Teoria funkcji analitycznych

Puzyna Józef

Teorya funkcyj analitycznych

Lwów 1898 (1900)

Nakład autora

(112) 168 tom II

PRZEDMOWA.

Tom I. zakończyłem określeniem i najogólniejszym podziałem funkcyj analitycznych. Tom II., który właśnie do użytku Publiczności matematycznej oddaję, zaczynam od własności i postaci funkcyj jednoznacznych; przeprowadzam więc badania Weierstrassa i Mittag-Lefflera, [Część I., II.], w całej ich rozciągłości, nie pomijając przytem funkcyj elementarnych jednej zmiennej, którym przypadło zadanie: uprzystępnić ogólnie wyprowadzone twierdzenia. Z funkcyj wielu zmiennych zamieściłem [Część III.] rzecz o podzielności szeregów, a szukanie pierwiastka jednego szeregu wielu zmiennych prowadzi do rozwiązywania równania algebraicznego $f(x,y)=0$. Badania geometryczne punktów wielokrotnych, przecinania się krzywych i tworzenie tak zwanych krzywych dołączonych (bez wszelkich ograniczeń) zakończają te podstawowe wiadomości o funkcyach algebraicznych.

Po tych poszukiwaniach zajmuję się dalej przygotowaniem do teoryi całek Abla [Część IV.]. Nie pomijam i tu badań geometrycznych, aby ułatwić studyum funkcyj H, któremi się Weierstrass posługiwał w teoryi całek i funkcyj Abla. Rodzaj czyli rząd, (defekt) obrazu algebraicznego, (krzywej algebraicznej) ma tu określenia odpowiadające dzisiejszemu stanowi rzeczy, a z tem łączą się i różne metody jego obliczania. Przy tem nie pominąłem szczegółowo omówić krzywe rodzajów: 0, 1, 2, krzywe hypereliptyczne i moduły jednej klasy krzywych. Tu już w tej części znajduje się podział całek Abla na trzy ich rodzaje.

*

Co się tyczy peryodów tych całek i związanych z nimi dróg zamkniętych w obrazie algebraicznym, to wolałem te poszukiwania poprzedzić wykładem o zwartości powierzchni i o powierzchniach Riemanna [Część V.], a to z powodu, że ten sposób uzmysławiania monogenicznej, a wielowartościowej funkcyi może ułatwić lekturę współczesnych autorów, z których liczni posługują się i dziś tym przez Riemanna wprowadzonym środkiem.

Rozpoczynam dalej [Część VI.] badania Cauchy'ego; przenoszę je potem do funkcyj wielu zmiennych, aby dać obraz współczesnych poszukiwań Picarda i Simarta, a kończę twierdzeniem Cousin'a o postaci jednoznacznych analitycznych funkcyj wielu zmiennych. Zajmuję się wreszcie peryodami całek Abla z zatrzymaniem znakowania Weierstrassa, a nie pomijając całek eliptycznych i hypereliptycznych. Przy sposobności odwracania całki eliptycznej rodzaju pierwszego daję krótki rys Weierstrassowej teoryi funkcyj eliptycznych. Wyprowadzenie i zestawienie ich zasadniczych własności stanowi koniec części VI[tej].

Całą część VII. wypełniają funkcye harmoniczne z wyrównawczą metodą Schwarza i z potrzebnemi zadaniami o cząsteczkowem odwzorowaniu. Tu dopełniam własności całek Abla, a więc wyprowadzam warunki potrzebne do ich wyznaczania i określam normalne ich formy.

Część VIII. i ostatnia zawiera teoryę funkcyi trójkąta i pochodnych Schwarza, funkcye umiarowych wielościanów, a określenie grupy modułowej i modułowej eliptycznej funkcyi $J(\tau)$, jako pierwowzoru funkcyj automorficznych kończy poszukiwania tego 2-tomowego dzieła o funkcyach analitycznych.

Zestawiłem w niem przeważnie rezultaty badań Weierstrassa, a dotykając przy tem i innych klasycznych metod, sądziłem, że dzieło moje stanie się może przez to pożyteczniejszem, dając wskazówki w różnych kierunkach poszukiwań.

Kończąc, nie mogę i tu nie wyrazić wdzięczności Akademii Umiejętności w Krakowie, która, dbała — jak zawsze —

o rozwój naszych nauk, przyszła w pomoc z zasiłkiem na wydanie i tego II^{go} tomu.

W korektach pomagali mi gorliwie ukończeni już dziś słuchacze Wydziału filozoficznego w lwowskim Uniwersytecie: Pp. Roman Jamrógiewicz i Franciszek Słuszkiewicz. Za ten ich współudział wyrażam Im serdeczne podziękowanie.

We Lwowie w czerwcu 1900.

Autor.

SPIS RZECZY.

CZĘŚĆ I.

Funkcye elementarne, Funkcya całkowita przestępna bez miejsc zerowych.

Rozdział I. **Funkcya wykładnicza i funkcye wymiernie z niej utworzone.**

Rozdział II. **Logarytm. Łuki. Funkcya całkowita przestępna bez miejsc zerowych.**

CZĘŚĆ II.

Funkcye jednoznaczne ze skończoną lub nieskończoną ilością miejsc osobliwych.

Rozdział III. Funkcye jednoznaczne z jednem miejscem istotnie osobliwem.

Rozdział IV. Funkcye jednoznaczne ze skończoną lub nieskończoną ilością miejsc istotnie osobliwych.

CZĘŚĆ III.

Z teoryi szeregów wielu zmiennych. Funkcye algebraiczne jednej zmiennej.

Rozdział V. Odwracanie szeregu jednej zmiennej. Z teoryi funkcyj wielu zmiennych.

Rozdział VI. Rozwiązywanie równania algebraicznego. Funkcye algebraiczne.

Rozdział VII. Geometryczne badania. Krzywe dołączone. Rodzaj (defekt) krzywych algebraicznych.

Art. Str.

CZĘŚĆ IV.

Funkcye wymierne $R(xy)$ miejsca (x, y) obrazu algebraicznego.

Rozdział VIII. Zasadnicze własności funkcyi $R(xy)$. Jej najmniejszy stopień czyli rząd obrazu algebraicznego.

Rozdział IX. Funkcye Weierstrassa: $H(xy)_\alpha$, $H'(xy)_\alpha$, $H(y, x'y')$.

Rozdział X. Zastosowanie funkcyj H w tworzeniu dowolnej funkcyi $s=R(xy)$.

Rozdział XI. Nowa metoda obliczania rodzaju ρ. Normalne formy funkcyj H.

CZĘŚĆ V.

Zwartość powierzchni (Analysis situs). Powierzchnia Riemanna.

CZĘŚĆ VI.

Całki argumentów urojonych i pozostałości. (Teorya Cauchy'ego). Peryody całek Abla. Odwrócenia całki eliptycznej.

CZĘŚĆ VII.

Funkcye harmoniczne i ich zastosowania.

Rozdział XIX. Funkcye harmoniczne w kole. Prostsze zagadnienia o odwzorowaniach.

Rozdział XX. Metoda wyrównawcza Schwarza.

Art. Str.

Rozdział XXI. **Zastosowania funkcyj harmonicznych.**

CZĘŚĆ VIII.

Pochodna Schwarza i funkcye trójkąta.

Rozdział XXII. **Odwzorowanie wieloboku i trójkąta kołowego w półpłaszczyźnie.**

Rozdział XXIII. **Z teoryi funkcyj modułowych.**

Ważniejsze pomyłki.

Str.	5	wiersz	10	od dołu	zam.	$i \sin x n \varphi$	ma być:	$i \sin n \varphi$.
"	49	"	8	z góry	"	$a\varepsilon_8$	" "	$a\varepsilon^8$.
"	51	"	8	"	"	$\lim\limits_{\zeta=0}$	" "	$\lim\limits_{\zeta=\infty}$.
"	244	"	17	od dołu	"	μ-krotne	" "	k-krotne.
"	252	"	6	"	"	jednorodnych	"	jednokrotnych.
"	259	"	4	"	"	jest więc funkcya	ma być:	jest więc w nieskończoności funkcya.
"	267	"	8	"	"	krzywa $g_2=0$	ma być:	krzywa $g_2=0$ z krzywą.
"	286	"	4	"	"	$(\overset{\alpha}{x}\overset{\alpha}{y})=(x_t y_t)$	ma być:	$(xy)=(\overset{\alpha}{x}_t y_t)$.
"	287	"	7	z góry	"	$(\overset{0}{x}\overset{0}{y})=(x_\tau y_\tau)$	" "	$(xy)=(\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)$.
"	287	"	8	od dołu	"	$\overline{H}(xy, a_0 b_0)$	" "	$\overline{H}(xy, a_0 b_0)_\mu$.
"	288	"	6	"	"	$\sum\limits_{\alpha=1}^{\varrho} C_\alpha H(\overset{\beta}{x}_\tau \overset{\beta}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{\beta}{x}_\tau}{d\tau}$	ma być:	$\sum\limits_{\alpha=1}^{\varrho} C_\alpha \left[H(\overset{\beta}{x}_\tau \overset{\beta}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{\beta}{x}_\tau}{d\tau} \right]_{\tau^0}$.
"	296	"	5	"	"	$C_{\nu\alpha}$	ma być:	$c_{\nu\alpha}$.
"	332	"	10	z góry	"	$H(x'y)_\alpha$	ma być:	$H(x'y')_\alpha$.
"	353	"	4	"	"	których — jedne	ma być:	których spółrzędne — jedne.
"	369	"	11	od dołu	"	Gdy przekrój q_σ łączy	ma być:	„Gdy przekrój q_σ w powierzchni P_σ, opatrzonej już wszystkimi innymi przekrojami łączy".
"	369	"	8	"	"	Gdy q_σ łączy dwa	ma być:	Gdy q_σ łączy w P_σ dwa.
"	384	"	1	"	"	z punktu $\varkappa_1$	ma być:	z punktu k_1.
"	393	"	2	z góry	"	$(c_1, c_2, \ldots, c_\mu, c_\infty$	ma być:	$(c_1 c_2, c_2 c_3, \ldots, c_\mu c_\infty)$.
"	394	"	15	od dołu	"	art. 91	ma być:	art. 98.
"	396	"	2	z góry	"	G_1	ma być:	G.
"	413	"	5	"	"	przedstawić	ma być:	podstawić.

Str.	415	wiersz	9	od dołu	zam.:	$\overline{f}(z_0)$	ma być:	$f(\overline{z_0})$.
„	416	„	2	z góry	„	u którego	„	a którego.
„	424	„	17	„	„	od	„	do.
„	426	„	7	„	„	$-\pi i E A'_s$	„	$-\Sigma A'_s$.
„	433	„	16	od dołu	„	pozostałych	„	prostych.
„	439	„	14	z góry	„	V_1'/V	„	V_1'/V'.
„	445	„	12	od dołu	„	$c_\alpha = b'$	„	$a_\alpha = b'$.
„	449	„	15	z góry	„	$f_\varkappa(x)-f_\varkappa(x)$	„	$f_\varkappa(x)-f_{\varkappa'}(x)$.
„	449	„	15	„	„	Z pewnej	„	Z pierwszej.
„	464	„	10	„	„	Dalej poprowadzimy takie znowu określenia, ma być: Dalej wprowadzimy takie jeszcze określenie.		
„	480	„	12	od dołu	„	że tylko	ma być:	że nie tylko.
„	504	„	12	z góry	„	(12)	„	(2).
„	525	„	12	od dołu	„	Σa_α	„	$\Sigma a'_\alpha$.
„	528	„	1	z góry	„	o siebie	„	do siebie.
„	530	„	4	od dołu	„	$R(u)$	„	$R(\wp u)$.
„	539	„	1	z góry	„	wartości	„	wartość.
„	541	„	1	„	„	$\int \frac{s\,ds}{\sqrt{S}}$	„	$\sum_\nu A_2^{(\nu)} \int \frac{s\,ds}{\sqrt{S}}$.
„	541	„	10, 11	„	„	z r całek eliptycznych rodzaju 2go, ma być: z jednej, ($\varrho=1$), całki eliptycznej rodzaju 2go.		
„	546	„	6	od dołu	„	krzywej (c)	ma być:	krzywej c.
„	569	„	11	„	„	β	„	β'.
„	660	„	5	z góry	„	A	„	A_1.
„	660	„	5	od dołu	„	λ	„	$\lambda\pi$.
„	661	„	8	z góry	„	λ	„	$\lambda\pi$.
„	661	„	13	„	„	λ, μ, ν	„	$\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$.

CZĘŚĆ I.

FUNKCYE ELEMENTARNE. FUNKCYA CAŁKOWITA PRZESTĘPNA BEZ MIEJSC ZEROWYCH.

ROZDZIAŁ I.

Funkcya wykładnicza i funkcye wymiernie z niej utworzone.

---

1. Określenie funkcyi wykładniczej. Nawiązując do uwag podanych w ostatnich artykułach Tomu I., zajmiemy się tu całkowitemi przestępnemi funkcyami, określonemi — jak wiadomo — bezustannie zbieżnymi szeregami.

Aby z nich wybrać te, które na całej płaszczyźnie skończonych wartości swego argumentu x nigdzie nie stają się zerem, potrzeba przedtem dość długich przygotowań, które wynikną z szukania takich funkcyj przy pewnych ograniczających warunkach, postawionych zaraz z początku zadania. To ograniczenie sprowadzi nas do znanych oddawna elementarnych funkcyj, a te trzeba będzie określić zgodnie z wymogami dzisiejszej analizy.

Gdy funkcyą bez miejsca zerowego w całej płaszczyźnie argumentu x ma być $G(x)$, a jej pochodnę nazwiemy $G'(x)$, to iloraz $G'(x):G(x)$ musi się dać wyrazić bezustannie zbieżnym szeregiem. Jest więc ten iloraz pewną całkowitą — wymierną lub przestępną — funkcyą $g(x)$; stąd wynika równanie:

(1) $$G'(x)/G(x)=g(x),$$

które nasamprzód zbadamy w pewnym szczególnym przypadku. Oto zakładając $g(x)=1$, mamy z (1) relacyę:

(2) $$G'(x)=G(x)$$

wskazującą, że mamy tu do czynienia z funkcyą przestępną całkowitą, która nigdzie nie staje się zerem, a prócz tego jej pochodna jest identyczną z samą funkcyą. Połóżmyż:

$$G(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots,\ \text{a więc}\ G'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots,$$

to uwzględniając (2) dostajemy:

$$c_1=c_0,\ c_2=\frac{c_1}{2}=\frac{c_0}{2!},\ c_3=\frac{c_2}{3}=\frac{c_0}{3!},\ \dots,\ c_{n-1}=\frac{c_0}{(n-1)!},\ c_n=\frac{c_0}{n!},\ \dots,$$

gdzie $c_0=c$ jest stałą dowolną. Mamy zatem:

$$G(x)=c\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right],$$

gdzie szereg w nawiasy ujęty naznaczymy przez $E(x)$.

Funkcya $E(x)$ ma oczywiście także własność (2). Wszystkie jej pochodne są więc $=E(x)$, a gdy to zastosujemy w tworzeniu jej przeprowadzeń dla otoczenia dowolnego punktu a, dostaniemy:

$$E(x)=E(x|a)=E(a)+\frac{E(a)}{1!}(x-a)+\frac{E(a)}{2!}(x-a)^2+\dots$$

$$=E(a)\left[1+\frac{x-a}{1!}+\frac{(x-a)^2}{2!}+\dots\right],\ \text{czyli:}$$

(3) $$E(x)=E(a).E(x-a).$$

Połóżmy $a=u$, $x-a=v$, to $x=u+v$, a związek (3) tak napisać trzeba:

(4) $$E(u+v)=E(u).E(v).$$

Tę własność funkcyi $E(x)$ wyrażają w ten sposób: *Funkcya $E(x)$ posiada prawidło (teorem) dodawania.* (Przypomina ono relacyę arytmetyczną $A^{m+n}=A^m.A^n$).

Zażądajmy naodwrót analitycznej funkcyi $f(x)$ o regularnym elemencie: $(c_0+c_1x+c_2x^2+\dots)$ zbieżnym w pewnem kole (r), a o tej własności, że dla miejsc u, v, leżących w (r), i takich, że $(u+v)$ leży również w (r), zachodzić ma związek $f(u+v)=f(u).f(v)$, czyli wyraźnie związek:

$$c_0+c_1(u+v)+c_2(u+v)^2+\dots=$$
$$c_0^{\ 2}+c_0c_1(u+v)+(c_0c_2u^2+c_1c_1uv+c_2c_0v^2)+\dots$$

Równając tu ze sobą spółczynniki odpowiednich wyrazów, dostajemy:

$$\begin{aligned} c_0c_n&=c_n\\ c_1c_{n-1}&=c_n\tbinom{n}{1}\\ c_2c_{n-2}&=c_n\tbinom{n}{2},\quad n=0,1,2,\dots\\ &\vdots\\ c_nc_0&=c_n.\end{aligned}$$

Ze związków tych, gdy $n=0, 1, 2$, dostajemy $c_0=1$, $c_1=\frac{1}{1!}$, $c_2=\frac{1}{2!}$, a gdy założymy, że i $c_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}$, to mieć także będziemy $c_n=\frac{1}{n!}$. Z tego wynika, że $f(x)=E(x)$ i że więc prawidło dodawania (4) jest charakterystycznem dla $E(x)$.

Z (4) da się wywieść i ogólniejsze prawidło dodawania, a to

(5) $$E(u_1+u_2+\ldots u_n)=E(u_1).E(u_2)\ldots E(u_n);$$

mamy bowiem:

$$E(u_1+u_2+u_3)=E(u_1+u_2)\,E(u_3)=E(u_1)\,E(u_2)\,E(u_3)$$

i t. d.

Ponieważ $E(0)=1$, więc gdy w (4) założymy $u+v=0$, a więc $v=-u$, to mieć będziemy $E(u-u)=1=E(u).E(-u)$, a stąd:

(6) $$E(-u)=1/E(u).$$

Połóżmy:

(7) $$E(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=e,$$

to z tego oznaczenia — jeżeli przyjmiemy $x=m=1+1+\ldots+1$, (liczba całkowita) — wynika podług (5) $E(m)=E(1)\ldots E(1)$, czyli:

(a) $$E(m)=e^m.$$

Gdy ν jest liczbą całkowitą, dodatnią, a położymy:

$$1=\nu.\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\ldots+\frac{1}{\nu},\ (\nu \text{ dodajników}),$$

to znowu podług (5) mieć będziemy:

$$E(1)=e=E\left(\frac{1}{\nu}\right).E\left(\frac{1}{\nu}\right)\ldots E\left(\frac{1}{\nu}\right)=\left[E\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]^\nu, \text{ a stąd:}$$

(b) $$E\left(\frac{1}{\nu}\right)=e^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{e}.$$

Pierwiastek wziąć tu trzeba w głównej jego wartości, gdyż $E\left(\frac{1}{\nu}\right)$ jest wielkością rzeczywistą.

Niech teraz x będzie ułamkiem wymiernym dodatnim $=\frac{\mu}{\nu}$, $\mu>0$, $\nu>0$; podług (5) mieć znowu będziemy:

$$E\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=E\left(\frac{1}{\nu}\right).E\left(\frac{1}{\nu}\right)\ldots E\left(\frac{1}{\nu}\right),\ (\mu \text{ czynników}).$$

Stąd — stosując (b) — dostaniemy:

(c) $$E\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=\left[E\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]^\mu=e^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{e^\mu},$$

gdzie znowu ν-ty pierwiastek wziąć trzeba w jego głównej wartości.

Z relacyj (a), (b), (c) dostaniemy na podstawie (6) nowe określenia:

$$(a')\ E(-m)=e^{-m},\quad (b')\ E\left(-\frac{1}{\nu}\right)=e^{-\frac{1}{\nu}},\quad (c')\ E\left(-\frac{\mu}{\nu}\right)=e^{-\frac{\mu}{\nu}}.$$

Gdy x jest liczbą niewymierną dodatnią lub ujemną, a do niej zbliżamy się szeregiem liczb wymiernych $h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots$, to $E(x)$ naznaczymy również przez e^x, rozumiejąc przez to granicę, do której zdąża szereg wartości $e^{h_1}, e^{h_2}, e^{h_3}, \ldots$, a one wszystkie podług (a), (b), (c) lub (a'), (b'), (c') określić się dadzą.

Gdy $x=u+vi$, jest więc urojone, to już $E(u+vi)$ nie da się określić potęgą liczby e. Lecz i w tym razie szereg:

$$E(u+vi)=1+\frac{u+vi}{1!}+\frac{(u+vi)^2}{2!}+\ldots=E(u).E(vi)=e^u.E(vi)$$

naznaczymy krótko przez:

$$(d)\qquad e^x=e^{u+vi}=e^u.e^{vi}.$$

Wskutek arytmetycznych definicyj (a), (b), (c), (a'), (b'), (c') i przyjętego znakowania (d) nazywają funkcyę $E(x)$ funkcyą wykładniczą.

2. Funkcye trygonometryczne *sinx, cosx*. W ścisłym związku z funkcyą wykładniczą pozostają bezustannie zbieżne szeregi:

$$(1)\quad S(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,\quad K(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

Przyjmijmy bowiem argument postaci: xi, to mieć będziemy:

$$e^{xi}=1+\frac{xi}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3i}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

a w tem rozwinięciu jest widocznie suma wyrazów bez czynnika i szeregiem $K(x)$, suma zaś wyrazów mnożonych przez i jest $=S(x)$. Jest więc:

$$(2)\qquad e^{xi}=K(x)+iS(x),$$

gdzie tu przy x rzeczywistem, a więc xi czysto urojonem jest $K(x)$ częścią rzeczywistą, a $iS(x)$ częścią czysto urojoną funkcyi e^{xi}.

Zajmijmy się tu bliżej szeregami (1).

Tworząc pochodne tych szeregów mamy:

$$S'(x)=K(x),\quad K'(x)=-S(x),$$

a na dalsze pochodne dostajemy:

$$S''(x)=-S(x),\quad S'''(x)=-K(x),\ldots$$
$$K''(x)=-K(x),\quad K'''(x)=+S(x),\ldots$$

Na tej podstawie utworzone przeprowadzenia szeregów (1) dla otoczenia dowolnego miejsca a będą:

$$S(x)=S(x\,|\,a)=S(a)+\frac{K(a)}{1!}(x-a)-\frac{S(a)}{2!}(x-a)^2-\ldots$$
$$K(x)=K(x\,|\,a)=K(a)-\frac{S(a)}{1!}(x-a)-\frac{K(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

albo:

$$(3)\qquad \begin{aligned} S(x)&=S(a)\,.\,K(x-a)+K(a)\,.\,S(x-a)\\ K(x)&=K(a)\,.\,K(x-a)-S(a)\,.\,S(x-a). \end{aligned}$$

Połóżmy $a=u$, $x-a=v$, a więc $x=u+v$, to z form (3) dostajemy:

$$(4)\qquad \begin{aligned} S(u+v)&=S(u)\,.\,K(v)+K(u)\,S(v)\\ K(u+v)&=K(u)\,.\,K(v)-S(u)\,.\,S(v). \end{aligned}$$

Zmieńmy v na $-v$, to z uwagi, że:

$S(-x)=-S(x)$ (jako szereg nieparzysty)

$K(-x)=K(x)$ („ „ parzysty),

dostaniemy:

$$(4')\qquad \begin{aligned} S(u-v)&=S(u)\,K(v)-S(v)\,K(u)\\ K(u-v)&=K(u)\,K(v)+S(u)\,S(v). \end{aligned}$$

Relacye (4), (4') przypominają znane wzory z trygonometryi:

$$sin(u\pm v)=sin\,u\,.\,cos\,v\pm cos\,u\,.\,sin\,v$$
$$cos\,(u\pm v)=cos\,u\,.\,cos\,v\mp sin\,u\,.\,sin\,v.$$

Nie wyda się to dziwnem, gdy się udowodni, że właśnie funkcya trygonometryczna $sinx$ wyraża się przez łuk x szeregiem $S(x)$, a funkcya $cosx$ szeregiem $K(x)$.

Według wzoru Moivre'a mamy dla dowolnego rzeczywistego łuku φ:

$$(cos\varphi+i\,sin\,\varphi)^n=cos\,n\varphi+i\,sin\,n\varphi,$$

n całkowite. Połóżmy $\varphi=\dfrac{x}{n}$, gdzie x jest dowolnym dodatnim lub ujemnym łukiem, to mieć będziemy:

$$\left(cos\,\frac{x}{n}+i\,sin\frac{x}{n}\right)^n=cosx+i\,sinx.$$

Prawa strona tej identyczności pozostaje zawsze ta sama przy dowolnie rosnącem, całkowitem, dodatniem n. Co się tyczy lewej strony, to tam dla bardzo dużych n można $|x/n|$ uczynić mniejszem od dowolnie małej dodatniej ilości. Wtedy $cos\,(x/n)$ dowolnie mało różnić się będzie od 1, a $sin\,(x/n)$ dowolnie mało od swego łuku (x/n). Z tego wynika, że chcąc przejść do $n=\infty$, możemy po lewej stronie położyć już naprzód: 1 za $cos(x/n)$, a (x/n) za $sin(x/n)$. Mieć więc będziemy:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+i\frac{x}{n}\right)^n=cos x+i\,sin x=$$

$$=\lim_{n=\infty}\left[1+\binom{n}{1}\frac{xi}{n}+\binom{n}{2}\frac{(xi)^2}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{(xi)^3}{n^3}+\ldots+\frac{(xi)^n}{n^n}\right],$$

a że:

$$(5)\qquad \lim_{n=\infty}\binom{n}{r}\frac{1}{n^r}=\lim_{n=\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!\,n^r}=\frac{1}{r!}$$

przy każdem choćby dowolnie wielkiem, skończonem r, a dla r dosięgającego już $n=\infty$ mamy skończoną granicę:

$$\lim_{n=\infty}\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n^n}=0,$$

więc będzie:

$$cos x+i\,sin x=1+\frac{xi}{1!}+\frac{(xi)^2}{2!}+\frac{(xi)^3}{3!}+\frac{(xi)^4}{4!}+\ldots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)=K(x)+i\,S(x).$$

Z tego wynika, że przy każdem skończonem, rzeczywistem x jest:

$$cos x=K(x),\ sin x=S(x)^{*}).$$

Funkcye zatem $cos x$ i $sin x$ wyrażają się przez łuki kątów, do których należą, bezustannie zbieżnymi szeregami.

W ten sposób przenieśliśmy te funkcye, przódy (w całym tomie I.) określone czysto geometrycznie, do analizy. W analizie są $sin x$, $cos x$ całkowitemi, przestępnemi funkcyami, pozostają więc skończone, oznaczone i ciągłe dla wszelkich skończonych rzeczywistych, lub urojonych wartości swego argumentu. Gdy w relacyi:

$$(\alpha)\qquad e^{xi}=cos x+i sin x$$

zmienimy x na $-x$, dostaniemy:

$$(\beta)\qquad e^{-xi}=cos x-i sin x,$$

a gdy te dwie relacye stronami ze sobą pomnożymy, dojdziemy do związku:

$$(\gamma)\qquad 1=cos^2x+sin^2x$$

---

*) Por. J. L. Raabe. *Mathematische Mittheilungen [1. Theil, 1857.] — Zur algebraischen Analysis* str. 14.

W. Żmurko. Wykład matematyki T. I. (1864.) str. 294. Franklin F. *Note on the theorem $e^{ix}=cos\ x+i\ sin\ x$. American Journal of Mathematics* T. 7. str. 376.

znanego już z trygonometryi dla x rzeczywistego. Z tych samych relacyj (α), (β) otrzymamy:

$$(\delta) \qquad sinx=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}, \; cosx=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}.$$

Są-to relacye Eulera, które w tomie I. mieliśmy pod inną postacią [art. 21.].

Sprowadziwszy $sinx$, $cosx$ do funkcyj całkowitych przestępnych, możemy teraz zamiast symbolu $1_x = cosx + isinx$, który w tomie I. przy rzeczywistem x miał czysto geometryczne znaczenie (oznaczał miejsce na płaszczyźnie (x)), pisać e^{xi} i rozumieć przez to również funkcyę całkowitą przestępną. Posługując się dalej wiadomościami z geometryi będzie można liczbę 1 określić przez $e^{2s\pi i}$, $s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a liczby $+i$, -1, $-i$ przez $e^{\frac{4s+1}{2}\pi i}$, $e^{(2s+1)\pi i}$, $e^{\frac{4s+3}{2}\pi i}$; $s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, jakkolwiek dopiero później zdołamy π t. j. połowę okręgu koła o promieniu $=1$ określić czysto analitycznie.

W dalszem następstwie będziemy mogli także pierwiastki równania $\omega^n = 1 = e^{2s\pi i}$ przedstawić przez $\omega = e^{\frac{2s\pi i}{n}}$, $s=0, 1, 2, \ldots, n-1$, a pierwiastki równania $\omega^n = -1 = e^{(2s+1)\pi i}$ przez $\omega = e^{\frac{2s+1}{n}\pi i}$, których-to oznaczeń odtąd wyłącznie używać będziemy. Podobnie dowolne miejsce $r.1_\varphi$ na płaszczyźnie liczbowej przedstawiać odtąd będziemy przez $r.e^{\varphi i}$.

3. Własności funkcyi wykładniczej. Przejdźmy teraz, — zrywając zupełnie z danemi geometrycznemi — do wykrycia własności poznanych trzech funkcyj.

Co się tyczy funkcyi wykładniczej, to znamy już jej dwie własności, a to:

I. *Funkcya wykładnicza e^x na żadnem miejscu swego argumentu x nie staje się zerem.*

II. *Funkcya wykładnicza ma wszystkie swoje pochodne równe jej samej.*

Gdy zważymy, że $e^x = 1 + (x/1!) + (x^2/2!) + \ldots$, to z tego rozwinięcia i określenia $e^{-x} = 1/e^x$ wynika:

III. Funkcya wykładnicza jest dla wszelkich rzeczywistych wartości swego argumentu dodatnią i rzeczywistą, a wartość $=1$ przybiera przy rzeczywistem, skończonem x tylko dla $x=0$.

Połóżmy $x=u+vi$ i zauważmy:

$$|e^x|=|e^{u+vi}|=|e^u|.|e^{vi}|$$

to z uwagi, że:

$$|e^u|=e^u \text{ podług tw. III. i że:}$$

$$|e^{vi}|=|\cos v+i\sin v|=\sqrt{\cos^2 v+\sin^2 v}=1,$$

dostajemy $|e^{u+vi}|=e^u$, a to znaczy:

IV. *Bezwzględna wartość funkcyi wykładniczej zależy jedynie od pierwszorzędnej części jej argumentu.*

Najważniejszą jednak własnością funkcyi e^x jest jej peryodyczność polegająca na tem, że przy każdem dowolnem x, istnieje pewna wielkość h zwana peryodem, albo okresem, a dająca:

$$(1) \qquad e^{x+h}=e^x.$$

W następstwie tego założenia mamy:

$$\ldots=e^{x+2h}=e^{x+h}=e^x=e^{x-h}=e^{x-2h}=\ldots$$

a więc w ogólności:

$$e^{x+nh}=e^x, \quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$$

Z równania (1) wynika określenie:

$$(2) \qquad e^h=1,$$

które nam dozwoli bliżej poznać peryod h. Przyjmijmy: $h=k+li$ to mamy według (2):

$$e^k e^{li}=1, \quad \text{i} \quad |e^k|.|e^{li}|=1;$$

że zaś $|e^{li}|=1$, więc musi być $|e^k|=e^k=1$, a to dla rzeczywistych k spełnia się tylko, gdy $k=0$. Mamy zatem $h=li$, co znaczy:

V. *Peryod (li) funkcyi wykładniczej jest ilością czysto urojoną o tej własności, że* $e^{li}=1$.

Gdy zważymy, że $e^{li}=\cos l+i\sin l$, to widocznie l ma dać $\cos l=1$, $\sin l=0$. Liczba l ma więc być — mówiąc językiem geometryi — najmniejszym łukiem, dla którego jest $\cos l=1$, ($\sin l=0$). Lecz możemy ją jeszcze inaczej określić. Niech λ będzie najmniejszym łukiem, dla którego $\sin\lambda=1$, a $\cos\lambda=0$, to mamy

$$e^{\lambda i}=i, \text{ a stąd: } e^{4\lambda i}=1,\ l=4\lambda,$$

tak, że l jest widocznie $=$4-krotnemu najmniejszemu łukowi dającemu $\sin\lambda=1$, ($\cos\lambda=0$).

4. Obliczenie peryodu funkcyi wykładniczej. Aby λ obliczyć zauważmy, że dla $v=0$ jest $\sin v=0$, a dla dostatecznie małych dodatnich v jest $\sin v$ dodatnie, bo dla takich v mamy w rozwinięciu

$$\sin v=\left(v-\frac{v^3}{3!}\right)+\left(\frac{v^5}{5!}-\frac{v^7}{7!}\right)+\cdots$$

wszystkie różnice $\left(v-\frac{v^3}{3!}\right), \left(\frac{v^5}{5!}-\frac{v^7}{7!}\right), \ldots$ dodatnie. Pytanie zachodzi, czy $\sin v$ może wzróść aż do wartości 1, gdy v rośnie, poczynając od zera?

Aby na to odpowiedzieć, napiszmy związek $\sin^2 v+\cos^2 v=1$ w postaci:

$$\sin^2 v+\left(\frac{d}{dv}\sin v\right)^2=1$$

i połóżmy $\sin v=z$. Wtedy dostaniemy równanie:

$$z^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2=1, \text{ a stąd:}$$

$$(1)\qquad dv=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Pierwiastek $\sqrt{1-z^2}$ bierzemy ze znakiem dodatnim, gdyż przyrosty dv, dz mają być równocześnie dodatnie.

Rozwijając w (1) $(\sqrt{1-z^2})^{-1}$ na szereg zbieżny dla $|z|<1$, dostajemy:

$$\frac{dv}{dz}=1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1.3}{2.4}z^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}z^6+\ldots$$

a całkując po obydwu stronach, mamy:

$$(2)\qquad v=z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^7}{7}+\ldots,$$

gdzie tu stałą całkowania opuszczono, gdyż wartości $v=0$, ma odpowiadać $z=0$.

Niech teraz z — poczynając od zera — wzrasta, przebiegając ułamkowe dodatnie wartości. Szereg (2) pozostaje ciągle zbieżnym, a v równocześnie z z będzie wzrastać. Lecz pokażemy, że szereg (4) będzie zbieżny i dla $z=1$, której-to wartości odpowie szukany łuk:

$$(3)\qquad v=\lambda=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\ldots$$

W tym celu zauważmy rozwinięcie:

$$\sqrt{1-y}=1-\left[\frac{1}{2}y+\frac{1.3}{2.4}y^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}y^3+\ldots\right]$$

zbieżne nietylko dla $|y|<1$, ale i dla $|y|=1$, [T. I. art. 186. Pd. 1.] w którym-to wypadku dostajemy:

$$(4)\qquad 1=\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots$$

Poczynając od drugiego dodajnika szeregów (3), (4), widzimy, że po porządku dodajniki w (3) są mniejsze od odpowiednich dodajników w (4). Stąd wynika rzeczywiście zbieżność szeregu (3), a to dowodzi, że funkcya *sin v* dosięga w istocie wartości 1, gdy v, wzrastając od zera, stanie się $=\lambda$. Połóżmy $\lambda=\frac{\pi}{2}$, to w takim razie peryodem funkcyi e^x będzie: $h=4\lambda i=2\pi i$.

Przyjmijmy, że oprócz $4\lambda i$ istnieje jeszcze drugi peryod (oczywiście także czysto urojony) $4\lambda' i$. W takim razie mamy:

$$e^{4\lambda i}=e^{4\lambda' i}, \quad \text{czyli: } e^{4(\lambda-\lambda')i}=1,$$

a zakładając $\lambda-\lambda'>0$, musielibyśmy przyjąć, że istnieje łuk $\lambda-\lambda'<\lambda$, dla którego po raz pierwszy staje się $\sin\lambda=1$. Lecz to jest niemożliwe, bo już w ten sposób było określone λ. Z tego wynika, że e^x ma jeden tylko peryod — jest funkcyą jednoperyodyczną — a w równaniu $e^\omega=1$ może być ω wyłącznie $=2n\pi i$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Na płaszczyźnie argumentu x narysujmy linię krzywą L nieprzecinającą się z sobą, dążącą od nieskończoności do nieskończoności i biegnącą tak, że każda prosta równoległa do osi drugorzędnej, ma z nią zawsze tylko jeden punkt przecięcia. Z dowolnego punktu a tej linii nakreślmy odcinek $ab=2\pi$ równolegle do osi drugorzędnej i posuwajmy nim pozostawiając punkt a zawsze na L, a sam odcinek zawsze równolegle do pierwotnego położęnia ab. Punkt b opisze wtedy linię L' przystającą i równoległą do pierwszej. Obie linie ograniczą nieskończenie długi pas o szerokości 2π, branej w kierunku osi drugorzędnej. Pas ten ma tę własność, że obrawszy w jego wnętrzu dowolny punkt x i oznaczywszy w tym punkcie wartość e^x, dostaniemy tę samą wartość na nieskończenie wielu miejscach $x\pm2\pi i$, $x\pm4\pi i$, ..., które wszystkie leżą już poza pasem $(L\ldots L')$, a które charakteryzujemy jako miejsca równoważne z miejscem x.

Miejsca zatem zawarte w owym pasie dają już zupełne wyobrażenie, jak się funkcya e^x zachowuje na całej płaszczyźnie swego argumentu. Przy tem zauważyć potrzeba, że z miejsc rozpostartych na samych liniach L, L' dość jest uwzględnić tylko miejsca na jednej z tych linij leżące, a to z tego powodu, że z miejscem x na linii L jest miejsce $x+2\pi i$, leżące na L' równoważne. Taki pas o samych już miejscach nierównoważnych między sobą nazwiemy zakresem peryodyczności funkcyi e^x [zakresem miejsc nierównoważnych]. L, L' mogą także być prostemi liniami.

Przyjmijmy, że w obszarze peryodyczności mamy dwa miejsca x, x' takie, że $e^x = e^{x'}$, czyli: $e^{x'-x} = 1$.

Różnica $x' - x$ jest widocznie $= 2n\pi i$, a zatem mielibyśmy: $x' = x + 2n\pi i$, a to jest niemożliwe. Z tego wynika:

I. *Funkcya wykładnicza przyjmuje raz tylko każdą wartość w swym zakresie peryodyczności.*

Z funkcyi e^x tworzyć można funkcye o dowolnie danym peryodzie $c = a + bi$. Zauważmy bowiem funkcyę $e^{\frac{x}{a}}$, to jej peryodem jest widocznie $2\pi a i$, gdyż $e^{\frac{x}{a}} = e^{\frac{x}{a} + 2\pi i} = e^{\frac{x + 2\pi a i}{a}}$. Połóżmyż $2\pi a i = c$, a więc $a = \frac{c}{2\pi i}$, to funkcya $e^{\frac{2\pi i x}{c}}$ będzie żądaną funkcyą. Jej zakres peryodyczności — gdy $c = |c| e^{\varphi i}$ — ograniczą dwie przystające, równoległe do siebie krzywe o stałem w kierunku φ od siebie oddaleniu $= |c|$.*)

Funkcya wykładnicza e^x, jako przestępna całkowita, posiada punkt istotnie osobliwy w nieskończoności [T. I., art. 205]. Lecz to samo można i z poznanych jej własności wywnioskować w ten sposób:

Zauważmy $e^{u+vi} = e^u . e^{vi}$ i założmy $|u + vi| = \infty$, to to zachodzi, gdy:

1. $u = +\infty$, v dowolne, skończone,
2. $u = -\infty$, v „ „ ,
3. u dowolne, skończone, $v = +\infty$,
4. u „ „ $v = -\infty$,
5. $u = +\infty$, $v = \pm\infty$,
6. $u = -\infty$, $v = \pm\infty$.

Zauważmyż, że $e^{+\infty} = \infty$, $e^{-\infty} = 0$, a $|e^{vi}| = 1$ bez różnicy, czy v jest skończone, czy nieskończone, to:

---

*) Określiliśmy dwie liczby rzeczywiste i dodatnie: e, π. Badaniem ich natury zajmować się tu nie możemy. Powiemy tylko, że dziś istnieją już bardzo proste dowody, wykazujące przestępność tych liczb, i przytoczymy rozprawy poświęcone tym dowodom.

Hermite [C. R. T. 77., 1873] posługując się wyższymi środkami dowiódł, że liczba e jest przestępną. Lindemann okazał to samo o liczbie π w rozprawie: „*Über die Zahl* π“, *Math. Annalen*, T. 20, (1882), str. 213—225, a jego metodę starał się uprościć Weierstrass [Sprawozdania Akademii berlińskiej]. R. 1885, str. 1067.

Znaczniejsze uproszczenia wprowadzili: D. Hilbert [O przestępności liczb e i π], A. Hurwitz [Dowód przestępności liczby e] i wreszcie P. Gordan [Przestępność liczb e i π]. Te trzy rozprawy znajdują się w *Math. Annalen* T. 43, str. 216—225, a w Pracach mat.-fiz. T. 5., str. 1—12.

Por. także: P. Bachmann: „*Vorl. ü. d. Natur der irrationalen Zahlen*“ [Lipsk 1892]. H. Weber: „*Lehrbuch der Algebra*“ [Brunszwik 1896]. T. 2. str. 751—767.

$$|e^{u+vi}|=e^u|e^{vi}|=e^u$$

ma wartość ∞ w 1szym i w 5tym przypadku; jest $=0$, w 2gim i 6tym przypadku, a w 3cim i w 4tym przypadku pozostaje dowolne i skończone. Jest więc widocznie e^x w otoczeniu punktu $x=\infty$ zupełnie nieoznaczoną, a to jest charakterystyką punktu istotnie osobliwego. W razie, gdy się do rzeczywistych wartości argumentu x ograniczamy, pozostaje z tej nieoznaczoności tylko $e^u=\infty$, dla $u=+\infty$ i $e^u=0$ dla $u=-\infty$.

5. Własności i peryodyczność funkcyj trygonometrycznych. W szczególności funkcya e^{xi} mieć będzie peryod rzeczywisty 2π, a stąd odrazu wnosimy, że funkcye trygonometryczne $sinx$, $cosx$ (gdy je wzorami Eulera [art. 2, (δ)] przedstawimy) są jednoperyodyczne i posiadają peryod 2π. To samo odnieść trzeba i do funkcyj: $secx=\frac{1}{cosx}$, $cosecx=\frac{1}{sinx}$.

Z tego wynika, że — ograniczając się do rzeczywistego x — dość jest poznać funkcye $sinx$, $cosx$ w zakresie $(0...2\pi)$, aby ich zachowanie się módz określić w całym nieograniczonym obszarze rzeczywistego argumentu x. Przedewszystkiem, gdy:

(1) $$x=\left(0...\frac{\pi}{2}\right),\text{ to mamy: }\begin{cases}sinx=(0...1)\\ cosx=(1...0)\end{cases},$$

a dla takich x, że $0<x<\frac{\pi}{2}$, nie staje się ani $sinx$, ani $cosx$ nigdzie zerem.

Aby te funkcye poznać dalej w zakresie $\left(\frac{\pi}{2}...\pi\right)$, przeprowadźmy je do otoczenia miejsca $\frac{\pi}{2}$. To przeprowadzenie daje:

(2) $$\begin{aligned}sin\left(\frac{\pi}{2}\pm h\right)&=sin\frac{\pi}{2}\,cosh\pm cos\frac{\pi}{2}\,sinh=cosh,\\ cos\left(\frac{\pi}{2}\pm h\right)&=cos\frac{\pi}{2}\,cosh\mp sin\frac{\pi}{2}\,sinh=\mp sinh,\end{aligned}$$

a stąd wnosimy, że, gdy

$$x=\left(\frac{\pi}{2}...\pi\right),\text{ to }\begin{cases}sinx=(1...0)\\ cosx=(0...-1)\end{cases},$$

a we wnętrzu zakresu $\left(\frac{\pi}{2}...\pi\right)$ nie staje się zerem nigdzie ani $sinx$, ani $cosx$.

Przeprowadzenie do miejsca π daje:

(3) $$sin(\pi\pm h)=\mp sinh,\quad cos(\pi\pm h)=-cosh,$$

a stąd wnosimy, że gdy:

$$x=\left(\pi...\frac{3}{2}\pi\right), \quad \text{to} \quad \begin{cases} sinx=(0...-1) \\ cosx=(-1...0) \end{cases}$$

i że znowu ani $sinx$, ani $cosx$ nie jest zerem, gdy $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$.

Przeprowadzając wreszcie rozważane funkcye do otoczenia miejsca $\frac{3}{2}\pi$, dostaniemy:

$$(4) \qquad sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm h\right)=-cosh, \quad cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm h\right)=\pm sinh,$$

a stąd wnosimy, że gdy:

$$x=\left(\frac{3\pi}{2}...2\pi\right), \quad \text{to} \quad \begin{cases} sinx=(-1...0) \\ cosx=(0...+1) \end{cases}$$

i że $sinx$, $cosx$ nie stają się nigdzie zerem, gdy $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$.

W ten sposób poznaliśmy przebieg funkcyj $sinx$, $cosx$, gdy x jest rzeczywiste, w całym ich zakresie peryodyczności $(0...2\pi)$.

Gdy już x ma być $=u+vi$, a więc utworzy nieograniczony obszar urojonej zmiennej, to zakres peryodyczności P będziemy mogli tu przedstawić nieskończenie długim pasem ograniczonym prostemi liniami $u=0$, $u=2\pi$, przy tem jedną z tych prostych odrzucić trzeba, gdyż zakres P ma w sobie mieścić tylko same nierównoważne miejsca, t. j. miejsca nie różniące się o peryod 2π.

Co się tyczy miejsc zerowych rzeczywistych w zakresie P, to mamy tam tylko po dwa miejsca zerowe, a to:

$$(a) \qquad sinx=0 \text{ dla } x=0, \pi,$$

$$(b) \qquad cosx=0 \quad „ \quad x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2},$$

a że $sinx=x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-...\right)$ staje się na miejscu $x=0$ jednokrotnie zerem, a

$$sin(\pi+x)=-sinx, \quad cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-sinx, \quad cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=+sinx,$$

więc miejsca (a), (b) są wszystkie tylko jednokrotnemi.

Uwzględniając peryodyczność funkcyi $sinx$, mamy dalej:

$$sin(0\pm 2n\pi)=0, \quad sin(\pi\pm 2n\pi)=0, \quad \text{czyli:}$$

$$(a') \qquad sin\,m\pi=0, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...,$$

a funkcya $sin\pi x$ będzie miała miejsca zerowe:

$$(a'') \qquad x=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Analogicznie mieć będziemy:

$$cos\left(\frac{\pi}{2}\pm 2n\pi\right)=0, \quad cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm 2n\pi\right)=0, \quad \text{czyli:}$$

$$(b') \qquad \cos\frac{2m+1}{2}\pi=0, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

a miejscami zerowemi funkcyi $\cos \pi x$ będą:

$$(b'') \qquad x=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$$

W (a'), (b') mamy wszystkie miejsca zerowe rzeczywiste rozważanych funkcyj. Zapytajmyż, czy te funkcye nie posiadają jeszcze i urojonych miejsc zerowych?

W tym celu przyjmijmy, że $\sin(u+vi)=$

$$\frac{e^{(u+vi)i}-e^{-(u+vi)i}}{2i}=0, \text{ przy } |v|>0.$$

Stąd dostajemy:

$$e^{ui}.e^{-v}=e^{-ui}.e^{+v}, \quad \text{czyli: } e^{2ui}=e^{2v};$$

musi więc być także: $|e^{2ui}|=|e^{2v}|$, a że $|e^{2ui}|=1$, więc mamy: $|e^{2v}|=1$, a to — przy v rzeczywistem i skończonem — jest jedynie możliwe, gdy $v=0$. Z tego wynika:

I. *Funkcye $\sin x$, $\cos x$ posiadają w całym nieograniczonym obszarze swego argumentu jedynie rzeczywiste i jednokrotne miejsca zerowe.*

Funkcye $\sin x$, $\cos x$ będąc całkowitemi przestępnemi, posiadają w nieskończoności punkt istotnie osobliwy, a ten da się tu określić jako punkt skupienia miejsc zerowych (a') lub (b') owych funkcyj. Funkcye te są tam nieoznaczone, czem tłómaczyć można tę z trygonometryi znaną własność, że dla nieskończenie wielkich łuków rzeczywistych przybiera tak $\sin x$, jak $\cos x$ wszystkie wartości z zakresu: $(-1 \ldots +1)$.

Jak już wspomniano, posiadają funkcye $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ peryod 2π. Są-to funkcye jednoznaczne, pozbawione zupełnie miejsc zerowych. Pierwsza z nich posiada jednokrotne bieguny (b'), druga jednokrotne bieguny (a'). Obie mają w nieskończoności punkt istotnie osobliwy, występujący tu jako punkt skupienia biegunów. Co się tyczy ich analitycznego przedstawienia w otoczeniu punktu $x=0$, to pierwsza z nich: $\sec x$ — ponieważ $\cos 0=1$, a więc $\neq 0$ jest — wyrazi się zwykłym parzystym szeregiem potęgowym, zbieżnym w zakresie $|x|<\frac{\pi}{2}$, gdyż $\frac{\pi}{2}$ jest miejscem zerowem funkcyi $\cos x$, najbliżej leżącem punktu $x=0$. Drugą: $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ dopiero po pomnożeniu przez x przedstawić będzie można zwykłym (parzystym) szeregiem potęgowym. Z tego wynika, że sama funkcya $1/\sin x$ wyrazi się w otoczeniu miejsca $x=0$ nieparzystem rozwinięciem postaci $x^{-1}+c'_1x+c'_3x^3+\ldots$ zbieżnem w zakresie (pierścieniu) $0<|x|<\pi$. (Punkt π jest tu znowu miejscem zerowem mianownika $sin x$, najbliżej leżącem punktu $x=0$).

Spółczynniki wspomnianych rozwinięć oblicza się z równań

$$1=cosx.[c_0+c_2x^2+c_4x^4+\ldots]$$

$$x=sinx.[c'_0+c'_1x^2+c'_3x^4+\ldots],$$

w których za $cosx$, $sinx$ położy się szeregi.

Funkcyę trygonometryczną:

$$(5) \qquad tg\,x=\frac{sinx}{cosx}=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{i(e^{xi}+e^{-xi})}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2xi}-1}{e^{2xi}+1}$$

określić trzeba w analizie jako jednoznaczną funkcyę, będącą ilorazem dwóch bezustannie zbieżnych szeregów (funkcyj całkowitych przestępnych $S(x)$, $K(x)$).

Ponieważ $cos 0=1$, a więc jest $\neq 0$, a $\frac{\pi}{2}$ jest najbliższem miejscem punktu $x=0$, dającem $cosx=0$, więc tgx jest funkcyą regularną i w punkcie $x=0$ i w jego otoczeniu: $|x|<\frac{\pi}{2}$. Jej element zbieżny w tem otoczeniu musi mieć postać: $c_1x+c_3x^3+c_5x^5+\ldots$, gdyż $tg\,x$ jest widocznie funkcyą nieparzystą, a $x=0$ jest jej jednokrotnem miejscem zerowem. Dla wyznaczenia spółczynników:

$$c_1,\ c_3,\ c_5,\ \ldots$$

mieć będziemy równanie:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)(c_1x+c_3x^3+c_5x^5+\ldots),$$

a z niego wynika:

$$c_{2\nu-1}-\frac{c_{2\nu-3}}{2!}+\frac{c_{2\nu-5}}{4!}-\ldots+(-1)^{\nu-1}\frac{c_1}{(2\nu-2)!}=(-1)^{\nu-1}\frac{1}{(2\nu-1)!}$$

$$\nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Połóżmy: $c_s=a_s/s!$, $s=1, 3, 5, \ldots$, to:

$$\frac{a_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}-\frac{a_{2\nu-3}}{2!(2\nu-3)!}+\frac{a_{2\nu-5}}{4!(2\nu-5)!}-\ldots+(-1)^{\nu-1}\frac{a_1}{1!(2\nu-2)!}=\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!}$$

a po pomnożeniu przez $(2\nu-1)!$ mieć będziemy:

$$(6) \qquad a_{2\nu-1}-\binom{2\nu-1}{2}a_{2\nu-3}+ \\ +\binom{2\nu-1}{4}a_{2\nu-5}-\ldots+(-1)^{\nu-1}\binom{2\nu-1}{2\nu-2}a_1=(-1)^{\nu-1}$$

$$\nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Takim równaniom zadość uczynią spółczynniki a_s. Z tych równań wynika:

$$a_1=1,\ a_3=2,\ a_5=16,\ \ldots,\ \text{a więc:}$$

$$(7)\qquad tg\,x=x+\frac{2}{3!}x_3+\frac{16}{5!}x^5+\ldots$$

Tem rozwinięciem, a w szczególności ciekawemi własnościami jego spółczynników dopiero później bliżej się zajmiemy. Tu zauważymy, że $tg\,x$ ma jednokrotne miejsca zerowe (a'), a jednokrotne bieguny (b'). Tak jedne, jak drugie miejsca skupiają się w nieskończoności. Stąd wynika, że $tg\,x$ posiada tam punkt istotnie osobliwy, a w skończoności punktu istotnego wcale nie znajdziemy.

Pod tym względem podobnie zachowywać się będzie i funkcya $cotg\,x$. Miejsca (b') będą jej miejscami zerowemi, a (a') jej biegunami. Do tych ostatnich zalicza się i punkt $x=0$, a stąd wynika, że w otoczeniu tego punktu można $cotg\,x$ przedstawić rozwinięciem postaci: $cotg x=x^{-1}+b_1x+b_3x^3+\ldots$ Funkcya tgx wyrażając się wzorem (5) ma peryod π, gdyż e^{2xi} posiada taki peryod, a taki sam peryod mieć będzie także i funkcya $cotg\,x$.

Pd. 1. Połóżmy $x=u+vi$, a więc:

$$tg\,(u+vi)=\frac{1}{i}\,\frac{e^{ui-v}-e^{-ui+v}}{e^{ui-v}+e^{-ui+v}},$$

to gdy $v=+\infty$, a u pozostaje skończone, mamy:

$$tg\,(u+vi)=\frac{1}{i}\,\frac{e^{2ui}e^{-2v}-1}{e^{2ui}e^{-2v}+1},$$

a że $e^{-2v}=0$, gdy $v=\infty$, więc:

$$tg\,(u+vi)_{v=\infty}=-\frac{1}{i}=+i.$$

Pd. 2. Do jakiej granicy dąży $tg\,(u+vi)$, gdy przy skończonem u ma być: $v=-\infty$? [Odp.: $-i$].

Pd. 3. Okazać, że przy skończonem u, a przy $v=\pm\infty$ dąży $cotg\,x$ do granic $\mp i$.

Z uwag całego tego ustępu wynika:

II. *Wszystkie funkcyе trygonometryczne są jednoznaczne, analityczne funkcye o jedynem miejscu istotnie osobliwem w nieskończoności. Miejsca zerowe lub nieskończonościowe, albo jedne i drugie równocześnie, występują tu zawsze w nieskończonej mnogości, ale nigdzie nie skupiają się w punkcie leżącym w skończoności.*

Pochodne funkcyj trygonometrycznych są:

$$\frac{d\,sinx}{dx}=cosx,\quad \frac{d\,cosx}{dx}=-sinx,\quad \frac{d\,tgx}{dx}=\frac{1}{cos^2x},\quad \frac{d\,cotgx}{dx}=-\frac{1}{sin^2x},$$

$$\frac{d\,sec\,x}{dx}=\frac{sinx}{cos^2x}=-\frac{1}{cos^2x}\,\frac{d\,cosx}{dx},\quad \frac{d\,cosec\,x}{dx}=-\frac{cosx}{sin^2x}=-\frac{1}{sin^2x}\,\frac{d\,sinx}{dx}.$$

6. Prawidła dodawania funkcyi $R(e^{cx})$. Z funkcyą wykładniczą są wszystkie funkcye trygonometryczne w ten sposób związane, że każda z nich jest wymiernie utworzoną z e^{ix}. Zauważmyż teraz w ogólności funkcyę:

(1) $$f(x)=R(e^{cx}),$$

gdzie R jest znakiem funkcyi wymiernej a c jest stałą dowolną, to taka funkcya jest niezawodnie jednoznaczną, jest peryodyczną o peryodzie $(2\pi i)/c$ i ma punkt istotnie osobliwy w nieskończoności. Posiada dalej nieskończenie dużo tak miejsc zerowych, jak i nieskończonościowych, bo — jeżeli $R(z)$ ma w skończoności miejsca zerowe: $z_\alpha=e^{cx_\alpha}$, $\alpha=1, 2, ..., s$, a miejsca nieskończonościowe: $z'_\beta=e^{cx'_\beta}$ $\beta=1, 2, ... t$, to do miejsc x_α dołączą się jeszcze miejsca $\left(x_\alpha+\frac{2\pi n i}{c}\right)$, a do miejsc x'_β miejsca $\left(x'_\beta+\frac{2\pi n i}{c}\right)$, $n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

Funkcya $f(x)$ ma pewne bardzo charakterystyczne własności stanowiące analogię z prawidłem dodawania samej funkcyi e^x lub e^{cx}, albo jej własnością $\frac{d}{dx}(e^{cx})=c.e^{cx}$.

Aby się z temi własnościami zapoznać, wybierzmy na płaszczyźnie argumentu x dwa miejca x, y i trzecie miejsce $(x+y)$ i połóżmy:

(a) $$f(x)=\xi=R(e^{cx}),$$

(b) $$f(y)=\eta=R(e^{cy}),$$

(c) $$f(x+y)=\zeta=R(e^{c(x+y)})=R(e^{cx}.e^{cy}).$$

Z tych 3 równań eliminując e^{cx}, e^{cy} dostaniemy na wynik eliminacyi algebraiczne równanie:

(2) $$G(\xi, \eta, \zeta)=0$$

czyli wyraźnie:

(I) $$G(f(x), f(y), f(x+y))=0.$$

Związek ten nazwiemy pierwszem **algebraicznem prawidłem dodawania** funkcyi $R(e^{cx})$. Prawidłem (I.) samej funkcyi e^{cx} jest:

(3) $$e^{c(x+y)}-e^{cx}.e^{cy}=0.$$

Biorąc cząstkową pochodnę równania (2) naprzód ze względu na x, a potem ze względu na y dostaniemy:

(a') $$\frac{\partial G}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}=0,$$ (b') $$\frac{\partial G}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=0.$$

Lecz

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{d\zeta}{d(x+y)}\cdot\frac{\partial(x+y)}{\partial x},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{d\zeta}{d(x+y)}\cdot\frac{\partial(x+y)}{\partial y},$$

że zaś $\frac{\partial(x+y)}{\partial x}=\frac{\partial(x+y)}{\partial y}=1$, gdyż x, y od siebie nie zależą, więc mamy:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{\partial\zeta}{\partial y}.$$

Uwzględniając to w równaniach (a'), (b') i odejmując drugie z tych równań od pierwszego, otrzymamy związek:

$$\frac{dG}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx}-\frac{\partial G}{d\eta}\,\frac{d\eta}{dy}=0,$$

który wyraźnie tak się napisze:

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} &G_1(f(x),\, f(y),\, f(x+y))\,\frac{df(x)}{dx}-\\ &G_2(f(x),\, f(y),\, f(x+y))\,\frac{df(y)}{dy}=0. \end{aligned}$$

Wskazuje on, że między $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y)$ i pochodnemi $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df(y)}{dy}$ zachodzi zawsze algebraiczne równanie, którego lewa strona jest liniową i jednorodną w pochodnych $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df(y)}{dy}$. Równanie (II.) nazwiemy drugiem prawidłem dodawania funkcyi $f(x)$. Dla samej funkcyi e^{cx} będzie związek (II.) postaci:

$$\frac{1}{c}\,\frac{de^{cx}}{dx}\cdot e^{cy}-\frac{1}{c}\,\frac{de^{cy}}{dy}\,e^{cx}=0.$$

Zauważmy równania (I.), (II.), uważając w nich $\zeta=f(x+y)$ jako niewiadomą. J e ż e l i t e r ó w n a n i a m a j ą j e d e n t y l k o w s p ó l n y p i e r w i a s t e k ζ, to ten pierwiastek jest [T. I. art. 91.] wymierną funkcyą spółczynników obydwu równań. Że zaś w te spółczynniki wchodzą wymiernie:

$$f(x),\; f(y),\; \frac{df(x)}{dx}=f'(x),\; \frac{df(y)}{dy}=f'(y),$$

więc mamy w t y m r a z i e związek:

$$\text{(II')}\qquad f(x+y)=R(f(x),\, f(y),\, f'(x),\, f'(y))$$

wskazujący, że $f(x+y)$ jest wymierną funkcyą wartości $f(x)$, $f(y)$, $f'(x)$, $f'(y)$. Jestto szczególny wypadek II^go prawidła dodawania, które się sprawdzi tylko dla szczególnych funkcyj $f(x)$ posiadających już prawidła (I) i (II). Funkcya e^{cx} takie prawidło posiada, a jest ono postaci:

$$e^{c(x+y)}=\frac{1}{c^2}\frac{de^{cx}}{dx}\cdot\frac{de^{cy}}{dy}$$

Zestawmy równania:

$$f(x)=R(e^{cx}),\ f'(x)=R'(e^{cx})$$

i wyeliminujemy z nich e^{cx}, to dojdziemy do związku:

(III) $$G(f(x),\ f'(x))=0,$$

który wskazuje, że między funkcyą, a jej pochodną zachodzi zawsze związek algebraiczny. Dla funkcyi e^{cx} związkiem tym jest

$$e^{cx}-\frac{1}{c}\frac{de^{cx}}{dx}=0.$$

7. Prawidła dodawania funkcyj trygonometrycznych. Wszystkie funkcye trygonometryczne posiadać muszą charakterystyczne równania (I), (II), (III), [art. poprzedz.]. Lecz pokaże się, że posiadają one także i prawidło dodawania (II'), a że je tu właśnie najłatwiej wyprowadzić, więc od niego zaczniemy. Z wzorów:

(1) $$\sin(x+y)=\sin x\,.\cos y+\cos x\,.\sin y$$

(2) $$\cos(x+y)=\cos x\,.\cos y-\sin x\,.\sin y,$$

gdy w nich uwzględnimy, że $\frac{d}{du}\sin u=\cos u$, $\frac{d}{du}\cos u=-\sin u$, dostajemy:

(α) $$\sin(x+y)=\sin x\frac{d\sin y}{dy}+\sin y\frac{d\sin x}{dx}$$

(β) $$\cos(x+y)=\cos x\,.\cos y-\frac{d\cos x}{dx}\cdot\frac{d\cos y}{dy}.$$

Z (1) i (2) dostajemy dalej:

(γ) $$tg\,(x+y)=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\,tg\,y}$$ (δ) $$cotg\,(x+y)=\frac{cotg\,x\,cotg\,y-1}{cotg\,x+cotg\,y}$$

Z wzoru (β) mamy:

$$\sec(x+y)=\frac{1}{\cos x\,.\cos y-(\cos x)'\,(\cos y)'}\ ^{*)}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x\,.\cos^2 y.\left[\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos y}-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}\cdot\frac{(\cos y)'}{\cos^2 y}\right]},\ \text{czyli:}$$

(ε) $$\sec(x+y)=\frac{\sec^2 x\,.\sec^2 y}{\sec x\ \sec y-(\sec x)'\,(\sec y)'}$$

---

*) Kreska nad funkcyą ujętą w nawiasy ma tutaj i w dalszym ciągu oznaczać pochodnę według zmiennej zawartej w funkcyi.

*

Z wzoru (α) dostajemy:

$$cosec\,(x+y)=\frac{1}{sin\,x\,(sin\,y)'+sin\,y\ \ (sin\,x)'}\,.$$

$$=\frac{1}{sin^2x\,sin^2y.\left[\frac{1}{sin\,x}.\frac{(sin\,y)'}{sin^2\,y}+\frac{1}{sin\,y}.\frac{(sin\,x)'}{sin^2\,x},\right.}\quad \text{czyli:}$$

$$(\eta)\qquad cosec\,(x+y)=\frac{-cosec^2x\,.\,cosec^2y}{cosec\,x\,(cosec\,y)'+cosec\,y\,(cosec\,x)'}$$

Wzory (α), (β) ..., (η) są-to właśnie prawidła (II') funkcyj trygonometrycznych. W prawidło funkcyj *tang.* i *cotg.* nie wchodzą wcale pochodne tych funkcyj.

Równie łatwem będzie wyprowadzenie prawidła III[go]. Zauważmy związek:

(3) $$sin^2x+cos^2x=1,$$

to go w dwojakiej postaci napisać możemy, a to:

(α') $sin^2x+(sinx)'^2-1=0$, albo (β') $(cosx)'^2+cos^2x-1=0$.

Dzieląc związek (3) przez cos^2x, mamy:

$$tg^2x+1=\frac{1}{cos^2x},\ \text{albo}$$

(γ') $$1+tg^2x-(tgx)'=0;$$

dzieląc zaś go przez sin^2x, dostaniemy analogicznie:

(δ') $$1+cotg^2x+(cotgx)'=0.$$

Napiszmy:

$$sec^2x=\frac{1}{cos^2x}=\frac{sin\,x}{cos^2x}.\frac{1}{sinx}=(secx)'\frac{1}{\sqrt{1-cos^2x}},\ \text{albo}$$

$$sec^2x=(secx)'\frac{1}{\sqrt{1-sec^{-2}x}},$$

to stąd dostaniemy:

(ε') $$sec^4x-sec^2x-(secx)'^2=0.$$

Analogicznie przerabiając $cosec^2x=1/sin^2x$ dojdziemy do związku:

(η') $$cosec^4x-cosec^2x-(cosecx)'^2=0.$$

W równaniach (α'), (β'), ..., (η') mamy prawidło III. wszystkich funkcyj trygonometrycznych.

Przejdźmy do prawidła I[go]. Z wzoru (1) dostajemy:

$$sin^2(x+y)=sin^2x.cos^2y+cos^2x.sin^2y+2sinx.siny.cosx.cosy$$

a stąd:

$$sin^2(x+y)-sin^2x\,(1-sin^2y)-sin^2y\,(1-sin^2x)=2sin\,x\,sin\,y\,cos\,x\,cos\,y$$

albo:

$$sin^2(x+y)-(sin^2x-2sin^2x.sin^2y+sin^2y)=2sinx.siny.cosx.cosy.$$

Podnosząc obustronnie do potęgi drugiej mamy:

$$sin^4(x+y)-2sin^2(x+y).(sin^2x-2sin^2x.sin^2y+sin^2y)$$
$$+(sin^2x-2sin^2x.sin^2y+sin^2y)^2-4sin^2x.sin^2y(1-sin^2x)(1-sin^2y)=0,$$

a że tu wyrazy w drugim wierszu stojące dadzą się ściągnąć w $(sin^2x-sin^2y)^2$, więc ostatecznie będzie:

$$G(sinx, siny, sin(x+y))=$$
$$(\alpha'') \quad sin^4(x+y)-2sin^2(x+y).(sin^2x-2sin^2x.sin^2y+sin^2y)$$
$$+(sin^2x-sin^2y)^2=0.$$

Pd. 1. Wyprowadzić (podnosząc związek (2) do drugiej potęgi) prawidło:

$$G(cosx, cosy, cos(x+y))=$$
$$(\beta'') \quad cos^2(x+y)-2cosx.cosy.cos(x+y)-1+cos^2x+cos^2y=0.$$

Pd. 2. Ze związków (γ), (δ) wyprowadzić:

$$(\gamma'') \quad G(tgx, tgy, tg(x+y))=tg(x+y)(1-tgx.tgy)-tgx-tgy=0,$$
$$(\delta'') \quad G(cotgx, cotgy, cotg(x+y))=cotg(x+y)(cotgx+cotgy)-cotgx.cotgy+1=0.$$

Pd. 3. Wyprowadzić ze związku (β'') prawidło:

$$G(secx, secy, sec(x+y))=$$
$$(\varepsilon'') \quad sec^2(x+y)(sec^2x+sec^2y-sec^2x.sec^2y)-2secx.secy.sec(x+y)+sec^2x.sec^2y=0.$$

Pd. 4. Wyprowadzić z (α'') prawidło:

$$G(cosecx, cosecy, cosec(x+y))=$$
$$(\eta'') \quad (cosec^2x-cosec^2y)^2cosec^4(x+y)$$
$$-2cosec^2x.cosec^2y(2-cosec^2x-cosec^2y)-cosec^4x.cosec^4y=0.$$

Pd. 5. Z każdego z tych równań łatwo przejdzie się teraz do charakterystycznych związków II. Tak n. p. z równania (α'') mamy:

$$\frac{\partial G}{d\xi}=-2sin^2(x+y)(2sinx-4sinx.sin^2y)+4(sin^2x-sin^2y).sinx$$

$$\frac{\partial G}{d\eta}=-2sin^2(x+y)(2siny-4sin^2x.siny)-4(sin^2x-sin^2y).siny,$$

a więc tu związkiem

$$\frac{\partial G}{d\xi}(sinx)'-\frac{\partial G}{d\eta}(siny)'=0, \text{ będzie:}$$

$$sinx.[(sin^2x-sin^2y)-sin^2(x+y).(1-2sin^2y)](sinx)'$$
$$+siny[(sin^2x-sin^2y)+sin^2(x+y).(1-2sin^2x)](siny)'=0 \quad \text{i t. d.}$$

8. Uwielokrotnienie argumentu w funkcyach *sin x* i *cos x*.

Co się tyczy prawidła uwielokrotniania argumentu w funkcyach *sinx*, *cosx* — (prawidła mnożenia argumentu) — to je otrzymamy wprost z wzoru Moivre'a:

$$(cosmx+isinmx)=(cosx+isinx)^m,$$

zakładając m całkowite, dodatnie >1.

Z tego związku bowiem wynika:

$$(1) \quad cosmx=cos^mx-\binom{m}{2}cos^{m-2}x.sin^2x+...$$

z ostatnim wyrazem:

(1') $\qquad (-1)^{\frac{m}{2}} sin^m x$, gdy m parzyste, a

(1'') $\qquad m(-1)^{\frac{m-1}{2}} cosx.sin^{m-1}x$, gdy m nieparzyste, i

(2) $\qquad sinmx = \binom{m}{1} cos^{m-1}x.sinx - \binom{m}{2} cos^{m-3}x.sin^3 x + \dots$

z ostatnim wyrazem:

(2') $\qquad m(-1)^{\frac{m-2}{2}} cosx.sin^{m-1}x$, gdy m parzyste, a

(2'') $\qquad (-1)^{\frac{m-1}{2}} sin^m x$, gdy m nieparzyste.

W relacyi (1) mamy same parzyste potęgi funkcyi $sinx$.

Zmieńmyż każde $sin^{2\nu}x$ na $(1-cos^2x)^\nu$, to dostaniemy:

(a) $$cosmx = G(cosx),$$

gdzie G jest funkcyą wymierną całkowitą stopnia m^{go}. Położmy:

$$G(cosx) = A_0 + A_1 cosx + A_2 cos^2 x + \dots + A_m cos^m x,$$

to wywnioskujemy, że tu przy parzystem m ze spółczynników A_λ będą:

(2) $A_0 = (-1)^{\frac{m}{2}}$ [według (1')], a dalej: $A_1 = A_3 = \dots = A_{m-1} = 0$, gdyż po prawej stronie w (1) będzie parzysta funkcya funkcyi $cosx$.

Przy nieparzystem m przeciwnie okaże się:

(3) $A_1 = (-1)^{\frac{m-1}{2}} m$ [według (1'')], a dalej: $A_0 = A_2 = \dots = A_{m-1} = 0$.

Co się tyczy ostatniego spółczynnika A_m, to bez różnicy, czy m parzyste, czy nieparzyste, mamy:

$$A_m = 1 + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \binom{m}{6} + \dots, \text{ że zaś}$$

(α) $$0 = (1-1)^m = 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \dots$$

(β) $$2^m = (1+1)^m = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \dots,$$

więc stąd — za dodaniem — dostajemy:

(γ) $$2^m = 2\left(1 + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \dots\right) = 2A_m, \text{ i wreszcie:}$$

(a_1) $$A_m = 2^{m-1}.$$

Oprócz (a) dojdziemy z relacyi (1) jeszcze do innych form. Przyjmując bowiem m parzyste $=2\mu$, możemy w (1) każde $cos 2^\nu x$ zastąpić przez $(1-sin^2x)^\nu$ i wtedy dostaniemy:

(b) $$cos 2\mu x = 1 + A_2 sin^2 x + A_4 sin^4 x + \dots + A_{2\mu} sin^{2\mu} x.$$

Tutaj wolny wyraz musi być $=1$, bo $cos 2\mu x = 1$, gdy $x=0$. Sama funkcya musi być parzystą w $sin x$, bo $cos 2\mu x$ jest funkcyą parzystą. Co się tyczy spółczynnika $A_{2\mu}$, to tu w analogiczny sposób, jak wyżej, wywnioskujemy, że:

(*b'*) $$A_{2\mu}=(-1)^{\mu}.2^{2\mu-1}.$$

W razie nieparzystego $m=2\mu+1$ wyłączmy z (1) $cos\,x$, a pozostałe $cos^{2\nu}x$ wyraźmy znowu przez $sin\,x$, to dostaniemy:

(*c*) $$cos\,(2\mu+1)x=cos\,x\,[1+A_2 sin^2x+\ldots+A_{2\mu}sin^{2\mu}x],$$ gdzie

(*c'*) $$A_{2\mu}=(-1)^{\mu}.2^{2\mu}.$$

Z różniczkowania formy (*a*), mieć będziemy:

(*d*) $$sin\,m\,x=[A'_0+A'_1 cos\,x+\ldots+2^{m-1}cos^{m-1}x]\,sin\,x,$$

a różniczkowaniem formy (*b*) dojdziemy do nowej relacyi:

(*e*) $$sin\,2\mu x=[A'_1 sin\,x+A'_3 sin^3x+\ldots+(-1)^{\mu+1}2^{2\mu-1}sin^{2\mu-1}x]\,cos\,x.$$

Wreszcie przy nieparzystem $m=2\mu+1$ możemy wprost w (2) każde $cos^{2\nu}x$ wyrazić przez $sin\,x$. Wtedy dostaniemy:

(*f*) $$sin\,(2\mu+1)x=A_1 sin\,x+A_3 sin^3x+\ldots+A_{2\mu+1}sin^{2\mu+1}x,$$

a tu będzie:

$$A_{2\mu+1}=(-1)^{\mu}\left[\binom{2\mu+1}{1}+\binom{2\mu+1}{3}+\ldots\right]$$
$$=(-1)^{\mu}\left[1+\binom{2\mu+1}{2}+\binom{2\mu+1}{4}+\ldots\right],$$

co już z (*a*) wynika. Uwzględniając dalej (*γ*) dostajemy:

(*f'*) $$A_{2\mu+1}=(-1)^{\mu}2^{2\mu}.$$

9. Obliczanie wszystkich spółczynników w rozwinięciach: *sin mx, cos mx*. Aby teraz wszystkie spółczynniki $A_1,\ldots,A'_1,\ldots$ w formach (*a*),...,(*f*) [art. poprz.] obliczyć, pójdziemy taką drogą *).

Ponieważ $cos\,m\,x$ jest funkcyą parzystą, a dla $x=0$ ma wartość $=1$, więc można przypuścić, że rozwinięcie:

(1) $$cos\,m\,x=1+A_2 sin^2x+A_4 sin^4x+\ldots$$

nie będzie niedorzecznością.

Różniczkując (1) raz i drugi, mamy:

$$-m\,sin\,m\,x=(2A_2 sin\,x+4A_4 sin^3x+\ldots)cos\,x$$
$$-m^2cos\,m\,x=(2A_2+4.3A_4 sin^2x+6.5A_6 sin^4x+\ldots)cos^2x$$
$$-(2A_2 sin^2x+4A_4 sin^4x+6A_6 sin^6x+\ldots).$$

Zastępując tu cos^2x przez $1-sin^2x$, dostaniemy:

(2) $$-m^2cos\,m\,x=2A_2+(3.4.A_4-2^2A_2)sin^2x+$$
$$+(5.6.A_6-4^2A_4)sin^4x+(7.8.A_8-6^2A_6)\,sin^6x+\ldots$$

Mnożąc (1) przez m^2 i dodając do (2), mieć będziemy:

---

*) Yvon Villarceau: „*Note sur le développement de cos mx, sin mx suivant les puissances de sinx*. C. R. T. 82. (1876.), str. 1469.

$$0=(m^2+2A_2)+(3.4.A_4+(m^2-2^2)A^2)\,sin^2x+$$
$$+(5.6\,A_6+(m^2-4^2)A_4)\,sin^4x+...,$$

a stąd wynikają związki:

$$2A_2+m^2=0$$
$$3.4.A_4+(m^2-2^2)A_2=0$$
$$5.6\,A_6+(m^2-4^2)A_4=0$$
$$7.8\,A_8+(m^2-6^2)A_6=0$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

z których po porządku obliczamy:

$$(3)\quad A_2=-\frac{m^2}{2!},\ A_4=+\frac{m^2(m^2-2^2)}{4!},\ A_6=-\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}$$

. . . .

Rozwinięcie (1) będzie więc miało postać:

$$cos\,m\,x=$$
$$(4)\quad 1-\frac{m^2}{2!}sin^2x+\frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}sin^4x-\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}sin^6x+...$$

Ono — przy nieparzystem m — jest nieskończone i zbieżne dla x dających $|sinx|<1$. W razie m parzystego $=2\mu$ staje się (4) funkcyą wymierną i daje formę (b)*):

$$cos\,mx=$$
$$(b)\quad 1-\frac{m^2}{2!}sin^2x+\frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}sin^4x-...+(-1)^{\mu}2^{2\mu-1}sin^{2\mu}x.$$
$$m=2\mu.$$

Biorąc pochodnę związku (4) mieć będziemy rozwinięcie:

$$sin\,mx=$$
$$(5)\quad cosx.\left[\frac{m}{1!}sinx-\frac{m(m^2-2^2)}{3!}sin^3x+\frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{5!}sin^5x-...\right],$$

które pozostaje nieskończone przy m nieparzystem, a przy m parzystem $=2\mu$ daje formę (e):

$$sin\,mx=$$
$$(e)\quad cosx\left[\frac{m}{1!}sinx-\frac{m(m^2-2^2)}{3!}sin^3x+...+(-1)^{\mu+1}.2^{2\mu-1}sin^{2\mu-1}x\right]$$
$$m=2\mu.$$

Z uwagi, że $sin\,mx$ jest funkcyą nieparzystą, a dla $x=0$ przybiera wartości zero, możemy położyć:

$$(6)\quad sinmx=B_1sinx+B_3sin^3x+B_5sin^5x+...$$

Pierwsza pochodna tego szeregu daje:

$$m.cos\,mx=[B_1+3B_3sin^2x+5B_5sin^4x+...].cosx$$

*) Związki (a), (b), (c), ..., (f), o których tu mowa, są związkami artykułu poprzedzającego.

skąd — z podstawienia tu $x=0$ — dowiadujemy się, że $B_1=m$.

Różniczkując (6) dwa razy i postępując tu dalej zupełnie analogicznie, jak w pierwszym, przerobionym już wypadku, dojdziemy do związków:

$$(7)\qquad 2.3.B_3+(m^2-1)B_1=0,\ 4.5.B_5+(m^2-3^2)B_3=0,\ ...,$$

a z nich — uwzględniając, że $B_1=m$ — dostajemy:

$$B_3=\frac{m(m^2-1)}{3!},\ B_5=-\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{5!},$$

$$B_7=\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!},\ ...$$

Rozwinięcie (6) będzie więc postaci:

$$sin\, mx=$$

$$(8)\qquad \frac{m}{1!}sinx-\frac{m(m^2-1)}{3!}sin^3x+\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{5!}sin^5x-...$$

Przy parzystem m pozostaje ono szeregiem zbieżnym dla x dających $|sinx|<1$. W razie przeciwnie nieparzystego $m=2\mu+1$ dostajemy formę:

$$sin\, mx=$$

$$(f)\qquad \frac{m}{1!}sinx-\frac{m(m^2-1)}{3!}sin^3x+...+(-1)^\mu 2^{2\mu}.sin^{2\mu+1}x,\ m=2\mu+1.$$

Z różniczkowania szeregu (8) dochodzimy do nowego rozwinięcia:

$$cos\, mx=$$

$$(9)\qquad cosx.\left[1-\frac{m^2-1}{2!}sin^2x+\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{4!}sin^4x-...\right],$$

a z niego, gdy m nieparzyste $=2\mu+1$ dostajemy formę (c):

$$cos\, mx=$$

$$(c)\qquad \left[1-\frac{m^2-1}{2!}sin^2x+\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{4!}sin^4x-...+(-1)^\mu 2^{2\mu}sin^{2\mu}x\right]cosx$$

$$m=2\mu+1.$$

Połóżmy teraz:

$$(10)\qquad cos\, mx=A_0+A_1cosx+A_2cos^2x+...,$$

które-to rozwinięcie może nie być niedorzecznością, to gdy z niem, celem wyznaczenia spółczynników A_0, A_1, ..., postąpimy tak samo, jak w dwóch pierwszych razach, dojdziemy do związków:

$$(\alpha_1)\qquad 2.1.A_2+m^2A_0=0$$

$$(\beta_1)\qquad 3.2.A_3+(m^2-1)A_1=0$$

$$(\gamma_1)\qquad 4.3.A_4+(m^2-2^2)A_2=0$$

$$(\delta_1)\qquad 5.3.A_5+(m^2-3^2)A_3=0$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

W razie parzystego $m=2\mu$ trzeba tu uwzględnić (2) — art. poprzedz. — a wtedy, obok $A_0=(-1)^\mu$, dostajemy z równań (α_1), (γ_1), ... wartości:

$$A_2=-(-1)^\mu\frac{m^2}{2!},\quad A_4=+(-1)^\mu\frac{m^2(m^2-2^2)}{4!},$$

$$A_6=-(-1)^\mu\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!},\ ...,\ A_{2\mu}=2^{2\mu-1},$$

a dalsze spółczynniki $A_{2\mu+2}$, $A_{2\mu+4}$, ... są już wszystkie zerami, Rozwinięcie (10) będzie więc w tym razie formą (a):

$$cos\,mx=$$

$$(a)\quad (-1)^\mu-(-1)^\mu\frac{m^2}{2!}cos^2x+(-1)^\mu\frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}cos^4x-...+2^{2\mu-1}cos^{2\mu}x\ ,$$

$$m=2\mu.$$

Z pochodnej tego związku dostajemy znowu formę (d):

$$sin\,mx=$$

$$(d)\quad \left[-(-1)^\mu\frac{m}{1!}\,cosx+(-1)^\mu\frac{m(m^2-2^2)}{3!}cos^3x-...+2^{2\mu-1}cos^{2\mu-1}x\right]sin\,x$$

$$m=2\mu.$$

Gdy przeciwnie m przyjmiemy nieparzyste $=2\mu+1$, to trzeba w rozwinięciu (10) uwzględnić (3) [art. poprzedz.]. Tutaj więc obok $A_1=(-1)^{\frac{m-1}{2}}m=(-1)^\mu m$ dostajemy dalej z równań (β_1), (δ_1), ...:

$$A_3=-(-1)^\mu\frac{m(m^2-1)}{3!},\quad A_5=+(-1)^\mu\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{5!},$$

$$...,\ A_{2\mu+1}=2^{2\mu},$$

a dalsze spółczynniki będą już wszystkie zerami.

Rozwinięcie (10) daje więc w tym wypadku znowu formę (a):

$$cos\,mx=$$

$$(a)\quad (-1)^\mu m.cosx-(-1)^\mu\frac{m(m^2-1)}{3!}cos^3x+(-1^\mu\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{5!}cos^5x-$$

$$...+2^{2\mu}cos^{2\mu+1}x,\quad m=2\mu+1.$$

Przez różniczkowanie tej relacyi dojdziemy wreszcie do formy (d):

$$sin\,mx=$$

$$(d)\quad \left[(-1)^\mu-(-1)^\mu\frac{m^2-1}{2!}cos^2x+(-1)^\mu\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{4!}cos^4x-\right.$$

$$\left....+2^{2\mu}cos^{2\mu}x\right]sinx,\quad m=.2\mu+1.$$

W ten sposób mamy już wyznaczone wszystkie związki, dające prawidło mnożenia argumentu x w funkcyach $sinx$ i $cosx$. Z nich tylko skończone formy mają wartość w zastosowaniach.

Uwaga. W skończonych rozwinięciach, jakie tu mieliśmy, były ostatnie spółczynniki — z pominięciem znaku — postaci:

$$v_m = \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)...(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3...(m-1)} = 2^{m-1},$$

gdy m było parzyste, a zaś postaci:

$$v'_m = \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)...(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3...(m-1)} = 2^{m-1},$$

gdy m było nieparzyste.

Tych identyczności można wprost dowieść. Pomnóżmy bowiem w v_m mianownik przez 2^{m-1}, a w liczniku każde (m^2-s^2) przedstawmy iloczynem:

$$(m+s)(m-s),$$

to mieć będziemy:

$$\frac{v_m}{2^{m-1}} = \frac{m(m+2)(m-2)(m+4)(m-4)...(2m-2).2}{2.4.6...m...(2m-2)}.$$

W liczniku mamy tu widocznie: $2.4.6...m.(m+2)..(2m-2)$, a więc:

$$v_m/2^{m-1}=1, \quad \text{czyli: } v_m=2^{m-1}.$$

Analogicznie dowieść można identyczności drugiej: $v'_m=2^{m-1}$, m nieparzyste.

10. Obliczanie wyznaczników K, S.

Z form:

$$(\alpha) \qquad cos\, mx = 2^{m-1}cos^m x + A_1 cos^{m-2}x + ...$$

$$(\beta) \qquad sin\, mx = sin x[2^{m-1}cos^{m-1}x + A'_1 cos^{m-2}x + ...]$$

zakładając m całkowite dodatnie [formy (a), (d) art. poprzedzającego] skorzystamy w obliczeniu wyznaczników:

$$K=\begin{vmatrix} 1\ cos a_0, & cos 2a_0, & ..., & cos\, na_0 \\ 1\ cos a_1, & cos 2a_1, & ..., & cos\, na_1 \\ \vdots & & & \\ 1\ cos a_n, & cos 2a_n, & ..., & cos\, na_n \end{vmatrix}, \quad S=\begin{vmatrix} sin a_0, & sin 2a_0, & ..., & sin\, na_0 \\ sin a_1, & sin 2a_1, & ..., & sin\, na_1 \\ \vdots & & & \\ sin a_{n-1}, & sin 2a_{n-1}, & ..., & sin\, na_{n-1} \end{vmatrix},$$

aby potem te rezultaty zastosować do zagadnień z teoryi funkcyi.

Wyznacznik K można za pomocą formy (α) zmienić na funkcyę zawierającą $cos a_0, cos a_1, ..., cos a_n$, a niezawierającą już dostaw wielokrotności łuków $a_0, a_1, ..., a_n$. Ponieważ dalej $K=0$ gdy $a_r=a_s$, $r \gtrless s$, więc połóżmy:

$$(1) \qquad K=\varrho.\left\{\begin{array}{r}(cos a_1 - cos a_0)(cos a_2 - cos a_0)...(cos a_n - cos a_0) \\ (cos a_2 - cos a_1)...(cos a_n - cos a_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (cos a_n - cos a_{n-1})\end{array}\right.$$

$$=\varrho P(a_0, a_1, a_2, ..., a_n),$$

starając się potem czynnik ϱ wyznaczyć. Ten czynnik ϱ nie będzie przedewszystkiem zależał od $cos a_0, cos a_1, ...,$ bo tak iloczyn P, jak i wyznacznik K są w każdem $cos a_r$ jednakowego stopnia. [W K zawierają się $cos\, na_r$ w ostatniej jego kolumnie, a każde $cos\, na_r$ zawiera — podług (α) — $cos^x a_r$]. Stąd wynika, że do wyznaczenia ϱ wystarczy w (1) zrównać ze sobą dwa równomienne wyrazy. Otóż w K dostajemy na iloczyn elementów głównej przekątni:

$$(cos a_1 . cos 2a_2 . cos 3a_3 ... cos na_n),$$

a gdy tu (α) zastosujemy, znajdziemy w nim wyraz najwyższego wymiaru:

$$p = 2^{1+2...+(n-1)} cos a_1 . cos^2 a_2 . . cos^n a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} cos a_1 . cos^2 a_2 ... cos^n a_n.$$

Po prawej stronie w (1) znajdziemy zaś wyraz:

$$p' = \varrho . cos a_1 . cos^2 a_2 ... cos^n a_n.$$

Ponieważ ϱ nie zależy już od $a_0, a_1, ...,$ więc kładąc $p = p'$ mamy: $\varrho = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, a stąd:

$$K = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} . P(a_0, a_1, a_2, ..., a_n). \tag{2}$$

W analogiczny postępując sposób i stosując relacyę (β), znajdziemy:

$$S = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} sin a_0 sin a_1 ... sin a_{n-1} P(a_0, a_1, ..., a_{n-1}). \tag{3}$$

Zawarte w P czynniki:

$$cos a_r - cos a_s = 2 sin \frac{a_r + a_s}{2} . sin \frac{a_r - a_s}{2}$$

wskazują, że K i S stają się $=0$, gdy nietylko $a_r = a_s$, ale także gdy $a_r = -a_s$, co rzeczywiście odrazu sprawdzić można.

11. O funkcyach $G(e^{ix}) \pm G(e^{-ix})$. Zastosujmy te rezultaty do badania funkcyj $R(e^{ix})$ szczególnych form:

$$\varphi(x) = G(e^{ix}) + G(e^{-ix})$$
$$\psi(x) = G(e^{ix}) - G(e^{-ix}),$$

gdzie $G(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + ... + c_n u^n$. *)

Funkcye $\varphi(x)$, $\psi(x)$, gdy do nich zastosujemy wzory Eulera Moivre'a, dostaniemy w postaciach:

$$\varphi(x) = A_0 + A_2 cos x + A_2 cos 2x + ... + A_n cos nx$$
$$\psi(x) = B_1 sin x + B_2 sin 2x + ... + B_n sin nx$$

o stałych spółczynnikach $A_0, A_1, ..., B_1, B_2, ...$ Liczbę n nazwiemy tu rzędem funkcyj φ, ψ i funkcyi $\psi / sin x$.

Gdy funkcya $\varphi(x)$ ma na $(n+1)$ miejscach: $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ przybierać odpowiednio wartości: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, to tak dane warunki prowadzą do $(n+2)$ współczesnych równań:

---

*) G. Fouret: „*Sur deux formules trigonometriques d'interpolation*". C. R. T. 99 (1884), str. 963, 1011, 1062. W tych rozprawach obliczone są także wyznaczniki K, S.

$$\begin{aligned}
&A_0+A_1 \cos x+A_2 \cos 2x+\ldots+A_n \cos nx - \varphi(x)=0\\
&A_0+A_1 \cos x_0+A_2 \cos 2x_0+\ldots+A_n \cos nx_0 - \varphi_0 =0\\
&\vdots\\
&A_0+A_1 \cos x_n+A_2 \cos 2x_n+\ldots+A_n \cos nx_n - \varphi_n =0,
\end{aligned}$$

z nich wynika:

$$\begin{vmatrix}
1 & \cos x, & \cos 2x & \ldots & \cos nx & \varphi(x)\\
1 & \cos x_0, & \cos 2x_0 & \ldots & \cos nx_0 & \varphi_0\\
1 & \cos x_1, & \cos 2x_1 & \ldots & \cos nx_1 & \varphi_1\\
\vdots & & & & & \\
1 & \cos x_n, & \cos 2x_n & \ldots & \cos nx_n & \varphi_n
\end{vmatrix}.$$

Po rozwinięciu tego wyznacznika podług elementów ostatniego pionu, mamy:

$$(1)\qquad \begin{aligned}&\varphi(x).P(x_0x_1\ldots x_n)-\varphi_0 P(x\, x_1x_2\ldots x_n)+\varphi_1 P(x_0\, x\, x_2\ldots x_n)\\ &-\varphi_2 P(x_0x_1x\ldots x_n)+\ldots\pm\varphi_n P(x_0x_1\ldots x_{n-1}x)=0,\end{aligned}$$

gdzie P jest iloczynem, jaki określiliśmy w art. poprzedzającym. Z relacyi (1) wynika:

$$\varphi(x)=\frac{P(x\,x_1\ldots x_n)}{P(x_0x_1\ldots x_n)}\varphi_0+\frac{P(x_0x\ldots x_n)}{P(x_0x_1\ldots x_n)}\varphi_1+\ldots+\frac{P(x_0x_1\ldots x_{n-1}x)}{P(x_0x_1\ldots x_n)}\varphi_n$$

albo ostatecznie po wykonaniu skróceń:

$$(a)\qquad \varphi(x)=\sum_{s=0}^{n}\varphi_s.\prod_{r=0}^{n}{}' \frac{\cos x-\cos x_r}{\cos x_s-\cos x_r};$$

kreska nad Π wskazuje, że w iloczynie mnożącym φ_s opuścić trzeba czynnik o wskaźniku $r=s$.

Analogicznie — gdy założymy, że $\psi(x)$ ma na miejscach $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ przybierać odpowiednio wartości $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$, a zastosujemy obliczanie wyznacznika S (art. poprzedzający) — dostaniemy:

$$(b)\qquad \psi(x)=\sin x\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\psi_s}{\sin x_s}\prod_{r=0}^{n-1}{}' \frac{\cos x-\cos x_r}{\cos x_s-\cos x_r}.$$

Formy (a), (b) po zastosowaniu w nich związku:

$$\cos u-\cos v=-2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

można będzie także w ten sposób napisać:

$$(a')\qquad \varphi(x)=\sum_{s=0}^{n}\varphi_s\prod_{r=0}^{n}{}' \frac{\sin\frac{1}{2}(x+x_r)\sin\frac{1}{2}(x-x_r)}{\sin\frac{1}{2}(x_s+x_r)\sin\frac{1}{2}(x_s-x_r)}$$

$$(b') \qquad \psi(x) = \sin x \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\psi_s}{\sin x_s} \prod_{r=0}^{n-1}{}' \frac{\sin\frac{1}{2}(x+x_r)\sin\frac{1}{2}(x-x_r)}{\sin\frac{1}{2}(x_s+x_r)\sin\frac{1}{2}(x_s-x_r)},$$

Z (a), (a') lub z (b), (b') wynika konieczne założenie, że między miejscami $x_0, x_1, x_2, \ldots$ niema żadnych dwóch x_r, x_s dających $x_r+x_s=2n\pi$, lub $x_r-x_s=2n\pi$, $n=0, \pm 1, \ldots$ Musi więc być zawsze:

$$(c) \qquad x_r+x_s \neq 2n\pi, \quad x_r-x_s \neq 2n\pi, \quad r \gtrless s.$$

Formy (a), (b), albo (a'), (b') stanowią analogią z formą Lagrange'a interpolującą funkcye wymierne całkowite.

Niech ε ma znaczenie 1, gdy się mówi o funkcyi φ, a niech $=0$, gdy jest mowa o funkcyi $\frac{\psi}{\sin x}$ i przyjmijmy, że te funkcye na miejscach $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+\varepsilon})$ spełniających warunki (c) stają się zerami (a więc $\varphi_0=\varphi_1=\ldots=0$, $\frac{\psi_0}{\sin x_0}=\frac{\psi_1}{\sin x_1}=\ldots=0$). W takim razie za użyciem tych właśnie miejsc w formach (a), (b), mamy $\varphi=0$, $\psi/\sin x=0$ identycznie. Stąd twierdzenie:

I. *Funkcye* $\varphi, \frac{\psi}{\sin x}$ *rzędu* n, *które na* $(n+\varepsilon)$ *miejscach spełniających warunki (c) są zerami, nie istnieją — są identycznemi zerami.*

Dalej wywnioskujemy:

II. *Dwie funkcye:* φ, φ_1 *lub dwie funkcye* $\frac{\psi}{\sin x}, \frac{\psi_1}{\sin x}$, *które na* $(n+\varepsilon)$ *miejscach spełniających warunki (c) przybierają te same wartości, są identyczne.*

Pochodzi to stąd, że wtedy różnice $(\varphi-\varphi_1)$, $\left(\frac{\psi}{\sin x}-\frac{\psi_1}{\sin x}\right)$ są identycznemi zerami.

Z twierdzenia II. wynika bezpośrednio znowu taki wniosek:

III. *Gdy funkcya* φ *lub* $\frac{\psi}{\sin x}$ *rzędu* n^{go} *ma przybierać na* $(n+\varepsilon)$ *miejscach spełniających warunki (c) wartości pewnej funkcyi* φ_1 *lub* $\psi_1/\sin x$ *niższego rzędu, to jest funkcyą tego niższego rzędu, a nie rzędu* n^{go}.

12. Czynniki pierwiastkowe funkcyi *sin nx, cos nx*. Formy (a), (b) lub (a'), (b') mogą posłużyć z jednej strony do utworzenia funkcyj rzędu n^{go}, lub niższego [tw. III.]. a z drugiej strony można ich użyć do przedstawienia danych, już całkiem określonych funkcyj rzędu $\leq n$.

Połóżmyż w (a), (a') $\varphi(x)=1$, lub w (b), (b') $\psi(x)=sin x$ to dojdziemy do identyczności:

$$(1)\quad 1=\sum_{s=0}^{n}\frac{(cos x-cos x_1)\ldots(cos x-cos x_{s-1})\,(cos x-cos x_{s+1})\ldots(cos x-cos x_n)}{(cos x_s-cos x_1)\ldots(cos x_s+cos x_{s-1})\,cos x_s-cos x_{s+1})\ldots(cos x_s-cos x_n)}$$

albo:

$$(2)\qquad 1=\sum_{s=0}^{n}\left(\prod_{r=0}^{n}{}' \frac{sin\frac{1}{2}(x+x_r)\,sin\frac{1}{2}(x-x_r)}{sin\frac{1}{2}(x_s-x_r)\,sin\frac{1}{2}(x_s-x_r)}\right),$$

gdzie n jest dowolne, a $x_0, x_1, \ldots$, spełniają warunek (c), art. poprzedz.

Połóżmy $\varphi(x)=cos nx$, to w obszarze $(-\pi\ldots+\pi)$ jest $cos nx=0$ na miejscach:

$$(\alpha)\qquad x=\frac{\pi}{2n}(2r+1),\ r=0,1,2,\ldots,(n-1),$$

$$(\beta)\qquad x=\frac{\pi}{2n}(2r+1),\ r=-1,-2,\ldots-(n-1),$$

a każde dalsze miejsce zerowe tej funkcyi będzie równoważne, albo z jednem z miejsc (α), albo z jednem z miejsc (β).

Dołączmy do miejsc (α) jeszcze miejsce $x=0$, na którem $cos nx=1$, to dostajemy $(n+1)$ miejsc:

$$(\gamma)\qquad x=0,\ x=\frac{\pi}{2n}(2r+1),\ r=0,1,2,\ldots(n-1)$$

czyniących zadość warunkom (c). Używszy ich do utworzenia formy (a) mamy:

$$(3)\quad cos nx=\frac{cos x-cos\frac{\pi}{2n}}{1-cos\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{cos x-cos\frac{3\pi}{2n}}{1-cos\frac{3\pi}{2n}}\cdots\cdots\frac{cos x-cos\frac{2n-1}{2n}\pi}{1-cos\frac{2n-1}{2n}\pi}.$$

Porównując to z przedstawieniem tej funkcyi przez (α), art. poprzedz., trzeba położyć:

$$(4)\qquad \frac{1}{\left(1-cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(1-cos\frac{3\pi}{2n}\right)\ldots\left(1-cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right)}=2^{n-1},\ \text{a stąd:}$$

$$(3')\quad cos nx=2^{n-1}\left(cos x-cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(cos x-cos\frac{3\pi}{2n}\right)\left(cos x-cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right).$$

Funkcya $sin\, nx$ staje się — po wyłączeniu $x=0$ — zerem w obszarze $(-\pi\ldots+\pi)$ na miejscach:

$$(\alpha')\qquad x=\frac{r\pi}{n},\ r=1,2,3,\ldots,(n-1)$$

$$(\beta') \qquad x=\frac{r\pi}{n},\ r=-1,-2,-3,\ldots,-(n-1)$$

a każde inne jej miejsce zerowe nierównoważne z $x=0$ jest równoważne albo z jednem z miejsc (α'), albo z jednem z miejsc (β').

Dołączymy do miejsc (α) jeszcze miejsce $x=0$, na którem-to miejscu jest $(sin\,nx\,/\,sinx)=(nx+\ldots)/(x+\ldots)=n$ i użyjmy tu tych n miejsc do utworzenia formy (b), to mieć będziemy:

$$(5) \quad sin\,nx=n\,.\,sinx\,.\frac{cosx-cos\frac{\pi}{n}}{1-cos\frac{\pi}{n}}\,.\,\frac{cosx-cos\frac{2\pi}{n}}{1-cos\frac{2\pi}{n}}\cdots\cdots\frac{cosx-cos\frac{n-1}{n}\pi}{1-cos\frac{n-1}{n}\pi}.$$

Porównując to z formą (β) — art. poprzedz. — dostajemy relacyę:

$$(6) \qquad \frac{n}{\left(1-cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-cos\frac{2\pi}{n}\ldots\left(1-cos\frac{n-1}{n}\pi\right)\right.}=2^{n-1}$$

przy dowolnem, parzystem lub nieparzystem n, a uwzględniając to, napiszemy:

$$(6') \quad sinnx=2^{n-1}sinx\left(cosx-cos\frac{\pi}{n}\right)\left(cosx-cos\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(cosx-cos\frac{n-1}{n}\pi\right).$$

Czynniki zawarte w (3') i w (6) można nazwać c z y n n i k a m i p i e r w i a s t k o w y m i funkcyi $cosnx$ i $sinnx$.

Przyjmijmy n nieparzyste $=2\mu+1$ i dołączmy w tym razie do miejsc (α') jeszcze miejsce $x=\frac{\pi}{2}$, na którem $\frac{sin\,nx}{sinx}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, a $cosx=0$, to stosując formę (b') otrzymamy:

$$(7) \quad sin\,nx=(-1)^{\frac{n-1}{2}}sinx\,\frac{cosx-cos\frac{\pi}{n}}{cos\frac{\pi}{n}}\,.\,\frac{cosx-cos\frac{2\pi}{n}}{cos\frac{2\pi}{n}}\cdots\cdots\frac{cosx-cos\frac{n-1}{n}\pi}{cos\frac{n-1}{n}\pi}$$

gdzie tu widocznie:

$$(8) \qquad \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{cos\frac{\pi}{n}.cos\frac{2\pi}{n}\ldots cos\frac{n-1}{n}\pi}=2^{n-1},\ n=2\mu+1.$$

Z (5) i (7) wynika zatem przy nieparzystem n relacya:

$$(9) \qquad \frac{n\,.\,cos\frac{\pi}{n}\,.\,cos\frac{2\pi}{n}\ldots cos\frac{n-1}{n}\pi}{\left(1-cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-cos\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(1-cos\frac{n-1}{n}\pi\right)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

13. Pochodne nieskończonego rzędu szeregów bezustannie zbieżnych. Zauważmy funkcye:

$$(\alpha)\quad y=\sin cx=\frac{e^{cxi}-e^{-cxi}}{2i},\qquad (\beta)\quad y=\cos cx=\frac{e^{cxi}+e^{-cxi}}{2}.$$

Tworząc ich n^{te} pochodne, dostajemy:

$$(\alpha')\quad \frac{d^ny}{dx^n}=c^ni^n\frac{e^{cxi}-(-1)^ne^{-cxi}}{2i}=c^ni^n\,.\,X_1(x,n),$$

$$(\beta')\quad \frac{d^ny}{dx^n}=c^ni^n.\frac{e^{cxi}+(-1)^ne^{-cxi}}{2}=c^ni^n.X_2(x,n),$$

a gdy tu $n=\infty$ założymy, a dla krótkości $\lim\limits_{n=\infty}\frac{d^ny}{dx^n}=z$ położymy, to dojdziemy do takich wyników:

A) Przy $|c|<1$ jest $\lim\limits_{n=\infty}|ci|^n=0$, a wskutek tego mieć tu będziemy dla wszystkich trzech funkcyj: $z=0$ przy dowolnem x leżącem w skończoności.

B) Niech $ci=e^{2\pi ri}$, gdzie r jest wymierną ułamkową liczbą $=\frac{\lambda}{\mu}$, o λ, μ pierwszych względem siebie. Wtedy, gdy $n=(k\mu+s)$, to przy każdem całkowitem skończonem lub nieskończonem k, mieć będziemy:

$$(ei)^n=e^{2\pi\frac{\lambda}{\mu}(k\mu+s)i}=e^{2\pi\lambda ki}.\,e^{\frac{2\pi\lambda si}{\mu}}=e^{\frac{2\pi\lambda}{\mu}si}.$$

Gdy $s=0,1,2,\ldots,\mu-1$, to $(ci)^n$ przybiera μ różnych między sobą wartości (wszystkich pierwiastków równania $v^\mu-1=0$), które się potem peryodycznie powtarzają przy:

$$s=(\mu,\ \mu+1,\ldots,2\mu-1),\ (2\mu,\ 2\mu+1,\ldots,3\mu-1),\ldots$$

Z tego powodu będzie funkcya (α) — przy każdem skończonem x — posiadała μ różnych i skończonych pochodnych z. Inaczej mówiąc pochodna $\frac{d^ny}{dx^n}$ dąży tu do μ różnych między sobą, a skończonych granic.

Połóżmy, bez względu na to, czy k jest skończone, lub nieskończone, $X_1(x,k\mu)=a$, $X_1(x,k\mu+1)=b$, gdzie koniecznie jest $a\neq b$, to dalej już mamy ciągle $X_1(x,k\mu+2)=a$, $X_1(x,k\mu+3)=b,\ldots$

Naznaczmy dalej dla krótkości $e^{\frac{2\pi i\lambda}{\mu}}$ przez ε, to dla funkcyi (α) dostaniemy po porządku przy parzystem μ:

$$z=\varepsilon^0a,\ \varepsilon^1b,\ \varepsilon^2a,\ \varepsilon^3b,\ldots,\ \varepsilon^{\mu-1}b,\ldots$$

a przy nieparzystem μ:

$$z=\varepsilon^0a,\ \varepsilon^1b,\ldots,\varepsilon^{\mu-1}a,\ \varepsilon^0b,\ \varepsilon^1a,\ldots,\ \varepsilon^{\mu-1}b.$$

Analogicznie — gdy dla funkcyi (β) położymy: $X_2(x,k\mu)=a'$, $X_2(x,k\mu+1)=b'$ — mieć będziemy przy parzystem μ:

$$z=\varepsilon^0 a',\ \varepsilon^1 b',\ \varepsilon^2 a',\ \ldots,\ \varepsilon^{\mu-1} b',$$

a przy nieparzystem μ:

$$z=\varepsilon^0 a',\ \varepsilon^1 b',\ \ldots,\ \varepsilon^{\mu-1} a',\ \varepsilon^0 b',\ \varepsilon^1 a',\ \ldots,\ \varepsilon^{\mu-1} b'.$$

W razie $ci=i=e^{\frac{\pi i}{2}}$ dostajemy w (α) funkcyę $sin x$, a więc w (β) funkcyę $cos x$, a ich pochodne nieskończenie wielkiego rzędu będą odpowiednio:

$$z=sin x,\ cos x,\ -sin x,\ -cos x$$
$$z=cos x,\ -sin x,\ -cos x,\ sin x.$$

[Ten porządek objawia się tu przy założeniu $k\mu\equiv 0\ (mod.\,4)$].

Z przytoczonych tu przykładów wynika, że mogą istnieć funkcye całkowite analityczne o pewnej stałej ilości pochodnych nieskończonego rzędu mających wartości skończone. Zbadajmyż te stosunki z ogólnego stanowiska, biorąc za punkt wyjścia element:

$$(1)\qquad y=a_0+\frac{a_1}{1!}(x-a)+\frac{a_2}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

pewnej analitycznej funkcyi y zachowującej się regularnie w otoczeniu pewnego punktu a leżącego w skończoności,*) W (1) jest:

$$a_n=\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=a}$$

i te spółczynniki są oczywiście wszystkie skończone przy skończonych wskaźnikach n. Przyjmijmy, że w punkcie $x=a$ są i pochodne nieskończenie wielkiego rzędu:

$$z_a=\lim_{n=\infty}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=a}$$

skończone. W takim razie liczby:

$$(2)\qquad |a_0|,\ |a_1|,\ |a_2|,\ |a_3|,\ \ldots\ in\ inft.$$

mają pewną skończoną granicę górną C, a że

$$|y|<|a_0|+\frac{|a_1|}{1!}|x-a|+\frac{|a_2|}{2!}|x-a|^2+\ldots,$$

więc także będzie:

$$|y|<C\left(1+\frac{|x-a|}{1!}+\frac{|x-a|^2}{2!}+\ldots\right)=C.e^{|x-a|}.$$

Z tej nierówności odrazu wynika, że y jest funkcyą o skończonych wartościach dla wszelkich skończonych x, czyli, że jest

*) K. Żórawski: „O pochodnych nieskończenie wielkiego rzędu". Rozpr. Akad. krak. T. 26., (1893), str. 419—433.

funkcyą całkowitą (przestępną — jeżeli z naszych poszukiwań wydzielamy funkcye całkowite, wymierne).

Szereg (1) jest więc bezustannie zbieżnym, a każdy jego pochodny szereg:

$$\frac{dy^n}{dx^n}=a_n+\frac{a_{n+1}}{1!}(x-\alpha)+\frac{a_{n+2}}{2!}(x-\alpha)^2+...$$

czy to przy skończonem, czy nieskończonem n jest znowu szeregiem bezustannie zbieżnym, co wynika ze skończoności wszystkich liczb (2) za powtórzeniem takiego rozumowania, jakie zastosowaliśmy do samej funkcyi y. Z tego wnosimy, że nietylko w punkcie α, ale i we wszystkich punktach x, leżących w skończoności, ma funkcya y pochodne (lub pochodną) nieskończenie wielkiego rzędu o skończonych wartościach (granicach). Mamy więc twierdzenie:

I. *Jeżeli wszystkie pochodne nieskończenie wielkiego rzędu pewnej analitycznej funkcyi są skończone w jednym punkcie α jej argumentu x to funkcya jest całkowitą, a jej pochodne nieskończonego rzędu pozostają skończone także we wszystkich punktach x, leżących w skończoności. Tylko takie funkcye posiadają pochodne nieskończonego rzędu o skończonych granicach.*

Zajmijmy się teraz wyznaczeniem formy pochodnej $z=\lim\limits_{n=\infty}\frac{d^ny}{dx^n}$ i samej funkcyi y w tym wypadku.

Gdy funkcya y ma mieć w punkcie α jedną tylko pochodnę z_α nieskończenie wielkiego rzędu o wartości skończonej $b \neq 0$, to być musi: $a_n=a_{n+1}=a_{n+2}=...=b$, gdy $n=\infty$.

Mamy więc wtedy:

$$\lim_{n=\infty}\frac{d^{n+s}y}{dx^{n+s}}=z=b+\frac{b}{1!}(x-\alpha)+\frac{b}{2!}(x-\alpha)^2+\frac{b}{3!}(x-\alpha)^3+...=$$
$$=b.e^{x-\alpha},\text{ dla } s=0, 1, 2, 3, ..., \textit{in inft.},$$

a to wskazuje, że i w każdym punkcie x, leżącym w skończoności, a różnym od α, mamy także jedną tylko pochodnę z o wartości $b.e^{x-\alpha}$. Samą funkcyę y napiszmy w postaci:

$$y=b.e^{x-\alpha}+(y-b.e^{x-\alpha}),$$

albo wyraźnie w postaci:

$$y=be^{x-\alpha}+\left[(a_0-b)+\frac{(a_1-b)}{1!}(x-\alpha)+\frac{(a_2-b)}{2!}(x-\alpha)^2+...\right]$$

i rozważmy funkcyę:

(3) $$q(x-\alpha)=(a_0-b)+\frac{(a_1-b)}{1!}(x-\alpha)+\frac{(a_2-b)}{2!}(x-\alpha)^2+...$$

*

Jestto widocznie funkcya całkowita, która w punkcie a ma pochodnę z o jednej wartości zero, gdyż:

(4) $a_n - b = a_{n+1} - b = a_{n+2} - b = ... = 0$, gdy $n = \infty$.

Lecz właśnie wskutek tych równości (4) dostajemy na dowolnem miejscu x:

$$\lim_{n=\infty} \frac{d^{n+s}q}{dx^{n+s}} = \lim_{n=\infty}(a_n - b)c^{x-a} = 0. \quad s = 0, 1, 2, ...$$

Z tych rozważań dochodzimy do twierdzeń:

II. *Gdy funkcya całkowita ma w pewnym punkcie a pochodnę z o jednej tylko wartości zero, to jej pochodne z są we wszystkich punktach x (leżących w skończoności) o jednej wartości zero. W szczególności może być taka funkcya wymierną całkowitą.*

II a. *Gdy funkcya całkowita y ma w punkcie a pochodnę nieskończenie wielkiego rzędu o jednej wartości $b \neq 0$, to i w każdym punkcie x leżącym w skończoności ma taką pochodnę z, o jednej tylko wartości $= b.e^{(x-a)}$, a sama funkcya $y = e^{b(x-a)} + q(x-a)$, gdzie $q(x-a)$ jest funkcyą o pochodnej $z = 0$.*

Funkcye (α), (β) są — gdy $|ci| < 1$ — funkcyami $q(x)$, a należą do funkcyj określonych w tw. II a, gdy $ci = 1$.

14. Wartości pochodnych nieskończonego rzędu powracające peryodycznie. Założmy po drugie, że funkcya y ma w pewnym punkcie a dokładnie μ pochodnych nieskończonego rzędu, a każda z nich jest skończonej wartości: $b_0, b_1, ..., b_{\mu-1}$.

W takim razie między spółczynnikami:

(1) $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, ...$ *in inft.*

poczynając od pewnego $n = \infty$, znajdziemy spółczynniki o wartości b_0, spółczynniki o wartości b_1, ..., spółczynniki o wartości $b_{\mu-1}$, a innych wartości już tam wcale nie znajdziemy.

Przyjmijmyż, że przy obranem w pewien sposób $n = \infty$ mamy właśnie $a_n = b_0$, i

$$(a) \qquad z = \lim_{n=\infty} \frac{d^n y}{dx^n} = b_0 + (x-a)\mathfrak{P}_0(x-a);$$

wybierając $a_{n+k_1} = b_1$, dostajemy:

$$(b) \qquad \frac{d^{k_1}z}{dx^{k_1}} = \lim_{n=\infty} \frac{d^{n+k_1}y}{dx^{n+k_1}} = b_1 + (x-a)\mathfrak{P}_1(x-a);$$

gdy $a_{n+k_2} = b_2$, to mamy:

$$(c) \qquad \frac{d^{k_2}z}{dx^{k_2}} = \lim_{n=\infty} \frac{d^{n+k_2}y}{dx^{n+k_2}} = b_2 + (x-a)\mathfrak{P}_2(x-a);$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

a wybrawszy wreszcie $a_{n+k_\mu}=b_\mu$ otrzymujemy:

$$(d)\qquad \frac{d^{k_{\mu-1}}z}{dx^{k_{\mu-1}}}=\lim_{n=}\frac{d^{n+k_{\mu-1}}y}{dx^{n+k_{\mu-1}}}=b_{\mu-1}+(x-a)\mathfrak{P}_{\mu-1}(x-a).$$

Pochodne (a), (b), (c), ..., (d) są szeregami bezustannie zbieżnymi (art. poprzedz.), a już, wskutek różniących się od siebie wolnych wyrazów $b_0, b_1, b_2, ..., b_{\mu-1}$, nie są identyczne. Stąd wynika, że i na dowolnem miejscu $x \neq a$ ma ta funkcya niezawodnie również μ różniących się między sobą pochodnych. Lecz czy ich więcej tam mieć nie może, trzeba dopiero rozstrzygnąć.

Przyjmijmyż, że oznaczywszy jedną pochodnę z pewnej funkcyi, znajdujemy potem:

$$(2)\qquad \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ ...,\ \frac{d^{\nu-1}z}{dx^{\nu-1}}$$

w s z y s t k i e r ó ż n e od z, a dopiero:

$$(3)\qquad \frac{d^\nu z}{dx^\nu}=z.$$

Funkcya z — jako całka tego równania różniczkowego — ma mieć zatem postać:

$$(4)\qquad z=C_0e^x+C_1e^{\varepsilon x}+C_2e^{\varepsilon^2x}+...=C_{\nu-1}e^{\varepsilon^{\nu-1}x}.\ ^{*)}$$

gdzie C_0, C_1, ... są-to stałe dowolne, a

$$\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{\nu}}.$$

Gdyby w szeregu (2) znajdowały się dwie równe sobie pochodne n. p.:

$$\frac{d^\alpha z}{dx^\alpha}=\frac{d^\beta z}{dx^\beta},\quad \alpha<\nu-1,\ \beta<\nu-1,\ \alpha<\beta,$$

to stąd po $(\nu-\beta)$ różniczkowaniach, kładąc $\nu+\alpha-\beta=\lambda$, gdzie oczywiście $\lambda<\nu$, dostalibyśmy związek:

$$\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda}=z.$$

Lecz ten jest samem założeniem wykluczony — a że jego rozwiązaniem jest:

---

*) Kładąc w (3) $z=e^{rx}$, a więc $\frac{d^\nu z}{dx^\nu}=r^\nu e^{rx}$, dostajemy związek:

$$e^{rx}(r^\nu-1)=0,$$

któremu zadość czynią $r=1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{\nu-1}$.

Każda z funkcyj $e^{\varepsilon^\alpha x}$, $\alpha=1, ..., \nu-1$ czyni więc zadość równaniu różniczkowemu (3), a ich liniowa jednorodna funkcya będzie jego najogólniejszem rozwiązaniem. Por. zresztą: A. R. F o r s y t h (tłóm. na niem. H. M a s e r) *„Lehrbuch der Differentialgleichungen“* (Brunszwik 1889), albo: Z a j ą c z k o w s k i Wł. „Wykład nauki o rów. różniczkowych“ (Paryż 1877).

(5) $$z=K_0e^x+K_1e^{\eta x}+K_2e^{\eta^2x}+...+K_{\lambda-1}e^{\eta^{\lambda-1}x}, \quad \eta=e^{\frac{2\pi i}{\lambda}},$$

więc stąd wynika, że szereg:

(6) $$z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, ..., \frac{d^{\nu-1}z}{dx^{\nu-1}}$$

będzie z samych różnych już między sobą funkcyj złożony, jeżeli postać (4) nie stanie się identyczną z (5).

W razie identyczności tych postaci musiałyby się utrzymać w nich tylko wyrazy z takiemi ε^k i z takiemi η^h, które dają:

$$\varepsilon^k=\eta^h \text{ czyli: } \frac{2\pi ik}{\nu}=\frac{2\pi ih}{\lambda}, \text{ czyli wreszcie:}$$

(7) $$(k/\nu)=(h/\lambda),$$

gdzie k może być $=0, 1, ..., \nu-1$, a $h=0, 1, ..., \lambda-1$.

Niech ν i λ mają największy wspólny podzielnik ϱ, tak, że $\lambda=\varrho\lambda_1$, $\nu=\varrho\nu_1$, a λ_1, ν_1 są już względem siebie pierwsze.

Ze związku (7) mamy wtedy: $k=h.(\nu_1/\lambda_1).$, a że k mają być całkowite, więc muszą być h/λ_1 całkowitemi liczbami, co znaczy, że: $h=0.\lambda_1, 1.\lambda_1, 2\lambda_1, ..., (\varrho-1)\lambda_1$, $k=0.\nu_1, 1.\nu_1, 2\nu_1, ..., (\varrho-1)\nu_1$, czyli: $k\equiv 0$ $(mod.\ \nu_1)$, $k<\nu$.

Przy takich h i k są formy (4), (5) z sobą identyczne i mają wspólną postać:

(8) $$z=C_0e^x+C_{\nu_1}e^{\varepsilon^{\nu_1}x}+C_{2\nu_1}e^{\varepsilon^{2\nu_1}x}+...+C_{(\varrho-1)\nu_1}e^{\varepsilon^{(\varrho-1)\nu_1}x}.$$

Z rozumowania tego dochodzimy do takiego wniosku: Chcąc aby szereg (6) zawierał same różne między sobą funkcye trzeba przyjąć z postaci (4) i założyć, że w niej wszystkie spółczynniki C_s o wskaźnikach s nie $\equiv 0$ $(mod.\ \nu_1)$, gdzie ν_1 przedstawia jakiś pewien podzielnik liczby ν, są koniecznie zerami.

Dalej wnosimy, że funkcya, której jedna z pochodnych nieskończonego rzędu ma postać (4) o spółczynnikach C_s poddanych temu warunkowi, ma ν — i tylko ν — różnych pochodnych na każdem dowolnem miejscu x*) i że te pochodne powtarzają się peryodycznie za zwiększaniem wskaźnika różniczkowania (gdyż: $\frac{d^\nu z}{dx^\nu}=z$, $\frac{d^{\nu+1}z}{dx^{\nu+1}}=\frac{dz}{dx}$, ...).

*) Prowadząc bowiem rzecz ogólnie, trzeba zawsze przyjmować, że dwie nieidentyczne funkcye na jednem miejscu nie dają identycznych wartości.

Przy tem zauważyć potrzeba, że gdyby warunkowi, jaki spełniać mają C_s, zadość nie uczyniono, mielibyśmy tylko ϱ różnych między sobą pochodnych, o czem przekonać się można przez różniczkowania formy (8).

15. Forma funkcyi całkowitej o pochodnych nieskończonego rzędu, powtarzających się peryodycznie. Po tych uwagach wróćmy do naszej funkcyi y. Gdybyśmy przyjęli, że na miejscach x, różniących się od a, ma ona ν pochodnych, gdzie $\nu > \mu$, to i na miejscu a dostalibyśmy ν, a nie μ pochodnych. Lecz to sprzeciwia się założeniu. Z tego powodu przyjąć trzeba, że funkcya y ma na każdem miejscu: μ, i tylko μ pochodnych i że one mają postać:

$$(1) \qquad \frac{d^k z}{dx^k} = C_0 e^x + C_1 \varepsilon^k e^{\varepsilon x} + C_1 \varepsilon^{2k} e^{\varepsilon^2 x} + \ldots + C_{\mu-1} \varepsilon^{(\mu-1)} e^{\varepsilon^{\mu-1} x},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1,$$

gdzie teraz: $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$, a spółczynniki C_s o takich wskaźnikach s, które nie są podzielne przez pewien czynnik zawarty w μ, nie wszystkie są zerami.

Pochodne (1) dają na miejscu $x = a$ wartości $b_0, b_1, \ldots, b_{\mu-1}$ w pewnym porządku. Przyjmijmyż, że właśnie rzędom:

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1$$

odpowiadają wartości: $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{\mu-1}$, to dalej rzędom:

$$k = \mu, \mu+1, \mu+2, \ldots, 2\mu-1$$

odpowiadać będą znowu wartości: $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{\mu-1}$, i t. d. bez końca.

Szereg spółczynników w rozwinięciu naszej funkcyi dla otoczenia punktu a przedstawia się zatem jako:

$$b_0, b_1, \ldots, b_{\mu-1}; \; b_0, b_1, \ldots, b_{\mu-1}; \ldots$$

[a w (a), (b), (c), (d) — art. 14. — można położyć: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3, \ldots, k_{\mu-1} = \mu-1$].

Z tego wynika, że pochodna z jest rozwinięciem:

$$z = b_0 + \frac{b_1}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{b_{\mu-1}}{(\mu-1)!}(x-a)^{\mu-1} +$$

$$+ \frac{b_0}{\mu!}(x-a)^{\mu} + \frac{b_1}{(\mu+1)!}(x-a)^{\mu+1} + \ldots + \frac{b_{\mu-1}}{(2\mu-1)!}(x-a)^{2\mu-1} + \ldots =$$

$$= b_0 \left[1 + \frac{(x-a)^{\mu}}{\mu!} + \frac{(x-a)^{2\mu}}{(2\mu)!} + \ldots \right] +$$

$$+ b_1 \left[\frac{x-a}{1!} + \frac{(x-a)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \frac{(x-a)^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} + \ldots \right] + \ldots +$$

$$\ldots + b_{\mu-1}\left[\frac{(x-\alpha)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}+\frac{(x-\alpha)^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}+\frac{(x-\alpha)^{3\mu-1}}{(3\mu-1)!}+\ldots\right].$$

Z sum ujętych tu w nawiasy, pierwsza jest szeregiem wydzielonym *mod.* μ z szeregu $e^{x-\alpha}$, a jako taka [T. I., art. 163.],

$$=\frac{1}{\mu}\left[e^{x-\alpha}+e^{\varepsilon(x-\alpha)}+e^{\varepsilon^2(x-\alpha)}+\ldots+e^{\varepsilon^{\mu-1}(x-\alpha)}\right]$$
$$=H(x-\alpha).$$

Druga z nich będzie to:

$$\frac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}H(x-\alpha)=$$
$$=\frac{1}{\mu}\left[e^{x-\alpha}+\varepsilon^{\mu-1}e^{\varepsilon(x-\alpha)}+\varepsilon^{2(\mu-1)}e^{\varepsilon^2(x-\alpha)}+\ldots+\varepsilon^{(\mu-1)(\mu-1)}e^{\varepsilon^{\mu-1}(x-\alpha)}\right].$$

Trzecia będzie $(\mu-2)^{\text{ga}}$ pochodną szeregu $H(x-\alpha)$ i t. d..., aż ostatnia, μ^{ta} suma będzie:

$$\frac{d}{dx}H(x-\alpha)=$$
$$=\frac{1}{\mu}\left[e^{x-\alpha}+\varepsilon e^{\varepsilon(x-\alpha)}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon^2(x-\alpha)}+\ldots+\varepsilon^{\mu-1}e^{\varepsilon^{\mu-1}(x-\alpha)}\right].$$

Będziemy więc mogli położyć:

$$z=\frac{1}{\mu}e^{(x-\alpha)}\left[b_0+b_1+b_2+\ldots+b_{\mu-1}\right]+$$
$$+\frac{1}{\mu}e^{\varepsilon(x-\alpha)}\left[b_0\varepsilon^{\mu}+b_1\varepsilon^{\mu-1}+b_2\varepsilon^{\mu-2}+\ldots+b_{\mu-1}\varepsilon\right]+$$
$$+\frac{1}{\mu}e^{\varepsilon^2(x-\alpha)}\left[b_0\varepsilon^{2\mu}+b_1\varepsilon^{2(\mu-1)}+b_2\varepsilon^{2(\mu-2)}+\ldots+b_{\mu-1}\varepsilon^2\right]+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{\mu}e^{\varepsilon^{\mu-1}(x-\alpha)}\left[b_0\varepsilon^{\mu(\mu-1)}+b_1\varepsilon^{(\mu-1)(\mu-1)}+\ldots b_{\mu-1}\varepsilon^{\mu-1}\right],$$

albo:

$$(2)\qquad z=\frac{1}{\mu}\sum_{s=0}^{\mu-1}e^{\varepsilon^s(x-\alpha)}\left[b_0\varepsilon^{s\mu}+b_1\varepsilon^{s(\mu-1)}+b_2\varepsilon^{s(\mu-2)}+\ldots+b_{\mu-1}\varepsilon^s\right],$$

a tu widocznie jest:

$$C_s=\frac{1}{\mu e^{s\alpha}}\left(b_0\varepsilon^{s\mu}+b_1\varepsilon^{s(\mu-1)}+\ldots+b_{\mu-1}\varepsilon^s\right),$$
$$s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \mu-1.$$

Przyjmijmy, że dla wszystkich s, które nie są podzielne przez pewien czynnik μ_1 liczby $\mu=\rho\mu_1$, mamy $C_s=0$. W takim razie dostaniemy $(\mu-\rho)$ równań.

(3) $$b_0\varepsilon^{s\mu}+b_1\varepsilon^{s(\mu-1)}+b_2\varepsilon^{s(\mu-2)}+\ldots+b_{\mu-1}\varepsilon^{s}=0,$$
$$s=1,2,\ldots,\mu_1-1,\ \mu_1+1,\ldots,\ 2\mu_1-1,\ 2\mu_1+1,\ldots,\ \mu-1.$$

Pomnóżmy s^{te} równanie przez $\varepsilon^{s\mu-s(\mu-\varrho)}$ to dostaniemy:
$$b_\varrho\varepsilon^{s\mu}+b_{\varrho+1}\varepsilon^{s(\mu-1)}+b_{\varrho+2}\varepsilon^{s(\mu-2)}+\ldots+b_{\varrho-1}\varepsilon^{s}=0,$$
a to wskazuje, że równaniom (3) zadość uczynią b_s w ten sposób grupami sobie równe:

(4) $$\begin{array}{l} b_0\ =b_\varrho\ =b_{2\varrho}\ =\ldots=b_{(\mu_1-1)\varrho}\\ b_1\ =b_{\varrho+1}=b_{2\varrho+1}=\ldots=b_{(\mu_1-1)\varrho+1}\\ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ b_{\varrho-1}=b_{2\varrho-1}=b_{3\varrho-1}=\ldots=b_{\mu_1\varrho-1}. \end{array}$$

Mamy więc w tym wypadku — jak rzeczywiście ma być — ϱ tylko różnych pochodnych na miejscu α, a to:
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_{\varrho-1}.$$

Przyjąwszy naodwrót, że się spełniają równości (4), można sprawdzić, że wtedy wszystkie C_s o wskaźnikach s *nie* $\equiv 0$ (*mod* μ_1) będą zerami.

W przykładach (α), (β) przytoczonych w art. 13. połóżmy:
$$ci=e^{\frac{2\pi i}{\mu}}=\varepsilon$$
i przyjmijmy, że do $n=\infty$ dochodzimy po samych wielokrotnościach liczby μ, to w pochodnych z [(α'), (β')] dostajemy dwa nieznikające spółczynniki C_s, a mianowicie:
$$\text{w }(\alpha)\quad C_s=\frac{1}{2i},\quad C_t=\frac{(-1)^{n+1}}{2i}$$
$$\text{w }(\beta)\text{ zaś }C_s=\frac{1}{2},\quad C_t=\frac{(-1)^n}{2}.$$

Gdy μ ma być parzyste $=2\nu$, to C_s jest spółczynnikiem przy $e^{\varepsilon x}$, a C_t przy $e^{\varepsilon^{\nu+1}x}$ a zatem $s=1$, $t=\nu+1$. Te wskaźniki nie są podzielne przez żaden czynnik liczby μ i z tego powodu mieliśmy tu μ pochodnych.

W razie nieparzystego μ połóżmy:
$$ci=e^{\frac{2\pi i}{2\mu}\cdot 2}=\varepsilon_1^2$$
gdzie $\varepsilon_1=e^{\frac{2\pi i}{2\mu}}$, to C_s będzie spółczynnikiem przy $e^{\varepsilon_1^2 x}$ to C_t przy $e^{\varepsilon_1^{\mu+1}x}$: wskaźnik $s=2$, wskaźnik $t=\mu+1$, że zaś 2, $\mu+1$ nie są podzielne przez żaden czynnik liczby 2μ, więc mamy tu 2μ pochodnych.

Z przeprowadzonych tu rozważań wynika twierdzenie:

I. *Gdy funkcya y ma w pewnym punkcie a, μ, a nie mniej, różnych między sobą, a skończonych pochodnych, to ma i w każdym punkcie x tyleż pochodnych i jest całkowitą (przestępną). Pochodne te powtarzają się peryodycznie za stopniowem zwiększaniem rzędu różniczkowania. Każda z tych pochodnych jest jednorodnie, liniowo utworzoną z wykładniczych funkcyj* $e^{\varepsilon^s(x-\alpha)}$, $s=0,1,2,\ldots,\mu-1$, gdzie $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$, *a ze stałych spółczynników C_s mnożących te funkcye niewszystkie o wskaźnikach s niepodzielnych przez jakiś czynnik liczby μ, są zerami.*

Napiszmy — gdy już nieskończoną pochodną z przy n będącem nieskończoną wielokrotnością liczby μ, mamy w postaci (2)— samą funkcyę y w formie $y=z+(y-z)$ to widocznie:

$$y-z=(a_0-b_0)+\frac{(a_1-b_1)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{(a_{\mu-1}-b_{\mu-1})}{(\mu-1)!}(x-a)^{\mu-1}+$$
$$+\frac{(a_\mu-b_\mu)}{\mu!}(x-a)^\mu+\ldots$$

jest funkcyą $q(x-a)$ o pochodnej $=0$ na całej płaszczyźnie argumentu x, a stąd twierdzenie:

II. *Każdą funkcyę o μ różniących się między sobą pochodnych nieskończonego rzędu można przedstawić w postaci $y=z+q(x-a)$, a więc sumą dwóch funkcyj, z których pierwsza jest właśnie pochodną z dla $n=\infty=\mu.k$, $(k=\infty)$, a druga jest funkcyą o pochodnej $z=0$.*

Pd. 1. Jakie własności ma funkcya y, gdy w niej $q(x-\alpha)$ jest identycznie $=0$?

Pd. 2. Czy można y przedstawić także kształtem $\frac{d^sz}{dx^s}+q_s(x-\alpha)$ i jaką postać ma wtedy $q_s(x-\alpha)$?

Pd. 3. Wyznaczyć funkcyę y której 3, pierwsze pochodne $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ są między sobą różniącemi się funkcyami, trzecia pochodna:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=y,$$

a na miejscu $x=0$ ma być:

$$y=A_0,\quad \frac{dy}{dx}=A_1,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=A_2.$$

Pd. 4. Gdy $\varepsilon=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}}$ to funkcya:

$$(\alpha)\qquad e^{\varepsilon x}=1+\frac{\varepsilon x}{1!}+\frac{\varepsilon^2x^2}{2!}+\ldots+\frac{\varepsilon^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}-\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\frac{\varepsilon x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\ldots\text{*)}$$

zaliczy się do funkcyj mających $4n$ pochodnych:

$$e^{\varepsilon x},\ \varepsilon e^{\varepsilon x},\ \varepsilon^2e^{\varepsilon x},\ldots,\ \varepsilon^{2n-1}e^{\varepsilon x},\ -e^{\varepsilon x},\ -\varepsilon e^{\varepsilon x},\ -\varepsilon^2e^{\varepsilon x},\ldots,\ -\varepsilon^{2n-1}e^{\varepsilon x}.$$

Z równania (α) dostajemy:

$$e^{\varepsilon x}=1-\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{4n}}{(4n)!}-\frac{x^{6n}}{(6n)!}+\ldots+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}-\ldots\right)+$$
$$(\beta)\qquad +\varepsilon^2\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}-\ldots\right)+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\varepsilon^{2n-1}\left(\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}+\frac{x^{6n-1}}{(6n-1)!}-\ldots\right).$$

*) W rozwinięciu tem mamy: $2n$ wyrazów początkowych ze znakiem $+$, potem $2n$ wyrazów ze znakiem $-$, potem $2n$ wyrazów ze znakiem $+$ i t. d. bez końca.

Relacya ta odpowiada relacyi $e^{xi} = cos x + i sin x$, i z tego-to powodu nazywa Wroński*) pierwszy szereg dostawą, a wszystkie dalsze wstawami wyższego rzędu. Naznaczmy dostawę przez $K(x, n)$ to wstawy będą-to po porządku:

$$-\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} K(x, n), -\frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}} K(x, n), \ldots, -\frac{d}{dx} K(x, n).$$

ROZDZIAŁ II.

Logarytm. Łuki. Funkcya całkowita przestępna bez miejsc zerowych.

16. Określenie funkcyi logarytm. Gdy funkcya wykładnicza e^y na pewnem miejscu $y_1 \neq 0$ swego argumentu ma wartość ξ, to — ponieważ nie tylko $e^{y_1} = \xi$, ale także $e^{y_1 + 2n\pi i} = \xi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — więc stąd wnosimy, że chcąc y przedstawić w funkcyi argumentu ξ dojdziemy do funkcyi nieskończenie wielowartościowej:

(1) $$y(\xi) = y_1(\xi) + 2n\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Taką funkcyę nazywamy naturalnym logarytmem (argumentu ξ) i znaczymy ją, pisząc:

(2) $$y = log\, \xi.$$

Równaniu $e^{y(\xi)} = \xi$ można teraz nadać postać:

(3) $$e^{log \xi} = \xi,$$

a z niego, uwzględniając własności funkcyi wykładniczej, podać już naprzód niektóre charakterystyczne cechy logarytmu. Cechy te są:

1^0 $log\, 1 = 2n\pi i$, gdyż $1 = e^{2n\pi i}$;

2^0 $log 0$, $log \infty$ nie są skończone, bo funkcya wykładnicza dla skończonej wartości argumentu nie staje się nigdzie ani zerem, ani nieskończonością.

3^0 Według równania (3) mamy:

(a) $$u = e^{log\, u}, \quad v = e^{log\, v};$$

stąd wynika: $u \cdot v = e^{log\, u + log\, v}$; lecz, że z drugiej strony $uv = e^{log(uv)}$, więc z tych dwu ostatnich równań dochodzimy do relacyi:

(4) $$log(uv) = log\, u + log\, v.$$

---

*) Por. S. Dickstein. Hoene Wroński. *„Jego życie i prace"* (Kraków 1896) str. 61. Por. także: *Yvon Villarceau Théorie des sinus des ordres superieurs.* C. R. T. 86. (1878.) str. 1160, 1216, 1287.

Luis Olivier. *„Bemerkungen über eine Art von Functionen, welche ähnliche Eigenschaften haben, wie der Cosinus und Sinus.* C. J. T. 2. str. 243.

Podobnie wywnioskujemy, że:

(5) $$log(v_1.v_2...v_m)=log\,v_1+log\,v_2+...+log\,v_m.$$

4⁰ W razie $v_1=v_2=...=v_m=v$, mamy:

(6) $$log\,v^m=m.log\,v.$$

Gdy $\frac{m}{n}$ jest wymierną, ale niecałkowitą liczbą, to $\left(u^{\frac{m}{n}}\right)^n=u^m$, a więc $log\,u^m=m.log\,u=n.log\,u^{\frac{m}{n}}$, a z tego wynika:

(7) $$log\,u^{\frac{m}{n}}=\frac{m}{n}log\,u.$$

Podobnie — gdy r jest liczbą niewymierną, a pojmujemy ją jako granicę pewnego nieskończonego szeregu liczb wymiernych — dostaniemy:

(8) $$log\,u^r=r\,log\,u.$$

5⁰ Z równań (a) — stosując prawidło dodawania funkcyi wykładniczej — mamy dalej: $u/v=e^{log\,u-log\,v}$; lecz, że równocześnie trzeba położyć $u/v=e^{log\frac{u}{v}}$, więc stąd wynika:

(9) $$log\,(u/v)=log\,u-log\,v.$$

Gdy tu $u=1$, a położymy $log\,1=0$*), to mieć będziemy:

$$log\,v^{-1}=-log\,v.$$

Zastąpmy tu v przez v^r, gdzie r jest jakąkolwiek dodatnią rzeczywistą liczbą, to będzie: $log\,v^{-r}=-log\,v^r$ a stąd — podług (8) — dostaniemy:

(10) $$log\,v^{-r}=-r\,log\,v.$$

W równaniach (4)—(10) mamy zasadnicze własności funkcyi $log\,\xi$; wynikają one wszystkie z relacyi (4) zwanej funkcyjnem równaniem logarytmu.

17. Szereg logarytmiczny. Zbadajmy teraz, czy $log\,\xi$ jest analityczną funkcyą i postarajmy się utworzyć jeden jej element. Biorąc pochodnę równania (3) mamy:

$$e^{log\,\xi}.\frac{d\,log\,\xi}{d\xi}=1,\text{ czyli }\frac{d\,log\,\xi}{d\xi}=\frac{1}{\xi}.$$

Pochodna ta jest więc bardzo prostą wymierną ułamkową funkcyą z miejscem nieskończonościowem $\xi=0$. Rozważmy ją jednak w otoczeniu punktu $\xi=1$ i połóżmy w tym celu $\xi=1+x$, to mieć będziemy:

*) Przez to nie tracimy nic na ogólności, bo pozostaje jeszcze $-log\,v$, który pojmować trzeba jako opatrzony dodatkiem $2n\pi i$, $n=0, \pm1, \pm2,...$

$$(1) \qquad \frac{d\,log(1+x)}{dx}=\frac{1}{1+x}.$$

Zakładając $|x|<1$, dostaniemy:

$$\frac{d\,log(1+x)}{dx}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots, \text{ a stąd:}$$

$$log(1+x)=C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots, \ |x|<1.$$

Gdy $x=0$, to $C=log\,1=2n\pi i$; stała C ma więc tu być dowolną wielokrotnością peryodu $\pm 2\pi i$. Opuszczając ten dodatek — obierając zatem $n=0$ — mamy funkcyę:

$$(2) \quad log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=L(x)$$

określoną w jej tak zwanych **g ł ó w n y c h w a r t o ś c i a c h** wewnątrz koła K [fig. 1.] o środku w punkcie $\xi=1$, a o obwodzie przechodzącym przez $\xi=0$.

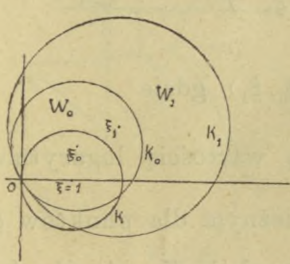


Fig. 1.

Szereg $L(x)$ jest więc elementem jednej (głównej) gałęzi nieskończenie wielowartościowej funkcyi:

$$log\,\xi=log\,(1+x).$$

W argumencie ξ mamy w miejsce (2) rozwinięcie:

$$(3) \qquad log\,\xi=\frac{\xi-1}{1}-\frac{(\xi-1)^2}{2}+\frac{(\xi-1)^3}{3}-\ldots=L(\xi\,|\,1),$$

a wnętrze koła K określa teraz nierówność $|\xi-1|<1$. We wnętrzu tego koła obierzmy dowolny punkt ξ_0 i postarajmy się o przeprowadzenie elementu $L(\xi\,|1)$ do otoczenia tego punktu. Połóżmy w tym celu:

$$\xi=\xi_0+h=\xi_0\left(1+\frac{h}{\xi_0}\right)=\xi_0\left(1+\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right)$$

to stosując tu własność (4) art. poprzedz., mamy:

$$log\,\xi=log\,\xi_0+log\left(1+\frac{h}{\xi_0}\right)=log\,\xi_0+log\left(1+\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right). \text{ Zakładając:}$$

$$(4) \qquad |\xi-\xi_0|<|\xi_0|$$

możemy $log\left(1+\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right)$ rozwinąć podług (2) na szereg:

$$L\left(\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right)=\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right)^2+\ldots$$

tak, że ostatecznie mieć będziemy:

$$(5) \qquad log\,\xi=log\,\xi_0+L\left(\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right)=L(\xi\,|\,1,\ \xi_0),$$

gdzie $log\,\xi_0 = L(\xi_0 | 1)$ jest główną wartością logarytmu w punkcie ξ_0. Rozwinięcie (5) zbieżnem jest dla ξ określonych nierównością (4), a więc we wnętrzu koła K_0, którego środek mamy w punkcie ξ_0, a którego obwód przechodzi znowu przez $\xi = 0$. Wartości, jakie to rozwinięcie daje w kole K_0 są wartościami głównemi logarytmu.

Pewna część W_0 owego koła K_0 będzie już leżeć poza K, a stąd pochodzi, że szeregami $L(\xi | 1)$, $L(\xi | 1, \xi_0)$ mamy funkcyę $log\,\xi$ w jej głównych wartościach określoną w obszarze $K + W_0$. W części W_0 obierzmy dowolny punkt ξ_1 i połóżmy:

$$\xi = \xi_1 + h = \xi_1\left(1 + \frac{h}{\xi_1}\right) = \xi_1\left(1 + \frac{\xi - \xi_1}{\xi_1}\right),$$

to dostaniemy tu znowu:

$$log\,\xi_1 = log\,\xi_1 + L\left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_1}\right) = L(\xi | 1, \xi_0, \xi_1), \text{ gdzie}$$

$log\,\xi_1 = log\,\xi_0 + L\left(\dfrac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_0}\right)$ jest tu główną wartością logarytmu w punkcie ξ_1, a $L\left(\dfrac{\xi - \xi_1}{\xi_1}\right)$ jest szeregiem zbieżnym dla punktów ξ spełniających nierówność $|\xi - \xi_1| < |\xi_1|$ a więc w kole K_1 o środku ξ_1, a o obwodzie przechodzącym przez $\xi = 0$. Gdy część W_1 tego koła leży już poza obszarem $(K + W_0)$ to rozwinięciami $L(\xi | 1)$, $L(\xi | 1, \xi_0)$, $L(\xi | 1, \xi_0, \xi_1)$ mamy już funkcyą $log\,\xi$ — zawsze w jej głównych wartościach — określoną w obszarze $(K + W_0 + W_1)$.

Postępując tak dalej, możemy w każdym razie dojść do pewnego rozwinięcia ujmującego dowolny punkt ξ_n w swój zakres zbieżności. Przez to poznajemy główną wartość logarytmu w tym punkcie, a mając ją, dochodzimy potem do szeregu:

$$log\,\xi = log\,\xi_n + L\left(\frac{\xi - \xi_n}{\xi_n}\right) = L(\xi | 1, \xi_0, \ldots, \xi_n)$$

określającego główne wartości logarytmu w kole K_n o środku w punkcie ξ_n, a o obwodzie przechodzącym przez $\xi = 0$.

Przytem zauważyć potrzeba, że w tym pochodzie są punkta $1, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ w s z y s t k i e między sobą różne i że elementami $L(\xi | 1)$, $L(\xi | 1, \xi_0), \ldots$, określamy statecznie j e d n ą tylko gałąź g ł ó w n ą funkcyi $log\,\xi$. Funkcyjne równanie było tu wielkiem ułatwieniem w tworzeniu przeprowadzeń.

18. Monogeniczność logarytmu. Jego punkta osobliwe. Pytanie zachodzi, czy funkcya $log\,\xi$ — mimo swej wielowartościowości — jest monogeniczną. Czy więc są drogi, po których wychodząc z pewnego punktu a_1, po utworzeniu elementu $l(a_1)$ dla jego otoczenia, dostaniemy po powrocie do tego samego punktu a_1 element logarytmu różny już od pierwszego, a więc należący do innej gałęzi tej funkcyi?

Aby to zbadać, przyjmijmy, że mamy dowolną zamkniętą drogę, zamknięty wielobok, który dla uproszczenia niech będzie sześciobokiem $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_1$ (fig. 2.). W jego wnętrzu nie mieści się punkt $\xi=0$ a samą funkcyę $log\, \xi$ przeprowadzamy od a_1 do a_2, od a_2 do a_3, ..., albo bez pośrednictwa nowych punktów, albo — jeżeli potrzeba — to za pośrednictwem tylko takich punktów, które leżą na bokach wieloboku $a_1 a_2 ...$

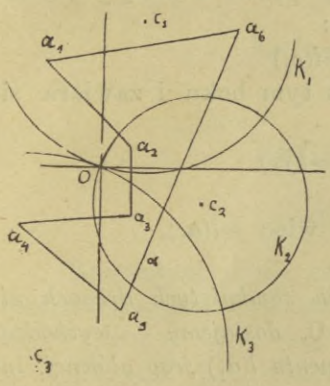


Fig. 2.

Przeprowadzenia elementu $l(a_1)$ do punktów $a_2, a_3, ...$, naznaczmy odpowiednio przez $l(a_1 a_2)$, $l(a_1 a_2 a_3)$, ...

Mając to, możemy na płaszczyźnie argumentu ξ nakreślić kilka kół n. p. trzy koła K_1, K_2, K_3 o te własności, że 1°) obwód każdego z tych kół przechodzi przez $\xi=0$, 2°) koła K_1, K_2 i koła K_2, K_3 przykrywają się częściowo, a wszystkie trzy razem mieszczą w sobie sześciobok $a_1 a_2 a_3 ...$

Gdy środki tych kół są c_1, c_2, c_3, a elementami głównej gałęzi logarytmu w otoczeniach tych punktów są:

(1) $$l(c_1),\ l(c_2),\ l(c_3),$$

to każdy z elementów $l(a_1 a_2 ... a_\nu)$, $\nu=1, 2, 3, ...$ można w najbliższem przynajmniej otoczeniu punktu a_ν zastąpić przez ten z elementów (1), w którego kole zbieżności (K_1, K_2 lub K_3) mieści się a_ν.

Dalej przypomnieć trzeba, że gdy w jednem z kół K_s, ($s=1, 2, 3$) mamy dwa różne, lub spadające na siebie punkta a, b to przeprowadzanie z punktu a do b po najrozmaitszych drogach mieszczących się całkowicie w K_s daje zawsze ten sam element w otoczeniu punktu b.

Na podstawie tych uwag możemy [patrz fig. 2.] położyć:

$$l(a_1)=l(a_1 a_2)=l(c_1)$$

bo a_1, a_2 leżą wewnątrz K_1. Lecz także mamy:

$$l(a_1 a_2)=l(c_2)$$

gdyż punkt a_2 leży już równocześnie i we wnętrzu koła K_2. Dalej mamy:

$$l(a_1 a_2)=l(a_1 a_2 a_3)=l(c_2),$$

bo a_2, a_3 leżą wewnątrz K_2.

Lecz także jest:

$$l(a_1 a_2 a_3)=l(c_3), \quad \text{a dalej:}$$

$$l(a_1 a_2 a_3)=l(a_1 a_2 a_3 a_4)=l(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)=l(c_3).$$

Gdy dalej na boku $a_5 a_6$ obierzemy punkt α leżący równocześnie w K_3 i w K_2, to mieć będziemy:

$$l(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \alpha)=l(c_3)=l(c_2)$$

a gdy β jest znowu nowym punktem na tym boku i zawiera się równocześnie w K_2 i K_1, to mamy:

$$l(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \alpha\beta)=l(c_2)=l(c_1)$$

i wreszcie:

$$l(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \alpha\, \beta\, a_6 a_1)=l(c_1), \text{ a więc } =l(a_1),$$

a to znaczy:

I. *Przeprowadzając* $\log \xi$ *po dowolnych zamkniętych drogach nie zawierających w swem wnętrzu punktu* $\xi=0$, *dostajemy — wychodząc z elementu* $l(a_1)$ *jego głównej, lub nawet innej gałęzi — po powrocie znowu ten sam element*:

$$l(a_1 a_2 \ldots a_n a_1)=l(a_1).$$

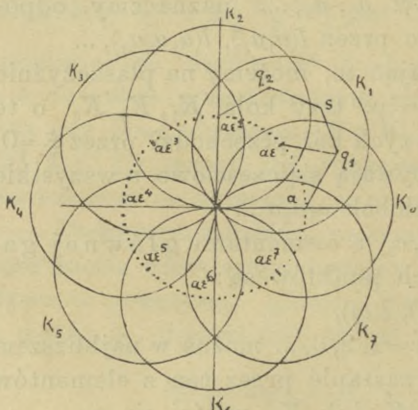


Fig. 3.

Inny już będzie wynik gdy zamknięta droga okrąży punkt $\xi=0$*). Aby to wykazać, obierzmy dowolny punkt a [fig. 3.] — na rysunku jest nim punkt leżący na osi pierwszorzędnej — i utwórzmy dla jego otoczenia element:

$$l(a)=\log a+L\left(\frac{\xi-a}{a}\right)$$

głównej wartości logarytmu. Zakresem zbieżności tego elementu jest koło K_0 (mające środek a, a przechodzące obwodem przez punkt $\xi=0$).

Obierzmy dalej punkta:

$$a\varepsilon, a\varepsilon^2, a\varepsilon^3, \ldots, a\varepsilon^8, \text{ gdzie } \varepsilon=e^{\frac{\pi i}{4}}$$

i utwórzmy elementa: $l(a\varepsilon)$, $l(a\varepsilon^2), \ldots, l(a\varepsilon^8)$, zbieżne w kołach $K_1, K_2, \ldots, K_8=K_0$.

*) Zamkniętą drogą okrąża się punkt $\xi=0$ w kierunku dodatnim, gdy po tej drodze krocząc, mamy $\xi=0$ po lewej ręce.

Ponieważ $a\varepsilon$ mieści się w kole K_0, $a\varepsilon^2$ we wnętrzu koła K_1, ..., więc można tu będzie wyprowadzić bezpośrednio $l(a\varepsilon)$ z $l(a)$, $l(a\varepsilon^2)$ z $l(a\varepsilon)$, ... Tworząc rzeczywiście te przeprowadzenia dostaniemy po porządku:

$$l(a\varepsilon)=log\, a\varepsilon+L\left(\frac{\xi-a\varepsilon}{a\varepsilon}\right)=log\, a+\frac{\pi i}{4}+L\left(\frac{\xi-a\varepsilon}{a\varepsilon}\right),$$

$$l(a\varepsilon^2)=log\, a+2.\frac{\pi i}{4}+L\left(\frac{\xi-a\varepsilon^2}{a\varepsilon^2}\right),$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$l(a\varepsilon^7)=log\, a+7\frac{\pi i}{4}+L\left(\frac{\xi-a\varepsilon^7}{a\varepsilon^7}\right),$$

$$l(a\varepsilon^8)=log\, a+2\pi i+L\left(\frac{\xi-a}{a}\right).$$

Rozważana więc droga zamknięta $S=(a, a\varepsilon, a\varepsilon^2, ..., a\varepsilon^8)$ sprowadza logarytm z gałęzi jego głównych wartości ($log\, \xi$) do gałęzi innej o wartościach ($log\, \xi+2\pi i$). Powtórne prowadzenie logarytmu po tej drodze doprowadziłoby do gałęzi o wartościach ($log\, \xi+4\pi i$) i t. d. Przeprowadzenie po tej samej drodze, ale w przeciwnym kierunku da gałęzie o wartościach ($log\, \xi-2\pi i$), ($log\, \xi-4\pi i$), ...

Pytanie zachodzi, czy pod tym względem każda inna zamknięta droga, okalająca punkt $\xi=0$, a przechodząca przez a ma taki sam wpływ na przeprowadzenie logarytmu.

Aby to rozstrzygnąć obierzmy dowolny punkt q_1 zawierający się równocześnie w kołach K_0, K_1. Drogę $a(a\varepsilon)$ można w takim razie zmienić na drogę $aq_1(a\varepsilon)$. Dalej (w kole K_1) można będzie drogę $\overline{a\varepsilon, a\varepsilon^2}$ zamienić na $(a\varepsilon)\,q_1 sq_2(a\varepsilon^2)$, jeżeli tylko q_2 w kole K_1 wybrano. Można więc położyć:

$$l(a\varepsilon^2)=l(aq_1(a\varepsilon)q_1sq_2(a\varepsilon_2))=l(aq_1sq_2(a\varepsilon^2)) \qquad \text{i t. d.}$$

Z tego wynika, że drogę S można zamienić na:

$$S'=(aq_1\, q_2 ... q_8 a),$$

w której punkt q_ν leży równocześnie w kołach $K_{\nu-1}$, K_ν, $\nu=0, 1, 2, ...$ Drogę S' będzie można znowu — trzymając się zasad przeprowadzania szeregów — zmienić na inną przechodzącą przez punkt a i t. d. bez końca. Że zaś punkt a jest dowolny, więc stąd wynika:

II. *Przeprowadzanie logarytmu po jakiejkolwiek drodze okrążającej punkt $\xi=0$, daje możność przejścia z którejkolwiek jego gałęzi do każdej gałęzi innej. Logarytm jest więc funkcyą monogeniczną.*

Każdą taką drogę okrążamy równocześnie w przeciwnym kierunku punkt $\xi=\infty$, [T. I., art. 34.], a wskutek tego możemy powiedzieć, że okrążanie punktów osobliwych $\xi=0$, $\xi=\infty$ daje czem raz nowe gałęzie logarytmu.

Uwaga 1. Przy kilkakrotnem okrążaniu punktu $\xi=0$ nie potrzebuje okrążająca druga droga być identyczną z pierwszą, trzecia być identyczną z pierwszą i drugą i t. d.

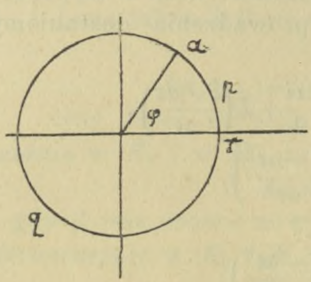


Fig. 4.

Uwaga 2. Z powodu, że przez jedno okrążenie punktu $\xi=0$ nabiera logarytm dodatek $+2\pi i$, lub $-2\pi i$, określimy dwie wartości logarytmu, różniące się w tym samym punkcie ξ o $+2\pi i$, lub $-2\pi i$ jako należące do dwóch sąsiednich gałęzi.

Uwaga 3. Gdy punkt $a=re^{\varphi i}$, to także

$$a=re^{-(2\pi-\varphi)i},$$

co wskazuje, że z punktu r (fig. 4.) doszliśmy do punktu a albo po łuku rpa, albo po łuku rqa. Stosownie do tego wyboru łuku mamy raz:

$$log\, a=log\, r+\varphi i, \quad \text{a drugi raz:}$$

$$log\, a=log\, r+\varphi i-2\pi i.$$

Są-to więc wartości z dwóch sąsiednich gałęzi.

Punkta $\xi=0$, $\xi=\infty$, których okrążanie dozwala przejścia z gałęzi do gałęzi w logarytmie, nazywamy punktami rozgałęzienia tej funkcyi. Granicę, do jakiej w punkcie $\xi=0$ zdąża logarytm, obliczymy, kładąc w szeregu:

$$(6) \qquad log\,\xi=\frac{\xi-1}{1}-\frac{(\xi-1)^2}{2}+\frac{(\xi-1)^3}{3}-\dots$$

$\xi=0$. Otóż dla takiej wartości mamy:

$$\lim_{\xi=0} log\,\xi=-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\dots, \quad \text{a więc:}$$

$$(a) \qquad log\, 0=-\infty.$$

Połóżmy w (6) $\frac{1}{\xi}$ za ξ, to z uwagi, że $log\frac{1}{\xi}=-log\,\xi$, dostajemy:

$$(6') \qquad log\,\xi=-\frac{\frac{1}{\xi}-1}{1}+\frac{\left(\frac{1}{\xi}-1\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{1}{\xi}-1\right)^3}{3}+\dots$$

a to rozwinięcie zbieżne jest dla $1\leq|\xi|<\infty$, określa zatem logarytm w otoczeniu punktu $\xi=\infty$. Połóżmyż w (6') $\xi=\infty$, to mieć będziemy:

$$\lim_{\xi=\infty} log\,\xi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots, \quad \text{a więc:}$$

$$(b) \qquad log\,\infty=\infty.$$

Równania (a), (b) określają granice, do których logarytm zdąża w swych punktach osobliwych.

