każdego składnika postaci $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})$ przez $(E\overset{i}{v}_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{j=1}^{n-2} \Phi(\overset{i}{v}_j, \overset{i}{v}_{j+1}, x_{\alpha_j}) \mathbin{\&} \Phi(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_n}, x_{\alpha_{n-1}}) \mathbin{\&} f(\overset{i}{v}_1)\right]$[89], zaś każdego składnika postaci $\overline{F}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})$ przez $(E\overset{i}{v}_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{j=1}^{n-2} \Phi(\overset{i}{v}_j, \overset{i}{v}_{j+1}, x_{\alpha_j}) \mathbin{\&} \Phi(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_n}, x_{\alpha_{n-1}}) \mathbin{\&} \overline{f}(\overset{i}{v}_1)\right]$ oznaczmy przez $\mathfrak{C}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ a to dla $i = 1, 2, \ldots, m$.

Jeśli teraz wynik zastąpienia w $\mathfrak{B}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ każdego składnika postaci $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})$ przez $\left[\sum_{j=1}^{n-2} \Phi(\overset{i}{v}_j, \overset{i}{v}_{j+1}, x_{\alpha_j}) \mathbin{\&} \Phi(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_n}, x_{\alpha_{n-1}}) \mathbin{\&} f(\overset{i}{v}_1)\right]$, zaś każdego składnika postaci $\overline{F}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})$ przez $\left[\sum_{j=1}^{n-2} \Phi(\overset{i}{v}_j, \overset{i}{v}_{j+1}, x_{\alpha_j}) \mathbin{\&} \Phi(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_n}, x_{\alpha_{n-1}}) \mathbin{\&} \overline{f}(\overset{i}{v}_1)\right]$ oznaczymy przez $\mathfrak{D}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s; \overset{i}{v}_1, \overset{i}{v}_2, \ldots, \overset{i}{v}_{n-1})$ (dla $i = 1, 2, \ldots, m$), wówczas – w przeciwieństwie do $\mathfrak{C}_i(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_s)$ — $\mathfrak{D}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s; \overset{i}{v}_1, \overset{i}{v}_2, \ldots, \overset{i}{v}_{n-1})$ nie zawiera już zmiennych pozornych i przy uwzględnieniu równoważności $[(Ex)\, F(x) \vee (Ex)\, G(x)] \equiv (Ex)\, [F(x) \vee G(x)]$, wyrażenie

$$(94) \qquad (x_1)(x_2)\ldots(x_s)\, [\mathfrak{C}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s) \sim \\ \sim (E\overset{i}{v}_\rho)_1^{n-1}\, \mathfrak{D}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s; \overset{i}{v}_1, \overset{i}{v}_2, \ldots, \overset{i}{v}_{n-1})]$$

okazuje się tautologicznym (dla $i = 1, 2, \ldots, m$).

---

[89] Gdzie f jest dowolną zmienną jednoczłonową.

Koniunkcja C następujących trzech wyrażeń:

$$(C_1)\quad (x_p)_1^r (Ex_p)_{r+1}^s (E\overset{1}{v}_p)_1^{n-1} (E\overset{2}{v}_p)_1^{n-1} \dots (E\overset{m}{v}_p)_1^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{D}_i (x_1, x_2, \dots, x_s; \overset{i}{v}_1, \overset{i}{v}_2, \dots, \overset{i}{v}_{n-1}),$$

$$(C_2)\quad (x)(y)(Ez)\,\Phi(z, y, x),$$

$$(C_3)\quad (v_p)_1^{n-1} (\overset{*}{v}_p)_1^{n-1} (x_p)_1^n \Big[\sum_{i=1}^{n-2} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&} \Phi(v_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n-2} \Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, x_i) \mathbin{\&} \Phi(\overset{*}{v}_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \mathbin{\&} f(v_1) \rightarrow f(\overset{*}{v}_1)\Big],$$

zawiera wtedy tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną f — prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej Φ —, daje się sprowadzić do skolemowskiej postaci normalnej o prefiksie $(x_p)_1^r (v_p)_1^{n-1} (\overset{*}{v}_p)_1^{n-1} (y_p)_1^n (x)(y)(Ez)(Ex_p)_{r+1}^s (E\overset{1}{v}_p)_1^{n-1} (E\overset{2}{v}_p)_1^{n-1} \dots (E\overset{m}{v}_p)_1^{n-1}$ [90] oraz jest wyrażeniem równoważnym z wyrażeniem B — a przeto także z A — pod względem posiadania realizacji. Równoważność wyrażeń B i C udowadnia się następująco:

Gdy wyrażenie B ma w ogóle realizację, wówczas, na mocy twierdzenia 9, także w zbiorze $\mathfrak{Z}$ wszystkich liczb naturalnych. Niech $F'(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będzie funkcją spełniającą wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{Z}$, zaś $\Phi'(x, y, z)$ funkcją logiczną, która w sposób jednojednoznaczny odwzorowuje wszystkie liczby naturalne x na wszystkie pary $[y, z]$ liczb naturalnych, np. $x = 2^{y-1}.\,(2z - 1)$. Jeśli teraz w zbiorze $\mathfrak{Z}$ zdefiniujemy funkcję f' przez równoważność

$$(95)\quad f'(v_1) \equiv (Ey_p)_1^{n-1} (Ev_p)_2^n \Big[F'(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, v_n) \mathbin{\&} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi'(v_i, v_{i+1}, y_i)\Big],$$

wówczas funkcje f', Φ' tworzą w zbiorze $\mathfrak{Z}$ realizację wyróżnioną wyrażenia C. Z twierdzenia 39 oraz z równoważności (95) wynika bowiem najprzód podwójna równoważność

[90] Jest to natychmiast widoczne, gdy się zmienne $x_1, x_2, \dots, x_n$ zastąpi w C_3 kolejno przez $y_1, y_2, \dots, y_n$.

$$F'(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi'(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&} f'(v_1) \right] \equiv$$

$$\equiv (v_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi'(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow f'(v_1) \right],$$

a z tego łatwo następujące dwie pojedyncze

$$(96{\cdot}1) \quad F'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-2} \Phi'(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&} \right.$$
$$\left. \mathbin{\&} \Phi'(v_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \mathbin{\&} f'(v_1) \right],$$

$$(96{\cdot}2) \quad \overline{F'}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (Ev_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-2} \Phi'(v_i, v_{i+1}, x_i) \mathbin{\&} \right.$$
$$\left. \mathbin{\&} \Phi'(v_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \mathbin{\&} \overline{f'}(v_1) \right].$$

Na mocy (96·1) i (96·2) zachodzą dla $1 \leqq \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \leqq s$ oraz $i = 1, 2, \ldots, m$ równoważności

$$F'(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}) \equiv (E\overset{i}{v}_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{j=1}^{n-2} \Phi'(\overset{i}{v}_j, \overset{i}{v}_{j+1}, x_{\alpha_j}) \mathbin{\&} \right.$$
$$\left. \mathbin{\&} \Phi'(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_n}, x_{\alpha_{n-1}}) \mathbin{\&} f'(\overset{i}{v}_1) \right],$$

$$\overline{F'}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}) \equiv (E\overset{i}{v}_\rho)_1^{n-1} \left[\sum_{j=1}^{n-2} \Phi'(\overset{i}{v}_j, \overset{i}{v}_{j+1}, x_{\alpha_j}) \mathbin{\&} \right.$$
$$\left. \mathbin{\&} \Phi'(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_n}, x_{\alpha_{n-1}}) \mathbin{\&} \overline{f'}(\overset{i}{v}_1) \right],$$

które w połączeniu z definicją wyrażeń $\mathfrak{C}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ oraz z uwzględnieniem $(x_\rho)_1^r (Ex_\rho)_{r+1}^s \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ dają bez trudności

$$(97) \qquad (x_\rho)_1^r (Ex_\rho)_{r+1}^s \sum_{i=1}^m \mathfrak{C}_i'(x_1, x_2, \ldots, x_s).$$

Z (94) i (97) wynika dalej

$$(x_\rho)_1^r (Ex_\rho)_{r+1}^s \sum_{i=1}^m (E\overset{i}{v}_\rho)_1^{n-1} \mathfrak{D}_i'(x_1, x_2, \ldots, x_s; \overset{i}{v}_1, \overset{i}{v}_2, \ldots, \overset{i}{v}_{n-1}),$$

a więc także

$$(x_\rho)_1^r (Ex_\rho)_{r+1}^s (E\overset{1}{v}_\rho)_1^{n-1} (E\overset{2}{v}_\rho)_1^{n-1} \ldots$$
$$\ldots (E\overset{m}{v}_\rho)_1^{n-1} \sum_{i=1}^m \mathfrak{D}_i'(x_1, x_2, \ldots, x_s; \overset{i}{v}_1, \overset{i}{v}_2, \ldots, \overset{i}{v}_{n-1}),$$

czyli funkcje f', Φ' spełniają wyrażenie C_1 w zbiorze $\mathfrak{Z}$. W twierdzeniu 22 udowodniliśmy, że jeśli jakaś funkcja Φ

czyni zadość warunkowi (65), wówczas zachodzi (66) i także (68). Ponieważ funkcja Φ' czyni zadość warunkowi (65), przeto zachodzi na mocy (68)

$$(x_p)_1^{n-1} (\overset{*}{x}_p)_1^{n-1} (v_p)_1^n (\overset{*}{v}_p)_1^n \Big\{ \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (x_i = \overset{*}{x}_i) \,\&\, v_n = \overset{*}{v}_n \,\&$$
$$\&\, \sum_{i=1}^{n-1} \Phi'(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&\, \sum_{i=1}^{n-1} \Phi'(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i) \Big] \to (v_1 = \overset{*}{v}_1) \Big\},$$

z czego uzyskuje się łatwo[91]

$$(v_p)_1^{n-1} (\overset{*}{v}_p)_1^{n-1} (x_p)_1^n \Big[\sum_{i=1}^{n-2} \Phi'(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&\, \Phi'(v_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \,\&$$
$$\&\, \sum_{i=1}^{n-2} \Phi'(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, x_i) \,\&\, \Phi'(\overset{*}{v}_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \to (v_1 = \overset{*}{v}_1) \Big],$$

co w połączeniu z $(v_1 = \overset{*}{v}_1) \to [f'(v_1) \to f'(\overset{*}{v}_1)]$ daje natychmiast

$$(v_p)_1^{n-1} (\overset{*}{v}_p)_1^{n-1} (x_p)_1^n \Big[\sum_{i=1}^{n-2} \Phi'(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&\, \Phi'(v_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \,\&$$
$$\&\, \sum_{i=1}^{n-2} \Phi'(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, x_i) \,\&\, \Phi'(\overset{*}{v}_{n-1}, x_n, x_{n-1}) \,\&\, f'(v_1) \to f'(\overset{*}{v}_1) \Big],$$

które dowodzi, że funkcje f', Φ' spełniają wyrażenie C_3. A ponieważ zachodzi także $(x)(y)(Ez)\,\Phi'(z, y, x)$, więc funkcje f', Φ' spełniają całe wyrażenie C i tworzą jego realizację wyróżnioną w zbiorze $\mathfrak{Z}$.

Gdy odwrotnie, wyrażenie C posiada realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{Z}$ i funkcjami spełniającymi są f'', Φ'', wówczas definiując funkcję $F''(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ przez równoważność

$$(98) \quad F''(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, v_n) \equiv (Ev_p)_1^{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi''(v_i, v_{i+1}, x_i) \,\&$$
$$\&\, f''(v_1) \Big]$$

uzyskujemy funkcję spełniającą wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{Z}$.

Według założenia zachodzą bowiem

$$(99) \quad (x_p)_1^r (Ex_p)_{r+1}^s (E\overset{1}{v}_p)_1^{n-1} (E\overset{2}{v}_p)_1^{n-1} \ldots$$
$$\ldots (E\overset{m}{v}_p)_1^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{D}_i''(x_1, x_2, \ldots, x_s; \overset{i}{v}_1, \overset{i}{v}_2, \ldots, \overset{i}{v}_{n-1}),$$

[91] Należy na $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_{n-1}$ wziąć odpowiednio $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, zaś za v_n i $\overset{*}{v}_n$ podstawić x_n.

