









INŻ. WACŁAW BALICKI

---

# LINIE WPŁYWOWE

DLA

# BELEK KRATOWYCH PROSTYCH

NARAŻONYCH NA SIŁY POZIOME

(Z DWIEMA TABLICAMI)

---

ODBITKA Z „CZASOPISMA TECHNICZNEGO“

Nr. 19 z r. 1904.

---

LWÓW, 1904.

NAKŁADEM TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO.

Z I. ZWIĄZKOWEJ DRUKARNI WE LWOWIE, UL. LINDEGO 4.



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



1000023200









INŻ. WACŁAW BALICKI

---

# LINIE WPŁYWOWE

DLA

# BELEK KRATOWYCH PROSTYCH

NARAŻONYCH NA SIŁY POZIOME

(Z DWIEMA TABLICAMI)

---

ODBITKA Z „CZASOPISMA TECHNICZNEGO“

Nr. 19 z r. 1904.

---

LWÓW, 1904.

NAKŁADEM TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO.

Z I. ZWIĄZKOWEJ DRUKARNI WE LWOWIE, UL. LINDEGO 4.



III-25860



Akc. Nr. D-197/57



Znamiennym jest objaw, że w nowszej teorii mostów, mimo jej wielki postęp i rozwój, nie spotykamy się nigdzie z liniami wpływowymi dla sił poziomych. A jednak nikt nie zaprzeczy, że siły poziome odgrywają ważną rolę zwłaszcza przy wyższych dachach, w których największe nateżenia wywołuje parcie wiatru.

Nie zabierałże kto w tej sprawie głosu?

Wpływ sił poziomych na belki mostowe badało zaledwie kilku autorów<sup>1)</sup>. Żaden z nich jednak nie użył w tych badaniach sposobu najdogodniejszego i najbardziej przejrzystego, t. j. linii wpływowych.

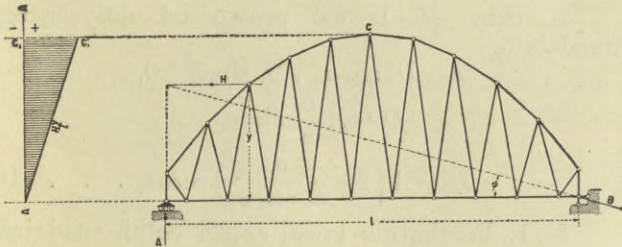
Kinematyczna teoria belek kratowych daje nam wprawdzie linie wpływowe dla ukośnych ciężarów, ale sposób to nie tak bardzo prosty.

Myślałem nad tem, by sprawę tę przedstawić w sposób więcej elementarny, a mniej zawiły. Pracę swą zacząłem już z górą przed rokiem<sup>2)</sup>, ale zajęcia biurowe i sprawy prywatne nie pozwoliły jej jednolicie przeprowadzić i dokończyć. I obecnie ograniczam się tylko do zwykłych belek prostych, zostawiając innego rodzaju belki na później.

I. Jako pierwszy przykład weźmy belkę kratową o jednym pasie — np. dolnym — prostym.

Przedewszystkiem wyznaczmy oddziaływania.

Jeżeli na belkę<sup>3)</sup> działa siła  $H=1$  (rys. 1) w kierunku ku łożysku wałkowemu (1 przypadek),



Rys. 1 a.

Rys. 1.

to z równania momentów  $-Hy + Al = 0$  otrzymamy oddziaływanie

$$A = H \frac{y}{l} \dots \dots \dots 1)$$

<sup>1)</sup> O. Huth: *Inanspruchnahme eiserner Eisenbahnbrücken durch das Bremsen der Züge* (Deutsche Bauzeitung 1885, str. 334, 337 i 346).

Fleck: *Die Beanspruchung von Fachwerkträgern durch waagerechte Kräfte in der Trägerebene.* (Centralblatt der Bauverwaltung 1886, str. 502).

Fr. Engesser: *Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. I. Die Zusatzkräfte*, 1892, str. 8.

<sup>2)</sup> Pierwszy rysunek z liniami wpływowymi dla sił poziomych dla prostego więzaru dachowego wykonałem 14/4 1903.

<sup>3)</sup> Naumyślnie przyjęliśmy bardzo wysokie belki, by linie wpływowe wyraźniej wystąpiły.

Składowa pozioma drugiego oddziaływania  $B$  musi się oczywiście równać sile  $H$ . Z tego wynika

$$B = -H \sec \psi = -H \sec \left( \text{tg} = \frac{y}{l} \right) \dots \dots 2)$$

$B$  jest ujemne, bo działa do łożyska: trzeba by w danym razie łożysko zakotwić.