Aby te punkta porównać z punktami szczególnymi funkcyj jednoznacznych, pomnóżmy szereg (6) przez ξ, przedstawiając to ξ w postaci $(\xi-1)+1$. Na ten iloczyn dostaniemy:

$$\xi.log\,\xi=\frac{\xi-1}{1}+\frac{(\xi-1)^2}{1.2}-\frac{(\xi-1)^3}{2.3}+\frac{(\xi-1)^4}{3.4}-\dots$$

Połóżmy tu $\xi=0$, to dostaniemy:

$$\lim_{\xi=0}\xi.log\,\xi=-1+\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots\right).$$

Że zaś szereg w nawiasie $=1$, więc mamy: $\lim\limits_{\xi=0}\xi.log\,\xi=0$, a analogicznie: $\lim\limits_{\xi=\infty}\frac{1}{\xi}log\,\xi=0$.

Punkta $\xi=0$, $\xi=\infty$ są zatem przedewszystkiem zupełnie różne od punktów istotnie osobliwych funkcyj jednoznacznych. Ale i od punktów nieskończonościowych takiej funkcyi są one odmienne. Gdy bowiem punkt $\xi=0$ ma być takim punktem funkcyi jednoznacznej $f(\xi)$, to z iloczynów: $\xi f(\xi)$, $\xi^2 f(\xi)$, ... pierwszy z pewnością nie ma być zerem, a dopiero od pewnego dalszego począwszy wszystkie już są zerami. To samo odnosi się i do punktu $\xi=\infty$.

19. Zastosowanie do równania: $y^n=(x-a)...(x-a_m)$. Własność logarytmu wyrażoną w tw. II. [art. poprzedzający], możemy zaraz zastosować.

Wiadomo [T. I., art. 74. (B)], że równanie algebraiczne:

(1) $$y^n=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m)$$

z $n>0$ całkowitem daje na rozwiązanie n-wartościową funkcyę:

(2) $$y=[x-a_1.x-a_2...x-a_m]^{\frac{1}{n}}\varepsilon^s,$$

gdzie: $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $s=0, 1, 2, ..., n-1$.

Biorąc jedną z gałęzi tej funkcyi n. p. gałąź:

(3) $$y=[x-a_1.x-a_2...x-a_m]^{\frac{1}{n}}$$

trzeba i tu zapytać, czy taka funkcya jest monogeniczną. Aby to rozstrzygnąć, napiszmy (3) w postaci:

$$y=e^{\frac{1}{n}log(x-a_1)}e^{\frac{1}{n}log(x-a_2)}...e^{\frac{1}{n}log(x-a_m)}=u_1.u_2...u_m$$

to przeprowadzenie gałęzi y po każdej drodze w płaszczyźnie (x) można tu zastąpić przeprowadzeniem czynników $u_1, u_2, ..., u_m$, albo raczej ich wykładników.

*

Z tego odrazu wyniknie, że przez okrążania jednego z punktów a_s, $s=1, 2, ..., m$ po takiej drodze, że już wszystkie pozostałe punkta $a_{s'}$, są zewnątrz obszaru zamkniętego tą drogą można z każdej dowolnej gałęzi funkcyi dojść do każdej innej.

Załóżmy bowiem, że x znajduje się dostatecznie blisko punktu a_p, to a_p przechodzi po pierwszem okrążeniu (w dodatnim kierunku) na:

$$e^{\frac{1}{n}log(x-a_p)+\frac{2\pi i}{n}}=u_p\varepsilon,$$

po drugiem okrążeniu na

$$e^{\frac{1}{n}log(x-a_p)+2.\frac{2\pi i}{n}}=u_p\varepsilon^2,$$

po $(n-1)^{em}$ i n^{tem} okrążeniu na:

$$u_p.\varepsilon^{n-1},\quad u_p\varepsilon^n=u_p,$$

podczas gdy inne czynniki $u_1, u_2, ..., u_{p-1}, u_{p+1}, ..., u_m$ wcale się nie zmieniają. Okrążania w ujemnym kierunku dają:

$$u_p\varepsilon^{-1},\ u_p\varepsilon^{-2},\ ...,\ u_p\varepsilon^{-(n-1)},\ u_p\varepsilon^{-n}=u_p,$$

a i tu inne czynniki $u_1, u_2, ..., u_{p-1}, u_{p+1}, ..., u_m$ nie doznają zmiany. To zmienianie się czynnika u_p przez okrążania daje po porządku w pierwszym razie:

$$(\alpha)\qquad y,\ y\varepsilon,\ y\varepsilon^2,\ ...,\ y\varepsilon^{n-1},\ y,\ ...,$$

a w drugim razie:

$$(\beta)\qquad y,\ y\varepsilon^{-1},\ y\varepsilon^{-2},\ ...,\ y\varepsilon^{-(n-1)},\ y,\ ...,$$

co dowodzi, że funkcya y jest monogeniczną.

Z tego właśnie powodu, że okrążanie punktów $a_1, a_2, ...$ daje możność przejścia z gałęzi do gałęzi nazywamy te punkta punktami rozgałęzienia (tutaj: n-krotnymi) funkcyi algebraicznej y.

Charakteryzują się one jeszcze i tem, że: 1⁰) w każdym z nich wszystkie gałęzie funkcyi mają wspólną wartość $=0$, i 2⁰) w otoczeniu takiego punktu nie można żadnej gałęzi określić elementem regularnym. Połóżmy bowiem w (3) $x=a_1+h$, to mamy:

$$(4)\qquad y=h^{\frac{1}{n}}[(a_1-a_2+h)...(a_1-a_m+h)]^{\frac{1}{n}}=h^{\frac{1}{n}}.\mathfrak{P}(h).\text{*)}$$

co widocznie nie jest zwykłym szeregiem potęgowym. Podobne rozwinięcia dostaniemy dla otoczeń punktów a_2, a_3 ...

Co się tyczy wykonanych tu okrążeń, to zauważyć jeszcze potrzeba, że n razy powtórzone okrążenie w jednym kierunku prowadzi zawsze do gałęzi, z której się wyszło; można więc je zaniedbać (uważać za niebyłe). To wynika z peryo-

---

*) Szereg $\mathfrak{P}(h)$ będzie zbieżny dla $|h|$ mniejszych od najmniejszej z wartości $|a_1-a_2|, |a_1-a_3|, ..., |a_1-a_m|$.

dycznie powtarzających się n gałęzi w szeregu (α) i (β), poczynając od którejkolwiek.

Przyjmijmy teraz, że z dowolnego punktu x, różnego od punktów $a_1\, a_2, \ldots$ wychodząc, okrążamy naprzód t_1 razy punkt a_1, za powrotem do x okrążamy t_2 razy punkt a_2 i t. d. W takim razie — po t_m-razowym okrążeniu punktu a_m i po powrocie do x dostajemy gałąź: $y'=y\varepsilon^{t_1+t_2+\ldots+t_m}$, gdzie t_s mogą być i dodatnie i ujemne (według tego, czy okrążono punkt a_s w dodatnim czy ujemnym kierunku); wszystkie $|t_s|$ są $<n$, a $t_s=0$ wskazują, że a_s wcale nie okrążano.

W razie $t_1+t_2+\ldots+t_m\equiv 0$ (*mod.* n) mamy identycznie $y'=y$.

Gdy uwzględnimy taką drogę zamkniętą, która zamyka punkta:

(5) $$a_{k_1},\ a_{k_2},\ \ldots,\ a_{k_\lambda},$$

a pozostałe punkta leżą zewnątrz obszaru zamkniętego tą drogą, to tę drogę obchodząc raz, okrążamy każdy z λ punktów (5) raz tylko, a wskutek tego z gałęzi y dostajemy tu gałąź: $y'=y.\varepsilon^\lambda$. Jeżeli $\lambda=m$, a więc bierzemy pod uwagę drogę okrążającą wszystkie punkta $a_1, a_2, a_3, \ldots$, to dostajemy: $y'=y\varepsilon^m$. Tę drogę możemy określić jako okrążającą punkt $x=\infty$ i powiedzieć:

Punkt $x=\infty$ jest zwyczajnym funkcyi y, gdy $m\equiv 0$ (*mod* n), jest zaś jej wielokrotnym, gdy m *nie*$\equiv 0$ (*mod* n). W tym ostatnim razie dostajemy po jednem okrążeniu, dwóch okrążeniach, ... punktu $x=\infty$ po porządku gałęzie:

(γ) $$y,\ y\varepsilon^m,\ y\varepsilon^{2m},\ \ldots,\ y\varepsilon^{(n-1)m},$$

a te — gdy m jest pierwsze względem n — są wszystkie między sobą różne, a punkt $x=\infty$ jest n-krotnym punktem, jak wszystkie punkta $a_1, a_2, \ldots$ Gdy przeciwnie m, n mają największy wspólny podzielnik k, tak, że w $m=k.m_1$, $n=kn_1$ już m_1, n_1 są względem siebie pierwsze, to $\varepsilon^m=e^{\frac{2\pi i m_1}{n_1}}$, a w szeregu ($\gamma$) już po n_1 obrotach dochodzimy do y napowrót.

Wychodząc z $y\varepsilon^h$, gdzie h *nie*$\equiv 0$ (*mod* m), a więc z gałęzi nie mieszczącej się w (γ) dojdziemy i tu po n_1 okrążeniach znowu do $y\varepsilon^h$. Punkt $x=\infty$ uważać wtedy trzeba za punkt, w którym spadło na siebie k punktów n_1-krotnych funkcyi y.

W otoczeniu punktu $x=\infty$ mamy:

$$y=x^{\frac{m}{n}}\left[(1-\frac{a_1}{x}).(1-\frac{a_2}{x})\ldots(1-\frac{a_m}{x})\right]^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{m}{n}}\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

a to rozwinięcie zawiera widocznie **tylko wtedy** same całkowite potęgi, gdy $m\equiv 0$ (*mod* n).

W ten sposób za pomocą własności logarytmu obeznaliśmy się w zupełności z funkcyą algebraiczną określoną równaniem (1). Ma ona n gałęzi **monogenicznie z sobą połączonych**, a ilość wszystkich dróg, które dozwalają z którejkolwiek z jej gałęzi y przyjść do gałęzi $y\varepsilon^\mu$ jest identyczną z ilością rozwiązań kongruencyi:

$$t_1+t_2+\ldots+t_m\equiv\mu \ (\textit{mod}\ n)$$

$$0\leqq|t_1|<n,\ 0\leqq|t_2|<n,\ \ldots,\ 0\leqq|t_m|<n.$$

Pd. 1. Określić własności funkcyi: $y=\sqrt{x-a_1.x-a_2\ldots x-a_m}$ przy m parzystem i nieparzystem.

Pd. 2. Okazać, że funkcye:

$$y=\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}=e^{\frac{1}{n}(log(x-a)-log(x-b))},$$

$$y=\sqrt[n_1]{\frac{x-a_1}{x-b_1}}\cdot\sqrt[n_2]{\frac{x-a_2}{x-b_2}}\cdot\sqrt[n_3]{\frac{x-a_3}{x-b_3}},$$

$$y-\sqrt[n]{R(x)}=\sqrt[n]{\frac{x-a_1.x-a_2...x-a_\mu}{x-b_1.x-b_2...x-b_\nu}},$$

są monogeniczne. Podać bliżej ich własności.

20. Funkcye ***arctg x, arccotg x.*** Jak w ostatnim artykule posłużył logarytm do obeznania się z własnościami szczególnych funkcyj algebraicznych, tak z drugiej strony można będzie — utworzywszy nowe przestępne funkcye — opanować całkowity ich przebieg, gdy się je tylko zdoła wyrazić przez logarytm.

Początkiem tych nowych funkcyj będzie odwracanie funkcyj trygonometrycznych — tak, jak logarytm był odwróceniem funkcyi wykładniczej.

Połóżmyż: $x=sin u$ i nazwijmy $u=arc sin x$ (łuk, którego wstawa $=x$), to mamy:

$$\frac{dx}{du}=cos u=\pm\sqrt{1-x^2}, \text{ a stąd:}$$

$$(1)\qquad \frac{du}{dx}=\frac{d\,arc sin x}{dx}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Analogicznie nazywając w równaniach:

$$x=cos u,\ x=tg u,\ x=cotg u,\ x=sec u,\ x=cosec u,$$

odpowiednio:

$$u=arc cos x,\ u=arc tg x,\ u=arc cotg x,\ u=arc sec x,\ n=arc cosec x$$

dostajemy:

$$(2)\qquad \begin{gathered}\frac{d\,arc cos x}{dx}=\mp\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d\,arc tg x}{dx}=\frac{1}{1+x^2},\quad \frac{d\,arc cotg x}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}\\ \frac{d\,arc sec x}{dx}=\frac{1}{\pm x\sqrt{x^2-1}},\quad \frac{d\,arc cosec x}{dx}=\mp\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.\end{gathered}$$

Łuki *(arcus)* funkcyj trygonometrycznych są-to więc funkcye których pochodne wyrażają się bardzo prostemi i znanemi funkcyami.

Z nich pochodna funkcyi $arc tg x$ i funkcyi $arc cotg x$ jest wymierną o jedynych jednokrotnych miejscach nieskończonościowych $x=\pm i$.

Założmyż $|x|<1$, to mamy:

(3) $$\frac{d\, arc\, tg\, x}{dx}=1-x^2+x^4-x^6+,.., \text{ a stąd:}$$

$$u=arc\, tg\, x=C+\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...\right].$$

Gdy ma być $x=tg\, u=0$, to $u=n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, ...$ Z tego wynika, że $C=n\pi$ i że:

(4) $$u=arc\, tg\, x=n\pi+\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...\right].$$

Funkcya $arc\, tg\, x$ jest więc znowu funkcyą nieskończenie wielowartościową. Dwie różne jej gałęzie różnią się od siebie zawsze o pewną wielokrotność liczby π, a w otoczeniu punktu $x=0$, mamy na każdej gałęzi regularny element (4). Gdy $n=0$, mamy:

(5) $$u=arc\, tg\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...=x.\mathfrak{P}(x),$$

a pytanie zachodzi, czy tu z tego elementu można będzie przez przeprowadzenie dojść do każdej innej gałęzi?

Zauważmy, aby to roztrzygnąć, rozwinięcie:

$$log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-..., \quad |x|<1$$

[art. 17., (2).] i zmieńmy w niem x na $-x$. Wtedy mieć będziemy:

$$log(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-..., \text{ a stąd:}$$

(6) $$log\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...\right).$$

Połóżmy tu xi za x, to będzie:

(7) $$\frac{1}{2i}log\frac{1+xi}{1-xi}=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...,$$

a stąd wynika, że widocznie:

(8) $$u=arc\, tg\, x=\frac{1}{2i}log\frac{1+xi}{1-xi}=\frac{1}{2i}[log(1+xi)-log(1-xi)],$$

gdzie logarytmu użyto z jego głównej gałęzi.

Ta formuła jest bardzo ważną; za jej-to bowiem pomocą, skoro już własności logarytmu znamy, obznajomić się możemy dokładnie z funkcyą $arc\, tg\, x$ w całym nieograniczonym obszarze argumentu x i wykazać jej monogeniczność.

Ponieważ $1+xi=0$ dla $x=i$, $1-xi=0$ dla $x=-i$, więc stąd wnosimy:

I. *Przeprowadzając* $arc\, tg\, x=u$ *po drodze zamkniętej obejmującej tylko punkt* $x=+i$, *dostajemy* $u+\pi$. *Okrążanie drugiego punktu* $x=-i$ *daje* $u-\pi$. *Punkta* $+i$, $-i$ *są więc dla tej funkcyi punktami rozgałę-*

zienia; przez okrążanie ich z osobna dojść możemy z gałęzi u do każdej innej dowolnej gałęzi.

Droga zamknięta okrążająca równocześnie obydwa punkta $+i$, $-i$, nie prowadzi do żadnej innej gałęzi. (Po niej $\frac{1}{2i}log(1+xi)$ nabiera $+\pi$, a $-\frac{1}{2i}log(1-xi)$ nabiera $-\pi$).

Drogę tę uważać można za okalającą punkt $x=\infty$, który tu widocznie nie jest wielokrotnym.

W jego otoczeniu ($|x|>1$) mamy:

$$u=\frac{1}{2i}log\frac{\frac{1}{xi}+1}{\frac{1}{xi}-1}=\frac{1}{2i}log\frac{1-\frac{1}{x}i}{-1-\frac{1}{x}i}=\frac{1}{2i}log(-1)-\frac{1}{2i}log\frac{1+\frac{1}{x}i}{1-\frac{1}{x}i}$$

$$=\frac{2n+1}{2}\pi-arc\,tg\frac{1}{x}=\frac{2n+1}{2}\pi-\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).\text{*)}$$

Że zaś $arc\,tg\frac{1}{x}=arc\,cotg\,x$, więc stąd — gdy jeszcze $n=0$ położymy — mieć będziemy:

$$arc\,cotg\,x=\frac{\pi}{2}-x\mathfrak{P}(x)=\frac{\pi}{2}-arc\,tg\,x$$

co i odrazu można było wywnioskować.

Z tej formuły wnosimy:

I. *Funkcya arc cotg x zachowuje się pod względem punktów wielokrotnych i dróg zamkniętych, po których z jednej jej gałęzi można przejść do drugiej tak samo, jak funkcya arc tg x.*

Rozwinięcie (5) można także tak napisać:

$$u=tg\,u-\frac{1}{3}tg^3u+\frac{1}{5}tg^5u-\dots$$

Jestto szereg Leibnitza, a gdy tu $u=\frac{\pi}{4}$, a więc $tg\,u=1$ położymy, mieć będziemy:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots=2\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\dots\right]. \tag{9}$$

Uwzględnijmy te wartości w relacyi (8), to będzie:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2i}log\frac{1+i}{1-i}, \tag{10}$$

*) Jestto widocznie element regularny i w punkcie $x=\infty$ i w jego otoczeniu.

co rzeczywiście jest prawdą, gdyż prawą stronę ostatniego równania napisać można:

$$\frac{1}{2i} log \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1}{2i} log\, i = \frac{1}{2i} log\, e^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{\pi}{4}.$$

21. Funkcye ***arc sin x, arc cos x.*** Z równania (1) [art. poprz.] — gdy tam $|x| < 1$ założymy — dostaniemy:

$$\frac{d\, arc\, sin\, x}{dx} = \pm\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2!2^2}x^4 + \frac{1.3.5}{3!2^3}x^6 + \ldots\right],$$

a stąd $u =$

(1) $$arc\, sin\, x = C \pm \left[x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots\right]$$
$$= C \pm x\mathfrak{P}_s(x).$$

Co się tyczy stałej C — to ponieważ:

$$x = sin\, u = sin(2k\pi + u) = sin(2k+1)\pi - u),$$

więc $C = n\pi$ z tem zastrzeżeniem, że w razie parzystego n trzeba wziąć szereg ze znakiem dodatnim, a w razie n nieparzystego ze znakiem ujemnym. Mamy zatem:

(2) $$arc\, sin\, x = n\pi + (-1)^n x\mathfrak{P}_s(x)$$

i w tej formie są już dane elementa **w s z y s t k i c h** gałęzi funkcyi $arc\, sin\, x$ w otoczeniu punktu $x = 0$. Gdy $n = 0$, mamy:

(3) $$u = arc\, sin\, x = x.\mathfrak{P}_s(x),$$

a tu znowu badać trzeba, czy z tej specyalnej gałęzi można będzie przejść do każdej innej.

W tym celu zauważmy, że równanie (8) [art. poprzedz.] można także tak napisać:

(4) $$arc\, sin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2i} log \frac{1+xi}{1-xi},$$

gdyż do $tg\, u = x$ i do $sin\, u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, gdzie znak pierwiastka stosownie wybrano, może należeć ten sam łuk. Połóżmyż $x/\sqrt{1+x^2} = v$, to stąd mamy: $x = v/\sqrt{1-v^2}$ a uwzględniając to w (4) dostajemy:

$$arc\, sin\, v = \frac{1}{2i} log \frac{\sqrt{1-v^2}+vi}{\sqrt{1-v^2}-vi}.$$

Piszmy tu x zamiast v i pomnóżmy licznik i mianownik ułamka, który się logarytmuje, przez $\sqrt{1-x^2}+xi$, to mieć będziemy:

(5) $$u = arc\, sin\, x = \frac{1}{i} log(\sqrt{1-x^2}+xi) = -i\, log(\sqrt{1-x^2}+xi).$$

Funkcya algebraiczna $f(x)=\sqrt{1-x^2}+xi$ ma dwa punkty rozgałęzienia, a to: $x=\pm 1$. Okrążając jeden z nich tylko (którykolwiek z nich) przechodzi $\sqrt{1-x^2}$ na $-\sqrt{1-x^2}$, gałąź u przechodzi na $u'=-i\,log(-\sqrt{1-x^2}+xi)$. Że zaś:

$$u'+u=-i\,log(\sqrt{1-x^2}+xi)(-\sqrt{1-x^2}+xi)$$
$$=-i\,log(-1)=-i\,log\,e^{(2n+1)\pi i}=(2n+1)\pi,$$

więc mamy:

$$(6)\qquad u'=(2n+1)\pi-u.$$

Do tych zatem gałęzi można tu przejść po drodze okrążającej punkt $x=+1$, lub punkt $x=-1$.

Punkt $x=\infty$ nie jest — podług uwag art. 19. — punktem rozgałęzienia funkcyi $f(x)$. Lecz żądając punktów dających $f(x)=0$, dla których więc $log f(x)=log\,0$, trzeba przyznać, że okrążenie takich punktów zamieni $log f(x)$ na $log f(x)+2\pi i$; co znowu do nowych gałęzi funkcyi $arc\,sin\,x$ doprowadzi.

Otóż równanie $f(x)=0$ daje:

$$1-x^2=-x^2,\ \text{czyli}\ 1+0x+0x^2=0,$$

a to wskazuje, że funkcya $f(x)$ staje się zerem (dwukrotnie) jedynie w punkcie $x=\infty$. Gdy go okrążać będziemy ujemnie [T. I., art. 34. po dostatecznie dużem kole zawierającem w swem wnętrzu i punkta $x=\pm 1$, dostaniemy z $log f(x)$ gałąź $2\pi i+log f(x)$, a z gałęzi u funkcyi $arc\,sin\,x$ gałąź:

$$(7)\qquad u''=2\pi+u$$

to wskazuje, że $x=\infty$ jest punktem rozgałęzienia funkcyi $arc\,sin\,x$. To samo wyniknie wprost z rozważania formy (5) w obszarze $|x|>1$. Połóżmy bowiem:

$$(8)\qquad u=-i\,log\,x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+i\right)=-i\,log\,xi\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=-i\,log\,x-i\,log\,i\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right),$$

to gdy w obszarze $|x|>1$ okrążać będziemy (w dodatnim kierunku) punkt $x=0$, okrążymy tem samem w dodatnim kierunku punkt $x=\pm 1$, a w ujemnym kierunku punkt $x=\infty$. Przez to okrążanie nie zmieni się w (8) funkcya $i\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$, podczas gdy $log\,x$ przejdzie na $2\pi i+log\,x$. Dojdziemy więc tu do gałęzi (7).

W ten sposób poznaliśmy i monogeniczność i właściwości funkcyi $arc\,sin\,x$. Samo rozwinięcie (3), gdy tam $u=\frac{\pi}{6}$, a więc

$x = sin\,u = \frac{1}{2}$ położymy, daje nowe rozwinięcie liczby π, a mianowicie:

$$(9)\qquad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7.2^7} + \ldots$$

Z równania $x = sin\,u = cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ możemy przejść odrazu do określenia funkcyi $arc\,cos\,x$. Mamy bowiem stąd:

$$arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2} - u \quad \text{czyli:}$$

$$(10)\qquad arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2} - arc\,sin\,x.$$

Użyjmy tu za $arc\,sin\,x$ tej gałęzi, której element mamy w (3), to dostaniemy:

$$(11)\qquad arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2} - x\mathfrak{P}_s(x).$$

Uwzględniając zaś w (10) elementa wszystkich gałęzi, jakie mamy przedstawione w (2) dostajemy, (po zamienieniu n na $-n$, co jest dozwolone):

$$(12)\qquad arc\,cos\,x = n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - (-1)^n x\mathfrak{P}_s(x)\right),\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Połóżmy $\frac{\pi}{2} - x\mathfrak{P}_s(x) = \alpha$, to przy parzystem $n = 2\nu$ dostajemy: $arc\,cos\,x = 2\nu\pi + \alpha$, przy nieparzystem zaś $n(2\nu+1)$ mamy:

$$arc\,cos\,x = (2\nu + 2)\pi - \alpha,$$

a to zgadza się z relacyami:

$$cos\,\alpha = cos(2n\pi + \alpha) = cos(2n\pi - \alpha).$$

Przedstawmy w (10) funkcyę $arc\,sin\,x$ przez logarytm, to mieć będziemy:

$$arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2} + i\,log(\sqrt{1 - x^2} + xi);$$

że zaś $\frac{\pi}{2} = -i.log\,e^{\frac{\pi i}{2}} = -i\,log\,i$, więc także będzie:

$$arc\,cos\,x = i\,log\frac{\sqrt{1-x^2} + xi}{i},\quad \text{albo:}$$

$$(13)\qquad arc\,cos\,x = i\,log(x - i\sqrt{1 - x^2}).$$

Funkcya algebraiczna $x - i\sqrt{1 - x^2}$ ma tu te same własności, co taka funkcya zawarta w $arc\,sin\,x$. Mamy więc twierdzenie:

I. *Funkcye $arc\,sin\,x$, $arc\,cos\,x$ są-to nieskończenie wielowartościowe, monogeniczne funkcye o punktach rozgałęzienia $x = \pm 1$, $x = \infty$.*

Okrążania tych punktów mogą z każdej dowolnej gałęzi doprowadzić do każdej gałęzi innej.

Ponieważ

$$arc\,sin\, x = arc\,cosec\,\frac{1}{x}, \quad arc\,cos\, x = arc\,sec\,\frac{1}{x}$$

więc mamy stąd:

$$arc\,cosec\,\frac{1}{x} = -i\,log\,(\sqrt{1-x^2}+x\,i), \quad arc\,sec\,\frac{1}{x} = i\,log\,(x - i\sqrt{1-x^2}).$$

Połóżmy tu: $x^{-1}=v$, a więc $x=v^{-1}$, to będzie:

$$(14)\qquad \begin{aligned} arc\,cosec\, v &= -i\,log\left(\sqrt{1-\frac{1}{v^2}}+\frac{1}{v}\,i\right) = \frac{1}{v}\mathfrak{P}_s\left(\frac{1}{v}\right) = \\ &= -i\,log\,\frac{\sqrt{v^2-1}+i}{v} \end{aligned}$$

$$(15)\qquad \begin{aligned} arc\,sec\, v &= i\,log\left(\frac{1}{v} - i\sqrt{1-\frac{1}{v^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{v}\mathfrak{P}_s\left(\frac{1}{v}\right) = \\ &= i\,log\,\frac{1-i\sqrt{v^2-1}}{v}, \end{aligned}$$

gdzie szeregi $\mathfrak{P}_s(v^{-1})$ zbieżne są dla $|v|>1$.

Z form tych wynika przedewszystkiem, że punkt $v=\infty$ należy tu do regularnego zakresu tych funkcyj. Z funkcyj zaś algebraicznych które się we wzorach (14), (15) logarytmuje wnosimy, że $v=0$, $v=\pm 1$ będą tu punktami rozgałęzienia. Mamy więc twierdzenie:

II. *Funkcye $arc\,sec\,x$, $arc\,cosec\,x$ są-to znowu funkcye nieskończenie wielowartościowe, monogeniczne o punktach rozgałęzienia:* 0, +1, —1. *W otoczeniu punktu $x=\infty$ i w samym tym punkcie zachowują się obie te funkcye regularnie.*

Pd. 1. Z form wyrażających łuki u przez logarytmy funkcyj zawierających x wyrazić naodwrót same funkcye trygonometryczne x przez ich łuki u.

Pd. 2. Z równania $arc\,sin\,x = arc\,tg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ wynika rozwinięcie:

$$(a)\qquad arc\,sin\,x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left[1-\frac{1}{3}\frac{x^2}{(1-x^2)}+\frac{1}{5}\frac{x^4}{(1-x^2)^2}-\frac{1}{7}\frac{x^6}{(1-x^2)^3}+\cdots\right],$$

które zbieżne jest dla x spełniających nierówność $|x/\sqrt{1-x^2}|<1$.

Pd. 3. Okazać, że rozwinięcie (*a*) zbieżne jest w zakresie, który zamknięty jest hyperbolą:

$$(b)\qquad \frac{\xi^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{\eta^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1, \quad (x=\xi+\eta\, i)$$

a w którym zawiera się punkt $x=0$ ($\xi=0$, $\eta=0$).

Pd. 4. Rozwinąć funkcyą *arc cosec x* na szereg analogiczny do (a) i okazać, że taki szereg zbieżny jest w zakresie, który jest znowu ograniczony hyperbolą (b), a w którym nie leży punkt $x=0$.

Pd. 5. Jakie wartości mają funkcye łukowe w swych punktach rozgałęzienia leżących w skończoności?

Łuki mają także swoje prawidła dodawania wynikające z takichże prawideł samych funkcyj trygonometrycznych.

Zauważmy bowiem dwie różne wartości funkcyi $arc\,sin x$, a to $u=arc\,sin\,x$, $v=arc\,sin\,y$ wzięte z jednej gałęzi, to ponieważ:

$$sin(u+v)=sin\,u\,.\,cos\,v+sin\,v.cos\,u=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2},$$

więc stąd odrazu mamy $u+v=$

$$\text{(I)} \qquad arc\,sin\,x+arc\,sin\,y=arc\,sin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

Analogicznie kładąc: $u=arc\,cos\,x$, $v=arc\,cos\,y$ dostaniemy:

$$\text{(II)} \qquad arc\,cos\,x+arc\,cos\,y=arc\,cos\,(xy-\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-y^2}).$$

Gdy wreszcie położymy: $u=arc\,tg\,x$, $v=arc\,tg\,y$, to mieć będziemy:

$$\text{(III)} \qquad arc\,tg\,x+arc\,tg\,y=arc\,tg\frac{x+y}{1-xy}.$$

Pd. 6. Wyprowadzić prawidło dodawania funkcyj *arc sec x*, *arc cosec x*.

Pd. 7. Wyprowadzić prawidła dodawania wszystkich funkcyj łukowych z ich wyrażeń przez logarytmy.

22. Nowe szeregi logarytmiczne. Różne rozwijania liczby π.

Z szeregu:

$$\text{(1)} \qquad log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)$$

możemy jeszcze w dwóch kierunkach skorzystać.

I^0. Połóżmy:

$$\text{(2)} \qquad (1+x)\,/\,(1-x)=z\,/\,a,$$

gdzie z jest nową zmienną, a a dowolną ilością stałą, to mamy stąd: $x=(z-a)\,/\,(z+a)$, a że $log\,(z\,/\,a)=log\,z-log\,a$, więc przez podstawienie (2) dostajemy z (1) rozwinięcie:

$$\text{(3)} \qquad log\,z=log\,a+2\left[\frac{z-a}{z+a}+\frac{1}{3}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^5+\ldots\right].$$

Rozwinięcie to jest zbieżne dla z spełniających nierówność:

$$\text{(4)} \qquad (z-a)\,/\,(z+a)\,|<1$$

i określa $log\,z$ w otoczeniu dowolnego miejsca a. Połóżmy:

$$z=\xi+\eta i, \quad a=\alpha+\beta i,$$

to obszar (4) ograniczają miejsca (ξ, η) zadość czyniące równaniu:

$$\frac{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}{(\xi+\alpha)^2+(\eta+\beta)^2}=1,$$

które po uproszczeniach sprowadza się do związku:

$$\alpha\xi+\beta\eta=0. \tag{5}$$

Jestto równanie linii prostej przechodzącej przez punkt $z=0$, a rozwinięcie (3) jest zbieżne w całym nieograniczonym obszarze rozciągającym się po tej stronie prostej (5), po której leży punkt a.

W równaniu (3) dodajmy i odejmijmy po prawej stronie szereg:

$$2P=2\left[\frac{2}{3}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^3+\frac{4}{5}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^5+\dots\right]$$

to wtedy będzie:

$$\log z=\log a+2\,.\frac{z-a}{z+a}\left[1+\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^2+\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^4+\dots\right]-2P,$$

a po zsumowaniu pierwszego szeregu dostaniemy:

$$\log z=\log a+\frac{(z-a)(z+a)}{2az}-2P. \tag{6}$$

Ta wymierna funkcya $[\log a+(z-a)(z+a)/2az]$ podaje przybliżone wartości funkcyi $\log z$, gdy z bierze się z dowolnie małego otoczenia miejsca a*).

II⁰. Mieliśmy już wzór:

$$\frac{\pi}{2}i=\log\frac{1+i}{1-i}=\log i. \tag{7}$$ Połóżmy:

$$i=\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^m, \tag{8}$$

gdzie przy całkowitem, dodatniem m trzeba stąd x obliczyć, to wstawiając to w (7), dostajemy:

$$\frac{\pi}{2}i=m\,.\log\frac{1+xi}{1-xi}=2mi\left[\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\right], \text{ albo}$$

$$\frac{\pi}{4}=m\left[\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\right]. \tag{9}$$

Równanie (8), z którego obliczony którykolwiek pierwiastek x trzeba wstawić w (9) sprowadzić można do postaci:

$$1-\binom{m}{1}x-\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\binom{m}{4}x^4-\dots=0. \tag{10}$$

a charakterystycznem jest, że **wszystkie** pierwiastki tego równania są rzeczywiste.

---

*) O innych dokładniejszych przybliżeniach za pomocą funkcyj wymiernych czytaj w rozprawie S. Dicksteina *„O szeregach logarytmowych Wrońskiego"*. Prace mat. fiz. T. IV. str. 88—94.

Aby się o tem przekonać, zauważmy, że z (8) dostajemy:

$$\frac{1+xi}{1-xi}=e^{\frac{(1+4s)\pi i}{2m}}=e^{\beta_s i},\ s=0,1,\dots,m-1,\ \text{a stąd:}$$

$$x=\frac{1}{i}\frac{e^{\beta_s i}-1}{e^{\beta_s i}+1}.$$

Pomnóżmy tu licznik i mianownik przez $e^{-\frac{\beta_s}{2}i}$, to mieć będziemy:

$$(11)\qquad x=\frac{1}{i}\frac{e^{\frac{\beta_s}{2}i}-e^{-\frac{\beta_s}{2}i}}{e^{\frac{\beta_s}{2}i}+e^{-\frac{\beta_s}{2}i}}=tg\frac{\beta_s}{2},\ s=0,1,\dots,m-1$$

a to są **wszystkie** pierwiastki równania (10) i są widocznie wszystkie rzeczywiste.

Załóżmy $m=2^k$, $k=1,2,\dots$, i naznaczmy w tym razie jeden z pierwiastków (11) przez x_k. Mamy wtedy:

$$(a)\qquad [(1+x_k i)/(1-x_k i)]^{2^k},$$

a zmieniając k na $(k+1)$ mieć będziemy analogicznie:

$$[(1+x_{k+1}i)/(1-x_{k+1}i)]^{2^{k+1}}=([1+x_{k+1}i)/(1-x_{k+1}i)]^2)^{2^k},\ \text{albo:}$$

$$(b)\qquad \left(\frac{1+\frac{2x_{k+1}}{1-x^2_{k+1}}i}{1-\frac{2x_{k+1}}{1-x^2_{k+1}}i}\right)^{2^k}.$$

Z porównania (a) z (b) wynika:

$$(12)\qquad x_k=\frac{2x_{k+1}}{1-x^2_{k+1}}.$$

Połóżmy: $1/x_k=a_k$, $1/x_{k+1}=a_{k+1}$ to dostaniemy z (12) związek:

$$a^2_{k+1}-2a_k a_{k+1}=1,\ \text{a stąd:}$$

$$(c)\qquad a_{k+n}=a_k+\sqrt{a_k^2+1}$$

gdzie — to wyraźnie zastrzegamy — przed pierwiastkiem zawsze znaku $+$ używać będziemy.

Za pomocą form (c) można będzie pewien pierwiastek równania (10) o stopniu 2^{k+1} wyrazić przez dany pierwiastek takiegoż równania o stopniu 2^k.

W a_k będzie rozwinięcie (9) postaci:

$$(13)\qquad \frac{\pi}{4}=2^k.\left[\frac{1}{a_k}-\frac{1}{3a_k^3}+\frac{1}{5a_k^5}-\dots\right],\ k=0,1,2,\dots$$

Są-to rozwinięcia dozwalające obliczenia liczby π na nieskończenie wiele sposobów.

Co się tyczy a_k, to z uwagi, że dla $k=0$ mamy $a_0=1$, dostajemy dalej na podstawie związków (c):

$$(14)\quad \begin{aligned} &a_1=1+\sqrt{2},\ a_2=1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}},\\ &a_3=1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}+\sqrt{8+4\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

a z tego widać, że — wskutek używania pierwiastków statecznie ze znakiem dodatnim — zwiększają się a_k ze zwiększającem się k.

Im większego zatem k użyjemy w rozwinięciu (13), tem zbieżniejsze będzie to rozwinięcie.

Gdy k dosięgnie granicy: ∞, mieć będziemy:

$$(15)\qquad \frac{\pi}{4}=\lim_{k=\infty}\frac{2^k}{a_k}.$$

Według tej formy dochodzimy do dokładnej wartości π dopiero przez nieskończoną ilość pierwiastkowań (wykonanych na liczbach całych), co zupełnie zgodnem jest z przestępnością liczby π.

Do analogicznej formy dojść można zakładając $m=n\,.\,2^k$, $m=n\,.\,2^{k+1}$, gdzie n jest dowolną całkowitą dodatnią i nieparzystą liczbą i nazywając pierwiastki równania (10) przy takich m, odpowiednio: x_k, x_{k+1}*).

23. Ogólna potęga. Ogólna funkcya wykładnicza. Logarytm o dowolnej zasadzie. Przejdźmy do dalszych przestępnych funkcyj ważnych w analizie, a biorących swój początek i definicyą w własnościach logarytmu. Oto przy m rzeczywistem jakiemkolwiek mamy zawsze:

$$(1)\qquad \log x^m=m\,.\log x,$$

$$(2)\qquad x^m=e^{m\log x}.$$

W tych równaniach prawe strony mają znaczenie nie tylko wtedy gdy m jest rzeczywiste, ale i wtedy, gdy m przyjmiemy urojone $=p+qi$. Z tego powodu, zatrzymując relacyę (1) i w przypadku $m=p+qi$, możemy nową funkcyę $u=e^{(p+qi)\log x}$ przedstawić znakiem x^{p+qi} tak, że mieć będziemy:

$$(3)\qquad u=x^{p+qi}=e^{(p+qi)\log x}.$$

Wyrażenie x^{p+qi}, które arytmetycznie nie dało się wytłómaczyć, nabiera tu teraz analitycznego znaczenia, a lukę, jaką pozostawiliśmy w Tomie I. (art. 27.] uważać odtąd trzeba za wypełnioną.

---

*) Co do treści tego art. por. Yvon Villarceau, *„Note sur la période de l'exponentielle e^x* C. R. T. 83. (1876) str. 594.

Z (3) dostajemy rozwinięcie:

$$(4) \qquad u = x^{p+qi} = 1 + \frac{(p+qi)\log x}{1!} + \frac{(p+qi)^2(\log x)^2}{2!} + \dots$$

które jest zbieżne w obszarze:

$$0 < |x| < \infty$$

a same punkta $x=0$, $x=\infty$ będą osobliwymi funkcyi u.

Z określenia (3) wnosimy dalej, że funkcya u nie jest jednoznaczną, a wszystkie jej gałęzie dają się ująć wzorem:

$$(5) \qquad e^{(p+qi)\log x}\, e^{(p+qi)2n\pi i}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

albo wzorem:

$$(6) \qquad u \,.\, e^{(p+qi)2n\pi i}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

gdzie u jest pewną dowolną zresztą gałęzią z pewnem obranem n.

Dalej z tego samego określenia (3) wnosić można, że funkcya u jest monogeniczną. Okrążaniem bowiem punktu $x=0$, (a więc i punktu $x=\infty$) dojść można z każdej jej gałęzi do każdej innej.

Przez jedno takie okrążenie w dodatnim kierunku zyskuje prowadzona gałąź u czynnik stały $e^{(p+qi)2\pi i}$.

Napiszmy (3) w postaci:

$$(7) \qquad u = e^{p \cdot \log x} \,.\, e^{qi \log x} = x^p \,.\, e^{qi \log x}$$

to stąd będziemy mogli bliżej już określić wieloznaczność funkcyi.

Przedewszystkiem widzimy, że w razie $q \gtrless 0$ będzie funkcya u zawsze nieskończenie wieloznaczną. Gdy $q=0$, to mamy:

$$(8) \qquad u = e^{p \log x} = x^p$$

a więc funkcyę wymierną, gdy p całkowite $\lesseqgtr 0$, funkcyę ν-wartościową, gdy p jest wymiernym ułamkiem $= \frac{\mu}{\nu}$.

Załóżmy wreszcie, że p jest liczbą niewymierną dodatnią lub odjemną. Do niej przybliżamy się zapomocą liczb wymiernych $\frac{\mu}{\nu}$ i to tem dokładniej, im większe już bezwzględne wartości mają μ, ν. Z tego wnosimy, że funkcya u będzie w tym razie — nieskończenie wielowartościową.

Wróćmy do q dowolnego. Forma (7) dozwoli poznać wartości funkcyi w punktach $x=0$, $x=\infty$. W punkcie $x=0$ mamy $|e^{qi \log x}|=1$, czynnik zaś:

$$x^p=0, \text{ gdy } p>0, \text{ a zaś } =\infty, \text{ gdy } p<0.$$

Z tego powodu w tym punkcie mamy:

$$(9) \qquad u=0, \text{ gdy } p>0, \quad u=\infty, \text{ gdy } p<0.$$

W punkcie $x=\infty$ jest również $|e^{qi \log x}|=1$, a czynnik:

$$x^p=0, \text{ gdy } p<0, \text{ a zaś } =\infty, \text{ gdy } p>0.$$

A więc i sama funkcya:

(10) $u=0$, gdy $p<0$; $u=\infty$, gdy $p>0$.

W razie $p=0$ mamy funkcyę:

$$u=x^{qi}=e^{qi\log x},$$

a ta w punktach $x=0$, $x=\infty$ jest nieoznaczoną z ograniczeniem $|u|=1$.

Co się tyczy pochodnej funkcyi u, to z równania:

$$x^{p+qi}=e^{(p+qi)\log x}$$

dostajemy:

$$\frac{d}{dx}x^{p+qi}=(p+qi)\cdot\frac{1}{x}\cdot e^{(p+qi)\log x}, \text{ czyli: } \frac{d}{dx}x^{p+qi}=(p+qi)x^{p+qi-1},$$

a stąd już wyniknie:

$$\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}x^{p+qi}=(p+qi)(p+qi-1)...(p+qi-\mu+1)x^{p+qi-\mu}.$$

Połóżmy:

$$\frac{(p+qi)(p+qi-1)...(p+qi-\mu+1)}{\mu!}=\binom{p+qi}{\mu},$$

to mieć będziemy:

$$(a) \qquad \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}x^{p+qi}=\mu!\binom{p+qi}{\mu}x^{p+qi-\mu}, \quad \mu=1, 2, 3, ...$$

W otoczeniu miejsca $x=1$ istnieje niezawodnie element:

$$(b) \qquad (1+h)^{p+qi}=c_0+c_1h+c_2h^2+...$$

zbieżny dla $|h|<1$, gdyż na płaszczyźnie argumentu x jedynym punktem osobliwym, leżącym w skończoności, jest $x=0$. Aby spółczynniki c_ν wyznaczyć, weźmy ν^{ta} pochodnę równania (b). Dostaniemy stąd:

$$\nu!\binom{p+qi}{\nu}(1+h)^{p+qi-\nu}=\nu!\,c_\nu+...,$$

a ten związek ma się ostawać dla wszelkich $|h|<1$. Dla $h=0$ mamy stąd:

$$c_\nu=\binom{p+qi}{\nu} \quad \nu=0, 1, 2, ...,$$

a więc element (b) będzie miał postać:.

$$(c) \qquad (1+h)^{p+qi}=1+\binom{p+qi}{1}h+\binom{p+qi}{2}h^2+...$$

o zakresie zbieżności $|h|<1$. Z tego widać, że $(1+h)^m$, bez różnicy, czy m jest rzeczywiste, lub urojone, w jednakowy sposób się rozwija (na szereg N e w t o n a).

Funkcyę u, którąśmy tu poznali i omówili, nazywamy o g ó l n ą p o t ę g ą. Posiada ona pewne charakterystyczne równanie funkcyjne. Obierzmy bowiem dwa różne, lub równe miejsca x, y, z obszaru jej argumentu i połóżmy:

$$f(x)=x^{p+qi}, \; f(y)=y^{p+qi},$$

to okaże się:

$$(11) \qquad f(x).f(y)=f(x.y),$$

gdyż mamy:

$$x^{p+qi}.y^{p+qi}=e^{(p+qi)log\,x+(p+qi)log\,y}=e^{(p+qi)log\,xy}=(x.y)^{p+qi}.$$

Z tych wszystkich uwag wynika:

I. *Ogólna potęga* x^{p+qi} *daje się określić zapomocą logarytmu, zachowuje się regularnie w obszarze* $0<|x|<\infty$, *jest zawsze monogeniczną, a w ogólności nieskończenie wielowartościową funkcyą.*

Poznawszy jakie analityczne znaczenie ma dowolna, rzeczywista lub urojona liczba a, podniesiona do urojonego wykładnika, możemy teraz określić nowe wyrażenie:

(12) $$v=a^x,$$

w którem a jest ilością stałą, a x zmienną nieograniczoną. Według przyjętych bowiem zasad możemy zamiast (12) napisać:

(13) $$v=e^{x.log\,a},$$

a z tego widać, że się funkcya $v=a^x$ nie różni od funkcyi e^{cx}, z którą już dobrze jesteśmy obznajomieni. Z tego powodu można funkcyę a^x nazwać ogólną funkcyą wykładniczą. Ma ona peryod $2\pi i/log\,a$, jest całkowitą przestępną funkcyą, określającą się bezustannie zbieżnym szeregiem:

(14) $$v=1+\frac{x.log\,a}{1!}+\frac{x^2(log\,a)^2}{2!}+\ldots$$

Jej pochodną jest:

(*d*) $$\frac{dv}{dx}=log\,a.a^x.$$

W równaniu (12) nazwijmy x logarytmem o zasadzie a liczby v i naznaczmy go przez $Log\,v$, to mamy:

(15) $$x=Log\,v.$$

Lecz z drugiej strony mamy z (13): $x.log\,a=log\,v$, a stąd i z określenia (15) mamy:

(16) $$Log\,v=\frac{1}{log\,a}.log\,v.$$

Z tego wynika:

II. *Logarytm o dowolnej zasadzie a jest odwróceniem ogólnej wykładniczej funkcyi* $a^x=v$, *daje się zawsze przywieść do postaci* $M.log\,v$. *gdzie* $M=(1/log\,a)$.

Funkcya $Log\,v$ *jest dalej funkcyą monogeniczną nieskończenie wielowartościową o gałęziach* $M(log\,v+2n\pi i)$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ *i posiada punktu rozgałęzienia* $v=0$, $v=\infty$.

Z określenia (16) wynika:

(17) $$Log\,u+Log\,v=Log\,(u.v),$$
a więc takie samo równanie funkcyjne, jakiemu zadość czynił logarytm naturalny.

24. Równania funkcyjne jako charakterystyczne własności logarytmu i ogólnej potęgi. W biegu poszukiwań tego Rozdziału natrafiliśmy na dwa równania funkcyjne: jedno, któremu zadość czynił logarytm; drugie, które określało własność ogólnej potęgi. Zapytajmy, czy owe funkcyjne równania są charakterystycznemi dla tych funkcyj?

Przyjmijmyż, że mamy analityczną funkcyę $f(x)$, o własności:

(1) $$f(u.v)=f(u)+f(v)$$

i że w otoczeniu punktu $x=0$ definiuje się ta funkcya elementem:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

zbieżnym w obszarze $|x|<r$.

Założywszy $|u|<r$, $|v|<r$ i takie, że równocześnie jest $|u.v|<r$ mamy mieć podług (1):

$$a_0+a_1uv+a_2u^2v^2+\dots=2a_0+a_1(u+v)+a_2(u^2+v^2)+\dots$$

Lecz to równanie nigdy nie może być identycznością, a stąd wynika, że funkcya $f(x)$ o funkcyjnem równaniu (1) nie może być regularną w punkcie $x=0$.

Załóżmy w (1): $v=1$. W takim razie mamy:

$$f(u)=f(u)+f(1),$$

a stąd wynika, że $f(1)=0$ być musi. Połóżmy dalej:

$$u=1+h,\quad v=1+\frac{g}{1+h},\quad \text{a więc: } uv=1+h+g$$

i przyjmijmy, że — uwzględniając $f(1)=0$ — jest:

$$f(1+h)=c_1h+c_2h^2+c_3h^3+\dots,$$

to wtedy równanie (1) w otoczeniu punktu $x=1$ będzie miało postać:

(2) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu(h+g)^\nu=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\left[h^\nu+\frac{g^\nu}{(1+h)^\nu}\right].$$

Przyjmując $|h|<1$, mamy:

$$\frac{1}{(1+h)^\nu}=1+\binom{-\nu}{1}h+\binom{-\nu}{2}h^2+\dots,$$

a wstawiając to w (2), dostaniemy:

(3) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu(h+g)^\nu=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\left[h^\nu+g^\nu\left(1+\binom{-\nu}{1}h+\binom{-\nu}{2}h^2+\dots\right)\right].$$

To równanie ma być identycznością, a więc spółczynniki w równomiennych wyrazach rozwinięć po obu stronach mają być sobie równe. Spółczynniki przy samych h^1, h^2, h^3, ... są tu już odpowiednio sobie równe, a z nich o c_1, c_2, ... nic nie wywnioskujemy. Zrównajmy jednak ze sobą spółczynniki mnożące g^ν, to mamy

$$c_\nu+\binom{\nu+1}{1}c_{\nu+1}h+\binom{\nu+2}{2}c_{\nu+2}h^2+\ldots=$$
$$=c_\nu\left[1+\binom{-\nu}{1}h+\binom{-\nu}{2}h^2+\ldots\right].$$

Lecz to równanie ma się ostawać przy wszystkich h z bezwzględną wartością $|h|<1$, a stąd wynika:

$$\binom{\nu+1}{1}c_{\nu+1}=\binom{-\nu}{1}c_\nu,\quad \binom{\nu+2}{2}c_{\nu+2}=\binom{-\nu}{2}c_\nu,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \binom{\nu+\mu}{\mu}c_{\nu+\mu}=\binom{-\nu}{\mu}c_\nu,\ \ldots$$

Przy $\nu=1$ mamy:

$$\binom{\mu+1}{\mu}c_{\mu+1}=\binom{-1}{\mu}c_1,$$

skąd dostajemy:

$$c_{\mu+1}=\frac{(-1)^\mu}{\mu+1}.c_1,\quad \text{i}\quad f(1+h+g)=c_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(h+g)^\nu.$$

Połóżmy $1+h+g=\xi$, a więc $h+g=\xi-1$ i załóżmy

$$|h+g|=|\xi-1|<1,$$

to ostatecznie mamy zbieżny element:

$$f(\xi)=c_1\left[\frac{\xi-1}{1}-\frac{(\xi-1)^2}{2}+\frac{(\xi-1)^3}{3}-\ldots\right]$$

w otoczeniu punktu $\xi=1$. Gdy jeszcze c_1 przedstawimy w postaci $\frac{1}{log\, a}$, to widocznie $f(\xi)=Log\,\xi$ o zasadzie a. Z tej dedukcyi wynika:

I. *Gdy założymy, że istnieje funkcya analityczna o równaniu funkcyjnem logarytmu, to ta funkcya jest już logarytmem, a nie inną funkcyą. Funkcyjne równanie logarytmu jest więc charakterystycznem dla tej funkcyi.*

Zajmijmy się teraz drugiem równaniem funkcyjnem:

$$(4)\qquad f(u).f(v)=f(u.v),$$

jakiemu zadość czyniła ogólna potęga x^{p+qi}. Zakładając, że funkcya $f(x)$ regularnie się zachowuje i w punkcie $x=0$ i w jego otoczeniu, daje się więc określić elementem $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$, nie będziemy mogli takiem rozwinięciem spełnić identycznie równania

(4). Trzeba więc przyjąć, że funkcya $f(x)$ ma w punkcie $x=0$ jakiś punkt osobliwy i w równanie (4) wstawić jej rozwinięcie z otoczenia innego punktu. Za ten punkt obierzmy $x=1$ i połóżmy jak przódy:

$$u=1+h,\quad v=1+\frac{g}{1+h},\quad \text{a więc: } uv=1+h+g,$$

to mamy teraz:

$$f(1+h+g)=f(1+h).f\left(1+\frac{g}{1+h}\right), \tag{5}$$

a z tego związku, gdy założymy $h=0$, dostajemy $f(1)=1$. Uwzględniając to, połóżmy:

$$f(1+h)=1+c_1h+c_2h^2+c_3h^3+\ldots$$

i wstawmy takie rozwinięcia w (5), to mamy:

$$1+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu(h+g)^\nu=\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu h^\nu\right).\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\left[\frac{g}{1+h}\right]^\nu\right), \tag{6}$$

a ten związek ma się sprawdzić identycznie.

Wybrawszy po obydwu stronach wyrazy z g^ν i zrównawszy ich spółczynniki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &c_\nu+c_{\nu+1}\binom{\nu+1}{1}h+c_{\nu+2}\binom{\nu+2}{2}h^2+\ldots= \\ &=\left[1+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu h^\nu\right]\left[1+\binom{-\nu}{1}h+\binom{-\nu}{2}h^2+\ldots\right]c_\nu, \end{aligned} \tag{7}$$

przy czem już $|h|<1$ założono. Przez zrównanie znowu w (7) spółczynników mnożących h^μ, dochodzimy do relacyj:

$$c_{\mu+\nu}\binom{\mu+\nu}{\mu}=c_\nu\left[c_\mu-c_{\mu-1}\binom{\nu}{1}+c_{\mu-2}\binom{\nu+1}{2}-c_{\mu-3}\binom{\nu+2}{3}+\ldots\right]$$

a z nich — gdy $\nu=1$ położymy — dostajemy po porządku:

$$c_2=\frac{c_1(c_1-1)}{2!}=\binom{c_1}{2},\quad c_3=\frac{c_1(c_1-1)(c_1-2)}{3!}=\binom{c_1}{3},\quad \ldots\ldots$$

przy dowolnym spółczynniku c_1. Dostajemy zatem:

$$f(1+h)=1+\binom{c_1}{1}h+\binom{c_1}{2}h^2+\ldots=(1+h)^{c_1},$$

a więc ogólną potęgę, a stąd twierdzenie:

II. *Równaniu funkcyjnemu ogólnej potęgi nie uczyni zadość żadna inna analityczna funkcya. Równanie to jest więc charakterystycznem dla tej funkcyi.*

25. Zastosowanie funkcyjnego równania logarytmu do nieskończonego zbieżnego iloczynu. Funkcya wykładnicza w postaci iloczynu. Zbadajmy nakoniec, o ile funkcyjne równanie logarytmu da się zastosować do bezwarunkowo zbieżnego, nieskończonego iloczynu $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha_\nu)$?

W tym celu utwórzmy nieskończoną sumę:

(1) $$L=log(1+\alpha_1)+log(1+\alpha_2)+log(1+\alpha_3)+...$$

i przyjmijmy, że w szeregu:

(2) $$|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+...$$

który — wskutek bezwarunkowej zbieżności iloczynu — jest zbieżnym, mamy przy dostatecznie dużem k:

(4) $$|\alpha_k|+|\alpha_{k+1}|+|\alpha_{k+2}|+...=\varrho<1.$$

Równocześnie z tem, mamy zatem:

(5) $$|\alpha_k|<1,\ |\alpha_{k+1}|<1, ...$$

a wskutek tego każdy $log(1+\alpha_{k+s})$ zastąpić możemy rozwinięciem:

$$A_{k+s}=\frac{\alpha_{k+s}}{1}-\frac{\alpha^2_{k+s}}{2}+\frac{\alpha^3_{k+s}}{3}-\frac{\alpha^4_{k+s}}{4}+...$$
$$s=0,\ 1,\ 2,\ 3, ...,$$

a sumę $L_k=log(1+\alpha_k)+log(1+\alpha_{k+1})+...$ przedstawić nieskończoną sumą szeregów:

$$L_k=A_k+A_{k+1}+A_{k+2}+...$$ Że zaś:

$$|L_k|<|A_k|+|A_{k+1}|+|A_{k+2}|+...$$
$$<\left\{\begin{array}{l} \frac{|\alpha_k|}{1}+\frac{|\alpha_k|^2}{2}+\frac{|\alpha_k|^3}{3}+... \\ \frac{|\alpha_{k+1}|}{1}+\frac{|\alpha_{k+1}|^2}{2}+\frac{|\alpha_{k+1}|^3}{3}+... \\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ . \end{array}\right\},$$

a przytem:

$$|\alpha_k|^2+|\alpha_{k+1}|^2+...<\varrho^2,\ |\alpha_k|^3+|\alpha_{k+1}|^3+...<\varrho^3...$$

więc stąd wynika:

$$|L_k|<\frac{\varrho}{1}+\frac{\varrho^2}{2}+\frac{\varrho^3}{3}+...$$

a to — ponieważ $\varrho<1$ jest — wskazuje, że L_k, a z nią i suma L jest zbieżną bezwarunkowo.

Niech δ, δ'' będą dwie d o w o l n i e m a ł e, d o d a t n i e ilości, to gdy k obierzemy bardzo duże i położymy wtedy:

(a) $$L_k=\varepsilon,$$

będzie można zawsze uczynić:

(a') $$|\varepsilon|<\delta.$$

Z drugiej strony można to bardzo duże k tak wybrać, że równocześnie w równaniu:

$$(b) \qquad \prod_{\nu=k}^{\infty}(1+a_\nu)=1+\varepsilon'$$

można będzie $|\varepsilon'|$ uczynić dowolnie małem.

Zauważmy teraz:

$$L'=log\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)=log\prod_{\nu=1}^{k-1}(1+a_\nu)+log\prod_{\nu=k}^{\infty}(1+a_\nu)=$$

$$=log\prod_{\nu=1}^{k-1}(1+a_\nu)+log(1+\varepsilon'),$$

to tu $log(1+\varepsilon')$ dowolnie zbliża się do zera. Połóżmyż:

$log(1+\varepsilon')=\varepsilon''$, a więc:

$$(c) \qquad L'=log\prod_{\nu=1}^{k-1}(1+a_\nu)+\varepsilon'',$$

to k będzie można zawsze tak wybrać, że równocześnie z (a') spełni się jeszcze nierówność:

$$(c') \qquad |\varepsilon''|<\delta''.$$

Tworząc różnicę $L-L'$ i uwzględniając, że:

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}log(1+a_\nu)-log\prod_{\nu=1}^{k-1}(1+a_\nu)=0$$

dostajemy $L-L'=\varepsilon-\varepsilon''$, a stąd:

$$|L-L'|<\delta+\delta''.$$

To — ponieważ δ, δ'' są ilościami dowolnie małemi — dowodzi, że $L=L'$ czyli, że:

$$(6) \qquad log\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)=\sum_{\nu=1}^{\infty}log(1+a_\nu).$$

Przyjmując, że α_ν są pewnemi analitycznemi funkcyami argumentu x o tej własności, że szereg $(\alpha_1+\alpha_2+...)$ jest w pewnym obszarze (A) jednostajnie i bezwarunkowo zbieżny, dojdziemy również do równania (6). Ono w tym obszarze będzie miało znaczenie, a suma $\sum_{\nu=1}^{\infty}log(1+\alpha_\nu)$ okaże się tam jednostajnie zbieżną.

Ta uwaga wystarczy, aby — (choć jeszcze nie zajmowaliśmy się teoryą nieskończonych iloczynów zależnych od zmiennego argumentu) — funkcyę wykładniczą w pewnych szczególnych zakresach jej argumentu przedstawić w postaci zbieżnego, nieskończonego iloczynu*).

---

*) R. Lipschitz. *„Sur une réprésentation de la fonction exponentielle par un product infini“*. C. R. T. 99. (1884). str. 701—703. Por. także. L. Gegenbauer *„Über die Exponentialfonction“*. *Monatshefte f. Math. u. Phys.* T. 5. (1894.) str. 303—306.

Zauważmy szereg:

$$(\alpha)\qquad \sigma = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \ldots = \frac{z}{(1-z)^2}$$

a z nim równocześnie nieskończoną sumę szeregów:

$$(\beta)\qquad s = z\Sigma z^k + \varphi(2)z^2\Sigma z^{2k} + \ldots + \varphi(d)z^d\Sigma z^{dk} + \ldots$$

gdzie sumowania odnoszą się do k, $k=0,1,2\ldots,\infty$; $\varphi(m)$ oznacza tu — jak zwykle w teoryi liczb — ilość liczb pierwszych względem m i $< m$, a argument z ograniczono do: $|z| < 1$. Szukając w tej sumie spółczynnika przy z^m i oznaczając przez $m, \ldots, d, \ldots 1$ wszystkie podzielniki liczby m, dostajemy na ten spółczynnik sumę:

$$\varphi(m) + \ldots + \varphi(d) + \ldots + \varphi(1),\ \varphi(1) = 1.$$

Suma ta jest $= m$, według najelementarniejszych twierdzeń z teoryi liczb, a stąd wynika, że suma (β) uporządkowana podług potęg z, jest:

$$\sigma = z + 2z^2 + 3z^2 + \ldots,\ |z| < 1,$$

jest więc szeregiem (α).

Z drugiej znowu strony sumując w s każdy szereg w nim zawarty mamy

$$\sigma = \frac{z}{(1-z)^2} =$$

$$s = \frac{z}{1-z} + \varphi(2)\,\frac{z^2}{1-z^2} + \varphi(3)\cdot\frac{z^3}{1-z^3} + \ldots,\ |z| < 1,$$

a ta suma będzie jednostajnie zbieżną w zakresie $|z| < 1$.

Mnożąc tu obie strony przez $(-1/z)$, a potem całkując [T. I. art. 179. II.), dostajemy:

$$(\gamma)\qquad -\frac{z}{1-z} = log(1-z) + \frac{\varphi(2)}{2}\,log\,(1-z^2) + \ldots$$

Połóżmy:

$$\frac{\varphi(\nu)}{\nu}\,log(1-z^\nu) = log\,(1-z^\nu)^{\frac{\varphi(\nu)}{\nu}},\ \text{ a dalej:}$$

$$(1-z^\nu)^{\frac{\varphi(\nu)}{\nu}} = 1 + \alpha_\nu,\ \text{ a więc }\ \alpha_\nu = (1-z^\nu)^{\frac{\varphi(\nu)}{\nu}} - 1,$$

to zatrzymując tu ciągle $|z| < 1$, mamy:

$$\alpha_\nu = -\frac{\varphi(\nu)}{\nu}z^\nu + A_{\nu 2}z^{2\nu} + A_{\nu 3}z^{3\nu} + \ldots$$

$$|\alpha_\nu| < \frac{\varphi(\nu)}{\nu}|z|^\nu + |A_{\nu 2}||z|^{2\nu} + |A_{\nu 3}||z|^{3\nu} + \ldots$$

$$\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} < \sqrt[\nu]{\frac{\varphi(\nu)}{\nu}}\cdot|z|\,[1 + c_{\nu 1}|z|^\nu + c_{\nu 2}|z|^{2\nu} + \ldots],$$

gdzie $c_{\nu 1}, c_{\nu 2}, \ldots$ są dodatnie. Ponieważ $\varphi(\nu)/\nu$ przy skończonych ν pozostaje zawsze ułamkiem właściwym dodatnim, a przy ν bez granic rosnących granicy $=1$ nigdy przekroczyć nie może, a to samo odnieść trzeba i do $\sqrt[\nu]{\varphi(\nu)/\nu}$, ponieważ dalej $|z| < 1$ założono, więc stąd wynika, że w całym zakresie $(|z| < 1)$ mamy $lim\,\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} < 1$. To dowodzi, że tu szereg $\sum\alpha_\nu$ jest bezwarunkowo zbieżny [T. I. art. 7.] a z nim i iloczyn $(1-z)(1-z^2)^{\frac{\varphi(2)}{2}}\ldots$ w ten sam sposób będzie zbieżny. Do sumy (γ) można więc zastosować relacyę (6), poczem mieć będziemy:

$$(\gamma') \qquad -\frac{z}{1-z} = \log (1-z)(1-z^2)^{\frac{\varphi(2)}{2}}(1-z^3)^{\frac{\varphi(3)}{3}} \ldots, \ |z|<1.$$

Ze związku (γ') dostajemy:

$$(\delta_1) \qquad e^{-\frac{z}{1-z}} = (1-z)(1-z^2)^{\frac{\varphi(2)}{2}}(1-z^3)^{\frac{\varphi(3)}{3}} \ldots, \ |z|<1,$$

a stąd znowu:

$$(\delta_2) \qquad e^{+\frac{z}{1-z}} = (1-z)^{-1}(1-z^2)^{-\frac{\varphi(2)}{2}}(1-z^3)^{-\frac{\varphi(3)}{3}} \ldots, \ |z|<1.$$

W formie (δ_1) jest argumentem w funkcyi wykładniczej: $-z/(1-z)$, a ten — gdy $z=1$ — staje się nieskończonością. Iloczyn wtedy jest $=0$. W formie (δ_2) mamy argument $+z/(1-z)$, a ten znowu, gdy $z=1$, staje się nieskończonością. Iloczyn jest tam wtedy $=\infty$. Zgadza się to z tą własnością funkcyi wykładniczej, że jej miejsce zerowe, lub nieskończonościowe może istnieć jedynie w nieskończoności.

Prócz tego zauważyć potrzeba, że iloczyn (δ_1) daje na obwodzie koła $|z|=1$ wszędzie gęstą mnogość punktów zerowych, a iloczyn (δ_2) takąż mnogość punktów nieskończonościowych. Jeżeli jednak do obwodu tego koła się nie zbliżamy, to we wnętrzu jego funkcyę $e^{-\frac{z}{1-z}}$ przez iloczyn (δ_1), a funkcyę $e^{+\frac{z}{1-z}}$ przez iloczyn (δ_2) zdefiniować można.

Połóżmy w (δ_1):

$$-\frac{z}{1-z}=x, \text{ a więc } z=\frac{x}{x-1}, \text{ a w } (\delta_2)$$

$$\frac{z}{1-z}=x, \text{ a więc } z=\frac{x}{1+x},$$

to dostaniemy:

$$(\varepsilon_1) \qquad e^x = \left(1-\frac{x}{x-1}\right)\left(1-\frac{x^2}{(x-1)^2}\right)^{\frac{\varphi(2)}{2}}\left(1-\frac{x^3}{(x-1)^3}\right)^{\frac{\varphi(3)}{3}} \ldots \text{ i}$$

$$(\varepsilon_2) \qquad e^x = \left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{-1}\left(1-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^{-\frac{\varphi(2)}{2}}\left(1-\frac{x^3}{(1+x)^3}\right)^{-\frac{\varphi(3)}{3}} \ldots$$

Pierwsza z tych form, gdy położymy $x=\xi+\eta i$ ma znaczenie w obszarze

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{(\xi-1)^2+\eta^2}<1, \text{ a druga w obszarze}$$

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{(\xi+1)^2+\eta^2}<1.$$

Pierwsza z tych nierówności daje:

$$\xi=\left(+\frac{1}{2} \ldots -\infty\right), \text{ przy dowolnem } \eta,$$

druga zaś:

$$\xi=\left(-\frac{1}{2} \ldots +\infty\right), \text{ przy dowolnem } \eta.$$

Z tego wynika, że jedynie w obszarze:

$$\xi=\left(-\frac{1}{2} \ldots +\frac{1}{2}\right) \text{ przy dowolnem } \eta,$$

a więc w zakresie ograniczonym prostemi $\xi=-\frac{1}{2}$, $\xi=+\frac{1}{2}$ można e^x przedstawić już-to formą (ε_1), już-to formą (ε_2).

W dwóch nieograniczonych pozostałych zakresach przydatność jednej z form (ε_1), (ε_2) wyklucza przydatność drugiej.

*

* *

26. Najogólniejsza forma funkcyi całkowitej przestępnej bez miejsc zerowych. Po tem obznajomieniu się z najelementarniejszemi funkcyami, możemy wrócić do zadania postawionego zaraz u wstępu Rozdziału I., a to: do tworzenia jednoznacznych całkowitych funkcyj bez miejsc zerowych w skończoności.

Z żądanej własności takiej funkcyi $G(x)$ wynika — jak-to już w art. 1. mieliśmy — równanie różniczkowe:

(1) $$\frac{G'(x)}{G(x)}=g(x), \quad *)$$

gdzie $g(x)$ jest całkowitą, wymierną lub przestępną funkcyą. Z tego równania przez całkowanie dostajemy:

$$\log G(x)=\int g(x)\,dx, \text{ a stąd:}$$

(2) $$G(x)=e^{\int g(x)\,dx}$$

Połóżmy:

$$g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$$

to $$\int g(x)dx=c+c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\frac{c_2}{3}x^3+\ldots$$

a gdy $e^c=C$ położymy, a

$$c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\frac{c_2}{3}x^3+\ldots$$

przez $g_0(x)$ naznaczymy, mieć będziemy:

(3) $$G(x)=C\,.\,e^{g_0(x)}.$$

Przyjmijmy, że prócz funkcyi tego kształtu może równaniu różniczkowemu (1) dogodzić jeszcze inna funkcya $G_1(x)$ kształtu innego. W takim razie oprócz (1) mamy jeszcze:

(4) $$G_1'(x)\,/\,G_1(x)=g(x)$$

a z (1) i (4) dostajemy:

$$\frac{G_1'(x)}{G_1(x)}-\frac{G'(x)}{G(x)}=0, \quad \text{albo}$$

---

*) $\frac{G'(x)}{G(x)}$ nazywamy logarytmiczną pochodną funkcyi $G(x)$.

$G(x) \cdot G_1'(x) - G_1(x) G'(x) = 0$, albo wreszcie:

$\frac{d}{dx} \frac{G_1(x)}{G(x)} = 0$. Stąd wynika $G_1(x) / G(x) = k$, gdzie k jest stałą dowolną, a więc $G_1(x) = k . G(x)$.

Że zaś — jeżeli chodzi tylko o kształt funkcyi żądanej — stały czynnik C w (3) jest całkiem dowolny, więc stąd wnosimy:

I. *Forma* $e^{g_0(x)}$ *jest jedyna, w jakiej funkcyę całkowitą przestępną bez miejsc zerowych w skończoności przedstawić można.*

Weźmy pod uwagę dwie różne funkcye całkowite:

$$G(x) = e^{g(x)}, \quad G_1(x) = e^{g_1(x)}$$

bez miejsc zerowych w skończoności — $g(x)$, $g_1(x)$ są więc dwie różne funkcye całkowite. — Wtedy mamy:

$$G(x) / G_1(x) = e^{g(x) - g_1(x)}$$

a że $g(x) - g_1(x) = \gamma(x)$ jest znowu funkcyą całkowitą, więc widocznie:

(5) $$G(x) = e^{\gamma(x)} . G_1(x), \text{ a to zn.}$$

II. *Dwie różne funkcye całkowite bez miejsc zerowych w skończoności różnią się od siebie czynnikiem, który znowu jest funkcyą całkowitą bez miejsc zerowych w skończoności.*

Między funkcyami wymiernemi całkowitemi miała funkcya o jednem jedynem miejscu zerowem a postać:

$$c_1(x-a), \text{ albo } c\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

gdzie c lub c_1 są-to stałe dowolne. Taki stały czynnik trzeba — gdy już przechodzimy do funkcyj całkowitych przestępnych — zastąpić przez $e^{g(x)}$ i powiedzieć:

III. *Najogólniejszą formą funkcyi całkowitej przestępnej z jednem, jedynem miejscem zerowem a jest:*

(6) $$e^{g(x)}\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Pochodzi to stąd, że gdy funkcyę przestępną $f(x)$ o jedynem miejscu zerowem a podzielimy przez $\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, a więc przez funkcyę wymierną o tem samem miejscu zerowem a, to iloraz $f(x) / \left[1 - \frac{x}{a}\right]$ musi być funkcyą przestępną całkowitą bez żadnego miejsca zerowego w skończoności. Ten iloraz ma więc kształt $e^{g(x)}$, a stąd już forma (6) odrazu wynika. Funkcyę (6) nazywają pierwszą przestępną funkcyą.

Gdy w funkcyi (3) za x położymy $\frac{1}{x-c}$ dostaniemy funkcyę:

(7) $$C.e^{g_0\left(\frac{1}{x-c}\right)}$$

z miejscem istotnie szczególnem c, a bez miejsc zerowych i w skończoności i w nieskończoności. W nieskończoności ma ta funkcya wartość $C.e^{g(0)}$.

Niech $R(x)$ będzie wymierną, ułamkową funkcyą o biegunach $a_1, a_2, \ldots a_s, \ldots$ Utwórzmy funkcyę $e^{R(x)}$, to taka funkcya nie będzie zerem dla żadnej skończonej wartości $x \neq a_s$. W punktach a_s będzie miała miejsca istotnie osobliwe, w nieskończoności zaś będzie się regularnie zachowywać, gdy granica $\lim\limits_{x=\infty} R(x)$ jest skończoną, a będzie tam miała punkt istotny, gdy ta granica nie jest skończoną.

27. O funkcyach wielu zmiennych bez miejsc zerowych. Zauważmy funkcyę:

(1) $$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{g(x_1 x_2 \ldots x_n)}$$

w której $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest całkowitą wymierną lub przestępną funkcyą, a e — jak zawsze — zasadą naturalnych logarytmów. Taka funkcya będzie jednoznaczną, analityczną funkcyą o tej własności, że na żadnem z miejsc $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o wszystkich skończonych spółrzędnych x_s nie będzie zerem. Na każdem takiem miejscu będzie regularną, a dopiero na miejscach $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ o wszystkich, lub niektórych spółrzędnych nieskończonych — nie dających $g(x_1 x_2 \ldots x_n)$ w skończonej wartości — ma swój punkt istotnie szczególny. Funkcya (1) jest zatem całkowitą przestępną funkcyą bez miejsc zerowych w skończoności.

Nie troszcząc się o to, czy forma (1) jest jedyną, w jakiej się opisane funkcye pojawić mogą, zajmijmy się tu pewnemi funkcyami, które właśnie z funkcyj o postaci (1) wynikają, a które charakterystycznemi swemi własnościami zasługują na uwagę*).

Niech ϑ, φ będą dwie niezależne, nieograniczone zmienne. Położmy $e^{\frac{2\pi i}{3}} = \alpha$ i zauważmy funkcyę:

(2) $$\begin{aligned} E(\vartheta, \varphi, \alpha) &= e^{\vartheta\alpha + \varphi\alpha^2} = \\ &= P(\vartheta, \varphi) + Q(\vartheta, \varphi)\,\alpha + R(\vartheta, \varphi)\,\alpha^2, \end{aligned}$$

która widocznie zalicza się do kategoryi funkcyj (1).

Aby funkcye P, Q, R określić, zauważmy, że $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, że więc $\alpha^2 = -(1 + \alpha)$ i że wskutek tego można położyć:

---

*) Appel. *Proposition d'Algébre et de Géometrie dé duites de la consideration des racines cubiques de l'unité.* C. R. T. 84. (1877) str. 540. *Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires.* Tamże str. 1378.

$$E(\vartheta, \varphi, \alpha) = e^{\vartheta\alpha - \varphi(1+\alpha)} = e^{-\varphi} \cdot e^{(\vartheta-\varphi)\alpha}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} &= e^{-\varphi} \left[1 + \frac{(\vartheta-\varphi)^3}{3!} + \frac{(\vartheta-\varphi)^6}{6!} + \dots \right] \\ &+ e^{-\varphi} \left[\frac{\vartheta-\varphi}{1!} + \frac{(\vartheta-\varphi)^4}{4!} + \frac{(\vartheta-\varphi)^7}{7!} + \dots \right] \alpha \\ &+ e^{-\varphi} \left[\frac{(\vartheta-\varphi)^2}{2!} + \frac{(\vartheta-\varphi)^5}{5!} + \frac{(\vartheta-\varphi)^8}{8!} + \dots \right] \alpha^2. \end{aligned}$$

Widocznie szeregi w nawiasy ujęte są tu razem z czynnikiem $e^{-\varphi}$ funkcyami P, Q, R. Z tych ich rozwinięć dostajemy odrazu takie ich własności:

$$(4) \quad P = \frac{\partial Q}{d\vartheta} = \frac{\partial^2 R}{d\vartheta^2}, \quad Q = \frac{\partial R}{d\vartheta} = \frac{\partial^2 P}{d\vartheta^2}, \quad R = \frac{\partial P}{d\vartheta} = \frac{\partial^2 Q}{\partial\vartheta^2}.$$

Lecz z drugiej strony, gdy uwzględnimy, że znowu $\alpha = -(1 + \alpha^2)$, mieć będziemy:

$$E(\vartheta, \varphi, \alpha) = e^{-\vartheta(1+\alpha^2) + \varphi\alpha^2} = e^{-\vartheta} \cdot e^{(\varphi-\vartheta)\alpha^2}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} &= e^{-\vartheta} \left[1 + \frac{(\varphi-\vartheta)^3}{3!} + \frac{(\varphi-\vartheta)^6}{6!} + \dots \right] \\ &+ e^{-\vartheta} \left[\frac{\varphi-\vartheta}{1!} + \frac{(\varphi-\vartheta)^4}{4!} + \frac{(\varphi-\vartheta)^7}{7!} + \dots \right] \alpha^2 \\ &+ e^{-\vartheta} \left[\frac{(\varphi-\vartheta)^2}{2!} + \frac{(\varphi-\vartheta)^5}{5!} + \frac{(\varphi-\vartheta)^8}{8!} + \dots \right] \alpha \end{aligned}$$

gdzie tu szeregi w nawiasy ujęte wraz z czynnikiem $e^{-\vartheta}$ są teraz po porządku funkcyami P, R, Q. Stąd dostajemy znowu związki;

$$(6) \quad P = \frac{\partial R}{\partial\varphi} = \frac{\partial^2 Q}{d\varphi^2}, \quad R = \frac{\partial Q}{d\varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2}, \quad Q = \frac{\partial P}{\partial\varphi} = \frac{\partial^2 R}{\partial\varphi^2}$$

a porównując ze sobą funkcye P, Q, R w ich rozwinięciach (3), (5) wnosimy, że

$$(7) \quad P(\vartheta, \varphi) = P(\varphi, \vartheta), \quad Q(\vartheta, \varphi) = R(\varphi, \vartheta), \quad R(\vartheta, \varphi) = Q(\varphi, \vartheta).$$

Uwzględnijmy w różniczkowaniach:

$$dP = \frac{\partial P}{d\varphi} d\varphi + \frac{\partial P}{d\vartheta} d\vartheta$$

: : : : : : : : : : : : :

relacye (4), (6), to mieć będziemy:

$$(8) \quad dP = Q d\varphi + R d\vartheta, \quad dQ = R d\varphi + P d\vartheta, \quad dR = P d\varphi + Q d\vartheta.$$

Zauważmy teraz:

$$(9) \quad \begin{aligned} &E(\vartheta + \vartheta', \varphi + \varphi', \alpha) \\ &= e^{-(\varphi+\varphi')} \cdot e^{(\vartheta+\vartheta' - \varphi - \varphi')\alpha} \\ &= P(\vartheta + \vartheta', \varphi + \varphi') + Q(\vartheta + \vartheta', \varphi + \varphi')\alpha + R(\vartheta + \vartheta', \varphi + \varphi')\alpha^2 \end{aligned}$$

i połóżmy:

$$P(\vartheta', \varphi') = P', \quad Q(\vartheta', \varphi') = Q', \quad R(\vartheta', \varphi') = R'$$

to z drugiej znowu strony mieć będziemy:

$$(10) \quad \begin{aligned} &E(\vartheta + \vartheta', \varphi + \varphi', \alpha) = [e^{-\varphi} \cdot e^{(\vartheta-\varphi)\alpha}] \cdot [e^{-\varphi'} \cdot e^{(\vartheta'-\varphi')\alpha}] = \\ &= [P + Q\alpha + R\alpha^2] \cdot [P' + Q'\alpha + R'\alpha^2] = \\ &= PP' + QR' + RQ') + (RR' + PQ' + QP')\alpha + (QQ' + RP' + PR')\alpha^2. \end{aligned}$$

Z relacyj (9) i (10) dostajemy:

$$P(\vartheta+\vartheta', \varphi+\varphi') = PP' + QR' + RQ'$$
(11)
$$Q(\vartheta+\vartheta', \varphi+\varphi') = RR' + PQ' + QP'$$
$$R(\vartheta+\vartheta', \varphi+\varphi') = QQ' + RP' + PR',$$

a to są formy, które przypominają prawidła dodawania funkcyj trygonometrycznych *sinus, cosinus.*

Utwórzmy wreszcie funkcyę E nasamprzód z pierwiastkiem α, jak wyżej, potem z pierwiastkiem α^2, a wreszcie z pierwiastkiem $\alpha^3 = 1$, to mieć będziemy:

$$E(\vartheta, \varphi, \alpha) = e^{\vartheta\alpha+\varphi\alpha^2} = P + Q\alpha + R\alpha^2 = E_1$$
$$E(\vartheta, \varphi, \alpha^2) = e^{\vartheta\alpha^2+\varphi\alpha} = P + Q\alpha^2 + R\alpha = E_2$$
$$E(\vartheta, \varphi, \alpha^3) = e^{\vartheta+\varphi} = P + Q + R = E_3,$$

a stąd wynika: $E_1 . E_2 . E_3 =$

$$(P + Q\alpha + R\alpha^2).(P + Q\alpha^2 + R\alpha)(P + Q + R)$$
$$= \begin{vmatrix} P & Q & R \\ R & P & Q \\ Q & R & P \end{vmatrix} = +1, \text{ albo:}$$

(12) $$P^3 + Q^3 + R^3 - 3PQR = 1.$$

Połóżmy:

(13) $$x = c.P, \quad y = c.Q, \quad z = c.R, \quad c = const.,$$

to dostaniemy:

(14) $$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = c^3,$$

a to geometrycznie można tłómaczyć w ten sposób, że równaniami (13) dają się określić spółrzędne punktów leżących na powierzchni (14).

Gdy $\varphi = \vartheta$, to $Q = R = 0$, a $P = e^{-\varphi} = e^{-\vartheta}$.

Chcąc więc aby wtedy było $P = 1$, trzeba przyjąć $\varphi = \vartheta = 0$, tak, że dla tych wartości mamy:

(15) $$P = 1, \quad Q = R = 0.$$

Zbadajmy, czy funkcye E_3 nie posiadają peryodów h_1, h_2, odnoszących się do zmiennych ϑ, φ. Aby tak było, muszą te peryody zadość uczynić związkom:

$$(\vartheta + h_1)\alpha + (\varphi + h_2)\alpha^2 = \vartheta\alpha + \varphi\alpha^2 + 2k_1\pi i$$
$$(\vartheta + h_1)\alpha^2 + (\varphi + h_2)\alpha = \vartheta\alpha^2 + \varphi\alpha + 2k_2\pi i$$
$$(\vartheta + h_1) + (\varphi + h_2) = \vartheta + \varphi + 2k_3\pi i,$$

gdzie k_1, k_2, k_3 są całkowite liczby. Z nich wynika:

$$g_1 = \alpha h_1 + \alpha^2 h_2 - 2k_1\pi i = 0$$
(16)
$$g_2 = \alpha^2 h_1 + \alpha h_2 - 2k_2\pi i = 0$$
$$g_3 = h_1 + h_2 - 2k_3\pi i = 0.$$

Dodając to do siebie dostaniemy: $g_1 + g_2 + g_3 = -2\pi i(k_1 + k_2 + k_3) = 0$, a to wskazuje, że być musi $(k_1 + k_2 + k_3) = 0$ i że wtedy ze związków (16) jeden okazuje się zbytecznym. Opuśćmyż związek trzeci zakładając w nim już naprzód:

$$k_3 = -(k_1 + k_2),$$

a h_1, h_2 obliczone z dwóch pierwszych związków niech będą:

$$h_1 = k_1 A_1 + k_2 B_1, \quad h_2 = k_1 A_2 + k_2 B_2,$$

to przedewszystkiem zauważymy, że można innych k_1, k_2 użyć przy obliczaniu h_1, a innych przy obliczaniu h_2 (gdyż i wtedy $\alpha h_1 + \alpha^2 h_2$, $\alpha^2 h_1 + \alpha h_2$ pozostają według (16) wielokrotnościami liczby $2\pi i$. Z tego jednak wynika, że każdy dowolny peryod odnoszący się do zmiennej ϑ daje się utworzyć jednorodnie i liniowo z A_1, B_1 za użyciem dowolnych całkowitych spółczynników, a także w ten sam sposób da się przedstawić przez A_2, B_2 każdy dowolny peryod odnoszący się do zmiennej φ. Z tego wynika, że funkcye E_1, E_2, E_3 mają po dwa zasadnicze peryody, a to:

$$A_1, B_1 \text{ w zmiennej } \vartheta,$$
$$A_2, B_2 \quad „ \quad „ \quad \varphi.$$

Te rezultaty można uogólnić przyjmując $(n-1)$ zmiennych, od których n funkcyj E_1, E_2, ..., E_n ma zależeć (por. Appel C. R. T. 84., str. 1378).

CZĘŚĆ II.

FUNKCYE JEDNOZNACZNE ZE SKOŃCZONĄ LUB NIESKOŃCZONĄ ILOŚCIĄ MIEJSC OSOBLIWYCH.

ROZDZIAŁ III.

Funkcye jednoznaczne z jednem miejscem istotnie osobliwem.

---

28. **Funkcya z miejscem istotnem w nieskończoności a ze skończoną ilością miejsc zerowych i nieskończonościowych w skończoności.** Zadaniem tego rozdziału będzie: wyznaczyć formy wszelkich możliwych funkcyj jednoznacznych przestępnych z jednem tylko miejscem istotnie szczególnem.

Lecz — aby takie funkcye bliżej scharakteryzować i ugrupować — koniecznem jest jeszcze uwzględnić każdym razem już-to punkta zerowe, już-to nieskończonościowe, już-to wreszcie i jedne i drugie, występujące w skończonej, lub nieskończonej ilości w żądanej funkcyi.

Funkcya $e^{g(x)}$ bez miejsc zerowych i funkcye przestępne pierwsze określone w art. 26., będą tu ważną odgrywały rolę.

Poszukiwania nasze zaczniemy od funkcyj jednoznacznych z jednem jedynem miejscem istotnie osobliwem w nieskończoności.

Gdy taka funkcya $f(x)$ nie ma wcale posiadać punktów nieskończonościowych, a ma mieć skończoną tylko ilość miejsc zerowych (leżących w skończoności):

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_m$$

z powtórzeniami:

(2) $$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots, \lambda_m,$$

to w otoczeniu każdego punktu $x_0 \neq a_s$, $s=1, 2, \ldots, m$, posiada element regularny o wolnym wyrazie $\neq 0$, a w otoczeniu punktów a_s przedstawia się rozwinięciem:

(3) $$f(x)=(x-a_s)^{\lambda_s}[c_0+c_1(x-a_s)+\ldots],\ c_0 \neq 0.$$

Utwórzmy funkcyę wymierną:

(4) $$f_1(x)=[(x-a_1)^{\lambda_1}\ldots(x-a_s)^{\lambda_s}\ldots(x-a_m)^{\lambda_m}]$$

to jej odwrotność $\frac{1}{f_1(x)}$ posiada w otoczeniu punktu $x_0 \neq a_s$ znowu element regularny o wolnym wyrazie $\neq 0$, a w otoczeniu każdego punktu a_s ma rozwinięcie:

(5) $$\frac{1}{f_1(x)}=\frac{1}{(x-a_s)^{\lambda_s}}[d_0+d_1(x-a_s)+\ldots],\ d_0 \neq 0.$$

Z tego wynika, że iloraz:

(6) $$f(x)/f_1(x)=e^{g(x)}$$

gdyż jest-to widocznie funkcya bez miejsc zerowych i nieskończonościowych w skończoności, a z jednem tylko miejscem istotnem w nieskończoności. Z (6) dostajemy:

(7) $$f(x)=e^{g(x)}.f_1(x).$$

Przyjmijmy teraz, że funkcya $f(x)$ nie posiada wcale miejsc zerowych, ale za to ma skończoną ilość miejsc nieskończonościowych (leżących w skończoności):

(8) $$b_1, b_2, \ldots, b_t, \ldots, b_n \quad \text{z powtórzeniami:}$$

(9) $$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t, \ldots, \mu_n.$$

Taka funkcya posiada w otoczeniu każdego miejsca $x_0 \neq b_t$ regularny element o wolnym wyrazie $\neq 0$, a w otoczeniu każdego z miejsc b_t ma rozwinięcie postaci:

$$f(x)=\frac{1}{(x-b_t)^{\mu_t}}[c'_0+c'_1(x-b_t)+\ldots],\ c'_0 \neq 0.$$

Pomnóżmyż $f(x)$ przez:

(10) $$f_2(x)=(x-b_1)^{\mu_1}\ldots(x-b_t)^{\mu_t}\ldots(x-b_n)^{\mu_n},$$

to mieć będziemy:

(11) $$f(x).f_2(x)=e^{g(x)},$$

bo taki iloczyn jest widocznie funkcyą bez miejsc zerowych i nieskończonościowych, a z jednem tylko miejscem istotnem w nieskończoności. Z (11) dostajemy więc:

(12) $$f(x)=\frac{e^{g(x)}}{f_2(x)}.$$

Niech teraz $f(x)$ będzie funkcyą o miejscach zerowych (1) z powtórzeniami (2) i o miejscach nieskończonościowych (8) z powtórzeniami (9). Oczywiście każde b_t różne jest od a_s.

Iloczyn $f(x).f_2(x)$ będzie wprawdzie funkcyą bez miejsc nieskończonościowych, ale posiadać jeszcze będzie miejsca zerowe (1) z powtórzeniami (2). Połóżmy więc (podług (7)): $f(x).f_2(x)=e^{g_1(x)}f_1(x)$, to stąd mamy:

$$f(x)=e^{g_1(x)}.\frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \text{ albo:}$$

(13) $$f(x)=e^{g_1(x)}R(x),$$

gdzie $R(x)$ jest dowolną wymierną ułamkową funkcyą.

Z tych wszystkich uwag wynika:

I. *Funkcya jednoznaczna przestępna z miejscem istotnem w nieskończoności a ze skończoną ilością biegunów i punktów zerowych przedstawia się iloczynem, którego jeden czynnik jest $e^{g(x)}$, a drugi jest funkcya wymierna $R(x)$ posiadająca żądane miejsca zerowe i nieskończonościowe. W razie gdy $R(x)$ jest całkowitą wymierną, funkcya jest pozbawiona miejsc nieskończonościowych i jest całkowitą przestępną.*

Gdy dwie funkcye $F(x)$, $f(x)$ mają mieć te same miejsca zerowe i te same miejsca nieskończonościowe z jednakowemi powtórzeniami, a przedstawimy każdą z nich postacią (13), to z nich dostajemy:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=e^{\gamma(x)} \text{ czyli } F(x)=e^{\gamma(x)}.f(x),$$

gdzie $\gamma(x)$ jest funkcyą całkowitą. Stąd twierdzenie:

II. *Dwie funkcye jednoznaczne przestępne z jedynem miejscem istotnem w nieskończoności a z tą samą skończoną ilością tych samych miejsc zerowych i nieskończonościowych różnią się od siebie jedynie czynnikiem wykładniczym postaci $e^{g(x)}$.*

29. Przedstawienie funkcyi całkowitej przestępnej z nieskończoną ilością miejsc zerowych przez iloczyn. W tomie I. nadmieniliśmy, że możliwość istnienia całkowitych przestępnych funkcyj $f(x)$ z nieskończoną ilością miejsc zerowych nie jest wykluczoną a w Rozdziale I^{szym} tomu II^{go} już to przypuszczenie spełniło się w funkcyach trygonometrycznych wstawa i dostawa.

Zbadajmy teraz, czy z danych miejsc zerowych:

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad in\ inft.$$

z powtórzeniami:

(2) $$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

dadzą się utworzyć funkcye całkowite przestępne? Jeżeli to jest możliwem, to miejsca (1) muszą być przeliczalną mnogością bez punktów skupienia w skończoności [T. I. art. 205.]. Ten warunek spełni się widocznie, gdy założymy:

(3) $$|a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots \text{ i } \lim_{n=\infty} |a_n| = \infty,$$

która-to granica wskazuje, że mnogość (1) ma jedyny swój punkt skupienia w nieskończoności. Pierwsze miejsce a_1 przyjmiemy $\neq 0$.

Gdy utworzymy cały szereg funkcyj przestępnych pierwszych

$$E_s(x, a_s) = \left(1 - \frac{x}{a_s}\right) e^{g_s(x)} \quad s = 1, 2, 3, \ldots$$

to możemy zapytać, czy nieskończony iloczyn:

(4) $$\prod_{s=1}^{\infty} [E_s(x, a_s)]^{\lambda_s}$$

może mieć pod pewnymi warunkami znaczenie na całej płaszczyźnie argumenta x i czy się da potem rozwinąć na szereg potęgowy bezustannie zbieżny? Połóżmy:

(5) $$g_s(x) = \frac{x}{a_s} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_s}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a_s}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{\nu_s}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\nu_s} = Q_s\left(\frac{x}{a_s}\right),$$

to mamy teraz iloczyn:

(6) $$f_1(x) = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_s}\right)^{\lambda_s} e^{\lambda_s . Q_s\left(\frac{x}{a_s}\right)}$$

którego własnościami trzeba się bliżej zająć.

Przy $|x| < |a_s|$ mamy według art. 17.

$$\log\left(1 - \frac{x}{a_s}\right) = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_s}\right)^r; \text{ stąd:}$$

$$1 - \frac{x}{a_s} = e^{-\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_s}\right)^r}, \text{ a dalej}$$

(7) $$[E_s(x, a_s)]^{\lambda_s} = e^{-\lambda_s \sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_s}\right)^r} . e^{+\lambda_s \sum\limits_{r=1}^{\nu_s} \frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_s}\right)^r}$$
$$= e^{-\lambda_s \sum\limits_{r=\nu_s+1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_s}\right)^r} = e^{-\lambda_s \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_s+\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\nu_s+\mu}}.$$

Gdy teraz $|x| < |a_1|$ przyjmiemy, to formę (7) będzie można zastosować przy $s = 1, 2, 3, \ldots$, a sam iloczyn $f_1(x)$ przedstawić w postaci:

(8) $$f_1(x) = e^{-\sum\limits_{s=1}^{\infty} \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{\mu+\nu_s}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu+\nu_s}}.$$

Gdy przeciwnie $|x|<|a_n|$ i $n>1$ założymy, to ten sam iloczyn da się w ten sposób napisać:

$$(9)\qquad f_1(x)=\prod_{s=1}^{n-1}\left(1-\frac{x}{a_s}\right)^{\lambda_s}.e^{Q_s\left(\frac{x}{a_s}\right)}.e^{-\sum\limits_{s=n}^{\infty}\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{\lambda_s}{\mu+\nu_s}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu+\nu_s}}$$

a pierwszy mieszczący się tu czynnik da się — ponieważ n jest skończone — sprowadzić do formy:

$$(10)\qquad e^{G_n(x)}.\prod_{s=1}^{n-1}\left(1-\frac{x}{a_s}\right)^{\lambda_s}.$$

i jest — według uwag art. poprzedzającego — całkowitą przestępną funkcyą, którą nazwijmy $H_n(x)$. Co się tyczy podwójnej sumy:

$$(11)\qquad S_n(x)=-\sum_{s=n}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\lambda_s}{\mu+\nu_s}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu+\nu_s},$$

mieszczącej się w wykładniku drugiego czynnika w (9), to przedewszystkiem mamy:

$$|S_n(x)|<\sum_{s=n}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\lambda_s}{\mu+\nu_s}\left|\frac{x}{a_s}\right|^{\mu+\nu_s}.$$

Gdy tu po prawej stronie tej nierówności za każde $\mu+\nu_s$ położymy 1, a za wszystkie λ_s, które oczywiście są skończone, wstawimy największe z nich $=\lambda$, to wtedy tem bardziej będzie:

$$|S_n(x)|<\lambda\sum_{s=n}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_s}\right|^{\mu+\nu_s},\ \text{czyli:}$$

$$|S_n(x)|<\lambda\sum_{s=n}^{\infty}\left|\frac{x}{a_s}\right|^{\nu_s+1}.\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_s}\right|}.$$

Ponieważ tu $s=n,\ n+1,\ n+2,\ldots$, a $|x|$ ciągle $<|a_n|$ zatrzymujemy, więc wszystkie $|x/a_s|$ i wszystkie różnice $(1-|x/a_s|)$ są tu dodatnimi ułamkami właściwymi. Za wszystkie te różnice połóżmy najmniejszą z nich $=(1-|x/a_n|)$, to tem bardziej mieć będziemy:

$$|S_n(x)|<\frac{\lambda}{1-\left|\frac{x}{a_n}\right|}\sum_{s=n}^{\infty}\left|\frac{x}{a_s}\right|^{\nu_s+1},\ \text{albo:}$$

$$(12)\qquad |S_n(x)|<\frac{\lambda|x|}{1-\left|\frac{x}{a_n}\right|}\sum_{s=n}^{\infty}\frac{1}{|a_s|}.\left|\frac{x}{a_s}\right|^{\nu_s}.$$

Gdy więc ν_s tak wybierzemy, że suma $\sum_{s=n}^{\infty} \frac{1}{|a_s|} \left|\frac{x}{a_s}\right|^{\nu_s}$, a tem samem i suma:

(13) $$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{|a_s|} \cdot \left|\frac{x}{a_s}\right|^{\nu_s} = P$$

będzie bezustannie zbieżną, co jak zaraz okażemy, będzie zawsze możliwem, to wtedy wywnioskujemy: Suma:

(14) $$\sum_{s=n}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{\mu+\nu_s} \left|\frac{x}{a_s}\right|^{\mu+\nu_s} = \sum_{s=n}^{\infty} \lambda_s \left(\frac{1}{\mu_s+1} \left|\frac{x}{a_s}\right|^{\nu_s+1} + \dots \right)$$

jest dla $|x| < |a_n|$ niezawodnie zbieżną. Skutkiem tego sama suma $S_n(x)$ będzie w tym obszarze absolutnie i bezwarunkowo zbieżną. Lecz do tego dołączy się tu jeszcze i jednostajna jej zbieżność. W sumie bowiem (14) można będzie bezsprzecznie obrać tak duży wskaźnik $n+k=n_1$, że wszystkie sumy:

$$\sum_{s=n_1+t}^{\infty} \lambda_s \left(\frac{1}{\nu_s+1} \left|\frac{x}{a_s}\right|^{\nu_s+1} + \dots \right) \quad t=0, 1, 2, 3, \dots$$

okażą się dla wszelkich $|x| < |a_n|$ mniejsze od pewnej dowolnie małej obranej dodatniej ilości ε. Stąd jednak wynika, że w tym obszarze okazują się równocześnie sumy (reszty):

(15) $$|S_{n_1+t}(x)| < \varepsilon \quad t=0, 1, 2, 3, \dots$$

co dowodzi, że suma $S_n(x)$ jest dla $|x| < |a_n|$ jednostajnie zbieżną.

Z tych uwag wynika, że zamieniając drugi czynnik w (9) na iloczyn, dostaniemy iloczyn bezwarunkowo i absolutnie zbieżny w obszarze $|x| < |a_n|$. Lecz w tym obszarze można i jednostajną zbieżność sumy $S_n(x)$ przenieść na iloczyn. Mamy bowiem — wskutek nierówności (15) — dla wszelkich $|x| < |a_n|$:

(16) $$\prod_{s=n_1+t}^{\infty} [E_s(x, a_s)]^{\lambda_s} = 1+\eta, \quad t=0, 1, 2, \dots$$

gdzie $|\eta|$ można uczynić mniejsze od dowolnie małej dodatniej ilości ε', a tę własność iloczynu trzeba przez analogię z szeregami nazwać jego jednostajną zbieżnością w danym obszarze.

Lecz w formie (9) można wskaźnik n wziąć dowolnie duży. Wtedy $|a_n|$ może być większe od każdej dowolnie dużej skończonej dodatniej liczby, a warunek $|x| < |a_n|$ wskazuje, że iloczyn jest zbieżny dla wszelkich skończonych x, czyli — jak się wyrażać będziemy — jest bezustannie zbieżnym.

Iloczyn $f_1(x)$ jest zatem absolutnie, bezwarunkowo, jednostajnie i bezustannie zbieżnym pod warunkiem że ν_s, $s=1,2,3,\ldots$ tak obrano, aby suma P była bezustannie zbieżną.

Że temu warunkowi można zawsze zadość uczynić, okażemy w ten sposób: Połóżmy:

(17) $\nu_1=0,\ \nu_2=1,\ \nu_3=2,\ldots$

a w sumie P weźmy jej dodajniki w bezwzględnych ich wartościach, to mieć będziemy:

$$P_1=\frac{1}{|a_1|}+\frac{1}{|a_2|}\cdot\left|\frac{x}{a_2}\right|+\frac{1}{|a_3|}\cdot\left|\frac{x}{a_3}\right|^2+\ldots=u_1+u_2+u_3+\ldots$$

Żądając, aby tu granica ilorazu:

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{u+1}}{u_n}=\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right|^{n+1}\frac{|x|}{|a_{n+2}|}$$

była <1, dostajemy warunek:

$$|x|<\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|^{n+1}\cdot|a_{n+2}|,$$

a temu każda skończona wartość x zadość uczyni, gdyż:

$$\lim_{n=\infty}|a_{n+2}/a_{n+1}|=1,\ \lim_{n=\infty}|a_{n+2}|=\infty.$$

Z tego wynika, że suma P jest — gdy ν_s mają wartości (17) — istotnie bezustannie zbieżną.

Nie jest jednak wykluczone, że w pewnych wypadkach można będzie jednostajną zbieżność sumy P uzyskać przy samych skończonych ν_s. Wtedy bez naruszenia tej zbieżności można za wszystkie ν_s użyć największego z nich $=m$, tak, że teraz suma

$$P=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{a_s}\left(\frac{x}{a_s}\right)^m=x^m\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{a_s^{m+1}}$$

okazuje się bezustannie zbieżną. To się widocznie spełnia, gdy szereg:

(18) $$A=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{a_s^{m+1}}$$

przy pewnem obranem m okazuje się bezwarunkowo (i absolutnie) zbieżny.

Z tego wynika, że tworząc iloczyn $f_1(x)$ można przedewszystkiem badać, czy przy pewnem najmniejszem obranem $m=0,1,2,\ldots$ nie okazuje się szereg A bezwarunkowo zbieżnym.

Gdy tak jest w istocie, to można wszystkim ν_s dać wartość $=m$, a we wszystkich funkcyach pierwszych $E_s(x,a_s)$ położyć:

$$(19) \qquad Q_s\left(\frac{x}{a_s}\right)=\frac{x}{a_s}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_s}\right)^2+\ldots+\frac{1}{m}\left(\frac{x}{a_s}\right)^m.$$

Taki iloczyn $f_1(x)$ nazywamy iloczynem o rzędzie m.

30. Zamiana iloczynu na bezustannie zbieżny szereg. Przejdźmy teraz do drugiej części postawionego pytania, a to do zamiany iloczynu na szereg. Sumy $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x), \ldots$ są odpowiednio w zakresach $|x|<|a_1|$, $|x|<|a_2|$, $|x|<|a_3|, \ldots$ jednostajnie zbieżne dadzą się więc zamienić na szeregi potęgowe:

$$-\mathfrak{P}_1(x), \quad -\mathfrak{P}_2(x), \quad -\mathfrak{P}_3(x), \ldots$$

zbieżne w tych zakresach. Wskutek tego możemy napisać:

$$f_1(x)=e^{-\mathfrak{P}_1(x)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu.\frac{[\mathfrak{P}_1(x)]^\nu}{\nu!} \quad \text{albo:}$$

$$f_1(x)=H_n(x).e^{-\mathfrak{P}_n(x)}=H_n(x)\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{[\mathfrak{P}_n(x)]^\nu}{\nu!}.$$

Każda z sum $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}$ jest w otoczeniu punktu $x=0$ jednostajnie zbieżną: pierwsza w zakresie $|x|<|a_1|$, druga w zakresie $|x|<|a_n|$. Można zatem położyć $f_1(x)=\mathfrak{P}(x)$ albo $f_1(x)=\mathfrak{P}^{(n)}(x)$, przy czem szeregi $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ muszą być identyczne. Spółczynniki jednak pierwszego z tych szeregów nie zależą od n, a więc i spółczynniki drugiego szeregu $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ nie zawierają w sobie parametru n.

Pozostaje on więc statecznie tej samej postaci, jakkolwiek duże wybierzemy n, a że wtedy warunek $|x|<|a_n|$ ogranicza x do wszelkich punktów leżących w skończoności, więc $f_1(x)=\mathfrak{P}(x)$ jest bezustannie zbieżnym szeregiem, czyli jest funkcyą przestępną całkowitą. Z tej całej dedukcyi wynika:

I. *Gdy dane są miejsca a_s w nieskończonej mnogości o takiej własności, że:*

$$|a_1|<|a_2|<|a_3|<\ldots, \quad |a_1|>0, \quad \lim_{n=\infty}|a_n|=\infty,$$

to można zawsze utworzyć pewną całkowitą przestępną funkcyę $f_1(x)$ o miejscach zerowych a_s z danemi powtórzeniami λ_s, a to za pośrednictwem nieskończonego, bezwarunkowo, absolutnie, jednostajnie i bezustannie zbieżnego iloczynu:

$$\prod_{s=0}^{\infty}[E_s(x, a_s)]^{\lambda_s},$$

w którym $E_s(x, a_s)$ są funkcyami pierwszemi, przestępnemi.

Ten rezultat dozwoli teraz przejść do każdej dowolnej funkcyi przestępnej całkowitej $f(x)$ o miejscach zerowych a_s z powtórzeniami λ_s. Oczywiście a_s muszą zadość uczynić warunkowi (3). [art. poprz.]. Utwórzmy bowiem:

$$f_1(x)=\prod_{s=1}^{\infty}[E_s(x, a_s)]^{\lambda_s},$$

to iloraz $f(x)/f_1(x)$ będzie funkcyą przestępną całkowitą bez miejsc zerowych; da się więc w każdym razie wyrazić w postaci $e^{g(x)}$. Stąd wynika $f(x)=e^{g(x)}.f_1(x)$, a przyjmując, że $f(x)$ ma mieć jeszcze i miejsce zerowe $x=0$ z powtórzeniem λ, dostajemy:

$$f(x)=x^{\lambda}.e^{g(x)}.\prod_{s=1}^{\infty}[E_s(x, a_s)]^{\lambda_s}.$$

Stąd twierdzenie:*)

II. *Każdą funkcyę przestępną całkowitą $f(x)$ z λ_s-krotnemi miejscami zerowemi a_s określonemi w tw. I. można wyrazić nieskończonym iloczynem $f_1(x)$ z dobrze dodanym zewnętrznym czynnikiem $e^{g(x)}$ i czynnikiem x^{λ}, jeżeli $f(x)$ ma być $=0$ razy λ na miejscu $x=0$.*

31. Logarytmiczna pochodna iloczynu. Rząd iloczynu. Zauważmy identyczność:

$$\frac{1}{x-a_s}=-\frac{1}{a_s}.\frac{1}{1-\frac{x}{a_s}},$$

— gdzie a_s są miejscami zerowemi funkcyi $f(x)$ — to, przyjmując $|x|<|a_s|$, mamy stąd:

$$\frac{1}{x-a_s}=-\frac{1}{a_s}\left(1+\frac{x}{a_s}+\ldots+\frac{x^{\nu_s-1}}{a_s^{\nu_s-1}}\right)-\frac{1}{a_s}.\frac{x^{\nu_s}}{a_s^{\nu_s}}.\frac{1}{1-\frac{x}{a_s}},$$

albo:

$$\frac{1}{x-a_s}=-\left(\frac{1}{a_s}+\frac{x}{a_s^2}+\frac{x^2}{a_s^3}+\ldots+\frac{x^{\nu_s-1}}{a_s^{\nu_s}}\right)+\frac{x^{\nu_s}}{a_s^{\nu_s}}.\frac{1}{x-a_s}, \tag{1}$$

gdzie x nie potrzebuje być ograniczone, a ν_s są tu liczbami jeszcze nieoznaczonemi. Połóżmy:

$$\frac{1}{a_s}+\frac{x}{a_s^2}+\ldots+\frac{x^{\nu_s-1}}{a_s^{\nu_s}}=P_s(x),$$

to za (1) napiszemy:

---

*) Weierstrass. *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen (Abhandlungen)...* (1886) str. 1—27.

Casorati. *Aggiunte a recenti lavori dei sig. Weierstrass... Annali di mathematica pura ed applicata.* T. 10. — Serya II. (1880—82) str. 261....

$$(2)\qquad \frac{1}{x-a_s}+P_s(x)=\frac{x^{\nu_s}}{a_s^{\nu_s}}\,\frac{1}{x-a_s}.$$

Sumując tu od $s=1$ do $s=\infty$ mamy:

$$(3)\qquad \begin{aligned}\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s\left(\frac{1}{x-a_s}+P_s(x)\right)&=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\nu_s}\cdot\frac{1}{x-a_s}\\ &=\sum_{s=1}^{n-1}\lambda_s\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\nu_s}\frac{1}{x-a_s}+\sum_{s=n}^{\infty}\lambda_s\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\nu_s}\frac{1}{x-a_s}.\end{aligned}$$

Pierwsza z tych sum jest wymierną funkcyą o jednokrotnych miejscach nieskończonościowych $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$. Co się tyczy drugiej sumy, to zakładając $|x|<|a_n|$ i pisząc ją w postaci:

$$-\sum_{s=n}^{\infty}\lambda_s\frac{x^{\nu_s}}{a_s^{\nu_s+1}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{a_s}}=S'_n(x),$$

mamy stąd odrazu:

$$|S'_n(x)|<\sum_{s=n}^{\infty}\lambda_s\left|\frac{x^{\nu_s}}{a_s^{\nu_s+1}}\right|\cdot\frac{1}{\left|1-\dfrac{x}{a_s}\right|}.$$

Połóżmy tu wszędzie za λ_s największą z tych liczb $=\lambda$, a za $\left|1-\dfrac{x}{a_s}\right|$ połóżmy wszędzie:

$$1-\left|\frac{x}{a_s}\right|<\left|1-\frac{x}{a_s}\right|,$$

to dostajemy:

$$|S'_n(x)|<\lambda\sum_{s=n}^{\infty}\left|\frac{x^{\nu_s}}{a_s^{\nu_s+1}}\right|\cdot\frac{1}{1-\left|\dfrac{x}{a_s}\right|}.$$

Za wszystkie $1-\left|\dfrac{x}{a_s}\right|$ połóżmy tu najmniejsze z nich $=1-\left|\dfrac{x}{a_n}\right|$, to tem bardziej będzie:

$$|S'_n(x)|<\frac{\lambda}{1-\left|\dfrac{x}{a_n}\right|}\sum_{s=n}^{\infty}\frac{1}{|a_s|}\cdot\left|\frac{x}{a_s}\right|^{\nu_s}.$$

a stąd wynika, że suma $S'_n(x)$ będzie w obszarze $|x|<|a_n|$ jednostajnie i bezwarunkowo zbieżną, gdy sumę P [art. poprz.] stosownem wyborem liczb ν_s uczyniono już bezustannie zbieżną.

Z tego wnosimy, że także suma:

$$(4)\qquad \frac{\lambda}{x}+\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s\left(\frac{1}{x-a_s}+P_s(x)\right)=U(x)$$

jest w całym obszarze skończonych wartości x po wyjęciu punktów $x=0$, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezwarunkowo i jednostajnie zbieżną, czyli jest funkcyą analityczną, jednoznaczną o jednokrotnych miejscach nieskończonościowych $0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ *).

Mając to, wróćmy do funkcyi $f(x)$, art. poprzedz., o miejscach zerowych $0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, z powtórzeniami $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, przyczem — jak przódy — $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$.

Jej element w otoczeniu punktu a_s ma postać:

$$f(x)=(x-a_s)^{\lambda_s}\mathfrak{P}_s(x-a_s)$$

gdzie $\mathfrak{P}_s(0) \neq 0$ jest. Z niego mamy:

$$f'(x)=\lambda_s(x-a_s)^{\lambda_s-1}\mathfrak{P}_s(x-a_s)+(x-a_s)^{\lambda_s}\mathfrak{P}_s'(x-a_s)$$

a stąd na logarytmiczną pochodnę $\varphi(x)$ samej funkcyi $f(x)$ w otoczeniu miejsca a_s dostajemy:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\lambda_s}{x-a_s}+\overline{\mathfrak{P}}_s(x-a_s).$$
$$s=1, 2, 3, \ldots$$

Utwórzmy różnicę $\frac{f'(x)}{f(x)} - U(x)$, to ona widocznie nietylko w otoczeniu punktów $x \neq a_s$, ale i w otoczeniu samych punktów $0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ daje się rozwijać na zwykłe szeregi potęgowe; jest więc całkowitą wymierną, albo przestępną funkcyą. Połóżmyż:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - U(x)=g'(x) \tag{5}$$

to stąd odrazu wynika:

I. *Gdy dana jest funkcya $\varphi(x)$, która okazuje się logarytmiczną pochodną pewnej funkcyi całkowitej przestępnej $f(x)$ z nieskończoną ilością miejsc zerowych, to zawsze można utworzyć taką, jednoznaczną, analityczną funkcyę $U(x)$, że $\varphi(x)$ da się przedstawić w postaci:*

$$\varphi(x)=g'(x)+U(x) \tag{6}$$

z dobrze oznaczoną całkowitą (przestępną, lub wymierną) funkcyą $g'(x)$.

W $U(x)$ należącem do funkcyi $f(x)$ rzędu m^{go} będą wszystkie $P_s(x)$ stopnia $(m-1)^{go}$. Stąd wynika, że:

$$\lim_{x=\infty}\frac{P_s(x)}{x^m}=0, \quad s=1, 2, \ldots,$$

---

*) $x=\infty$ jest punktem istotnie szczególnym jako miejsce skupienia punktów nieskończonościowych a_s.

a że wtedy także $\lim\limits_{x=\infty}\frac{\lambda}{x^{m+1}}=0$, jeżeli $f(0)=0$, więc ostatecznie będzie:

(7) $$\lim_{x=\infty}\frac{U(x)}{x^m}=\lim_{x=\infty}\frac{1}{x^m}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda_s}{x-a_s}.$$

Owe nieskończone x poddajmy warunkowi:

(8) $$\lim_{\substack{x=\infty\\ n=\infty}}|x-a_n|=\infty,$$

(którego znaczeniem zaraz się zajmiemy), to wtedy suma:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{|\lambda_s|}{|x-a_s|}\frac{1}{|x|^m}=0,$$

gdyż każdy jej dodajnik bez wyjątku jest zerem. Równocześnie z nią będzie:

$$\lim_{x=\infty}\frac{U(x)}{x^m}=0,$$

a z tego — według (5) — wynika, że:

$$\lim_{x=\infty}\frac{f'(x)}{x^m f(x)}=\lim_{x=\infty}\frac{g'(x)}{x^m}.$$

Aby warunek (8), wytłómaczyć, przyjmijmy że same a_s (a nie ich bezwzględne wartości) zbliżają się do kilku granic:

$$\lim_{n=\infty} a_n=Re^{\omega_t i},\ t=1,2,3,...,$$

w których $R=\infty$. Obierzmy x w postaci $x=Re^{\varphi i}$ to mamy:

$$x-a_n=R(e^{\varphi i}-e^{\omega_t i})$$

a tu φ można będzie na nieskończenie wiele sposobów tak wybrać, aby różnice $\varphi-\omega_t$ nie zbliżały się dowolnie do zera, lub do wielokrotności liczby 2π. Wtedy i różnice $|e^{\varphi i}-e^{\omega_t i}|$ nie będą nieskończenie małe, a warunek (8) już się spełni. Takie x określić można jako miejsce niezbliżające się dowolnie do granic $\lim\limits_{n=\infty} a_n$, a stąd twierdzenie:

II. *Gdy $f(x)$ jest rzędu m^{go}, to na wszystkich miejscach $x=\infty$ nieprzybliżających się dowolnie do granic $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ dostajemy:*

(9) $$\lim_{x=\infty}\frac{f'(x)}{x^m f(x)}=\lim_{x=\infty}\frac{g'(x)}{x^m},$$

a gdy w jakikolwiek sposób już wywnioskowano, że $g'(x)$ ma być wymierną funkcyą stopnia $<m$, to w takim razie jest:

(10) $$\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{x^m f(x)} = 0^*).$$

Własność tę posiadać będzie każda funkcya $f(x)$ rzędu m^{go}, a o czynniku zewnętrznym redukującym się do stałej ilości. Taką funkcyę nazywamy za Vivanti'm prostą funkcyą rzędu m^{go}. Liczba m jest oczywiście najmniejsza wyjęta z szeregu liczb $0, 1, 2, 3, \ldots$ a powodująca znikanie granicy (10).

Na tem przerwiemy te teoretyczne rozważania, aby twierdzenia i formy tu wyprowadzone zastosować do znanych, elementarnych funkcyj trygonometrycznych. W późniejszym dopiero artykule wykończymy teoryę i dojdziemy do zamierzonego celu t. j. do utworzenia najogólniejszej formy przedstawiającej jednoznaczną analityczną funkcyę z jednem tylko miejscem istotnie szczególnem.

*

* *

32. Funkcya $\sin \pi x$. Funkcya $\sin \pi x$ posiada jednokrotne miejsca zerowe $a_s=$

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \nu, \ldots$$

a — po opuszczeniu miejsca $x=0$ — okazuje się tu suma:

$$A = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\nu^{m+1}}$$

bezwarunkowo zbieżną już dla $m=1$. Można zatem wszystkim ν_s nadać wartość $=1$, i położyć:

(1) $$\sin \pi x = e^{g(x)} \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) e^{\frac{x}{\nu}}$$

gdzie kreska nad Π przypomina, że w iloczynach czynnik z $\nu=0$ opuścić trzeba. Funkcya $\sin \pi x$ jest więc rzędu $m=1$, a jej miejsca zerowe dążą do rzeczywistych granic:

(2) $$\lim (\pm \nu) = \pm \infty.$$

Funkcye $P_s(x)$ są tu postaci $\frac{1}{\nu}$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$ a stąd — podług tw. I., art. poprzedz., albo wprost z równania (1) — dostajemy:

*) Laguerre. *Sur la détermination du genre d'une fonction transcendente entière.* C. R. T. 94. (1882.), str. 635—638. *Sur les fonctions du genre zéro et du genre un.* C. R. T. 95. (1882.) str. 828—831.

Sparre. *Sur la détermination du genre d'une fonction holomorphe dans quelques cas particuliers.* C. R. T. 102. (1686). str. 740—743.

$$(3)\qquad \frac{d}{dx} \log \sin \pi x = \pi \cot g\, \pi x = g'(x) + \frac{1}{x} + \sum{}' \frac{x}{\nu} \cdot \frac{1}{x-\nu}.$$

Sumowanie odbywa się tu (i wszędzie poniżej) od $\nu = -\infty$ do $\nu = +\infty$, a kreska nad znakiem sumy wskazuje znowu, że dodajnik z $\nu = 0$ opuścić trzeba.

Obierzmy $x = \infty$ w postaci $\pm\xi + \infty\, i$, gdzie ξ jest dowolną, skończoną liczbą rzeczywistą, to takiemi x nie przybliżamy się dowolnie do granic (2), a stąd — [tw. II., art. poprzedz.], wynika:

$$(4)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{\pi \cot g\, \pi x}{x} = \lim_{x=\infty} \frac{g'(x)}{x}.$$

Lecz w art. 5. — Pd. 3. — okazaliśmy, że $\cot g\, x$ dla x nieskończenie wielkich, a mających postać tu przyjętą, dąży do skończonych granic $\mp i$. To samo odnieść trzeba i do $\cot g\, \pi x$, tak że w (4) po lewej stronie mamy zero, a skutkiem tego będzie $\lim\limits_{x=\infty} [g'(x)/x] = 0$. To wskazuje, że $g'(x) = a = const.$, a sama funkcya $g(x)$ miałaby być $= ax + b$, gdzie b jest znowu stałą ilością. Uwzględniając $g'(x) = a$ mamy teraz z (3):

$$(5)\qquad \pi \cot g\, \pi x = a + \frac{1}{x} + \sum{}' \frac{x}{\nu} \cdot \frac{1}{x-\nu},$$

a wartość stałej a można tu w dwojaki sposób obliczyć:

I⁰. Rozwijając (5) w otoczeniu punktu $x=0$, mielibyśmy:

$$\pi \cot g\, \pi x = \frac{1}{x} + a + c_0 x + c_1 x^3 + \ldots$$

Lecz z drugiej strony rozwinięty iloraz:

$$\pi \cot g\, \pi x = \pi \cdot \frac{1 - \dfrac{\pi^2 x^2}{2!} + \ldots}{\dfrac{\pi x}{1!} - \dfrac{\pi^3 x^3}{3!} + \ldots}$$

w otoczeniu punktu $x=0$ nie zawiera wolnego wyrazu. Stąd wynika, że $a=0$ być musi.

II⁰. Ponieważ $\cot g\, \pi x$ jest funkcyą nieparzystą, więc zmieniając w (5) x na $-x$ dostaniemy tam po lewej stronie $-\pi \cot g\, \pi x$. Po prawej stronie suma Σ' przejdzie na:

$$(a)\qquad + \sum{}' \frac{x}{\nu} \cdot \frac{1}{x+\nu}.$$

Że zaś tu sumuje się od $-\infty$ do $+\infty$, więc można w (a) bez zmiany tej sumy położyć wszędzie $-\nu$ za $+\nu$. Po tej zmianie mieć będziemy:

$$-\sum{}' \frac{x}{\nu} \cdot \frac{1}{x-\nu},$$

a równanie (5) przybierze postać:

(6) $$-\pi \, cotg \, \pi x = a - \frac{1}{x} - \sum{}' \frac{x}{\nu} \cdot \frac{1}{x-\nu}.$$

Dodając (5), (6) do siebie dostajemy $2a=0$, czyli: $a=0$.

Z tego wynika, że:

(A) $$\pi \, cotg \, \pi x = \frac{1}{x} + \sum{}' \left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{\nu}\right)$$ albo:

(A') $$\pi \, cotg \, \pi x = \frac{1}{x} + \sum{}' \frac{x}{\nu} \cdot \frac{1}{x-\nu},$$

że $g(x)$ redukuje się do stałej b i że wreszcie:

(7) $$\sin \pi x = x . e^b \Pi' \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) e^{\frac{x}{\nu}}$$
$$\nu = \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Rozwinięcie lewej strony zaczyna się tu od πx; rozwinięcie zaś iloczynu ma jako wyraz początkowy $e^b . x$. Musi więc być $e^b = \pi$, a stąd wynika:

(8) $$\sin \pi x = \pi x . \prod{}' \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) e^{\frac{x}{\nu}},$$

który to iloczyn o funkcyach pierwszych $\left(1 - \frac{x}{\nu}\right) e^{\frac{x}{\nu}}$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$ jest bezwarunkowo, absolutnie, jednostajnie i bezustannie zbieżny.

Za uporządkowaniem iloczynu (8) w ten sposób, że co dwa czynniki o jednakowem $|\nu|$ mnożymy ze sobą, dostajemy formułę:

(9) $$\sin \pi x = \pi x . \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right)$$

którą już Euler znalazł. Jest ona w swoich czynnikach bezwarunkowo zbieżną, bo szereg $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ jest w ten sposób zbieżny. Przedstawienie iloczynu (9) przez czynniki $\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)$, $\left(1 - \frac{x}{\nu}\right)$ nie jest dozwolone bez przydania tym czynnikom funkcyj wykładniczych $e^{\frac{x}{\nu}}$, $e^{-\frac{x}{\nu}}$.

Połóżmy:

(α) $$F_n(x) = \pi x . \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right)$$
$$= A_n x (x-1)(x-2) \ldots (x-n)(x+n) \ldots (x+1),$$

co przy skończonem n jest dozwolone i połóżmy tu $(x+1)$ za x, to dostaniemy:

$$F_n(x+1)=A_n(x+1)\,x(x-1)\ldots(x-\overline{n-1})(x+\overline{n+1})\ldots(x+2)$$

czyli:

$$F_n(x+1)=F_n(x).\frac{x+n+1}{x-n}.$$

Zmieniając przy każdem n funkcyę $F_n(x)$ na iloczyn (α), dostaniemy stąd przy $n=\infty$:

$$\sin\pi(x+1)=\sin\pi x.\lim_{n=\infty}\frac{x+n+1}{x-n}\quad\text{czyli:}$$

$$\sin\pi(x+1)=-\sin\pi x.$$

Dalej mieć będziemy:

$$\sin\pi(x+2)=\sin\pi x,$$

co wskazuje, że $\sin\pi x$ ma peryod: 2, a funkcya $\sin x$ peryod: 2π *).

33. Funkcya $\cos\pi x$. Przykłady. Zajmijmy się teraz funkcyą $\cos\pi x$. Jej miejsca zerowe są:

$$\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\ldots,\pm\frac{2\nu+1}{2},\ldots,$$

a że szereg:

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{m+1}}$$

jest absolutnie zbieżny już przy $m=1$ przeto iloczyn, jakim będzie można przedstawić funkcyę $\cos\pi x$ będzie rzędu $m=1$.

Co się tyczy zewnętrznego czynnika $e^{g(x)}$, to zupełnie analogiczną drogą, jak w wywodzie funkcyi $\sin\pi x$, wywnioskujemy, że: $g(x)=0$, a więc i $g'(x)=0$.

Mieć więc będziemy:

$$\cos\pi x=\prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{2x}{2\nu+1}\right)e^{\frac{2x}{2\nu+1}} \tag{1}$$

albo:

$$\cos\pi x=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2\nu-1)^2}\right). \tag{2}$$

Logarytmiczna pochodna formy (1) daje:

$$-\pi\,tg\,\pi x=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{x-\frac{2\nu+1}{2}}+\frac{2}{2\nu+1}\right| \tag{B}$$

$$=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{(2\nu+1)\left(x-\frac{2\nu+1}{2}\right)},\ \text{albo:}$$

---

*) Hermite. *Cours d'Analyse* (1881.) str. 70., 71.

$$(B')\qquad \pi\, tg\, \pi x = -\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{4x}{(2\nu+1)(2x-(2\nu+1))}.$$

To samo można by dostać, postępując podług tw. I. art. 31., uwzględniając, że tu $g'(x)=0$.

Pd. 1. Utwórzmy: $\sin \pi(x-a) = \pi(x-a)\, \Pi' \left(1-\frac{x-a}{\nu}\right) e^{\frac{x-a}{\nu}}$,

to dokonywując tu w każdym pierwszym czynniku przerobień:

$$1-\frac{x-a}{\nu} = \frac{\nu-x+a}{\nu} = \frac{\nu+a}{\nu}\left(1-\frac{x}{\nu+a}\right) = \left(1+\frac{a}{\nu}\right).\left(1-\frac{x}{\nu+a}\right),$$

dostajemy:

$$\sin \pi(x-a) = -\pi a\left(1-\frac{x}{a}\right)\Pi'\left(1+\frac{a}{\nu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu+a}\right)e^{\frac{x-a}{\nu}}.$$

W każdej wykładniczej funkcyi przeróbmy wykładnik w ten sposób:

$$\frac{x-a}{\nu} = -\frac{a}{\nu}+\frac{x}{\nu}+\frac{x}{\nu+a}-\frac{x}{\nu+a}$$

to mieć będziemy:

$$(3)\qquad \sin \pi(x-a) = \\ = -\pi a\left(1-\frac{x}{a}\right)\Pi'\left(1+\frac{a}{\nu}\right)e^{-\frac{a}{\nu}}\left(1-\frac{x}{\nu+a}\right)e^{\frac{x}{\nu+a}}.e^{x\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+a}\right)}.$$

Tutaj każdy z iloczynów:

$$1^0\qquad -\pi a.\,\Pi'\left(1+\frac{a}{\nu}\right)e^{-\frac{a}{\nu}} = \sin(-\pi a) = -\sin \pi a,$$

$$2^0\qquad \left(1-\frac{x}{a}\right)\Pi'\left(1-\frac{x}{\nu+a}\right)e^{\frac{x}{\nu+a}},$$

$$3^0\qquad \Pi'\, e^{x\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+a}\right)} = e^{x\Sigma'\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+a}\right)}$$

jest bezwarunkowo i jednostajnie zbieżny, a stąd wynika, że (3) także tak napisać można:

$$\frac{\sin \pi(x-a)}{-\sin \pi a} = e^{x\Sigma'\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+a}\right)}.\left(1-\frac{x}{a}\right)\Pi'\left(1-\frac{x}{\nu+a}\right)e^{\frac{x}{\nu+a}}.$$ Zważywszy, że:

$$\sum{}'\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+a}\right) = \sum{}'\frac{a}{\nu(a+\nu)} = \sum{}'\frac{-a}{\nu(-a-\nu)}$$

$$= -\pi\, cotg\, \pi a + \frac{1}{a}$$ [podług (A') art. poprzedz.] dostaniemy:

$$\frac{\sin \pi(x-a)}{-\sin \pi a} = \left(1-\frac{x}{a}\right)e^{\frac{x}{a}}\,\Pi'\left(1-\frac{x}{\nu+a}\right)e^{\frac{x}{\nu+a}}.\,e^{-\pi x\, cotg\, \pi a}$$

a stąd wynika wzór:

$$(C)\qquad \Pi\left(1-\frac{x}{\nu+a}\right)e^{\frac{x}{\nu+a}} = \frac{\sin \pi(x-a)}{-\sin \pi a}e^{\pi x.\, cotg\, \pi a}$$

gdzie już w iloczynie Π mamy $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Pd. 2. Okazać, że:

$$(C')\qquad \Pi\left(1-\frac{x}{\frac{2\nu+1}{2}+a}\right)e^{\frac{x}{\frac{2\nu+1}{2}+a}}=\frac{\cos\pi(x-a)}{\cos\pi a}e^{\pi x\,tg\,\pi a}.$$

Uwaga 1. We wzorze (C) nie ma być a identyczne z żadnem z miejsc ν, a we wzorze (C') z żadnem z miejsc $\frac{2\nu+1}{2}$.

Uwaga 2. Wzory (C), (C') można wyprowadzić także w taki sposób: Ponieważ

$$\pi\,cotg\,\pi(x-a)=\frac{d}{dx}\log\sin\pi(x-a)$$

i ma miejsca nieskończonościowe jednokrotne $x=\nu+a$, $\nu=0, \pm1, \pm2,\ldots$, a te są zarazem miejscami zerowemi całkowitej funkcyi $\sin\pi(x-a)$ rzędu $m=1$, więc podług tw. I. — art. 31. — położyć można:

$$(D)\qquad \pi\,cotg\,\pi(x-a)=g'(x)+\sum\left(\frac{1}{x-(\nu+a)}+\frac{1}{\nu+a}\right).$$

Dzieląc obustronnie przez $x=u+vi$ i zakładając u skończone, a v nieskończone, dostajemy d l a t a k i c h x iloraz $g'(x)/x=0$ [art. 5. Pd. 3.]. A więc $g'(x)=const$ przy każdem x; że zaś dla $x=0$ mamy z (D): $g'(x)=\pi\,cotg(-\pi a)$, więc

$$\frac{d}{dx}\log\sin\pi(x-a)=-\,cotg\,\pi a+\sum\left(\frac{1}{x-(\nu+a)}+\frac{1}{\nu+a}\right),$$

a z tego równania dojdziemy już do wzoru (C). Analogicznie będzie:

$$-\pi\,tg\,\pi(x-a)=\frac{d}{dx}\log\cos\pi(x-a)$$

$$(E)\qquad =\pi\,tg\,\pi a+\sum\left(\frac{1}{x-\left(\frac{2\nu+1}{2}+a\right)}+\frac{1}{\frac{2\nu+1}{2}+a}\right),$$

a stąd wyniknie wzór (C'). Sumowania w (D) i w (E) odnoszą się do $\nu=0, \pm1, \pm2,\ldots$

Pd. 3. Przedstawić funkcye:

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

przez iloczyny bezustannie zbieżne. (Pierwsza z tych funkcyj jest $=-i\sin x i$, druga zaś $=-\cos x i$).

Pd. 4. Najprostszą z funkcyj o jednokrotnych miejscach zerowych $\pm\omega$, $\pm2^2\omega$, $\pm3^2\omega,\ldots$ a dwukrotnem miejscu $x=0$ jest:

$$f(x)=C.x.\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\nu^2\omega}\right).\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\nu^2\omega}\right)$$

$$=C.x^2.\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{\omega}}\right)^2}{\nu^2}\right)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\left(i\sqrt{\frac{x}{\omega}}\right)^2}{\nu^2}\right).$$

Za stosownem doborem stałej C będzie:

$$f(x)=\sin\pi\sqrt{\frac{x}{\omega}}\,.\,\sin\pi i\sqrt{\frac{x}{\omega}}\quad \text{[Forsyth].}$$

Pd. 5. Najprostszą funkcyą o miejscach zerowych:

$$a_\nu = +\nu^{\frac{1}{4}} i,\ -\nu^{\frac{1}{4}} i,\ +\nu^{\frac{1}{4}},\ -\nu^{\frac{1}{4}},$$

$$\nu = 1, 2, 3, \ldots$$

a pozbawioną zewnętrznego czynnika, będzie

$$f(x) = \Pi\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\frac{x}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^4}.$$

Pd. 6. Korzystając z wzorów (C), (C') przedstawić funkcye:

$$(a) \qquad \frac{\cos\pi x + \cos\pi a}{1 + \cos\pi a} = \frac{\cos\pi\left(\frac{x+a}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\cos^2\pi . \frac{a}{2}}$$

$$(b) \qquad \frac{\cos\pi x - \cos\pi a}{1 - \cos\pi a} = -\frac{\sin\pi\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin^2\pi\frac{a}{2}}$$

$$(c) \qquad \frac{\sin\pi x - \sin\pi a}{\sin\pi a} = \frac{\sin\pi\left(\frac{x+a}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\pi\frac{a}{2} . \cos\pi\frac{a}{2}}$$

$$(d) \qquad \frac{\sin\pi x - \sin\pi a}{\sin\pi a} = \frac{\sin\pi\left(\frac{x+a}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\cos\pi\frac{a}{2} . \sin\pi\frac{a}{2}}$$

przez nieskończone (bezustannie zbieżne) iloczyny — (B i e r m a n n).

34. Liczby Bernoulli'ego. Szeregi S_{2k}, T_{2k}, U_{2k}. Chcąc rozwinąć iloczyn przedstawiający $\sin\pi x$ na szereg, możemy do tego użyć jego formy (9) art. 32., a gdy jeszcze i lewą stroną w (9) rozwiniemy, otrzymamy:

$$\frac{\pi x}{1!} - \frac{\pi^3 x^3}{3!} + \frac{\pi^5 x^5}{5!} - \frac{\pi^7 x^7}{7!} + \ldots$$

$$= \pi x . \left[1 - x^2 \sum{}' \frac{1}{\nu^2} + x^4 \sum{}' \frac{1}{\nu_1{}^2 . \nu_2{}^2} - x^6 \sum{}' \frac{1}{\nu_1{}^2 \nu_2{}^2 \nu_3^2} + \ldots\right]$$

gdzie w sumach Σ' mieszczące się ν_1, ν_2, ... są w każdym dodajniku różne między sobą, a wyjmują się z szeregu liczb: 1, 2, 3, ..., *in inft.* Stąd przez porównywanie dostajemy:

$$\sum{}' \frac{1}{\nu_1{}^2 . \nu_2{}^2 \ldots \nu_k{}^2} = c_k = \frac{\pi^{2k}}{(2k+1)!} \quad \text{Położmyż:} \sum{}' \frac{1}{\nu^{2k}} = S_{2k}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots,$$

to między c_k, a S_{2k} zajdą tu takie same związki, jak między elementarnemi funkcyami symetrycznemi, a sumami równych potęg pierwiastków, [T. I. art. 88., (B)] a mianowicie:

(a) $S_2-c_1=0,\ S_4-c_1S_2+2c_2=0,\ S_6-c_1S_4+c_2S_2-3c_3=0, \dots$

Z k pierwszych tych równań obliczając S_{2k}, dostajemy:

$$(b)\qquad S_{2k}=\begin{vmatrix} c_1, & 2c_2, & 3c_3, & \dots, & kc_k \\ 1 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} \\ 0 & 1 & c_1 & \dots & c_{k-2} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_1 \end{vmatrix}$$

Z równań (a) mamy:

$$S_2=\frac{\pi^2}{3!}=\frac{1}{6}\,\frac{2\pi^2}{2!}=B_1.\frac{2\pi^2}{2!},\ B_1=\frac{1}{6}$$

$$S_4=\frac{\pi^4}{2^2.3^2}-2\frac{\pi^4}{5!}=B_2.\frac{2^3\pi^4}{4!},\ B_2=\frac{1}{30}$$

$$: : : : : : : : : : : : : : :$$

$$(c)\qquad S_{2k}=B_k.\frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}.$$

Gdy więc równania (a) podzielimy po porządku przez $\pi^2, \pi^4, \pi^6, \dots$ i uwzględnimy: $\frac{c_k}{\pi^{2k}}=\frac{1}{(2k+1)!}$ i relacyę (c), to mieć będziemy:

$$(d)\qquad B_k=\frac{(2k)!}{2^{2k-1}}.\begin{vmatrix} \frac{1}{3!}, & 2.\frac{1}{5!}, & 3.\frac{1}{7!}, & \dots k.\frac{1}{(2k+1)!} \\ 1\ , & \frac{1}{3!}\ , & \frac{1}{5!}, & \dots, \frac{1}{(2k-1)!} \\ 0\ , & 1\ , & \frac{1}{3!}, & \dots, \frac{1}{(2k-3)!} \\ \vdots & & & \\ 0\ , & 0\ , & 0\ , & \dots, \frac{1}{3!} \end{vmatrix}$$

$$k=1, 2, 3, \dots$$

Taki jest ogólny wzór na spółczynniki B_k; nazywają się one liczbami Bernoulli'go, a mają po porządku wartości:

(e) $B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},\ B_6=\frac{691}{2730}$ i t. d.*)

Oprócz szeregów S_{2k} trzeba jeszcze uwzględnić szeregi:

$$T_{2k}=\frac{1}{1^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\dots,$$

---

*) A. Stern dowodzi [C. J. T. 92.], że liczby te — począwszy od czwartej — wciąż rosną. Z nowszych prac o liczbach Bernoulli'ego i Eulera czytaj: Worpitzky. Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen. C. J. T. 94. str. 203—232... Por. także: A. Berger. *Acta math.* T. 14. str. 225—232.

które w ten sposób obliczyć można. Ponieważ:

$$\frac{S_{2k}}{2^{2k}}=\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\frac{1}{6^{2k}}+\dots, \quad \text{więc}$$

$$S_{2k}-\frac{S_{2k}}{2^{2k}}=T_{2k}, \quad \text{czyli:}$$

(α) $$T_{2k}=\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}S_{2k}, \quad \text{albo wreszcie:}$$

(α') $$T_{2k}=\frac{2^{2k}-1}{2}B_k\cdot\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}.$$

W szczególności, gdy $k=1$, mamy stąd:

(α") $$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots$$

Połóżmy wreszcie:

$$\frac{1}{1^{2k}}-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\frac{1}{4^{2k}}+\dots=U_{2k},$$

to widocznie:

$$U_{2k}=S_{2k}-\frac{2S_{2k}}{2^{2k}}, \quad \text{czyli:}$$

(β) $$U_{2k}=\frac{2^{2k-1}-1}{2^{2k-1}}S_{2k}, \quad \text{albo:}$$

(β') $$U_{2k}=\frac{2^{2k-1}-1}{(2k)!}B_k\,.\,\pi^{2k}.$$

Szeregi S_{2k}, T_{2k}, U_{2k} są tem ważne, że one dają rozwinięcia całkowitych, dodatnich i parzystych potęg liczby π.

Szereg (α") może wraz z szeregiem Leibnitza:

(γ₁) $$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots \quad \text{[art. 20.]}$$

posłużyć do utworzenia bardzo zbieżnego rozwinięcia, przedstawiającego liczbę π*).

Napiszmy bowiem (α") w postaciach:

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1^2+3^2}{1^2.3^2}+\frac{5^2+7^2}{5^2.7^2}+\frac{9^2+11^2}{9^2.11^2}+\dots$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{3^2+5^2}{3^2.5^2}+\frac{7^2+9^2}{7^2.9^2}+\frac{11^2+13^2}{11^2.13^2}+\dots$$

to ich różnica da relacyę:

$$1-\frac{5^2.3^2-3^2.1^2}{1^2.3^2.5^2}-\frac{9^2.7^2-7^2.5^2}{5^2.7^2.9^2}-\dots=0, \quad \text{albo:}$$

$$1=\frac{5^2-1^2}{1^2.5^2}+\frac{9^2-5^2}{5^2.9^2}+\frac{13^2-9^2}{9^2.13^2}+\dots \quad \text{albo:}$$

$$1=\frac{6.4}{1^2.5^2}+\frac{14.4}{5^2.9^2}+\frac{22.4}{9^2.13^2}+\dots, \quad \text{albo wreszcie:}$$

---

*) F. Lucas: „*Expréssion du nombre π par une sérié très convergente*". — C. R. T. 112. (1891), str. 1050...

$$(\gamma_2) \qquad 1=8\left[\frac{3}{1^2.5^2}+\frac{7}{5^2.9^2}+\frac{11}{9^2.13^2}+\dots\right].$$

Gdy z drugiej strony i szereg Leibnitza napiszemy w dwóch postaciach:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3-1}{1.3}+\frac{7-5}{5.7}+\frac{11-9}{9.11}+\dots=2\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\dots\right] \text{ i}$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{5-3}{3.5}-\frac{9-7}{7.9}-\frac{13-11}{11.13}-\dots=1-2\left[\frac{1}{3.5}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{11.13}+\dots\right],$$

to za ich dodaniem dostajemy:

$$\frac{\pi}{2}=1+2\left[\left(\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}\right)+\left(\frac{1}{5.7}-\frac{1}{7.9}\right)+\dots\right]$$

$$=1+2\left[\frac{5-1}{1.3.5}+\frac{9-5}{5.7.9}+\dots\right]$$

$$=1+8\left[\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{5.7.9}+\frac{1}{9.11.13}+\dots\right].$$

Odejmując stąd (γ_2) mamy:

$$\frac{\pi}{2}-1=1+8\left[\frac{1}{1.3.5}-\frac{3}{1^2.5^2}+\frac{1}{5.7.9}-\frac{7}{5^2.9^2}+\dots\right] \text{ a stąd:}$$

$$\frac{\pi}{2}=2-8\left[\frac{3^2-5}{1^2.3.5^2}+\frac{7^2-5.9}{5^2.7.9^2}+\dots\right] \text{ czyli:}$$

$$\frac{\pi}{4}=1-16\left(\frac{1}{1^2.3.5^2}+\frac{1}{5^2.7.9^2}+\frac{1}{9^2.11.13^2}+\dots\right],$$

które-to rozwinięcie jest bardzo zbieżne.

35. Funkcye ***tg x, cotg x.*** Wyprowadziliśmy już wzory:

$$(1) \qquad \pi\, cotg\, \pi x=\frac{1}{x}+\sum{}'\frac{x}{\nu}.\frac{1}{x-\nu},$$

$$(2) \qquad \pi\, tg\, \pi x=-\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{4x}{(2\nu+1)[2x-(2\nu+1)]},$$

z których przez różniczkowanie odrazu wynika:

$$(1') \qquad \frac{\pi^2}{sin^2\pi x}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-\nu)^2},$$

$$(2') \qquad \frac{\pi^2}{cos^2\pi x}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(x-\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}.$$

Z form (1), (2) skorzystamy dalej, aby funkcyę *cotg x*, *tg x* rozwinąć na szeregi w otoczeniu punktu $x=0$.

Gdy w (1) każde dwa dodajniki o jednakowem $|\nu|$ ze sobą złączymy, dostaniemy:

$$(3) \qquad \pi\, cotg\, \pi x=\frac{1}{x}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-\nu^2}.$$

Zastąpmy tu πx przez x, to mieć będziemy:

(4) $$cotg\, x = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \nu^2 \pi^2}.$$

Rozwinięcie w otoczeniu miejsca $x=0$ doprowadzi tu do szeregu:

$$cotg\, x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2k+2}} \right) \frac{x^{2k}}{\pi^{2k}}$$

albo — za użyciem szeregów S_2, S_4, ... — do szeregu:

(5) $$cotg\, x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2} S_2 - \frac{2x^3}{\pi^4} S_4 - \frac{2x^5}{\pi^6} S_6 - \dots$$

Naznaczmy teraz dla wygody liczby Bernoulli'ego, w tym porządku, jak je w (*e*) — art. poprzedz. — mamy, przez B_1, B_3, B_5, ..., to wtedy związek (*c*) — art. 34. — będzie postaci:

$$S_{2k} = B_{2k-1} \cdot \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!}$$

a z (5) dostaniemy szereg:

(α) $$cotg\, x = \frac{1}{x} - \left(B_1 \frac{2^2 x}{2!} + B_3 \frac{2^4 x^3}{4!} + B_5 \frac{2^6 x^5}{6!} - \dots \right),$$

który jest zbieżny w obszarze: $0 < |x| < \pi$.

Analogicznie postępując z rozwinięciem (2) dojdziemy do

$$tg\, x = -2x \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \left(\frac{2\nu - 1}{2} \pi \right)^2}$$

a stąd dla otoczenia punktu $x=0$ do szeregu:

$$tg\, x = \frac{2^3 x}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^{2k+2}} \right) \cdot \frac{x^{2k}}{\pi^{2k}},$$

który — z uwagi, że $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^{2k}}$ nazwaliśmy T_{2k} — można w takiej formie napisać:

(6) $$tg\, x = \frac{2^3 x}{\pi^2} \left[T_2 + T_4 \frac{x^2}{\pi^2} + T_6 \frac{x^4}{\pi^4} + \dots \right].$$

Zważywszy zaś, że tu przy nowem oznaczeniu liczb Bernoulli'ego jest:

(6 *a*) $$T_{2k} = \frac{2^{2k} - 1}{2} B_{2k-1} \frac{\pi^{2k}}{(2k)!},$$

mieć ostatecznie będziemy:

$$(\beta)\qquad tg\, x = B_1 2^2(2^2-1)\frac{x}{2!} + B_3 2^4(2^4-1)\frac{x^3}{4!} + B_5 2^6(2^6-1)\frac{x^5}{6!} + \dots$$

który-to szereg jest zbieżny w óbszarze: $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Już w art. 5. — przyjąwszy, że funkcya $tg\, x$ w otoczeniu punktu $x=0$ przedstawia się szeregiem:

$$tg\, x = \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_3}{3!}x^3 + \frac{a_5}{5!}x^5 + \dots$$

doszliśmy do równań:

$$a_{2n-1} - \binom{2n-1}{2}a_{2n-3} + \binom{2n-1}{4}a_{2n-5} - \dots + (-1)^{n-1}\binom{2n-1}{2n-2}a_1 = \\ = (-1)^{n-1},$$

z których po porządku można obliczyć a_1, a_3, a_5, ... Stosując to do szeregu (β) otrzymamy równania:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1} - \binom{2n-1}{2}\frac{2^{2n-2}(2^{2n-2}-1)}{2n-2}B_{2n-3} + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1}\binom{2n-1}{2n-2}\frac{2^2.(2^2-1)}{2}B_1 = (-1)^{n-1}, \end{aligned}$$

z których znowu po porządku ($n=1, 2, 3, \dots$) dadzą się oznaczyć liczby B_1, B_3, B_5, ...

36. Funkcye: *sec x*, *cosec x*. Załatwiwszy się z funkcyami $tg\, x$ i $cotg\, x$, przejdziemy do rozważania pozostałych funkcyj trygonometrycznych: $cosec\, x$ i $sec\, x$.

Z identyczności:

$$\frac{1}{2}\left(cotg\frac{x}{2} + tg\frac{x}{2}\right) = cosec\, x$$

— gdy x na πx zmienimy i czynnik π po obydwu stronach dodamy — dostaniemy:

$$(1)\qquad 2\pi\, cosec\, \pi x = \pi\, cotg\frac{\pi x}{2} + \pi tg\frac{\pi x}{2}, \quad \text{albo:}$$

$$2\pi\, cosec\, \pi x = 2\frac{d}{dx}log\, sin\frac{\pi x}{2} - 2\frac{d}{dx}log\, cos\frac{\pi x}{2}$$

albo wreszcie:

$$\pi\, cosec\, \pi x = \frac{d}{dx}log\, sin\frac{\pi x}{2} - \frac{d}{dx}log\, cos\frac{\pi x}{2}$$

Stosując do funkcyj po prawej stronie znowu tw. I. — art. 31. — i zważywszy, że pierwsza z nich ma miejsce nieskończonościowe $a=2\nu$, a druga $a=(2\nu+1)$, mamy:

$$\pi\, cosec\, \pi x =$$
$$= \frac{1}{x} + \sum{}'\left(\frac{1}{x-2\nu} + \frac{1}{2\nu}\right) - \sum\left(\frac{1}{x-(2\nu+1)} + \frac{1}{2\nu+1}\right)$$
$$= \frac{1}{x} + \sum{}'(-1)^\nu\left(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{\nu}\right),\quad \nu=\pm 1,\ \pm 2, \ldots$$
$$= \frac{1}{x} + \sum{}'(-1)^\nu \frac{x}{\nu} \cdot \frac{1}{x-\nu},\quad \text{albo:}$$

(2) $$\pi\, cosec\, \pi x = \frac{1}{x} + 2x\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{x^2-\nu^2}.$$

Zastąpmy tu πx przez x $\left(\text{a więc } x \text{ przez } \frac{x}{\pi}\right)$, to będzie:

(3) $$cosec\, x = \frac{1}{x} + 2x \,.\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{x^2-(\nu\pi)^2}.$$

Z tej formy dostaniemy rozwinięcie w otoczeniu punktu $x=0$ w postaci:

$$cosec\, x = \frac{1}{x} - 2x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^{2k+2}}\right)\frac{x^{2k}}{\pi^{2k+2}}.$$

Że zaś — po naznaczeniu już liczb Bernoulli'ego przez $B_1, B_3, B_5, \ldots$ — jest:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^{2k+2}} = -U_{2k+2} = -\frac{B_{2k+1}}{(2k+2)!}(2^{2k+1}-1)\pi^{2k+2}$$

podług (β') — art. 34. — więc ostatecznie mamy:

(4) $$cosec\, x = \frac{1}{x} + \frac{2U_2}{\pi^2}x + \frac{2U_4}{\pi^4}x^3 + \frac{2U_6}{\pi^6}x^5 + \ldots$$

albo:

(γ) $$\begin{aligned} cosec\, x &= \frac{1}{x} + B_1\frac{2-1}{1}\frac{x}{1!} + B_3\frac{2^3-1}{2}\frac{x^3}{3!} \\ &+ B_5 \,.\frac{2^5-1}{3}\frac{x^5}{5!} + B_7\frac{2^7-1}{4}\frac{x^7}{7!} + \ldots, \end{aligned}$$

a te szeregi są zbieżne w zakresie $0 < |x| < \pi$.

Zastąpmy w (1) x przez $\left(\frac{1}{2} - x\right)$ to dostaniemy (po podzieleniu przez 2) związek:

(5) $$\pi\, sec\, \pi x = \frac{\pi}{2}\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\, tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)$$

który — gdy zważymy, że:

(a) $$\frac{\pi}{2}\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{d}{dx}\log\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{2}\right)$$

$$(b)\qquad \frac{\pi}{2}\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)=+\frac{d}{dx}\log\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)$$

także tak będzie można napisać:

$$(6)\qquad \pi\sec\pi x=-\frac{d}{dx}\log\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{d}{dx}\log\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x}{2}\right).$$

Ponieważ funkcya:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi x}{2}\right)=0,\quad \text{dla } x=\frac{4\nu+1}{2},$$

a funkcya:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)=0,\ \text{dla } x=-\frac{4\nu+1}{2},$$

$$\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\dots$$

więc stosując do (a) i (b) twierdzenie I. — art. 31. — mamy:

$$(c)\qquad \frac{\pi}{2}\,tg\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\sum\left(\frac{1}{x\mp\frac{4\nu+1}{2}}\pm\frac{1}{\left(\frac{4\nu+1}{2}\right)}\right)$$

[$g'(x)$ jest tu $=\frac{\pi}{2}$, gdyż tak (a) jak i (b) daje dla $x=0$ wartość $\frac{\pi}{2}$, a w (c) suma nieskończona dla $x=0$ znika].

Wskutek tego wzór (6) da się tak napisać:

$$\pi\sec\pi x=$$

$$=\pi-\sum\left(\frac{1}{x-\frac{4\nu+1}{2}}+\frac{1}{\left(\frac{4\nu+1}{2}\right)}\right)+\sum\left(\frac{1}{x+\frac{4\nu+1}{2}}-\frac{1}{\left(\frac{4\nu+1}{2}\right)}\right)$$

albo:

$$\pi\sec\pi x=$$

$$=\pi-\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{4\nu+1}{2}\right)}\cdot\frac{x}{x-\frac{4\nu+1}{2}}-\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{4\nu+1}{2}\right)}\cdot\frac{x}{x+\frac{4\nu+1}{2}}$$

albo wreszcie:

$$(7)\qquad \pi\sec\pi x=\pi-\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{4\nu+1}{2}\right)}\cdot\frac{2x^2}{x^2-\left(\frac{4\nu+1}{2}\right)^2}.$$

Zauważmy liczby:

$$(d)\qquad 4\nu+1,\ \nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$$

Przy dodatniem $\nu=+\mu$ mamy:

$$4\mu+1=2\,.\,2\mu+1;$$

przy odjemnem zaś $\nu=-\mu$ jest

$$-4\mu+1=-(4\mu-1)=-[4(\mu-1)+3]=-[2(2(\mu-1)+1)+1].$$

Z tego wynika, że wszystkie liczby (d) dają się przedstawić przez:

$$+(2\nu+1), \text{ gdy } \nu=0, +1, +2, +3, \dots$$

i przez:

$$-(2\nu+1), \text{ gdy } \nu=-1, -2, -3, \dots$$

a więc przez liczby:

$$(-1)^\nu(2\nu+1), \ \nu=0, 1, 2, 3, \dots$$

Stosując to w (7) mieć będziemy:

$$\pi \sec \pi x = \pi - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)} \cdot \frac{2x^2}{x^2 - \left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}, \tag{8}$$

a po zastąpieniu πx przez x okaże się:

$$\sec x = 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\left(\frac{2\nu+1}{2}\pi\right)} \cdot \frac{2x^2}{\left(\frac{2\nu+1}{2}\pi\right)^2 - x^2}. \tag{9}$$

Z tej formy, po jej rozwinięciu w otoczeniu punktu $x=0$, dostaniemy:

$$\sec x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{2k+3}} \right) \frac{2^{2k+4}}{\pi^{2k+3}} \cdot x^{2k+2}.$$

Położmy:

$$\frac{1}{1^{2k+3}} - \frac{1}{3^{2k+3}} + \frac{1}{5^{2k+3}} - \dots = W_{2k+3}, \ k=0, 1, 2, \dots$$

to mieć będziemy:

$$\sec x = 1 + \frac{W_3 \cdot 2^4}{\pi} \frac{x^2}{\pi^2} + \frac{W_5 \cdot 2^6}{\pi} \frac{x^4}{\pi^4} + \frac{W_7 \cdot 2^8}{\pi} \frac{x^6}{\pi^6} + \dots \tag{10}$$

Położmy na wzór związku $6(a)$ art. poprzedz.:

$$W_{2k+1} = \frac{2^{2k+1} - 1}{2} \cdot B_{2k} \cdot \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{10a}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

gdzie przez to oprócz liczb Bernoulli'ego B_1, B_3, B_5, ... wprowadzamy jeszcze nowe liczby B_2, B_4, B_6, ... to wtedy rozwinięcie (10) będzie miało postać:

$$\sec x = 1 + B_2 2^3(2^3-1)\frac{x^2}{3!} + B_4 2^5(2^5-1)\frac{x^4}{5!} + B_6 2^7(2^7-1)\frac{x^6}{7!} + \dots \tag{δ}$$

w której widocznie spółczynniki są zupełnie podobne do spółczynników w rozwinięciu funkcyi $tg\, x$. Rozwinięcie (δ) jest zbieżne w zakresie: $|x| < \frac{\pi}{2}$.

37. Liczby André'go. Liczby B_1, B_2, B_3, B_4,... i szeregi T_{2k}, W_{2k+1}, wchodzące w współczynniki rozwinięć funkcyj $tg\,x$, $sec\,x$ nie są dogodne z powodu, że już samo ich określenie nie cechuje się pożądaną prostotą. Okaże się jednak, że spółczynniki wspomnianych funkcyj dadzą się z wszelką łatwością określić i utworzyć a to na podstawie pewnych liczb całkowitych, które swój początek biorą w pewnem bardzo prostem zagadnieniu o permutacyach.

Zauważmy n elementów $a_1, a_2, ..., a_n$ i utwórzmy z nich wszystkie permutacye, których, jak wiadomo, jest $n!$ Jedną taką permutacyą, n. p.

$$a_{k_1}\; a_{k_2}\; a_{k_3} \dots a_{k_n}$$

weźmy pod uwagę i utwórzmy różnice:

$$k_2 - k_1,\; k_3 - k_2, ..., k_n - k_{n-1}.$$

Żadna z tych różnic nie jest zerem; w jednej tylko permutacyi są te różnice wszystkie dodatnie, w jednej wyłącznie odjemne; w innych już są i dodatnie i odjemne.

Permutacye, w których te różnice są naprzemian: dodatnia, odjemna, lub: odjemna, dodatnia, a więc permutacye, w których

$$k_2 - k_1 > 0,\; k_3 - k_2 < 0, ... \quad \text{albo} \quad k_2 - k_1 < 0,\; k_3 - k_2 > 0, ...$$

nazwiemy falistemi.

Dwa elementa a_g, a_h stojące obok siebie w permutacyi falistej — (gdzie przy tem a_g stoi przed a_h) — tworzą spadek, gdy $g > h$, tworzą zaś wzniesienie, gdy $g < h$.

Ponieważ elementa każdej falistej permutacyi wypisane w porządku wprost przeciwnym dają znowu falistą permutacyę, więc stąd wnosić trzeba, że przy każdem n liczba wszystkich falistych permutacyj jest parzystą.

Przytem zauważymy, że gdy w dwóch permutacyach o wprost przeciwnem uporządkowaniu elementów jedna z nich zaczyna się wzniesieniem lub spadkiem, to druga kończy się spadkiem lub wzniesieniem. Nazwijmyż, gdy danych jest n elementów, ilość wszystkich falistych permutacyj: $2A_n$, to je podzielić można na A_n permutacyj o początkowem wzniesieniu i na A_n permutacyj o końcowym spadku, lub na A_n permutacyj o początkowym spadku i na A_n permutacyj o końcowem wzniesieniu.