(100) $$(x)\,(y)\,(Ez)\,\Phi''(z, y, x),$$

(101) $$(v_\rho)_1^{n-1}\,(\overset{*}{v}_\rho)_1^{n-1}\,(x_\rho)_1^{n}\left[\sum_{i=1}^{n-2}\Phi''(v_i, v_{i+1}, x_i)\mathbin{\&}\Phi''(v_{n-1}, x_n, x_{n-1})\mathbin{\&}\right.$$
$$\left.\mathbin{\&}\sum_{i=1}^{n-2}\Phi''(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, x_i)\mathbin{\&}\Phi''(\overset{*}{v}_{n-1}, x_n, x_{n-1})\mathbin{\&} f''(v_1)\rightarrow f''(\overset{*}{v}_1)\right].$$

Z (100) i (101) wynika, na mocy twierdzenia 43, równoważność

$$(Ev_\rho)_1^{n-1}\left[f''(v_1)\mathbin{\&}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]\equiv$$
$$\equiv(v_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, x_i)\rightarrow f''(v_1)\right],$$

która w połączeniu z (98) daje natychmiast

$$F''(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\equiv(v_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, x_i)\rightarrow f''(v_1)\right],$$

z czego wynika łatwo

(102) $$\overline{F''}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\equiv$$
$$\equiv(Ev_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, x_i)\mathbin{\&}\overline{f''}(v_1)\right].$$

Z (99) i (94) wynika natychmiast

$$(x_\rho)_1^r\,(Ex_\rho)_{r+1}^s\sum_{i=1}^{m}\mathfrak{C}_i''(x_1, x_2, \ldots, x_s),$$

co w połączeniu z równoważnościami (98) i (102) daje[92]

[92] Należy uwzględnić, że z (98) i (102) wynikają dla $1\leqq\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n\leqq s$ oraz $i=1, 2, \ldots, m$ równoważności

$$F''(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})\equiv(E\overset{i}{v}_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n-2}\Phi''(\overset{i}{v}_j, \overset{i}{v}_{j+1}, x_{\alpha_j})\mathbin{\&}\right.$$
$$\left.\mathbin{\&}\Phi''(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_n}, x_{\alpha_{n-1}})\mathbin{\&} f''(\overset{i}{v}_1)\right],$$

$$\overline{F''}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})\equiv(E\overset{i}{v}_\rho)_1^{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n-2}\Phi''(\overset{i}{v}_j, \overset{i}{v}_{j+1}, x_{\alpha_j})\mathbin{\&}\right.$$
$$\left.\mathbin{\&}\Phi''(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_n}, x_{\alpha_{n-1}})\mathbin{\&}\overline{f''}(\overset{i}{v}_1)\right].$$

$$(x_p)_1^r (Ex_p)_{r+1}^s \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{B}_i'' (x_1, x_2, \ldots, x_s)$$

czyli

$$(x_p)_1^r (Ex_p)_{r+1}^s \mathfrak{A}'' (x_1, x_2, \ldots, x_s),$$

co dowodzi, że istotnie, z istnienia realizacji wyrażenia C wynika istnienie realizacji wyrażenia B. Ponieważ przedtem pokazaliśmy, że z istnienia realizacji wyrażenia B wynika istnienie realizacji wyróżnionej wyrażenia C, przeto wyrażenia B i C są równoważne i C jest w dodatku γ-wyrażeniem.

Twierdzenie 73 zostało więc w zupełności udowodnione.

Gdybyśmy przy konstrukcji wyrażenia C zamiast wyrażenia C_3 wzięli wyrażenie prostsze $(y)(z)(x)(\overset{*}{x})[\Phi(x, y, z) \mathbin{\&} \mathbin{\&} \Phi(\overset{*}{x}, y, z) \rightarrow x = \overset{*}{x}]$, zamiast twierdzenia 43 stosowali twierdzenie 44, zaś poza tym rozumowali tak samo jak w twierdzeniu 73, wówczas otrzymalibyśmy następujące

T w i e r d z e n i e 74. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, γ-wyrażenie w skolemowskiej postaci normalnej, które prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej Φ zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną oraz identyczność logiczną.*

Twierdzenie 74 jest nieco słabsze od twierdzenia 73, może być jednak w pewnych wypadkach użyte z tym samym skutkiem co twierdzenie 73.

T w i e r d z e n i e 75. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, β-wyrażenie w skolemowskiej postaci normalnej, które prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną.*

Gdy A jest dowolnie danym wyrażeniem, wówczas znajdujemy do niego, na mocy twierdzenia 72, najprzód równoważne wyrażenie B w skolemowskiej postaci normalnej, zawierające tylko jedną zmienną funkcyjną $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Wyrażenie B daje się napisać w postaci

$$(x_p)_1^r (Ex_p)_{r+1}^s \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{B}_i (x_1, x_2, \ldots, x_s),$$

gdzie $\mathfrak{B}_i (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ oznaczają (dla $i = 1, 2, \ldots, m$) elementarne dyzjunkcje. Jeśli f jest dowolną zmienną funkcyjną jednoczłonową i wynik zastąpienia w $\mathfrak{B}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ każdego składnika postaci $F(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})$ przez wyrażenie

$$\left[\sum_{j=1}^{n-2}(R_1(\overset{i}{v}_j, \overset{i}{v}_{j+1}) \,\&\, R_2(\overset{i}{v}_j, x_{\alpha_j})) \,\&\, R_1(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_n}) \,\&\, R_2(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_{n-1}}) \,\&\, f(\overset{i}{v}_1)\right],$$

zaś każdego składnika postaci $\overline{F}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})$ przez wyrażenie

$$\left[\sum_{j=1}^{n-2}(R_1(\overset{i}{v}_j, \overset{i}{v}_{j+1}) \,\&\, R_2(\overset{i}{v}_j, x_{\alpha_j})) \,\&\, R_1(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_n}) \,\&\, R_2(\overset{i}{v}_{n-1}, x_{\alpha_{n-1}}) \,\&\, \overline{f}(\overset{i}{v}_1)\right]$$

oznaczymy przez $\mathfrak{H}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s; \overset{i}{v}_1, \overset{i}{v}_2, \ldots, \overset{i}{v}_{n-1})$ (dla $i = 1, 2, \ldots, m$), wówczas koniunkcja D następujących trzech wyrażeń:

$$(D_1)\quad (x_p)_1^r (Ex_p)_{r+1}^s (E\overset{1}{v}_p)_1^{n-1} (E\overset{2}{v}_p)_1^{n-1} \ldots \ldots (E\overset{m}{v}_p)_1^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{H}_i(x_1, x_2, \ldots, x_s; \overset{i}{v}_1, \overset{i}{v}_2, \ldots, \overset{i}{v}_{n-1}),$$

$$(D_2)\quad (x)(y)(Ez)(R_1(z, y) \,\&\, R_2(z, x)),$$

$$(D_3)\quad (v_p)_1^{n-1} (\overset{*}{v}_p)_1^{n-1} (x_p)_1^n \left[\sum_{i=1}^{n-2}(R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \,\&\, R_1(v_{n-1}, x_n) \,\&\, R_2(v_{n-1}, x_{n-1}) \,\&\, \sum_{i=1}^{n-2}(R_1(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}) \,\&\, R_2(\overset{*}{v}_i, x_i)) \,\&\, R_1(\overset{*}{v}_{n-1}, x_n) \,\&\, R_2(\overset{*}{v}_{n-1}, x_{n-1}) \,\&\, f(v_1) \rightarrow f(\overset{*}{v}_1)\right],$$

zawiera tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną f — prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych R_1, R_2 —, daje się sprowadzić do skolemowskiej postaci normalnej oraz jest wyrażeniem równoważnym z wyrażeniem B — a przeto także z wyrażeniem A — pod względem posiadania realizacji.

Dowód równoważności wyrażeń B i D jest w zasadzie analogiczny do dowodu równoważności wyrażeń B i C z twierdzenia 73; zamiast jednak twierdzeń 39 i 43 należy teraz użyć twierdzeń 40 i 45.

Jeśli zamiast długiego wyrażenia D_3 weźmiemy wyrażenie o wiele krótsze $(y)(z)(x)(\overset{*}{x})\,[R_1(x,y)\ \&\ R_2(x,z)\ \&\ R_1(\overset{*}{x},y)\ \&\ \&\ R_2(\overset{*}{x},z) \rightarrow x = \overset{*}{x}]$ i zamiast twierdzenia 45 zastosujemy teraz twierdzenie 46, wówczas otrzymamy

T w i e r d z e n i e 76. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, β-wyrażenie w skolemowskiej postaci normalnej, które prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną oraz identyczność logiczną.*

Twierdzenie 76 jest wprawdzie nieco słabsze od twierdzenia 75, jednak może być, jak pokażemy, w pewnych wypadkach użyte z tym samym skutkiem co twierdzenie 75, a konstrukcja wyrażenia odpowiedniego z twierdzenia 76 jest, jak już wiemy, prostsza od konstrukcji wyrażenia D z twierdzenia 75.

T w i e r d z e n i e 77. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, β-wyrażenie o gödelowskim*[93] *prefiksie* $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\ldots$

[93] G ö d e l, w pracy cytowanej pod [35], pokazał pierwszy, że przy zagadnieniu rozstrzygalności dla realizacji wystarcza się ograniczyć do wyrażeń, które są w skolemowskiej postaci normalnej i zawierają tylko trzy kwantyfikatory ogólne. G ö d e l w wymienionej pracy, podał metodę kolejnego obniżania liczby kwantyfikatorów ogólnych (aż do trzech). W pracy wymienionej pod [9] pokazałem, że można za jednym zamachem zniżyć liczbę kwantyfikatorów ogólnych do trzech, oraz zaostrzyłem twierdzenie G ö d e l a, wykazawszy, że można się przy tym ograniczyć do wyrażeń zawierających jedynie trzy zmienne funkcyjne dwuczłonowe oraz trzy jednoczłonowe, podczas gdy G ö d e l pokazał tylko, że można się ograniczyć do wyrażeń o co najwyżej dwuczłonowych zmiennych funkcyjnych, bez bliższego oznaczenia ich liczby. Jak się wnet pokaże, to można pójść jeszcze dalej i ograniczyć się do wyrażeń o tylko jednej jednoczłonowej zmiennej funkcyjnej i trzech dwuczłonowych (a o gödelowskim prefiksie). Należy jeszcze dodać, że jeśli chodzi tylko o pokazanie, iż gödelowskie kolejne obniżanie liczby kwantyfikatorów ogólnych daje się zastąpić przez ryczałtowe obniżenie, to pokazał to także, niezależnie ode mnie, Th. S k o l e m w pracy Ein Satz über Zählausdrücke, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 7, 4 zeszyt, str. 193—199. Praca S k o l e m a ukazała się wprawdzie przed moją (wymienioną pod [9]), ale wpłynęła później, od mojej, do redakcji.

...(Ey_s), *które prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych* $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ *zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną oraz identyczność logiczną.*

Niech A będzie dowolnie danym wyrażeniem węższego rachunku funkcyjnego. Na mocy twierdzenia 76 znajdujemy do niego równoważne z nim β-wyrażenie B w skolemowskiej postaci normalnej, które prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych R_1, R_2 zawiera jeszcze jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną f oraz identyczność logiczną. Wyrażenie B jest więc postaci $(x_\rho)_1^r$ $(Ey_\rho)_1^s\ \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$.

Oznaczmy teraz przez C koniunkcję następujących trzech wyrażeń:

$$(C_1)\quad (v_1)(Ev_\rho)_2^r(Ew_\rho)_2^r(Ey_\rho)_1^s\left[\sum_{i=1}^{r-1}(R_1(v_i, v_{i+1})\ \&\ R_2(v_i, w_{i+1}))\ \&\right.$$
$$\left.\&\ \mathfrak{A}(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\right],$$

$$(C_2)\quad (x)(y)(Ez)[R_1(z, x)\ \&\ R_2(z, y)],$$

$$(C_3)\quad (x)(y)(x)[(R_1(x, y)\ \&\ R_1(x, z) \rightarrow y = z)\ \&\ (R_2(x, y)\ \&$$
$$\&\ R_2(x, z) \rightarrow y = z)].$$

Wyrażenie C zawiera, podobnie jak B, tylko zmienne funkcyjne R_1, R_2, f oraz identyczność logiczną. Pokażemy teraz, że C jest β-wyrażeniem równoważnym z wyrażeniem B, a więc i A, pod względem posiadania realizacji.

Gdy wyrażenie B ma realizację, wówczas jako β-wyrażenie posiada także realizację wyróżnioną, np. R_1', R_2', f' w zbiorze $\mathfrak{J}'$. Układ ten jest równocześnie realizacją wyróżnioną wyrażenia C. Gdy v_1 jest dowolnie danym elementem zbioru $\mathfrak{J}'$, wówczas znajdujemy elementy v_i, w_i (dla $i = 2, 3, \ldots, r$) w zbiorze $\mathfrak{J}'$ rekurencyjnie w ten sposób, iż parę, która odpowiada elementowi v_i w jednojednoznacznym odwzorowaniu przez relację $R_1'(z, x)\ \&\ R_2'(z, y)$, oznaczamy przez $[v_{i+1}, w_{i+1}]$ (dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$). Zachodzi więc $\sum_{i=1}^{r-1}(R_1'(v_i, v_{i+1})\ \&\ R_2'(v_i,$ $w_{i+1}))$. Ponieważ funkcje R_1', R_2', f' spełniają, według założenia, wyrażenie B, przeto do elementów $v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r$ istnieją w zbiorze $\mathfrak{J}'$ elementy $y_1, y_2, \ldots, y_s$ takie, że $\mathfrak{A}'(v_r, w_2, w_3, \ldots$

$\ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ zachodzi, a tym samym funkcje R_1', R_2', f' spełniają wyrażenie C_1 w zbiorze $\mathfrak{J}'$. Na mocy twierdzenia 64 funkcje R_1', R_2' spełniają wyrażenie (78), a z tego wynika, że spełniają też wyrażenia C_2 i C_3.

Jeśli więc wyrażenie B ma realizację, wówczas wyrażenie C ma realizację wyróżnioną.