Równanie 1) jest liniowe ze względu na  $y$ : przedstawia więc prostą (rys. 1 a).

Jeżeli siła  $H=1$  działa w przeciwnym kierunku (2 przypadek), a więc ku łożysku stałemu, otrzymamy

$$A = -H \frac{y}{l} \dots \dots \dots 1 a)$$

i

$$B = +H \sec \left( \text{tg} = \frac{y}{l} \right) \dots \dots \dots 2 a)$$

Widzimy zatem, że zmienia się tylko znak.

Jako podstawę dalszych badań przyjmujemy pierwszy przypadek.

Oznaczamy przez

$O_1, O_2, \dots, O_r, \dots$  nateżenie w pasie górnym (także odpowiedni pręt pasu górnego);

$U_1, U_2, \dots, U_r, \dots$  nateżenie w pasie dolnym (także odpowiedni pręt pasu dolnego);

$D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$  nateżenie w przekątnej (także odpowiednią przekątnię);

$A \dots$  pionowe oddziaływanie łożyska wałkowego.

Inne oznaczenia znajdują się na odpowiednich rysunkach.

**A. Siły wewnętrzne w pasach.**

**a. Pas górny:**

a) Siła  $H=1$  na lewo od badanego pręta (rys. 2).

$$M = Aa_r - Hy = Aa_r - Al = A(a_r - l) = -Ab_r$$

$$O_r = -\frac{M}{h_r} \sec \sigma_r = A \frac{b_r}{h_r} \sec \sigma_r \dots \dots 3)$$

a więc ciągnienie.

Dla 2-go przypadku, z powodu, że  $A' = -A$ , otrzymamy ciśnienie.

β) Siła  $H=1$  na prawo od badanego pręta.

$$M = Aa_r, O_r = -A \frac{a_r}{h_r} \sec \sigma_r \dots \dots 4)$$

Dla 2-go przypadku jest  $O_r = +A \frac{a_r}{h_r} \sec \sigma_r$ .

Na podstawie równań 3) i 4) możemy łatwo wykreślić linie wpływowe (rys. 2 d).

Wykresami linii wpływowych nie będziemy się wogóle zajmowali, ponieważ są one bardzo proste i można je znaleźć w niejednym podręczniku. Zresztą w innej rozprawce omówiliśmy obser-



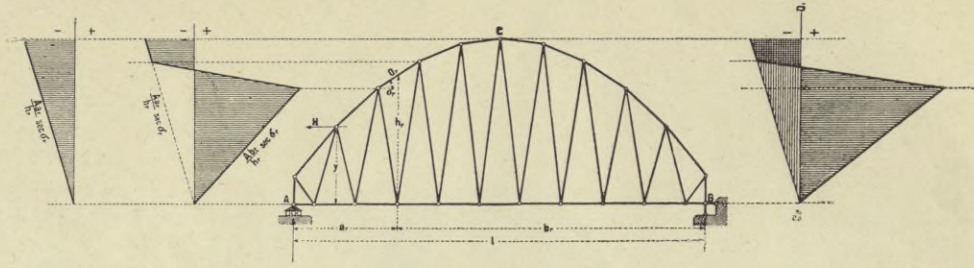
nie nanoszenie linii wpływowych na podstawie równań<sup>1)</sup>.

Sam sposób przedstawienia może być różny. Albo wykreślamy oddzielnie linię wpływową dla lewej połowy belki AC (rys. 2 a), a oddzielnie dla części CB (rys. 2 b); albo też oba te przypadki

otrzymujemy

$$D_n = (A + O_r \sin \sigma_r) \sec \alpha_n = (A + A \frac{b_r}{h_r} \sec \sigma_r \sin \sigma_r) \sec \alpha_n$$

$$D_n = A \left( 1 + \frac{b_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \right) \sec \alpha_n \dots 7)$$



Rys. 2 b.

Rys. 2 a.

Rys. 2.

Rys. 2 d.

możemy połączyć w jednym rysunku, gdy silniej wyciągniemy linię wpływową dla części AC (rys. 2 d). Tego drugiego sposobu stale używać będziemy (por. Tabl. XXVII i XXVIII).