Liczby A_0, A_1, A_2 nie mają znaczenia; damy im jednak wszystkim wspólną wartość: 1.

Gdy $n=3$ mamy 4 faliste permutacye:

$$a_1\; a_3\; a_2, \qquad a_2\; a_3\; a_1$$
$$a_3\; a_1\; a_2, \qquad a_2\; a_1\; a_3$$

a więc $A_3 = 2$.

Przy $n=4$ dostajemy 10 permutacyj falistych:

$$\begin{array}{ll} a_1\ a_3\ a_2\ a_4, & a_4\ a_2\ a_3\ a_1 \\ a_1\ a_4\ a_2\ a_3, & a_3\ a_2\ a_4\ a_1 \\ a_2\ a_3\ a_1\ a_4, & a_4\ a_1\ a_3\ a_2 \\ a_2\ a_4\ a_1\ a_3, & a_3\ a_1\ a_4\ a_2 \\ a_3\ a_4\ a_1\ a_2, & a_2\ a_1\ a_4\ a_3 \end{array}$$

a więc $A_4=5$.

Aby A_{n+1} obliczyć, przyjmując, że znane są już $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ postarajmy się naprzód utworzyć z $(n+1)$ danych elementów $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ wszystkie te faliste permutacye, w których element a_{n+1} zajmuje $(p+1)^{\text{sze}}$ miejsce.

Z n pozostałych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ma ich p stanąć przed a_{n+1}, a $(n-p)$ pozostałych po a_{n+1}. Podzielmyż $a_1, a_2, \ldots, a_n$ na dwie grupy: P o p elementach i Q o $(n-p)$ elementach, to taki podział — gdy się jeszcze o uporządkowaniu elementów w P, Q nie mówi — można uskutecznić na $\binom{n}{p}$ sposobów.

Przy pewnym przyjętym podziale na grupy P, Q można dalej P uporządkować na $p!$ sposobów, a Q na $(n-p)!$ sposobów. Lecz, aby permutacya

$$P\,a_{n+1}\,Q$$

była falistą, trzeba z wszystkich $p!$ uporządkowań grupy P zatrzymać tylko te, które tworzą faliste permutacye z końcowym spadkiem. Takich permutacyj będzie A_p. Z uporządkowań znowu grupy Q trzeba zatrzymać te, które tworzą faliste permutacye z początkowem wzniesieniem. Takich permutacyj będzie tu A_{n-p}. Pewien więc oznaczony podział na grupy P, Q da początek $A_p \,.\, A_{n-p}$ permutacyom falistym.

Że zaś P, Q można utworzyć na $\binom{n}{p}$ sposobów, zatem wszystkich falistych permutacyj o $(n+1)$ elementach z a_{n+1} na $(p+1)^{\text{szem}}$ miejscu będzie:

$$\binom{n}{p} A_p \,.\, A_{n-p}.$$

Ponieważ dalej element a_{n+1} może zająć miejsce $1^{\text{sze}}, 2^{\text{gie}}, 3^{\text{cie}}, \ldots (n+1)^{\text{sze}}$, a więc p może być $=0, 1, 2, \ldots, n$, to na ilość wszystkich permutacyj falistych o $(n+1)$ elementach dostaniemy:

(1)
$$2A_{n+1}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} A_p \,.\, A_{n-p}$$
$$=\binom{n}{0} A_0\,A_n+\binom{n}{1} A_1\,A_{n-1}+\ldots+\binom{n}{n} A_n A_0.$$

Według tego wzoru — z uwagi, że $A_0=A_1=A_2=1$ — mamy

$$(2) \qquad \begin{gathered} A_3=2,\ A_4=5,\ A_5=16,\ A_6=61, \\ A_7=272,\ A_8=1385,\ A_9=7936,\ldots \end{gathered}$$

które-to liczby nazwiemy liczbami Andre'go*).

38. Zastosowanie liczb André'go. Te poszukiwania nie mające nic wspólnego z rozwijaniem funkcyj na szeregi znajdą zaraz bardzo doniosłe zastosowanie. Zauważmy szereg:

$$(1) \qquad y=A_0+\frac{A_1}{1!}x+\frac{A_2}{2!}x^2+\frac{A_3}{3!}x^3+\ldots$$

w którym $A_0, A_1, A_2, \ldots$ mają znaczenie dopieroco określone, a o którego zbieżności na razie jeszcze nic nie zakładamy. Jego podwójna pochodna:

$$(2) \qquad 2\frac{dy}{dx}=2\left[\frac{A_1}{1!}+\frac{A_2}{1!}x+\frac{A_3}{2!}x^2+\frac{A_4}{3!}x^3+\ldots\right]$$

a jego kwadrat:

$$(3) \qquad \begin{aligned} y^2&=\left(A_0+\frac{A_1}{1!}x+\frac{A_2}{2!}x^2+\ldots\right)\left(A_0+\frac{A_1}{1!}x+\frac{A_2}{2!}x^2+\ldots\right) \\ &=A_0{}^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_0}{0!}\frac{A_n}{n!}+\frac{A_1}{1!}\frac{A_{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{A_n}{n!}\frac{A_0}{0!}\right]x^n, \end{aligned}$$

Lecz, że:

$$\frac{1}{(n-r)!\,r!}=\binom{n}{r}\frac{1}{n!},$$

więc (3) można także w takiej formie napisać:

$$y^2=A_0{}^2+\sum\frac{1}{n!}\left[\binom{n}{0}A_0A_n+\binom{n}{1}A_1A_{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}A_nA_0\right]x^n,$$

a uwzględniając tu relacyę (1) art. poprzedz., mamy:

$$y^2=A_0{}^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{n+1}}{n!}x^n.$$

Ponieważ dalej $A_0{}^2=1=\frac{A_1}{1!}$ więc ostatecznie będzie:

$$(4) \qquad y^2=\frac{A_1}{1!}+2\left[\frac{A_2}{1!}x+\frac{A_3}{2!}x^2+\frac{A_4}{3!}x^3+\ldots\right].$$

Gdy tu po lewej stronie dodamy 1, a po prawej $\frac{A_1}{1!}=1$, dostaniemy stąd:

*) D. André. *Développement de séc x et de tang x.* C. R. T. 88. (1879.) str. 965. *Sur les permutations alternées — Journal de mathématiques pures et appliques.* T. 7. (Ser. 3. 1881.) str. 167—184.

$$(5)\qquad 2\frac{dy}{dx}=1+y^2, \text{ czyli:}$$

$$\frac{dx}{2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

Szereg y spełnia zatem takie równanie różniczkowe. Z niego mamy:

$$\frac{x}{2}+c=arc\,tg\,y, \quad \text{albo} \quad y=tg\left(\frac{x}{2}+c\right).$$

Że zaś $y=A_0=1$, gdy $x=0$, więc musi być $c=\frac{\pi}{4}$, tak, że ostatecznie mamy:

$$(6)\qquad tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=A_0+\frac{A_1}{1!}x+\frac{A_2}{2!}x^2+\frac{A_3}{3!}x^3+\ldots$$

Zmieniając tu x na $-x$ dostajemy:

$$(7)\qquad tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=A_0-\frac{A_1}{1!}x+\frac{A_2}{2!}x^2-\frac{A_3}{3!}x^3+\ldots$$

Stąd za użyciem wzorów:

$$2\,tg\,x=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$2\,sec\,x=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

wynika:

$$(\beta')\qquad tg\,x=A_1\frac{x}{1!}+A_3\frac{x^3}{3!}+A_5\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$$(\delta')\qquad sec\,x=A_0+A_2\frac{x^2}{2!}+A_4\frac{x^4}{4!}+A_6\frac{x^6}{6!}+$$

Są-to rozwinięcia, których spółczynniki posiadają bardzo prostą definicyę.

Gdy te szeregi porównamy z szeregami: (β), art. 35., (δ) art. 36., dostaniemy związki:

$$(8)\qquad B_s\cdot\frac{2^{s+1}(2^{s+1}-1)}{s+1}=A_s,$$

z których wynikają takie definicye liczb B_1, B_2, B_3, B_4, ...

$$(9)\qquad B_s=\frac{(s+1)A_s}{2^{s+1}(2^{s+1}-1)}, \quad s=1, 2, 3, 4, \ldots$$

Ten szereg liczb można nazwać **interpolowanym szeregiem liczb Bernoulli'ego**.

Same szeregi T_{2k}, W_{2k+1} będą z liczbami A_s w ten sposób związane:

$$(10)\qquad T_{2k}=\frac{1}{1^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\ldots=\frac{1}{2}\frac{A_{2k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

$$(11)\qquad W_{2k+1}=\frac{1}{1^{2k+1}}-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\ldots=\frac{1}{2}\frac{A_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}.$$

W rozwinięciu (α) funkcyi $cotg\,x$ [art. 35.] mamy przy $\frac{x^s}{s!}$, $s=1, 3, 5, \ldots$ spółczynnik:

$$\frac{B_s.2^{s+1}}{(s+1)},\quad s=1, 3, 5, \ldots$$

Podstawiając tu za B_s wyrażenie (9), mieć będziemy:

$$\frac{A_s}{2^{s+1}-1},\quad s=1, 3, 5, \ldots \text{ a więc}$$

$$(\alpha')\qquad cotg\,x=\frac{1}{x}-\frac{A_1}{2^2-1}\frac{x}{1!}-\frac{A_3}{2^4-1}\cdot\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

W funkcyi $cosec\,x$, w jej rozwinięciu (γ) — art. 36. — mamy przy $\frac{x^s}{s!}$ $s=1, 3, 5, \ldots$ spółczynnik:

$$2.B_s\frac{2^s-1}{s+1},\quad s=1, 3, 5, \ldots$$

a gdy tu znowu (9) podstawimy, dostaniemy:

$$\frac{A_s}{2^s}\cdot\frac{2^s-1}{2^{s+1}-1},\quad s=1, 3, 5, \ldots, \text{ i}$$

$$(\gamma')\qquad cosec\,x=\frac{1}{x}+\frac{A_1}{2}\cdot\frac{2-1}{2^2-1}\frac{x}{1!}+\frac{A_3}{2^3}\cdot\frac{2^3-1}{2^4-1}\cdot\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Przy tem biorąc na uwagę związki między szeregami S_{2k}, U_{2k} a liczbami B_s dojdziemy do określeń:

$$(12)\qquad S_{2k}=\frac{1}{1^{2k}}+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\frac{A_{2k-1}}{(2k-1)!}\cdot\frac{\pi^{2k}}{2^{2k}-1}$$

$$(13)\qquad U_{2k}=\frac{1}{1^{2k}}-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\ldots=\frac{2^{2k-1}-1}{2^{2k}-1}\cdot\frac{A_{2k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}.$$

Pd. 1. Liczby $A_0=1$, $A_2=1$, $A_4=5$, $A_6=61, \ldots$ występujące w spółczynnikach szeregu funkcyi $sec\,x$ nazywają także liczbami Eulera. Równania, z których je po porządku obliczyć można, otrzymuje się z identyczności:

$$sec\,x\,.\,cos\,x=1=\left(A_0+\frac{A_2}{2!}x^2+\ldots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)$$

Pd. 2. Przez różniczkowanie szeregów funkcyj $tg\,x$, $cotg\,x$, $sec\,x$, $cosec\,x$ dostajemy:

$$(a_1) \qquad sec^2 x = A_1 + A_3 \frac{x^2}{2!} + A_5 \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$(b_1) \qquad cosec^2 x = \frac{1}{x^2} + \frac{A_1}{2^2-1} + \frac{A_3}{2^4-1}\frac{x^2}{2!} + \frac{A_5}{2^6-1}\frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$(c_1) \qquad sec\,x . tg\,x = A_2 \frac{x}{1!} + A_4 \frac{x^3}{3!} + A_6 \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$(d_1) \qquad cosec\,x . cotg\,x = \frac{1}{x^2} - \frac{2-1}{2^2-1}\frac{A_1}{2} - \frac{2^3-1}{2^4-1}\frac{A_3}{2^3} . \frac{x^2}{2!} - \dots$$

Pd. 3. Całkując szeregi $tg\,x$, $cotg\,x$, $sec\,x$, $cosec\,x$ i dodając stosowne stałe ilości, dochodzimy do wzorów:

$$(a_2) \qquad log\,cos\,x = -A_1 \frac{x^2}{2!} - A_3 \frac{x^4}{4!} - A_5 \frac{x^6}{6!} - \dots,$$

$$(b_2) \qquad log\,sin\,x = log\,x - \frac{A_1}{2^2-1}\frac{x^2}{2!} - \frac{A_3}{2^4-1}\frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$(c_2) \qquad log\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^3}{3!} + A_4 \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$(d_2) \quad log\,tg \frac{x}{2} = log \frac{x}{2} + \frac{2-1}{2^2-1}\frac{A_1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{2^3-1}{2^4-1}\frac{A_3}{2^3} . \frac{x^4}{4!} + \frac{2^5-1}{2^6-1}\frac{A_5}{2^5}\frac{x^6}{6!} + \dots$$

Pd. 4. Szeregi (a_1), ..., (d_1). (a_2), ..., (d_2) podać ze spółczynnikami, mieszczącymi w sobie liczby Bernoulli'ego.

39. O funkcyach Bernoulli'ego. Zauważmy skończoną sumę:

$$(1) \qquad 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (m-1)^k = S_k(m),$$

w której k ma wartość jednej z liczb 0, 1, 2, 3, ..., a m jest liczbą całkowitą dodatnią >0 i postarajmy się o utworzenie takiej funkcyi $S_k(x)$ zmiennego argumentu x, któraby dla $x = 1, 2, 3, 4, \dots$ przybierała odpowiednio wartości:

$$(2) \qquad S_k(1),\ S_k(2),\ S_k(3), \dots$$

Tworzenie takiej funkcyi nazywają interpolowaniem sum (2), a same funkcye $S_k(x)$ noszą miano funkcyj Bernoulli'ego.

Postarajmyż się o utworzenie równań rekursywnych, z których możnaby po porządku funkcye $S_5(x)$ łatwo wyznaczyć. W tym celu wyjdźmy z dwóch identyczności:

$$(a-1)^{2k} = a^{2k} - \binom{2k}{1}a^{2k-1} + \binom{2k}{2}a^{2k-2} - \binom{2k}{3}a^{2k-3} + \dots + 1$$

$$(a+1)^{2k} = a^{2k} + \binom{2k}{1}a^{2k-1} + \binom{2k}{2}a^{2k-2} + \binom{2k}{3}a^{2k-3} + \dots + 1$$

Za odjęciem pierwszej z nich od drugiej dostajemy:

$$(a+1)^{2k} - (a-1)^{2k} = 2\left[\binom{2k}{1}a^{2k-1} + \binom{2k}{3}a^{2k-3} + \dots + \binom{2k}{2k-1}a\right].$$

Kładąc tu $a=1, 2, 3, \ldots (m-1)$ i sumując tak powstające identyczności, dochodzimy do związku:

$$\frac{m^{2k}-1+(m-1)^{2k}}{2}=\binom{2k}{1}S_{2k-1}(m)+\binom{2k}{3}S_{2k-3}(m)+\ldots+\binom{2k}{2k-1}S_1(m).$$

Po pierwszej stronie zastępując m przez x dostajemy wymierną całkowitą funkcyę, którą oznaczmy przez:

$$(3)\qquad -X_{2k}/2.$$

Gdy równocześnie po prawej stronie $S_{2k-1}(m)$, $S_{2k-3}(m)$, ..., $S_1(m)$ zastąpimy odpowiednio przez $S_{2k-1}(x)$, $S_{2k-3}(x)$, ..., $S_1(x)$, dostaniemy również funkcyę całkowitą wymierną:

$$(4)\qquad \binom{2k}{1}S_{2k-1}(x)+\binom{2k}{3}S_{2k-3}(x)+\ldots+\binom{2k}{2k-1}S_1(x).$$

Funkcye (3), (4) wykażą jednakowe wartości na nieskończenie wielu miejscach: $x=1, 2, 3, 4, \ldots$, a stąd wynika identyczność:

$$(A)\qquad -X_{2k}/2=\binom{2k}{1}S_{2k-1}(x)+\binom{2k}{3}S_{2k-3}(x)+\ldots+\binom{2k}{2k-1}S_1(x)$$

$$k=1, 2, 3, \ldots$$

To są żądane równania dla funkcyj o nieparzystych znaczkach.

Aby i dla funkcyj $S_{2k}(x)$ analogiczne równania utworzyć, wyjdźmy znowu z dwóch identyczności:

$$(2a-1)^{2k+1}=2^{2k+1}a^{2k+1}-\binom{2k+1}{1}2^{2k}a^{2k}+\ldots$$

$$(2a+1)^{2k+1}=2^{2k+1}a^{2k+1}+\binom{2k+1}{1}2^{2k}a^{2k}+\ldots$$

Z nich dostajemy:

$$(2a+1)^{2k+1}-(2a-1)^{2k+1}=2\left[\binom{2k+1}{1}2^{2k}a^{2k}+\binom{2k+1}{3}2^{2k-2}a^{2k-2}+\ldots+1\right].$$

Kładąc tu znowu $a=1, 2, 3, \ldots, (m-1)$ i tak powstające identyczności sumując, mamy:

$$\frac{(2m-1)^{2k+1}-1}{2}=$$

$$\binom{2k+1}{1}2^{2k}S_{2k}(m)+\binom{2k+1}{3}2^{2k-2}S_{2k-2}(m)+\ldots+S_0(m).$$

Przenieśmy tu $S_0(m)=m-1$ na lewą stronę, to będzie:

$$\frac{(2m-1)^{2k+1}-(2m-1)}{2}=$$

$$=\binom{2k+1}{1}2^{2k}S_{2k}(m)+\binom{2k+1}{3}2^{2k-2}S_{2k-2}(m)+\ldots+\binom{2k+1}{2k-1}2^2S_2(m).$$

Zastąpmy tu m przez x, co jak w pierwszym wypadku będzie dozwolone i zauważmy, że:

$$(2x-1)^{2k+1}-(2x-1)=-(2x-1)[1-(1-2x)^{2k}]=-(2x-1).Y_{2k},$$

to ostatecznie mamy:

$$(B)\qquad -\frac{Y_{2k}}{2}(2x-1)=$$
$$=\binom{2k+1}{1}2^{2k}S_{2k}(x)+\binom{2k+1}{3}2^{2k-2}S_{2k-2}(x)+\ldots+\binom{2k+1}{2k-1}2^2S_2(x)$$
$$k=1,\,2,\,3,\,\ldots$$

a to są żądane równania.*)

Do funkcyj $S_k(x)$, bez różnicy, czy k jest parzyste, czy nieparzyste, można jeszcze dojść tworząc odrazu rozwinięcie funkcyi $f(x,\lambda)=(e^{\lambda x}-1)/(e^{\lambda}-1)$ w taki sposób:

Zauważmy formułę:

$$cotg\,\lambda=i\frac{e^{\lambda i}+e^{-\lambda i}}{e^{\lambda i}-e^{-\lambda i}}=\frac{1}{\lambda}-B_1\frac{2^2\lambda}{2!}-B_3\frac{2^4\lambda^3}{4!}-\ldots \quad [(\alpha),\text{ art. }35.],$$

to zastępując tu λ przez $\frac{\lambda}{2}i$, dojdziemy do relacyi:

$$\frac{e^{\lambda}+1}{e^{\lambda}-1}=1+\frac{2}{e^{\lambda}-1}=\frac{2}{\lambda}+\frac{2B_1}{2!}\lambda-\frac{2B_3}{4!}\lambda^3+\frac{2B_5}{6!}\lambda^5-\ldots,$$

a z niej dostajemy:

$$(a)\qquad \frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}=1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{B_1}{2!}\lambda^2-\frac{B_3}{4!}\lambda^4+\frac{B_5}{6!}\lambda^6-\ldots$$

Gdy dalej zauważymy, że:

$$(b)\qquad \frac{e^{\lambda x}-1}{\lambda}=\frac{x}{1!}+\frac{\lambda x^2}{2!}+\frac{\lambda^2x^3}{3!}+\ldots,$$

to mnożąc (a), (b) ze sobą, mieć będziemy:

$$(c)\qquad f(x,\lambda)=S_0(x)+S_1(x)\frac{\lambda}{1!}+S_2(x)\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots=$$
$$=\left(\frac{x}{1!}+\frac{\lambda x^2}{2!}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{B_1}{2!}\lambda^2-\frac{B_3}{4!}\lambda^4+\ldots\right)$$

z którejto identyczności wynikają:

$$S_k(x)=\frac{x^{k+1}}{k+1}-\frac{1}{2}x^k+\frac{1}{2}\binom{k}{1}B_1x^{k-1}-\frac{1}{4}\binom{k}{3}B_3x^{k-3}+\ldots$$
$$k=0,1,\,2,\,3,\,\ldots$$

* * *

*) Równania (A), (B) w inny sposób wyprowadził R. Lipschitz — *„Sur la fonction de Jacob Bernoulli et sur l'interpolation"*, C. R. T. 86 (1878), str. 119. Por. także: Hermite — *„Sur la formule de Maclaurin"*. C. J. T. 84. (1878), str. 64, ...

*

40. Twierdzenia o iloczynach rzędu m^{go}. Wracając do teoryi zajmijmy się teraz bliżej funkcyą $f(x)$ o danym rzędzie m, zakładając równocześnie, że w zewnętrznym czynniku $e^{g(x)}$ jest $g(x)$ najwyżej stopnia m^{go}. Taka funkcya ma własność:

$$(1) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{x^m f(x)}=0, \quad \text{[art. 31, (10)]}$$

wynikającą ze zbieżności szeregu:

$$(2) \qquad A=\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{|a_s|^{m+1}}.$$

Liczba m jest najmniejsza w szeregu 0, 1, 2, ..., spełniająca równocześnie (1) i (2), a miejsca $x=\infty$ w (1) obiera się tak, aby się nie przybliżały dowolnie do $\lim\limits_{n=\infty} a_n$.

Pytanie zachodzi, czy równanie (1) jest charakterystycznem dla funkcyi $f(x)$, t. j. czy zakładając, że $f(x)$ jest całkowitą przestępną funkcyą z nieskończoną ilością miejsc zerowych, zdołamy okazać, że musi to być zarazem funkcya dająca się przedstawić nieskończonym iloczynem rzędu m (a o $g(x)$ stopnia najwyżej m w zewnętrznym czynniku), a więc o miejscach zerowych dających zbieżność sumy A?

Aby to rozstrzygnąć zauważmy, że z uwag art. 31. wnioskujemy odrazu, że $f(x)$ tylko wtedy może mieć własność (1), gdy posiada i własność (2). W tej dziedzinie funkcyj musi więc naodwrót własność (1) pociągnąć ze sobą i własność (2).

Lecz zbadajmy tu także i funkcye całkowite $f(x)$ o skończonej ilości miejsc zerowych, albo bez miejsc zerowych, podsuwając im własności (1) i nazywając m ich rzędem. Takie funkcye mają postać:

$$(3) \qquad f(x)=e^{g(x)}.G(x),$$

gdzie $G(x)$ jest funkcyą całkowitą wymierną o stopniu $t \geqq 0$, a $g(x)$ jest całkowitą wymierną, lub przestępną funkcyą.

Z (3) dostajemy:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=g'(x)+\frac{G'(x)}{G(x)}$$

a tu dla wszystkich $x=\infty$ b e z w y j ą t k u mamy:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{x^m f(x)}=\lim_{x=\infty} \frac{g'(x)}{x^m}.$$

Zakładając, że $g(x)$ jest funkcyą wymierną stopnia m^{go}, dochodzimy stąd do własności (1) z tą różnicą, że tu nie ma miejsc, których w przybliżaniu się do nich wartościami $x=\infty$ unikaćby trzeba.

Załóżmy przeciwnie, że $g(x)$ jest całkowitą przestępną funkcyą. Wtedy $g(x), g'(x)$ i iloraz $g'(x)/x^m$ przy jakiemkolwiek m zbliża się w otoczeniu każdego $x=\infty$ do każdej dowolnej granicy, a skutkiem tego równanie (1) będzie tu niemożliwe. Z tych uwag wynika:

I. *Gdy $f(x)$ ma być przestępną całkowitą funkcyą, to granica:*

$$(a) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{x^m f(x)} = 0$$

charakteryzuje wyłącznie funkcye:

$$(b) \qquad e^{g(x)}.G(x),$$

$$(c) \qquad x^{\lambda}.e^{g(x)}.\prod_{s=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{x}{a_s}\right)e^{\frac{x}{a_s}+\ldots+\frac{1}{m}\left(\frac{x}{a_s}\right)^m}\right]^{\lambda_s}$$

z takiem odróżnieniem: Gdy w (a) użyć można **w s z e l k i c h** *$x=\infty$ bez wyjątku, to $f(x)$ jest jedną z funkcyj (b); gdy przeciwnie na pewnych miejscach w nieskończoności równanie (a) przestaje istnieć, $f(x)$ trzeba zaliczyć do funkcyj (c).*

Funkcye (b) nazywać także będziemy funkcyami rzędu: m.

Zastosujmy to twierdzenie do pochodnej $f'(x)$ funkcyi rodzaju (c). Według tw. I. art. 31. mamy:

$$(4) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) + U(x), \quad \text{gdzie:}$$

$$(5) \qquad U(x) = \frac{\lambda}{x} + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s\left(\frac{1}{x-a_s} + P_s(x)\right).$$

Z (4) dostajemy:

$$(6) \qquad f'(x) = f(x)[g'(x) + U(x)], \quad \text{a stąd:}$$

$$(7) \qquad f''(x) = f'(x)[g'(x) + U(x)] + f(x)[g''(x) + U'(x)].$$

Z (7) i (6) wynika:

$$\frac{f''(x)}{x^m f'(x)} = \frac{f'(x)}{x^m f(x)} + \frac{1}{x^m}\cdot\frac{g''(x)+U'(x)}{g'(x)+U(x)}.$$

Pierwszy dodajnik jest tu dla $x=\infty$, nie przybliżających się dowolnie do $\lim\limits_{n=\infty} a_n$, zerem wskutek założenia. Co się tyczy drugiego dodajnika, to już w nim sam drugi czynnik:

$$\frac{g''(x) - \frac{\lambda}{x^2} - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s\left(\frac{1}{(x-a_s)^2} + P_s'(x)\right)}{g'(x) + \frac{\lambda}{x} + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s\left(\frac{1}{x-a_s} + P_s(x)\right)}$$

staje się zerem, gdy x jest $=\infty$ z ograniczeniem dopieroco przyjętem. Z tego wnosimy, że:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f''(x)}{x^m f'(x)} = 0, \tag{8}$$

a że tu $x=\infty$ do pewnych miejsc $(\lim_{n=\infty} a_n)$ nie mogą się dowolnie przybliżać, więc mamy twierdzenie:

II. *Pochodna funkcyi rzędu m znikającej na nieskończenie wielu miejscach jest również funkcyą o nieskończenie wielu miejscach zerowych i jest rzędu m. [W zewnętrznym czynniku jest wykładnik w obydwu funkcyach $f(x)$, $f'(x)$ wymierną całkowitą funkcyą stopnia $\leqq m$].*

To samo wnioskowanie zastosować można do funkcyi $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., a stąd wynika:

III. *Wszystkie pochodne funkcyi rzędu m^{go} z nieskończoną ilością miejsc zerowych są również takiemi funkcyami.*

Gdy w $f(x)$ od pewnego $s=k$ począwszy mamy statecznie $\lambda_k > 1$, $\lambda_{k+1} > 1, \ldots$, to pochodna $f'(x)$ ma — oprócz możliwych innych miejsc zerowych — niezawodnie miejsca zerowe a_k, a_{k+1}, ... z powtórzeniami $\lambda_k - 1$, $\lambda_{k+1} - 1$, ... Gdy przeciwnie jest $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = 1$, to w pochodnej nie ma już miejsc zerowych a_k, a_{k+1}, ... Natomiast wystąpią tu inne miejsca zerowe b_k, b_{k+1}, ... o tej własności, że suma:

$$B = \sum_{s=k}^{\infty} \frac{1}{|b_s|^{m+1}}$$

jest zbieżną, a suma $\sum_{s=k}^{\infty} \frac{1}{|b_s|^m}$ jeszcze rozbieżną.

Miejsca zerowe $\neq a_s$ funkcyi pochodnej dadzą się bliżej określić, gdy założymy, że w funkcyi $f(x)$ jest $g(x) = const.$, a wszystkie a_s są rzeczywistemi wielkościami. W takim razie — gdy jeszcze (dla uproszczenia) przyjmiemy: $f(0) \neq 0$ — mamy:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \left(\frac{1}{x-a_s} + P_s(x) \right), \quad \text{albo:}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^m \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{a_s^m (x-a_s)} \quad \text{[art. 31, (2)]}$$

a pochodna $f'(x)$ znika na takich miejscach, różnych od a_s, na których:

$$x^m \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{a_s^m (x-a_s)} = 0. \tag{9}$$

Gdy m jest nieparzyste, pozostawiamy lewą stronę tego równania niezmienioną. W razie parzystego m, napiszmy to równanie w postaci:

$$x^{m+1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{a_s^{m+1}(x-a_s)} - x^m \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{a_s^{m+1}} = 0, \tag{10}$$

gdzie ta druga suma jest zbieżną, bo zastępując w niej wszystkie λ_s przez największe $=\lambda$ dostajemy z niej bezwarunkowo zbieżny szereg:

$$\lambda \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{a_s^{m+1}}.$$

Według tego, czy m, czy $m+1$ jest nieparzystą liczbą $=2\mu+1$, zatrzymujemy na określenie miejsc zerowych różnych od a_s pochodnej $f'(x)$ albo równanie (9), albo (10).

Wtedy — odrzucając jeszcze w tych równaniach już-to czynnik x^{m-1}, już-to czynnik x^m — możemy każde z tych równań napisać w wspólnej formie:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s x}{a_s^{2\mu+1}(x-a_s)} + c = \varphi(x) = 0, \tag{11}$$

gdzie c jest albo $=0$, albo $=\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{a_s^{m+1}}$, a więc w każdym razie stałą ilością rzeczywistą.

Przyjmijmy, że równaniu (11) zadość można uczynić urojonem $x=\alpha+\beta i$. Wtedy po wstawieniu tego w (11) i odróżnieniu części pierwszorzędnej i drugorzędnej mieć będziemy:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s[\alpha^2 - a_s\alpha + \beta^2]}{a_s^{2\mu+1}[(\alpha-a_s)^2+\beta^2]} + c - \beta i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{a_s^{2\mu}[(\alpha-a_s)^2+\beta^2]} = 0.$$

Część rzeczywista i część urojona ma być tu zerem; że zaś druga suma zawiera same tylko dodatnie wyrazy i nie może być zerem, więc być musi $\beta=0$, a to znaczy:

IV. *Pochodna prostej funkcyi $f(x)$ rzędu m, a o miejscach zerowych wyłącznie rzeczywistych jest również funkcyą z samemi miejscami zerowemi rzeczywistemi.* *)

---

*) Cesaro: „*Sur les fonctions holomorphes de genres quelconques*“ C. R. T. 99. (1884), str. 26.

Zauważmy na osi pierwszorzędnej dwa po sobie bezpośrednio następujące miejsca zerowe a, b, funkcyi $f(x)$, zakładając $a<b$. Wstawiając w $\varphi(x)$ w (11) raz $a+\varepsilon$, a drugi raz $b-\varepsilon$, gdzie ε jest bardzo małą dodatnią ilością, dostaniemy: $\varphi(a+\varepsilon)>0$ i o bardzo dużej wartości, a $\varphi(b-\varepsilon)<0$ i o bardzo dużej bezwzględnej wartości (bez różnicy, czy $a>0$, $b>0$; $a<0$, $b<0$; $a<0$, $b>0$). Ponieważ dalej $\varphi(x)$ jest funkcyą ciągłą, więc stąd odrazu wynika, że w zakresie $(a...b)$ staje się $\varphi(x)$ nieparzystą ilość razy zerem.

Utwórzmy pochodnę:

$$\varphi'(x)=-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda_s}{a_s^{2\mu}(x-a_s)^2},$$

to widocznie jest ona na miejscach a, b nieskończonością (odjemną); wszędzie — a więc i w zakresie $(a...b)$ — jest statecznie odjemną i nigdzie tam zerem się nie staje. Z tego wynika, że $\varphi(x)$ w zakresie $(a...b)$ nie posiada ani największości ani najmniejszości, staje się więc w tym zakresie zerem tylko jednokrotnie. Mamy więc twierdzenie:

V. *Między każdą parą dwóch bezpośrednio po sobie następujących miejsc zerowych funkcyi $f(x)$ określonej w tw. IV. znajduje się tylko jedno miejsce zerowe funkcyi pochodnej. Wyjątek może stanowić miejsce $x=0$, które — gdy $m>1$ — występuje m-krotnie (podług (9)). Do tych miejsc dołączyć jeszcze trzeba te miejsca a_s z powtórzeniem (λ_s-1), do których w $f(x)$ należą $\lambda_s>1$.*

Weźmy pod uwagę jeszcze samo rozwinięcie prostej funkcyi $f(x)$ rzędu m w otoczeniu punktu $x=0$, aby i stąd wyprowadzić w szczególnych przypadkach uwagi godne wnioski.

Według art. 29. mamy:

$$f(x)=\Pi\left(1-\frac{x}{a_s}\right)^{\lambda_s}e^{\lambda_s\left[\frac{x}{a_s}+\dots+\frac{1}{m}\left(\frac{x}{a_s}\right)^m\right]}=$$

$$=e^{-\sum\limits_{s=1}^{\infty}\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{\lambda_s}{m+\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{m+\mu}}$$

$$=e^{-\sum\limits_{s=1}^{\infty}\lambda_s\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\frac{1}{a_s^{m+1}}+\frac{x^{m+2}}{m+2}\cdot\frac{1}{a_s^{m+2}}+\dots\right]},$$

a gdy położymy:

$$(12)\qquad \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda_s}{a_s^{m+1}}=s_{m+1},\quad \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda_s}{a_s^{m+2}}=s_{m+2},\quad\dots$$

to mieć będziemy:

$$(13)\qquad f(x)=e^{-s_{m+1}\cdot\frac{x^{m+1}}{m+1}-s_{m+2}\cdot\frac{x^{m+2}}{m+2}-\dots}$$
$$=1+A_1x^{m+1}+A_2x^{m+2}+\dots$$

z logarytmiczną pochodną:

$$(14)\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{(m+1)A_1x^m+(m+2)A_2x^{m+1}+\dots}{1+A_1x^{m+1}+A_2x^{m+2}+\dots}.$$

Z tego wynika, że:

$$(15)\qquad \frac{1}{x^k}\frac{f'(x)}{f(x)}\bigg|_{x=0}=\begin{cases}0 & \text{dla } k=1,2,\dots,m-1\\ (m+1)A_1 & \quad " \quad k=m\\ \infty & \quad " \quad k=m+1,\ m+2,\dots\end{cases}$$

i że więc rząd danej prostej funkcyi można określić, jako najmniejszą całkowitą dodatnią liczbę m spełniającą warunek:

$$(16)\qquad \frac{f'(x)}{x^{m+1}f(x)}\bigg|_{x=0}=\infty.$$

Z drugiej strony jest:

$$(17)\qquad \begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s\frac{x^m}{a_s^m}\cdot\frac{1}{x-a_s}\\ &=-\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s\frac{x^m}{a_s^{m+1}}\left(1+\frac{x}{a_s}+\frac{x^2}{a_s^2}+\dots\right)\\ &=-s_{m+1}x^m-s_{m+2}x^{m+1}-s_{m+3}x^{m+2}-\dots\end{aligned}$$

Może się zdarzyć, że z sum (12) okazują się:

$$s_{m+1}=s_{m+2}=s_{m+3}=\dots=s_{m+r}=0$$

a dopiero suma s_{m+r+1} okazuje się różną od zera. Wtedy — co z porównania form (14), (17) wynika — muszą być $A_1=A_2=A_3=\dots=A_{r-1}=0$, $A_r\neq 0$. Warunek (16) przechodzi tu na:

$$(18)\qquad \frac{f'(x)}{x^{m+r+1}f(x)}\bigg|_{x=0}=\infty,$$

a sama funkcya:

$$f(x)=e^{-s_{m+r+1}\cdot\frac{x^{m+r+1}}{m+r+1}-\dots}$$

To wskazuje, że takiej funkcyi można przyznać nie tylko rząd m (wskutek bezwarunkowej zbieżności sumy $s_{m+1}=0$) i nie tylko rząd $m+r$ (wskutek spełniającego się warunku (18)), ale w ogólności rzędy:

$$m,\ m+1,\ m+2,\ \dots,\ m+r.$$

Samą funkcyę $f(x)$ będzie więc można przedstawić przez $(r+1)$ identycznych iloczynów:

$$f(x)=\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_s}\right)^{\lambda_s} e^{\lambda_s \sum\limits_{k=1}^{m+\rho} \frac{1}{k}\left(\frac{x}{a_s}\right)^k}.$$

$$\rho = 0, 1, 2, \ldots, r.$$

Uwagi te odniosą się oczywiście i do funkcyi rzędu m^{go} z dowolnym czynnikiem zewnętrznym, a stąd twierdzenie:

VI. *Rząd danej funkcyi nie zawsze jest wielkością jednowartościową. W przypadku bowiem, kiedy z sum* $\sum \frac{\lambda_s}{a_s^k} = s_k$ *są* $s_{m+1} = s_{m+2} = \ldots\ldots = s_{m+r} = 0$, $s_{m+r+1} \neq 0$ *można ją bez zmiany zewnętrznego czynnika przedstawić iloczynami o rzędach:* m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, ..., $m+r$. *)

W razie jednego tylko rzędu m będą iloczyny utworzone z funkcyj pierwszych:

$$\left(1-\frac{x}{a_s}\right)^{\lambda_s} e^{\left(\frac{x}{a_s}+\ldots+\frac{1}{t}\left(\frac{x}{a_s}\right)^t\right)}$$

$$t = m,\quad m+1,\ m+2, \ldots,$$

gdzie m jest najmniejsza liczba dająca bezwarunkową zbieżność sumy: $\sum\limits_{s=1}^{\infty} (1 / a_s)^{m+1}$, wszystkie bezwarunkowo, jednostajnie i bezustannie zbieżne. Oznaczmy je przez:

(19) $$f_m(x),\ f_{m+1}(x),\ f_{m+2}(x), \ldots,$$

to te funkcye będą tu wszystkie między sobą różne. Gdy jednak zachodzą warunki opisane w tw. VI., a więc rząd nie jest jednowartościowy, to w takim razie okaże się:

$$f_m(x) = f_{m+1}(x) = \ldots = f_{m+r}(x).$$

W szeregu (19) nazwiemy funkcye $f_{m+1}(x)$, $f_{m+2}(x)$, ... funkcyami o nadmiernych rzędach, albo krótko f u n k c y a m i n a d m i e r n e m i.

Pd. 1. W art. 33. — Pd. 5. — utworzyliśmy funkcyę o rzędzie $m = 4$. Nazwijmy ją $f_4(x)$, to ponieważ tu:

$$s_5 = s_6 = s_7 = 0,\quad s_8 \neq 0,\quad s_9 = s_{10} = s_{11} = 0,\quad s_{12} \neq 0, \ldots\ldots, \quad \text{więc:}$$

$$f_4 = f_5 = f_6 = f_7.$$

Dalej okaże się:

$$f_8 = f_9 = f_{10} = f_{11} \quad \text{i t. d.}$$

Pd. 2. Utworzyć nadmierne funkcye:

$$(\sin x)_2,\quad (\sin x)_3,\quad \ldots\ldots,$$

należące do $\sin x$ i okazać, że:

$$(\sin x)_2 = (\sin x)_3,\quad (\sin x)_4 = (\sin x)_5,\quad \ldots\ldots$$

---

*) J. P u z y n a — „*Über den Laguerre'schen Rang einer eindeutigen analytischen Function mit unendlich vielen Nullstellen*". *Monatshefte für Math. u. Phys.* T. 3. (1892), str. 1—15.

41. Przegląd funkcyj analitycznych z jednem miejscem osobliwem. Badania, jakie dotąd przeprowadzono, wystarczą, aby już umożliwić przegląd wszystkich jednoznacznych, analitycznych funkcyj z jednem miejscem istotnie osobliwem w nieskończoności i na każdy rodzaj takiej funkcyi znaleść przykład między funkcyami elementarnemi.

Należą tu przedewszystkiem całkowite funkcye przestępne, a te — według tego, czy są bez miejsc zerowych, ze skończoną, lub nieskończoną ilością takich miejsc mają postacie:

$$(A) \qquad e^{g(x)},\ e^{g(x)}G(x),\ e^{g(x)}\Pi E_s(x, a_s)$$

$g(x)$ może tu (i w dalszych formach) być funkcyą całkowitą wymierną, lub przestępną, $G(x)$ jest wyłącznie wymierną całkowitą, a $\Pi E_s(x,a_s)$ jest nieskończonym bezustannie, bezwarunkowo i jednostajnie zbieżnym iloczynem funkcyj pierwszych $E_s(x, a_s)$. Każda z funkcyj (A) da się rozwinąć na bezustannie zbieżny szereg w otoczeniu każdego punktu x_0 leżącego w skończoności.*)

Niech $f(x)$ będzie funkcyą znowu z jedynem miejscem istotnie szczególnem w nieskończoności, a posiadającą nieskończonościowe miejsca:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots.$$

w skończonej lub nieskończonej liczbie, a z powtórzeniami:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots.$$

W takim razie można zawsze utworzyć całkowitą funkcyę $f_2(x)$, posiadającą właśnie miejsca b_s jako λ_s-krotne pierwiastki. Iloczyn:

$$(1) \qquad f_2(x).f(x)=f_1(x)$$

pozbawiony miejsc nieskończonościowych będzie całkowitą funkcyą (wymierną albo przestępną), a sama funkcya $f(x)$ będzie postaci:

$$(B) \qquad f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Mamy zatem twierdzenie:**)

I. *Każda funkcya przestępna, niecałkowita z jednem tylko miejscem istotnie szczególnem w nieskończoności da się zawsze wyrazić ilorazem dwóch funkcyj całkowitych, z których każda, albo przynajmniej jedna jest przestępną.*

W szczególności należeć tu będą:

I⁰. Funkcye ze skończoną ilością i miejsc zerowych i miejsc nieskończonościowych:

---

*) O związkach, jakie zachodzą między dwiema funkcyami całkowitemi, a jakie powstają z porównania własności tych funkcyj czytaj: Guichard — „*Sur les f. entières*“. *Annales scietifiques de l'école N. superieure.* T. 1) (S[a] 3.), str. 427—432.

**) Twierdzenie to podał pierwszy Weierstrass.

$$(B) \qquad [1] \qquad e^{g(x)} \cdot \frac{G_1(x)}{G_2(x)} = e^{g(x)} R(x).$$

II⁰. Funkcye ze skończoną ilością miejsc zerowych, a z nieskończoną ilością miejsc nieskończonościowych b_s:

$$(B) \qquad [2] \qquad \frac{e^{g(x)} G(x)}{\Pi E_s(x, b_s)}.$$

III⁰. Funkcye z nieskończoną ilością miejsc zerowych a_s, a ze skończoną ilością miejsc nieskończonościowych:

$$(B) \qquad [3] \qquad e^{g(x)} \cdot \frac{\Pi E_s(x, a_s)}{G(x)}.$$

IV⁰. Funkcye z nieskończoną ilością miejsc zerowych a_s i z nieskończoną ilością miejsc nieskończonościowych b_s:

$$(B) \qquad [4] \qquad e^{g(x)} \cdot \frac{\Pi E'_s(x, a_s)}{\Pi E''_s(x, b_s)}.$$

W kształtach (A), (B) wyczerpane są już wszystkie funkcye jednoznaczne z jedynem miejscem istotnie szczególnem w nieskończoności.

Pd. 1. Określić rodzaj funkcyj:

$$e^x.(a+bx), \qquad e^{2x+3}.\sin x$$

$$e^x \frac{ax+b}{a'x^2+b'x+c'}, \qquad \frac{ax+b}{\sin x}$$

$$\frac{\cos x}{ax+b}, \quad tg\, x, \quad cotg\, x, \quad \frac{\sin x}{e^{ax+b}\cos x}.$$

Zastąpmy w (A) i (B) argument x przez $\frac{1}{x-c}$, gdzie c jest dowolnym punktem leżącym w skończoności, to dostaniemy kształty:

$$(A') \qquad e^{g\left(\frac{1}{x-c}\right)}, \; e^{g\left(\frac{1}{x-c}\right)} . G\left(\frac{1}{x-c}\right), \; e^{g\left(\frac{1}{x-c}\right)} \Pi E_s\left(\frac{1}{x-c}, a_s\right),$$

$$(B') \qquad \frac{f_1\left(\frac{1}{x-c}\right)}{f_2\left(\frac{1}{x-c}\right)}$$

które będą funkcyami z jednem jedynem miejscem istotnie szczególnem w punkcie c.

O kształtach (A') zauważyć potrzeba, że **one wszystkie są w $x=\infty$ skończone**. Co się zaś tyczy iloczynu $\Pi E_s\left(\frac{1}{x-c}, a_s\right)$, to jego miejsca zerowe wynikają z równań:

$$\frac{1}{x-c}=a_s \quad \text{i są:}$$

$$x=c+\frac{1}{a_s}, \quad s=1,2,3,...,$$

skupiają się zatem (bo $lim\, a_n=\infty$) w punkcie c.

Pytanie zachodzi, czy w kształtach (A'), (B') dadzą się naodwrót przedstawić wszystkie funkcye jednoznaczne z jednem miejscem istotnie osobliwem leżącem w skończoności? W tym celu zauważmy przedewszystkiem, że funkcya $F(x)$ z jednem miejscem istotnie szczególnem c, a zresztą regularnego zachowania się w skończoności i nieskończoności może — podług twierdzenia Laurenta — mieć wyłącznie kształt:

$$F(x)=G\left(\frac{1}{x-c}\right),$$

gdzie G oznacza całkowitą przestępną funkcyę.

Jeśli dalej o $F(x)$ założymy, że ona nigdzie, ani w skończoności, ani w nieskończoności, zerem się nie staje, to stąd już odrazu wnioskujemy, że jej kształt nie może być inny, jak:

$$F(x)=e^{g\left(\frac{1}{x-c}\right)},$$

gdzie g oznacza funkcyę całkowitą, przestępną, albo wymierną argumentu $(x-c)^{-1}$.

Stąd twierdzenie:

II. *Funkcya z jedynem miejscem istotnie szczególnem c w skończoności, zresztą skończona i w skończoności i nieskończoności a nie mająca ani jednego miejsca zerowego da się zawsze przedstawić w postaci* $e^{g\left(\frac{1}{x-c}\right)}$.

Zauważmy teraz funkcyę $f(x)$ z jedynem miejscem istotnie szczególnem c, z nieskończonościowemi miejscami b_s o powtórzeniach μ_s, a z zerowemi miejscami a_s o powtórzeniach λ_s. [Jedno z miejsc a_s, lub jedno z miejsc b_s może leżeć w nieskończoności. Gdy miejsca a_s, lub miejsca b_s, albo równocześnie jedne i drugie miejsca tworzą mnogość nieskończoną, to mogą się skupiać jedynie i wyłącznie w punkcie c].

Utwórzmy funkcyę $f_2\left(\frac{1}{x-c}\right)$ — podług (A') (kształt 2[gi] lub 3[ci]) — posiadającą miejsca zerowe b_s o powtórzeniach μ_s, a dalej funkcyę

$F_1\left(\frac{1}{x-c}\right)$ posiadającą miejsca zerowe a_s o powtórzeniach λ_s, to wtedy:

$$f(x) \cdot \frac{f_2\left(\frac{1}{x-c}\right)}{F_1\left(\frac{1}{x-c}\right)}$$

będzie funkcyą wszędzie w skończoności i nieskończoności regularną, pozbawioną miejsc zerowych i z jednem miejscem istotnie szczególnem w c. Taka funkcya ma podług tw. II. postać $e^{g\left(\frac{1}{x-c}\right)}$ Mamy więc:

$$f(x) \cdot \frac{f_2\left(\frac{1}{x-c}\right)}{F_1\left(\frac{1}{x-c}\right)} = e^{g\left(\frac{1}{x-c}\right)}.$$

Połóżmy:

$$F_1\left(\frac{1}{x-c}\right) e^{g\left(\frac{1}{x-c}\right)} = f_1\left(\frac{1}{x-c}\right)$$

to ostatecznie mamy:

$$f(x) = \frac{f_1\left(\frac{1}{x-c}\right)}{f_2\left(\frac{1}{x-c}\right)}$$

a to jest postać (B').

W razie, gdy funkcya nie posiada miejsc b_s, dostajemy:

$$f(x) = f_1\left(\frac{1}{x-c}\right)$$

a to jest znowu postać (A'). Z tego wynika:

III. *Każda jednoznaczna analityczna funkcya o jedynem miejscu istotnie szczególnem w skończoności jest albo całkowitą przestępną funkcyą argumentu* $\frac{1}{x-c}$, *albo ilorazem dwóch całkowitych funkcyj tego argumentu z tem zastrzeżeniem, że albo obie funkcye równocześnie, albo jedna z nich przynajmniej jest przestępną.*

Pierwszy rodzaj takich funkcyj mamy już całkowicie wyczerpany w (A'). Co się tyczy drugiego rodzaju, to funkcye tu należące wyczerpiemy, gdy w (B), [1], [2], [3], [4] zastąpimy wszędzie x przez $(x-c)^{-1}$.

Pd. 2. Takiemi funkcyami są n. p.:

$$\sin\frac{1}{x},\ \cos\frac{1}{x},\ tg\frac{1}{x-c},\ \sec\frac{1}{x-c},\ \operatorname{cosec}\frac{1}{x-c}$$

$$e^{\frac{1}{x}},\ e^{\frac{1}{x-c}}\sin\frac{2}{x-c}\ \text{i t. p.}$$

Iloczyn $\Pi E_s\left(\frac{1}{x-a_s}, a_s\right)$ należy już do funkcyj, które przedstawiają się nieskończonym iloczynem $\Pi F_s(x)$ o czynnikach $F_s(x)$ będących dowolnemi funkcyami. Przyjmijmy, że:

$$F_s(x)=[1+\varphi_s(x)]e^{\varphi_s+\frac{1}{2}\varphi_s^2+\cdots+\frac{1}{\nu_s}\varphi_s^{\nu_s}}=E_s(\varphi_s)\qquad s=1,2,\ldots,$$

to aby iloczyn:

$$\Phi(x)=\prod_{s=1}^{\infty}E_s(\varphi_s)\tag{2}$$

mógł być w pewnym obszarze (A) argumentu x zbieżnym, trzeba przedewszystkiem, aby dla każdego punktu x w tym obszarze — od pewnego $s=k$ poczynając — okazało się:

$$1>|\varphi_k|>|\varphi_{k+1}|>\ldots,\ \lim_{n=\infty}|\varphi_n|=0.\tag{3}$$

Dalej, postępując podobnie, jak w art. 29., dojdziemy do wniosku, że iloczyn (2) będzie już w obszarze (A) i jednostajnie i bezwarunkowo zbieżny, jeżeli się tam suma:

$$S_k(x)=-\sum_{s=k}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu+\nu_s}\cdot\varphi_s^{\mu+\nu_s}$$

— a więc i suma $S_1(x)$ — okaże w ten sam sposób zbieżną. Wtedy w otoczeniu każdego punktu x_0 obszaru (A) dostaniemy:

$$\Phi(x)=e^{S_1(x)}=e^{-[B_0+B_1(x-x_0)+\ldots]}$$
$$=1+A_0(x-x_0)+A_1(x-x_0)^2+\ldots,$$

a iloczyn będzie widocznie analityczną funkcyą w tym obszarze.

Przyjmując, że wszystkim ν_s można nadać wspólną wartość m i określając wtedy $\Phi(x)$ jako iloczyn rzędu m, mamy:

$$S_k(x)=-\sum_{s=k}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{m+\mu}\varphi_s^{m+\mu}.$$

Z tego wynika nierówność:

$$|S_k(x)|<\sum_{s=k}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}|\varphi_s|^{m+\mu},$$

albo — z uwagi na (3) — nierówność:

$$|S_k(x)| < \sum_{s=k}^{\infty} \frac{|\varphi_s|^{m+1}}{1-|\varphi_s|}.$$

Połóżmy tu po prawej stronie za każdą różnicę $1-|\varphi_s|$ która jest <1 wprost 1, to dostaniemy:

$$|S_k(x)| < \sum_{s=k}^{\infty} |\varphi_s|^{m+1}$$

a to wskazuje, że funkcyj $\varphi_s(x)$ można użyć do utworzenia iloczynu rzędu m, w pewnym obszarze (A) jednostajnie i bezwarunkowo zbieżnego, jeżeli w tym obszarze okazuje się suma:

$$\Psi = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x)^{m+1}$$

jednostajnie i bezwarunkowo zbieżną.

Takim iloczynem o rzędzie $m=1$ był n. p. iloczyn (ε_1) art. 25.*) po uprzedniem przedstawieniu każdego z czynników pod postacią $(1+\varphi_s)$.

Połóżmy:

$$\varphi_s = \frac{x}{x-a_s}, \quad s=1, 2, 3, \ldots, \text{ gdzie:}$$

$$|a_1| < |a_2| < |a_3|, \ldots, \lim a_n = \infty$$

zakładamy i zbadajmy sumę:

$$\sum |\varphi_s|^{m+1} = |x|^{m+1} \sum \frac{1}{|a_s|^{m+1}} \cdot \frac{1}{\left|1-\dfrac{x}{a_s}\right|^{m+1}}.$$

W obszarze $|x| < |a_1|$ mieć tu będziemy:

$$\sum |\varphi_s|^{m+1} < \frac{|x|^{m+1}}{\left(1-\left|\dfrac{x}{a_1}\right|\right)^{m+1}} \sum \frac{1}{|a_s|^{m+1}},$$

a stąd wynika, że w tym obszarze będzie suma $\Sigma \varphi_s^{m+1}$ jednostajnie i bezwarunkowo zbieżną, gdy suma $\sum \frac{1}{a_s^{m+1}}$ przy najmniejszem m wyjętem z szeregu $0, 1, 2, \ldots$ będzie bezwarunkowo zbieżną.

Zauważmy — mając to — funkcyę:

$$f(x) = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1-\frac{x}{a_s}\right) e^{\frac{x}{a_s}}, \quad (f(0)=1),$$

rzędu $m=1$. Odwrotność każdej funkcyi pierwszej jest tu:

*) Seidel [C. J. T. 73.] rozwija także logarytm i łuki na nieskończone iloczyny.

$$\frac{1}{1-\frac{x}{a_s}}e^{-\frac{x}{a_s}}=\frac{a_s}{a_s-x}e^{-\frac{x}{a_s}}=\left(1-\frac{x}{x-a_s}\right)e^{-\frac{x}{a_s}}=$$

$$=e^{x\left(\frac{1}{x-a_s}+\frac{1}{a_s}\right)}\left(1-\frac{x}{x-a_s}\right)e^{\frac{x}{x-a_s}},$$

a ponieważ sumę $\Sigma(1/a_s)^2$ przyjęliśmy już zbieżną, więc iloczyn:

$$\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{x-a_s}\right)e^{\frac{x}{x-a_s}}$$

jest w obszarze $|x|<|a_1|$ jednostajnie i bezwarunkowo zbieżnym. Z drugiej strony mamy:

$$\prod_{s=1}^{\infty}e^{-x\left(\frac{1}{x-a_s}+\frac{1}{a_s}\right)}=e^{-x\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-a_s}+\frac{1}{a_s}\right)}$$

$$=e^{-x\frac{d}{dx}\log f(x)} \qquad \text{[tw. I. art. 31.]}$$

co znowu wskazuje, że i ten iloczyn daje w obszarze $|x|<|a_1|$ analityczną funkcyę. Wskutek tego możemy położyć:

$$F(x)=\frac{1}{f(x)}=e^{-x\frac{d}{dx}\log f(x)}\cdot\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{x-a_s}\right)e^{\frac{x}{x-a_s}}.$$

Zastosujmy tę formę do funkcyi:

$$F(x)=\frac{\pi x}{\sin\pi x}.\ \text{Tutaj jest}\ \frac{d}{dx}\log f(x)=$$

$$=\frac{d}{dx}\log\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\pi\cot g\,\pi x-\frac{1}{x};$$

a więc będzie:

$$\frac{\pi x}{\sin\pi x}=e^{1-\pi x\cot g\,\pi x}\prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{x}{x-\nu}\right)e^{\frac{x}{x-\nu}},\ \text{a stąd wynika:}$$

$$\operatorname{cosec}\pi x=\frac{e}{\pi x}\cdot e^{-\pi x\cot g\,\pi x}\prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{x}{x-\nu}\right)e^{\frac{x}{x-\nu}}$$

Podobnie biorąc pod uwagę funkcyę $F(x)=\frac{1}{\cos\pi x}$, mamy tu:

$$\frac{d}{dx}\log\cos\pi x=-\pi\,tg\,\pi x\ ,\ \text{a więc będzie:}$$

$$\sec\pi x=e^{\pi x\,tg\,\pi x}\prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{x-\frac{2\nu+1}{2}}\right)e^{\frac{x}{x-\frac{2\nu+1}{2}}}.$$

ROZDZIAŁ IV.

Funkcye jednoznaczne ze skończoną lub nieskończoną ilością miejsc istotnie osobliwych.

42. Funkcya ze skończoną ilością miejsc osobliwych. W tym Rozdziale zajmiemy się jednoznacznemi funkcyami o skończonej lub nieskończonej ilości miejsc istotnych, zaczynając od funkcyj ze skończoną liczbą takich miejsc.

Przyjmijmy, że $f(x)$ jest właśnie funkcyą, która na miejscach $c_1, c_2, \dots, c_n$ już nie jest regularną. Z miejsc c_s zaliczają się niektóre do istotnych, a niektóre do nieistotnych, a wszystkie leżą w skończoności. Zachowanie się funkcyi w punkcie $x=\infty$ uwzględnimy później. Według tych danych ma funkcya w otoczeniu punktów c_s rozwinięcia:

$$f(x)=G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)+\mathfrak{P}_s(x-c_s),\quad s=1,2,\dots,n.,$$

w których G_s są funkcyami całkowitemi już-to przestępnemi, już-to wymiernemi argumentów $(x-c_s)^{-1}$, a nie posiadają wolnych wyrazów. Utwórzmy różnicę:

$$u=f(x)-\sum_{s=1}^{n} G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right),$$

to będzie-to funkcya pozbawiona w skończoności wszelkich miejsc osobliwych. Co się tyczy miejsca $x=\infty$, to tam ta różnica zachowywać się będzie tak, jak sama funkcya $f(x)$, a więc jest tam albo 1^0 regularną, albo 2^0 posiada tam punkt nieskończonościowy, albo 3^0 ma tam punkt istotnie osobliwy. W pierwszym wypadku musi być $u=C=$ stała, bo u nie posiadając żadnych punktów szczególnych może być tylko stałą ilością.

W dwóch następnych wypadkach mamy $u=G_0(x)$, gdzie $G_0(x)$ jest w drugim razie całkowitą wymierną, a w trzecim razie całkowitą przestępną funkcyą.

Uwzględniając to, dostajemy:

$$(A)\qquad f(x)=C+\sum_{s=1}^{n} G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right),\ \text{albo:}$$

$$(A_1)\qquad f(x)=G_0(x)+\sum_{s=1}^{n} G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)$$

a stąd twierdzenie:

I. *Funkcya o skończonej liczbie miejsc osobliwych c_s leżących w skończoności daje się przedstawić sumą funkcyj całkowitych G_s bez wolnych wyrazów za dodaniem funkcyi całkowitej $G_0(x)$, która także do stałej C zredukować się może.*

Jeżeli odrzucimy warunek, aby funkcye całkowite G_s argumentów $(x-c_s)^{-1}$ nie zawierały wolnych wyrazów, to wtedy formę (A) będziemy mogli także w ten sposób napisać:

$$(A_2) \qquad f(x)=\sum_{s=1}^{n} G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right).$$

Z niej przejdziemy do (A_1) — gdzie już tylko $(n-1)$ miejsc c_s ma leżeć w skończoności — jeżeli jedno z miejsc c_s n. p. miejsce c_n przyjmiemy $=\infty$ i wtedy funkcyi $G_n\left(\overline{x-c_n}^{-1}\right)$ nadamy znaczenie $G_n(x)$.

Formę (A_2) uważać trzeba za najogólniejszą, w jakiej funkcyę o danych miejscach szczególnych w skończonej ilości przedstawić można.

Przyjmijmy teraz, że funkcya $f(x)$ posiada wyłącznie same miejca istotne $c_1, c_2, ..., c_n$, a poza niemi jest wszędzie skończoną i różną od zera. Według tego założenia ma funkcya $f(x)$ w otoczeniu każdego punktu $x_0 \neq c_s$, a leżącego w skończoności, rozwinięcie postaci $f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+...$ z wolnym wyrazem $|A_0|>0$. Lecz i logarytmiczna pochodna funkcyi będzie w takich punktach regularną, bo wskutek $|A_0|>0$ mieć będziemy zawsze $f'(x)/f(x)=\mathfrak{P}(x-x_0)$. Przechodząc do otoczenia punktu $x=\infty$, musimy tu zrobić takie odróżnienie:

I⁰. Wszystkie punkta c_s leżą w skończoności. Wtedy i w otoczeniu punktu $x=\infty$ mamy:

$$f(x)=A_0+A_1x^{-1}+A_2x^{-2}+...=\mathfrak{P}(x^{-1}), \quad \text{a że:}$$
$$f'(x)=-A_1x^{-2}-2A_2x^{-3}-...$$

więc i tu logarytmiczna pochodna:

$$(1) \qquad f'(x)/f(x)=-(A_1/A_0)\,.\,x^{-2}+\mathfrak{P}(x^{-1})$$

jest regularną.

Funkcya $f'(x)/f(x)$ nie posiada zatem innych miejsc szczególnych, jak tylko $c_1, c_2, ..., c_n$, a wskutek tego da się przedstawić formą (A). Połóżmyż:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=C+\sum_{s=1}^{n} G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right), \text{*)}$$

*) Obojętnem jest przytem odróżniać między funkcyami G_s całkowite przestępne od całkowitych wymiernych.

*

$$G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)=\frac{k_s}{x-c_s}+\frac{k'_s}{(x-c_s)^2}+\frac{k_s''}{(x-c_s)^3}+\ldots,$$

i zauważmy, że:

$$\frac{k_s'}{(x-c_s)^2}+\frac{k_s''}{(x-c_s)^3}+\ldots=\frac{d}{dx}\left[-\frac{k_s'}{x-c_s}-\frac{k_s''}{2(x-c_s)^2}-\ldots\right]=\frac{d}{dx}\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right),$$

to mamy teraz:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=C+\sum_{s=1}^{n}\frac{k_s}{x-c_s}+\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dx}\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right).$$

Rozwijając tę formę dla otoczenia punktu $x=\infty$, dostajemy:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=C+\frac{1}{x}\sum_{s=1}^{\infty}k_s+\frac{1}{x^2}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

a porównując to z rozwinięciem (1), przychodzimy do wniosku, że $C=0$, że:

$$\sum_{s=1}^{n}k_s=0, \quad \text{i że więc:}$$

$$(a) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{s=1}^{n}\frac{k_s}{x-c_s}+\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dx}\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right).$$

II⁰. Z miejsc $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jedno, n. p. miejsce c_n leży w nieskończoności. W tym razie przedstawiając logarytmiczną pochodną $f'(x)/f(x)$ formą (A_1), mieć będziemy:

$$f'(x)/f(x)=G_n(x)+\sum_{s=1}^{n-1}G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right). \quad \text{Połóżmy:}$$

$$G_n(x)=c+h_1x+\ldots=\frac{d}{dx}\left[cx+\frac{h_1}{2}x^2+\ldots\right]=\frac{d}{dx}\overline{G}_n(x),$$

a każdemu G_s, $s=1, 2, \ldots, n-1$, dajmy — jak przódy — formę:

$$\frac{k_s}{x-c_s}+\frac{d}{dx}\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right),$$

to dostaniemy:

$$(b) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{s=1}^{n-1}\frac{k_s}{x-c_s}+\frac{d}{dx}\overline{G}_n(x)+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{d}{dx}\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c}\right),$$

a tu warunek $\sum\limits_{s=1}^{n-1}k_s=0$ nie jest konieczny.

Gdy przyjmiemy, że ε może być $=0$, albo $=1$, to formuły (a), (b) można będzie przedstawić w wspólnej postaci:

$$(c) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{s=1}^{n-\varepsilon}\frac{k_s}{x-c_s}+\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dx}\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)$$

z zastrzeżeniem, że $\varepsilon=0$, gdy wszystkie c_s są skończone; w razie $c_n=\infty$, jest $\varepsilon=1$, a $G_n\left(\overline{x-c_s}^{\,-1}\right)$ ma znaczenie funkcyi $G_n(x)$.

Udowodnimy, że wszystkie k_s są tak w wypadku I$^{\text{szym}}$, jak i II$^{\text{gim}}$ zawsze całkowitemi liczbami. Rozwińmy w tym celu formę (c) w otoczeniu jednego z punktów c_s leżącego w skończoności, to mieć będziemy:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{k_s}{x-c_s}+\frac{d}{dx}\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)+\frac{d}{dx}\mathfrak{P}_s(x-c_s).$$

Stąd wynika:

$$log\, f(x)=log\,(x-c_s)^{k_s}+\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)+\mathfrak{P}_s(x-c_s)$$

i wreszcie:

$$f(x)=(x-c_s)^{k_s}.\,exp\left[\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)+\mathfrak{P}_s(x-c_s)\right]^{*)}.$$

Drugi czynnik (wykładniczy) jest tu w otoczeniu punktu c_s niezawodnie jednoznaczny. Aby i pierwszy czynnik był jednoznacznym — co być musi, bo $f(x)$ jest funkcyą jednoznaczną — trzeba przyjąć koniecznie, że k_s jest liczbą całkowitą dodatnią, odjemną, a nawet zerem, c. b. d. d. Z tego wynika, że:

$$(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_{n-\varepsilon})^{k_{n-\varepsilon}}=R(x)$$

jest wymierną funkcyą, a przy takiem oznaczeniu dostajemy z równania (c):

$$log\, f(x)=log\; R(x)+\sum_{s=1}^{n}\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)$$

i wreszcie:

$$(B)\qquad f(x)=R(x).\,exp\sum_{s=1}^{n}\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right).$$

Mamy więc twierdzenie:

II. *Funkcya, która posiada miejsca istotnie szczególne:* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *a poza niemi nigdzie ani zerem ani nieskończonością się nie staje, daje się przedstawić iloczynem: wymierna funkcya* $R(x)$ *bez miejsc zerowych i nieskończonościowych poza* c_s, *a z miejscami zerowemi lub nieskończonościowemi w* c_s *przez wykładniczą funkcyę o wykładniku = sumie funkcyj całkowitych argumentów* $(x-c_s)^{-1}$.

---

*) Dla prostszego pisania używać będziemy często angielskiego znakowania: $exp\, a=e^a$.

W razie skończonych wszystkich c_s funkcya $R(x)$ nie jest — wskutek $\sum_{=1}^{\infty} k_s=0$ — w miejscu $x=\infty$ ani zerem ani nieskończonością. Gdy $c_n=\infty$, to warunek $\sum_{s=1}^{n-1} k_s=0$ jest możliwy, ale nie konieczny. Funkcya $R(x)$ w tym razie może być dla $x=\infty$ skończoną $\neq 0$, nieskończoną, albo zerem.

43. Funkcye ze skończoną ilością miejsc istotnych z uwzględnieniem miejsc zerowych i nieskończonościowych. Przejdźmy do innego rodzaju funkcyj. Funkcya $f(x)$ niech posiada — jak przódy — miejsca istotnie szczególne $c_1, c_2, ..., c_n$ a poza tymi punktami niech staje się dowolną, — może i nieograniczoną — ilość razy zerem i nieskończonością. Aby taką funkcyę przedstawić, podzielmy nieograniczony obszar argumentu x na jednolite obszary C_1, C_2, ..., C_n o takich własnościach: W obszarze C_s zawiera się tylko jeden punkt istotny, mianowicie punkt c_s, a linia ograniczająca ten obszar nie przechodzi ani przez żaden punkt zerowy, ani nieskończonościowy funkcyi $f(x)$.

Wewnątrz C_s znajdziemy skończoną lub nieskończoną ilość miejsc zerowych:

$$(\alpha) \qquad a_s,\ a_s',\ a_s'',\ ...$$

i skończoną lub nieskończoną ilość miejsc nieskończonościowych:

$$(\beta) \qquad b_s,\ b_s',\ b_s'',\ ...$$

W szczególnych razach może obszar C_s nie zawierać wcale miejsc (α), lub miejsc (β), albo równocześnie być pozbawionym i miejsc (α) i miejsc (β). Gdy jednych lub drugich miejsc — albo jednych i drugich — jest tam nieskończenie dużo, to ich mnogość skupia się wyłącznie w c_s, bo funkcya — prócz punktów c_s — nie posiada zresztą żadnych punktów istotnych, a c_1, c_2, ..., c_{s-1}, c_{s+1}, ..., c_n leżą już poza C_s.

Funkcyę, która ma jedno tylko miejsce istotne c_s, która nie ma żadnych miejsc nieskończonościowych a znika jedynie na miejscach (α) — z temi samemi powtórzeniami, co funkcya $f(x)$ *) — umiemy tworzyć — [art. 41.]. Ma ona postać:

$$(1) \qquad G_s\left(\overline{x-c_s}^{-1}\right)$$

i jest funkcyą całkowitą k o n i e c z n i e p r z e s t ę p n ą argumentu

*) W dalszym ciągu nie będziemy już wspominali o danych powtórzeniach miejsc zerowych, lub nieskończonościowych, rozumiejąc, że powtórzenia takie wszędzie i zawsze uwzględniać się będą.

$(x-c_s)^{-1}$. Utwórzmy funkcye (1) dla wszystkich obszarów C_1, C_2, ..., C_n, to iloczyn:

$$(2) \qquad \prod_{s=1}^{n} G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)$$

będzie funkcyą o jedynych miejscach istotnych c_s, wszędzie skończoną poza tymi punktami, a o miejscach zerowych identycznych z miejscami zerowemi funkcyi $f(x)$.

Utwórzmy dalej funkcye przestępne całkowite:

$$G_{n+1}(\overline{x-c_1}^{\,-1}), \ldots, G_{n+s}(\overline{x-c_s}^{\,-1}), \ldots, G_{n+n}(\overline{x-c_n}^{\,-1})$$

o tej własności, że $G_{n+s}(\overline{x-c_s}^{\,-1})$, posiadając punkt istotny c_s, znika jedynie na miejscach nieskończonościowych (β) funkcyi $f(x)$ zawartych w C_s, to iloczyn:

$$(3) \qquad \prod_{s=1}^{n} G_{n+s}\left(\frac{1}{x-c_s}\right)$$

będzie funkcyą z miejscami istotnie osobliwemi c_1, c_2, ..., c_n, nie posiadającą miejsc nieskończonościowych, a znikającą w miejscach nieskończonościowych funkcyi $f(x)$. [Gdy $c_n=\infty$, trzeba w (2) i (3) argument $(x-c_n)^{-1}$ zastąpić przez x]. Zauważmy iloraz:

$$\prod_{s=1}^{n} G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right) : \prod_{s=1}^{n} G_{n+s}\left(\frac{1}{x-c_s}\right) = \prod_{s=1}^{n}\left[G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right) : G_{n+s}\left(\frac{1}{x-c_s}\right)\right] = Z(x).$$

Będzie-to funkcya o jedynych miejscach istotnie szczególnych c_1, c_2, ..., c_n a o miejscach zerowych i nieskończonościowych, identycznych z takiemiż miejscami samej funkcyi $f(x)$. Gdy zatem zażądamy takiej funkcyi $f_1(x)$, którąby zadość uczynić miała identyczności:

$$f(x)=f_1(x).Z(x),$$

to $f_1(x)$ może-to być jedynie funkcya o postaci (B) — art. poprz. — Gdy to uwzględnimy, dostaniemy:

$$(C) \qquad f(x)=R(x). \frac{\prod_{s=1}^{n} G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right) exp\,\overline{G}_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right)}{\prod_{s=1}^{n} G_{n+s}\left(\frac{1}{x-c_s}\right)}$$

Każda z funkcyj $G_s((x-c_s)^{-1}) exp\,\overline{G}_s((x-c_s)^{-1})$ jest znowu funkcyą całkowitą, przestępną argumentu $(x-c_s)^{-1}$. Nazwijmyż ją: $G^{(s)}(\overline{x-c_s}^{\,-1})$, to mieć będziemy:

$$(C_1) \qquad f(x)=R(x)\left[\prod_{s=1}^{n} G^{(s)}\left(\frac{1}{x-c_s}\right) : \prod_{s=1}^{n} G_{n+s}\left(\frac{1}{x-c_s}\right)\right].$$

Między wykładnikami k_s funkcyi $R(x)$ niech będą:

$h_\alpha, \; h_\beta, \dots$ dodatnie, a

$g_\lambda, \; g_\mu, \dots$ odjemne.

W takim razie $R(x)$ będzie można przedstawić postacią:

$$R(x) = \frac{\left(\overline{x-c_\lambda}^{\,-1}\right)^{g_\lambda} . \left(\overline{x-c_\mu}^{\,-1}\right)^{g_\mu} \dots}{\left(\overline{x-c_\alpha}^{\,-1}\right)^{h_\alpha} . \left(\overline{x-c_\beta}^{\,-1}\right)^{h_\beta} \dots}$$

a gdy położymy:

$$G^{(\lambda)}\left(\overline{x-c_\lambda}^{\,-1}\right) . \left(\overline{x-c_\lambda}^{\,-1}\right)^{g_\lambda} = G_\lambda^{(1)}\left(\overline{x-c_\lambda}^{\,-1}\right), \dots$$

$$G_{n+\alpha}\left(\overline{x-c_\alpha}^{\,-1}\right) . \left(\overline{x-c_\alpha}^{\,-1}\right)^{h_\alpha} = G_\alpha^{(2)}\left(\overline{x-c_\alpha}^{\,-1}\right), \dots$$

(i funkcye, do których czynnik z $R(x)$ nie dołącza się, dla ujednostajnienia tak samo oznaczymy), to mieć będziemy:

$$(C_2) \qquad f(x) = \left[\prod_{s=1}^{n} G_s^{(1)}\left(\frac{1}{x-c_s}\right) : \prod_{s=1}^{n} G_s^{(2)}\left(\frac{1}{x-c_s}\right)\right].$$

Iloczyn w liczniku i iloczyn w mianowniku są-to funkcye o miejscach istotnie szczególnych $c_1, c_2, \dots, c_n$ a skończone w każdym dowolnym punkcie leżącym poza c_s, $s=1, 2, \dots, n$. Według formuły (A_2) — art. poprzedz. — będzie więc można licznik przedstawić sumą $\sum_{s=1}^{n} G_{s1}\left(\overline{x-c_s}^{\,-1}\right)$, a mianownik sumą $\sum_{s=1}^{n} G_{s2}\left(\overline{x-c_s}^{\,-1}\right)$, a sama funkcya $f(x)$ oblecze się wtedy w formę:

$$(C_3) \qquad f(x) = \sum_{s=1}^{n} \left[G_{s1}\left(\frac{1}{x-c_s}\right) : G_{s2}\left(\frac{1}{x-c_s}\right)\right].$$

Mając na oku formuły (C_2), (C_3), dostajemy twierdzenie:

I. *Najogólniejszą formą funkcyi jednoznacznej, analitycznej o skończonej ilości miejsc szczególnych c_s jest iloraz sum albo iloczynów całkowitych, przestępnych funkcyj o argumentach $\overline{x-c_s}^{\,-1}$.*

Przyjmijmy, że $f(x)$ nie posiada wcale miejsc nieskończonościowych. Wtedy w formule (C_1) wszystkie funkcye $G_{n+s}\left(\overline{x-c_s}^{\,-1}\right)$ mają znaczenie funkcyj wykładniczych $exp\left[-g_s\left(\overline{x-c_s}^{\,-1}\right)\right]$, a naznaczywszy każde

$$G^{(s)}\left(\overline{x-c_s}^{\,-1}\right) . exp\left[-g_s\left(\overline{x-c_s}\right)\right]$$

przez $G_s\left(\overline{x-c_s}^{\,-1}\right)$, otrzymamy:

$$(c_1) \qquad f(x) = R(x) . \prod_{s=1}^{n} G_s\left(\frac{1}{x-c_s}\right).$$

Gdy przeciwnie $f(x)$ ma być funkcyą bez miejsc zerowych, to analogicznie wnioskując, dojdziemy do formy:

$$(C_2)\qquad f(x)=\Big[R(x):\prod_{s=1}^{n} G_{n+s}\Big(\frac{1}{x-c_s}\Big)\Big].$$

W założeniu, że $f(x)$ nie posiada ani miejsc zerowych, ani nieskończonościowych wyniknie z (C_1) forma (B), którą już w art. poprzedzającym wyprowadziliśmy osobno.

44. Funkcye o jednokrotnych biegunach skupiających się w nieskończoności. W dwóch ostatnich artykułach widzieliśmy, jak ważną rolę w tworzeniu najogólniejszej formy pewnej określonej funkcyi odgrywają funkcye przestępne całkowite $G(\overline{x-c_s}^{\,-1})$, występujące w rozwinięciach Laurenta dla otoczenia istotnie lub nieistotnie szczególnego punktu c_s. Znaczenie tych funkcyj $G(\overline{x-c_s}^{\,-1})$ okaże się również doniosłem i wtedy, kiedy o funkcyi $f(x)$ — nie robiąc w niej różnicy między jej miejscami istotnie osobliwemi, a nieskończonościowemi — założymy, że w pewnej nieskończonej, ale przeliczalnej mnogości punktów:

$$(M)\qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$$

przestaje być regularną.

Co się tyczy punktów skupienia mnogości (M), przyjmijmy, że te — albo występują w skończonej ilości, albo tworzą znowu mnogość nieskończoną.

Do utworzenia form przedstawiających funkcye o punktach szczególnych występujących w nich w sposób dopieroco przyjęty zmierza metoda Mittag-Lefflera*), która właśnie wskazuje, jak korzystać z funkcyj $G_s(\overline{x-a_s}^{\,-1})$, $s=1,2,3,\ldots$, aby w każdym danym wypadku można było zadość uczynić postawionemu zadaniu.

Zacznijmy od wypadku najprostszego, w którym w mnogości (M) mamy:

$$(1)\qquad |a_1|<|a_2|<|a_3|<\ldots,\ \lim_{n=\infty}|a_n|=\infty,$$

---

*) *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendente. Acta Mathematica.* T. 4. (1884.) str. 1—79.

Por. także: K. Weierstrass. *„Über einen fonctionen-theoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler“* [*Abhandlungen aus der Functionenlehre* str. 55—66.]

P. Painlevé. *Sur la représentation des fonctions analytiques uniformes* C. R. T. 126. str. 200.

O zastosowaniu twierdzeń Mittag-Lefflera do funkcyj o danych naprzód liniach zerwania por. E. Goursat. *Sur la théorie des fonctions uniformes.* C. R. T. 96. str. 565.

a sama funkcya w każdem a_s ma biegun pierwszego tylko stopnia. W otoczeniu każdego a_s mamy zatem rozwinięcie:

$$f(x)=\frac{A_s}{x-a_s}+\mathfrak{P}_s(x-a_s),$$

$$\frac{A_s}{x-a_s}=G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right),\ s=1,2,3,\ldots \text{ Połóżmy:}$$

$$\frac{1}{x-a_s}=-\frac{1}{a_s}\frac{1}{1-\frac{x}{a_s}}=-\frac{1}{a_s}-\frac{x}{a_s^2}-\frac{x^2}{a_s^3}-\ldots,$$

to stąd mamy:

$$\frac{1}{x-a_s}+\left(\frac{1}{a_s}+\frac{x}{a_s^2}+\ldots+\frac{x^{\nu_s-1}}{a_s^{\nu_s}}\right)=-\frac{x^{\nu_s}}{a_s^{\nu_s+1}}-\frac{x^{\nu_s+1}}{a_s^{\nu_s+2}}-\ldots=-\frac{x^{\nu_s}}{a_s^{\nu_s+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a_s}}.$$

Niech dalej:

$$\frac{1}{a_s}+\frac{x}{a_s^2}+\frac{x^2}{a_s^3}+\ldots+\frac{x^{\nu_s-1}}{a_s^{\nu_s}}=P_s(x), \tag{2}$$

to mieć będziemy:

$$A_s.\left(\frac{1}{x-a_s}+P_s(x)\right)=-\frac{x^{\nu_s}}{a_s^{\nu_s+1}}\cdot\frac{A_s}{1-\frac{x}{a_s}} \tag{3}$$

$$s=1,2,3,\ldots$$

Każda poszczególna funkcya w (3) staje się na miejscu a_s nieskończonością pierwszego stopnia, zawierając taki sam dodajnik $A_s(x-a_s)^{-1}$, co dana funkcya $f(x)$. Z tego-to powodu ważnem będzie zbadać analityczny charakter sumy:

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{\infty}A_s.\left(\frac{1}{x-a_s}+P_s(x)\right)&=-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_s}{a_s^{\nu_s+1}}\frac{x^{\nu_s}}{1-\frac{x}{a_s}}=\\&=\sum_{s=1}^{\infty}A_s.\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\nu_s}.\frac{1}{x-a_s}=U(x).\end{aligned} \tag{4}$$

W art. 31. — [relacye (2) i (3)] — mieliśmy już taką sumę z tą tylko różnicą, że tam zamiast A_s występowały liczby λ_s całkowite dodatnie i wszystkie skończone.

Przyjmijmy, że wszystkie A_s są skończone. W takim razie postępując analogicznie, jak w art. 29—31. dojdziemy do wniosku, że suma (4) będzie tu poza punktami a_s jednostajnie i absolutnie zbieżną, gdy się suma:

$$P=\sum_{s=1}^{\infty}\left|\frac{A_s}{a_s}\right|.\left|\frac{x}{a_s}\right|^{\nu_s}$$

okaże bezustannie zbieżną.

W najprostszy sposób dogodzi się temu warunkowi, obierając i tu:

(5) $$\nu_1=0, \quad \nu_2=1, \quad \nu_3=2, \ldots$$

a wtedy suma (4) będzie analityczną funkcyą skończoną poza punktami a_s, a w każdym punkcie a_s nieskończoną przez dodajnik $A_s(x-a_s)^{-1}$.

W szczególności i tutaj — gdy przy pewnem całkowitem, dodatniem, a możliwie najmniejszem m okaże się suma:

$$A=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{a_s^{m+1}}$$

bezwarunkowo zbieżną — można będzie położyć wszystkie $\nu_s=m$ tak, że w tym razie mamy:

$$P_s=\frac{1}{a_s}+\frac{x}{a_s^2}+\ldots+\frac{x^{m-1}}{a_s^m}, \quad s=1,2,3,\ldots$$

Lecz bezwzględne wartości $|A_s|$ pozostając skończonemi przy skończonych s, mogą z wzrastaniem znaczku s obok skończonych granic posiadać także i granicę nieskończoną.

Pytanie zachodzi, czy i w tym razie można będzie wybrać ν_s tak, aby suma P była bezustannie zbieżną, a więc z nią i suma (4) okazała się jednostajnie i absolutnie zbieżną? Aby to zbadać, połóżmy: $$|A_s|=|a_s|^{\varrho_s}, \quad s=1,2,3,\ldots, \quad \text{[Hermite]},$$ gdzie ϱ_s mają być rzeczywistemi liczbami. Wykładniki ϱ_s podzielą się tu w ogólności na odjemne: $-\varrho_\sigma$ i dodatnie: $+\varrho_\tau$. Podzielmyż według tego i sumę P na dwie, z których pierwsza P_1 ma zawierać w swych dodajnikach same:

(6) $$|A_\sigma|=|a_\sigma|^{-\varrho_s},$$

a druga P_2 same dodajniki o

(7) $$|A_\tau|=|a_\tau|^{+\varrho_\tau},$$

to widocznie w P_1 będą wszystkie $|A_\sigma|$ skończone, a więc w niej liczbom ν_σ nadać można wartości (5). Druga suma P_2 po uwzględnieniu (7) będzie miała postać:

$$P_2=\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{|x|^{\nu_\tau}}{|a_\tau|^{\nu_\tau+1-\varrho_\tau}}.$$

Połóżmy:

(8) $$\nu_\tau=\tau-1+k_\tau,$$

gdzie liczby k_τ mają być całkowite, dodatnie, poddane warunkom $k_\tau-\varrho_\tau=h_\tau>0$, to wtedy mamy: $\nu_\tau+1-\varrho_\tau=\tau+h_\tau$, i

$$P_2=\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{|x|^{k_\tau}}{|a_\tau|^{h_\tau}}\cdot\frac{|x|^{\tau-1}}{|a_\tau|^{\tau}}.$$

Gdy zważymy, że suma:

$$\sum_{\tau=1}^{\infty}(|x|^{\tau-1}/|a_\tau|^{\tau})$$

jest już bezustannie zbieżną, a dla wszelkich skończonych $|x|$ są $|x|^{k_\tau}/|a_\tau|^{h_\tau}$, $\tau=1, 2,\ldots$ wszystkie skończone, to stąd wnosimy, że i suma P_2 za obraniem ν_τ na sposób (8) będzie bezustannie zbieżną.

W każdym zatem razie okazuje się suma $U(x)$ analityczną funkcyą.

W niej zawarte dodajniki $A_s(x-a_s)^{-1}$, a czyniące ją nieskończonością w punktach a_s zawierają się i w żądanej funkcyi $f(x)$. Gdy zatem utworzymy różnicę $[f(x)-U(x)]$, to ta różnica będzie funkcyą bez jakichkolwiek miejsc nieskończonościowych w skończoności. W nieskończoności będzie mogła ta różnica w najogólniejszym razie posiadać punkt istotnie osobliwy. Wtedy mamy:

$$f(x)-U(x)=G(x),$$

gdzie $G(x)$ jest funkcyą całkowitą przestępną.

Czasem jednak może się $f(x)$ różnić od $U(x)$ tylko o funkcyę całkowitą wymierną, która także do stałej ilości zredukować się może. Stąd wynika, że w równaniu:

$$\begin{aligned} f(x)&=G(x)+U(x)= \\ (A)\qquad &=G(x)+\sum_{s=1}^{\infty}A_s\left(\frac{1}{x-a_s}+P_s(x)\right),\end{aligned}$$

które już daje formę żądanej funkcyi, może być $G(x)$ funkcyą całkowitą przestępną, całkowitą wymierną, albo nawet ilością stałą. Stąd twierdzenie:

I. *Każda funkcya posiadająca bieguny jednokrotne w a_s, gdzie*

$$|a_1|<|a_2|<|a_3|<\ldots,\ lim\,|a_n|=\infty$$

daje się na bardzo wiele sposobów przedstawić nieskończoną sumą funkcyj posiadających po jednem miejscu a_s jako punkt nieskończonościowy pierwszego stopnia — za dodaniem dobrze obranej funkcyi całkowitej przestępnej lub wymiernej redukującej się niekiedy do stałej ilości.

Jaka-kolwiek jest funkcya $G(x)$, zawsze ją można — jeżeli się tego chce — przedstawić sumą $\sum\limits_{s=1}^{\infty} g_s(x)$ samych funkcyj całkowitych przestępnych. Wtedy dostajemy:

$$(A_1) \qquad f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\left[g_s(x)+A_s.\left(\frac{1}{x-a_s}+P_s(x)\right)\right]$$

a to znaczy:

II. *Każdą funkcyę opisaną w twierdzeniu I. można przedstawić nieskończoną sumą funkcyj, z których każda tylko na jednem miejscu a_s ma biegun pierwszego stopnia, a wszystkie w nieskończoności mają punkt istotny.*

Uwaga. W art. 31. zamieszczone twierdzenie I. nie wyraża nic innego, jak właśnie zastosowanie formy (A) do pewnego określonego tam gatunku funkcyj. Były-to logarytmiczne pochodne pewnych funkcyj o nieskończonej ilości miejsc zerowych, a uwzględniając to, mogliśmy już w dalszych artykułach Rozdziału III. przedstawić formą (A) wszystkie funkcye trygonometryczne z nieskończoną ilością miejsc nieskończonościowych (jednokrotnych).

Poszukiwania tu przeprowadzone uwalniają nas od ograniczania się do logarytmicznych pochodnych.

Pd. 1. Aby funkcyę $sec\, x$ przedstawić formą (A) opierając się już na wskazówkach tego artykułu, postąpimy w ten sposób:

Ponieważ $sec\, x=\infty$ na jednokrotnych miejscach:

$$a_s=\frac{2s+1}{2}\pi, \quad s=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots;$$

a
$$sec(a_s+h)=\frac{1}{cos(a_s+h)}=\frac{(-1)^{s+1}}{sin\, h}=\frac{(-1)^{s+1}}{h}+\mathfrak{P}_s(h)=$$

$$=\frac{(-1)^{s+1}}{x-\frac{2s+1}{2}\pi}+\mathfrak{P}_s\left(x-\frac{2s+1}{2}\pi\right),$$

więc tu mamy:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\frac{(-1)^{s+1}}{x-\frac{2s+1}{2}\pi}, \quad s=0, 1, 2, \ldots$$

Że zaś $\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty}|1/a_s|^{m+1}$ jest już absolutnie zbieżną, gdy $m=+1$, więc:

$$U(x)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}(-1)^{s+1}\left(\frac{1}{x-\frac{2s+1}{2}\pi}+\frac{1}{\frac{2s+1}{2}\pi}\right)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{s+1}x}{\frac{2s+1}{2}\pi\left(x-\frac{2s+1}{2}\pi\right)}.$$

$G(x)$ musi tu być $=1$, więc ostatecznie: $sec\, x=1+U(x)$.

Pd. 2. Funkcya: $f(x)=\dfrac{\pi\, cotg\, \pi x}{R(x)}=\dfrac{\pi\, cos\, \pi x}{R(x) . sin\, \pi x}$

gdzie $R(x)=\left[1-\left(\frac{2x}{1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2\right]\ldots\left[1-\left(\frac{2x}{2n+1}\right)^2\right]$,

ma miejsca nieskończonościowe, jednokrotne $a_s=s$, $s=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ [Miejsca zerowe funkcyi $R(x)$ nie są nieskończonościowemi w $f(x)$, bo $R(x)$ mieści się jako czynnik w funkcyi $cos\, \pi x$]. Tutaj mamy:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\frac{1}{R(s)(x-s)},\quad s=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$$

a że suma $\sum|\,1/s\,|^{m+1}$ już przy $m=1$, okazuje się absolutnie zbieżną, a $R(s)=R(-s)$, więc mamy tu:

$$U(x)=\frac{1}{x}+2x\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{R(s)}\left[\left(\frac{1}{x-s}+\frac{1}{s}\right)+\left(\frac{1}{x-s}-\frac{1}{s}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{x}+2x\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{R(s)(x^2-s^2)}$$

Gdy zważymy, że w otoczeniu miejsca $x=0$ dostajemy $f(x)=x^{-1}+x\mathfrak{P}_0(x)$, a więc rozwinięcie bez wolnego wyrazu a w ten sam sposób rozwija się $U(x)$ w otoczeniu tego punktu, to stąd wnioskujemy, że $f(x)=U(x)$. [Gylden, Mittag-Leffler, Forsyth].

Pd. 3. Przedstawić formami (A) funkcye $\frac{sin^m x}{cos\, x}$, $\frac{cos^m x}{sin\, x}$, gdzie m jest całkowitą dodatnią liczbą.

Pd. 4. Przedstawić formą (A) funkcyę $\frac{\pi\, cotg\, \pi x}{Q(x)}$ gdzie:

$$Q(x)=(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\left(1-\frac{x}{3}\right)^3\dots\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{[Forsyth].}$$

45. Funkcye o nieskończenie wielu miejscach osobliwych skupiających się w nieskończoności. Załóżmy teraz, że miejsca $a_1, a_2, \dots$ czyniąc zadość znowu warunkowi:

$$(1)\qquad |a_1|<|a_2|<|a_3|<\dots,\ lim\,|a_n|=\infty$$

są już-to biegunami dowolnego stopnia, już-to miejscami istotnie szczególnemi danej funkcyi $f(x)$. W otoczeniu punktu a_s niech się $f(x)$ staje nieregularną przez dodajnik:

$$(2)\qquad G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\frac{c_{s1}}{x-a_s}+\frac{c_{s2}}{(x-a_s)^2}+\frac{c_{s3}}{(x-a_s)^3}+\dots$$

który jest: albo wymierną, albo przestępną całkowitą funkcyą argumentu $(x-a_s)^{-1}$. Gdy $|x|<|a_s|$ założymy, otrzymamy z (2)

$$(3)\qquad \begin{aligned} G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)&=-\frac{c_{s1}}{a_s\left(1-\frac{x}{a_s}\right)}+\frac{c_{s2}}{a_s^2\left(1-\frac{x}{a_s}\right)^2}-\frac{c_{s3}}{a_s^3\left(1-\frac{x}{a_s}\right)^3}+\dots\\ &=\sum_{\mu=0}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu},\quad \text{gdzie:}\end{aligned}$$

$$A_{s\mu}=(-1)^{\mu}\left[-\binom{-1}{\mu}\frac{c_{s1}}{a_s}+\binom{-2}{\mu}\frac{c_{s2}}{a_s^2}-\binom{-3}{\mu}\frac{c_{s3}}{a_s^3}-\dots\right].$$

Lecz, że $\binom{-k}{\mu}=(-1)^{\mu-(k-1)}\binom{-\mu-1}{k-1}$, więc mamy także:

$$A_{s\mu} = -\left[\binom{-\mu-1}{0}\frac{c_{s1}}{a_s} - \binom{-\mu-1}{1}\frac{c_{s2}}{a_s^2} + \binom{-\mu-1}{2}\frac{c_{s3}}{a_s^3} - \ldots\right]$$

$$s = 1, 2, 3, \ldots, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

Napiszmy — mając to — równanie (3) w ten sposób:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right) - \sum_{\mu=0}^{\nu_s-1} A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^\mu = \sum_{\mu=\nu_s}^{\infty} A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^\mu$$

i kładąc:

$$\sum_{\mu=0}^{\nu_s-1} A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^\mu = -P_s(x), \quad \sum_{\mu=\nu_s}^{\infty} A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^\mu = F_s(x)$$

postarajmy się o taki wybór liczb ν_s, aby suma:

$$U(x) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right) + P_s(x)\right] = \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x)$$

okazała się jednostajnie i absolutnie zbieżną w całym obszarze skończonych x po wyjęciu z niego miejsc a_s. [$U(x)$ — gdy to się stanie — będzie funkcyą, która w punktach a_s przestaje być regularną p r z e z t e s a m e dodajniki G_s, co dana funkcya $f(x)$]. Aby temu żądaniu zadość uczynić, obierzmy nieskończony szereg liczb dodatnich $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots$ wciąż malejących, a o tej własności, że suma:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \ldots$$

jest zbieżną i dowiedźmy nasamprzód, że w obszarze $|x| < |a_s|$ można zawsze — przez stosowny wybór liczby ν_s — uczynić $|F_s(x)| < \varepsilon_s$. Szereg (2) jest poza punktem a_s wszędzie zbieżny. Zatoczmyż z punktu a_s koło K_s o promieniu $|a_s|$, to wewnątrz niego mamy $|x-a_s| < |a_s|$. Z tego samego punktu a_s zakreślmy dalej drugie mniejsze koło k_s o promieniu $\xi_s = |x-a_s| < |a_s|$. Na obwodzie tego koła k_s niech funkcya G_s przedstawiona szeregiem (2) ma największą wartość g_s. W takim razie mamy:

(4) $$|c_{s\mu}| \leq g_s \xi_s^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

[T. I. art. 163.]. Uwzględnijmy dalej, że:

$$|A_{s\mu}| < \binom{-\mu-1}{0}\left|\frac{c_{s1}}{a_s}\right| - \binom{-\mu-1}{1}\left|\frac{c_{s2}}{a_s^2}\right| + \ldots$$

i zastąpmy tu wszystkie $|c_{s\mu}|$ przez większe od nich wartości (4), to tam bardziej okaże się:

$$|A_{s\mu}| < g_s\frac{\xi_s}{|a_s|}\left[1 - \binom{-\mu-1}{1}\frac{\xi_s}{|a_s|} + \binom{-\mu-1}{2}\frac{\xi_s^2}{|a_s|^2} - \ldots\right],$$

czyli — ponieważ $\xi_s/|a_s| < 1$ — więc mamy:

$$(5)\qquad |A_{s\mu}|<g_s\frac{\xi_s}{|a_s|}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\xi_s}{|a_s|}\right)^{\mu+1}},\quad \mu=0,1,2,3,...$$

Niech teraz $s=1,2,3,...$, a około każdego z punktów a_s zakreślmy pewne koło k_s o promieniu $\xi_s<|a_s|$, to promienie wszystkich tych kół można będzie zawsze tak obrać, aby mieć:

$$\xi_s/|a_s|<\beta,\quad s=0,1,2,3,...,$$

gdzie β jest pewnym obranym dodatnim właściwym ułamkiem. Zastąpmyż w (5) $\xi_s/|a_s|$ przez β, to mieć teraz będziemy:

$$(6)\qquad |A_{s\mu}|<g_s\beta/(1-\beta)^{\mu+1}$$

już dla $s=1,2,3,...$, i dla $\mu=0,1,2,...$

W obszarze $|x|<|a_s|$ obie strony nierówności:

$$|F_s(x)|<\sum_{\mu=\nu_s}^{\infty}|A_{s\mu}|\cdot\left|\frac{x}{a_s}\right|^{\mu}$$

są skończone. Zastąpmyż tu wszystkie $|A_{s\mu}|$ przez ich górne granice (6), to tem bardziej będzie:

$$(7)\qquad |F_s(x)|<\sum_{\mu=\nu_s}^{\infty}\frac{g_s\beta}{(1-\beta)^{\mu+1}}\cdot\left|\frac{x}{a_s}\right|^{\mu}.$$

Niech ε i ε_0 będą dwa dowolnie obrane ułamki właściwe, dodatnie, a połóżmy $|x/a_s|<\varepsilon$, $s=1,2,3,...$, i $\varepsilon<\varepsilon_0(1-\beta)$, to mieć będziemy:

$$(8)\qquad |x/a_s|<\varepsilon_0(1-\beta),\quad s=1,2,3,...$$

Wstawmy w (7) za wszystkie $|x/a_s|$ górną ich granicę (8), to dojdziemy do nierówności:

$$|F_s(x)|<\sum_{\mu=\nu_s}^{\infty}\frac{g_s\beta}{1-\beta}\cdot\varepsilon_0{}^{\mu},\ \text{albo:}$$

$$|F_s(x)|<\frac{g_s\beta}{(1-\beta)(1-\varepsilon_0)}\cdot\varepsilon_0{}^{\nu_s},\quad s=1,2,3,...$$

Ponieważ tu $g_s\beta/(1-\beta)(1-\varepsilon_0)$ jest skończoną dodatnią ilością, a ε_0 jest ułamkiem właściwym dodatnim, to można będzie zawsze obrać tak duże ν_s, aby się okazało $|F_s(x)|<\varepsilon_s$ dla wszelkich $|x|<|a_s|$, c. b. d. d. Zauważmyż teraz sumę:

$$U(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)+P_s(x)\right]=\sum_{s=1}^{\infty}F_s(x)$$

i rozbierzmy jej zachowanie się w obszarze $|x|<|a_m|$. Pisząc:

$$(9)\qquad U(x)=\sum_{s=1}^{m-1} F_s(x)+\sum_{s=m}^{\infty} F_s(x)$$

mamy w pierwszej sumie funkcyę ze skończoną tylko ilością miejsc osobliwych:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{m-1}.$$

Co się tyczy drugiej sumy, to mamy tu na wszystkich miejscach obszaru $|x|<|a_m|$ bez wyjątku:

$$|F_m(x)+F_{m+1}(x)+\ldots|<|F_m(x)|+|F_{m+1}(x)|+\ldots<\varepsilon_m+\varepsilon_{m+1}+\ldots$$

Druga suma w (9) jest więc przedewszystkiem absolutnie zbieżną w obszarze $|x|<|a_m|$. Lecz jest ona tam także i jednostajnie zbieżną. Obierzmy bowiem dowolnie małą, dodatną ilość δ, to poczynając od pewnej dostatecznie dużej liczby $r>m$, można na wszystkich punktach uważanego obszaru uczynić:

$$|F_{r+h}(x)+F_{r+h+1}(x)+\ldots|<\delta,\quad h=0,1,2,3,\ldots$$

Z tego — ponieważ przy obranem x leżącem w skończoności, a różnem od wszystkich a_s można zawsze między ilościami $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$, ... znaleść pierwszą taką $=a_m$, że się okaże $|x|<|a_m|$ — wnosimy, że $U(x)$ jest analityczną funkcyą w całym obszarze skończonych x z osobliwymi punktami $a_1, a_2, a_3, \ldots$, a z punktem istotnie szczególnym w nieskończoności. Punkta a_s powodowane są w niej takimi samymi dodajnikami G_s, jak w danej funkcyi $f(x)$, gdyż, mając pewne $a_s=a_r$ i obierając $m>r$ dostajemy z pierwszej sumy w (9) rozwinięcie postaci $G_r(\overline{x-a_r}^{\,-1})+\mathfrak{P}'_r(x-a_r)$, a druga suma rozwija się w otoczeniu punktu a_r już na zwykły szereg potęgowy. Tego następstwem jest, że różnica:

$$(10)\qquad f(x)-U(x)=G(x)$$

może być w najogólniejszym wypadku funkcyą przestępną całkowitą, a w szczególnych razach funkcyą wymierną, całkowitą, która się także do stałej zredukować może. Z (10) wynika:

$$(B)\qquad f(x)=G(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)+P_s(x)\right]$$

a gdy tu — jak w art. poprzedzającym — położymy $G(x)=\sum\limits_{s=1}^{\infty} g_s(x)$, gdzie $g_s(x)$ są same funkcye całkowite przestępne, mieć będziemy:

$$(B_1)\qquad f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)+P_s(x)+g_s(x)\right].$$

Z tych wszystkich uwag dochodzimy do twierdzeń:

I. *Każdą funkcyę posiadającą dowolne punkta osobliwe w* a_s, *gdzie*

$$|a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots, \ lim\ |a_n| = \infty$$

można na bardzo wiele sposobów przedstawić nieskończoną sumą funkcyj posiadających po jednem miejscu a_s, *jako punkt osobliwy spowodowany tym samym dodatkiem* $G_s(\overline{x-a_s}^{\,-1})$, *co w danej funkcyi. Do tej sumy dodać jeszcze trzeba pewną dobrze wyznaczoną funkcyę przestępną całkowitą, lub wymierną całkowitą, który niekiedy do stałej zredukować się może.*

II. *Funkcya opisana w twierdzeniu I. daje się przedstawić nieskończoną sumą funkcyj, z których każda poszczególna posiadając punkt osobliwy* a_s *spowodowany tym samym dodatkiem* $G_s(\overline{1-a_s}^{\,-1})$, *co w samej funkcyi danej, ma jeszcze punkt istotnie szczególny w nieskończoności.*

Pd. 1. Okazać, że:

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{sin^2 x} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-s\pi)^2} \quad \text{i że:}$$

$$(\beta) \qquad \frac{\pi^2}{cos^2 \pi x} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x - \dfrac{2s+1}{2}\right)^2} \quad \text{[por. art. 35. formy (1'), (2')].}$$

Pd. 2. Z (α) i (β) dostajemy przez różniczkowanie:

$$\frac{cos\, x}{sin^2 x} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-s\pi)^3}, \quad \frac{\pi^3 sin\, \pi x}{cos^3 \pi x} = -\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x - \dfrac{2s+1}{2}\right)^3}.$$

Wyprowadzić te formy wprost, posługując się metodą Mittag-Lefflera.

Uwaga. W tych przykładach dość jest wykazać, że już sumy $\sum G_s(\overline{x-a_s}^{\,-1})$ są jednnstajnie zbieżne, a więc dodatki $P_s(x)$ są tu identycznie $=0$, a potem wywnioskować, że $G(x)=0$.

46. Funkcye z nieskończoną mnogością miejsc osobliwych skupiających się w jednym punkcie w skończoności.

Funkcya $f(x)$ niech ma teraz miejsca szczególne a_1, a_2, a_3, a_4, ... tworzące nieskończoną mnogość, skupiającą się w punkcie b leżącym w skończoności. W otoczeniu punktu a_s niech będzie:

$$(1) \qquad f(x) = G_s(\overline{x-a_s}^{\,-1}) + \mathfrak{P}_s(x-a_s), \text{ gdzie:}$$

$$(2) \qquad G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right) = \frac{c_{s1}}{x-a_s} + \frac{c_{s2}}{(x-a_s)^2} + \ldots \quad s = 1, 2, 3, \ldots$$

Połóżmy: $x - a_s = (x-b) - (a_s - b) = (x-b)\left(1 - \dfrac{a_s - b}{x-b}\right)$ a więc

$$\frac{1}{(x-a_s)^k}=\frac{1}{(x-b)^k}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{a_s-b}{x-b}\right)^k}$$

$$=\frac{1}{(a_s-b)^k}\cdot\frac{(a_s-b)^k}{(x-b)^k}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{a_s-b}{x-b}\right)^k},$$

to mieć będziemy:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{sk}}{(a_s-b)^k}\cdot\frac{(a_s-b)^k}{(x-b)^k}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{a_s-b}{x-b}\right)^k},$$

albo zakładając:

(3) $$|(a_s-b)/(x-b)|<1,$$

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{sk}}{(a_s-b)^k}\cdot\frac{(a_s-b)^k}{(x-b)^k}\cdot\left[1+\binom{k}{1}\frac{a_s-b}{x-b}+\binom{k+1}{2}\frac{(a_s-b)^2}{(x-b)^2}+\right.$$
$$\left.+\binom{k+2}{3}\frac{(a_s-b)^3}{(x-b)^3}+\ldots\right]$$
$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{a_s-b}{x-b}\right)^{\mu}.$$

Spółczynniki $A_{s\mu}$ mają widocznie tu takie znaczenie:

$$A_{s\mu}=\frac{c_{s1}}{a_s-b}+\binom{\mu-1}{\mu-2}\frac{c_{s2}}{(a_s-b)^2}+\binom{\mu-1}{\mu-3}\frac{c_{s3}}{(a_s-b)^3}+\ldots+\binom{\mu-1}{0}\frac{c_{s\mu}}{(a_s-b)^{\mu}}$$

albo:

$$A_{s\mu}=\frac{c_{s1}}{a_s-b}+\binom{\mu-1}{1}\frac{c_{s2}}{(a_s-b)^2}+\binom{\mu-1}{2}\frac{c_{s3}}{(a_s-b)^3}+\ldots+\binom{\mu-1}{\mu-1}\frac{c_{s\mu}}{(a_s-b)^{\mu}}$$

Połóżmy dalej:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)-\sum_{\mu=1}^{\nu_s-1}A_{s\mu}\left(\frac{a_s-b}{x-b}\right)^{\mu}=\sum_{\mu=\nu_s}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{a_s-b}{x-b}\right)^{\mu}=F_s(x)$$

i zauważmy sumę:

$$U(x)=\sum_{s=1}^{\infty}F_s(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)+P_s(x)\right],\text{ gdzie:}$$

$$P_s(x)=-\sum_{\mu=1}^{\nu_s-1}A_{s\mu}\left(\frac{a_s-b}{x-b}\right)^{\mu}.$$

Niech $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots$ będzie znowu, jak w art. poprzedzającym zbieżnym szeregiem o samych dodatnich ε_s, a szereg (2) na obwodzie koła k_s ze środkiem w a_s, a o promieniu:

(4) $$\xi_s < |a_s - b|$$

niech ma największą bezwzględną wartość g_s.

W takim razie mamy znowu:

(5) $$|c_{sk}| \leq g_s \xi_s^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

a gdy w nierówności:

$$|A_{s\mu}| < \frac{c_{s1}}{|a_s - b|} + \binom{\mu-1}{1} \frac{|c_{s2}|}{|a_s - b|^2} + \ldots + \binom{\mu-1}{\mu-1} \frac{|c_{s\mu}|}{|a_s - b|^\mu}$$

za $|c_{sk}|$ wstawimy ich górne granice (5) i założymy — wskutek (4) — $\xi_s / |a_s - b| < \beta$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, gdzie β jest dodatnim, właściwym ułamkiem, dostaniemy:

(6) $$|A_{s\mu}| < \frac{g_s \xi_s}{|a_s - b|} \left(1 + \frac{\xi_s}{|a_s - b|}\right)^{\mu-1} < g_s \beta (1+\beta)^{\mu-1}$$
$$s = 1, 2, 3, \ldots, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots,$$

Ponieważ dalej:

$$|F^s(x)| < \sum_{\mu=\nu_s}^{\infty} |A_{s\mu}| \left|\frac{a_s - b}{x - b}\right|^\mu,$$

gdzie prawa strona jest w obszarze (3) skończoną, więc gdy tu za $|A_{s\mu}|$ wstawimy ich górne granice (6), mieć będziemy tem bardziej:

(7) $$|F_s(x)| < g_s \cdot \sum_{\mu=\nu_s}^{\infty} \beta (1+\beta)^{\mu-1} \left|\frac{a_s - b}{x - b}\right|^\mu.$$

Załóżmy $|(a_s - b)/(x - b)| < \varepsilon$, gdzie ε ma być dowolnie obranym dodatnim ułamkiem właściwym i obierzmy jeszcze jedną dodatną wielkość $\varepsilon_0 < 1$, to ε będzie można zawsze tak oznaczyć, aby było $|a_s - b)/(x - b)| < \varepsilon < \varepsilon_0/(1+\beta)$, gdzie widocznie $\varepsilon_0/(1+\beta)$ jest ułamkiem właściwym dodatnim. Połóżmyż po prawej stronie nierówności (7) za $|(a_s - b)/(x - b)|$ górną granicą tej wielkości, to dostaniemy:

$$|F_s(x)| < g_s \cdot \sum_{\mu=\nu_s}^{\infty} [\beta/(1+\beta)] \varepsilon_0^\mu, \quad \text{albo:}$$

$$|F_s(x)| < \frac{g_s \beta}{1+\beta} \cdot \frac{\varepsilon_0^{\nu_s}}{1 - \varepsilon_0}.$$

Czynnik $g_s \beta / (1+\beta)(1-\varepsilon_0)$ jest tu skończonym, a że ε_0 jest ułamkiem właściwym (dodatnim), więc ν_s można tu będzie zawsze tak wybrać, aby się okazało: $|F_s(x)| < \varepsilon_s$. Załóżmy:

(8) $$|(a_m - b)/(x - b)| < 1,$$

a miejsca a_s pomyślmy sobie tak uporządkowane, aby ze zwiększaniem się s przybliżały się do b, to wtedy będą także:

$$|(a_{m+h} - b)/(x - b)| < 1, \quad h = 1, 2, 3, \ldots,$$

i dowolnie do zera zbliżać się będą, jeżeli x z obszaru (8) brać będziemy. Niech dalej x_0 będzie dowolnym punktem różnym od a_s i b, a w jego otoczeniu:

(9) $$|x-x_0|<\varrho$$

niech się żaden z tych punktów nie zawiera, to zwiększając m, można będzie i dla punktów obszaru (9) nierówność (8) utrzymać; (różnica bowiem $|a_m-b|$ dowolnie maleje, a $|x-b|$ pozostaje skończone). Obszarem (8) można zatem każdy dowolny obszar (9) objąć.

Mając to na oku, wywnioskujemy — podobnie rozumując jak w art. poprzedzającym — że suma $U(x)$ jest analityczną funkcyą jednoznaczną o szczególnych punktach a_s spowodowanych takimi samymi dodatkami G_s, jak w danej funkcyi $f(x)$.

Z tego wynika, że różnica:

$$f(x)-U(x)=G(\overline{x-b}^{\,-1})$$

może być funkcyą całkowitą przestępną lub całkowitą wymierną argumentu $(x-b)^{-1}$, a w szczególnych razach może się także do stałej zredukować.

Mamy więc twierdzenie:

I. *Funkcyę $f(x)$ o szczególnych miejscach a_s, $s=1,2,3,\ldots$ skupiających się w miejscu b leżącem w skończoności można na bardzo wiele sposobów przedstawić formą:*

(C) $$f(x)=G\left(\frac{1}{x-b}\right)+\sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)+P_s(x)\right],$$

w której G jest funkcyą całkowitą przestępną lub wymierną argumentu $(x-b)^{-1}$ a suma składa się z samych fuukcyj posiadających miejsca a_s jako osobliwe, spowodowane takimi samymi dodatkami $G_s(\overline{x-a_s}^{\,-1})$, co w danej funkcyi.

Gdy zaś położymy:

$$G\left(\frac{1}{x-b}\right)=\sum_{s=1}^{\infty}g_s\left(\frac{1}{x-b}\right),$$

gdzie wszystkie funkcye $g_s(\overline{x-b}^{\,-1})$ są całkowite przestępne argumentu $(x-b)^{-1}$, to dostaniemy:

(C_1) $$f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\left[G_s\left(\frac{1}{x-b}\right)+P_s(x)+g_s\left(\frac{1}{x-b}\right)\right],$$

a to znaczy:

II. *Funkcyę opisaną w twierdzeniu I. można także przedstawić sumą funkcyj, z których każda posiada jedno miejsce a_s jako szczególne,* *spowodowane w ten sam sposób, jak w danej funkcyi, i jedno miejsce istotnie osobliwe w skończoności.*

47. Funkcye i wyrażenia analityczne utworzone na podstawie danej mnogości odosobnionych punktów osobliwych. Chcąc uogólnić twierdzenia wyprowadzone w dwóch ostatnich artykułach przyjmijmy, że na nieograniczonej płaszczyźnie argumentu x mamy nieskończoną m n o g o ś ć o d o s o b n i o n y c h punktów Q z mnogością pochodną Q' [T. I. art. 38.]. Mnogość taka jest przeliczalna; Q i Q' nie mają wspólnych punktów, a skutkiem tego około każdego punktu mnogości Q da się wyznaczyć dostatecznie małe otoczenie takie, że się w niem nie zawiera żaden inny punkt zaliczający się do Q.

Przy takich założeniach ważnem jest bardzo rozróżnić dwa wypadki, a mianowicie:

I⁰ mnogość pochodna Q' składa się tylko ze skończonej ilości punktów $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$;

II⁰ mnogość pochodna Q' jest znowu mnogością nieskończoną.

Zastosujmy nasamprzód wypadek pierwszy do teoryi funkcyi. Zauważyć tu przedewszystkiem potrzeba, że wydzielając z nieograniczonego zakresu argumentu x punkta Q i punkta

$$Q' = (b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

otrzymujemy w pozostałym obszarze $\mathfrak{A} = (x) - (Q + Q')$ zawsze jedno i tylko jedno jednolite *continuum*. Dalej można tu zawsze daną mnogość Q podzielić na m grup punktów:

$$(1) \quad Q_1 = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots), \quad Q_2 = (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots), \ldots, Q_m = (a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots)$$

w ten sposób, że każda z nich: Q_α jest znowu mnogością nieskończoną i posiada jeden tylko punkt skupienia b_α.

Równocześnie z (1) zauważmy m grup funkcyj:

$$(2) \qquad G_s^{(\alpha)}\left(\overline{x - a_s^{(\alpha)}}^{\,-1}\right), \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, m, \quad s = 1, 2, 3, \ldots,$$

Funkcye te mają być bez różnicy już-to całkowite przestępne, już-to całkowite wymierne w swoich argumentach; nie mają się do stałej lub zera redukować, a stawać się mają zerem równocześnie z $[1/(x - a_s^{(\alpha)})] = 0$. Podług art. poprzedz. można będzie zawsze na bardzo wiele sposobów utworzyć funkcyę posiadającą osobliwe punkta Q_α, spowodowane właśnie dodajnikami (2), a o punkcie istotnie szczególnym b_α. Przedstawiając taką funkcyę formą (C) — art. poprzedz. — mieć będziemy:

(3) $$f_\alpha(x) = G_\alpha(\overline{x-b_\alpha}^{-1}) + \sum_{s=1}^{\infty} F_s^{(\alpha)}(x),$$ gdzie:

$$F_s^{(\alpha)}(x) = G_s^{(\alpha)}\left(\frac{1}{x-a_s^{(\alpha)}}\right) + P_s^{(\alpha)}(x)$$

z stosownie dobranem $P_s^{(\alpha)}(x)$.

Utwórzmy funkcye (3) dla $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ i zesumujmy je potem, to dostaniemy funkcyę:

(D) $$f(x) = H(x, b_1\, b_2 \ldots b_m) + \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{s=1}^{\infty} F_s^{(\alpha)}(x)$$

w której $H(x, b_1\, b_2 \ldots b_m)$ jest funkcyą regularną w obszarze $(x) - Q'$, a w punktach $b_1, b_2, \ldots, b_m$ zachowuje się regularnie lub nieregularnie. Stąd twierdzenie:

I. *Gdy na płaszczyźnie argumentu x dana jest nieskończona mnogość Q punktów izolowanych a_s z pochodną mnogością Q' zawierającą tylko skończoną ilość punktów $b_1, b_2, \ldots, b_m$, to zawsze można utworzyć funkcyę analityczną $f(x)$ o punktach szczególnych a_s w otoczeniu których:*

(4) $$f(x) = G_s(\overline{x-a_s}^{-1}) + \mathfrak{P}_s(x-a_s)$$

z danymi naprzód dodatkami $G_s(\overline{x-a_s}^{-1})$; punkta $b_1, b_2, \ldots, b_m$ będą istotnie szczególnymi takiej funkcyi.

Naodwrót dana funkcya $f(x)$, która w otoczeniu punktów a_s mnogości Q przedstawia się rozwinięciami (4), *da się zawsze przedstawić formą (D) z dobrze określoną funkcyą $H(x, b_1, b_2, \ldots b_m)$.*

W przypadku II$^{\text{gim}}$, w którym Q' jest mnogością nieskończoną, mogą zajść dwie możliwości, a mianowicie:

a) obszar $\mathfrak{A}$ jest jednem, jedynem *continuum*;

b) obszar $\mathfrak{A}$ składa się ze skończonej lub nieskończonej ilości obszarów zwartych *(continuum)* $A_1, A_2, A_3, \ldots$*).

Jedno jednolite *continuum* otrzymujemy n. p. zakładając, że na płaszczyźnie (x) punkta mnogości Q' są $x = \xi + \eta i$, $\xi \gtreqless \eta = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Obszar $\mathfrak{A}$ będzie także jednem tylko *continuum*, gdy założymy, że Q' tworzy na płaszczyźnie (x) kilka, lub nawet nieskończoną ilość linij niezamkniętych, a ułożonych w ten sposób, że odcinki kilku z nich nie łączą się w jedną linią zamkniętą.

Lecz już — gdy Q' zawierając w sobie i punkta rozrzucone przedstawia oprócz tego wszystkie punkta na jednej przynajmniej lub kilku, a nawet na

---

*) W T. I., [art. 45.], dowiedziono tylko, że obszar $(x) - Q$ tworzy jedno *continuum*.

nieskończenie wielu liniach zamkniętych — bez różnicy, czy taka linia zamknięta w skończoności (koło, elipsa; obwód wieloboku ....), albo zamknięta w w nieskończoności (linia prosta, dwie równoległe proste, hyperbola, parabola, ...), mieć będziemy w $\mathfrak{A}$ kilka a nawet nieskończenie dużo zwartych oddzielnych obszarów A_1, A_2, A_3, ... Przejście z jednego takiego obszaru do któregokolwiek innego nie będzie tu możliwe bez przekraczania raz, lub więcej razy linij stanowiących Q'.

Obszary A_1, A_2, A_3, ... podzielą się w ogólności na trzy rodzaje podług takiej zasady:

Na zupełne ograniczenie obszaru A_t składają się nasamprzód linia zamknięta l_t zaliczająca się do Q', a odgraniczająca A_t od innych sąsiednich obszarów, potem mnogość Q_t skończona lub nieskończona należąca do Q, a zawarta całkowicie w wnętrzu wycinka płaszczyzny (x) ograniczonego linią l_t, a wreszcie zbiór q_t rozrzuconych punktów w tym wycinku, a zaliczających się do Q'. Całkowite więc ograniczenie obszaru A_t możemy przedstawić symbolicznie sumą $l_t + Q_t + q_t$. Otóż tu zajść mogą takie wypadki:

1^0. Q_t jest mnogością nieskończoną, a cała linia l_t daje punkta skupienia tej mnogości (obszar A_1, fig. 5.).

2^0. Q_t jest mnogością nieskończoną, ale z linii l_t tylko jej pewne oddzielne punkta α, β, ... lub oddzielne jej odcinki α, β, .. stanowią pochodną mnogości Q_t (obszar A_2, fig. 5.).

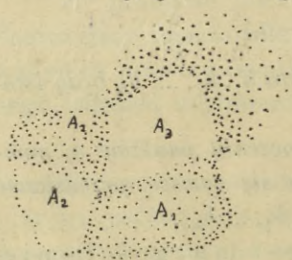


Fig. 5.

3^0. Q_t jest albo mnogością nieskończoną, albo skończoną, albo jej wcale nie ma, a linia l_t jest tylko linią skupienia tych punktów z mnogości Q, które się mieszczą w obszarach sąsiadujących z A_t (obszar A_3, fig. 5.).

Podobnie według tego samego prawidła podzielimy i obszary $A_1 + Q_1 + q_1$, $A_2 + Q_2 + q_2$, ..., stanowiące całkowity już zbiór punktów ograniczonych tylko liniami l_1, l_2, l_3, ...

Taki podział jest bardzo ważny. Naszem zadaniem bowiem będzie na wzór form podanych w ostatnich artykułach utworzyć analityczne wyrażenie f_x o takich własnościach: 1) wewnątrz $\mathfrak{A}$ ma być f_x jednostajnie zbieżnem rozwinięciem, a więc w otoczeniu każdego punktu x_0 leżącego w $\mathfrak{A}$ dać się rozwinąć na szereg $\mathfrak{P}(x - x_0)$. 2) dla otoczenia jakiegokolwiek punktu a_s ma być:

$$(5) \qquad f_x = G_s(\overline{x - a_s}^{\,-1}) + \mathfrak{P}_s(x - a_s).$$

Gdy $\mathfrak{A}$ przedstawia się jako jedno jedyne *continuum*, to f_x posiadające te własności będzie jedną analityczną funkcyą z punktami osobliwymi Q, a istotnie szczególnymi w Q'. Gdy przeciwnie $\mathfrak{A}$ rozpada się na kilka, albo nieskończenie wiele oddzielnych, zwartych obszarów $A_1, A_2, A_3, \ldots$, to w każdym z nich jest f_x jednostajnie zbieżne, w otoczeniu każdego punktu a_s mnogości $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ rozwija się na formę (5), a w punktach mnogości Q', t. j. na liniach $l_1, l_2, l_3, \ldots$ i w $q_1, q_2, q_3, \ldots$ nie ma już analitycznego znaczenia (dla otoczenia każdego punktu w l_t lub q_t daje rozbieżne rozwinięcie). Wyrażenie f_x ma więc w tym razie kilka, a może nieskończenie dużo zakresów jednostajnej zbieżności, i może już według uwag danych już w Tomie I., [art. 197.] w różnych tych obszarach — $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — różne analityczne funkcye $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ częściowo, lub całkowicie przedstawiać. Pod tym względem rozważmy wszystkie 3 rodzaje obszarów $A_t + Q_t$.

W obszarze $A_1 + Q_1$ rodzaju pierwszego funkcya $f_1(x)$ ma nieskończenie wiele punktów osobliwych a_s tworzących mnogości Q_1, a zagęszczających się za zbliżaniem się do linii l_1 w nieskończoność. Cała więc linia l_1 musi tu być pokryta punktami istotnie szczególnymi funkcyi: przez tę linię $f_1(x)$ nie da się poza A_1 przeprowadzić. f_x przedstawia tu $f_1(x)$ w $A_1 + Q_1$ całkowicie.

W obszarze $A_2 + Q_2$ rodzaju drugiego przedstawia f_x funkcyę $f_2(x)$, która ma niezawodnie punkta szczególne a_s tworzące mnogość Q_2 i ma na l_2 istotnie osobliwe punkta $\alpha, \beta, \ldots$ lub odcinki $\alpha, \beta, \ldots$ mieszczące bez wyjątku takie punkta. Lecz czy przez pozostałe części linii l_2 można przeprowadzić funkcyę — trudno rozstrzygnąć. Nie ma bowiem pewności, czy punkta mnogości Q' mnożące się w sąsiednich obszarach w nieskończoność wzdłuż l_2 — po wydzieleniu $\alpha, \beta, \ldots$ — będą miały wpływ na regularne zachowanie się funkcyi $f_2(x)$, lub nie.

Podobnie z tych samych powodów trudno rozstrzygnąć, czy f_x, przedstawiając funkcyę $f_3(x)$ w obszarze $A_3 + Q_3$ trzeciego rodzaju, przedstawia ją tam częściowo, albo całkowicie.

Mając to wszystko na uwadze, możemy — unikając słowa „funkcya“ — dowieść takiego twierdzenia:

II. *Gdy dana jest nieskończona mnogość odosobnionych punktów $Q = (a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots)$ z miejscami skupienia Q', które również występują w nieskończonej mnogości, gdy dalej dane są funkcye całkowite wymierne lub przestępne*

$$G_s\left(\overline{x - a_s}^{\,-1}\right), \quad s = 1, 2, 3, \ldots$$

znikające, gdy $(x - a_s)^{-1} = 0$ — to zawsze można utworzyć pewne anali-

tyczne wyrażenie f_x, *zachowujące się w ten sposób: W otoczeniu każdego punktu* x_0 *nie zaliczającego się ani do* Q, *ani do* Q' *jest*

$$f_x = \mathfrak{P}(x-x_0);$$

w otoczeniu każdego punktu a_s *jest*

$$f_x = G_s(\overline{x-a_s}^{\,-1}) + \mathfrak{P}_s(x-a_s),$$

a w samych punktach mnogości Q' *jest* f_x *rozbieżne.*

Dowód. Gdy Q' jest w całości przeliczalną mnogością o punktach $b_1, b_2, b_3, \ldots$, to podług najrozmaitszych prawideł można punktom a_s mnogości Q podporządkować punkta b_s mnogości Q'.

Kiedy jednak Q' — oprócz punktów przeliczalnych $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ zawiera w sobie jeszcze liniowe *continua* $l_1, l_2, l_3, \ldots$, to okaże się, że linie te zastąpić będzie można przez pewne wszędzie gęste mnogości punktów:

$$\begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13}, & \ldots \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23}, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} \tag{6}$$

zawartych choćby w najmniejszych, dowolnie wybranych częściach linij $l_1, l_2, \ldots$ Te punkta (6) razem z punktami $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ utworzą mnogość:

$$R = (\beta_1, \beta_2, \ldots, b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{21}, b_{22}, \ldots),$$

której użyć będzie można zamiast Q', a która będzie już przeliczalną.

Wyznaczenie punktów (6) i w ogólności mnogości R odbywać się będzie tak, że każdemu punktowi a_s podporządkujemy jeden i tylko jeden punkt zawarty w Q' w sposób, który i do pierwszego wypadku — przeliczalnej mnogości Q' — da się zastosować.

Obrawszy pewien punkt a_s, szukajmy w Q' takich punktów, które najbliżej tego punktu leżą. Niech te punkta będą $b', b'', b''', \ldots$, to

$$\varrho_s = |a_s - b'| = |a_s - b''| = |a_s - b'''| = \ldots$$

jest dolną granicą oddaleń punktu a_s od wszelkich punktów mnogości Q'.

Gdy punktów $b', b'', b''', \ldots$ jest tylko skończona ilość, to wybieramy z nich jeden, którykolwiek, a nazywając go b_s, mamy:

$$|a_s - b_s| = \varrho_s, \tag{7}$$

przez co już ów punkt b_s podporządkowano punktowi a_s.

W razie, gdy punktów $b', b'', b''', \ldots$ jest nieskończenie dużo, to w (7) użyjemy za b_s któregokolwiek z ich punktów skupienia. [Taki punkt zawiera się w drugiej pochodnej mnogości Q'', a tem samem (T. I. art. 39.) należy i do Q'].

Niech Θ oznacza dowolną, skończoną liczbę dodatnią i zauważmy wszystkie różnice:

(8) $$|a_s - b_s| = \varrho_s \geqq \Theta.$$

Różnic tych nie może być nieskończenie dużo. Przyjmijmy bowiem, że tak jest, to do tych różnic należy nieskończenie dużo punktów a_s o jednym przynajmniej punkcie skupienia b. Między różnicami (8) musiałyby być i różnice dowolnie małe, a to się sprzeciwia założeniu, że rozważamy tylko różnice większe od Θ lub $=\Theta$. Z tego wynika, że wybrane punkta b_s z mnogości Q' tworzą przeliczalną mnogość i że różnice (7) dadzą się uporządkować w ten sposób, że

(9) $$|a_1 - b_1| \geqq |a_2 - b_2| \geqq |a_3 - b_3| \geqq \cdots$$

gdzie jednak znak równości nie utrzymuje się statecznie.

Różnice te muszą widocznie dążyć do granic:

$$\lim_{s=\infty} |a_s - b_s| = \lim_{s=\infty} \varrho_s = 0,$$

bo w Q znajdują się koniecznie punkta a_s dowolnie przybliżające się do punktów mnogości Q'. Przy tem zauważyć potrzeba, że kiedy Q' zawiera także punkt leżący w nieskończoności, to przy dowolnem s kładziemy: $|a_s - \infty| = 1/|a_s|$, a z tych oddaleń te tylko do ϱ_s zaliczamy, w których $|a_s|$ wzrasta w nieskończoność.

Oddalenia (9) bez różnicy, czy w nich a_s leży w skończoności, czy w nieskończoności, posiadają wprawdzie granicę $\lim\limits_{s=\infty} \varrho_s = 0$, ale jej nie dosięgają, bo Q będąc mnogością izolowanych punktów nie zawiera w sobie punktów mnogości pochodnej Q'. Z tego wynika, że wszelkie ϱ_s trzeba uważać za skończone i różne od zera.

W ten sposób dokonane już jest podporządkowanie:

$$(a_s, b_s), \quad s = 1, 2, 3, \ldots.$$

a w niem w niektórych wypadkach do kilku, lub nawet do nieskończenie dużo punktów a_s jeden punkt b_s należeć może.

Z mnogości Q' wyjęto niezawodnie wszystkie w niej zawarte punkta przeliczalne, a w razie istnienia linij $l_1, l_2, \ldots$ utworzono na nich wszędzie gęste mnogości, które na przeprowadzenie funkcyj przedstawionych wyrażeniem f_x w poszczególnych obszarach $A_1, A_2, \ldots$ tensam wpływ będą miały, co same jednolite linie $l_1, l_2, \ldots$

Po takiem przygotowaniu możemy teraz każde $G_s\left(\dfrac{1}{x-a_s}\right)$ rozwinąć podobnie jak w art. poprzedzającym:

$$(10) \qquad G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum_{\mu=1}^{\infty} A_{s\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}, \quad s=1, 2, 3, \ldots$$

z zakresem zbieżności:

$$(11) \qquad |(a_s-b_s)/(x-b_s)|<\varepsilon<1.$$

Napiszmy dalej równanie (10) w ten sposób:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)-\sum_{\mu=1}^{\nu_s-1} A_{s\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}=\sum_{\mu=\nu_s}^{\infty} A_{s\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}=F_s(x),$$

to można będzie i tu — rozumując podobnie, jak w art. poprzedzającym — stosownem oznaczeniem liczb ν_s uczynić w obszarze (11):

$$(12) \qquad F_s(x)<\varepsilon_s, \quad s=1, 2, 3, \ldots,$$

gdzie ε_s jest dodatnie i rzeczywiste i jest s^{tym} wyrazem zbieżnego szeregu:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_s+\ldots$$

Zauważmy punkt x_0 różny od punktów mnogości Q i Q', a w jego otoczeniu:

$$(13) \qquad |x-x_0|<\varrho$$

niech się również żaden z punktów $(Q+Q')$ nie znajduje. Dolną granicą wszystkich różnic $|x-b_1|$, $|x-b_2|$, $|x-b_3|$, ..., gdzie x właśnie z zakresu (13) wyjęto, niech będzie l. W takim razie mamy:

$$(14) \qquad |x-b_s|\geq l, \quad s=1, 2, 3, \ldots$$

Połóżmy $\varepsilon l=\Theta$, to w szeregu $s=1, 2, 3, 4, \ldots$ znajdziemy zawsze pewne $s=m$, takie, że od takiego $s=m$ poczynając, mieć będziemy statecznie:

$$(15) \qquad |a_{m+h}-b_{m+h}|<\Theta=\varepsilon l, \quad h=0, 1, 2, 3, \ldots$$

Wskutek (14) i (15) mamy dla wszelkich x obszaru (13):

$$\left|\frac{a_{m+h}-b_{m+h}}{x-b_{m+h}}\right|<\frac{\Theta}{l}=\varepsilon, \quad h=0,1, 2, 3, \ldots$$

wszystkie te obszary obejmują zatem w sobie obszar (13), w którym — według (12) — dostajemy:

$$\left|\sum_{s=m}^{\infty} F_s(x)\right|<\varepsilon_m+\varepsilon_{m+1}+\varepsilon_{m+2}+\ldots$$

To dowodzi, że suma:

$$(E) \qquad \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x)=f_x$$

jest w obszarze (13), a więc i w obszarze:

$$\mathfrak{A}=(x)-Q-Q'=A_1+A_2+A_3+\ldots$$

jednostajnie zbieżną. Co się tyczy otoczenia punktu $a_s = a_r$, to pisząc

$$f_x = \sum_{s=1}^{m-1} F_s(x) + \sum_{s=m}^{\infty} F_s(x)$$

i obierając $m > r$ dojdziemy do wniosku, że w tem otoczeniu

$$f_x = G_r\left(\frac{1}{x-a_r}\right) + \mathfrak{P}_r(x-a_s), \quad \text{[jak w art. 45].}$$

Suma (E) jest więc wyrażeniem analitycznem określonem w twierdzeniu II.

W tworzeniu wyrażenia f_x mamy wielką dowolność w wyborze wielkości ε, ε_1, ε_2, ..., a w niektórych wypadkach także i podporządkowywanie (a_s, b_s) da się uskutecznić na bardzo wiele sposobów. Stąd wynika, że wyrażeń określonych w twierdzeniu II. można dostać nieskończenie dużo.

Niech G_x będzie funkcyą regularną w każdym punkcie obszaru $\mathfrak{A} + Q$, a o jakiemkolwiek zachowaniu się w mnogości Q', to i suma $G_x + f_x$ będzie również wyrażeniem o tychsamych własnościach, co f_x. Połóżmy wreszcie:

$$(E_1) \qquad G_x = \sum_{s=1}^{\infty} f_s(x),$$

gdzie $f_s(x)$ jest funkcyą wszędzie regularną z wyjątkiem punktu b_s mnogości Q', albo zastępczej mnogości R, to najogólniejszą postacią przedstawiającą żądane wyrażenie będzie:

$$(E_2) \qquad \sum_{s=1}^{\infty} [f_s(x) + F_s(x)].$$

Każdy dodajnik tej sumy ma dwa tylko punkta szczególne (a_s, b_s), a zresztą wszędzie zachowuje się regularnie.

Pd. 1. Mnogość Q złożona z punktów:

$$a_{nk} = \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\, e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}\right), \quad n \gtreqless k = 0, 1, 2, \ldots$$

ma pochodną Q' przedstawiającą się jako całkowity obwód koła: $|x| = 1$. W wnętrzu tego koła znajduje się mnogość: $Q_1 = (\ldots, a_{2p+1,k}, \ldots)$, a zewnątrz niego mnogość $Q_2 = (\ldots, a_{2p,k}, \ldots)$, a tak wnętrze koła, jak i cała nieograniczona część płaszczyzny (x) poza kołem są tu obszarami rodzaju pierwszego.

Przy tworzeniu wyrażenia analitycznego f_x z danych funkcyj $G_{nk}\left(\frac{1}{x-a_{nk}}\right)$ podporządkować tu trzeba punktowi a_{nk} punkt:

$$b_{nk} = e^{\frac{2k\pi i}{n+1}},$$

gdyż a_{nk} najmniej jest oddalony od tego punktu okręgu $|x| = 1$, który w prostej linii leży z samym punktem a_{nk} i z środkiem koła. Każde wyrażenie f_x przedstawiać tu będzie całkowicie dwie funkcye: jedną w wnętrzu koła $|x| = 1$, drugą zewnątrz tego koła. [Mittag-Leffler].

Pd. 2. MnogośS Q punktów:

$$a_{nk}=\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad n \gtreqless k=0,1,2,\ldots$$

skupia się na całym okręgu koła $|x|=1$. Wnętrze tego koła jest tu obszarem rodzaju 1^{go}, a cała część płaszczyzny (x) poza tem kołem będzie obszarem rodzaju 3^{go}.

48. Tworzenie funkcyi w obszarze ograniczonym linią punktów skupienia danej mnogości. Wspomnieliśmy w ostatnim artykule, że wyrażenie f_x w obszarze rodzaju 1^{go} przedstawia pewną analityczną funkcyę całkowicie. Załóżmyż, że już sama dana mnogość Q ogranicza swoją pochodną mnogością Q' jeden skończony, albo nieskończony, zwarty obszar $A+Q$, poza którym znajdują się jednak jeszcze punkta płaszczyzny (x), tworzące obszar B. Q' zawiera zatem w sobie pewną — w skończoności, lub nieskończoności — zamkniętą linią l. [Oprócz tego mogą się do Q' zaliczyć pewne punkta rozrzucone w *continuum* zamkniętem przez l, ale na te punkta nie będziemy tu zwracać uwagi].

Jeżeli w tym wypadku chodzi nam tu tylko o utworzenie wyrażenia, któreby w $A+Q$ przedstawiało pewną funkcyę całkowicie, to o zachowanie się tego wyrażenia w punktach obszaru B wcale troszczyć się nie potrzebujemy, a ta uwaga dozwoli nam dojść w tym razie do wyrażeń ogólniejszych od tych, jakie mieliśmy w art. poprzedzającym.

Niech b przedstawia teraz punkta na linii l (w mnogości Q'), a

$$W=(b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

niech będzie przeliczalną mnogością punktów, zawierającą się w B, przyczem niektóre z tych punktów mogą i w Q' być zawarte. Oddalenia $|b-b_s|$ punktu b_s od wszelkich punktów linii l będą miały pewną dolną granicę, którą nazwijmy t_s. Załóżmy dalej, że mnogość W obrano tak, aby górna granica ilości $t_1, t_2, t_3, \ldots$ była skończoną i oznaczoną, i aby za podporządkowaniem:

$$(a_s, b_s), \quad s=1,2,3,\ldots$$

okazało się:

$$\lim_{s=\infty}(|a_s-b_s|-t_s)=0. \text{*)} \tag{1}$$

Same różnice $(|a_s-b_s|-t_s)$, $s=1,2,3,\ldots$ będą wszystkie dodatnie, bo a_s, b_s leżą po różnych stronach linii l, a t_s jest naj-

*) I tu znowu do kilku, a nawet do nieskończenie dużo punktów a_s jeden i tensam punkt b_s należeć może.

mniejszem oddaleniem punktu b_s od samej linii l. Warunek (1) można zatem także tak określić, że obierając pewną skończoną i dodatnią ilość Θ, dostaniemy, poczynając od pewnego dostatecznie dużego $s=m$, statecznie:

(2) $$|a_s-b_s|-t_s<\Theta,\; s=m,\; m+1,\; m+2,\ldots$$

a te różnice nie przestają być dodatnie.

Jeżeli wszystkie miejsca b_s leżą na l, to wszystkie t_s są $=0$, i mamy wypadek uwzględniony już w art. poprzedzającym. (Miejsca b_s tworzą samą mnogość Q', albo zastępczą mnogość R).

Mając to, przyjmijmy, że znowu — jak w każdym z poprzedzających wypadków — każdemu a_s odpowiada pewna funkcya $G_s(\overline{x-a_s}^{\,-1})$ całkowita, przestępna lub wymierna, a znikająca, gdy jej argument $=0$. Połóżmy dla skończonych b_s:

(a) $$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}, \text{ i}$$
$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)-\sum_{\mu=1}^{\nu_s-1}A_{s\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}=\sum_{\mu=\nu_s}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}=F_s(x),$$

a dla b_s nieskończonego:

(b) $$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}, \text{ i}$$
$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)-\sum_{\mu=1}^{\nu_s-1}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}=\sum_{\mu=\nu_s}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}=F_s(x),$$

to, gdy $\varepsilon^{(s)}$ oznacza pewną dodatnią wielkość <1, będą rozwinięcia (a) zbieżne niezawodnie w obszarze:

(α) $$|(a_s-b_s)/(x-a_s)|<\varepsilon^{(s)},$$

a rozwinięcia (b) w obszarze:

(β) $$|x/a_s|<\varepsilon^{(s)}.$$

Niech dalej $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_s+\ldots$ będzie zbieżnym szeregiem o samych dodatnich wyrazach ε_s, to gdy g_s, β_s, $\varepsilon_0^{(s)}$ użyjemy w takiem znaczeniu, jak g_s, β, ε_0 w art. 45. — (12') — i w art. 46. — (12) — będziemy mogli $\varepsilon_0^{(s)}$ tak wyznaczyć, aby się okazało:

(3) $$|F_s(x)|<\varepsilon_s.$$ Połóżmy:

(4) $$\sum_{s=1}^{\infty}F_s(x)=\sum_{s=1}^{m-1}F_s(x)+\sum_{s=m}^{\infty}F_s(x)=U(x),$$

to możemy okazać, że $U(x)$ jest funkcyą analityczną regularnie się zachowującą w obszarze A, rozwijającą się w otoczeniu każdego punktu a_s na:

(5) $$G_s(\overline{x-a_s}^{\,-1})+\mathfrak{P}_s(x-a_s),$$

a nie dającą się przeprowadzić przez żaden punkt linii l.

Zauważmy w tym celu dowolny punkt x_0 mieszczący się w A i jego otoczenie:

(6) $$|x-x_0|<\varrho,$$

również całkowicie zawarte w A, to można przedewszystkiem dowieść, że od dostatecznie dużego $s=n$ począwszy wszystkie obszary:

$$\left|\frac{a_{n+h}-b_{n+h}}{x-b_{n+h}}\right|<\varepsilon^{(s+h)},\ h=0,1,2,...$$

mogą objąć sobą obszar (6).

Aby takie n wyznaczyć, zauważmy, że różnice $|x-b_s|-t_s$, $s=1,2,3,...$, gdy w nich x bierzemy z obszaru (6), będą wszystkie dodatnie dla tej samej przyczyny, dla której już różnice $|a_s-b_s|-t_s$ okazywały się >0. Gdy zatem dolną granicą różnic $|x-b_s|-t_s$, $s=1,2,3,...$ jest dodatnia liczba l, to mamy:

(7) $$|x-b_s|\geqq t_s+l,\quad s=1,2,3,...,$$

Załóżmy dalej, że dodatnia wielkość Θ jest $<l$, i że począwszy od $s=n_1$ mamy $|a_s-b_s|-t_s<\Theta$, $s\geqq n_1$, czyli $|a_s-b_s|<\Theta+t_s$, $s\geqq n_1$, to dla takich s okaże się:

(8) $$\left|\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right|<\frac{\Theta+t_s}{l+t_s},\ (s\geqq n_1).$$

Nazwijmy t górną — skończoną, jak założyliśmy — granicą wszystkich t_s, to z uwagi, że $\Theta<l$ przyjęto, mamy:

$$(\Theta+t_s)/(l+t_s)<(\Theta+t)/(l+t),$$

a ztąd i z (8) wynika, że:

$$|(a_s-b_s)/(x-b_s)|\leqq(\Theta+t)/(l+t),\ \text{gdy}\ s\geqq n_1.$$

Przyjmijmy teraz, że ułamkowe, dodatnie ilości $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$, ... dążą do granicy $\lim \varepsilon^{(s)}=1$, to w takim razie da się zawsze oznaczyć takie $s=n_2$, że poczynając od niego, mieć będziemy:

$$(\Theta+t)/(l+t)<\varepsilon^{(s)},\ (s\geqq n_2).$$

Niechże n oznacza większą z liczb n_1, n_2, to w takim razie dla wszelkich x branych z obszaru $|x-x_0|<\varrho$ dostajemy:

(9) $$\left|\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right|<\varepsilon^{(s)},\ s\geqq n$$

c. b. d. d. [Gdy $b_s=\infty$, mamy $|x:a_s|<\varepsilon^{(s)}$ dla $s\geqq n$].

Oznaczywszy n, załóżmy w (4) $m=n$. W takim razie pierwsza z sum (4) przedstawia funkcyę wszędzie regularną z wyjątkiem punktów $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$. Druga suma będzie jednostajnie zbieżną w obszarze: $|x-x_0|<\varrho$, bo odnosi się do $s\geqq n$, a nierówności (3) zachodzą w obszarach (α) lub (β) mieszczących w sobie obszar: $|x-x_0|<\varrho$. Wskutek tego będzie widocznie i cała suma (4), t. j. funkcya $U(x)$ jednostajnie zbieżną w obranym obszarze (6).

Chcąc $U(x)$ rozwinąć w otoczeniu punktu $a_s=a_r$ przyjmiemy w (4): $m>r$. Wtedy pierwsza z sum da rozwinięcie $G_r+\mathfrak{P}'_r(x-a_r)$, druga zaś da się rozwinąć na zwykły szereg potęgowy o argumencie $(x-a_r)$. Dostaniemy więc tu $U(x)$ w postaci (5). Przez linię l nie będzie można funkcyi $U(x)$ wyprowadzić z $A+Q$, bo za zbliżaniem się do tej linii mnożą się bez końca osobliwe punkta a_s tej funkcyi.

Każda inna funkcya $f(x)$ posiadająca wszystkie własności wyrażenia $U(x)$ różnić się będzie od $U(x)$ o pewną funkcyę, która ma być regularną w $A+Q$, a w mnogości Q' może się dowolnie zachowywać. Nazwijmy ją $G(x, Q')$, to mieć będziemy:

(F) $$f(x)=G(x, Q')+U(x).$$ Stąd twierdzenia:

I. *Gdy dana jest nieskończona mnogość izolowanych punktów:*

$$Q=(a_1, a_2, ..., a_s, ...)$$

z mnogością pochodną Q' zawierającą linię zamkniętą l, a ograniczającą całkowicie jeden ciągły obszar $A+Q$, gdy dalej każdemu punktowi a_s podporządkowano pewną całkowitą funkcyę $G_s(x-a_s)^{-1}$ znikającą, gdy jej argument $=0$, to zawsze jest możliwa, za przybraniem nieskończenie wielu punktów leżących poza $(A+Q)$, utworzyć analityczne wyrażenie $U(x)$ o takich własnościach: 1. $U(x)$ zachowuje się regularnie w otoczeniu każdego punktu x_0 zawartego w A; 2. W każdym punkcie a_s jest:

$$U(x)=G_s(x-a_s)^{-1}+\mathfrak{P}_s(x-a_s);$$

3. $U(x)$ przedstawia analityczną funkcyę o własnościach 1, 2, a nie dającą się wyprowadzić z $A+Q$ przez l.

II. *Każda analityczna funkcya $f(x)$ o własnościach wyrażonych w tw. I. daje się przedstawić sumą $[G(x, Q')+U(x)]$, w której $G(x, Q')$ jest funkcyą regularną w obszarze $A+Q$, a o jakiemkolwiek zachowaniu się w mnogości Q'.*

49. Wyrażenia analityczne o miejscach zerowych i nieskończonościowych tworzących mnogość punktów odosobnionych. Niech $Q=(a_1, a_2, ..., a_s, ...)$ będzie — jak w art. 47. — mnogością odosobnionych punktów, posiadającą pochodną mnogość Q', która wraz z Q ogranicza na płaszczyźnie (x) jeden lub kilka zwartych oddzielnych obszarów $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Punktom a_s podporządkujmy znowu punkta b_s brane z mnogości Q' w ten sposób, aby

$$\lim_{s=\infty} |a_s - b_s| = 0,$$

a razem z szeregiem a_s, $s=1,2,\ldots$ niech będą dane funkcye:

$$(1) \qquad \left(1-\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{n_s}, \quad s=1,2,3,\ldots$$

o całkowitych, już-to dodatnich, już-to odjemnych n_s. Przy skończonem b_s, możemy — zakładając $|(a_s-b_s)/(x-b_s)|<1$ — położyć

$$(2) \qquad \left(1-\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{n_s} = exp\left[-n_s\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}\right]$$

[art. 29., (7)], które-to równanie, gdy $b_s=\infty$, przechodzi na:

$$(3) \qquad \left(1-\frac{x}{a_s}\right)^{n_s} = exp\left[-n_s\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}\right]$$

z ograniczeniem:

$$(4) \qquad |x/a_s|<1.$$

Napiszmy (2) — przyjmując tam b_s już-to skończone, już-to nieskończone — w ten sposób:

$$\left(1-\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{n_s} exp\left[n_s\sum_{\mu=1}^{\nu_s-1}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}\right] = exp\left[-n_s\sum_{\mu=\nu_s}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}\right]$$

i połóżmy:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \left(1-\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right) exp\left[\sum_{\mu=1}^{\nu_s-1}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}\right] &= E_s(x,a_s,b_s), = \\ = exp\left[-\sum_{\mu=\nu_s}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu}\right], &\quad s=1,2,3,\ldots, \end{aligned}$$

to funkcya E_s ma widocznie jednokrotny punkt zerowy a_s, a punkt b_s jest albo jej punktem istotnie osobliwym, $(\nu_s>1)$, albo jej jednokrotnym punktem nieskończonościowym $(\nu_s=1)$, a wtedy $E_s=1-(a_s-b_s)/(x-b_s)$. Poza tymi punktami jest E_s wszędzie skończoną, regularną i różną od zera.

Połóżmy dalej:

$$(6) \qquad -n_s\sum_{\mu=\nu_s}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_s-b_s}{x-b_s}\right)^{\mu} = F_s(x), \text{ a więc:}$$

$$(7) \qquad [E_s(x,a_s,b_s)]^{n_s} = exp[F_s(x)],$$

i zauważmy iloczyn:

$$(G) \qquad f_x=\prod_{s=1}^{\infty}\,[E_s(x, a_s, b_s)]^{n_s}=exp\left[\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x)\right].$$

Sumę:

$$U(x)=\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x)$$

można stosownem doborem dodatnich liczb ν_s uczynić w obszarze $\mathfrak{A}=(x)-Q-Q'$ jednostajnie zbieżną; okazać to można, dowodząc, jak w art. 47., że w dostatecznie małem otoczeniu $|x-x_0|<\varrho$, zawierającem się w $\mathfrak{A}$ i z punktem x_0 leżącym w $\mathfrak{A}$ jest $U(x)$ absolutnie i jednostajnie zbieżne. Wskutek tego i iloczyn f_x będzie wewnątrz całego obszaru $\mathfrak{A}$ absolutnie i jednostajnie zbieżny, [por. końcowy ustęp w art. 41]. W otoczeniu dowolnego punktu x_0 mieszczącego się w $\mathfrak{A}$ dostaniemy rozwinięcie:

$$(8) \qquad f_x=e^{\mathfrak{P}(x-x_0)}=\mathfrak{P}_0(x-x_0),$$

w którem wolny wyraz jest koniecznie $\neq 0$.

Zauważmy jeden z punktów a_s n. p. punkt a_r i jego otoczenie:

$$(9) \qquad |x-a_r|<\varrho$$

tak małe, że wewnątrz niego nie znajduje się oprócz a_r żaden punkt ani mnogości Q, ani mnogości Q'.

Iloraz:

$$(10) \qquad f_x:[E_r(x, a_r, b_r)]^{n_r}=\prod_{s=1}^{r-1}[E_s(x, a_s, b_s)]^{n_s}.\prod_{s=r+1}^{\infty}[E_s(x, a_s, b_s)]^{n_s}$$

nie będzie w punkcie a_r ani zerem, ani nieskończonością, a w otoczeniu (9) tego punktu okaże się regularnym. Da się więc tu przedstawić szeregiem potęgowym $\mathfrak{P}_{r1}(x-a_r)$, w którym koniecznie $\mathfrak{P}_{r1}(0)\neq 0$ jest.

Że zaś w otoczeniu (9) mamy:

$$[E_r(x, a_r b_r)]^{n_r}=(x-a_r)^{n_r}\,\mathfrak{P}_{r2}(x-a_r),$$

gdzie znowu $\mathfrak{P}_{r2}(0)\neq 0$ być musi, więc z (10) wyniknie:

$$f_x=(x-a_r)^{n_r}\,\mathfrak{P}_r(x-a_r)$$

z wolnym wyrazem różnym od zera w $\mathfrak{P}_r(x-a_r)$. To wskazuje, że iloczyn f_x posiada w a_r n_r-krotny punkt zerowy, lub nieskończonościowy według tego, czy $n_r>0$, czy <0, a w jego otoczeniu jest już jednostajnie zbieżny. Co się tyczy punktów mnogości Q', to w każdym z nich będzie f_x bez znaczenia.

Gdy $F_0(x)$ oznaczać będzie funkcyę dowolną, ale o regularnem zachowaniu się w $\mathfrak{A}+Q$, a o dowolnem zachowaniu się w Q', to i iloczyn:

$$(G_1) \qquad F_0(x).f_x = F_0(x).\prod_{s=1}^{\infty}[E_s(x, a_s, b_s)]^{n_s}$$

posiadać będzie te same własności, co f_x.

Z tych wszystkich uwag wnosimy:

I. *Gdy nieskończona mnogość Q punktów a_s jest dana, a $Q+Q'$ ogranicza jeden lub kilka zwartych oddzielnych obszarów $A_1, A_2, ...,$ to zawsze można utworzyć nieskończenie dużo wyrażeń analitycznych o formie nieskończonych iloczynów, a o tej własności, że w $A_1, A_2, ...$ określają całkowicie lub częściowo różne funkcye analityczne.*

Funkcya istniejąca w obszarze A_t posiada w punktach a_s należących do ograniczenia tego obszaru już-to miejsce zerowe, już-to nieskończonościowe o żądanych powtórzeniach n_s.

Miejsca a_s w iloczynie (G), lub (G_1) są więc albo zerowemi: α_s, albo nieskończonościowemi: β_s. Ich powtórzenia niech będą odpowiednio: p_s, q_s, a podporządkowane im punkta b_s nazwijmy: b_s', b_s''. Wtedy iloczyn (G) będziemy mogli tak napisać:

$$(G_2) \qquad f_x = \left[\prod_{s=1}^{\infty}[E_s(x, \alpha_s, b_s')]^{p_s} : \prod_{s=1}^{\infty}[\bar{E}_s(x, \beta_s, b_s'')]^{q_s}\right].$$

Gdy tu w liczniku zbierzemy wszystkie funkcye E_s z temsamem b'_s, to ich iloczyn utworzy funkcyę o jednem, jedynem miejscu osobliwem b_s', a ze skończoną lub nieskończoną ilością miejsc zerowych α_s. Taka funkcya jest zawsze całkowitą przestępną, a w szczególności całkowitą wymierną funkcyą argumentu $\frac{1}{x-b_s'}$, [art. 41.]. Gdy tak samo postąpimy z wszystkiemi funkcyami $\bar{\varepsilon}_s$ o tych samych b_s'', $s=1, 2, 3, ...$ w mianowniku formy (G_2), dostaniemy f_x w nowej postaci:

$$(G_3) \qquad f_x = \left[\prod_{s=1}^{\infty} G_s\left(\frac{1}{x-b_s'}\right) : \prod_{s=1}^{\infty} \bar{G}_s\left(\frac{1}{x-b_s''}\right)\right].$$

Przyjmijmy teraz, że $Q+Q'$ ogranicza jedno tylko *continuum* A, ale poza niem pozostaje na płaszczyźnie (x) jeszcze pewien obszar B. Gdy wtedy w tym obszarze B wybierzemy pewną mnogość punktów $W=(b_1, b_2, ..., b_s, ...)$ w ten sposób, jak w art. 48, to dalej postępując metodą tam wyłożoną dojdziemy do wyrażenia (G), (G_1) lub (G_2), w których b_s, b_s', b_s'' należą właśnie do W, a które pewną analityczną funkcyę z miejscami a_s już-to zerowemi, już-to nieskończonościowemi przedstawiają w obszarze $A+Q$ całkowicie.

Przejście do formy (G_3) nie jest tu dopuszczalne, bo punkta a_s leżą tu poza obszarem $A+Q$, w którym właśnie, a nie poza nim, ma f_x określić pewną funkcyę.

Nazwijmy E_s funkcyami pierwszemi, to mamy twierdzenie:

II. *Gdy dana jest mnogość nieskończona Q, a $Q+Q'$ ogranicza całkowicie jedno tylko continuum, a poza niem pozostaje na płaszczyźnie (x) jeszcze pewien obszar B, to można na nieskończenie wiele sposobów — biorąc do pomocy pewne mnogości punktów z obszaru B — utworzyć nieskończony iloczyn funkcyj pierwszych, przedstawiający w $A+Q$ całkowicie funkcyę analityczną z miejscami a_s już-to zerowemi już to nieskończonościowemi.*

CZĘŚĆ III.

Z TEORYI SZEREGÓW WIELU ZMIENNYCH. FUNKCYE ALGEBRAICZNE JEDNEJ ZMIENNEJ.

ROZDZIAŁ V.

Odwracanie szeregu jednej zmiennej. Z teoryi funkcyj wielu zmiennych.

50. **Jednoznaczne odwracanie szeregu jednej zmiennej.** Określenie logarytmu i łuków, które-to funkcye omówiliśmy w Rozdziale II., zawiera się w ogólnem zadaniu zmierzającem do odwrócenia danego (zbieżnego w pewnym zakresie) szeregu potęgowego $y=\mathfrak{P}(x)$ t. j. do wyznaczenia x z funkcyi y, czyli do rozwiązania równania $y-\mathfrak{P}(x)=0$, w którem x uważa się za zależne od y.

Zupełne rozwiązanie takiego zadania wraz z podaniem bliższych, towarzyszących mu okoliczności poprzedzić jednak trzeba takiem rozważaniem: Niech $f(x)$ będzie w otoczeniu punktu $x=0$ regularnym elementem pewnej analitycznej (wymiernej, lub przestępnej) funkcyi. Element ten niech będzie zbieżny w zakresie $|x|<\varrho$, a w zakresie $|x|<\varrho_1<\varrho$ niech posiada miejsca zerowe x_1, x_2, ..., x_m z powtórzeniami λ_1, λ_2, ..., λ_m. W takim razie możemy położyć:

$$f(x)=(x-x_1)^{\lambda_1}(x-x_2)^{\lambda_2}\dots(x-x_m)^{\lambda_m}.f_1(x), \tag{1}$$

gdzie $f_1(x)$ jest szeregiem potęgowym zbieżnym w kole (ϱ), a jeżeli w tem kole ma miejsca zerowe, to te się mieszczą wyłącznie w pierścieniu: $\varrho_1<|x|<\varrho$.