Załóżmy teraz odwrotnie, że wyrażenie C ma realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}''$. Układem spełniającym niech będą funkcje R_1'', R_2'', f''. Zachodzą więc według założenia:

$$(103)\quad (v_1)(Ev_p)_2^r(Ew_p)_2^r(Ey_p)_1^s\Big[\sum_{i=1}^{r-1}(R_1''(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2''(v_i, w_{i+1})) \mathbin{\&} \mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\Big],$$

$$(104)\quad (x)(y)(Ez)[R_1''(z, x) \mathbin{\&} R_2''(z, y)],$$

$$(105)\quad (x)(y)(z)[R_1''(x, y) \mathbin{\&} R_1''(x, z) \rightarrow y = z],$$

$$(106)\quad (x)(y)(z)[R_2''(x, y) \mathbin{\&} R_2''(x, z) \rightarrow y = z].$$

Jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_r$ są dowolnie danymi elementami w liczbie r ze zbioru $\mathfrak{J}''$, wówczas definiujemy najprzód elementy $t_1, t_2, \ldots, t_r$ ze zbioru $\mathfrak{J}''$ w sposób następujący:

Kładziemy

$$(107)\quad t_1 = x_1$$

oraz do każdej pary $t_i, x_{(r+1)-i}$ (dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$) znajdujemy na mocy (104) element, który oznaczamy przez t_{i+1}, taki, że zachodzi

$$(108)\quad R_1''(t_{i+1}, t_i) \mathbin{\&} R_2''(t_{i+1}, x_{(r+1)-i})$$

dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Kładąc w (108) $r-i$ za i otrzymujemy

$$(109)\quad R_1''(t_{(r+1)-i}, t_{r-i}),$$

$$(110)\quad R_2''(t_{(r+1)-i}, x_{i+1})$$

dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Na mocy (103) znajdujemy dla v_1 zdefiniowanego przez

$$(111)\quad v_1 = t_r$$

w zbiorze $\mathfrak{J}''$ dalsze elementy v_i, w_i (dla $i = 2, 3, \ldots, r$) oraz y_i (dla $i = 1, 2, \ldots, s$) takie, że zachodzą

$$(112)\quad R_1''(v_i, v_{i+1}),$$

$$(113)\quad R_2''(v_i, w_{i+1}),$$

dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$, oraz że zachodzi

$$(114)\quad \mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s).$$

Pomiędzy elementami v_i a zdefiniowanymi poprzednio rekurencyjnie elementami t_i zachodzi związek

(115) $$v_i = t_{(r+1)-i}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, r$. Dla $i = 1$ związek ten zachodzi na mocy (111). Załóżmy teraz, że związek ten zachodzi dla pewnego $i < r$. Z $v_i = t_{(r+1)-i}$ oraz z (109) wynika $R_1''(v_i, t_{r-i})$, co w połączeniu z (112) daje, na mocy 105, natychmiast

$$v_{i+1} = t_{r-i} = t_{(r+1)-(i+1)},$$

a tym samym związek (115) został indukcją udowodniony.

Uwzględniwszy (115) w (110) otrzymujemy $R_2''(v_i, x_{i+1})$, dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$, co w połączeniu z (113) daje, na mocy (106),

(116) $$w_{i+1} = x_{i+1}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Kładąc w (115) $i = r$ otrzymujemy $v_r = t_1$, co w połączeniu z (107) daje

$$v_r = x_1.$$

To ostatnie oraz (116) uwzględnione w (114) dają

$$\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s),$$

co dowodzi, że funkcje R_1'', R_2'', f'' spełniają wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{J}''$ (ponieważ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ były dowolnie obrane w $\mathfrak{J}''$).

Z istnienia realizacji wyrażenia C wynika więc istnienie realizacji wyrażenia B, a ponieważ przedtem pokazaliśmy, że z istnienia realizacji wyrażenia B wynika istnienie realizacji wyróżnionej wyrażenia C, więc wyrażenia B i C są równoważne pod względem posiadania realizacji i C jest w dodatku β-wyrażeniem oraz daje się sprowadzić do postaci normalnej o prefiksie kształtu $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$.

Twierdzenie 77 zostało więc w zupełności udowodnione. W dowodzie twierdzenia 77 posługiwaliśmy się twierdzeniem 76, a mianowicie do konstrukcji wyrażenia B. Gdybyśmy zamiast twierdzeniem 76 się posługiwali mocniejszym twierdzeniem 75, wówczas by wyrażenie B wprawdzie nie zawierało identyczności logicznej, ale ostateczne wyrażenie C nadal by identyczność zawierało, gdyż wyrażenie C_3 ją zawiera. Widzimy więc, że w twierdzeniu 77 użycie słabszego twierdzenia 76 daje taki sam skutek, jaki by dało mocniejsze twierdzenie 75.

Równoważność wyrażeń B i C z twierdzenia 77 można jeszcze inaczej udowodnić, jeśli się korzysta z twierdzeń 56 i 60 podanych w paragrafie poprzednim.

Jeśli R_1', R_2', f' jest realizacją wyróżnioną wyrażenia B, wówczas biorąc w twierdzeniu 60 za F funkcję $(Ey_p)_1^s \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$, otrzymujemy (po odpowiedniej zmianie zmiennych) równoważność

$$(x_p)_1^r (Ey_p)_1^s \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \sim$$
$$\sim (v_1)(Ev_p)_2^r (Ew_p)_2^r \Big[\sum_{i=1}^{r-1} (R_1'(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2'(v_i, w_{i+1})) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (Ey_p)_1^s \mathfrak{A}'(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \Big],$$

która w połączeniu z $(x_p)_1^r (Ey_p)_1^s \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ daje łatwo

$$(v_1)(Ev_p)_2^r (Ew_p)_2^r (Ey_p)_1^s \Big[\sum_{i=1}^{r-1} (R_1'(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2'(v_i, w_{i+1})) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \mathfrak{A}'(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \Big],$$

co dowodzi że funkcje R_1', R_2', f' spełniają wyrażenie C_1. A ponieważ funkcje R_1', R_2' spełniają wyrażenia C_2 i C_3, więc mamy nowy dowód na to, że funkcje R_1', R_2', f' spełniają wyrażenie C w zbiorze $\mathfrak{J}'$, tworząc przy tym realizację wyróżnioną.

Gdy odwrotnie R_1'', R_2'', f'' tworzą realizację wyrażenia C w zbiorze $\mathfrak{J}''$, wówczas biorąc w twierdzeniu 56 za R_1 i R_2 odpowiednio R_1'' i R_2'' spełniamy oba warunki twierdzenia 56 i przeto pierwsza implikacja tego twierdzenia daje nam, dla F równego $(Ey_p)_1^s \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$, łatwo

$$(v_1)(Ev_p)_2^r (Ew_p)_2^r \Big[\sum_{i=1}^{r-1} (R_1''(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2''(v_i, w_{i+1})) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (Ey_p)_1^s \mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \Big] \rightarrow$$
$$\rightarrow (x_p)_1^r (Ey_p)_1^s \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s),$$

a więc także

$$(v_1)(Ev_p)_2^r (Ew_p)_2^r (Ey_p)_1^s \Big[\sum_{i=1}^{r-1} (R_1''(v_i, v_{i+1}) \mathbin{\&} R_2''(v_i, w_{i+1})) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \Big] \rightarrow$$
$$\rightarrow (x_p)_1^r (Ey_p)_1^s \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s),$$

co w połączeniu z

$$(v_1)\,(Ev_\rho)_2^r\,(Ew_\rho)_2^r\,(Ey_\rho)_1^s\left[\sum_{i=1}^{r-1}(R_1''(v_i, v_{i+1})\ \&\ R_2''(v_i, w_{i+1}))\ \&\right.$$
$$\left.\&\ \mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r;\ y_1, y_2, \ldots, y_s)\right]$$

daje natychmiast

$$(x_\rho)_1^r\,(Ey_\rho)_1^s\,\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r;\ y_1, y_2, \ldots, y_s),$$

które dowodzi, że funkcje R_1'', R_2'', f'' spełniają wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{J}''$ [94].

Ponieważ jednak wyrażenie C daje się także sprowadzić do postaci normalnej o prefiksie $(v_1)\,(Ev_\rho)_2^r\,(Ew_\rho)_2^r\,(Ey_\rho)_1^s\,(x)\,(y)\,(Ez)$ a więc kształtu $(x_1)\,(Ey_1)\,(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})\,(x_2)\,(x_3)\,(Ey_n)$, oraz także do postaci normalnej o prefiksie $(v_1)\,(x)\,(Ez)\,(Ev_\rho)_2^r\,(Ew_\rho)_2^r\,(Ey_\rho)_1^s(y)$ a więc kształtu $(x_1)\,(x_2)\,(Ey_1)\,(Ey_2)\ldots(Ey_n)\,(x_3)$ [95], przeto zachodzą także dwa następujące twierdzenia:

T w i e r d z e n i e 78. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, β-wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)\,(Ey_1)\,(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})\,(x_2)\,(x_3)\,(Ey_n)$, *które prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych R_1, R_2 zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną oraz identyczność logiczną.*

T w i e r d z e n i e 79. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, β-wy-*

[94] Drugi dowód równoważności wyrażeń B i C jest nie tylko krótszy od pierwszego, ale także i inną cechą przewyższa dowód pierwszy. Drugi dowód jest bowiem bardziej „formalny" od pierwszego i przeto nadaje się bardziej do przeniesienia twierdzenia 77 do teorii rozstrzygalności o skrajnie finitystycznym nastawieniu, według którego to nastawienia wszelkie rozumowania mają być zastąpione przez czysto formalne przejścia od wyrażeń do wyrażeń przy pomocy czysto strukturalnych reguł. — Dłużej się nad tym jednak tu zatrzymywać nie będziemy. — Przeniesieniu twierdzeń podanych w tym paragrafie do teorii rozstrzygalności o skrajnie finitystycznych tendencjach zamierzam poświęcić osobną pracę.

[95] Przy sprowadzeniu wyrażenia C do postaci normalnej o prefiksie jednego ze wspomnianych typów, wzgl. typu gödelowskiego, należy uwzględnić regułę logiczną, zawartą w wyrażeniu $[(x)\,F(x)\ \&\ \&\ (y)\,G(y)] \sim (x)\,[F(x)\ \&\ G(x)]$.

rażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu $(x_1)(x_2)(Ey_1)$ $(Ey_2)\ldots(Ey_n)(x_3)$, *które prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych* R_1, R_2 *zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną oraz identyczność logiczną.*

Z twierdzeń 77, 78, 79 uzyskujemy przy pomocy twierdzenia 12 łatwo następujące trzy twierdzenia:

Twierdzenie 80. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)(x_3)$ $(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)$, *które zawiera jedynie następujące zmienne funkcyjne: trzy dwuczłonowe i jedną jednoczłonową.*

Twierdzenie 81. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(Ey_1)$ $(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(x_3)(Ey_n)$, *które zawiera jedynie następujące zmienne funkcyjne: trzy dwuczłonowe i jedną jednoczłonową.*

Twierdzenie 82. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)(Ey_1)$ $(Ey_2)\ldots(Ey_n)(x_3)$, *które zawiera jedynie następujące zmienne funkcyjne: trzy dwuczłonowe i jedną jednoczłonową*[96].

Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie 83. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji,* β*-wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(Ey_1)$ $(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$ *(tylko dwa kwantyfikatory ogólne!), które prócz zmiennych wyróżnionych* R_1, R_2 *zawiera jeszcze*

[96] Wyrażenie D skonstruowane na mocy jednego z twierdzeń 80, 81, 82 nie zawiera już identyczności logicznej, gdyż ta została wyeliminowana z odpowiedniego β-wyrażenia C otrzymanego z odnośnego twierdzenia 77, 78, 79. Eliminacji tej dokonuje twierdzenie 12, wprowadzając na miejsce identyczności logicznej, w β-wyrażeniu C, nową zmienną funkcyjną dwuczłonową, np. R_3. Zmiennymi funkcyjnymi wyrażenia D są więc R_1, R_2, R_3, f. O wyrażeniu D możemy nawet więcej powiedzieć niż to w wysłowieniu twierdzeń 80, 81, 82 ma miejsce. Wyrażenie D jest bowiem nawet β-wyrażeniem i $R_1', R_2', =, f'$ jest jego realizacją wyróżnioną, gdy R_1', R_2', f' oznacza realizację wyróżnioną wyrażenia C (oczywiście w jakimś zbiorze $\mathfrak{Y}$).

tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną oraz identyczność logiczną.

Niech A będzie dowolnie danym wyrażeniem. Na mocy twierdzenia 76 znajdujemy do niego równoważne β-wyrażenie B w skolemowskiej postaci normalnej, które prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych R_1, R_2 zawiera jeszcze jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną f oraz identyczność logiczną[97].

Wyrażenie B jest więc postaci $(x_\rho)_1^r (Ey_\rho)_1^s \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$.

Oznaczmy teraz przez C koniunkcję następujących dwóch wyrażeń[98]:

$$(C_1) \quad (v_1)(Ev_\rho)_2^r (Ew_\rho)_2^r (Ey_\rho)_1^s (t) \Big[\sum_{i=1}^{r-1} ((R_1(v_i, t) \rightarrow v_{i+1} = t) \,\&$$

$$\& \,(R_2(v_i, t) \rightarrow w_{i+1} = t)) \,\&\, \mathfrak{A}(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\Big],$$

$$(C_2) \qquad (x)(y)(Ez)[R_1(z, x) \,\&\, R_2(z, y)].$$

Wyrażenie C zawiera, podobnie jak wyrażenie B, tylko zmienne funkcyjne R_1, R_2, f oraz identyczność logiczną. Pokażemy teraz, że C jest β-wyrażeniem równoważnym z wyrażeniem B, a więc i A, pod względem posiadania realizacji.

Gdy wyrażenie B ma realizację, wówczas jako β-wyrażenie posiada także realizację wyróżnioną, np. R_1', R_2', f' w zbiorze $\mathfrak{J}'$. Układ ten jest równocześnie realizacją wyróżnioną wyrażenia C. Gdy v_1 jest dowolnie danym elementem zbioru $\mathfrak{J}'$, wówczas znajdujemy elementy v_i, w_i (dla $i = 2, 3, \ldots, r$) w zbiorze $\mathfrak{J}'$ rekurencyjnie w ten sposób, iż parę elementów, która odpowiada elementowi v_i w jednojednoznacznym odwzorowaniu przez relację $R_1'(z, x) \,\&\, R_2'(z, y)$, oznaczamy przez $[v_{i+1}, w_{i+1}]$ (dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$). Zachodzi więc

[97] Również i w tym twierdzeniu zastąpienie twierdzenia 76 przez mocniejsze twierdzenie 75 nie dało by ostrzejszego rezultatu, gdyż, bez względu na to czy wyrażenie B zawiera identyczność logiczną, czy też nie zawiera, niżej podane wyrażenie C_1, a tym samym całe wyrażenie C, zawiera identyczność logiczną.