**b. Pas dolny:**

a) Siła  $H=1$  na lewo od środka momentów (rys. 3).

$$M = Aa_r + H(h_r - y) \text{ dla } h > y \text{ to}$$

$$M = Aa_r - H(y - h_r) = Aa_r + H(h_r - y) \text{ dla } h < y \text{ samo}$$

$$M = Aa_r + H(h_r - y) = -Ab_r + Hh_r$$

$$U_r = \frac{M}{h_r} = H - A \frac{b_r}{h_r} \dots 5)$$

β) Siła  $H=1$  na prawo od dotyczącego przedziału.

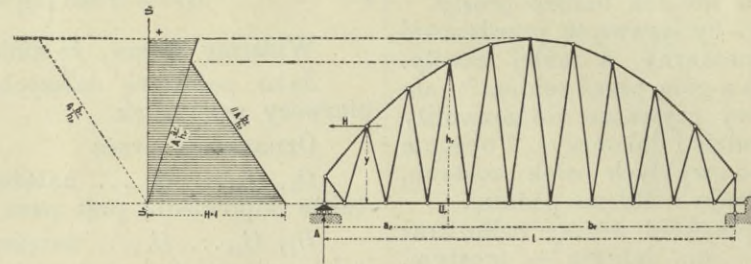
$$A - D_n \cos \alpha_n - O_r \sin \sigma_r = 0, \quad O_r = -A \frac{a_r}{h_r} \sec \sigma_r$$

$$D_n = A \left( 1 - \frac{a_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \right) \sec \alpha_n \dots 8)$$

a) 2. Przekątnie prawej części belki, spadające na prawo:

a) Siła  $H=1$  na lewo od dotyczącego przedziału.

$$A - D_n \cos \alpha_n - O_r \sin \sigma_r = 0, \quad O_r = A \frac{b_r}{h_r} \sec \sigma_r$$



Rys. 3 a.

Rys. 3.

β) Siła  $H=1$  na prawo od środka momentów.

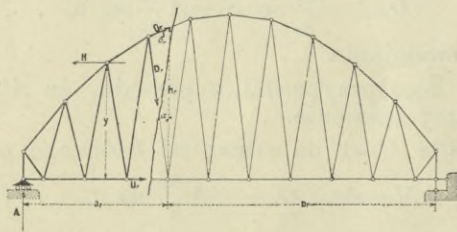
$$M = Aa_r, \quad U_r = A \frac{a_r}{h_r} \dots 6)$$

Nie potrzebujemy wspominać, że dla 2-go przypadku zmieni się tylko znak, podobnie jak przy pasie górnym.

Linię wpływową, wykreśloną na podstawie równań 5) i 6), przedstawia rys. 3 a).

**B. Siły wewnętrzne w przekątniach.**

a) 1. Przekątnie lewej części belki, spadające na prawo:



Rys. 4.

a) Siła  $H=1$  na lewo od dotyczącego przedziału (rys. 4).

Z równania dla pionowych składowych

$$A - D_n \cos \alpha_n + O_r \sin \sigma_r = 0$$

β) Siła  $H=1$  na prawo od dotyczącego przedziału.

$$A - D_n \cos \alpha_n + O_r \sin \sigma_r = 0,$$

$$O_r = A \frac{a_r}{h_r} \sec \sigma_r$$

$$D_n = A \left( 1 + \frac{a_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \right) \sec \alpha_n \dots 10)$$

b) 1. Przekątnie lewej części belki, spadające na lewo:

a) Siła  $H=1$  na lewo od dotyczącego przedziału (rys. 5)

$$A - D_n \cos \alpha_n + O_r \sin \sigma_r = 0, \quad O_r = A \frac{b_r}{h_r} \sec \sigma_r$$

$$D_n = -A \left( 1 + \frac{b_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \right) \sec \alpha_n \dots 11)$$

Dajemy znak -, albowiem w przekątni panuje ciśnienie, zgodnie z przyjęciem na rys. 5.

β) Siła  $H=1$  na prawo od dotyczącego przedziału

$$A - D_n \cos \alpha_n - O_r \sin \sigma_r = 0, \quad O_r = -A \frac{a_r}{h_r} \sec \sigma_r$$

$$D_n = -A \left( 1 - \frac{a_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \right) \sec \alpha_n \dots 12)$$

b) 2. Przekątnie prawej części belki, spadające na lewo:

<sup>1)</sup> Por. autora „Linie wpływowe dla belek trzypasowych wspornikowych”. *Czasopismo Techniczne* 1903, Nr. 21 i 22.