Logarytmiczna pochodna szeregu (1) będzie postaci:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\lambda_1}{x-x_1}+\frac{\lambda_2}{x-x_2}+\dots+\frac{\lambda_m}{x-x_m}+\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}. \tag{2}$$

Iloraz $f_1'(x)/f_1(x)$ da się tu niezawodnie rozwinąć na szereg potęgowy $\mathfrak{P}_1(x)$, którego promień zbieżności ϱ_2 będzie z pewnością $>\varrho_1$, a $\leqq\varrho$. W pierścieniu $(\varrho_1...\varrho_2)$ określonym przez: $\varrho_1<|x|<\varrho_2$ nie ma ani funkcya $f_1'(x)$, ani funkcya $f(x)$ żadnych miejsc zerowych, a że dla każdego punktu x leżącego wewnątrz $(\varrho_1...\varrho_2)$ mamy: $|x|>|x_s|$, $s=1, 2, 3, ..., m$, więc z (2) możemy dojść do rozwinięcia:

$$(3)\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{s=1}^{m}\frac{\lambda_s}{x\left(1-\dfrac{x_s}{x}\right)}+\mathfrak{P}_1(x)$$
$$=\nu.x^{-1}+s_1x^{-2}+s_2x^{-3}+...+\mathfrak{P}_1(x)$$

zbieżnego wewnątrz $(\varrho_1...\varrho_2)$.

W tem rozwinięciu jest $\nu=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m$ ilością pierwiastków funkcyi $f(x)$ w kole (ϱ_1), a $s_\mu=\lambda_1x_1^\mu+\lambda_2x_2^\mu+...+\lambda_mx_m^\mu$, $\mu=1, 2, ...,$ są sumami μ^{tych} potęg tych pierwiastków. (Każdy pierwiastek λ_s-krotny uważa się za λ_s pierwiastków).

Naodwrót — gdy w jakikolwiek sposób uda się dojść do rozwinięcia:

$$f'(x)/f(x)=\nu'x^{-1}+s'_1x^{-2}+s'_2x^{-3}+...+\mathfrak{P}'_1(x)$$

zbieżnego w $(\varrho_1...\varrho_2)$ — to wywnioskujemy: 1°) $f(x)$ w tym pierścieniu nie ma żadnych punktów zerowych; w przeciwnym bowiem razie ułamek $f'(x)/f(x)$ miałby tam przynajmniej jeden punkt nieskończonościowy, a to się sprzeciwia zbieżności jego w $(\varrho_1...\varrho_2)$. 2°) Musi być $\nu'=\nu$, $s'_\mu=s_\mu$, $\mu=1, 2, 3, ...$ i identycznie $\mathfrak{P}'_1(x)=\mathfrak{P}_1(x)$, co wynika z równania:

$$\nu'x^{-1}+s'_1x^{-2}+...+\mathfrak{P}'_1(x)=\nu x^{-1}+s_1x^{-2}+...+\mathfrak{P}_1(x)$$

na wszystkich punktach w $(\varrho_1...\varrho_2)$. Mamy stąd twierdzenie:

I. *Gdy $f(x)$ jest regularnym elementem funkcyjnym danym dla otoczenia punktu $x=0$, i z zakresem zbieżności $|x|<\varrho$, a jego logarytmiczna pochodna da się w jakikolwiek sposób rozwinąć na sumę $\sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty}c_\mu x^\mu$ zbieżną w pierścieniu $\varrho_1<|x|<\varrho_2\leqq\varrho$, to $f(x)$ nie ma w tym pierścieniu ani jednego pierwiastka, w kole zaś (ϱ_1) ma tyle pierwiastków, ile spółczynnik przy x^{-1}, który tu zawsze wypadnie całkowity dodatni, zawiera jednostek. Spółczynniki przy x^{-2}, x^{-3}, i t. d. są po porządku sumami 1^{szych}, 2^{gich} i t. d. potęg tych pierwiastków.*

To twierdzenie zastosujemy chcąc odwrócić szereg:

$$(4)\qquad y=a_0+a_1x+a_2x^2+...=\mathfrak{P}(x).$$

Załóżmy $|a_1|>0$ i położmy:

$$y' = y - a_0 = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \varphi(x) = x[a_1 + a_2 x + \ldots] = x.\varphi_1(x),$$

to odwrócenie szeregu (4) jest tem samem, co rozwiązaniem ze względu na x równania:

$$(5) \qquad f(x, y') = x.\varphi_1(x) - y' = 0.$$

Szereg (4), a z nim i funkcye $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ niech mają promień zbieżności ϱ. Funkcya $\varphi(x)$, stając się zerem, gdy $x=0$, będzie już różną od zera na wszystkich punktach pewnego skończonego otoczenia: $|x| < \varrho_2 < \varrho$. [T. I. art. 164]. Obierzmy dalej $\varrho_1 < \varrho_2$, gdzie $\varrho_1 > 0$, to w pierścieniu $(\varrho_1 \ldots \varrho_2)$ funkcya $\varphi(x)$ nie ma również ani jednego pierwiastka. W tym pierścieniu posiada zatem $|\varphi(x)|$ pewną dolną granicę g różną od zera, a gdy y' ograniczymy tak, że z wartości jego uwzględnimy tylko te, które dają $|y'| < g$, to w całem wnętrzu pierścienia $(\varrho_1 \ldots \varrho_2)$ mieć będziemy:

$$(6) \qquad |y' / \varphi(x)| < 1.$$

Funkcya $f(x, y')$ nie staje się zatem nigdzie zerem wewnątrz $(\varrho_1 \ldots \varrho_2)$ dla wartości $|y'| < g$, a gdy ją za funkcyę samego x uważać będziemy, dostaniemy z niej:

$$\frac{\frac{d}{dx} f(x, y')}{f(x, y')} = \frac{\frac{d}{dx}[\varphi(x) - y']}{\varphi(x) - y'} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\left[1 - \frac{y'}{\varphi(x)}\right]}$$

Wskutek warunku (6) można będzie tę logarytmiczną pochodnę rozwinąć na sumę:

$$\frac{\frac{d}{dx} f(xy')}{f(xy')} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^{\lambda+1}} . y'^{\lambda} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\frac{y'}{\varphi(x)}\right]^{\lambda}$$

zbieżną w pierścieniu (6). Że zaś ostatnia suma jest jednostajnie zbieżną przy warunku (6), więc uwzględniając:

$$\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^{\lambda+1}} = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varphi^{\lambda}}\right), \text{ mamy także:}$$

$$(7) \qquad \frac{\frac{d}{dx} f(x, y')}{f(x, y')} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\varphi(x)}\right)^{\lambda}.$$

Gdy to ostatnie rozwinięcie, wskutek jego jednostajnej zbieżności rozwiniemy podług potęg zmiennej x, dostaniemy przedewszystkiem:

$$\varphi'(x) / \varphi(x) = x^{-1} + \mathfrak{P}_0(x).$$

Wprowadzając dalej symbol $[\psi(x)]_\alpha$ na oznaczenie spółczynnika

A_a przy x^a w rozwinięciu $\psi(x)=\Sigma A_\alpha x^\alpha$ podług potęg zmiennej x, połóżmy:

$$[\varphi(x)]^{-\lambda}=[\varphi^{-\lambda}]_{-\lambda}.x^{-\lambda}+[\varphi^{-\lambda}]_{-\lambda+1}.x^{-\lambda+1}+...+[\varphi^{-\lambda}]_{-1}.x^{-1}+\mathfrak{P}_\lambda(x)$$
$$\lambda=1,2,3,....,$$

to stąd mamy:

$$\frac{d}{dx}(\varphi^{-\lambda})=-[\varphi^{-\lambda}]_{-1}.x^{-2}-...-\lambda[\varphi^{-\lambda}]_{-\lambda}.x^{-\lambda-1}+\frac{d}{dx}\mathfrak{P}_\lambda(x),$$
$$\lambda=1,2,3,....$$

Z tego wnosimy, że suma $-\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}$ mieszcząca się w (7) nie da wcale wyrazu z potęgą x^{-1}, a wyrazem z potęgą x^{-2} będzie w niej

(8) $$x^{-2}.\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}[\varphi^{-\lambda}]_{-1}.y'^{\lambda}.$$

Rozwinięcie (7) będzie więc postaci:

(9) $$\frac{\frac{d}{dx}f(x,y')}{f(x,y')}=x^{-1}+x^{-2}.\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}[\varphi^{-\lambda}]_{-1}.y'^{\lambda}+$$
$$+A_3x^{-3}+A_4x^{-4}+...+\mathfrak{P}(x).$$

Stosując tu twierdzenie I., widzimy, że funkcya $f(x,y')$, gdy $|y'|<g$, nie ma w pierścieniu $(\varrho_1...\varrho_2)$ ani jednego pierwiastka x; w otoczeniu $|x|<\varrho_1$ punktu $x=0$ posiada jeden i tylko jeden pierwiastek x. Ten wyrazi się rozwinięciem:

(a) $$x=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}[\varphi^{-\lambda}]_{-1}.(y-a_0)^{\lambda}$$

zbieżnem dla $|y-a_0|<g$, bo w (9) spółczynnik mnożący x^{-2} daje podług tw. I. sumę pierwiastków zawartych w zakresie $|x|<\varrho_1$, a suma ta — gdy się tu tylko z jednym pierwiastkiem ma do czynienia — będzie właśnie tym pierwiastkiem.

Ponieważ $\varphi(x)=x\varphi_1(x)$, to gdy $\alpha^{\text{tą}}$ pochodnę funkcyi $[\varphi_1(x)]^{-\lambda}$ dla wartości $x=0$ naznaczymy przez $\left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\varphi_1{}^{-\lambda}\right]_0$, mieć będziemy:

$$[\varphi(x)]^{-\lambda}=x^{-\lambda}[\varphi_1(x)]^{-\lambda}=$$
$$x^{-\lambda}([\varphi_1{}^{-\lambda}]_0+\frac{1}{1!}[\frac{d}{dx}\varphi_1{}^{-\lambda}]_0x+...+\frac{1}{(\lambda-1)!}[\frac{d^{\lambda-1}}{dx^{\lambda-1}}\varphi_1{}^{-\lambda}]_0x^{\lambda-1}+...).$$

Uwzględniając to w (a), możemy pierwiastek x także w takiej formie przedstawić:

(b) $$x=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{d^{\lambda-1}}{dx^{\lambda-1}}\varphi_1{}^{-\lambda}\right]_0.(y-a_0)^\lambda. \text{*)}$$

Stąd twierdzenie:

II. *Szereg:* $y=a_0+a_1x+a_2x^2+...=\mathfrak{P}(x)$, *w którym* $|a_1|>0$ *jest, daje się zawsze w ten sposób odwrócić, że przy dostatecznie małych* $|y-a_0|$ *dostajemy z niego:*

(c) $$x=b_1(y-a_0)+b_2(y-a_0)^2+... \text{**)}$$

Taki szereg $\mathfrak{P}(x)$ *nazywamy jednoznacznie odwracalnym, bo on daje w otoczeniu punktu* $y=a_0$ *regularny element pewnej analitycznej funkcyi x. Funkcya ta, którą naznaczyć można przez* $x(y)$ — *(argument funkcyi y), a nazywać odwróceniem szeregu — nie potrzebuje w ogólności być jednoznaczną funkcyą argumentu y. Możliwa jest bowiem, że przeprowadzenie elementu (c) wykaże kilka, lub nawet nieskończenie dużo gałęzi połączonych ze sobą monogenicznie.*

Pd. 1. W funkcyi: $y=e^{g(x)}$ niech będzie:

$$g(x)=q_0+q_1x+q_2x^2+..., \text{ i } |q_1|>0.$$

Połóżmy $e^{q_0}=c$, to mieć będziemy:

(α) $$\frac{y}{c}=e^{q_1x+q_2x^2+....}=1+a_1x+a_2x^2+,...$$

a w tem rozwinięciu równocześnie z $q_1\neq0$, jest także $a_1\neq0$. Napiszmyż równanie (α) w postaci: $(y-c)/c=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...$, to stąd wyniknie regularny element funkcyi $x(y)$ w otoczeniu punktu $y=c$. Funkcya $e^{g(x)}$ jest więc widocznie równocześnie ze swoim wykładnikiem $g(x)$ jednoznacznie odwracalną.

Z drugiej strony dostajemy z (α):

$$log(y/c)=q_1x+q_2x^2+q_3x^3+...=log(1+(y-c)/c),$$

a stąd wnioskujemy, że odwrócenie $x(y)$ będąc regularnem w otoczeniu punktu c określa funkcyę nieskończenie wielowartościową.

Pd. 2. W danym szeregu: $y-a_0=a_1x^m+a_2x^{2m}+a_3x^{3m}+...$, w którym $m>1$ jest całkowite dodatnie, połóżmy $x^m=\xi$, to mieć będziemy:

$$y-a_0=a_1\xi+a_2\xi^2+...$$

Stąd dostaniemy:

$$x^m=\xi=\xi(y)=b_1(y-a_0)+b_2(y-a_0)^2+..., \text{ a stąd:}$$

(β) $$x=e^{\frac{2s\pi i}{m}}[\xi(y)]^{\frac{1}{m}}, \quad s=1, 2, 3, ..., m-1.$$

---

*) Por. O. Stolz — „*Ueber den Convergenzkreis der umgekehrten Reihen*", *Sitzungsb. der math. Classe der kais. Akademie.* Wien. (1895). T. 104, str. 485—501.

**) O uwagi godnem odwróceniu takiem, że — gdy $y=f(x)=a_1x+a_2x^2+...$ — ma być $x=b_1f(x)+b_2f(x^2)+...$ czytaj rozprawę Möbiusa w C. J. T. 9, str. 105—123.

Odwrócenie jest tu więc m-wartościowe. W taki sposób można odwrócić funkcyę $y=cos\,x=1-\frac{x^2}{2!}+...$ wyznaczając naprzód $x^2=\xi\,(y)$, $\xi=x^2$, i przechodząc potem do właściwego odwrócenia: $x=\pm\sqrt{\xi\,(y)}$.

Ta dwuwartościowość wynika tu z parzystości funkcyi $cos\,x$, wskutek czego do jednej wartości y należą zawsze dwie wartości argumentu x, a to: $\pm x$. Oprócz tej dwuwartościowości wystąpi tu jeszcze nieskończona wieloznaczność spowodowana peryodycznością funkcyi $cos\,x$. [Podobnie i do m-wartościowego wyniku (β) może się jeszcze dołączyć wielowartościowość skądinąd pochodząca].

51. O równaniu $f(x, x_1, x_2, ..., x_n)=0$. Wieloznaczne odwrócenie szeregu jednej zmiennej. Niech będzie dany szereg potęgowy $f(x, x_1, x_2, ..., x_n)$, $(n+1)$ niezależnych zmiennych $x, x_1, x_2, ..., x_n$, zbieżny w pewnym zakresie:

$$(R)=(\,|x|<R,\ |x_1|<R, ..., |x_n|<R)$$

a posiadający takie własności:

1°. $f(0, 0, ..., 0)=0$; szereg f nie posiada zatem wolnego wyrazu;

2°. $f(x, 0, ..., 0)=f_0(x)=a_m x^m+a_{m+1}\,x^{m+1}+...,\ |a_m|>0,\ m\geq 1$; szereg f posiada zatem i wyrazy zawierające jedną tylko zmienną x. Sumę pozostałych wyrazów $\Sigma A_{s, s_1 s_2, ..., s_n}\, x^s \cdot x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_n^{s_n}$, nazwijmy $-f_1(x, x_1, x_2, ..., x_n)$, to widocznie jest $f_1(x, 0, 0, ... 0)$ przy dowolnem x, a samo $f=f_0-f_1$.

Szereg f_0, stając się zerem m-krotnie na miejscu $x=0$, będzie już dalej różny od zera w pewnem, skończonem, dostatecznie małem otoczeniu $|x|<\varrho_2\leq R$. Dobierzmy drugą dodatnią wielkość $\varrho_1<\varrho_2$, a różną od zera, to w pierścieniu $(\varrho_1 ... \varrho_2)$ mieć będziemy statecznie $|f_0(x)|>0$, z dolną granicą $g>0$.

Co się tyczy szeregu f_1 — to tu można zawsze oznaczyć dostatecznie małą, dodatnią wielkość $\varrho<R$, tak, że na wszystkich miejscach leżących w obszarze:

(A) $\quad \varrho_1<|x|<\varrho_2;\ |x_1|<\varrho,\ |x_2|<\varrho, ...,\ |x_n|<\varrho,$ okaże się:

(1) $$|f_1(x, x_1, ..., x_n)|<g.$$

Na wszystkich więc miejscach wewnątrz obszaru (A) mamy:

(2) $$|f_0|>|f_1|,$$

a wskutek tego w całym tym obszarze jest szereg $f=f_0-f_1\neq 0$.

Warunek (2) dozwoli dalej odwrotność:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_0-f_1}=\frac{1}{f_0\left(1-\frac{f_1}{f_0}\right)}$$

rozwinąć na sumę:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_0}+\frac{f_1}{f_0^2}+\frac{f_1^2}{f_0^3}+\frac{f_1^3}{f_0^4}+\dots$$

zbieżną w obszarze (A). Uważajmy odtąd f za szereg jednej tylko zmiennej x, podczas gdy $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ma być dowolnym systemem takich wartości, że $|x_s| < \varrho$, $s=1, 2, \dots, n$, to w obszarze (A) będzie także i rozwinięcie:

$$\frac{\frac{\partial f}{dx}}{f}=\left(\frac{\partial f_0}{dx}-\frac{\partial f_1}{dx}\right)\left(\frac{1}{f_0}+\frac{f_1}{f_0^2}+\frac{f_1^2}{f_0^3}+\dots\right)$$

$$=\frac{\frac{\partial f_0}{dx}}{f_0}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{\partial f_0}{\partial x}\cdot f_1^{\lambda}}{f_0^{\lambda+1}}-\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot f_1^{\lambda-1}}{f_0^{\lambda}}\right)=$$

$$=\frac{\frac{\partial f_0}{\partial x}}{f_0}-\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{f_0^{\lambda}\cdot f_1^{\lambda-1}\cdot\frac{\partial f_1}{dx}-f_1^{\lambda}\cdot f_0^{\lambda-1}\frac{\partial f_0}{dx}}{f_0^{2\lambda}}$$

$$(3)\qquad =\frac{\frac{\partial f_0}{dx}}{f_0}-\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{f_1^{\lambda}}{f_0^{\lambda}}.$$

j e d n o s t a j n i e z b i e ż n e m. Wskutek tej zbieżności będzie można to rozwinięcie uporządkować w obszarze (A) podług potęg zmiennej x. Z tego uporządkowania dostajemy:

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}/f_0=m.x^{-1}+\mathfrak{P}_0(x).$$

Zauważmy dalej, że $f_1^{\lambda}/f_0^{\lambda}=\sum_{\mu=0}^{\infty}U_{\lambda\mu}.x^{-m\lambda+\mu}$ gdzie:

$$U_{\lambda\mu}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

są zwykłymi szeregami potęgowymi zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ o tej własności, że $U_{\lambda\mu}(0, 0, \dots, 0)=0$, to stąd dostajemy:

$$(5)\qquad -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\frac{f_1^{\lambda}}{f_0^{\lambda}}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{\mu=0}^{\infty}(-m\lambda+\mu)\,U_{\lambda\mu}.x^{-m\lambda+\mu-1}.$$ Połóżmy:

$$-\sum_{-m\lambda+\mu=\nu}(-m\lambda+\mu)U_{\lambda\mu}=\nu.U_{\nu},\ \nu=-\infty, \dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots, +\infty,$$

to dostaniemy:

$$(6)\qquad -\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\frac{f_1^{\lambda}}{f_0^{\lambda}}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\nu.U_{\nu}.x^{\nu-1},$$

gdzie i tu $U_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)$ są zwykłymi szeregami zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o tej własności, że $U_\nu(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Uwzględniając (4) i (6) dochodzimy teraz do takiej postaci sumy (3):

$$(7)\qquad \frac{df}{\partial x} / f = mx^{-1} + \mathfrak{P}_0(x) + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \nu \,.\, U_\nu \,.\, x^{\nu-1}.$$

Ze sumy mieszczącej się tu po prawej stronie nie dostaniemy ani jednego wyrazu z potęgą x^{-1}. Połóżmy:

$$\nu \,.\, U_\nu = \gamma_{-\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \text{gdy}\ \nu = -1, -2, -3, \ldots$$

$$\mathfrak{P}_0(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \,.\, U_\nu x^{\nu-1} = \mathfrak{P}_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

to relacya (7) przedstawi się teraz tak:

$$(8)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} / f = mx^{-1} + \gamma_1 x^{-2} + \gamma_2 x^{-3} + \ldots + \mathfrak{P}_1(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Z tego rozwinięcia wynika — tw. I. art. poprzedz., — że dla każdego systemu:

$$|x_1| < \varrho,\ |x_2| < \varrho, \ldots,\ |x_n| < \varrho$$

posiada równanie $f = 0$ w obszarze $|x| < \varrho_1$ dokładnie m, a nie więcej pierwiastków x. Gdy te pierwiastki nazwiemy $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, to, według tegosamego twierdzenia, jest w (8):

$$s_\mu = \varphi_1{}^\mu + \varphi_2{}^\mu + \ldots + \varphi_m{}^\mu = \gamma_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Połóżmy:

$$(x - \varphi_1)(x - \varphi_2) \ldots (x - \varphi_m) = G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= x^m + g_1 x^{m-1} + g_2 x^{m-2} + \ldots + g_m$$

to z równań [T. I. art. 88.]

$$g_1 = -s_1,\ g_2 = -s_1 - s_1 g_1, \ldots\ m g_m = -s_m - s_{m-1} g_1 - \ldots - s_1 g_{m-1}$$

wypadają $g_1, g_2, \ldots, g_m$ w zwykłych szeregach potęgowych zawierających zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a znikających, gdy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Gdy zważymy, że w obszarze (A):

$$\frac{\partial G}{dx} / G = mx^{-1} + s_1 x^{-2} + s_2 x^{-3} + \ldots = mx^{-1} + \gamma_1 x^{-2} + \gamma_2 x^{-3} + \ldots$$

to relacyę (8) można będzie tak napisać:

$$(9)\qquad \left(\frac{\partial f}{dx} : f\right) = \left(\frac{\partial G}{\partial x} : G\right) + \mathfrak{P}_1(x, x_1, \ldots x_n).$$

Stąd przez całkowanie dostajemy:

$$(10)\qquad \log\ (f : CG) = \int \mathfrak{P}_1(x, x_1, \ldots, x_n) dx = \mathfrak{P}_0(x, x_1, \ldots, x_n).$$

C (stała całkowania) zależy tu tylko od $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a $\mathfrak{P}_0$ nie zawiera zato wyrazów wolnych od x. Połóżmyż:

$$\mathfrak{P}_0(x)=A_1(x_1...)x+A_2(x_1...)x^2+..., \text{ to widocznie:}$$

$$exp[\mathfrak{P}_0]=1+V_1(x_1...)x+V_2(x_1...)x^2+...=F_1(x, x_1,..., x_n)$$

posiada koniecznie wolny wyraz $=1$, a z równania (10) mamy:

$$(11) \qquad f=C.G.F_1.$$

Przyjmijmy, że $C=C(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest bez wolnego wyrazu. W takim razie z równania (11) dla $x_1=x_2=...=x_n=0$ mielibyśmy $a_m=0$, co się jednak sprzeciwia założeniu $|a_m|>0$. $C(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest więc szeregiem o wolnym wyrazie, a wskutek tego i iloczyn $CF_1=F$ będzie szeregiem posiadającym niezawodnie wolny wyraz $\neq 0$. Sam dany szereg będzie miał ostatecznie postać:

$$f(x, x_1, x_2, ..., x_n)=G(x, x_1, x_2, ..., x_n).\ F(x, x_1, x_2, ..., x_n).$$

Równanie to ostaje się identycznie w wspólnym zakresie wszystkich trzech szeregów f, G, F. W tym zakresie można będzie zawsze — po obraniu dostatecznie małej dodatniej ilości δ — wyznaczyć taki zakres:

$$(B) \qquad |x|<\delta, \quad |x_s|<\delta, \quad s=1,2,...,n,$$

że w nim szereg F — zawierający wolny wyraz $\neq 0$ — nigdzie zerem nie będzie.

Miejsca zerowe szeregu f, które mieszczą się poza zakresem (B), mogą już należeć do miejsc zerowych szeregu F. Ale te miejsca zerowe, które w (B) się znajdują, muszą być koniecznie miejscami zerowemi pierwszego czynnika $G(x, x_1, ..., x_n)$. Stąd twierdzenia:

I. *Gdy szereg potęgowy $f(x, x_1, ..., x_n)$ staje się dla:*

$$x=x_1=x_2=...=x_n=0, \quad a$$

$$f(x, 0, ..., 0)=a_m x^m+a_{m+1}x^{m+1}+..., \quad |a_m|>0,$$

to można zawsze wyznaczyć pewne dostatecznie małe otoczenie:

$$|x|<\delta, \quad |x_s|<\delta, \quad s=1,2,...,n,$$

miejsca $(0, 0, ..., 0)$ *takie, że w niem f da się przedstawić iloczynem $f=G.F$ o czynnikach posiadających takie własności:*

$$G=x^m+g_1x^{m-1}+...+g_m$$

jest wymierną, całkowitą funkcyą argumentu x stopnia m, a $g_1, g_2, ..., g_m$ są w niej zwykłymi szeregami potęgowymi pozostałych zmiennych i znikają wszystkie, gdy $x_1=x_2=...=x_n=0$.

F jest zwykłym szeregiem potęgowym wszystkich zmiennych, a w wspomnianem otoczeniu (B) nie staje się nigdzie zerem. Wszystkie miejsca zerowe szeregu f, mieszczące się w (B) są miejscami zerowemi funkcyi $G(x, x_1, ..., x_n)$ *).

*) To zasadnicze twierdzenie teoryi funkcyj analitycznych podał Weierstrass w rozprawie „Einige auf die Th. der analitischen Functionen mehrerer

II. *Miejsce* $(0, 0, \dots, 0)$ *można zawsze zamknąć takiem otoczeniem:*

(C) $\quad |x| < \varrho_1, \quad |x_s| < \varrho, \quad s = 1, 2, \dots, n,$

że dla wszystkich systemów wartości $x, x_1, \dots, x_n$ *wyjętych z tego zakresu będzie szereg* f *posiadał dokładnie* m *pierwiastków* x, *a wszystkie te pierwiastki będą pierwiastkami analitycznego równania* $G(x, x_1, \dots, x_n) = 0$. *[Zakres (C) mieści się w zakresie (B)]. W razie* $m = 1$, *mamy jeden tylko pierwiastek* x, *a ten będzie miał postać* $x = g_1(x_1, x_2 \dots x_n)$, *gdzie* g_1 *jest zwykłym szeregiem potęgowym.*

Gdy w otoczeniu (*B*) lub (*C*) będziemy $x_1, x_2, \dots, x_n$ w ciągły sposób zmieniali, to równocześnie będą się tam także $g_1, g_2, \dots, g_m$ w ciągły sposób zmieniały. Stąd — podobnie, jak w teoryi równań algebraicznych — wywnioskujemy że każdy pierwiastek x jest w obranych otoczeniach ciągłą funkcyą swoich argumentów $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Szereg f ma własność: $f(0, 0, \dots, 0) = 0$. Gdy więc $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ obierzemy nieskończenie małe, co można uczynić na nieskończenie wiele sposobów, to i wszystkie pierwiastki równania $G = 0$ będą również nieskończenie małe. Stąd wynika, że szereg f w pewnem dostatecznie małem otoczeniu $[\varkappa]$ miejsca $(0, 0, \dots, 0)$ — posiadając zawsze m pierwiastków x — ma miejsc zerowych nieskończenie dużo.

W szeregu f niech f_1 redukuje się do jednej zmiennej y. Wtedy mamy $f = (a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \dots) - y$, a szukanie pierwiastków x równania $f = 0$ w pewnem dostatecznie małem otoczeniu $|x| < \varrho_1$, $|y| < \varrho$ jest tu odwracaniem szeregu:

(a) $\quad y = \mathfrak{P}(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \dots, \quad |a_m| > 0, \ m > 0.$

Naznaczając odwrócenie x — jak przódy — przez $x(y)$, mamy twierdzenie:

III. *Szereg potęgowy zaczynający się od wyrazu* $a_m x^m$ *z wykładnikiem* $m > 1$ *daje m-wartościowe odwrócenie:* $x(y)$. *Wszystkie gałęzie tego odwrócenia są pierwiastkami pewnego analitycznego równania:*

$$G(x, y) = x^m + g_1(y) x^{m-1} + \dots + g_m(y) = 0.$$

o spółczynnikach $g_1, g_2, \dots, g_m$ *regularnych w punkcie* $y = 0$ *i jego otoczeniu, a znikających dla* $y = 0$.

Takie szeregi nazywamy wieloznacznie odwracalnymi. Oprócz m-wartościowości spowodowanej równaniem $G(x, y) = 0$

Veränderlichen sich beziehende Sätze" Abhandlungen str. 107... Dalsze w tym bieżącym Rozdziele zamieszczone badania zaczerpnięte są także z tej rozprawy i z pracy Dautheville'a *„Etude sur les séries..."* *Annales de l'école N. sup.* T. II. (Supp.) str. 3...

może się tu dołączyć jeszcze inna wielowartościowość skądinąd pochodząca.

Same pierwiastki równania $G(x, y)=0$ dadzą się bez rozwiązywania tego równania w ten sposób wyznaczyć: Z relacyj (a) mamy:

$$(b) \qquad y^{\frac{1}{m}}=x\sqrt[m]{a_m+a_{m+1}x+\ldots}=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots,$$

gdzie niezawodnie jest $|b_1|>0$, a $y^{\frac{1}{m}}$ jest m-wartościową wielkością. Szereg (b) przy każdej wartości $y^{\frac{1}{m}}$ da się już jednoznacznie odwrócić [art. poprzedz.]. Z jego odwrócenia dostajemy:

$$x==c_1y^{\frac{1}{m}}+c_2y^{\frac{2}{m}}+\ldots$$

a to rozwinięcie daje m pierwiastków równania $G(x, y)=0$ i przedstawia m-wartościowe odwrócenie szeregu (a). Stąd twierdzenie:

IV. *W szeregu $y=\mathfrak{P}(x)$ m-wartościowo odwracalnym jest jego argument x zwykłym szeregiem potęgowym, postępującym podług potęg (m-wartościowego) pierwiastka: $y^{\frac{1}{m}}$.*

Niech szereg $f(x, x_1, \ldots, x_n)$ mając punkt zerowy na miejscu $(0, 0, \ldots, 0)$ nie zawiera już wyrazów zależnych tylko od x. Napiszmy go w formie $f=(x, x_1, \ldots, x_n)_\mu+(x, x_1, \ldots, x_n)_{\mu+1}+\ldots$, gdzie $(x, x_1, \ldots, x_n)_\lambda$ oznacza jednorodną funkcyę λ^{go} stopnia zmiennych $x, x_1, \ldots, x_n$ i wprowadźmy tu nowe zmienne $y, y_1, y_2, \ldots, y_n$ za pomocą równań:

$$(12) \qquad \begin{aligned} x\, &=c_{00}y+c_{01}y_1+\ldots+c_{0n}y_n \\ x_1&=c_{01}y+c_{11}y_1+\ldots+c_{1n}y_n \\ &\vdots \quad\; \vdots \quad\;\; \vdots \quad +\ldots+ \\ x_n&=c_{n0}y+c_{n1}y_1+\ldots+c_{nn}y_n \end{aligned} \qquad \text{z warunkami:}$$

$$(\alpha) \qquad D_c=\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01}\ldots & c_{0n} \\ c_{10} & c_{11}\ldots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ c_{n0} & c_{n1}\ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (\beta) \quad (c_{00}\; c_{10}\ldots c_{n0})_\mu \neq 0.$$

Przez podstawienia (12) przejdzie szereg f na szereg:

$$\varphi(y, y_1, \ldots, y_n)=(c_{00}\; c_{10}\ldots c_{n0})_\mu y^\mu+(c_{00}\; c_{10}\ldots c_{n0})_{\mu+1}y^{\mu+1}+\ldots$$
$$-\varphi_1(y, y_1, \ldots, y_n),$$

w którym:

$$(c_{00}\; c_{10}\ldots c_{n0})_\mu y^\mu+\ldots=\varphi_0$$

już wskutek warunku (β) nie jest identycznie zerem, a φ_1 jest szeregiem bez wolnego wyrazu i ma własność $\varphi_1(y, 0, 0, \ldots, 0)=0$.

Szereg $\varphi=\varphi_0-\varphi_1$ jest zatem już takim, o jakim była mowa w tw. I. W pewnem dostatecznie małem otoczeniu:

(D') $\quad |y|<\delta', |y_1|<\delta', ..., |y_n|<\delta'$

będzie go można przedstawić iloczynem:

(13) $\quad \varphi=G_1(y, y_1, ..., y_n).F_1(y, y_1, ..., y_n),$ w którym

(14) $\quad G_1=y^\mu+\gamma_1 y^{\mu-1}+...+\gamma_\mu=0$

daje wszystkie miejsca zerowe szeregu φ w otoczeniu (D'), bo F_1 w tem otoczeniu nie jest nigdzie zerem.

Wskutek warunku (α) można będzie dalej szereg F_1 przerobić na funkcyę pierwotnych zmiennych $x, x_1, ..., x_n$. Przyjmijmyż, że to przerobienie daje identycznie: $F_1(y, y_1, ..., y_n)=F(x, x_1, ..., x_n)$, to w obszarze zmiennych $x, x_1, ..., x_n$ można będzie wyznaczyć takie otoczenie:

(D) $\quad |x|<\delta, |x_s|<\delta, \quad s=1, 2, ..., n.$

że w niem $F(x, x_1, ..., x_n)$ będzie wszędzie $\neq 0$. Rozwiążmyż równanie $G_1=0$, wstawiając w nie $y_1, y_2, ..., y_n$ wyjęte z zakresu (D') i uwzględnijmy tym sposobem otrzymane systemy:

(15) $\quad (y, y_1, ..., y_n)$

miejsc zerowych szeregu φ. Gdy za pomocą równań (12) wyszukamy systemom (15) odpowiadające systemy: $(x, x_1, ..., x_n)$, to w nich mieścić się muszą i wszystkie te miejsca zerowe szeregu f, które się w otoczeniu (D) znajdują.

Z twierdzeń I., II. skorzystamy w dwóch kierunkach, a mianowicie: 1°) w badaniu podzielności dwóch szeregów przez siebie, czem się zaraz zajmiemy, i 2°) w badaniu funkcyi algebraicznej, o czem mowa będzie w następującym Rozdziale.

52. Podzielność dwóch szeregów wielu zmiennych bez wolnych wyrazów. Z uwag ostatniego art. wynika, że szereg $f(x, x_1, ..., x_n)$ o własności $f(0, 0, ..., 0)=0$ bez względu jaka jest jego postać — posiada w pewnem otoczeniu $[k]$ miejsca $(0, 0, ..., 0)$ nieskończenie dużo miejsc zerowych.

Weźmy pod uwagę dwa takie szeregi:

$$f_1=(x, x_1, ..., x_n)_\mu+(x, x_1, ..., x_n)_{\mu+1}+...,$$
$$f_2=[x, x_1, ..., x_n]_\nu+[x, x_1, ..., x_n]_{\nu+1}+...,$$

gdzie $(x, x_1, ..., x_n)_\lambda$, $[x, x_1, ..., x_n]_\lambda$ oznaczają funkcye jednorodne stopni λ w zmiennych $x, x_1, ..., x_n$. Jeżeli jeden z nich nie zawiera wyrazów zależnych tylko od samego x, albo obydwa takich wyrazów nie mają, to kładąc:

(1) $\quad x=c_{00}y+...+c_{0n}y_n, \quad x_s=c_{s0}y+...+c_{sn}y_n, \quad s=1, 2, ..., n.$

z warunkami:

(2) $D_c \neq 0$, (3) $(c_{00}c_{10}\dots c_{n0})_\mu \neq 0$, $[c_{00}c_{10}\dots c_{n0}]_\nu \neq 0$,

przerobimy je na szeregi:

(4) $F_1(y, y_1, \dots, y_n)$, $F_2(y, y_1, \dots, y_n)$,

zawierające już wyrazy zależne od samego y, a dające się przedstawić przez iloczyny: $F_1 = G_1 S_1$, $F_2 = G_2 S_2$, w których

$$G_1 = y^\mu + g_1 y^{\mu-1} + \dots + g_\mu, \quad G_2 = y^\nu + h_1 y^{\nu-1} + \dots + h_\nu$$

określają nieskończenie wiele miejsc zerowych szeregów (4) w pewnem dostatecznie małem otoczeniu $[k']$ miejsca $(0, 0, \dots, 0)$, a S_1, S_2 są szeregami wszystkich zmiennych $y, y_1, \dots, y_n$ i nie znikają w tem otoczeniu.

Wspólne miejsca szeregów F_1, F_2 mieszczące się w $[k']$, będą to wspólne miejsca zerowe funkcyj G_1, G_2. Utwórzmyż — zakładając naprzód $n > 1$ — rugownik:

$$R(G_1, G_2) = H(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

to te systemy $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, które dają $H = 0$, spowodują wspólne pierwiastki równań $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, a więc i wspólne miejsca zerowe $(y, y_1, \dots, y_n)$ szeregów F_1, F_2. Szereg H jest szeregiem o dwóch przynajmniej zmiennych i nie ma wolnego wyrazu, bo musi między innemi wskazać także miejsca zerowe $(0, 0, \dots, 0)$ szeregów F_1, F_2. H ma więc nieskończenie wiele miejsc zerowych w pewnem najbliższem otoczeniu miejsca $(y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0)$. Stąd wynika, że szeregi F_1, F_2, a wskutek równań (1) i warunku (2) także i szeregi f_1, f_2 będą miały w pewnem otoczeniu $[k]$ miejsca

$$(y = y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0)$$

nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Wyjątek pod tym względem stanowią szeregi f_1, f_2, a więc i F_1, F_2 o dwóch tylko zmiennych x, x_1. Dla nich jest rugownik H szeregiem jednej tylko zmiennej y_1 z punktem zerowym $y_1 = 0$, a taki szereg w pewnem skończonem otoczeniu tego punktu już nigdzie nie jest zerem. Mamy więc twierdzenie:

I. *Dwa szeregi* f_1, f_2 *o* 3, 4, ... *zmiennych* $x, x_1, x_2, \dots, x_n$, *znikające, gdy* $x = x_1 = \dots = x_n = 0$, *mają w najbliższem otoczeniu punktu* $(0, 0, \dots, 0)$, *nieskończenie wiele miejsc zerowych wspólnych. Gdy przeciwnie ilość zmiennych jest* $= 2$, *to szeregi* $f_1(x, x_1)$, $f_2(x, x_1)$ *znikające gdy* $x = x_1 = 0$ *nie mają miejsc wspólnych zerowych w pewnem skończonem otoczeniu miejsca* $(0, 0)$.

Przypadek, w którym $R(G_1, G_2)$ znika identycznie, uwzględnimy później.

W Tomie I. [art. 170.] mówiąc o podzielności szeregu:

$$\mathfrak{P}_1(x_1 x_2 ... x_n) \text{ przez } \mathfrak{P}_2(x_1 x_2 ... x_n)$$

uwzględniliśmy tylko jeden przypadek, a to ten, w którym szereg $\mathfrak{P}_2$ posiadał wolny wyraz, a więc: $\mathfrak{P}_2(0, 0, ..., 0) \neq 0$. Wtedy można było zawsze wyznaczyć trzeci szereg $\mathfrak{P}_3(x_1 x_2 ... x_n)$ w ten sposób, że równanie:

$$(5) \qquad \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 . \mathfrak{P}_3$$

ostawało się identycznie w pewnym zakresie otaczającym miejsce $(0, 0, ..., 0)$. Szereg $\mathfrak{P}_3$ nazwaliśmy ilorazem wynikającym z dzielenia: $\mathfrak{P}_1 : \mathfrak{P}_2$.

Gdy założymy: $\mathfrak{P}_1(0, 0, ..., 0) \neq 0$, a $\mathfrak{P}_2(0, 0, ..., 0) = 0$, to już nie będzie można znaleść zwykłego szeregu $\mathfrak{P}_3$, spełniającego identycznie równanie (5). Szereg $\mathfrak{P}_1$ nie jest w tym razie podzielny przez $\mathfrak{P}_2$.

Pozostaje więc tylko do zbadania przypadek, w którym

$$(6) \qquad \mathfrak{P}_1 = (x_1 x_2 ... x_n)_\mu + ..., \quad \mathfrak{P}_2 = [x_1 x_2 ... x_n]_\nu + ...$$
$$\mu > 0, \ \nu > 0$$

a więc równocześnie znikają na miejscu $(0, 0 ..., 0)$.

Gdy szeregi $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ nie zawierają wyrazów zależnych tylko od jednej i tej samej zmiennej, to je przedewszystkiem przez podstawienia:

$$(7) \qquad x = c_{s1} t_1 + c_{s2} t_2 + ... + c_{sn} t_n, \quad s = 1, 2, 3, ... n.$$

z zatrzymaniem warunków:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} c_{11} \ c_{12} \ ... \ c_{1n} \\ c_{21} \ c_{22} \ ... \ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{n1} \ c_{n2} \ ... \ c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (9) \quad \begin{cases} (c_{11} \ e_{21} \ ... \ c_{n1})_\mu \neq 0 \\ [c_{11} \ c_{21} \ ... \ c_{n1}]_\nu \neq 0 \end{cases}$$

zmienimy na szeregi:

$$(10) \quad T_1 = G_1(t_1 t_2 ... t_n) . S_1(t_1 t_2 ... t_n), \quad T_2 = G_2(t_1 t_2 ... t_n) . S_2(t_1 t_2 ... t_n),$$

w których

$$G_1 = t_1^\mu + g_1 t_1^{\mu-1} + ... + g_\mu, \quad G_2 = t_1^\nu + h_1 t_1^{\nu-1} + ... + h_\nu,$$

a S_1, S_2 w pewnem wspólnem otoczeniu $[k]$ miejsca $(0, 0, ..., 0)$ nie są zerami.

Podzielność szeregu T_1 przez T_2 pociągnie za sobą i podzielność szeregu $\mathfrak{P}_1$ przez $\mathfrak{P}_2$.

W ilorazie:

$$(11) \qquad (T_1 : T_2) = (G_1 : G_2) . (S_1 : S_2)$$

da się $(S_1 : S_2)$ przedstawić zwykłym szeregiem potęgowym. Aby iloraz $(G_1 : G_2)$ zbadać, ograniczmy naprzód — jeżeli już tak nie jest — otoczenie $[k]$ w ten sposób, aby dla każdego systemu t_2, t_3, ..., t_n, wyjętego z tego otoczenia, równania $G_1 = 0$, $G_2 = 0$ miały pierwiastki:

$$t_1=\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\mu; \quad t_1=\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu,$$

wszystkie zawarte również w $[k]$. Iloraz:

$$(12) \qquad \frac{G_1}{G_2}=\frac{(t_1-\tau_1)(t_1-\tau_2)\ldots(t_1-\tau_\mu)}{(t_1-\sigma_1)(t_1-\sigma_2)\ldots(t_1-\sigma_\nu)}$$

ma być w $[k]$ wszędzie skończonym, a żeby tak było, trzeba, aby było $\mu \geqq \nu$ i aby G_1 jako funkcya samego t_1 podzielną była przez funkcyę G_2, uważaną również za funkcyę samej zmiennej t_1.

Dzieląc G_1 przez G_2 mamy:

$$\begin{aligned}&t_1^\mu+g_1t_1^{\mu-1}+\ldots+g_\mu=\\(13) \qquad &=(t_1^\nu+h_1t_1^{\nu-1}+\ldots+h_\nu)(t_1^{\mu-\nu}+k_1t_1^{\mu-\nu-1}+\ldots+k_{\mu-\nu})+\\&+(l_0t_1^{\nu-1}+l_1t_1^{\nu-2}+\ldots+l_{\nu-1}),\end{aligned}$$

gdzie k_α, l_α są — podobnie, jak g_α, h_α — szeregami potęgowymi zmiennych $t_2, t_3, \ldots, t_n$ o miejscu zerowem:

$$(\omega_1) \qquad (t_2=t_3=\ldots=t_n=0).$$

Z równania (13), które identycznie ma się sprawdzać, dostajemy przedewszystkiem:

$$\begin{aligned}g_1&=h_1+k_1\\g_2&=h_2+k_1h_1+k_2\\g_3&=h_3+k_1h_2+k_2h_1+k_3\\&\vdots \qquad \vdots\\g_{\mu-\nu}&=h_{\mu-\nu}+k_1h_{\mu-\nu-1}+\ldots+k_{\mu-\nu}.\end{aligned}$$

Z tych równań wynikają istotnie $k_1, k_2, \ldots, k_{\mu-\nu}$ w szeregach potęgowych znikających na miejscu (ω_1), a gdy je w dalsze relacye wynikające z identyczności (13) wstawimy, to dostaniemy:

$$(14) \qquad \begin{aligned}l_0&=g_{\mu-\nu+1}-(h_{\mu-\nu+1}+k_1h_{\mu-\nu}+\ldots+k_{\mu-\nu}.h_1)\\l_1&=g_{\mu-\nu+2}-(h_{\mu-\nu+2}+k_1h_{\mu-\nu+1}+\ldots+k_{\mu-\nu}.h_2)\\&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\l_{\nu-1}&=g_\mu-k_{\mu-\nu}.h_\nu\end{aligned}$$

znowu w postaciach zwykłych szeregów potęgowych znikających na miejscu (ω_1). Przyjmijmy, że identycznie:

$$(15) \qquad l_0=0,\ l_1=0,\ l_2=0,\ \ldots,\ l_{\nu-1}=0,$$

to wtedy z (13) dostajemy:

$$G_1 / G_2=t_1^{\mu-\nu}+k_1t_1^{\mu-\nu-1}+\ldots+k_{\mu-\nu},$$

co wskazuje, że w (11) jest także G_1 podzielne przez G_2 i że więc

$$(16) \qquad (T_1:T_2)=(t_1^{\mu-\nu}+k_1t_1^{\mu-\nu-1}+\ldots+k_{\mu-\nu}).(S_1:S_2)=T_3(t_1, t_2, \ldots t_n).$$

T_3 jest zwykłym szeregiem potęgowym, który, gdy $\mu>\nu$, znika na miejscu:

$$(\omega) \qquad (t_1=t_2=t_3=\ldots=t_n=0),$$

a jest na tem miejscu różny od zera, gdy $\mu=\nu$. Szereg T_1 jest więc podzielny przez T_2, gdy — przy $\mu\geqq\nu$ — spełniają się warunki (15), a ta podzielność przenosi się odrazu i na szeregi $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$. Mamy więc twierdzenie:

II. *Gdy z dwóch szeregów* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ *znikających na miejscu:*

$$(x_1=x_2=...=x_n=0),$$

a poczynających się odpowiednio stopniami μ, ν, *ma być pierwszy podzielny przez drugi, to musi się spełnić* $\nu+1$ *warunków, a to:*

$$(a)\quad \mu\geqq\nu;\qquad (b)\quad l_0=l_1=l_2=...=l_{\nu-1}=0.$$

Warunki (*b*) *mieszczą jednak w sobie znowu nieskończenie dużo warunków* [*znikanie wszystkich spółczynników prawych stron w* (14)], *które koniecznie spełnić się muszą.*

Jasnem jest, że tylko w razie podzielności szeregu T_1 przez T_2 dostaniemy z ilorazu (12), po dokonaniu wszystkich możliwych tam skróceń, iloczyn: $\Pi(t_1-\tau_\alpha)$, zawierający wyłącznie czynniki licznika G_1. W razie $\mu=\nu$ ma ten iloczyn stałą wartość $=1$. Iloraz $G_1:G_2$, a tem samem i iloraz $(T_1:T_2)$ charakteryzuje się wtedy — i tylko wtedy — tem, że w najbliższem otoczeniu [k] miejsca (ω) ma na wszystkich miejscach różnych od miejsc zerowych funkcyi G_2 albo wartość skończoną, albo dowolnie małą. Stąd — przenosząc to na szeregi $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ — mamy twierdzenie:

III. *Jeżeli w jakikolwiekbądź sposób można okazać, że iloraz:*

$$|\mathfrak{P}_1(x_1x_2...x_n)/\mathfrak{P}_2(x_1x_2...x_n)|,$$

w którym $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ *znikają na miejscu:* $(x_1=x_2=...=x_n=0)$, *pozostaje skończonym, albo mniejszym od każdej dowolnie małej dodatniej ilości w najbliższem otoczeniu tego miejsca we wszystkich punktach* $(x_1x_2...x_n)$ *dających* $\mathfrak{P}_2\neq0$ — *to wtedy* $\mathfrak{P}_1$ *jest podzielne przez* $\mathfrak{P}_2$.

Szereg T_2 — przy spełnionych już warunkach określonych w tw. II., lub III. — jest p o d z i e l n i k i e m szeregu T_1. Ale szereg T_1 posiada nieskończenie dużo podzielników. Zauważmy bowiem nieskończoną mnogość szeregów:

$$(17)\qquad T_2^{(\lambda)}=G_2.S_2^{(\lambda)},\quad \lambda=1,2,3,...$$

w których $S_2^{(\lambda)}$ są dowolnymi (oczywiście zbieżnymi) szeregami bez miejsca zerowego w (ω), to każdy ze szeregów $T_2^{(\lambda)}$ będzie — według (16) — także podzielnikiem szeregu T_1. Przedstawiając szeregi (17) w zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$, dojdziemy do nieskończenie dużo podzielników $\mathfrak{P}_2^{(\lambda)}(x_1x_2..., x_n)$ szeregu $\mathfrak{P}_1$.

53. Podzielniki dwóch szeregów w otoczeniu ich punktów zerowych. Zbadajmy teraz, pod jakimi warunkami dwa szeregi

$\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ określone w (6) — art. poprzedz. — a więc znikające na miejscu

$$(\bar{\omega}) \qquad (x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0),$$

dopuszczają wspólny podzielnik w formie zwykłego szeregu potęgowego $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ znikającego również na miejscu $(\bar{\omega})$?

Przeróbmy — jeżeli tego potrzeba — dane szeregi $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ na $T_1 = G_1 S_1$, $T_2 = G_2 S_2$ [art. poprzedz.], to, ponieważ S_1, S_2 są podzielne przez każdy szereg $T_3^{(\lambda)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $\lambda = 1, 2, 3, \dots$, o tej własności, że $T_3^{(\lambda)}(0, 0, \dots, 0) \neq 0$ jest, dość będzie postarać się o zwykły szereg potęgowy: $\tau(t_1, t_2, \dots, t_n)$, będący podzielnikiem i funkcyi G_1 i funkcyi G_2, a znikający na miejscu $(t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0) = (\omega)$. Iloczyny $\tau . T_3^{(\lambda)}$, $\lambda = 1. 2, 3, \dots$, będą wtedy wszystkie wspólnymi podzielnikami szeregów T_1, T_2, a będą znikać na miejscu (ω).

Istnienie wspólnego podzielnika τ wskaże rugownik:

$$R(G_1, G_2) \text{ identycznie } = 0,$$

a szukanie podzielnika τ o możliwie największym stopniu w zmiennej t_1 odbywać się będzie łańcuchowem dzieleniem, w którem G_1 G_2 i wszystkie dalsze funkcye uważać się będzie za funkcye samej jednej zmiennej t_1.

Żądane łańcuchowe dzielenie przedstawia się — gdy $\mu > \nu$ założymy — szeregiem takich identyczności:

$$G_1 = G_2 G_3 + G_4, \quad G_2 = G_4 G_5 + G_6, \quad G_4 = G_6 G_7 + G_8, \quad \dots.$$

W funkcyach G_5, G_6, G_7, ... są spółczynniki wymiernemi funkcyami szeregów potęgowych zawierających $t_2, t_3, \dots, t_n$, a znikających na miejscu $(t_2 = t_3 = \dots = t_n = 0) = (\omega_1)$.

Przyjmijmy, że ostatnią resztą — (niezależną już od t_1) — jest $G_{2\varrho+2}$. Gdy ta reszta okazuje się identycznie $= 0$, to ostatni dzielnik $G_{2\varrho}$ jest największym wspólnym podzielnikiem funkcyj G_1, G_2, uważanych za funkcye samej zmiennej t_1.

Gdy ten podzielnik, po sprowadzeniu jego spółczynników do wspólnego mianownika ma postać:

$$G_{2\varrho} = \frac{p_0 t_1^{\alpha} + p_1 t_1^{\alpha-1} + \dots + p_\alpha}{q(t_2 t_3 \dots t_n)},$$

to w nim $p_0, p_1, \dots, p_\alpha$ są już zwykłymi szeregami potęgowymi zmiennych $t_2, t_3, \dots, t_n$ i znikają na miejscu (ω_1).

Funkcye G_1, G_2, jako funkcye samej, jednej zmiennej t_1 posiadać będą także największy wspólny podzielnik:

$$\tau' = t_1^{\alpha} + \frac{p_1}{p_0} t_1^{\alpha-1} + \frac{p_2}{p_0} t_1^{\alpha-2} + \dots + \frac{p_\alpha}{p_0}.$$

Ten podzielnik ma być zerem w otoczeniu miejsca (ω) na wszystkich tych miejscach $(t_1 t_2 ... t_n)$, na których równocześnie $G_1=0$, $G_2=0$. Załóżmyż $t_2, t_3, ..., t_n$ nieskończenie małe, to równania $G_1=0$, $G_2=0$, $\tau'=0$ spełniają się współcześnie tylko dla t_1 nieskończenie małych. Ograniczmy dalej nieskończenie małe $t_2, t_3, ... t_n$ tak, aby dla nich było $p_0 \neq 0$, to równanie $\tau'=0$ posiadając i dla nich same nieskończenie małe pierwiastki t_1, musi mieć spółczynniki o bezwzględnych wartościach:

$$\left|\frac{p_1}{p_0}\right|, \left|\frac{p_2}{p_0}\right|, ..., \left|\frac{p_\alpha}{p_0}\right|$$

również nieskończenie małych. Z tego według tw. III. — [art. poprzedzający] — wynika, że szeregi $p_1, p_2, ..., p_\alpha$ są podzielne przez p_0. Ilorazy: $(p_s : p_0) = q_s(t_2, t_3, ..., t_n)$, $s=1, 2, ..., \alpha$, będąc zwykłymi już szeregami potęgowymi, muszą jednak jeszcze znikać na miejscu (ω_1). W przeciwnym razie równanie $\tau'=0$ po wprowadzeniu weń szeregów q_s jużby nie dawało samych nieskończenie małych pierwiastków t_1, co jest niemożliwe.

Funkcya τ' jest więc żądanym podzielnikiem:

$$\tau(t_1 t_2 ... t_n) = t_1^\alpha + q_1 t_1^{\alpha-1} + q_2 t_1^{\alpha-2} + ... + q_\alpha,$$

o możliwie największym stopniu w zmiennej t_1 i o własności:

$$\tau(0, 0, ..., 0) = 0.$$

Taki podzielnik nazwać tu można wspólnym podzielnikiem zasadniczym szeregów T_1, T_2. Przedstawiając

$$\tau(t_1, t_2, ..., t_n)$$

w zmiennych: $x_1, x_2, ..., x_n$, dochodzimy do zasadniczego podzielnika: $t(x, x_2, ..., x_n)$, $[t(0, 0, ..., 0)=0]$, danych szeregów $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$.

Z wszystkich tych uwag wynika:

I. *Warunek istnienia zasadniczego wspólnego podzielnika* $t(x_1 x_2 ... x_n)$ *danych szeregów* $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, *znikających, gdy* $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, *wyraża się — po przerobieniu szeregów na* $T_1 = G_1 S_1$, $T_2 = G_2 S_2$ *— identycznem równaniem: rugownik* $R(G_1, G_2) = 0$. *Szukanie takiego podzielnika odbywa się łańcuchowem dzieleniem, zaczynającem się od dzielenia* $G_1 : G_2$ *(w założeniu:* $\mu \geq \nu$*). Oprócz podzielnika* t *posiadają szeregi* $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ *jeszcze nieskończenie wiele wspólnych podzielników, a wszystkie one są podzielne przez* $t(x_1 x_2 ... x_n)$, *znikają zatem na miejscu* $(x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)$; *a po podzieleniu ich przez* t, *dają na ilorazy szeregi różne już od zera w punkcie:* $(x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)$.

Każdy podzielnik szeregów T_1, T_2, zawierający w sobie czynnik τ — a nawet samą funkcyę τ — można także nazwać największym ich wspólnym podzielnikiem, a to z następującej przyczyny: *)

Przyjmijmy, że, oprócz wspólnych podzielników podzielnych przez τ, posiadają szeregi T_1, T_2 jeszcze inne podzielniki, nie zawierające czynnika τ.

Takim jednym podzielnikiem niech będzie: $p = g.f$, gdzie g jest wymierną całkowitą funkcyą w zmiennej t_1, a f jest zwykłym szeregiem potęgowym, różnym od zera na miejscu (ω). Szereg f może być podzielnikiem i szeregu S_1 i szeregu S_2, ale nie może być podzielnikiem ani funkcyi G_1, ani funkcyi G_2, te ostatnie bowiem są złożone z samych liniowych czynników, które wszystkie $=0$ na miejscu (ω) — [por. (12), art. poprzedz.]. Połóżmyż:

$$G_1 = g\gamma_1, \quad G_2 = g\gamma_2,$$

to γ_1, γ_2 muszą być znowu funkcyami wymiernemi w zmiennej t_1, a zwykłymi szeregami potęgowymi w pozostałych zmiennych. Lecz dalej g musi być zawarte jako czynnik także i w $\tau(t_1, t_2, ..., t_n)$, bo to jest funkcya najwyższego stopnia w zmiennej t_1, zawierająca się w G_1, G_2. Z tego wynika, że p jest podzielnikiem każdego z podzielników: $\tau(t_1 t_2 ... t_n) T_3^{(\lambda)}(t_1 t_2 ... t_n)$, $T_3^{(\lambda)}(0, 0, ..., 0) \neq 0$, $\lambda = 1, 2, 3, ...$, — a przenosząc to na szeregi $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, mamy twierdzenie:

II. *Każdy szereg, przez który dają się podzielić dane szeregi $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, jest podzielnikiem każdego z szeregów:*

$$(c) \quad t(x_1 x_2 ... x_n) \mathfrak{P}_3^{(\lambda)}(x_1 x_2 ... x_n), \quad [\mathfrak{P}_3^{(\lambda)}(0, 0, ..., 0) \neq 0], \quad \lambda = 1, 2, 3, ...$$

a także i samego podzielnika $t(x_1 x_2 ... x_n)$. Z tej-to przyczyny można każdy z podzielników (c) nazwać największym wspólnym podzielnikiem danych szeregów. (Gdy z (c) wyjmiemy dwa różne szeregi, to każdy z nich będzie podzielnikiem drugiego).

Na podstawie przeprowadzonych dotąd poszukiwań, łatwo będzie dowieść jeszcze takich twierdzeń:

III. *Gdy szereg $\mathfrak{P}_0$ podzielny jest i przez $\mathfrak{P}_1$ i przez $\mathfrak{P}_2$, a te dwa ostatnie szeregi nic posiadają wcale wspólnego podzielnika, to szereg $\mathfrak{P}_0$ podzielny jest przez iloczyn $\mathfrak{P}_1 . \mathfrak{P}_2$.*

IV. *Gdy szereg $\mathfrak{P}_0$ podzielny jest przez $\mathfrak{P}_1$ i przez $\mathfrak{P}_2$, a $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ mają największy wspólny podzielnik $\mathfrak{P}_3$, to szereg $\mathfrak{P}_0$ jest podzielny przez* $(\mathfrak{P}_1 . \mathfrak{P}_2) / \mathfrak{P}_3$.

*) W dalszym ciągu nie będziemy — mówiąc o podzielniku szeregów — wspominać każdym razem o tych jego własnościach, że ma to być zawsze zwykły szereg potęgowy zmiennych $(t_1, t_2, ..., t_n)$ lub zmiennych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ i ma być zerem już-to na miejscu $(t_1 = t_2 = ... = t_n = 0)$, już-to na miejscu $(x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)$. Szeregi, o których będzie mowa, są również $=0$ na tych miejscach.

54. O punkcie nieistotnie osobliwym funkcyi wielu zmiennych. Gdy dwa szeregi $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, znikające na miejscu:

$$(\omega)=(x_1=x_2=...=x_n=0)$$

podzielimy przez ich największy (n. p. przez zasadniczy) wspólny podzielnik $t(x_1x_2...x_n)$, to ilorazy:

$$(1) \qquad (\mathfrak{P}_1:t)=\mathfrak{P}_{01}, \quad (\mathfrak{P}_2:t)=\mathfrak{P}_{02}$$

nie posiadają już żadnego wspólnego czynnika (w formie szeregu potęgowego, znikającego na miejscu (ω)) — są względem siebie pierwsze, a na samem miejscu (ω) mogą albo:

1⁰) być obydwa różne od zera, albo

2⁰) jeden z nich n. p. szereg $\mathfrak{P}_{01}$ może tam być zerem, a drugi $\mathfrak{P}_{02}$ być różnym od zera, albo wreszcie

3⁰) obydwa szeregi są tam równocześnie zerami.

W pierwszym wypadku obydwa ilorazy:

$$(a) \qquad \mathfrak{P}_{01}:\mathfrak{P}_{02}, \quad \mathfrak{P}_{02}:\mathfrak{P}_{01}$$

są na miejscu (ω) różne od zera i skończone; w otoczeniu tego miejsca są regularne i dają się obydwa rozwinąć na szeregi potęgowe, nie znikające na miejscu (ω).

W drugim razie iloraz:

$$(b) \qquad \mathfrak{P}_{01}:\mathfrak{P}_{02}$$

będzie na miejscu (ω) zerem, w otoczeniu togo miejsca będzie regularnym, da się więc rozwinąć na szereg potęgowy zwykły o miejscu zerowem (ω). Przeciwnie iloraz:

$$(c) \qquad \mathfrak{P}_{02}:\mathfrak{P}_{01}$$

będzie na miejscu (ω) nieskończonością, a także i na nieskończenie wielu miejscach w najbliższem otoczeniu tego miejsca będzie miał wartość nieskończoną [art. 51]. Taki iloraz nie da się w żaden sposób przedstawić zwykłym szeregiem potęgowym zbieżnym w otoczeniu miejsca (ω).

W trzecim wypadku sprowadzimy — jeśli tego potrzeba — obydwa szeregi do postaci: $T_{01}=G_{01}S_1$, $T_{02}=G_{02}S_2$, w których, jak w art. poprzedzających, są G_{01}, G_{02} szeregami potęgowymi nowych zmiennych $t_1, t_2, ..., t_n$, znikają na miejscu:

$$(\omega)=(t_1=t_2=...=t_n=0),$$

a zmienną t_1 zawierają tylko w skończonych stopniach. S_1, S_2 są również szeregami tych nowych zmiennych, a na miejscu (ω) nie są zerami.

Funkcye G_{01}, G_{02} są już względem siebie pierwsze; ich rugownik $R(G_{01}, G_{02})$ nie jest identycznie $=0$. Gdy $n=2$ daje równanie

$R=0$ pierwiastek $t_2=0$, który wraz z $t_1=0$ tworzy miejsce zerowe $(t_1=t_2=0)$, wspólne szeregom T_{01}, T_{02}. Potem w skończonem już otoczeniu tego miejsca nie mamy $R=0$, nie mamy więc i wspólnych miejsc zerowych szeregów T_{01}, T_{02}. W najbliższem jednak otoczeniu miejsca $(t_1=t_2=0)$ mamy nieskończenie wiele punktów, na których $T_{01}=0$, $T_{02}\neq 0$, lub $T_{01}\neq 0$, $T_{02}=0$.

W założeniu $n>2$, posiada równanie $R=0$ w najbliższem otoczeniu miejsca $(\omega_1)=(t_2=t_3=...=t_n=0)$ nieskończenie wiele miejsc zerowych, a każde z nich daje początek wspólnemu miejscu zerowemu (w otoczeniu miejsca (ω)) samych szeregów T_{01}, T_{02}. W tem otoczeniu znajdą się jednak znowu miejsca — i to w nieskończonej ilości — na których już-to:

$$T_{01}=0 \quad \text{przy} \quad T_{02}\neq 0,$$

już-to wreszcie:

$$T_{01}\neq 0 \quad \text{przy} \quad T_{02}=0.$$

W rozważanem otoczeniu zbliża się zatem iloraz:

(2) $\qquad T_{01}:T_{02}$, (i jego odwrotność $T_{02}:T_{01}$)

dowolnie już-to do wartości $=0$, już-to do wartości $=\infty$.

Zauważmy, oprócz (2), jeszcze iloraz:

$$(3) \qquad \frac{1}{(T_{01}:T_{02})-A}=\frac{T_{02}}{T_{01}-A\,.\,T_{02}},$$

w którym A ma być dowolną stałą.

Szeregi T_{02}, $T_{01}-AT_{02}$ nie mają również wspólnego podzielnika. Iloraz (3) będzie więc również w dowolnie małem otoczeniu miejsca (ω) zbliżał się na nieskończenie wielu miejscach do wartości ∞. Stąd wynika, że sam iloraz (2) będzie się na tych miejscach dowolnie zbliżał do wartości A.

Te własności przenoszą się na iloraz:

(d) $\qquad \mathfrak{P}_{01}:\mathfrak{P}_{02}$, lub $\mathfrak{P}_{02}:\mathfrak{P}_{01}$,

a z tego wnosimy, że w trzecim wypadku ilorazy (d) — bez różnicy, czy $n=2$, czy też $n>2$, są w samym punkcie $(\bar{\omega})$ i jego najbliższem otoczeniu zupełnie nieoznaczone, to zn. przybliżają się tam dowolnie do każdej dowolnie obranej wartości A, bez wykluczenia wypadków $A=0$, $|A|=\infty$.

Już w Tomie I. [art. 208.] określiliśmy punkt $(a_1, a_2, ..., a_n)=(a)$ jako nieistotnie osobliwy pewnej analitycznej funkcyi $f(x_1 x_2 ... x_n)$ w ten sposób: J e ż e l i f u n k c y a $f(x_1 x_2 ... x_n)$ n i e d a j e s i ę w o t o c z e n i u p u n k t u (a) r o z w i n ą ć n a z w y k ł y s z e r e g p o t ę g o w y o a r g u m e n t a c h x_1-a_1, x_2-a_2, ..., x_n-a_n, z b i e ż n y w pewnem otoczeniu punktu (a) ale mimo to da się wynaleźć pewien zbieżny szereg $\mathfrak{P}_2(x_1-a_1,...,x_n-a_n)$ o tej własności, że $\mathfrak{P}_2(0,0,...,0)=0$ i że iloczyn

(4) $\mathfrak{P}_2(x_1-a_1,...,x_n-a_n).f(x_1x_2...x_n)$ jest już $=\mathfrak{P}_1(x_1-a_1,...,x_n-a_n)$,

okazuje się więc regularnym w pewnem otoczeniu punktu (a) i w samym punkcie (a), to taki punkt (a) jest nieistotnie osobliwym funkcyi analitycznej $f(x_1x_2...x_n)$ *). [W razie $a_s=\infty$ ma x_s-a_s znaczenie: $1/x_s$]. Jeżeli przeciwnie niepodobna znaleźć szeregu:

$$\mathfrak{P}_2(x_1-a_1,...,x_n-a_n)$$

spełniającego równanie (4), to punkt (a) nazwiemy istotnie osobliwym funkcyi $f(x_1x_2...x_n)$.

Z tej definicyi wynikło odrazu [T. I. art. 208.], że punkta osobliwe funkcyi wymiernej całkowitej lub ułamkowej muszą być wyłącznie punktami nieistotnie osobliwymi.

Ale poszukiwania, jakie przeprowadziliśmy tu w tym bieżącym Rozdziale o dzieleniu dwóch zwykłych szeregów przez siebie dozwolą dokładnie określić zachowanie się jakiejkolwiek funkcyi analitycznej $f(x_1x_2...x_n)$ w jej punkcie nieistotnie osobliwym. Z równania (4) wynika:

(5) $f(x_1x_2...x_n)=\mathfrak{P}_1(x_1-a_1,...,x_n-a_n):\mathfrak{P}_2(x_1-a_1,...,x_n-a_n)$.

Tu możliwem jest, że szereg $\mathfrak{P}_1(x_1-a_1,...,x_n-a_n)$ jest zerem na miejscu (a), a jeżeli wtedy przyjmiemy, że szeregi $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ posiadają największy wspólny (zasadniczy) podzielnik $t(x_1-a_1,...,x_n-a_n)$, znikający na tem miejscu, to po jego wydaleniu z licznika i mianownika w (5) dostaniemy funkcyę f w otoczeniu miejsca (a) w postaci:

(6) $f(x_1x_2...x_n)=\mathfrak{P}_{01}(x_1-a_1,...,x_n-a_n):\mathfrak{P}_{02}(x_1-a_1,...,x_n-a_n)$,

w której $\mathfrak{P}_{01}$, $\mathfrak{P}_{02}$ są już szeregami względem siebie pierwszymi, [t. j. bez wspólnego czynnika znikającego na miejscu (a)].

Lecz i po tych skróceniach nie może być na miejscu (a), $\mathfrak{P}_{02}\neq 0$, bo w takim razie dałaby się funkcya f przedstawić zwykłym szeregiem potęgowym o argumentach (x_s-a_s), a to się sprzeciwia definicyi punktu osobliwego.

Na miejscu (a) jest więc zawsze $\mathfrak{P}_{02}=0$, a iloraz (6) należy albo do kategoryi ilorazów (c), albo do kategoryi ilorazów (d). Z tego wynika:

---

*) Por. także Autonne. *Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indenpendantes* C. R. T. 124. str. 139—142.

I. *W punkcie nieistotnie osobliwym (a) daje się funkcya analityczna przedstawić zawsze ilorazem dwóch szeregów potęgowych o mianowniku znikającym koniecznie na tym punkcie. Jej zachowanie się w tym punkcie może być dwojakie, a to: albo jest w nim nieskończonością i nieskończonością się staje także na nieskończenie wielu punktach otaczających punkt (a), albo też jest w samym punkcie (a) i w jego otoczeniu zupełnie nieoznaczoną.*

ROZDZIAŁ VI.

Rozwiązywanie równania algebraicznego. Funkcye algebraiczne.

55. Otoczenie zwyczajnego miejsca w obrazie algebraicznym. Punktem wyjścia dalszych naszych poszukiwań w teoryi funkcyi będzie nieprzywiedlne [T. I. art. 82.] równanie algebraiczne:

(1) $$f(x, y)=0$$

n^{go} stopnia w zmiennej y. Przy każdej dowolnej wartości $x=a$ da równanie (1) dokładnie n pierwiastków $y=y_1, y_2, ..., y_n$, choć z nich niektóre dla szczególnych wartości a mogą być nieskończonymi. Z tego wynika, że miejsc (x, y) spełniających równanie $f(x, y)=0$ jest nieskończenie dużo.

Całkowity zbiór takich miejsc nazywamy obrazem albo utworem algebraicznym.

Miejsce (a, b) dające $f(a, b)=0$ nazywa się miejscem tego obrazu.

Załóżmy a, b skończone i połóżmy $x=a+\xi$, gdzie $|\xi|$ ma być mniejsze od dowolnie małej obranej dodatnej ilości δ. Wtedy między pierwiastkami równania $f(a+\xi, y)=0$ znajdzie się jeden: $y=b+\eta$ nieskończenie mało różniący się od b.

Można przytem oznaczyć pewną nieskończenie małą, dodatną ilość δ_1 w ten sposób, że przy każdem ξ o bezwzględnej wartości $|\xi|<\delta$ będzie miało równanie:

(2) $f(a+\xi, b+\eta)=0$, zawsze jeden pierwiastek η o bezwzględnej wartości $|\eta|<\delta_1$, [T. I. art. 74.].

Mając to na wzgędzie, dochodzimy do określenia: *Wszystkie pary wartości* $(x=a+\xi, y=b+\eta)$, $[f(a, b)=0]$ *o nieskończenie małych dodatkach* ξ, η, *spełniających równanie* (2) *tworzą otoczenie miejsca* (a, b) *obrazu algebraicznego:* $f(x, y)=0$.

Uporządkujmy równanie (2) podług zmiennych ξ, η. Wskutek $f(a, b)=0$ będzie ono miało postać:

(3) $$f(x, y)=(\xi\,\eta)_1+(\xi\,\eta)_2+\dots+(\xi\,\eta)_n=0,$$

gdzie $(\xi\,\eta)_\lambda$ mają znaczenie jednorodnych funkcyj zmiennych ξ, η stopnia λ^{go}.

Załóżmy naprzód, że $(\xi\,\eta)_1=A\xi+B\eta$ nie jest identycznie zerem, a więc miejsce (a, b) jest takiem, że na niem przynajmniej jedna z pochodnych cząstkowych:

$$A=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,\,b}, \quad B=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,\,b}$$

jest różną od zera. Taki punkt (a, b) nazywamy zwyczajnym, albo nieosobliwym danego obrazu algebraicznego.

Przyjmijmy $B \neq 0$. Równanie (3) można wtedy napisać w postaci:

(4) $$B\eta+B_1\eta^2+\dots+f_1(\xi, \eta)=0,$$

gdzie w $f_1(\xi, \eta)$ nie ma ani jednego wyrazu niezawierającego zmiennej ξ. Podług tw. II. art. 51. ma równanie (4) jeden tylko (nieskończenie mały) pierwiastek η przy nieskończenie małych ξ, a ten wyraża się zwykłym szeregiem potęgowym $\varphi_2(\xi)$ nie posiadającym wolnego wyrazu. Dostajemy więc w tym razie $\eta=\varphi_2(\xi)$, albo — wracając do samego równania $f=0$ —

(a) $$y-b=\varphi_2(x-a).$$

Ten szereg nazywa się elementem obrazu algebraicznego dla otoczenia miejsca (a, b).

Połóżmy $\xi=x-a=t$ to mieć będziemy:

(a') $$x=a+t, \quad y=b+\varphi_2(t)$$

a ta „para funkcyj" — przy dostatecznie małych t — określa tu znowu całkowite otoczenie rozważanego miejsca (a, b).

Przyjmijmy, że w równaniu (3) lub (4) mamy między wyrazami zależnymi od samego ξ najniższą potęgę ξ^β. W takim razie równanie $f=0$ ma, gdy $y=b$, dokładnie β pierwiastków $x=a$, (znowu podług tw. II. art. 51]. To samo powinno wynikać z (a), a to się spełni, gdy się szereg $\varphi_2(x-a)$ zaczynać będzie od potęgi $(x-a)^\beta$, a więc szereg $\varphi_2(t)$ od potęgi t^β. Mamy więc wyraźnie:

(a'') $$x=a+t, \quad y=b+b_1t^\beta+b_2t^{\beta+1}+\dots,$$

gdzie $\beta=1$, gdy $A\neq 0$, a $\beta=\mu>1$ gdy $A=0$, oprócz tego jeszcze

(5) $$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{ab}=0,\dots,\left(\frac{\partial^{\mu-1} f}{\partial x^{\mu-1}}\right)_{ab}=0, \text{ a już } \left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right)_{ab}\neq 0.$$

Gdy $A \neq 0$, to równanie $f=0$ można analogicznym sposobem rozwiązać ze względu na x. Dostaniemy więc:

(b) $\quad x-a=\varphi_1(y-b)$, albo:

(b') $\quad y=b+t,\ x=a+a_1 t^{\alpha}+a_2 t^{\alpha+1}+\dots$

gdzie $\alpha=1$, jeżeli $B\neq 0$, $\alpha=\nu>1$, gdy oprócz $B=0$ jeszcze:

$$(6)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{ab}=0,\dots,\ \left(\frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial y^{\nu-1}}\right)_{ab}=0,\ \text{a już}\ \left(\frac{\partial^{\nu} f}{\partial y^{\nu}}\right)_{ab}\neq 0.$$

W razie $A\neq 0$, $B\neq 0$ mamy $\alpha=\beta=1$ a szereg (b) jest odwróniem szeregu (a), szereg zaś (a) odwróceniem szeregu (b); oba szeregi zaczynają się od wyrazów stopnia pierwszego.

Gdy $B\neq 0$, $A=0$, a przyjmiemy w (a) $\beta=\mu$, dostajemy już wieloznaczne odwrócenie:

$$(a_1)\qquad (x-a)=\mathfrak{P}_2\left((y-b)^{\frac{1}{\mu}}\right)$$

Położmy tu $y-b=\tau^{\mu}$, to to odwrócenie da się taką parą funkcyj przedstawić:

(a_2) $\quad y=b+\tau^{\mu},\ x=a+\mathfrak{P}_1(\tau)$.

Analogicznie, gdy $A\neq 0$, $B=0$, a przyjmiejmy w (b) $\alpha=\nu$, mieć będziemy:

(b_1) $\quad y=b=\mathfrak{P}_2\left((x-a)^{\frac{1}{\mu}}\right)$ albo

(b_2) $\quad x=a+\tau^{\nu},\ y=b+\mathfrak{P}_2(\tau)$.

Z tych uwag wynika:

I. *W otoczeniu zwyczajnego miejsca (a, b) o skończonych a, b okazuje się przynajmniej jedna ze zmiennych x, y jednoznaczną i regularną funkcyą (zwykłym szeregiem potęgowym) zmiennej drugiej, a jedna tylko para funkcyj wystarcza, aby otoczenie takiego miejsca przedstawić całkowicie.*

Lecz parom funkcyj na miejscu (a, b) możemy nadać jeszcze ogólniejsze formy. Położmy:

$$A\xi+B\eta=s$$
$$\alpha\xi+\beta\eta=t.$$

gdzie α, β są dwie dowolnie wybrane stałe ilości dające wraz z A, B wyznacznik:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} A & B \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}\neq 0.$$

Przez te podstawienia przejdzie równanie:

$$(\xi\,\eta)_1+(\xi\,\eta)_2+\dots+(\xi\,\eta)_n=0 \quad \text{na} \quad s+(s\,t)_2+(s\,t)_3+\dots=0.$$

Z niego dla nieskończenie małych wartości t dostaniemy jeden tylko pierwiastek s, a ten [art. 51. tw. II.] wyrazi się zwykłym szeregiem potęgowym argumentu t. Połóżmyż $s=\psi(t)$, to z równań:

$$A\xi+B\eta=\psi(t), \quad \alpha\xi+\beta\eta=t$$

obliczone ξ, η, [co jest możliwe wskutek (7)], będą postaci:

$$\xi=\varphi_1(t), \quad \eta=\varphi_2(t).$$

$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ są tu znowu zwykłymi szeregami potęgowymi argumentu t. Przechodząc do pierwotnych zmiennych x, y, dostajemy

$$(c) \qquad x=a+\varphi_1(t), \quad y=b+\varphi_2(t).$$

Chcąc stąd wyrazić y przez x, albo x przez y, mamy podług tw. I. dostać przynajmniej jedną z tych zmiennych w zwykłym szeregu potęgowym zmiennej drugiej. Z szeregów φ_1, φ_2 musi się więc jeden przynajmniej zaczynać od wyrazu ct^{+1}. a to zn.:

II. *Otoczenie miejsca (a, b) o własnościach określonych w tw. I. przedstawić można parą funkcyj $x=a+\varphi_1(t)$, $y=b+\varphi_2(t)$, gdzie $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ są zwykłymi szeregami potęgowymi bez wolnych wyrazów, a jeden z nich przynajmniej zaczyna się od pierwszej potęgi pośredniczącej zmiennej t.*

W wyprowadzaniu pary funkcyj (c) mamy bardzo wielką dowolność w wyborze stałych α, β, bo one tylko warunkowi (7) zadość czynić muszą. Wybrawszy te stałe inaczej otrzymamy parę funkcyj:

$$(d) \qquad x=a+\psi_1(\tau), \quad y=b+\psi_2(\tau)$$

określającą znowu otoczenie tego samego miejsca (a, b) w tym samym obrazie algebraicznym $f(x, y)=0$.

Koniecznem przy tem jest, aby się funkcye (φ_1, ψ_1) od jednakowego, a funkcye (φ_2, ψ_2) znowu od jednakowego wykładnika zaczynały, ale jeden z tych wykładników musi być $=1$.

Już z wielkiej dowolności stałych α, β wnosimy, że postaci pary funkcyj dających otoczenie tego samego miejsca (a, b) w jednym obrazie algebraicznym jest nieskończenie dużo. Nie troszczmyż się teraz o sposoby wyprowadzania takich par i przyjmijmy, że para (c) jest już — jak wyżej — otoczeniem miejsca (a, b) obrazu $f(x\ y)=0$, a szukajmy koniecznych i dostatecznych warunków na to, aby druga jakaś para (∂) miała takie samo znaczenie w tym samym obrazie $f(x, y)=0$.

Przedewszystkiem muszą się i tu funkcye (φ_1, ψ_1) zaczynać od jednakowego, a funkcye (φ_2, ψ_2) znowu od jednakowego wykładnika, a jeden z tych wykładników musi być $=1$.

Wybierzmy parę zaczynającą się od wykładnika $=1$. Niech nią będzie:

$$\varphi_1=a_1t+a_2t^2+..., \quad \psi_1=\alpha_1\tau+\alpha_2\tau^2+..., \text{ gdzie } |a_1|>0, \ |\alpha_1|>0.$$

Odnosząc t i τ do tych samych miejsc x dostajemy:

(8) $$a_1 t + a_2 t^2 + ... = \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + ...$$

a z tego równania mamy (art. 50.):

(α) $$t = \mathfrak{P}_1(\tau) = c_1\tau + c_2\tau^2 + ..., \quad |c_1| > 0, \quad \text{i}$$

(β) $$\tau = \mathfrak{P}_2(t) = d_1 t + d_2 t^2 + ..., \quad |d_1| > 0.$$

[Spółczynniki c_1, d_1 są różne od zera, ponieważ w równaniu (8) mamy dla $t=0$ jeden tylko pierwiastek $\tau=0$ i naodwrót].

Funkcya $\varphi_1(t)$ przechodzi więc na $\psi_1(\tau)$ za podstawieniem (α), a jeżeli $\psi_2(\tau)$ razem z $\psi_1(\tau)$ ma być parą o tem samem znaczeniu, co φ_1, φ_2, to i $\varphi_2(t)$ musi za tem samem podstawieniem (α) przejść na $\psi_2(\tau)$.

Naodwrót z pary ψ_1, ψ_2 przejdziemy do φ_1, φ_2 za odwrotnem podstawieniem (β).

Do wyprowadzenia podstawień (α), (β), za pomocą których da się przejść z jednej pary funkcyj do drugiej, można użyć i tych funkcyj (φ_2, ψ_2), które się równocześnie zaczynają od wykładnika $\mu > 1$. Połóżmyż:

$$y - b = b_1 t^\mu + b_2 t^{\mu+1} + ... = \varphi_2(t)$$
$$y - b = \beta_1 \tau^\mu + \beta_2 \tau^{\mu+1} + ... = \psi_2(\tau),$$

to stąd mamy:

(γ) $$\sqrt[\mu]{y-b} = A_1 t + A_2 t^2 + ..., \quad |A_1| > 0,$$

(δ) $$\sqrt[\mu]{y-b} = B_1 \tau + B_2 \tau^2 + ..., \quad |B_1| > 0.$$

Odnosząc tu t, τ do tej samej wartości zmiennej y i do tej samej wartości pierwiastka $\sqrt[\mu]{y-b}$, dostajemy:

$$A_1 t + A_2 t^2 + ... = B_1 \tau + B_2 \tau^2 + ...,$$

a rozwiązaniem tego równania będzie już-to podstawienie formy (α) już-to podstawienie formy (β).

Przyjmijmy teraz, że mamy daną jedną tylko parę (c) otaczającą miejsce (a, b) i połóżmy w niej:

(ε) $$t = c_1 \tau + c_2 \tau^2 + ...,$$

gdzie szereg po prawej stronie jest dowolny, ale ma początkowy spółczynnik $c_1 \neq 0$ i jest zbieżny przy małych wartościach argumentu τ.

Podstawiając w φ_1 szereg (ε) dostaniemy stąd: $x = a + \psi_1(\tau)$. Odpowiadające takim x wartości zmiennej y otrzymamy, gdy znowu szereg (ε) w funkcyą $\varphi_2(t)$ za t wstawimy. Mieć więc będziemy $y = b + \psi_2(\tau)$, czem przejście z danej pary (c) do innej określającej również otoczenie miejsca (a, b) tego samego obrazu algebraicznego już uskuteczniono. Z (ε) wynika: $\tau = d_1 t + d_2 t^2 + \ldots$, $|d_1| > 0$, co znowu umożliwia powrót do pierwotnej pary funkcyj. Z uwag tych wynika:

IV. *Gdy dwie dane są pary funkcyj:*

$$[x = a + \varphi_1(t),\ y = b + \varphi_2(t)],\quad [x = a + \psi_1(\tau),\ y = b + \psi_2(\tau)],$$

otaczające jedno nieosobliwe miejsce (a, b) *tego samego obrazu algebraicznego, to drugą parę otrzymuje się z pierwszej przez podstawienie postaci:* $t = c_1\tau + c_2\tau^2 + \ldots$, $|c_1| > 0$, *a pierwszą z drugiej przez odwrócenie tego podstawienia. Naodwrót przez najdowolniejsze takie podstawienie powstają pary funkcyj, które mają to samo znaczenie, co dana para.*

Z praktycznych względów podamy tu metodę, za pomocą której można będzie bez trudności obliczyć dowolnie wiele początkowych spółczynników w żądanej parze funkcyj.

Gdy, jak przódy, położymy: $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, a w równaniu;

$$(\xi\eta)_1 + (\xi\eta)_2 + \ldots = 0$$

sumę wyrazów $[(\xi\eta)_2 + (\xi\eta)_3 + \ldots]$ nazwiemy $-U(\xi, \eta)$, to mieć będziemy:

$$(A)\qquad A\xi + B\eta = U(\xi, \eta).$$

Przyjmijmy naprzód: $A \neq 0$, $B \neq 0$; dobierzmy — jak przódy — dwie dowolne stałe ilości α, β spełniające warunek: $r = A\beta - B\alpha \neq 0$ i połóżmy:

$$(B)\qquad \alpha\xi + \beta\eta = t,$$

to z równań (A), (B) dostajemy:

$$(C)\qquad \xi = -\frac{B}{r}t + \frac{\beta}{r}U(\xi, \eta),\qquad \eta = \frac{A}{r}t - \frac{\alpha}{r}U(\xi, \eta).$$

Niech co do formy będzie:

$$(D)\qquad \begin{aligned} \xi &= \varphi_1(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots \\ \eta &= \varphi_2(t) = b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots \end{aligned}$$

gdzie w tych rozwinięciach wskutek A, B różnych od zera jest niezawodnie $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$.

Pomyślmy sobie rozwinięcie (D) już znane i wstawione po obu stronach w (C). Związki (C) przechodzą wtedy na identyczności, a z nich odrazu wynika:

$$a_1 = -B/r,\quad b_1 = A/r,$$

gdyż $U(\xi, \eta)$ zawierając ξ, η w najniższym wymiarze $=2$, nie da już wyrazu z potęgą t^1. W (C) dostajemy więc z $U(\xi, \eta)$ już same wyższe potęgi argumentu t, z wykluczeniem potęgi t^1. Aby z tych identyczności obliczyć wyrazy bezpośrednio następujące po $a_1 t, b_1 t$ dostatecznem jest tam w $U(\xi\eta)$ podstawić za ξ, η tylko początkowe, znalezione już wyrazy $a_1 t$, $b_1 t$, a potem z $U(a_1 t, b_1 t)$ zatrzymać tylko wyraz: $A_2 t^2 = U(a_1 t, b_1 t)_2$, albo — jeżeli ten wyraz ma spółczynnik $A_2 = 0$ — pierwszy nieznikający wyraz: $A_\varrho t^\varrho = U(a_1 t, b_1 t)_\varrho$, $\rho > 2$. W ten sposób bez różnicy, czy $\rho = 2$, czy też $\rho > 2$, dostajemy:

$$\xi = a_1 t + \frac{\beta}{r}A_\varrho t^\varrho + \ldots,\qquad \eta = b_1 t - \frac{\alpha}{r}A_\varrho t^\varrho + \ldots$$

Jeżeli $\rho > 2$, to widocznie w (D) mamy:

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_{\varrho-1} = b_2 = b_3 = \ldots = b_{\varrho-1} = 0,$$

a dopiero $a_\varrho = (\beta/r).A_\varrho$, $b_\varrho = -(\alpha/r).A_\varrho$ są różne od zera.

Mając to, utwórzmy:

$$U(a_1 t + a_\varrho t^\varrho,\ b_1 t + b_\varrho t^\varrho)_\sigma = A_\sigma t^\sigma,$$

co ma oznaczać, że w $U(\xi,\eta)$ wstawiliśmy za ξ, η znane już ich rozwinięcia aż do potęgi t^ϱ, a potem z tego podstawienia zatrzymaliśmy pierwszy nieznikający wyraz z wykładnikiem $\sigma > \varrho$. Znając A_σ mamy już teraz:

$$\xi = a_1 t + \frac{\beta}{r} A_\varrho t^\varrho + \frac{\beta}{r} A_\sigma t^\sigma + \ldots,\quad \eta = b_1 t - \frac{\alpha}{r} A_\varrho t^\varrho - \frac{\alpha}{r} A_\sigma t^\sigma + \ldots$$

Postępując tak samo dalej, możemy dowolną ilość spółczynników $a_1, a_2, \ldots$ w funkcyi φ_1 i spółczynników $b_1, b_2, \ldots$ w funkcyi φ_2 obliczyć.

Gdy $A = 0$, a $B \neq 0$ jest, to zatrzymując $U(\xi\eta)$ w tem samem co wyżej znaczeniu, dostajemy z samego równania $B\eta - U(\xi,\eta) = 0$:

$$\eta = (1/B).U(\xi,\eta).$$

Połóżmy: $\xi = \varphi_1(t) = t$, to ponieważ $\eta = \varphi_2(t)$ nie ma w tym razie zawierać pierwszej potęgi argumentu t, określimy pierwszy nieznikający spółczynnik b_ϱ funkcyi φ_2 przez $b_\varrho = U(t, 0)_\varrho / B$, bezpośrednio zaś następujący spółczynnik b_σ przez $b_\sigma = U(t, b_\varrho t^\varrho)_\sigma / B$ i t. d.

Szukana para funkcyj będzie tu więc postaci:

$$x = a + t,\quad y = b + b_\varrho t^\varrho + b_\sigma t^\sigma + \ldots$$

Analogicznie postępując w przypadku $A \neq 0$, $B = 0$, dojdziemy do pary funkcyj

$$x = a + a_\varrho t^\varrho + a_\sigma t^\sigma + \ldots,\quad y = b + t.$$

Pd. 1. Równaniu:

$$(x-a) + (y-b) - 2(x-a)^2 - 3(y-b)^2 + (x-a)(y-b)^3 = 0$$

czyni zadość zwyczajne miejsce $(a_1 b)$. Połóżmy $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, to otrzymamy: $\xi + \eta - 2\xi^2 - 3\eta^2 + \xi\eta^3 = 0$. Tutaj $(\xi\eta)_1 = \xi + \eta$, a więc $A = 1$, $B = 1$.

Napiszmyż:

$$\xi + \eta = 2\xi^2 + 3\eta^2 - \xi\eta^3 \quad \text{i połóżmy:}$$

$$\xi + 0.\eta = t,\quad (\alpha = 1,\ \beta = 0),$$

to widocznie kładziemy tu wprost $\xi = \varphi_1(t) = t$. Dalej mamy:

$$\eta = -t + (2t^2 + 3t^2 - t^4)_2 + \ldots,\quad \text{czyli:}$$

$$\eta = -t + 5t^2 + \ldots$$

Z tego korzystając, otrzymamy dalej:

$$\eta = -t + 5t^2 + (2t^2 + 3(-t + 5t^2)^2 - t(-t + 5t^2)^3)_3 + \ldots$$

$$\text{czyli:}\quad \eta = -t + 5t^2 - 30t^3 + \ldots \quad \text{i t. d.}$$

Pd. 2. W równaniu:

$$2(x-1) + (y-2) - 4(x-1)^2(y-2)^4 = 0$$

jest $(x, y) = (1, 2)$ zwyczajnym jego punktem. Okazać, że w założeniu $\xi + \eta = t$ jest $x = 1 - t + 2^6 t^8 + \ldots$, $y = 2 + 2t - 2^6 t^8 + \ldots$ parą funkcyj, określającą otoczenie tego miejsca w danym obrazie algebraicznym.

Pd. 3. Utworzyć parę funkcyj dającą otoczenie miejsca $(x, y) = (0, 0)$ w obrazie algebraicznym $y - 2x^3 + y^3 = 0$.

56. Otoczenie miejsca wielokrotnego przy szczególnych założeniach. Zajmijmy się teraz otoczeniem takiego miejsca (a, b), na którem:

$$(1)\qquad f(x,y) = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Miejsc takich może być tylko skończona ilość. Są-to bowiem miejsca (x, y), spełniające równocześnie wszystkie trzy równania algebraiczne (1), a takich miejsc jest zawsze tylko skończona liczba.

Położmy $x=a+\xi$, $y=b+\eta$, to w równaniu $f(a+\xi, b+\eta)=0$, uporządkowanem podług potęg nowych zmiennych ξ, η, dostaniemy oprócz $f(a, b)=0$, jeszcze $(\xi, \eta)_1=0$. Że zaś jeszcze i spółczynniki dalszych jednorodnych funkcyj: $(\xi\,\eta)_2$, $(\xi\,\eta)_3$, ... mogą identycznie znikać, więc, zakładając $\mu \geqq 2$, przedstawimy dane równanie w otoczeniu miejsca (a, b) w postaci:

(2) $$(\xi\,\eta)_\mu+(\xi\,\eta)_{\mu+1}+\dots+(\xi\,\eta)_n=0, \quad \mu \geqq 2.$$

Tutaj może się zdarzyć, że z wyrazów zależnych od samego ξ pierwszym nieznikającym jest wyraz z potęgą $\xi^{\mu+\sigma_1}$, a pierwszym nieznikającym wyrazem między wyrazami zależnymi od samego η, jest wyraz z potęgą $\eta^{\mu+\sigma_2}$.

Niech:

(3) $$\mu+\sigma_1=p, \quad \mu+\sigma_2=q, \quad \sigma_1 \geqq 0, \quad \sigma_2 \geqq 0,$$

to miejsce (a, b) jest widocznie tego rodzaju, że w równaniu:

$$f(x, y)=0$$

mamy dla $x=a$, q pierwiastków $y=b$, a dla $y=b$, p pierwiastków $x=a$, a żadna z liczb p, q nie jest $=1$. Tem można miejsce (a, b) scharakteryzować i tem zastąpić jego definicyę, polegającą na równoczesnem spełnieniu się trzech równań (1). Każde takie miejsce (a, b) nazywamy osobliwem [μ-krotnem] obszaru algebraicznego. Na miejscu zwykłem była przynajmniej jedna z liczb p, q równą jedynce].

Gdy $\sigma_1=\sigma_2=0$, to funkcya $(\xi\,\eta)_\mu$ zawiera i potęgę ξ^μ i potęgę η^μ. Gdy jedna przynajmniej z liczb σ_1, σ_2 nie jest zerem, to można podstawieniem:

(4) $$\begin{aligned} \xi &= c_1 x_1 + c_2 y_1 \\ \eta &= d_1 x_1 + d_2 y_1 \end{aligned},$$

w którem stałe c_1, c_2, d_1, d_2 spełniają warunki:

$$(a) \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (b) \quad (c_1 d_1)_\mu \neq 0, \quad (c_2 d_2)_\mu \neq 0,$$

sprowadzić równanie (2) do kształtu:

(5) $$F(x_1 y_1)=(x_1 y_1)_\mu+(x_1 y_1)_{\mu+1}+\dots+(x_1 y_1)_n=0,$$

a tu w funkcyi $(x_1 y_1)_\mu$ zawierać się już będzie i potęga $x_1{}^\mu$ i potęga $y_1{}^\mu$.

Miejscu $(x_1 y_1)=(0, 0)$ odpowiada wskutek (4), miejsce $(\xi\,\eta)=(0, 0)$ i miejsce $(x\,y)=(a\,b)$. Naodwrót znowu miejscu $(x\,y)=(a\,b)$ odpowiada miejsce $(\xi\eta)=00)$ i — wskutek warunku (a) — tylko jedno miejsce $(x_1y_1)=(00)$ w obrazie algebraicznym $F(x_1y_1)=0$. Trzeba się zatem przedewszystkiem zająć otoczeniem miejsca $(0,0)$ równania algebraicznego (5).

Przyjmijmy że równanie:

$$(6)\qquad (x_1y_1)_\mu/y_1{}^\mu$$

ma pierwiastek $x_1/y_1=g_0/h_0$ powtarzający się ν razy, pierwiastek $x_1/y_1=g_1/h_1$, powtarzający się ν_1 razy, i t. d. Pary (g_0,h_0), (g_1,h_1), ... są tu od siebie różne, a więc wyznaczniki:

$$D'=\begin{vmatrix} g_1h_1 \\ g_0h_0 \end{vmatrix},\quad D''=\begin{vmatrix} g_2h_2 \\ g_0h_0 \end{vmatrix},\ \dots$$

nie są zerami; suma: $\nu_1+\nu_2+\dots=\mu$, a z liczb $g_0, g_1, \dots, h_0, h_1, \dots$ żadna nie jest zerem wskutek warunku (b). Mamy więc:

$$(7)\qquad (x_1y_1)_\mu=c(g_0y_1-h_0x_1)^\nu(g_1y_1-h_1x_1)^{\nu_1}(g_2y_1-h_2x_1)^{\nu_2}\dots$$

Położmy:

$$(8)\qquad x_1=(g_0+\alpha_0v)u,\quad y_1=(h_0+\beta_0v)u,$$

gdzie u, v są zmiennemi, a α_0, β_0 stałemi tak wybranemi, aby było:

$$(c)\qquad (\alpha_0\beta_0)_\mu\neq 0.$$

Z tego warunku wynika, że:

$$(d)\quad (g_0\beta_0-h_0\alpha_0)\neq 0,\ \Delta_1=(g_1\beta_0-h_1\alpha_0)\neq 0,\ \Delta_2=(g_2\beta_0-h_2\alpha_0)\neq 0,\ \dots,$$

przy czem — nie naruszając (c) i (d) można przyjąć:

$$(e)\qquad g_0\beta_0-h_0\alpha_0=1.$$

Dokonując podstawienia (8) w (7) i uwzględniając przyjęte warunki i oznaczenia, dostaniemy:

$$(x_1y_1)_\mu=c\,u^\mu v^\nu(D'+\Delta_1v)^{\nu_1}.(D''+\Delta_2v)^{\nu_2}\dots$$

Położmy: $c.D'.D''\dots=D$, który-to iloczyn jest $\neq 0$, to mieć będziemy: $(x_1y_1)_\mu=u^\mu v^\nu(D+A_1v+A_2v^2+\dots)$, gdzie A_1, A_2, ... są stałe.

Samo równanie (5) po podstawieniach (8) będzie miało postać:

$$(8')\qquad \begin{gathered} u^\mu v^\nu(D+A_1v+A_2v^2+\dots)+ \\ +u^{\mu+1}(g_0+\alpha_0v,h_0+\beta_0v)_{\mu+1}+u^{\mu+2}(g_0+\alpha_0v,h_0+\beta_0v)_{\mu+2}+\dots \\ \dots+u^n(g_0+\alpha_0v,h_0+\beta_0v)_n=0. \end{gathered}$$

Odrzućmy tu czynnik u^μ, to dojdziemy do równania:

$$(\alpha)\qquad \begin{gathered} F_0(u,v)=Dv^\nu+A_1v^{\nu+1}+A_2v^{\nu+2}+\dots \\ \dots+(g_0,h_0)_{\mu+1}.u+(g_0,h_0)_{\mu+2}u^2+\dots+[u,v]_0=0, \end{gathered}$$

gdzie $[u,v]_0$ przedstawia sumę wszystkich wyrazów, które równocześnie od u i od v zależą.

Podobnie używając podstawień:

$$(9)\qquad x_1=(g_1+\alpha_1v)u,\quad y_1=(h_1+\beta_1v)u,$$

gdzie znowu ma być: $(\alpha_1\beta_1)_\mu \neq 0$ i $g_1\beta_1 - h_1\alpha_1 = 1$, dojdziemy do równania:

$$(\beta) \quad \begin{aligned} &F_1(u,v) = D_1 v^{\nu_1} + B_1 v^{\nu_1+1} + B_2 v^{\nu_1+2} + \dots \\ &\dots + (g_1 h_1)_{\mu+1} u + (g_1 h_1)_{\mu+1} \cdot u^2 + \dots + [u,v]_1 = 0, \end{aligned}$$

o podobnym kształcie, jak równanie (α).

Takich równań, jak (α), (β), możemy dostać tyle, ile różnych między sobą czynników:

$$(10) \qquad (g_0 y_1 - h_0 x_1)^\nu,\ (g_1 y_1 - h_1 x_1)^{\nu_1},\ (g_2 y_1 - h_2 x_1)^{\nu_2},\ \dots$$

mieści w sobie $(x_1 y_1)_\mu$. Każdemu z otrzymanych równań zadość czyni miejsce: $(u,v) = (0,0)$.

Okażemy, że te równania otoczeniami miejsca $(uv) = (00)$ zastąpią w zupełności jedno pierwotne równanie: $F(x_1 y_1) = 0$ dla otoczenia miejsca $(x_1 y_1) = (0,0)$.

Aby to okazać, zauważmy, że — ponieważ $F(x_1 y_1) = 0$ jest nieprzywiedlnem równaniem — dostajemy z niego przy nieskończenie małych wartościach zmiennej x_1, koniecznie μ między sobą różnych pierwiastków y_1. [T. I., art. 82., tw. 3.].

Weźmy teraz naprzód z równań (α), (β), ..., dwa którekolwiek z nich, n. p. równanie (α) i (β) pod uwagę.

Równanie (α) wskazuje, że dla nieskończenie małych wartości u mamy tam ν nieskończenie małych pierwiastków v. Nazwijmy je:

$$(\alpha') \qquad v_\sigma,\ \sigma = 1, 2, \dots, \nu.$$

Równanie (β) ma znowu, przy nieskończenie małych wartościach u, dokładnie ν_1 nieskończenie małych pierwiastków:

$$(\beta') \qquad v_\tau,\ \tau = 1, 2, \dots, \nu_1.$$

Między pierwiastkami (α') i między pierwiastkami (β') nie ma dwóch sobie równych, bo z nieprzywiedlności równania $F(x_1 y_1) = 0$ wynika nieprzywiedlność każdego z równań (α), (β), ...

Wracając do równania $F(x_1 y_1) = 0$, dostajemy za pośrednictwem (α'), ν między sobą różnych pierwiastków: $y_1 = (h_0 + \beta_0 v_\sigma)u$, a za pośrednictwem (β'), ν_1 znowu między sobą różnych pierwiastków:

$$\overline{y_1} = (h_1 + \beta_1 \overline{v_\tau})u,$$

Pierwiastki te odpowiadają wartościom:

$$x_1 = (g_0 + \alpha_0 v_\sigma)u, \quad \overline{x_1} = (g_1 + \alpha_1 \overline{v_\tau})u.$$

Gdybyśmy założyli, że przy nieskończenie małych u spełnia się identyczność: $x_1 = \overline{x_1}$, a z nią równocześnie identyczność $y_1 = \overline{y_1}$, to stądby przedewszystkiem wynikało $g_0 = g_1$, $h_0 = h_1$, co jednak sprzeciwia się założeniu.

Z tego wynika, że i za pośrednictwem równań (α), (β), ... obliczone nieskończenie małe pierwiastki równania $F(x_1 y_1)=0$ są wszystkie między sobą różne i jest ich dokładnie: $\nu+\nu_1+\nu_2+\ldots=\mu$, przez co już równoważność równania $F(x_1 y_1)=0$ z równaniami (α), (β), ... jest widoczną.

Zajmijmyż się otoczeniami miejsc $(0,0)$ w równaniach (α), (β), ...

I⁰. Przyjmijmy:

$$\nu=\nu_1=\nu_2=\ldots=1, \tag{11}$$

a więc $(x_1 y_1)_\mu$ nie ma powtarzających się czynników liniowych. Równań (α), (β), ... mamy tedy dokładnie μ, a w każdem z nich — wskutek $D \neq 0$, $D_1 \neq 0$, ... — mieści się wyraz z pierwszą potęgą zmiennej v, (bez zmiennej u). W każdem z tych równań można zatem — według wskazówek artykułów poprzedzających — określić otoczenie miejsca $(0,0)$ jedną parą:

$$u=\psi_s(t), \quad v=\chi_s(t), \quad s=0,1,2,\ldots,\mu-1. \tag{12}$$

W każdej z nich zaczyna się ψ_s koniecznie od 1$^{\text{szej}}$ potęgi argumentu t, podczas, gdy χ_s może się w ogólności poczynać i od wyższej potęgi tego argumentu.

Z rozwiązań (12) otrzymamy:

$$x_1=(g_s+\alpha_s\chi_s)\psi_s, \quad y_1=(h_s+\beta_s\chi_s)\psi_s, \quad s=1,2,\ldots,\mu-1, \tag{13}$$

a dalej także i ξ, η [por. podstawienia (4)] wypadną w formie zwykłych szeregów potęgowych argumentu t, bez wolnych wyrazów. Połóżmyż:

$$x-a=\varphi_1^{(s)}(t), \quad y-b=\varphi_2^{(s)}(t), \quad s=0,1,2,\ldots,\mu-1, \tag{14}$$

to temi μ parami określa się w tym razie otoczenie miejsca (a,b) danego obrazu algebraicznego $f(x,y)=0$ w zupełności.

Przyjmijmy, że funkcya $\varphi_1^{(s)}$ poczyna się od wyrazu z potęgą t^{q_s}, a funkcya $\varphi_2^{(s)}$ od wyrazu z potęgą t^{p_s}. Z s^{tej} pary (14) mamy wtedy:

$$\left.\begin{aligned} y-b&=\mathfrak{P}_2^{(s)}[(x-a)^{\frac{1}{q_s}}] \\ x-a&=\mathfrak{P}_1^{(s)}[(y-b)^{\frac{1}{p_s}}] \end{aligned}\right\}, \quad s=0,1,\ldots,\mu-1. \tag{15}$$

O samem równaniu $f(x,y)=0$ założyliśmy, że między pierwiastkami równania $f(a,y)=0$ mamy q pierwiastków $y=b$, a między pierwiastkami równania $f(x,b)=0$, p pierwiastków $x=a$, gdzie $p \geq \mu$, $q \geq \mu$. To samo powinno wypaść i ze związków (15), a to jest tylko wtedy możliwe, gdy:

$$q_0+q_1+\cdots+q_{\mu-1}=q, \quad p_0+p_1+\cdots+p_{\mu-1}=p. \tag{16}$$

Z założenia, że się funkcya $(x_1 y_1)_\mu$ składa z samych jednokrotnych liniowych czynników, wynika naodwrót z warunku (a), że się i $(\xi\eta)_\mu$ w ten sam sposób zachowuje, a stąd mamy twierdzenie:

I. *Gdy równanie $f(xy)=0$ sprowadzone do otoczenia miejsca (a, b) ma postać: $(\xi\eta)_\mu+(\xi\eta)_{\mu+1}+\dots=0$, $\mu\geqq 2$, a $(\xi\eta)_\mu$ jest iloczynem samych jednokrotnych liniowych czynników, to otoczenie takiego miejsca (a, b) przedstawia się μ parami funkcyj. Mówimy wtedy, że miejsce (a, b) należy do μ elementów, (gałęzi), danego obrazu algebraicznego.*

II^0. Z liniowych czynników funkcyi $(x_1 y_1)_\mu$ nie wszystkie są jednokrotne.

Każdy jednokrotny czynnik daje możność przerobienia równania $F(x_1 y_1)=0$ na równanie postaci (a), zawierające $D_0 v$, $D_0 \gtrless 0$, i da jedną parę funkcyj, należącą do otoczenia miejsca (a, b).

Każdy z pozostałych powtarzających się czynników:

$$(g_s y_1 - h_s x_1)^{\nu_s}, \quad \nu_s > 1 \tag{17}$$

doprowadza do takiego równania (a), że w niem sama zmienna v, (bez u), nie występuje już w potędze pierwszej. Lecz spółczynnikiem potęgi u^1 jest w takiem równaniu: $(g_s h_s)_{\mu+1}$. Przyjmijmy, że dla wszelkich par (g_s, h_s) należących do powstarzających się czynków (17) mamy: $(g_s, h_s)_{\mu+1} \gtrless 0$, to zn., że $(x_1 y_1)_{\mu+1}$ przez żaden z czynników $(g_s y_1 - h_s x_1)$ nie jest w funkcyi $F(x_1 y_1)$ podzielne, a także wykluczonem jest, aby funkcya $(x_1 y_1)_{\mu+1}$ była identycznie zerem, to w takim wypadku każde równanie (a) utworzone z podstawienia, w które weszły g_s, h_s czynnika powtórzonego, daje możność oznaczenia znowu jednej pary funkcyj należących do otoczenia miejsca (a, b).

W takich zatem razach określi się całkowite otoczenie miejsca (a, b), μ_1 parami:

$$x-a=\varphi_1^{(s)}(t), \quad y-b=\varphi_2^{(s)}(t), \quad s=0, 1, 2, \dots, \mu_1-1.$$

gdzie koniecznie $\mu_1 < \mu$ i gdzie — jeżeli $q_0, q_1, \dots$ są najmniejszymi wykładnikami argumentu t w szeregach $\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \dots$, a $p_0, p_1, \dots$ najmniejszymi wykładnikami tego argumentu w szeregach $\varphi_2^{(1)}$, $\varphi_2^{(2)}, \dots$ — mamy znowu:

$$q_0+q_1+\dots+q_{\mu_1-1}=q, \quad p_0+p_1+\dots+p_{\mu_1-1}=p.$$

Stąd — jeżeli te wszystkie uwagi do równania $f(xy)=0$ odniesiemy — mamy twierdzenie:

II. *Jeżeli z równania $f(xy)=0$ sprowadzonego do otoczenia miejsca (a, b) dostajemy:*

$$(\xi\eta)_\mu+(\xi\eta)_{\mu+1}+\dots=0, \quad \mu\geqq 2,$$

gdzie niewszystkie liniowe czynniki funkcyi $(\xi\,\eta)_\mu$ *są jednokrotne albo jednokrotnych czynników wcale niema, ale każdy powtórzony czynnik* $(A\eta+B\xi)$ *daje* $(A, B)_{\mu+1} \neq 0$, *to otoczenie miejsca* (a, b) *określa się — gdy* $(\xi\,\eta)_\mu=(A\eta+B\xi)^\mu$ *— jedną tylko parą funkcyj, a w innych wypadkach kilkoma parami funkcyj. Ilość tych par nie dosięga jednak nigdy liczby* μ.

Pd. 1. W równaniu:

$$(a) \qquad \xi\eta+\xi^5+\eta^5=0$$

jest miejsce (0, 0) osobliwem. Połóżmy $\xi=x_1+y_1$, $\eta=x_1-y_1$, to dostaniemy:

$$F(x_1y_1)=-(y_1-x_1)(y_1+x_1)+(y_1+x_1)^5-(y_1-x_1)^5=0.$$

Uwzględniając pierwszy czynnik (y_1-x_1), załóżmy $\alpha_0=-1$, $\beta_0=2$, co daje $g_0\beta_0-h_0\alpha_0=1$, i połóżmy:

$$(b) \qquad x_1=(1-v)u, \quad y_1=(-1+2v)u,$$

to dostaniemy:

$$(\alpha) \qquad F_0(u_1v)=2v-3v^2+u^3v^5+u^3(2-3v)^5=0.$$

Uwzględniając znowu drugi czynnik (y_1+x_1), obierzmy $\alpha_1=1$, $\beta_1=2$, co znowu daje $g_1\beta_1-h_1\alpha_1=1$, i połóżmy:

$$(c) \qquad x_1=(1+v)u, \quad y_1=(1+2v)u,$$

to mieć będziemy:

$$(\beta) \qquad -F_1(u, v)=2v+3v^2+u^3v^5-u^3(2+3v)^5.$$

Dane równanie (a) zachowuje się tu w otoczeniu miejsca $(\xi,\eta)=(0,0)$ podług twierdzenia I. Otoczenie tego miejsca określą dwie pary funkcyj, z których jedną wyznaczymy za pośrednictwem równania (α), a drugą za pośrednictwem równania (β). Parom funkcyj w równaniach (α) i (β) nadać można, postępując podług metody danej w ostatnim artykule, postać:

$$u=t, \quad v=b_3t^3+b_4t^4+\ldots$$

[Obliczyć spółczynniki b_3, b_4,...].

Pd. 2. W równaniu $\xi\eta^2+\xi^4+\eta^4=0$, w którem chcemy określić otoczenie miejsca $(\xi, \eta)=(0, 0)$, połóżmy znowu $\xi=x_1+y_1$, $\eta=x_1-y_1$, to dojdziemy do równania:

$$F(x_1y_1)=(y_1-x_1)^2(y_1+x_1)+(y_1+x_1)^4+(y_1-x_1)^4=0.$$

Uwzględniając tu czynniki (y_1-x_1), (y_1+x_1) w funkcyi $(x_1y_1)_3$, możemy skorzystać z podstawień (b), (c), użytych w Pd. 1. Z nich dojdziemy do równań:

$$(\alpha) \qquad F_0(u, v)=v(2-3v)^2+u\,.\,v^4-u(2-3v)^4=0$$

$$(\beta) \qquad F_1(u, v)=v^2(2+3v)+u(2+3v)^4+uv^4=0.$$

Z pierwszego z nich dostaniemy parę o postaci:

$$v=t, \quad u=a_1t+a_2t^2+\ldots$$

z drugiego zaś parę o postaci:

$$v=t, \quad u=a_2t^2+a_3t^3+\ldots$$

a za ich pośrednictwem dwie pary funkcyj, dających całkowite otoczenie miejsca $(\xi, \eta)=(0\ 0)$ danego równania.

57. Otoczenie miejsca wielokrotnego w najogólniejszym wypadku. Przejdźmy teraz do wypadku, w którym $(x, y)_\mu$ nie jest potęgą jednego liniowego czynnika, a w którym albo wszystkie czynniki:

(1) $(g_s y_1 - h_s x_1)^{\nu_s}$ o wykładnikach $\nu_s > 1$,

albo przynajmniej niektóre z nich doprowadzają do równań (α), (β), ..., [art. poprzedzający], niezawierających wyrazu $(g_s h_s)_{\mu+1} . u$.

Dla niektórych zatem lub wszystkich czynników (1) mamy:

(2) $(g_s h_s)_{\mu+1} = 0$ *).

Jeden taki czynnik (1) weźmy pod uwagę; jego wykładnik ν_s musi być koniecznie $< \mu$ a równanie $F_s(u, v) = 0$, jakie tu powstaje przez podstawienia:

(3) $x_1 = (g_s + \alpha_s u) v, \quad y_1 = (h_s + \beta_s u) v$

mieści w sobie wyraz $D_s v^{\nu_s}$, $D_s \neq 0$. Stąd wynika, że jednorodna funkcya o najmniejszym wymiarze zawierająca się w tem równaniu musi być stopnia $k_s \leq \nu_s$, a więc $< \mu$. Ale zarazem musi być $k_s > 1$ wskutek warunku (2). Połóżmyż:

(α) $F_s(u v) = (u v)_{k_s} + (u v)_{k_s+1} + \ldots = 0$,

to z tem równaniem możemy teraz tak samo postąpić, jak z równaniem $F(x_1 y_1) = 0$.

Przyjmijmyż, że $(u v)_{k_s}$ nie jest znowu k_s-tą potęgą jednego liniowego czynnika, ale zawiera w sobie a czynników $(k_1 v - l_1 u)^{\pi_1}$, ... to z równania (α) dojdziemy znowu do a nowych równań, zaczynających się od wyrazów wymiaru $< k_s$. Gdy w tych równaniach znowu wyrazy najniższego wymiaru nie dają jednorodnych funkcyj, przedstawiających się jako potęgi pewnych liniowych funkcyj, to i te równania dadzą się zastąpić równaniami o s a m y c h n i ż s z y c h początkowych wymiarach i t. d. Takie przerobienia trzeba przeprowadzić na podstawie każdego z czynników (1) a jeżeli tu nigdy nie natrafimy na równanie dające wyrazy najniższego wymiaru $(u_\tau v_\tau)_\varrho$ w postaci $(A u_\tau + B v_\tau)^\varrho$, $\varrho > 1$, to musimy koniecznie dochodzić do równań — do jednych pierwej, do drugich później — zawierających już wyrazy stopnia pierwszego.

Każde takie równanie z najniższym wymiarem $= 1$ da już jedną parę funkcyj, a wszystkie razem dadzą całkowity zbiór par funkcyj określających otoczenie miejsca (a, b). Ilość tych wszystkich par nie może jednak i tu być $> \mu$. W razie bowiem przeciwnym — wróciwszy do równania $F(x_1, y_1) = 0$, które dla $x = 0$ daje tylko μ pierwiastków $y_1 = 0$, a dla $y_1 = 0$ znowu tylko μ pierwiast-

*) Warunek ten spełnia się niezawodnie, gdy w danem równaniu nie zawiera się wcale $(x_1 y_1)_{\mu+1}$.

ków $x_1=0$ — dostalibyśmy potem, z samych par wyprowadzonych funkcyj już tych pierwiastków więcej niż μ.

Pd. 1. Okazać, że całkowite otoczenie miejsca (0, 0) w równaniu:

$$\xi\eta^2+\xi^5+\eta^5=0$$

dają 3 końcowe równania (α), (β_1), (β_2) takich szeregów równoważnych równań:

$$F(x_1\, y_1)=0$$

$$\overbrace{(\alpha),\ (\beta)}$$

$$\overbrace{(\beta_1),\ (\beta_2)}.$$

Gdy równanie $F(x_1 y_1)=0$ powstaje z podstawienia $\xi=x_1+y_1$, $\eta=x_1-y_1$, to do równań (α), (β) dojść można podstawieniami (b), (c) użytemi w Pd. 1. art. poprzedzający.

Zachodzi teraz pytanie, czy i w takim przypadku, kiedy dane równanie, (albo jedno z równań równoważnych którejkolwiek już warstwy), ma postać:

(4) $$f(\xi,\eta)=(g\eta-h\xi)^\mu+(\xi\,\eta)_{\mu+1}+\ldots=0,$$

możliwe jest (nawet i wtedy, kiedy $(g\,h)_{\mu+1}=0$) obniżenie najniższego stopnia μ przez tworzenie dalszych równań równoważnych?

Nie troszcząc się o to, czy obie z ilości g, h są różne od zera, przyjmijmy $g\neq 0$, a $|h|\geqq 0$ i połóżmy tu, jak przódy:

$$\xi=(h+\alpha\eta_1)\xi_1,\quad \eta=(h+\beta\eta_1)\xi_1,$$

z warunkiem $g\beta-h\alpha=1$, który, gdy $h=0$, przechodzi na $g\beta=1$.

Z tego podstawienia dochodzimy do jednego jedynego równania przerobionego:

(5) $$f_1(\xi_1,\ \eta_1)=0.$$

Załóżmy, że w niem znowu początkowy stopień w jest $=\mu$ i że w $(\xi_1\eta_1)_\mu$ znajduje się liniowy czynnik $g_1\eta_1-h_1\xi_1$. W takim razie, kładąc:

$$\begin{aligned}\xi_1&=(g_1+\alpha_1\eta_2)\,\xi_2\\ \eta_1&=(h_1+\beta_1\eta_2)\,\xi_2\end{aligned},\qquad \begin{vmatrix} g_1 & h_1\\ \alpha_1 & \beta_1\end{vmatrix}=1,$$

dostaniemy z (5) nowe równanie $f_2(\xi_2,\ \eta_2)=0$, w którem znowu początkowy stopień w może być $=\mu$. Przyjmijmy, że tak jest wistocie i że także i w dalszych przerobionych równaniach utrzymuje się początkowy stopień $w=\mu$ bezustannie*).

---

*) To założenie spełnia się tylko wtedy, gdy w równaniach:

(α) $$f(\xi\eta)=0,\ f_1(\xi_1\eta_1)=0,\ldots$$

mamy przy dowolnem r:

$$f_r(\xi_r\,\eta_r)=(g_r\eta_r-h_r\xi_r)^\mu+(\xi_r\,\eta_r)_{\mu+1}+\ldots=0.$$

Z każdego równania (α) daje się utworzyć tylko jedno równanie równoważne.

Z tych równań, poczynając od danego równania (4), weźmy $(r+2)$ po sobie następujących:

$$(6) \qquad f(\xi\eta)=0,\ f_1(\xi_1\eta_1)=0, \ldots, f_{r+1}(\xi_{r+1}, \eta_{r+1})=0$$

pod uwagę.

Powstają one przez podstawienia:

$$(A) \quad \begin{array}{ll} \xi \ =(g+\alpha\,\eta_1)\xi_1, & \eta \ =(h+\beta\,\eta_1)\xi_1 \\ \xi_1 \ =(g_1+\alpha_1\eta_2)\xi_2, & \eta_1 \ =(h_1+\beta_1\,\eta_2)\xi_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \xi_{r-1}=(g_{r-1}+\alpha_{r-1}\,\eta_r)\xi_r, & \eta_{r-1}=(h_{r-1}+\beta_{r-1}\eta_r)\xi_r \\ \xi_r \ =(g_r \ +\alpha_r\ \eta_{r+1})\xi_{r+1}, & \eta_r \ =(h_r \ +\beta_r\eta_{r+1})\xi_{r+1} \end{array}$$

Przytem mamy:

$$f(\xi\eta)=\xi_1{}^\mu f_1(\xi_1\eta_1)=\xi_1{}^\mu\,\xi_2{}^\mu f_2(\xi_2\eta_2)=\xi_1{}^\mu\,\xi_2{}^\mu\,\xi_3{}^\mu f_3(\xi_3\eta_3)=$$
$$\ldots=\xi_1{}^\mu\,\xi_2{}^\mu\ldots\xi_{r+1}{}^\mu f_{r+1}(\xi_{r+1}\,\eta_{r+1}),$$

a z równań (A) dostajemy:

$$(a_1) \quad \begin{array}{l} \xi_{r-1}=g_{r-1}g_r\,\xi_{r+1}+G_{r-1}(\xi_{r+1}, \eta_{r+1})\cdot\xi_{r+1} \\ \eta_{r-1}=h_{r-1}\,h_r\,\xi_{r+1}+H_{r-1}(\xi_{r+1}, \eta_{r+1})\cdot\xi_{r+1} \end{array}$$

$$(a_2) \quad \begin{array}{l} \xi_{r-2}=g_{r-2}\,g_{r-1}\,g_r\,\xi_{r+1}+G_{r-2}(\xi_{r+1}, \eta_{r+1})\cdot\xi_{r+1} \\ \eta_{r-2}=h_{r-2}\,h_{r-1}\,h_r\,\xi_{r+1}+H_{r-2}(\xi_{r+1}, \eta_{r+1})\cdot\xi_{r+1} \end{array}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(a_3) \quad \begin{array}{l} \xi= gg_1\ldots g_r\,\xi_{r+1} + G(\xi_{r+1}, \eta_{r+1})\,\xi_{r+1} \\ \eta= hh_1\ldots h_r\,\xi_{r+1} + H(\xi_{r+1}, \eta_{r+1})\,\xi_{r+1}, \end{array}$$

gdzie G, H są w całym szeregu tych relacyj wymiernemi całkowitemi funkcyami swoich argumentów. Ze związku:

$$f(x\,\eta)=\xi_1{}^\mu f_1(\xi_1\eta_1),$$

dostajemy:

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\xi_1}+\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\xi_1}=\xi_1{}^\mu\frac{\partial f_1}{\partial\xi_1}+\mu\xi_1{}^{\mu-1}f_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}+\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\eta_1}=\xi_1{}^\mu\frac{\partial f_1}{\partial\eta_1},$$

a gdy zważymy, że:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\xi_1}=g+\alpha\eta_1, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\xi_1}=h+\beta\eta_1$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}=\alpha\xi_1 \qquad \frac{\partial\eta}{\partial\eta_1}=\beta\xi_1,$$

mieć będziemy:

$$(g+\alpha\eta_1)\frac{\partial f}{\partial x}+(h+\beta\eta_1)\,\frac{\partial f}{\partial\eta}=\xi_1{}^\mu\frac{\partial f_1}{\partial\xi_1}\cdot+\mu\xi_1{}^{\mu-1}f_1,$$

$$\alpha\,\frac{\partial f}{\partial\xi}+\beta\,\frac{df}{\partial\eta}=\xi_1{}^{\mu-1}\,\frac{\partial f_1}{\partial\eta_1}.$$

Z tych dwóch równań wynika:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\xi_1 \cdot \left[\beta\mu f_1+\beta\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}-(h+\beta\eta_1)\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=\xi_1^{\mu-1}\left[(g+\alpha\eta_1)\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}-\alpha\mu f_1+\alpha\xi_1\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\right].$$

Widzimy z tego, że pochodne $\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}$ mają czynnik $\xi_1^{\mu-1}$ i są liniowo jednorodnie utworzone z 3 funkcyj $f_1, \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}$.

Lecz $f_1=\xi_2^{\mu} f_2$, a $\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f_1}{\partial \eta_1}$ po wyrażeniu ich przez ξ_2, η_2 będą znowu miały czynnik $\xi_2^{\mu-1}$ i będą liniowe, jednorodne w funkcyach $f_2, \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial f_2}{\partial \eta_2}$. Dostaniemy więc:

$$(7)\quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi}&=\xi_1^{\mu-1}\xi_2^{\mu-1}.L_1\left(\xi_2, \eta_2, f_2, \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial f_2}{\partial \eta_2}\right)\\ \frac{\partial f}{\partial \eta}&=\xi_1^{\mu-1}\xi_2^{\mu-1}.L_2\left(\xi_2, \eta_2, f_2, \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial f_2}{\partial \eta_2}\right),\end{aligned}$$

gdzie właśnie w L_1, L_2 wchodzą $f_2, \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial f_2}{\partial \eta_2}$ liniowo jednorodnie. Wyrażając dalej pochodne (7) przez ξ_3, η_3, potem przez ξ_4, η_4, i wreszcie przez ξ_{r+1}, η_{r+1}, dojdziemy ostatecznie do form:

$$(8)\quad \frac{\partial f}{\partial \xi}=\xi_1^{\mu-1}\xi_2^{\mu-1}\dots\xi_{r+1}^{\mu-1}F_1(\xi_{r+1}, \eta_{r+1}),$$

$$(9)\quad \frac{\partial f}{\partial \eta}=\xi_1^{\mu-1}\xi_2^{\mu-1}\dots\xi_{r+1}^{\mu-1}F_2(\xi_{r+1}, \eta_{r+1}),$$

w których F_1, F_2 będą wymiernemi, całkowitemi funkcyami swoich argumentów.

Mając te przerobienia zauważmy, że funkcye:

$$(10)\quad f(\xi\,\eta),\ \frac{\partial f(\xi\,\eta)}{\partial \eta}$$

nie posiadają wcale wspólnego podzielnika, a to z powodu nieprzywiedlności równania $f(\xi\,\eta)=0$. Równania $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}=0$ mają jednak wspólne miejsca zerowe, a wartości ξ należące do tych miejsc określa równanie:

$$R\left(f, \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)=R(\xi)=0,$$

gdzie $R(\xi)$ jest rugownikiem funkcyj (10) uważanych za funkcye samego η.

Taki rugownik można zawsze — za doborem dwóch stosownych funkcyj całkowitych wymiernych $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ przedstawić w ten sposób:

$$R(\xi)=P(\xi\,\eta)\cdot f(\xi\,\eta)+Q(\xi\,\eta)\cdot\frac{\partial f(\xi\eta)}{\partial\eta}$$

[T. I. art. 81. tw. V.].

Połóżmy tu:

$$f(\xi\,\eta)=\xi_1^{\mu}\,\xi_2^{\mu}\dots\xi_{r+1}^{\mu}\cdot f_{r+1}\,(\xi_{r+1}\,\eta_{r+1}),$$

za $\frac{\partial f}{\partial\eta}$ podstawmy (9), a w P, Q wyraźmy ξ, η przez ξ_{r+1}, η_{r+1}, [podług (a_3)], to mieć będziemy:

(11) $$R(\xi)=\xi_1^{\mu-1}\cdot\xi_2^{\mu-1}\dots\xi_{r+1}^{\mu-1}\cdot G(\xi_{r+1}\,\eta_{r+1})$$

z całkowitą wymierną funkcyą G.

Zauważyć przytem trzeba, że czynnik $(\xi_1, \xi_2\dots\xi_{r+1})$ może się tu po prawej stronie jeszcze w ogólności i w wyższej potędze, niż $(\mu-1)^{szej}$ zawierać, bo jeszcze i funkcya G może w sobie zawierać czynniki $\xi_1^{\alpha_1}$, $\xi_2^{\alpha_2}\dots$, $\xi_{r+1}^{\alpha_{r+1}}$ przy $\alpha_s>0$, $s=1, 2, \dots, r+1$.

Wyraźmy dalej po prawej stronie w (11) także ξ_1, $\xi_2, \dots, \xi_r$ przez ξ_{r+1}, η_{r+1} za pomocą podstawień (a_1), (a_2), ..., to ostatecznie mieć będziemy:

$$R(\xi)=\xi_{r+1}^{(r+1)(\mu-1)}\,G_1(\xi_{r+1},\ \eta_{r+1})$$

z tem znowu zastrzeżeniem, że tu po prawej stronie może być ξ_{r+1} z wyższym wykładnikiem, niż $(r+1)(\mu-1)$. Niech tym wykładnikiem będzie:

(12) $$k=(r+1)(\mu-1)+l,\ l\geqq 0,$$

to stąd wynika, że i w $R(\xi)$ musi się zawierać czynnik ξ^k — (o wykładniku $=k$, a nie wyższym) i że $R(\xi)$, gdy w niem ξ wyrazimy przez ξ_{r+1}, η_{r+1} podług (a_3), przejdzie na $\xi^k_{r+1}\,R_1(\xi_{r+1},\ \eta_{r+1})$. Jasnem jest przy tem, że tu k nie zależy od r, ale od postaci funkcyj $f(\xi\,\eta)$, $\frac{\partial f(\xi\,\eta)}{\partial\eta}$, i jest z pewnością liczbą skończoną dodatnią. Z (12) mamy $k\geqq(r+1)(\mu-1)$, a ta nierówność — przy założeniu, że się najniższy stopień w okazuje $=\mu$ w dowolnie wielu równaniach (8) — musiałaby się sprawdzać przy dowolnie dużem r. Lecz to jest widocznie niemożliwem, a stąd wynika, że w szeregu równań (6) natrafić musimy koniecznie na pewne równanie $f_s(\xi_s\,\eta_s)=0$, o skończonem s i z najniższym stopniem $w<\mu$ i dojść wreszcie do równań równoważnych posiadających już $w=1$, a więc przydatnych do oznaczenia jednej pary dla otoczenia miejsca (ab) danego równania $f(x, y)=0$.

Jeżeli równanie (4) jest właśnie danem równaniem, a nie jednem z równań równoważnych, to ilość par funkcyj otaczających miejsce $(\xi, \eta)=(0, 0)$ będzie i tu zawsze $\leq \mu$. Z tych wszystkich uwag wynika:

I. *Gdy równanie* $f(x\,y)=0$ *ma dla* $x=0$, q *pierwiastków* $y=0$, *a dla* $y=0$ p *pierwiastków* $x=0$, *gdzie* $p>1$, $q>1$, *a sprowadzone do otoczenia miejsca* (a, b), *ma postać:*

$$(\xi\,\eta)_\mu+(\xi\,\eta)_{\mu+1}+\ldots=0,\quad \mu>1,$$

to — w jakikolwiekbądź sposób złożoną jest funkcya $(\xi\,\eta)_\mu$ *z liniowych czynników — dostajemy na określenie całkowitego otoczenia miejsca* (a, b), μ_1 *par funkcyj* $x-a=\varphi_1^{(s)}(t)$, $y-b=\varphi_2^{(s)}(t)$ $s=1, 2, \ldots, \mu_1\leq\mu$.

Jeżeli $\varphi_1^{(s)}$ *poczynają się od wykładników* q_s, *a* $\varphi_2^{(s)}$ *od wykładników* p_s, *to mamy* $q_1+q_2+\ldots+q_{\mu_1}=q$, $p_1+p_2+\ldots+p_{\mu_1}=p$.

Pd. 2. W równaniu $\eta^3+\xi^4+\eta^4=0$, do którego miejsc zalicza się $(\xi\,\eta)=(0, 0)$, mamy $g=1$, $h=0$. Obierzmyż $\alpha=0$, $\beta=1$ i połóżmy $\xi=u$, $\eta=u\,v$, to dostaniemy $u+v^3+u\,v^4=0$ a więc równanie, w którem najniższy stopień w jest $=1$. Otoczenie miejsca (0, 0) wyrazi się zatem tu tylko jedną parą funkcyj [por. art. 56. tw. II.].

Pd. 3. W równaniu $\eta^3+\xi^5+\eta^5=0$ mamy znowu $g=1$, $h=0$. Połóżmyż i tu $\xi=u$, $\eta=uv$, to dostaniemy $u^2+v^3+u^2\,v^5=0$.

W tem równaniu mamy $g=0$, $h=-1$.

Obierzmyż $\alpha=1$, $\beta=0$ i połóżmy $u=u_1v_1$, $v=-u_1$, to dojdziemy do równania $u_1-v_1{}^2+u_1{}^5\,v_1{}^2=0$, które już jest przydatne do wyznaczenia jednej pary funkcyj. Tą jedną parą przedstawia się tu całkowite otoczenie miejsca (0, 0) danego równania.

Weźmy jedną z par należącą do otoczenia miejsca (a, b). Niech nią będzie:

$$(13)\qquad \begin{aligned} x-a&=\varphi_1(t)=a_1t^\alpha+a_2t^{\alpha+1}+\ldots\\ y-b&=\varphi_2(t)=b_1t^\beta+b_2t^{\beta+1}+\ldots\end{aligned}$$

to choć $(a\,b)$ jest punktem osobliwym, wykładniki α, β mogą, ale nie muszą, być równocześnie >1. Jakkolwiek jest, dostajemy tu $t=\mathfrak{P}_1\Big[(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}\Big]$, a więc:

$$y-b=\mathfrak{P}_2\Big[(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}\Big]=A_0(x-a)^{\frac{\beta}{\alpha}}+A_1(x-a)^{\frac{\beta+1}{\alpha}}+\ldots$$

Połóżmy tu $x-a=\tau^\alpha$, to parę (13) dostajemy w postaci:

$$x=a+\tau^\alpha,\quad y-b=\mathfrak{P}_2(\tau)=A_0\tau^\beta+A_1\tau^{\beta+1}\ldots$$

Postępując z parą (13) podobnie jak w art. 55., (γ), (δ) będziemy mogli kładąc $t=c_1\tau+c_2\tau^2+\ldots$, $|c_1|>0$, dojść do pary:

$$x-a=a'_1\tau^\alpha+a'_2\tau^{\alpha+1}+\ldots,\quad y-b=b'_1\tau^\beta+b'_2\tau^{\beta+1}+\ldots$$

o innej postaci, ale o tem samem znaczeniu, co para (13). Mamy więc twierdzenie:

II. *Jedną parę* $x-a=\varphi_1(t)$, $y-b=\varphi_2(t)$ *wyjętą z par otaczających miejsce wielokrotne* (a, b) *danego obrazu algebraicznego można jeszcze przedstawić w bardzo dużo innych postaciach:* $x-a=\psi_1(\tau)$, $y-b=\psi_2(\tau)$, *gdzie* $t=c_1\tau+c_2\tau^2+\ldots$, $|c_1|>0$.

W szczególności możemy jej nadać formę:

$$[x-a=\tau^\alpha,\ y-b=b_0\tau^\beta+b_1\tau^{\beta+1}+\ldots,]$$

albo:

$$[y-b=\tau^\beta,\ x-a=a_0\tau^\alpha+a_1\tau^{\alpha+1}+\ldots],$$

jeżeli z pary φ_1, φ_2 *dostajemy przy* $x=a$, α *pierwiastków* $y=b$, *a przy* $y=b$, β *pierwiastków* $x=a$ *).

Uwaga. Jeżeli para funkcyj:

$$(A)\qquad x=a+ct^\alpha+\ldots,\ y=b+dt^\beta+\ldots$$

(obok możliwych innych par) wzięła swój początek z podstawień odnoszących się do czynnika $(gy-hx)^\nu$, to ponieważ ten czynnik wskazuje geometrycznie, że przez punkt $(a\ b)$ przechodzi ν gałęzi krzywej (a nie więcej) o wspólnej stycznej $gy-hx=0$ musi być w parze (A) mniejszy z wykładników α, β koniecznie $\leq\nu$.

58. Otoczenie miejsc obrazu algebraicznego leżących w nieskończoności. W danem równaniu:

$$(1)\qquad f(x,y)=(x\,y)_n+(x\,y)_{n-1}+(x\,y)_{n-2}+\ldots=0,$$

uwzględnimy funkcyą jednorodną najwyższego stopnia n:

$$(2)\qquad (x\,y)_n=(g\,y-h\,x)^\nu(g'y-h'x)^{\nu'}\ldots$$

i przyjmijmy, że miejsce (x, y) o spółrzędnych pozostających w stosunku:

$$(3)\qquad (y:x)=(h:g)$$

ma być zarazem miejscem obrazu algebraicznego (1). Dla takich (x, y) dostajemy:

$$(x\,y)_{n-1}+(x,y)_{n-2}+\ldots=0,$$

a stąd wnosimy, że takie miejsce obrazu algebraicznego nie leży w skończoności; ma więc albo obie spółrzędne x, y nieskończenie

---

*) Wyznaczanie par funkcyj dla otoczenia danego miejsca (a, b) za pomocą szeregu równań równoważnych, jest pomysłu Weierstrassa. Por. Biermann. *Th. d. analytischen Functionen* str. 212.

Inną metodą jest dawniejsza V. Puiseux'go [*Recherches sur les fonctions algébriques pures et appliqées* T. 15. (1850) str. 365.]. Por. także: E. Picard. *Traité d'Analyse.* T. II. str. 348. B. Niewenglowski *Cours de géometrie analytique.* T. II. (1895) str. 31. Inną metodę podają: Hamburger *Zeitschr. f. M. u. Ph.* (Schlömilch) T. 16. str. 461—491. David. *J. de l'école polytechnique* C. 57. (1887) str. 147—169.

wielkie, albo jedna przynajmniej z tych spółrzędnych nie jest skończoną.

To samo odnieść trzeba do każdego z czynników zawartych w (2) tak, że spółrzędne miejsc leżących w nieskończoności w obrazie algebraicznym (1) są w stosunkach $(y:x)=$

(4) $$(h:g),\ (h':g'),\ (h'':g''),\dots$$

Aby otoczenie każdego z takich miejsc wyznaczyć, weźmy nasamprzód miejsce o stosunku (3) pod uwagę i połóżmy:

(5) $$x=(g+\alpha v)\frac{1}{u},\quad y=(h+\beta v)\frac{1}{u}$$

z warunkiem $g\beta-h\alpha=1$. Przez to podstawienie przechodzi równanie (1) na:

$$u^{-n}[(g+\alpha v,\ h+\beta v)_n+u(g+\alpha v,\ h+\beta v)_{n-1}+\dots]=0,$$

albo na:

(5') $$u^{-n}[(gh)_n+c_1v+c_2v^2+\dots+(gh)_{n-1}u+\dots+(u,v)]=0,$$

gdzie (u,v) jest sumą wszystkich wyrazów: które równocześnie od u i v zależą.

Po opuszczeniu czynniku u^{-n} i uporządkowaniu podług jednorodnych funkcyj zmiennych u, v, mieć będziemy:

(6) $$(u,v)_\mu+(u,v)_{\mu+1}+(u,v)_{\mu+2}+\dots=0,$$

gdzie $\mu\geqq 1$, gdyż $(g,h)_n=0$.

W równaniu tem dostajemy dla nieskończenie małych u przynajmniej μ nieskończenie małych pierwiastków v i naodwrót.

Takim nieskończenie małym (u, v) odpowiadać będą w (5) miejsca (x, y) o jednej przynajmniej spółrzędnej bezgranicznie wielkiej. Inaczej mówiąc: otoczeniu miejsca $(u, v)=(0, 0)$ w równaniu (6) odpowie w równaniu (5) otoczenie miejsca w nieskończoności o stosunku spółrzędnych (3).

Według uwag ostatnich artykułów określa się otoczenie miejsca $(u, v)=0$ jedną parą lub kilkoma parami funkcyj:

$$u=\psi_1^{(s)}(t),\ v=\psi_2^{(s)}(t),\ s=1,2,3,\dots,r\geqq 1.$$

Uwzględniając to w (5) dostaniemy:

$$x=\varphi_1^{(s)}(t),\ y=\varphi_2^{(s)}(t)\ \ s=1,2,3,\dots,r,$$

gdzie tu każda z par funkcyj może wypaść w jednej z takich trzech postaci:

1⁰ Obie funkcye posiadają i odjemne potęgi zmiennej t, ale do skończonych tylko stopni.

2⁰ Zmienna x zawiera wyłącznie potęgi dodatnie, a może zawierać i wyraz wolny. Zmienna y przeciwnie posiada i odjemne potęgi ale tylko do skończonego stopnia.

3° Zmienna x zawiera i odjemne potęgi ale tylko do skończonego stopnia; zmienna zaś y ma wyłącznie dodatnie potęgi, a może zawierać i wolny wyraz.

Do podobnego wyniku dojdziemy, biorąc za punkt wyjścia którykolwiek z dalszych stosunków $(y:x)$ zawartych w (4), a stąd wynika twierdzenie:

I. *Całkowite otoczenie każdego z miejsc leżących w nieskończoności w danym obrazie algebraicznym przedstawia się jedną parą funkcyj, albo kilkoma parami funkcyj postaci:*

$$(a)\qquad x=t^{\lambda}(a+a_1t+a_2t^2+\ldots)=t^{\lambda}\overline{\varphi}_1(t),\ |a|>0$$

$$(b)\qquad y=t^{\mu}(b+b_1t+b_2t^2+\ldots)=t^{\mu}\overline{\varphi}_2(t),\ |b|>0.$$

Z wykładników λ, μ albo obydwa równocześnie są odjemne (całkowite i skończone), albo przynajmniej jeden z nich jest odjemny. Drugi, będąc dodatnim, może być także $=0$.

Gdy na miejscu leżącem w nieskończoności mamy x skończone, to w (a) jest koniecznie $\lambda \geqq 0$, a więc w (b) koniecznie $\mu<0$. Przyjmijmyż $\lambda \geqq 1$, to z (a) dostajemy:

$$t=\mathfrak{P}(x^{\frac{1}{\lambda}}),$$

a uwzględniając to w (b), mamy:

$$(A)\qquad y=P(x^{\frac{1}{\lambda}}).$$

Przyjmijmy w (a): $\lambda=0$ i $|a_1|>0$, to dostajemy: $t=\mathfrak{P}(x-a)$, a wtedy z (b) wynika:

$$(B)\qquad y=P(x-a).$$

Gdy przeciwnie x ma być nieskończone, mamy w (a): $\lambda=-k$, gdzie $k \geqq 1$. Napiszmyż (a) w postaci:

$$\frac{1}{x}=\frac{t^k}{a+a_1t+\ldots},$$

to tu prawą stronę można — wskutek $|a|>0$ — rozwinąć na szereg potęgowy:

$$\frac{1}{x}=a^{-1}t^k+a'_1t^{k+1}+\ldots$$

Z niego dostajemy:

$$t=\mathfrak{P}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{k}}\right],\quad k\geqq 1,$$

a uwzględniając to w (b), gdzie w tym razie może być $\mu \gtreqless 0$, mamy:

$$(C)\qquad y=P\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{k}}\right].$$

[Szereg P nie potrzebuje bezwarunkowo zawierać ujemnych potęg argumentu $x^{-\frac{1}{k}}$]. Stąd twierdzenie:

II. *Na miejscu w nieskończoności wyraża się y przez x rozwinięciami o argumentach x, $(x-a)$, $x^{\frac{1}{\lambda}}$, $\lambda > 1$, zawierającemi koniecznie i ujemne potęgi (do skończonych stopni), albo rozwinięciami argumentu $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{k}}$, $k \geq 1$ z ujemnemi potęgami tego argumentu lub bez tych ujemnych potęg.*

Połóżmy w (A) $x = t^\lambda$, to mamy parę funkcyj:

(A') $$x = t^\lambda, \quad y = P(t).$$

Połóżmy w (B) $(x-a) = t$, to mieć będziemy parę funkcyj:

(B') $$x = a + t, \quad y = P(t).$$

Gdy wreszcie w (C) położymy $\frac{1}{x} = t^k$, dojdziemy do pary funkcyj:

(C') $$x = t^{-k}, \quad y = P(t).$$

Widocznie w (A'), (B') jest, dla $t=0$, wartość x skończona $(x=0, x=a)$ i dlatego $P(t)$ musi w tych razach zawierać koniecznie ujemne potęgi zmiennej t. W (C') mamy już $x = \infty$ dla $t=0$ i dlatego tu $P(t)$ może — ale nie musi — zawierać ujemne potęgi zmiennej t.

I tutaj w każdym z wypadków da się udowodnić, że jedną parę funkcyj można przedstawić w bardzo wielu postaciach, a jeżeli dwie takie postacie:

$$\left\{\begin{matrix} x = t^\lambda \varphi_1(t) \\ y = t^\mu \varphi_2(t) \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} x = \tau^\lambda \psi_1(\tau) \\ y = \tau^\mu \psi_2(\tau) \end{matrix}\right\}$$

weźmiemy pod uwagę, to musi być:

(7) $$t = c_1\tau + c_2\tau^2 + \ldots, \quad |c_1| > 0 \quad \text{i} \quad t = d_1 t + d_2\tau^2 + \ldots, \quad |d_1| > 0.$$

Punkt w nieskończoności o stosunku $(g:h)$ [T. I., art. 129.], odnoszący się do czynnika $(gy - hx)$, zawartego w $(x,y)_n$, uznajemy wielokrotnym, jeżeli w przerobionem równaniu (5') jest takim punkt $(u,v) = (0,0)$. W (5') muszą więc koniecznie zniknąć wyrazy pierwszego wymiaru. Musi więc być przy $(gh)_{n-1} = 0$, jeszcze $c_1 = 0$. Lecz, że

$$c_1 = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x,y)_n . \alpha + \frac{\partial}{\partial y}(x,y)_n . \beta\right]_{(x=g,\ y=h)}$$

a α, β są bardzo dowolne, bo mają tylko spełnić warunek $g\beta - h\alpha \neq 0$, więc ma być:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x,y)_n=0,\ \frac{\partial}{\partial y}(x,y)_n=0 \text{ dla } x=g,\ y=h.$$

To — w połączeniu z warunkiem $(gh)_{n-1}=0$ — wskazuje, że czynnik $(gy-hx)$ musi się w $(xy)_n$ powtórzyć przynajmniej dwa razy, a $(xy)_{n-1}$ ma go zawierać raz przynajmniej, albo ma być identycznie zerem.

W geometryi nazywają punkt (a, b) wielokrotnym w danej krzywej, jeżeli każda prosta przechodząca przez (ab), a niebędąca styczną w tym punkcie, przecina w nim krzywę przynajmniej dwa razy. Każdą dowolną prostę, przechodzącą przez punkt nieskończonościowy, charakteryzujący się stosunkiem $(g:h)$, można określić dwoma równaniami: $x-p=rg$, $y-q=rh$, z całkiem dowolnemi p, q, a łatwo sprawdzić, że przy ostawaniu się dopieroco wypowiedzianych warunków, każda taka prosta w dwóch już przynajmniej punktach w nieskończoności przetnie daną krzywę.

Pd. 1. W równaniu $y^3+x^2y-2ax^2=0$ jest:

$$(xy)_3=y^3+x^2y=y(y-ix)(y+ix).$$

Dla pierwszego czynnika: y mamy $g=1$, $h=0$. Obierzmyż $\alpha=0$, $\beta=1$ i położmy $x=1/u$, $y=v/u$, to — po skróceniu przez u^{-3} — dojdziemy do równania $v^3+v-2au=0$. Z niego wynika $u=(v+v^3)/2a$, czyli $v=t$, $u=(t+t^3)/2a$.

Wskutek tego mieć będziemy:

$$(\alpha)\qquad x=2at^{-1}\frac{1}{1+t^2},\quad y=2a.\frac{1}{1+t^2}.$$

Dla $t=0$ mamy tu $x=\infty$, $y=2a$. Stosunek $y/x=0$. W drugim czynniku $(y-ix)$ mamy $g=1$, $h=i$. Obierzmyż znowu $\alpha=0$, $\beta=1$ i położmy:

$$x=1/u,\ y=(i+v)/u,$$

to dostaniemy równanie: $(i+v)^3+(i+v)-2au=0$. Z niego wynika:

$$v=t,\ u=[(i+t)+(i+t)^3]/2a, \text{ a więc}$$

$$(\beta)\qquad x=-2at^{-1}\frac{1}{2-3it-t^2},\quad y=-2ait^{-1}.\frac{1}{2-ti}.$$

Dla $t=0$ mamy tu $x=\infty$, $y=\infty$. Stosunek $y/x=+i$. Położmy w (β) $-i$ zamiast $+i$, to dostaniemy parę funkcyj:

$$(\gamma)\qquad x=-2at^{-1}\frac{1}{2+3it-t^2},\quad y=2ait^{-1}.\frac{1}{2+ti}$$

otaczającą trzecie miejsce o stosunku $y/x=-i$.

Żaden z tych punktów nie jest tu wielkrotnym.

Pd. 2. W równaniu $x^3+y^3-2axy=0$, mamy:

$$(a)\qquad y^3+x^3=(y-\varepsilon_1x)(y-\varepsilon_2x)(y-\varepsilon_3x),$$

jeżeli ε_s, $s=1,2,3$, są pierwiastkami równania $z^3+1=0$. W każdym z czynników w (a) mamy $g=1$ przy $h=\varepsilon_s$. Obierzmyż $\alpha=0$, $\beta=1$ i położmy:

$$x=1/u,\ y=(\varepsilon_s+v)/u,$$

to po tych podstawieniach dójdziemy — po skróceniu przez u^{-3} i z uwagi, że $\varepsilon_s^3=-1$ — do relacyi $3\varepsilon_s^2v+3\varepsilon_sv^2+v^3-2a(\varepsilon_s+v)u=0$. Stąd dostajemy:

$$v=t,\ u=\frac{t}{2a}\cdot\frac{3\varepsilon_s^2+3\varepsilon_s t+t^2}{\varepsilon_s+t},\ \text{a więc:}$$

$$(b)\qquad x=\frac{2a}{t}\,\frac{\varepsilon_s+t}{3\varepsilon_s^2+3\varepsilon_s t+t^2},\quad y=\frac{2a}{t}\cdot\frac{(\varepsilon_s+t)^2}{3\varepsilon_s^2+3\varepsilon_s t+t^2},\quad s=1,2,3.$$

Otoczenie zatem każdego z trzech miejsc w nieskończoności charakteryzującego się stosunkiem $y/x=\varepsilon_s$ określa tu jedna z par (b). I tu żaden z tych punktów nie będzie wielokrotnym.

Pd 3. Okazać, że w równaniu $(x^2+y^2)^2-c^2(x^2-y^2)=0$ są: punkt (00) i punkta w nieskończoności o stosunkach $+i$, $-i$ podwójnymi. [T. I. art. 129.].

Uwzględniliśmy w ten sposób wszystkie już miejsca danego obrazu algebraicznego i ich otoczenia. Te ostatnie wyrażają się jedną parą funkcyj lub kilkoma parami funkcyj, które podać można w najrozmaitszych postaciach.

Zauważmy dwa różne miejsca (α, β), (α', β') nie odróżniając, czy są zwykłe, szczególne, lub czy leżą w nieskończoności. Z ich otoczeń weźmy po jednej parze:

$$(a')\quad \begin{Bmatrix} x=\alpha+\varphi_1(t) \\ y=\beta+\varphi_2(t)\end{Bmatrix},\qquad (b')\quad \begin{Bmatrix} x=\alpha'+\psi_1(\tau) \\ y=\beta'+\psi_2(\tau)\end{Bmatrix}$$

i przyjmijmy, że w obszarze dostatecznie małych t i dostatecznie małych τ istnieją miejsca t_0, τ_0 dające:

$$[\alpha+\varphi_1(t_0)=a,\ \beta+\varphi_2(t_0)=b],\quad [\alpha'+\psi_1(\tau_0)=a,\ \beta'+\psi_2(\tau_0)=b]$$

a miejsce (a, b) nie jest szczególnem miejscem danego obrazu algebraicznego.

Po przeprowadzeniu (a') do otoczenia miejsca t_0, a (b') do otoczenia miejsca τ_0 dostaniemy pary funkcyj:

$$(a'')\quad \begin{aligned} x&=\alpha+\varphi_1(t_0)+\varphi'_1(t_0)(t-t_0)+\ldots=a+A_1(t-t_0)+\ldots\\ y&=\beta+\varphi_2(t_0)+\varphi'_2(t_0)(t-t_0)+\ldots=b+B_1(t-t_0)+\ldots,\end{aligned}$$

$$(b'')\quad \begin{aligned} x&=\alpha'+\psi_1(\tau_0)+\psi'_1(\tau_0)(\tau-\tau_0)+\ldots=a+A'_1(\tau-\tau_0)+\ldots\\ y&=\beta'+\psi_2(\tau_0)+\psi'_2(\tau_0)(\tau-\tau_0)+\ldots=b+B'_1(\tau-\tau_0)+\ldots\end{aligned}$$

z których każda otacza miejsce (a, b).

Lecz (a, b) jest miejscem zwyczajnem. Jego otoczenie określa się tylko jedną parą, a wskutek tego mamy tu [jak w (7).]

$$t-t_0=c_1(\tau-\tau_0)+\ldots,\ |c_1|>0;\quad \tau-\tau_0=d_1(t-t_0)+\ldots,\ |d_1|>0.$$

Stąd twierdzenie:

III. *Jeżeli dwie pary funkcyj dane dla otoczeń dwóch różnych punktów* (α,β) (α',β') *obrazu algebraicznego dają dla pewnych wartości* $t=t_0$, $\tau=\tau_0$ *to samo zwyczajne miejsce* $(a\,b)$, *to one w otoczeniu miejsc* t_0, τ_0 *nie różnią się istotnie od siebie, to zn. ich przeprowadzenia* *do otoczeń tych miejsc dają tę samą parę funkcyj w dwóch różnych postaciach.*

59. Zakresy zbieżności elementów obrazu algebraicznego. Gdy w otoczeniu każdego miejsca (a, b) nieprzywiedlnego równania $f(x\,y)=0$, n^{go} wymiaru przedstawiamy y przez x, to przez to określamy y jako funkcyę niezależnej zmiennej x, zmieniającą swe wartości właśnie podług związku $f=0$. W zmiennej y niech to równanie będzie stopnia $m\leqq n$ i niech ma postać:

(1) $$f_0(x).y^m+f_1(x).y^{m-1}+...+f_m(x)=0.$$

W razie $f_0(x)=const.$ mamy dla każdego skończonego x zawsze m skończonych pierwiastków y. Gdy przeciwnie $f_0(x)$ nie redukuje się do stałej, a $D(x)$ jest rugownikiem równań $f=0$, $\partial f/\partial y=0$, to dla takich wszystkich $x=a$, które dają równocześnie:

(2) $$f_0(x)\neq 0,\quad D(x)\neq 0,$$

mamy znowu m skończonych i różnych między sobą pierwiastków $y=b_1, b_2, ..., b_m$. Otoczenie każdego z takich miejsc (a, b_k), $k=1, 2, ..., m$, określa tylko jedna para: $x-a=t$, $y-b_k=\mathfrak{P}_k(t)$. Z niej wynikają elementy:

(3) $$y=b_k+\mathfrak{P}_k(x-a)=\psi_k(x-a),\quad k=1, 2, ..., m,$$

gdzie $\mathfrak{P}_k$ nie zawierają wolnych wyrazów. Przy dostatecznie małej wartości $|x-a|$ określają regularne rozwinięcia (3) znowu m pierwiastków y równania (1) dla wartości x wziętych z najbliższego otoczenia miejsca a. Mówimy inaczej, że m rozwinięć (3) daje po jednym regularnym elemencie na każdej z m gałęzi y_1, y_2, ..., y_m funkcyi algebraiczej y zależnej od argumentu x.

Zajmijmy się zakresem zbieżności i przeprowadzeniem każdego z tych elementów.

Przyjmując, że wszystkie elementa ψ_k zbieżne są w zakresie

(4) $$|x-a|<r,$$

trzeba przedewszystkiem określić wielkość promienia r. W całym zakresie (4) muszą się równocześnie spełniać warunki (2), a że z gałęzi y_k, $k=1, 2, ..., m$, jedna przynajmniej musi przestać być regularną w takich punktach $x=c_1$, c_2, c_3, ..., które dają $f_0(x)=0$, a jedna z nich przynajmniej może — ale nie musi — przestać być regularną w punktach $x=d_1$, d_2, d_3, ... dających $D(x)=0$, *)

*) W równaniu $y^2-(x-a)^2(b-x)=0$, gdzie $a\neq b$, mamy dla $(x, y)=(a, 0)$,

(b) $$\partial f(x\,y)/\partial y=0,$$

a mimo tego mamy tu w otoczeniu punktu a dwa regularne elementa:

$$y=\pm\sqrt{b+a}.(x-a)\,[1+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+...].$$

Żadna więc z gałęzi nie staje się tu nieregularną, mimo że zachodzi warunek (b).

więc stąd wnioskujemy odrazu, że wszystkie elementa (3) są niezawodnie zbieżne w zakresie sięgającym do punktu c_s, a względnie d_s, najmniej oddalonego od punktu a. W taki też sposób trzeba określić promień r.