[98] Wyrażenie C_1 w tym twierdzeniu, jak również w twierdzeniu 77, ma sens tylko dla $r > 1$. Wystarcza jednak tylko ten wypadek rozważyć, gdyż wypadek $r = 1$ załatwia się w obu twierdzeniach w sposób trywialny.

$$\sum_{i=1}^{r-1} (R_1'(v_i, v_{i+1}) \& R_2'(v_i, w_{i+1}))$$

oraz wobec jednoznaczności odwzorowania także

$$(t) \sum_{i=1}^{r-1} ((R_1'(v_i, t) \to v_{i+1} = t) \& (R_2'(v_i, t) \to w_{i+1} = t)).$$

Ponieważ funkcje R_1', R_2', f' spełniają, według założenia, wyrażenie B, przeto do elementów $v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r$ istnieją w zbiorze $\mathfrak{I}'$ elementy $y_1, y_2, \ldots, y_s$ takie, że

$$\mathfrak{A}'(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

zachodzi. Funkcje R_1', R_2', f' spełniają tym samym wyrażenie C_1 w zbiorze $\mathfrak{I}'$. A ponieważ wyrażenie C_2 jest w sposób oczywisty przez funkcje R_1', R_2' spełniony, przeto układ R_1', R_2', f' spełnia całe wyrażenie C w zbiorze $\mathfrak{I}'$, tworząc przy tym realizację wyróżnioną.

Załóżmy teraz, że odwrotnie wyrażenie C ma realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{I}''$. Układem spełniającym niech będą funkcje R_1'', R_2'', f''. Zachodzi więc według założenia

(117) $$(v_1)(Ev_\rho)_2^r (Ew_\rho)_2^r (Ey_\rho)_1^s (t) \Big[\sum_{i=1}^{r-1} ((R_1''(v_i, t) \to v_{i+1} = t) \& (R_2''(v_i, t) \to w_{i+1} = t)) \& \mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\Big]$$

oraz

(118) $$(x)(y)(Ez)[R_1''(z, x) \& R_2''(z, y)].$$

Jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_r$ są dowolnie danymi elementami w liczbie r ze zbioru $\mathfrak{I}''$, wówczas definiujemy najprzód dalsze r elementy $t_1, t_2, \ldots, t_r$ w zbiorze $\mathfrak{I}''$ w sposób następujący:

Kładziemy

(119) $$t_1 = x_1$$

oraz do każdej pary $t_i, x_{(r+1)-i}$ (dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$) znajdujemy na mocy (118) element, który oznaczamy przez t_{i+1}, taki, że zachodzi

$$R_1''(t_{i+1}, t_i) \& R_2''(t_{i+1}, x_{(r+1)-i})$$

dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Kładąc tu $r-i$ za i otrzymujemy

(120) $$R_1''(t_{(r+1)-i}, t_{r-i}),$$

(121) $$R_2''(t_{(r+1)-i}, x_{i+1})$$
dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Na mocy (117) znajdujemy dla v_1 zdefiniowanego przez

(122) $$v_1 = t_r,$$

w zbiorze $\mathfrak{J}''$ dalsze elementy v_i, w_i (dla $i = 2, 3, \ldots, r$) oraz y_i (dla $i = 1, 2, \ldots, s$) takie, że zachodzą

(123) $$(t)\,(R_1''(v_i, t) \rightarrow v_{i+1} = t),$$

(124) $$(t)\,(R_2''(v_i, t) \rightarrow w_{i+1} = t),$$

dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$, oraz że zachodzi

(125) $$\mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s).$$

Pomiędzy elementami v_i a zdefiniowanymi poprzednio rekurencyjnie elementami t_i zachodzi związek

(126) $$v_i = t_{(r+1)-i}$$
dla $i = 1, 2, \ldots, r$.

Dla $i = 1$ związek ten zachodzi na mocy (122). Załóżmy teraz, że związek ten zachodzi dla pewnego $i < r$. Z $v_i = t_{(r+1)-i}$ oraz z (120) wynika

(127) $$R_1''(v_i, t_{r-i})$$

podczas gdy (123) daje

(128) $$R_1''(v_i, t_{r-i}) \rightarrow v_{i+1} = t_{r-i}.$$

Z (127) i (128) wynika natychmiast $v_{i+1} = t_{r-i} = t_{(r+1)-(i+1)}$, a tym samym związek (126) został indukcją udowodniony.

Uwzględniwszy związek (126) w (121) otrzymujemy

(129) $$R_2''(v_i, x_{i+1})$$
dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Z (124) wynika dalej $R_2''(v_i, x_{i+1}) \rightarrow w_{i+1} = x_{i+1}$, dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$, co w połączeniu z (129) daje

(130) $$w_{i+1} = x_{i+1}$$
dla $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Kładąc w (126) $i = r$ otrzymujemy $v_r = t_1$, co w połączeniu z (119) daje

(131) $$v_r = x_1.$$

Uwzględniwszy (130) i (131) w (125) otrzymujemy

$$\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

które dowodzi, że funkcje R_1'', R_2'', f'' spełniają wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{Z}''$ (ponieważ elementy $x_1, x_2, \ldots, x_r$ były dowolnie obrane w $\mathfrak{Z}''$).

Z istnienia realizacji wyrażenia C wynika więc istnienie realizacji wyrażenia B, a ponieważ przedtem pokazaliśmy, że z istnienia realizacji wyrażenia B wynika istnienie realizacji wyróżnionej wyrażenia C, więc wyrażenia B i C (a więc także A i C) są równoważne pod względem posiadania realizacji i C jest również β-wyrażeniem.

Ponieważ C daje się dalej — na mocy reguły $(x)\,[F(x)\,\&\,G(x)] \sim [(x)\,F(x)\,\&\,(y)\,G(y)]$ sprowadzić do postaci normalnej o prefiksie $(v_1)\,(Ev_p)_2^r\,(Ew_p)_2^r\,(Ey_p)_1^s\,(t)\,(Ez)$, a więc żądanego kształtu, więc twierdzenie 83 zostało w zupełności udowodnione.

T w i e r d z e n i e 84. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne z nim, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(Ey_1)\,(x_1)\,(Ey_2)\,(Ey_3)\ldots$ $\ldots(Ey_{n-1})\,(x_2)\,(Ey_n)$ *(tylko dwa kwantyfikatory ogólne!), które zawiera dwie, dwuczłonowe zmienne funkcyjne oraz identyczność logiczną.*

Niech A będzie dowolnie danym wyrażeniem węższego rachunku funkcyjnego. Na mocy twierdzenia 83 znajdujemy do A równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie B w postaci normalnej o prefiksie kształtu $(x_1)\,(Ey_1)$ $(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})\,(x_2)\,(Ey_n)$, które zawiera identyczność logiczną oraz tylko następujące zmienne funkcyjne: dwie dwuczłonowe R_1, R_2 oraz jedną jednoczłonową f[99]. Wyrażenie B daje się więc w każdym wypadku napisać w postaci $(x_1)\,(Ex_p)_2^{m-2}\,(x_{m-1})$ $(Ex_m)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Niech y oznacza dowolną zmienną pozorną byle różną od $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Oznaczmy teraz przez $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y)$ wynik zastąpienia w $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ każdej kombinacji kształtu $f(x_i)$ przez $R_1(y, x_i)$ (dla $i = 1, 2, \ldots, m$).

Oznaczmy przez C następujące wyrażenie:

[99] Wyrażenie B jest w dodatku β-wyrażeniem, ale z tej okoliczności my tu korzystać nie będziemy.

$$(Ey)(x_1)(Ex_\rho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\Big|\Big(R_1(x_1, y) \rightarrow$$

$$\rightarrow \Big[\sum_{i=2}^{m-1} R_1(x_i, y) \mathbin{\&} (R_1(x_{m-1}, y) \rightarrow$$

$$\rightarrow (R_1(x_m, y) \mathbin{\&} \mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y)))\Big]\Big) \mathbin{\&} (\,^{-}z) R_1(z, y)\Big|.$$

Wyrażenie C zawiera, prócz identyczności logicznej, już tylko zmienne funkcyjne R_1, R_2 i jest równoważne z wyrażeniem B pod względem posiadania realizacji. To ostatnie udowadnia się w sposób następujący:

Gdy wyrażenie B posiada realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}'$ i funkcjami spełniającymi są funkcje R_1', R_2', f', wówczas zachodzi

$$(132) \qquad (x_1)(Ex_\rho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Jeśli a jest dowolnym przedmiotem byle różnym od wszystkich elementów zbioru $\mathfrak{J}'$, wówczas rozszerzając funkcje logiczne $R_1'(x, y)$, $R_2'(x, y)$ na zbiór $\mathfrak{J}' + \{a\}$, położywszy

$$(133) \qquad R_1'(x, a) \sim \overline{x = a}$$

dla każdego x zbioru $\mathfrak{J}' + \{a\}$, oraz

$$(134) \qquad R_1'(a, x) \sim f'(x)$$

dla każdego x zbioru $\mathfrak{J}'$ ($R_2'(a, x)$, $R_2'(x, a)$ dla elementów x zbioru $\mathfrak{J}'$, oraz $R_2'(a, a)$ mogą być dowolnie definiowane), uzyskujemy w tak rozszerzonych funkcjach R_1', R_2' układ spełniający wyrażenie C w zbiorze $\mathfrak{J}' + \{a\}$.

Z (132), (134) oraz z definicji na $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y)$ wynika łatwo

$$(x_1)(Ex_\rho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\mathfrak{B}'(x_1, x_2, \ldots, x_m; a),$$

gdzie kwantyfikatory odnoszą się do zbioru $\mathfrak{J}'$, a z tego natychmiast

$$(135) \quad (x_1)(Ex_\rho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\Big(\overline{x_1 = a} \rightarrow \Big[\sum_{i=2}^{m-2} \overline{x_i = a} \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} (\overline{x_{m-1} = a} \rightarrow (\overline{x_m = a} \mathbin{\&} \mathfrak{B}'(x_1, x_2, \ldots, x_m; a)))\Big]\Big),$$

gdzie kwantyfikatory odnoszą się już do zbioru $\mathfrak{J}' + \{a\}$.

Ponieważ zbiór $\mathfrak{J}'$ nie jest pusty, więc w zbiorze $\mathfrak{J}' + \{a\}$ zachodzi $(Ez)\,\overline{z = a}$, co w połączeniu z (135) daje

$$(x_1)(Ex_p)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\Big\{\Big(\overline{x_1 = a \rightarrow \Big[\sum_{i=2}^{m-2} x_i = a \,\&\, (x_{m-1} = a \rightarrow} \rightarrow \overline{(x_m = a \,\&\, \mathfrak{B}'(x_1, x_2, \dots, x_m; a)))}\Big]\Big) \,\&\, (Ez)\, \overline{z = a}\Big\},$$

z czego na mocy (133) wynika

$$(x_1)(Ex_p)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\Big\{\Big(R_1'(x_1, a) \rightarrow \Big[\sum_{i=2}^{m-2} R_1'(x_i, a) \,\&\, \&\, (R_1'(x_{m-1}, a) \rightarrow (R_1'(x_m, a) \,\&\, \&\, \mathfrak{B}'(x_1, x_2, \dots, x_m; a)))\Big]\Big) \,\&\, (Ez)\, R_1'(z, a)\Big\},$$

które daje wreszcie

$$(Ey)(x_1)(Ex_p)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\Big\{\Big(R_1'(x_1, y) \rightarrow \Big[\sum_{i=2}^{m-2} R_1'(x_i, y) \,\&\, \&\, (R_1'(x_{m-1}, y) \rightarrow \rightarrow (R_1'(x_m, y) \,\&\, \mathfrak{B}'(x_1, x_2, \dots, x_m; y)))\Big]\Big) \,\&\, (Ez)\, R_1'(z, y)\Big\}.$$

Z istnienia realizacji wyrażenia B wynika więc istotnie istnienie realizacji wyrażenia C.

Załóżmy teraz, że odwrotnie wyrażenie C ma realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}''$. Układem spełniającym niech będą funkcje R_1'', R_2''. Zachodzi więc według założenia

$$(Ey)(x_1)(Ex_p)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\Big\{\Big(R_1''(x_1, y) \rightarrow \rightarrow \Big[\sum_{i=2}^{m-2} R_1''(x_i, y) \,\&\, (R_1''(x_{m-1}, y) \rightarrow \rightarrow (R_1''(x_m, y) \,\&\, \mathfrak{B}''(x_1, x_2, \dots, x_m; y)))\Big]\Big) \,\&\, (Ez)\, R_1''(z, y)\Big\},$$

a więc przy pewnym elemencie b zbioru $\mathfrak{J}''$ także

$$(136)\quad (x_1)(Ex_p)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\Big(R_1''(x_1, b) \rightarrow \Big[\sum_{i=2}^{m-2} R_1''(x_i, b) \,\&\, \&\, (R_1''(x_{m-1}, b) \rightarrow (R_1''(x_m, b) \,\&\, \mathfrak{B}''(x_1, x_2, \dots, x_m; b)))\Big]\Big)$$

oraz

$$(137)\quad (Ez)\, R_1''(z, b).$$

Jeśli teraz przez $\mathfrak{J}$ oznaczymy podzbiór zbioru $\mathfrak{J}''$ scharakteryzowany przez funkcję $R_1''(x, b)$,[100] wówczas z (136) wynika

(138) $(x_1)(Ex_\rho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\mathfrak{B}''(x_1, x_2, \ldots, x_m; b)$,

przy czym kwantyfikatory należy odnieść do zbioru $\mathfrak{J}$.