α) Siła  $H=1$  na lewo od dotychczasowego przedziału

$$D_n = -A \left( 1 - \frac{b_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \right) \sec \alpha_n \quad . \quad . \quad 13)$$

β) Siła  $H=1$  na prawo od dotychczasowego przedziału

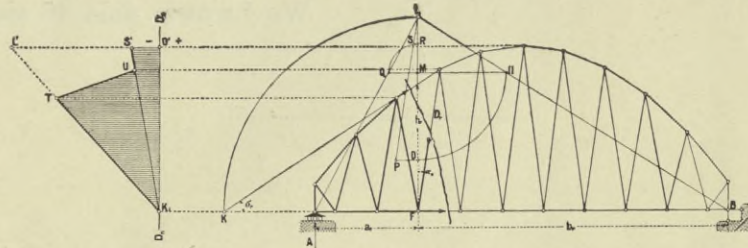
$$D_n = -A \left( 1 + \frac{a_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \right) \sec \alpha_n \quad . \quad . \quad 14)$$

Na rys. 5 i 5 a. przedstawiliśmy wykres linii wpływowej dla przekątni  $D_n$ .

Przedłużamy tedy odpowiedni pręt pasu górnego do przecięcia się z pasem dolnym w punkcie  $K$ : otrzymujemy  $FK = h_r \operatorname{ctg} \sigma_r$ .

Zróbmy następnie  $FL = FK = h_r \operatorname{ctg} \sigma_r$ , połączmy punkt  $L$  z punktem  $B$ , odetnijmy  $LM = A = C_1 C_1'$  (z rys. 1 a), poprowadźmy przez punkt  $M$  poziomą do przecięcia się z prostą  $LB$  w punkcie  $N$ , to wtedy  $MN = \frac{FB}{LF} \cdot LM = \frac{b_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \cdot A$ .

Dodajmy do otrzymanego w ten sposób odcinka długość  $A = LM$ , to otrzymamy



Rys. 5 a.

$$LO = LM + MN = A + A \frac{b_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} = A \left( 1 + \frac{b_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \right).$$

Poprowadźmy wreszcie  $LP \parallel D_n$ , a z punktu  $O$  poziomą do punktu przecięcia  $P$ , to oczywiście  $LP = LO \sec \alpha_n = A \left( 1 + \frac{b_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \right) \sec \alpha_n$ .

Zróbmy teraz  $L'O'$  (rys. 5 a)  $= LO$ , połączmy prostą punkta  $L'$  i  $K_1$ , to mamy pierwszą prostą linii wpływowej, ważną od punktu  $T$ .

Zupełnie analogicznie jest  $QM = \frac{a_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \cdot A$ ,

$$LR = A - \frac{a_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \cdot A, \quad SL = A \left( 1 - \frac{a_r}{h_r \operatorname{ctg} \sigma_r} \right) \sec \alpha_n.$$

Zróbmy wkońcu (rys. 5 a)  $O'S' = SL$  i wykreślmy prostą  $S'K_1$ : jestto druga prosta, ważna do punktu  $U$ .

Nie wspominamy nawet o tem, że dla 2-go przypadku (siła  $H=1$  działa w przeciwnym kierunku) powierzchnia wpływowa dodatnia stanie się ujemną i odwrotnie.

Dla zillustrowania otrzymanych wzorów przedstawiliśmy na tablicy XXVII linie wpływowe dla wszystkich prętów niesymetrycznej belki parabolicznej zbieżnej.

Zauważyć musimy, że siła wewnętrzna

$$O_1 = -A \sec(90 - \sigma_1) = -A \operatorname{cosec} \sigma_1 \quad . \quad . \quad 15)$$

O prawdziwości tego wzoru łatwo się przekonać, gdy się zważy, że oddziaływanie  $A$ , siła wewnętrzna w pasie górnym  $O_1$  i dolnym  $U_1$  są w równowadze, a więc tworzą zamknięty trójbok sił.

II. Przechodzimy do ogólniejszego przypadku, badając belkę wieloboczną o obu pasach zakrzywionych. Jeżeli siła  $H=1$  działa na pasie dolnym (por. rys. 6 lub 7), to oddziaływanie  $A = -H \frac{\eta}{l}$ .

Porównajmy  $\eta = -y$ , do równania poprzedniego, jest identyczne z równ. 1).