Obierając w obszarze (4) dowolny punkt a' możemy wszystkie ψ_k do otoczenia tego punktu przeprowadzić. Tak przeprowadzone funkcye ψ_k określą w tych częściach argumentu x, które już leżą poza zakresem (4), dalsze części gałęzi y_k, a to z powodu, że relacye:

$$[f_1(x)/f_0(x)]=-(\psi_1+\psi_2+...+\psi_m)..., \ [f_m(x)/f_0(x)]=(-1)^m \psi_1\psi_2...\psi_m$$

nie tracą swego znaczenia przy każdem takiem przeprowadzeniu. Tworząc czem raz dalsze przeprowadzenia elementów ψ_k, istniejące poza zakresem (4) rozszerzamy i uzupełniamy każdą gałąź funkcyi algebraicznej. Ale w tym pochodzie nigdy ani punkt c_s, ani punkt d_s nie ma być początkiem żadnego nowego przeprowadzenia. Z tego powodu każdy punkt c_s i każdy punkt d_s — choćby w jakim punkcie d_s zachowywały się wszystkie gałęzie regularnie — nazywamy osobliwym algebraicznej funkcyi y. Niech punkt a zajmie położenie jednego z punktów d_s i załóżmy, że tam kilka gałęzi y (wykazując w niem równe wartości) nie dają się przedstawić w rozwinięciach postępujących podług całkowitych potęg. Gdy taki punkt $d_s=a$ nie jest identycznym przypadkowo z jednym z punktów c_s*), to między parami otaczającemi punkt a musi być jedna przynajmniej para funkcyj postaci: $x=a+t^\lambda$, $y=\mathfrak{P}(t)$, $\lambda>1$. Z niej dostajemy element:

$$(5) \qquad y=\mathfrak{P}[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}].$$

Połóżmy w samem równaniu $x=a+z^\lambda$, $y=\eta$, to otrzymamy równanie $f_1(z, \eta)=0$, w którem elementowi (5) odpowiada regularny już element $\eta=\mathfrak{P}(z)$. Element ten jest zbieżny w otoczeniu sięgającem aż do takiego punktu szczególnego funkcyi η, określonej równaniem $f_1(z, \eta)=0$, który najbliżej leży punktu $z=0$. Takiemu punktowi odpowie w funkcyi y albo punkt c_s, albo punkt d_s, najmniej oddalony od punktu a, a stąd wynika, że i każdy nieregularny element (5) pod względem obszerności swego zakresu zbieżności nie różni się od elementu regularnego.

Przyjmijmy $a=c_s$, gdzie w ogólności c_s może się okazać identycznem z jedną z wartości d_s, to w takim razie między parami

*) Te punkta c_s, które przy $f_0(x)=0$ dają jeszcze $f_1(x)=0$ zaliczyć trzeba równocześnie i do d_s.

otaczającemi taki punkt a znajdziemy jedną postaci $x=a+t^k$, $y=\mathfrak{P}(t)/t^\mu$, $k\geq 1$, $\mu\geq 1$. Z niej dostajemy:

(6) $$y=\mathfrak{P}[(x-a)^{\frac{1}{k}}]/(x-a)^{\frac{\mu}{k}}.$$

Aby zakres zbieżności tego elementu wyznaczyć, połóżmy:

(7) $$y=\eta/f_0(x).$$

Przez to podstawienie przejdzie dane równanie na równanie:

$$\eta^m+f_1(x)\,\eta^{m-1}+f_0(x)\,f_2(x)\,\eta^{m-2}+\ldots+[f_0(x)]^{m-1}f_m(x)=0,$$

które widocznie dla każdej skończonej wartości x daje same skończone pierwiastki η. Funkcya η nie posiada zatem osobliwych punktów c_s leżących w skończoności. Wskutek tego elementowi (6) odpowie tu element $\eta=\varphi(x-a)$, gdzie φ jest albo zwykłym szeregiem potęgowym, albo ma postać (5) i jest na podstawie tego, co się dotąd powiedziało, zbieżnym w zakresie sięgającym do pewnego punktu $d_s=\delta$, najbliżej punktu a położonego. Rozwińmy dalej w (7) $1/f_0(x)$ podług potęg $(x-a)$ i połóżmy $[1/f_0(x)]=\mathfrak{P}_1(x-a)/(x-a)^\alpha$, to mieć będziemy:

$$y=\varphi(x-a)\,.\,\mathfrak{P}_1(x-a)/(x-a)^\alpha.$$

Tu $\varphi(x-a)$ ma zakres zbieżności sięgający do δ, a $\mathfrak{P}_1(x-a)$ zakres zbieżności sięgający do punktu $c_s=\gamma$, który leży najbliżej punktu a. Wskutek tego i tu element (6) będzie zbieżny w zakresie sięgającym do punktu δ, lub do punktu γ, według tego który z nich mniej jest oddalony od punktu a. Taki element nie różni się więc pod względem zakresu zbieżności od elementów przód już uwzględnionych.

Zajmijmy się wreszcie punktem $x=\infty$, i weźmy pod uwagę jeden element:

(8) $$y=\psi(x)$$

z otoczenia tego punktu. $\psi(x)$ jest tu funkcyą albo argumentu x^{-1}, albo argumentu $x^{-\frac{1}{\lambda}}$, $\lambda>1$, i przedstawia się w szeregu, który albo zawiera same dodatne potęgi tych argumentów, albo zawiera i odjemne potęgi ale tylko o skończonych wykładnikach. Aby o zakresie zbieżności takiego elementu rozstrzygnąć, połóżmy w samem równaniu $x=1/z$, $y=\eta$, to dostaniemy równanie $f_1(z,\eta)=0$.

W niem punktowi $x=\infty$ odpowiada punkt $z=0$, a funkcya η ma punkta nieskończonościowe c_s^{-1}, a punkta wielokrotne d_s^{-1}. Elementowi (8) odpowie tu element:

(9) $$\eta=\psi_1(z),$$

który będzie postaci (3), (5), albo (6) — ($a=0$) — i będzie zbieżny w zakresie sięgającym do takiego z punktów c_s^{-1}, d_s^{-1}, który jest najbliżej punktu $z=0$.

Nazwijmy ten punkt $1/\varepsilon$, to zakres zbieżności elementu (9) określi się nierównością $|z|<|1/\varepsilon|$. Z niej dochodzimy do nierówności $|x|>\varepsilon$, dający zakres zbieżności elementu (8), a stąd wnosimy: każdy element y otaczający punkt $x=\infty$ zbieżny jest poza kołem, którego środek jest $x=0$, a którego obwód przechodzi przez punkt c_s lub punkt d_s najdalej oddalony od punktu $x=0$.

60. Funkcya algebraiczna. Jej monogeniczność i charakterystyczne jej własności. Dwa zadania z eliminacyi. Z poszukiwań ostatnich artykułów wynika taka charakterystyka funkcyi algebraicznej $y=\varphi(x)$:

1. Funkcya algebraiczna jest m-wartościowa na każdem miejscu x swego argumentu.

2. Po wyjęciu skończonej tylko ilości miejsc x daje się każda jej gałąź w otoczeniu każdego miejsca a leżącego w skończoności przedstawić zwykłym szeregiem potęgowym argumentu $(x-a)$.

3. Na skończonej tylko ilości miejsc a dostajemy dla ich otoczeń rozwinięcia postępujące podług całkowitych, dodatnich i odjemnych potęg argumentu $(x-a)$, ale odjemne potęgi występują zawsze tylko ze skończonymi wykładnikami.

4. Na skończonej tylko ilości miejsc a dostajemy dla ich otoczeń rozwinięcia postępujące podług całkowitych potęg argumentu $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$, $\lambda>1$, całkowite, a więc z ułamkowym wykładnikiem $1/\lambda$, a jeżeli i odjemne potęgi tego argumentu $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ mają się tam zawierać, to występują tylko ze skończonymi wykładnikami.

Połóżmy w tym razie:

$$(1) \qquad y_s=g[\varepsilon^s(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}],\ s=0,1,2,\ldots,\lambda-1,\ \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{\lambda}},$$

bez różnicy, czu tu wchodzą, lub nie, odjemne potęgi argumentu $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$, to widocznie $y=g(0)$ należy do λ gałęzi

$$(2) \qquad y_0,\ y_1,\ldots,\ y_{\lambda-1}$$

funkcyi y, a przejście z jednej takiej gałęzi do następnej odbywa się tu przez jednokrotne okrążenie punktu a po drodze mieszczącej się całkowicie w zakresie zbieżności elementu (1).

Mamy bowiem:

$$y_0 = g[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}],\ y_1 = g[\varepsilon(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}] = g[(\overline{x-a}.e^{2\pi i})^{\frac{1}{\lambda}}],$$

$$y_2 = g[\varepsilon^2(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}] = g[(\overline{x-a}.e^{4\pi i})^{\frac{1}{\lambda}}],\ \text{i t. d.}$$

Po λ okrążeniach powracamy znowu do gałęzi pierwszej y_0, gdyż:

$$y^{\lambda+1} = g[\varepsilon^\lambda(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}] = g[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}] = y_0.$$

Z tego powodu nazywamy element (1) cyklem, albo elementem cyklicznym λ^{go} stopnia funkcyi algebraicznej, a punkt a punktem rozgałęzienia funkcyi y. [Wartość a z wartością y spełniającą tu równanie $f=0$ może być zwykłym lub wielokrotnym punktem samego obrazu alg. $f=0$.]

5. W otoczeniu punktu $x=\infty$ możemy mieć:

a) rozwinięcia postępujące podług samych całkowitych dodatnych potęg argumentu x^{-1}.

b) rozwinięcia postępujące podług całkowitych, dodatnich i odjemnych potęg tego argumentu, ale odjemne potęgi występują tylko ze skończonymi wykładnikami.

c) rozwinięcia postępujące podług całkowitych potęg argumentu $(x^{-1})^{\frac{1}{\lambda}}$, a jeżeli i odjemne potęgi tego argumentu występują, to tylko ze skończonymi wykładnikami.

Nazwijmy takie rozwinięcie:

$$(3)\qquad y_s = g\left[\varepsilon^s\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right],\ \text{gdzie znowu } s=0,1,2,\ldots,\lambda-1,\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}},$$

to i tu taki element nazywamy cyklem stopnia λ^{go}, a $g(\infty)$ należy do λ gałęzi funkcyi y.

Zastąpmy w pierwszej gałęzi $y_0 = g\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]$ argument x przez $xe^{-2\pi i}$, co oznacza, że punkt $x=\infty$ okrążamy w dodatnim kierunku (a punkt $x=0$ w kierunku odjemnym), to otrzymamy z gałęzi y_0 gałąź drugą, bo:

$$g\left(\frac{1}{xe^{-2\pi i}}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = g\left[\varepsilon.\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right],\ \text{a więc } = y_1.$$

Po dwóch, trzech, ... okrążeniach dostaniemy $y_2, y_3, \ldots$, a po λ okrążeniach wrócimy znowu do gałęzi y_0.

Zauważyć przytem potrzeba, że k okrążeń, gdzie $k \leqq \lambda-1$, zastosowanych równocześnie do gałęzi (2), złączonych w cyklu (1) lub (3), zmienia porządek gałęzi $y_0, y_1, \ldots, y_{\lambda-1}$ na porządek:

$$y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{\lambda-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}.$$

Zestawiliśmy w ten sposób wszystkie już własności m-wartościowej funkcyi algebraicznej y, odnoszące się do jej rozwinięć. Pozostaje więc teraz jeszcze rozstrzygnąć, czy i o ile jest taka funkcya monogeniczną? [Monogenicznemi były n. p. funkcye algebraiczne, przytoczone w art. 19.]. Do tego potrzeba takich przygotowań: Uważajmy każdą z m gałęzi y_α za osobną funkcyę i przyjmijmy, że się w całej algebraicznej funkcyi nie pojawia wcale cykliczny element [postaci (1) lub (3)]. W takim razie każda gałąź y_α ma charakter wyłącznie funkcyi wymiernej, a jako taka jest wprost funnkcyą wymierną. [T. I., art. 206.]. Połóżmyż:

$$y_\alpha = R_\alpha(x), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

gdzie R_α jest znakiem funkcyi wymiernej, to mamy:

$$f(xy) = (y-R_1)(y-R_2)\ldots(y-R_m),$$

co się sprzeciwia założeniu, że $f(x, y)$ jest funkcyą nieprzywiedlną. Mamy więc twierdzenie:

I. *W funkcyi algebraicznej żadna z jej gałęzi nie występuje luźnie, ale w jednym przynajmniej punkcie łączy się za pomocą cyklicznego elementu z inną lub innemi gałęziami.*

Mając, to przyjmijmy, że nie m gałęzi, ale tylko k gałęzi:

(4) $$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k, \quad k < m$$

łączy się z sobą monogenicznie, a więc przejście z którejkolwiek z tych gałęzi do gałęzi pozostałych $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_m$ nie jest już możliwe. Utwórzmy symetryczną funkcyę: $s_p = y_1^p + y_2^p + \ldots + y_k^p$, w której p jest całkowitą dodatnią, dowolną liczbą, to gdy a jest jakiemkolwiek takiem miejscem x, że na niem wszystkie gałęzie (4) mają rozwinięcia postępujące podług samych całkowitych potęg, będzie w otoczeniu takiego miejsca:

$$y_\alpha = P_\alpha(x-a), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k,$$

a także i s_p dostaniemy w postaci:

(a) $$s_p = P(x-a).$$

Gdy $a = \infty$, to mamy: $y_\alpha = P_\alpha(x^{-1})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, k$, a

(b) $$s_p = P(x^{-1}).$$

W (a) i (b) albo nie występują wcale ujemne potęgi argumentu $(x-a)$ lub x^{-1}, albo — jeżeli występują — to tylko ze skończonymi wykładnikami.

Gdy a jest takiem miejscem, na którem λ gałęzi (4) łączy się z sobą za pomocą cyklicznego elementu: $P_1[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}]$, $\lambda>1$, ale $\leqq k$, to — nazywając te gałęzie $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ — mamy:

$$y_1=P_1[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}],\ y_2=P_1[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon],\ \ldots,\ y_\lambda=P_1[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^{\lambda-1}].$$

Stąd dostajemy:

$$y_\alpha{}^p=\{P_1[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^{\alpha-1}]\}^p=P_2[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^{\alpha-1}],\quad \alpha=1,2,\ldots,\lambda,$$

$$(5)\quad s_p=P_2[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}]+P_2[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon]+\ldots+P_2[(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^{\lambda-1}]+(y_{\lambda+1}+\ldots+y_k).$$

Uporządkujmy tu nasamprzód sumę λ pierwszych dodajników podług potęg argumentu $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$. W niej spółczynnik potęgi $(x-a)^{\frac{n}{\lambda}}$, $n\gtreqless 0$, będzie postaci:

$$A_n[\varepsilon^{0.n}+\varepsilon^{1.n}+\varepsilon^{2.n}+\varepsilon^{3.n}+\ldots+\varepsilon^{(\lambda-1)n}],\quad \text{a że}$$

$$\varepsilon^{0.n}+\varepsilon^{1.n}+\varepsilon^{2.n}+\ldots+\varepsilon^{(\lambda-1)n}=\begin{cases}0, & \text{gdy } n \textit{ nie}\equiv 0\ (\textit{mod}\,\lambda)\\ \lambda, & \text{gdy } n\equiv 0\ (\textit{mod}\,\lambda),\end{cases}$$

więc stąd wynika $s_p=P_3{}'(x-a)+(y_{\lambda+1}+\ldots+y_k)$. Lecz, że i suma $(y_{\lambda+1}+\ldots+y_k)$ po jej uporządkowaniu da znowu rozwinięcie bez ułamkowych wykładników, więc ostatecznie mieć będziemy:

$$(c)\qquad s_p=P_3(x-a).$$

I tu znowu ujemne potęgi argumentu $(x-a)$ albo wcale nie wystąpią, albo — jeżeli wystąpią — to tylko ze skończonymi wykładnikami. W razie $a=\infty$, mamy:

$$y_\alpha{}^p=P_2[x^{-\frac{1}{\lambda}}\varepsilon^{\alpha-1}],\quad \alpha=1,\ldots,\lambda,\qquad \text{a}$$

$$(d)\qquad s_p=P_3(x^{-1})$$

z takiem, jak wyżej, zastrzeżeniem o ujemnych potęgach argumentu x^{-1}.

Z form (a), (b), (c), (d) wynika, że wszystkie s_p, $p=1, 2, 3, \ldots$, są wymiernemi funkcyami argumentu x. Wiadomo dalej, że elementarne symetryczne funkcye:

$$(6)\qquad (y_1+y_2+\cdots+y_k),\ (y_1y_2+\cdots),\ \ldots,\ (y_1\cdot y_2\cdots y_k)$$

wyrażają się przez s_p, $p=1, 2, 3, \ldots$, a więc tu i przez x, wymiernie. Naznaczmyż funkcye (6), sprowadzając je do wspólnego mianownika przez

$$-\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)},\ +\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_0(x)},\ \ldots,\ \pm\frac{\varphi_k(x)}{\varphi_0(x)},$$

gdzie $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ są wymiernemi, całkowitemi w x, to równanie, któremu wszystkie gałęzie (4) zadość czynią, ma postać:

$$\varphi(xy) = \varphi_0(x)y^k + \varphi_1(x)y^{k-1} + \ldots + \varphi_k(x) = 0,$$

$\varphi(x, y)$ jest wymierną funkcyą i ma być podzielnikiem funkcyi $f(x, y)$. Lecz $f(x, y)$ jest według założenia nieprzywiedlną funkcyą i nie może mieć żadnego wymiernego podzielnika. Ta sprzeczność wynikła z założenia $k < m$, a usunie się ją zakładając $k = m$. *) Mamy więc twierdzenie:

II. *Każda funkcya algebraiczna (spełniająca nieprzywiedlne równanie) jest monogeniczną.* **)

Uwaga. Jeżeli w obszarze argumentu x funkcyi algebraicznej m-wartościowej znajduje się punkt a, którego otoczenie określa para funkcyj $x = a + t^m$, $y = P(t)$ albo — gdy $a = \infty$ — para funkcyj: $x = t^{-m}$, $y = P(t)$, to z nich wynika:

$$(\alpha) \quad y = P[(x-a)^{\frac{1}{m}}] \qquad \text{albo} \qquad (\beta) \quad y = P(x^{-\frac{1}{m}}).$$

Są to elementa cykliczne m^{go} stopnia, a monogeniczność funkcyi y jest w tym razie odrazu widoczną, bo czy-to za pomocą (α), czy za pomocą (β) przejście z każdej jej gałęzi do każdej innej jest bez wątpienia możliwe.

Później poznamy, że każdy obraz elgebraiczny da się sprowadzić na taki, który w nieskończoności posiada element (β). Ta ckoliczność dostarczy nam nowego dowodu monogeniczności funkcyi algebraicznej. [Weierstrass].

Przyjmijmy naodwrót, że mamy pewną wielowartościową funkcyę $u = \varphi(x)$, która ma wszystkie własności (1), ..., (5) funkcyi algebraicznej, wyliczone na str. 216., 217. Jej gałęzie w pewnym punkcie x niech mają wartości $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$.

Zauważmy tu znowu symetryczną funkcyę:

$$\sigma_p = u_1^p + u_2^p + \ldots + u_m^p$$

dla otoczeń rozmaitych miejsc x. Taka funkcya σ_p będzie posiadała rozwinięcia o postaciach (a), (b), (c), (d), jakie wywiedliśmy przódy dla funkcyi s_p.

σ_p jest więc funkcyą wymierną argumentu x, i takiemi będą również wszystkie funkcye symetryczne, utworzone z $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Z tego wynika, że i równanie:

$$(7) \qquad (u - u_1)(u - u_2)\ldots(u - u_m) = 0$$

będzie wymierne w x i u, co wskazuje, że u jest algebraiczną funkcyą. Jeżeli równanie jest nieprzywiedlne, to funkcya u jest monogeniczną, czyli inaczej: w gałęziach $u_1, u_2, \ldots, u_m$ mamy wtedy jedną tylko funkcyę algebraiczną.

---

*) Por. Appell-Goursat: *„Théorie des fonctions algébriques."* (Paris 1895)., str. 177—178.

**) Co do wartości funkcyi, otrzymanych przez jej przeprowadzenie, czytaj: C. Runge: *„Ueber den Zusammenhang der Werthe einer algebraischen Function"* C. J. T. 97., str. 337—344.

Ograniczając się zawsze do niewrzywiedlności równania, dostajemy twierdzenie:

III. *Każda funkcya wielowartościowa posiadająca charakter funkcyi algebraicznej jest algebraiczną.*

Z monogeniczności funkcyi algebraicznej skorzystamy, aby dowieść takiego twierdzenia:

IV. *Gdy dane są dwa równania algebraiczne:*

$$F(x,\xi,\eta)=0\,,\quad G(x,\xi,\eta)=0$$

trzech zmiennych x, ξ, η, *a ich rugownik* $\varphi(\xi,\eta)=0$ *jest równaniem nieprzywiedlnem, to równania te mają jeden tylko wspólny pierwiastek* x, *wyrażający się wymiernie przez miejsce* (ξ, η) *równania* $\varphi=0$.

Równanie $\varphi=0$ będąc nieprzywiedlnem, ma same różne między sobą pierwiastki $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ (zależne od bieżącego ξ). Do każdego niepowtarzającego się pierwiastka η_α równania $\varphi=0$ należy jeden tylko wspólny pierwiastek x_α i ten wyraża się wymiernie przez η_α i spółczynniki danych równań [T. I., art. 125., tw. I.].

Połóżmyż:

$$x_\alpha=R(\eta_\alpha,\xi)\,, \tag{8}$$

gdzie R jest znakiem funkcyi wymiernej, to zauważymy tu, że wskutek monogeniczności funkcyi η dostaniemy z (8) wszystkie wspólne pierwiastki przez schodzenie z η_α na inne gałęzie funkcyi η. Wskutek tego możemy w (8) znaczek α opuścić przy x i przy η i położyć: $x=R(\eta,\xi)$ c. *b. d. d.*

Przyjmijmy przeciwnie, że równanie $\varphi=0$ ma λ-krotny pierwiastek η_α przy bieżącem ξ, co znaczy, że φ mieści w sobie czynnik wymierny $\varphi_1{}^\lambda$, a równanie nieprzywiedlne $\varphi_1=0$ ma między innymi pierwiastek jednokrotny η_α. Do takiego η_α należeć będzie podług teoryi eliminacyi λ wspólnych pierwiastków x, a te wszystkie będą pierwiastkami pewnego równania algebraicznego:

$$M_0(\eta_\alpha\xi)x^\lambda+M_1(\eta_\alpha\xi)x^{\lambda-1}+\ldots+M_\lambda(\eta_\alpha\xi)=0$$

o wymiernych spółczynnikach $M_0, M_1, \ldots, M_\lambda$ w η_α, ξ. Lecz i tu znaczek α opuścić można i położyć:

$$M_0(\eta,\xi)x^\lambda+M_1(\eta,\xi)x^{\lambda-1}+\ldots+M_\lambda(\eta,\xi)=0\,,$$

gdzie (η,ξ) jest miejscem równania $\varphi_1(\xi,\eta)=0$.

W razie $\varphi(\xi\,\eta)=[\varphi_1(\xi\,\eta)]^\lambda$ mamy twierdzenie:

V. *Gdy rugownik* $\varphi(\xi,\eta)$ *równań* $F=0$, $G=0$ *jest* λ^{ta} *potęgą nieprzywiedlnej już funkcyi* φ_1, *to wszystkie wspólne pierwiastki* x, *wynikają z równania* λ^{go} *stopnia w* x *o spółczynnikach wymiernych w* (η,ξ), *gdzie* (ξ,η) *jest miejscem równania* $\varphi_1=0$.

W podobny sposób, jak z równania $f(x,y)=0$ dostajemy algebraiczną funkcyę jednej zmiennej, da się z równania $f(x,y,z)=0$ wywieść funkcya algebraiczna z dwóch zmiennych x,y, a otoczenie każdego miejsca $x=a$, $y=b$, $z=c$ da się określić jedną trójką lub kilkoma trójkami funkcyj dwóch zmiennych pośredniczących. [Por. G. Kobb· *„Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables"*. *Journal de Mathématiques* T. 8., S. 4., str. 385—419].

ROZDZIAŁ VII.

Geometryczne badania. Krzywe dołączone. Rodzaj (defekt) krzywych algebraicznych.

61. Geometryczne badania punktów wielokrotnych. Równanie algebraiczne $F(x,y)=0$ można uważać za równanie określające na płaszczyźnie $[x,y]$ prostokątnych osi Descartes'a pewną krzywę algebraiczną, którą, gdy równanie $F=0$ jest nieprzywiedlne, nazwimy również nieprzywiedlną. Za pomocą takiego równania można badać własności tej krzywej, do czego tu przejdziemy, zajmując się na przód, niezależnie od równania $F=0$, podstawieniem:

$$(A)\qquad \left.\begin{matrix} x=(g+\alpha\eta)\xi \\ y=(h+\beta\eta)\xi \end{matrix}\right\}, \quad \text{gdzie } g\beta-h\alpha=1.$$

Z niego dostajemy naodwrót:

$$(B)\qquad \xi=\beta x-\alpha y,\quad \eta=(gy-hx)/(\beta x-\alpha y).$$

Jak długo x,y nie są równocześnie zerami, tak długo każdemu punktowi (x,y) odpowiada jeden tylko punkt (ξ,η). Wyjątkowe zachowanie się wykazuje punkt P o współrzędnych $(x,y)=(00)$.

Gdy bowiem $x=y=0$, to z (A) wynika, że musi być $\xi=0$ przy dowolnem η, [podczas gdy dla $\xi\neq0$ nie ma wartości η dających w (A) $x=y=0$, gdyż nie może być $g/\alpha=h/\beta$]. To samo wynika i z (B), gdzie widocznie dla $x=y=0$ jest $\xi=0$, a

$$\eta=\left(g\frac{y}{x}-h\right)\bigg/\left(\beta-\alpha\frac{y}{x}\right)$$

może przybierać dowolną wartość, zależną od stosunku y/x, t. j. od kierunku, w jakim zbliżamy się do punktu P. Punktowi P odpowiada więc właściwie nieograniczona prosta: $\xi=0$. Połóżmy dalej

$$\xi=(g_1+\alpha_1\eta_1)\xi_1,\quad \eta=(h_1+\beta_1\eta_1)\xi_1,\quad [g_1\beta_1-h_1\alpha_1=1],\quad \text{a więc:}$$
$$\xi_1=\beta_1\xi-\alpha_1\eta,\quad \eta_1=(g_1\eta-h_1\xi)/(\beta_1\xi-\alpha_1\eta),$$

to otrzymamy:

$$(A_1)\qquad \begin{aligned} x&=[g+\alpha(h_1+\beta_1\eta_1)\xi_1].(g_1+\alpha_1\eta_1)\xi_1 \\ y&=[h+\beta(h_1+\beta_1\eta_1)\xi_1].(g_1+\alpha_1\eta_1)\xi_1, \end{aligned}$$

i naodwrót:

$$\xi_1=\beta_1(\beta x-\alpha y)-\alpha_1\frac{gy-hx}{\beta x-\alpha y}$$

$$(B_1)\qquad \eta_1=\frac{g_1\dfrac{gy-hx}{\beta x-\alpha y}-h_1(\beta x-\alpha y)}{\beta_1(\beta x-\alpha y)-\alpha_1\dfrac{gy-hx}{\beta x-\alpha y}}.$$

I tu punkt $(x,y)=(0,0)$ zachowuje się wyjątkowo. Z (A_1) wynika bowiem, że każdemu punktowi leżącemu

(C) na prostej $\xi_1=0$, albo na prostej $\eta_1=-\dfrac{g_1}{\alpha_1}$

odpowiada zawsze punkt $(x,y)=(0,0)$.

Podstawienie (B_1) daje naodwrót punkta $(\xi_1\eta_1)$, odpowiadające punktom (x,y). Otóż połóżmy tam $x=y=0$, to — gdy założymy

$$1^0)\qquad l=\lim_{x=y=0}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{h}{g},$$

dostaniemy:

$$(D)\qquad (\xi_1=0,\ \eta_1=-h_1/\beta_1),$$

a to wskazuje, że punktowi P, gdy się do niego w kierunku $l=h/g$ zbliżamy, odpowiada jeden tylko punkt (D). Załóżmy:

$2^0)$ $l \neq h/g$ i zupełnie dowolne.

Wtedy i ξ_1 jest dowolne, a $\eta_1=-g_1/\alpha_1$, co znaczy, że przy takiem zbliżaniu się do punktu P odpowiada temu punktowi cała prosta o równaniu $\eta_1=-g_1/\alpha_1$.

Mając te uwagi przyjmijmy, że w krzywej $F=0$ ma być punkt $M=(a,b)$ μ-krotnym. Wtedy zastępując x, y odpowiednio przez $a+x$, $b+y$ dostaniemy:

$$(1)\qquad F(a+x,b+y)=f(xy)=(xy)_\mu+(xy)_{\mu+1}+\ldots=0,\ \mu\geqq 1.$$

Przyjmijmy:

$$(2)\qquad (xy)_\mu=(gy-hx)^\nu(g'y-h'x)^{\nu'}\ldots,\quad \nu+\nu'+\ldots=\mu>1,$$

to przez punkt M przechodzi ν gałęzi

$$(3)\qquad G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_\nu$$

o wspólnej stycznej $gy-hx=0$ w punkcie M, dalej ν' gałęzi o wspólnej stycznej $g'y-h'x=0$ w punkcie M i t. d. Połóżmy:

$$(4)\qquad x=(g+\alpha\eta)\xi,\quad y=(h+\beta\eta)\xi,\quad g\beta-h\alpha=1,$$

to otrzymąmy równanie:

(5) $$\xi^{\mu}\varphi_1(\xi\,\eta)=\xi^{\mu}[(\xi\,\eta)_{\mu_1}+(\xi\,\eta)_{\mu_1+1}+\ldots]=0,$$
w którem albo jest $\mu_1=1$, albo $\mu_1>1$.

Aby poznać, jaki wpływ mają te dwa różne wypadki na sam punkt μ-krotny M, przyjmijmy nasamprzód $\mu_1>1$, w którym-to razie jest $\nu>1$ i $(g,h)_{\mu+1}=0$ [art. 57].

Przetnijmy krzywę (5) prostą:

(6) $$\eta=\sigma\,\xi$$
z zastrzeżeniem, że σ nie jest pierwiastkiem σ_k równania $(1,\sigma)_{\mu_1}=0$. *) Spółrzędne ξ punktów przecięcia da równanie:
$$\xi^{\mu}.\,\xi^{\mu_1}[(1,\sigma)_{\mu_1}+(1,\sigma)_{\mu_1+1}\xi+\ldots]=0,$$
a że $(1,\sigma)_{\mu_1}\neq 0$, więc to wskazuje, że prosta (6) ma z krzywą (5) w punkcie $M_1=(\xi=0,\eta=0)$ $(\mu+\mu_1)$ punktów wspólnych, a to: z μ-krotną prostą $\xi=0$ punktów μ, a z krzywą $\varphi_1=0$, która w M_1 posiada punkt μ_1-krotny, punktów μ_1. Prostej (6) odpowie na płaszczyźnie $[x,y]$ parabola:

(7) $$(gy-hx)=\sigma(\beta x-\alpha y)^2, \quad [\text{por. } (B_1)],$$
przechodząca przez punkt M i mająca w nim styczną $gy-hx=0$. Że zaś w podstawieniu (4) odpowiada punktowi M_1 punkt M jednoznacznie, więc parabola (7) mieć będzie z krzywą $f=0$ w punkcie M dokładnie $\mu+\mu_1$ punktów wspólnych. Z nich μ policzyć trzeba na karb punktu μ-krotnego M, nowych zaś μ_1 punktów tem tylko można uzasadnić, że z gałęzi (3) μ_1 ich tworzy jeszcze w M nowy punkt μ_1-krotny. Są-to te gałęzie, które poszczególnie z parabolami

(8) $$(gy-hx)=\sigma_k(\beta x-\alpha y)^2, \quad k=1,2,\ldots,\mu_1,$$
mają po trzy punkty wspólne.

W razie $\mu_1=1$ mamy jedną tylko taką parabolę. Ta z jedną tylko z gałęzi (3) ma trzy punkta wspólne. Do punktu M nie przystępuje żaden nowy punkt wielokrotny.

Przyjmijmy, że $(\xi\,\eta)_{\mu_1}$ zawarte w φ_1 zawiera czynnik $(g_1\eta-h_1\xi)^{\nu_1}$ z wykładnikiem $\nu_1>1$, to kładąc:
$$\xi=(g_1+\alpha_1\eta_1)\xi_1, \quad \eta=(h_1+\beta_1\eta_1)\xi_1, \quad [g_1\beta_1-h_1\alpha_1=1],$$
dostajemy $f(xy)=$

(9) $$\xi^{\mu}\xi_1^{\mu_1}\varphi_2(\xi_1\eta_1)=(g_1+\alpha_1\eta_1)^{\mu}\xi_1^{\mu+\mu_1}.\,\varphi_2(\xi_1\eta_1)=0,$$
gdzie $\varphi_2(\xi_1\eta_1)=(\xi_1\eta_1)_{\mu_2}+(\xi_1\eta_1)_{\mu_2+1}+\ldots$, a $\mu_2>1$.

Przetnijmy tu znowu krzywę (9) prostą:

(10) $$\eta_1=\tau\,\xi_1,$$

*) W razie $\sigma=\sigma_k$, jest $\eta-\sigma_k\xi=0$ jednym z liniowych czynników zawartych w $(\xi\eta)_{\mu_1}$.

gdzie τ nie ma być pierwiastkiem równania $(1, \tau)_{\mu_1}=0$, to prosta ta przetnie:

1^0) prostę:

$$(11) \qquad \eta_1 = -g_1/a_1 \quad \text{w punkcie:}$$

$$(a) \qquad \xi_1 = -g_1/a_1\tau, \quad \eta_1 = -g_1/a_1,$$

który trzeba policzyć μ razy, bo prosta (11) jest μ-krotną w (9);

2^0) prostę $\xi_1=0$ w punkcie:

$$(b) \qquad M_2 = (\xi_1=0, \eta_1=0),$$

a ten trzeba policzyć $(\mu+\mu_1)$ razy, bo prosta $\xi_1=0$ jest znowu $(\mu+\mu_1)$-krotną w (9);

(c) przecina dalej krzywę $\varphi_2(\xi_1\eta_1)=0$ μ_2-krotnie w punkcie M_2.

Punktowi (a) odpowiada na płaszczyźnie $[x, y]$ punkt M, bo punkt (a) leży na prostej (11). Punktom (b), (c) odpowiada również punkt M. Co się tyczy prostej (10), to jej na $[x, y]$ odpowie krzywa:

$$(12) \qquad \begin{aligned}&(\beta x - a y)[g_1(g y - h x) - h_1(\beta x - a y)^2] = \\ &= \tau[\beta_1(\beta x - a y)^2 - a_1(g y - h x)]^2\end{aligned}$$

[por. (B_1)]. Ma ona wyrązy najniższego stopnia:

$$(g y - h x)[g_1(\beta x - a y) - \tau a_1{}^2(g y - h x)],$$

posiada więc w M punkt podwójny o gałęziach Γ_1, Γ_2 ze stycznymi:

$$(\alpha) \quad g_1(\beta x - a y) - \tau . a_1{}^2(g y - h x) = 0, \qquad (\beta) \quad g y - h x = 0.$$

Pierwsza gałąź Γ_1, która w razie $g_1 \neq 0$ posiada w M styczną (α) różną od stycznej (β), będzie miała z $f=0$ μ punktów wspólnych, a te odpowiadają punktom (a). To samo odpowiadanie zatrzymać trzeba, gdy $g_1=0$. Druga gałąź Γ_2, której styczna daje zawsze

$$l = \lim_{x=y=0}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{h}{g},$$

przetnie $f=0$ w punkcie M razy $(\mu+\mu_1)$, a te przecięcia odpowiedzą punktom (b). Lecz że i punktom (c) odpowiedzieć musi punkt M μ_2-krotnie, więc stąd wnosić trzeba, że z gałęzi (3) μ_2 ich tworzy w punkcie M jeszcze nowy punkt μ_2-krotny.

Te same poszukiwania i uwagi odnieść trzeba do równań, jakie powstają z dalszych czynników, zawartych w $(\xi\eta)_{\mu_1}$ i jakie tworzą *pierwszą warstwę* przerobionych równań w otoczeniu punktu M.

Gdy jednem z równań drugiej już warstwy jest $\varphi_3(\xi_2\eta_2)=0$ i mieści w sobie $(\xi_2\eta_2)_{\mu_3}$, $\mu_3>1$, to znowu — podobnem, jak wyżej, rozumowaniem — wywnioskujemy, że w punkcie M oprócz punktu μ-krotnego mamy jeszcze punkta μ_k-krotne, $k=1, 2$ i punkt μ_3-krotny.

Wyjmijmyż z równań przerobionych, do których otoczenie punktu M prowadzi, wszystkie te, w których zawarte są wyrazy o najniższym wymiarze w jeszcze >1 i nazwijmy te równania:

$$(13) \qquad \varphi_1=0, \; \varphi_2=0, ..., \; \varphi_r=0, \quad \text{a w nich}$$
$$w= \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad ..., \quad \mu_r,$$

to z tego wywnioskujemy, że M jest punktem μ-krotnym mieszczącym w sobie jeszcze punkta μ_k-krotne, $k=1, 2, ..., r$, pochodzące z wszystkich gałęzi krzywej, przechodzących przez punkt M, a stąd twierdzenie:

I. *Gdy, szukając za wszystkiemi parami funkcyj otaczających miejsce μ-krotne M, dostajemy między przerobionemi równaniami r równań o wyrazach najniższych stopni $w>1$, to do takiego punktu M dołącza się jeszcze r innych punktów wielokrotnych.*

Taki punkt nazwać można: punktem μ-krotnym, złożonym. Szereg liczb $(\mu, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_r)$ jest jego złożeniem.

To samo odnosi się do punktów wielokrotnych w nieskończoności, jeżeli w miejsce danego równania rozważać będziemy przerobione $(u, v)_\mu + ... = 0$ [(6) art. 58.].

II. *Punkt M występuje sam — jest μ-krotnym punktem niezłożonym — jeżeli w $(x, y)_\mu$ są wszystkie $v=1$, albo g, h odnoszące się do $v>1$ dają $(g, h)_{\mu+1} \neq 0$.*

Pd. 1. W równaniu $xy^2+x^5+y^5=0$ jest punkt $M=(0,0)$ trzykrotnym z dołączeniem punktu dwukrotnego. [Pd. 1. art. 56].

Pd. 2. W równaniu $y^3+x^5+y^5=0$ jest punkt $M=(0, 0)$ również trzykrotnym z dołączeniem punktu dwukrotnego. [Pd. 3. art. 57.].

Pd. 3. W równaniu:

$$(A) \qquad x^{n-2}+(b_n x^n+b_{n-1} x^{n-1} y+...+b_0 y^n)=0, \; b_0 \neq 0,$$

które w otoczeniu punktu $M=(0, 0)$ zbadać chcemy, mamy $\mu=(n-2)$ i jeden tylko czynnik liniowy x w $(n-2)^{\text{giej}}$ potędze zawarty w $(x\,y)_{n-2}$. W tym czynniku jest $g=0$, $h=1$. Obierzmyż $\alpha=1$, $\beta=0$ i połóżmy: $x=\xi_1\eta_1$, $y=\xi_1$ (właściwie $y=-\xi_1$, lecz na naturę punktu M ta zmiana znaku nie wpłynie), to potem podstawieniu dojdziemy do pierwszego przerobionego równania uporządkowanego według wymiarów:

$$\varphi_1=b_0\xi_1^2+\xi_1^2(b_1\eta_1+b_2\eta_1^2+...+b_{n-5}\eta_1^{n-5})+$$
$$+(\eta_1^{n-2}+b_{n-4}\xi_1^2\eta_1^{n-4})+\xi_1^2(b_{n-3}\eta_1^{n-3}+...b_n\eta_1^n).$$

Mamy tu $w=\mu_1=2$ i znowu jeden tylko czynnik liniowy ξ_1 w potędze 2^{giej} zawarty w $(\xi_1\eta_1)_2$. Czynnik ten zawiera się jednak i w bezpośrednio wyższych funkcyach jednorodnych:

$$(\xi_1\eta_1)_3, \; (\xi_1\eta_1)_4, ..., \; (\xi_1\eta_1)_{n-3}, \quad [\text{jest ich: } (n-5)],$$

a wskutek tego i dalsze przerobione równanie nie będzie jeszcze miało wyrazów stopnia pierwszego. Połóżmyż znowu $\xi_1 = \xi_2 \eta_2$, $\eta_1 = \xi_2$, to dojdziemy do równania

$$\varphi_2 = b_0 \eta_2^2 + \eta_2^2 (b_1 \xi_2 + b_2 \xi_2^2 + \ldots + b_{n-7} \xi_2^{n-7})$$
$$+ (\xi_2^{n-4} + b_{n-6} \eta_2^2 \xi_2^{n-6}) + \eta_2^2 (b_{n-5} \xi_2^{n-5} + \ldots + b_n \xi_2^n) = 0.$$

W tem równaniu mamy znowu $w = \mu_2 = 2$. Czynnik liniowy η_2 w potędze 2giej jest znowu tylko jeden w $(\xi_2 \eta_2)_2$, a zawiera się jeszcze w dalszych jednorodnych funkcyach:

$$(\xi_2 \eta_2)_3,\ (\xi_2 \eta_2)_4, \ldots, (\xi_2 \eta_2)_{n-5}, \quad \text{[jest ich: } (n-7)].$$

Połóżmyż $\eta_2 = \xi_3 \eta_3$, $\xi_2 = \eta_3$, to dostaniemy:

$$\varphi_3 = b_0 \xi_3^2 + \xi_3^2 (b_1 \eta_3 + b_2 \eta_3^2 + \ldots + b_{n-9} \eta_3^{n-9})$$
$$+ (\eta_3^{n-6} + b_{n-8} \xi_3^2 \eta_3^{n-8}) + \xi_3^2 (b_{n-7} \eta_3^{n-7} +$$
$$+ b_{n-6} \eta_3^{n-6} + \ldots + b_n \eta_3^n) = 0.$$

W równaniu tem mamy znowu $w = \mu_3 = 2$, a czynnik ξ_3^2 zawiera się w dalszych jednorodnych funkcyach:

$$(\xi_3 \eta_3)_3,\ (\xi_3 \eta_3)_4, \ldots, (\xi_3 \eta_3)_{n-7}, \quad \text{[jest ich: } (n-9)].$$

Idąc tak w tworzeniu nowych przerobionych równań dalej, dojdziemy wreszcie — w razie parzystego n — do równania:

$$b_0 u^2 + u^2 (b_1 v) + (v^4 + b_2 u^2 v^2) + u^2 (b_3 v^3 + b_4 v^4 + \ldots + b_n v^n) = 0.$$

Połóżmy $u = u_1 v_1$, $v = u_1$ to ostatecznie mieć będziemy:

$$(\alpha) \qquad (u_1^2 + b_0 v_1^2) + v_1^2 (b_1 u_1 + b_2 u_1^2 + \ldots + b_n u_1^n) = 0.$$

W tem równaniu wskutek założenia $b_0 \neq 0$ nie zawiera się już żaden z czynników liniowych zawartych w $(u_1 v_1)_2$ w funkcyi $(u_1 v_1)_3$, a stąd wnosimy, że z niego dojdzie się już koniecznie do równania zawierającego wyrazy stopnia pierwszego.

Równań przerobionych o $w = 2$ mamy tu nasamprzód tyle, ile jest liczb w szeregu:

$$(n-5),\ (n-7), \ldots, 3,\ 1$$

a prócz tego jeszcze równanie (α). Razem więc tych równań jest $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ a stąd wynika:

Równanie (A), w którem $b_0 \neq 0$, a n parzyste założono, ma w punkcie $M = (0, 0)$ punkt $(n-2)$-krotny, do którego się dołącza $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ punktów dwukrotnych.

W razie nieparzystego n dojdziemy do równania:

$$b_0 u^2 + u^2 (b_1 v + b_2 v^2) + (v^5 + b_3 u^2 v^3) + u^2 (b_4 v^4 + b_5 v^5 + \ldots + b_n v^n) = 0.$$

Połóżmy tu $u = u_1 v_1$, $v = u_1$, to dostaniemy:

$$(\beta) \qquad b_0 v_1^2 + (u_1^3 + b_1 u_1 v_1^2) + v_1^2 (b_2 u_1^2 + b_3 u_1^3 + \ldots + b_n u_1^n) = 0.$$

To równanie posiada wprawdzie $w = 2$, ale z niego za podstawieniem $v_1 = u_2 v_2$, $u_1 = v_2$ dostaniemy już równanie o $w = 1$. W tym razie mamy więc równań o $w = 2$ nasamprzód tyle, ile jest liczb w szeregu:

$$(n-5),\ (n-7), \ldots 4,\ 2,$$

a oprócz tego jeszcze równanie (β). Razem więc takich równań jest $\left(\frac{n+1}{2} - 2\right)$, a stąd wynika:

Równanie (A), gdy $b_0 \neq 0$, a n nieparzyste, ma w punkcie $M=(0, 0)$ punkt ($n-2$)-krotny, do którego się dołącza $\left(\frac{n+1}{2}-2\right)$ punktów dwukrotnych.

Punkt M ma więc w obydwu wypadkach złożenie:

$$(n-2, 2, 2, \ldots, 2).$$

62. Warunki spowodowane punktami wielokrotnymi. Punkt $M_1=(a_1 b_1)$ niech będzie punktem wielokrotnym złożonym lub niezłożonym danej krzywej algebraicznej: $F(x, y)=0$. Zastąpmy tu x przez x/z a y przez y/z, to dostaniemy jednorodne już równanie $F_1(x, y, z)=0$, a jeżeli $(a_1 b_1)$ ma być punktem μ-krotnym, to w równaniu $F_1(a_1+h, b_1+k, 1+l)=(hkl)_0+(hkl)_1+(hkl)_2+\ldots=0$, gdzie $(hkl)_\alpha$ są jednorodnemi funkcyami stopnia α przyrostów h, k, l, musi być

$$(h, k, l)_0=(h, k, l)_1=\ldots=(h, k, l)_{\mu-1}=0.$$

Ma więc być:

$$(1)\qquad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} F_1(x, y, z)=0 \text{ dla } x=a_1,\ y=b_1,\ z=1$$

dla wszelkich dodatnich α, β, γ, dających sumę $(\alpha+\beta+\gamma)=0, 1, \ldots, \mu-1$.

Lecz, że każda funkcya jednorodna daje się wyrazić jednorodnie przez cząstkowe swoje pochodne jednakowego rzędu [T. I. art. 75.], więc wszystkie warunki (1) spełnią się już, gdy tylko założymy:

$$(2)\qquad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} F_1(x, y, z)=0 \text{ dla } x=a_1,\ y=b_1,\ z=1$$

i dla $(\alpha+\beta+\gamma)=\mu-1$.

Tych warunków jest $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$, a stąd twierdzenie:

I. *Gdy w równaniu $F(x, y)=0$ jest punkt $M_1=(a_1, b_1)$ μ-krotnym niezłożonym, to między spółczynnikami tego równania a spółrzędnemi a_1, b_1 zachodzi $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ takich związków, które za sobą już i inne związki koniecznie tu istniejące pociągają.*

Gdy punkt M_1 jest punktem złożonym, to w każdym razie warunki (2) muszą tu zajść.

Przyjmijmy dalej, że między równaniami pierwszej warstwy mamy jedno wskazujące na dołączający się punkt μ_1-krotny i że do tego równania prowadzi podstawienie:

$$x=a_1+(g+\alpha\eta)\xi,\ y=b_1+(h+\beta\eta)\xi.$$

Wstawiając to w równanie $F=0$ mamy używając formuły Taylora:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left[(g+\alpha\eta)\frac{\partial}{\partial x}+(h+\beta\eta)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\nu}\xi^{\nu}F(x,y)_{x=a_1,\, y=b_1}=0,$$

albo — ponieważ w tej sumie zawarta częściowa suma $\sum_{\nu=0}^{\mu-1}$ już wskutek warunków (2) jest zerem — mieć będziemy po opuszczeniu czynnika ξ^{μ}:

$$\frac{1}{\xi^{\mu}}\sum_{\nu=\mu}^{n}\left[(g+\alpha\eta)\frac{\partial}{\partial x}+(h+\beta\eta)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\nu}\xi^{\nu}F(x\, y)_{x=a_1,\, y=b_1}=$$

$$\Phi(\xi\,\eta)=(\xi\,\eta)_0+(\xi\,\eta)_1+\ldots=0.$$

Tutaj ma być identycznie:

$$(\xi\,\eta)_0=(\xi\,\eta)_1=\ldots=(\xi\,\eta)_{\mu_1-1}=0.$$

Zastąpmyż znowu ξ, η przez ξ/ζ, η/ζ, to doszedłszy do jednorodnego równania $\Phi_1(\xi,\eta,\zeta)=0$ dostaniemy nowych $\frac{\mu_1(\mu_1+1)}{2}$ warunków analogicznej postaci, jak warunki (2).

Przechodząc w ten sposób wszystkie równania pierwszej, drugiej... warstwy dające wyrazy najniższych wymiarów $w>1$ i te same rozumowania stosując do wszystkich wielokrotnych punktów

$$M_1,\ M_2,\ldots,\ M_c,\ldots,\ M_k,$$

które są już-to złożone już-to niezłożone, dojdziemy do wniosku:

I. *Jeżeli krzywa posiada k punktów wielokrotnych*

$$M_1,\ M_2,\ldots,\ M_c,\ldots,\ M_k$$

złożonych (lub niezłożonych), a przez $w=\mu'$ oznaczymy najniższe stopnie >1, jakie dla każdego punktu M_c w pierwszych, drugich,... przerobionych równaniach znajdujemy, to na ilość sprawdzających się tu związków dostajemy:

$$m=\sum_{c}\frac{\mu(\mu+1)}{2}+\sum_{c}\sum_{\mu'}\left[\frac{\mu'(\mu'+1)}{2}\right].$$

Tę sumę napiszmy krócej w ten sposób:

$$(a)\qquad m=\sum\left[\frac{\mu(\mu+1)}{2}\right],\quad \mu>1.$$

rozumiejąc, że sumowanie odnosi się i do wszystkich punktów M_c i do szeregów złożenia w każdym z tych punktów.

Utwórzmy teraz sumę:

$$(b)\qquad d=\sum\frac{\mu(\mu-1)}{2}$$

i spytajmy, jakie jej nadać można znaczenie? W każdym punkcie

μ-krotnym czy-to niezłożonym, czy wyjętym z punktu złożonego mamy $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ różniących się między sobą par gałęzi. Każda para tworzy punkt podwójny niezłożony, a wskutek tego możemy powiedzieć:

II. *Krzywę z punktami wielokrotnymi (o stopniach μ) sprawdzającą m związków (a) uważać można za krzywę, która posiada $d=\Sigma\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ punktów podwójnych niezłożonych (zwykłych punktów węzłowych lub punktów zwrotu bez różnicy).*

63. Uwzględnienie punktów wielokrotnych przy wyznaczaniu krzywej. Przyjmijmy, że może istnieć krzywa $F(x,y)=0$ n^{go} stopnia o k punktach wielokrotnych M_c z danemi w nich złożeniami, a te dane wyzyskać chcemy do jej wyznaczenia.

W całej dedukcyi artykułu poprzedzającego potrzeba wtedy spółrzędne $(a_1\, b_1),\ldots, (a_k\, b_k)$ punktów M_c, a dalej pary wprowadzonych ilości $(g,h),\ldots,(\alpha\,\beta)\ldots$ uważać do końca zadania za niewyznaczone.

Te ilości trzeba też za takie uważać i w m utworzonych warunkach, [art. poprzedz.].

$$(1)\quad \begin{array}{lll} F_{1s}(a_1\, b_1,\ g\, h,\ldots,\ \alpha\,\beta,\ldots)=0, & s=1,2,\ldots & \text{dla } M_1 \\ F_{2s}(a_2\, b_2,\ g'h',\ldots,\ \alpha'\beta',\ldots)=0, & s=1,2,\ldots & \text{dla } M_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{ks}(a_k b_k,\ g''h'',\ldots,\ \alpha''\beta''\ldots)=0, & s=1,2,\ldots & \text{dla } M_k, \end{array}$$

które co do formy znamy, a które są liniowe jednorodne w spółczynnikach równania $F=0$.

Przyjmijmy nasamprzód:

$$m>\frac{n}{2}(n+3).$$

Obierzmy h punktów, $\left(h<\frac{n}{2}(n+3)\right)$,

$$(2)\qquad P_1=(x_1 y_1),\quad P_2=(x_2 y_2),\ldots,\quad P_h=(x_h\, y_h)$$

poza punktami M_c, to do wyznaczenia krzywej n^{go} stopnia, która przez te punkta ma przechodzić, potrzeba jeszcze $\left[\frac{n}{2}(n+3)-h\right]$ warunków. Wyjmijmyż je z warunków (1), to dostaniemy krzywę

$$(3)\qquad F_1(x\,y,\ x_1 y_1,\ldots,\ x_h\, y_h,\ldots)=0,$$

która przez h punktów (2) przechodząc spełnia prócz tego jeszcze $\left[\frac{n}{2}(n+3)-h\right]$ związków (1).

(1). Jej spółczynniki będą wymiernemi funkcyami ilości:

$$x_1 y_1, ..., x_h y_h, a_1 b_1, ..., gh, ..., \alpha \beta, ...$$

Wstawmy je w pozostałe warunki (1), uważając $x_1 y_1, ..., x_h y_h$ za wiadome, to dojdziemy do $m - \frac{n}{2}(n+3) + h$ równań algebraicznych pomiędzy niewiadomemi $a_1 b_1, ..., g h, ..., \alpha\beta, ...$ Prócz tego mamy równania:

$$(4) \qquad g\beta - h\alpha = 1, ...$$

których przyjmijmy, że jest k_1. Wiążą one ze sobą co 4 ilości $(g, h, \alpha, \beta), ...$ ale że tu chodzi tylko o stosunki $g/h, ...$, więc w każdem z równań (4) można dwie ilości n. p. h, α, (lub g, β) wybrać dowolnie. Razem więc mieć będziemy $m - \frac{n}{2}(n+3) + h + k_1$ równań między $2k + k_1$ ilościami.

Ponieważ przyjmujemy, że krzywa jest możliwą, więc musi być:

$$(5) \quad m - \frac{n}{2}(n+3) + h + k_1 \leqq 2k + k_1, \; h = 0, 1, 2, ..., \frac{n}{2}(n+3) - 1.$$

Lewa strona nierówności (5) nigdy zerem być nie może, bo przyjęliśmy, że już $m > \frac{n}{2}(n+3)$, a stąd mamy twierdzenie:

I. *Gdy krzywa ma posiadać pewną ilość punktów wielokrotnych M_c o danych złożeniach, a warunków, któreby po jej wyznaczeniu charakteryzowały to jej zachowanie, jest więcej niż $\frac{n}{2}(n+3)$, to elementa $(a_\lambda, b_\lambda, g, \beta, ...)$ nie są nigdy wszystkie dowolne.*

Wypadek $m = \frac{n}{2}(n+3)$ także się tu zalicza, bo wtedy wyznacznik równań (1) musi być zerem.

Przyjmijmy teraz:

$$m < \frac{n}{2}(n+3)$$

Obierzmy znowu h punktów (2) poza M_c, gdzie już

$$m + h = \frac{n}{2}(n+3) \quad .$$

to te punkta razem z warunkami (1) — przy najdowolniejszych $a_1 b_1, ..., g h, ..., \alpha \beta, ...$ — wystarczają zawsze, aby wyznaczyć krzywę o żądanem zachowaniu się w M_c. Stąd twierdzenie:

II. *Gdy krzywa ma posiadać pewną ilość punktów wielokrotnych M_c o danych złożeniach, a warunków, któreby po jej wyznaczeniu charakteryzowały to jej zachowanie, jest $< \frac{n}{2}(n+3)$, to taką krzywę można utworzyć wybierając całkiem dowolnie $a_1 b_1, ..., g \beta, ...$*

Uwaga I. g, h i α, β odnoszą się w twierdzeniach I, II. do wszystkich równań o $w>1$, za wyłączeniem jednak tych z tych równań, które już bezpośrednio do równań o $w=1$ prowadzą.

Uwaga 2. Co się tyczy samych krzywych określonych w twierdzeniach I. i II., to mogą one wypaść już-to przywiedlne już-to nieprzywiedlne, a w warunki, za pomocą których możnaby z tych krzywych wydzielić same krzywe nieprzywiedlne, wchodzić tu nie będziemy.

Warunki określone w tw. I. wyrażają, że z miejsc przeznaczonych dla punktów wielokrotnych i ze stycznych w tych punktach nie wszystkie można wybrać dowolnie. Tak n. p. w krzywej 4^{go} stopnia można wybrać 3 miejsca dowolnie i umieścić w nich zwykłe punkta podwójne. Z 6 stycznych w tych punktach można jednak będzie 5 ich tylko obrać podług upodobania. W krzywej 5^{go} stopnia można będzie 5 miejsc obrać dowolnie, umieszczając w nich zwykłe punkta podwójne. Prócz tego jeszcze w jednym z tych punktów można będzie parę stycznych poprowadzić podług upodobania [Salmon, Fiedler]. Przeciwnie krzywe określone w tw. II. dopuszczają całkiem dowolne miejsca dla punktów wielokrotnych i całkiem dowolne kierunki stycznych w tych punktach.

64. Przecinanie się dwóch krzywych w ich punktach wielokrotnych. Niech będą dane dwie krzywe o równaniach $f=0$, $\varphi=0$ przecinające się w punkcie P, w którego otoczeniu ma być:

(1) $f=(xy)_\mu+\ldots=0,\ \mu\geqq 1,\quad \varphi=(xy)'_1+\ldots=0,\ (xy)'\neq 0.$

Jeżeli $(xy)_\mu$ nie jest podzielne przez $(xy)'_1$, to w P schodzi się tylko μ punktów przecięcia się krzywych (1). Przyjmijmy przeciwnie, że $(xy)_\mu$ jest podzielne przez $(xy)'_1=gy-hx$.

Połóżmy:

(a) $x=(g+\alpha\eta)\xi,\quad y=(h+\beta\eta)\xi,\quad [g\beta-h\alpha=1],$

to dostaniemy stąd równania:

(2) $f_1=(x\eta)_{\mu_1}+\ldots=0,\ \mu_1\geqq 1;\ \varphi_1=(\xi\eta)'_1+\ldots=0.$

Gdy $(\xi\eta)_{\mu_1}$ nie jest podzielne przez $(\xi\eta)'_1$, mają równania $f_1=0$, $\varphi_1=0$ w $(\xi\eta)=(00)$ tylko μ_1 punktów wspólnych, a że $(\xi\eta)=(00)$ jednoznacznie odpowiada punktowi P, więc w P mamy w tym razie $(\mu+\mu_1)$ punktów przecięcia się danych krzywych (1).

Przyjmijmy, że $(\xi\eta)_{\mu_1}$ zawiera w sobie jako czynnik:

$$(\xi\eta)'_1=g_1\eta-h_1\xi.$$

Za podstawieniem

(b) $\xi=(g_1+\alpha_1\eta_1)\xi_1,\quad \eta=(h_1+\beta_1\eta_1)\xi_1,\quad [g_1\beta_1-h_1\alpha_1=1],$

dojdziemy do równań:

(3) $f_2=(\xi_1\eta_1)_{\mu_2}+\ldots=0,\ \mu_2\geqq 1;\quad \varphi_2=(\xi_1\eta_1)'_1+\ldots=0.$

One — gdy $(\xi_1\eta_1)_{\mu_2}$ nie jest podzielne przez $(\xi_1\eta_1)'_1$ — dodadzą do $(\mu+\mu_1)$ punktów wspólnych w P jeszcze tylko μ_2 punktów wspólnych. Przeciwnie, gdy $(\xi_1\eta_1)_{\mu_2}$ jest podzielne przez $(\xi_1\eta_1)'_1$, trzeba z równań (3) jeszcze do dalszych przejść przez podstawienia wspólne, i t. d. Stąd mamy twierdzenie:

I. *Gdy dwie krzywe $f=0$, $\varphi=0$ mają punkt przecięcia się P, który dla jednej przynajmniej krzywej ($\varphi=0$) jest zwyczajnym, a w otoczeniu punktu P mamy:*

$$f=(xy)_\mu+...=0, \quad \varphi=(xy)'_1+...=0$$

to trzeba rozróżnić dwa wypadki:

1^0 *$(xy)_\mu$ nie jest podzielne przez $(xy)'_1$. W punkcie P mamy wtedy tylko μ punktów przecięcia się.*

2^0 *$(xy)_\mu$ jest podzielne przez $(xy)'_1$. Wtedy wspólnemi podstawieniami tworzymy szeregi równań:*

$$(\alpha)\quad f_1=0,\ f_2=0,\ ...,\ f_\lambda=0; \qquad (\beta)\quad \varphi_1=0,\ \varphi_2=0,\ ...,\ \varphi_\lambda=0,$$

kończące się na takiej, po raz pierwszy pojawiającej się parze równań $f_\lambda=0$, $\varphi_\lambda=0$, że w nich $(\xi_{\lambda-1}, \eta_{\lambda-1})_{\mu_\lambda}$ już nie jest podzielne przez $(\xi_{\lambda-1}\eta_{\lambda-1})'_1$. Gdy w $f_1, f_2, ..., f_\lambda$ są najniższe stopnie $w=\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\lambda$, to w P mamy punktów przecięcia się $\mu+\mu_1+\mu_2+...+\mu_\lambda$.

Uwaga. W szeregu (α) — gdy $\mu=1$ — znajdują się same równania o $w=1$; gdy zaś $\mu>1$, to w kilku końcowych równaniach (α) może, ale nie musi być $w=1$.

Załóżmy teraz, że w punkcie P, w którym się krzywe $f=0$, $\varphi=0$ ze sobą przecinają, ma krzywa $f=0$ punkt μ-krotny, a krzywa $\varphi=0$ punkt ν-krotny.

Po sprowadzeniu obu równań do otoczenia punktu P, mamy:

$$(1')\qquad f=(xy)_\mu+..=0,\ \mu>1; \quad \varphi=(xy)'_\nu+...=0,\ \nu>1.$$

Jeżeli $(xy)_\mu$, $(xy)'_\nu$ są względem siebie pierwsze, to krzywe w punkcie P mają tylko $\mu.\nu$ punktów przecięcia się, a nie więcej.

Przyjmijmy przeciwnie, że $(xy)_\mu$, $(xy)'_\nu$ mają wspólny podzielnik $(gy-hx)^a(g'y-h'x)^b$... Zauważmy liniowy wspólny czynnik:

$$(a')\qquad (gy-hx)^a$$

i przejdźmy przez podstawienia (a) do przerobionych równań:

$$(2')\qquad f_1=(\xi\eta)_{\mu_1}+...=0; \quad \varphi_1=(\xi\eta)'_{\nu_1}+...=0, \quad (\mu_1\geqq 1,\ \nu_1\geqq 1).$$

Jeżeli $(\xi\eta)_{\mu_1}$, $(\xi\eta)'_{\nu_1}$ są względem siebie pierwsze, to równania (2') dają tylko $\mu_1.\nu_1$ nowych punktów przecięcia się w P. Jeżeli przeciwnie $(\xi\eta)_{\mu_1}$, $(\xi\eta)'_{\nu_1}$ są współmierne, a w ich wspólnym podzielniku zawiera się czynnik liniowy:

$$(b')\qquad (g_1\eta-h_1\xi)^{a_1},$$

to za użyciem znowu podstawienia takiego jak (b), dojdziemy do nowej pary równań:

$$f_2=(\xi_1\eta_1)_{\mu_2}+...=0; \quad \varphi_2=(\xi_1\eta_1)'_{\nu_2}+...=0.$$

Jeżeli $(\xi_1\eta_1)_{\mu_2}$, $(\xi_1\eta_1)'_{\nu_2}$ są niewspółmierne, to te równania dodają tylko $\mu_2 . \nu_2$ nowych punktów przecięcia się w P. Przeciwnie w razie współmierności funkcyj $(\xi_1\eta_1)_{\mu_2}$, $(\xi_1\eta_1)'_{\nu_2}$ trzeba z tą parą równań tak postąpić, jak z równaniami (1') i (2'). Analogicznie trzeba rozumować o każdej parze równań w dowolnej leżących warstwie, badając wszelkie możliwe wspólne czynniki, zawarte w funkcyach jednorodnych najniższych stopni. To nas doprowadzi do takiego wniosku:

II. *Gdy dwie krzywe $f=0$, $\varphi=0$ przecinając się w punkcie P, mają w nim: pierwsza punkt μ-krotny, a druga punkt ν-krotny, to mogą zajść dwa wypadki:*

1°. *W równaniach: $f=(xy)_\mu+...=0$, $\varphi=(xy)'_\nu+...=0$ są $(xy)_\mu$, $(xy)'_\nu$ niewspółmierne. W tym razie mamy w P tylko $\mu\nu$ punktów przecięcia się.*

2°. *Gdy przeciwnie $(xy)_\mu$, $(xy)'_\nu$ są współmierne, a z równań: $f=0$, $\varphi=0$ przez jednakowe wciąż podstawienia wynikają pary równań $(f_\alpha=0, \varphi_\alpha=0)$, $\alpha=1, 2, ..., r$ o tej własności, że w każdej parze są wyrazy najniższych wymiarów: μ_α, ν_α jeszcze współmierne, to w P mamy $\sum_{\alpha=1}^{r} \mu_\alpha \nu_\alpha$ punktów wspólnych.*

Z tego twierdzenia skorzystamy, aby rozwiązać takie zadanie:

Dana jest krzywa $f=0$ nieprzywiedlna i stopnia n^{go} z punktem wielokrotnym $M_1=(a_1 b_1)$ o złożeniu:

$$(3) \qquad (\mu, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_p, ..., \mu_r).$$

W otoczeniu tego punktu mamy:

$$(4) \qquad f=(xy)_\mu+(xy)_{\mu+1}+...=0,$$

a przerobione równania są:

$$(5) \qquad f_1=0, f_2=0, ..., f_p=0, ..., f_r=0$$

o najniższych stopniach $w=\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p, ..., \mu_r$ większych od 1.

Mamy utworzyć taką krzywę $\varphi=0$ danego stopnia q, któraby w M_1 posiadała punkt wielokrotny o złożeniu:

$$(6) \qquad (\nu, \nu_1, \nu_2, ..., \nu_p, ..., \nu_r)$$

pochodzącem z tychsamych podstawień, co złożenie (3) punktu M_1 w danej krzywej, a potem wyznaczyć ilość punktów przecięcia się tych krzywych w punkcie M_1.

W otoczeniu punktu M_1 ma być:

$$(7) \qquad \varphi=(xy)'_\nu+(xy)'_{\nu+1}+...=0$$

a to wskazuje, że: 1°) między nieoznaczonymi spółczynnikami A, B, ... równania $\varphi=0$, a spółrzędnemi a_1, b_1 ma zachodzić $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$

równań i że: 2°) w punkcie M_1 dostaniemy przedewszystkiem $\mu.\nu$ punktów przecięcia.

Przyjmijmy, że do równania $f_1=0$ dochodzimy z $f=0$ przez podstawienie $x=(g+\alpha\eta)\xi$, $y=(h+\beta\eta)\xi$. Uwzględniwszy to sami podstawienie w (7), dostaniemy po skróceniu przez ξ^ν:

$$\varphi_1=(\xi\eta)'_0+(\xi\eta)'_1+\dots+(\xi\eta)'_{\nu_1-1}+(\xi\eta)'_{\nu_1}+\dots=0$$

Podług założenia jednak ma być identycznie:

$$(\xi\eta)'_0=(\xi\eta)'_1=\dots=(\xi\eta)'_{\nu_1-1}=0,$$

a to się spełnia przy nowych $\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}$ warunkach między ilościami A, B, ..., $a_1 b_1$, g, h. W tych warunkach zawiera się:

$$(gh)'_\nu=0, \text{ (i jeszcze } (gh)'_{\nu+1}=\dots=(gh)'_{\nu+\nu_1-1}=0),$$

a stąd pochodzi, że w równaniu (7) zawiera się w $(xy)'_\nu$ czynnik liniowy $(gy-hx)$.

Wskutek tego do $\mu.\nu$ już znalezionych punktów przecięcia się w M_1 dołączyć trzeba tu jeszcze nowych $\mu_1.\nu_1$ takich punktów pochodzących z równań:

$$(8) \qquad f_1=(\xi\eta)_{\mu_1}+\dots=0, \quad \varphi_1=(\xi\eta)'_{\nu_1}+\dots=0.$$

Gdy z pierwszego z tych równań dochodzimy do równania $f_2=(\xi_1\eta_1)_{\mu_2}+\dots=0$ przez podstawienia:

$$\xi=(g_1+\alpha_1\eta_1)\xi_1, \quad \eta=(h_1+\beta_1\eta_1)\xi_1$$

i to samo podstawienie zastosujemy do równania $\varphi_1=0$, dostajemy:

$$\varphi_2=(\xi_1\eta_1)'_0+(\xi_1\eta_1)'_1+\dots+(\xi_1\eta_1)'_{\nu_2-1}+(\xi_1\eta_1)'_{\nu_2}+\dots=0.$$

Lecz podług założenia ma być znowu identycznie:

$$(\xi_1\eta_1)'_0=(\xi_1\eta_1)'_1=\dots=(\xi_1\eta_1)'_{\nu_2-1}=0$$

przez co wprowadzamy znowu nowych $\frac{\nu_2(\nu_2+1)}{2}$ warunków między A, B, ..., a_1, b_1, (h, h), $(g_1 h_1)$. Między nimi mieści się warunek:

$$(g_1 h_1)_{\nu_1}=0 \text{ (i jeszcze } (g_1 h_1)'_{\nu_1+1}=\dots=(g_1 h_1)'_{\nu_1+\nu_2-1}=0)$$

co wskazuje, że w równaniach (8) są $(\xi\eta)_{\mu_1}$, $(\xi\eta)'_{\nu_1}$ współmierne i że z równań $f_2=0$, $\varphi_2=0$ dołączą się w M_1 do $(\mu\nu+\mu_1\nu_1)$ punktów przecięcia się jeszcze $\mu_2.\nu_2$ nowych takich punktów. W ten sposób postępujemy dalej, idąc z równania $f_1=0$ po pewnym łańcuchu wspólnych podstawień, a gdy wreszcie mamy już równania $f_{p-1}=0$, $\varphi_{p-1}=0$ pochodzące jeszcze z $(gy-hx)$, to one posiędą wspólny czynnik w swych wyrazach, najniższych stopni za wprowadzeniem nowych $\frac{\nu_p(\nu_p+1)}{2}$ warunków dających $\varphi_p=0$ w postaci

$(\xi_{p-1}\eta_{p-1})'_p+...=0$. Ostatnia para równań $f_p=0$, $\varphi_p=0$ daje $\mu_p.\nu_p$ punktów przecięcia się, a że innych już warunków nie wprowadzimy, więc w tej ostatniej parze równań uważać trzeba funkcye o najniższych stopniach za niewspółmierne; do $\mu_p\nu_p$ punktów przecięcia się nowe się nie dołączą, bo równania $f_p=0$, $\varphi_p=0$ nie dopuszczają już wspólnego podstawienia. W ten sam sposób trzeba dalej dalsze wyznaczać warunki, przechodząc podstawienia odnoszące się do wszystkich przerobionych równań (5). Z tego wynika:

Aby krzywa $\varphi=0$ o żądanej własności istniała, musi zajść między jej spółczynnikami $A, B, ...$ spółrzędnemi (a_1b_1) i ilościami $(gh), (g_1h_1), ..., (g'h'), (g'_1h'_1), ...$

$$m'=\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{\nu_\alpha(\nu_\alpha+1)}{2}$$

warunków. W punkcie M_1 przecina się taka krzywa z daną krzywą $f=0$ razy:

$$d'=\sum_{\alpha=1}^{r}\mu_\alpha\nu_\alpha.$$

Jeżeli krzywa $f=0$ ma k punktów wielokrotnych, złożonych w $M_1, M_2, ..., M_c, ..., M_k$, a krzywa $\varphi=0$ ma się w każdym z tych punktów zachowywać analogicznie, jak w punkcie M_1, to dostaniemy warunków:

$$m'=\sum_c\sum_\alpha\frac{\nu_\alpha(\nu_\alpha+1)}{2},$$

a z wszystkich punktów przecięcia się krzywych $f=0$, $\varphi=0$ wpada ich w $M_1, ..., M_c, ..., M_k$:

$$d'=\sum_c\sum_\alpha\mu_\alpha\nu_\alpha$$

punktów. Naznaczmy złożenie punktu M_c w krzywej $f=0$ przez

(9) $\qquad (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p)_c, \quad c=1, 2, ..., k,$

a złożenie tego punktu w krzywej $\varphi=0$ przez

(9') $\qquad (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_p)_c, \quad c=1, 2, ..., k,$

to — z tej uwagi, że przez wprowadzenie m' warunków utrzymujemy w każdym łańcuchu podstawień aż do ostatniej pary równań funkcye najniższego stopnia ciągle współmierne — wnioskujemy, że z wszystkich krzywych $\varphi=0$ dowolnego stopnia q, posiadających w punktach M_c dane złożenia (9'), te posiadać będą w M_c z krzywą najwięcej punktów przecięcia się, które właśnie utworzono podług wymogów postawionego zadania.

Zauważyć przy tem potrzeba: Ponieważ w każdej ostatniej parze równań przerobionych nie przestrzegamy już współmierności wyrazów najniższego stopnia, więc do punktów przecięcia się w M_c nie dołączy się w ogólności żaden punkt przecięcia się taki, któryby był zwyczajnym w krzywej $f=0$. Mamy więc twierdzenie:

III. *Aby krzywa $\varphi=0$ dowolnego stopnia posiadała punkta wielokrotne o dowolnych złożeniach $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_p)_c$ wpadające w punkta wielokrotne M_c o złożeniach $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p)_c$ pewnej danej krzywej $f=0$ i posiadała w M_c możliwie najwięcej punktów przecięcia się, potrzeba, aby jej spółczynniki spełniły $m'=\sum\limits_c \sum\limits_\alpha \frac{\nu_\alpha(\nu_\alpha+1)}{2}$ warunków.*

Każdą taką krzywę nazwiemy dołączoną o dowolnych złożeniach.

Podług twierdzenia II. — art. 63. — i uwagi tam zamieszczonej taka krzywa istnieje bezwarunkowo, gdy:

(10) $$m'<\frac{q}{2}(q+3)$$

Temu zawsze można zadość uczynić obierając początkowe ν_α nie zbyt duże i — jeżeli potrzeba — przechodząc jak najprędzej do $\nu_\alpha=1$, któreto wartości wliczamy do złożeń punktów M_c w krzywej $\varphi=0$. Nie jest zresztą wykluczone, aby ν_α już od początku nie można kłaść $=1$.

65. Dołączone krzywe. Rodzaj (defekt) krzywej. W krzywej $\varphi=0$ opisanej w art. poprzedzającym załóżmy wszystkie:

(1) $$\nu_\alpha=\mu_\alpha-1.$$

Taka krzywa spotrzebowuje w punktach M_c warunków:

(2) $$m'=\sum_c \sum_\alpha \frac{\mu_\alpha(\mu_\alpha-1)}{2}=d,$$

a ma tam z krzywą $f=0$ punktów przecięcia:

(3) $$\sum_c \sum_\alpha \mu_\alpha(\mu_\alpha-1)=2d,$$

gdzie d — jak przódy — jest ilością punktów podwójnych krzywej $f=0$.

Taką krzywę $\varphi=0$ nazywać będziemy krótko dołączoną krzywą stopnia q*).

*) O innych metodach oznaczania krzywych dołączonych czytaj: Noether Math. Ann. T. 23. str. 311—358. Raffy. Math. Ann. T. 23. str. 527—538. Tikhomandritzky. (Charków). *Ann. scient. de l'école N. sup.* T. 10. (S. 2. 1893.) str. 151—165.

Podług tw. II. art. 63. taka krzywa $\varphi=0$ będzie bezwarunkowo istniała, jeżeli po obliczeniu d w nieprzywiedlnej krzywej $f=0$ okaże się $m'=d<\frac{q(q+3)}{2}$. Widocznie przy dostatecznie dużych q ta nierówność się sprawdza, a więc i krzywa $\varphi=0$ dostatecznie dużego stopnia istnieje. Gdy teraz poszukamy najmniejszego stopnia $q=q_1$, przy którym jeszcze nierówność $d<\frac{q_1(q_1+3)}{2}$ się sprawdzi, to możemy być pewni, że: d będzie $=\frac{q_1(q_1+3)}{2}-\pi$, a π musi być >0. Przyjmijmyż $q_1<n$ i położmy $q_1=(n-\varkappa)$, to mamy:

$$d=\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2}-\pi \tag{4}$$

a teraz badać trzeba, przy jakich $\varkappa$ może być π dodatniem.

Krzywe $f=0$, $\varphi=0$ przecinają się w $n(n-\varkappa)$ punktach. W nich zawierać się musi $2d$ punktów przecięcia wpadających w M_c, a wskutek tego mamy koniecznie $n(n-\varkappa)-(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)+2\pi \geqq 0$, czyli:

$$\frac{(n-\varkappa)(\varkappa-3)}{2}+\pi \geqq 0.$$

Dla $\varkappa=1, 2$, jest $(n-\varkappa)(\varkappa-3)<0$, a więc być musi:

$$\pi \geqq \frac{(n-\varkappa)(3-\varkappa)}{2}, \quad \varkappa=1, 2, \tag{5}$$

($\varkappa \geqq 3$ uwzględnimy później). W tych dwóch wypadkach jest więc π dodatnie; skutkiem tego mamy tu:

$$m'=d<\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2}$$

a to wskazuje, że krzywe $\varphi=0$ o stopniach $(n-1)$, $(n-2)$ istnieją bezwarunkowo.

Lecz π — jak to zaraz zobaczymy — posiada większą dolną granicę od tej, jaką nierówność (5) wskazuje.

Wiadomo, że dla każdej krzywej stopnia $q<n$ można na krzywej $f=0$ stopnia n obrać dowolnie $\frac{q}{2}(q+3)$ punktów [T. I. art. 131. tw. I.]. Każdy taki punkt daje jeden warunek, a do tych warunków trzeba w naszym wypadku zaliczyć d warunków, które krzywę $\varphi=0$ zmuszają przecinać się z $f=0$ w punktach M_c razy $2d$. Poza M_c można więc dla $\varphi=0$ obrać jeszcze dowolnie:

$$\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2}-d$$

punktów. Każdy z nich będzie zarazem jednym punktem przecięcia się krzywych, a gdy do nich doliczymy jeszcze $2d$ punktów przecięcia się leżących w M_c, to musi być:

$$(6) \qquad \frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2}+d\leqq n(n-\varkappa).$$

Ograniczając się do $\varkappa=1,2$, uwzględnijmy tu (4), to mieć będziemy:

$$\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2}+\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2}-\pi\leqq n(n-k).$$

Stąd wynika $\pi\geqq(n-\varkappa)(3-\varkappa)$, $\varkappa=1,2$, a wskutek tego mamy

$$d\leqq\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2}-(n-\varkappa)(3-\varkappa),\quad \text{czyli:}$$

$$d\leqq\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\left(1+\frac{\varkappa^2-3\varkappa}{2}\right),\quad \varkappa=1,2,$$

co daje:

$$(a) \qquad d\leqq\frac{(n-1)(n-2)}{2}\quad \text{dla } \varkappa=1,2.$$

Lecz gdy przyjmiemy $d=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$, a $q=n-1$, to i tu jeszcze mieć będziemy:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1<\frac{(n-1)(n+2)}{2},$$

a to wskazuje, że dołączona krzywa $\varphi=0$ stopnia $(n-1)^{\text{go}}$ istnieje. Że zaś tu nierówność:

$$(7) \qquad \frac{(n-1)(n+2)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\leqq n(n-1),$$

utworzona na wzór (6) nie istnieje, bo po lewej stronie mamy tu $n(n-1)+1$, więc jeżeli już koniecznie zatrzymać chcemy możliwość istnienia $[n(n-1)+1]$ punktów przecięcia się, to to się stać może chyba tylko tym sposobem, że się $\varphi=0$ zawierać będzie w $f=0$; ale przez to $f=0$ nie jest już równaniem nieprzywiedlnem.

Stąd wnosimy, że nierówność (a) określa górną granicę liczby d, i mamy twierdzenie:

I. *Największa liczba punktów podwójnych, jaką może posiadać krzywa nieprzywiedlna stopnia n, jest* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Gdy d oznacza ilość punktów podwójnych, jaką nieprzywiedlna krzywa $f=0$ w istocie posiada, to rożnicę:

$$(8) \qquad p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d$$

która w krzywej nieprzywiedlnej jest koniecznie $\geqq 0$, nazywają rodzajem albo defektem tej krzywej*). Z tej definicyi i nierówności (a), mamy twierdzenie:

II. *Krzywe dołączone stopni $n-1$, $n-2$ istnieją w krzywych dowolnego defektu.*

Na podstawie tych wyników możemy teraz uwzględnić $\varkappa \geqq 3$. Przyjmijmy bowiem, że mamy krzywą o defekcie p, to możemy szukać takich $\varkappa \geqq 3$, dla których będzie:

$$\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2} \geqq d=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-p.$$

Stąd dostajemy:

$$p \geqq \frac{(\varkappa-3)(2n-\varkappa)}{2}+1, \quad \varkappa=3,4,5,\ldots$$

Naodwrót tej nierówności można użyć do wyznaczenia defektu p przy danem $\varkappa$ i powiedzieć:

III. *Krzywa dołączona stopnia $(n-\varkappa)$, $\varkappa \geqq 3$, istnieje w krzywych o defekcie* $\geqq \frac{(\varkappa-3)(2n-\varkappa)}{2}+1$.

Według tego mamy dla:

$\varkappa=3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad \ldots$ odpowiednio:

$p \geqq 1, \quad (n-1), \ (2n-4), \ (3n-8), \ (4n-16), \ldots$

a z pierwszych tych liczb wnosimy, że *krzywa dołączona* $(n-3)^{go}$ *stopnia istnieje tylko w krzywych o defekcie* $\geqq 1$.

Gdy $q \geqq n$, przyjmiemy, to dojdziemy odrazu do wniosku:

IV. *Krzywe dołączone stopni $\geqq n$ istnieją w krzywych o dowolnym defekcie.*

Uwaga 1. Jeżeli który z punktów wielokrotnych ma złożenie:

$$(\mu, \ldots, 2, 2, \ldots, 2),$$

to ten punkt w krzywej dołączonej ma mieć złożenie $(\mu-1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1)$.

Punkt taki jest więc w krzywej dołączonej o krótszem złożeniu, niż w krzywej danej, a tylko żądać trzeba, aby — poczynając od pewnych przerobionych równań krzywej dołączonej — było statecznie $\nu_\alpha = 1$.

Uwaga 2. Jeżeli krzywa posiada same niezłożone punkta dwukrotne, to krzywa dołączona mieć będzie w tych punktach swoje punkta zwyczajne.

*) defekt = *deficiency* podług Cayley'go. W jakiem znaczeniu występować mogą w teoryi powierzchni algebraicznych takie pojęcia, jak defekt, dołączone powierzchnie, odwracalne podstawienia i t. d. wyjaśniają G. Castelnuovo i F. Enriques. Math. Ann. T. 48. (1897.) str. 241—316.

CZĘŚĆ IV.

FUNKCYE WYMIERNE $R(xy)$ MIEJSCA (x, y) OBRAZU ALGEBRAICZNEGO.

ROZDZIAŁ VIII.

Zasadnicze własności funkcyi $R(xy)$. Jej najmniejszy stopień czyli rząd obrazu algebraicznego.

66. Własności (charakterystyczne) funkcyi $R(xy)$.

I. *Funkcya wymierna $s=R(xy)=g_1(xy)/g_2(xy)$ pary (x, y) spełniającej nieprzywiedlne równanie algebraiczne:*

(1) $$f(x, y)=f_0(x)y^m+f_1(x)y^{m-1}+\ldots+f_m(x)=0$$

jest również algebraiczną argumentu x, a posiadać może cykliczne elementa tylko w tych punktach x, w których i sama funkcya algebraiczna je posiada.

Aby tego dowieść, dość jest zauważyć, że funkcya s — jeżeli $y_1, y_2, \ldots, y_m$ są gałęziami funkcyi y — posiada gałęzie:

$$s_\alpha=R(x, y_\alpha),\ \alpha=1, 2, \ldots, m,$$

a równanie:

(2) $$[s-R(xy_1)]\ldots[s-R(xy_m)]=0$$

jest algebraiczne, bo spółczynniki tego równania, będąc symetrycznemi, wymiernemi funkcyami w $y_1, y_2, \ldots, y_m$ i zawierając wymiernie x, są wymiernemi w argumencie x.

Dalej jasnem jest, że funkcya s daje rozwinięcia o całkowitych wykładnikach argumentu $(x-a)$, lub x^{-1} niezawodnie wtedy, kiedy y w ten sposób się rozwija, a tylko na tych miejscach, na których y posiada cykliczne elementa, może — ale nie musi — wyrazić się cyklicznym elementem. Co się tyczy takich cyklicznych elementów, to łatwo wyrozumieć, że — jeżeli y w otoczeniu punktu $x=a$, lub $x=\infty$ ma element cykliczny stopnia μ, a s takiż element stopnia μ_1, gdzie $1<\mu_1<\mu$ — to μ_1 musi być podzielnikiem stopnia μ.

Z równania $y^4-(x-1)=0$ dostajemy algebraiczną funkcyę:

$$y=(x-1)^{\frac{1}{4}}e^{\frac{2t\pi i}{4}}, \quad t=0, 1, 2, 3,$$

o cyklicznych elementach 4^{go} stopnia w punktach:

$$(a) \qquad x=1, \quad x=\infty.$$

Funkcya $[a+bx.y^4+cx.y^8]$ będzie wymierną w argumencie x, a widocznie nie będzie posiadała elementów cyklicznych w punktach (a). Funkcya:

$$[xy+x^2y^3]$$

posiadać będzie w punktach (a) elementa cykliczne z zachowaniem stopnia: 4, a funkcya: $[a+bx.y^2]$ posiadać będzie w punktach (a) elementa cykliczne już tylko stopnia: 2.

Przyjmijmy, że równanie (2) sprowadza się do formy całkowitej: $G(sx)=\gamma_0(x)s^m+\gamma_1(x)s^{m-1}+...+\gamma_m(x)=0$, to z niego — jeżeli $\gamma_0, \gamma_1, ...$ posiadają wspólny podzielnik — odrzucając ten podzielnik dojdziemy do równania:

$$(3) \qquad G(s,x)=0,$$

które będzie związkiem określającym s jako algebraiczną funkcyę argumentu x.

Równanie (3) może być albo nieprzywiedlne, albo przywiedlne. W tym drugim razie niech będzie:

$$G(s,x)=G_1(s,x).G_2(s,x)...G_\mu(s,x),$$

gdzie $G_1, G_2, ..., G_\mu$ są już nieprzywiedlnemi funkcyami. Zauważmy równanie $G_a(s,x)=0$, czyli $G_a(R(x,y),x)=0$, (a ma jedną z wartości $1, 2, ... \mu$), to to równanie posiadać musi jeden przynajmniej z pierwiastków $y_1, y_2, ..., y_m$ równania $f(x,y)=0$. Lecz, że $f(xy)=0$ jest równaniem nieprzywiedlnem, więc $G_a=0$ musi już wszystkie pierwiastki tego równania posiadać [T. I., art. 82.], a innych już nie posiada wskutek swej nieprzywiedlności. To samo powiedzieć potrzeba o innych równaniach $G_1=0, ..., G_{a-1}=0, G_{a+1}=0, ..., G_\mu=0$. Ponieważ dalej funkcye $G_1, G_2, ..., G_\mu$ nie posiadają podzielników zależnych jedynie od x, więc być musi identycznie: $G_1=G_2=...=G_\mu$, a stąd wynika:

$$(4) \qquad G(s,x)=[G_1(s,x)]^\mu=0.$$

Mamy więc twierdzenie:

II. *Równanie algebraiczne, któremu zadość czyni funkcya $s=R(xy)$, jest albo nieprzywiedlne, albo jego lewa strona jest potęgą funkcyi nieprzywiedlnej.*

Przyjmijmy, że równanie (3) jest p^{go} stopnia w zmiennej x i uważajmy w niem s za wielkość o pewnej oznaczonej wartości, którą na razie zakładamy różną od zera i skończoną. Równanie (3) da nam wtedy wszystkie miejsca $x=$

(5) $$x_1, x_2, \ldots, x_p,$$

na których funkcya $R(x,y)$ pojęta jako algebraiczna samego argumentu x posiada wartość s. Zmieniając s dostajemy w (5) p gałęzi algebraicznej funkcyi x o argumencie s. Że zaś wszystkie te gałęzie muszą się oczywiście utrzymać i przy $s=0$ i przy $s=\infty$, więc stąd wnosimy, że funkcya $R(x,y)$ jako algebraiczna funkcya argumentu x przybiera każdą wartość s — bez wykluczenia wartości $s=0$ i $s=\infty$ — zawsze na jednakiej ilości miejsc w tym argumencie.

Lecz z drugiej strony do równania (3) można dojść w ten sposób: Utwórzmy rugownik równań:

(6) $$f(x,y)=0, \quad g_2(xy)s-g_1(xy)=0$$

i niech on ma postać $h(x).G(s,x)=0$. Czynnik $h(x)=0$, nie zależąc od s, daje tu te pierwiastki $x=x'$, które z pewnemi $y=\eta$ spełniają równocześnie 3 równania:

(α) $$f(xy)=0, \quad g_1(xy)=0, \quad g_2(xy)=0,$$

a więc dają s w formie nieoznaczonej $0/0$. Ten czynnik na razie opuszczając, zatrzymujemy tylko równanie: $G(s,x)=0$.

Wiadomo dalej z teoryi eliminacyi, że każdemu x_α zawartemu w szeregu (5) — bez różnicy, czy się tam powtarza, lub nie — trzeba jedno tylko y spełniające równanie $f(x_\alpha y)=0$ podporządkować. Z tego wynika, że równanie $G(sx)=0$ daje przy każdem s nie wyłączając $s=0$ i $s=\infty$ — zawsze p miejsc:

(7) $$(x_1y_1), (x_2y_2), \ldots, (x_py_p)$$

Pytanie zachodzi, czy przy pewnych wartościach $s=s'$ mogą w system miejsc (7) wejść także miejsca $(x'\eta)=P$? Aby na to odpowiedzieć — zauważmy, że wprowadzając pary funkcyj $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ na określenie otoczenia miejsc obrazu algebraicznego $f=0$, mamy:

(8) $$R(x, y)=R(\varphi(t), \psi(t))=P_1(t)/P_2(t),$$

P_1, P_2 są rozwinięciami o samych całkowitych potęgach argumentu t i mogą zawierać odjemne potęgi tylko o skończonych wykładnikach. Formę (18) można więc będzie zawsze sprowadzić do postaci:

(9) $$R(x, y)=t^{\lambda-\mu}.\frac{A_0+A_1t+\ldots}{B_0+B_1t+\ldots}, \quad A_0 \neq 0, \; B_0 \neq 0,$$

*

w której λ, μ są dodatnie liczby. W razie $\lambda=\mu$, mamy na miejscu, które otacza para φ, ψ — a więc dla $t=0$ — wartość skończoną $s=A_0/B_0$.

Gdy $\lambda>\mu$, jest $s=0$, a kiedy $\lambda<\mu$, mamy $s=\infty$. Różnica $(\lambda-\mu)$ jest w pierwszym razie stopniem zera, a w drugim stopniem nieskończoności funkcyi s.

To samo odnosi się oczywiście i do miejsc P, a gdy na r takich miejscach jest $s=s'$, to równanie $G(s'x)=0$ da początek takiemu systemowi miejsc (7), że się w nim właśnie tych r miejsc mieścić będzie. Z tego wynika, że się miejscami P wcale krępować nie potrzebujemy i mamy twierdzenie:

III. *Funkcya $s=R(x,y)$ posiada takie własności: 1. Na każdem miejscu $(x\,y)$ danego obrazu $f=0$ jest zupełnie oznaczona i jednoznaczna, byleby tylko — w wypadku, kiedy to miejsce otacza więcej par funkcyj — wskazano, do jakiego elementu $[\varphi(t), \psi(t)]$ to miejsce ma się zaliczyć: 2. Każdą wartość s — nie wykluczając $s=0$ i $s=\infty$ — przybiera w obrazie algebraicznym $f=0$ zawsze na tej samej ilości miejsc p. Liczba p nazywa się stopniem funkcyi $R(x,y)$.*

Miejsce nieskończonościowe powtarza się między p miejscami k razy, [jest k-krotne], jeżeli w jego otoczeniu mamy:

$$R(xy)=t^{-k}[c_0+c_1t+\ldots].$$

Podobnie miejsce zerowe jest μ-krotne, jeżeli w jego otoczeniu jest: $R(xy)=t^k[c_0+c_1t+\ldots]$.

Z własności funkcyi s wynika dalej, że funkcya wymierna, nie posiadająca dokładnie tyle miejsc zerowych, co nieskończonościowych nie istnieje i może być chyba ilością stałą.

W razie nieprzywiedlności równania $G(s,x)=0$ nie mamy ani w (5), ani w (7) takich powtarzających się pierwiastków x_α, któreby statecznie były sobie równe, choć się s dowolnie zmienia — (przy szczególnych wartościach s możemy dostać powtarzające się x_α) — a wartość y_α należąca do x_α wyraża się tu zawsze [T. I., art. 137.] wymiernie przez x_α i s.

Kiedy przeciwnie równanie $G(s,x)=0$ jest przywiedlne, a więc ma formę (4), to przy jakiemkolwiek s rozpadają się miejsca (7) na p/μ grup:

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{llll} (x_1y'_1), & (x_1y'_2), & \ldots, & (x_1y'_\mu) \\ (x_2y_1''), & (x_2y_2''), & \ldots, & (x_2y_\mu'') \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_{\frac{p}{\mu}}y_1^{(\frac{p}{\mu})}), & (x_{\frac{p}{\mu}}y_2^{(\frac{p}{\mu})}), & \ldots, & (x_{\frac{p}{\mu}}y_\mu^{(\frac{p}{\mu})}), \end{array}\right.$$

z których każda zawiera same równe sobie x_a. Do każdego x_a należące $y_1^{(a)}, y_2^{(a)}, \ldots, y_\mu^{(a)}$ są pierwiastkami pewnego równania:

$$(11) \qquad M_0 y^\mu + M_1 y^{\mu-1} + \ldots + M_\mu = 0,$$

którego spółczynniki są wymiernemi funkcyami w s i x_a [art. 60.].

Lecz przywiedlne równanie $G(s,x)=0$ można zawsze zmienić na nieprzywiedlne, a to postępując w ten sposób: Połóżmy:

$$(12) \qquad x' = x - ky,$$

gdzie $k \neq 0$ jest dowolną stałą ilością. Nieprzywiedlne równanie $f(x,y)=0$, które określa x jako algebraiczną funkcyę zależną od y, a posiadającą gałęzie $\xi_1, \xi_2, \ldots$, niech przechodzi przez podstawienie (12) na $f_1(x',y)=0$. To równanie będzie również nieprzywiedlne, bo jak każda symetryczna wymierna funkcya gałęzi $\xi_1, \xi_2, \ldots$ jest dopiero wtedy wymierną, w argumencie y, gdy w nią weszły wszystkie już gałęzie $\xi_1, \xi_2, \ldots$, tak samo i każda symetryczna funkcya gałęzi $\xi'_1 = \xi_1 - ky$, $\xi'_2 = \xi_2 - ky, \ldots$ okaże się wymierną dopiero wtedy, gdy od wszystkich tych gałęzi zależeć będzie.

Wywnioskowawszy to przyjmijmy, że przez podstawienie (12) zmienia się równanie $G(s,x)=0$ na równanie $G'(s,x')=0$, które — jak poprzedzające — jest przywiedlnem. Ma ono zatem — ponieważ lewa jego strona jest potęgą pewnej wymiernej funkcyi — dwa przynajmniej pierwiastki x równe sobie przy bieżącem s. Niech te pierwiastki będą x'_1, x'_2 i niech odpowiadają miejscom $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ równania $f(x,y)=0$, to mamy:

$$x'_1 = x_1 - k y_1, \quad x'_2 = x_2 - k y_2,$$

a stąd wynika identyczność $(x_1 - x_2)/(y_1 - y_2) = k$. Lecz to jest przy stałem k niemożliwe, bo lewa strona tej identyczności zmienia się z s. Mamy więc twierdzenie:

IV. *Przywiedlne równanie $G(s,x)=0$ możemy, kładąc $x = x' + ky$, gdzie k jest stałą ilością $\neq 0$, zmienić zawsze na równanie nieprzywiedlne $G'(s,x')=0$. Każdemu pierwiastkowi x'_a tego równania odpowie y_a, wyrażające się już wymiernie przez s i x'.*

Pd. 1. Okazać, że funkcya y/x^2 jest w obrazie algebraicznym $y^3 - x^2 = 0$ funkcyą stopnia 4go.

Pd. 2. W tym samym obrazie algebraicznym: $y^3 - x^2 = 0$ jest funkcyą $[2x^2 - y^6]$ stopnia 12go.

[Równanie $G(s,x) = 0$ jest w Pd. 1. nieprzywiedlne, a w Pd. 2. przywiedlne i ma postać $(s - 2x^2 + x^4)^3 = 0$].

Przyjmijmy, że mamy daną funkcyę s zależną od (x, y) w obrazie $f = 0$, a posiadającą wszystkie własności wymiernej funkcyi $R(x\,y)$. Niech $s_1, s_2, \ldots, s_m$ będą gałęziami funkcyi s, w ten sposób powstającemi, że się w niej za y położy po porządku gałęzie $y_1, y_2, \ldots, y_m$ algebraicznej funkcyi y określonej równaniem (1).

Zauważmy symetryczne funkcye:

$$\begin{cases} s_1+s_2+\ldots+s_m=R_0 \\ s_1y_1+s_2y_2+\ldots+s_my_m=R_1 \\ s_1y_1^2+s_2y_2^2+\ldots+s_my_m^2=R_2 \\ \vdots \\ s_1y_1^{m-1}+s_2y_2^{m-1}+\ldots+s_my_m^{m-1}=R_{m-1} \end{cases}$$

Funkcye te nie zależą ani od gałęzi y, ani od gałęzi s. Zależą więc tylko od x i są jednoznaczne — [w całym nieograniczonym obszarze tego argumentu rozwijają się podług całkowitych potęg]. Dalej wskutek własności algebraicznej funkcyi y i założeń o funkcyi s stają się tylko na skończonej ilości miejsc x nieskończonościami o skończonych stopniach, są więc wymiernemi w argumencie x.

Po pomnożeniu tych równań przez nieoznaczone jeszcze ilości $A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots, A_1$, 1 i dodaniu dostaniemy:

$$(13)\qquad \begin{cases} s_1[y_1^{m-1}+A_1y_1^{m-2}+A_2y_1^{m-3}+\ldots+A_{m-1}]+ \\ s_2[y_2^{m-1}+A_1y_2^{m-2}+A_2y_2^{m-3}+\ldots+A_{m-1}]+ \\ \vdots \\ +s_m[y_m^{m-1}+A_1y_m^{m-2}+A_2y_m^{m-3}+\ldots+A_{m-1}] \end{cases}$$
$$=R_{m-1}+A_1R_{m-2}+A_2R_{m-3}+\ldots+A_{m-1}R_0.$$

Gdy przyjmiemy, że $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ spełniać mają równania

$$(14)\qquad y_\alpha^{m-1}+A_1y_\alpha^{m-2}+A_2y_\alpha^{m-3}+\ldots+A_{m-1}=0,\quad \alpha=2, 3, \ldots, m,$$

to wtedy z równania (13) wynika:

$$(15)\qquad s_1=\frac{R_{m-1}+A_1R_{m-2}+A_2R_{m-3}+\ldots+A_{m-1}R_0}{y_1^{m-1}+A_1y_1^{m-2}+A_2y_1^{m-3}+\ldots+A_{m-1}}.$$

Związki (14) wskazują, że $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ są spółczynnikami równania:

$$(y-y_2)(y-y_3)\ldots(y-y_m)=\frac{1}{f_0}\cdot\frac{f(xy)}{y-y_1}=\frac{1}{f_0}\cdot\frac{f(xy)-f(xy_1)}{y-y_1}=$$
$$y^{m-1}+\frac{f_0y_1+f_1}{f_0}y^{m-2}+\ldots+\frac{f_0y_1^{m-1}+f_1y_1^{m-2}+\ldots+f_{m-1}}{f_0}=0,$$

mają więc wartości:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &A_1=(f_0y_1+f_1)/f_0,\ A_2=(f_0y_1^2+f_1y_1+f_2)/f_0\ldots \\ &\ldots A_{m-1}=(f_0y_1^{m-1}+f_1y_1^{m-2}+\ldots+f_{m-1})/f_0. \end{aligned}$$

Co się tyczy mianownika w (15), to ten będzie $=\frac{1}{f_0}\cdot\frac{f(xy)}{y-y_1}\Big]_{y=y_1}$, a że $f(xy_1)=0$, więc go także tak określić można:

$$(17)\quad \frac{1}{f_0}\cdot\left.\frac{f(xy)-f(xy_1)}{y-y_1}\right]_{y=y_1}=\frac{1}{f_0}\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial y}\right]_{y=y_1}=\frac{1}{f_0}\cdot f(xy_1)_2\ ^{*)}$$

Uwzględniając (16) i (17) w (15) dostajemy:

$$s_1=\frac{f_0R_{m-1}+(f_0y_1+f_1)R_{m-2}+\ldots+(f_0y_1^{\ m-1}+f_1y_1^{\ m-2}+\ldots+f_{m-1})R_0}{f(xy_1)_2}.$$

Gdy tu — co jest oczywiście dozwolone — zastąpimy y_1 przez y, t. j. przez dowolną gałąź funkcyi y, dojdziemy do formy:

$$(A)\qquad s=\frac{h_0(x)y^{m-1}+h_1(x)y^{m-2}+\ldots+h_{m-1}(x)}{f(xy)_2},$$

w której $h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}$ są wymiernemi — [niekoniecznie całkowitemi] funkcyami argumentu x. Forma (A) jest widocznie wymierną w (x, y) a stąd twierdzenie:

V. *Każda funkcya s pary (xy), posiadająca charakter funkcyi wymiernej $R(xy)$, jest wymierną funkcyą takiej pary***), *a każda funkcya wymierna $R(xy)$ da się zawsze sprowadzić do takiej formy, w której mianownikiem jest: $f(xy)_2$, a licznikiem jest funkcya wymierna, całkowita i najwyżej stopnia $(m-1)^{go}$ w zmiennej y, jeżeli dane równanie $f=0$ jest stopnia m^{go} w tej zmiennej. Taką formę nazywamy n o r m a l n ą.*

Jeżeli ma istnieć funkcya $s=R(x, y)$ bez miejsca nieskończonościowego, to w równaniu $(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_m)=0$ są spółczynniki: $-(s_1+s_2+\ldots)$, $+(s_1s_2+\ldots), \ldots,$ funkcyami wymiernemi bez miejsc nieskończonościowych. Takie funkcye redukują się jednak do stałych ilości $c_1, c_2, \ldots$ Mamy więc $s^m+c_1s^{m-1}+\ldots+c_m=0$. Stąd wynika $s=const.$, a to znaczy:

VI. *Funkcya $s=R(x, y)$ nie posiadająca miejsc nieskończonościowych redukuje się do ilości stałej.*

67. Związek między dwiema funkcyami $R(xy)$, $R'(xy)$ w tym samym obrazie algebraicznym. Rząd = 0. Niech teraz w tym samym obrazie algebraicznym $f=0$ danych będzie dwie różnych funkcyj:

$$(1)\qquad s=R(x, y),\ s'=R'(xy).$$

Z nich pierwsza niech będzie stopnia p, a druga stopnia p'.

Zauważmy miejsca:

$$(\alpha)\qquad (x_1y_1),\ (x_2y_2), \ldots,\ (x_py_p),$$

na których R ma tę samą wartość s_1. Na tych miejscach będzie

*) $f(xy)_2$ oznacza tu i w dalszym ciągu cząstkową pochodnę funkcyi $f(xy)$ według y.

**) Por. P r y m. *Beweis eines Riemannschen Satzes.* C. J. T. 83. str. 251—261.

R' miało różne wartości: $s'_1, s'_2, \ldots, s'_p$. Zatrzymując miejsce $(x_1 y_1)$, na którem $R = s_1$, a $R' = s'_1$ dostaniemy szereg miejsc:

$$(\beta) \qquad (x_1 y_1), (x'_2\, y'_2), \ldots (x'_{p'}\, y'_{p'})$$

takich, że na nich będzie $R' = s'_1$, ale R przybierać będzie różne wartości: $s_1, s_2, \ldots, s_{p'}$. Z tego wynika, że, gdy z równań (1) i równania $f=0$ wyrugujemy x, y, dojdziemy do związku algebraicznego

$$(C) \qquad G_0(s, s' \,|\, p', p) = 0,$$

który w s będzie stopnia p', a w s' stopnia p.

Czy miejsca (α), (β) posiadać mogą oprócz $(x_1 y_1)$ jeszcze inne miejsca wspólne, rozstrzygniemy dopiero później.

Zbadajmy równanie (C) pod względem jego przywiedlności. Utwórzmy w tym celu z równań:

$$(2) \qquad f(x, y) = 0, \quad s = R(x\, y) = 0$$

związek

$$(3) \qquad G'(s, x') = 0,$$

który jest już nieprzywiedlny [art. poprzedz.]. Przytem jest: $x = x' + k\, y$,

$$(4) \qquad y = R_1(s, x'), \text{ a więc i } x = R_2(s, x')$$

a R_1, R_2 są funkcyami wymiernemi. Uwzględniając to w $s' = R'(x, y)$ dostajemy $s' = R'_1(s, x')$. Tak przedstawiona funkcya s' jest więc wymierną miejsc (s, x') spełniających równanie $G'(s, x') = 0$, a gdy z tego równania i równania $s' - R'_1(s, x') = 0$ wyeliminujemy x' dojdziemy właśnie (po odrzuceniu czynnika zależnego wyłącznie od s do związku $G_0(s, s') = 0$ a ten — [art. 60. tw. V.] jest takim, że w nim G_0 jest albo funkcyą nieprzywiedlną, albo potęgą funkcyi nieprzywiedlnej. Mamy więc twierdzenie:

I. *Związek $G_0(s, s') = 0$ między dwiema różnemi funkcyami s, s' tego samego nieprzywiedlnego obrazu algebraicznego $f = 0$ jest albo nieprzywiedlny, albo jego lewa strona G_0 jest potęgą funkcyi nieprzywiedlnej.*

I⁰. Przyjmijmy, że $G_0 = 0$ jest równaniem nieprzywiedlnem i uważajmy je znowu za rugownik równań:

$$(5) \qquad s' - R'_1(s, x') = 0, \quad G'(s, x') = 0.$$

Ponieważ $G_0 = 0$ jest nieprzywiedlnem równaniem, więc równania (5) mają — podług tw. IV. art. 60. — jeden tylko wspólny pierwiastek $x' = \overline{R}(s, s')$, wymierny *w* s, s'.

Uwzględniając to w (4), dostajemy:

$$(6) \qquad x = R'(s, s'), \quad y = R'_1(s, s')$$

dla (s, s') spełniających $G_0 = 0$, Stąd twierdzenie:

II. *Gdy* $G_0(s, s')=0$ *jest równaniem nieprzywiedlnem, to naodwrót* x, y *uważać trzeba za wymierne funkcye miejsca* (s, s') *obrazu algebraicznego* $G_0=0$.

Miejsca (α), (β) mają w tym razie jedno tylko miejsce wspólne $(x, y)=(x_1, y_1)$; określa się ono właśnie równaniami (6).

II⁰. Przyjmijmy, że $G_0=[G_1(s, s')]^\mu=0$, $\mu>1$, a więc $p=p_1\mu$, $p'=p'_1\mu$. Równanie $G_0=0$ ma wtedy same μ-krotne pierwiastki s, a równania (5) mają [tw. V. art. 60.] μ wspólnych pierwiastków:

(7) $$x_\lambda'=\varphi_\lambda(s, s'),\ \lambda=1, 2, ..., \mu$$

określonych pewnem algebraicznem równaniem:

$$M_0(s, s')x'^\mu+M_1(s, s')x'^{\mu-1}+...+M_\mu(s, s')=0,$$

w którem zawierające się (s, s') są miejscami spełniającemi:

$$G_1(s, s')=0.$$

Uwzględniając (7) w (4) dostaniemy:

(8) $$x_\lambda=R_2(s, \varphi_\lambda),\ y_\lambda=R_1(s, \varphi_\lambda),\ \lambda=1, 2, ..., \mu,$$

x_λ, y_λ są więc w tym razie algebraicznemi funkcyami pary (s, s') o μ gałęziach; miejsca (α), (β) mają μ wspólnych miejsc, a te się określają właśnie μ parami równań (8).

W szczególności, gdy mamy z taką funkcyą $R(x, y)=s$ do czynienia, która na jednem tylko miejscu obrazu algebraicznego $f=0$ staje się nieskończonością — a więc na tem miejscu jest jednokrotnie $=\infty$ — to równanie $G(s, x)=0$ musi być przedewszystkiem nieprzywiedlne. Lecz dalej musi być ono stopnia tylko pierwszego w x. Z niego więc dostajemy:

(a) $$x=R_1(s),$$

gdzie R_1 jest funkcyą wymierną. W razie nieprzywiedlności równania $G(s, x)=0$ wyraża się znowu y należące do x danego w (a) wymiernie przez s i x. Mieć więc równocześnie z (a) będziemy:

(b) $$y=R_2(s),\ \text{a to zn.}$$

III. *Funkcyę* $s=R(x, y)$ *o jednokrotnem miejscu nieskończonościowem (funkcyę stopnia pierwszego) utworzyć można tylko dla szczególnego obrazu algebraicznego* $f(x\,y)=0$ *o tej własności, że spółrzędne każdego jego miejsca wyrażają się wymiernie przez zmienny parametr. Takie równanie nazywamy rzędu zerowego. — Ogólnie rzecz biorąc, musimy zatem funkcyę* s *o stopniu* $=1$ *uważać za niemożliwą.*

68. Rząd obrazu algebraicznego. Funkcya $H(x\,y, x'\,y')$. Po wyłączeniu obrazów algebraicznych rodzaju zero, trzeba — chcąc w ogólnym wypadku tworzyć funkcyę $R(x, y)$ — zadanie w ten sposób sformułować: utworzyć funkcyę $R(x, y)$, która ma być nieskończonością jednokrotnie na dowolnem miejscu (x', y') danego obrazu:

(1) $$f(x\,y)=f_0(x)\,y^n+f_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+f_n(x)=0,$$

a która prócz tego miałaby być jeszcze nieskończonością na innych danych miejscach tego obrazu.

Niech $(x'\,y')$ będzie takiem miejscem obrazu (1), na którem jest

(2) $$\left.\frac{\partial f(x\,y)}{\partial y}\right]_{(x'\,y')}=f(x'\,y')_2 \neq 0,$$

a zauważmy funkcyę:

(3) $$r(x\,y,\,x'\,y')=\frac{f(x\,y')}{(x'-x)\,(y'-y)}=\frac{f(x\,y')-f(x\,y)}{(x'-x)\,(y'-y)}=$$

$$=\frac{f_0\cdot(y'^{n-1}+y'^{n-2}y+\ldots+y^{n-1})+\ldots+f_{n-2}\cdot(y'+y)+f_{n-1}}{x'-x}=$$

(4) $$=\frac{f(x,y,y')}{x'-x},$$

która jest wymierną w x, y, a zależy jeszcze wymiernie od obranego miejsca $(x'\,y')$. Rozwijając tu licznik podług potęg ilości $(x'-x)$, $(y'-y)$ dostajemy:

$$f(x'+(x-x'),\,y'+(y-y'),\,y')=f(x',y',y')+A(x'-x)+B(y'-y)+\ldots$$

a że: $f(x',y',y')=\lim\limits_{y=y'}\dfrac{f(x',y')-f(x',y)}{y'-y}=f(x',y')_2$,

więc mamy:

$$f(x,y,y')=f(x'\,y')_2+A(x'-x)+B(y'-y)+\ldots \text{ i wreszcie:}$$

(5) $$r(x\,y,\,x'\,y')=\frac{f(x'\,y')_2}{x'-x}+\frac{A(x'-x)+B(y'-y)+\ldots}{x'-x},$$

gdzie A, B,... są wymiernemi całkowitemi funkcyami pary (x', y').

Ponieważ $f(x', y')_2 \neq 0$, a $(y'-y)$ rozwija się podług całkowitych dodatnich potęg argumentu $(x'-x)$ bez wolnego wyrazu, więc z formy (5) wynika, że $r(x\,y,\,x'\,y')$ jest na miejscu $(x'\,y')$ nieskończonością tylko stopnia pierwszego.

Na każdem miejscu $(x''\,y'')$ obrazu $f=0$, o spółrzędnych $x''\neq x'$, $y''\neq y'$, a leżącem w skończoności, będzie $r(x\,y,\,x'\,y')$ niezawodnie skończone.

Przyjmijmy, że w obrazie $f=0$ mamy miejsce (x'', y'), gdzie $x''\neq x'$. Na takiem miejscu ma r mianownik $(x'-x'')$ różny od zera, posiada wiec i tu skończoną wartość.

Lecz do x' należy w równaniu $f=0$ oprócz y' jeszcze $(n-1)$ innych wartości y. Uwzględnijmy z nich $y=y''\neq y'$. Funkcya

$f(x\,y')$ posiada pierwiastek x', mieści więc w sobie czynnik $(x'-x)$. Ułamek $\frac{f(x\,y')}{x'-x}$ daje więc skończoną wartość dla $x=x'$. W takim razie i

$$r(x\,y,\ x'\,y')=f(x\,y')\,/\,(x'-x)\,(y'-y)$$

będzie skończone na miejscu (x', y''), a w razie $y''=\infty$ będzie zerem na tem miejscu.

Przyjmijmy, że dla pewnego skończonego $x'' \mathrel{\not=} x'$ mamy $y=\infty$. Funkcya $f(x'', y')$ pozostaje tu skończoną; $x'-x''$ nie jest zerem, a $(y'-y'')=\infty$. Wartość funkcyi r na takiem miejscu będzie zerem. Utworzyliśmy zatem funkcyę o tej własności, że w obszarze miejsc (x, y) spełniających równanie $f=0$, a posiadających s k o ń c z o n e x, staje się raz tylko nieskończonością na miejscu $(x'\,y')$.

Miejsce $(x'\,y')$ jest takie, że do x' należą same różne między sobą $y=y', y'', ..., y^{(n)}$.

Para funkcyj zatem określająca otoczenie miejsca (x', y') będzie postaci:

(6) $$x=x'+t,\ y=y'+b_0 t^{\mu}+b_1 t^{\mu+1}+...,$$

a łatwo spostrzedz, że za wstawieniem jej w (5) wyniknie jedyna odjemna potęga: t^{-1} z wyrazu pierwszego i posiadać będzie spółczynnik:

(7) $$-f(x'\,y')_2.$$

Uwzględnijmy $x=\infty$, przyjmując, że $f(x, y)$ jest w x stopnia m^{go}. Funkcya $\frac{f(x\,y')}{x'-x}$ jest wtedy widocznie tylko $(m-1)$-krotnie nieskończonością. Obierzmyż $(m-1)$ miejsc $x=a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_{m-1}$ skończonych, między sobą różnych i takich, że się na nich y nie powtarzają, to iloraz:

(8) $$\frac{f(x, y')}{(x'-x)\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,...\,(x-a_{m-1})}$$

jest już dla $x=\infty$ skończony.

Jeżeli do $x=\infty$ należą same $y \mathrel{\not=} y'$ — choćby między nimi było $y=\infty$ — to i funkcya:

(9) $$u=\frac{f(x\,y')}{(x'-x)\,(y'-y)\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,...\,(x-a_{m-1})}$$

będzie na takich miejscach w nieskończoności skończoną.

Jeżeli dla $x=\infty$ mamy (między innemi) $y=y'$, to ponieważ $f(x\,y')$ ma czynnik $y-y'$ będzie i w tym razie funkcya (9) na takiem miejscu skończoną.

W obrazie $f=0$ niech do $x=a_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots, m-1$, należą $y=b_s^{(\alpha)}$, $s=1,2,\ldots,n$, a wszystkie miejsca:

$$\begin{matrix} a_1 b'_1, & a_1 b'_2, \ldots, & a_1 b'_n \\ a_2 b''_1, & a_2 b_2'', \ldots, & a_2 b_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} b_1^{(m-1)}, & a_{m-1} b_2^{(m-1)}, \ldots, & a_{m-1} b_n^{(m-1)} \end{matrix}$$

naznaczmy dla wygody przez:

(10) $$(a_1 b_1),\ (a_2 b_2), \ldots, (a_l b_l);\quad l=n(m-1),$$

to mamy w (9) funkcyę, która na miejscu $(x' y')$ i na każdem z miejsc (10) jest jednokrotnie nieskończoną. Jest więc stopnia $(l+1)$. Wstawiając w nią za (x, y) parę (6), otaczającą miejsce $(x' y')$, dostaniemy — kładąc:

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{m-1})} = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots$$

rozwinięcie:

$$[-f(x'y')_2 t^{-1} + \mathfrak{P}(t)]\,[C_0 + C_1 t + \ldots] = -C_0 f(x' y')_2 t^{-1} + \overline{\mathfrak{P}}(t).$$

Pomnóżmy u przez $\frac{1}{C_0}$ i funkcyę $\frac{u}{C_0}$ nazwijmy

$$F(xy,\ x'y',\ a_1 b_1, \ldots, a_l b_l),$$

to ta funkcya w otoczeniu miejsca $(x' y')$ mieć będzie rozwinięcie:

(a) $$-f(x' y')_2 t^{-1} + \mathfrak{P}_0(t).$$

W otoczeniu zaś miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$ mieć będziemy rozwinięcia postaci:

(b) $$c_\alpha t^{-1} + \mathfrak{P}_\alpha(t),\quad \alpha=1,2,\ldots l.$$

Spółczynniki w (a) i (b) są wymiernemi funkcyami miejsca $(x' y')$.

Przyjmijmy, że istnieje funkcya $L(xy, a_1 b_1, \ldots, a_l b_l)$, która j e d y n i e na miejscach $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2), \ldots, (a_l b_l)$ jest jednokrotnie nieskończoną. Gdy jej rozwinięciem na miejscu $(a_l b_l)$ jest $d_l t^{-1} + \mathfrak{P}'_l(t)$, to różnica:

$$F(xy, x' y', a_1 b_1, \ldots, a_l b_l) - \frac{c_l}{d_l} L(xy, a_1 b_1, \ldots, a_l b_l)$$
$$= F(xy,\ x' y',\ a_1 b_1, \ldots, a_{l-1} b_{l-1})$$

będzie już funkcyą o jedynych, jednorodnych miejscach nieskończonościowych $(x' y')$, $(a_1 b_1), \ldots, (a_{l-1} b_{l-1})$. Gdy ta funkcya na miejscu $(a_{l-1} b_{l-1})$ ma rozwinięcie $e_{l-1} t^{-1} + \mathfrak{P}''_{l-1}(t)$, a założymy, że istnieje funkcya $L(xy, a_1 b_1, \ldots, a_{l-1} b_{l-1})$, posiadająca jedyne miejsca nieskończonościowe $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2), \ldots, (a_{l-1} b_{l-1})$ i dająca w otoczeniu miejsca $(a_{l-1} b_{l-1})$ rozwinięcie $f_{l-1} t^{-1} + \mathfrak{P}'''_{l-1}(t)$, to różnica:

$$F(xy, x'y', a_1b_1, \ldots, a_{l-1}b_{l-1}) - \frac{e_{l-1}}{f_{l-1}} L(xy, a_1b_1, \ldots, a_{l-1}b_{l-1})$$

$$(11) \quad = F(xy, x'y', a_1b_1, \ldots, a_lb_l) - \frac{c_l}{d_l} L(xy, a_1b_1, \ldots, a_lb_l)$$

$$- \frac{e_{l-1}}{f_{l-1}} L(xy, x'y', a_1b_1, \ldots, a_{l-1}b_{l-1})$$

$$= F(xy, x'y', a_1b_1, \ldots, a_{l-2}b_{l-2})$$

będzie już funkcyą o jedynych jednokrotnych miejscach nieskończonościowych $[x'y', a_1b_1, \ldots, a_{l-2}b_{l-2}]$. Przytem zauważyć potrzeba, że c_l/d_l, e_{l-1}/f_{l-1} są-to wymierne funkcye pary (x', y').

Pytanie zachodzi, jak daleko — przypuszczając istnienie funkcyj L — można iść w tem tworzeniu funkcyj $F(xy, x'y', a_1b_1, \ldots)$ z czem raz mniejszą ilością miejsc a_1b_1, $a_2b_2, \ldots$?

Oto, ponieważ wykluczyliśmy z naszych poszukiwań obraz algebraiczny rodzaju zero, więc przyjąć musimy, że oprócz miejsca $(x'y')$ musi się z miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$ utrzymać przynajmniej jedno. Przymijmyż, że ϱ jest dolną granicą ilości miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$ w funkcyach F, to ϱ musi być $\geqq 1$, a

$$(A) \qquad F(xy, x'y', a_1b_1, \ldots, a_\varrho b_\varrho)$$

jest ostatnią funkcyą, jaką utworzyć można z funkcyi

$$F(xy, x'y', a_1b_1, \ldots, a_lb_l)$$

przy obranych całkiem dowolnie miejscach (10).

Zmieńmy teraz w (9) miejsca $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ na inne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$. Niech one dają w $f=0$ miejsca:

$$(12) \qquad (\alpha_1\beta_1), (\alpha_2\beta_2), \ldots, (\alpha_l, \beta_l)$$

i prowadzą z funkcyi $F(xy, x'y', \alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_l\beta_l)$ do funkcyi:

$$(B) \qquad F(xy, x'y', \alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_\sigma\beta_\sigma)$$

o najmniejszej ilości miejsc (12), gdzie σ nie jest $=\varrho$.

Zastąpmy w (A) $(x'y')$ po porządku przez $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_\sigma\beta_\sigma$, to dostaniemy σ funkcyj:

$$F(xy, \alpha_s\beta_s, a_1b_1, \ldots, a_\varrho b_\varrho), \quad s=1, 2, \ldots \sigma.$$

Utwórzmy dalej różnicę:

$$R = F(xy, x'y', \alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_\sigma\beta_\sigma) - C_1F(xy, \alpha_1\beta_1, a_1b_1, \ldots, a_\varrho b_\varrho)$$
$$- C_2F(xy, \alpha_2\beta_2, a_1b_1, \ldots, a_\varrho b_\varrho) - \ldots - C_\sigma F(xy, \alpha_\sigma\beta_\sigma, a_1b_1, \ldots, a_\varrho b_\varrho)$$
$$- F(xy, x'y', a_1b_1, \ldots, a_\varrho b_\varrho).$$

Różnica ta na miejscu $(x'y')$ jest skończoną, bo w niej pierwsza i ostatnia funkcya dla otoczenia tego miejsca mają przy t^{-1} ten sam spółczynnik $-f'(x'y')_2$. Przyjmijmy dalej, że $C_1, C_2, \ldots, C_\sigma$

tak wybrano, aby R także i na miejscach $(\alpha_1\beta_1)$, $(\alpha_2\beta_2)$, ..., $(\alpha_\sigma\beta_\sigma)$ było skończone. Wtedy R jest funkcyą, która jedynie na ϱ miejscach (a_1b_1), (a_2b_2), ..., $(a_\varrho b_\varrho)$ jednokrotnie jest nieskończonością.

Lecz taka funkcya — według założenia — nie istnieje. Stąd wynika, że rozwinięcia funkcyi R dla otoczeń miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$ nie mają zależeć od t. W tych rozwinięciach muszą więc być spółczynniki przy wszystkich potęgach t^μ z wykładnikami $\mu \gtreqless 0$, zerami. [Samo R redukuje się do stałej].

Uwzględniając spółczynniki przy t^{-1}, dostajemy ϱ liniowych związków w C_1, C_2, ..., C_σ z wolnymi wyrazami, zależnymi wymiernie od $(x'y')$. Niechże te związki będą:

$$
(13) \qquad \begin{array}{l}
F_1(x'y')-L_1(C_1, C_2, ..., C_\sigma)=0 \\
F_2(x'y')-L_2(C_1, C_2, ..., C_\sigma)=0 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
F_\varrho(x'y')-L_\varrho(C_1, C_2, ..., C_\sigma)=0.
\end{array}
$$

Z natury rzeczy wynika, że $C_1, C_2, ..., C_\sigma$ mają być ilościami jednoznacznie oznaczonemi.*) Z tego powodu można przyjąć $\varrho=\sigma$, ale $\varrho<\sigma$, w którym-to wypadku $(\sigma-\varrho)$ ze spółczynników C_s mielibyśmy dowolnych, trzeba odrzucić.

Lecz i $\varrho>\sigma$ nie jest także dopuszczalne. Utwórzmy bowiem — gdyby tak było — z funkcyi $F(xy, x'y', \alpha_1\beta_1, ..., \alpha_\sigma\beta_\sigma)$, ϱ funkcyj $F(xy, a_\alpha b_\alpha, \alpha_1\beta_1, ..., \alpha_\sigma\beta_\sigma)$, $\alpha=1, 2, ..., \varrho$ i różnicę:

$$
\begin{aligned}
\overline{R}=F(xy, x'y', a_1b_1, ..., a_\varrho b_\varrho)-C'_1F(xy, a_1b_1, \alpha_1\beta_1, ..., \alpha_\sigma\beta_\sigma)-\\
-C'_2F(xy, a_2b_2, \alpha_1\beta_1, ..., \alpha_\sigma\beta_\sigma)-...-C'_\varrho F(xy, a_\varrho b_\varrho, \alpha_1\beta_1, ..., \alpha_\sigma\beta_\sigma)-\\
-F(xy, x'y', \alpha_1\beta_1, ... \alpha_\sigma\beta_\sigma),
\end{aligned}
$$

to różnica ta, gdy już $C'_1, C'_2, ..., C'_\varrho$ obliczono tak, abyśmy ją mieli skończoną na miejscach (a_1b_1), (a_2b_2), ..., $(a_\varrho b_\varrho)$, musi być znowu ilością stałą. Mając na to wzgląd dojdziemy tu do σ liniowych

---

*) Jeżeli chodzi o usunięcie z R miejsca nieskończonościowego $(\alpha_s\beta_s)$, to dość jest uwzględnić tam tylko różnicę:

$$F(xy, x'y', \alpha_1\beta_1, ..., \alpha_\sigma\beta_\sigma)-C_sF(xy, \alpha_s\beta_s, a_1b_1, ..., a_\varrho b_\varrho).$$

Gdy w otoczeniu miejsca $(\alpha_s\beta_s)$ ta różnica daje rozwinięcie:

$$[F_s(x'y')t^{-1}+\mathfrak{P}_s(t)]-C_s[\Phi_s(\alpha_s\beta_s)t^{-1}+\overline{\mathfrak{P}}_s(t)],$$

to w niem mamy $F_s(x'y')\neq 0$, $\Phi_s(\alpha_s\beta_s)\neq 0$, a usunięcie miejsca $(\alpha_s\beta_s)$ prowadzi do równania:

$$F_s(x'y')-C_s\Phi_s(\alpha_s\beta_s)=0,$$

z którego mamy:

$$C_s=F_s(x'y')/\Phi_s(\alpha_s\beta_s).$$

równań (analogicznych z równaniami (13)), zawierających jako niewiadome $C'_1, C'_2, \ldots, C'_\varrho$. Te niewiadome mają się z tych równań jednoznacznie wyznaczyć, a to jest możliwe, gdy $\varrho=\sigma$, a niemożliwe, gdy $\varrho>\sigma$. Nie może więc być $\varrho>\sigma$, c. b. d. d.

Z równości liczb ϱ, σ wnosimy:

I. *Gdy dla danego obrazu algebraicznego* $f=0$ *mamy utworzyć funkcyę* $F(xy, x'y', a_1b_1, \ldots, a_\varrho b_\varrho)$ *najniższego stopnia* $(\varrho+1)^{go}$ — *o najmniejszej ilości dowolnych miejsc nieskończonościowych — to stopień ten nie zależy wcale od obranych miejsc nieskończonościowych, ale od samego obrazu algebraicznego. Obraz algebraiczny* $f=0$, *dla którego można utworzyć funkcye wymierne pary* (x, y) *stopni* $(\varrho+k)$, $k=1, 2, 3, \ldots$, *ale nie można już utworzyć takiej funkcyi stopnia* ϱ, *nazywamy obrazem rzędu* ϱ.*)

Wróćmy do formy (11) rozszerzając ją na:

$$(14)\quad \begin{aligned} &F(xy, x'y', a_1b_1, \ldots, a_lb_l)-\frac{c_l}{d_l}L(xy, a_1b_1, \ldots, a_lb_l)-\\ &-\frac{e_{l-1}}{f_{l-1}}L(xy, a_1b_1, \ldots, a_{l-1}b_{l-1})-\ldots-\frac{p_{\varrho+1}}{q_{\varrho+1}}L(xy, a_1b_1, \ldots, a_{\varrho+1}b_{\varrho+1})\end{aligned}$$

i oznaczmy tak utworzone wyrażenie przez:

$$F(xy, x'y').$$

Jestto funkcya, która jedynie na miejscach:

$$(C)\qquad x'y',\ a_1b_1,\ \ldots,\ a_\varrho b_\varrho$$

jest jednokrotnie nieskończoną; jest więc funkcyą możliwie najmniejszego stopnia: $(\varrho+1)$, a w rozwinięciu dla otoczenia miejsca $(x'y')$ ma przy t^{-1} spółczynnik $-f(x'y')_2$. Funkcya:

$$F(xy, x'y')/f(x'y')_2$$

mieć będzie również miejsca nieskończonościowe (C), ale dla otoczenia miejsca $(x'y')$ mieć już będzie rozwinięcie postaci:

$$(D)\qquad -t^{-1}+\mathfrak{P}(t).$$

Przyjmijmy, że na miejscu (a_0b_0) różnem od miejsc (C) jest

$$F(a_0b_0, x'y')/f(x'y')_2=K(x'y')$$

i zauważmy funkcyę:

$$[F(xy, x'y')/f(x'y')_2]-K(x'y')=H(xy, x'y'),$$

to ta funkcya mając nieskończonościowe miejsca (C), rozwijając się dla otoczenia miejsca $(x'y')$ na szereg postaci (D), jest jeszcze zerem na danem miejscu (a_0b_0). O takiej funkcyi udowodnimy:

---

*) Twierdzenie to jest prawdziwe, gdy miejsca nieskończonościowe są całkiem dowolne, bo gdy te miejsca zależą w pewien sposób od siebie, to można, jak później zobaczymy, dostać funkcye także i stopni $\leqq \varrho$.

II. *Funkcya $H(xy, x'y')$ o danych miejscach nieskończonościowych $x'y'$, $a_1 b_1$, .., $a_\varrho b_\varrho$, i o danem miejscu zerowem $(a_0 b_0)$ jest tylko jedna.*

Przyjmijmy bowiem, że i druga taka funkcya $\overline{H}(xy, x'y')$ istnieje. Różnica: $H(xy, x'y') - \overline{H}(xy, x'y')$ jest funkcyą bez miejsc nieskończonościowych, a jako taka jest stałą ilością $=C$. Że zaś dla $(xy)=(a_0 b_0)$ mamy $H-\overline{H}=0$, więc być musi $C=0$ i identycznie $H=\overline{H}$, c. d. d. *)

Uwagi godnem jest, że funkcya $H(xy, x'y')$ jest nie tylko w (xy), ale także w $(x'y')$ wymierną, co z dedukcyi dopieroco przeprowadzonej wynika.

69. Odwracalne wymierne podstawienia. Obrazy algebraiczne tej samej klasy. Nim rząd oznaczymy, zajmiemy się klasami**) obrazów algebraicznych, wychodząc z takich rozważań: Dane jest nieprzywiedlne, algebraiczne równanie $f(xy)=0$ i podstawienie wymierne:

(a) $$\xi = R_1(x, y), \quad \eta = R_2(x, y).$$

Wyeliminujmy z równania $f=0$ i z równań (a) zmienne x, y i przyjmijmy, że tak uzyskane równanie $\varphi(\xi\eta)=0$ jest nieprzywiedlne. Wtedy [art. 67., tw. II.] mamy naodwrót:

(b) $$x = R'_1(\xi, \eta), \quad y = R'_2(\xi, \eta),$$

gdzie R'_1, R'_2 są funkcyami wymiernemi, ***) a podstawienie (a) lub (b) nazywamy odwracalnem (wymiernem), albo dwuwymiernem.

Zastosujmy do $\varphi(\xi\eta)=0$ znowu pewne odwracalne podstawienie

(a') $$\xi_1 = S_1(\xi\eta), \quad \eta_1 = S_2(\xi\eta);$$

(b') $$\xi = S'_1(\xi_1, \eta_1), \quad \eta = S'_2(\xi_1, \eta_1),$$

dające $\psi(\xi_1\eta_1)=0$. Uwzględniając (b') w (b) mamy:

(c') $$x = T'_1(\xi_1\eta_1), \quad y = T'_2(\xi_1, \eta_1),$$

a gdy teraz w (a') uwzględnimy (a), dostaniemy:

(c'') $$\xi_1 = T_1(x, y), \quad \eta_1 = T_2(x, y).$$

Widocznie (c'), (c'') są znowu podstawieniami odwracalnemi, a stąd wynika:

I. *Gdy równanie $f=0$ przerabiamy przez pewne odwracalne podstawienie na $\varphi=0$, a $\varphi=0$ znowu przez pewne odwracalne podstawienic na*

*) Dedukcye tego art. wzięto z wykładów Weierstrassa o funkcych Abla.

**) Riemann. „*Ges. math. Werke*", (1892), str. 119.

***) W dalszym ciągu używać będziemy liter S, T, U, V w znaczeniu funkcyj wymiernych.

$\psi=0$, *to można znowu znaleść jedno podstawienie odwracalne, przerabiające* $f=0$ *na* $\psi=0$.

Oprócz (a), (b) zastosujmy do $f=0$ jeszcze inne odwracalne podstawienie:

$$(a'') \qquad u=U_1(xy), \quad v=U_2(xy),$$

$$(b'') \qquad x=U'_1(u,v), \quad y=U'_2(u,v),$$

dające $\chi(u,v)=0$. Uwzględniając (b) w (a''), a (b'') w (a), dostajemy:

$$(a''') \qquad u=V_1(\xi\eta), \quad v=V_2(\xi\eta),$$

$$(b''') \qquad \xi=V_1'(uv), \quad \eta=V_2'(uv),$$

a więc odwracalne podstawienie przerabiające $f=0$ na $\chi=0$. Stąd wynika:

II. *Gdy z* $f=0$ *przez dwa różne odwracalne podstawienia, dostajemy równania* $\varphi=0$, $\chi=0$, *to każde z tych dwóch ostatnich równań da się przerobić jedno na drugie przez pewne odwracalne podstawienie.*

Definicya. Wszystkie obrazy algebraiczne $f=0$, $\varphi=0$, $\chi=0$, ..., jakie z jednego z nich n. p. z $f=0$ powstają przez odwracalne podstawienia, tworzą jedną klasę. Jeden z nich którykolwiek przedstawia — wskutek twierdzeń I., II., — całą już klasę, do której się sam wlicza.

Wyjmijmy dwa którekolwiek obrazy algebraiczne n. p. $f=0$ i $\varphi=0$, należące do jednej klasy. Wskutek (a), (b) odpowie jednemu miejscu (xy) obrazu $f=0$ jedno tylko miejsce $(\xi\eta)$ obrazu $\varphi=0$ i naodwrót, a stąd twierdzenie:

III. *Miejsca dwóch różnych obrazów algebraicznych tej samej klasy odpowiadają sobie nawzajem jednoznacznie. W geometryi analitycznej wyrażają to w ten sposób: Dwie krzywe algebraiczne tej samej klasy uważać można zawsze za dwa szeregi punktów jednoznacznie sobie nawzajem odpowiadających.* *)

Lecz obrazy algebraiczne tej samej klasy mają jeszcze jedną wspólną, bardzo ważną własność, a to:

IV. *Wszystkie obrazy algebraiczne tej samej klasy, są tego samego rzędu.*

Przyjmijmy, że $f(x,y)=0$ jest rzędu ϱ, a rząd równania

$$\varphi(\xi,\eta)=0,$$

które z $f=0$ powstaje przez (a), (b) może być mniejszy od ϱ.

W obrazie $f=0$ niech dana będzie wymierna funkcya:

$$(1) \qquad F(xy,\, x'y',\, a_1b_1,\, a_2b_2,\, ...,\, a_\varrho b_\varrho)$$

*) W dalszym ciągu używać będziemy już-to wyrażeń przyjętych w teoryi funkcyi, już-to wyrażeń geometryi analitycznej.

o $(\varrho+1)$ miejscach nieskończonościowych $[x'y', a_1b_1, ..., a_\varrho b_\varrho]$. Stosując w (1) podstawienie (b) dostajemy funkcyę:

(3) $$\Phi(\xi\eta, \xi'\eta', \alpha_1\beta_1, ..., \alpha_\varrho\beta_\varrho),$$

a na miejscach jednoznacznie sobie nawzajem odpowiadających [tw. III.], mamy $F=\Phi$; w szczególności $(x'y', \xi'\eta')$, $(a_sb_s, \alpha_s\beta_s)$, $s=1, 2, ..., \varrho$, odpowiadają sobie nawzajem jednoznacznie. Przyjmijmy, że w obrazie $\varphi=0$ może jeszcze istnieć i funkcya:

$$\Phi_1(\xi\eta, \alpha_1\beta_1, ..., \alpha_\varrho\beta_\varrho)$$

o ϱ tylko miejscach nieskończonościowych $(\alpha_s\beta_s)$. W takim razie za podstawieniem (a) dostalibyśmy w obrazie $f=0$ funkcyę:

$$F_1(xy, a_1b_1, ..., a_\varrho b_\varrho)$$

o ϱ tylko miejscach nieskończonościowych (a_sb_s). Lecz to jest niemożliwe, a stąd już prawdziwość twierdzenia IV. wynika.*) To twierdzenie możemy jeszcze i tak wysłowić:

IV *a*. *Rząd obrazu algebraicznego nie zmienia się przez odwracalne wymierne podstawienie.*

Uwaga. Rozstrzygnięcie pytania, czy naodwrót dwie różne krzywe tego samego rodzaju dadzą się przerobić każda w drugą przez odwracalne podstawienie, nie jest tak łatwem i będzie przedmiotem późniejszych, bardzo ważnych poszukiwań.

Przechodząc z podstawienia (a) do odwrotnego podstawienia (b) eliminowaliśmy z równania $f=0$ i z równań (a) zmienne x, y. To wskazuje, że tu w nieograniczonym obszarze dwóch zmiennych x, y ograniczyliśmy się jedynie do punktów krzywej $f=0$ i że o nich wyłącznie powiedzieć możemy, iż odpowiadają jednoznacznie punktom krzywej $\varphi=0$, wyjętym znowu z nieograniczonego obszaru zmiennych ξ, η. Podstawienia (a), (b) są więc odwracalne wyłącznie dla punktów krzywych $f=0$, $\varphi=0$.

Lecz znane są w analizie jeszcze i takie podstawienia wymierne, za pomocą których można sprządz jednoznacznie dwa nieograniczone, zwarte obszary $[x, y]$, $[\xi, \eta]$, (dwie płaszczyzny). Tutaj każdej dowolnie danej algebraicznej krzywej $f(xy)=0$ w $[x, y]$ odpowie również krzywa algebraiczna $\varphi(\xi\eta)=0$ w $[\xi, \eta]$ i naodwrót. Punkta tych krzywych będą sobie nawzajem jednoznacznie odpowiadały, ale to jednoznaczne, wzajemne sprzężenie utrzyma się jeszcze i poza punktami tych krzywych. Takie podstawienia

*) Przyjmując, że rząd obrazu $\varphi=0$ ma być większym od rzędu obrazu $f=0$, trzeba w całej dedukcyi f z φ pomieniać.

są odwracalne dla wszystkich punktów dwóch nieograniczonych płaszczyzn.*)

Do najprostszych tego rodzaju podstawień należy tak zwane podstawienie liniowe, albo homograficzne:

$$(A)\qquad x=\frac{a_1\xi+b_1\eta+c_1}{a_3\xi+b_3\eta+c_1},\quad y=\frac{a_2\xi+b_2\eta+c_2}{a_3\xi+b_3\eta+c_3},$$

z którego naodwrót wynika:

$$(B)\qquad \xi=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_3x+B_3y+C_3},\quad \eta=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_3x+B_3y+C_3}.$$

Stosując (A) w równaniu nieprzywiedlnem n^{go} stopnia $f(xy)=0$, dostaniemy:

$$f(xy)=\frac{\varphi(\xi\,\eta)}{(a_3\xi+b_3\eta+c_3)^n}=0,$$

a więc $\varphi(\xi\eta)=0$ jest równaniem odpowiadającem równaniu $f(x,y)=0$.

Funkcya $\varphi(\xi\,\eta)$ musi być również nieprzywiedlną. W przeciwnym bowiem razie stosując (B) do $\varphi=0$ dostaliśmy $f=0$, jako równanie przywiedlne, a to sprzeciwia się założeniu.

Co się tyczy rodzaju krzywych $f=0$, $\varphi=0$, to i tu, postępując podobnie, jak w dowodzie twierdzenia IV., okazać można, że obie te krzywe są tego samego rodzaju.

Z tych uwag można skorzystać, aby dane nieprzywiedlne równanie $f(xy)=0$ — nie naruszając jego nieprzywiedlności, rodzaju i stopnia — sprowadzić na inne, charakteryzujące się pewną żądaną naprzód własnością.

I⁰. Przyjmijmy n. p., że równanie $f=0$ dla otoczenia punktu $x=\infty$ daje między innymi i cykliczne elementa algebraicznej funkcyi y. Obierzmy dowolne miejsce $x=a$, leżące w skończoności i takie, że mu w $f=0$ odpowiadają same różne między sobą

$$y=y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n,$$

to otoczenia miejsc (a,y_s), $s=1,2,\dots,n$, wyrażają się regularnemi rozwinięciami $y=y_s+\mathfrak{P}_s(x-a)$. Połóżmy $x-a=\beta/(\xi-\alpha)$, $y=\eta$, gdzie α, β są dowolne stałe $\gtrless 0$, to dojdziemy do równania $\varphi(\xi\,\eta)=0$, w którem punkt $\xi=\infty$ odpowiada punktowi $x=a$. a które dla otoczenia punktu $\xi=\infty$ daje: $y=\eta=y_s+\mathfrak{P}_s[\beta/(\xi-\alpha)]$. W nowym obrazie $\varphi=0$, jest więc funkcya algebraiczna y już pozbawiona cyklicznych elementów.

II⁰. W podstawieniu (B) odpowiadają punktom $(\xi=\infty,\ \eta=\infty)$ punkty (x,y), leżące na prostej:

---

*) Są-to tak zwane podstawienia Cremona'ńskie. Por. co do tego Rosanes. C. J. T. 73, str. 97—110.

(3) $$w=A_3x+B_3y+C_3=0.$$

Przyjmijmyż, że równanie: $f(xy)=(xy)_n+(xy)_{n-1}+.....=0$, w którem $(x,y)_n=(gy-hx)^\nu.(g_1y-h_1x)^{\nu_1}...$, posiada punkta wielokrotne w nieskończoności [art. 58]. Obierzmy prostę (3) tak, aby nie była równoległą do żadnej z prostych $gy-hx=0$, $g_1y-h_1x=0$, ..., i aby krzywę $f=0$ przecinała w n różnych między sobą punktach i przejdźmy potem do podstawienia (A), aby dostać przerobioną krzywę $\varphi(\xi\eta)=0$. Miejsca ($\xi=\infty$, $\eta=\infty$), spełniające $\varphi=0$, odpowiadają właśnie n punktom przecięcia się krzywej $f=0$ z prostą $w=0$; a że te są wszystkie między sobą różne, więc i miejsca ($\xi=\infty$, $\eta=\infty$) będą w $\varphi=0$ wszystkie między sobą różne, to zn. że punkt ($\xi=\infty$, $\eta=\infty$) nie jest wielokrotnym. W samem równaniu

$$\varphi=(\xi\eta)_n+(\xi\eta)_{n-1}+\cdots$$

będzie $(\xi\eta)_n$ zawierać już same różne między sobą czynniki liniowe. Mamy więc twierdzenie:

V. *Każdy obraz algebraiczny, posiadający punkta wielokrotne w nieskończoności, da się — bez naruszenia jego nieprzywiedlności i rodzaju — zmienić na inny, który już w nieskończoności zachowywać się będzie regularnie. [Krzywa określona równaniem $\varphi=0$ nie posiada równoległych assymptot].*

70. Oznaczenie rzędu jako liczby identycznej z rodzajem. Niech C_n będzie nieprzywiedlną krzywą n^{go} stopnia, określającą się równaniem $f=0$, a q niech będzie całkowitą dodatnią liczbą >0. Przyjmijmy $q<n$ i obierzmy na C_n:

$$w=\frac{q}{2}(q+3)$$

dowolnych zwyczajnych punktów A_1, A_2, ..., A_α, ..., A_w. Wtedy możliwa jest tylko jedna krzywa C_q stopnia q, przechodząca przez te punkta [T. I., art. 131]. Przetnie ona C_n jeszcze w dalszych

$$w'=nq-\frac{q}{2}(q+3)$$

punktach B_1, B_2, ..., B_β, ..., $B_{w'}$, a położenia tych wszystkich punktów zależeć będą od obranych punktów A_α.

W razie $q=n-1$, dostajemy:

(A) $$w=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2(n-1),\quad w'=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Gdy $q=n-2$, mamy:

(B) $$w=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+(n-2),\quad w'=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

a dla wszelkich $q<(n-k)<(n-2)$ wypadnie już:

$$(C)\quad \begin{aligned} w&=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{(k-3)(k-2n)}{2}-1 \\ w'&=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(k-1)(k-2)}{2}. \end{aligned}$$

Tutaj są więc w i w' równocześnie $<\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, gdyż $k=3, 4, 5, \ldots$

Załóżmy $q\geqq n$ i połóżmy $q=n+k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, i obierzmy na C_n:

$$(D)\quad w=nq-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n(k+3)-2,$$

punktów A_α dowolnie. Przez takie punkta przechodzi nieskończenie dużo krzywych C_q stopnia q, ale one wszystkie przecinają C_n w

$$(D)\quad w'=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

punktach stałych B_β, a te punkta zależą tu znowu od obranych punktów A_α.

Zatrzymajmy $q\geqq n-2$, a więc rozbierzmy wypadki (A), (B) (D), i postarajmy się w' ile możności pomniejszyć, poddając C_q szczególnym, dobrze wybranym warunkom. Krzywa $f=0$ niech posiada punktą wielokrotne $M_1, M_2, \ldots, M_c, \ldots, M_k$. Liczby wchodzące w ich szeregi złożenia, nazwijmy μ_c i przyjmijmy, że krzywa C_q ma posiadać w punktach M_c również punkta wielokrotne o liczbach ν_c, wchodzących w ich szeregi złożenia. Przez to spółczynniki krzywej C_q poddajemy:

$$m'=\sum_c \frac{\nu_c(\nu_c+1)}{2}$$

warunkom, a na krzywej $f=0$ nie będzie już można wybrać w punktów dowolnie, ale tylko $z=(w-m')$ punktów $P_1, P_2, \ldots, P_z$, i przez nie krzywę C_q przeprowadzić. Przy tem trzeba będzie ν_c tak wybrać, aby koniecznie było:

$$(1)\quad w>m',$$

czem się później zajmiemy. Aby dalej taka krzywa C_q przecinała się z $f=0$ największą możliwą ilość razy w punktach M_c, musi być dołączoną [art. 64.]. Ma ona wtedy w punktach M_c dokładnie $\Sigma\mu_c\nu_c$ punktów przecięcia się z $f=0$, a doliczając do tego z punktów P_α, dostajemy razem, z warunków dotąd wprowadzonych, punktów przecięcia się:

$$r=z+\sum\mu_c\nu_c=w+\left(\sum\mu_c\nu_c-\sum\frac{\nu_c(\nu_c+1)}{2}\right).$$

Największe r będzie wtedy, gdy zażądamy, aby każdy dodajnik:

$$u_c=\mu_c.\nu_c-\frac{\nu_c(\nu_c+1)}{2}$$

był dodatnim i największym. W tym celu kładąc:

$$\frac{du_c}{d\nu_c}=\mu_c-\nu_c-\frac{1}{2}=0,$$

dostajemy stąd $\nu_c=\left(\mu_c-\frac{1}{2}\right)$, a że ν_c mają być całkowite, więc może być:

$$\nu_c=\mu_c-1, \text{ albo } \nu_c=\mu_c.$$

Obie te wartości dają $u_c=\frac{\mu_c(\mu_c-1)}{2}$, ale z nich zatrzymamy tylko $\nu_c=\mu_c-1$, gdyż w tym tylko razie jest $m'=\sum\frac{\mu_c(\mu_c-1)}{2}=d$, a więc $<\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. A że w (A), (B), (D) jest $w>\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, więc tem samem warunkowi (1) zadość się już uczyniło. Krzywa C_q jest więc dołączoną w zwykłym tego słowa znaczeniu; w punktach M_c przecina się z krzywą $f=0$ razy $\sum\mu_c(\mu_c-1)=2d$, a ta ilość jest większa niż liczba punktów przecięcia się w M_c wszelkich innych krzywych C_q. Z drugiej strony jest d ilością warunków, jakim już w punktach M_c spółczynniki krzywej C_q zadość czynią.

Wskutek tego poza punktami M_c można tu będzie tylko:

$$z=w-d$$

punktów P_α całkiem dowolnie obrać, a te wraz z $2d$ punktami przecięcia się wpadającymi w M_c dają $(w+d)$ punktów przecięcia się. Pozostałych więc punktów przecięcia się nie będzie już w', ale:

$$r=w'-d.$$

Że zaś w (A), (B), (D) jest $w'=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ więc:

$$r=\frac{(n-1)(n-1)}{2}-d=p,$$

gdzie p jest widocznie rodzajem krzywej $f=0$. Te pozostałe punkta zależne od obranych warunków w M_c i od punktów P_α nażwiemy $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$. Mamy więc twierdzenie:

I. *Z krzywych* C_q *tego samego stopnia* $q \geqq (n-2)$, *które mają być za obraniem punktów na* C_n *wyznaczone, mają krzywe dołączone tę własność, że przecinają* C_n *w możliwie najmniejszej ilości dalszych punktów, a ta ilość = rodzajowi* p *danej krzywej.*

Uwzględniając *w* obliczone w (A), (B), (D) i równanie $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ dostajemy:

$$(2) \quad \begin{cases} z = (p+1) + (n-3) & \text{gdy } q = n-2 \\ z = (p+1) + (2n-3) & \text{,, } q = n-1 \\ z = (p+1) + n(3+k) - 2 & \text{,, } q \geqq n. \end{cases}$$

Z tego wnosimy, że z jest zawsze $> p+1$ już przy $n > 3$ we wszystkich 3 wypadkach.

Mając to na uwadze, przyjmijmy, że chcemy znaleźć funkcyę $R(x, y)$, którаby na ν dowolnie danych zwyczajnych punktach:

$$(3) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_\nu$$

okazywała się jednokrotnie nieskończonością. W tym celu utwórzmy krzywę dołączoną C_q o tak dużym stopniu $q \geqq (n-2)$, aby dla niej mogło być $z > \nu$, a do jej punktów dowolnych P_α zaliczmy punkta (3). Równaniem takiej krzywej niech będzie:

$$(4) \qquad g(xy, P_1, P_2 \ldots P_z \,|\, Q_1 Q_2 \ldots Q_p) = g_2 = 0$$

gdzie $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ zależą już od wszystkich punktów P_α. Gdy utworzymy drugą dołączoną krzywę tego samego stopnia q, a o dowolnych punktach $P_1', P_2', \ldots, P_z'$ różnych od P_α i jej równanie napiszemy znowu w postaci:

$$g(xy, P_1' P_2' \ldots P_z' \,|\, Q_1' Q_2' \ldots Q_p') = g_1 = 0,$$

to iloraz g_1/g_2 będzie funkcyą, która niezawodnie na $(z+p)$ punktach zwyczajnych P_α, Q_β jest nieskończonością a na $(z+p)$ miejscach P_α', Q_β' staje się zerem. Lecz te punkta nieskończonościowe nie są tu dowolne, bo Q_β zależą już od P_α. Z tej jednak funkcyi g_1/g_2 będziemy mogli dojść do żądanej funkcyi. Załóżmy:

$$\text{I}^0) \quad \nu \leqq p.$$

Punkta zerowe $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ mianownika nie mogą być punktami (zerowymi) licznika g_1, ale za to wszystkie pozostałe punkta $P_{\nu+1} \ldots P_z$, $Q_1, Q_2, \ldots Q_p$ muszą wejść w licznik. Temu uczynimy zadość dając licznikowi g_1 postać:

$$g(xy, Q_1 Q_2 \ldots Q_\nu P_{\nu+1} P_{\nu+2} \ldots P_z \,|\, Q'_1 Q'_2 \ldots Q'_p) = g_1.$$

Lecz gdy ten licznik położymy $= 0$, dostaniemy równanie dołączonej krzywej przechodzącej aż przez z punktów

$$(Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, P_{\nu+1} \ldots P_z)$$

krzywej (4). Skutkiem tego obie dołączone krzywe są identyczne, gdy $q=n-1$, lub $n-2$, a przechodzą równocześnie przez wszystkie punkta P_α, Q_β, gdy $q \geqq n$. Funkcya g_1/g_2 nie posiada w tym razie żadnych miejsc nieskończonościowych Gdy przeciwnie założymy:

$$\text{II}^0)\quad \nu > p,$$

a utworzymy funkcyę:

$$(5)\quad s_1 = \frac{g(xy,\ Q_1 Q_2 \dots Q_p\ S_{p+1} S_{p+2} \dots S_\nu\ P_{\nu+1} \dots P_z \mid Q'_1 Q'_2 \dots Q'_p)}{g(xy,\ P_1 P_2 \dots P_p\ P_{p+1} P_{p+2} \dots P_\nu P_{\nu+1} \dots P_z \mid Q_1\ Q_2 \dots Q_p)}$$

z dowolnie obranemi S_{p+1}, $S_{p+2}, \dots S_\nu$ ale różnemi od wszelkich P_α, Q_β, to widocznie taka funkcya jest nieskończonością na żądanych ν miejscach dowolnych. Zerem staje się ona również na ν miejscach:

$$S_{p+1},\ S_{p+2}, \dots,\ S_\nu,\ Q'_1,\ Q'_2, \dots,\ Q'_p,$$

ale z nich tylko ich $(\nu-p)$ a to: $S_{p+1}, \dots, S_\nu$ jest dowolnych.

s_1 jest więc już żądaną funkcyą. Co się tyczy jej zachowania się w punktach $[Q_1, Q_2, \dots, Q_p, P_{\nu+1}, \dots, P_z]$ i w punktach wielokrotnych M_c, to widocznie w nich występuje s_1 w formie nieoznaczonej $\frac{0}{0}$ [art. 66]. Ale wyrażona przez parametr t wchodzący do par funkcyj należących do tych punktów dostaje i tam oznaczone wartości. Wartości te niebędą nigdy ani $=0$, ani $=\infty$, gdyż obie krzywe $g_1=0$, $g_2=0$ przecinają krzywę $f=0$ lub dotykają jej w sposób identyczny.

Połóżmy $\nu=p+1$, to dostaniemy funkcyę:

$$(6)\quad s = \frac{g(xy,\ Q_1 Q_2 \dots Q_p\ S_{p+1} P_{p+2} \dots P_z \mid Q'_1 Q'_2 \dots Q'_p)}{g(xy,\ P_1 P_2 \dots P_p P_{p+1}\ P_{p+2} \dots P_z \mid Q_1 Q_2 \dots Q_p)}$$

stopnia: $(p+1)$.

Forma (5) nie straci swych własności co do miejsc nieskończonościowych i zerowych, gdy się w niej g_1, g_2 zastąpi przez $c_1 g_1$, $c_2 g_2$ o dowolnych spółczynnikach c_1, c_2. Połóżmyż więc ogólniej

$$(7)\quad s_1 = c_1 g_1 / c_2 g_2,$$

to teraz od tej formy można jeszcze zażądać, aby na pewnem dowolnem miejcu T obrazu $f=0$ przybierała wartość skończoną: $c' \neq 0$.

Przyjmijmy, że druga funkcya s'_1 będąca już-to ilorazem dwóch funkcyj, które nie są dołączone, już-to ilorazem dwóch funkcyj dołączonych, ale innego stopnia, niż stopień funkcyj g_1, g_2 w (6), staje się, jak s_1, nieskończoną na miejscach $P_1, P_2, \dots, P_\nu$, a zerem na miejscach S_{p+1}, $S_{p+2}, \dots, S_\nu$. Utwórzmy różnicę:

$$\sigma_1 = s'_1 - C_1 s_1,$$

gdzie C_1 jest stałą dowolną, to ta różnica jest niezawodnie — przy stosownym doborze stałej C_1 — nieskończonością na miejscach $P_1, P_2, ..., P_\nu$, a zerem staje się: na miejscach $S_{p+1}, S_{p+2}, ..., S_\nu$, na jednem miejscu T_1 wynikającem z wyboru stałej C_1 i jeszcze może na innych miejscach, które nazwiemy $T_{11}, T_{12}, ..., T_{1, r_1 - 1}$. Funkcya σ_1 ma więc ν miejsc nieskończonościowych, a $(\nu - p + r_1)$ miejsc zerowych.

Gdy $p \lesseqgtr r_1$, to σ_1 ma więcej lub mniej miejsc nieskończonościowych, niż zerowych, a że taka funkcya wymierna nie istnieje, więc musi być $\sigma_1 = const.$ Że zaś σ_1 ma przyjmować i wartości $=0$, więc $\sigma_1 = 0$ na wszystkich miejscach obrazu algebraicznego $f=0$, a identycznie jest w tym obrazie $s'_1 = C_1 s_1$. Gdy przeciwnie $p = r_1$, to

$$\sigma_1 = \begin{cases} \infty & \text{na miejscach } P_1, P_2, ..., P_\nu \\ 0 & \text{,, \quad ,, \quad } S_{p+1}, ..., S_\nu, T_1, T_{11}, ... T_{1, p-1} \end{cases}$$

ma więc ν miejsc zerowych i ν miejsc nieskończonościowych, i można przypuścić, że istnieje. Utwórzmyż znowu różnicę:

$$\sigma_2 = \sigma_1 - C_2 s_1,$$

gdzie C_2 jest stałą, to ta różnica ma znowu miejsca nieskończonościowe $P_1, P_2, ..., P_\nu$, znika zaś: na miejscach $S_{p+1}, ..., S_\nu$, na miejscu T_2 wynikającem z wprowadzenia stałej C_2 i jeszcze może na innych miejscach $T_{21}, T_{22}, T_{2, r_2 - 1}$.

Różnica σ_2 ma więc ν miejsc nieskończonościowych, a $(\nu - p + r_2)$ miejsc zerowych.