Definiując teraz funkcję $f''(x)$ przez równoważność $f''(x) \sim R_1''(b, x)$, otrzymujemy z (138) łatwo[101]

$$(x_1)(Ex_\rho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

co dowodzi, że funkcje logiczne R_1'', R_2'', f'' spełniają wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{J}$.

Wyrażenia B i C, a tym samym A i C, są więc równoważne pod względem posiadania realizacji. A ponieważ wyrażenie C daje się, jak łatwo widzieć, sprowadzić do postaci normalnej o prefiksie $(Ey)(x_1)(Ex_\rho)_2^{m-2}(Ez)(x_{m-1})(Ex_m)$, czyli żądanego kształtu, więc twierdzenie 84 zostało w zupełności udowodnione.

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 85. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie w skolemowskiej postaci normalnej o tylko czterech kwantyfikatorach ogólnych (tzn. o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)$*), które zawiera tylko jedną, trójczłonową zmienną funkcyjną.*

Jeśli A jest dowolnie danym wyrażeniem węższego rachunku funkcyjnego, wówczas znajdujemy do niego, na mocy twierdzenia 80, najprzód równoważne mu wyrażenie B postaci $(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_\rho)_4^n\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, które zawiera jedynie następujące zmienne funkcyjne: trzy dwuczłonowe R_1, R_2, R_3 i jedną jednoczłonową f. Wyrażenie B posiada oprócz tego następującą własność, która wprawdzie nie została podana w sformułowaniu twierdzenia 80, ale jest natychmiast widoczna, gdy się zważy, w jaki sposób twierdzenie 80 powstaje z twierdzenia 77,:

[100] Tzn., że te i tylko te elementy x zbioru $\mathfrak{J}''$ mają być zaliczone do $\mathfrak{J}$, dla których $R_1''(x, b)$ zachodzi. Z (137) wynika, że zbiór $\mathfrak{J}$ nie jest pusty.

[101] Należy przy tym uwzględnić definicję wyrażenia $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y)$.

Jeśli B ma w ogóle realizację, wówczas istnieje zbiór $\mathfrak{J}'$ oraz funkcje R_1', R_2', R_3', f' spełniające wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{J}'$, przy czym funkcja R_3' jest identycznością logiczną, tzn., że zachodzi równoważność $R_3'(x, y) \equiv (x = y)$ w zbiorze $\mathfrak{J}'$.[102]

Niech dalej y oznacza dowolną zmienną pozorną byle różną od $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Przez $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)$ będziemy teraz rozumieli wynik zastąpienia każdej kombinacji kształtu $R_1(x_i, x_k)$, $R_2(x_i, x_k)$, $R_3(x_i, x_k)$, $f(x_i)$ (dla $i = 1, 2, \ldots, n$), w wyrażeniu $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, odpowiednio przez $\Psi(x_i, x_k, y)$, $\Psi(x_i, y, x_k)$, $\Psi(y, x_i, x_k)$, $\Psi(y, y, x_i)$, gdzie Ψ oznacza dowolną trójczłonową zmienną funkcyjną.

Koniunkcja C następujących dwóch wyrażeń:

$$(C_1) \quad (y)(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_p)_4^n \left[\sum_{i=1}^{3} \Psi(y, x_i, x_i) \rightarrow \right.$$

$$\left. \rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \Psi(y, x_i, x_i) \,\&\, \mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)\right)\right],$$

$$(C_2) \qquad (E\mu)(Ez)\,\Psi(\mu, z, z)$$

zawiera tylko jedną, trójczłonową zmienną funkcyjną Ψ i jest wyrażeniem równoważnym z wyrażeniem B pod względem posiadania realizacji.

To ostatnie udowadnia się w sposób następujący:

Gdy wyrażenie B posiada w ogóle realizację, wówczas, na mocy wyżej wspomnianej własności, także taką realizację R_1', R_2', R_3', f' w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}'$, przy której zachodzi równoważność

(139) $$R_3'(x, y) \equiv (x = y).$$

Jeśli przez a oznaczymy dowolny przedmiot, byle różny od wszelkich elementów zbioru $\mathfrak{J}'$, wówczas istnieje funkcja logiczna $\Psi'(x, y, z)$ zdefiniowana w zbiorze $\mathfrak{J}' + \{a\}$ i zadość czyniąca następującym warunkom:

[102] Można by nawet coś więcej wywnioskować. Mianowicie, że istnieje taki układ R_1', R_2', R_3', f' spełniający wyrażenie B (o ile B posiada w ogóle realizację), przy którym R_3' jest identycznością logiczną, zaś funkcja $R_1'(z, x) \,\&\, R_2'(z, y)$ odwzorowuje w sposób jednojednoznaczny elementy z zbioru $\mathfrak{J}'$ na pary $[x, y]$ takich elementów. Z tej ostatniej własności, która wyraża, że B jest β-wyrażeniem, my jednak korzystać nie będziemy.

1)) $\Psi''(x, y, a)$ jest równoważne z $R_1'(x, y)$, dla każdego x i y zbioru $\mathfrak{I}'$.

2)) $\Psi''(x, a, y)$ jest równoważne z $R_2'(x, y)$, dla każdego x i y zbioru $\mathfrak{I}'$.

3)) $\Psi''(a, x, y)$ jest równoważne z $R_3'(x, y)$, dla każdego x i y zbioru $\mathfrak{I}'$.

4)) $\Psi''(a, a, x)$ jest równoważne z $f'(x)$, dla każdego x zbioru $\mathfrak{I}'$.

5)) $\Psi''(y, x, x)$ jest wtedy i tylko wtedy prawdziwe, gdy x jest elementem zbioru $\mathfrak{I}'$, a $y = a$.

Gdy w zbiorze $\mathfrak{I}' + \{a\}$ zdefiniujemy funkcje logiczne $H_i(x, y, z)$, $G_i(x, y, z)$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$ przez równoważności:

$$
\begin{aligned}
H_1(x, y, z) &\equiv (\overline{x = a} \mathbin{\&} \overline{y = a} \mathbin{\&} z = a),\\
H_2(x, y, z) &\equiv (\overline{x = a} \mathbin{\&} y = a \mathbin{\&} \overline{z = a}),\\
H_3(x, y, z) &\equiv (x = a \mathbin{\&} \overline{y = a} \mathbin{\&} \overline{z = a}),\\
H_4(x, y, z) &\equiv (x = a \mathbin{\&} y = a \mathbin{\&} \overline{z = a}),\\
H_5(x, y, z) &\equiv (y = z),\\
G_1(x, y, z) &\equiv R_1'(x, y),\\
G_2(x, y, z) &\equiv R_2'(x, z),\\
G_3(x, y, z) &\equiv R_3'(y, z),\\
G_4(x, y, z) &\equiv f'(z),\\
G_5(x, y, z) &\equiv (\overline{z = a} \mathbin{\&} x = a),
\end{aligned}
$$

wówczas zachodzenie warunku 1)), dla pewnej funkcji $\Psi''(x, y, z)$, jest równoważne, jak łatwo widzieć, zachodzeniu w zbiorze $\mathfrak{I}' + \{a\}$

$$(x)(y)(z)\,[H_1(x, y, z) \rightarrow (\Psi''(x, y, z) \sim G_1(x, y, z))];$$

zachodzenie warunku 2)), dla pewnej funkcji $\Psi''(x, y, z)$, jest równoważne, jak łatwo widzieć, zachodzeniu w zbiorze $\mathfrak{I}' + \{a\}$

$$(x)(y)(z)\,[H_2(x, y, z) \rightarrow (\Psi''(x, y, z) \sim G_2(x, y, z))];$$

zachodzenie warunku 3)), dla pewnej funkcji $\Psi''(x, y, z)$, jest równoważne, jak łatwo widzieć, zachodzeniu w zbiorze $\mathfrak{I}' + \{a\}$

$$(x)(y)(z)\,[H_3(x, y, z) \rightarrow (\Psi''(x, y, z) \sim G_3(x, y, z))];$$

zachodzenie warunku 4)), dla pewnej funkcji $\Psi''(x, y, z)$, jest równoważne, jak łatwo widzieć, zachodzeniu w zbiorze $\mathfrak{I}' + \{a\}$

$$(x)(y)(z)\,[H_4(x, y, z) \rightarrow (\Psi''(x, y, z) \sim G_4(x, y, z))];$$

zachodzenie warunku 5)), dla pewnej funkcji $\Psi''(x, y, z)$ jest równoważne, jak łatwo widzieć, zachodzeniu w zbiorze $\mathfrak{I}' + \{a\}$

$$(x)(y)(z)\,[H_5(x,y,z) \rightarrow (\Psi''(x,y,z) \sim G_5(x,y,z))].$$

Równoczesne więc zachodzenie warunków 1)), 2)), 3)), 4)) i 5)), dla pewnej funkcji $\Psi''(x,y,z)$ w zbiorze $\mathfrak{I}' + \{a\}$, jest przeto równoważne zachodzeniu w zbiorze $\mathfrak{I}' + \{a\}$

$$(x)(y)(z)\,[H_i(x,y,z) \rightarrow (\Psi''(x,y,z) \sim G_i(x,y,z))]$$

dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$, co znów na mocy lemmatu 3 ze str. 125 jest równoważne zachodzeniu

$$(140)\quad (x)(y)(z)\,[H_i(x,y,z) \,\&\, H_k(x,y,z) \rightarrow (G_i(x,y,z) \sim G_k(x,y,z))]$$

dla $i, k = 1, 2, 3, 4, 5$, przy czym $i \neq k$.

Zachodzi

$$(141)\quad (x)(y)(z)\,[H_1(x,y,z) \,\&\, H_2(x,y,z) \rightarrow (G_1(x,y,z) \sim G_2(x,y,z))],$$

gdyż dla wszelkich x, y, z zbioru $\mathfrak{I}' + \{a\}$ poprzednik $H_1(x, y, z) \,\&\, H_2(x,y,z)$ jest fałszywy. To ostatnie uzyskuje się następująco: Z $H_1(x,y,z)$ wynika $z = a$, zaś z $H_2(x,y,z)$ wynika $\overline{z = a}$, czyli $H_1(x,y,z) \,\&\, H_2(x,y,z)$ zajść nie może.

Zachodzi

$$(142)\quad (x)(y)(z)\,[H_1(x,y,z) \,\&\, H_3(x,y,z) \rightarrow (G_1(x,y,z) \sim G_3(x,y,z))],$$

gdyż dla wszelkich x, y, z zbioru $\mathfrak{I}' + \{a\}$ poprzednik $H_1(x, y, z) \,\&\, H_3(x,y,z)$ jest fałszywy. To ostatnie uzyskuje się następująco: Z $H_1(x,y,z)$ wynika $z = a$, zaś z $H_3(x,y,z)$ wynika $\overline{z = a}$, czyli $H_1(x,y,z) \,\&\, H_3(x,y,z)$ zajść nie może.

Zachodzi

$$(143)\quad (x)(y)(z)\,[H_1(x,y,z) \,\&\, H_4(x,y,z) \rightarrow (G_1(x,y,z) \sim G_4(x,y,z))],$$

gdyż dla wszelkich x, y, z zbioru $\mathfrak{I}' + \{a\}$ poprzednik $H_1(x, y, z) \,\&\, H_4(x,y,z)$ jest fałszywy. To ostatnie uzyskuje się następująco: Z $H_1(x,y,z)$ wynika $z = a$, zaś z $H_4(x,y,z)$ wynika $\overline{z = a}$, czyli $H_1(x,y,z) \,\&\, H_4(x,y,z)$ zajść nie może.

Zachodzi

$$(144)\quad (x)(y)(z)\,[H_1(x,y,z) \,\&\, H_5(x,y,z) \rightarrow (G_1(x,y,z) \sim G_5(x,y,z))],$$

gdyż dla wszelkich x, y, z zbioru $\mathfrak{I}' + \{a\}$ poprzednik $H_1(x,$

$y, z) \& H_5(x, y, z)$ jest fałszywy. To ostatnie uzyskuje się następująco: Z $H_1(x, y, z)$ wynika $y = a$ oraz $z = a$, a więc także $y = z$, zaś z $H_5(x, y, z)$ wynika $y = z$, czyli $H_1(x, y, z) \& H_5(x, y, z)$ zajść nie może.

Zachodzi

$$(145)\quad (x)(y)(z)\,[H_2(x,y,z) \& H_3(x,y,z) \rightarrow (G_2(x,y,z) \sim G_3(x,y,z))],$$

gdyż dla wszelkich x, y, z zbioru $\mathfrak{I}' + \{a\}$ poprzednik $H_2(x, y, z) \& H_3(x, y, z)$ jest fałszywy. To ostatnie uzyskuje się następująco: Z $H_2(x, y, z)$ wynika $x = a$, zaś z $H_3(x, y, z)$ wynika $x = a$, czyli $H_2(x, y, z) \& H_3(x, y, z)$ zajść nie może.

Zachodzi

$$(146)\quad (x)(y)(z)\,[H_2(x,y,z) \& H_4(x,y,z) \rightarrow (G_2(x,y,z) \sim G_4(x,y,z))],$$

gdyż dla wszelkich x, y, z zbioru $\mathfrak{I}' + \{a\}$ poprzednik $H_2(x, y, z) \& H_4(x, y, z)$ jest fałszywy. To ostatnie uzyskuje się następująco: Z $H_2(x, y, z)$ wynika $x = a$, zaś z $H_4(x, y, z)$ wynika $x = a$, czyli $H_2(x, y, z) \& H_4(x, y, z)$ zajść nie może.