### Siły wewnętrzne w pasach.

#### A. Pas górny:

1. Siła  $H=1$  na pasie górnym (rys. 6):

a) na lewo od badanego pręta

$$M = A a_r - H(y + \vartheta_r) = -A b_r - H \vartheta_r$$

$$O_r = \left( A \frac{b_r}{h_r} + H \frac{\vartheta_r}{h_r} \right) \sec \sigma_r \quad . \quad . \quad 16)$$

b) na prawo od badanego pręta

$$M = A a_r, \quad O_r = -A \frac{a_r}{h_r} \sec \sigma_r \quad . \quad . \quad 17)$$

2) Siła  $H=1$  na pasie dolnym:

a) na lewo od środka momentów

$$M = -A a_r - H(\vartheta_r - \eta) = A b_r - H \vartheta_r$$

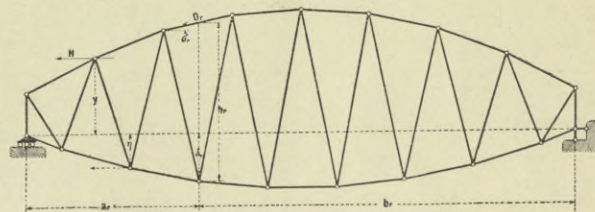
$$O_r = \left( -A \frac{b_r}{h_r} + H \frac{\vartheta_r}{h_r} \right) \sec \sigma_r \quad . \quad . \quad 16 a)$$

Nietrudno dojść do wniosku, że równ. 16 a) jest identyczne z równ. 16): trzeba tylko położyć  $\eta = -y$ , by otrzymać  $+A$  zamiast  $-A$ .

Rys. 5.

b) na prawo od środka momentów

$$M = -A a_r, \quad O_r = A \frac{a_r}{h_r} \sec \sigma_r \quad . \quad . \quad 17 a)$$



Rys. 6.

Znowu równ. 17 a) jest to samo co 17).

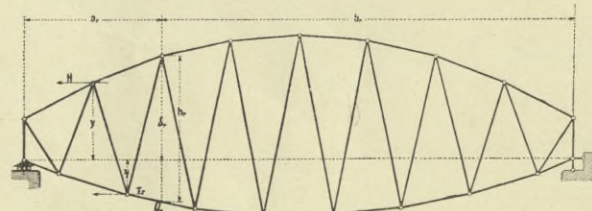
#### B. Pas dolny:

1. Siła  $H=1$  na pasie górnym (rys. 7):

a) na lewo od środka momentów

$$M = A a_r + H(\delta_r - y) = -A b_r + H \delta_r$$

$$U_r = \left( H \frac{\delta_r}{h_r} - A \frac{b_r}{h_r} \right) \sec \tau_r \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$



Rys. 7.

b) na prawo od środka momentów

$$M = A a_r, \quad U_r = A \frac{a_r}{h_r} \sec \tau_r \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

2. Siła  $H=1$  na pasie dolnym:

a) na lewo od badanego pręta



$$U_r = \left( H \frac{\delta_r}{h_r} + A \frac{b_r}{h_r} \right) \sec \tau_r \quad . \quad . \quad 18a)$$

b) na prawo od badanego pręta

$$M = -Aa_r, \quad U_r = -A \frac{a_r}{h_r} \sec \tau_r \quad . \quad . \quad 19a)$$

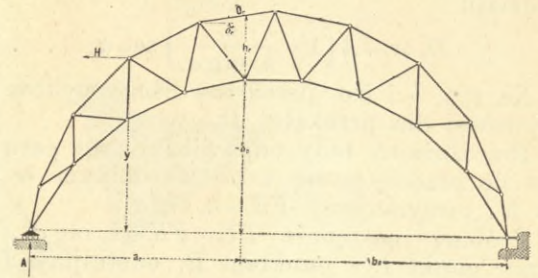
Równania 18a) i 19a) są znowu identyczne z równaniami 18) i 19).

Wzory dla sił wewnętrznych w przekątniach moglibyśmy łatwo wyprowadzić z równania dla składowych pionowych, ale otrzymalibyśmy wzory nie tak bardzo proste: dlatego też wolimy je pominąć. Zresztą mając dane linie wpływowe dla pasów, nie jest wcale trudną rzeczą wykreślić linie wpływowe dla przekątni.

Tablica XXVIII ilustruje nam otrzymane wzory: widzimy na niej linie wpływowe dla wszystkich prętów belki oselkowej.

III. Rozumie się samo przez się, że dla belki sierpowatej (rys. 8) możemy zastosować wzory 16)–19), zastępuwszy  $\vartheta_r$  przez  $-\vartheta_r$ , a także  $\eta$  przez  $-\eta=y$ .