Gdy $p \gtreqless r_2$ wywnioskujemy, jak wyżej, że $\sigma_2 = 0$, a więc $\sigma_1 = c_2 s_1$. Gdy przeciwnie $p = r_2$, mieć będziemy:

$$\sigma_2 = \begin{cases} \infty & \text{na miejscach } P_1 P_2 ... P_\nu \\ 0 & \text{,, \quad ,, \quad } S_{p+1} ... S_\nu, T_2, T_{21}, ..., T_{2.p-1} \end{cases}$$

a więc σ_2 jest znowu funkcyą o ν miejscach zerowych i ν miejscach nieskończonościowych i można przypuścić, że istnieje. W ten sposób postępując, możemy mieć dwie możliwości:

$$\text{albo:} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 = s_1' - C_1 s_1 \\ \sigma_2 = \sigma_1 - C_2 s_1 \\ \sigma_3 = \sigma_2 - C_3 s_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{k-1} = \sigma_{k-2} - C_{k-1} s_1 \\ 0 = \sigma_{k-1} - C_k s_1 \end{array} \right\}, \quad \text{albo:} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 = s'_1 - C_1 s_1 \\ \sigma_2 = \sigma_1 - C_2 s_1 \\ \sigma_3 = \sigma_2 - C_3 s_1 \\ \sigma_4 = \sigma_3 - C_4 s_1 \\ in\ inft. \end{array} \right\}.$$

W pierwszym razie dostajemy:

$$s'_1 = s_1 [C_1 + C_2 + ... + C_k] = C s_1,$$

a w drugim razie:

$$s'_1 = s_1[C_1 + C_2 + \dots \text{ in inft.}].$$

Lecz, że C_1, C_2,... można tak wybrać, aby szereg $C_1 + C_2 + \dots$ był bezwarunkowo zbieżny, więc i tu mamy:

$s'_1 = Cs_1$. To znaczy:

II. *Funkcya $R(x, y)$ dowolnego stopnia $v > p$ jest w zupełności wyznaczoną, gdy damy jej v dowolnie wybranych miejsc nieskończonościowych jednokrotnych, $(v-p)$ jej miejsc zerowych i jedno miejsce, na którem ma przybierać dowolnie wybraną wartość skończoną $\neq 0$.*

Taka funkcya daje się przedstawić ilorazem dwóch funkcyj dołączonych dostatecznie dużego stopnia q *).

Rzecz się nie zmieni, jeżeli między miejscami nieskończonościowemi będą i równe sobie. Przyjmijmy n. p., że w szeregu: $P_1, P_2, \dots, P_v$ powtarza się $P_\gamma = (x_\gamma, y_\gamma)$ razy μ i niech otoczenie tego miejsca w obrazie $f=0$ określa para funkcyj $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Wtedy w otoczeniu tego miejsca musi mieć s_1 rozwinięcie postaci:

$$at^{-\mu} + bt^{-\mu+1} + \dots + k\,.\,t^{-1} + h_0 + h_1 t + \dots,$$

a aby tak było, potrzeba, aby w rozwinięciu:

$$g_2(\varphi, \psi) = \gamma_{20} + \gamma_{21} t + \dots + \gamma_{2,\mu-1} t^{\mu-1} + \gamma_{2\mu} t^{\mu} + \dots,$$

było:

$$\gamma_{20} = 0,\ \gamma_{21} = 0, \dots,\ \gamma_{2,\mu-1} = 0.$$

Warunków tych jest μ, a tyle właśnie wynosi powtarzanie się miejsca P_γ. Stąd wynika:

III. *Twierdzenie II. utrzymuje się w całości, jeżeli funkcya stopnia v ma między miejscami nieskończonościowemi także i miejsca powtórzone.*

Widzieliśmy, że próba przedstawienia funkcyi s_1 stopnia $v \leq p$, a o d o w o l n y c h miejscach nieskończonościowych $P_1, P_2, \dots P_v$ za pomocą dołączonych krzywych $(q \geq n-2)$ zawiodła, a aby rozstrzygnąć, czy z niemożliwością takiej formy łączy się zarazem niemożliwość istnienia takich funkcyj, przeprowadzimy naprzód takie badania:

Niech $s_1 = G_1(xy) / G_2(xy)$ będzie daną funkcyą bez różnicy, czy G_1, G_2 są funkcyami dołączonemi, lub nie, to z powodu, że tu tylko miejsca (xy) dające $f=0$ bierze się pod uwagę, możemy także położyć:

$$s_1 = [G_1(xy) + A(xy)\,.\,f(xy)] / [G_2(xy) + B(xy)\,.\,f(xy)]$$

*) Gdy $q \geq n$, to do zupełnego wyznaczenia krzywych $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ trzeba jeszcze dobrać na różne sposoby punkta leżące poza $f=0$ [por. T. I. str. 336.].

rozumiejąc przez $A(xy)$, $B(xy)$ dwie całkiem dowolne całkowite wymierne funkcye zmiennych x, y. Połóżmy:

$$G_1 + A . f = \bar{G}_1, \quad G_2 + B . f = \bar{G}_2$$

to stąd mamy identycznie:

$$G_1 . \bar{G}_2 - G_2 \bar{G}_1 = (G_1 B - G_2 A) f = U(xy) . f,$$

gdzie U jest funkcyą wymierną, całkowitą.

Przyjmijmy naodwrót, że daną mamy pewną funkcyę s_1 w dwóch różnych formach:

$$s_1 = G_1 / G_2, \quad s_1 = \bar{G}_1 / \bar{G}_2.$$

Różnica $G_1 \bar{G}_2 - G_2 \bar{G}_1$ jest wtedy zerem na wszystkich miejscach obrazu $f=0$, a stąd wynika, że i tu identycznie być musi:

$$G_1 \bar{G}_2 - G_2 \bar{G}_1 = U(xy) . f, \tag{8}$$

gdzie U jest pewną, dobrze oznaczoną funkcyą wymierną, całkowitą zmiennych x, y.

Po wstawieniu w s_1 za (x, y) par funkcyj, możemy w punktach $(\xi\ \eta)$, w których istnieje więcej niż jedna para, mieć dwie możliwości albo: 1⁰) każda z par funkcyj daje tę samą wartość s_1 (na każdej gałęzi funkcyi algebraicznej y przechodzącej przez ξ ma s_1 tę samą wartość), albo 2⁰) różne pary funkcyj dają różne wartości funkcyi s_1 (funkcya s_1 ma w $(\xi\eta)$ różne wartości według tego, do jakiej gałęzi y zaliczamy η).

Gdy dana funkcya s_1 jest całkowitą wymierną funkcyą $G(xy)$, to posiada we wszystkich punktach wielokrotnych własność drugą, a oprócz tego wszystkie swoje punkta nieskończonościowe ma na miejscach obrazu $f=0$ leżących wyłącznie w nieskończoności. W każdym punkcie wielokrotnym $(\xi\ \eta)$, leżącym w skończoności ma G wartość $G(\xi\ \eta)$ bez względu na gałąź algebraicznej funkcyi y.

Przyjmijmy naodwrót, że mamy daną funkcyą $s_1 = g_1 / g_2$ posiadającą wszystkie dopieroco wymienione własności funkcyi całkowitej.

Wtedy przez każdy punkt P, w którym się krzywa $g_2 = 0$, $f=0$ przecina (styka) k-krotnie, musi i krzywa $g_1 = 0$ koniecznie $(k+c)$-krotnie $c=0, 1, 2, \ldots$ przechodzić, inaczej bowiem byłaby funkcya s_1 nieskończonością w punktach P leżących w skończoności, a to się sprzeciwia założeniu. Funkcya g_1 da się zatem wyrazić formą $g_2 G(xy) + A(xy) . f$, gdzie G, A są pewnemi całkowitemi funkcyami, a sama funkcya s_1 będzie postaci:

$$s_1 = \frac{g_2 G + Af}{g_2} = \frac{g_2 G}{g_2} = G(xy).$$

Stąd twierdzenie:*)

IV. *Dowolną funkcyę $s = R(xy)$ posiadającą charakter funkcyi całkowitej na miejscach (xy) obrazu $f=0$, można za pomocą f sprowadzić zawsze do formy całkowitej: $G(xy)$.*

Mając to, wróćmy do funkcyi s_1, której stopień ν założyliśmy $\leqq p$. Przyjmijmy, że taka funkcya istnieje, i że ma postać:

$$s_1 = \frac{\Gamma_1(xy,\ P_1' P_2' \dots P_\nu'\ U_1 U_2 \dots)}{\Gamma_2(xy,\ P_1 P_2 \dots P_\nu\ U_1 U_2 \dots)},$$

Γ_1, Γ_2 są funkcyami całkowitemi i niedołączonemi znikają w $f=0$ odpowiednio w punktach (P_α', U_β), (P_α, U_β)**), a żaden z punktów $(P_1 P_2 \dots P_\nu)$ nie zawiera się w grupie $(P_1' P_2' \dots P_\nu')$. Funkcya s_1 ma więc miejsca nieskończonościowe P_α, a miejsca zerowe P_α', $\alpha = 1, 2, \dots, \nu$. Utwórzmy dołączoną funkcyę:

$$g_2(xy,\ P_1 P_2 \dots P_\nu P_{\nu+1} \dots P_z \mid Q_1 Q_2 \dots Q_p)$$

z dowolnie dobranymi punktami $P_{\nu+1}$, $P_{\nu+2}, \dots P_z$ i zauważmy iloczyn $(s_1 . g_2)$. Jest on widocznie w skończoności wszędzie skończony, znika tylko na $(z+p)$ miejscach:

$$P_1', P_2', \dots, P_\nu',\ P_{\nu+1}, \dots, P_z,\ Q_1 Q_2 \dots Q_p,$$

a że zawiera czynnik g_2 więc w punktach wielokrotnych ma jedną tylko wartość $=0$. Jest więc funkcyą całkowitą [tw. IV.] i dotego dołączoną funkcyą:

$$g_1(xy,\ Q_1 Q_2 \dots Q_p P_{\nu+1} \dots P_{\nu+z-p} \mid P_{\nu+z-p+1} \dots P_z P_1' P_2' \dots P_\nu')$$

Mamy więc $s_1 = g_1 / g_2$, a że punkty $Q_1, Q_2 \dots Q_p P_{\nu+1} \dots P_{\nu+z-p}$ zawierają się także i w g_2 a jest ich z, t. j. tyle, ile dowolnych punktów zerowych w g_2, więc g_1 musi być tego samego stopnia co g_2, a krzywe $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ muszą przez wszystkie te same punkta krzywej $f=0$ przechodzić; s_1 jest więc widocznie funkcyą pozbawioną miejsc nieskończonościowych, a jako taka jest $=$ stałej. Mamy więc twierdzenia:

V. *Funkcya $R(x, y)$ stopnia $\nu \leqq p$, a o dowolnych miejscach nieskończonościowych nie istnieje.*

VI. *Z funkcyj $R(x, y)$ o dowolnych miejscach nieskończonościowych istnieją tylko funkcye stopni $\nu > p$. Funkcya najniższego stopnia ma swój stopień $(p+1)$, a więc ϱ, [art. 68. tw. I.] rząd obrazu algebraicznego $=$ rodzajowi p tegoż obrazu.*

Mamy w ten sposób rząd ϱ obrazu algebraicznego już oznaczony.

---

*) Nöther. *Math. Ann.* T. 6. str. 351—359.

**) W punktach U_β znikają w tych samych stopniach.

Pd. 1. Krzywa $(x^2+y^2)-c^2(x^2-y^2)=0$ ma (Pd. 3., art. 58.) trzy punkta zwykłe podwójne, a to: punkt (0, 0) i dwa punkta w nieskończoności o stosunkach $+i$, $-i$. Mamy tu więc $d=3$, $\rho=p=0$, $z=2$, a krzywą dołączoną stopnia $(n-2)=2$ będzie koło o równaniu $g(xy)=x^2+y^2+\alpha x+\beta y=0$ z dowolnymi spółczynnikami α, β, a funkcya s stopnia $\rho+1=1$ będzie tu:

$$s=g(xy, S_1 P_2)/(g(xy, P_1P_2).$$

Pd. 2. Krzywa

$$ay^3+bx^2y+cx^4=0$$

ma jedyny punkt trzykrotny (0, 0) niezłożony. Jej rodzaj będzie więc $=\frac{3.2}{2}-\frac{3.2}{2}=0$ a jej dołączoną krzywą stopnia 2go będzie:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0.$$

Jest-to para prostych przechodzących przez punkt (00). Utworzyć funkcyę s.

Pd. 3. Krzywa:

$$ay^2+bx^4+bx^5=0$$

ma w punkcie (0, 0) punkt dwukrotny złożony, bo za podstawieniem:

$$(\alpha) \qquad x=\xi, \quad y=\eta\xi$$

dochodzimy do równania:

$$(\alpha') \qquad a\eta^2+b\xi^2+b\xi^3=0,$$

które znowu zawiera wyrazy najniższego stopnia $w=2$. Z niego jednak dojdziemy już do równania, w którem znajdą się i wyrazy najmniejszego stopnia $w=1$, a stąd wynika, że punkt (0, 0) ma złożenie (2, 2).

W skończoności nie posiada krzywa już żadnych punktów wielokrotnych. Aby punkt w nieskończoności zbadać, połóżmy:

$$(\beta) \qquad x=\eta/\xi, \quad y=-1/\xi,$$

to dojdziemy do równania:

$$(\beta') \qquad a\xi^3+b\xi\eta^4+b\eta^5=0,$$

w którem widocznie jest $w=3$. Połóżmy tu:

$$(\gamma) \qquad \xi=\xi_1\eta_1, \quad \eta=\xi_1,$$

to mieć będziemy:

$$(\gamma') \qquad b\xi_1{}^2+a\eta_1{}^3+b\xi_1{}^2\eta_1=0.$$

Jestto równanie o $w=2$, lecz z niego dojdzie się już do równania o $w=1$, z czego się okazuje, że punkt w nieskończoności jest wielokrotnym o złożeniu (3, 2). Krzywa ma więc:

$$d=2.\frac{2.1}{2}+\frac{3.2}{2}+\frac{2.1}{2}=6$$

$$\rho=p=\frac{4.3}{2}-6=0.$$

Równanie dołączonej krzywej stopnia 3go ma mieć w otoczeniu punktu 0, 0) postać:

$$g(xy)=(xy)_1+(xy)_2+(xy)_3=$$
$$=(a_0x+a_1y)+(b_0x^2+b_1xy+b_2y^2)+(c_0x^3+c_1x^2y+c_2xy^2+c_3y^3)=0$$

i ma za podstawieniem (α) przejść na równanie o $w=1$. Takiem przerobionem równaniem jest tu:

$$(1,\eta)_1+\xi(1,\eta)_2+\xi^2(1,\eta)_3=0,$$

a wskutek warunku $w=1$ musi być $a_0=0$.

Równaniem dołączonej krzywej jest więc:

$$g(xy) = a_1 y + (xy)_2 + (xy)_3 = 0.$$

Z niego za podstawieniem (β) mamy dojść do równania o $w=2$. Że zaś to podstawienie daje:

(1) $$-a_1\xi^2 + \xi(\eta, -1)_2 + (\eta, -1)_3 = 0,$$

więc musi być $b_2 = c_3 = c_2 = 0$, po czem równanie (1) dostaje postać:

$$-a_1\xi^2 + \xi(b_0\eta^2 - b_1\eta) + (c_0\eta^3 - c_1\eta^2) = 0.$$

Z niego za podstawieniem (γ) dostajemy:

$$-a_1\eta_1^2 + \eta_1(b_0\xi_1 - b_1) + (c_0\xi_1 - c_1) = 0;$$

że zaś tu ma być $w=1$, więc musi być jeszcze: $c_1 = 0$.

Uwzględniając $a_0 = b_2 = c_2 = c_1 = 0$, mamy:

$$g(xy) = a_1 y + b_0 x^2 + b_1 xy + c_0 x^3 = 0,$$

a ponieważ tu $z=3$, $p=0$, $p+1=1$. więc:

$$s = g(xyS_1P_2P_3)/g(xy, P_1P_2P_3).$$

Pd. 4. Utworzyć funkcyę s dla krzywej: $x + x^3 + y^3 = 0$, która nie posiada wcale punktów podwójnych, a więc jest rodzaju $\rho = 1$.

Pd. 5. Krzywa:

$$x^2 + (xy)_4 = x^2 + (A_4x^4 + A_3x^3y + A_2x^2y^2 + A_1xy^3 + A_0y^4) = 0,$$

w której $A_0 \neq 0$ zakładamy, posiada jedyny punkt wielokrotny $(0,0)$. Okazać, że jego złożenie jest: $(2,2)$, rodzaj krzywej $\rho = 1$, a dołączona krzywa stopnia 2^go^ ma równanie: $g(xy) = a_0 x + b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 y^2 = 0$.

Pd. 6. Równanie:

(a) $$y^3 = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)},$$

po sprowadzeniu do formy całkowitej — ma postać:

(b) $$y^3x^2 - (c+d)y^3x + cdy^3 - x^2 + (a+b)x - ab = 0,$$

a gdy w niem:

1°) a, b, c, d różne między sobą

2°) $a + b \neq c + d$

3°) $ab \neq cd$ założymy, mamy w (b) równanie nieprzywiedlne.

Krzywa (b) nie posiada w skończoności punktów wielokrotnych. W nieskończoności zaś ma punkt wielokrotny o złożeniu $(3,2)$. Mamy tu więc:

$$d = 4, \quad \rho = p = 2.$$

Okazać, że krzywą dołączoną stopnia 3^go^ będzie tu:

$$g(xy) = a_0 + b_0 x + b_1 y + c_1 xy + c_2 y^2 + d_2 xy^2 = 0.$$

71. Rząd obrazu hypereliptycznego i eliptycznego. Obraz algebraiczny określony równaniem:

(1) $$y^2 = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

w którem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ przyjmujemy wszystkie między sobą różne, jest w analizie od dość dawnych czasów wielkiej doniosłości, a nazywa się **obrazem eliptycznym**, gdy $n=3$, albo $=4$, a **obrazem hypereliptycznym**, gdy $n>4$:

Równanie (1) nie posiada w skończoności żadnych punktów wielokrotnych, (do których otoczenia przeprowadzone posiadałoby wyrazy najniższego stopnia $w>1$).

Chcąc zbadać punkta w nieskończoności, napiszmy (1) w postaci: $y^2=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+...+A_n$ i połóżmy:

$$(\alpha)\qquad x=\eta/\xi,\ y=-1/\xi.$$

Z tego podstawienia dostaniemy:

$$(2)\qquad \xi^{n-2}=\eta^n+A_1\eta^{n-1}\xi+A_2\eta^{n-2}\xi^2+...+A_n\xi^n.$$

Jestto równanie (A), jakie mieliśmy w Pd. 3. — art. 61. — a z tego wynika:

I. *Obraz hypereliptyczny ma w nieskończoności* $(m-2)$*-krotny punkt, a do niego dołącza się* $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ *punktów podwójnych, gdy n jest parzyste, a* $\left(\frac{n+1}{2}-2\right)$ *punktów podwójnych, gdy n jest nieparzyste.*

Mamy więc:

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{l} d=\frac{(n-2)^2}{2},\ \varrho=p=\frac{n}{2}-1,\ \textit{gdy } n \textit{ jest parzyste},\\[2mm] d=\frac{(n-2)^2-1}{2},\ \varrho=p=\frac{n-1}{2},\ \textit{gdy } n \textit{ jest nieparzyste.}\end{array}\right.$$

Gdy ϱ *ma być* $=1$, *musi być* $n=4$ *albo* $=3$; *obraz jest eliptyczny.*

Równanie dołączonej krzywej $(n-2)^{go}$ stopnia dla krzywej (2) w otoczeniu punktu $M=(\xi,\eta)=(0,0)$ niech ma postać:

$$\varphi=(\xi\,\eta)_{n-3}+(\xi\,\eta)_{n-2}=0,$$

gdzie

$$(\xi\,\eta)_{n-3}=c_{n-3}\xi^{n-3}+c_{n-4}\xi^{n-4}\eta+...+c_0\eta^{n-3}$$
$$(\xi\,\eta)_{n-2}=d_{n-2}\xi^{n-2}+d_{n-3}\xi^{n-3}\eta+...+d_0\eta^{n-2}.$$

Spełniło ono już $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ warunków potrzebnych, aby punkt M był $(n-3)$-krotnym. To równanie ma dalej — według określenia krzywych dołączonych — przez podstawienia użyte w równaniu (A) [Pd. 3., art. 61.] — dać początek r równaniom zatrzymującym statecznie wyrazy najniższego stopnia $w=1$, gdzie

$$r=\frac{n}{2}-1,\ \text{albo } =\frac{n+1}{2}-2$$

według tego, czy n jest parzyste, czy nieparzyste. Połóżmyż:

to mieć będziemy:
$$\xi=\xi_1\eta_1,\quad \eta_1=\xi_1,$$
$$\varphi_1=(\eta_1,1)_{n-3}+\xi_1(\eta_1,1)_{n-2}=0,$$
a stąd wynika, że $c_0=0$ być musi. Połóżmy dalej w
$$\varphi_1=(c_{n-3}\eta_1^{n-3}+...+c_1\eta_1)+\xi_1(\eta_1,1)_{n-3}=0$$
$$\xi_1=\xi_2\eta_2,\quad \eta_1=\xi_2,$$
to dostaniemy:
$$\varphi_2=(c_{n-3}\xi_2^{n-4}+...+c_1)+\eta_2(\xi_2,1)_{n-2}=0,$$
a stąd znowu wnosimy, że $c_1=0$ być musi.

Tworząc w ten sposób czem raz dalsze przerobione równania przekonalibyśmy się, że dla otrzymania r równań o $w=1$, trzeba, aby — prócz $c_0=c_1=0$ — jeszcze było:
$$c_2=c_3=...=c_{r-1}=0.$$
Krzywa dołączona mieć więc będzie równanie:

(4) $$\varphi=c_{n-3}\xi^{n-3}+c_{n-4}\xi^{n-4}\eta+...+c_r\xi^r\eta^{n-r-3}+(\xi\,\eta)_{n-2}=0.$$

Z podstawienia (α) mamy naodwrót:
$$\xi=-1/y,\quad \eta=-x/y,$$
że zaś spółczynniki $c_{n-3},..., c_r, d_{n-2}..., d_0$ są dowolne, więc nie zważając na znaki, dochodzimy z $\varphi=0$ do równania:

(5) $$\begin{aligned}g(xy)=&[c_{n-3}+c_{n-4}x+c_{n-5}x^2+...+c_rx^{\varrho-1}]y+\\&+d_{n-2}+d_{n-1}x+d_{n-2}x^2+...+d_0x^{n-2}=0,\end{aligned}$$

które określa dołączoną krzywę stopnia $(n-2)^{go}$ w obrazie hypereliptycznym (1). Do zupełnego wyznaczenia tej krzywej potrzeba jeszcze punktów:
$$z=\frac{3n}{2}-3,\ \text{gdy } n \text{ parzyste};\quad z=\frac{3n-5}{2},\ \text{gdy } n \text{ nieparzyste}.$$

Mając z obliczone, można następnie przejść do tworzenia funkcyi s stopnia $(\varrho+1)^{go}$.

ROZDZIAŁ IX.

Funkcye Weierstrassa: $H(xy)_a$, $H'(xy)_a$, $H(xy, x'y')$.

---

72. Wyprowadzenie funkcyi $H(xy, x'y')$ z funkcyi s. Funkcye $H(xy, x'y')_\mu$. W funkcyi:

(1) $$s=\frac{g(xy,\,Q_1Q_2\cdots Q_\varrho S_{\varrho+1}P_{\varrho+2}\cdots P_z\,|\,Q'_1Q'_2\cdots Q'_\varrho)}{g(xy,\,P_1P_2\cdots P_\varrho P_{\varrho+1}P_{\varrho+2}\cdots P_z\,|\,Q_1Q_2\cdots Q_\varrho)}=\frac{g_1(xy)}{g_2(xy)}$$

$(\varrho+1)^{\text{go}}$ stopnia, jaką utworzyliśmy w Rozdziale poprzedzającym, połóżmy:

$$P_1=(a_1b_1),\ P_2=(a_2b_2),\ \ldots,\ P_\varrho=(a_\varrho b_\varrho),\ P_{\varrho+1}=(x',y'),\ S_{\varrho+1}=(a_0b_0),$$

gdzie (a_0b_0), (a_1b_1), ..., $(a_\varrho b_\varrho)$ są dowolnie obrane miejsca w obrazie $f=0$ rzędu ϱ, miejsce $(x'y')$ jest bieżące w tym obrazie, a (a_0b_0) jest różne od miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha=1,2,\ldots,\varrho$. W otoczeniu miejsca $(x'y')$ niech będzie:

$$s=\frac{A+A_1t+A_2t^2+\ldots}{B_1t+B_2t^2}=\frac{A}{B_1}\left(\frac{1}{t}-\mathfrak{P}(t)\right),$$

to funkcya $\left(-s.\frac{B_1}{A}\right)$ ma jeszcze te same miejsca zerowe i nieskończonościowe, co funkcya s, a w otoczeniu miejsca $(x'y')$ ma rozwinięcie postaci $-t^{-1}+\mathfrak{P}(t)$. Wskutek tego musi być w każdem położeniu miejsca $(x'y')$:

$$(2)\qquad H(xy,x'y')=-\frac{B_1}{A}s,$$

przez co już funkcyę $H(xy,x'y')$ wyprowadzono z funkcyi s.

W funkcyi $H(xy,x'y')$ jest $(x'y')$ takiem miejscem zwyczajnem obrazu $f=0$, które nie wpada ani w miejsce (a_0b_0), ani w żadne z miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha=1,2,\ldots,\varrho$, i wtedy funkcya ta posiada wszystkie ją charakteryzujące własności. W szczególności, gdy (xy) zastąpimy parą funkcyj $(\overset{\alpha}{x}_t,\overset{\alpha}{y}_t)$, otaczającą miejsce $(a_\alpha b_\alpha)$ i położymy:

$$(3)\qquad H(\overset{\alpha}{x}_t\overset{\alpha}{y}_t,x'y')=H(x'y')_\alpha t^{-1}+\overset{0}{H}(x'y')_\alpha-H'(x'y')_\alpha t+\ldots$$
$$\alpha=1,2,\ldots,\varrho,$$

dostajemy w spółczynnikach:

$$\text{I.}\quad H(x'y')_\alpha,\quad \alpha=1,2,\ldots,\varrho,$$
$$\text{II.}\quad H'(x'y')_\alpha,\quad \alpha=1,2,\ldots,\varrho$$

dwa systemy po ϱ nowych wymiernych funkcyj pary $(x'y')$ obrazu algebraicznego $f=0$. Te funkcye — jak później zobaczymy — odegrają w dalszych poszukiwaniach bardzo ważną rolę.

Zbadajmy graniczne wypadki:

$$H(xy,a_0b_0)\ \text{i}\ H(xy,a_\alpha b_\alpha),\quad \alpha=1,2,\ldots,\varrho.$$

W pierwszym razie mamy $P_{\varrho+1}=(x'y')=(a_0b_0)$. Funkcya s przechodzi na funkcyę stopnia ϱ^{go}, a że taka funkcya nie istnieje, a (a_0b_0) ma być miejscem zerowem funkcyi $H(xy,x'y')$ przy jakiemkolwiek $(x'y')$, więc

$$(4)\qquad H(xy,a_0b_0)=0\ \text{identycznie.}$$

W razie drugim mamy: $P_{\varrho+1}=(x'y')=(a_\alpha b_\alpha)=P_\alpha$, a więc:

(5) $$s=\frac{g(xy,\,Q_1\dots Q_\alpha\dots Q_\varrho S_{\varrho+1}P_{\varrho+2}\dots P_z|Q'_1\,Q'_2\dots Q'_\varrho)}{g(xy,\,P_1\dots P_\alpha\dots P_\varrho P_\alpha\;\;P_{\varrho+2}\dots P_z|Q_1\;Q_2\dots Q_\varrho)}=\frac{g_1(xy)}{g_2(xy)}.$$

Przyjmijmy, że chcemy utworzyć krzywę dołączoną, która przechodzić ma przez $(z-1)$ punktów:

(6) $$Q_1,\,Q_2,\,\dots,\,Q_\varrho,\,P_{\varrho+2},\,\dots,\,P_z\,;$$

[są one wszystkie punktami zerowemi licznika]. Ponieważ mamy tu warunków o jeden mniej, niż potrzeba, więc dojdziemy w tym razie do pęku dołączonych krzywych:

(7) $$K(xy)=\gamma_1(xy)+\lambda.\gamma_2(xy).$$

Aby z niego wyjąć krzywę $K_\alpha(xy)=0$, przechodzącą przez punkt P_α, potrzeba tylko jednego warunku:

$$\lambda=-\gamma_1(a_\alpha b_\alpha)/\gamma_2(a_\alpha b_\alpha)=\gamma_{1\alpha}/\gamma_{2\alpha}=\lambda_\alpha.$$

Ale — jak to zaraz okażemy — ten jeden warunek spowoduje, że krzywa ta w punkcie P_α będzie miała z $f=0$ już aż dwa wspólne punkta. I tak: przydając do punktów (6) jeszcze punkt P_α mamy już z punktów; ale te punkta należą do $g_2(xy)=0$, więc mamy identycznie:

$$K_\alpha(xy)=g_2(xy)=0.$$

Że zaś $g_2(xy)=0$ ma z $f=0$ dwa wspólne punkta w P_α, więc to samo odnieść trzeba i do krzywej $K_\alpha=0$ c. b. d. d.

Aby z drugiej strony bez przydawania nowego warunku miała krzywa $K_\alpha=0$ dwa punkta wspólne P_α z $f=0$, koniecznem jest, aby $\gamma_{1\alpha}=\gamma_{2\alpha}=0$ niezależnie od λ. Parametr λ_α okazuje się więc w formie nieoznaczonej $0/0$, a aby jego wartość oznaczyć, postąpmy w ten sposób: Niech parą funkcyj, otaczającą w $f=0$ miejsce P_α, będzie: $x=a_\alpha+t$, $y=b_\alpha+\mathfrak{P}(t)$, to rozwinięcie

$$K_\alpha(a_\alpha+t,\,b_\alpha+\mathfrak{P}(t))=(\gamma_{1\alpha}+\lambda_\alpha\gamma_{2\alpha})+(\gamma'_{1\alpha}+\lambda_\alpha\gamma'_{2\alpha})t+\dots$$

musi się poczynać dopiero od 2giej potęgi parametru t. Że zaś już mamy $\gamma_{1\alpha}=\gamma_{2\alpha}=0$, więc musi być dalej: $\gamma'_{1\alpha}+\lambda_\alpha\gamma'_{2\alpha}=0$. Skąd dostajemy: $\lambda_\alpha=-\gamma'_{1\alpha}/\gamma'_{2\alpha}$, a równanie $\gamma_1(xy)+\lambda_\alpha\gamma_2(xy)=0$ z taką wartością λ_α określa krzywę $K_\alpha=0$ identyczną z krzywą $g_2=0$.

Lecz wskutek $\gamma_{1\alpha}=\gamma_{2\alpha}=0$ przechodzić musi każda krzywa pęku (7) przez punkt $(a_\alpha b_\alpha)$. Właśnie i krzywa $g_1(xy)=0$ należy do pęku (7) i przechodzi przez punkt $S_{\varrho+1}=(a_0b_0)$, przechodzi więc także i przez punkt P_α. Z tego wynika, że w liczniku formy (5) musi się w grupie $Q'_1,\,Q'_2,\,\dots,\,Q'_\varrho$ mieścić punkt P_α. Lecz — jeżeli tak się rzecz ma — to s jest funkcyą tylko stopnia ϱ, a że na miejscu $S_{\varrho+1}$ ma być zerem, więc $s=0$ identycznie, a za tem idzie, że i

(8) $$H(xy,\,a_\alpha b_\alpha)=0 \text{ identycznie, } \alpha=1,2,\dots,\varrho.$$

Spróbujmy teraz utworzyć funkcyę wymierną s_μ, któraby posiadała takie własności: 1⁰ na miejscu $(x'y')$ ma być nieskończonością w $(\mu+1)^{\text{szym}}$ stopniu, $\mu=1,2,3,\ldots$, a jej rozwinięcie na tem miejscu ma z ujemnych potęg parametru t zawierać jedynie potęgę $t^{-\mu-1}$, 2⁰) na ϱ danych dowolnie miejscach $P_\alpha=(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha=1, 2,\ldots,\varrho$ ma być nieskończonością w pierwszym stopniu, 3⁰) na dodolnem miejscu $(a_0 b_0)$ ma być zerem.

Niech taka funkcya wyrażona ilorazem dwóch funkcyj dołączonych, posiada mianownik $g_2(xy)$, to gdy punkt $(x'y')$ nazwiemy krótko, P, mamy wyraźnie:

$$g_2(xy)=g(xy, P_1P_2\ldots P_\varrho, \underbrace{PP\ldots P}_{\mu+1}, P_{\varrho+\mu+2}\ldots P_z | Q_1\ldots Q_\varrho)$$

o dowolnie dobranyoh punktach $P_{\varrho+\mu+2},\ldots,P_z$. Warunki wyznaczające tę dołączoną funkcyę są przedewszystkiem:

(a) $$g_2(P_\alpha)=0\,{}^{*)}\quad \alpha=1,2,\ldots,\varrho,$$

$$g_2(P_{\varrho+\mu+2})=0,\ g_2(P_{\varrho+\mu+3})=0,\ \ldots,\ g_2(P_z)=0.$$

Dalej — gdy w otoczeniu miejsca P mamy:

(b) $$g_2=g_2(P)+g'_2(P)t+\ldots+g_2^{(\mu)}(P)t^\mu+B_1t^{\mu+1}+B_2t^{\mu+2}+\ldots$$

— to wskutek pierwszej własności funkcyi s_μ, koniecznem (ale jeszcze niedostatecznem) jest, aby zaszły takie jeszcze warunki:

(c) $$g_2(P)=0,\ g'_2(P)=0,\ \ldots,\ g_2^{(\mu)}(P)=0.$$

Przez (a), (b), (c) już jest mianownik g_2 w zupełności wyznaczony.

Licznik $g_1(xy)$, który jest oczywiście także funkcyą dołączoną, ma przedewszystkiem spełnić takie warunki:

(a') $$g_1(Q_\alpha)=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,\varrho,$$

(b') $$g_1(P_{\varrho+\mu+2})=0,\ \ldots,\ g_1(P_z)=0,\ g_1(a_0b_0)=0.$$

Jeżeli dalej jego rozwinięcie w otoczeniu miejsca P jest:

$$g_1=g_1(P)+g'_1(P)t+\ldots+g_1^{(\mu)}(P)t^\mu+A_1t^{\mu+1}+\ldots,$$

to warunki:

(c') $$(\varepsilon_1)\ \ g'_1(P)=0,\ (\varepsilon_2)\ \ g''_1(P)=0,\ \ldots,\ (\varepsilon_\mu)\ \ g_1^{(\mu)}(P)=0$$

wraz z warunkami (b) mianownika zadość już czynią, aby s_μ posiadła własność pierwszą.

Mając to, możemy s_μ schematycznie przedstawić w ten sposób

*) Dla uproszczenia naznaczamy — gdy $R=(\xi\eta)$ — wartość $g(\xi\eta)$ przez $g(R)$

$$s_\mu = \frac{g(xy,\, Q_1 Q_2 \dots Q_\alpha \dots Q_\varrho S_{\varrho+1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_\mu P_{\varrho+\mu+1} \dots P_z \,|\, Q'_1 Q'_2 \dots Q'_\varrho)}{g(x'y,\, P_1 P_2 \dots P_\alpha \dots P_\varrho \underbrace{P\;\; PP \dots P}_{\mu+1} P_{\varrho+\mu+2} \dots P_z \,|\, Q_1 Q_2 \dots Q_\varrho)} \tag{9}$$

$$= \frac{g_1(xy)}{g_2(xy)}.$$

Jej rozwinięciem w otoczeniu miejsca P jest:

$$s_\mu = \frac{g_1(P) + A_1 t^{\mu+1} + \dots}{B_1 t^{\mu+1} + B_2 t^{\mu+1} + \dots} = \frac{g_1(P)}{B_1}[t^{-\mu-1} + \mathfrak{P}_\mu(t)].$$

Gdy zauważymy funkcyę:

$$\frac{B_1}{g_1(P)} s_\mu = H(xy, x'y')_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots,$$

to ta funkcya posiada takie własności:

$$(10) \quad \begin{cases} 1^0)\;\; H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, x'y')_\mu = h_{\alpha\mu} t^{-1} + \mathfrak{P}_{\alpha\mu}(t), & \alpha = 1, 2, \dots \varrho, \\ 2^0)\;\; H(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t, x'y')_\mu = t.\mathfrak{P}_0(t), \\ 3^0)\;\; H(x'_t y'_t, x'y')_\mu = t^{-\mu-1} + \mathfrak{P}_\mu(t). \end{cases}$$

$(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t)$ jest parą otaczającą miejsce $(a_\alpha b_\alpha)$,

$(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t)$ " " " " $(a_0 b_0)$, a

$(x'_t y'_t)$ " " " " $(x'y')$.

W art. następnym poznamy, że $H(xy, x'y')_\mu$ jest wymierną także w parze $(x'y')$.

Przyjmijmy, że mamy drugą funkcyę: $\overline{H}(xy, x'y')_\mu$, posiadającą również własności (10). Różnica:

$$[H(xy, x'y')_\mu - \overline{H}(xy, x'y')]_\mu$$

jest funkcyą, która już tylko na ϱ miejscach dowolnych P_α staje się nieskończonością. Taka funkcya nie istnieje, jest stałą ilością, a że na miejscu $S_{\varrho+1} = (a_0 b_0)$ ma być zerem, więc mamy:

$$\overline{H}(xy, x'y')_\mu = H(xy, x'y')_\mu \quad \text{identycznie},$$

a to znaczy:

I. *Funkcyę* $H(xy, x'y')_\mu$ *charakteryzują własności* (10) *w zupełności.*

Niech $(x'y') = (a_0 b_0)$. Wtedy warunki (licznika):

$$g_1(S_{\varrho+1}) = 0,\; (\varepsilon_1),\; (\varepsilon_2),\; \dots,\; (\varepsilon_\mu)$$

są zarazem warunkami mianownika. Funkcya s_μ staje się funkcyą o ϱ tylko miejscach nieskończonościowych, a że ma być zerem na miejscu $S_{\varrho+1}$, więc być musi $s_\mu = 0$ identycznie i

$$H(xy, a_0 b_0)_\mu = 0 \quad \text{identycznie}, \tag{11}$$

jeżeli $(a_0 b_0)$ ma być zarazem punktem zerowym tej funkcyi.

Przyjmijmy $(x'y')=(a_\alpha b_\alpha)$. Wtedy:

$$g_2(xy)=g(xy,\ P_1\ldots P_\alpha\ldots P_\varrho\ \underbrace{P_\alpha P_\alpha\ldots P_\alpha}_{\mu+1} P_{\varrho+\mu+2}\ldots P_z \,|\, Q_1 Q_2\ldots Q_\varrho)=0$$

jest krzywą (dołączoną), która na miejscu P_α ma z $f=0$ aż $(\mu+2)$ punktów wspólnych. Zauważmy pęk krzywych:

$$K'(x\,y)=\gamma'_1(xy)+\lambda\,.\,\gamma_2'(xy)$$

wyznaczony $(z-1)$ warunkami:

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{c} g_2(Q_\alpha)=0,\ \alpha=1,2,\ldots,\varrho \\ g_2'(P_\alpha)=0,\ g_2''(P_\alpha)=0,\ldots,g_2^{(\mu)}(P_\alpha)=0 \\ g_2(P_{\varrho+\mu+2})=0,\ldots,\ g_2(P_z)=0. \end{array}\right.$$

O nim da się udowodnić jak o pęku $K(xy)=0$, że każda jego krzywa przechodzić musi koniecznie raz przez P_α.

Właśnie krzywa $g_1(xy)=0$ może być wyznaczona przez warunki (12) z dołączeniem warunku $g_1(S_{\varrho+1})=0$, należy więc do pęku $K'=0$, a stąd pochodzi, że między punktami $(Q_1', Q_2',\ldots, Q'_\varrho)$ zawiera się punkt P_α; funkcya $g_1(xy)$ jest zerem na miejscu P_α.

Uwzględniając te uwagi w g_1, g_2 dostaniemy w otoczeniu miejsca P_α:

$$(13)\qquad s_\mu=\frac{g_1(P_\alpha)t+\ldots+A_1t^{\mu+1}+\ldots}{B_1t^{\mu+2}+B_2t^{\mu+3}+\ldots}$$
$$=\frac{g_1(P_\alpha)}{B_1}[t^{-\mu-1}-h_\alpha t^{-1}+\mathfrak{P}(t)],$$

a $H(xy,\ a_\alpha b_\alpha)_\mu$ posiadać będzie w otoczeniu tego miejsca rozwinięcie: $t^{-\mu-1}-h_\alpha t^{-1}+\mathfrak{P}(t)$.

Że zaś dalej s_μ jest w pierwszym stopniu nieskończonością na miejscach $(a_\beta b_\beta)$, $\beta=1,2,\ldots,(\alpha-1),(\alpha+1),\ldots,\varrho$, a zerem na miejscu (a_0b_0), więc mamy:

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} H(\overset{\alpha}{x}_t\overset{\alpha}{y}_t,\ a_\alpha b_\alpha)_\mu=t^{-\mu-1}-h_\alpha t^{-1}+\mathfrak{P}(t) \\ H(\overset{\beta}{x}_t\overset{\beta}{y}_t,a_\alpha b_\alpha)_\mu=h'_\alpha t^{-1}+\mathfrak{P}(t) \\ H(\overset{0}{x}_t\overset{0}{y}_t,a_\alpha b_\alpha)_\mu=t\,.\,\mathfrak{P}(t), \\ \text{a w otoczeniu wszelkich innych miejsc } (xy): \\ H(x_t y_t,\ a_\alpha b_\alpha)_\mu=\mathfrak{P}(t),\ \mathfrak{P}(0)\neq 0. \end{array}\right.$$

73. Rozwinięcia iloczynu A. Funkcye $H(xy,\ x'y')_\mu$ dadzą się jeszcze w inny sposób wyprowadzić*).

*) Rozwinięć i form, jakiemi się w dalszym ciągu posługiwać będziemy, używał Weierstrass w wykładach o funkcyach Abla. Krótkie wzmianki

Zauważmy iloczyn:

$$(1)\qquad A = H(xy,\ x'_\tau y'_\tau)\,\frac{dx'_\tau}{d\tau},$$

w którym $(x'_\tau y'_\tau)$ ma być parą funkcyj otaczającą w obrazie $f=0$ dowolne osobliwe, albo nieosobliwe miejsce $(x'y')$ różne od $(a_0 b_0)$ i od miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha=1,2,\ldots,\varrho$. Rozwijając iloczyn A podług potęg parametru τ połóżmy:

$$(2)\qquad A = -\sum_\mu Q_\mu(xy,\ x'y')\tau^\mu,$$

a nie wdając się bliżej, o ile i kiedy występują tu odjemne wykładniki μ, zbadajmy, jakiemi są funkcye Q_μ dla dodatnich $\mu \geqq 0$.

Niech $(x'y')$ leży w skończoności, a parą funkcyj otaczającą to miejsce niech będzie:

$$(\alpha)\qquad x'_t = x' + qt^\lambda,\quad y'_t = y' + \varphi(t),\quad \varphi(0)=0.$$

Obierzmy wartość $t=\tau$ tak małą, że ona leży w zakresie istnienia tej pary funkcyj, to dla tej wartości dostajemy miejsce (x'_τ, y'_τ), gdzie:

$$(\alpha')\qquad x' = x' + q\tau^\lambda.$$

Z pierwszego równania w (α) i z równania (α') dostajemy $x'_t = x'_\tau + q(t^\lambda - \tau^\lambda)$, któratо forma przy dostatecznie małych wartościach $|t^\lambda - \tau^\lambda|$ przedstawia x'_t otaczające x'_τ. Wskutek tego będzie można i te y'_t, które w obrazie algebraicznym otaczają y'_τ, przedstawić formą:

$$y'_t = y'_\tau + \varphi_1(t^\lambda - \tau^\lambda),\quad \varphi_1(0)=0.$$

Przy bardzo małych wartościach $|\tau|$ mieści w sobie para funkcyj:

$$(\beta)\qquad x'_t = x'_\tau + q(t^\lambda - \tau^\lambda),\quad y'_t = y'_\tau + \varphi_1(t^\lambda - \tau^\lambda)$$

i miejsce $(x'y')$ dla $t=\tau=0$; dla $t=\tau$ daje $(x'_\tau y'_\tau)$. To samo daje i para (α) dla $t=0$ i $t=\tau$. Bez różnicy więc parą (α) lub (β) można przy dostatecznie małych $|t|$, $|\tau|$, tworzących pewien zakres $\{t,\tau\}$ przedstawić te miejsca obrazu algebraicznego, które równocześnie najbliżej leżą miejsc $(x'y')$, $(x'_\tau y'_\tau)$. Naznaczmy iloczyn A w tym zakresie przez A', to możemy go w dwojaki sposób przedstawić:

---

o tych formach znaleźć można w rozprawach: *„Über diejenigen algebr. Gleichungen"*... G. Hettner. Göttinger. *Nachrichten* 1880 str. 336—398; *„Über die eindeutigen Functionen von zwei durch eine algebr. Gleichung verbundenen Veränderlichen"*. P. Günther. C. J. T. 109. str. 199—212.

$$(4)\quad A' = H(x'_\tau + q(t^\lambda - \tau^\lambda),\ y'_\tau + \varphi_1[q(t^\lambda - \tau^\lambda)];\ x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau} = w_1$$

albo:

$$(5)\quad \begin{aligned} A' = H(x' + qt^\lambda,\ y' + \varphi(t);\ x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau} = \\ = H(x'_t y'_t,\ x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau} = w_2. \end{aligned}$$

Gdy zważymy, że $\frac{dx'_\tau}{d\tau} = q\lambda\,.\,\tau^{\lambda-1}$, to forma w_1 da w otoczeniu miejsca $(x'_\tau\,y'_\tau)$ takie rozwinięcie:

$$w_1 = -\frac{\lambda\tau^{\lambda-1}}{t^\lambda - \tau^\lambda} + S\,(t^\lambda - \tau^\lambda\,|\,x'_\tau y'_\tau)\,\tau^{\lambda-1}.$$

S zawiera tu same dodatnie potęgi różnicy $(t^\lambda - \tau^\lambda)$, a w wyrazach swych mieści wymiernie x'_τ i y'_τ.

Połóżmy:

$$\frac{\lambda\tau^{\lambda-1}}{t^\lambda - \tau^\lambda} = \frac{A_0}{t-\tau} + \frac{A_1}{t-\varepsilon\tau} + \ldots + \frac{A_{\lambda-1}}{t - \tau^{\lambda-1}\,\tau},$$

gdzie ε jest jednym z pierwotnych, λ^{tych} pierwiastków jednostki, to ponieważ tu pierwszy częściowy licznik $A_0 = 1$, mamy:

$$(6)\quad w_1 = -\frac{1}{t-\tau} + \left[-\frac{A_1}{t-\varepsilon\tau} - \ldots - \frac{A_{\lambda-1}}{t-\varepsilon^{\lambda-1}\tau} + \tau^{\lambda-1}.\,S\right] = -\frac{1}{t-\tau} + T(t,\tau).$$

Dla $t = \tau$ jest w_1 niezawodnie $= \infty$. Pytanie zachodzi, czy i dla $t = \varepsilon^k\tau$, $k = 1, 2, \ldots, (\lambda - 1)$, będzie w_1 nieskończonością? Aby to rozstrzygnąć, zauważmy drugą formę w_2 iloczynu A'. Gdy tam $t = \tau$ założymy, mamy również $w_2 = \infty$, bo obie pary funkcyj dają to samo miejsce $(x'_\tau y'_\tau)$. Przyjmijmy $t = \varepsilon^k\tau$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, (\lambda - 1)$. Pierwsza para w w_2 staje się wtedy $= (x'_\tau,\ y' + \varphi(\varepsilon^k\tau) = \bar{y}'_\tau)$ i jest widocznie miejscem różnem od $(x'_\tau y'_\tau)$. Z tego powodu jest w_2 — a więc i w_1 — dla takich t skończone.

Z tego wynika, że w (6) będzie cały wyraz $T(t, \tau)$ ujęty w nawiasy skończonym dla $t = \varepsilon^k\tau$, $k = 1, 2, \ldots, (\lambda - 1)$. Lecz i dla $t = \tau$ będzie również skończonym, bo z jednej strony suma:

$$\frac{A_1}{t-\varepsilon\tau} + \frac{A_2}{t-\varepsilon^2\tau} + \ldots + \frac{A_{\lambda-1}}{t-\varepsilon^{\lambda-1}\tau}$$

jest wtedy skończoną, a i S postępujące podług samych dodatnich potęg różnicy $t^\lambda - \tau^\lambda$ jest wtedy także skończone. Przy dostatecznie małych $|t|$, $|\tau|$ da się więc $T(t, \tau)$ rozwinąć na szereg, który w całym obszarze $\{t, \tau\}$ po wyjęciu zeń miejsca $(t = \tau = 0)$ będzie niezawodnie zbieżnym. Połóżmyż $T(t,\tau)=P(t,\tau)$, gdzie P zawiera w ogólności i odjemne potęgi zmiennych t, τ, to mamy $A'=$

$$\text{(I).}\qquad H(x'_t y'_t,\ x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau}=-\frac{1}{t-\tau}+P(t,\tau).$$

Gdy w parze $(x'_\tau y'_\tau)$ ma być $x'=\infty$, położymy:

$$(\alpha_1)\qquad x'_t=qt^{-\lambda},\ y'_t=\varphi(t),$$

i analogicznie z formami (β):

$$(\beta_1)\qquad x'_t=x'_\tau+q(t^{-\lambda}-\tau^{-\lambda}),\ y'_t=y'_\tau+\varphi_1(t^{-\lambda}-\tau^{-\lambda}).$$

Niech w tym razie:

$$\frac{\lambda\tau^{-\lambda-1}}{t^{-\lambda}-\tau^{\lambda}}=-\frac{\lambda\,.\,t^\lambda\tau^{-1}}{t^\lambda-\tau^\lambda}=\frac{A_0}{t-\tau}+\frac{A_1}{t-\varepsilon\tau}+\ldots+\frac{A_{\lambda-1}}{t-\varepsilon^{\lambda-1}\tau},$$

gdzie ε jest znowu pierwotnym, λ^{tym} pierwiastkiem jedynostki, to z uwagi, że tu także $A_0=1$ wypada, dojdziemy i w tym razie do rozwinięcia (I).

Gdy w (I) założymy $t=0$, $\tau\neq 0$, dostaniemy tam lewą stronę skończoną. Z tego wynika, że tam i po prawej stronie w $P(t,\tau)$ nie znajdziemy ani jednej odjemnej potęgi parametru t. Założmy $|t|>|\tau|$, to dojdziemy z (I) do rozwinięcia:

$$\text{(I}'\text{)}\qquad A'=-\frac{1}{t}-\frac{\tau}{t^2}-\frac{\tau^2}{t^3}-\ldots+P(t,\tau)=-\sum_\mu Q_\mu(x'_t y'_t,\ x'y')\,\tau^\mu.$$

Z porównania spółczynników mnożących tu po obudwu stronach te same potęgi τ^μ, $\mu=0,1,2,\ldots$, mamy:

$$(a)\qquad Q_\mu(x'_t y'_t,\ x'y')=\frac{1}{t^{\mu+1}}+\mathfrak{P}_\mu(t),\ \mu=0,1,2,\ldots$$

a to znaczy: Funkcya $Q_\mu(xy,\ x'y')$ zachowuje się w otoczeniu miejsca $(x'y')$ tak samo, jak funkcya $H(xy,x'y')_\mu$; a $Q_0(xy,\ x'y')$ tak samo, jak $-H(xy,x'y')$.

Podług (3) — art. poprzedz. — trzeba położyć:

$$\text{(I}''\text{)}\qquad \begin{aligned} A_\alpha=H(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t},\ x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau}&=H(x'_\tau y'_\tau)_\alpha\frac{dx'_\tau}{d\tau}\,.\,t^{-1}+\\ &+\overset{0}{H}(x'_\tau y'_\tau)_\alpha\frac{dx'_\tau}{d\tau}-H'(x'_\tau y'_\tau)_\alpha\frac{dx'_\tau}{d\tau}\,.\,t+\ldots\end{aligned}$$

Wyjmując tu po prawej stronie spółczynnik potęgi τ^μ, $\mu=0$, $1,2,\ldots$, dostajemy stąd:

$$(b)\qquad Q_\mu(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t},\ x'y')=-\left[H(x'_\tau y'_\tau)_\alpha\frac{dx'_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^\mu}.\,t^{-1}+\mathfrak{P}_\mu(t),$$

gdzie $[\ldots]_{\tau^\mu}$ ma oznaczać spółczynnik potęgi τ^μ w wyrazie ujętym w nawiasy.

Z równania (b) wnosimy, że się funkcya $Q_\mu(xy, x'y')$ zachowuje w otoczeniu miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha=1,2,\ldots,\varrho$, znowu tak samo jak funkcya $H(xy, x'y')$; a $Q_0(xy, x'y')$ ma tu własność funkcyi $H(xy, x'y')$.

Zauważmy wreszcie rozwinięcie iloczynu:

$$(\mathrm{I}''') \qquad A_0 = H(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t,\ x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau} = P_0(t,\tau).$$

$P_0(t,\tau)$ nie może zawierać odjemnych potęg parametru t, bo inaczej dla $t=0$ i $\tau \neq 0$ mielibyśmy $P_0=\infty$, gdy przeciwnie A_0 jest wtedy zerem. $P_0(t,\tau)$ nie może nawet zawierać wyrazów wolnych od t. Mając to na uwadze, dostajemy:

$$(c) \qquad Q_\mu(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t,\ x'y') = t\,.\,\mathfrak{P}_\mu(t).$$

Jestto widocznie trzecia własność charakterystyczna funkcyi $H(xy, x'y')_\mu$; $Q_0(xy, x'y')$ posiada własność funkcyi $H(xy, x'y')$.

Z (a), (b), (c) wynika:

I. *Funkcye* $H(xy, x'y')_\mu$, $\mu=1,2,\ldots$, *dadzą się określić jako spółczynniki potęg* τ^μ *w iloczynie* $-H(x_t y_t,\ x'y'_\tau)\dfrac{dx'_\tau}{d\tau}$ *i są wymierne również w* $x'y'$. *Funkcya:*

$$(7) \qquad Q_0(xy, x'y') = H(xy, x'y')_0 = -H(xy, x'y').$$

Zbadajmy teraz — określając bliżej funkcye $Q_{-\mu}(xy, x'y')$, $\mu=1,2,3,\ldots$ — o ile w rozwinięciach tu rozważanych występują odjemne potęgi parametru τ.

Z rozwinięcia (I''') wynika:

$$Q_{-\mu}(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t,\ x'y') = t\mathfrak{P}_{-\mu}(t), \quad \text{a więc:}$$

$$(a_1) \qquad Q_{-\mu}(a_0 b_0,\ x'y') = 0.$$

Z rozwinięcia (I'') dostajemy:

$$(b_1) \qquad Q_{-\mu}(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t,\ x'y') = -h_\alpha t^{-1} + \mathfrak{P}_\alpha(t).$$

W rozwinięciu (I') można $Q_{-\mu}$ mieć jedynie z $P(t,\tau)$. Że zaś $P(t,\tau)$ zawiera wyłącznie dodatnie potęgi parametru t, więc dostajemy:

$$(c_1) \qquad Q_{-\mu}(x'_t y'_t,\ x'y') = \mathfrak{P}(t).$$

Funkcye $Q_{-\mu}$ są więc widocznie nieskończonościami — i to pierwszego stopnia — tylko na ϱ miejscach $(a_\alpha b_\alpha)$. Redukują się zatem do stałych ilości, a te — wskutek (a_1) — muszą być zerami. Stąd wynika $Q_{-\mu}(xy, x'y')=0$, $\mu=1,2,3,\ldots$, a to znaczy:

II. *Rozwinięcia iloczynu* $H(x_t y_t,\ x'_\tau y'_\tau)\dfrac{dx'_\tau}{d\tau}$ *— jakąkolwiek jest para funkcyj* $(x_t y_t)$ *— nie zawierają nigdy odjemnych potęg parametru* τ.

Na podstawie tego twierdzenia wynikną z relacyi (I'') dla funkcyj $H(xy)_\alpha$, $H'(xy)_\alpha$ takie własności:

$$(h')\qquad \begin{aligned} H(x'_\tau y'_\tau)_\alpha \frac{dx'_\tau}{d\tau} &= \mathfrak{P}_\alpha(\tau) \\ H'(x'_\tau y'_\tau)_\alpha \frac{dx'_\tau}{d\tau} &= \mathfrak{P}_\alpha'(\tau) \end{aligned} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, \rho$$

[$x'y'$ może być miejscem osobliwem albo nieosobliwem].

Uwaga. W rozwinięciu (I) uwzględnia się w obszarze $\{t, \tau\}$ tylko $|t|>0$ $|\tau|>0$. Z tego powodu dojdziemy do takiegoż rozwinięcia (I) zbieżnego w takim samym obszarze, i wtedy, gdy $[(x'_t y'_t), (x'_\tau y'_\tau)]$, zastąpi się parami $[(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t), (\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)]$, albo parami $[(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t), (\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)]$.

74. Rozwinięcia iloczynu B. Gdy w iloczynie A — (art. poprzedz.) — zastąpimy $(x'y')$ przez $(a_\alpha b_\alpha)$ otrzymamy iloczyn:

$$B = H(xy, \overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau) \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}$$

o rozwinięciu $-\sum_\mu Q_\mu(xy, a_\alpha b_\alpha)\tau^\mu$, a $Q_\mu(xy, a_\alpha b_\alpha)$ będą funkcyami $H(xy, a_\alpha b_\alpha)_\mu$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$

1°) W iloczynie B połóżmy $(xy) = (x'_t y'_t)$, to rozwinięcie:

$$\text{(II)}\qquad B' = H(x'_t y'_t, \overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau) \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} = P_1(t, \tau),$$

nie może zawierać odjemnych potęg parametru t, bo dla $t=0$, $\tau \neq 0$ jest B' skończone. Wskutek tego mamy:

$$\begin{aligned} &(1) && H(x'_t y'_t, a_\alpha b_\alpha)_\mu = \mathfrak{P}_\mu(t) \\ &(a_2) && Q_{-\mu}(x'_t y'_t, a_\alpha b_\alpha) = \mathfrak{P}'_\mu(t). \end{aligned} \qquad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

2°) Gdy $(xy) = (\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t)$ założymy, otrzymamy:

$$\text{(II')}\qquad B_\alpha = H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, \overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau) \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} = -\frac{1}{t-\tau} + P(t, \tau).$$

Lewa strona jest tu dla $t=0$ i $\tau \neq 0$ nieskończonością, a w otoczeniu miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$ ma — podług (3) art. 72. — rozwinięcie:

$$(a_0)\qquad H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\mu \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} t^{-1} + \overset{0}{H}(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} - H'(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} t + \ldots$$

Z tego wynika, że $P(t, \tau)$ mieści w sobie wyraz:

$$H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} t^{-1}, \text{ i że więc:}$$

$$(\mathrm{II}'') \qquad B_\alpha = -\frac{1}{t-\tau} + H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} t^{-1} + P'(t, \tau),$$

gdzie już P' nie zawiera ani jednej odjemnej potęgi parametru t.

Założywszy $|t| > |\tau|$, dostajemy:

$$(\mathrm{II}''') \qquad B_\alpha = -\frac{1}{t} - \frac{\tau}{t^2} - \ldots + H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} t^{-1} + P'(t, \tau)$$

a stąd:

$$(2) \qquad H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t,\ a_\alpha b_\alpha)_\mu = \frac{1}{t^{\mu+1}} - \left[H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^\mu} t^{-1} + \mathfrak{P}(t)$$

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Przy założeniu, że a_α są skończone, wypadają $\frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}$ skończone także i dla $\tau=0$. Dla $\tau=0$ mamy dalej:

$$B_{\alpha,\ \tau=0} = H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t,\ \overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_{\tau=0} = H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t,\ a_\alpha b_\alpha) = 0, \text{ [art. 72.]},$$

a więc lewa strona w (II''') redukuje się w tym razie do zera. Prawa strona musi tam być także zerem, a stąd wynika, że P, zawiera same dodatnie potęgi parametru τ, posiada czynnik τ, a

$$(h_1) \qquad H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \left.\frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}\right]_{\tau=0} = 1.$$

Dalej wskutek własności szeregu P' dostajemy tu:

$$(b_2) \qquad Q_{-\mu}(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t,\ a_\alpha b_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \varrho.$$

3°) Przyjmijmy $(xy) = (\overset{\beta}{x}_t \overset{\beta}{y}_t)$, $\beta \gtreqless \alpha$, i połóżmy:

$$B_\beta = H(\overset{\beta}{x}_t \overset{\beta}{y}_t,\ \overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau) \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} = P_1(t, \tau),$$

to tu znowu mieć będziemy rozwinięcie:

$$(\mathrm{II}^{(4)}) \qquad B_\beta = H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\beta \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} t^{-1} + P_1'(t, \tau),$$

w którem już P'_1 zawiera wyłącznie dodatnie potęgi t.

Stąd dostajemy:

$$(3) \qquad H(\overset{\beta}{x}_t \overset{\beta}{y}_t,\ a_\alpha b_\alpha)_\mu = -\left[H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\beta \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^\mu} \cdot t^{-1} + \mathfrak{P}(t)$$

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Dla $\tau=0$, $t \neq 0$ mamy znowu $B_\beta=0$, a więc i tu przyjąć trzeba, że w $(\mathrm{II}^{(4)})$ zawiera $P_1'(t, \tau)$ same dodatne potęgi τ, posiada czynnik τ, a

$$H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\beta \left.\frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}\right]_{\tau=0}=0. \text{ Dalej dostajemy:}$$

$$(c_2) \qquad Q_{-\mu}(\overset{\beta}{x}_t \overset{\beta}{y}_t,\ a_\alpha b_\alpha)=0.$$

4°) Przyjmijmy wreszcie, że w B jest $(xy)=(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t)$, to w rozwinięciu:

$$(\mathrm{II}^{(5)}) \qquad B_0=H(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t,\ \overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau) \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}=P_0(t, \tau)$$

nie mogą się zawierać odjemne potęgi parametru t, a i wolnego wyrazu od t mieć tam nie możemy.

Wskutek tego dostajemy tu:

$$(4) \qquad H(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t,\ a_\alpha b_\alpha)_\mu=t\,\mathfrak{P}(t) \text{ i}$$

$$(d_2) \qquad Q_{-\mu}(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_i,\ a_\alpha b_\alpha)=t\,.\,\mathfrak{P}'(t),\ Q_{-\mu}(a_0 b_0,\ a_\alpha b_\alpha)=0.$$

Z własności (a_2), (b_2), (c_2), (d_2) wynika, że:

$$Q_{-\mu}(x\,y,\ a_\alpha b_\alpha)=0,$$

co znaczy, że i tu rozwinięcia iloczynu:

$$H(x_t\, y_t, \overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau) \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}$$

nie posiadają wcale odjemnych potęg τ, jakakolwiek jest para funkcyj $(x_t y_t)$.

Na podstawie tego wnioskujemy z $(\mathrm{II}^{(4)})$, że:

$$(h_{\alpha\beta}) \qquad \left| \begin{array}{l} H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\beta \dfrac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}=\mathfrak{P}_\beta(\tau), \text{ a dla } \tau=0 \text{ jest } =0, \\[2ex] H'(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\beta \dfrac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}=\tau\,.\,\mathfrak{P}'_\beta(\tau) \end{array} \right.$$

$$\beta=1, 2, \ldots, \alpha-1,\ \alpha+1, \ldots \varrho.$$

Gdy wreszcie w (II'') założymy $|t|<|\tau|$, położymy więc:

$$B_\alpha=\frac{1}{\tau}+\frac{t}{\tau^2}+\ldots+H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau}\, t^{-1}+P'(t, \tau),$$

mieć będziemy [por. (3), art. 72. i rozwinięcie (a_0)]:

$$(h_{\alpha\alpha})\quad \left|\begin{array}{l} H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \dfrac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}_\alpha(\tau), \text{ a dla } \tau=0 \text{ jest } =1, \\ H'(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \dfrac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} = -\tau^{-2} + \tau \,.\, \mathfrak{P}'_\alpha(\tau) \end{array}\right.$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho.$$

Formy (1), (2), (3), (4) określają własności funkcyi $H(xy, a_\alpha b_\alpha)_\mu$ — (por. (10), art. 72.), $\mu=1,2,3,\ldots$

Co się tyczy spółczynnika $H(xy,\ a_\alpha b_\alpha)_0$ to w założeniu, że a_α są skończone, mamy dla $\tau=0$

$$B' = B_\alpha = B_\beta = B_0 = 0,$$

a więc $H(xy,\ a_\alpha b_\alpha)_0 = 0$. Można więc położyć:

(5) $$H(xy,\ a_\alpha b_\alpha)_0 = H(xy,\ a_\alpha b_\alpha) = 0 \quad \text{(por. art. 72).}$$

75. Rozwinięcie iloczynu C. Rozważmy nakoniec rozwinięcia iloczynu:

$$C = H(xy,\ \overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)\ \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau}.$$

Połóżmy znowu, gdy:

1^0) $(xy) = (x'_t\, y'_t)$.

(III) $$C' = H(x'_t y'_t,\ \overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)\ \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = P_1(t, \tau) = -\sum_\mu Q_\mu(x'_t y'_t,\ a_0 b_0)\, \tau^\mu,$$

to przedewszystkiem odrazu da się wywnioskować, że P_1 nie zawiera tu odjemnych potęg t, bo dla $t=0$, $\tau \neq 0$ lewa strona pozostaje skończoną. Wskutek tego mamy:

(α) $$Q_\mu(x'_t y'_t,\ a_0 b_0) = \mathfrak{P}_\mu(t)$$
$$\mu = 1, 2, 3\ldots,$$

Aby się dowiedzieć o odjemnych potęgach parametru τ, zawartych w (III), przyjmijmy, że mamy inną jeszcze funkcyę $\overline{H}(xy,\ x'y')$, która wprawdzie na miejscach $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots \varrho$, i na miejscu $(x'y')$ jest nieskończonością, ale zerem się staje n i e na miejscu $(a_0 b_0)$, ale na innem miejscu $(a'_0 b'_0)$. Wtedy można położyć:

$$H(xy,\ x'y') = \overline{H}(xy,\ x'y') - \overline{H}(a_0 b_0,\ x'y'),$$

bo różnica po prawej stronie ma w istocie wszystkie charakterystyczne własności danej funkcyi $H(xy,\ x'y')$. Dalej mamy:

$$H(x'_t y'_t,\ \overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau) \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = \overline{H}(x'_t y'_t,\ \overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)\ \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} - \overline{H}(a_0 b_0,\ \overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)\ \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau}.$$

Tu pierwszy wyraz po prawej stronie nie będzie zawierał odjemnych potęg τ, [art. 73., tw. II]. Gdy więc założymy:

$$(1)\qquad \overline{H}(a_0b_0, \overset{0}{x}_\tau\overset{0}{y}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = -\sum_\mu \overline{Q}_\mu(a_0b_0,\ a_0b_0)\tau^\mu,$$

to mieć będziemy:

$$(2)\qquad \left[H(x'_t y'_t,\ \overset{0}{x}_\tau\overset{0}{y}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{-\mu}} = -Q_{-\mu}(x'_t y'_t,\ a_0b_0) = \overline{Q}_{-\mu}(a_0b_0,\ a_0b_0).$$

Podług wzoru (I) — art. 73. — mamy:

$$\overline{H}(\overset{0}{x}_t\overset{0}{y}_t,\ \overset{0}{x}_\tau\overset{0}{y}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = -\frac{1}{t-\tau} + P(t,\ \tau),$$

gdzie P nie zawiera ani odjemnych potęg parametru t, ani parametru τ. Wskutek tego, gdy $t=0$, dostajemy:

$$\overline{H}(a_0b_0, \overset{0}{x}_\tau\overset{0}{y}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau),$$

a stąd — porównując to z (1) — wynika:

$$\overline{Q}_{-1}(a_0b_0, a_0b_0) = -1,\quad \overline{Q}_0(a_0b_0,\ a_0b_0) = 0$$
$$\overline{Q}_{-\mu}(a_0b_0,\ a_0b_0) = 0,\quad \mu = 2, 3, \ldots$$

Biorąc relacye (2) na uwagę, mamy więc:

$$Q_{-1}(x'_t y'_t,\ a_0b_0) = +1,\quad Q_0(x'_t y'_t,\ a_0b_0) = 0$$
$$Q_{-\mu}(x'_t y'_t,\ a_0b_0) = 0,\quad \mu = 2, 3, \ldots,$$

a że te relacye utrzymują się dla nieskończenie wielu wartości parametru t, zatem na jakiemkolwiek miejscu (xy) obrazu $f=0$ będzie statecznie:

$$(3)\qquad \begin{array}{l} Q_{-1}(xy,\ a_0b_0) = 1,\quad Q_0(xy,\ a_0b_0) = 0 \\ Q_{-\mu}(xy,\ a_0b_0) = 0,\quad \mu = 2, 3, \ldots \end{array}$$

Uwzględniając to w (III), dochodzimy do rozwinięcia:

$$(\text{III}')\qquad C' = -\tau^{-1} + \mathfrak{P}(t,\ \tau).$$

Załóżmy:

2°) $(\overset{\alpha}{x}\overset{\alpha}{y}) = (x_t y_t)$ i połóżmy:

$$C_\alpha = H(\overset{\alpha}{x}_t\overset{\alpha}{y}_t,\ \overset{0}{x}_\tau\overset{0}{y}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = P_1(t,\ \tau).$$

Wskutek (3) zawiera się tu w P_1 rozwinięcie: $-\tau^{-1} + \mathfrak{P}(t,\ \tau)$, a że — na wzór rozwinięcia (3), art. 72.) lewa strona zawiera wyraz $H(\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} . t^{-1}$, a innych odjemnych potęg t już tam nie ma, więc mamy:

$$(\mathrm{III}'') \qquad C_\alpha = -\tau^{-1} + H(\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_t)_\alpha \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} . t^{-1} + \mathfrak{P}(t, \tau).$$

Stąd wynika:

$$(\beta) \qquad Q(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, a_0 b_0)_\mu = \left[H(\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} \right]_{\tau^\mu} . t^{-1} + \mathfrak{P}(t)$$
$$\mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Połóżmy wreszcie:

3^0) $(\overset{0}{x} \overset{0}{y}) = (x_\tau y_\tau)$,

to podług uwagi danej w art. 73. mieć będziemy:

$$C_0 = H(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t, \overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau) \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = -\frac{1}{t-\tau} + P(t, \tau).$$

W P nie ma wcale odjemnych potęg t, a z odjemnych potęg parametru τ mieści się tam jedynie [wskutek (3)]: $-\tau^{-1}$. Mamy tu zatem:

$$(\mathrm{III}''') \qquad C_0 = -\frac{1}{t-\tau} - \tau^{-1} + \mathfrak{P}(t, \tau),$$

a przy założeniu $|t| > |\tau|$ wynika stąd:

$$(\gamma) \qquad Q(\overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t, a_0 b_0)_\mu = \frac{1}{t^{\mu+1}} + \mathfrak{P}_\mu(t), \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Wzory (α), (β), (γ) wskazują, że $Q(xy, a_0 b_0)_\mu$ jest funkcyą $H(xy, a_0 b_0)_\mu$ z pewnem miejscem zerowem $(a'_0\, b'_0)$ różnem od $(a_0 b_0)$. To możemy naznaczyć przez:

$$Q_\mu(xy, a_0 b_0) = \overline{H}(xy, a_0 b_0) \quad Q_0(xy, a_0 b_0) = H(xy, a_0 b_0) = 0.$$

Funkcya:

$$(4) \qquad - H(xy, a_0 b_0)_6 = H(xy, a_0 b_0).$$

Z rozwinięcia (III''), w którem jedyną odjemną potęgą parametru τ jest $-\tau^{-1}$, dochodzimy do takich dalszych własności funkcyj $H(x' y')_\alpha$, $H'(x' y')_\alpha$:

$$(h_0) \qquad \left| \begin{array}{l} H(\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)_\alpha . \dfrac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}_\alpha(\tau) \\[2ex] H'(\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)_\alpha . \dfrac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}'_\alpha(\tau) \end{array} \right. , \quad \alpha = 1, 2, \ldots \varrho.$$

Z poszukiwań tu przeprowadzonych wynika twierdzenie:

I. *Z iloczynów* $H(x_t y_t, x'_\tau y'_\tau)\cdot\frac{dx'_\tau}{d\tau}$ *tylko te, w których* $(x'\,y')$ *różnem jest od* $(a_0 b_0)$ *i od* $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha=1,2,\ldots,\varrho$, *lub w którym* $(x'\,y')=(a_\alpha b_\alpha)$, *nie posiadają wcale — gdy* $|t|>|\tau|$ *— odjemnych potęg parametru* τ; *iloczyn zaś, w którym* $(x'y')=(a_0 b_0)$, *posiada zawsze — gdy* $|t|>|\tau|$ *— wyraz* $-\tau^{-1}$ *jako jedyny z odjemną potęgą tego parametru.*

Z własności: (h') — [art. 73.], — dalej z własności $(h_{\alpha\beta})$, $(h_{\alpha\alpha})$ — art. (74) — i wreszcie z własności (h_0) wynika, że:

$$H(\overset{\alpha}{x_\tau}\overset{\alpha}{y_\tau})\frac{d\overset{\alpha}{x_\tau}}{d\tau}=\mathfrak{P}(\tau) \tag{4}$$

jakiekolwiek miejsce otacza para funkcyj $(x_\tau y_\tau)$. Lecz dalej widzieliśmy, że:

$$\left.\begin{array}{l}\left[H(\overset{\beta}{x_\tau}\overset{\beta}{y_\tau})_\alpha\dfrac{d\overset{\beta}{x_\tau}}{d\tau}\right]_{\tau^0}=0,\ \beta\neq\alpha\\[2ex] \left[H(\overset{\alpha}{x_\tau}\overset{\alpha}{y_\tau})_\alpha\dfrac{d\overset{\alpha}{x_\tau}}{d\tau}\right]_{\tau^0}=1\end{array}\right|,\ \text{[por. } (h_1),\ (h_{\alpha\beta})\text{ — art. 74]} \tag{5}$$

Przyjmijmy, że może istnieć identyczny związek:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho} c_\alpha\cdot H(xy)_\alpha=0. \tag{6}$$

Wtedy musiałby się także sprawdzić identycznie związek:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho} c_\alpha H(\overset{\beta}{x_\tau}\overset{\beta}{y_\tau})_\alpha\cdot\frac{d\overset{\beta}{x_\tau}}{d\tau}=0,$$

a ten wskutek (5) redukuje się do $c_\alpha=0$. Że zaś $\alpha=1,2,\ldots\varrho$ być może, więc stąd wnosimy:

II. *Funkcye* $H(xy)_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,\varrho$, *są od siebie niezależne. [Nie może istnieć związek identyczny* $\sum_{\alpha=1}^{\varrho} c_\alpha H(xy)_\alpha=0$ *— chyba że:*

$$c_1=c_2=\ldots=c_\varrho=0].$$

ROZDZIAŁ X.

Zastosowanie funkcyj H w tworzeniu dowolnej funkcyi $s=R(xy)$.

76. Twierdzenie o sumie pozostałości funkcyi $s=R(xy)$. Z form wyprowadzonych w ostatnim Rozdziale skorzystamy, aby dowolną funkcyę $s=R(xy)$ przedstawić przez funkcye H.

Stanie to się, gdy nam się uda pewną własność funkcyi wymiernej jednej tylko zmiennej:

$$F(x)=G(x)+\sum_{\lambda}\left[\frac{A_\lambda}{x-a_\lambda}+\frac{A'_\lambda}{(x-a_\lambda)^2}+\ldots\right]$$

przenieść do teoryi funkcyi s.

Gdy $x=a$ leży w skończoności i jest różne od miejsc nieskończonościowych a_λ, a położymy $x_t=a+t$, a więc $\frac{dx_t}{dt}=1$, to iloczyn $F(x_t)\frac{dx_t}{dt}$ da się w otoczeniu każdego takiego miejsca a rozwinąć na zwykły szereg potęgowy. Zauważmy miejsca $x=a_\lambda$ i połóżmy znowu $x_t=a_\lambda+t$, a więc $\frac{dx_t}{dt}=1$, to dostaniemy w otoczeniu takiego miejsca:

$$F(x_t)\frac{dx_t}{dt}=F(a_\lambda+t)=A_\lambda t^{-1}+A'_\lambda t^{-2}+\ldots+\mathfrak{P}(t).$$

Stąd wynika, że tu:

$$\left[F(x_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}=\left[F(a_\lambda+t)\right]_{t^{-1}}=A_\lambda, \quad \text{i że więc:}$$

$$(a)\qquad \sum{}'\left[F(x_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}=\sum{}'\left[F(a_\lambda+t)\right]_{t^{-1}}=\sum A_\lambda,$$

gdzie Σ' odnosi się do wszystkich a_λ, t. j. do takich wszystkich miejsc leżących w skończoności, w których otoczeniu iloczyn

$$F(x_t)\frac{dx_t}{dt}$$

posiada ujemne potęgi parametru t.

Załóżmy $x=\infty$ i połóżmy $x_t=\frac{1}{t}$, a więc $\frac{dx_t}{dt}=-\frac{1}{t^2}$, to tu dostaniemy:

$$F(x_t)\frac{dx_t}{dt}=-\left[G(t^{-1})+\sum\left\{\frac{A_\lambda}{t^{-1}-a_\lambda}+\frac{A'_\lambda}{(t^{-1}-a_\lambda)^2}+\dots\right\}\right]\frac{1}{t^2}=-F\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2},$$

a stąd wynika:

$$(b)\qquad \left[F(x_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}=-\left[F\left(\frac{1}{t}\right)\right]_t.$$ Że zaś:

$$F\left(\frac{1}{t}\right)=G(t^{-1})+\sum\left[\frac{A_\lambda t}{1-a_\lambda t}+\frac{A'_\lambda t^2}{(1-a_\lambda t)^2}+\dots\right]=$$
$$=G(t^{-1})+\Sigma A_\lambda.t+c_2t^2+c_3t^3+\dots,$$

więc widocznie tu:

$$(c)\qquad -\left[F\left(\frac{1}{t}\right)\right]_t=-\Sigma A_\lambda,$$

a z (a), (b), (e) wynika:

$$(A)\qquad \sum\left[F(x_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}=\sum{}'\left[F(a_\lambda+t)\right]_{t^{-1}}-\left[F\left(\frac{1}{t}\right)\right]_t=0,$$

gdzie suma po pierwszej stronie odnosi się do wszystkich miejsc w skończoności i nieskończoności, dających w swych otoczeniach rozwinięcia o ujemnych potęgach parametru t. Spółczynniki $[\dots]_{t^{-1}}$ nazywają się „pozostałościami“ funkcyi F.

Okażemy teraz, że związek (A) przenosi się i na funkcyę s, gdyż i tu będzie:

$$(B)\qquad S=\sum\left[R(x_ty_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}=0,$$

gdzie suma suma odnosi się do tych wszystkich miejsc (xy) obrazu $f=0$, w których otoczeniu iloczyn $R(x_ty_t)\dfrac{dx_t}{dt}$ posiada rozwinięcia zawierające i ujemne potęgi parametru t.

Jeżeli przyjmiemy, że $f=0$ jest równaniem n^{go} stopnia w y, posiadającem dla x pierwiastki: $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \dots, \overset{n}{y}$, a dla x_t pierwiastki: $\overset{1}{y}_t, \overset{2}{y}_t, \dots, \overset{n}{y}_t$ i jeżeli utworzymy funkcyę:

$$(1)\qquad R(x\overset{1}{y})+R(x\overset{2}{y})+\dots+R(x\overset{n}{y})=F(x),$$

która jest już wymierną argumentu x, to relacya (B) będzie tem samem, co relacya:

$$(B')\qquad S'=\sum\left[\left(R(x_t\overset{1}{y}_t)+\dots+R(x_t\overset{n}{y}_t)\right)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}=0,$$

gdyż w (B') zawierać się będą bezsprzecznie wszystkie te same spółczynniki potęg t^{-1}, jakie w (B) mamy, a żaden nowy nie przybędzie.

Dowód nie przedstawia żadnej trudności, jeżeli miejsca $x=a$, $x=\infty$, w których otoczeniu iloczyn $R(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}$ posiada ujemne potęgi t, nie dają wieloznacznych rozwinięć funkcyi y. W tym razie — kładąc $x_t=a+t$, lub $x_t=\frac{1}{t}$ — mamy uwzględniając (1) i (A):

$$S'=\sum{}' \Big[F(a+t)\Big]_{t^{-1}}-\Big[F\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big]_t=0, \quad \text{a więc:}$$

$$S=0, \text{ c. b. d. d.}$$

Przyjmijmy, że między miejscami a są takie, które do powtarzających się y należą. Jedno z nich: a weźmy pod uwagę, i załóżmy, że w s z y s t k i e pary funkcyj, dające $x=a$ dla $t=0$ są:

$$(\alpha)\ \begin{matrix} x_t=a+t^\lambda \\ y_t=\varphi(t)\end{matrix},\quad (\beta)\ \begin{matrix} x_t=a+t^{\lambda_1} \\ y_t=\varphi_1(t)\end{matrix},\ \ldots.,\quad \lambda+\lambda_1+\ldots=n.$$

Ponieważ z pierwszej pary wynikają:

$$y_t=\varphi(t),\ \varphi(\varepsilon t),\ \ldots,\ \varphi(\varepsilon^{\lambda-1}t),$$

gdzie ε jest jednym z pierwotnych λ^{tych} pierwiastków jednostki, więc w $F(x)$ mieści się niezawodnie suma:

$$(2)\qquad K(t^\lambda, t)=R(x_t, \varphi(t))+R(x_t, \varphi(\varepsilon t))+\ldots+R(x_t, \varphi(\varepsilon^{\lambda-1}t)).$$

Niech

$$(3)\qquad R(x_t, \varphi(t))=P'(x_t, t)=\sum_\alpha c_\alpha t^\alpha,$$

gdzie jeszcze t zawartego w x_t przy tem rozwijaniu nie uwzględniono. Suma (2) [T. I., art. 163.] będzie postaci $\sum\limits_\alpha c_{\lambda\alpha}t^{\lambda\alpha}$. Uwzględnijmy tu już i t, zawarte w x_t, to z uwagi, że $x_t=a+t^\lambda$, dostaniemy:

$$(4)\qquad K(t^\lambda, t)=P(t^\lambda)=\sum_\alpha d_\alpha t^{\lambda\alpha}.$$

W S' zawiera się zatem suma:

$$K(t^\lambda, t)\frac{dx_t}{dt}=P(t^\lambda)\lambda t^{\lambda-1}=\lambda t^{\lambda-1}\sum_\alpha d_\alpha t^{\lambda\alpha},$$

a stąd wynika:

$$(5)\qquad \Big[K(t^\lambda, t)\frac{dx_t}{dt}\Big]_{t^{-1}}=\lambda\Big[P(t^\lambda)\Big]_{t^{-\lambda}}=\lambda d_{-1}.$$

Połóżmy $t^\lambda=\tau$, a więc $t=\varepsilon^k\tau^{\frac{1}{\lambda}}$, $k=0, 1, \ldots, (\lambda-1)$, to para funkcyj (α) przejdzie na:

$$\begin{matrix} x_\tau=a+\tau \\ y_\tau=\varphi(\varepsilon^k\tau^{\frac{1}{\lambda}})\end{matrix},\quad \begin{matrix} x_\tau=a+\tau \\ y_\tau=\varphi(\varepsilon.\varepsilon^k\tau^{\frac{1}{\lambda}})\end{matrix},\ \ldots,\quad \begin{matrix} x_\tau=a+\tau \\ y_\tau=\varphi(\varepsilon^{\lambda-1}\varepsilon^k\tau^{\frac{1}{\lambda}})\end{matrix},$$

$$k=0, 1, 2, \ldots, (\lambda-1).$$

Utwórzmy tu — analogicznie do sumy (2) — sumę:

$$K'(\tau, \tau^{\frac{1}{\lambda}}) = \sum_{k=0}^{\lambda-1} [R(x_\tau, \varphi(\varepsilon^k \tau^{\frac{1}{\lambda}})) + R(x_\tau, \varphi(\varepsilon\varepsilon^k \tau^{\frac{1}{\lambda}})) + \ldots + R(x_\tau, \varphi(\varepsilon^{\lambda-1}\varepsilon^k \tau^{\frac{1}{\lambda}}))],$$

to z uwagi, że $(\varepsilon^k, \varepsilon\varepsilon^k, \ldots, \varepsilon^{\lambda-1}\varepsilon^k)$ dają dla $k=0, 1, 2, \ldots, (\lambda-1)$ te same wartości tylko w innych uporządkowaniach dostaniemy:

$$(6) \qquad K'(\tau, \tau^{\frac{1}{\lambda}}) = \lambda [R(x_\tau, \varphi(\tau^{\frac{1}{\lambda}})) + R(x_\tau, \varphi(\varepsilon \tau^{\frac{1}{\lambda}})) + \ldots$$
$$\ldots + R(x_\tau, \varphi(\varepsilon^{\lambda-1}\tau))] = \lambda . K(\tau, \tau^{\frac{1}{\lambda}}),$$

bo suma w nawiasie po prawej stronie w (6) powstaje widocznie z $K(t^\lambda, t)$, gdy tam t, zastąpimy przez $\tau^{\frac{1}{\lambda}}$. Uwzględniając (3), mamy

$$K'(\tau, \tau^{\frac{1}{\lambda}}) = \lambda K(\tau, \tau^{\frac{1}{\lambda}}) = \lambda \sum_\alpha d_\alpha \tau^\alpha,$$

a że $\frac{dx_\tau}{d\tau} = 1$, więc: $\left[K'(\tau, \tau^{\frac{1}{\lambda}})\right]_{\tau^{-1}} = \lambda . d_{-1}$, a stąd — przez porównanie z (5) — wynika:

$$\left[K(t^\lambda, t) \frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = \left[K'(\tau, \tau^{\frac{1}{\lambda}})\right]_{\tau^{-1}}.$$

Stosując to samo rozumowanie do sum $K_1(t^{\lambda_1}, t)$, $K_2(t^{\lambda_2}, t)$, ..., jakie z dalszych par (β), (γ), ... wynikają i uwzględniając, że

$$K'(\tau, \tau^{\frac{1}{\lambda}}) + K'_1(\tau, \tau^{\frac{1}{\lambda_1}}) + \ldots = F(a+\tau),$$

mieć będziemy relacyę:

$$\sum{}'' \left[R(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = \left[F(a+\tau)\right]_{\tau^{-1}},$$

w której Σ'' odnieść trzeba do wszystkich par funkcyj, dających $x=a$ dla $t=0$. Zbierając wszystkie miejsca $x=a$, na których $F(a+\tau)$ posiada rozwinięcia z ujemnemi potęgami τ i uwzględniając z drugiej strony na każdem z takich miejsc wszystkie dopieroco wspomniane pary funkcyj, dostaniemy:

$$(C) \qquad \sum{}' \left[R(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = \sum \left[F(a+\tau)\right]_{\tau^{-1}}.$$

Podobnem, jak tu rozumowaniem — przyjmując, że $x=\infty$, należy do wieloznacznych y i do więcej par funkcyj i kładąc:

$$x_t = \frac{1}{t^\lambda}, \ \ldots, \ x_\tau = \frac{1}{\tau} \ —$$

dojdziemy do relacyi:

$$(C') \qquad \sum{}'' \left[R(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = -\left[F\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]_\tau.$$

Łącząc to z wynikiem (C), dostaniemy na podstawie (A) relacyę:

$$S=\sum\left[R(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}=0,$$

która wyraża, że tu *suma wszystkich pozostałości jest zerem.*

Tej relacyi dowiedliśmy tu, używając takich par funkcyj, w których x_t ma szczególne formy: $(a+t^\lambda)$, lub $t^{-\lambda}$, $\lambda \geq 1$.

Z tych par przejdziemy do ogólnych $(\bar{x}_\tau \bar{y}_\tau)$ przez podstawienie:

(7) $$t=q_1\tau+q_2\tau^2+\ldots,\quad q_1 \neq 0 \quad \text{[art. 55]}.$$

Za użyciem pierwotnej pary $(x_t y_t)$ niech będzie:

$$R(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}=C t^{-1}+P(t);$$

$P(t)$ nie zawierając t^{-1} może być przedstawione jako pochodna pewnego szeregu. Połóżmyż: $P(t)=\frac{d}{dt}P_1(t)$, to po podstawieniu (7) mamy:

(8) $$\begin{aligned} R(\bar{x}_\tau \bar{y}_\tau)\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} &= R(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}\frac{dt}{d\tau}=C t^{-1}\frac{dt}{d\tau}+\frac{d}{dt}P_1(t)\frac{dt}{d\tau} \\ &= C.\frac{d\log t}{d\tau}+\frac{d}{d\tau}P_1(t), \end{aligned}$$

a że $t=\tau(q_1+q_2\tau+\ldots)$, więc:

$$\log t=\log\tau+\log(q_1+q_2\tau+\ldots)$$

$$\frac{d\log t}{d\tau}=\tau^{-1}+\mathfrak{P}(\tau),\quad \frac{d}{d\tau}P_1(t)=P'_2(\tau).$$

Uwzględniając to w (8) mamy:

$$R(\bar{x}_\tau \bar{y}_\tau)\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau}=C\tau^{-1}+P_2(\tau),$$

gdzie $P_2(\tau)$ nie będzie już zawierać potęgi τ^{-1}. Z tego widzimy, że pozostałość $\left[R(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}$ na pewnem miejscu pozostaje ta sama w jakikolwiek sposób przedstawimy użytą parę funkcyj $(x_t y_t)$. Relacya $S=0$ ostaje się zatem bez wszelkich zastrzeżeń.

77. Tworzenie funkcyi s za pomocą funkcyj $H(xy, x'y')$, $H(xy, x'y')_\mu$. Przystępując teraz do zadania, zapowiedzianego u wstępu art. poprzedz., przyjmijmy, że dana funkcya $s=R(x, y)$ posiada miejsca nieskończonościowe $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_l y_l)$ o stopniach μ_1, μ_2, ..., μ_l. Utwórzmy funkcyę:

(1) $$T(xy)=R(xy)\left[H(x''y'', xy)-H(x'y', xy)\right],$$

w której miejsca $(x''y'')$, $(x'y')$ — będąc miejscami danego obrazu algebraicznego $f=0$ — różne być mają od miejsc nieskończonościowych $(a_\alpha b_\alpha)$. $\alpha=1, 2, \ldots, \varrho$, od miejsca zerowego $(a_0 b_0)$ funkcyi: $H(xy, x'y')$

i od wszelkich miejsc $(x_\nu y_\nu)$, $\nu=1, 2, ..., l$. Do tej funkcyi T stosując relacyę $S=0$, mamy:

$$S=\sum\left[T(x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}=$$

$$=\sum\left[R(x_\tau y_\tau)[H(x''y'', x_\tau y_\tau)-H(x'y', x_\tau y_\tau)]\frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}=0.$$

Przyjmijmy $(x_\tau y_\tau)=(\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)$. Ponieważ [art 75.]:

$$H(x''y'', \overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau}=-\tau^{-1}+\mathfrak{P}(\tau),$$

więc dostajemy:

$$\left\{R(\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)\, H(x''y'', \overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau}\right\}_{\tau^{-1}}=-R(a_0 b_0).$$

Podobnie będzie:

$$\left\{-R(\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)\, H(x'y', \overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau}\right\}_{\tau^{-1}}=+R(a_0 b_0).$$

Z tego wynika, że: $\left[T(\overset{0}{x}_\tau \overset{0}{y}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}=0.$

Przyjmijmy $(x_\tau y_\tau)=(x''_\tau y''_\tau)$. Wtedy — podług (I.), art. 73. — mamy:

$$H(x''y'', x''_\tau y''_\tau)\frac{dx''_\tau}{d\tau}=\frac{1}{\tau}+\mathfrak{P}_1(\tau), \quad \text{a więc:}$$

$$\left[T(x''_\tau y''_\tau)\frac{dx''_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}=R(x''y'').$$

Podobnie okaże się, gdy $(x_\tau y_\tau)=(x'_\tau y'_\tau)$:

$$\left[T(x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}=R(x'y'),$$

Ponieważ:

$$\left[H(x''y'', x_\tau y_\tau)-H(x'y', x_\tau y_\tau)\right]\frac{dx_\tau}{d\tau}$$

już zresztą nigdzie nie da ujemnych potęg τ, więc stąd wynika:

$$(2)\qquad S=R(x''y'')-R(x'y')+\sum{}'\left[T(x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}=0,$$

gdzie sumę Σ' odnieść tu trzeba jedynie do tych $(x_\tau y_\tau)$, które dają rozwinięcia z ujemnemi potęgami τ funkcyi $R(x_\tau y_\tau)$, a więc do par funkcyj $(\overset{\nu}{x}_\tau \overset{\nu}{y}_\tau)$, otaczających miejsca $(x_\nu y_\nu)$, $\nu=1, 2, ..., l$.

Niech teraz $(x''y'')$ będzie bieżącem miejscem (x, y) w obrazie $f=0$, $(x'y')$ niech będzie stałem miejscem w tym obrazie i niech dalej będzie:

$$R(x'y')+\sum{}'\left[R(x'y').H(x'y', \overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})\frac{d\overset{\nu}{x_\tau}}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}=C_0,$$

gdzie C_0 jest stałą ilością, to w takim razie jest $R(x''y'')=R(xy)=s$, i

$$(3)\qquad s=R(xy)=C_0-\sum{}'\left[R(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})H(xy, \overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})\frac{d\overset{\nu}{x_\tau}}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}.$$

Przyjmując, że w otoczeniu miejsca $(x_\nu y_\nu)$ jest:

$$R(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})=C_\nu\tau^{-1}+C'_\nu\tau^{-2}+\ldots+C_\nu^{(\mu_\nu-1)}\tau^{-\mu_\nu}+\mathfrak{P}_\nu(\tau)$$

i zważywszy — [art. 73.] — że

$$-H(xy, \overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})\frac{d\overset{\nu}{x_\tau}}{d\tau}=\sum_{\mu=0}^{\infty}H(xy, x_\nu y_\nu)_\mu\tau^\mu, \text{ dostaniemy:}$$

$$-\left[R(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})H(xy, \overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})\frac{d\overset{\nu}{x_\tau}}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}=$$

$$=C_\nu H(xy, x_\nu y_\nu)_0+C'_\nu H(xy, x_\nu y_\nu)_1+\ldots+C_\nu^{(\mu_\nu-1)}H(xy, x_\nu y_\nu)_{\mu_\nu-1} \text{ *)}$$

a stąd wynika:

$$(4)\qquad \begin{aligned} s=C_0+\sum_{\nu=1}^{l}\Big[&C_\nu H(xy, x_\nu y_\nu)_0+C'_\nu H(xy, x_\nu y_\nu)_1+\ldots \\ &\ldots+C_\nu^{(\mu_\nu-1)}H(xy, x_\nu y_\nu)_{\mu_\nu-1}\Big]. \end{aligned}$$

Spółczynników $C_\nu, C'_\nu, \ldots, C_\nu^{(\mu_\nu-1)}$, $\nu=1, 2, \ldots, l$, jest tu $\Sigma\mu_\nu=\sigma$, a uwagi godne są związki, jakim one zadość muszą uczynić.

Przyjmijmy nasamprzód, że wszystkie miejsca $(x_\nu y_\nu)$ są różne od miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha=1, 2, \ldots, \varrho$. Wtedy s w otoczeniu żadnego miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$ — a więc gdy $(xy)=(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t})$ — nie posiada ujemnych potęg parametru t. Niechże $R(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t})=\mathfrak{P}_\alpha(t)$, to z uwagi, że

$$H(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t}, \overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})\frac{d\overset{\nu}{x_\tau}}{d\tau}=H(\overset{\nu}{x_t}\overset{\nu}{y_t})_\alpha\frac{d\overset{\nu}{x_\tau}}{d\tau}t^{-1}+\mathfrak{P}'_\alpha(t),$$

musi wypaść w (3): $[\mathfrak{P}_\alpha(t)]_{t^{-1}}=$

$$(5)\qquad \sum{}'\left[R(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})H(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})_\alpha\frac{d\overset{\nu}{x_\tau}}{d\tau}\right]_{\tau^{-1}}=0,\quad \alpha=1, 2, \ldots, \varrho.$$

---

*) $H(xy, x_\nu y_\nu)_0=-H(xy, x_\nu y_\nu)$; por. (7) art. 73.

Połóżmyż:

(5') $$\overset{\nu}{H}(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})_\alpha \frac{d\overset{\nu}{x_\tau}}{d\tau} = c_{\nu\alpha} + c'_{\nu\alpha}\tau + c''_{\nu\alpha}\tau^2 + \dots,$$

to związki (5) przybiorą formę:

(6) $\Sigma'[C_\nu c_{\nu\alpha} + C'_\nu c'_{\nu\alpha} + \dots + C_\nu^{(\mu_\nu-1)} c_{\nu\alpha}^{(\mu_\nu-1)}] = 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, \varrho$.

Są-to związki liniowe, jednorodne między σ spółczynnikami C_ν, C'_ν, ...

Przyjmijmy, że jedno z miejsc $(x_\nu y_\nu)$ jest identyczne z miejscem $(a_\beta b_\beta)$. Wtedy związki (5) lub (6) utrzymują się bez wątpienia tylko dla $\alpha = 1, 2, \dots, (\beta-1), (\beta+1), \dots, \varrho$. Gdy $\alpha = \beta$, zauważmy funkcyę $R(xy)H(xy)_\beta$. Posiada ona niezawodnie własność:

(7) $$S = \sum \left[R(x_\tau y_\tau) H(x_\tau y_\tau)_\beta \frac{dx_\tau}{d\tau} \right]_{\tau^{-1}} = 0,$$

a że iloczyn $R(x_\tau y_\tau) H(x_\tau y_\tau)_\beta \frac{dx_\tau}{d\tau}$ posiada w swych rozwinięciach ujemne potęgi parametru τ tylko wtedy, gdy $(x_\tau y_\tau) = (\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})$, $\nu = 1, 2, \dots, l$, więc związek (7) możemy napisać w formie:

$$\sum{}' \left[R(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau}) H(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})_\beta \frac{d\overset{\nu}{x_\tau}}{d\tau} \right]_{\tau^{-1}} = 0,$$

która jest widocznie nie czem innem, jak właśnie brakującem jeszcze β^{tem} równaniem (5) lub (6). Stąd twierdzenie:

I. *Gdy w danej funkcyi* $s = R(xy)$ *zauważymy jej rozwinięcia:*

$$R(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau}) = C_\nu \tau^{-1} + C'_\nu \tau^{-2} + \dots, \quad \nu = 1, 2, \dots, l$$

w otoczeniach jej wszystkich miejsc nieskończonościowych $(x_\nu y_\nu)$, *to wszystkie spółczynniki* C_ν, C'_ν, ..., *należące w tych rozwinięciach do ujemnych potęg parametru* τ *sprawdzają zawsze* ϱ *związków liniowych jednorodnych postaci:*

$$\sum_\nu \left[R(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau}) H(\overset{\nu}{x_\tau}\overset{\nu}{y_\tau})_\alpha \frac{d\overset{\nu}{x_\tau}}{d\tau} \right]_{\tau^{-1}} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \varrho.$$

Gdy $\overset{\nu}{x_t} = x_\nu + t$, to $C_{\nu\alpha} = H(x_\nu y_\nu)_\alpha$. Załóżmy dalej $\mu_\nu = 1$, to związki (6) przybiorą postać:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 H(x_1 y_1)_1 + C_2 H(x_2 y_2)_1 + \dots + C_\sigma H(x_\sigma y_\sigma)_1 = 0 \\ C_1 H(x_1 y_1)_2 + C_2 H(x_2 y_2)_2 + \dots + C_\sigma H(x_\sigma y_\sigma)_2 = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ C_1 H(x_1 y_1)_\varrho + C_2 H(x_2 y_2)_\varrho + \dots + C_\sigma H(x_\sigma y_\sigma)_\varrho = 0. \end{array} \right.$$

Przyjmijmy na chwilę $\sigma=\varrho$. Wtedy wyznacznik:

$$D(H)=\begin{vmatrix} H(x_1y_1)_1 \ldots H(x_\varrho y_\varrho)_1 \\ H(x_1y_1)_2 \ldots H(x_\varrho y_\varrho)_2 \\ \vdots \\ H(x_1y_1)_\varrho \ldots H(x_\varrho y_\varrho)_\varrho \end{vmatrix}=0$$

albo — jeżeli $\overset{v}{x_t}$ są ogólniejszej postaci, a

$$H(\overset{v}{x_t}\overset{v}{y_t})_\alpha \frac{d\overset{v}{x_t}}{dt}=h(x_v y_v)_\alpha+\mathfrak{P}_{v\alpha}(t) \quad —$$

wyznacznik $D(h)=0$ wskazywałby, że możliwą jest funkcya, która tylko na ϱ dowolnych miejscach $(x_v y_v)$ staje się zerem. Że zaś to jest niemożliwe, więc stąd wynika:

II. *Niemożliwem jest, jeżeli miejsca* $(x_v y_v)$, $v=1, 2, \ldots, \varrho$, *mają być zupełnie dowolne, aby wyznacznik* $D(H)$, *lub wyznacznik* $D(h)$ *był identycznie zerem.*

Przyjmijmy, że naodwrót chcemy utworzyć funkcyę $s=R(xy)$, stającą się nieskończonością o stopniach μ_v na pewnych l danych miejscach $(x_v y_v)$, $v=1, 2, \ldots, l$, gdzie przytem $\Sigma\mu_v=\sigma>\varrho$ być musi. Dając takiej funkcyi odrazu formę (4), musimy między σ nieoznaczonymi jeszcze jej spółczynnikami C_v, C'_v, ... wprowadzić ϱ związków (6). Te nie wystarczają jeszcze, aby wszystkie spółczynniki, których — po wliczeniu już i stałej C_0 — jest $(\sigma+1)$, mieć wyznaczone. Z tego powodu przyjmijmy, że się funkcya s stawać ma zerem $(\sigma-\varrho)$ razy na l' miejscach $(\xi_u\eta_u)$, $u=1, 2, \ldots, l'$ i że na miejscu $(\xi_u\eta_u)$ jest zerem stopnia μ'_u. A więc $\Sigma\mu'_u=\sigma-\varrho$.

Takie założenia, gdy $(\overset{u}{x_t}\overset{u}{y_t})$ oznacza parę funkcyj, otaczających miejsce $(\xi_u\eta_u)$, prowadzi do nowych $(\sigma-\varrho)$ związków:

$$(8) \qquad C_0+\sum_v[C_v H(\overset{u}{x_t}\overset{u}{y_t}, x_v y_v)_0+C'_v H(\overset{u}{x_t}\overset{u}{y_t}, x_v y_v)_1+\ldots]_t^\lambda=0,$$

$$\lambda=0, 1, 2, \ldots, \mu'_u-1, \quad u=1, 2, \ldots, l'.$$

Gdy dalej założymy, że na pewnem miejscu (a, b), różnem od miejsc $(x_v y_v)$, $(\xi_u\eta_u)$ ma być $s=C\neq 0$, dostaniemy jeszcze jeden nowy związek:

$$(9) \qquad C=C_0+\sum_v[C_v H(ab, x_v y_v)_0+C'_v H(ab, x_v y_v)_1+\ldots].$$

Z tak utworzonych $(\sigma+1)$ związków (6), (8), (9) obliczywszy C_0, C_v, C'_v, ... mieć już będziemy funkcyę s w zupełności wyznaczoną. Jestto wynik zgodny z tym, jaki mieliśmy w art. 70., tw. II.

Zauważymy przytem, że *gdy przy wyznaczaniu funkcyi zużyto tylko warunki, wynikające z σ przyjętych miejsc nieskończonościowych, to taka funkcya zawierać będzie jeszcze $(\sigma-\varrho+1)$ stałych dowolnych.*

Uwaga I. Miejsca $(x_\nu y_\nu)$, $(\xi_u\eta_u)$ przedstawmy dla uproszczenia szeregami:

$$(a)\qquad (x_1 y_1),\ (x_2 y_2),\ \ldots,\ (x_\sigma y_\sigma);$$

$$(b)\qquad (\xi_1\eta_1),\ (\xi_2\eta_2),\ \ldots,\ (\xi_{\sigma-\varrho},\ \eta_{\sigma-\varrho}),$$

w których — jeżeli potrzeba — są i miejsca sobie równe, to przy obliczaniu spółczynników C_0, C_ν, C'_ν, ... podług tych szeregów miejsc może się zdarzyć, że dla pewnych ν wypadną $C_\nu^{(\mu_\nu-1)}=0$. Wtedy widocznie funkcya s, którą tworzymy, będzie na takich miejscach $(x_\nu y_\nu)$ tylko w $(\mu_\nu-1)^{\text{szym}}$, albo i niższym stopniu nieskończonością, albo nawet okaże się tam skończoną. Z tego powodu trzeba funkcyę s, którą tworzyć mamy z warunków (a), (b), tak rozumieć, że jej miejsca nieskończonościowe i zerowe będą się wprawdzie mieściły w szeregach (a), (b), ale jej stopień — mimo założenia $\Sigma\mu_\nu=\sigma$ — może niekiedy wypaść $<\sigma$.

Uwaga 2. Ze sposobu tworzenia funkcyi s wynika, że w nią miejsca (a), (b) wejdą wymiernie. Połóżmyż:

$$(10)\qquad s=R(xy,\ \ldots,\ x_\nu y_\nu,\ \ldots,\ \xi_u\eta_u,\ \ldots),$$

a $(\xi'_v\eta'_v)$ niech będzie jednem z ρ miejsc zerowych już zależnych. Gdy w otoczeniu tego miejsca jest:

$$(11)\qquad s=A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots,$$

to tu A_0, A_1, A_2, ... są wymiernemi funkcyami wszystkich miejsc dowolnych $(x_\nu y_\nu)$, $(\xi_u\eta_u)$ i miejsca $(\xi'_v\eta'_v)$. Że zaś $R(\xi'_v\eta'_v)=0$, więc kilka z początkowych spółczynników w (11) musi być zerem. Odnosząc to do wszystkich miejsc zerowych zależnych, dochodzimy do ρ związków algebraicznych:

$$G_\alpha(\ldots,\ x_\nu y_\nu,\ \ldots,\ \xi_u\eta_u,\ \ldots,\ \xi'_v\eta_v)=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,\rho.$$

Przedstawmy zależne miejsca zerowe szeregiem;

$$(\xi'_1\eta'_1),\ (\xi'_2\eta'_2),\ \ldots,\ (\xi'_\rho\eta'_\rho),$$

bez różnicy, czy się powtarzają lub nie, to mamy twierdzenie:

III. *Między σ miejscami nieskończonościowemi i σ miejscami zerowemi każdej funkcyi $R(x,y)$ stopnia σ zachodzi zawsze pewnych ρ równań algebraicznych. Inaczej: Gdy już wyznaczono funkcyę z σ jej miejsc zerowych i $(\sigma-\rho)$ miejsc nieskończonościowych, to dalsze miejsca nieskończonościowe (jest ich ρ) mają spółrzędne, które są algebraicznemi funkcyami miejsc danych.*

78. Funkcya s stopnia $\leqq\varrho$ (o miejscach nieskończonościowych od siebie zależnych). Przyjmijmy wszystkie $\mu_\nu=1$ i połóżmy dla krótkości $-H(xy,x_\nu y_\nu)=H(xy,x_\nu y_\nu)_0=H(\nu)$. Funkcya s wyraża się wtedy formą:

$$(1)\qquad s=C_0+C_1H(1)+\ldots+C_\sigma H(\sigma),\quad \sigma>\varrho,$$

a ze stałych C_1, C_2, ..., C_σ możemy za pomocą równań (A), [art. poprzedz.], ϱ z nich wyrazić liniowo przez pozostałe, które mogą być całkiem dowolne. Lecz przyjmijmy, że równania (A) n i e w s z y s t k i e są od siebie niezależne i że ich tam jest k zbytecznych.

Z pozostałych $(\varrho-k)$ równań wyraziwszy C_1, $C_2,\dots$, $C_{\varrho-k}$ przez pozostałe mieć będziemy:

$$\begin{aligned} C_1 &= A'C_{\varrho-k+1}+B'C_{\varrho-k+2}+\dots+P'C_\sigma \\ &\vdots \\ C_{\varrho-k} &= A'^{(\varrho-k)}C_{\varrho-k+1}+B^{(\varrho-k)}C_{\varrho-k+2}+\dots+P^{(\varrho-k)}C_\sigma. \end{aligned}$$

Wstawiwszy to w s, otrzymamy:

$$\begin{aligned} s=C_0&+C_{\varrho-k+1}[A'H(1)+\dots+A^{(\varrho-k)}H(\varrho-k)+H(\varrho-k+1)] \\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+ \\ &+C_\sigma[P'H(1)+\dots+P^{(\varrho-k)}H(\varrho-k)+H(\sigma)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Mamy tu sumę $(\sigma-\varrho-k)$ funkcyj (ujętych w nawiasy) a z nich każda posiada tylko $(\varrho-k+1)$ miejsc nieskończonościowych. Ale te miejsca nie są dowolne, one zależą tu od siebie, a tę ich zależność określają znikające wyznaczniki wskazujące, że między równaniami (A) jest k zbytecznych. Widocznie $\varrho-k+1<\varrho$, a więc pytanie zachodzi, jaka jest najmniejsza liczba $<\varrho$ mogąca być jeszcze ilością miejsc nieskończonościowych w wymiernej funkcyi pary (x, y).

Aby to zbadać przyjmijmy, że istnieje funkcya ψ o μ miejscach jednokrotnych nieskończonościowych $(\mu<\varrho)$. Wtedy i funkcya $\overline{\psi}=A+B\psi$ posiada te same miejsca nieskończonościowe przy najdowolniejszych wartościach stałych A, B. Gdy dla takiej funkcyi $\overline{\psi}$ utworzymy ϱ związków (A):

$$\begin{aligned} C_1H(x_1y_1)_1+\dots+C_\mu H(x_\mu y_\mu)_1&=0 \\ &\vdots \\ C_1H(x_1y_1)_\varrho+\dots+C_\mu H(x_\mu y_\mu)_\varrho&=0, \end{aligned}$$

to one wszystkie równocześnie spełniać się muszą. Stąd wynika, że wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} H(x_1y_1)_1 & \dots\dots & H(x_\mu y_\mu)_1 \\ H(x_1y_1)_2 & \dots\dots & H(x_\mu y_\mu)_2 \\ \vdots & & \vdots \\ H(x_1y_1)_{\mu-1} & \dots & H(x_\mu y_\mu)_{\mu-1} \\ H(x_1y_1)_{\mu+q} & \dots & H(x_\mu y_\mu)_{\mu+q} \end{vmatrix} =0, q=0,1,2,\dots,(\varrho-\mu).$$

Związków tak otrzymanych jest widocznie $(\varrho-\mu+1)$. Zawierają one dane miejsca nieskończonościowe, a wskutek tego z tych miejsc tylko $\mu-(\varrho-\mu+1)=(2\mu-\varrho-1)$ będzie dowolnych. Tyleż więc stałych dowolnych stąd pochodzących może funkcya $\overline{\psi}$ zawierać. Doliczmy do tego jeszcze stałe A, B, to ostatecznie mamy w $\overline{\psi}$ dowolnych stałych: $(2\mu-\varrho+1)$. Utwórzmy teraz funkcyę:

$$\Psi=\frac{a+b\psi}{c+d\psi},$$

to funkcya Ψ będzie oczywiście znowu funkcyą o μ miejscach nieskończonościowych. Że zaś tu prawa strona przynajmniej 3 stałe zawiera $(a/b,\ c/b,\ d/b)$, więc mamy nierówność: $(2\mu-\varrho+1)\geqq 3$, a z niej wynika:

$$\mu\geqq\frac{\varrho+2}{2}.\text{ To zn.}$$

I. *Najmniejsza możliwa ilość miejsc nieskończonościowych zawartych w funkcyach wymiernych obrazu rodzaju* ϱ *jest:* $\left[\frac{\varrho+2}{2}\right]$*) *t. j. największa całkowita liczba mieszcząca się w* $(\varrho+2)/2$.

79. Funkcya s_{ab} z jednem tylko, ale wielokrotnem miejscem nieskończonościowem. Według formy (4) — art. 77.] — przedstawić można funkcyą s_{ab}, która na jednem tylko, dowolnem miejscu (a,b) obrazu $f=0$ stawać się ma nieskończonością w stopniu σ, w ten sposób przedstawić:

(A) $s_{ab}=C_0+C_1H(xy,ab)+C_2H(xy,ab)_1+\ldots+C_\sigma H(xy,ab)_{\sigma-1}$.

Podług ogólnych własności funkcyj wymiernych pary (x,y) ma być $\sigma>\varrho$, a funkcye s_{ab} stopni $1,2,3,\ldots\varrho$ istnieć nie powinny**). Lecz tu mogą dla pewnych punktów (ab) zajść pod tym względem wyjątki.

Spółczynniki $C_1, C_2,\ldots, C_\sigma$ spełnić tu mają ϱ związków:

(1) $C_1c_{1\alpha}+C_2c_{2\alpha}+\ldots+C_\sigma c_{\sigma\alpha}=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,\varrho,$

które powodują skończoność funkcyi s_{ab} na miejscach $(a_\alpha b_\alpha)$, a w których $c_{1\alpha}, c_{2\alpha},\ldots$ zależą od (ab).

Przyjmijmy, że między wyznacznikami ϱ^{go} stopnia utworzonymi z podłużnego schematu:

$$\left|\begin{matrix} c_{11} & c_{21}\cdots & c_{\sigma 1}\\ c_{12} & c_{22}\cdots & c_{\sigma 2}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ c_{1\varrho} & c_{2\varrho}\cdots & c_{\sigma\varrho}\end{matrix}\right|$$

najpierwszym wyznacznikiem różnym od zera, jest:

*) Riemann. *Ges. math. Werke.*

Roch. *Über die Anzahl der willkürlichen Constanten in alg. Functionen.* C. J. T. 64. str. 372—376.

Klein (Fricke). *Ell. Modulfunctionen.* T. I. str. 556. Niemcy nazywają twierdzenie I.: *Satz von Rieman-Roch*".

**) Por. także: M. Nöther. *Über einen Satz aus der Theorie der alg. Functionen.* C. J. T. 92. str. 301—303. i rozprawę tegoż w. C. J. T. 97. str. 224—229.

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{k_1 1} & c_{k_2 1} \dots & c_{k_\varrho 1} \\ c_{k_1 2} & c_{k_2 2} \dots & c_{k_\varrho 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k_1 \varrho} & c_{k_2 \varrho} \dots & c_{k_\varrho \varrho} \end{vmatrix}, \quad k_1 < k_2 < \dots < k_\varrho; \; k_\varrho \geq \varrho.$$

Z takiego założenia wynika, że z wszystkich wyznaczników Δ' utworzonych z schematu:

$$\left\{\begin{matrix} c_{11}, & c_{21}, & c_{31}, \dots & c_{k_\varrho 1} \\ c_{12}, & c_{22}, & c_{32}, \dots & c_{k_\varrho 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1\varrho}, & c_{2\varrho}, & c_{3\varrho}, \dots & c_{k_\varrho \varrho} \end{matrix}\right\}$$

wszystkie, oprócz wyznacznika Δ, są zerami. Ze związków (1) obliczone spółczynniki $C_{k_1}, C_{k_2}, \dots, C_{k_\varrho}$ mieć będą, wskutek wyznaczników $\Delta'=0$, takie postacie:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(a) \quad C_{k_1} = \frac{1}{\Delta}\left[A_1 C_{k_\varrho+1} + B_1 C_{k_\varrho+2} + \dots + P_1 C_\sigma\right], \\ &(b) \quad C_{k_1} = \frac{1}{\Delta}\left[A_2 C_{k_\varrho+1} + B_2 C_{k_\varrho+2} + \dots + P_2 C_\sigma\right], \\ &\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ &(c) \quad C_{k_\varrho} = \frac{1}{\Delta}\left[A_\varrho C_{k_\varrho+1} + B_\varrho C_{k_\varrho+2} + \dots + P_\varrho C_\sigma\right]. \end{aligned}$$

Z tego wnosimy, że s_{ab} stopnia $\sigma > \varrho$ tworzyć można przy dowolnych

$$(3) \qquad \begin{aligned} &C_1, C_2, \dots C_{k_1-1}, C_{k_1+1}, C_{k_1+2}, \dots, C_{k_2-1}, \\ &C_{k_2+1}, C_{k_2+2}, \dots, C_{k_\varrho-1}, C_{k_\varrho+1}, C_{k_\varrho+2}, \dots, C_\sigma \end{aligned}$$

byleby tylko $C_{k_1}, C_{k_2}, \dots, C_{k_\varrho}$ miały formy (2).

Przyjmijmy w (3): $C_{k_\varrho+1} \neq 0$, $C_{k_\varrho+2} = \dots = C_\sigma = 0$, to przy dowolnych pozostałych spółczynnikach (3) i przy wartościach (2) dostaniemy z (A) funkcyę s_{ab} o stopniu $(k_\varrho+1)$ w punkcie (ab).

Gdy założymy $C_{k_\varrho+2} \neq 0$, $C_{k_\varrho+3} = \dots = C_\sigma = 0$, to znowu przy dowolnych pozostałych spółczynnikach (3) i przy wartościach (2) dostaniemy z (A) funkcyę s_{ab} o stopniu $(k_\varrho+2)$ w punkcie (ab). Podobnie i dalsze stopnie: $(k_\varrho+3)$, $(k_\varrho+4)$, ... okażą się możliwe.

Chcąc mieć funkcyę stopnia k_1, trzeba położyć:

$$C_{k_1+1} = C_{k_1+2} = \dots = 0.$$

Ale wtedy przy dowolnych $C_1, C_2, \dots, C_{k_1-1}$ dostajemy z (a): $C_{k_1}=0$. To wskazuje, że funkcya s_{ab} żądanego stopnia k_1 nie istnieje. Podobnie, gdy zażądamy funkcyi stopnia k_2, trzeba położyć:

$$C_{k_2+1} = C_{k_2+2} = \dots = 0.$$

Wtedy przy dowolnych $C_1, C_2, \dots, C_{k_1-1}, C_{k_1+2}, \dots, C_{k_2-1}$ wynika z (a) i (b): $C_{k_1} = C_{k_2} = 0$, co wskazuje, że i funkcya stopnia k_2 istnieć nie może. Analogicznie dalej postępując wywnioskujemy, że niemożliwem jest, aby istniały funkcye s_{ab} o stopniach: $k_3, k_4, \dots k_\varrho$.

Gdy $k_1 = 1$, $k_2 = 2, \dots, k_\varrho = \varrho$, to punkt $(a\,b)$ nie jest wyjątkowym, bo wtedy nie istnieją funkcye s_{ab} o stopniach: $1, 2, 3, \dots, \varrho$, ale już istnieją takież funkcye o stopniach $\varrho+1, \varrho+2, \dots$ Mamy więc twierdzenie:

I. *Wszystkie punkty $(x\,y) = (a\,b)$ danego obrazu algebraicznego rodzaju $\varrho > 1$ dzielą się na dwa rodzaje: 1°) na punkta, w których nie istnieją funkcye s_{ab} stopni $1, 2, 3, \dots, \varrho$, a istnieją już takież funkcye stopni $\varrho+1, \varrho+2, \dots$ i 2°) na punkta, na których istnieją funkcye s_{ab} o stopniach $k_\varrho+1, k_\varrho+2, k_\varrho+3, \dots, (k_\varrho > \varrho)$ a między liczbami $1, 2, 3, \dots, k_\varrho$, zawierają się liczby $k_1, k_2, \dots, k_\varrho$, które nie tworząc szeregu $1, 2, \dots \varrho$ nie mogą być stopniami żadnej funkcyi s_{ab}. Liczba k_1 jest zawsze $=1$, gdyż $C_0 + C_1 H(x\,y,\ a\,b)$ nie może być funkcyą stopnia 1^go^, gdy $\varrho > 1$.*

Ten drugi rodzaj punktów $(a\,b)$ nazywają **wyjątkowymi punktami Weierstrassa***).

Uwaga 1. Przyjmijmy $\sigma = \rho$, to s_{ab} ma być funkcyą, która w obrazie rodzaju ρ ma być na jedynem miejscu (a, b) nieskończoną w stopniu ρ, (albo niższym). Wtedy mamy $s_{ab} = C_0 + C_1 H(x\,y,\ a\,b) + \dots + C_\varrho H(x\,y,\ a\,b)_{\varrho-1}$, a warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby taka funkcya istniała, będzie:

$$D_1(a\,b) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \dots & c_{1\varrho} \\ \vdots & & \\ c_{\varrho 1} & c_{\varrho 2} \dots & c_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie $D_1(x\,y)$ jest wymierną funkcyą pary $(x\,y)$. Z tego wynika, że — gdy $\rho > 1$ — to na krzywej $f = 0$ znajdzie się zawsze i to tylko skończona ilość miejsc $(x\,y) = (a\,b)$ dopuszczających istnienia funkcyi s_{ab} stopnia ρ.

Dla $\rho = 1$ nie będzie to możliwem, gdyż s_{ab} stopnia 1^go^ w (a, b) a zresztą wszędzie skończona istnieć może tylko w obrazie o rzędzie $= 0$.

Przytem zauważymy, że jeżeli:

$$H(x_t\,y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt} = h(x\,y)_{\alpha 1} + h(xy)_{\alpha 2}\, t + \dots, \text{ to}$$

$$c_{\alpha\beta} = h(a\,b)_{\alpha\beta}, \quad \begin{matrix} \alpha = 1, 2, \dots, \rho \\ \beta = 1, 2, \dots, \rho \end{matrix}$$

wskutek czego można napisać: $D_1(a\,b) = D(h(a\,b))$.

Uwaga 2. Obierzmy w nieprzywiedlnym obrazie algebraicznym $f = 0$ dowolny punkt $(a\,b)$, który dozwala utworzyć funkcyę:

(4) $$s_{ab} = \xi = R_1(x, y)$$

najniższego stopnia: λ. Między temi liczbami $> \lambda$, które mogą być stopniami funkcyj s_{ab} niech μ będzie najmniejszą, **pierwszą** liczbą względem λ. Utwórzmy funkcyę:

---

*) M. Haure. *„Récherches sur les points de Weierstrass. Ann. scient. de l'école N. sup.“* T. 13. (S. 3., 1896) str. 115....

(5) $$s'_{ab} = \eta = R_2(x, y)$$

stopnia: μ, to po wyeliminowaniu x, y z równań (4), (5) i równania $f=0$, dojdziemy do równania:

(6) $$\varphi(\xi\eta) = 0$$

które w ξ będzie stopnia μ^{go}, a w η stopnia λ^{go}, [art. 67].

Jeżeli w obrazie $f=0$ otacza miejsce $(a\,b)$ para funkcyj $x = a + \varphi_1(t)$, $y = b + \varphi_2(t)$, to — po wstawieniu jej w (4) i (5) — dostaniemy:

$$\xi = ct^{-\lambda} + c't^{-\lambda+1} + \dots,\ \eta = dt^{-\mu} + d't^{-\mu+1} + \dots$$

stąd mamy $\eta = et^{\frac{\mu}{\lambda}} + e't^{\frac{\mu+1}{\lambda}} + \dots$, a ten element jest niezawodnie λ-wartościowy, bo μ jest pierwsze względem λ.

Z tej uwagi — mając wzgląd na to, że $\varphi=0$ jest równaniem stopnia λ^{go}, wnosimy, że $\varphi=0$ jest nieprzywiedlnem równaniem, a podstawienia (4), (5) są odwracalne [art. 67., tw. II]. Mamy więc twierdzenie:

II. *Każde nieprzywiedlne równanie algebraiczne* $f(xy)=0$ *da się za pomocą pewnego odwracalnego podstawienia zamienić zawsze na nieprzywiedlne równanie* $\varphi(\xi\eta)=0$ *o tej własności, że* η, *określone tem nowem równaniem jako algebraiczna funkcya o* λ *gałęziach, posiada w nieskończoności jeden tylko cykliczny element stopnia:* λ.

Z tego twierdzenia korzystając, można — jak-to już w art. 60. zauważano — dowieść, że każde równanie nieprzywiedlne $f(x, y)=0$ określa monogeniczną funkcyę.

80. Związki między funkcyami *H*.

Zauważmy wymierną funkcyę:

$$U = \left[\frac{d}{dx} H(xy, x_1y_1)\right] . [H(xy, x_2y_2)],$$

w której (x_1y_1), (x_2y_2) uważamy za dwa stałe, nieosobliwe miejsca danego obrazu $f=0$, a w $\frac{d}{dx}H(xy, x_1y_1)$ uwzględniamy, że y zależy od x*). Funkcya U ma własność, [art. 76.],

$$S = \sum\left[\frac{d}{dt} H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, x_1y_1) . H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, x_2y_2) \frac{d\overset{\alpha}{x}_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0$$

kładąc $\overset{\alpha}{x}_t = a_\alpha + t$, $\frac{d\overset{\alpha}{x}_t}{dt} = 1$, mamy:

$$H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, x_1y_1) = H(x_1y_1)_\alpha t^{-1} + \overset{0}{H}(x_1y_1)_\alpha - H'(x_1y_1)_\alpha t - \dots$$

$$\frac{d}{dt} H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, x_1y_1) = -H(x_1y_1)_\alpha t^{-2} - H'(x_1y_1)_\alpha + \dots$$

$$H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, x_2y_2) = H(x_2y_2)_\alpha t^{-1} + \overset{0}{H}(x_2y_2)_\alpha - H'(x_2y_2)_\alpha t - \dots$$

---

*) $\frac{d}{dx}H = \frac{\partial}{\partial x}H + \frac{\partial}{\partial y}H . \frac{dy}{dx}$, że zaś $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}$, więc widocznie $\frac{d}{dx}H$ jest wymierną funkcyą pary (x, y).

Z tego wynika, że z miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha=1,2,\ldots,\varrho$ wejdzie w S suma:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[H(x_1y_1)_\alpha H'(x_2y_2)_\alpha - H(x_2y_2)_\alpha H'(x_1y_1)_\alpha].$$

Z otoczenia miejsca $(x_1 y_1)$, gdy położymy tu $x_t=x_1+t$, a więc $\frac{dx_t}{dt}=1$ i zauważymy, że:

$$H(x_ty_t,\ x_1y_1)=-t^{-1}+\mathfrak{P}(t),\quad \frac{d}{dt}H(x_ty_t,\ x_1y_1)=t^{-2}+\mathfrak{P}'(t),$$

$$H(x_ty_t,\ x_2y_2)=H(x_1y_1,\ x_2y_2)+\frac{d}{dx_1}H(x_1y_1,\ x_2y_2)\,.\,t+\ldots,$$

mieć w S będziemy: $\frac{d}{dx_1}H(x_1y_1,\ x_2y_2)$.

Podobnie z otoczenia miejsca (x_2y_2), gdy znowu położymy $x_t=x_2+t$, $\frac{dx_t}{dt}=1$, dostaniemy w S wyraz $-\frac{d}{dx_2}H(x_2\,y_2,\ x_1\,y_1)$.

Że zaś funkcya U już na innych miejscach nie posiada wcale rozwinięć o odjemnych potęgach parametru t, więc związek: $S=0$ ma tu postać:

$$\frac{d}{dx_1}H(x_1y_1,\ x_2y_2)-\frac{d}{dx_2}H(x_1y_1,\ x_2y_2)$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[H(x_1y_1)_\alpha H'(x_2y_2)_\alpha - H(x_2y_2)_\alpha H'(x_1y_1)_\alpha]=0.$$

Przyjmijmy: $(x_1y_1)=(xy)$, a $(x_2y_2)=(x'y')$, to mamy taki związek między funkcyami H:

$$\frac{d}{dx}H(xy,\ x'\,y')=\frac{d}{dx'}H(x'\,y',\ x\,y)$$
(1)
$$-\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[H(x\,y)_\alpha H'(x'y')_\alpha - H(x'y')_\alpha\,.\,H'(x\,y)_\alpha].$$

Niech $(x_\tau y_\tau)=(\overset{\nu}{x}_\tau \overset{\nu}{y}_\tau)$ otacza pewne stałe miejsce $(x_\nu y_\nu)$, to związek (1) w takiem otoczeniu będzie postaci:

$$\frac{d}{dt}H(\overset{\nu}{x}_t\overset{\nu}{y}_t,\ x'y')=\frac{d}{dx'}H(x'\,y',\ \overset{\nu}{x}_t\overset{\nu}{y}_t)$$
(2)
$$-\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[H(\overset{\nu}{x}_t\overset{\nu}{y}_t)_\alpha H'(x'\,y')_\alpha - H(x'\,y')_\alpha H'(\overset{\nu}{x}_t\overset{\nu}{y}_t)_\alpha].$$

Założmy, że $(x_\nu\,y_\nu)$ jest różne od miejsc $(a_\alpha\,b_\alpha)$, to w otoczeniu jego da się $H(\overset{\nu}{x}_t \overset{\nu}{y}_t, x' y')$ rozwinąć podług dodatnich potęg parametru t. Położmyż:

$$\text{(3)}\qquad H(\overset{\nu}{x}_t \overset{\nu}{y}_t, x' y') = \overset{0}{H}(x_\nu y_\nu, x' y') + \overset{1}{H}(x_\nu y_\nu, x' y')t + \ldots$$
$$\ldots + \overset{n}{H}(x_\nu y_\nu, x' y')\, t^n + \ldots$$

to stosując tu (2), dostajemy:

$$\text{(4)}\qquad \sum_n \frac{d}{dt} \overset{n}{H}(x_\nu y_\nu, x' y')\, t^n = \sum_n \left[\frac{d}{dx'} H(x' y', \overset{\nu}{x}_t \overset{\nu}{y}_t)\right]_{t^{n-1}} . t^{n-1}$$
$$+ \sum_n \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \left[h_{\alpha n} H(x' y')_\alpha - h'_{\alpha n} H'(x' y')_\alpha\right] t^{n-1}, \text{ gdzie:}$$

$h_{\alpha n} = [H'(\overset{\nu}{x}_t \overset{\nu}{y}_t)_\alpha]_{t^{n-1}}$, $h'_{\alpha n} = [H(\overset{\nu}{x}_t \overset{\nu}{y}_t)_\alpha]_{t^{n-1}}$ są już ilości stałe.

Z (4) — z porównania równomiennych wyrazów — wynika:

$$n . \overset{n}{H}(x_\nu y_\nu, x' y') = \left[\frac{d}{dx'} H(x' y', \overset{\nu}{x}_t \overset{\nu}{y}_t)\right]_{t^{n-1}} +$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{\varrho} [h_{\alpha n} H(x' y')_\alpha - h'_{\alpha n} H'(x' y')_\alpha].$$

Położmy jeszcze: $\left[\frac{d}{dx'} H(x' y', \overset{\nu}{x}_t \overset{\nu}{y}_t)\right]_{t^{n-1}} = \frac{d}{dx'} \Phi_n(x' y')$, to mieć ostatecznie będziemy:

$$\text{(5)}\qquad n . \overset{n}{H}(x_\nu y_\nu, x' y') = \frac{d}{dx'} \Phi_n(x' y') +$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{\varrho} [h_{\alpha n} H(x' y')_\alpha - h'_{\alpha n} H'(x' y')_\alpha].$$

W ten sposób określają się tu spółczynniki rozwinięcia (3); $\overset{0}{H}(x_\nu y_\nu, x' y')$ jest tu $= H(x_\nu y_\nu, x' y')$.

Jeżeli przyjmiemy $(\overset{\nu}{x}_t \overset{\nu}{y}_t) = (\overset{\beta}{x}_t \overset{\beta}{y}_t)$, to w (5) trzeba $(x_\nu y_\nu)$ zmienić na $(a_\beta b_\beta)$, a stałe $h_{\alpha n}$, $h'_{\alpha n}$ uważać za zależne od $(a_\beta b_\beta)$; $\overset{0}{H}(a_\beta b_\beta, x' y')$ ma w tym razie znaczenie: $[H(\overset{\beta}{x}_t \overset{\beta}{y}_t, x' y')]_{t^0}$.

81. Nowa forma funkcyi $s = R(xy)$. Na podstawie związków wyprowadzonych w art. poprzedz. będziemy mogli funkcyi $s = R(xy)$ dać formę, która okaże się praktyczniejszą niż forma (4) art. 77. Gdy funkcya dana s ma miejsca nieskończonościowe $(x_\nu y_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, l$ z dowolnemi powtórzeniami μ_ν, a zauważymy funkcyę:

$$V(xy)=R(xy)\,.\,H(xy,\ x'y'),$$

gdzie (xy), $(x'y')$ są bieżącemi miejscami tego samego obrazu $f=0$, to V ma miejsca nieskończonościowe:

$$(x'y'),\ (x_\nu y_\nu),\ \nu=1,2,\dots,l,\ (a_\alpha b_\alpha),\ \alpha=1,2,\dots\varrho$$

i te miejsca trzeba będzie uwzględnić w relacyi:

$$S=\sum\left[V(x_t y_t)\,\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}=0,\ [\text{art. } 76].$$

Gdy $(x'y')$ tak wybierzemy, że w parze otaczającej to miejsce położyć można $x'_t=x'+t$, a więc $\frac{dx'_t}{dt}=1$, to mamy:

$$H(x'_t y'_t,\ x'y')\,\frac{dx'_t}{dt}=-t^{-1}+\mathfrak{P}(t),\ \text{a że:}$$

$$R(x'_t y'_t)=R(x'y')+\mathfrak{P}_1(t),$$

więc z tego miejsca wejdzie w S wyraz:

$$(a)\qquad -R(x'y').$$

Uwzględniając te miejsca $(x_\nu y_\nu)$, które nie są identyczne z miejscami $(a_\alpha b_\alpha)$, położyć trzeba:

$$R(\overset{\nu}{x_t}\overset{\nu}{y_t})\,\frac{d\overset{\nu}{x_t}}{dt}=c_\nu t^{-1}+1\,.\,c_{\nu 1}t^{-2}+2\,.\,c_{\nu 2}t^{-3}+\dots+n\,.\,c_{\nu n}t^{-n-1}+\dots+\mathfrak{P}_\nu(t);$$

$$H(\overset{\nu}{x_t}\overset{\nu}{y_t},\ x'y')=H(x_\nu y_\nu,x'y')+\overset{1}{H}(x_\nu y_\nu,x'y')\,t+\dots+\overset{n}{H}(x_\nu y_\nu,\ x'y')\,t^n+\dots;$$

a pierwsze z tych rozwinięć posiada odjemne potęgi parametru t tylko do skończonego stopnia.

Z każdego takiego miejsca dostaniemy w S wyraz:

$$(b)\qquad c_\nu H(x_\nu y_\nu,\ x'y')+\sum_{n>0} n\,.\,c_{\nu n}\overset{n}{H}(x_\nu y_\nu,\ x'y'),\ \text{przyczem:}$$

$$(\alpha)\qquad c_\nu=\left[R(\overset{\nu}{x_t}\overset{\nu}{y_t})\,\frac{d\overset{\nu}{x_t}}{dt}\right]_{t^{-1}},\quad (\beta)\ n\,.\,c_{\nu n}=\left[R(\overset{\nu}{x_t}\overset{\nu}{y_t})\frac{d\overset{\nu}{x_t}}{dt}\right]_{t^{-n-1}}.$$

Gdy $(x_\nu y_\nu)$ spada z miejscem $(a_\beta b_\beta)$, to mamy:

$$R(\overset{\beta}{x_t}\overset{\beta}{y_t})\,\frac{d\overset{\beta}{x_t}}{dt}=k_\beta+c_\beta t^{-1}+1.c_{\beta 1}t^{-2}+2\,.\,c_{\beta 2}t^{-3}+\dots+n\,.\,c_{\beta n}t^{-n-1}+\dots+t.\mathfrak{P}_\beta(t),$$

$$H(\overset{\beta}{x_t}\overset{\beta}{y_t},\ x'y')=H(x'y')_\beta t^{-1}+\overset{0}{H}(a_\beta b_\beta,x'y')+\overset{1}{H}(a_\beta b_\beta,\ x'y')t+\dots$$

$$\dots+\overset{n}{H}(a_\beta b_\beta,\ x'y')\,t^n+\dots,$$

a więc tu z tego miejsca wejdzie do S wyraz:

$$(c)\qquad k_\beta H(x'y')_\beta+c_\beta\overset{0}{H}(a_\beta b_\beta,\ x'y')+\sum_{n>0} n\,.\,c_{\beta n}\overset{n}{H}(a_\beta b_\beta,\ x'y'),$$

gdzie znowu:

$$(\alpha') \quad c_\beta=\left[R(\overset{\beta}{x_t}\overset{\beta}{y_t})\frac{d\overset{\beta}{x_t}}{dt}\right]_{t^{-1}}, \qquad (\beta') \quad nc_{\beta n}=\left[R(\overset{\beta}{x_t}\overset{\beta}{y_t})\frac{d\overset{\beta}{x_t}}{dt}\right]_{t^{-n-1}}.$$

Wreszcie uwzględnić trzeba te miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$, które nie są identyczne z miejscami $(x_\nu y_\nu)$. W otoczeniu takich miejsc mamy:

$$R(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t})\frac{d\overset{\alpha}{x_t}}{dt}=c_\alpha+t\,\mathfrak{P}(t),\ H(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t},\ x'y')=H(x'y')_\alpha t^{-1}+\ldots$$

a więc z takich miejsc wejdzie do S:

$$(d) \qquad c_\alpha H(x'y')_\alpha.$$

Zbierając (a), (b), (c), (d), a za $(x'y')$ pisząc (xy) dostaniemy relację $S=0$ w postaci:

$$R(xy)=\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu \overset{0}{H}(x_\nu y_\nu,\ xy)+\sum_{n>0} n\,.\,c_{\nu n}\overset{n}{H}(x_\nu y_\nu,\ xy)]+$$
$$+\Sigma' k_\beta H(xy)_\beta+\Sigma'' c_\alpha H(xy)_\alpha.$$

Z ostatnich dwóch sum odnosi się: pierwsza do miejsc $(a_\beta b_\beta)$, które spadają z $(x_\nu y_\nu)$, druga do tych miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$, które są różne od $(x_\nu y_\nu)$.

Obie sumy razem obejmują zatem **wszystkie** już miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$, a wskutek tego mamy:

$$(1) \qquad R(xy)=\sum_{\nu=1}^{l}[c_\nu \overset{0}{H}(x_\nu y_\nu,\ xy)+\sum_{n>0} n\,.\,c_{\nu n}\overset{n}{H}(x_\nu y_\nu,\ xy)]+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{\varrho} c_\alpha H(xy)_\alpha.$$

Ponieważ dalej:

$$n\,.\,\overset{n}{H}(x_\nu y_\nu,\ xy)=\frac{d}{dx}\Phi_\nu(xy)+\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[h_{an}H(xy)_\alpha-h'_{an}H'(xy)_\alpha]$$

[art. poprzedz. (5)], więc uwzględniając to w (1) dostajemy:

$$(2) \qquad R(xy)=\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu \overset{0}{H}(x_\nu y_\nu,\ xy)-\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[g'_\alpha H(xy)_\alpha-g_\alpha H'(xy)_\alpha]+$$
$$+\frac{d}{dx}\Phi(xy),$$

gdzie $\Phi(xy)$ jest funkcyą wymierną, a przy różniczkowaniu uwzględnić trzeba, że y zależy od x.

W takiej formie (2) przedstawić można zawsze daną funkcyą $R(xy)$. W niej spółczynniki c_ν mają — bez różnicy, czy

$(x_\nu y_\nu) = (a_\alpha b_\alpha)$, czy też $(x_\nu y_\nu) \neq (a_\alpha b_\alpha)$ — jednakowe znaczenie: (α), (α'). Z tego wynika, że:

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{l} c_\nu = 0,$$

bo to jest związek $S=0$ dla samej, danej funkcyi $R(xy)$.

Nazywając $H(xy)_\alpha$, $H'(xy)_\alpha$, $H(x_\nu y_\nu, xy)$ odpowiednio funkcyami H rodzaju pierwszego, drugiego i trzeciego, mamy twierdzenie:

I. *Oprócz formy (4) — art. 77. — istnieje jeszcze druga forma danej funkcyi $s=R(xy)$, składająca się: z pochodnej $\frac{d}{dx}\Phi(xy)$ i z wyrażenia jednorodnego liniowego mieszczącego w sobie ϱ funkcyj H rodzaju pierwszego, ϱ funkcyj H rodzaju drugiego i l funkcyj H rodzaju trzeciego, gdzie l jest ilością miejsc, na których $R(xy)$ staje się nieskończonością w dowolnych stopniach. Gdy c_ν są spółczynnikami funkcyj rodzaju trzeciego, to zawsze jest $\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu=0$.*

Podług (β) i (β') mamy $n.c_{\nu n}=\left[R(\overset{\nu}{x_t}\overset{\nu}{y_t})\frac{d\overset{\nu}{x_t}}{dt}\right]_{t^{-n-1}}=0$ bez różnicy czy $(x_\nu y_\nu)=(a_\alpha b_\alpha)$, czy też $(x_\nu y_\nu)\neq(a_\alpha b_\alpha)$; a że w formie (2) są wszystkie g_α jednorodnemi, liniowemi funkcyami spółczynników $c_{\nu n}$, więc stąd wynika:

II. *Gdy funkcya $R(xy)$ ma tę własność, że:*

$$\left[R(\overset{\nu}{x_t}\overset{\nu}{y_t})\frac{d\overset{\nu}{x_t}}{dt}\right]_{t^{-n-1}}=0,$$

dla $n>0$ i dla $\nu=1,2,\ldots,l$, to ją wyraża się formą, w którą oprócz $\frac{d}{dx}\Phi(xy)$ wchodzą tylko funkcye H pierwszego i trzeciego rodzaju).*

82. Całkowanie funkcyi s. Trzy rodzaje całek Abla. Funkcyę $J(xy)=\int R(xy)\,dx$, w której y uważać trzeba za zależne od x w ten sposób, że (x,y) ma być miejscem danego obrazu algebraicznego $f(xy)=0$ nazywają całką funkcyi algebraicznej o argumencie x — [art. 66. tw. I.], albo całką Abla. Gdy $(x_t y_t)$ jest jedną z par funkcyj otaczających dowolne miejsce (ab) tego obrazu,

*) Co do tego por. także: Raffy. *Recherches algébriques sur les intégrales Abéliennes. Ann. scient. de l'école N. sup.* T. 12. (S. 2.) (1883) str. 105—123.

to w parametrze t ma całka J w otoczenie tego miejsca i dla miejsc zawartych w $(x_t\, y_t)$ postać:

$$J(t) = \int R(x_t\, y_t)\, \frac{dx_t}{dt} . dt.$$

Jeżeli $R(x\, y)$ posiada już formę (2) — [art. poprzedz.] a miejsca $(x_\nu\, y_\nu)$ są wszystkie różne od miejsc $(a_\alpha\, b_\alpha)$, to w $J(t)$ zawierać się będą:

(*A*) całki $\int H(x_t\, y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt}\, dt = \int \varphi(t)_\alpha\, dt,\ \alpha = 1, 2, ..., \varrho$

(*B*) całki $\int H'(x_t\, y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt}\, dt = \int \psi(t)_\alpha\, dt,\ \alpha = 1, 2, ..., \varrho$

(*C*) całki $\int H(x_\nu y_\nu, x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}\, dt = \int \chi(t)_\nu\, dt,\ \nu = 1, 2, ..., l$

i wreszcie:

(*D*) całka $\int \frac{d}{dx} \Phi(x\, y)\, dx = \Phi(x\, y),$

która w otoczeniu rozważanego miejsca ma postać $\Phi(x_t\, y_t)$. Całki (*A*), (*B*), (*C*) nazywają się całkami Abla pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju.

Z własności funkcyj $H(x\, y)_\alpha$ — [(4), art. 75.] wynika:

I. *Każda całka rodzaju pierwszego pozostaje skończoną na każdem miejscu danego obrazu* $f = 0$.

Z własności (h'), [art. 73.], $(h_{\alpha\beta})$, $(h_{\alpha\alpha})$, [art. 74.] i (h_0) [art. 75.] funkcyj $H'(x\, y)_\alpha$ wnioskujemy:

II. *Całka* α^{ta} *rodzaju drugiego staje się w obrazie* $f = 0$ *nieskończonością w pierwszym tylko stopniu na jednem tylko miejscu* $(a_\alpha\, b_\alpha)$; *[miejsce to nie jest osobliwe, otacza je więc jedna tylko para funkcyj].*

Co się tyczy $H(x_\nu\, y_\nu,\ x_t\, y_t)\, \frac{dx_t}{dt}$, to wiadomo, że ten iloczyn posiada jedną jedyną odjemną potęgę t^{-1} wyłącznie w otoczeniu miejsc $(x_\nu\, y_\nu)$, $(a_0 b_0)$, a stąd wynika:

III. *Całka* ν^{ta} *rodzaju trzeciego staje się logarytmicznie nieskończoną na 2 miejscach:* $(x_\nu\, y_\nu)$, $(a_0 b_0)$; *zresztą pozostaje skończoną na każdem innem miejscu w danym obrazie* $f = 0$.

Weźmy pod uwagę bardzo prostą całkę:

(1) $$\int y\, dx = u + C$$

w obrazie $f(x\, y) = 0$ i przyjmijmy, że u ma być algebraiczną funkcyą argumentu x, że więc u, x związane są ze sobą pewnem algebraicznem, nieprzywiedlnem równaniem:

(2) $$\varphi(x, u) = 0.$$

Z niego — uwzględniając (1) — dostajemy:

$$\frac{du}{dx}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{dx}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}=S(x,u)=y,$$

gdzie $S(x,u)$ jest wymierną funkcyą pary (x,u).

W równaniu (2) — wskutek jego nieprzywiedlności — należą do bieżącego x same różne między sobą pierwiastki: $u_1, u_2, ..., u_r$. Tym pierwiastkom odpowiedzą wartości:

$$(3)\qquad \frac{du_1}{dx}=S(x,u_1),\ \frac{du_2}{dx}=S(x,u_2),\ ...,\ \frac{du_r}{dx}=S(x,u_r),$$

które — jak zaraz okażemy — muszą być w s z y s t k i e również między sobą r ó ż n e. Przyjmijmy bowiem, że

$$(4)\qquad \frac{du_\lambda}{dx}=\frac{du_\mu}{dx},\quad \lambda\gtrless\mu,$$

to stąd mamy: $u_\lambda=u_\mu+c$, a że u_μ jest dowolnym pierwiastkiem równania $\varphi=0$, więc stądby wynikało, że równanie to ma nieskończenie dużo pierwiastków: u_μ, $u_\mu+c$, $u_\mu+2c$, $u_\mu+3c$, ...*) Lecz to jest niemożliwe; założenie (3) jest fałszywe, a wartości (3) są w istocie między sobą różne. To wskazuje, że w równaniu $G\left(x,\frac{du}{dx}\right)=0$, jakieby powstało przez eliminacyę u z równań $\varphi=0$ i $\frac{du}{dx}=S(x,u)$, nie jest G potęgą funkcyi nieprzywiedlnej — [art. 60.] — ale jest wprost nieprzywiedlną funkcyą. Wtedy jednak daje się u wyrazić wymiernie przez x i $\frac{du}{dx}=y$.

Połóżmyż: $u=\overline{R}(x,y)$, to mamy ostatecznie:

$$\int y dx=\overline{R}(x,y)+C,$$

a to znaczy: G d y c a ł k a (1) m a d a ć w y n i k w p o s t a c i a l g e b r a i c z n e j u, t o u j e s t k o n i e c z n i e w y m i e r n ą f u n k c y ą p a r y (x,y).

Przejdźmy do ogólnego wypadku:

$$(5)\qquad \int R(xy)dx=u+C,$$

zakładając, że u ma być algebraiczną funkcyą argumentu x. Połóżmy $R(xy)=z$, to z równań $f(xy)=0$, $R(xy)-z=0$, eliminując y, dochodzimy do obrazu algebraicznego, $F(x,z)=0$, a w nim całka

*) Por. E. N e t t o: *„Substitutionen-Theorie“*, str. 189.

(5) ma postać $\int z dx = u + C$. Według dopieroco przeprowadzonego dowodu jest tu u wymierną funkcyą pary (x, z), a po uwzględnieniu podstawienia $z = R(xy)$ będzie już wymierną funkcyą pary (x, y). Stąd twierdzenie: *)

IV. *Każda całka Abla, mająca dać wynik w postaci algebraicznej funkcyi argumentu x, jest wymierną funkcyą pary (x, y).*

Przedstawmy i w tym razie całkowaną funkcyę $R(xy)$ przez funkcye H i odrzućmy potem z całki $J(xy) = \overline{R}(xy) + C$ funkcyę $\Phi(xy)$, która już postawionemu zadaniu zadość czyni, to i całkowanie pozostałych trzech rodzajów całek ma doprowadzić również do pewnej wymiernej funkcyi $T(xy)$ pary (x, y). Wskutek tego całka $J(xy)$ nie może w sobie zawierać całek rodzaju trzeciego, bo te dają punkta logarytmicznie nieskończone; wszystkie c_ν w formie (2) — [art. poprzedz.] — przedstawiającej $R(xy)$ muszą więc być zerami.

Pozostała całka

$$(6) \qquad \int [\Sigma g_\alpha H'(x_t y_t)_\alpha - \Sigma g'_\alpha H(x_t y_t)_\alpha] \frac{dx_t}{dt} dt = T(x_t y_t)$$

ma tylko ϱ punktów nieskończonościowych $(a_\alpha b_\alpha)$; funkcya $T(x_t y_t)$ musi się więc redukować do pewnej stałej C'. Nieskończoności wynikające z wszystkich ϱ całek drugiego rodzaju muszą odpaść a to wskazuje, że tu wszystkie g_α muszą być zerami. Z (6) pozostaje więc tylko związek: $-\Sigma g'_\alpha \int H(x_t y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt} dt = C'$. Ten po zróżniczkowaniu daje: $\Sigma g'_\alpha H(xy)_\alpha = 0$, a że taka relacya zajść tylko może wtedy, gdy wszystkie $g'_\alpha = 0$ [art. 75., tw. II.], więc stąd wynika:

V. *Funkcya $R(xy)$, której całka ma być wymierną funkcyą pary (xy), nie może zawierać żadnych funkcyj H i redukuje się do pochodnej $\frac{d}{dx}\Phi(xy)$ pewnej funkcyi wymiernej $\Phi(xy)$.*

---

*) Jestto twierdzenie Abla. Co do sposobu obliczania takich całek por. J. Ptaszycki: „O całkowaniu algebraicznem różniczek algebraicznych“. Prace mat.-fiz. T. I., str. 81. Do tego wypadku odnoszą się ciekawe uwagi L. Stickelbergera w rozprawie: *„Ueber einen von Abel aufgestellten .... Satz“*. C. J. T. 82., str. 45—46.

ROZDZIAŁ XI.

Nowa metoda obliczania rodzaju ϱ. Normalne formy funkcyj H.

83. Ogólna funkcya $H(x, y)$; jej normalna forma. Każda z funkcyj $H(xy)_\alpha$ ma własność:

$$(1) \qquad H(x_t y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt} = \mathfrak{P}_\alpha(t)$$

jakiekolwiek jest miejsce, otoczone parą $(x_t y_t)$. Przyjmijmy, że istnieje funkcya $H(xy)$, posiadająca również tę własność, i zauważmy funkcyę: $[H(xy).H(xy, x'y')] = T(xy)$. Założywszy, że otoczeniem miejsca $(x'y')$ jest para funkcyj $x'_t = x' + t$, $y'_t = y' + \mathfrak{P}(t)$, a otoczeniem każdego z miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$ para funkcyj $(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t)$, dostajemy:

$$H(x'_t y'_t)\frac{dx'_t}{dt} = H(x'y') + t\mathfrak{P}(t),$$

$$H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t)\frac{d\overset{\alpha}{x}_t}{dt} = h(a_\alpha b_\alpha) + t\mathfrak{P}(t),$$

a relacya $S=0$, [art. 76.], odnosząca się do funkcyi $T(xy)$ będzie tu takiej postaci:

$$H(x'y') = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} h(a_\alpha b_\alpha) H(x'y')_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} C_\alpha H(x'y')_\alpha.$$

To znaczy:

I. *Każda funkcya posiadająca charakterystyczną własność funkcyj $H(xy)_\alpha$ jest liniową, jednorodną funkcyą wszystkich ϱ funkcyj $H(xy)_\alpha$. Nazywają ją ogólną funkcyą $H(xy)$.*

Naodwrót każde liniowe jednorodne wyrażenie

$$[C_1 H(xy)_1 + C_2 H(xy)_2 + \ldots + C_\varrho H(xy)_\varrho]$$

będzie przy dowolnych wartościach stałych C_α posiadało własność (1); będzie więc ogólną funkcyą $H(xy)$. W niej jednak dowolnych stałych C_α nie podobna będzie wyznaczyć w ten sposób, aby $H(xy)=0$ na ϱ danych miejscach $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_\varrho y_\varrho)$. W takim razie bowiem musiałby być wyznacznik $D(H)$, albo wyznacznik $D(h)$, zerem, co jednak — [art. 77., tw. II.] — jest niemożliwe.

Z tego wynika:

II. *Ogólna funkcya $H(xy)$ będzie wyznaczona, gdy damy $(\varrho-1)$ miejsc dowolnych $(x_1 y_1)$, ..., $(x_{\varrho-1} y_{\varrho-1})$, na których ma być zerem i ϱ^{te} miejsce $(x_\varrho y_\varrho)$, na którem ma przybrać wartość $c \neq 0$.*

Całkę $\int H(xy)dx$ z ogólną funkcyą H nazywamy również całką rodzaju pierwszego. Ponieważ związek $\Sigma C_\alpha H(xy)_\alpha=0$ — [art. 75.] — nigdy zajść nie może — chyba, że wszystkie $C_\alpha=0$ — i ponieważ $H(xy)=\Sigma C_\alpha H(xy)_\alpha$, więc gdy

$$\int H(xy)dx=\Sigma C_\alpha \int H(xy)_\alpha dx,$$

to nigdy nie zajdzie związek:

$$\Sigma C_\alpha \int H(xy)_\alpha dx=c'=const.$$ To znaczy:

III. *Całki $\int H(xy)_\alpha dx$ są od siebie zawsze liniowo niezależne, t. j. związek $\Sigma C_\alpha \int H(xy)_\alpha dx=c'$ zajść może tylko tym sposobem, że wszystkie C_α i c' są zerami. Każda suma $\Sigma C_\alpha \int H(xy)_\alpha dx$ jest znowu całką rodzaju pierwszego.*

Przyjmijmy, że $f(x,y)=0$ jest już takim obrazem algebraicznym, który dla $x=\infty$ posiada same różne między sobą y, a do tego wszystkie te y są nieskończonościami. [Do takiego obrazu można zawsze dojść z dowolnie danego obrazu algebraicznego przez stosowne podstawienia art. 69]. W takim obrazie nie wyraża się y — gdy $x=\infty$ — ani jednym cyklicznym elementem, a we wszystkich punktach (cc'), ..., w których y wystąpi jako element cykliczny, będą c i c' zawsze skończone.

Gdy

$$(2) \qquad \overset{c}{x_t}=c+t^s, \quad \overset{c}{y_t}=c'+d_1 t^k+d_2 t^{k+\varepsilon}+..., \\ (s>1,\ k\geqq 1,\ \varepsilon\geqq 1),$$

jest jedną z par otaczających miejsce (c, c'), to — z uwagi na własność (1) — wnosimy, że f u n k c y a H — j e ż e l i n a m i e j s c u (cc') j e s t n i e s k o ń c z o n o ś c i ą — t o j e s t n i e s k o ń c z o n o ś c i ą w s t o p n i u $\leqq(s-1)$.

W nieskończoności mamy teraz zawsze $x_t=t^{-1}$, a że i tu własność (1) utrzymać się musi, więc stąd wynika: N a k a ż d e m m i e j s c u, l e ż ą c e m w n i e s k o ń c z o n o ś c i w o b r a z i e $f=0$ m u s i b y ć f u n k c y a H z e r e m p r z y n a j m n i e j w s t o p n i u $=2$; całkowity jej stopień znikania w nieskończoności będzie $\geqq 2n$.

Z tych uwag wynika, że funkcya $H(xy)$ ma punkta nieskończonościowe tylko w punktach rozgałęzienia, a jej stopień σ jest $\leqq\Sigma(s-1)$, gdzie suma odnosi się do w s z y s t k i c h par funkcyj otaczających wszystkie punkta rozgałęzienia, a więc zaczynających się od wykładnika $s>1$.*)

Lecz z drugiej strony można zawsze utworzyć funkcyę $\overline{H}(xy)$, która na miejscach $(c, c'), \ldots$ będzie dokładnie stopni $(s-1), \ldots$, a posiadać będzie również własność (1). W punktach (cc') ta własność — wskutek stopni $=(s-1)$ — utrzymuje się rzeczywiście. W skończoności poza punktami (cc') utrzyma się również. Co się tyczy nieskończoności, to gdy $\overline{H}(xy)$ przedstawimy formą:

$$\overline{H}(xy) = C_0 + \Sigma[c_0 H(xy, cc')_0 + c_1 H(xy, cc')_1 + \ldots + c_{s-2} H(xy, cc')_{s-2}],$$

[art. 77., (4)], dostajemy tu spółczynników $c_0, c_1, \ldots$ dokładnie w ilości $\Sigma(s-1)$, a więc więcej niż w danej funkcyi $H(xy)$. Tem łatwiej będzie tu zatem spełnić warunek, aby funkcya $\overline{H}(xy)$ na każdem z n miejsc $(\infty\,\infty)$ była zerem w stopniu 2^{gim}.

Taka funkcya $\overline{H}(xy)$, posiadając własność (1), da się znowu wyrazić formą:

$$\overline{H}(xy) = \overline{C}_1 H(xy)_1 + \overline{C}_2 H(xy)_2 + \ldots + \overline{C}_\varrho H(xy)_\varrho.$$

Za dobraniem tych samych dowolnych miejsc zerowych $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2), \ldots, (x_{\varrho-1} y_{\varrho-1})$, co w funkcyi $H(xy)$ i miejscą $(x_\varrho y_\varrho)$, na którem ma być $\overline{H}(x_\varrho y_\varrho) = H(x_\varrho y_\varrho)$ mieć będziemy identycznie: $\overline{H}(xy) = H(xy)$, a stąd wynika:

IV. *Ogólna funkcya $H(xy)$ jest stopnia $\sigma = \Sigma(s-1)$. Z tego nie wynika, aby każda ze szczególnych funkcyj $H(xy)_\alpha$ była w każdym z punktów (cc') nieskończonością o stopniu $=(s-1)$. Jedna z nich jednak przynajmniej musi być w (cc') tego stopnia.*

Spróbujmy ten stopień σ jeszcze inaczej wyrazić, zliczając wszystkie miejsca zerowe funkcyi $H(xy)$.