Zachodzi

$$(147)\quad (x)(y)(z)\,[H_2(x,y,z) \& H_5(x,y,z) \rightarrow (G_2(x,y,z) \sim G_5(x,y,z))],$$

gdyż dla wszelkich x, y, z zbioru $\mathfrak{I}' + \{a\}$ poprzednik $H_2(x, y, z) \& H_5(x, y, z)$ jest fałszywy. To ostatnie uzyskuje się następująco: Z $H_2(x, y, z)$ wynika $y = a$ oraz $z = a$, a więc $y = z$, zaś z $H_5(x, y, z)$ wynika $y = z$, czyli $H_2(x, y, z) \& H_5(x, y, z)$ zajść nie może.

Zachodzi

$$(148)\quad (x)(y)(z)\,[H_3(x,y,z) \& H_4(x,y,z) \rightarrow (G_3(x,y,z) \sim G_4(x,y,z))],$$

gdyż dla wszelkich x, y, z zbioru $\mathfrak{I}' + \{a\}$ poprzednik $H_3(x, y, z) \& H_4(x, y, z)$ jest fałszywy. To ostatnie uzyskuje się następująco: Z $H_3(x, y, z)$ wynika $y = a$, zaś z $H_4(x, y, z)$ wynika $y = a$, czyli $H_3(x, y, z) \& H_4(x, y, z)$ zajść nie może.

Zachodzi

$$(149)\quad (x)(y)(z)\,[H_3(x,y,z) \& H_5(x,y,z) \rightarrow (G_3(x,y,z) \sim G_5(x,y,z))],$$

gdyż jest równoważne z

$$(x)(y)(z)[x = a \mathbin{\&} \overline{y = a} \mathbin{\&} \overline{z = a} \mathbin{\&} y = z \rightarrow$$
$$\rightarrow (R_3'(y,z) \sim (\overline{z = a \mathbin{\&} x = a}))],$$

które jest, na mocy (139), równoważne z

$$(x)(y)(z)[x = a \mathbin{\&} \overline{y = a} \mathbin{\&} \overline{z = a} \mathbin{\&} y = z \rightarrow$$
$$\rightarrow ((y = z) \sim (\overline{z = a \mathbin{\&} x = a}))],$$

a to jest, jak łatwo widzieć [103], prawdziwe.

Zachodzi

(150) $$(x)(y)(z)[H_4(x,y,z) \mathbin{\&} H_5(x,y,z) \rightarrow$$
$$\rightarrow (G_4(x,y,z) \sim G_5(x,y,z))],$$

gdyż dla wszelkich x, y, z zbioru $\mathfrak{S}' + \{a\}$ poprzednik $H_4(x,y,z) \mathbin{\&} H_5(x,y,z)$ jest fałszywy. To ostatnie uzyskuje się następująco: Z $H_4(x,y,z)$ wynika $y = a$ oraz $z = a$, a więc także $\overline{y = z}$, zaś z $H_5(x,y,z)$ wynika $y = z$, czyli $H_4(x,y,z) \mathbin{\&} H_5(x,y,z)$ zajść nie może.

Z (141), (142), (143), (144), (145), (146), (147), (148), (149) i (150) bezpośrednio wynika (140), które dowodzi, na mocy lemmatu 3, że istnieje w zbiorze $\mathfrak{S}' + \{a\}$ funkcja logiczna $\Psi'(x,y,z)$ zadość czyniąca warunkom 1)), 2)), 3)), 4)) i 5)).

Pokażemy teraz, że każda [104] taka funkcja $\Psi'(x,y,z)$ spełnia wyrażenie C w zbiorze $\mathfrak{S}' + \{a\}$.

Z warunku 5)) wynika, że funkcja $\Psi'(a,x,x)$ charakteryzuje zbiór $\mathfrak{S}'$, tzn., że $\Psi'(a,x,x)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy x jest elementem zbioru $\mathfrak{S}'$. Ponieważ zbiór $\mathfrak{S}'$ nie jest pusty, więc zachodzi $(Ez)\Psi'(a,z,z)$, a więc także

(151) $$(E\mu)(Ez)\Psi'(\mu,z,z).$$

Ponieważ funkcje R_1', R_2', R_3', f' spełniają według założenia wyrażenie B, więc zachodzi w zbiorze $\mathfrak{S}'$

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_\rho)_4^n \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

z czego, na mocy warunków 1)), 2)), 3)) i 4)), wynika łatwo

(152) $$(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_\rho)_4^n \mathfrak{B}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; a).$$

[103] Z poprzednika $x = a \mathbin{\&} \overline{y = a} \mathbin{\&} \overline{z = a} \mathbin{\&} y = z$ wynika z jednej strony $y = z$, z drugiej strony zaś $(\overline{z = a \mathbin{\&} x = a})$, a więc także równoważność $((y = z) \sim (\overline{z = a \mathbin{\&} x = a}))$.

[104] Funkcja $\Psi'(x,y,z)$ nie jest jeszcze, jak łatwo widzieć, przez warunki 1)), 2)), 3)), 4)) i 5)) jednoznacznie określona.

Ponieważ funkcja $\Psi'(a, x, x)$ charakteryzuje zbiór $\mathfrak{Z}'$, więc z (152) wynika natychmiast

(153) $$(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_\rho)_4^n \left[\sum_{i=1}^{3} \Psi'(a, x_i, x_i) \rightarrow \rightarrow \left(\sum_{i=4}^{n} \Psi'(a, x_i, x_i) \mathbin{\&} \mathfrak{B}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; a) \right) \right].$$

Z (153) wynika dalej

(154) $$(y)(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_\rho)_4^n \left[\sum_{i=1}^{3} \Psi'(y, x_i, x_i) \rightarrow \rightarrow \left(\sum_{i=4}^{n} \Psi'(y, x_i, x_i) \mathbin{\&} \mathfrak{B}'(x_1, x_2, \ldots, x_n; y) \right) \right],$$

gdyż w przypadku gdy element y zbioru $\mathfrak{Z}' + \{a\}$ nie jest równy elementowi a, wówczas na mocy warunku 5)) poprzednik $\sum_{i=1}^{3} \Psi'(y, x_i, x_i)$ jest fałszywy, a więc cała implikacja prawdziwa.

Z (151) i (154) wynika więc, że funkcja $\Psi'(x, y, z)$ spełnia wyrażenie C.

Załóżmy teraz odwrotnie, że wyrażenie C posiada realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{Z}''$, przy czym funkcją spełniającą jest $\Psi'''(x, y, z)$.

Zachodzi więc według założenia w zbiorze $\mathfrak{Z}''$

(155) $$(y)(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_\rho)_4^n \left[\sum_{i=1}^{3} \Psi'''(y, x_i, x_i) \rightarrow \rightarrow \left(\sum_{i=4}^{n} \Psi'''(y, x_i, x_i) \mathbin{\&} \mathfrak{B}''(x_1, x_2, \ldots, x_n; y) \right) \right]$$

oraz

(156) $$(E\mu)(Ez)\Psi'''(\mu, z, z).$$

Na mocy (156) istnieje w zbiorze $\mathfrak{Z}''$ element b taki, że zachodzi

(157) $$(Ez)\Psi'''(b, z, z).$$

Z (155) wynika dalej

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_\rho)_4^n \left[\sum_{i=1}^{3} \Psi'''(b, x_i, x_i) \rightarrow \rightarrow \left(\sum_{i=4}^{n} \Psi'''(b, x_i, x_i) \mathbin{\&} \mathfrak{B}''(x_1, x_2, \ldots, x_n; b) \right) \right],$$

a z tego

(158) $(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_p)_4^n \mathfrak{B}''(x_1, x_2, \ldots, x_n; b)$,

gdzie kwantyfikatory odnoszą się tylko do części $\mathfrak{J}$ zbioru $\mathfrak{J}''$, której elementy x spełniają funkcję $\Psi'''(b, x, x)$ (z (157) wynika, że zbiór $\mathfrak{J}$ nie jest pusty).

Jeśli teraz w zbiorze $\mathfrak{J}$ zdefiniujemy funkcje logiczne $R_1''(x, y), R_2''(x, y), R_3''(x, y)$ i $f''(x)$ przez równoważności

(159)
$$R_1''(x, y) \equiv \Psi'''(x, y, b),$$
$$R_2''(x, y) \equiv \Psi'''(x, b, y),$$
$$R_3''(x, y) \equiv \Psi'''(b, x, y),$$
$$f''(x) \equiv \Psi'''(b, b, x),$$

wówczas funkcje te spełniają wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{J}$, gdyż z (158) i (159) wynika natychmiast

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_p)_4^n \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Wyrażenie B i C, a więc także A i C, są przeto równoważne pod względem posiadania realizacji. A ponieważ wyrażenie C daje się, jak łatwo widzieć, sprowadzić do postaci normalnej o prefiksie $(y)(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_p)_4^n(E\mu)(Ez)$, czyli żądanego kształtu, więc twierdzenie 85 zostało tym samym w zupełności udowodnione.

T w i e r d z e n i e 86. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)(Ey_1)(Ey_2)\ldots$ $\ldots(Ey_n)(x_3)(x_4)(Ey_{n+1})$, *które zawiera tylko jedną, trójczłonową zmienną funkcyjną.*

Gdy A jest dowolnie danym wyrażeniem, wówczas znajdujemy do niego, na mocy twierdzenia 81, najprzód równoważne mu wyrażenie B postaci $(x_1)(Ex_p)_2^{n-3}(x_{n-2})(x_{n-1})(Ex_n)$ $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, które zawiera jedynie następujące zmienne funkcyjne: trzy dwuczłonowe R_1, R_2, R_3 i jedną jednoczłonową f.

Jeśli przez $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)$ oznaczymy, podobnie jak w twierdzeniu 85, wynik zastąpienia w $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ każdej kombinacji kształtu $R_1(x_i, x_k), R_2(x_i, x_k), R_3(x_i, x_k), f(x_i)$ odpowiednio przez $\Psi(x_i, x_k, y), \Psi(x_i, y, x_k), \Psi(y, x_i, x_k), \Psi(y, y, x_i)$ (dla $i = 1, 2, \ldots, n$), gdzie y jest dowolną zmienną pozorną różną od $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zaś Ψ dowolną trójczłonową zmienną funkcyjną, wówczas koniunkcja C następujących dwóch wyrażeń:

$$(y)(x_1)(Ex_p)_2^{n-3}(x_{n-2})(x_{n-1})(Ex_n)\left[\Psi(y,x_1,x_1)\rightarrow\left(\sum_{i=2}^{n-3}\Psi(y,x_i,x_i)\,\&\right.\right.$$
$$\left.\left.\&\left(\sum_{i=n-2}^{n-1}\Psi(y,x_i,x_i)\rightarrow(\Psi(y,x_n,x_n)\,\&\,\mathfrak{B}(x_1,x_2,\ldots,x_n;y))\right)\right)\right],$$
$$(E\mu)(Ez)\Psi(\mu,z,z)$$

zawiera tylko jedną, trójczłonową zmienną funkcyjną Ψ, daje się sprowadzić do postaci normalnej o prefiksie $(y)(x_1)(Ex_p)_2^{n-3}$ $(E\mu)(Ez)(x_{n-2})(x_{n-1})(Ex_n)$ i jest wyrażeniem równoważnym z B, a więc i z A, pod względem posiadania realizacji.

Równoważność wyrażeń B i C, pod względem posiadania realizacji, udowadnia się w sposób analogiczny jak w twierdzeniu 85.

T w i e r d z e n i e 87. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)(x_3)$ $(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)(x_4)$, *które zawiera tylko jedną, trójczłonową zmienną funkcyjną.*

Gdy A jest dowolnie danym wyrażeniem, wówczas znajdujemy do niego, na mocy twierdzenia 82, najprzód równoważne mu wyrażenie B postaci $(x_1)(x_2)(Ex_p)_3^{n-1}(x_n)\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots$ $\ldots,x_n)$, które zawiera jedynie następujące zmienne funkcyjne: trzy dwuczłonowe R_1,R_2,R_3 i jedną jednoczłonową f.

Jeśli przez $\mathfrak{B}(x_1,x_2,\ldots,x_n;y)$ oznaczymy, podobnie jak w twierdzeniu 85, wynik zastąpienia w $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ każdej kombinacji kształtu $R_1(x_i,x_k)$, $R_2(x_i,x_k)$, $R_3(x_i,x_k)$, $f(x_i)$ odpowiednio przez $\Psi(x_i,x_k,y)$, $\Psi(x_i,y,x_k)$, $\Psi(y,x_i,x_k)$, $\Psi(y,y,x_i)$ (dla $i=1,2,\ldots,n$), gdzie y jest dowolną zmienną pozorną różną od $x_1,x_2,\ldots,x_n$, zaś Ψ dowolną trójczłonową zmienną funkcyjną, wówczas koniunkcja C następujących dwóch wyrażeń:

$$(y)(x_1)(x_2)(Ex_p)_3^{n-1}(x_n)\left[\sum_{i=1}^{2}\Psi(y,x_i,x_i)\rightarrow\left(\sum_{i=3}^{n-1}\Psi(y,x_i,x_i)\,\&\right.\right.$$
$$\left.\left.\&\,(\Psi(y,x_n,x_n)\rightarrow\mathfrak{B}(x_1,x_2,\ldots,x_n;y))\right)\right],$$
$$(E\mu)(Ez)\Psi(\mu,z,z)$$

zawiera tylko jedną, trójczłonową zmienną funkcyjną Ψ, daje się sprowadzić do postaci normalnej o prefiksie $(y)(x_1)(x_2)$

$(E\mu)(Ez)(Ex_\rho)_3^{n-1}(x_n)$ i jest wyrażeniem równoważnym z B, a więc i z A, pod względem posiadania realizacji.

Równoważność wyrażeń B i C, pod względem posiadania realizacji, udowadnia się w sposób analogiczny jak w twierdzeniu 85 [105].