Wzory powyższe możemy też dodawać, że dla ukośnych ciężarów możemy w łatwy sposób znaleźć natężenia w belce, jeżeli te ciężary rozłożymy na składowe poziome i pionowe i dodamy siły wewnętrzne dla obu przypadków.



Rys. 8.

Nadmienimy wkońcu, że możemy uzyskać linie wpływowe zapomocą 3 planów sił dla  $H=1$ , przyczem możemy użyć planu sił dla przypadku  $A=1$ .

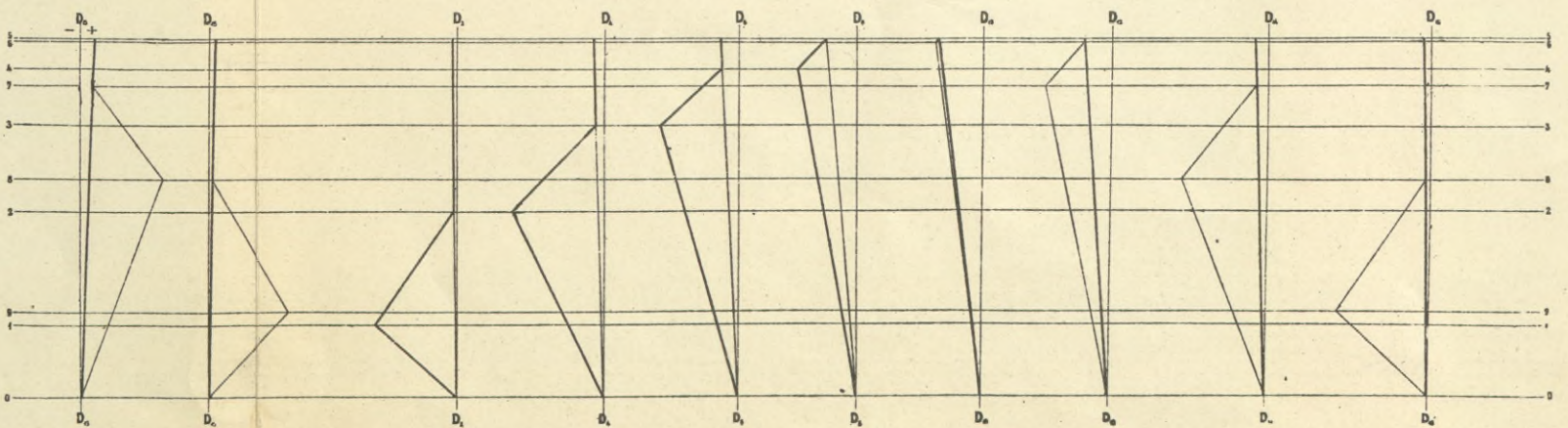
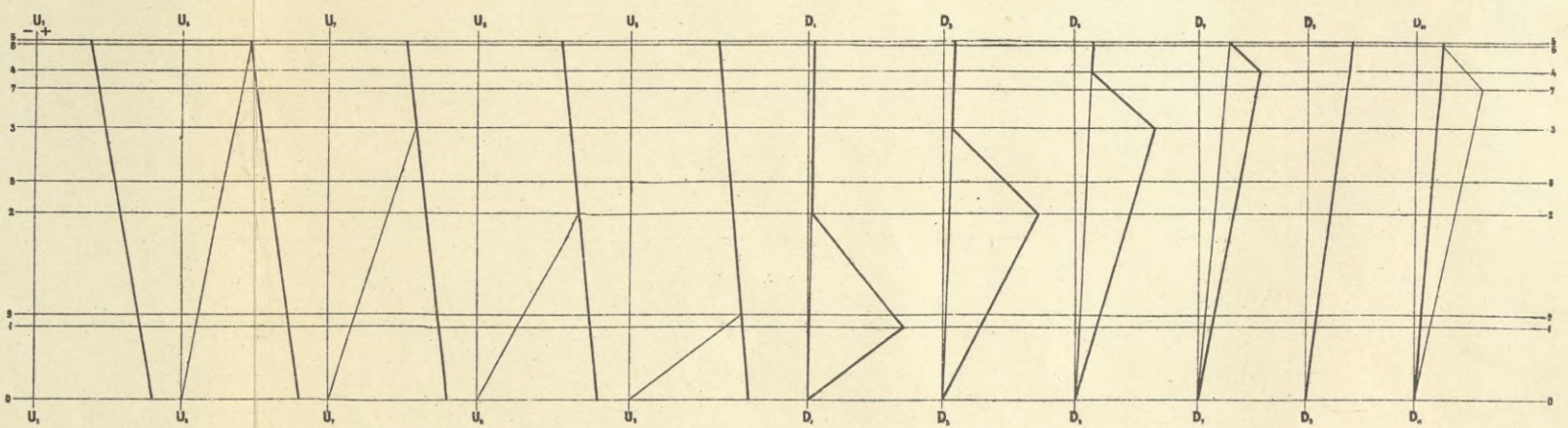
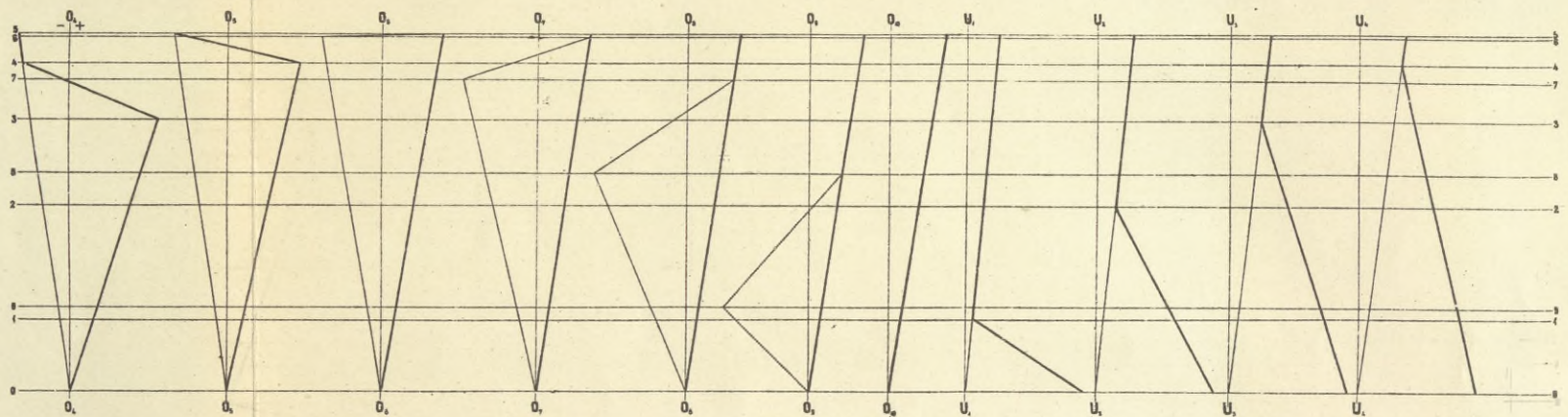
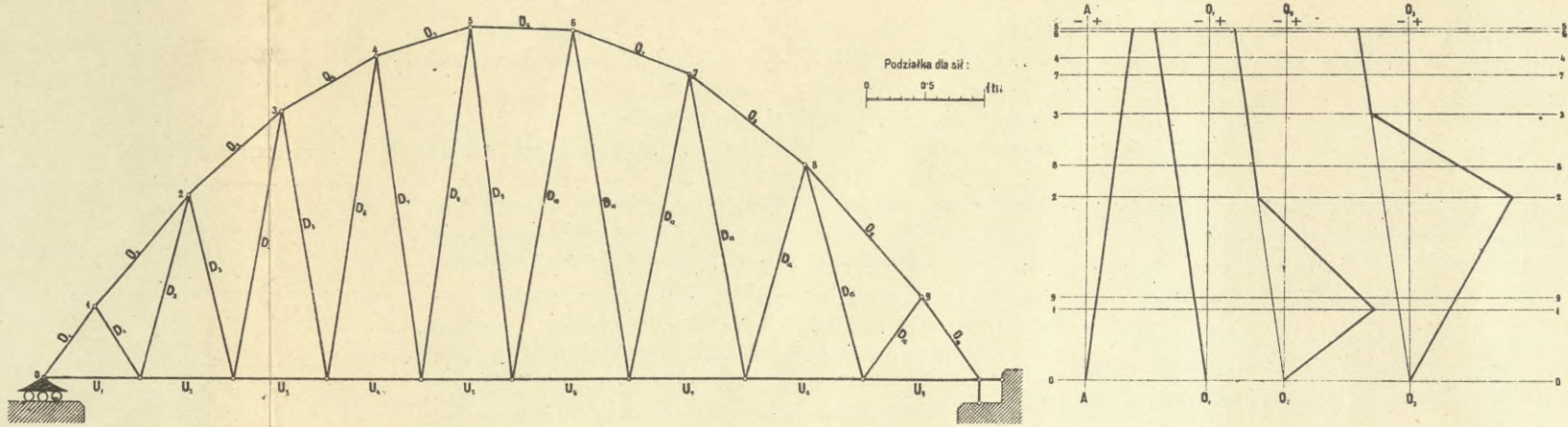
We Lwowie dnia 15 sierpnia 1904.