Nie naruszając osiągniętej już własności obrazu algebraicznego w nieskończoności, możemy — ponieważ punktów (cc') jest tylko skończona liczba — osiągnąć zawsze przez stosowne liniowe jednorodne podstawienia, że w otoczeniu każdego z punktów (cc') będzie się równanie $f(xy)=0$ w ten sposób zachowywało: Gdy

(3) $$f(c+\xi, c'+\eta) = \varphi(\xi\eta) = (\xi\eta)_\mu + (\xi\eta)_{\mu+1} + \ldots = 0,$$

a $$(\xi\eta)_\mu = (g\eta - h\xi)^\nu (g'\eta - h'\xi)^{\nu'} \ldots,$$

to ze spółczynników $g, h; g', h'; \ldots$ nie jest żaden zerem. Wtedy każda para funkcyj otaczająca miejsce (cc') ma tu postać:

*) To ograniczenie można zaniedbać i sumę odnieść do wszystkich par otaczających punkta, w których y równe przybiera wartości, bo z pary posiadającej $s=1$ dostaniemy: $(s-1)=0$. Takie wszystkie punkta x daje wyróżnik $D(x)=0$ równania $f=0$.

(4) $$\overset{c}{\xi}_t=t^s,\quad \overset{c}{\eta}_t=d_1t^k+d_2t^{k+\varepsilon}+\dots$$

gdzie $\varepsilon\geqq1$, a musi być $s=k$, bo stosunek $\left.\frac{\overset{c}{\eta}_t}{\overset{c}{\xi}_t}\right]_{t=0}$ musi być = albo $\frac{h}{g}$, albo $\frac{h'}{g'}$, ..., a te stosunki są wszystkie skończone i $\gtrless0$.*)

Weźmyż z par (4) jedną z tych par pod uwagę, która wzięła swój początek w czynniku $(g\eta-h\xi)^\nu$. Wtedy mamy:

(a) $$\frac{\overset{c}{\xi}_t}{\overset{c}{\eta}_t}=\frac{h}{g},\ \text{skończone i}\ \gtrless0,\quad s=k,$$

a $s=k\leqq\nu$ [por. uwagę w art. 57]. Zauważmy dalej pochodnę:

$$f(xy)_2=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{d\xi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}=(g\eta-h\varsigma)^{\nu-1}(\xi\eta)'_{\mu-\nu}+(\xi\eta)'_\mu+\dots$$

Gdy tu po pierwszej stronie wstawimy:

$$x=c+t^s,\quad y=c'+d_1t^k+\dots,\quad s=k,$$

a po drugiej stronie zą ξ, η parę (4), to dostaniemy — uwzględniając $s=k$:

$$f(\overset{c}{x}_t\overset{c}{y}_t)_2=C.t^{(s+\varepsilon)(\nu-1)+s(\mu-\nu)}+\dots.$$

Ponieważ $H(\overset{c}{x}_t\overset{c}{y}_t)=B.t^{-(s-1)}+\dots$, więc iloczyn

(5) $$f(xy)_2.\,H(xy)$$

zaczynać się będzie w otoczeniu punktu (cc') od wyrazu zawierającego parametr t z takim wykładnikiem:

(a) $$s(\mu-1)+\varepsilon(\nu-1)-(s-1).$$

Ten wykładnik jest z powodu $s\leqq\nu$ i $\varepsilon\geqq1$ dodatni i jest niezawodnie $\geqq s(\mu-1)$.

Z tego wynika, że iloczyn (5) jest skończonym we wszystkich punktach leżących w skończoności, a że w punktach (cc') ma wartość =zero, b e z w z g l ę d u n a g a ł ę z i e y p r z e z t e n p u n k t p r z e c h o d z ą c e, więc jest funkcyą wymierną całkowitą $G(xy)$ w obrazie $f=0$ [art. 70., tw. IV.]. Samą funkcyę $H(xy)$ wyrazić zatem można ilorazem $G(xy)/f(xy)_2$, a że na każdem miejscu w nieskończoności jest $H(xy)$ zerem stopnia przynajmniej drugiego, a pary funkcyj, otaczające każde takie miejsce, są w rozważanym obrazie postaci: $x=t^{-1}$, $y=a_kt^{-1}+b_0+b_1t+\dots$, $k=1,2,\dots,n$, więc stąd wynika, że dostatecznem jest, aby $G(xy)$ była funkcyą $(n-3)^{go}$ stopnia.

---

*) Punkta (cc') o cyklicznych y — $(s>1)$ — są zarazem wielokrotnymi.

Połóżmyż $G(xy)=G_{n-3}(xy)$, to mamy:

(6) $$H(xy)=\frac{G_{n-3}(xy)}{f'(xy)_2}.$$

Wróćmy do iloczynu: $f'(xy)_2 H(xy)=G_{n-3}(xy)$. Kładąc:

(7) $$G(c+\xi, c'+\eta)=[\xi\eta]_0+[\xi\eta]_1+[\xi\eta]_2+\dots,$$

mamy stąd w otoczeniu punktu (cc') dostać rozwinięcie z pierwszym wyrazem o wykładniku (α), większym od $s(\mu-1)$,

Że zaś $[\xi\eta]_q$ rozpoczyna się od t^{qs}, więc w (7) być musi identycznie:

(8) $$[\xi\eta]_0=[\xi\eta]_1=\dots=[\xi\eta]_{\mu-2}=0.$$

[Aby tak było musi zajść $\sum\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ warunków, gdzie suma odnosi się do wszystkich $\mu>1$, wynikających z przeprowadzenia równania $f=0$ do otoczeń punktów wielokrotnych].

Pytanie zachodzi, czy warunki (8) wystarczają, aby funkcya $G_{n-3}(xy)$ mogła już być licznikiem ogólnej funkcyi $H(xy)$? Aby na to odpowiedzieć, przyjmijmy, że celem uzyskania pary (2) dochodzimy przez podstawienia:

(a) $$x=(g+\alpha\eta_1)\xi_1,\quad y=(h+\beta\eta_1)\xi_1,\quad g\beta-h\alpha=1,$$

do przerobionego równania:

(b) $$f(xy)=\xi_1{}^{\mu}f_1(\xi_1\eta_1)=0,$$

w którem $f_1(\xi_1\eta_1)=(\xi_1\eta_1)_{\mu_1}+\dots$, a $\mu_1>1$.

Z (b) dostajemy:

(c) $$f'(xy)_1\frac{dx}{d\eta_1}+f'(xy)_2\frac{dy}{d\eta_1}=\xi_1{}^{\mu}f'_1(\xi_1\eta_1)_2;$$

że zaś $\frac{dx}{d\eta_1}=\alpha\xi_1$, $\frac{dy}{d\eta_1}=\beta\xi_1$, więc:

(d) $$\alpha.f'(xy)_1+\beta f'(xy)_2=\xi_1{}^{\mu-1}f'_1(\xi_1\eta_1)_2.$$

Z relacyi $dx.f'(xy)_1+dy.f'(xy)_2=0$ wynika:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{f'(xy)_2}=-\frac{\frac{dy}{dt}}{f'(xy)_1}=\frac{-\alpha.\frac{dy}{dt}+\beta\frac{dx}{at}}{\alpha f'(xy)_1+\beta f'(xy)_2},$$

a to wskutek (d) można tak napisać:

(e) $$\frac{\frac{dx}{dt}}{f'(xy)_2}=\frac{-\alpha\frac{dy}{dt}+\beta\frac{dx}{dt}}{\xi_1{}^{\mu-1}f'_1(\xi_1\eta_1)_2}.$$

Lecz z (a) dostajemy:

$$\frac{dx}{dt}=(g+\alpha\eta_1)\frac{d\xi_1}{dt}+\alpha\xi_1\frac{d\eta_1}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}=(h+\beta\eta_1)\frac{d\xi_1}{dt}+\beta\xi_1\frac{d\eta_1}{dt},$$

a te równania dają:

$$-\alpha\frac{dy}{dt}+\beta\frac{dx}{dt}=(g\beta-h\alpha)\frac{d\xi_1}{dt}=\frac{d\xi_1}{dt}.$$

Wskutek tego (e) napisać można w ten sposób:

$$(f)\qquad \frac{dx}{dt}\Big/f'(xy)_2=\frac{d\xi_1}{dt}\Big/\xi_1^{\mu-1}f_1(\xi_1\eta_1)_2.$$

Tak się przedstawia iloraz $\frac{dx}{dt}\Big/f'(xy)_2$ w zmiennych ξ_1, η_1, przerobionego równania. W tych zmiennych mieć będziemy:

$$f_1(\xi_1\eta_1)_2=(\xi_1\eta_1)_{\mu_1-1}+(\xi_1\eta_1)_{\mu_1}+\dots,\quad G_{n-3}(xy)=\xi_1^{\mu-1}\overline{G}(\xi_1\eta_1),$$

a stąd wynika, że:

$$(g)\qquad H(x_ty_t)\frac{dx_t}{dt}=\frac{\overline{G}(\xi_1\eta_1)}{(\xi_1\eta_1)_{\mu_1-1}+\dots}\frac{d\xi_1}{dt}.\ ^{*})$$

Tu — jak w pierwszym razie — wywnioskujemy, że $\overline{G}(\xi_1\eta_1)$ nie może zawierać wyrazów stopni: 0, 1, 2, ..., (μ_1-2), a odnosząc to dalej do wszystkich przerobionych równań, utworzonych dla wszystkich punktów (cc'), przechodzimy do przekonania, że $G_{n-3}(xy)=0$ musi być dołączoną krzywą $(n-3)^{go}$ stopnia.

Taką krzywę można — po zużyciu już d warunków, przypadających w punkta (cc') — przeprowadzić jeszcze przez:

$$\frac{(n-3).n}{2}-d=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-1=\varrho-1$$

punktów dowolnych $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$, ..., $(\xi_{\varrho-1}\eta_{\varrho-1})$, leżących na $f=0$, a gdy do jej wyznaczenia jeszcze nie dano tych punktów, to jej równanie będzie postaci:

$$(9)\qquad C_1G(xy)_1+C_2G(xy)_2+\dots+C_\varrho G(xy)_\varrho=0$$

o dowolnych stałych $C_1, C_2, \dots, C_\varrho$. Z uwagi zaś, że ogólna funkcya $H(xy)$ ma właśnie zawierać liniowo ϱ dowolnych stałych, wnioskujemy, że:

V. *Funkcya $H(xy)$ daje się przedstawić ilorazem, którego licznikiem*

---

*) Po prawej stronie jest $(\xi_1\eta_1)$ parą funkcyj, jaką w punkcie (cc') dla przerobionego równania dostajemy.

jest dołączona funkcya $(n-3)^{go}$ stopnia, a mianownikiem jest pochodna $f'(xy)_2$. *)

84. Nowa metoda obliczania rodzaju ϱ. Przykłady. Ponieważ wszystkich par funkcyj otaczających miejsce (∞, ∞) jest n, a każda z nich tak w x_t jak w y_t posiada jedyną ujemną potęgę t^{-1}, więc wstawiając je w formę (6) [art. poprzedz.], odrazu wnosimy, że $H(xy)$ ma w nieskończoności dokładnie $2n$ miejsc zerowych.

Co się tyczy jej miejsc zerowych, leżących w skończoności, to zauważmy, że krzywa $G_{n-3}(xy)=0$, przecinając krzywę $f=0$ w $(\varrho-1)$ dowolnych punktach $(x_1y_1), ..., (x_{\varrho-1}y_{\varrho-1})$, ma z nią jeszcze

$$n(n-3)-\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-1\right]-2d=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-1=\varrho-1$$

wspólnych dalszych punktów (zależnych już od obranych punktów). Z tego wynika, że w s z y s t k i c h miejsc zerowych funkcyi $H(xy)$ jest $(2n+2\varrho-2)$. Liczba ta oznacza zatem jej stopień σ, a że z drugiej strony mamy $\sigma=\Sigma(s-1)$, więc:

$$2n+2\varrho-2=\Sigma(s-1), \quad \text{a stąd:}$$

$$\text{(I)} \qquad \varrho=\frac{1}{2}\Sigma(s-1)-n+1.$$

Jestto nowa forma, za pomocą której obliczyć można rodzaj dowolnego obrazu algebraicznego, bo użyte transfornacye przerabiające dany obraz na taki, jaki tu wyżej wzięliśmy za podstawę, nie naruszają rodzaju. Lecz pokażemy, że takie przerabiania są przy obliczaniu rodzaju ϱ za pomocą formy (I) nawet zbyteczne. Przyjmijmy bowiem, że w danym dowolnie obrazie mamy między innemi parę funkcyj:

$$(1) \qquad x=t^{\varepsilon}\mathfrak{P}_1(t), \quad y=t^{\varepsilon'}\mathfrak{P}_2(t),$$

gdzie $|\varepsilon|>1$, a ε, ε' są albo równocześnie ujemne, albo jeden z tych wykładników jest ujemny. W tym razie mamy więc do czynienia z cyklicznym elementem y, odnoszącym się do miejsca w nieskończoności.

a) Połóżmy, gdy $\varepsilon<0$, $\varepsilon'>0$,

$$x=a+\frac{1}{\xi}, \quad y=y,$$

to w nowym obrazie algebraicznym $\varphi(\xi, y)=0$ parze (1) odpowie:

*) Elliot — *Ann. scient. de l'école. N. sup.* T. 5. (S. 2, 1876), str. 399—444 — szuka formy funkcyi G_{n-3}, opierając się na badaniach Halphen'a.

$$\xi = \frac{1}{t^{\varepsilon}\mathfrak{P}_1(t) - a} = t^{|\varepsilon|}\mathfrak{P}_1'(t),\ y = t^{\varepsilon'}\mathfrak{P}_2(t).$$

Stąd — ponieważ tu już obydwa wykładniki $|\varepsilon|$, ε' są dodatnie — wynika, że s trzeba tu wziąć w znaczeniu $|\varepsilon|$.

β) Gdy będzie $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' < 0$, to po podstawieniu:

$$x = x,\quad y = b + \frac{1}{\eta}$$

dojdziemy do wniosku, że s trzeba tu wziąć w znaczeniu ε.

γ) Gdy wreszcie okazuje się $\varepsilon < 0$, $\varepsilon' < 0$, to za podstawieniem:

$$x = a + \frac{1}{\xi},\quad y = b + \frac{1}{\eta}$$

dojdziemy do równania $\varphi(\xi\ \eta) = 0$, a w niem parze (10) odpowie para postaci:

$$\xi = t^{|\varepsilon|}.\mathfrak{P}_1'(t),\quad \eta = t^{|\varepsilon'|}\mathfrak{P}_2'(t).$$

Tu $|\varepsilon|$, $|\varepsilon'|$ są dodatnie, a więc s wziąć trzeba w znaczeniu $|\varepsilon|$.

Formę (I) można jeszcze podać w innej postaci. Jeżeli bowiem na miejscu $x = c$ występują cykliczne elementa y, a mamy tam n' par:

$$\begin{pmatrix} x = c + t^{s_1} \\ y = \varphi_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x = c + t^{s_2} \\ y = \varphi_2(t) \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} x = c + t^{s_{n'}} \\ y = \varphi_{n'}(t) \end{pmatrix}$$

to n' musi być $< n$, gdzie n jest stopniem równania w zmiennej y, ale w każdym razie $(s_1 + s_2 + \dots + s_{n'}) = n$. Wskutek tego mamy na tem miejscu $(s_1 - 1) + (s_2 - 1) + \dots + (s_{n'} - 1) = n - n'$ a przy takich oznaczeniach dostajemy:

$$\text{(II)} \qquad \varrho = \frac{1}{2}\sum (n - n') - n + 1,$$

gdzie sumę odnieść trzeba do wszystkich par funkcyj występujących na każdem miejscu x, które jest pierwiastkiem wyróżnika $D(x) = 0$ [art. 59.].

Pd. 1. Równanie $y^2 = C.(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_m)$ posiada w skończoności cykliczne elementa funkcyi y jedynie w punktach a_λ, $\lambda = 1, 2, \dots, m$. Te elementa wynikają z par funkcyj postaci: $[x = a_\lambda + t^2,\ y = c_\lambda t + d_\lambda t^2 + \dots]$ w każdym takim punkcie mamy $n' = 1$, a że tu n, stopień równania w (y) jest $= 2$, więc z tych punktów mamy: $\sum_{\lambda=1}^{m}(2 - 1) = m$.

W otoczeniu $x = \infty$ dostajemy:

$$y^2 = C.x^m\left(1 - \frac{a_1}{x}\right)\left(1 - \frac{a_2}{x}\right)\dots\left(1 - \frac{a_m}{x}\right),\ \text{a więc } y = \pm x^{\frac{m}{2}}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

co — gdy m jest parzyste — można przedstawić przez dwie pary funkcyj:

$$[x=t^{-1},\ y=+t^{-\frac{m}{2}}\mathfrak{P}(t)],\ [x=t^{-1},\ y=-t^{-\frac{m}{2}}\mathfrak{P}(t)].$$

Ten punkt daje więc $n-n'=0$, a w tym razie z formy (II) dostajemy:

$$(a)\qquad \rho=\frac{m-2}{2}$$

W razie nieparzystego m przedstawić można otoczenie miejsca $x=\infty$ jedną tylko parą $[x=t^{-2},\ y=t^{-m}\mathfrak{P}(t^2)]$, bo z niej — z pówodu $t=\pm x^{-\frac{1}{2}}$ — wynikają już obydwa cykliczne elementa y. Punkt $x=\infty$ daje tu $n-n'=1$, a więc

$$(b)\qquad \rho=\frac{m-1}{2}\quad \text{art. 71.}].$$

Pd. 2. W równaniu $g_0(x).y^2+g_1(x)y+g_2(x)=0$, w którem g_0, g_1, g_2 są całkowite wymierne i niewspółmierne funkcye, dostajemy:

$$y=\frac{-g_1+\sqrt{g_1^{\,2}-4g_0g_2}}{2g_0}$$

(z uwzględnieniem dwuwartościowości pierwiastka). Przyjmijmy, że $g_1^{\,2}-4g_0g_2=[G_1(x)]^2.G(x)$, zawiera zatem całkowitą funkcyę G_1 w kwadracie, to wtedy mamy:

$$y=\frac{-g_1+G_1\sqrt{G(x)}}{2g_0}.$$

Połóżmy $x=\xi$, $y=\dfrac{-g_1+G_1.\eta}{2g_0}$, które to podstawienie jest odwracalne, a więc nie narusza rodzaju, i przyjmijmy, że: $G(\xi)=C.(\xi-a_1)(\xi-a_2)\dots(\xi-a_m)$, to dojdziemy do równania $\eta^2=G(\xi)$, skąd wnosimy, że dany obraz algebraiczny ma rząd (a), lub (b) obliczony w Pd. 1.

Pd. 3. Obliczyć podług wzoru II. rząd $\rho=0$ równania $ay^2+bx^4+by^5=0$ — [art. 70. Pd. 3.].

Pd. 4. Okazać, że krzywa $x+x^3+y^3=0$ ma defekt $\rho=1$ — [art. 70. Pd. 4.].

Pd. 6. Rodzajem krzywej $y^3=\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$ jest $\rho=2$.— [art. 70. Pd. 6].

85. Forma funkcyi $H(xy)$ w dowolnym obrazie algebraicznym. Forma (6) — art. 83. — jaką przedstawiliśmy funkcyę ogólną $H(xy)$ dla obrazu $f=0$ pozbawionego cyklicznych elementów y w nieskończoności, utrzyma się i wtedy, kiedy obraz algebraiczny dany będzie bez wszelkich zastrzeżeń. Założenie (a) art. poprzedz. o parach funkcyj otaczających punkta (cc') o skończonych c, c' możemy zatrzymać bez ujmy ogólności. Jeżeli i tu $H(xy)$ ma być nieskończonością dokładnie stopnia $(s-1)$ w każdym punkcie rozgałęzienia (cc'), o skończonych c, c', to iloczyn $f'(xy)_2\,H(xy)$ będzie — [wskutek wykładnika (a), — art. poprzedz.] — niezawodnie całkowitą wymierną funkcyą $G(xy)$ taką, że $G(xy)=0$ w każdym z punktów $(c\,c')$ zachowywać się musi, jak dołączona krzywa, a sama funkcya H mieć będzie postać $H(xy)=\frac{G(x\,y)}{f(x\,y)_2}$.

Przejdźmy do miejsc danego obrazu leżących w nieskończoności. Bez różnicy, czy takie miejsce ma być osobliwe czy nie, trzeba — jeżeli w równaniu $f=0$ wyrazy najwyższego stopnia, $(x\,y)_n$ zawierają czynnik $(gy-hx)^\nu$ — położyć:

$$x=(g+\alpha\eta_1)\frac{1}{\xi_1},\ y=(h+\beta\eta_1)\frac{1}{\xi_1},\ g\beta-h\,\alpha=1.$$

Przez to przejdziemy do równania przerobionego:

$$f(xy)=\xi_1^{-n}.f_1(\xi_1\eta_1)=\xi_1^{-n}\,[(\xi_1\eta_1)_\mu+\ldots]=0,\ \mu\geqq1.$$

Utwórzmy: $f(x\,y)_1\frac{dx}{d\eta_1}+f(xy)_2\frac{dy}{d\eta_1}=\xi_1^{-n}.f_1(\xi_1\eta_1)_2$

i zauważmy, że: $\frac{dx}{d\eta_1}=\alpha.\frac{1}{\xi_1},\ \frac{dy}{d\eta_1}=\beta\frac{1}{\xi_1},$

to gdy tu dalej zastosujemy tok rozumowania, jaki mieliśmy w (d)—(e)—(f)—(g) — [art. 83.] — dostaniemy związek:

$$(1)\qquad H(x_ty_t)\frac{dx_t}{dt}=-\frac{\xi_1^{-q}\,\overline{G}(\xi_1\eta_1)}{\xi_1^{-n+3}f_1(\xi_1\eta_1)_2}\frac{d\xi_1}{dt},$$

gdzie q jest stopniem funkcyi $G(x\,y)$.

Przyjmijmy $q=n-3$, to dalej — ponieważ równanie $f_1(\xi_1\eta_1)=0$ ma w otoczeniu punktu $(\xi_1\eta_1)=(00)$ same pary funkcyj:

$$[\xi_1=t^s,\ \eta_1=t^k\,\mathfrak{P}(t)]$$

o dodatnich wykładnikach s, k — potrzeba, aby — bez względu na $s\gtreqless k$ — w

$$\overline{G}(\xi_1\eta_1)=[\xi_1\eta_1]_0+[\xi_1\eta_1]_1+[\xi_1\eta_1]_2+\ldots$$

koniecznie $(\mu-1)$ początkowych funkcyj $[\xi_1\eta_1]_0$, $[\xi_1\eta_1]_1$,... identycznie znikało*). To samo rozumowanie odnieść trzeba do wszelkich przerobionych równań**). Z drugiej strony iloczyn (1) ma zawierać liniowo jednorodnie ϱ dowolnych spółczynników, że zaś właśnie dołączona funkcya G_{n-3}, a nie inna, może to spowodować, więc mamy twierdzenie:

I. *W najdowolniejszym obrazie algebraicznym można funkcyi $H(xy)$ dać postać:*

$$(A)\qquad H(x\,y)=\frac{G_{n-3}(x\,y)}{f(x\,y)_2},$$

*) O tem przekonać się można, zakładając, że $\overline{G}(\xi_1\eta_1)$ zaczyna się od $[\xi_1\eta_1]_{\mu-2}$.

**) a nawet do punktów (cc') leżących w skończoności przez co stajemy na zupełnie ogólnem stanowisku.

gdzie $G_{n-3}=0$ *jest dołączoną krzywą* $(n-3)^{go}$ *stopnia, a* $f(xy)_2$ *pochodną funkcyi* $f(xy)$ *względem* y.

Pd. 1. W obrazie hypereliptycznym (lub eliptycznym):

$$y^2=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)$$

określi się dołączona krzywa $(m-3)^{go}$ stopnia równaniem:

$$c_{m-3}+c_{m-4}x+c_{m-5}x^2+\dots+c_r x^{m-r-3}=0,$$

które z form art. 71. dostajemy odrzucając tam w (4) $(\xi\eta)_{n-2}$, przy $n=m$, a potem przechodząc do relacyi (5) tegoż artykułu, $r=\frac{m}{2}-1$, albo $=\frac{m-3}{2}$, według tego czy m jest parzyste czy nieparzyste.

W obydwu wypadkach jest $m-r-3=\rho-1$, a więc będzie:

$$(a)\qquad H(xy)=C_1\frac{1}{y}+C_2\frac{x}{y}+C_3\frac{x^2}{y}+\dots+C_\rho\frac{x^{\rho-1}}{y},$$

bo tu $f(xy)_2=2y$. Jako system zasadniczych funkcyj $H(xy)_\alpha$ można tu wziąć funkcye:

$$(\alpha)\qquad H(xy)_\alpha=\frac{x^{\alpha-1}}{y},\quad \alpha=1,2,\dots,\rho.$$

Uwzględniając obliczony rząd ρ, mamy $m=2\rho+2$, albo $m=2\rho+1$, skąd wynika, że m jest w każdym razie $>\rho$. Wybierzmyż z iloczynu:

$$(b)\qquad R(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)$$

dowolnych ρ czynników $(x-a_{k_1})$, $(x-a_{k_2})\dots$, $(x-a_{k_\rho})$ i połóżmy:

$$(c)\qquad P(x)=(x-a_{k_1})(x-a_{k_2})\dots(x-a_{k_\rho}),$$

to nadając w (a) stałym C_s takie wartości $C_s^{(\alpha)}$, $s=1,2,\dots,\rho$, że:

$$C_1^{(\alpha)}+C_2^{(\alpha)}x+C_3^{(\alpha)}x^2+\dots+C_\rho^{(\alpha)}x^{\rho-1}=\frac{P(x)}{(x-a_{k_\alpha})}$$

dostajemy nowy system różnych między sobą funkcyj:

$$(\beta)\qquad \frac{P(x)}{y(x-a_{k_\alpha})},\quad \alpha=1,2,\dots,\rho,$$

a te znowu można wziąć za nowy system zasadniczych funkcyj $H(xy)_\alpha$. Jak się zachowują funkcye (α), a jak funkcye (β) w punktach $(a_1 0)$, $(a_2,0)$, ..., $(a_m 0)$?

Pd. 2. Równanie:

$$(a)\qquad y^3=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$$

jest stopnia 5^{go}, ma rodzaj $\rho=2$, a w nieskończoności posiada punkt dwukrotny $(w=2)$, i punkt trzykrotny, $(w=3)$, bez dalszych złożeń [Pd. 6. art. 70.]. Gdy dołączona krzywa stopnia 2^{go} ma mieć postać:

$$G_2=a_0+(xy)_1+(xy)_2=a_0+(b_0x+b_1y)+(c_0x^2+c_1xy+c_2y^2)=0,$$

to za podstawieniem $x=\frac{\eta}{\xi}$, $y=-\frac{1}{\xi}$, które przerabia równanie (a) na równanie z najniższym wymiarem $w=2$, dostajemy:

$$a_0\xi^2+\xi(\eta_1,-1)+(\eta_1,-1)_2=0,$$

a że tu ma być $w=1$, więc być musi $c_2=0$, Mamy więc:

$$G_2=a_0+(xy)_1+(c_0x^2+c_1xy)=0.$$

Podstawmy $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi}$, przez co dostajemy z (a) równanie o $w = 3$, to otrzymamy:

$$a_0 \xi^2 + \xi(b_0 + b_1 \eta) + (c_0 + c_1 \eta) = 0,$$

a że tu ma być $w = 2$, więc trzeba założyć $b_0 = c_0 = c_1 = 0$ a wtedy ostatecznie dostaniemy: $G_2 = a_0 + b_1 y$. Z równania (a) mamy $f(xy)_2 = 3y^2(x-c)(x-d)$; skutkiem tego będzie:

$$H(xy) = C_1 \cdot \frac{1}{y^2(x-c)(x-d)} + C_2 \cdot \frac{1}{y(x-c)(x-d)}$$

a systemem zasadniczych funkcyj $H(xy)_\alpha$ jest tu:

$$H(xy)_\alpha = \frac{1}{(x-c)(x-d)\, y^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Jak się te funkcye zachowają w punktach $(a, 0)$, $(b, 0)$, (c, ∞), (d, ∞)?

86. Normalne formy funkcyj $H'(xy)_\alpha$, $H(xy, x'y')$. Każda funkcya $H'(xy)_\alpha$ drugiego rodzaju posiada — jak wiadomo — takie własności:

$$a) \quad H'(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t})_\alpha \frac{d\overset{\alpha}{x_t}}{dt} = -t^{-2} + t\,\mathfrak{P}_\alpha(t),$$

$$b) \quad H'(\overset{\beta}{x_t}\overset{\beta}{y_t})_\alpha \frac{d\overset{\beta}{x_t}}{dt} = t\,\mathfrak{P}_\beta(t), \quad \beta = 1, 2, \ldots, (\alpha-1), (\alpha+1), \ldots, \varrho,$$

$c)$ Na każdem innem miejscu rozwija się iloczyn $H'(x_t y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt}$ na zwykły szereg potęgowy.

Przyjmijmy, że istnieje jeszcze druga funkcya $\overline{H}'(xy)_\alpha$, która — gdy zatrzymamy miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho$, wraz z ich znaczeniem — posiada również własności $a)$, $b)$, $c)$. Wtedy różnica $[H'(x_t y_t)_\alpha - \overline{H}'(x_t y_t)_\alpha] \frac{dx_t}{dt}$, rozwijając się na każdem miejscu bez wyjątku na zwykły szereg potęgowy, musi być $= H(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}$, a $H(xy)_\alpha - \overline{H}'(xy)_\alpha = H(xy)$.

Lewa strona jest tu zerem na dowolnych $(\varrho-1)$ miejscach $(a_\beta b_\beta)$, $\beta = 1, 2, \ldots, (\alpha-1), (\alpha+1), \ldots, \varrho$ i jeszcze na dowolnem ϱ^{tem} miejscu. Tego jednak od żadnej funkcyi $H(xy)$ żądać nie można [art. 83. tw. II.], a stąd wynika, że identycznie być musi:

$$H'(xy)_\alpha = \overline{H}'(xy)_\alpha, \quad \text{co znaczy:}$$

I. *Każda funkcya $H'(xy)_\alpha$, gdy dane są wszystkie ϱ miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$, jest całkiem oznaczona przez swe własności a), b), c). [Te własności są więc charakterystyczne].*

Niechże w dowolnie danym obrazie algebraicznym $f = 0$, rodzaju ϱ — dany będzie punkt $(a_\alpha b_\alpha)$, a w nim styczna do krzywej $f = 0$ niech posiada równanie:

*

$$(1) \qquad A_\alpha x + B_\alpha y + C_\alpha = 0.$$

$G_{n-2}(xy)=0$ niech będzie równaniem dołączonej krzywej $(n-2)^{go}$ stopnia, przechodzącej przez $(n-2)$ punktów, w których styczna (1) przecina — poza punktem $(a_\alpha b_\alpha)$ — krzywę $f=0$. Utwórzmy wyrażenie:

$$(2) \qquad u(x\,y) = \frac{G_{n-2}(x\,y)}{(A_\alpha x + B_\alpha y + C_\alpha) f'(x\,y)_2},$$

to o niem — (podobnie, jak o ilorazie $[G_{n-3}(x\,y) : f'(x\,y)_2]$) — da się udowodnić, że:

$$u(x_t\,y_t)\,\frac{dx_t}{dt} = \mathfrak{P}(t)$$

w otoczeniu każdego dowolnego punktu $(x\,y)$ leżącego poza $(a_\alpha b_\alpha)$ w skończoności lub nieskończoności.

Do wyznaczenia krzywej $G_{n-2}=0$ zużyto już $d+(n-2)$ warunków; można więc jeszcze dla niej wybrać dowolnie:

$$(3) \qquad \frac{(n-2)(n+1)}{2} - d - (n-2) = \varrho$$

punktów, co znaczy, że G_{n-2} będzie zawierać jeszcze $(\varrho+1)$ dowolnych spółczynników. Połóżmyż:

$$(4) \qquad G_{n-2}(x\,y) = c_1 G'_{n-2}(x\,y) + c_2 G''_{n-2}(x\,y) + \dots + c_{\varrho+1} G_{n-2}^{(\varrho+1)}(x\,y),$$

to możemy dalej, w celu wyznaczenia stałych $c_1, c_2, \dots, c_{\varrho+1}$, założyć

$$(5) \qquad G_{n-2}(a_\beta b_\beta) = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, (\alpha-1), (\alpha+1), \dots, \varrho.$$

Gdy $u(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t)\,\dfrac{d\overset{\alpha}{x}_t}{dt} = \dfrac{g_0(c_1 c_2 \dots c_{\varrho+1}) + g_1(c_1 c_2 \dots c_{\varrho+1})\,t + \dots}{k_0 t^2 + k_1 t^3 + \dots}$ a zażądamy, aby:

$$(6) \qquad g_0(c_1 c_2 \dots c_{\varrho+1}) = -k_0,$$

to przez (5) i (6) mamy funkcyę $G_{n-2}(x\,y)$ już w zupełności wyznaczoną, a iloraz $u(x\,y)$ posiada wszystkie charakterystyczne własności funkcyi $H'(x\,y)_\alpha$; jest więc [tw. I.] funkcyą $H'(x\,y)_\alpha$. Połóżmy:

$$\frac{G_{n-2}^{(v)}(x\,y)}{(A_\alpha x + B_\alpha y + C_\alpha) f'(xy)_2} = H'(x\,y)_{\alpha v}, \quad v = 1, 2, \dots, \varrho+1,$$

to ogólna funkcya $H'(x\,y)_\alpha$, t. j. taka, w której punkt nieskończonościowy $(a_\alpha b_\alpha)$ jest dany, a punkta zerowe $(a_\beta b_\beta)$ można dowolnie wybierać, określi się formą:

$$H'(x\,y)_\alpha = c_1 H'(x\,y)_{\alpha 1} + c_2 H'(x\,y)_{\alpha 2} + \dots + c_{\varrho+1} H'(x\,y)_{\alpha,\varrho+1}.$$

Stąd twierdzenia:

II. *Niezależnych od siebie funkcyj $H'(x\,y)_\alpha$ — albo całek rodzaju drugiego — z tem samem miejscem nieskończonościowem $(a_\alpha b_\alpha)$ jest* *w obrazie algebraicznym rodzaju* ϱ, *dokładnie* $(\varrho+1)$. *Liniowe jednorodne wyrażenie* $(\varrho+1)$ *funkcyj* H' *nie może być zerem, a takież wyrażenie całek nie może być* $=const.$

III. *Każda funkcya drugiego rodzaju* $H'(x\,y)_\alpha$ *da się sprowadzić do postaci:*

$$(B) \qquad H'(x\,y)_\alpha = \frac{G_{n-2}(x\,y)}{(A_\alpha x + B_\alpha y + C_\alpha)\,f(x\,y)_2},$$

w której $A_\alpha x + B_\alpha y + C_\alpha = 0$ *określa styczną* t_α *do krzywej* $f=0$ *w jej punkcie* $(a_\alpha\, b_\alpha)$, *a* $G_{n-2}=0$ *określa dołączoną krzywę, która trafia* $f=0$ *w tych* $(n-2)$ *punktach, w których* t_α *przecina się z* $f=0$ *poza* $(a_\alpha\, b_\alpha)$.

Zauważmy funkcyę $\tilde{H}(x_\nu y_\nu, x'y')$, któraby jako funkcya zmiennych $(x'y')$ posiadała takie własności, jak funkcya $H(x_\nu\, y_\nu,\, x'\,y')$. Własności te są:

$$a) \quad \tilde{H}(x_\nu y_\nu \overset{\nu}{x}_t \overset{\nu}{y}_t)\frac{d\overset{\nu}{x}_t}{dt} = \frac{1}{t} + \mathfrak{P}_\nu(t) \quad - \text{ [art. 73.]}.$$

$$b) \quad \tilde{H}(x_\nu y_\nu\, \overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t)\frac{d\overset{\alpha}{x}_t}{dt} = t\,.\,\mathfrak{P}_\alpha(t) \quad - \text{ [art. 74.]}.$$

$$c) \quad \tilde{H}(x_\nu y_\nu\, \overset{0}{x}_t \overset{0}{y}_t)\frac{d\overset{0}{x}_t}{dt} = -\frac{1}{t} + \mathfrak{P}_0(t) \quad - \text{ [art. 75.]},$$

$$d) \quad \tilde{H}(x_\nu y_\nu x'_t\, y'_t)\frac{dx'_t}{dt} = \mathfrak{P}'(t),$$ gdzie $(x'\,y')$ jest różnem miejscem od miejsc $(x_\nu\, y_\nu)$, $(x_\alpha\, y_\alpha)$, $(a_0 b_0)$. Przez taką funkcyę $\tilde{H}(x_\nu y_\nu\; x'\,y')$ można będzie zastąpić $H(x_\nu y_\nu,\, x'\,y')$ w całce trzeciego rodzaju, całka ta bowiem nie traci przez to swych charakterystycznych własności.

Zatrzymując miejsca $(x_\nu\, y_\nu)$, $(a_\alpha b_\alpha)$, $(a_0\, b_0)$, przyjmijmy, że mamy jeszcze drugą funkcyę $\tilde{H}'(x_\nu\, y_\nu\; x'\,y')$, posiadającą również własności *a*), *b*), *c*), *d*). Wtedy i tu, tem samem rozumowaniem, co o funkcyi $H'(x\,y)_\alpha$, dojdziemy do wniosku, że identycznie być musi $\tilde{H}'(x_\nu y_\nu, x'y') = \tilde{H}(x_\nu\, y_\nu,\, x'\,y')$, a to znaczy:

IV. *Własności a), b), c), d) są charakterystyczne dla funkcyi* $H(x_\nu y_\nu,\, x'\,y')$.

Niech $Ax' + By' + C = 0$ będzie równaniem prostej p, która przechodzi przez obrane punkta $(x_\nu\, y_\nu)$, $(a_0 b_0)$ krzywej $f=0$. Jej dalsze punkta przecięcia się z krzywą $f=0$ niech będą $(\xi_k\, \eta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, (n-2)$. $G_{n-2}(x'\,y') = 0$ niech będzie równaniem dołączonej krzywej $(n-2)^{go}$ stopnia, przechodzącej przez wszystkie punkta $(\xi_k\, \eta_k)$. Zauważmy iloraz:

$$u_\nu(x'\,y') = \frac{G_{n-2}(x'\,y')}{(Ax' + By' + C)\cdot f(x'\,y')_2}$$

Gdy położymy:

$$(7)\qquad G_{n-2}(x'\,y')=\sum_{\nu=1}^{\varrho+1} c_\nu\, G_{n-2}^{(\nu)}(x'\,y'),$$

a stałe c_ν tak wyznaczymy, że:

$$(8)\qquad G_{n-2}(a_\alpha b_\alpha)=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,\varrho,$$

to iloraz $u_\nu(x'\,y')$ będzie już miał własności *b)*, *d)*, a jego rozwinięcia w otoczeniach punktów $(x_\nu\,y_\nu)$, $(a_0 b_0)$ poczynać się będą od wyrazów $C\,t^{-1}$, $C'\,t^{-1}$, gdzie jednak równość $C=C'$ musi się sama z siebie spełnić, bo $u_\nu(x'\,y')$ ma zadość uczynić relacyi $S=0$. [art. 76.]. Dołączmyż — gdy:

$$u_\nu(\overset{\nu}{x_t}\,\overset{\nu}{y_t})\frac{d\overset{\nu}{x_t}}{dt}=\frac{g_0(c_1c_2\ldots c_{\varrho+1})+\ldots}{k_0t+k_1t^2+\ldots}\;-$$

do warunków (8) jeszcze warunek:

$$(9)\qquad g_0(c_1c_2\ldots c_{\varrho+1})=-k_0,$$

to warunkami (8), (9) będzie funkcya G_{n-2} już w zupełności wyznaczona, a iloraz u_ν jest, podług tw. IV., funkcyą $\tilde{H}(x_\nu y_\nu,\, x'\,y')$.

Stąd twierdzenia:

V. *Niezależnych od siebie funkcyj $\tilde{H}(x_\nu y_\nu,\, x'\,y')$ z temi samemi miejscami nieskończonościowemi $(x_\nu\, y_\nu)$, $(a_0\, b_0)$ — albo całek trzeciego rodzaju z tymi samymi punktami logarytmicznymi — jest w obrazie algebraicznym rodzaju ϱ, dokładnie: $(\varrho+1)$.*

VI. *Każdą funkcyą $\tilde{H}(x_\nu y_\nu,\, x'\,y')$ przedstawić można w postaci:*

$$(C)\qquad \tilde{H}(x_\nu y_\nu,\, x'\,y')=\frac{G_{n-2}(x'\,y')}{(Ax'+By'+C)\,.\,f(x'\,y')_2},$$

gdzie $Ax'+By'+C=0$ określa prostę p przechodzącą przez punkta dane $(x_\nu y_\nu)$, $(a_0 b_0)$, a $G_{n-2}(x'\,y')=0$ jest dołączoną krzywą $(n-2)^{go}$ stopnia przechodzącą przez dalszych $(n-2)$ punktów przecięcia się prostej p z krzywą $f=0$.

Uwaga. Za opuszczeniem warunku (6), lub (9) daje forma (B) funkcyę $MH'(xy)_\alpha$, a forma (C) funkcyą $M\tilde{H}(x_\nu y_\nu\, x'\,y')$ z dowolnym spółczynnikiem M.

87. Inne normalne formy funkcyj $H'(x\,y)_\alpha$, $H(x\,y,\, x'\,y')$. Przykłady. Zamiast form (B), (C) — art. poprzedz. — użyć można jeszcze innych. Łatwo bowiem — sposobem użytym w ostatnich ustępach — da się udowodnić:

I. *Gdy proste: $x'-x_\nu=0$, $x'-a_0=0$ przecinają krzywę $f=0$ poza punktami $(x_\nu\, y_\nu)$, $(a_0 b_0)$ jeszcze w punktach $(x_\nu\, \eta_k)$, $(a_0\, \eta'_k)$, $k=1,2,\ldots,(n-1)$,* *a* $G_{n-1}(x' y')=0$ *określa dołączoną krzywę* $(n-1)^{go}$ *stopnia, która przez punkta* $(x_\nu \eta_k)$, $(a_0 \eta'_k)$ — *i przez pnnkta* $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha=1,2,\ldots,\varrho$, *przechodzi, to:*

$$(C') \qquad \frac{G_{n-1}(x' y')}{(x'-x_\nu)(x'-a_0)f(x'y')_2}=M.\tilde{H}(x_\nu y_\nu,\ x' y').$$

II. *Przyjmijmy tu:* $(x_\nu\, y_\nu)=(a_0 b_0)=(a_\alpha b_\alpha)$, *to szeregi punktów* (x_ν, η_k), (a_0, η'_k) *stają się identyczne, a gdy* $G_{n-1}(x' y')=0$ *poddamy warunkom:*

$$(\alpha) \qquad G_{\nu-1}(x_\nu \eta_k)=0,\ [G_{n-1}(\overset{\nu}{x_t} \overset{k}{\eta_t})]_t=0,\ k=1,2,\ldots,(n-1),$$

$$(\beta) \qquad G_{n-1}(a_\beta b_\beta)=0,\ \beta=1,2,\ldots,(\alpha-1),(\alpha+1),\ldots,\varrho,$$

to otrzymamy:

$$(B') \qquad \frac{G_{n-1}(x' y')}{(x'-a_\alpha)^2 f(x' y')_2}=M.H'(x' y')_\alpha.$$

Uwaga 1. Gdy ma być $M=1$, to w (B'), i (C') trzeba jeszcze po jednym warunku spełnić.

Uwaga 2. Każdą z form (A) — [art. 85.] — (B), (C) — art. 86. — (B'), (C') uważać trzeba za normalną [por. art. 66.].

Jeżeli w (C') założymy, że $(x_\nu y_\nu)$ ma być bieżącem miejscem $(x y)$, a za $(x y)$ pisać będziemy $(x' y')$, to licznik w (C') da się w ten sposób utworzyć: Niech $f(x' y')=\Sigma A.x'^\lambda y'^\mu=0$, a prosta $x'-x=0$ niech przecina krzywę $f=0$ w punktach: $(x y)$, $(x \eta_1)$, ..., $(x \eta_{n-1})$. Wtedy:

$$f(x y')=(y'-y)(y'-\eta_1)\ldots(y'-\eta_{n-1}),$$

a ponieważ $f(x y)=0$, więc iloraz:

$$(1)\quad \left| \begin{aligned} &\frac{f(x y')}{y'-y}=\frac{f(x y')-f(x y)}{y'-y}=\sum A.x^\lambda.\frac{y'^\mu-y^\mu}{y'-y}= \\ &\Sigma A.x^\lambda(y'^{\mu-1}+y'^{\mu-2}y+\ldots+y^{\mu-1})=(y'-\eta_1)(y'-\eta_2)\ldots(y'-\eta_{n-1}) \\ &\qquad =f(x y y') \end{aligned} \right.$$

jest wymierną całkowitą funkcyą zmiennych x, y, y', a równanie $f(x y y')=0$ określa zbiór $(n-1)$ prostych: $y'-\eta_k=0$, $k=1,2,\ldots,(n-1)$, które odpowiednio przechodzą przez punkta:

$$(2) \qquad (x \eta_1),\ (x \eta_2),\ \ldots,\ (x \eta_{n-1}).$$

Utwórzmy równanie:

$$(3) \qquad h.f(x y y')+(x'-x)g_{n-2}(x' y')=0,$$

w którem h i spółczynniki funkcyi g_{n-2} stopnia $(n-2)^{go}$ nie są jeszcze oznaczone. Każda krzywa określona tem równaniem jest $(n-1)^{go}$ stopnia i przecina krzywę $f(x' y')=0$ niezawodnie w punktach (2). W równaniu (3) mamy $\left[\frac{(n-2)(n+1)}{2}+2\right]$ spółczynników, a po wprowadzeniu d warunków potrzebnych, aby krzywa (3) była dołączoną, trzeba jeszcze do jej zupełnego wyznaczenia dobrać $\frac{(n-2)(n+1)}{2}+1-d=(n-1)+\varrho$ warunków.

Po podzieleniu równania (3) przez $(x'-x)$ mamy:

$$(4)\qquad h.\frac{f(xyy')}{x'-x}+g_{n-2}(x'y')=0,$$

a gdy położymy $g_{n-2}=B_1+B_2x'+B_3y'+\dots$ i zażądamy, aby krzywa (3) przechodziła przez $(n-1)$ punktów $(a_0\eta'_k)$, $k=1,2,\dots,n-1$, i przez ϱ punktów $(a_\alpha b_\alpha)$, to w założeniu, że a_0, b_0, i η'_k są skończone, wprowadzić trzeba $(n-1)+\varrho$ takich warunków:

$$(a)\qquad h.\frac{f(xy\,\eta'_k)}{a_0-x}+B_1+B_2a_0+B_3\eta'_k+\dots=0,\ k=1,2,\dots,n-1,$$

$$(b)\qquad h\,\frac{f(xy\,b_\alpha)}{a_\alpha-x}+B_1+B_2a_\alpha+B_3b_\alpha+\dots=0,\ \alpha=1,2,\dots,\varrho.$$

Z nich dostajemy:

$$h:B_1:B_2:B_3:\dots=\gamma_0:\frac{\gamma_1}{(x-a_0)P(x)}:\frac{\gamma_2}{(x-a_0)P(x)}:\frac{\gamma_3}{(x-a_0)P(x)}:\dots,$$

gdzie γ_0 nie zależy od zmiennych x,y; $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\dots$ są całkowitemi wymiernemi funkcyami tych zmiennych, a

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho).$$

Połóżmyż:

$$h=1,\quad B_s=\frac{\gamma_s}{\gamma_0(x-a_0)P(x)},\quad s=1,2,\dots,$$

to po wstawieniu tych spółczynników w (3) mieć będziemy:

$$G_{n-1}(x'y')=f(xyy')+(x'-x)\frac{g(xy,x'y')}{(x-a_0)P(x)},\ \text{a}$$

$$(5)\qquad \tilde{H}(xy,x'y')=\frac{1}{M}\cdot\frac{(x-a_0)P(x).f(xyy')+(x'-x).g(xy,x'y')}{(x'-x)(x'-a_0)(x-a_0).P(x).f(x'y')_2}.$$

Ponieważ $f(xyy)_1=f(xy)_2$, a w otoczeniu punktu $(x'y')=(xy)$, dostajemy z (5) rozwinięcie:

$$\frac{1}{M}\cdot\frac{1}{x-a_0}+t.\mathfrak{P}(t),$$

więc żądając, aby $\tilde{H}$ miało własność (α) — art. 86. — położyć trzeba $M^{-1}=(x-a_0)$, po czem będzie:

$$(E)\qquad \tilde{H}(xy,x'y')=\frac{(x-a_0)P(x).f(xyy')+(x'-x).g(xy,x'y')}{(x'-x)(x'-a_0)P(x).f(x'y')_2}.$$

Zauważyć przy tem trzeba, że z (E) dostajemy w otoczeniu miejsca $(x'y')=(a_0b_0)$ rozwinięcie postaci:

$$\frac{-P(x).f(xyb_0)+g(xy,a_0b_0)}{P(x).f(a_0b_0)_2}.\frac{1}{t}+\mathfrak{P}(t).$$

Musi więc być: $[g(xy,a_0b_0)-P(x).f(xyb_0)]=-P(x).f(a_0b_0)_2$, czyli $g(xy,a_0b_0)=P(x)[f(xyb_0)-f(a_0b_0)_2]$, a stąd wynika, że:

(6) $$g(a_0b_0,a_0b_0)=0.$$

Funkcya $\tilde{H}(xy,x'y')$ ma w zmiennych $(x'y')$ wszystkie własności funkcyi $H(xy,x'y')$, a i różnica $\tilde{H}(xy,x'y')-\tilde{H}(a_0b_0,x'y')$ zachowa je także wszystkie, bo i w otoczeniu miejsca (a_0b_0) rozwinie się jeszcze — wskutek (6) — na szereg postaci: $t^{-1}+\mathfrak{P}_0(t)$. Co się tyczy własności tej różnicy w obszarze zmiennych (x,y), to łatwo sprawdzić, że ona w otoczeniu miejsca $(xy)=(x'y')$ ma rozwinięcie postaci:

(α') $$-t^{-1}+\mathfrak{P}(t),$$

w otoczeniu każdego miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$ rozwinięcie postaci:

(β') $$h_\alpha(x'y')t^{-1}+h_\alpha^{(0)}(x'y')+h'_\alpha(x'y')t+...,$$

a na miejscu (a_0b_0) ma rozwinięcie

(γ') $$t\,\mathfrak{P}_0(t).$$

Lecz własności (α'), (β'), (γ') charakteryzują funkcyę $H(xy,x'y')$ w zupełności, a stąd wynika:

(E_1) $$H(xy,x'y')=\tilde{H}(xy,x'y')-\tilde{H}(a_0b_0x'y').$$

W razie $a_0=\infty$ zmienią się warunki (a) i postać funkcyi $\tilde{H}$ na inne. Niech bowiem miejsca (∞,η_k), zawarte w $f=0$, będą o stosunkach: $\left(\frac{\eta'_k}{a_0}\right)_{a_0=\infty}=\frac{h_k}{g_k}$, $k=1,2,...,n-1$, to położywszy:

$$(g_1y'-h_1x')(g_2y'-h_2x')...(g_{n-1}y'-h_{n-1}x')=p_1x'^{n-1}+p_2x'^{n-2}y'+...$$

a funkcyę jednorodną najwyższego stopnia $(n-1)^{go}$, zawartą w (3) nazwawszy: $q_1x'^{n-1}+q_2x'^{n-2}y'+...$, zażądać trzeba, aby było:

(a') $$q_1=p_1,\quad q_2=p_2,\quad ....$$

i temi równaniami zastąpić warunki (a). Warunki (b) pozostaną niezmienione, a gdy teraz z równań (a') i (b) obliczać będziemy $h, B_1, B_2, ...,$ to dojdziemy do $h=\gamma_0$, niezależnego znowu od (xy), a spółczynniki B_s — gdy $h=1$ położymy — będą postaci $\gamma_s/\gamma_0P(x)$, gdzie γ_s, $s=1,2,...$ są całkowitemi funkcyami zmiennych x, y. Położymy więc w tym razie:

$$G_{n-1}(x'y')=f(xyy')+(x'-x).\frac{g(xy,x'y')}{P(x)},$$

a w mianowniku funkcyi $\tilde{H}(xy, x'y')$ nie będzie już potrzebny czynnik $(x'-a_0)$, bo (a_0b_0), nie będąc miejscem równania $G_{n-1}(x'y')=0$, musi dać $G_{n-1}(a_0b_0)=\infty$, gdyż $a_0=\infty$. Mieć więc tu będziemy ostatecznie:

$$(F)\qquad \tilde{H}(xy, x'y')=\frac{P(x).f(xyy')+(x'-x).g(xy, x'y')}{(x'-x).P(x).f(x'y')_2},$$

(bo M^{-1} wypada tu $=1$). Stąd — jak wyżej — przejdziemy do funkcyi $H(xy, x'y')$, określając ją wzorem:

$$(F_1)\qquad H(xy, x'y')=\tilde{H}(xy, x'y')-\lim_{(a_0b_0)}\tilde{H}(a_0b_0, x'y').$$

Uwaga 3. Jeżeli w jednem z miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$ n. p. w $(a_\varrho b_\varrho)$ ma być $|a_\varrho|=\infty$, to widocznie $P(x)$, $P(x')$ mają być zerami dla $|x|=|x'|=\infty$, a to objawi się tem, że się te iloczyny zredukują do funkcyj stopnia $(\rho-1)^{\text{go}}$; trzeba je więc w formach (E), (E_1), (F), (F_1) zastąpić iloczynami:

$$P_1(x)=(x-a_1)...(x-a_{\varrho-1}),\quad P_1(x')=(x'-a_1)...(x'-a_{\varrho-1}).$$

Pd. 1. Krzya $x^3+y^3-1=0$ nie posiada żadnych punktów wielokrotnych, $(d=0)$. Jej rodzaj jest więc $=1$, a dołączona funkcya stopnia: $(n-3)=0$ redukuje się do stałej dowolnej $3C$. Wskutek tego mamy tu:

$$H(xy)=C/y^2.$$

Przyjmijmy $(a_\alpha, b_\alpha)=(0,1)$ — (α jest tu $=\rho=1$) — to ponieważ w otoczeniu miejsca $x=0$ mamy tu 3 pary funkcyj:

$$(\lambda)\qquad x=t,\quad y=\varepsilon^k[1-\frac{1}{3}t^3+...],\quad k=0, 1, 2,\quad \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

więc prosta $x=0$ przecina krzywą $f=0$ w 3 punktach $(0,1)$, $(0,\varepsilon)$, $(0,\varepsilon^2)$. Chcąc $H'(xy)$ przedstawić formą (B'), trzeba przedewszystkiem utworzyć dołączoną krzywę stopnia 2^{go}:

$$(\mu)\qquad Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

i od niej — ponieważ $d=0$ — zażądać jedynie, aby: 1°) przechodziła przez punkty $(0,\varepsilon)$, $(0,\varepsilon^2)$, aby więc spełniły się warunki [por. (α)]:

$$(\nu)\qquad \begin{aligned}&B\varepsilon^2+E\varepsilon+F=0,\\ &B\varepsilon+E\varepsilon^2+F=0,\quad (\varepsilon^4=\varepsilon),\ \text{i aby: } 2^0)\end{aligned}$$

$$(\nu')\qquad [At^2+B\varepsilon^{2k}(1-\frac{2}{3}t^3+...)+Ct(1-\frac{1}{3}t^3+...)+Dt+E(1-\frac{1}{3}t^3+...)+F]_t=0$$

$$k=1, 2, \text{[por. } (\beta)].$$

Warunkom (ν') zadość można uczynić, kładąc $A=C=D=0$, a że z (ν) wynika $B=E=F$, więc równanie (μ) redukuje się tu do $y^2+y+1=0$, a funkcya $H'(xy)$ będzie postaci:

$$H'(xy)=-\frac{y^2+y+1}{x^2.3y^2},$$

[M^{-1} wypadło tu $=-1$].

Zatrzymując $(a_\alpha b_\alpha)=(0,1)$, spróbujmy utworzyć funkcyę $\tilde{H}(xy,x'y')$. Powinna ona — gdy przyjmiemy $(a_0b_0)=(\infty, -\infty)$ i zważymy, że tu $f(xyy')=y'^2+y'y+y^2$ a $P(x)=x$ — mieć licznik postaci:

$$G_2=h(y'^2+y'y+y^2)+(x'-x)(Ax'+By'+C).$$

Ponieważ $x'^3+y'^3=(x'+y')(x'-e^{\frac{\pi i}{3}}y')(x'-e^{-\frac{\pi i}{3}}y')$, a z tych czynników pierwszy odnosi się do miejsca (a_0b_0), więc krzywa $G_2=0$ spełnić ma przedewszystkiem warunek:

$$hy'^2+Ax'^2+Bx'y'=(x'-e^{\frac{\pi i}{3}}y')(x'-e^{-\frac{\pi i}{3}}y')=x'^2-x'y'+y'^2.$$

Z niego dostajemy: $h=1$, $A=1$, $B=-1$. Dalej ma krzywa $G_2=0$ przechodzić przez punkt $(a_\alpha b_\alpha)=(01)$. Stąd — uwzględniając już wartości spółczynników h, A, B — dostajemy:

$$1+y+y^2-x(-1+C)=0,\quad \text{a więc:}\quad C=\frac{1+y+y^2+x}{x},$$

$$G_2=(y'^2+y'y+y^2)+(x'-x)\left[x'-y'+\frac{1+y+y^2+x}{x}\right],\quad \text{a}$$

$$\tilde{H}(xy,x'y')=\frac{x(y'^2+y'y+y^2)+(x'-x)[x(1+x'-y')+1+y+y^2]}{(x'-x).x.3.y'^2}.$$

Dzieląc licznik i mianownik przez x^2, i uwzględniając potem:

$$x=\infty,\quad y=-\infty,$$

łatwo sprawdzimy, że tu $\lim\limits_{a_0b_0}\tilde{H}(a_0b_0,x'y')=0$, i że więc:

$$H(xy,x'y')=\tilde{H}(xy,x'y').$$

Pd. 2. Z funkcyi $H(xy,x'y')$ dopieroco utworzonej wyprowadzić:

$$H(x'y')_\alpha,\quad H'(x'y')_\alpha,$$

uwzględniając rozwinięcie: $H(x'y')_\alpha t^{-1}+H(x'y')-H'(x'y')_\alpha t+\ldots.$

Pd. 3. Postępując, jak w art. 71., dochodzimy — rozważając obraz hypereliptyczny:

$$(a)\qquad y'^2=C(x'-a_1)(x-a_2)\ldots(x'-a_n)$$

do równania:

$$(b)\qquad \begin{aligned}G_{n-1}=(a_0+a_1x+\ldots+a_{\varrho-1}x'^{\varrho-1})y'^2+(b_0+b_1x'+\ldots+b_{n-2}x'^{n-2})y'+\\+(c_0+c_1x'+\ldots+c_{n-1}x'^{n-1})=0\end{aligned}$$

określającego, p r z y   w s z e l k i c h   m o ż l i w y c h   w a r t o ś c i a c h   s p ó ł c z y n n i k ó w, dołączoną krzywę stopnia $\leq(n-1)$.

Niech $(a_0b_0)=(\infty,\infty)$, $(a_\alpha b_\alpha)=(a_\alpha 0)$, $\alpha=1,2,..,\rho$, a więc

$$P(x)=[(x-a_1)\ldots(x-a_\varrho)]$$

i niech będzie dana krzywa określona równaniem:

$$(c)\qquad \varphi(x'y')=P(x).y'+P(x').y=0.$$

Przechodzi ona widocznie przez punkta $a_\alpha,0)$, przez punkt $(\infty,-\infty)$ i przez punkt $(x,-y)$, a nie przechodzi przez punkta: (x,y), (∞,∞). Że zaś równanie (b), gdy się w niem położy: $a_0=a_1=\ldots=a_{\varrho-1}=0$, $b_0=P(x)$, $b_1=b_2=\ldots=b_{n-2}=0$, $c_0+c_1x'+\ldots+c_\varrho x'^\varrho=P(x')y$, $c_{\varrho+1}=\ldots=c_{n-1}=0$, przechodzi na równanie (c), więc funkcyę $\varphi(x'y')$ użyć będzie można jako licznik formy (F). Mieć więc będziemy:

$$(d)\qquad \tilde{H}(xy,x'y')=\frac{1}{2}\cdot\frac{P(x)y'+P(x')y}{(x'-x)P(x)y'},$$

a i tu okaże się $H(xy,xy')=\tilde{H}(xy.x'y')$.

Uwaga. Połóżmy:

$$P(x)y' + P(x')y = P(x)(y' + y) + [P(x')y - P(x)y],$$

to z uwagi, że

$$P(x')y - P(x)y = y\left[P(x) + \frac{P'(x)}{1!}(x'-x) + \ldots - P(x)\right] = (x'-x).g(xy, x'y'),$$

dostajemy:

$$\varphi(xy') = P(x).(y' + y) + (x' - x)g(xy, x'y').$$

Jestto w istocie forma, jakiej się w (F) wymaga.

Pd. 4. Nazywając $Q(x) = [(x - a_{\varrho+1})\ldots(x - a_n)]$, wyprowadzić z formy (d) — [Pd. 3.] — przez rozwijanie jej w otoczeniu miejsca $(a_\alpha 0)$ funkcye:

$$H(x'y)_\alpha = \frac{P(x')}{2y'(x'-a_\alpha)}, \quad \text{[art. 85., Pd. 1.]},$$

$$H'(x'y')_\alpha = -\frac{P(x')}{2y'} \cdot \frac{Q(a_\alpha)}{P'(a_\alpha)} \cdot \frac{1}{(x'-a_\alpha)^2},$$

Pd. 5. Jeżeli chodzi nie o utworzenie samej funkcyi $H(xy, x'y')$, ale o całkę posiadającą charakterystyczne własności całki trzeciego rodzaju, to możemy ją dostać, zamieszczając pod znakiem całkowania już-to formę (C) już-to formę (C').

Przyjmijmyż, że chcemy w obrazie hypereliptycznym mieć całkę trzeciego rodzaju o logarytmicznych punktach $(a_0 b_0)$, $(x_\nu y_\nu) = (a_0, -b_0)$. Podług formy (C) trzeba utworzyć prostę, przechodzącą przez te punkta; określi się ona równaniem $x' - a_0 = 0$. Lecz dalej łatwo spostrzedz, że równanie (b) — [Pd. 3.] — może się w szczególności zredukować i do równania dowolnej prostej, a tę prostę można uważać za dołączoną krzywę $G_{n-1} = 0$. Weźmyż za licznik formy (C) prostę, leżącą w nieskończoności $0.x + 0.y + c = 0)$, to mieć będziemy:

$$M.\tilde{H}(xy, x'y') = \frac{c}{(x'-a_0).2y'}.$$

Gdy $(x_\nu y_\nu) \neq (a_0 b_0)$, a y_ν nie jest $= -b_0$, to posługując się formą (C') możemy za $G_{n-1} = 0$ wziąć równanie prostej, przechodzącej przez punkta $(x_\nu, -y_\nu)$, $(a_0, -b_0)$. Napiszmy to równanie w postaci:

$$(x' - x_\nu)(y' + b_0) - (x' - a_0)(y' + y_\nu) = 0,$$

to mieć będziemy

$$M\tilde{H}(x_\nu y_\nu, x'y') = \frac{1}{2y'}\left[\frac{y'+b_0}{x'-a_0} - \frac{y'+y_\nu}{x'-x_\nu}\right].$$

Całki normalne rodzajów 1[go], 2[go] i 3[go] w obrazie hypereliptycznym nazywają się całkami hypereliptycznemi takichże rodzajów. Całka $\int R(xy)dx$, w której R jest funkcyą wymierną, a (xy) są miejscami obrazu hypereliptycznego, nazywa się ogólną całką hypereliptyczną.

Pd. 6. Zauważmy eliptyczny obraz:

$$(a) \qquad y^2 = 4(px+1)(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3),$$

w którym $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, a więc:

$$4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3) = S = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Tutaj — jeżeli $(a_0 b_0)$ ma być znowu (∞, ∞), a $P(x) = (px + 1)$ — dostaniemy podług Pd. 3.:

$$H(xy\,x'y') = \frac{1}{2}\,\frac{(px+1)y' + (px'+1)y}{(x'-x)(px+1)y'}.$$

Przyjmijmy, że $|p|$ bezgranicznie maleje. Wtedy $(a_\alpha\, b_\alpha)$ posuwa się w nieskończoność. Obraz eliptyczny (a) przechodzi na:

$$(b) \qquad y^2 = S = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

a $(px+1) = (px'+1) = 1$. Dla obrazu eliptycznego (b) dostajemy zatem:

$$(c) \qquad H(xy,\, x'y') = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{S'}+\sqrt{S}}{(x'-x)\sqrt{S'}}.$$

W nieskończoności ma obraz (b) jedną parę funkcyj:

$$x = t^{-2},\quad \sqrt{S} = 2t^{-3}\left(1 - \frac{g_2}{8}t^4 - \dots\right),$$

a gdy tę parę za x i $\sqrt{S}$ wstawimy w (c) dostaniemy:

$$H(x',\, \sqrt{S'}) = \frac{1}{\sqrt{S'}},\quad (H'(x', \sqrt{S'}) = \frac{x'}{\sqrt{S'}}$$

Całki:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{S}},\quad \int \frac{x\,.\,dx}{\sqrt{S}},\quad \int \frac{\sqrt{S'}+\sqrt{S}}{(x'-x)\sqrt{S'}}\,dx$$

są eliptycznemi całkami Weierstrassa rodzaju 1^{go}, 2^{go} i 3^{go}*).

ROZDZIAŁ XII.

Krzywe rodzajów: O, 1, 2. Krzywe hypereliptyczne. Moduły.

---

88. O krzywych rodzaju zero. Obrazem algebraicznym rodzaju zero nazwaliśmy ten, który dopuszcza funkcyę $s = R(xy)$ stopnia 1^{go} i który wskutek tego ma tę własność, że spółrzędne x, y każdego jego punktu dają się wyrazić wymiernie przez s. Niechże:

$$(A) \qquad x = R_1(s),\quad y = R_2(s)$$

i przyjmijmy, że $s' = R'(xy)$ jest funkcyą stopnia $\mu \geqq 1$ w tym samym obrazie. Wstawiając w s' za x, y wyrażenia (A) dostajemy:

$$(B) \qquad s' = R(s)$$

gdzie R jest znowu funkcyą wymierną. Stąd twierdzenie:

I. *W obrazie rodzaju zerowego daje się każda wymierna funkcya s' pary (x, y) a stopnia μ wyrazić wymiernie przez dowolną funkcyę s stopnia pierwszego. Przytem w $R(s)$ musi albo licznik, albo mianownik dosięgnąć stopnia μ.*

Utwórzmy naodwrót funkcyę:

$$(C) \qquad s' = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_\mu s^\mu}{b_0 + b_1 s + \dots + b_\mu s^\mu},$$

w której s jest znaną funkcyą stopnia pierwszego, a spółczynniki

---

*) O funkcyach H ogólniejszego obrazu: $y^m = (x-a_1)^{n_1} \dots (x-a_\lambda)^{n_\lambda}$ czytaj: O. Biermann. Akad. Wied. r. 1883.

$a_0, a_1, \ldots, a_\mu$, $b_0, b_1, \ldots, b_\mu$ są dowolnymi *). Taka funkcya będzie zawsze funkcyą stopnia μ^{go}, a tę samą wartość s' przybierze na takich μ miejscach (x, y), na których s dostaje wartości pierwiastków $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ równania (C). W szczególności funkcya:

$$(D) \qquad s' = \frac{as+b}{cs+d}$$

[a więc związana z s równaniem dwuliniowem $As.s' + Bs + Cs' + D = 0$] z dowolnymi spółczynnikami a, b, c, d, byleby tylko było $ad - bc \neq 0$, jest funkcyą stopnia pierwszego. Stąd twierdzenie:

II. *Mając jedną funkcyę wymierną s pary (x y) stopnia pierwszego (w danym obrazie algebraicznym rodzaju zerowego), dostajemy wszystkie inne funkcye stopnia pierwszego tworząc z s liniowe ułamkowe funkcye o dowolnych spółczynnikach.*

Pd. 1. Gdy równanie $f = 0$ ma kształt:

$$v_m(x, y) + v_{m-1}(x, y) = 0,$$

gdzie v_m, v_{m-1} są jednorodnemi, całkowitemi funkcyami o stopniach m, $m-1$, to kładąc $y = xt$, dostajemy:

$$x^m . v_m(1, t) + x^{m-1} v_{m-1}(1, t) = 0, \quad \text{a stąd wynika:}$$

$$x = -\frac{v_{m-1}(1, t)}{v_m(1, t)}, \quad y = -t . \frac{v_{m-1}(1, t)}{v_m(1, t)}.$$

Pd. 2. Okazać, że w równaniu:

$$x^3 + y^3 - 3a\,xy = 0 \text{ jest:}$$

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Pd. 3. Niech $f = 0$ będzie nieprzywiedlnem, ogólnem równaniem drugiego stopnia, a $(x_0\, y_0)$ niech będzie jednem z miejsc spełniających to równanie. W otoczeniu tego miejsca będzie równanie miało postać:

$$v_2(x - x_0, y - y_0) + v_1(x - x_0, y - y_0) = 0$$

gdzie v_2, v_1 są — jak w Pd. 1. — jednorodnemi funkcyami stopni: 2, 1. Kładąc więc tu $y - y_0 = (x - x_0)t$, dostaniemy x i y w wymiernych funkcyach parametru t.

Uwaga. W Pd. 1, 2 jest $t = \frac{y}{x}$, a w Pd. 3. jest $t = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ wymierną funkcyą pary (x, y) stopnia pierwszego.

Nasuwa się teraz pytanie, czy zawsze w tym razie, kiedy x, y danego równania $f = 0$ dają się wyrazić wymiernemi funkcyami

$$(1) \qquad x = R_1'(t), \quad y = R'_2(t),$$

zmiennego paramatru t, uważać trzeba $f = 0$ za równanie rodzaju zero, a t za funkcyę stopnia pierwszego?

---

*) Relacye $\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_\mu}{b_\mu}$ trzeba wykluczyć.

Aby na to odpowiedzieć zauważmy, że zajść tu mogą takie dwa różne wypadki:

I⁰. **Równania** (1) **mają jeden tylko wspólny pierwiastek** t **przy bieżącem miejscu** (x, y) **równania danego.**

Taki pierwiastek jest wymierną funkcyą spółczynników samych równań (1), a więc wymierną funkcyą pary (x, y). Połóżmyż

$$t = R(x,\ y)$$

to widocznie t jest tu funkcyą s stopnia pierwszego, bo, jak z równań (1) wynika, każdą dowolną wartość przybiera na jednem tylko miejscu obrazu $f=0$.

Takim był parametr $t=\frac{y}{x}$ w Pd. 1, 2, a parametr $t=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ w Pd. 3.

II⁰. **Równania** (1) **mają** k **wspólnych pierwiastków** t, $k>1$, **przy bieżącem miejcu** (x, y). Nazwijmy te pierwiastki $t_1, t_2, ..., t_k$ i przyjmijmy, że między nimi są powtarzające się. Dla każdego powtarzającego się pierwiastka t [zmieniającego się z (x, y)] mielibyśmy:

$$\frac{d}{dt} R_1'(t)=0,\ \frac{d}{dt} R'_2(t)=0.$$

Toby wskazywało, że w pewnym zwartym obszarze (t) mamy $R_1 = const$, $R_2 = const$, co jednak jest niemożliwe.

Pierwiastki $t_1, t_2, ..., t_k$ są zatem wszystkie między sobą różne.

Równanie:

(2) $$\varphi_0(x\,y)\,t^k+\varphi_1(x\,y)\,t^{k-1}+...+\varphi_k(x\,y)=0,$$

któremu zadość czynią te pierwiastki, ma spółczynniki $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_k$ wymierne i całkowite w x, y. Połóżmyż:

$$\frac{\varphi_\lambda(x\,y)}{\varphi_0(x\,y)}=s_\lambda,\ \lambda=1, 2, ..., k$$

i utwórzmy dowolną wymierną funkcyę:

(3) $$s=R_0(s_1,\ s_2, ...,\ s_k).$$

Jest ona symetryczną w pierwiastkach $t_1, t_2, ..., t_k$. Że zaś wskutek (2] jest:

$$x=R_1'(t_\lambda),\ y=R'_2(t_\lambda),\ \lambda=1, 2, ..., k,$$

więc — gdy położymy:

$$x=\frac{1}{k}\sum_{\lambda=1}^{k} R'_1(t_\lambda),\quad y=\frac{1}{k}\sum_{\lambda=1}^{k} R'_2(t_\lambda)-$$

mamy w tych sumach również symetryczne funkcye pierwiastków

$t_1, t_2, \dots, t_k$, a takie funkcye dadzą się wyrazić wymiernie przez s. Połóżmyż:

(4) $$x = R_1(s),\quad y = R_2(s),$$

to to wskazuje, że s jest już funkcyą stopnia 1^go^, a $f=0$ obrazem rodzaju: zero.

Stąd twierdzenie*):

III. *Gdy w danem równaniu $f=0$ są x, y wymiernemi funkcyami zmiennego parametru t, to t niekoniecznie jest wymierną funkcyą pary (x, y), ale możliwem jest zawsze — i to na nieskończenie wiele sposobów — dojść do funkcyi wymiernej s pary $(x\,y)$ stopnia pierwszego i wyrazić potem x, y wymiernie przez s. Taki obraz algebraiczny jest więc zawsze rodzaju zerowego.*

Formy (1) — w razie $k > 1$ — nazywają się niewłaściwe; przeciwnie w (4) mamy już właściwe przedstawienie spółrzędnych x, y obrazu rodzaju: zero.

Niech równanie $f=0$ o spółczynnikach rzeczywistych, będąc rodzaju zerowego, określa krzywą algebraiczną. Posuwając rzeczywistą wartość s po obszarze $s = (-\infty \dots +\infty)$, przebiegamy punktem (x, y) określonym relacyami (4) całą daną krzywę (raz tylko). Z tego powodu krzywe zdefiniowane równaniem rodzaju zerowego nazywają krzywemi jednobieżnemi.

Pd. 4. Niech:

(a) $$x = \frac{t^2+1}{t^4+3t^2+1},\quad y = \frac{t(t^2+1)}{t^4+3t^2+1}$$

będą spółrzędnemi punktów pewnej krzywej.

Równania (a) mają wspólne pierwiastki t zawarte w

(b) $$yt^2 - xt + y = 0\,^{**}).$$

Jedno więc miejsce (x, y) odpowiada dwom wartościom t, a to:

$$\frac{x \pm \sqrt{x^2-4y^2}}{2y}.$$

Że zaś równanie (b) ma spółczynniki: y, $-x$, y, więc tu $s_1 = -\dfrac{x}{y}$, $s_2 = 1$.

*) J. Lüroth. *Beweis eines Satzes über rationale Curven. Math. Annalen.* T. IX. str. 163—165.

**) Sprowadzając równania (a) do postaci:

$$f_1 = \psi(t).x - \psi_1(t) = 0,\quad f_2 = \psi(t)\,y - x\,.\,\psi_2(t) = 0,$$

dostajemy z nich:

$$f_3 = \psi_1(t).y - \psi_2(t)x = 0,$$

a f_3 uważać trzeba za największy wspólny podzielnik funkcyj f_1, f_2 [T. I. art. 60.], jeżeli tylko — jak tu — ψ_1, ψ_2 są niższego stopnia, niż funkcya ψ.

Położmyż:

$$s=R_0=\frac{y}{x}=\frac{t}{t^2+1},$$

to z uwagi, że $t^4+3t^2+1=t^2+(t^2+1)^2$, dostajemy:

$$x=\frac{1}{1+s^2},\quad y=\frac{s}{1+s^2}\ \text{[Lüroth]}.$$

Pd. 5. Zauważmy parę wymiernych funkcyj:

$$(a')\qquad x=3a.\frac{t+t^2}{1+t^2+2t^3+t^4},\quad y=3a.\frac{(t+t^2)^2}{1+t^2+2t^3+t^4}.$$

Wspólne pierwiastki t tych równań dostajemy ze związku:

$$(b')\qquad x\,t^2+x\,t-y=0,$$

w którym $s_1=1$, $s_2=-\frac{y}{x}$. Położmy:

$$s=R_0=\frac{y}{x}=t+t^2,$$

to x, y dostaniemy w postaciach:

$$x=\frac{3as}{1+s^2},\quad y=\frac{3as^2}{1+s^2}$$

[por. Pd. 2.].

Używając wyłącznie przedstawień właściwych, przyjmijmy, że dla jednej i tej samej krzywej $f=0$ rodzaju zero mamy raz:

$$(5)\qquad x=R_1(s),\quad y=R_2(s),$$

a drugi raz:

$$(5')\qquad x=R'_1(s')\quad y=R'_2(s'),$$

przyczem jest:

$$(6)\qquad s=R_{12}(x,y),\quad s'=R'_{12}(x,y).$$

Rugując z równań (6) i równania $f=0$ zmienne x, y dojdziemy tu do związku:

$$(7)\qquad Ass'+Bs+Cs'+D=0.\quad \text{[art. 67.]}.$$

Z niego dostajemy:

$$(8)\qquad s'=\frac{as+b}{cs+d}$$

gdzie a, b, c, d są stałemi, a $(ad-bc)\neq 0$ być musi.

Wstawmy z drugiej strony w (5) za s liniową funkcyę $\frac{as+b}{cs+d}$ o dowolnych stałych a, b, c, d, ale czyniących zadość warunkowi $ad-bc\neq 0$. Za takiem podstawieniem:

$$\left(s,\ \frac{as+b}{cs+d}\right)$$

zawierającem właściwie tylko t r z y d o w o l n e p a r a m e t r y przejdzie punkt:

(9) $$x=R_1(s),\quad y=R_2(s)$$

danej krzywej $f=0$ na inny punkt:

(9') $$x_1=R_1\left(\frac{as+b}{cs+d}\right)=\overline{R}_1(s),\quad y_1=R_2\left(\frac{as+b}{cs+d}\right)=\overline{R}_2(s)$$

tej krzywj. Przytem i tu mamy:

(α) $$s=R_{12}(x,y),\qquad (\beta)\quad s=\overline{R}_{12}(x_1,y_1).$$

Uwzględniając (β) w (9), a (α) w (9') dostajemy:

(10) $$x=r_1(x_1,y_1),\quad y=r_2(x_1,y_1)$$

i naodwrót:

(10') $$x_1=\overline{r}_1(x\,y),\quad y_1=\overline{r}_2(x,y),$$

gdzie r_1, r_2, $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$ są znowu funkcyami wymiernemi. Z tych form i związków wynika:

IV. *Na każdej jednobieżnej krzywej algebraicznej można na nieskończenie wiele sposobów utworzyć szeregi punktów jednoznacznie sobie nawzajem odpowiadających. Spółrzędne (x,y) każdego punktu jednego z tych szeregów są wymiernemi funkcyami spółrzędnych (x_1,y_1) odpowiednego punktu w szeregu drugim i naodwrót*, albo:

III. *Istnieje nieskończenie dużo odwracalnych podstawień przeprowadzających krzywę rodzaju zero samą w siebie. Wszystkie te podstawienia wynikają z jednego, gdy w niem zmieniamy trzy zawarte w niem dowolne parametry.*

Weźmy teraz pod uwagę dwie różne jednobieżne krzywe: $f(x\,y)=0$, $\varphi(\xi\,\eta)=0$ o właściwych przedstawieniach:

(11) $$x=R_1(s),\quad y=R_2(s),\quad s=R_{12}(x,y)$$

(11') $$\xi=\overline{R}_1(s'),\quad \eta=\overline{R}_2(s'),\quad s'=\overline{R}_{12}(\xi,\eta).$$

Połóżmy:

(12) $$s'=\frac{as+b}{cs+d},$$

co wskazuje, że wartości s należącej w $f=0$ do miejsca (11) odpowiedzieć ma jedna tylko wartość s' należąca w $\varphi=0$ do miejsca (11') i naodwrót. Uwzględniając (12) w (11)' dostaniemy:

$$\xi=R'_1(s),\quad \eta=R'_2(s).$$

Lecz w równaniu (12) możemy s określić także jako funkcyę pierwszego stopnia w obrazie $\varphi=0$. Połóżmyż:

$$s=R'_{12}(\xi,\eta),$$

to uwzględniając $s=R_{12}(x,y)$ w (11)', a $s=R'_{12}(\xi,\eta)$ w (11) mieć będziemy:

(13) $\xi=r_1(x,y),\quad \eta=r_2(xy)$

(13)' $x=r_1(\xi,\eta),\quad y=r_2(\xi,\eta).$

Z tego wynika:

V. *Każde dwie różne jednobieżne krzywe uważać można za dwa szeregi punktów jednoznacznie sobie odpowiadających przez odwracalne podstawienie. Tu więc równość rodzajów wystarcza, aby dwie krzywe zaliczyć do tej samej klasy.*

Zauważymy wreszcie:

VI. *Ponieważ linia prosta $Ax+By+C=0$ jest jednobieżną, więc wszystkie krzywe rodzaju zero uważać można za szeregi punktów jednoznacznie odpowiadających punktom linii prostej.*

89. **O krzywych rodzaju = 1.** W obrazie algebraicznym $f=0$ rodzaju $\varrho=1$, a stopnia n w obydwu zmiennych x, y trzeba x, y uważać za funkcye przybierające dowolnie daną wartość razy n w tym obrazie. W tym obrazie da się zawsze utworzyć funkcya:

$$t=\varphi(xy)\,/\,\psi(xy)$$

stopnia 2^{go}, prowadząca do nieprzewiedlnego związku:

(1) $$G(t,x)=G_0x^2-2G_1x+G_2=0,\quad \text{[art. 67. } (C)],$$

w którym G_0, G_1, G_2 są w zmiennej t stopnia n^{go}. Z równania tego dostajemy x w formie:

(a) $$x=\frac{G_1+P\sqrt{Q(t)}}{G_0},$$

w której P, Q są również całkowitemi funkcyami zmiennej t, a $Q(t)=0$ nie ma powtarzających się pierwiastków. Wskutek założonej nieprzywiedlności równania (1), wyrazi się y także wymiernie przez t i x a gdy tu x w formie (a) użyjemy, dostaniemy:

(b) $$y=\frac{G_1'+P'\sqrt{Q(t)}.}{G_0'}$$

Połóżmy — aby się o stopniu funkcyi $Q(t)$ dowiedzieć —

$$w=\sqrt{Q(t)},\ \text{a więc}\ w^2=Q(t),$$

to z jednej strony w (a), (b) mamy x, y przedstawione wymiernie przez t, w. Lecz z drugiej strony mamy $t=\varphi\,/\,\psi$, a gdy (a) lub (b) rozwiążemy ze względu na $\sqrt{Q}=w$, a potem $t=\varphi\,/\,\psi$ uwzględnimy, mieć będziemy:

(c) $$t=\varphi(xy)\,/\,\psi(xy),\quad w=\varphi_1(xy)\,/\,\psi_1(xy).$$

Podstawienie (a), (b) jest więc odwracalne, a że przez nie przerabiamy krzywę $f=0$ na krzywę:

$$w^2 = Q(t),$$

więc ta ostatnia — [art. 68. tw. I.] ma być również rodzaju $\varrho=1$ To może zajść, jeżeli $Q(t)$ jest w zmiennej t stopnia 4^{go}, albo 3^{go}. Stąd twierdzenia:

I. *Spółrzędne x, y krzywej rodzaju $\varrho=1$ dają się przedstawić w wymiernych funkcyach $x=R_1(t, \sqrt{Q(t)})$, $y=R_2(t, \sqrt{Q(t)})$ zmiennego parametru t i pierwiastka $\sqrt{Q(t)}$, w którym $Q(t)$ jest stopnia 4^{go} lub 3^{go}.*

II. *Równanie $f=0$ każdej krzywej rodzaju $\varrho=1$ sprowadzić można przez pewne odwracalne podstawienie zawsze do postaci $w^2=Q(t)$, gdzie $Q(t)$ jest sopnia 4^{go} lub 3^{go}.*

Do twierdzenia II. możnaby dojść także taką drogą. Zauważmy dwie funkcye stopnia drugiego:

$$(d) \qquad s=g_1(xy)/g_2(xy), \quad s'=g'_1(xy)/g'_2(xy)$$

takie, że na dwóch miejscach, na których s tę samą wartość przybiera, ma s' różne wartości i naodwrót. Między s a s' zachodzi wtedy nieprzywiedlny związek

$$(e) \qquad G(s, s'|2, 2)=0,$$

a równania (d) uważać trzeba za odwracalne podstawienie, które do krzywej (e) prowadzi. Równanie (e) drugiego stopnia w s i s' da się jednak zawsze przez odwracalne podstawienie sprowadzić do formy $w^2=Q(t)$, [art. 84. Pd. 2.] c. b. d. d.

Przyjmijmy:

$$(A) \qquad w^2=Q(t)=A(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)$$

i połóżmy:

$$(1) \qquad t=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \text{ a więc naodwrót: } (2) \quad \tau=\frac{\delta t-\beta}{-\gamma t+\alpha},$$

to po podstawieniu (1) w (A) dojdziemy do związku:

$$(B) \qquad w^2=\frac{B}{(\gamma\tau+\delta)^4}(\tau-b_1)(\tau-b_2)(\tau-b_3)(\tau-b_4), \text{ w którym}$$

$$(2) \qquad B=A\prod_{\lambda=1}^{4}(\alpha-a_\lambda\gamma), \quad \text{a} \quad b_\lambda=\frac{\delta a_\lambda-\beta}{-\gamma a_\lambda+\alpha}, \ \lambda=1,2,3,4.$$

Połóżmy dalej w (B):

$$(3) \qquad w=\frac{v}{(\gamma\tau+\delta)^2},$$

to związki (1), (2), (3) tworzą podstawienie odwracalne a krzywa (A) przechodzi na:

$$(A') \qquad v^2=B(\tau-b_1)(\tau-b_2)(\tau-b_3)(\tau-b_4)=Q_1(\tau).$$

Niech k_1, k_2, k_3, k_4 będzie dowolnym porządkiem liczb 1, 2, 3, 4, wyjętym z 24 możliwych ich uporządkowań. Utwórzmy 24 funkcyj

$$\frac{(a_{k_1}-a_{k_2})(a_{k_3}-a_{k_4})}{(a_{k_1}-a_{k_4})(a_{k_3}-a_{k_2})}=(k_1\, k_2\, k_3\, k_4)_a$$

zwanych w geometryi rzutowej anharmonicznymi stosunkami 4 punktów a_λ, a punkt, który na płaszczyźnie (τ) odpowiadać ma punktowi a_{k_λ} nazwijmy b_{k_λ}, $\left(b_{k_\lambda}=\dfrac{\delta a_{k_\lambda}-\beta}{-\gamma a_{k_\lambda}+\alpha}\right)$, to sprawdzimy łatwo, że $(k_1k_2k_3k_4)_a=(k_1k_2k_3k_4)_b$, a stąd twierdzenie:

III. *Przez pewne odwracalne podstawienie da się równanie* $w^2=Q(t)$, *w którem w ma punkta rozgałęzienia* a_λ, *zmienić na inne takiej samej postaci:* $v^2=Q_1(\tau)$, *a o punktach rozgałęzienia funkcyi v, tak z* a_λ *związanych, że* $(k_1k_2k_3k_4)_a=(k_1k_2k_3k_4)_b$.

90. Normalne formy krzywej rodzaju =1. Krzywe rodzaju =1 tej samej klasy. Połóżmy $(1\,2\,3\,4)_a=(a_1a_2a_3a_4)=\dfrac{(a_1-a_2)(a_3-a_4)}{(a_1-a_4)(a_3-a_2)}=k^2$ i zażądajmy, aby punktom a_1, a_2, a_3 odpowiadały: $b_1=0$, $b_2=1$, $b_3=\infty$. Wtedy — jak to z (2) [art. poprzedz.] widać — musi być:

$$\delta a_1-\beta=0, \quad \delta a_2-\beta=-\gamma a_2+\alpha, \quad -\gamma a_3+\alpha=0.$$

Z tych równań wynika:

$$(\alpha) \qquad \alpha:\beta:\gamma:\delta=a_3(a_2-a_1):a_1(a_3-a_2):(a_2-a_1):(a_3-a_2),$$

a więc:

$$(\beta) \qquad \tau=\frac{(t-a_1)(a_2-a_3)}{(t-a_3)(a_2-a_1)},$$

a kładąc tu $t=a_4$, dostajemy $\tau=b_4=\dfrac{1}{k^2}$. Z tego wynika, że tu za podstawieniem (β) i równoczesnem podstawieniem:

$$(\gamma) \qquad w=v/[(a_2-a_1)\tau+(a_3-a_2)]^2$$

przejdzie równanie $w^2=Q(t)$ na równanie:

$$v^2=C.\tau(1-\tau)(1-k^2\tau),$$

znane pod nazwą normalnego równania Legendre'a. Stałą k^2 nazywamy modułem.

Geometrya rzutowa uczy, że wszystkie stosunki anharmoniczne 4 punktów a_λ dzielą się na 6 grup zawierających po 4 stosunki, równe co do wartości. Gdy wartością stosunków jednej takiej grupy jest k^2, to wszystkie stosunki razem przedstawiają wartości

$$(\delta) \qquad \psi_\nu(k^2)=k^2,\ \frac{1}{k^2},\ 1-k^2,\ \frac{1}{1-k^2},\ 1-\frac{1}{k^2},\ \frac{k^2}{k^2-1}.$$

Według tego więc jakim 3 punktom a_1, a_2, a_3, a_4 i w jakim porządku odpowiadać mają punkta $b_1=0$, $b_2=1$, $b_3=\infty$, dostaniemy 6 normalnych form:

$$(\varepsilon) \qquad v^2 = C_\nu \tau(1-\tau)(1-\psi_\nu(k^2).\tau)$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, 6.$$

Równanie $w^2 = Q(t)$ sprowadzają jeszcze do innej normalnej formy wprowadzonej przez Weierstrassa*). Użyjmy odwracalnego podstawienia:

$$(1) \qquad t = a_4 + \frac{Q'(a_4)}{4\tau}, \quad w = c\, v\,/\,\tau^2,$$

gdzie $Q'(a_4)$ jest pochodną funkcyi $Q(t)$ dla wartości $t = a_4$, to po łatwych przerobieniach równanie $w^2 = Q(t)$ przejdzie na równanie

$$v^2 = \frac{[Q'(a_4)]^2}{4c^2}(\tau + c_{23})(\tau + c_{31})(\tau + c_{12}),$$

w którem:

$$(2) \qquad \begin{aligned} c_{23} &= \frac{A(a_4-a_2)(a_4-a_3)}{4} \\ c_{31} &= \frac{A(a_4-a_3)(a_4-a_1)}{4} \\ c_{12} &= \frac{A(a_4-a_1)(a_4-a_2)}{4}. \end{aligned}$$

Gdy zaś stałej c nadamy wartość $Q'(a_4)/4$, to mieć będziemy:

$$v^2 = 4(\tau + c_{23})(\tau + c_{31})(\tau + c_{12}).$$

Połóżmy dalej:

$$(3) \qquad \tau = s - \frac{c_{23} + c_{31} + c_{12}}{3},$$

to mieć będziemy:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \tau + c_{23} &= s - \frac{-2c_{23} + c_{31} + c_{12}}{3} = s - e_1 \\ \tau + c_{31} &= s - \frac{-2c_{31} + c_{12} + c_{23}}{3} = s - e_2 \\ \tau + c_{12} &= s - \frac{-2c_{12} + c_{23} + c_{31}}{3} = s - e_3, \text{ i} \end{aligned}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} v^2 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3), & \text{albo:} \\ v^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3, & \text{[art. 87. Pd. 6.],} \end{cases}$$

z określeniami:

$$(6) \qquad g_2 = -4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1), \quad g_3 = 4 e_1 e_2 e_3.$$

Połóżmy:

*) Por. Weber. *Ellipt. F. u. algebr. Zahlen. Harkness und Morley. Theory of functions* p. 330.

$$Q'(a_4)=A(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)=\varrho_1,$$

$$\frac{Q''(a_4)}{2!}=A[(a_4-a_1)(a_4-a_2)+(a_4-a_2)(a_4-a_3)+(a_4-a_3)(a_4-a_1)]=\varrho_2,$$

$$\frac{Q'''(a_4)}{3!}=A[(a_4-a_1)+(a_4-a_2)+(a_4-a_3)]=\varrho_3,$$

$\dfrac{Q^{(4)}(a_4)}{4!}=A=\varrho_4$, to wskutek tych oznaczeń będzie:

$$c_{12}+c_{23}+c_{31}=\frac{\varrho_2}{4},\ c_{12}.c_{23}+c_{23}c_{31}+c_{31}c_{12}=\frac{\varrho_1}{4}\cdot\frac{\varrho_3}{4}$$

$$c_{12}\cdot c_{23}\cdot c_{31}=\frac{\varrho_1^{\ 2}}{4^2}\cdot\frac{\varrho_4}{4};$$

$$e_1=\frac{\varrho_2-12c_{23}}{12},\quad e_2=\frac{\varrho_2-12c_{31}}{12},\quad e_3=\frac{\varrho_2-12c_{12}}{12},$$

$$g_2=\frac{\varrho_2^2}{12}-\frac{\varrho_1\varrho_3}{4},$$

$$g_3=\frac{\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3}{48}-\frac{\varrho_1^2\,\varrho_4}{16}-\frac{\varrho_2^{\ 3}}{216}.$$

Aby te spółczynniki g_2, g_3 bliżej zbadać obierzmy dowolną liczbę a, nasamprzód $\neq a_\lambda$, $\lambda=1, 2, 3, 4$ i naznaczmy:

$$Q(a)=r_0,\ \frac{Q'(a)}{1!}=r_1,\ \frac{Q''(a)}{2!}=r_2,\ \frac{Q'''(a)}{3!}=r_3,\ \frac{Q^{(4)}(a)}{4!}=A=r_4.$$

Pochodne tych r_0, r_1, ... według a są:

(7) $$r'_0=r_1,\ r'_1=2r_2,\ r'_2=3r_3,\ r'_3=4r_4,\ r'_4=0.$$

Utwórzmy funkcye:

$$G_2(a)=r_0r_4+\frac{1}{12}\cdot r_2^2-\frac{1}{4}\,r_1r_3,$$

$$G_3(a)=\frac{1}{6}\,r_0r_2r_4+\frac{1}{48}\,r_1r_2r_3-\frac{1}{16}\,r_1^2\,r_4-\frac{1}{216}\cdot r_2^3,$$

to — uwzględniając (7) — sprawdzimy, że identycznie jest:

$$\frac{d\,G_2(a)}{da}=0,\quad \frac{d\,G_3(a)}{da}=0.$$

Funkcye G_2, G_3 nie zależą zatem od a; ich wartości ze zmianą a wcale się nie zmieniają, a że dla $a=a_\lambda$ mamy $r_0=0$ i $G_2(a)=g_2$, $G_3(a)=g_3$, więc i przy każdej innej wartości a te równości się utrzymują.

Przyjmijmyż $a=0$ i połóżmy:

$$Q(t)=c_0t^4+4c_1t^3+6c_2t^2+4c_3t+c_4,$$

to teraz mamy:

$$r_0=c_4,\ r_1=4c_3,\ r_2=6c_2,\ r_3=4c_1,\ r_4=c_0,\quad \text{a więc:}$$

(8)
$$g_2=c_0c_4-4c_1c_3+3c_2^2$$
$$g_3=c_0c_2c_4+2c_1c_2c_3-c_2^3-c_0c_3^2-c_1^2c_4.$$

Są-to niezmienniki o wskaźnikach 4 i 6 dwukwadratowej formy $Q(t,u)=c_0t^4+4c_1t^3u+...+c_4u^4$. [T. I., art. 148].

Przyjmijmy, że chcąc dojść do normalnej formy Legendre'a, podporządkowujemy punkta $b_1=0$, $b_2=1$, $b_3=\infty$ punktom $a_\varkappa, a_\lambda, a_\mu$ i wtedy $(a_\varkappa a_\lambda a_\mu a_\nu)=\psi_\nu(k^2)$. Spółczynniki α, β, γ, δ w przedstawieniu $t=(\alpha\tau+\beta)/(\gamma\tau+\delta)$ mają wtedy znaczenie [por. (α)]:

$$\alpha=a_\varkappa(a_\lambda-a_\varkappa),\quad \beta=a_\varkappa(a_\mu-a_\lambda),\quad \gamma=a_\lambda-a_\varkappa,\quad \delta=a_\mu-a_\lambda$$

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=r=(a_\varkappa-a_\lambda)(a_\lambda-a_\mu)(a_\mu-a_\varkappa).$$

Po takiem podstawieniu i podstawieniu:

$$w=v/[(a_\lambda-a_\varkappa)\tau+(a_\mu-a_\lambda)]^2\quad \text{dostajemy:}$$

(A)
$$v^2=C_\nu\tau(1-\tau)(1-\psi_\nu\tau)=Q_1(\tau).$$

Przedstawmy $Q_1(\tau)$ jako formę dwukwadratową:

$$\overline{Q}_1(\tau,\tau')=C_\nu\tau\tau'(\tau'-\tau)(\tau'-\psi_\nu\tau)$$

— [ona przechodzi na $Q_1(\tau)$, gdy się ją podzieli przez τ'^4 i gdy się $\frac{\tau}{\tau'}$ położy $=\tau$] — i naznaczmy jej niezmienniki o wskaźnikach 4 i 6 przez g'_2, g'_3, to z (A) dojdziemy do normalnej formy Weierstrassa:

(B)
$$v_1^2=4s_1^3-g'_2s_1-g'_3.$$

Lecz $g'_2=r^4g_2$, $g'_3=r^6g_3$ jako niezmienniki formy $\overline{Q}_1(\tau,\tau')$, która z $Q(t,u)$ powstała przez podstawienia:

$$t=\alpha\tau+\beta\tau',\quad u=\gamma\tau+\delta\tau'.$$

Mamy więc:

$$v_1^2=4s_1^3-r^4g_2s_1-r^6g_3.$$

Połóżmy $v_1=r^3v'$, $s_1=r^2s$, to ostatecznie dojdziemy do równania:

$$v'^2=4s-g_2s-g_3,$$

jakie już wprzód wprost ze związku $w^2=Q(t)$ dostaliśmy.

Aby g'_2, g'_3 w (B) w istocie obliczyć, połóżmy w (A):

$$\tau=s+\frac{1+\psi_\nu}{3\psi_\nu},\quad v=(C_\nu\psi_\nu)^{1/2}.\frac{v_1}{2},\quad \text{to dostaniemy:}$$

$$v_1^2=4s_1^2-\frac{4}{3\psi_\nu^2}(1-\psi_\nu+\psi_\nu^2)s_1+\frac{4}{27\psi_\nu^3}(2-3\psi_\nu-3\psi_\nu^2+2\psi_\nu^3),$$

a więc:

$$(C)\quad g'_2=\frac{4}{3\psi_\nu^2}(1-\psi_\nu+\psi_\nu^2),\quad g'_3=\frac{-4}{27\psi_\nu^3}(2-3\psi_\nu-3\psi_\nu^2+2\psi_\nu^3).$$

Dalej — wskutek wskaźników 4, 6 — mamy:

$$J=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}=\frac{g'^3_2}{g'^3_2-27g'^2_3},$$

a wstawiając tu wartości (C), znajdujemy:

$$J=\frac{4(1-\psi_\nu+\psi_\nu^2)^3}{27[\psi_\nu(1-\psi_\nu)]^2}.$$

Funkcya J jest więc bezwzględnym niezmiennikiem formy $Q(t,u)$, a po wyrażeniu jej przez ψ_ν ma tę własność, że nie zmienia się wcale, gdy w niej przyjmiemy ψ_ν o jakiejkolwiek z 6 wartości (δ).

Po tych uwagach możemy się zająć rozwiązaniem takiego zadania. Dane są dwie krzywe $f(xy)=0$, $\varphi(\xi\eta)=0$ tego samego rodzaju $\varrho=1$; zbadać, czy należą do tej samej klasy [art. 69.]? Sprowadźmy obydwa równania do form normalnych Legendre'a:

$$(a)\qquad w^2=Ct(1-t)(1-k^2t),\quad w'^2=C't'(1-t')(1-k'^2t'),$$

albo do form normalnych Weierstrassa:

$$(b)\qquad v^2=4s^3-g_2s-g_3,\quad v'^2=4s'_3-g'_2s'-g'_3,$$

to teraz tak para równań (a), jak para równań (b) ma należeć do jednej klasy. Jedno równanie w każdej tej parze ma się dać sprowadzić przez odwracalne podstawienie na drugie, a to według uwag tu zamieszczonych i według twierdzenia III. — art. 89. — może nastąpić wtedy, gdy albo:

$$k^2=\psi_\nu(k'^2),\ \text{albo}\ \frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}=\frac{g'^3_2}{g'^3_2-27g'^2_3}.$$

Stąd twierdzenia:

I. *Równość rodzaju $\varrho=1$ dwóch krzywych $f=0$, $\varphi=0$ nie jest jeszcze dostatecznym warunkiem, aby te krzywe należały do jednej klasy.*

II. *Dostatecznym warunkiem, aby dwie krzywe $f=0$, $\varphi=0$ tego samego rodzaju $\varrho=1$ należały do jednej klasy jest: albo związek:*

$$k^2=\psi_\nu(k'^2),$$

w jakim pozostawać mają ich moduły, albo równość $J=J'$ ich bezwzględnych niezmienników.

91. Odwracalne podstawienia z dowolnym parametrem. Punktem wyjścia dotychczasowych naszych poszukiwań była funkcya

$t=\varphi(xy)/\psi(xy)$ drugiego stopnia w obrazie $f=0$ rodzaju $\varrho=1$. Przy dowolnem t dostajemy z niej pęk krzywych:

(1) $$\varphi(xy)-t\psi(xy)=0,$$

z których każda przechodzi n a s a m p r z ó d przez stałe punkta $A_1, A_2, \ldots$, których spółrzędne spełniają równocześnie 3 równania $\varphi=0$, $\psi=0$, $f=0$, a potem przez dwa jeszcze punkta:

(2) $$x=R_1(t, \sqrt{Q(t)}),\quad y=R_2(t, \sqrt{Q(t)}),\quad \text{[art. 89., tw. I.]}.$$

Z tych jeden należy do $+\sqrt{Q(t)}$, a drugi do $-\sqrt{Q(t)}$. Lecz z drugiej strony formami (2) da się każdy dowolny punkt krzywej określić. Niechże $t=\lambda$ i $+\sqrt{Q(\lambda)}$, lub $-\sqrt{Q(\lambda)}$ należy do punktu stałego A_1, to wtedy równanie pęku (1) będzie postaci:

(3) $$\varphi(xy, \lambda)-t\psi(xy, \lambda)=0,\text{*})$$

a gdy przyjmiemy, że się punkt A_1 może posuwać po $f=0$, [A_2, $A_3, \ldots$ pozostają jednak stałe], to λ uważać tu trzeba za parametr dowolny. Każda z krzywych (3) ma mieć znowu — oprócz A_1, $A_2, \ldots$ — jeszcze dwa punkty wspólne z $f=0$. Gdy jeden z nich ma mieć spółrzędne $(x_1 y_1)$, to mamy $t=\varphi(x_1 y_1, \lambda)/\psi(x_1 y_1, \lambda)$, a w miejsce pęku (3) dostajemy już jedną krzywę:

$$\psi(x_1 y_1, \lambda).\varphi(xy, \lambda)-\varphi(x_1 y_1, \lambda).\psi(xy, \lambda)=0.$$

Ta posiadając z $f=0$ punkta wspólne A_1, A_2, ..., $(x_1 y_1)$, które równocześnie spełniają równania $f=0$, $\varphi(xy, \lambda)=0$, $\psi(xy, \lambda)=0$, posiadać będzie jeszcze jeden i tylko jeden punkt wspólny, który już od $t=\varphi(x_1 y_1, \lambda)/\psi(x_1 y_1, \lambda)$ zależeć będzie. Spółrzędne (x_2, y_2) tego nowego j e d n e g o punktu wyrażą się więc wymiernie przez x_1, y_1, przez λ i $\sqrt{Q(\lambda)}$. Połóżmyż:

(α) $$x_2=P_2(x_1 y_1; \lambda),\quad y_2=Q_2(x_1 y_1; \lambda),$$

to P_2, Q_2 są wymiernemi funkcyami w x_1, y_1.

Gdy w (3) zamiast punktu $(x_1 y_1)$ obierzemy punkt $(x_2 y_2)$, to dostaniemy tę samą krzywę, która z punktów swoich wspólnych z $f=0$ tylko jeden zależny od $t=\varphi(x_2 y_2, \lambda)/\psi(x_2 y_2, \lambda)$ posiadać będzie. Musi to być punkt $(x_1 y_1)$, a wskutek tego mamy naodwrót:

(β) $$x_1=P_1(x_2 y_2; \lambda),\quad y_1=Q_1(x_2 y_2; \lambda),$$

gdzie P_1, Q_1 są znowu wymierne w x_2, y_2. Podstawienie (α) — [lub (β)] — jest więc odwracalne, a stąd twierdzenie:

I. *Każda krzywa rodzaju $\varrho=1$ dopuszcza odwracalne podstawienie, przeprowadzające ją w samą siebie. P o d s t a w i e n i e t o z a l e ż y o d*

*) W równaniu to wchodzi wymiernie λ i $\sqrt{Q(\lambda)}$

dowolnego parametru, a zmiana jego wartości zmienia sposób, w jaki się tę krzywę pojmuje jako szereg punktów i poporządkowuje innym punktom na niej leżącym. Przy pewnych wartościach tego parametru dostajemy identyczne podstawienie $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. [Szeregi punktów odpowiadające sobie są wtedy identyczne].

Zauważmy krzywę $f=0$ rodzaju $\varrho>1$ i przyjmijmy, że i ją odtworzyć można za pomocą pewnego odwracalnego podstawienia:

$$(a)\qquad x=P(\xi\eta,\lambda),\quad y=Q(\xi\eta,\lambda),$$

$$(b)\qquad \xi=P_1(xy,\lambda),\quad \eta=Q_1(xy,\lambda),$$

w którem dowolny parametr λ zawiera się w ten sposób, że P, Q, P_1, Q_1 są jego analitycznemi funkcyami. Utwórzmy w obrazie $f(xy)=0$ dowolną funkcyę $H(xy)_\alpha=G(xy)_\alpha/f(xy)_2$ i iloczyn:

$$H(x'_t y'_t)_\alpha\frac{dx'_t}{dt},$$

w którym $(x'_t y'_t)$ otacza dowolne miejsce tego obrazu.

Gdy $(\xi'_t\eta'_t)$ jest parą funkcyj, odpowiadającą parze $(x'_t y'_t)$, to dostajemy:

$$x'_t=P(\xi'_t\eta'_t,\lambda),\quad y'_t=Q(\xi'_t\eta'_t,\lambda),$$

a po podstawieniu (a) mamy dalej:

$$f(xy)=f(\xi\eta,\lambda),\quad f(xy)_2=\frac{\partial f(\xi\eta,\lambda)}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dy}+\frac{\partial f(\xi\eta,\lambda)}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{dy}$$

$$dx=\frac{\partial P}{\partial\xi}\cdot d\xi+\frac{\partial P}{d\eta}d\eta=\frac{\partial x}{\partial\xi}\cdot d\xi+\frac{\partial y}{d\eta}\cdot d\eta.$$

Zauważmy:

$$\frac{dx}{f(xy)_2}=\frac{\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta}{f(xy)_2}\cdot\frac{f(\xi\eta,\lambda)_2}{f(\xi\eta,\lambda)_2}=$$

$$=\frac{\frac{\partial x}{\partial\xi}.d\xi.f(\xi\eta,\lambda)_2+\frac{\partial x}{\partial\eta}.d\eta.f(\xi\eta,\lambda)_2}{f(xy)_2}\cdot\frac{1}{f(\xi\eta,\lambda)_2},$$

to ponieważ $d\eta.f(\xi\eta,\lambda)_2=-d\xi.f(\xi\eta,\lambda)_1$ — możemy napisać:

$$\frac{dx}{f(xy)_2}=\frac{\frac{\partial x}{\partial\xi}f(\xi\eta,\lambda)_2-f(\xi\eta,\lambda)_1\frac{\partial x}{\partial\eta}}{f(xy)_2}\cdot\frac{d\xi}{f(\xi\eta,\lambda)_2}=\Gamma(\xi\eta,\lambda)\cdot\frac{d\xi}{f(\xi\eta,\lambda)_2},$$

gdzie Γ jest wymierną funkcyą w ξ, η, a analityczną w parametrze λ. Z tego wynika, że po podstawieniach (a) mieć będziemy:

$$H(x'_t y'_t)_\alpha \frac{dx'_t}{dt} =$$

(4)
$$= G(P(\xi'_t\eta'_t, \lambda), Q(\xi'_t\eta'_t, \lambda))_\alpha . \Gamma(\xi'_t\eta'_t, \lambda) . \frac{\frac{d\xi'_t}{dt}}{f(\xi'_t\eta'_t, \lambda)_2} = R(\xi'_t\eta'_t, \lambda)_\alpha \frac{d\xi'_t}{dt}.$$

Tu lewa strona nigdzie zerem się nie staje. A więc i prawa strona nie posiada żadnych miejsc zerowych, a stąd wynika, że

(5) $$R(\xi'\eta', \lambda)_\alpha \frac{d\xi'}{dt} = [\varphi(\lambda)_{\alpha 1} H(\xi'\eta')_1 + \dots + \varphi(\lambda)_{\alpha\varrho} H(\xi'\eta')_\varrho] \frac{d\xi'}{dt}.$$

Aby spółczynniki $\varphi(\lambda)_{\alpha\beta}$ bliżej zbadać, zauważmy, że:

$$H(\overset{\alpha}{\xi_t}\overset{\alpha}{\eta_t})_\alpha \frac{d\overset{\alpha}{\xi_t}}{dt} = 1, \quad H(\overset{\beta}{\xi_t}\overset{\beta}{\eta_t})_\alpha \frac{d\overset{\beta}{\xi_t}}{dt} = 0 \quad \text{[art. 75.]},$$

a wskutek tego z (5) wyniknie:

$$\varphi(\lambda)_{\alpha\beta} = \left[R(\overset{\beta}{\xi_t}\overset{\beta}{\eta_t}, \lambda)_\alpha \frac{d\overset{\beta}{\xi_t}}{dt} \right]_{t^0}.$$

To wskazuje, że wszystkie $\varphi(\lambda)_{\alpha\beta}$ nie zależą ani od ξ' ani od η' i są analitycznemi funkcyami samego λ. Z równania:

$$H(x'_t y'_t)_\alpha \frac{dx'_t}{dt} = \varphi(\lambda)_{\alpha 1} H(\xi'_t \eta'_t)_1 \frac{d\xi'_t}{dt} + \dots$$

— gdy położymy:

$$H(x'_t y'_t)_\alpha \frac{dx'_t}{dt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} h(x'y')_{\alpha\nu} t^\nu, \quad H(\xi'_t\eta'_t)_\alpha \frac{d\xi'_t}{dt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} h(\xi'\eta')_{\alpha\nu} t^\nu \quad -$$

dostajemy:

$$h(x'y')_{\alpha\beta} = \varphi(\lambda)_{\alpha 1} h(\xi'\eta')_{1\beta} + \dots + \varphi(\lambda)_{\alpha\varrho} h(\xi'\eta')_{\varrho\beta},$$
$$\alpha \gtreqless \beta = 1, 2, \dots, \rho.$$

Utwórzmyż wyznacznik $D(h(x'y')) = D_1(x'y')$ — [por. art. 77. i uwagę I. w art. 79.] — to mieć będziemy:

$$D_1(x'y') = L . D_1(\xi'\eta'), \quad \text{gdzie}$$

$$L = \begin{vmatrix} \varphi(\lambda)_{11}, \dots, \varphi(\lambda)_{1\varrho} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \varphi(\lambda)_{\varrho 1}, \dots, \varphi(\lambda)_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}.$$

Gdy wyznacznik L, który jest analityczną funkcyą parametru λ, staje się zerem na miejscach $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots$, to po wydzieleniu tych miejsc jest $L \neq 0$ w pozostałych zwartych obszarach (λ'). Uwzględniając te obszary, musimy mieć równocześnie z $D_1(x'y') = 0$

także i $D_1(\xi'\eta')=0$. Wybierając więc $(x'y')$ tak, aby $D_1(x'y')=0$, dostajemy odrazu z podstawień:

$$x'=P(\xi'\eta',\lambda'),\quad y'=Q(\xi'\eta',\lambda')$$

nieskończenie wiele miejsc $(\xi'\eta')$, dających $D_1(\xi'\eta')=0$. Toby wskazywało, że w obrazie $f(xy)=f(\xi\eta,\lambda)=0$ można znaleść nieskończenie wiele miejsc $(\xi'\eta')$, dopuszczających funkcyę wymierną z jednem miejscem nieskończonościowem ϱ^{go} stopnia. Lecz że to jest niemożliwe, więc mamy twierdzenie:

II. *Żadna krzywa rodzaju $\varrho>1$ nie może przejść sama na siebie przez odwracalne podstawienie zawierające dowolny parametr.* *)

Ze związku (4), który się tu utrzyma i wtedy, kiedy (*a*), (*b*) utworzą odwracalne podstawienie, nie przerabiające danej krzywej samą w sobie, wynika jeszcze:

III. *Każda funkcya $H(xy)$, lub całka pierwszego rodzaju zmienia się znowu na funkcyę $H(\xi\eta)$ lub całką pierwszego rodzaju przy najdowolniejszej odwracalnej transformacyi.*

92. O krzywych rodzaju $\varrho=2$. Mając krzywę $f=0$ rodzaju $\varrho=2$, a stopnia n, poprowadźmy dołączoną krzywę $(n-3)^{go}$ stopnia. Po za punktami podwójnymi przetnie ona $f=0$ jeszcze w dwóch punktach P, P', a z tych jeden tylko można obrać dowolnie.

Gdy $\varphi=0$ i $\psi=0$ są równania dwóch różnych takich dołączonych krzywych, to $\varphi-\lambda\psi=0$ jest — przy λ dowolnem — pękiem takich krzywych, a $\lambda=\varphi/\psi$ jest funkcyą wymierną pary (xy) drugiego stopnia w obrazie $f=0$. Stopień 2 jest tu $=\varrho$, a możliwość jego wynika stąd, że tu punkty P, P' są w każdej krzywej dołączonej $(n-3)^{go}$ stopnia od siebie zależne.

Uważajmy x za funkcyę stopnia n^{go}, to mamy związek:

$$Ax^2+2Bx+C=0, \tag{1}$$

w którym A, B, C są całkowitemi funkcyami parametru λ, a stopni n, i który może być nieprzywiedlny. Ze związku tego wynika:

$$x=R_1(\lambda,\sqrt{P(\lambda)}), \tag{2}$$

gdzie R_1 jest znakiem funkcyi wymiernej, a $P(\lambda)$ całkowitą funk-

*) To twierdzenie ogłosił pierwszy H. Schwarz: *„Gesammelte math. Abhandlungen“*, T. 2., str. 235—291. — Dowód, jakiego użyto w tekscie, podał G. Hettner: *„Göttinger Nachrichten“*, 1880, str. 386—398.

Por. także: Hurwitz: *„Math. Ann.“* T. 32., str. 291., Appell. C. R. T. 96, str. 1642.

cyą parametru λ. Zmienna y wyrazi się tu wymiernie przez x i λ a to — po uwzględnieniu (2) — daje:

(3) $$y=R_2(\lambda, \sqrt{P(\lambda)}),$$

gdzie R_2 jest znowu znakiem wymiernej funkcyi.

Połóżmy $t^2=P(\lambda)$, to z form (2) i (3) wynika, że każdemu punktowi (λ, t) — gdzie więc już t uznano za $+\sqrt{P(\lambda)}$, lub $-\sqrt{P(\lambda)}$ — krzywej $t^2=P(\lambda)$ odpowiada jeden tylko, całkiem oznaczony punkt (xy) danej krzywej i że zatem

(a) $$x=R_1(\lambda, t), \quad y=R_2(\lambda, t).$$

Napiszmy w (2) za $\sqrt{P(\lambda)}$ wprost t i uwzględnijmy, że (2) da się zawsze sprowadzić do postaci $x=[-B+Q(\lambda).t]/A$, to gdy tu w B, w $Q(\lambda)$ i w A położymy $\lambda=\varphi/\psi$, dostaniemy obok

(b) $$\lambda=\varphi/\psi=R'_1(xy), \text{ jeszcze } t=R'_2(xy)$$

[R'_1, R'_2 są znakami funkcyj wymiernych].

Z tego wnosimy, że podstawienie (a) jest odwracalne i przerabia $f=0$ na krzywę $t^2=P(\lambda)$. Ta ostatnia krzywa musi więc być znowu rodzaju $\varrho=2$, a to się tylko wtedy spełni, gdy $P(\lambda)$ będzie funkcyą 5^{go} lub 6^{go} stopnia [art. 71]. Z tych poszukiwań wynika:

I. *Spółrzędne (x, y) każdej krzywej rodzaju $\varrho=2$ dają się wyrazić wymiernie przez dowolny parametr λ i drugi pierwiastek z funkcyi całkowitej $P(\lambda)$ stopnia 5^{go} lub 6^{go}.*

Zauważmy na samej krzywej $f=0$ dwa punkta:

(A) $$x_1=R_1(\lambda, +t), \quad y_1=R_2(\lambda, +t),$$

(B) $$x_2=R_1(\lambda, -t), \quad y_2=R_2(\lambda, -t),$$

to podstawiając w (A) λ i t wyrażone formami (b) przez (x_2y_2), a w (B) λ i t wyrażone również formami (b) przez (x_1y_1), dostaniemy:

(a') $$x_1=S_1(x_2y_2), \quad y_1=S_2(x_2y_2),$$

(b') $$x_2=T_1(x_1y_1), \quad y_2=T_2(x_1y_1),$$

gdzie S_1, S_2, T_1, T_2 są znakami funkcyj wymiernych. Stąd wynika:

II. *Na każdej krzywej rodzaju $\varrho=2$ dadzą się wyznaczyć dwa szeregi punktów w ten sposób, że spółrzędne punktów jednego szeregu wyrażają się wymiernie i odwracalnie przez spółrzędne punktów szeregu drugiego, ale tu nie wchodzi już w grę żaden dowolny parametr.*

93. Krzywe hypereliptyczne. Wiadomo, że w krzywej $f=0$ n^{go} stopnia a rodzaju ϱ można obrać dowolnie $(\varrho-1)$ punktów nieosobliwych i przeprowadzić przez nie krzywę dołączoną C_{n-3} stopnia

$(n-3)^{go}$ — [art. 83]. Wtedy C_{n-3} przetnie krzywę $f=0$ w dalszych jeszcze $(\varrho-1)$ punktach, zależnych od punktów obranych. Załóżmy $\varrho \geqq 3$, a punktów dowolnych obierzmy tylko $(\varrho-3)$, nazywając je A_q, $q=1, 2, \ldots, (\varrho-3)$, to wszystkie krzywe C_{n-3} przez te punkta przechodzące wyrażą się równaniem:

$$\alpha_1 G_1(xy) + \alpha_2 G_2(xy) + \alpha_3 G_3(xy) = 0$$

o dowolnych parametrach α_1, α_2, α_3, a każde z równań $G_\lambda=0$, $\lambda=1, 2, 3$, określa pewną krzywę dołączoną, przechodzącą przez punkta A_q. Zauważmy podstawienia:

$$(1) \qquad x' = \frac{G_2(xy)}{G_1(xy)}, \quad y' = \frac{G_3(xy)}{G_1(xy)},$$

to eliminując z tych równań i równania $f=0$ zmienne x, y, dojdziemy do przerobionej krzywej $f'(x'y')=0$, takiej, że jednemu punktowi (xy) w krzywej $f=0$ odpowiada w niej jeden tylko punkt $(x'y')$. Gdy i odwrotnie jednemu punktowi $(x'y')$ odpowiada jeden tylko punkt (xy), to podstawienie (1) jest odwracalne. Uwagi nad tym wypadkiem zostawiając na później, przyjmijmy, że podstawienie (1) nie jest odwracalne i zajmijmy się następstwami tego założenia. Każde z równań:

$$(\alpha) \quad x'G_1 - G_2 = 0, \qquad (\beta) \quad y'.G_1 - G_3 = 0,$$

określa wtedy takie krzywe, że one poza punktami podwójnymi i poza punktami A_q, najdowolniej wybranymi, przecinają się na $f=0$ jeszcze w dwóch, lub więcej punktach.

Wyjdźmyż — mając to — z całkiem ogólnego stanowiska i przyjmijmy, że za pomocą $(\varrho-2)$ dowolnych punktów A_1, A_2, ..., $A_{(\varrho-2)}$, obranych na $f=0$ tworzymy pęk dołączonych krzywych:

$$(2) \qquad \varphi + \lambda\psi = 0.$$

Z tego pęku wyjmijmy taką krzywę, która $f=0$ przecina w punkcie $A_{\varrho-1}=(\xi, \eta)$. Jej równaniem będzie:

$$(3) \qquad \varphi + \lambda_1\psi = 0, \text{ gdzie } \lambda_1 = -\frac{\varphi(\xi\eta)}{\psi(\xi\eta)}.$$

Krzywa (3) będąc dołączoną $(n-3)^{go}$ stopnia musi — posiadając już z $f=0$, $(\varrho-1)$ punktów wspólnych — przeciąć $f=0$ jeszcze w dalszych $(\varrho-1)$ punktach:

$$(4) \qquad B_1, B_2, \ldots, B_{\varrho-2}, B_{\varrho-1}=(\xi'\eta'),$$

a ich spółrzędne trzeba już uważać za zależne od λ_1.

Aby rozstrzygnąć, czy między punktami (4) są i takie, które od λ_1 nie zależą, utwórzmy pęk krzywych dołączonych $(n-3)^{go}$

stopnia, przechodzący przez punkta B_1, B_2, ..., $B_{\varrho-2}$. Gdy równaniem tego pęku jest:

$$\bar{\varphi}(xy, \lambda_1)+\mu\bar{\psi}(xy\,\lambda_1)=0,$$

a wyjmiemy z niego tę krzywę, która przechodzi przez $B_{\varrho-1}$, to ta krzywa będzie identyczną z krzywą (3), a określi się teraz równaniem:

$$\bar{\varphi}+\mu_1\bar{\psi}=0, \text{ gdzie } \mu_1=-\frac{\bar{\varphi}(\xi'\eta', \lambda_1)}{\bar{\psi}(\xi'\eta', \lambda_1)},$$

zależy więc od B_1, B_2, ..., $B_{\varrho-1}$. Jej dalsze punkta przecięcia się z $f=0$ są tu teraz: A_1, A_2, ..., $A_{\varrho-2}$, $A_{\varrho-1}$. Z nich punkta A_1, A_2, ..., $A_{\varrho-2}$, jako zupełnie dowolnie przódy już wybrane, nie mogą zależeć od μ_1, a więc i od $B_{\varrho-1}$. Muszą się więc zaliczyć do punktów przecięcia się krzywych $\bar{\varphi}(xy, \lambda_1)=0$, $\bar{\psi}(xy, \lambda_1)=0$ i zależeć zatem od λ, t. j. od B_1, B_2, ..., $B_{\varrho-2}$. Lecz i to jest niemożliwe. Stąd więc wnosić trzeba, że φ, ψ nie zawierają λ i że spółrzędne punktów B_1, B_2, ..., $B_{\varrho-2}$ nie zależą od λ_1, czyli od $A_{\varrho-1}$, a tylko zawisłe są od A_1, A_2, ..., $A_{\varrho-2}$. Pozostały punkt $A_{\varrho-1}$ zależy już od λ, a że i $B_{\varrho-1}$ zależy już od μ, a więc i od λ, więc te dwa ostatnie punkty zależą od siebie, a stąd twierdzenie:

I. *Krzywa rodzaju* $\varrho\geq 3$ *o tej własności, że dla niej podstawienia* (1) *nie są odwracalne, charakteryzuje się tem, że w niej wszystkie krzywe dołączone* $(n-3)^{\text{go}}$ *stopnia, poprowadzone przez* $(\varrho-2)$ *punktów stałych* A_1, A_2, ..., $A_{\varrho-2}$, *przechodzą przez dalszych stałych* $(\varrho-2)$ *punktów* B_1, B_2, ..., $B_{\varrho-2}$, *a tylko dwa dalsze punkta przecięcia się:* $(\xi\eta)$, $(\xi'\eta')$ *zależeć będą od siebie. Posuwanie się jednego z nich n. p.* (ξ, η) *po krzywej* $f=0$ *daje czem raz nową krzywę pęku z drugim punktem* $(\xi'\eta')$ *na* $f=0$.

W takich krzywych istnieją zatem funkcye wymierne pary (x, y) stopnia drugiego. Takie krzywe nazywamy hypereliptycznemi, a to z następujących powodów: Gdy jedną z funkcyj 2^{go} stopnia jest $\lambda=\varphi/\psi$, to wnosimy tu — podobnie, jak w art. poprzedzającym — że daną krzywę $f=0$ przerobić będzie można przez odwracalne podstawienia na krzywę hypereliptyczną o równaniu $\chi(t, \lambda)=t^2-P(\lambda)=0$. To ostatnie równanie ma być znowu rodzaju ϱ, a to ma miejsce, gdy $P(\lambda)$ jest funkcyą wymierną całkowitą stopnia $(2\varrho+1)$, lub $(2\varrho+2)$. Dalej wynikną twierdzenia:

II. *Spółrzędne krzywej hypereliptycznej rodzaju* ϱ *dają się wyrazić formami:*

$$(a) \qquad x=R_1(\lambda, \sqrt{P(\lambda)}), \quad y=R_2(\lambda, \sqrt{P(\lambda)}),$$

w których R_1, R_2 *są znakami funkcyj wymiernych, a* $P(\lambda)$ *jest stopnia* $(2\varrho+1)$ *lub* $(2\varrho+2)$.

III. *Na każdej krzywej hypereliptycznej dadzą się wyznaczyć takie dwa różne szeregi punktów, których — jedne przez drugie — można wyrazić wymiernie.*

Połóżmy $t^2=P_1(\lambda).P_2(\lambda)$, gdzie P_1 jest stopnia $(\varrho+1)$ lub $(\varrho+2)$, a P_2 stopnia ϱ i zauważmy podstawienie:

$$\lambda=\lambda', \quad t=t'P_2(\lambda),$$

które widocznie jest odwracalne, to z równania $\chi(t,\lambda)=0$ dojdziemy do równania: $t'^2P_2(\lambda')=P_1(\lambda')$. To znaczy:

IV. *Każda krzywa hypereliptyczna da się przez odwracalne podstawienia przerobić na krzywę stopnia* $(\varrho+2)^{go}$.

Z funkcyą $\lambda=\varphi/\psi$, która doprowadziła do wyrażeń (a), łączy się pęk krzywych dołączonych o równaniu:

$$\varphi-\lambda\psi=0. \tag{5}$$

Z tego pęku wybierzmy dwie różne krzywe:

$$m_1\varphi-n_1\psi=0, \quad m_2\varphi-n_2\psi=0,$$

to równanie:

$$(m_1\varphi-n_1\psi)+\mu(m_2\varphi-n_2\psi)=0$$

jest znowu równaniem pęku (5). Pisząc to równanie w postaci:

$$\varphi-\frac{n_1+n_2\mu}{m_1+m_2\mu}\psi=0, \quad \text{mamy:} \tag{5'}$$

$$\lambda=\frac{n_1+n_2\mu}{m_1+m_2\mu}. \tag{6}$$

Lecz $\mu=-\dfrac{(m_1\varphi-n_1\psi)}{(m_2\varphi-n_2\psi)}$ jest znowu funkcyą drugiego stopnia; przez nią wyrażą się więc x, y znowu formami:

$$x=S_1(\mu,\sqrt{P_1(\mu)}), \quad y=S_2(\mu,\sqrt{P_1(\mu)}) \tag{b}$$

o wymiernych S_1, S_2. Przejście z (a) do (b) odbywa się tu przez liniowe ułamkowe podstawienie (6), a gdy $P(\lambda)$ zamienimy na formę jednorodną $\Pi(\lambda_1\lambda_2)=\lambda_2{}^{2\varrho+2}P\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$, to ta forma przez podstawienie $\begin{pmatrix}\lambda_1=m_1\mu_1+m_2\mu_2\\ \lambda_2=n_1\mu_1+n_2\mu_2\end{pmatrix}$ przechodzi na formę $C.\mu_2{}^{2\varrho+2}.P_1\left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\right)=C\Pi_1(\mu_1\mu_2)$, która powstaje z $P_1(\mu)$ zamieszczonego w (b), a w której C jest pewną stałą ilością, dającą się łatwo obliczyć. Połóżmy:

$$P(\lambda)=(\lambda-a_1)...(\lambda-a_{2\varrho+2}), \quad P_1(\mu)=(\mu-b_1)...(\mu-b_{2\varrho+2})$$

i uwzględnijmy w (a) i (b) dwuwartościowość pierwiastków:

$$\sqrt{P(\lambda)}, \quad \sqrt{P(\mu)}.$$

Dla $\lambda=a_s$, $\mu=b_s$, $s=1,2,\ldots,2\varrho+2$ dostajemy z (a) i (b):

$$(c) \qquad \begin{aligned} x_s&=R_1(a_s)=S_1(b_s)\\ y_s&=R_2(a_s)=S_2(b_s), \end{aligned}$$

dwukrotnie się powtarzające. Z tego wnosimy, że w pęku (5) znajduje się $(2\varrho+2)$ krzywych dotykających $f=0$ w punktach (c).

Utwórzmy anharmoniczne stosunki:

$$(a_1a_2a_3a_s)=\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}:\frac{a_1-a_s}{a_2-a_s},\quad s=4,5,\ldots,(2\varrho+2)$$

to mamy tu:

$$(7) \qquad a_s=\frac{n_1+n_2b_s}{m_1+m_2b_s},\quad s=1,2,\ldots,2\varrho+2,$$

a stąd wynika:

$$(8) \qquad (a_1a_2a_3a_s)=(b_1b_2b_3b_s),\quad s=4,5,\ldots,(2\varrho+2),$$

Możemy to tak wyrazić: Gdy formę:

$$\Pi(\lambda_1,\lambda_2)=(\lambda_2-a_1\lambda_1)\ldots(\lambda_2-a_{2\varrho+2}\lambda_1)$$

przerobimy przez podstawienie:

$$(9) \qquad \lambda_1=m_1\mu_1+m_2\mu_2,\quad \lambda_2=n_1\mu_1+n_2\mu_2,$$

na formę $C\Pi_1(\mu_1\mu_2)=C\Pi_1(\mu_2-b_1\mu_1)\ldots(\mu_2-b_{2\varrho+2}\mu_1)$, a więc przez odwrotne podstawienie przechodzi znowu Π_1 na $C'\Pi$, to wtedy wykazuje się równość $(2\varrho-1)$ anharmonicznych stosunków (8), które tu modułami nazwiemy.

Przyjmijmyż naodwrót, że dwie dopieroco wprowadzone formy Π, Π_1 posiadają $(2\varrho-1)$ równych sobie modułów. Wtedy podstawienia (8) przy dowolnych m_1, m_2, n_1, n_2 nie naruszają tych modułów, a za podstawieniami (9) przejdzie, jak łatwo sprawdzić, Π na $C_1\Pi_1$, a naodwrót Π_1 przejdzie na $C\Pi$, gdzie C, C_1 są pewnemi stałemi. Stąd wnosimy:

V. *Dostatecznym warunkiem, aby z dwóch danych form dwójkowych tego samego stopnia $(2\varrho+2)$ każda dała się przerobić na drugą przez jednorodne liniowe podstawienia — jest równość ich $(2\varrho-1)$ modułów.*

Mając ten wynik zauważmy dwie krzywe hypereliptyczne $f(xy)=0$, $f'(x'y')=0$ tego samego rzędu ϱ i zapytajmy, kiedy one zaliczać się mogą do tej samej klasy?

Spółrzędne (x, y) krzywej $f=0$ niech się wyrażają wymiernie przez λ i $\sqrt{P(\lambda)}$, a spółrzędne $(x'y')$ krzywej $f'=0$ przez λ' i $\sqrt{P'(\lambda')}$.

Po przerobieniu krzywych $f=0$, $f'=0$ na $t^2=P(\lambda)$, $t'^2=P'(\lambda')$, do czego doszliśmy przez odwracalne podstawienia, połóżmy:

$$(a') \qquad \lambda = \frac{m_1 + m_2\lambda'}{n_1 + n_2\lambda'},$$

a dostaniemy — jeżeli $P(\lambda)$, $P'(\lambda)$ mają równe moduły —

$$P\left(\frac{m_1 + m_2\lambda'}{n_1 + n_2\lambda'}\right) = \frac{k^2}{(n_1 + n_2\lambda')^{2\varrho+2}} P'(\lambda').$$

Połóżmy dalej:

$$(b') \qquad t = \frac{kt'}{(n_1 + n_2\lambda')^{\varrho+1}}$$

to po podstawieniach (a'), (b'), które są widocznie również odwracalne, przejdziemy z równania $t^2 = P$ do równania $t'^2 = P'$, a za podstawieniami odwrotnemi z równania $t'^2 = P'$ do $t^2 = P^2$. Mamy stąd twierdzenie:

VI. *Dwie krzywe hypereliptyczne należą do jednej klasy, gdy mają* $(2\varrho - 1)$ *równych sobie modułów; albo: Jedna klasa krzywych hyperliptycznych posiada* $(2\varrho - 1)$ *modułów.*

94. Moduły. Zajmijmy się teraz wypadkiem, w którym podstawienia (1) — art. poprzedz. — są odwracalne. Stopień krzywej przerobionej $f'(x'y') = 0$ da się tu w ten sposób oznaczyć:

Zauważmy punkta przecięcia się $(u_1 ...)$ krzywej $f' = 0$ z dowolną prostą $Ax' + By' + C = 0$, to tym punktom odpowiadać będą jednoznacznie punkta przecięcia się $(w_1, ...)$ krzywej $f = 0$ z krzywą $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 0$ (oczywiście po wyłączeniu punktów, jakie te krzywe wspólnie posiadają w punktach podwójnych i w $(\varrho - 3)$ naprzód danych punktach $A_1, A_2, ..., A_{\varrho-3}$). Że zaś każda dołączona krzywa $(n-3)^{\text{go}}$ stopnia posiada — poza punktami podwójnymi — $2(\varrho - 1)$ punktów wspólnych z swoją krzywą, więc na liczbę punktów $(w_1 ...)$, a więc i $(u_1 ...)$ dostaniemy: $(2\varrho - 2) - (\varrho - 3) = \varrho + 1$. To znaczy:

I. *Każdą krzywę niehypereliptyczną rodzaju* $\varrho \geq 3$ *można przez odwracalne podstawienie przerobić na krzywę* $f'(x'y') = 0$ *stopnia* $(\varrho + 1)^{\text{go}}$. Taką krzywę nazywają normalną*).

Jest ona zarazem krzywą najmniejszego stopnia w tej klasie krzywych, do której $f = 0$ należy.

W podstawieniach bowiem:

$$(1) \qquad x' = G_2 / G_1, \quad y' = G_3 / G_1$$

mamy funkcye $(\varrho + 1)^{\text{go}}$ stopnia a więc najmniejszego, jaki istnieje przy niezależnych do siebie miejscach nieskończonościowych. Zdrugiej

*) Clebsch i Gordon. *Th. der Abelschen Functionen.*

strony po eliminacyi x, y z równań (1) i z równania $f=0$ dostajemy równanie $f(x' y')=0$ koniecznie stopnia $(\varrho+1)^{go}$ w obydwu zmiennych a takie równanie może być najniższego wymiaru: $(\varrho+1)$.

Przyjmijmy, że $f'=0$ ma tylko same punkta podwójne. Gdy ich jest d, to ponieważ rodzaj krzywej $f(x' y')$ jest ϱ, więc mamy:

$$d=\frac{\varrho(\varrho-1)}{2}-\varrho=\frac{(\varrho-3)\varrho}{2}.$$

Każdy punkt podwójny (a, b) daje trzy równania, które a, b łączą algebraicznie ze spółczynnikami równania $f'=0$ [art. 62.]. Eliminując z tych trzech równań a i b dostajemy jeden tylko związek między spółczynnikami. A że punktów podwójnych jest d, więc dochodzimy do d związków. Samo równanie ma spółczynników $\frac{(\varrho+1)(\varrho+4)}{2}$, a wskutek d otrzymanych związków dostaniemy w niem tylko:

$$\frac{(\varrho+1)(\varrho+4)}{2}-d=\frac{(\varrho+1)(\varrho+4)}{2}-\frac{(\varrho-3)\varrho}{2}=4\varrho+2 \tag{2}$$

stałych dowolnych.

Rozważmy teraz bliżej podstawienia (1), zapomocą których przechodzimy tu z równania $f=0$ do równania $f'=0$. Funkcye G_1, G_2, G_3 mają poza punktami podwójnymi $(\varrho-3)$ wspólnych miejsc zerowych leżących na $f=0$, a że są dołączonemi funkcyami $(n-3)^{go}$ stopnia więc każda z nich dla siebie ma jeszcze $(\varrho+1)$ punktów zerowych na $f=0$. Z tego wynika, że G_2/G_1, G_3/G_1 są w obrazie algebraicznym $f=0$ funkcyami $(\varrho+1)^{go}$ stopnia, bo na tyluż miejscach są zerami i na tyluż nieskończonościami. Punkta nieskończonościowe mają wspólne; są to miejsca:

$$(x_1 y_1),\ (x_2 y_2) \ldots,\ (x_{\varrho+1},\ y_{\varrho+1}), \tag{3}$$

na których $G_1=0$. Lecz wiemy, że każda funkcya stopnia σ, gdy już w niej obrano σ miejsc nieskończonościowych zawiera jeszcze $(\sigma-\varrho+1)$ stałych dowolnych. Tu więc każda z funkcyj G_2/G_1, G_3/G_1 posiada po 2 stałe dowolne, a obie razem mają 4 spółczynniki dowolne. Lecz miejsca (3) możemy na $f=0$ obierać także całkiem dowolnie, a wskutek tego będzie można w funkcyach rozważanych uważać jeszcze $(\varrho+1)$ spółczynników jako zupełnie dowolne. Obie więc funkcye razem posiadać będą $(\varrho+5)$ dowolnych spółczynników c_ν, $\nu=1, 2, \ldots, \varrho+5$. Od nich wszystkich i od spółczynników $a, b, \ldots$ danego równania $f=0$ zależeć będzie każda z $(4\varrho+2)$ stałych krzywej $f'=0$. Połóżmyż:

$$f=f(x\,y,\ a, b, \ldots),\ f'=f'(x', y', A_1, A_2, \ldots, A_{4\varrho+2}),$$ a dalej:

$$A_\mu=F_\mu(c_1, \ldots, a, b, \ldots),\ \mu=1, 2, \ldots \varrho+5$$

$$A_{\varrho+6}=\Psi_1(c_1, \ldots, a, b, \ldots), \ldots, A_{4\varrho+2}=\Psi_{3\varrho-3}(c_1, \ldots, a, b, \ldots)$$

to ponieważ $c_1, c_2, \ldots, c_{\varrho+5}$ są zupełnie dowolne, możemy je tak wybrać, aby:

$$A_\mu=0=F_\mu(c_1, \ldots, a, b \ldots),\ \mu=1, 2, \ldots, \rho+5.$$

Z tych równań obliczmy jeden system $(c_1, c_2, \ldots, c_{\varrho+5})$ — będą to algebraiczne funkcye spółczynników $a, b, \ldots$ — i wstawmy je w $\Psi_1, \ldots, \Psi_{3\varrho-3}$, to te funkcye przejdą na funkcye samych spółczynników $a, b, \ldots$ i dostaną pewne oznaczone wartości:

$$\Phi_1\,(a, b, \ldots)=\lambda_1, \ldots,\ \Phi_{3\varrho-3}\,(a, b, \ldots)=\lambda_{3\varrho-3}.$$

Funkcye $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{3\varrho-3}$ nazywają się modułami tej klasy krzywych, do której się $f=0$ zalicza, a nazwa ta pochodzi stąd: Zauważmy inną krzywę: $f_1(x, y, a_1, b_1, \ldots)=0$ tej samej klasy i sprowadźmy ją znowu do normalnej krzywej $f'=0$ za pomocą analogicznego podstawienia, jak w wypadku poprzedzającym. Spółczynniki $A_1, \ldots, A_{4\varrho+2}$ okażą się tu znowu funkcyami spółczynników $a_1, b_1, \ldots$ i $(\varrho+5)$ stałych dowolnych. Gdy zaś i tu zażądamy:

$$A_1=A_2=\ldots=A_{\varrho+5}=0,$$

dojdziemy do $(3\varrho-3)$ funkcyj: $\Phi'_1(a_1, b_1, \ldots), \ldots, \Phi'_{3\varrho-3}(a_1, b_1, \ldots)$ a ich wartości po porządku muszą być: $\lambda_1, \ldots, \lambda_{3\varrho-3}$, gdy krzywa $f'=0$ ma być ta sama jak przódy. Dostajemy zatem $(3\varrho-3)$ równości:

$$\Phi_1(a, b, \ldots)=\Phi'_1(a_1, b_1, \ldots), \ldots, \Phi_{3\varrho-3}(a, b, \ldots)=\Phi'_{3\varrho-3}(a_1, b_1, \ldots)$$

a że $f=0$, $f_1=0$ są-to dwie dowolne krzywe jednej klasy, więc stąd wynika:

II. *Jedna klasa krzywych rodzaju* $\varrho>3$ *posiada* $(3\varrho-3)$ *modułów. Są to funkcye, które — utworzone za pomocą szeregu tych samych działań ze spółczynników którejbądź krzywej — są sobie równe**).

III. *Naodwrót: aby krzywe jednakowego rodzaju* $\varrho>3$ *należały do tej samej klasy potrzebna jest równość* $(3\varrho-3)$ *modułów.*

Nie zapuszczając się w szczególne, wyjątkowe wypadki możemy być pewni, że w ogólnych wypadkach nie ma modułów więcej, bo krzywa $f'=0$ stopnia $(\varrho+1)^{go}$ jest w tych razach możliwie najniższego stopnia.

---

*) Riemann. [*Gesamm. math. Werke* str. 120.] wprowadził pierwszy moduły danej klasy krzywych. Moduły tworzą analogię z bezwzględnymi niezmiennikami danej formy jednorodnej. Por. Lindemann. *Vorlesungen ü. Geom. von A. Clebsch.* T. 1. str. 714.

CZĘŚĆ V.

ZWARTOŚĆ POWIERZCHNI (ANALYSIS SITUS). POWIERZCHNIA RIEMANNA.

ROZDZIAŁ XIII.

O zwartościach powierzchni.

95. Uwagi wstępne. Przez powierzchnię rozumieć będziemy wycinek płaszczyzny lub dowolnej powierzchni, ograniczony jedną lub kilkoma zamkniętemi liniami, a także krzywą powierzchnię zamkniętą, t. j. nie posiadającą ograniczeń jak n. p. kula, pierścień dęty (rurowy) i t. p.

Taka powierzchnia nazywa się zwartą, jeżeli możliwem jest z jednego dowolnego jej punktu dojść do każdego innego dowolnego jej punktu po liniach nie opuszczających tej powierzchni. Dowolny wycinek płaszczyzny n. p. trójkąt, koło, (wnętrze koła), kula lub pierścień dęty są powierzchniami zwartemi.

Pierwszy rodzaj powierzchni zwartych są tak zwane powierzchnie pojedyńczo, albo jednokrotnie zwarte, określające się w ten sposób:

1) Każda linia łącząca dwa dowolne punkta powierzchni może się zmienić na każdą inną, a podczas szeregu zmian nie opuszcza powierzchni. Końcowe punkta pozostają te same, lub także się zmieniają.

2) Każda linia zamknięta zawarta w powierzchni może zmaleć do dowolnego punktu, a w tem maleniu nie opuszcza powierzchni.

3) Gdy powierzchnia posiada ograniczenie, to każda linia nie przecinająca się sama z sobą, a łącząca dwa różne punkta tego ograniczenia dzieli już powierzchnię na dwa oddzielne odcinki. Taką powierzchnią jest n. p. trójkąt, koło i t. p.

Dokonane cięcie po dowolnej linii nieprzecinającej się z sobą a dążącej od jednego punktu ograniczenia do innego, lub tego samego nazywać będziemy w każdej powierzchni także przekrojem.

Inny rodzaj powierzchni jest już n. p. płaski pierścień (ograniczony dwoma kołami współśrodkowemi) (fig. 6.).

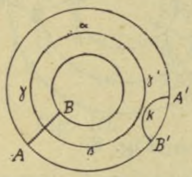


Fig. 6.

Linia $\alpha\gamma\beta$ nie może tu przyjść w linię $\alpha\gamma'\beta$ nie opuszczając powierzchni. Zamknięta linia $\alpha\gamma\beta\gamma'\alpha$ nie może zmaleć do punktu, nie opuszczając powierzchni. Między przekrojami tej powierzchni są i takie, które jej nie rozdzielą na dwa oddzielne odcinki. Takim przekrojem jest AB. (Przekrój $A'KB'$ już dzieli pierścień na dwa oddzielne odcinki). Gdy oba brzegi AB, DE przekroju AB (fig. 7.) zaliczymy do ograniczenia powierzchni przekrojem tym przeinaczonej, to dostajemy powierzchnię o ograniczeniu $ABCDEFGA$. Jest ona już pojedyńczo zwarta, bo posiada już własności 1), 2), 3), charakteryzujące takie powierzchnie.

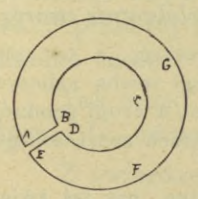


Fig. 7.

Gdy powierzchnia jest zamknięta, a więc nie posiada linij (pasm) ograniczających, to za jej ograniczenie bierzemy dowolny punkt G na niej (otwór w kształcie koła zbiegającego do punktu). Taki punkt G zwany granicznym już się do powierzchni nie liczy. Według tego kula, lub pierścień dęty z punktem G na sobie jest już powierzchnią ograniczoną. Wszystkie powierzchnie, o których mówić będziemy, uważać będziemy za ograniczone, a powierzchnię zamkniętą P z punktem granicznym G nazywać będziemy $\dot{P}$ (Neumann). W takiej powierzchni $\dot{P}$ uważać trzeba za przekrój każdą dowolną zamkniętą linię, przechodzącą przez G. Taka bowiem linia przebiega w niej od ograniczenia do ograniczenia.

Kula z punktem G jest jednokrotnie zwartą.

Każdą tu bowiem linię zamienić można na inną nie przekraczając punktu G — nie opuszczając powierzchni. Każdą zamkniętą krzywę można zmniejszyć do punktu nie przekraczając punktu G.

Przekrój poczynający się w punkcie G i kończący się w tym punkcie dzieli kulę na dwa oddzielne odcinki. Są-to własności powierzchni jednokrotnie zwartej.

Pierścień dęty z punktem G (fig. 8., str. nast.) nie jest jednokrotnie zwartą powierzchnią. Są tu bowiem krzywe, które nie mogą przyjść na inne, nie opuszczając powierzchni. Taką jest

n. p. linia $\alpha\gamma\beta$ nie mogąca zmienić się na $\alpha\gamma'\beta$. Są tu linie zamknięte, które nie mogą zmniejszyć się do punktu, nie opuszczając powierzchni. Takiemi są n. p. linia $CKK'C$ i linia $\alpha\gamma\beta\gamma'\alpha$. Obrany punkt G nie zmieni tych stosunków, a daje tylko możność prowadzenia przekrojów. Poprowadźmyż przekrój $GABG$. Mimo tego przekroju powierzchnia nie rozpada się jeszcze na dwa oddzielne odcinki. Poprowadźmy oprócz tego jeszcze przekrój $G\beta\gamma\alpha\gamma'G$, to i mimo tych dwóch przekrojów mamy ciągle jeszcze jedną tylko powierzchnię, ale ta jest już jednokrotnie zwarta.

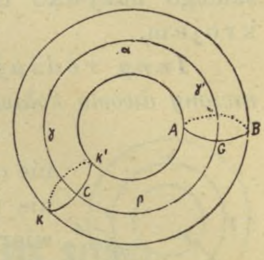


Fig. 8.

Definicya. *Powierzchnia nazywa się jednokrotnie zwartą, gdy ją każdy przekrój rozdziela na dwie oddzielne powierzchnie (odcinki). Gdy w powierzchni możliwy jest przekrój nie rozdzielający jej na dwie oddzielne powierzchnie, to taką powierzchnię nazywamy wielokrotnie zwartą.*

Uwaga. Gdy w powierzchni poprowadzono pierwszy przekrój, a ten nie rozdziela powierzchni na dwie oddzielne części, to jego brzegi trzeba zaliczyć do pasm powierzchni przetworzonej tym pierwszym przekrojem, a drugi przekrój i dalsze przekroje mogą już poczynać się i kończyć w punktach zwiększonego ograniczenia.

Nie odróżniając, czy pasmo ograniczające jest pierwotne, czy też zwiększone już pierwszymi przekrojami, mówić będziemy zawsze o przekrojach poczynających się i kończących w punktach pasm ograniczających.

96. Dzielenie powierzchni przekrojami. Wychodząc z określeń danych w art. poprzedzającym, zajmiemy się teraz systematycznem wyprowadzeniem własności powierzchni pod względem ich zwartości, zaczynając od powierzchni jednokrotnie zwartych.

I. *Jednokrotnie zwarta powierzchnia nie może posiadać jako ograniczenie dwóch zamkniętych pasm oddzielnych.*

Dowód. Gdyby SS', TT' (fig. 9.) były takiemi pasmami, to zrobiwszy przekrój pq łączący te dwa pasma, możliwemby było z punktu $\mu \equiv \mu'$ dostać się — nie wychodząc z powierzchni — znowu do punktu $\mu' \equiv \mu$. Przekrój pq nie rozdzielałby zatem powierzchni na dwa oddzielne odcinki. c. b. d. d.

Jedno zamknięte pasmo, zawarte w powierzchni jednokrotnie zwartej, może być punktem G w powierzchniach zamkniętych.

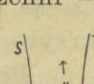


Fig. 9.

II. *Przekrój powierzchni jednokrotnie zwartej daje dwie powierzchnie, które są znowu jednokrotnie zwarte.*

Przekrojem danej powierzchni P niech będzie ab (fig. 10.), a do ab niech przytyka powstająca stąd część powierzchni P_1 posiadająca — między innemi — jako część ograniczenia pasmo cd.

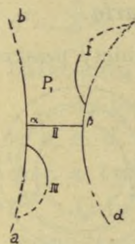


Fig. 10.

Poprowadzony w tej części P_1 przekrój może być trojaki: 1⁰) przekrój I., który się w cd zaczyna i w cd się kończy; 2⁰) przekrój II., który się w ab zaczyna, a kończy się w cd; 3⁰) przekrój III., który się w ab zaczyna i kończy się w ab.

Gdyby przekrój I. nie rozdzielał powierzchni P_1 na dwie osobne części, toby ten przekrój po spojeniu samej powierzchni P wzdłuż ab, nie rozdzielił już P na dwie osobne części. Powierzchnia P nie byłaby jednokrotnie zwartą.

Gdyby przekrój II. nie rozdzielał powierzchni P_1 na dwie oddzielne ozęści, toby — po spojeniu powierzchni P — wzdłuż αa..., przekrój (...$b\alpha\beta$) nie rozdzielił powierzchni P na dwie oddzielne części, a powierzchnia P nie byłaby jednokrotnie zwartą.

Tak samo trzeba rozumować o przekroju III., przez co twierdzenie II. mamy udowodnione.

Z twierdzenia II. wypływają takie wnioski:

A. Powierzchnia, która przez jeden przekrój rozpadła się na dwie części jednokrotnie zwarte, była koniecznie sama już jednokrotnie zwartą.

B. Jednokrotnie zwarta powierzchnia rozpada się wskutek n przekrojów na (n+1) jednokrotnie zwartych powierzchni.

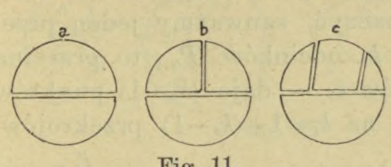


Fig. 11.

W *a)*, *b)*, *c)* (fig. 11.) mamy po porządku:

1 przekrój, 2 odcinki;
2 przekroje, 3 odcinki;
3 przekroje, 4 odcinki.

C. Gdy mamy m powierzchni jednokrotnie zwartych, a poprowadzimy w nich n przekrojów, to dostaniemy (n+m) oddzielnych odcinków (jednokrotnie zwartych).

Gdy bowiem w powierzchniach:

$$(a) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_m$$

poprowadzimy odpowiednio po $s_1, s_2, \ldots, s_m$ przekrojów, gdzie $s_1+s_2+\ldots+s_m=n$, to z wszystkich powierzchni (a) dostaniemy (wskutek wniosku B) oddzielnych części:

$$(s_1+1)+(s_2+1)+\ldots+(s_m+1)=n+m \quad \text{c. b. d. d.}$$

D. Gdy powierzchnia jest wielokrotnie zwartą, a poprowadzimy w niej przekrój rozdzielający ją na 2 oddzielne części, to jedna przynajmniej z tych dwóch części musi być jeszcze wielokrotnie zwartą.

Gdy n. p. w pierścieniu dętym (fig. 12.) poprowadzimy zamknięty przekrój (przez punkt G) to dostaniemy: *a)* część Γ jednokrotnie zwartą i *b)* część R wielokrotnie zwartą, gdyż ona po dwóch przekrojach $(a\,c\,b)$ i $(c\,d\,e\,c)$ nie rozpada się jeszcze na dwie części.

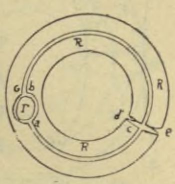


Fig. 12.

III. *Gdy powierzchnia P jednokrotnie lub wielokrotnie zwarta rozpada się po m przekrojach $c_1, c_2,\ldots$ na n odcinków jednokrotnej zwartości, a po μ przekrojach $c'_1, c'_2,\ldots$ rozpada się na ν takich odcinków, to zawsze jest $m-n=\mu-\nu$.*

Poprowadźmy — aby to udowodnić — w powierzchni $(m+\mu)$ przekrojów, nie wyruszając z pierwotnego położenia żadnego z odcinków tak powstających. Na powierzchni P zauważmy odcinki $P_1, P_2,\ldots, P_n$, utworzone wyłącznie przez m przekrojów $c_1, c_2,\ldots$ Przez te odcinki przebiegają części przekrojów $c'_1, c'_2,\ldots$

W $P_1, P_2,\ldots, P_n$ znajdziemy więc przekrojów więcej, niż μ. Niechże tych przekrojów będzie $\mu+\delta$, to $P_1, P_2,\ldots, P_n$ rozpadły się przez nie na $n+\mu+\delta$ odcinków jednokrotnie zwartych [wniosek C].

Zauważmy teraz na P odcinki $Q_1, Q_2,\ldots, Q_\nu$ utworzone przez μ przekrojów $c'_1, c'_2,\ldots$ Przez nie przebiegają części m przekrojów $c_1, c_2,\ldots$ W $Q_1, Q_2,\ldots, Q_\nu$ znajdujemy więc przekrojów więcej niż m. Niech tych przekrojów będzie $m+\delta'$, te $Q_1, Q_2,\ldots, Q_\nu$ rozpadły się na $\nu+m+\delta'$ odcinków jednokrotnie zwartych, a koniecznie musi być $n+\mu+\delta=\nu+m+\delta'$. Aby δ wyznaczyć, zauważmy jeden przekrój c'_t. Gdy on przechodzi przez k_t odcinków P_α, to przecina w swym przebiegu (k_t-1) przekrojów c_s — daje (k_t-1) punktów przecięcia się $(c_s c'_t)$ — i rozpada się na $k_t=1+(k_t-1)$ przekrojów. Ponieważ przekrojów c'_t jest μ, to dostajemy z nich $\mu+\sum\limits_{t=1}^{\mu}(k_t-1)$ przekrojów zrobionych w $P_1, P_2,\ldots, P_n$. Te odcinki rozpadną się więc na $n+\mu+\sum\limits_{t=1}^{\mu}(k_t-1)$ odcinków, gdzie widocznie $\delta=\sum\limits_{t=1}^{\mu}(k_t-1)$. Pojmując podział powierzchni w drugi sposób, przyjmijmy, że przekrój c_s przechodzi przez k'_s odcinków Q_s. Daje on w takim razie (k'_s-1) punktów przecięcia się $(c_s c'_t)$ i rozpada się na $k'_s=1+(k'_s-1)$ przekrojów. Ponieważ przekrojów c_s jest m, więc dostaniemy z nich $m+\sum\limits_{s=1}^{m}(k'_s-1)$ przekrojów zrobionych w $Q_1, Q_2,\ldots, Q_\nu$. Te odcinki rozpadną się więc na $v+m+\sum_{s=1}^{m}(k'_s-1)$ odcinków, gdzie znowu $\delta'=\sum_{s=1}^{v}(k'_s-1)$. Lecz $\delta=\delta'$, gdyż tak pierwsza, jak druga suma jest całkowitą ilością wszystkich punktów przecięcia się: $(c_s\, c'_t)$.

Z tego wynika, że $n+\mu=v+m$ czyli $m-n=\mu-v=...=q-p$ c. b. d. d. Różnica ta stała nie zależy od ilości, jakości i porządku cięć a tylko od samej powierzchni, od jej zwartości.

Gdy $p=1$, to robimy q cięć, aby dostać z danej powierzchni, jednokrotnie już zwartą powierzchnię; q ma wtedy najmniejszą wartość.

W jednokrotnie zwartej powierzchni mamy przy $q=0$, $p=1$, a więc $q-p=-1$.

Definicya. *Powierzchnię nazywamy N-krotnie zwartą, jeżeli w niej potrzeba zrobić $(N-1)$ stosownych cięć, aby z niej mieć jedno krotnie już zwartą powierzchnię.*

W dwukrotnie zwartej powierzchni mamy, gdy $p=1$, także $q=1$, a więc $q-p=0$.

W trzykrotnie zwartej powierzchni ma być, gdy $p=1$, $q=2$, a więc $q-p=1$ i t. d.

W ogólności w powierzchni o N-krotnej zwartości mamy $q-p=(N-1)-1$, skąd wynika:

$$N=q-p+2.$$

Dwukrotnie zwartą powierzchnią jest pierścień kołowy płaski, kula z dwoma otworami (kołowemi) i t. p.

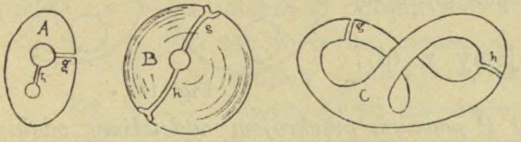


Fig. 13.