T w i e r d z e n i e 88. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, γ-wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)\dots$ $\dots(x_m)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)(x_{m+1})(x_{m+2})\dots(x_{m+n})$, *które prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej Φ zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną.*

Niech A będzie dowolnie danym wyrażeniem. Na mocy twierdzenia 73 znajdujemy do niego najprzód równoważne mu γ-wyrażenie B w skolemowskiej postaci normalnej, które prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej Φ zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną f. Wyrażenie B daje się napisać w postaci $(x_\rho)_1^r(Ey_\rho)_1^s\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_s)$. Jeśli teraz przez C oznaczymy koniunkcję następujących dwóch wyrażeń:

$$(C_1)\quad (x_\rho)_1^r(Ev_1)(v_\rho)_2^s(w_\rho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, w_i)\rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_r; u_1, w_2, \dots, w_{s-1}, v_s)\right],$$
$$(C_2)\quad (x)(Ey)(Ez)\Phi(x, z, y),$$

wówczas C zawiera, prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej Φ, jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną f, daje się sprowadzić do postaci normalnej o prefiksie $(x_\rho)_1^r(Ev_1)$ $(Ey)(Ez)(v_\rho)_2^s(w_\rho)_1^{s-1}$, a więc żądanego kształtu, i jest γ-wyrażeniem równoważnym z B, a więc także z wyrażeniem A, pod względem posiadania realizacji.

Że C jest γ-wyrażeniem równoważnym z B pod względem posiadania realizacji udowadnia się w sposób następujący:

[105] W dowodzie twierdzenia 86 i 87 należy, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 85, uwzględnić własność wyrażenia B, według której wyrażenie B, jeśli w ogóle posiada realizację, wówczas także taką realizację B_1', B_2', B_3', f', przy której B_3' jest identycznością logiczną.

Jeśli B posiada realizację, wówczas jako γ-wyrażenie posiada także realizację wyróżnioną, np. Φ', f' w zbiorze $\mathfrak{Z}'$. Funkcje Φ', f' są wtedy realizacją wyróżnioną wyrażenia C w zbiorze $\mathfrak{Z}'$.

Dla każdego obioru elementów $x_1, x_2, \ldots, x_r$ w zbiorze $\mathfrak{Z}'$ zachodzi, na mocy drugiej równoważności twierdzenia 54, równoważność

$$(Ey_\rho)_1^s \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \sim$$
$$\sim (Ev_1)(v_\rho)_2^s (w_\rho)_1^{s-1} \left[\sum_{i=1}^{s-1} \Phi'(v_i, v_{i+1}, w_i) \to \right.$$
$$\left. \to \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s) \right],$$

z czego wynika z łatwością równoważność

$$(x_\rho)_1^r (Ey_\rho)_1^s \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \sim$$
$$\sim (x_\rho)_1^r (Ev_1)(v_\rho)_2^s (w_\rho)_1^{s-1} \left[\sum_{i=1}^{s-1} \Phi'(v_i, v_{i+1}, w_i) \to \right.$$
$$\left. \to \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s) \right].$$

A ponieważ według założenia $(x_\rho)_1^r (Ey_\rho)_1^s \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ zachodzi, więc zachodzi też

$$(x_\rho)_1^r (Ev_1)(v_\rho)_2^s (w_\rho)_1^{s-1} \left[\sum_{i=1}^{s-1} \Phi'(v_i, v_{i+1}, w_i) \to \right.$$
$$\left. \to \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s) \right],$$

co w połączeniu z $(x)(Ey)(Ez)\Phi'(x, z, y)$ dowodzi, że funkcje Φ', f' spełniają wyrażenie C w zbiorze, $\mathfrak{Z}'$ tworząc przy tym realizację wyróżnioną.

Załóżmy odwrotnie, że wyrażenie C posiada realizację w jakimś zbiorze $\mathfrak{Z}''$. Funkcjami spełniającymi niech będą Φ'', f''. Zachodzi więc według założenia

$$(160) \quad (x_\rho)_1^r (Ev_1)(v_\rho)_2^s (w_\rho)_1^{s-1} \left[\sum_{i=1}^{s-1} \Phi''(v_i, v_{i+1}, w_i) \to \right.$$
$$\left. \to \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s) \right]$$

oraz

$$(161) \quad (x)(Ey)(Ez)\Phi''(x, z, y).$$

Z (161) i z drugiej implikacji twierdzenia 52 wynika, jak łatwo widzieć, dla każdego obioru elementów $x_1, x_2, \ldots, x_r$ w zbiorze $\mathfrak{J}''$ implikacja

$$(Ev_1)(v_p)_2^s(w_p)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, w_i) \rightarrow \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s)\right] \rightarrow (Ey_p)_1^s\, \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s),$$

z czego wynika dalej

$$(x_p)_1^r\left\{(Ev_1)(v_p)_2^s(w_p)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, w_i) \rightarrow\right.\right.$$

$$\left.\rightarrow \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s)\right] \rightarrow$$

$$\left.\rightarrow (Ey_p)_1^s\, \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\right\},$$

co, na mocy reguły $(x)\{F(x) \rightarrow G(x)\} \rightarrow \{(x)F(x) \rightarrow (x)G(x)\}$, daje implikację

$$(x_p)_1^r(Ev_1)(v_p)_2^s(w_p)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, w_i) \rightarrow\right.$$

$$\left.\rightarrow \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s)\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow (x_p)_1^r(Ey_p)_1^s\, \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s).$$

Z (160) i z ostatniej implikacji uzyskujemy wreszcie

$$(x_p)_1^r(Ey_p)_1^s\, \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s),$$

co dowodzi, że funkcje Φ'', f'' spełniają wyrażenie B w zbiorze $\mathfrak{J}''$.

Z istnienia realizacji wyrażenia C wynika więc istnienie realizacji wyrażenia B. A ponieważ przedtem pokazaliśmy, że z istnienia realizacji wyrażenia B wynika istnienie realizacji wyróżnionej wyrażenia C, więc wyrażenia B i C są równoważne pod względem posiadania realizacji i C jest w dodatku γ-wyrażeniem, c. b. d. o.

Twierdzenie 89. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, γ-wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)\ldots$ $\ldots(x_m)(Ey_1)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_{m+n})(Ey_2)(Ey_3)$, *które, prócz* *zmiennej funkcyjnej wyróżnionej* Φ, *zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną.*

Dowód tego twierdzenia uzyskujemy natychmiast z dowodu twierdzenia 88. Wystarczy tylko zauważyć, że wyrażenie C z twierdzenia 88 daje się również sprowadzić do postaci normalnej o prefiksie $(x_p)_1^r (Ev_1)(v_p)_2^s (w_p)_1^{s-1} (Ey)(Ez)$, a więc kształtu $(x_1)(x_2)\ldots(x_m)(Ey_1)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_{m+n})$ $(Ey_2)(Ey_3)$.

Twierdzenie 90. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji,* β*-wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)\ldots(x_m)$ $(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_{m+n})$, *które, prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych* R_1, R_2, *zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną.*

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzeń 88 i 65.

Twierdzenie 91. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji,* β*-wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)\ldots$ $\ldots(x_m)(Ey_1)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_{m+n})(Ey_2)(Ey_3)$, *które prócz zmiennych funkcyjnych wyróżnionych* R_1, R_2, *zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną.*

Twierdzenie to otrzymujemy natychmiast z twierdzeń 89 i 65.

Twierdzenie 92. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji,* γ*-wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)\ldots$ $(x_m)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$, *które, prócz zmiennej funkcyjnej* Φ, *zawiera jeszcze tylko jedną jednoczłonową i jedną wieloczłonową zmienną funkcyjną.*

Niech A będzie dowolnie danym wyrażeniem. Na mocy twierdzenia 89 znajdujemy do niego równoważne mu γ-wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu $(x_1)(x_2)\ldots$ $\ldots(x_m)(Ey_1)(x_{m+1})\ldots(x_{m+n})(Ey_2)(Ey_3)$, które, prócz zmiennej funkcyjnej wyróżnionej Φ, zawiera jeszcze tylko jedną, jednoczłonową zmienną funkcyjną f. Wyrażenie to oznaczmy przez B. Prefiks wyrażenia B jest stopnia drugiego. Jeśli teraz do B zastosujemy raz postępowanie Skolema, wówczas otrzymamy γ-wyrażenie C w skolemowskiej postaci normalnej o tylko trzech kwantyfikatorach szczegółowych równoważne z wyrażeniem B, a więc także z wyrażeniem A, pod względem posiadania realizacji, i zawierające prócz zmiennych funkcyjnych Φ i f jeszcze jedną wieloczłonową F.

Jeśli B posiada realizację, wówczas jako γ-wyrażenie posiada także realizację wyróżnioną Φ', f' w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}'$. Można wtedy, jak to z bliższej analizy postępowania Skolema wynika, tak zdefiniować funkcję F', aby funkcje Φ', f', F' spełniały wyrażenie C w zbiorze $\mathfrak{J}'$. Funkcje te tworzą wtedy realizację wyróżnioną wyrażenia C. Z realizacji wyrażenia B wynika więc istnienie realizacji wyróżnionej wyrażenia C.

Gdy odwrotnie, wyrażenie C posiada realizację Φ'', f'', F'' w jakimś zbiorze $\mathfrak{J}''$, wówczas, jak łatwo widzieć, funkcje Φ'', f'' spełniają wyrażenie B w tym samym zbiorze $\mathfrak{J}''$.

Z powyższego wynika, że B i C są równoważne pod względem posiadania realizacji i że C jest γ-wyrażeniem. To że wyrażenie C zawiera tylko trzy kwantyfikatory szczegółowe wynika z tego, że tyle ich posiada wyrażenie B i że postępowanie Skolema zachowuje liczbę kwantyfikatorów szczegółowych[106].

Twierdzenie 93. *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, β wyrażenie w postaci normalnej o prefiksie kształtu* $(x_1)(x_2)\ldots(x_m)$ $(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$, *które, prócz zmiennych wyróżnionych* R_1, R_2, *zawiera jeszcze tylko jedną jednoczłonową i jedną wieloczłonową zmienną funkcyjną.*

Twierdzenie 93 otrzymujemy natychmiast z twierdzeń 92 i 65.

W tym paragrafie poznaliśmy cały szereg twierdzeń dających się podciągnąć pod jeden schemat o brzmieniu: *Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu pod względem posiadania realizacji wyrażenie o własności* W; przy czym W było w każdym twierdzeniu inną własnością.

[106] Tzn., że wynik zastosowania postępowania Skolema do pewnego wyrażenia daje się sprowadzić do postaci normalnej o prefiksie stopnia o jeden niższego od stopnia prefiksu danego wyrażenia, przy czym liczba kwantyfikatorów szczegółowych prefiksu otrzymanego wyrażenia równa jest liczbie kwantyfikatorów szczegółowych prefiksu danego wyrażenia. Powyższą własność postępowania Skolema można łatwo sprawdzić.

Każde twierdzenie o brzmieniu: *a) Do każdego wyrażenia można podać równoważne mu, pod względem posiadania realizacji, wyrażenie o własności W* — daje natychmiast twierdzenie o brzmieniu: *b) Przy zagadnieniu rozstrzygalności dla realizacji wystarcza się ograniczyć, bez uszczerbku dla ogólności, do wyrażeń o własności W,* — jeśli oczywiście w twierdzeniach *a)* i *b)* na *W* weźmiemy jedną i tę samą własność.

Załóżmy bowiem na chwilę, że rozwiązaliśmy zagadnienie realizacji dla wyrażeń o własności *W*. Znaczy to, że posiadamy kryterium pozwalające o każdym wyrażeniu o własności *W* rozstrzygnąć czy to wyrażenie posiada realizację, czy nie. Niech *A* będzie teraz zupełnie dowolnym wyrażeniem. Na mocy twierdzenia *a)* znajdujemy do *A* wyrażenie *B* o własności *W* równoważne z *A* pod względem posiadania realizacji. Dla wyrażenia *B*, które posiada własność *W*, umiemy — według założenia — odpowiedzieć na pytanie czy posiada realizację, czy jej nie posiada. Zależnie od tego czy ta odpowiedź będzie pozytywna, czy negatywna: wyrażenie *A* posiada realizację albo jej nie posiada (gdyż wyrażenia *A* i *B* są równoważne pod względem posiadania realizacji).

Udowodniliśmy więc, że gdybyśmy posiadali kryterium rozstrzygalności dla realizacji wyrażeń o własności *W*, to mielibyśmy zarazem także kryterium rozstrzygalności dla dowolnych wyrażeń. Twierdzenie *b)* wyraża jednak właśnie to, cośmy przed chwilą udowodnili.

Każdemu udowodnionemu w tej pracy twierdzeniu *a)* odpowiada więc twierdzenie *b)* zawierające w sobie redukcję zagadnienia rozstrzygalności. Tak np. twierdzeniu 80 odpowiada następujące

Twierdzenie 94. *Przy zagadnieniu rozstrzygalności dla realizacji wystarcza się ograniczyć do wyrażeń w postaci normalnej o gödelowskim prefiksie* $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\ldots$ $\ldots(Ey_n)$, *które zawierają tylko następujące zmienne funkcyjne: trzy dwuczłonowe i jedną jednoczłonową.*

W twierdzeniach tego paragrafu posługiwaliśmy się na każdym kroku pojęciami β-wyrażenia i γ-wyrażenia oraz pośrednio także pojęciem α-wyrażenia. Chcemy teraz bliżej oświetlić rolę tych pojęć w wspomnianych twierdzeniach. W dotychczasowych pracach poświęconych redukcjom zagadnienia rozstrzygalności przy formułowaniu twierdzeń typu: *Do każdego wyrażenia A można podać równoważne mu wyrażenie B o własności W*, nie uwzględniano bliżej charakteru realizacyj w grę wchodzących wyrażeń A i B, lecz ograniczano się tylko do zanotowania faktu, że wyrażenia A i B są równoważne. Często jednak, przez zanotowanie charakteru funkcyj realizujących w grę wchodzących wyrażeń, można zyskać zaostrzone wyniki a to głównie pod względem ilości zmiennych funkcyjnych, gdyż jeśli np. wiadomo, że na jakieś dwie zmienne funkcyjne przy realizacyj odpowiednich wyrażeń przychodzą te same funkcje, wówczas te dwie zmienne funkcyjne można zidentyfikować. Przy pomocy pojęć α-wyrażenia, β-wyrażenia i γ-wyrażenia w twierdzeniach niniejszej pracy zanotowaliśmy właśnie bliżej charakter realizacyj występujących wyrażeń i dzięki temu mogliśmy przy iterowanym posługiwaniu się tymi twierdzeniami utożsamiać zmienne funkcyjne.