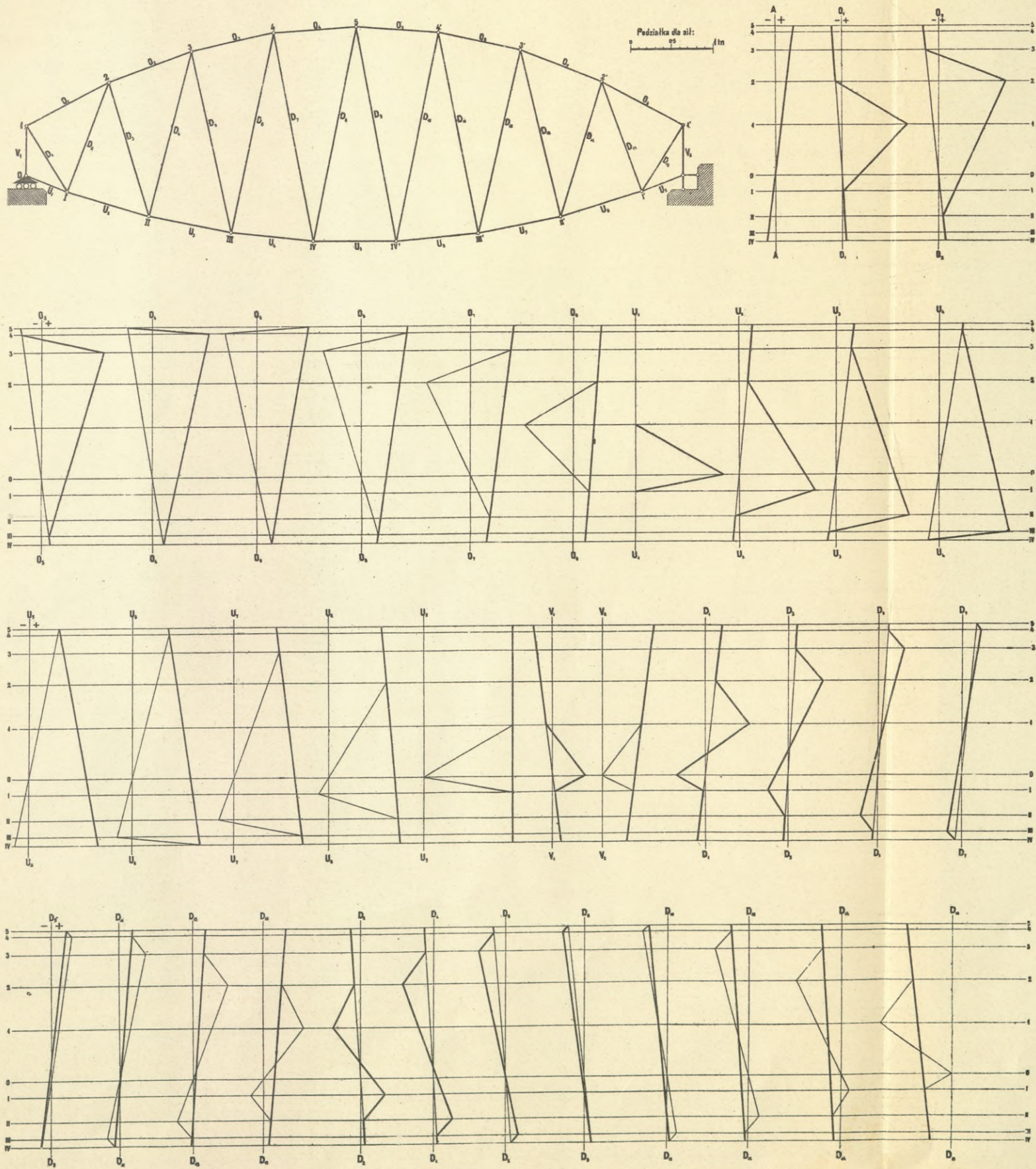


Linie wpływowe dla belek kratowych prostych, narażonych na siły poziome.





# Linie wpływowe dla belek kratowych prostych, narażonych na siły poziome.

















POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

25860

Kdn. 524. 13. IX. 54

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000232000

Z



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-25860

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000232000