Przypis.

Od chwili przedstawienia niniejszej pracy *Towarzystwu Naukowemu* (czerwiec 1936) literatura omawianego przedmiotu wzbogaciła się o cały szereg prac. Niektóre z nich poświęcone są wyłącznie zagadnieniu rozstrzygalności, inne zaś mają z tym zagadnieniem tylko pewne punkty styczności. Co się tyczy w szczególności kierunku badań polegającego na redukowaniu ogólnego zagadnienia rozstrzygalności do pewnych jego przypadków szczegółowych, a więc kierunku któremu poświęcona jest niniejsza praca, to należy przede wszystkim zanotować dwie prace następujące:

Wilhelm Ackermann, Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, **112** (1936), str. 419—432.

László Kalmár, Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen, *Compositio Mathematica*, **4** (1936), str. 137—144.

Również autorowi udało się uzyskać w międzyczasie szereg nowych wyników w tym kierunku, które umieścił w pracy: Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik (ukaże się najprawdopodobniej w czasopiśmie: *Fundamenta Mathematicae*), gdzie też zaostrzył wyniki wspomnianych wyżej prac Ackermanna i Kalmára.

Dalsze prace poświęcone są tzw. kierunkowi negatywnemu i zmierzają do wykazania, że ogólny wypadek zagadnienia rozstrzygalności węższego rachunku funkcyjnego nie da się rozwiązać. Wymieniamy tylko najważniejsze z tych prac:

Alonzo Church, An unsolvable problem of elementary number theory, *American journal of mathematics*, vol. **58** (1936), str. 345—363.

Alonzo Church, A note on the Entscheidungsproblem, *The journal of symbolic logic*, vol. **1** (1936), str. 40—41.

Alonzo Church, Correction to a note on the Entscheidungsproblem, *The journal of symbolic logic*, vol. **1** (1936), str. 101—102.

S. C. Kleene, General recursive functions of natural numbers, *Math. Annalen*, **112** (1936), str. 727—742.

Barkley Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church, *The journal of symbolic logic*, vol. **1** (1936), str. 87—91.

A. M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Ser. 2, Vol. **42**, (1937), str. 230—265.

Z powyższych prac tzw. natury negatywnej wynika w sposób zupełnie ścisły, że nie istnieje żadne „rekursywne" kryterium rozstrzygania dla węższego rachunku funkcyjnego w ogólnym przypadku, przy czym przymiotnik „rekursywne" należy rozumieć w sensie bardzo obszernym pochodzącym od K. Gödela i J. Herbranda a sprecyzowanym przez S. C. Kleene'a. Do twierdzenia jednak, że nie istnieje w ogóle kryterium rozstrzygania dla węższego rachunku funkcyjnego w ogólnym przypadku, można jednak tylko dojść przyjmując, jak to w gruncie rzeczy A. Church i A. M. Turing czynią, hypotezę, że prócz kryteriów „rekursywnych" żadnych innych kryteriów nie ma. Co się zaś tyczy tej hypotezy, to autorowie wyżej wspomniani nie dają żadnych przekonywujących argumentów na jej poparcie, lecz opierają się li tylko na czysto empirycznym fakcie, że nie znane są dotychczas prócz funkcyj rekursywnych żadne inne funkcje „obliczalne" („effectively calculable functions" u Churcha i „computable functions" u Turinga). Wobec takiego stanu rzeczy kwestia całkowitej rozwiązalności zagadnienia rozstrzygalności dla systemu węższego rachunku funkcyjnego pozostaje nadal kwestią otwartą.

Zusammenfassung.

Zu den wichtigsten Problemen der mathematischen Logik gehört bekanntlich das Entscheidungsproblem. Das Entscheidungsproblem kann für jedes formale System, in welchem die Begriffe der „sinnvollen" Aussage und der „beweisbaren" Aussage präzisiert sind, formuliert werden. Unter dem Entscheidungsproblem eines solchen Systems versteht man im allgemeinen das Problem der Auffindung eines Verfahrens, welches bei einer jeden vorgelegten sinnvollen Aussage in endlich vielen Schritten zu entscheiden erlaubt, ob diese sinnvolle Aussage eine beweisbare Aussage des betrachteten formalen Systems ist oder nicht ist. Bei dieser allgemeinen Formulierung ist die nahe Beziehung des so verstandenen Entscheidungsproblems zu den schwierigen Entscheidungsfragen der Mathematik sofort ersichtlich. Formalisiert man nämlich eine mathematische Theorie (z. B. die Zahlentheorie, Mengenlehre, Geometrie), so gehen bei der Formalisierung die Entscheidungsfragen der entsprechenden mathematischen Theorie in Fragen über, welche eben unter das Entscheidungsproblem des durch diese Formalisierung entstehenden formalen Systems fallen. Die Lösung des formalen Entscheidungsproblems hätte daher auch die Lösung dieser rein mathematischen Fragen ermöglicht. Als das einfachste formale System muss bekanntlich der Aussagenkalkül angesehen werden. Für dieses System ist das Entscheidungsproblem ein einfaches und schon gelöstes Problem, für welches sogar mehrere Lösungen bekannt sind. Als das, nach einer logischen Klassifikation, nächststehende formale System ist der sogenannte engere Funktionenkalkül zu betrachten. Für dieses System bildet das Entscheidungsproblem, welches gewöhnlich Entscheidungsproblem der ersten Stufe genannt wird, ein schwieriges noch ungelöstes Problem. Es hat sich aber auch ergeben, dass die

Lösung des Entscheidungsproblems der ersten Stufe von kolossaler Bedeutung für die gesamte deduktive Wissenschaft wäre, da sie u. a. die Lösung tiefliegender noch ungelöster klassischer zahlentheoretischer Probleme, wie z. B. des Goldbachschen Problems und der grossen Fermatvermutung, impliziert hätte. Es ist also auch kein blinder Zufall, dass eben dieses Entscheidungsproblem in den letzten zwei Jahrzehnten oder besser gesagt: in den letzten zehn Jahren eine Reihe von Forschern wie W. Ackermann, H. Behmann, P. Bernays, K. Gödel, J. Herbrand, L. Kalmár, L. Löwenheim, F. P. Ramsey, M. Schönfinkel, K. Schütte und Th. Skolem, aufs lebhafteste beschäftigt hat. Das Entscheidungsproblem der ersten Stufe wird gewöhnlich in zwei anderen Formen behandelt, welche als Allgemeingültigkeitsproblem und Erfüllbarkeitsproblem bekannt sind. Diese Formen des Entscheidungsproblems stimmen aber, von methodologischen Unterschieden abgesehen (Unterscheidung zwischen beweistheoretischen Methoden und mengentheoretischen Methoden), sachlich mit dem oben für jedes formale System formulierten Entscheidungsproblem überein. Die am meisten behandelte Form des Entscheidungsproblems der ersten Stufe ist das Erfüllbarkeitsproblem. Die Untersuchungen über das Entscheidungsproblem laufen in zwei verschiedene sich einander ergänzende Richtungen. Während die eine Richtung der Untersuchungen zum Ziel hat Spezialfälle des Entscheidungsproblems zu behandeln und zu lösen, hat die zweite Richtung zum Ziel das allgemeine Entscheidungsproblem auf möglichst einfache Spezialfälle desselben zurückzuführen. Die vorliegende Arbeit ist der zweiten Richtung der Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der ersten Stufe gewidmet und bildet eine Ausarbeitung und Verschärfung meiner eigenen Resultate die in der Arbeit: Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems (Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, **8**, 1936, S. 7—41) enthalten sind. Da einerseits die vorliegende Arbeit für den polnischen Leser bestimmt ist und anderseits, meines Wissens, in der polnischen Literatur noch überhaupt keine Arbeit vorliegt, die über das Entscheidungsproblem und den engeren Funktionenkalkül handelt, so habe ich mich, hauptsächlich aus terminologischen Gründen, veranlasst gesehen mit der Einführung und Erläuterung der benutzten Grundbegriffe diese Arbeit zu beginnen. Auch einige bereits bekannte Sätze, die in dieser Arbeit öfters benutzt werden und deren Beweise nicht ganz einfach sind, habe ich in den ersten Paragraphen vorangeschickt. Diese Sätze werden hier nach einem neuen und einheitlichen Prinzip behandelt; ihre hier gegebenen Beweise sind meistens einfacher und übersichtlicher als die üblichen Beweise, so dass sie, wie ich meinen darf, nicht nur für den Anfänger, sondern auch für den Kenner etwas Neues bieten. Was den genauen Inhalt dieser Arbeit anbetrifft, so ist es leider nicht möglich in einigen Zeilen eine vollständige Auskunft darüber zu geben. Ich stehe auch davon ab mit der Bemerkung, dass eine entsprechende deutsche Arbeit beabsichtigt ist.

dla rzek, wyznaczone na zasadzie empirycznej, z 8 rysunkami, str. 27 (1,50 zł.). — Jendyk Rościsław. Hellada starożytna pod względem antropologicznym, z 4 ryc. w tekście, str. 25 (1 zł.). — Henzel Tadeusz. Pigmeje centralno-afrykańscy. Studjum antropologiczne, z 18 rys. w tekście i 2 tabl., str. 72 (3 zł.). — Rosiński Bolesław ks. Emigracje europejskie do Stanów Zjednoczonych pod względem antropologicznym, z 7 ryc. w tekście i 4 tabl., str. 47 (2 zł.). — Mikulaszek Edmund. O wielocukrach bakteryjnych, str. 115 (4 zł.). — Szarski Kazimierz. Przyczynek do badań nad rozwojem i budową gruczołów dodatkowych (gll. accessoriae) dróg moczo-płciowych myszy białej, z 18 ryc. w tekście i 4 tabl., str. 149 (5 zł.). 25

Tom VII. Żejmo-Żejmis Stanisław. Struktura rasowa Skandynawji, z 7 ryc., 14 tabelami i 2 tabl., str. 96 (3 zł.). — Klisiecki Andrzej Jan. Ruch krwi w łuku aorty, z 3 ryc. w tekście, str. 10 (0,50 zł.). — Papierkowski Julјan. Farmakodynamiczne i lecznicze działanie wody ze zdroju „Karola“ w Iwoniczu, z 38 fig. i 14 tabl., str. 136 (5 zł.). — Żyliński Eustachy. Formalizm Hilberta. Część I. Formalizm H_1, str. 76 (2,50 zł.). — Gawliński Stanisław. Wpływ czasu na ustrój zaprawy wapiennej, z 2 ryc. w tekście, str. 9 (0,50 zł.). — Lutwak-Mann Cecylja. Przemiany chemiczne w mięśniu pod wpływem zatrucia kwasem jodooctowym, z 2 ryc. i 7 tabl., str. 34 (1,50 zł.). — Pilawski Stanisław. Struktury protoplazmatyczne w spermatogenezie chrząszczy z 9 rys. i 2 schematami w tekście i 6 tabl., str. 82 (3 zł.). — Pepis Józef. O zagadnieniu rozstrzygalności w zakresie węższego rachunku funkcyjnego, str. 172 (6 zł.) 22

Tom VIII. Matakiewicz Maksymiljan. Oznaczanie największych odpływów w potokach i rzekach, z szczególnem uwzględnieniem małych zlewni, z 6 tabl. i 6 ryc., str. 54 (2 zł.). — Lachs Jan. Krakowski cech chirurgów (cyrulików) r. 1477—1874, str. 256 (8 zł.). — Bross Wiktor. Zgorzel samoistna, z 22 tablicami, 23 wykresami, 7 rycinami i 1 krzywą w tekście, str. 98 (5 zł.). — Andruszkiw Józef. O uporządkowaniach ciał rzeczywistych str. 24 (1 zł.). — Kaczmarz Stefan, O zupełności układów ortogonalnych, str. 8 (0·50 zł.). — Matakiewicz Maksymilian. Pionowa krzywa prędkości w łożyskach sztucznych i nowy sposób obliczenia przepływu w kanałach trapezowych, z 20 rycinami w tekscie, str. 66 (2,50 zł.). — Reis Julian. Badania nad swoistością fosfataz, z 2 rycinami i 7 tabelami w tekście, str. 19 (1 zł.) 20

Tom IX. Zych Władysław. Cephalaspis kozłowskii n. sp. z Downtonu Podola, z 2 schematami w tekście i 4 tablicami, str. 100 (4 zł.). — Dalsze zeszyty w druku.

Przemysław Dąbkowski, Oswald Balzer. Życie i dzieła (1858—1933) Lwów 1934, str. 236. . . . . 7·—

Oswalda Balzera, Przemówienia wygłoszone w Towarzystwie Naukowem we Lwowie w latach 1921—1932, wydał Przemysław Dąbkowski, Lwów 19 7, str. 118 . . . . 3.50

Sprawozdania Towarzystwa Naukowego pod redakcją Przemysława Dąbkowskiego. Roczniki 1 do XVI (1921—1936)

·zemysław Dąbkowski, Pierwsze dzie...