Do trzykrotnie zwartych powierzchni zaliczyć trzeba (fig. 13): *a)* powierzchnię A zamkniętą owalem, a posiadającą 2 otwory (kołowe), *b)* kulę B z trzema otworami, *c)* powierzchnię C. Każdą z tych powierzchni sprowadzają dwa przekroje g, h do jednokrotnej zwartości.

Pierścień dęty z punktem G jest również powierzchnią trzykrotnie zwartą, bo dwa przekroje dają jedną powierzchnią już jednokrotnie zwartą.

97. Zwartość odcinków. Gdy dowolny przekrój poprowadzimy w powierzchni P o zwartości N, to mogą zajść 2 wypadki:

1. Po przekroju l powierzchnia pozostaje jedną powierzchnią P_l.
2. Po przekroju l dostajemy dwie oddzielne powierzchnie P_1, P_2.

Gdy P wymaga q przekrojów, aby z niej dostać p odcinków jednokrotnie zwartych, to mamy:

$$(a)\qquad N=q-p+2.$$

Po przekroju l, będzie w pierwszym razie powierzchnia P_l wymagała już tylko $(q-1)$ przekrojów, aby z niej zrobić p odcinków jednokrotnie zwartych. Zwartość N' powierzchni P_l określa zatem równanie:

$$N' = (q-1) - p + 2, \text{ skąd wynika:}$$

$$(\alpha) \qquad N' = N - 1, \text{ a to zn.:}$$

I. *Przekrój l nie rozdzielający powierzchni P na dwie oddzielne części obniża jej zwartość o jednostkę*).*

Naznaczmy w drugim razie zwartości odcinków, P_1, P_2, odpowiednio przez N_1, N_2, to w P_1 trzeba zrobić (N_1-1) przekrojów, aby dostać jeden jednokrotnie zwarty odcinek; podobnie w tym samym celu potrzeba zrobić w P_2 przekrojów (N_2-1). Potrzeba więc w powierzchni P zrobić przekrojów $q=(N_1-1)+(N_2-1)+1$, aby dostać $p=2$ odcinków już jednokrotnie zwartych. Stąd — podług równania (α) — mamy:

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} N &= (N_1-1)+(N_2-1)+1, \text{ czyli} \\ N_1+N_2 &= N+1, \text{ a to zn.} \end{aligned}$$

II. *Gdy przekrój l rozdziela powierzchnię P o zwartości N, na dwa odcinki P_1, P_2 o zwartościach N_1, N_2, to suma zwartości tych odcinków równa się zwartości samej powierzchni powiększonej o jednostkę.*

Powierzchnia A, (fig. 14) jest zwartości $N=3$. Po przekroju l_1 przechodzi na powierzchnię dwukrotnie zwartą.

Gdy przeciwnie poprowadzimy tu przekrój l_2 to dostaniemy dwa odcinki P_1, P_2; każdy z nich ma zwartość $=2$, a równanie (β) tu się sprawdzi.

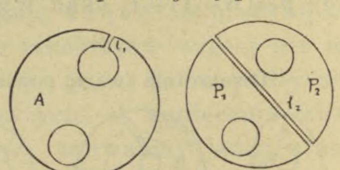


Fig. 14.

Gdy $N_2=1$, to dostajemy z (β): $N_1=N$, a to zn.:

III. *Gdy z powierzchni P pewnym przekrojem oddzielimy odcinek o zwartości $=1$, to pozostała część powierzchni jest tej samej zwartości, co P.*

Przyjmijmy teraz, że po s przekrojach dostajemy $r+1$ odcinków P_1, P_2, ..., P_{r+1} o zwartościach N_1, N_2, ..., N_{r+1}. W takim razie w każdym z odcinków P_α trzeba zrobić $(N_\alpha-1)$ przekrojów, aby go sprowadzić do jednokrotnej zwartości. W powierzchni trzeba zrobić zatem:

$$q = s+(N_1-1)+\ldots+(N_{r+1}-1) = s+(N_1+N_2+\ldots+N_{r+1})-(r+1)$$

przekrojów, aby dostać $p=(r+1)$ odcinków jednokrotnie zwartych. Stosując tu równanie (α) mamy:

$$(\gamma) \qquad N_1+N_2+\ldots+N_{r+1} = N+2r-s.$$

---

*) Por. co do tego rozprawę *„Beweis eines Satzes aus der Analysis situs"*. C. Koehler. C. J. T. 109. str. 118—120.

Przyjmijmy $r=0$, to mamy $N_1=N-s$, a to zn.:

IV. *Gdy w powierzchni o zwartości N poprowadzimy s przekrojów, a te tej powierzchni nie rozdzielają na części, to zwartością powierzchni już z przekrojami jest: N—s.*

To samo możnaby wywieść i z twierdzenia I., stosując je s-krotnie.

98. Cięcia zamknięte (kołowe). Wcięcia wewnątrz i z brzegu. Zbadajmy, jaki wpływ na zwartość N danej powierzchni ma cięcie kołowe albo zamknięte Z, zrobione całkowicie wewnątrz tej powierzchni. [Gdy powierzchnia posiada pasmo lub pasma ograniczające, to żadna, choćby najmniejsza część tego cięcia nie przebiega wzdłuż pasma. Gdy powierzchnia posiada punkt G, to Z nie przechodzi przez ten punkt. W przeciwnych razach cięcie Z jest już przekrojem].

Takie cięcie kołowe Z może powierzchnię daną albo: 1. rozdzielić na dwa oddzielne kawałki n. p. w kole i w kuli, albo: 2. nie rozdzielić jej na dwa oddzielne kawałki, jak n. p. cięcie $Z=CKK'C$ (fig. 8.) str. 360. w dętym pierścieniu.

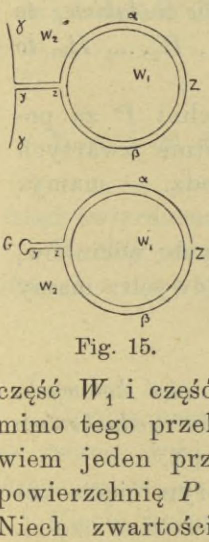


Fig. 15.

Naznaczmy w pierwszym wypadku całkowite ograniczenie powierzchni P przez γ. Owo ograniczenie γ może być także punktem G.

Cięcie Z niech dzieli powierzchnię P na odcinki W_1, W_2 (fig. 15.). Gdy dowolny punkt z cięcia Z połączymy z γ — lub G — przekrojem yz, to teraz cięcie Z wraz z yz jest już przekrojem $(yz+Z)=yz\alpha\beta zy$, który powierzchnię P rozdzielił tu na dwie oddzielne części, a to na część W_1 i część W_2, opatrzoną przekrojem yz; ale ta część W_2— mimo tego przekroju pozostała jednym odcinkiem. Inaczej bowiem jeden przekrój $yz+Z$ w powierzchni P rozdzielićby mógł powierzchnię P na więcej jak dwie części, a to jest niemożliwe. Niech zwartością kawałka W_2 jeszcze bez przekroju yz będzie N_2, to po przekroju ma ta część zwartość: $N'_2=N_2-1$ [art. poprzedz., tw. I.].

Wiadomo dalej, że, gdy jaki przekrój — (tu $yz+Z$) — podzieli powierzchnię o zwartości N na dwa odcinki o zwartościach N_1 i N'_2 to $N_1+N'_2=N+1$, a że tu $N'_2=N_2-1$, więc mamy:

$$N_1+N_2=N+2, \text{ a stąd:}$$

$$N_2=N+(2-N_1).$$

Przyjmijmy $N_1=1$, to dostajemy:

$N_2=N+1$, a to zn.:

I. *Gdy po cięciu kołowem Z w powierzchni o zwartości N wypada z wnętrza tego cięcia oddzielny odcinek W_1 o zwartości $=1$, to tak zmieniona powiorzchnia ($W_2=P-W_1$) ma zwartość $N+1$.*

To twierdzenie można jeszcze i tak wystawić:

I'. *Gdy w powierzchni o dowolnej zwartości N zrobimy jeden otwór W_1 dowolnego kształtu i wielkości, to powierzchnia z tym otworem ma już zwartość $N+1$.*

Według tego twierdzenia koło po zrobieniu w niem jednego otworu (kołowego) staje się powierzchnią o zwartości $=2$. Kula z punktem G i z otworem jest również powierzchnią o zwartości $=2$. Pierścień dęty z punktem G (fig. 16.) staje się — po zrobieniu w niem otworu w — powierzchnią o zwartości $=4$. Można w nim bowiem zrobić 3 cięcia a to: gg', hh' i yz. Po nich pozostaje on jeszcze jednym kawałkiem, ale już jednokrotnie zwartym.

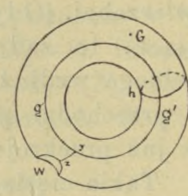


Fig. 16.

Z twierdzenia I. odrazu wynika:

II. *Gdy w powierzchni P o zwartości N zrobimy k cięć kołowych Z_1, Z_2, ..., Z_k nie przecinających siebie i takich, że z ich wnętrzy wypadają jednokrotnie zwarte odcinki H_1, H_2, ..., H_k, to pozostała powierzchnia P' będzie zwartości $N+k$.*

Przyjmijmy, że w tym razie można z powierzchni P' za pomocą q przekrojów dostać p oddzielnych, jednokrotnie zwartych odcinków. Stosując do P' związek (a) — art. poprzedz. — mamy:

$$q-p+2=N+k \text{ czyli } q-(p+k)+2=N.$$

Lecz $p+k=p'$ jest ilością pojedyńczo zwartych odcinków, jakie otrzymaliśmy przez q przekrojów i k cięć kołowych; mamy więc:

$$N=q-p'+2,$$

a stąd twierdzenie:

III. *Gdy w powierzchni P przez dowolną ilość cięć kołowych, a potem przez q przekrojów otrzymujemy p' odcinków jednokrotnie zwartych, to powierzchnia P była o zwartości $N=q-p'+2$.*

Przejdźmy do drugiego wypadku, w którym cięcie kołowe Z nie ma rozkładać powierzchni na dwie oddzielne części.

Na samem cięciu Z zauważmy dowolny punkt Γ, uważając go za nieskończenie mały otwór zrobiony w powierzchni. Powierzchnia z owym punktem ma — według tw. I'. — zwartość $N+1$, a w niej cięcie kołowe Z jest już przekrojem, który jej nie rozkłada na dwie części, ale obniża jej zwartość o jednostkę. Gdy więc przez N' naznaczymy zwartość powierzchni z cięciem kołowem Z, to mamy $N'=(N+1)-1=N$, a to zn.:

IV. *Gdy cięcie kołowe nie rozkłada powierzchni na dwie części, to zwartość powierzchni i po cięciu owem pozostaje ta sama.*

Poprowadźmy w powierzchni P o zwartości N, s kołowych cięć $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ i przyjmijmy, że po nich rozkłada się P na $(r+1)$ części $P_1, P_2, \ldots, P_{r+1}$ o zwartościach: $N_1, N_2, \ldots, N_{r+1}$. Każde cięcie Z_σ zmieńmy przez przydanie przekroju $y_\sigma z_\sigma$ na przekrój $y_\sigma z_\sigma + Z_\sigma$. Przekroje $y_\sigma z_\sigma$ leżą w powstałych odcinkach, a prowadzone są tak, aby tych odcinków nie rozdzielać; (w odcinku o zwartości $=1$, nie ma więc ani jednego z przekrojów $y_\sigma z_\sigma$). W odcinku P_m niech się znajduje k przekrojów $y_\sigma z_\sigma$. Te przekroje zmieniają jego zwartość N_m na:

$$N'_m = N_m - k \text{ [art. 97. tw. IV.], a więc:}$$

$$(a) \qquad \sum_{m=1}^{r+1} N'_m = \sum_{m=1}^{r+1} N_m - \Sigma k = \sum_{m-1}^{r+1} N_m - s.$$

Z drugiej strony mamy powierzchnię P o zwartości N podzieloną przez s przekrojów $(y_\sigma z_\sigma + Z_\sigma)$ na $(r+1)$ oddzielnych części o zwartościach $N'_1, N'_2, \ldots, N'_{r+1}$, a wskutek tego [art. 97. (γ)]:

$$(b) \qquad \sum_{m=1}^{r+1} N'_m = N + 2r - s.$$

Z (a) i (b) dostajemy:

$$(c) \qquad N_1 + N_2 + \ldots + N_{r+1} = N + 2r,$$

a stąd twierdzenie:

V. *Gdy powierzchnię P o zwartości N rozdziela pewna ilość cięć kołowych na $(r+1)$ odcinków o zwartościach $N_1, N_2, \ldots, N_{r+1}$, to:*

$$\sum_{m=1}^{r+1} N_m = N + 2r.$$

Oprócz przekrojów i cięć kołowych rozważyć jeszcze trzeba tak zwane: w c i ę c i a w e w n ę t r z e i w c i ę c i a z b r z e g u określające się w ten sposób:

Cięcie kołowe wewnątrz powierzchni może zmaleć do linii; odcinek W jednokrotnej zwartości wypadający z wnętrza takiego cięcia ma wtedy powierzchnię = zero.

Taką linią nazwiemy wcięciem wewnętrznem. Zastępuje ono otwór zrobiony w powierzchni, a jako takie podnosi zwartość powierzchni o jednostkę.

Pytanie zachodzi, za co uważać wcięcie w zrobione z brzegu? Takie wcięcie z punktu granicznego G w powierzchni $\dot{P}$

(fig. 17. *a*) nie zmienia zwartości, bo jest tylko powiększonym otworem *G*.

W przypadku, kiedy w c i ę c i e poczyna się w pewnym punkcie *Γ* pasma ograniczającego, (fig. 17. *b*) uważać je możemy za przekrój, który się w *Γ* zaczyna i w *Γ* się kończy, a oddziela z powierzchni część o zwartości jednokrotnej, a o powierzchni = zero.

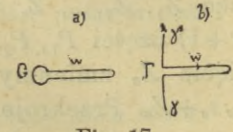


Fig. 17.

Taki przekrój [art. 97. tw. III.] nie zmienia zwartości. Mamy więc twierdzenie:

V. *Wcięcie wewnętrzne uważać trzeba za otwór zrobiony w powierzchni. Takie wcięcie powiększa więc zwartość powierzchni o jednostkę. Wcięcie z brzegu nie zmienia wcale zwartości powierzchni.*

99. Koła przywiedlne i nieprzywiedlne. Jednolity ciąg punktów, tworzący w danej powierzchni *P* (o dowolnej zwartości) linią zamkniętą przecinającą się z sobą lub nie nazywamy k o ł e m (leżącem wewnątrz tej powierzchni). Każde takie koło leżące w powierzchni jednokrotnie zwartej można zmniejszyć do punktu, nie opuszczając powierzchni [art. 95.]. Z tego powodu powiadamy:

I. *Każde koło w powierzchni jednokrotnie zwartej jest przywiedlnem.*

Pytanie zachodzi, czy w powierzchniach *P* o zwartości $N > 1$ są możliwe koła przywiedlne. W tym celu poprowadźmy w *P* wszystkie przekroje w liczbie (N—1) potrzebne, aby z *P* zrobić powierzchnię *P'* już jednokrotnie zwartą. W powierzchni *P'* jest każde koło *Z* już przywiedlne, a gdy teraz wszystkie przekroje wzdłuż ich brzegów napowrót połączymy, dostajemy powierzchnię *P* z kołem *Z*, które oczywiście jest przywiedlne. Z tego wynika:

II. *Na powierzchni o dowolnej zwartości można narysować nieskończenie wiele kół przywiedlnych.*

III. *Każde przywiedlne koło Z leży w powierzchni o zwartości N w ten sposób, że w niej wszystkie przekroje sprowadzające ją do jednokrotnej zwartości można poprowadzić nie przecinając koła Z.*

Lecz w powierzchni o zwartości $N > 1$ dadzą się jeszcze i takie koła poprowadzić, których do punktu nie będzie można zredukować. Nazywać je będziemy n i e p r z y w i e d l n e m i. Takiemi kołami teraz się zajmiemy.

Przedewszystkiem zauważymy, że kołu nieprzywiedlnemu będzie można nie opuszczając powierzchni nadawać przez ciągłe zmiany rozmaite formy, a za uwzględnieniem tych ciągłych zmian rozróżniać będziemy: *a)* koło (nieprzywiedlne) pojedyńcze, charakteryzujące się tem, że przez ciągłą deformacyę może być zmienione na koło nieprzecinające się (jeżeli się przedtem przecinało z sobą), a nie może być zmienione na kilka kół różnych lub identycznych; *b)* koło wielokrotne, które przez ciągłe zmienianie można zastąpić klkakrotnem powtórzeniem jednego i tego samego pojedyńczego koła; *c)* koło złożone, które można zmienić na zbiór różnych kół, a w nim mogą się zawierać koła już-to pojedyńcze, już-to wielokrotne.

Z tego wynika, że w dalszych poszukiwaniach można się ograniczyć wyłącznie do pojedyńczych kół nieprzywiedlnych.

Uwaga. Koło K, okalające w zamkniętej powierzchni otwór (punkt) G, nie trzeba uważać za nieprzywiedlne, bo otwór G przenosić można dowolnie. Po przeniesieniu go poza koło K, staje się to koło już przywiedlnem.

Poprowadźmy w powierzchni P wszystkie przekroje:

(1) $$q_1, q_2, \ldots, q_\sigma, \ldots, q_{N-1},$$

które P sprowadzają do jednokrotnie zwartej powierzchni P'. Nie oddalając brzegów tych przekrojów od siebie, zauważmy na przekroju q_σ (fig. 18.) punkta a, b takie, że po złączeniu brzegów tego przekroju punkt a jest identycznym z punktem b.

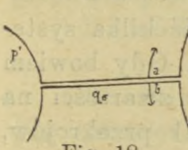


Fig. 18.

W powierzchni P' można znowu — nie wychodząc z niej — narysować zamkniętą linię, poczynającą się w a, a kończącą się w b. Taka linia, po złączeniu brzegów wszystkich przekrojów (1), będzie kołem K_σ, które się całkowicie w P mieści i tak w niej leży, że z przekrojów (1) można ich (N—2) poprowadzić, nie przecinając tego koła; lecz (N—1)^{szy} przekrój $[q_\sigma]$ już-to koło przeciąć musi. Koło K_σ może (ale nie musi) być pojedyńcze. Dalej okazać można, że się koło K_σ nie da zredukować do punktu.

1^0. Gdy przekrój q_σ łączy dwa oddzielne ograniczające pasma p, p', to K_σ okala albo pasmo p, albo pasmo p', a wskutek tego nie da się z pewnością zredukować do punktu.

2^0. Gdy q_σ łączy dwa różne punkta tego samego pasma $(p+p')$, to po przekroju q_σ utworzą się dwa pasma: jedno po jednym brzegu a drugie po drugim brzegu przekroju q_σ. (Pasma te stykają się ze sobą wzdłuż q_σ). Aby koło K_σ — zawarte całkowicie w powierzchni — było tu możliwe, trzeba aby te oddzielne pasma były wprost identycznemi z brzegami przekroju q_σ. Tu więc przedstawi się rzecz tak, jak w pierścieniu dętym (fig. 12., str. 362.), gdzie $q_\sigma = acb$, a $K_\sigma = cde$. Koło K_σ jest widocznie nieprzywiedlne.

Każdy z przekrojów (1) daje początek jednemu pojedyńczemu kołu nieprzywiedlnemu, a że tych przekrojów jest (N—1), więc stąd wnosimy:

IV. *Na powierzchni o zwartości* $N>1$ *można poprowadzić* (N—1) *kół nieprzywiedlnych; każde z nich charakteryzuje się tem, że gdy je narysujemy, to już tylko* (N—2) *przekrojów poprowadzić można tak, że one tego koła nie przecinają. System* (N—1) *kół nieprzywiedlnych nazywa się zupełnym systemem kół nieprzywiedlnych.* *)

Koło K_σ, przecinające przekrój q_σ, można nie wychodząc z powierzchni w ciągły sposób zmienić na nieskończenie dużo innych kół nieprzywiedlnych K'_σ, K''_σ, ..., przecinających ten sam przekrój q_σ.

Wszystkie takie koła nazywamy równoważnemi, a dostatecznem jest jedno z nich tylko zatrzymać. Przeciwnie jakiekolwiek koło K przywiedlne lub nieprzywiedlne, nie liczące się do kół K_σ, K'_σ, ... nie będzie już równoważne z kołem K_σ. Stąd wynika:

V. *Dwa koła* K_σ, K_τ *[pierwsze z nich przecina przekrój* q_σ, *a drugie przekrój* q_τ, $\sigma \gtrless \tau$*], tego samego systemu kół nieprzywiedlnych są nierównoważne.*

W danej powierzchni można czasem poprowadzić kilka systemów kół nieprzywiedlnych, różniących się od siebie. Gdy bowiem powierzchnia daje się sprowadzić do jednokrotnej zwartości na więcej sposobów, t. j. różnymi systemami (N—1) przekrojów, to każdy z tych sposobów da inny system kół nieprzywiedlnych. Lecz — jak później się okaże — dostatecznem będzie jeden tylko system kół brać pod uwagę.

Pd. 1. W pierścieniu dętym istnieje jeden tylko system 2 kól nieprzywiedlnych: $K_1 = gg'$, $K_2 = hh'$ [fig. 16.].

Pd. 2. Powierzchnię P (fig. 19.) można do jednokrotnej zwartości sprowadzić

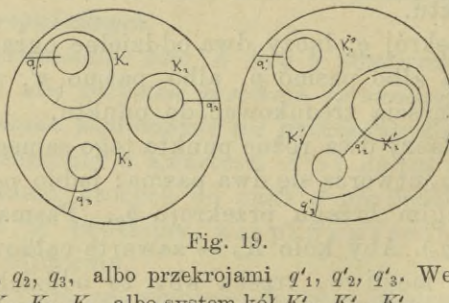


Fig. 19.

albo przekrojami q_1, q_2, q_3, albo przekrojami q'_1, q'_2, q'_3. Według tego dostajemy tu albo system kół K_1, K_2, K_3, albo system kół K'_1, K'_2, K'_3.

---

*) Por. pod tym względem: C. Jordan — *„Des contours tracés sur les surfaces“* Liouville J. (Ser. 2.), T. 11., str. 110—130.

100. Zupełny system kół nieprzywiedlnych. Po każdem pojedyńczem kole K nieprzywiedlnem może się punkt ruchomy poruszać w dwóch przeciwnych kierunkach, a z nich jeden (dowolny) uważany za dodatni, a drugi przeciwny za ujemny, a samo koło K przebieżone w kierunku dodatnim lub ujemnym, naznaczymy odpowiednio przez $+K$, lub $-K$. Gdy m jest liczbą całkowitą bezwględną, to $+mK$ oznaczać będzie m-krotne koło $+K$, a $-mK$ m-krotne koło $-K$.

Każde koło K*), które można w ciągły sposób przekształcić na zbiór kół złożonych z m_1K_1, m_2K_2, ..., gdzie m_1, m_2, ... są liczby całkowite, już-to dodatnie, już-to ujemne, a K_1 K_2, ... są kołami nieprzywiedlnemi, naznaczamy pisząc:

$$K=m_1K_1+m_2K_2+\dots$$

Takie symboliczne równanie nazywamy równoważnością, a koło K nazywamy równoważnem z kołami $(K_1, K_2, \dots)$.

Po tych określeniach udowodnimy bardzo ważnego twierdzenia:

I. *Każde nieprzywiedlne koło K pojedyńcze, wielokrotne lub złożone, jest równoważne z jednym dowolnym systemem* $(N-1)$ *kół nieprzywiedlnych.*

Dowód. Przyjmijmy, że K nie daje się przerobić na

$$m_1K_1+m_2K_2+\dots+m_nK_n, \quad n=N-1.$$

W takim razie i po zrobieniu przekrojów $q_1, q_2, \dots, q_n$, które już uniemożliwiają rysowania kół K_1, K_2, ..., K_n, koło K w powierzchni jednokrotnie zwartej P' musiałoby być możliwe. Lecz to się sprzeciwia właściwości powierzchni P', a stąd już prawdziwość twierdzenia I. wynika.

Przyjmijmy, że powierzchnia P posiada oprócz systemu kół nieprzywiedlnych K_1, K_2, ..., K_n jeszcze drugi system takich kół: K'_1, K'_2, ..., K'_n. Wtedy podług tw. I. mamy równocześnie:

$$(\alpha) \qquad K=m_1K_1+m_2K_2+\dots+m_nK_n,$$

$$(\beta) \qquad K=m'_1K'_1+m'_2K'_2+\dots+m'_nK'_n.$$

Lecz każde

$$K'_\alpha=\mu_{1\alpha}K_1+\mu_{2\alpha}K_2+\dots+\mu_{\alpha n}K_n, \quad \alpha=1, 2, \dots, n^{**}),$$

a uwzględniając to w (β) dochodzimy znowu do równoważności (α).

---

*) Koło K może się samo z sobą raz lub kilka razy przecinać, a mimo, że je piszemy bez znaku $+$ lub $-$, wyobrażamy sobie, że powstało ruchem punktu przebiegającego je w pewnym obranym kierunku.

**) Niektóre, ale nie wszystkie, że spółczynników m_1, m'_1, ..., $\mu_{1\alpha}$, ... mogą być zerami.

*

Z tego-to powodu dostatecznem jest w danej powierzchni P brać pod uwagę jeden tylko zupełny system kół $(K_1, K_2, ..., K_n)$.

II. *Jeżeli równaniem* $K=0$ *określimy koło przywiedlne, to nigdy nie może być*

$$(\gamma) \qquad m_1 K_1 + m_2 K_2 + ... + m_n K_n = 0,$$

chyba że $m_1 = m_2 = ... = m_n = 0$.

Równanie (γ) bowiem z $m_\alpha \gtrless 0$ wskazywałoby, że można wszystkie koła K_α pozdejmować z pasm, które okalają, a potem wszystkie zmniejszyć do jednego punktu. Lecz to sprzeciwia się określeniu kół nieprzywiedlnych.

Przyjmijmy, że dane koło nieprzywiedlne K daje się na dwa sposoby przedstawić tym samym zupełnym systemem kół, a to:

$$K = m_1 K_1 + m_2 K_2 + ... + m_n K_n,$$
$$K = m'_1 K_1 + m'_2 K_2 + ... + m'_n K_n.$$

Z tych związków wynika:

$$0 = (m_1 - m'_1) K_1 + (m_2 - m'_2) K_2 + ... + (m_n - m'_n) K_n,$$

a to jest podług *tw.* II. tylko wtedy możliwe, gdy:

$$m_1 = m'_1, \; m_2 = m'_2, \; ..., \; m_n = m'_n.$$ To znaczy:

III. *Każde nieprzywiedlne koło można tylko w jeden sposób zrównoważyć z obranym zupełnym systemem kół nieprzywiedlnych.*

Pd. 1. W powierzchni P (fig. 20 a) zauważmy koło K, utworzone ruchem punktu wskazanym strzałką s i zupełny system nieprzywiedlnych kół K_1, K_2, okalających otwory w_1, w_2 dodatnio w tym kierunku, jak to strzałki wskazują.

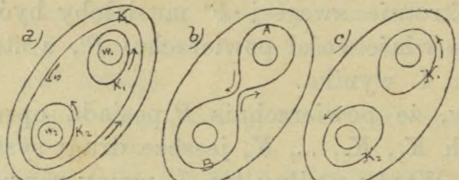


Fig. 20.

Koło K można w ciągły sposób zmienić na koło K' — (fig. 20 b), a że jego części A, B są odpowiednio równoważne z kołami $+K_1$, $+K_2$, (fig. 20 c), więc mamy: $K = +K_1 + K_2$.

Pd. 2. Zatrzymując dodatni kierunek kół K_1, K_2 taki, jak w Pd. 1. — okazać, że koło K (fig. 21.) utworzone ruchem punktu, wskazanym strzałką σ, równoważne jest z $(K_1 - K_2)$.

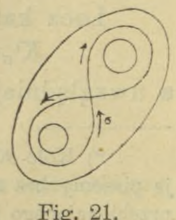


Fig. 21.

Pd. 3. W powierzchni Π — (fig. 22 a, str. nast.) — narysujmy zupełny system kół K_1, K_2 o dodatnich na nich kierunkach wskazanych strzałkami. Gdy na tej powierzchni mamy koło K (fig. 22 b) utworzone ruchem punktu wskazanym strzałką s, to to koło można tak zmienić, że jego punkta μ, μ' spadną na siebie w punkcie M

(fig. 22 *c*). Tak zmienione koło posiada dwie części A, B. Z nich część A jest równoważna z $+K_1$, a część B z $-K_2$, a wskutek tego mamy: $K=+K_1-K_2$.

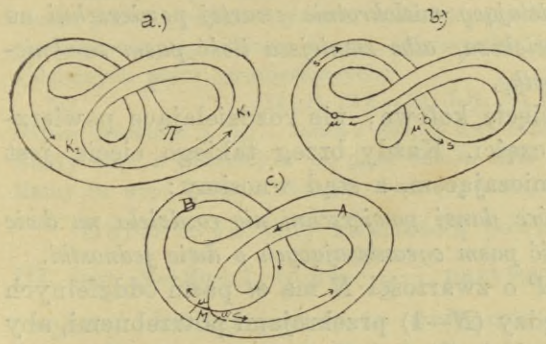


Fig. 22.

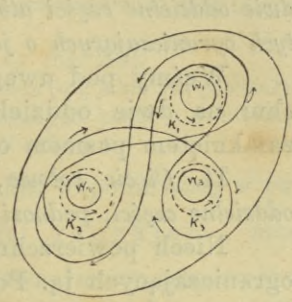


Fig. 23.

Pd. 4. W powierzchni P (fig. 23.) mamy zupełny system kół K_1, K_2, K_3 okalających dodatnie otwory w_1, w_3, w_3 i wielokrotne koło K, utworzone ruchem punktu wskazanym strzałkami. Okazać, że $K=2K_1-2K_2-K_3$.

101. Rodzaj *p* powierzchni o zwartości *N*. W powierzchni wielokrotnie zwartej poprowadźmy przekrój q nierozdzielający jej na dwa oddzielne odcinki. Taki przekrój albo łączy dwa oddzielne pasma zamknięte p, p' (fig. 24 *a*), albo też łączy dwa punkta A, B tego samego zamkniętego pasma (fig. 24 *b*).*)

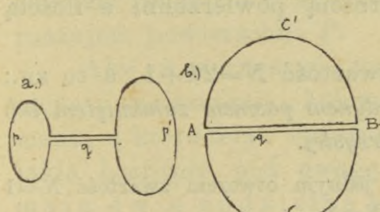


Fig. 24.

W pierwszym razie przekrój q daje z dwóch oddzielnych pasm jedno tylko zamknięte pasmo:

$$(\ldots p \ldots q \ldots p' \ldots q),$$

w drugim zaś razie dostajemy z jednego pasma dwa oddzielne zamknięte pasma ACB, $AC'B$.

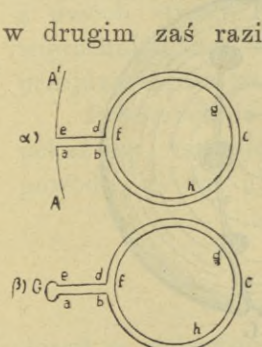


Fig. 25.

Poprowadźmy przekrój z jednego punktu pasma AA' lub z punktu granicznego G — gdy powierzchnia opatrzona jest punktem — składający się z cięcia ab i z zamkniętego kołowego cięcia (fig. 25.).

W tych razach — jeżeli taki przekrój nie rozdziela powierzchni na dwie oddzielne części — dostajemy w (α) zamiast ograniczającego jednego pasma $\ldots AA' \ldots$, a w (β) zamiast jednego

*) Figura 24 *b)* jest tylko schematyczną. Stosunki zachodzą tu takie, jak w dętym pierścieniu z otworem Γ, gdzie *acb* jest przekrojem fig. 12., str. 362.

pasma — (punktu G) — dwa ograniczające zamknięte pasma, a to: *abcde* i *fgh*. Z tych uwag wynika:

I. *Przekrój nie rozdzielający wielokrotnie zwartej powierzchni na dwie oddzielne części albo zwiększa, albo zmniejsza ilość pasm zamkniętych ograniczających o jednostkę.*

Weźmy pod uwagę cięcie kołowe, nie rozdzielające powierzchni na dwie oddzielne części. Każdy brzeg takiego cięcia jest zamkniętem pasmem ograniczającem, a stąd wnosimy:

II. *Cięcie kołowe, które danej powierzchni nie rozdziela na dwie oddzielne części, podnosi ilość pasm ograniczających o dwie jednostki.*

Niech powierzchnia P o zwartości N ma m pasm oddzielnych ograniczających ją. Pomiędzy $(N-1)$ przekrojami potrzebnemi, aby P sprowadzić do powierzchni P' jednokrotnej zwartości, niech będzie k takich, że każdy z nich zwiększa ilość pasm o jednostkę. Wtedy każdy z $(N-1)-k$ przekrojów pozostałych zmniejsza znowu ilość pasm o jednostkę. Wtedy w P' mamy pasm $m+k-(N-1-k)$, a że P' jest już powierzchnią jednokrotnie zwartą, więc mamy $m+k-(N-1-k)=1$ czyli:

(a) $$m=N-2k, \quad \text{gdzie } k\geq 0, \text{ i całkowite.}$$

Taki jest związek między zwartością powierzchni a ilością pasm, które ją ograniczają.

Przyjmując $m=1$, mamy z (a): zwartość $N=2k+1$, a to zn.:

III. *Powierzchnia z jednem tylko jedynem pasmem zamkniętem lub z punktem G, jest zawsze zwartości nieparzystej.*

Pd. 1. Z tej-to przyczyny ma kula z jednym otworem zwartość $N=1$ a pierścień dęty z jednym otworem zwartość $N=3$.

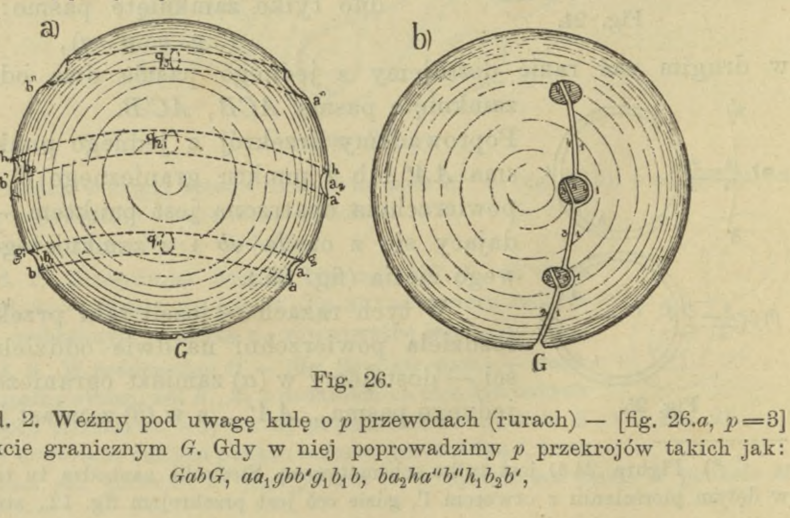


Fig. 26.

Pd. 2. Weźmy pod uwagę kulę o p przewodach (rurach) — [fig. 26.*a*, $p=3$] i o punkcie granicznym G. Gdy w niej poprowadzimy p przekrojów takich jak:

(a) $$GabG,\ aa_1gbb'g_1b_1b,\ ba_2ha''b''h_1b_2b',$$

a potem jeszcze p przekrojów q_1, q_2, ..., wokoło każdego przewodu, to powierzchnia będzie już jednokrotnie zwartą.

Każdy z przekrojów (a) — jest ich p — wychodzi i kończy się w tem samem jednem paśmie i podnosi wskutek tego ilość pasm o jednostkę. Gdy więc przekrojów q_1, q_2, ... jeszcze nie ma, to wszystkie brzegi przekrojów (a) dają $(p+1)$ oddzielnych pasm ograniczających:

(a) (11...1), (22...,2), (33...3), (44...4) (fig. 26b).

Dalsze przekroje q_1, q_2, ..., łączą z sobą co dwa różne pasma (a'), jakie już powstały. Każdy więc z przekrojów q_1, q_2, ... obniża ilość uzyskanych pasm o jednostkę. Mamy tu więc $k=p$, a stosując wzór (a) dostajemy $N=2p+1$.

D e f i n i c y a. Gdy zwartością powierzchni wspomnianej w tw. III. jest $N=2p+1$, to $p=\frac{N-1}{2}$ nazywają jej r o d z a j e m, albo r z ę d e m. Rodzaj jest — to widocznie połowa liczby przekrojów potrzebnych do dojścia do powierzchni jednokrotnie już zwartej.

Według tego kula z jednym otworem ma $p=0$, pierścień dęty z jednym otworem ma $p=1$ i t. p.

102. Przekształcanie powierzchni. Weźmy pod uwagę powierzchnię zamkniętą P b e z p u n k t u G i spróbujmy oznaczyć dla niej pewną liczbę π tak, aby ona gdy P przejdzie na $\dot{P}$, była zarazem rodzajem p powierzchni $\dot{P}$. Taką liczbą $\pi=p$ nazwiemy rodzajem powierzchni P.

Aby π wyznaczyć, trzeba przedtem wprowadzić pewne definicye i zastrzeżenia, których się już i dotychczas milcząco trzymano, a które teraz wyraźnie wypowiemy. Wszystkie powierzchnie, jakie braliśmy pod uwagę, i o jakich jeszcze mówić będziemy, m a j ą d w i e o d d z i e l n e s t r o n y. Punkta poruszające się po nich i koła rysowane na nich znajdują się zawsze na jednej tylko z dwóch stron. Punkt może z jednej strony każdej takiej powierzchni dostać się na stronę jej drugą tylko tym sposobem, że przejdzie przez pasmo ograniczające.

Powierzchnie o jednej tylko stronie — a takie, jak zaraz pokażemy, istnieją — wydzielamy z naszych poszukiwań z tego powodu, że one nie poddają się już prawidłom, jakie zestawiliśmy

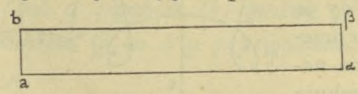


Fig. 27.

dotąd w twierdzeniach tego Rozdziału. To możemy wykazać na bardzo prostym przykładzie.

Gdy $ab\beta a$ jest prostokątem wyciętym z papieru, (fig. 27.), to przedstawia powierzchnię jednokrotnie zwartą o dwóch oddzielnych stronach i o jednem tylko — jak być ma — paśmie ograniczającem.

Gdy w tym odcinku spoimy brzegi *ab* *αβ* ze sobą, ale w ten sposób, aby *α* zeszło się z *b*, a *β* zeszło się z *a* — do tego potrzeba skręcenia — to po spojeniu dostajemy pierścień z jednym skrętem na sobie, a tak uzyskana powierzchnia P_1 ma tylko jedną stronę i tylko jedno pasmo ograniczające ją*).

To jedyne pasmo powinno — podług tw. III. — art. poprzedz. — wskazywać, że powierzchnia jest zwartości nieparzystej. Tymczasem jeden zrobiony tu przekrój nie rozdziela powierzchni tej na dwa oddzielne odcinki, a każdy drugi przekrój daje dwie już oddzielne części. Zwartość powierzchni jest tu $=2$, a to sprzeciwia się przyjętemu prawidłu.

Powierzchnię P o dwóch stronach wyobraźmy sobie utworzoną z materyału giętkiego, dającego się rozciągać i ściągać, a tę stronę jej, do której odnosimy rysowane na niej punkta i linie nazwijmy zewnętrzną.

Ściąganiem i rozciąganiem nadajmy powierzchni P inny kształt P', ale z tem zastrzeżeniem, aby: 1. nieskończenie bliskie punkty pozostały takiemi i w powierzchni przekształconej, i 2. aby punkta, które w P oddalone były od siebie w sposób skończony, miały także i w P' oddalenie skończone.

Mimo tych zastrzeżeń dozwolonem także będzie powierzchnię P jeszcze i rozcinać na dwie oddzielne części P_1, P_2, a potem te części po ich deformacyi przez ich ściągania i rozciągania wzdłuż brzegów zrobionego cięcia napowrót spajać, uważając, aby po spojeniu z zewnętrznej strony części P_1 przechodziło się do zewnętrznej — a nie drugiej — strony części P_2.

Pd. 1. Powierzchnia P (fig. 28*a*), która powstaje przez obrót krzywej płaskiej MN około osi pq niech ma stronę zewnętrzną oznaczoną na rysunku strzałkami. Ta powierzchnia sama siebie przenika wzdłuż koła RS. Gdy ją rozciąganiem i ściąganiem przerobimy na taką, że będzie naprzód obrotową powierzchnią krzywej $M'N'$, (fig. 28 *b*), a

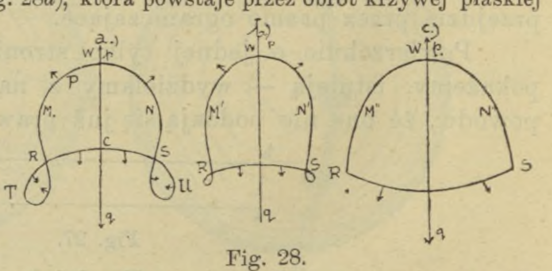


Fig. 28.

*) Möbius. *Werke*. T. 2. str. 484—5.

M. Feldblum podaje w wiadomościach matematycznych T. I. (Warszawa 1897), str. 101—106, cynematyczny sposób tworzenia powierzchni jednostronnej.

wreszcie obrotową powierzchnią krzywej $M''N''$ (fig. 28 *c*), to w tym ostatnim kształcie już się ona sama z sobą nie przenika, a dalszem rozciąganiem możnaby ją już i w kulę przekształcić. [Klein].

Pd. 2. Powierzchnię P rozważaną w Pd. 1. możnaby także tym sposobem przekształcić na powierzchnię nie przenikającą samą siebie. Przetnijmy ją wzdłuż koła TU (fig. 29 *a*), tak, że dostajemy teraz po rozwinięciu dwu części oddzielne TWU i TCU (fig. 29 *a*). Gdy teraz częściom TWU, TCU damy kształt taki jak (fig. 29 *b*) wskazuje, to po spojeniu brzegów TU tych dwóch części dostaniemy zamkniętą powierzchnię, którą dalej i w kulę przekształcić będzie można. [Klein].

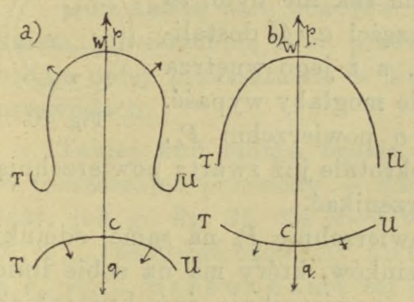


Fig. 29.

Z tych przykładów wnosimy, że u przenikających siebie powierzchni można linie przenikania dowolnie przesuwać przekształcać i niszczyć.

Przekształcenia z temi, dopieroco podanemi zastrzeżeniami spowodują, że w P' znajdziemy tę samą ilość pasm ograniczających, i tę samą liczbę kół w zupełnym systemie kół nieprzywiedlnych, co w P, bo tak na każdem paśmie, jak i na każdem kole nieprzywiedlnem mamy w P punkta, które w skończony sposób od siebie są odległe, a te odległości także i w P' mają pozostać skończone*). Lecz kół nieprzywiedlnych mamy w P w ilości $N-1$ gdzie N jest zwartością powierzchni. Tych kół i w P' będzie $N-1$, a N będzie znowu jej zwartością. Z tego wynika:

I. *Z dwóch powierzchni P, P' można każdą przekształcić wtedy w drugą, gdy obie są tej samej zwartości i posiadają tę samę ilość pasm ograniczających.*

Gdy zauważymy powierzchnię zamkniętą P z jednem tylko pasmem ograniczającem lub z punktem G, a jej zwartość okazuje się $=2p+1$, to uwzględniając Pd. 2. — art. poprzedz. — wywnioskujemy:

II. *Każdą powierzchnię P o zwartości $2p+1$, a o jednem tylko paśmie ograniczającem (lub o punkcie G) można przekształcić w ciągły sposób na kulę K_p z punktem G, a z p przewodami.*

103. Kula o π antabach. Rodzaj p powierzchni zamkniętej. Niech powierzchnia P_0 zamknięta i bez punktu G ma tę własność,

---

*) Gdy punkt G jest ograniczeniem powierzchni, to taki punkt G dowolnie zwiększyć można, przekształcając go w otwór.

że każde cięcie kołowe Z zrobione w niej daje w swem wnętrzu odcinek oddzielny W, (fig. 30). Wtedy dowolny przekrój $\alpha\beta$ poprowadzony w W, musi W rozdzielić na dwie oddzielne części w_1, w_2. Gdyby bowiem tak nie było, to po spojeniu cięcia Z wzdłuż jego części $\alpha\gamma\beta$, dostalibyśmy w P_0 cięcie kołowe $\alpha\delta\beta\varepsilon\alpha$, a z jego wnętrza część w_2 trzymająca się części w_1, nie mogłaby wypaść. Lecz to sprzeciwia się założeniu o powierzchni P_0. Każdy wycinek W jest zatem jednokrotnie już zwartą powierzchnią ale może się jeszcze sam z sobą przenikać.

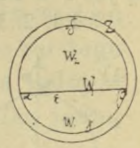


Fig. 30.

Mając to, podzielmy całą powierzchnię P_0 na same odcinki jednokrotnie zwarte, a każdy z odcinków, który ma na sobie linie przenikania się przekształćmy na powierzchnię już bez takich linij. Uskuteczniwszy to, pospajajmy te wszystkie odcinki ze sobą napowrót wzdłuż brzegów do siebie należących, to przez to powstanie zamknięta znowu powierzchnia taka, że ją będzie można dalej przekształcić na kulę K bez żadnego otworu.

Mamy więc twierdzenia:

I. *Każdą powierzchnię P_0 o tej własności, że po zrobieniu w niej dowolnego cięcia kołowego wypada z wnętrza tego cięcia zawsze oddzielny odcinek można w ciągły sposób przekształcić na kulę.*

II. *Dwie powierzchnie P_0, P'_0 o własności wyrażonej w tw. I. są takie, że każdą z nich można za pośrednictwem kuli przekształcić na drugą.*

II'. *Gdy powierzchnia o własności wyrażonej w tw. I. ma r otworów, to ją — podobnie, jak P_0 — zamienić można na kulę o r otworach.*

Definicya. Gdy w powierzchni zamkniętej P_π można poprowadzić π, a nie więcej cięć kołowych $Z_1, Z_2, ..., Z_\pi$ o tej własności, że z ich wnętrzy nie wypadają oddzielne odcinki — (powierzchnia mimo tych cięć pozostaje jeszcze zwartą), to π nazywamy rodzajem tej powierzchni. [Klein].

Według tej definicyi powierzchia P_0, o której mowa była w twierdzeniu I. ma rodzaj $\pi=0$. Przyjmijmy teraz $\pi>0$. Wskutek cięcia Z_1 dostała powierzchnia dwa nowe ograniczające ją zamknięte pasma: z_1, z'_1. Przekształcając powierzchnię — opatrzoną już cięciem Z_1 — przez ściąganie i rozciąganie dojść możemy do powierzchni, na której z_1, z'_1 przedstawiają się jako dwa otwory ω_1, ω'_1. Podobnie każde inne cięcie Z_α, $\alpha=2, 3, ..., \pi$, spowoduje w przekształconej powierzchni P'_π dwa otwory ω_α, ω'_α. Taka przekształcona powierzchnia jest o 2π otworach i da się dalej według twierdzenia II' przekształcić na kulę, która posiadać będzie π par otworów ω_α, ω'_α.

Gdy każdą parę otworów brzegami spoimy, dostaniemy zamkniętą powierzchnię o π przewodach, a tę powierzchnię można będzie dalej przekształcić w kulę o π przewodach.

Takiej kuli można będzie w końcu — rozszerzając przewody — dać kształt taki, jak go fig. 31. dla $\pi = 4$ wskazuje. $\delta_1, \delta_2, \ldots$ nazywać będziemy antabami, a $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ przewodami tej kuli.

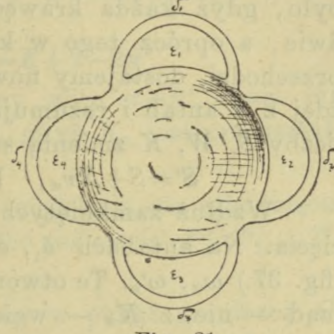


Fig. 31.

Mamy więc twierdzenie:

III. *Każdą powierzchnię zamkniętą P_π zamienić można na kulę o π antabach.*

104. Twierdzenie l'Huilier'a. System p par kół nieprzywiedlnych. O liczbie π da się dowieść, że ona w danej powierzchni P_π jest niezmienną; to znaczy:

I. *W jakikolwiek sposób zrobimy pierwsze zamknięte cięcie Z_1, to zawsze dojdziemy do tej samej liczby (π) cięć takich, że one nie przecinają się z sobą i nie dzielą powierzchni na oddzielne części.*

Dowód. Znane powszechnie jest twierdzenie Eulera, wysławiające się w ten sposób:

Gdy zwykłą kulę podzielimy na S zamkniętych wieloboków sferycznych (ścian), a tak utworzona na niej sieć wieloboków wykazuje W wierzchołków, a K krawędzi (boków), to: $S + W = K + 2$. Analogiczne twierdzenie da się wypowiedzieć dla zamkniętej powierzchni P_π lub dla kuli K_π, na którą P_π przekształcić można.*) Taką kulę podzielmy znowu na S zamkniętych wieloboków (ścian), dających swoją siecią wierzchołków W, a krawędzi K i weźmy jedną z antab δ pod uwagę (fig. 32.). Na niej poprowadźmy zamkniętą linię Z_1 tak, aby ona przez żaden z wierzchołków nie przechodziła.

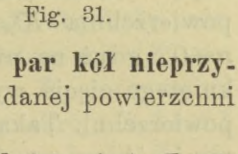


Fig. 32.

Gdy Z_1 przechodzi wokół przez v_α ścian, to przecina i tyleż

*) Przeniesienie twierdzenia Eulera na powierzchnie P_π przypisują l'Huilier'owi (por. W. Dyck *Math. Ann.* T. 32. i Forsyth. *Theory of fonctions*). — Por. także Möbius *Werke* T. 2., str. 468.

krawędzi, a gdy Z_1 wliczymy już do sieci linij rozpościerających się na K_π, to na antabie δ_α zwiększy się ilość ścian o ν_α, gdyż z każdego wieloboku dostaliśmy dwa wieloboki. Wierzchołków dostaniemy o ν_α więcej niż było, gdyż na każdej z ν_α krawędzi przybywa nowy wierzchołek. Krawędzi dostaniemy o $2\nu_\alpha$ więcej niż było, gdyż każda krawędź, którą Z_1 przecięto, podzieliła się na dwie, a oprócz tego w każdym z ν_α wieloboków, przez które Z_1 przechodzi, dostajemy nową krawędź. Prowadząc cięcie wokół każdej z π antab i rozumując podobnie dojdziemy do wniosku, że liczby S, W, K zmienią się na

$$S' = S + \Sigma\nu_\alpha, \quad W' = W + \Sigma\nu_\alpha, \quad K' = K + 2\Sigma\nu_\alpha.$$

Wzdłuż zamkniętych linii Z_α, $\alpha = 1, 2, ..., \pi$ wykonajmy teraz cięcia. Na antabach δ_1, δ_2, ..., δ_π dostaniemy wtedy dwa otwory (fig. 37.) ω_α, ω'_α. Te otwory zakryjmy odcinkami powierzchni skąd inąd — nie z K_π — wziętemi. Taka nowa powierzchnia K'_π jest zamkniętą i posiada $\pi = 0$, gdyż na niej z wnętrza każdego zamkniętego cięcia wypada już oddzielny odcinek powierzchni. Taką powierzchnię K'_π możemy zamienić na zwykłą kulę K, a na tej kuli mieć będziemy:

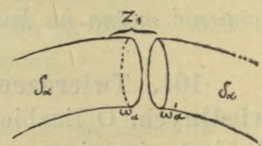


Fig. 33.

a) ścian:

$$S'' = S' + 2\pi,$$

gdyż do pierwotnej liczby S' przybywają z każdej z π antab dwie ściany, zakrycia otworów ω_α, ω'_α;

b) krawędzi:

$$K'' = K' + \Sigma\nu_\alpha,$$

bo z każdej krawędzi leżącej wzdłuż Z_α mamy teraz krawędzi dwie;

c) wierzchołków:

$$W'' = W' + \Sigma\nu_\alpha,$$

bo każdy pierwotny wierzchołek leżący na Z_α rozdzielił się również na dwa.

Uwzględniając relacyę Eulera na tej kuli, dostajemy:

$$S'' + W'' = K' + 2, \quad \text{czyli}$$
$$S' + W' = K' + 2 - 2\pi, \quad \text{czyli wreszcie}$$
$$S + W = K + 2 - 2\pi.$$

π jest widocznie największa możliwa liczba cięć, $(Z_1, Z_2, ..., Z_\pi)$ tak na K_π poprowadzonych, że się one ze sobą nie przecinają, a z ich wnętrzy nie wypadają oddzielne odcinki.

Uwaga. Gdy $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\pi$ są tylko liniami narysowanemi na K_π, to każde inne cięcie Z' poprowadzone na K_π a nie dające oddzielnego odcinka, musi koniecznie jedną lub kilka linij $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\pi$ przeciąć.

Przyjmijmy, że cały tok dopieroco przeprowadzonego rozumowania rozwijamy na podstawie innych cięć kołowych $Z'_1, Z'_2, \ldots$ i że ich wypada π', gdzie $\pi' \gtrless \pi$. Wtedy musiałoby być równocześnie:

$$S+W=K+2-2\pi, \quad S+W=K+2-2\pi',$$

a to, gdy $\pi \gtrless \pi'$ jest niemożliwe. Mamy więc $\pi=\pi'$, czem już prawdziwość twierdzenia I. udowodniono, gdyż K_π jest przekształceniem powierzchni P_π.

Najprzestępniejszymi systemami π cięć będą-to albo cięcia $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\pi$ prowadzone wokoło antab, albo też cięcia $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_\pi$ prowadzone w około przewodów $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$

Taką kulę K_π — (fig. 34.) — opatrzmy w punkt graniczny G, a cięcia $Z'_1, Z'_2, Z'_3, \ldots, Z'_\pi$ $(\pi=4)$ poprowadźmy tak, aby były przekrojami, a nie cięciami kołowemi. [Z'_1 poczyna się i kończy w G; Z'_2 poczyna się i kończy w Z'_1, wskutek przekroju h_1 i t. d.].

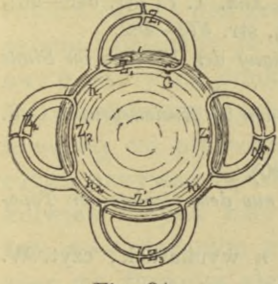


Fig. 34.

Poprowadźmy dalej przekroje $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\pi$ $(\pi=4)$, to w kuli $\dot{K}_\pi$ poprowadziliśmy 2π przekrojów potrzebnych, aby $\dot{K}_\pi$ było już powierzchnią jednokrotnie zwartą. Jej zwartość jest więc:

$$N=2\pi+1,$$

a $\pi=\frac{N-1}{2}$ jest widocznie rodzajem p powierzchni $\dot{K}_\pi$. [Por. art. 101].

Pisząc odtąd za π wszędzie p, powiemy:

II. *Gdy powierzchnia $\dot{P}_p$ jest zwartości $2p+1$, to powierzchnia P_p jest zwartości $2p$ [art. 98., tw. V.], a obie powierzchnie są rodzaju p. Tak w P_p, jak $\dot{P}_p$ można rodzaj określić, jako największą ilość cięć kołowych, n i e p r z e c i n a j ą c y c h s i ę z s o b ą, a nie dzielących tych powierzchni na dwie części. W powierzchni $\dot{P}_p$ ta sama liczba p oznacza zarazem połowę ilości przekrojów potrzebnych, aby z $\dot{P}_p$ dostać już powierzchnię jednokrotnie zwartą.*

Zauważmy w K_p równocześnie system kół $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ i system kół $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_p$ to im w P_p odpowiedzą systemy kół:

$$(K_1, K_2, \ldots, K_p), \quad (K'_1, K'_2, \ldots, K'_p)$$

względem siebie tak położone, jak koła $Z_1, Z'_1, \ldots$ na K_p (por. uwagę wyżej podaną), a stąd wynika:

III. *Na każdej powierzchni P_p lub $\dot{P}_p$ można zawsze poprowadzić system $2p$ kół stanowiących system zupełny kół nieprzywiedlnych. Koła te rozpadną się na pary (K_1, K'_1), (K_2, K'_2), ..., (K_p, K'_p) w ten sposób, że dwa koła jednej pary raz się tylko ze sobą przecinają, dwa koła zaś z dwóch różnych par wcale się ze sobą nie przecinają.**)

---

*) Literatura tego Rozdziału: Początki teoryi zwartości znajdują się już u Möbiusa [*Theorie der elementaren Verwandtschaft*, *Werke*, T. 2., str. 433—472]. Czytaj dalej:

Riemann: W rozprawach „*Grundlagen für eine allg. Theorie der Functionen einer veränderlichen Grösse. Theorie der Abel'schen Functionen. Gesammelte math. Werke*".

Neumann C. „*Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abel'schen Integrale*". (Lipsk 1884).

Klein F. „*Einleitung in die geom. Functionentheorie*" [lit. wykład 1880—81]. „*Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen*". *Math. Ann.* T. 7., str. 549—557. „*Ueber den Zusammenhang der Flächen*". *Math. Ann.* T. 9,, str. 476—482.

Lippich F. „*Untersuchungen über den Zusammenhang der Flächen im Sinne Riemanns*". *Math. Ann.* T. 7., str. 212—229.

Schläfli. „*Ueber die linearen Relationen zwischen den 2p Kreiswegen...*" C. J. T. 76., str. 149—155.

Dingeldey F. „*Topologische Studien.*" (Lipsk 1890).

Simony O. „*Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie*". *Math. Ann.* T. 19., 26.

O przeniesieniu teoryi zwartości na utwory o n wymiarach, czyt. W. Dyck. *Math. Ann.* T. 32., 37.

Poincaré. „*Analysis situs*, *J. de l'école polytéchnique*". C^er 1. (S. 2., 1895).

ROZDZIAŁ XIV.

O powierzchni Riemann'a.

105. Liście Riemann'a w otoczeniu punktów rozgałęzienia. Linie przejścia. Niech nieprzywiedlne równanie algebraiczne

$$f(x, y) = 0$$

określa n-wartościową algebraiczną funkcyę y o gałęziach $y_1, y_2, \ldots, y_n$, a jej cykliczne elementa [art. 60.] niech w skończoności wypadają wyłącznie w punktach (rozgałęzienia):

$$(1) \qquad x = c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_\alpha,\ \ldots,\ c_\mu.$$

W otoczeniu punktu c_1 mamy zatem $n'' \geqq 1$ cyklicznych elementów postaci:

$$(2) \qquad y=b_1+P_1[(x-c_1)^{\frac{1}{s_1}}],\quad y=b_2+P_2[(x-c_1)^{\frac{1}{s_2}}], \ldots,$$

a te wynikają z n'' par funkcyj:

$$\begin{Bmatrix} x=c_1+t^{s_1} \\ y=\varphi_1(t) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x=c_1+t^{s_2} \\ y=\varphi_2(t) \end{Bmatrix}, \ldots,$$

[Dla $x=c_1$ dostajemy $y=b_1$, powtarzające się s_1 razy, $y=b_2$, powtarzające się s_2 razy i t. d.].

Tak samo ma się rzecz w punktach c_2, c_3, ... Oprócz elementów (2) mogą się w otoczeniu punktu c_α znaleść jeszcze gałęzie, zachowujące się regularnie, lub takich gałęzi wcale tam nie ma. Punkt w nieskończoności $x=c_\infty$ może dać znowu cykliczne elementa, albo wykazać same regularne gałęzie funkcyi y.

Mając to, zauważmy nieograniczoną płaszczyznę (x) argumentu x z jej osiami: pierwszorzędną i drugorzędną. Oprócz niej utworzymy $(n-1)$ nieograniczonych płaszczyzn liczbowych znowu z ich osiami i połóżmy je wszystkie na (x) w ten sposób, aby ich punkta zero padły na punkt $x=0$ płaszczyzny (x), a ich dodatnie połowy osi pierwszorzędnych nakrywając się z sobą nakryły dodatnią połowę tej osi płaszczyzny (x). Taki zbiór n nieograniczonych płaszczyzn nazywać będziemy zbiorem n liści albo gałęzi. Na którymkolwiek z tych liści wybrany punkt $x=c$ spada z takimże punktem $x=c$, leżącym na każdym innym liściu. W dowolnym punkcie $x=c$ ma funkcya algebraiczna n wartości: $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Gdy więc punktom $x=c$ leżącym na poszczególnych liściach damy znaczenia (c, y_1), (c, y_2), ..., (c, y_n), albo jeszcze prościej znaczenia wartości y_1, y_2, ..., y_n, to zbiór n utworzonych w opisany sposób liści wyobrażać będzie każdym dowolnym systemem n punktów nakrywających się n wartości funkcyi y w punkcie $x=c$. Liść dający y_α nazwijmy G_α, to mamy teraz zbiór n liści: $\Gamma=(G_1, G_2, \ldots, G_n)$. Lecz funkcya y jest monogeniczną; z każdej więc jej najdowolniejszej wartości dojść można w ciągły sposób do każdej innej jej wartości. Przeciwnie przejście z jednego liścia do drugiego jest w sposób ciągły nie możliwy. Aby więc zbiór Γ mógł dawać dokładnie wyobrażenie o całkowitym przebiegu funkcyi y nie można liści luźnie obok siebie zestawić, tak jak one w Γ dotąd są zestawione.

Zauważmy punkt rozgałęzienia c_1 i przyjmijmy, że tam za pomocą elementów (2) cyklicznie się ze sobą łączą (tworzą cykl) systemy gałęzi:

$(a)\quad (y_1, y_2, ..., y_{s_1}), \qquad (b)\quad (y'_1, y'_2, ..., y'_{s_2}), ...$
rozpostąrte odpowiednio na systemach liści:

$(a')\quad (G_1, G_2, ..., G_{s_1}), \qquad (b')\quad (G'_1, G'_2, ..., G'_{s_2}), ...$

W takim razie w owym punkcie c_1 spoimy ćwiartki (a') ze sobą, potem ćwiartki (b') ze sobą i t. d.

Odpowiada to tej własności funkcyi y, że ona w c_1 daje s_1 gałęzi o jednej wartości b_1, s_2 gałęzi o jednej wartości b_2 i t. d. *) Podług tej samej zasady spajamy ze sobą liście odpowiadających cyklom gałęzi w każdym dalszym punkcie (1).

Połączmy na jednym z liści (na górnym) punkta $c_1, c_2, ..., c_\mu, c_\infty$ (bez różnicy, czy w nieskończoności są punkta rozgałęzienia, lub nie) w dowolnym porządku linią dowolnego kształtu, ale nie przecinającą się z sobą.

Przyjmijmy, że to się udaje zrobić właśnie w porządku $c_1, c_2, ..., c_\mu, c_\infty$ i wzdłuż tej linii przetnijmy (fig. 35.) wszystkie liście

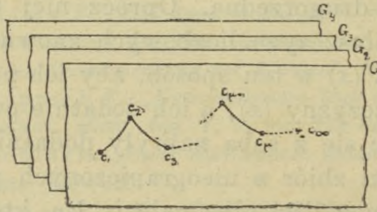


Fig. 35.

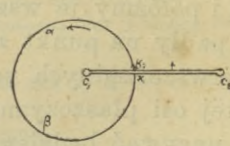


Fig. 36.

całego systemu Γ, zatrzymując przy tem uskutecznione już przódy spojenia w punktach $c_1, c_2, ..., c_\mu$. Zauważmy przekrój $c_1 c_2$, a na jego górnym (dodatnim) brzegu, dowolny punkt k_1 (fig. 36.), dający w swem otoczeniu regularne elementa $y^{(\nu)} = y_\nu + \varphi_\nu(x - k_1)$, $\nu = 1, 2, ..., n$, gdzie $\varphi_\nu(0) = 0$. Wartość y_ν i element $y^{(\nu)}$ niech się mieści w liściu G_ν. Przez to — gdy $y^{(\nu)}$ przeprowadzać będziemy nie przekraczając przekroju:

$$(c_1, c_2, ..., c_\mu, c_\infty)$$

tworzymy cały nieograniczony zapas wartości tej gałęzi funkcyi y, którą ma wyobrażać właśnie liść G_ν. Ale wskutek nieprzekraczalności przekroju $(c_1, c_2, ...)$ niemożliwe są jeszcze przejścia z gałęzi do gałęzi. Zauważmy jednak u dolnego (ujemnego) brzegu przekroju $c_1 c_2$ taki punkt $\varkappa_1$, który przed zrobieniem tego przekroju był identyczny z punktem k_1. Gdy z wartością y_ν wychodząc z punktu $\varkappa_1$

*) To samo zajść może i w punktach x, w otoczeniu których gałęzie zachowują się regularnie. Lecz w takich punktach pozostawiamy gałęzie niespojone.

na liściu G_ν pójdziemy drogą $k_1\alpha\beta\varkappa_1$ przeprowadzając element $y^{(\nu)}$, to w ogólności — wskutek tego, że ta droga okala punkt rozgałęzienia c_1, nie dostaniemy w punkcie $\varkappa_1$ znowu wartości y_ν, ale jakąś inną wartość y'_ν. Ta wartość — wskutek tego, że funkcya y jest ciągłą — okaże się równą wartości funkcyi y, wypadającej w punkcie $\varkappa_1$ (u dodatniego brzegu) innego liścia $G_{\nu'}$, który w szczególności może być różny od G_ν.

Niechżeż wartości:

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ w punkcie } k_1$$

przechodzą po prześciu drogi $k_1\alpha\beta\varkappa_1$ na wartości:

$$(y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_{t_n}) \text{ w punkcie } \varkappa_1,$$

gdzie $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ jest pewną permutacyą liczb $1, 2, \ldots, n$, to aby wyobrazić ciągłość funkcyi y połączoną z możnością przeprowadzania jej z gałęzi na gałąź, potrzeba:

dolny brzeg przekroju c_1c_2 gałęzi G_1 połączyć z
górnym brzegiem „ „ „ G_{t_1};
dolny brzeg „ „ „ G_2 połączyć z
górnym brzegiem „ „ „ G_{t_2} i t. d.

Połączenia dokonane podług tej reguły wzdłuż przekroju c_1c_2 nazywamy **linią przejścia** c_1c_2.

Uwaga. Każdy z punktów okrążać będziemy dodatnio t. j. tak, aby — krocząc po linii zamkniętej, otaczającej ten punkt — mieć go po lewej ręce [T. I., art. 34]. Ten brzeg przekroju (i linii przejścia), na którym obrano punkt (k_1) jako początek linii okrążającej nazywać będziemy brzegiem dodatnim. Brzeg przeciwny zwać będziemy brzegiem ujemnym.

W tych połączeniach wzdłuż c_1c_2 muszą być także wyobrażone i gałęzie (a), (b) cyklicznie się z sobą łączące. Przyjmijmyż w pewnym elemencie w (2) $s_1 = 6$, a $(x - c_1)^{\frac{1}{s_1}}$, z czynnikami $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^5$, gdzie $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi i}{3}}$, niech należy właśnie do gałęzi $y_1, y_2, \ldots, y_6$, to dostajemy tu takie połączenia liści $G_1, G_2, \ldots, G_6$ (przedstawiających te właśnie gałęzie) wzdłuż c_1c_2, jak fig. 37. wskazuje.

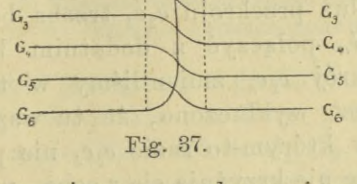


Fig. 37.

Gdy przeciwnie w pierwszym elemencie w (2) użyjemy pierwotnego pierwiastka $\varepsilon_1 = e^{\frac{10\pi i}{6}} = e^{\frac{5\pi i}{3}}$, to z uwagi, że

$$\varepsilon_1{}^0 = \varepsilon^0,\ \varepsilon_1{}^1 = \varepsilon^5,\ \varepsilon_1{}^2 = \varepsilon^4,\ \varepsilon_1{}^3 = \varepsilon^3,\ \varepsilon_1{}^4 = \varepsilon^2,\ \varepsilon_1{}^5 = \varepsilon$$

mieć tu będziemy takie połączenia liści $G_1, \ldots, G_6$ jak na fig. 38.

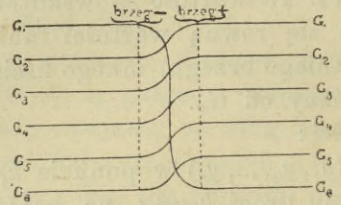


Fig. 38.

Oprócz takich cyklicznych połączeń, wyobrażających cykliczne elementa (a), (b), ... mogą tu być jeszcze i liście same z sobą łączące się wzdłuż c_1c_2, a wyobrażające regularne gałęzie w punkcie c_1 i jego otoczeniu.

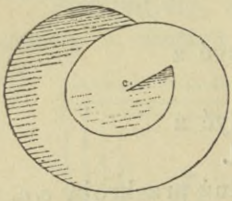


Fig. 39.

Liście $G_1, G_2, \ldots, G_s$ łączące się z sobą cyklicznie mają w otoczeniu punktu c_1 postać śrubowej, spłaszczonej powierzchni o $(s-1)$ skrętach 1, 2, ...; ostatni s^{ty} skręt jest połączeniem skrętu $(s-1)^{go}$ ze skrętem 1^{szym}. Gdy $s=2$, ma taka śrubowa powierzchnia otaczająca punkt c_1 postać taką, jak fig. 39. wskazuje.

106. Tworzenie i określenie powierzchni Riemanna. Przejdźmy do przekroju c_2c_3. Przez elementa $y^{(\nu)}$ w punkcie k_1 mamy już określone jednoznacznie wartości y w każdym punkcie każdego z liści G_α. Przyjmijmyż, że w dowolnym punkcie w $\varkappa_2$ (fig. 40.) dodatniego brzegu przekroju c_2c_3 mamy na $G_1, G_2, \ldots, G_n$ odpowiednio wartości $y_1, y_2, \ldots, y_n$, a przez przeprowadzenia po drodze zamkniętej $k_2\alpha'\beta'\varkappa_2$ dostajemy w $\varkappa_2$ z wartości y_α wartość $y_{\tau_\alpha} \neq$ lub $= y_\alpha$. Z tego już

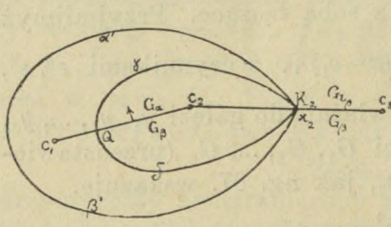


Fig. 40.

wynika, że tu wzdłuż przekroju c_2c_3 trzeba będzie odjemny brzeg każdej z gałęzi G_α połączyć z dodatnim brzegiem gałęzi G_{τ_α} $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Przekrój c_2c_3 zmieniliśmy w ten sposób na linię przejścia, a nie jest wykluczone, że tu wszystkie G_α okażą się identyczne z G_{τ_α}, w którym-to razie c_2c_3 nie przedstawia się jako linia przejścia (liście nie krzyżują się z sobą, nie przenikają siebie).

Linię przejścia c_2c_3 uzyskaną przez okrążanie po $k_2\alpha'\beta'\varkappa_2$ można jeszcze w inny sposób utworzyć. Przyjmijmy, że wzdłuż linii przejścia c_1c_2 łączy się między innymi dodatni brzeg gałęzi G_α z odjemnym brzegiem gałęzi G_β (fig. 40). Wychodząc z punktu k_2 z wartością y_β dochodzimy po $k_2\alpha'\beta'\varkappa_2$ do $\varkappa_2$ z wartością y_{τ_β}. Wyjdźmy teraz z wartością y_α z punktu k_2 i przejdźmy drogę $k_2\gamma\delta\varkappa_2$ przecinającą w Q linię przejścia c_1c_2. W tym punkcie Q schodzimy z gałęzi G_α, na gałąź G_β a idąc dalej po $Q\delta\varkappa_2$ musimy— wskutek jednoznacznie oznaczonych wartości na G_β — dojść i w tym razie do punktu $\varkappa_2$ z wartością y_{τ_β}. To wskazuje, że i tu trzeba tak jak przódy odjemny brzeg ćwiartki G_β połączyć z dodatnim brzegiem ćwiartki G_{τ_β}. Tu więc połączenia $G_\alpha\, G_\beta$ wzdłuż c_1c_2 i $G_\beta\, G_{\tau_\beta}$ wzdłuż c_2c_3 mają ten skutek, że z wartości y_α w punkcie k_2 dostajemy, okrążając c_2 po $k_2\gamma\delta\varkappa_2$, wartość y_{τ_β} w punkcie $\varkappa_2$.

Można zatem linię przejścia c_2c_3 tworzyć albo na podstawie okrążenia $k_2\alpha'\beta'\varkappa_2$, albo też na podstawie okrążenia $k_2\gamma\delta\varkappa_2$ za uwzględnieniem już utworzonej przódy linii przejścia: $c_1\, c_2$. Obie linie przejścia: c_1c_2, c_2c_3 wykryją połączeniami i przenikaniami gałęzi, wszystkie cykliczne elementa, jakie mamy w c_2.

Uwaga I. Gdy ćwiartki $G_1, G_2, \ldots, G_n$ rozciągające się wzdłuż dodatniego brzegu przekroju c_1c_2 łączą się wzdłuż c_1c_2 z ćwiartkami $G_{h_1}, G_{h_2}, \ldots, G_{h_n}$ rozciągającemi się wzdłuż odjemnego brzegu tego przekroju, to te połączenia możemy naznaczyć przez:

$$(a)\qquad S_{c_1c_2} = \begin{pmatrix} G_1\; G_2 \ldots G_n \\ G_{h_1}\; G_{h_2} \ldots G_{h_n} \end{pmatrix}.$$

Gdy podobnie ćwiartki $G_{h_1}, G_{h_2}, \ldots, G_{h_n}$ mające ujemne brzegi wzdłuż c_2c_3 łączą się wzdłuż c_1c_3 z ćwiartkami $G_{k_1}, G_{k_2}, \ldots G_{k_n}$ rozciągającemi się nad dodatnim brzegiem linii c_2c_3, a te połączenia naznaczymy substytucyą:

$$(b)\qquad T_{c_2c_3} = \begin{pmatrix} G_{h_1}\; G_{h_2} \ldots G_{h_n} \\ G_{k_1}\; G_{k_2} \ldots G_{k_n} \end{pmatrix},$$

to złożenie $S_{c_1c_2} . T_{c_2c_3}$, gdy w niem literę G zastąpimy literą y, da podstawienie:

$$(c)\qquad S_{c_1c_2} . T_{c_2c_3} = s(y)_{c_2} = \begin{pmatrix} y_1\; y_2 \ldots y_n \\ y_{k_1}\; y_{k_2} \ldots y_{k_n} \end{pmatrix},$$

które wskazuje jak się przez okrążanie samego już punktu c_2 zmieniają wartości funkcyi y. Substytucyą (a) przedstawiając złożeniem cyklów [T. I. art. 95.] dostajemy uwidocznione wszystkie cykliczne elementa punktu rozgałęzienia c_2.

Gdy analogicznie postąpimy z przekrojami c_3c_4, $c_4c_5, \ldots, c_{\mu-1}\, c_\mu$, $c_\mu\, c_\infty$ zamieniając je wszystkie na linie przejścia, zamienią się luźnie wprzód na sobie leżące liście $G_1, G_2, \ldots, G_n$ na zwartą powierzchnię $\mathfrak{R}$ dającą obraz monogenicznej funkcyi algebraicznej y.

*

Taką powierzchnią $\mathfrak{R}$ nazywają powierzchnię Riemanna*). Punkta $c_1, c_2, \ldots$ są jej punktami rozgałęzienia.

Zauważmy przekrój $c_\mu c_\infty$ (fig. 41.). Zamienia się on na linię przejścia o takich połączeniach, jakie dają okrążenia po $k_\mu A B \varkappa_\mu$.

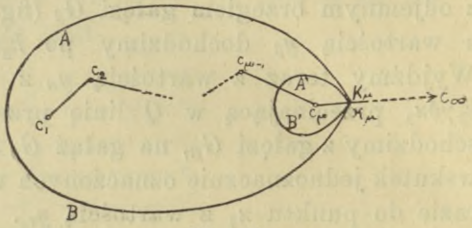


Fig. 41.

Ta linia zamknięta otacza punkt c_∞ odjemnie, a stąd wynika, że połączenia ćwiartek wzdłuż $c_\mu\, c_\infty$ wykryją wszystkie cykliczne elementa znajdujące się w nieskończoności. Ale zarazem tak utworzona linia przejścia jest taka, że uwzględniając przy niej utworzoną już przódy linię przejścia $c_{\mu-1} c_\mu$ dostajemy krążeniem po $k_\mu A' B' \varkappa_\mu$ wszystkie cykliczne elementa punktu c_μ.

Z tego wynika, że opisany tu sposób zamieniania systemu liści Γ na powierzchnię $\mathfrak{R}$ daje się stosować bez różnicy, czy się funkcya y w nieskończoności rozgałęzia lub nie.

Gdy $S_{c_\mu} c_{\mu-1}$, $T_{c_\mu} c_\infty$ mają analogiczne znaczenie, jak w uwadze 1., to:

$$S_{c_{\mu-1}} c_\mu . T_{c_\mu} c_\infty = s(y)_{c_\mu}$$

Gdy $T_{c_\mu} c_\infty = 1$, mamy w nieskończoności same regularne gałęzie; $c_\mu\, c_\infty$ nie jest linią przejścia, a $s(y)_{c_\mu} = S_{c_{\mu-1}} c_\mu(y)$.

System gałęzi Γ można jeszcze w inny sposób zamienić na powierzchnię $\mathfrak{R}$. Przyjmijmy dla uproszczenia, $\mu = 4$ i poprowadźmy z punktów c_1, c_2, c_3, c_4 takie linie p_1, p_2, p_3, p_4 (fig. 46.) w dowolnych kierunkach dążące w nieskończoność, że z nich żadna ani sama siebie, ani drugich nie przecina.

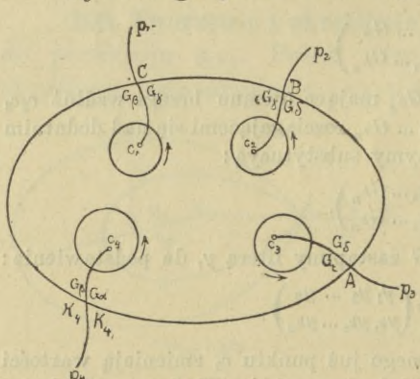


Fig. 42.

Te linie zamieńmy na przekroje, a potem każdy przekrój p_α $\alpha = 1, 2, 3, 4$ zamieńmy na linię przejścia, dokonując takich połączeń liści, jakie wynikają przez dodatnie okrążanie punktu c_α. Przez to z systemu Γ dostajemy znowu powierzchnię $\mathfrak{R}$. Aby punkt

*) Riemann. *Math. Werke.* Neumann. *Vorlesungen ü. Riemanns Th. der Abel'schen Intergrale.* Appell-Goursat. *Théorie des fonctions algébriques...* Picard. *Cours d' Analyse.* Forsyth. *Theorry of functions.* Harkness and Morley. *A treatise on the th. of fonctions.*

w nieskończoności zbadać, przyjmijmy, że wzdłuż przekroju p_4 łączy się dodatni brzeg gałęzi G_α z odjemnym brzegiem gałęzi G_β. Wskazuje to, że z punktu k_4, wychodząc z wartością y_β dochodzimy, po okrążeniu punktu c_4, w punkcie $\varkappa_4$ z wartością y_α, (G_β ma w $\varkappa_4$ wartość y_α). Lecz G_β musi być wzdłuż p_1 połączoną z pewną gałęzią G_γ; G_γ musi się łączyć wzdłuż p_2 z pewną gałęzią G_δ, G_δ wreszcie musi być połączoną wzdłuż p_3 z pewną gałęzią G_ε. Niechże G_ε ma w k_4 wartość y_α, to teraz krążąc po $k_4ABC\varkappa_4$, przez co okrążamy punkt w nieskończoności w odjemnym kierunku, dostajemy wychodząc z k_4 z wartością y_ε ostatecznie w punkcie $\varkappa_4$ wartość y_α. Ta zmiana odnosi się już do punktu w nieskończoności. Każda linia przejścia p_α daje sama tylko cykliczne elementa punktu c_α, a przy równoczesnem uwzględnieniu wszystkich innych linij przejścia wykrywa cykliczne elementa leżące w nieskończoności lub wskazuje, że w nieskończoności mamy same elementa regularne.

Tworzenia powierzchni $\mathfrak{R}$ można wreszcie dokonać także w taki sposób. Przyjmijmy znowu $\mu=4$, c_1, c_2, c_3, c_4 wszystkie w skończoności, a punkt c_∞ niech będzie nasamprzód punktem zwyczajnym funkcyi algeb. y. Obierzmy dowolny punkt zwyczajny x_0 i zróbmy przekroje x_0c_α, $\alpha=1,2,3,4$ (fig. 43.). Każdy taki przekrój zmieniwszy na linię przejścia x_0c_α powstający z uwzględnienia okrążeń punktu c_α, dostajemy powierzchnię $\mathfrak{R}$.

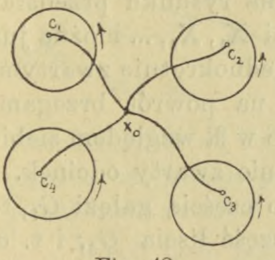


Fig. 43.

Gdy jeden z punktów c_α n. p. punkt c_4 leży w nieskończoności (fig. 44.), to prowadzimy przekroje x_0c_1, x_0c_2, x_0c_3 i linią x_0c_∞ w dowolnym kierunku. Trzy pierwsze przekroje zmieniamy na linię przejścia tak, jak w przypadku 1-szym. Linię przejścia x_0c_∞ tworzymy, badając, jak się zmieniają wartości funkcyi y przez krążenie po linii $kAB\varkappa$ zamykającej w swem wnętrzu wszystkie punkta c_α leżące w skończoności.

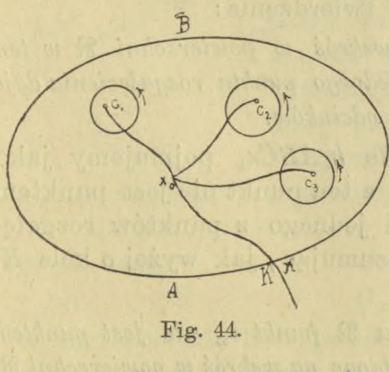


Fig. 44.

107. Wnętrza cięć kołowych na powierzchni Riemanna. Zauważmy na powierzchni $\mathfrak{R}$ utworzonej którymkolwiek z trzech opisanych sposobów linią zamkniętą K poczynającą się i kończącą w punkie Q (fig. 45.) jednego z n liści n. p. liścia G_1, i załóżmy, że ona w swem wnętrzu nie zawiera ani jednego z punktów rozgałęzienia (ani punktu x_0, jeżeli powierzchnia $\mathfrak{R}$ utworzono sposobem trzecim).

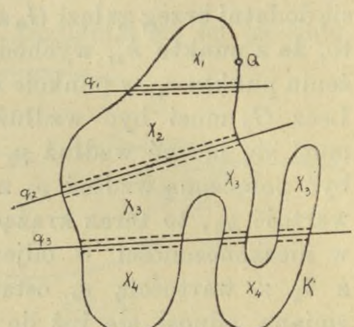


Fig. 45.

Jeżeli takie koło K przecina pewne linie przejścia, to musi każdą z nich przeciąć parzystą ilość razy, inaczej bowiem nie mogłoby wrócić do tej samej gałęzi G_1.

Po kole K zróbmy cięcie. Gdy w jego wnętrzu mamy części liści X_1 $X_2, \ldots$, fig. 45. to te części trzymają się z sobą wzdłuż linij przejścia q_1, $q_2, \ldots$

Zróbmyż po obydwu brzegach tych linij przejścia a w tych gałęziach, przez które K przechodzi cięcia (na rysunku przedstawiają ją linie punktowane) — to teraz części $X_1, X_2, \ldots$ można już od powierzchni odłączyć; są one wszystkie jednokrotnie zwartymi odcinkami. Gdy je potem poza powierzchnią na powrót brzegami ze sobą złączymy w ten sam sposób, jak one w $\mathfrak{R}$ względem siebie leżały, to dostaniemy z nich jeden jednokrotnie zwarty odcinek.

Gdy X_1, na którem punkt Q leżał, było częścią gałęzi G_1, to pod nią mamy tam jeszcze część liścia G_2, część liścia G_3, i t. d. Koło takiego samego kształtu jak poprzednie, a poczynające się w punkcie Q ćwiartki G_2, doprowadzi znowu do jednokrotnie tylko zwartego odcinku i t. d. Stąd mamy twierdzenie:

I. *Cięcie zamknięte zrobione na wskróś w powierzchni* $\mathfrak{R}$ *w ten sposób, że w jego wnętrzu nie ma ani jednego punktu rozgałęzienia daje swem wnętrzem n jednokrotnie zwartych odcinków.*

Jeżeli na fig. 42., str. 388., koło $k_4ABC\varkappa_4$ pojmujemy jako zamkniętą linię otaczającą punkt c_∞, a ten punkt nie jest punktem rozgałęzienia, to ona nie otacza ani jednego z punktów rozgałęzienia, a wskutek tego — podobnie rozumując, jak wyżej o kole K, możemy powiedzieć:

II. *Jeżeli w powierzchni Riemana* $\mathfrak{R}$ *punkt* c_∞ *nie jest punktem rozgałęzienia, to cięcie zamknięte* K' *zrobione na wskróś w powierzchni* $\mathfrak{R}$, *a zawierające w swem wnętrzu wszystkie punkta rozgałęzienia leżące* *w skończoności, daje zewnątrz siebie n oddzielnnych jednokrotnie zwartych odcinków.*

Obierzmy w powierzchni utworzonej sposobem drugim dowolny punkt zwyczajny x_0 i połóżmy:

$$x = \frac{A}{x' - x_0}, \quad A = \text{stała}.$$

Po tem podstawieniu dostaniemy z równania $f(x, y) = 0$ równanie $f_0(x', y) = 0$. Przyjmijmy — do czego dojść łatwo — że punkt $x = 0$ nie był punktem rozgałęzienia, to w równaniu $f_0 = 0$ nie jest $x' = c_\infty$ punktem rozgałęzienia, a punkta rozgałęzienia leżą tu wszystkie w skończoności.

Weźmy teraz za punkt wyjścia równanie $f_0(x', y) = 0$ i utwórzmy dlań powierzchnię $\mathfrak{R}$ sposobem trzecim; cięciu K' określonemu w tw. II. odpowie koło K'' (fig. 46.) okalające punkt x_0, a przecinające powierzchnię na wskróś.

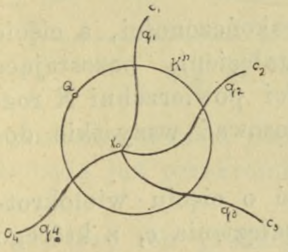


Fig. 46.

Częściom powierzchni leżącym zewnątrz K' odpowiedzą części leżące wewnątrz koła K'', a stąd wynika:

III. *Gdy w powierzchni $\mathfrak{R}$ utworzonej sposobem trzecim poprowadzimy cięcie zamknięte, przecinające $\mathfrak{R}$ na wskróś, okalające punkt x_0, a nie mieszczące w swem wnętrzu ani jednego punktu rozgałęzienia c_α, to wnętrze tego koła daje n jednokrotnie zwartych odcinków.*

Niech linia przejścia q kończy się w punkcie rozgałęzienia c (fig. 47.). Zróbmy cięcie kołowe po linii $QABQ$, okalającej jeden tylko punkt rozgałęzienia c. Gdy cięcie to nie przecina powierzchni na wskróś, a punkt c daje s-krotny cykliczny element zawierający w sobie gałąź G_α, na której początkowy punkt Q zrobionego cięcia leży, to cięcie to przebiega s razy po $QABQ$ tak, że po s-krotnem dopiero przebieżeniu tej linii wraca do punktu Q.

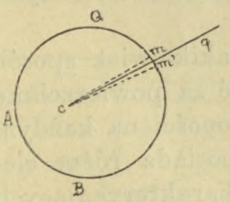


Fig.47.

Gałęzie, przez które takie (wielokrotne) cięcie przechodzi, niech będą:

$$(\alpha) \qquad G_\alpha \, G_\beta \, G_\gamma \ldots G_\vartheta \, G_\alpha,$$

to to zespolenie liści przedstawia cykl $(y_\alpha \, y_\beta \, y_\gamma \cdots y_\vartheta \, y_\alpha)$, a z tego zespolenia niemożliwe jest przeście wewnątrz $QABQ$ do żadnej gałęzi takiej, przez którą cięcie nie przechodzi.

W każdej gałęzi zespolenia (α) zróbmy jeszcze cięcia cm, cm' nieskończenie blisko linii q a kończące się w $QABQ$. Po nich można już każdą gałąź zespolenia (α) odłączyć od powierzchni $\mathfrak{R}$ jako jednokrotnie zwarty odcinek. Gdy dalej poza powierzchnią $\mathfrak{R}$ złączymy napowrót przytykające do siebie liści brzegami cm, cm', będziemy dalej mogli przez ściągania (zwężania) każdego odcinka zrobić z tych odcinków jeden jednokrotnie już zwarty odcinek nie posiadający żadnych linij przenikania. W ten odcinek weszło dokładnie tyle liści, ile ich było w (α) różnych między sobą. Przyjmijmyż, że punkt c daje n'' cyklicznych elementów o wykładnikach $s_1, s_2, \ldots$, to wnętrze cięcia kołowego $QABQ$ zrobionego już na wskróś przedstawia $n-(s_1+s_2+\ldots)+n''$ jednokrotnie zwartych odcinków, gdzie $s_1+s_2+\ldots \leqq n$.

Gdy punkt rozgałęzienia c leży w nieskończoności, a cięcie $QABQ$ otaczające wszystkie punkta rozgałęzienia pozostające w skończoności, jest wielokrotne, to do części powierzchni $\mathfrak{R}$ rozciągającej się zewnątrz $QABQ$ trzeba zastosować wszystkie dopieroco wypowiedziane uwagi.

Analogiczne uwagi trzeba wypowiedzieć o cięciu wielokrotnem okalającem jeden tylko taki punkt rozgałęzienia c, z którego wychodzą dwie linie przejścia. Mamy więc twierdzenie:

IV. *Gdy w powierzchni $\mathfrak{R}$ cięcie zamknięte $QABQ$ zrobione na wskróś otacza jeden tylko punkt rozgałęzienia o n'' cyklicznych elementach z wykładnikami $s_1, s_2, \ldots$, to — bez różnicy, czy się w c kończy linia przejścia, czy też przez c przechodzą dwie różne linie przejścia — przedstawia wnętrze tego cięcia $n-(s_1+s_2+\ldots)+n''$ odcinków jednokrotnie zwartych.*

108. Zwartość powierzchni Riemanna. W jakikolwiek sposób dojdziemy do powierzchni $\mathfrak{R}$, możemy ją uważać za powierzchnię zamkniętą z jednym tylko punktem w nieskończoności na każdym liściu. Nawet w przypadku, kiedy funkcya y posiada różne elementa cykliczne w nieskończoności o różnych charakteryzujących je stosunkach $(y:x)_\infty$ [T. I. art. 126.] a więc różnych punktach, można te wszystkie punkta uważać za identyczne, a to z powodu, że po stereograficznym przeniesieniu całej powierzchni $\mathfrak{R}$ na kulę [T. I. art. 47.], wszystkie takie punkta wpadną na kuli w biegun B, będący środkiem rzutu.

Mając to, postarajmy się określić zwartość i rodzaj powierzchni $\mathfrak{R}$ podług definicyj i reguł danych w poprzedzającym Rozdziale. Przyjmijmy, że z systemu Γ powstała powierzchnia

$\mathfrak{R}$ sposobem pierwszym, a więc przez utworzenie linij przejścia $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_\mu, c_\infty$.

I⁰. W punkcie c_∞ nie mamy cyklicznych elementów. Powierzchnię $\mathfrak{R}$ zmieńmy na $\dot{\mathfrak{R}}$ przez zrobienie w pierwszym górnym liściu G_1 małego otworu G (fig. 48.).

Poprowadźmy na liściu G_1 przez G linię $\alpha\beta$ nieograniczoną w obie strony, nieprzecinającą w swym biegu ani samą siebie, ani linii przejścia $c_1 c_2 \ldots c_\mu c_\infty$. Wskutek uczynionych założeń trzeba taką linię uważać za zamkniętą, a gdy po niej zrobimy cięcie w G_1, to to cięcie jest przekrojem, bo dąży od ograniezenia G powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$ do ograniczenia G napowrót. Gdy wzdłuż linii $\alpha\beta$ przetniemy także i pozostałe liście $G_2, G_3, \ldots, G_n$, to takie cięcia nie będą już przekrojami, ale cięciami zamkniętemi. Ich liczba jest $=(n-1)$.

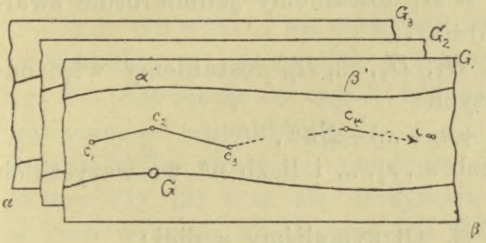


Fig. 48.

Przez ten przekrój $\alpha\beta$ i przez owych $(n-1)$ cięć kołowych odpadną z $\dot{\mathfrak{R}}$ odcinki jednokrotnie zwarte: $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (ćwiartek $G_1, G_2, \ldots, G_n$), rozpościerające się pod $\alpha\beta$.

Poprowadźmy podobnie z drugiej strony — nad linią przejścia — cięcia kołowe $\alpha'\beta'$. [Linia $\alpha'\beta'$ nie ma znowu przecinać ani siebie samą ani linii $c_1 c_2 \ldots c_\mu c_\infty$]. Wskutek tych nowych n cięć odpadnie z powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$ znowu n jednokrotnie zwartych odcinków $H'_1, H'_2, \ldots, H'_n$, (części ćwiartek $G_1, G_2, \ldots, G_n$, rozciągające się nad $\alpha'\beta'$).

Pozostała część powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$ między $\alpha\beta$ a $\alpha'\beta'$ jest zwartym odcinkiem, bo liście trzymają się z sobą w punktach c_α, a prócz tego jeszcze i linie przejścia łączą je ze sobą.

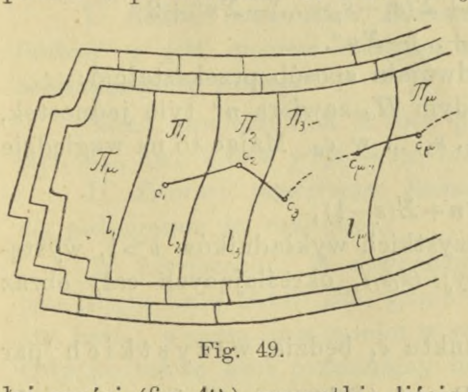


Fig. 49.

Przetnijmy w tej pozostałej części (fig. 49.) wszystkie liście równocześnie wzdłuż linij $l_1, l_2, \ldots, l_\mu$ tak, aby między l_α i $l_{\alpha+1}$ znajdował się tylko jeden punkt c_α. Między l_μ i l_1 znajduje się c_μ.

Przez to w powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$ wykonaliśmy nowych $n.\mu$ przekrojów. Części liści, leżące między l_α i $l_{\alpha+1}$ nazwijmy Π_α. (Π_μ leży między l_μ a l_1). W punkcie c_1 mamy według zrobionego założenia w art. 98. n'' cyklicznych elementów. W każdym z takich elementów trzymają się ze sobą gałęzie mimo zrobionych dotąd przekrojów i cięć, tworząc po jednym jednokrotnie zwartym odcinku.

Gdy zaś w elementach cyklicznych punktu c_1 znajdujemy po s_1, po s_2, i t. d. gałęzi, to w Π_1 dostaniemy jednokrotnie zwartych odcinków: $n-(s_1+s_2+...)+n''$.

We wszystkich częściach Π_1, Π_2, ..., Π_μ dostaniemy więc odcinków jednokrotnie już zwartych:

$$n\mu-\Sigma(s_1+s_2+...)+\Sigma n'',$$

gdzie sumy odnoszą się do liczb s_1, s_2, ... i liczb n'' we wszystkich częściach Π_α.

Wróćmy do powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$. Otrzymaliśmy z niej:

a) n jednokrotnie zwartych odcinków $H_1, H_2, ..., H_n$;

b) n „ „ „ $H'_1, H', ..., H'_n$ —

i wreszcie

c) $n\mu-\Sigma(s_1+s_2+...)+\Sigma n''$

jednokrotnie zwartych odcinków z części $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_\mu$. Wszystkich więc razem jednokrotnie zwartych odcinków mamy:

$$(a)\qquad (\mu+2)n-\Sigma(s_1+s_2+...)-\Sigma n''.$$

Przekrojów zrobiliśmy: jeden przekrój na liściu G_1 wzdłuż $\alpha\beta$ i $n\mu$ przekrojów wzdłuż $l_1, l_2, ..., l_\mu$. Razem więc mamy przekrojów $(n\mu+1)$. Niech zwartością powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$ będzie $\dot{N}$, to stosując tu twierdzenie III., art. 91., mamy:

$$\dot{N}=(n\mu+1)-(\mu+2)n+\Sigma(s_1+s_2+...)-\Sigma n''+2$$
$$=3-2n+\Sigma(s_1+s_2+...)-\Sigma n''.$$

To wyrażenie możemy w dwojaki sposób przekształcić:

1°) Zauważmy, że w każdym Π_α zawiera n'' tyle jednostek, ile właśnie jest wykładników s_1, s_2, ... w c_α. Mając to na względzie możemy położyć:

$$(1)\qquad \dot{N}=3-2n+\Sigma(s-1),$$

gdzie suma odnosi się tu do wszystkich wykładników $s>1$, występujących w x_t w parach funkcyj $(x_t y_t)$, określających cały obraz algebraiczny $f(x,y)=0$.

2°) Niech w otoczeniu punktu c_1 będzie **wszystkich** par funkcyj $(\overset{c_1}{x_t}, \overset{c_1}{y_t})$ dokładnie n'. Do n'' tych par należą $s>1$, a do $(n'-n'')$ par należą same $s=1$, a suma wszystkich tych s bez różnicy, czy $s>1$, czy $=1$, jest $=n$. Napiszmyż:

$$s_1+s_2+...-n''=[s_1+s_2+...+(n'-n'')]-[n''+(n'-n'')],$$

to widocznie $s_1+s_2+...+(n'-n'')=n$, tak, że mamy w c_1:

$$s_1+s_2+...-n''=n-n'.$$

Robiąc to samo przekształcenie w $c_2, c_3, ...$, dostaniemy:

$$\dot{N}=3-2n+\Sigma(n-n'), \tag{2}$$

gdzie suma odnosi się do wszystkich punktów c_α, t. j. do punktów, w których mniej niż n par funkcyj dostajemy.

II[0]. Gdy w c_∞ są cykliczne elementa, to linie $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ prowadzimy tak samo, jak w pierwszym razie, a tylko potem na fig. 49. przybędzie do cięć $l_1, l_2, ... l_\mu$, jeszcze cięcie $l_{\mu+1}$ tak poprowadzone, że z punktów $c_1, c_2, ..., c_\mu, c_\infty$ zawiera się między l_μ a $l_{\mu+1}$ jedynie tylko punkt c_μ; pomiędzy $l_{\mu+1}$ a l_1 zawiera się punkt c_∞. Wzory (1), (2) i tu się utrzymają z tą tylko różnicą, że sumy w tych wzorach obejmować już będą wykładniki $s>1$ i liczby n', jakie z punktów c_∞ pochodzą.

109. Rodzaj p powierzchni Riemann'a. Zwartość $\dot{N}$ powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$ ma tu być według tw. III. art. 94. nieparzystą $=2p+1$, a wtedy $p=(\dot{N}-1)/2$ jest rodzajem powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$. Ten rodzaj dostajemy z formy (1) lub (2) [art. poprzedz.] odpowiednio w postaci:

$$p=1-n+\frac{\Sigma(s-1)}{2},\quad p=1-n+\frac{\Sigma(n-n')}{2}. \tag{1}$$

Porównując te wzory z wzorami (I) i (II) w art. 84., dochodzimy do wniosku:

I. *Rodzaj powierzchni Riemann'a* $\dot{\mathfrak{R}}$, *wyobrażającej algebraiczną funkcyę y jest zarazem rodzajem równania algebraicznego* $f(x,y)=0$, *określającego tę funkcyę.*

Sama powierzchnia $\mathfrak{R}$ (bez punktu G), ma zwartość $N=\dot{N}-1$, [art. 91., tw. V.], a więc $=2p$, co znaczy:

II. *Zwartość powierzchni Riemann'a* $\mathfrak{R}$ *jest zawsze parzysta i równa się podwójnemu jej rodzajowi.*

W powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$ utworzonej soosobem 2[gim] poprowadźmy zamkniętą linię $GABCDG$, gdzie punkt G leży na liściu G_1 (fig.50., str. nast.), a sama linia mieści w swem wnętrzu wszystkie punkta c_α. Gdy po takiej linii przecinamy liść G_1, to albo po jednokrotnem okrążeniu linii $GABCDG$ wracamy do G, albo też — gdy G_1 cyklicznie łączy się z innymi liśćmi w nieskończoności — dopiero kilkakrotne okrążanie dokona całego przekroju. W jednym i drugim wypadku mamy w każdym razie jeden tylko przekrój, poczynający się i kończący w G_1. Cięcia innych ćwiartek, niełączących się już cyklicznie z G_1 w nieskończoności, dokonane po $GABCDG$ (znowu jednokrotnie lub kilkakrotnie wzdłuż $GABCDG$) są już cięciami kołowemi. Poprowadźmy dalej μ przekrojów $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$, to mamy tu: $(n\mu+1)$ przekrojów, a odcinków: *a)* $n(\mu+1)-\Sigma(s-1)$ w częściach $\Pi_1, \ldots, \Pi_\mu, \Pi_\infty$; *b)* n odcinków w części P. Z tych danych dostaniemy znowu zwartość $\dot{N}$, wyrażoną wzorem (1), art. poprzedz.

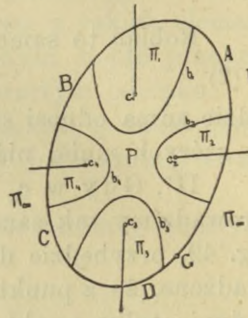


Fig. 50.

Podobnie okazać można, że powierzchnia $\dot{\mathfrak{R}}$ utworzona sposobem trzecim, a posiadająca punkta rozgałęzienia $(c_1, c_2, \ldots, c_\mu)$, albo $(c_1, c_2, \ldots, c_\mu, c_\infty)$ — (fig. 51 *a)*, *b)* — ma zwartość

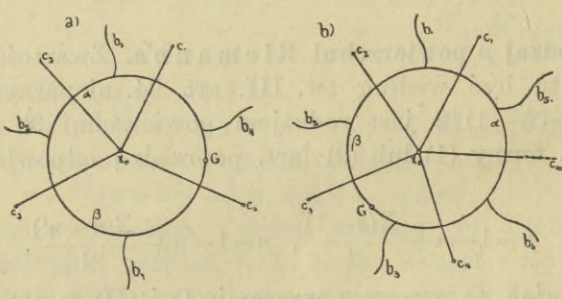


Fig. 51.

$\dot{N}$, dającą się znowu przedstawić formą (1) art. poprzedz. Do obliczenia tej zwartości dochodzi się przy pomocy jednego przekroju i cięć kołowych po $G\alpha\beta G$ i przy pomocy $n\mu$ lub $n(\mu+1)$ przekrojów prowadzonych po $b_1, b_2, b_3, \ldots$ w nieskończoność.

110. Przekroje sprowadzające powierzchnię Riemann'a do jednokrotnej zwartości. Systemy kół nieprzywiedlnych. Zwartość $\dot{N}$ obliczyliśmy, nie troszcząc się o przekroje, które z $\dot{\mathfrak{R}}$ zrobić mają jednokrotnie już zwartą powierzchnię. To tylko pewna, że $\dot{N}=2p+1$ i że więc ilość przekrojów potrzebna do sprowadzenia powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$ do jednokrotnej zwartości jest zawsze parzysta.

Rzeczywiste wykonanie tych przekrojów nie jest w ogólności zadaniem łatwem, a każdym razem trzeba rozpocząć od zamiany powierzchni $\mathfrak{R}$ na $\dot{\mathfrak{R}}$ przez zrobienie w $\mathfrak{R}$ w dowolnej ćwiartce małego otworu G.

Powierzchnię $\mathfrak{R}$ rodzaju p można będzie dalej zamienić — według końcowych twierdzeń Rozdziału poprzedzającego*) — na kulę K_p o p antabach, a stąd wynika:

I. *W powierzchni* $\mathfrak{R}$ *rodzaju* p *można zawsze poprowadzić najwyżej* p *cięć kołowych nie przecinających się, a nie rozdzielających powierzchni* $\mathfrak{R}$ *na części.*

II. *W powierzchni* $\mathfrak{R}$ *rodzaju* p *można zawsze poprowadzić* p *par kół* (K_a, K'_a) *w ten sposób, że dwa koła tej samej pary przecinają się z sobą w jednym tylko punkcie, a dwa koła z różnych par wcale się z sobą nie przecinają. Wzdłuż kół systemu* K_a, $a=1,2,\ldots,p$, *lub systemu* K'_a, $a=1,2,\ldots,p$, *poprowadzone cięcia, będą-to właśnie cięcia, określone w tw. I.*

III. *Koła,* K_a, K'_a, $a=1,2,\ldots,p$, *są systemem zupełnym* $2p$ *kół nieprzywiedlnych.*

IV. *Gdy w powierzchni* $\dot{\mathfrak{R}}$ *poprowadzimy jedno z* $2p$ *kół* K_a, K'_a *przez punkt graniczny* G, *gdy dalej wzdłuż tych wszystkich kół robić będziemy cięcia, a potem zrobimy przekroje* $h_1, h_2, \ldots, h_{p-1}$ *od pierwszej pary cięć do drugiej, od drugiej pary do trzeciej i t. d., uważając:*

$$(h_{a-1}+K_a),\quad K'_a,\quad a=1,2,\ldots,p,\quad [h_0 \text{ nie istnieje}],$$

za osobne zrobione przekroje — to one dają właśnie $2p$ *potrzebnych przekrojów, aby z* $\dot{\mathfrak{R}}$ *uzyskać powierzchnię jednokrotnie już zwartą.*

Z tego-to powodu wyrażają się często w ten sposób: Powierzchnię sprowadza się do jednokrotnej zwartości za pomocą $2p$ cięć kołowych i $(p-1)$ przekrojów. Schematycznie można rozciętą już powierzchnię w ten sposób przedstawić (fig. 52.):

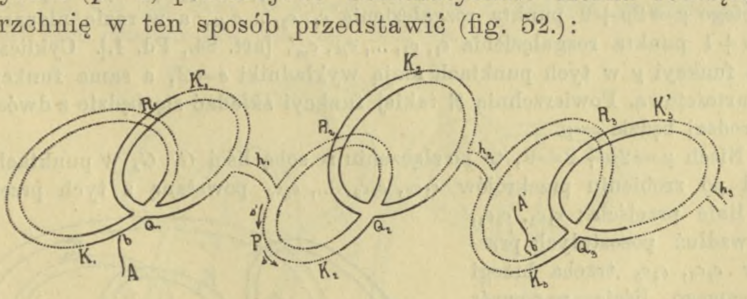


Fig. 52.

W punktach $Q_1, Q_2, \ldots$ — (w każdej parze kół znajduje się tylko jeden taki punkt) — przecinają się ze sobą koła jednej pary.

*) O pewnem ograniczonem zmienianiu powierzchni $\mathfrak{R}$ czytaj: Hoyer. *„Ueber Riemann'sche Flächen mit beschränkt veränderlichen Verzweigungspuncten“.* *Math. Ann.* T. 47., str. 47.

W punktach $R_1, R_2, \ldots$ — a może ich być więcej w każdej parze kół, biegnie jedno koło pod drugiem, nie przecinają się więc ze sobą. Wreszcie — na podstawie uwag Rozdziału poprzedz. — wnioskujemy:

V. *Każde dowolne nieprzywiedlne koło K' jest równoważne z zupełnym systemem kół* (K_α, K'_α), $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Koło nieotaczające żadnego z punktów rozgałęzienia jest przywiedlne. Wskutek tego i koło zamykające w swem wnętrzu wszystkie punkta rozgałęzienia, leżące w skończoności jest przywiedlne, jeżeli obraz algebraiczny, wyobrażony powierzchnią $\mathfrak{R}$, nie daje cyklicznych elementów funkcyi y w nieskończoności.

Na fig. 52. mamy uwidocznione dwa brzegi każdego z przekrojów. Brzegi te tworzą tu — jak w każdej powierzchni jednokrotnie zwartej — jedno zamknięte pasmo ograniczające. Z dowolnego więc punktu P, leżącego na brzegu przekroju, wychodząc w kierunku (s) wzdłuż tego brzegu, wrócimy do P po przebieżeniu całego pasma.

Mimo tego pasma można tu będzie z każdego punktu A dojść do każdego innego punktu A' w ciągły sposób i bez opuszczania powierzchni. Gdy bowiem z A przejdziemy do punktu b, leżącego nieskończenie blisko brzegu, a z A' do punktu b', położonego również nieskończenie blisko brzegu, to potem już przejście z b do b' odbywać się będzie wzdłuż pasma ograniczającego.

Pd. 1. Obraz hypereliptyczny: $y^2 = C(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_\mu)$ daje w razie parzystego $\mu = 2p+2$ punkta rozgałęzienia $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$, a w razie nieparzystego $\mu = 2p+1$ punkta rozgałęzienia $c_1, c_2, \ldots, c_\mu, c_\infty$, [art. 84., Pd. 1.]. Cykliczne elementa funkcyi y w tych punktach mają wykładniki $s=2$, a sama funkcya jest dwuwartościowa. Powierzchnia $\mathfrak{R}$ takiej funkcyi składać się będzie z dwóch liści, a jej rodzaj będzie $=p$.

Niech $\mu = 2p+2 = 6$, to po złączeniu ze sobą liści G_1, G_2 w punktach $c_1, c_2, \ldots, c_6$ i po zrobieniu przekrojów $c_1c_2, c_2c_3, \ldots, c_5c_6$ powstaną z tych przekrojów tylko linie przejścia: c_1c_2, c_3c_4, c_5c_6, wzdłuż pozostałych przekrojów c_2c_3, c_4c_5 trzeba brzegi tego samego liścia napowrót spoić; c_2c_3, c_4c_5 nie będą więc liniami przejścia.

W bliskości c_1c_2 obierzmy na liściu G_1 punkt G (fig. 53.) i poprowadźmy cięcie kołowe K_1; rozcina ono tylko sam liść G_1.

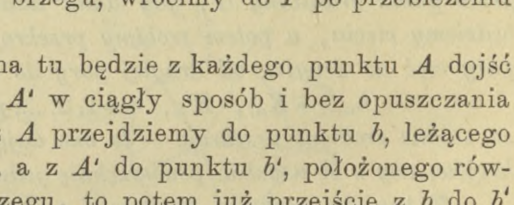


Fig. 53

Z punktu a_1 tego cięcia poprowadźmy cięcie K'_1, przebiegające przez G_1 i G_2, a z punktu a'_1 tego ostatniego cięcia K'_1 poprowadźmy przekrój h_1, a potem kołowe cięcie K_2 na samym liściu G_1, a wreszcie z jego punktu a_2 cięcie kolowe

K'_2, przebiegające znowu przez oba liście G_1, G_2. Tymi przekrojami sprowadziliśmy już powierzchnię $\mathfrak{R}$ do jednokrotnej zwartości.

Gdy na powierzchni $\mathfrak{R}$ lub $\dot{\mathfrak{R}}$ narysujemy koła K_1, K_1'; K_2, K'_2 to w nich (przekroju h_1 niema), dostajemy zupełny system kół nieprzywiedlnych.

Naznaczmy $c_\alpha c_{\alpha+1} = q_\alpha$, to w ogólnym wypadku mamy linie przejścia: $q_1, q_3, ..., q_{\mu-1}$.

Koło okalające jedynie linię przejścia q_α nazwijmy K_α, a koło, które przecina tylko linie przejścia q_α, $q_{\mu-1}$ nazwijmy $K_{\alpha,\ \mu-1}$; to tu zupełnym systemem kół nieprzywiedlnych będzie:

$$(K_1,\ K_{1,\mu-1}),\ (K_3,\ K_{3,\mu-1}), ...,\ (K_{\mu-3},\ K_{\mu-3,\ \mu-1}).$$

Gdy je zmienimy na cięcia kołowe, a potem poprowadzimy przekrój h_1 od pierwszej pary cięć do drugiej, przekrój h_3 od drugiej do trzeciej i t. d.. dostaniemy powierzchnię jednokrotnie już zwartą, a jej jedyne pasmo ograniczające utworzą przekroje:

$$(K_1,\ K_{1,\mu-1});\ (h_1 + K_3,\ K_{3,\mu-1}), ...(h_{\mu-5} + K_{\mu-3},\ K_{\mu-3,\mu-1})$$

Pd. 2. Jeżeli w hypereliptycznym obrazie mieć będziemy nieparzystą liczbę punktów rozgałęzienia leżących w skończoności, a więc $\mu = 2p + 1$, to i c_∞ jest punktem rozgałęzienia, a liniami przejścia będą tu:

$$q_1 = c_1 c_2,\ q_3 = c_3 c_4, ..., q_\mu = c_\mu c_\infty.$$

Trzymając się oznaczeń takich, jak w Pd. 1. mieć tu będziemy koła:

$$(K_1,\ K_{1,\mu}),\ (K_3,\ K_{3,\mu}) ...,\ (K_{\mu-2},\ K_{\mu-2,\mu})$$

jako zupełny system kół nieprzywiedlnych, a przekroje:

$$(K_1,\ K_{1,\mu}),\ (h_1 + K_3, K_{3,\mu}), ...,\ (h_{\mu-4} + K_{\mu-2},\ K_{\mu-2,\mu})$$

sprowadzą powierzchnię $\mathfrak{R}$ do jednokrotnej zwartości.

Pd. 3. Obraz eliptyczny w normalnej formie W e i e r s t r a s s a:

$$y^2 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3),$$

$e_1 + e_2 + e_3 = 0$, posiada punkta rozgałęzienia e_1, e_2, e_3, ∞. Gdy go sposobem pierwszym wyobrazimy dwućwiartkową powierzchnią $\mathfrak{R}$, dostaniemy linie przejścia $e_1 e_2$, $e_3 \infty$ (fig. 54 *a*). W sposobie trzecim z obranym punktem $x_0 = 0$ dostaniemy linie przejścia $x_0 e_1$, $x_0 e_2$, $x_0 e_3$, $x_0 \infty$ (fig. 54 *b*).

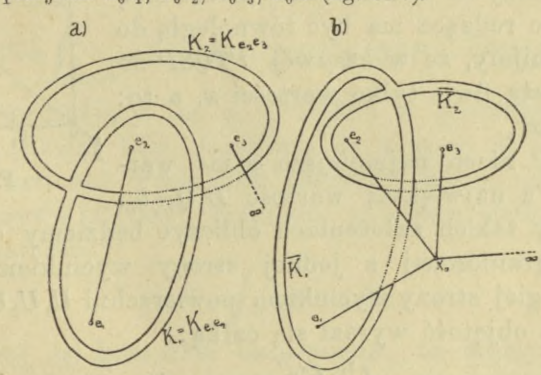


Fig. 54 *a*. Fig. 54 *b*).

W pierwszym razie sprowadzą powierzchnię $\mathfrak{R}$ do jednokrotnej zwartości kołowe cięcia K_1, K_2, a w drugim kołowe cięcia $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$.

O powierzchni Riemanna posiadającej tylko cykle drugiego stopnia czytaj: L ü r o t h. Math. Ann. T. 4. str. 181—134. C l e b s c h. *Math. Ann.* T. 6. str. 216—230.

CZĘŚĆ VI.

CAŁKI ARGUMENTÓW UROJONYCH I POZOSTAŁOŚCI. (TEORYA CAUCHY'EGO). PERYODY CAŁEK ABLA. ODWRÓCENIA CAŁKI ELIPTYCZNEJ.

ROZDZIAŁ XV.

Zasady teoryi Cauchy'ego. (Całki zmiennych urojonych).

---

111. Z teoryi określonych całek podwójnych. Niech $z=F(xy)$ będzie równaniem powierzchni w układzie prostokątnym, na którego poziomie (xOy) leży dowolnie zamknięta nieprzecinająca się z sobą krzywa $PTQSP$, (fig. 55.). Ta krzywa niech będzie kierownicą walca, którego rodząca ma być równoległą do osi zz'. Przyjmijmy, że w krzywej $PTQSP$ do jednego y należą dwie tylko wartości x, a to: $AS=x'_y$, $AT=x''_y$.

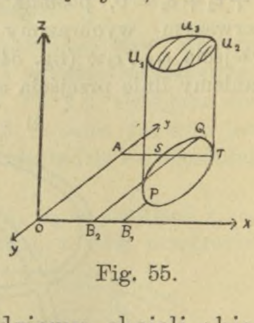


Fig. 55.

W $PTQSP$ niech najmniejsze y ma wartość $B_1P=b_1$, a największą wartość $B_2Q=b_2$.

Gdy przy takich założeniach obliczyć będziemy chcieli objętość bryły ograniczonej z jednej strony wycinkiem (poziomu) $PTQSP$, z drugiej strony wycinkiem powierzchni $U_1U_2U_3$, a z boku walcem, to ta objętość wyrazi się całką:

$$V=\int_{b_1}^{b_2}\int_{x'_y}^{x_y''} F(xy)\,dx\,.\,dy,$$

a w niej dokonać trzeba całkowania nasamprzód względem x, a potem względem y. Oczywiście zakładamy, że $F(x,y)$ dla wszelkich punktów wewnątrz krzywej $PTQSP$ i na samej krzywej jest jednoznaczna, skończona i ciągła. Przyjmijmyż, że:

$$(1) \qquad \int_{x_y'}^{x_y''} F(x, y)dx = \varphi(x_y'', y) - \varphi(x'_y, y),$$

to mieć będziemy:

$$V = \int_{b_1}^{b_2} [\varphi(x''_y, y) - \varphi(x'_y, y)]dy, \text{ albo:}$$

$$V = \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x_y'', y)dy + \int_{b_2}^{b_1} \varphi(x'_y, y)\, dy.$$

Pierwsza z tych całek jest sumą elementów $\varphi(x, y)dy$ zmieniających się w ciągły sposób tak, że w φ para (x, y) daje poruszający się punkt po PTQ, i to w kierunku od P przez T do Q. Ten kierunek powoduje ta okoliczność, że w pierwszej całce mamy dolną granicę b_1, a górną b_2.

Drugą całkę pojmować można jako sumę elementów $\varphi(x, y)dy$ zmieniających się tak, że w φ para (x, y) daje poruszający się punkt po QSP i to od Q przez S do P. Ten kierunek ruchu powoduje tu znowu ta okoliczność, że w tej drugiej całce mamy przeciwnie dolną granicę b_2, a górną b_1. Mając to na uwadze, połóżmy:

$$\int_{b_1}^{b_2} \varphi(x'', y)dy = \int_{PTQ} \varphi(x\, y)dy = (PTQ),$$

$$\int_{b_2}^{b_1} \varphi(x'_y, y)dy = \int_{QSP} \varphi(x, y)dy = (QSP),$$

to mieć będziemy:

$$(2) \qquad V = \int_{PTQSP} \varphi(x, y)dy = (PTQ) + (QSP) = (PTQSP).$$

Punkt poruszający się po $(PTQSP)$ w kierunku danym tym właśnie porządkiem liter przebiega tę krzywę w dodatnim kierunku [T. I. art. 34.]. Przeciwny kierunek będzie odjemnym. Naznaczmyż krzywę $(PTQSP)$ przez (s), to teraz wzór (2) możemy tak krótko napisać:

$$(A) \qquad V = \int_{s)} \varphi(x, y)\, dy.$$

Nazwijmy (s) konturem całkowania, to mamy twierdzenie:

I. *Całka podwójna V o takim konturze całkowania, że w nim do jednego y należą dwie tylko wartości x, da się zawsze zamienić na całkę jednokrotną o elem ntach $\varphi(x, y)dy$, gdzie w nich (x, y) przebiega cały kontur (s) w dodatnim kierunku.*

Gdy kontur (s) jest taki, że do jednego x należą w nim dwie tylko zawsze wartości rzędnej y, a to: $BP=y'_x$, $BQ=y_x''$ (fig. 56.), a najmniejsze x jest w nim: $AS=a_1$, największe: $A'T=a_2$, to mamy w tym razie:

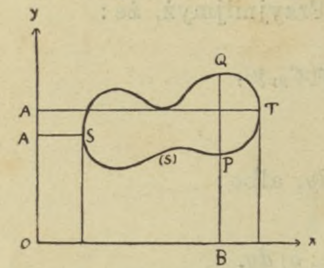


Fig. 56.

$$V=\int_{a_1}^{a_2}\int_{y'_x}^{y_x''} F(x,y)dx\,.\,dy=$$

$$=\int_{a_1}^{a_2} \psi(x,y''_x)dx+\int_{a_2}^{a_1} \psi(x,y'_x)\,dx=$$

$$=\int_{SQT} \psi(x,y)dx+\int_{TPS} \psi(x,y)\,dx=\int_{SQTPS} \psi(x,y)\,dx=(SQTPS)$$

czyli:

$$(B) \qquad V=\int_{s\circlearrowright} \psi(x,y)dx, \text{ a to znaczy:}$$

II. *Gdy kontur całkowania (s) całki V jest taki, że w nim do jednego x należą dwie tylko wartości y, to całka V da się zamienić na jednokrotną całkę elementów $\psi(x,y)dx$ z odjemnem przebieganiem konturu (s) przez punkt (x, y).*

Przyjmijmy, że kontur (s) ma równocześnie i własność potrzebną w tw. I., i własność potrzebną w tw. II., to wtedy mamy:

$$(C) \qquad V=\int_{s\circlearrowleft} \varphi(x,y)\,dy=\int_{s\circlearrowright} \psi(x,y)dx.$$

Z równania (1) wynika:

$$F(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y).$$

a analogicznie:

$$F(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y).$$

Uwzględniając to dostajemy:

$$(D) \qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{s\circlearrowleft} \varphi(x,y)\,dy=\int_{b_1}^{b_2}\int_{x_y'}^{x_y''} \frac{\partial\varphi(x,y)}{dx}\,dx\,dy \\ &\int_{s\circlearrowright} \psi(x,y)dx=\int_{a_2}^{a_1}\int_{y_x'}^{y_x''} \frac{\partial\psi(x,y)}{dy}dy.dx. \end{aligned}\right.$$

Przyczem zauważyć trzeba, że za zmianą kierunku strzałek po lewej stronie, trzeba całkom po prawej stronie dać znak odjemny.

Z tych wzorów — gdy funkcye φ, ψ i kontur naprzód są dane — dostajemy twierdzenie:

III. *Każdą jednokrotną całkę elementu* $\varphi . dy$ *lub elementu* $\psi . dx$, *gdzie* φ, ψ *są funkcyami par wartości* (x, y) *przebiegających pewien kontur, przedstawić można całką podwójną:* $\underbrace{\int\int}_{s} F dx . dy$ *o tymsamym konturze.*

Uwaga. Jeżeli (s) określa się jednem tylko równaniem: $f(x, y) = 0$, jest więc n. p. kołem, elipsą i t. p. to φ, ψ uważać trzeba za funkcye tych par (x, y), które spełniają równania $f = 0$. Lecz często całkowity kontur (s) dopiero kilkoma równaniami: $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots$ daje się określić; (trójkąt n. p. daje się przedstawić równaniami trzech nieprzecinających się prostych). Wtedy φ, ψ są funkcyami par (x, y) wypełniających te części linij $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots$, które się składają na całkowite ograniczenie konturu (s).

Jeżeli kontur s jest taki, że w nim do jednego x należy więcej y niż dwa, a także do jednego y należy więcej x, niż dwa, to i w tym razie utrzymują się wzory (C) a to na podstawie takich uwag. Całe wnętrze danego konturu można podzielić na części $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ o takich konturach $s_1, s_2, \ldots$, że w każdym z nich do jednego x tylko dwie wartości y i odwrotnie należeć będą. Każdą całkę V w σ_1, $\sigma_2, \ldots$ zamienić można na jednokrotną całkę elementu φdy lub ψdx obliczoną po konturach s_1, $s_2, \ldots$ w dodatnich kierunkach. Zauważmy z tych konturów dwa sąsiadujące ze sobą: s_α, s_β. Jeżeli je odgranicza od siebie linia $l_{\alpha\beta}$ to po tej linii całkowanie w s_α odbywa się w przeciwnym kierunku, jak po s_β. Wskutek tego wszystkie całkowania po liniach wewnątrz s poprowadzonych poznoszą się, tak, że i tu tylko całka po konturze s pozostanie, a wzór (A) lub (B) utrzyma się i w tym razie.

112. O wyłączaniu średnich wartości z całek rzeczywistego argumentu. Jeżeli funkcya $f(x)$ o argumencie i spółczynnikach rzeczywistych pozostaje w zakresie $x = (a \ldots b)$ i w samych punktach a, b jednoznaczną, skończoną i ciągłą, to całkę określoną $J = \int_a^b f(x) dx$, $a < b$, określa się w rachunku całkowym granicą sumy:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=0}^{n-1} f(a + r . \Delta x) . \Delta x. \text{*)} \tag{1}$$

O takich całkach daje rachunek całkowy dwa takie twierdzenia:

a) Gdy $f(x)$ jest w $(a \ldots b)$ i w samych punktach a, b jednoznaczną skończoną i ciągłą, to:

*) Axel-Harnack, Serret, Dirichlet, Meyer.

*

$$(A) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,.\,f(\xi)$$

gdzie ξ jest pewną wartością leżącą między a i b.

b) Gdy $f(x)=F(x)\,.\,\varphi(x)$, gdzie obie funkcye $F(x)$, $\varphi(x)$ są jednoznaczne, skończone i ciągłe w $(a...b)$, a oprócz tego $F(x)$ jest w $(a...b)$ statecznie dodatnie (lub odjemne), to:

$$(B) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b F(x)\,dx\text{**)},$$

a w tej formie jest ξ znowu pewną wartością leżącą między a i b.

Gdy:

$$f(x)=\varphi(x)+i\psi(x), \quad i=\sqrt{-1}$$

a $\varphi(x)$, $\psi(x)$ są funkcyami rzeczywistego argumentu x o rzeczywistych spółczynnikach, i gdy dalej $\varphi(x)$, $\psi(x)$ pozostają jednoznaczne i skończone dla wszelkich $a \leqq x \leqq b$, to:

$$(2) \qquad \begin{aligned} J &= \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\varphi(x)+i\psi(x)]\,dx = \\ &= \lim_{n=\infty}\sum_{r=0}^{n-1}[\varphi(a+r\,.\,\Delta x)+i\psi(a+r\,.\,\Delta x)]\,.\,\Delta x \end{aligned}$$

Z tej definicyi wynika:

$$|J| \leqq \lim_{n=\infty}\sum_{r=0}^{n-1}|\varphi(a+r\,.\,\Delta x)+i\psi(a+r\,.\,\Delta x)|\,.\,\Delta x,$$

a że wyrażenie zawarte tu po prawej stronie =

$$= \int_a^b |\varphi(x)+i\psi(x)|\,dx = \int_a^b \sqrt{\varphi^2+\psi^2}\,.\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

więc ostatecznie mamy:

$$(3) \qquad |J| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Spróbujmy, czy istnieją i dla takich całek wzory, któreby były analogią z wzorami (*A*), (*B*)?

Gdy Θ jest ułamkiem właściwym dodatnim albo $=1$, to związek (3) można napisać w ten sposób:

$$(4) \qquad |J| = \Theta\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Po prawej stronie mamy tu całkę i o rzeczywistym argumencie i o rzeczywistych spółczynnikach, a gdy o $f(x)$, a więc

---

**) É. Picard. *Cours d'Analyse* T. 1. str. 7.

i o $|f(x)|$ założymy, że jest dla: $a \leqq x \leqq b$ jednoznaczną skończoną i ciągłą, to stosując tu wzór (A) mamy:

(5) $$|J| = \Theta(b-a).f(\xi).$$ Niech

(6) $$J = e^{\alpha i}|J|, \text{ a } f(\xi) = e^{\beta i}|f(\xi)|,$$

to uwzględniając to w (5) dostajemy:

$$J.e^{-\alpha i} = \Theta.e^{-\beta i}(b-a)|f(\xi)|, \text{ albo:}$$

$$J = \Theta e^{(\alpha-\beta)i}.(b-a|f(\xi)|.$$

Połóżmy $\Theta.e^{(\alpha-\beta)i} = \lambda$, gdzie widocznie $|\lambda| \leqq 1$, to ostatecznie mamy:

(A') $$J = \lambda.(b-a).f(\xi), \quad |\lambda| \leqq 1,$$

a ten wzór jest analogią z wzorem (A).

Gdy $f = \varphi + \psi i$ jak przódy, a $F(x)$ jest funkcyą o rzeczywistym argumencie i rzeczywistych spółczynnikach, pozostającą nietylko jednoznaczną skończoną i ciągłą dla $a \leqq x \leqq b$, ale także i statecznie dodatnią w tym zakresie, a zauważymy całkę:

$$J = \int_a^b f(x).F(x)dx,$$

to stosując tu wzór (4) dostajemy:

(6') $$|J| = \Theta \int_a^b |f(x)|.F(x)dx.$$

Całka po prawej stronie jest już całką i rzeczywistego argumentu i o rzeczywistych spółczynnikach. Gdy więc ją w postaci (B) przedstawimy, mieć będziemy:

$$|J| = \Theta.|f(\xi)| \int_a^b F(x)dx.$$

Uwzględnijmy tu jeszcze (6), to ostatecznie będzie:

(B') $$J = \lambda.f(\xi) \int_a^b F(x).dx, \quad |\lambda| \leqq 1.$$

Ten wzór uważać tu trzeba za analogię z wzorem (B).*)

113. Całka określona o argumencie urojonym. Stajemy teraz u progu nowych obszernych i bardzo ważnych poszukiwań, dających możność uzupełnić i wykończyć teoryę funkcyj analitycznych. Poszukiwania te już nie tak elementarnego charakteru, histo-

---

*) Wzory (A'), (B') podał Darboux. — Por. Hermite: *Cours d'Analyse* (1882), str. 41—49.

rycznie starsze od tych metod, jakiemi posługiwaliśmy się dotąd w ciągu całego tego dzieła, biorą swój początek w pytaniu: Jakie znaczenie można nadać całce określonej o funkcyi urojonego argumentu i jakie z przyjętej już definicyi takiej całki wynikną dalsze wnioski?

Urojonym argumentem niech teraz będzie $z=x+yi$, a o dowolnej funkcyi $f(z)$ tego argumentu załóżmy, że choć w nią wchodzą spółczynniki urojone, można ją zawsze przywieść do formy:

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y),$$

gdzie już P, Q są funkcyami dwóch rzeczywistych zmiennych x, y o spółczynnikach wyłącznie rzeczywistych.

O funkcyach P, Q założymy dalej, że one w tymsamym obszarze, w którym $f(z)$ jest jednoznaczną, skończoną i ciągłą, posiadają również te trzy własności. [Funkcye posiadające te trzy własności w pewnym obszarze — choć je jeszcze nie mamy prawa uznać za analityczne — nazywać będziemy regularnemi w tym obszarze].

Na płaszczyźnie (z) obierzmy dwa różne od siebie punkta $z_0=a_0+b_0 i$, $z_1=a_1+b_1 i$ i te punkta połączmy krzywą $(z_0\zeta_1\zeta_2...\zeta_n z_1)$ (fig. 57.). Przyjmijmy, że tę krzywę określić można równaniami:

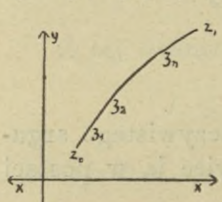


Fig. 57.

$$(a) \qquad x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

z dowolnym rzeczywistym parametrem t, to φ, ψ są takiemi funkcyami, że dla pewnej wartości $t=t_0$ mamy $\varphi(t_0)=a_0$, $\psi(t_0)=b_0$, a dla innej wartości $t=t_1$ dostajemy $\varphi(t_1)=a_1$, $\psi(t_1)=b_1$, a gdy t przebiega rzeczywisty obszar $(t_0...t_1)$, to $x+yi=\varphi+\psi i$ przebiega cały łuk $(z_0\zeta_1...\zeta_n z_1)$. Mając to przyjmijmy, że f, P, Q są regularne wzdłuż drogi $(z_0...z_1)$, to kładąc:

$$P(\varphi,\psi)=P_1(t), \quad Q(\varphi,\psi)=Q_1(t), \quad dz=dx+i.dy=\varphi'(t)dt+i\psi'(t)dt,$$

a więc:

$$f(z).dz=(P_1+Q_1 i)(\varphi'+i\psi')dt=$$
$$=(P_1\varphi'-Q_1\psi')dt+i(P_1\psi'+Q_1\varphi')dt=[G(t)+H(t)i]dt,$$

możemy teraz całkę $\int_{t_0}^{t_1}[G(t)+H(t)i]dt$ określić równaniem (2) art. poprzedz. Tej-to właśnie całce dajemy znaczenie całki $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ z tem zastrzeżeniem, że z od z_0 do z_1 zdąża po drodze $(z_0\zeta_1...\zeta_n z_1)$, a nie po innej. Lecz

$$[G(t_0+r\Delta t)+iH(t_0+r\Delta t)]\Delta t=f(z_0+r.\Delta z).\Delta z$$

jeżeli:

$$z_0+r.\Delta z=\varphi(t_0+r.\Delta t)+i\psi(t_0+r\Delta t), \quad \text{a}$$

$$\Delta z=\varphi(t+\Delta t)+i\psi(t+\Delta t)-(\varphi(t)+i\psi(t)).$$

Z tego powodu możemy położyć:

$$(1) \qquad J=\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz=\lim_{n=\infty}\sum_{r=0}^{n-1} f(z_0+r.\Delta z).\Delta z.$$

Z tego określenia wynika odrazu wzór:

$$(2) \qquad \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz=\int_{z_0}^{\zeta_1} f(z)\,dz+\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(z)dz+\ldots+\int_{\zeta_n}^{z_1} f(z)dz$$

zgodny z takąż własnością całki zmiennej rzeczywistej.

Wzór (2) jest z tego powodu ważny, że nie zawsze droga $(z_0\ldots z_1)$ da się określić jedną tylko parą równań. Może być bowiem, że

$(z_0\zeta_1)$ określają równania $x=\varphi_0(t)$, $y=\psi_0(t)$

$(\zeta_1\zeta_2)$ " " $x=\varphi_1(t)$, $y=\psi_1(t)$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$(\zeta_n z_1)$ " " $x=\varphi_n(t)$, $y=\psi_n(t)$.

Gdy wtedy te pary funkcyj dają odpowiednio:

$$\begin{aligned} f(z)dz &=[G_0(t)+H_0(t)i]dt \\ \text{"} \quad &=[G_1(t)+H_1(t)i]dt \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \text{"} \quad &=[G_n(t)+H_n(t)i]dt, \end{aligned}$$

to w tym razie mamy:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz=\int_{z_0}^{\zeta_1} f(z)dz+\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(z)\,dz+\ldots+\int_{\zeta_n}^{z_1} f(z)dz=$$

$$=\int_{t_0}^{\tau_1}(G_0+H_0 i)dt+\int_{\tau_1}^{\tau_2}(G_1+H_1 i)dt+\ldots+\int_{\tau_n}^{t_1}(G_n+H_n i)dt,$$

jeżeli wartości $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ parametru t odpowiadają punktom:

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n.$$

Przyjmijmy, że z równań (a) dostajemy $y=\chi(x)$ i że za y wstawiamy $\chi(x)$ w całkę. W takim razie mamy na całej drodze $(z_0\ldots z_1)$:

$$f(z)=f(x+i\chi(x))=f_1(x), \quad dz=[1+i\chi'(x)]dx \quad \text{i}$$

$$J=\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz=\int_{a_0}^{a_1} f_1(x)\,[1+\chi'(x)i]dx.$$

Że zaś i tu całka druga określa się granicą sumy, a

$$|1+\chi'(x)i|.|dx|=ds$$

jest elementem łuku $(z_0 ... z_1)$, więc dostajemy:

$$|J|=\Theta\int_{a_0}^{a_1}|f_1(x)|.ds. \quad \text{[por. (6') art. 112.]}$$

Zastosujmy tu wzór (B) art. poprzedz., przyjmując, że $|f_1(\xi)|=|f(\zeta)|$, to mamy:

$$|J|=\Theta.|f(\zeta)|\int_{a_0}^{a_1}ds=\Theta|f(\zeta)|.\text{Łuk}(z_0 ... z_1).$$

Połóżmy dalej $J=e^{\alpha i}|J|$, $f(\zeta)=e^{\beta i}|f(\zeta)|$, to ostatecznie okaże się:

$$(C') \qquad J=\lambda.f(\zeta).\text{Łuk}(z_0 ... z_1), \quad \text{gdzie } |\lambda|\leqq 1.$$

[Darboux. Por. Hermite l. c.].

114. Pochodne funkcyi urojonego argumentu. Wiadomo, że funkcya analityczna $f(z)$ posiada w każdym punkcie obszaru swego regularnego zachowania się, całkiem oznaczoną pochodnę $f'(z)$. Połóżmy znowu $z=x+yi$, to $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=i$, a wskutek tego mieć będziemy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=i\frac{df}{dz}, \quad \text{czyli:}$$

$$(a) \qquad \frac{df}{dz}=\frac{\partial f}{dx}, \quad \frac{df}{dz}=-i\frac{\partial f}{\partial y}. \quad \text{To znaczy:}$$

I. *Pochodna analitycznej funkcyi argumentu $z=x+yi$ równa się albo pochodnej funkcyi według x, albo pochodnej funkcyi według y, pomnożonej przez $-i$.*

Połóżmy, jak przódy, $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$, to mamy z (a):

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}=-i\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y},$$

a stąd wynika:

$$(b) \qquad \frac{\partial P}{dx}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Z tych równań — gdy je cząstkowo naprzód według x, a potem według y zróżniczkujemy — dostaniemy:

$$(c) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=0. \quad \text{To znaczy:}$$

II. *W funkcyi analitycznej $f=P+Qi$ nie są P, Q niezależne od* *siebie; są one zawsze związane ze sobą cząstkowemi równaniami* (b), *a samo* P *lub* Q *spełnia zawsze cząstkowe równanie postaci:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Wróćmy teraz do funkcyi $f=P+Qi$ rozważanej w art. poprzedzającym, a więc nieanalitycznej, a regularnej w pewnym obszarze (z). Przyjmijmy, że w tym obszarze posiadają funkcye P, Q skończone i oznaczone pierwsze cząstkowe pochodne, to

$$f'(z)=\frac{\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)}{dx+idy}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{1+i\frac{dy}{dx}}$$

określimy jako pochodnę funkcyi $f(z)$ w punkcie z. Wartość tej pochodnej zależy tu widocznie od wartości stosunku $\frac{dy}{dx}$. Gdy jednak zażądamy, aby funkcya $f(z)$ — na wzór funkcyj analitycznych — posiadała tu jedną, całkiem oznaczoną i skończoną pochodnę, to temu zadość się uczyni równością:

$$(a)\qquad \frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}=i\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

gdyż w takim razie mamy:

$$f'(z)=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x},$$

co jest oznaczone i skończone. Z (a) dostajemy:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x},$$

a to widocznie są związki (b). Z tego wnosimy:

III. *Aby funkcya* $f(z)=P+Qi$ *posiadała w punkcie* z *skończoną i oznaczoną pochodnę, dostatecznem jest, aby jej* P, Q *spełniały takiesame związki, jak* P, Q *każdej funkcyi analitycznej.*

Jeżeli P, Q takiej funkcyi posiadają jeszcze i drugie cząstkowe pochodne, oznaczone i skończone, to tak P, jak Q spełnią i tu równanie różniczkowe cząstkowe:

$$(d)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Odtąd zajmować się będziemy tylko takiemi funkcyami $f(z)$, które w rozważanym obszarze (z) mają aż 4 własności, a to: funkcya ma być tam jednoznaczną, skończoną, ciągłą i posiadać oznaczoną i skończoną pochodnę.

115. Całka zamknięta (okrężna). Zmiana drogi całkowania. W art. 113. daliśmy definicyę całki określonej $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ przy obranej drodze $(z_0 \ldots z_1)$. Zbadajmy teraz, jaki wpływ na wartość całki wywiera zmiana obranej drogi na inną, z tem zastrzeżeniem, że funkcya $f(z)$ na obu tych drogach i w obszarze niemi objętym zachowuje się regularnie.

W tym celu zauważmy zamkniętą drogę (s) — fig. 58. — wzdłuż której i wewnątrz której $f(z)$ pozostaje regularną (z dołączeniem własności jednoznacznej pochodnej) i zapytajmy, jaką wartość ma wtedy całka zamknięta:

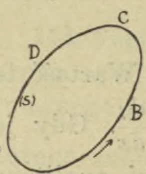


Fig. 58.

$$J_{s\circlearrowleft} = \int\limits_{s\circlearrowleft} f(z)dz\,?$$

[Jej elementa sumujemy, poczynając od dowolnego punktu konturu s w kierunku dodatnim].

Jeżeli $f = P + Qi$, to

$$J_{s\circlearrowleft} = \int\limits_{s\circlearrowleft} (P+Qi)(dx+idy) = \int\limits_{s\circlearrowleft} (Pdx - Qdy) + i\int\limits_{s\circlearrowleft} (Qdx + Pdy).$$

Lecz — według art. 111., (D) mamy:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{ll} \displaystyle\int\limits_{s\circlearrowleft} Pdx = -\underbrace{\int\!\!\int}_{s} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx, & \displaystyle\int\limits_{s\circlearrowleft} Qdy = \underbrace{\int\!\!\int}_{s} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dy\,dx \\ \displaystyle\int\limits_{s\circlearrowleft} Qdx = -\underbrace{\int\!\!\int}_{s} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\,dx, & \displaystyle\int\limits_{s\circlearrowleft} Pdy = \underbrace{\int\!\!\int}_{s} \frac{\partial P}{\partial x}\,dy\,dx, \end{array}\right.$$

a stąd wynika, że

$$J_{s\circlearrowleft} = -\underbrace{\int\!\!\int}_{s} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy + i\underbrace{\int\!\!\int}_{s} \left(-\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x}\right) dx\,dy.$$

Że zaś tu:

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

na konturze (s) i wewnątrz niego, więc ostatecznie mamy $J_{s\circlearrowright}=0$, i podobnie $J_{s\circlearrowleft}=0$, a to znaczy:

I. *Całka* $\int_s f(z)dz$ *obliczona w dowolnym kierunku po zamkniętej drodze takiej, że* $f(z)$ *pozostaje regularną na niej i wewnątrz niej, ma zawsze wartość* z e r o.

Niech $(s)=(ABCD)$, a naznaczmy:

$$J=\int_{s\circlearrowright} f(z)dz=[ABCDA]=[ABC]+[CDA],$$

to dostaniemy:

(2) $$J=[ABC]-[ADC]=0.$$

Gdy $A=z_0$, $C=z_1$, $B=\zeta$, $D=\zeta'$, to z (2) dostajemy:

(3) $$J_{z_0\zeta z_1}=J_{z_0\zeta' z_1},$$ a to znaczy:

II. *Obraną drogę* $(z_0\zeta z_1)$ *całki danej funkcyi można zmienić na każdą inną* $(z_0\zeta' z_1)$, *byleby tylko na samych drogach i między drogami zachowywała się funkcya regularnie.*

Bez względu na to, czy funkcya $f(z)$ zachowuje się wewnątrz danego konturu (s) — fig. 59. — regularnie lub nie, obliczmy całkę zamkniętą $J_{s\circlearrowright}$ a wewnątrz (s) narysujmy drugi kontur (s') tak, aby w obszarze między (s) a (s'), [na (s) i na (s')] funkcya f była już regularną.

Jednoznaczność funkcyi w tym o b s z a r z e w razie, gdy funkcya jest wielowartościową, objawia się tu w ten sposób: Gdy z_0 jest dowolnym punktem, leżącym między (s) a (s'), lub na (s), lub wreszcie na (s'), a z punktu tego wychodząc przebieżemy zamkniętą drogę, przebiegającą między s a s' i ten punkt po powrocie nazwiemy $\bar{z}_0$, to musi być $f(z_0)=f(\bar{z}_0)$.

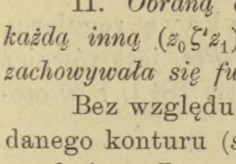


Fig. 59.

Połączmy (s) z (s') za pomocą linij AA', BB' i zauważmy zamknięty obszar $(AmBB'm'A'A)$. W jego wnętrzu i na jego ograniczeniu zachowuje się funkcya regularnie, a wskutek tego — według tw. I. mamy:

$$[AmB]+[BB']+[B'm'A']+[A'A]=0,$$

czyli:

(a) $$[AmB]+[B'm'A']=-[BB']-[A'A].$$ Podobnie:

(b) $$[BnA]+[A'n'B']=-[AA']-[B'B].$$

Dodając (a), (b) do siebie dostajemy:

$$[AmBnA]+[B'n'A'm'B']=0, \quad \text{a więc:}$$

(4) $$J_{s\curvearrowright}+J_{s'\curvearrowleft}=0, \quad \text{albo} \quad J_{s\curvearrowright}=J_{s'\curvearrowright}.$$

Te same związki utrzymają się, jeżeli (s), (s') przecinać się będą — fig. 60. — ale w częściach zamkniętych równocześnie przez (s) i (s') pozostanie $f(z)$ regularną. Mając bowiem całkę:

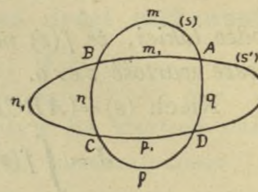


Fig. 60.

$$[AmBnCpDqA]=$$
$$=[AmB]+[BnC]+[CpD]+[DqA],$$

można w niej — wskutek uczynionych założeń — $[AmB]$ zamienić na $[Am_1B]$,
$[BnC]$ „ „ $[Bn_1C]$ i t. d.,
a stąd już i tu związki (4) wynikną. Mamy więc twierdzenie:

III. *Drogę zamkniętej całki można zmienić nie naruszając wartości całki, na dowolną inną, byleby tylko w częściach zamkniętych obu drogami funkcya całkowana $f(z)$ była regularną.*

Przyjmijmy, że $f(z)$ jest analitycną funkcyą regularną w pewnym obszarze $[z]$. Jej pierwotna funkcya $F(z)$ jest również regularną w tym samym obszarze $[z]$ — [T. I.. str. 181.], a w otoczeniu każdego punktu wewnątrz $[z]$ mamy:

(5) $$F(z+h)=F(z)+\frac{f(z)}{1!}h+\frac{f'(z)}{2!}h^2+\ldots$$

Gdy droga $(z_0\zeta_1 z_1)$ całkowicie mieści się w $[z]$, to

$$\int\limits_{z_0\zeta z_1} f(z)dz=\lim_{n=\infty}\sum_{r=0}^{n-1} f(z_0+r\Delta z]\Delta z.$$

Otóż uwzględniając tu rozwinięcie (5), dojdziemy — jak w rachunku całkowym dla argumentu rzeczywistego*) — do formy:

(6) $$\int\limits_{z_0\zeta z_1} f(z)dz=F(z_1)-F(z_0).$$

W razie zamkniętej całki, położymy:

(6') $$J_{s\curvearrowright}=F(\bar{z}_0)-F(z_0).$$

Mając na uwadze jeszcze i twierdzenie II., dochodzimy do wniosku:

IV. *Gdy analityczna funkcya $f(z)$ jest regularną we wszystkich punktach pewnego obszaru $[z]$, a z_0, z_1 są punktami wewnątrz tego obszaru, to całka $\int\limits_{(z_0\ldots z_1)} f(z)dz$ obliczona po jakiejkolwiek drodze leżącej całko-*

*) Por. n. p. Jordan C. *Cours d'Analyse* T. 2., str. 62.

wicie w obszarze $[z]$ *ma wartość:* $F(z_1)-F(z_0)$, *gdzie* $F(z)$ *jest pierwotną funkcyą funkcyi* $f'(z)$.

Uwaga I. Na podstawie twierdzenia III. można użyć koła jako drogi zamkniętej, po której ma się obliczyć daną całkę. Gdy takie koło $k=(r,c)$ ma mieć środek w punkcie $z=c$, a promień r, to w całce trzeba przedstawić $z=c+r.e^{\varphi i}$, a więc $dz=r.e^{\varphi i}\,i.d\varphi$, przez co dostajemy:

$$\int_k f(z)dz = ri \int_{\Theta-\pi}^{\Theta+\pi} f(c+re^{\varphi i})d\varphi.$$

Ten wynik może być zależny, lub niezależny od Θ, a pod tym względem będą rozstrzygać następujące uwagi:

Używając wzoru (6') dostajemy:

$$\int_k f(z)\,dz = F(c+re^{(\Theta+\pi)i}) - F(c+re^{(\Theta-\pi)i}).$$

Przyjmijmy, że na kole k mamy:

$$(\alpha) \qquad f(c+re^{\varphi i}) = f(c+re^{\varphi i+2\pi i}),$$

dla każdego φ, a więc wartość funkcyi f w dowolnym punkcie k, nie zmienia się gdy punkt po przebieżeniu całego koła powróci do pierwotnego swego położenia.

Ta okoliczność nie potrzebuje jednak za sobą pociągać takiej samej własności i pierwotnej funkcyi $F(z)$. Gdy więc mamy:

$$F(c+re^{\varphi i}) = F(c+re^{\varphi i+2\pi i}) = C,$$

gdzie C jest stałą ilością $\neq 0$, lub $=0$, to wtedy wynik całkowania nie zależy od Θ. W każdym innym razie będzie wynik już zależnym już od Θ. Gdy $f(z)$ nie posiada własności (α), to i wyniku niezależnego od Θ spodziewać się nie można.

Pd. 1. Całka zamknięta funkcyi wymiernej całkowitej o najdowolniejszej zamkniętej drodze ma wartość: zero. Całka zamknięta szeregu potęgowego $\mathfrak{P}(z)$ z drogą zamkniętą zawierającą się całkowicie w zakresie zbieżności tego szeregu ma również wartość: zero:

Pd. 2. Zauważmy funkcyę $f(z)=(z-c)^\mu$ w której $\mu=+1$, albo $=\pm 2, \pm 3, \ldots$ to obliczając jej całkę po kole $k=(r,c)$ dostajemy:

$$\int_k (z-c)^\mu\,dz = r^{\mu+1}\int_{\Theta-\pi}^{\Theta+\pi} e^{(\mu+1)\varphi i}.\,d\varphi i = r^{\mu+1}\left[\frac{e^{(\mu+1)\varphi i}}{\mu+1}\right]_{\Theta-\pi}^{\Theta+\pi} = 0.$$

Mimo więc, że funkcye $(z-c)^{-2}$, $(z-c)^{-3}, \ldots$, mają w c punkt nieskończonościowy, ma każda ich całka zamknięta, okalająca punkt c, wartość: zero. Całka takich funkcyj obliczana po dwóch różnych drogach $(z_0 \ldots z_1)$ daje tę samą wartość, choćby te drogi zamknęły punkt c między sobą.

Pd. 3. Gdy $f=(z-c)^{-1}$ a położymy znowu $z=c+re^{\varphi i}$, to mieć będziemy:

$$\int_k \frac{dz}{z-c} = i\int_{\Theta-\pi}^{\Theta+\pi} d\varphi = 2\pi i,$$

a więc i każda zamknięta całka J_s okalająca dowolną drogą $s=(z_0\zeta z_1\zeta' z_0)$ punkt c, ma wartość $2\pi i$. Połóżmyż:

$$J_{s\circlearrowleft} = J_{z_0\zeta z_1} + J_{z_1\zeta' z_0} = 2\pi i, \quad \text{to stąd mamy:}$$

$$J_{z_0\zeta z_1} = J_{z_0\zeta' z_0} + 2\pi i, \quad \text{a to znaczy:}$$

Dwie całki $J_{z_0 \ldots z_1}$ o dwóch różnych drogach poczynających się w z_0, kończących się w z_1, a zamykających sobą punkt c, różnią się od siebie o $2\pi i$. Stosując wzór (6) mamy tu:

$$J_{z_0\zeta z_1} = log\,(z-c)\Big]_{z_0}^{z_1} = log\frac{z_1-c}{z_0-c}.$$

Pd. 4. Funkcya $f=(z-c)^{a-1}$, w której a nie jest liczbą całkowitą, nie ma własności (α), a całkując ją po kole k dostajemy:

$$J_k = \int_k (z-c)^{a-1}\,dz = \frac{(z-c)^a}{a}\Big]_{z_0}^{\bar{z}_0} = \frac{r^a}{a}.e^{a\varphi i}\Big]_{\Theta-\pi}^{\Theta+\pi} =$$

$$= \frac{r^a}{a}.e^{a\Theta i}.2i\,\frac{e^{a\pi i}-e^{a\pi i}}{2i} = \frac{\left(re^{\Theta i}\right)^a}{a}.2i.sin\,a\,\pi.$$

Wynik ten widocznie zależy od Θ. W razie $\Theta=0$ mamy $J_k=(r_a:a)2i\,sin\,a\,\pi$, gdy $\Theta=\pi$ dostajemy $J_k=[(-r^a:a].2\,i\,sin\,a\,\pi$.

Koła k nie będzie tu można zastąpić innem kołem o środku c, bo funkcya f jest wieloznaczną, a na samem już kole k nie posiada własności $f(z_0)=f(\bar{z}_0)$.

Pd. 5. Dla funkcyi $f(z)=(z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$ spełnia się na każdej zamkniętej drodze (s) okalającej punkta a, $-a$ warunek $f(z_0)=f(\bar{z}_0)$. Każdą więc taką drogę całki zamkniętej

$$J_{s\circlearrowleft} = \int_{s\circlearrowleft} \frac{dz}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

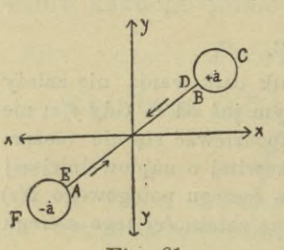


Fig. 61.

można zastąpić przez $ABCDEFA$ — (fig. 61.), gdzie BCD, EFA są kołami (k), (k') o środkach w $+a$, $-a$, a o pewnym promieniu ρ, a AB, DE są prostokreślnemi odcinkami spadającemi na siebie.

Mamy tu: $J_{s\circlearrowleft}=[AB]+[BCD]+[DE]+[EFA]$. Lecz:

$$[BCD] = \int_k \sqrt{\rho}.\frac{e^{\varphi i}i\,d\varphi}{\sqrt{2ae^{\varphi i}+\rho e^{2\varphi i}}}$$

a gdy ρ zmaleje do zera, dostaniemy $[BCD]=0$ i analogicznie $[EFA]=0$. Gdy już $\rho=0$ założono, to mamy dalej:

$$[AB] = \int_{-a}^{+a} \frac{dz}{+\sqrt{z^2-a^2}} \quad \text{i} \quad [DE] = \int_{+a}^{-a} \frac{dz}{-\sqrt{z^2-a^2}} = \int_{-a}^{+a} \frac{dz}{+\sqrt{z^2-a^2}},$$

gdyż — jeżeli w B mieliśmy $+\sqrt{z^2-a^2}$, to w punkcie D, po okrążeniu koła BCD, mamy: $-\sqrt{z^2-a^2}$. Stąd wynika, że:

$$J_{s\circlearrowleft} = 2\int_{-a}^{+a} \frac{dz}{+\sqrt{z^2-a^2}} = -2\,i\,arc\,sin\frac{z}{a}\Big]_{-a}^{+a} = -2\pi i.$$

Pd. 6. Zauważmy hypereliptyczny obraz:

$$y = \pm\sqrt{(z-a_1)\ldots(z-a_n)} = \pm\sqrt{R} = f(z),\ n \geqq 3$$

a na płaszczyźnie (z) taką zamkniętą drogę $(s) = (ABCDA)$ (fig. 62.), która zamyka nieparzystą ilość punktów rozgałęzienia.

Na takiej drodze mamy zawsze $f(\overline{z_0}) = -f(z_0)$, a wskutek tego wychodząc z punktu A z wartością $+\sqrt{R}$, wracamy — po okrążeniu drogi (s) w dodatnim kierunku — z wartością $-\sqrt{R}$.

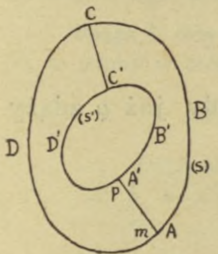


Fig. 62.

Niechże całka $J_{s\circlearrowleft} = \int\limits_{s\circlearrowleft} \frac{dz}{y}$ z początkowym punktem A i z początkową w nim wartością $+\sqrt{R}$ ma wartość J. Oprócz drogi (s) zauważmy jeszcze drugą zamkniętą drogę $(s') = (A'B'C'D')$. Połączmy te drogi liniami AA', CC' i przyjmijmy, że między (s) a (s') nie ma ani jednego punktu rozgałęzienia. Połóżmy:

$J = [ABC] + [CDA]$ przyczem mamy

$(a)\ [ABC] = [AA'] + [A'B'C'] + [C'C] \qquad (b)\ [CDA] = [C'C] + [C'D'A'] + [A'A].$

Lecz w (b) dochodzimy do punktu A z wartością $-\sqrt{R}$, a że $-\sqrt{R}$ wzdłuż całego brzegu mp linii AA jest funkcyą ciągłą, więc stąd wynika, że w (b) w całce $[A'A]$ sumowano elementa $\frac{dz}{-\sqrt{R}}$ podczas gdy w (a) w całce $[AA']$ sumowano elementa $\frac{dz}{+\sqrt{R}}$. Z tego powodu mamy:

$$[AA'] + [A'A] = 2[AA'].$$

Przeciwnie $[c'c] + [cc'] = 0$. Uwzględniając to przy dodawaniu związków (a) (b) do siebie dostajemy:

$$J_{s\circlearrowleft} = J_{s'\circlearrowleft} + 2[AA'],\quad \text{(Puiseux, Hermite)}.$$

Taki wpływ ma tu na wartość całki zmiana drogi (s) na (s').

Uwaga 2. W danych poszukiwaniach będziemy — mając do czynienia z funkcyami algebraicznemi — uwzględniali tylko takie drogi zamknięte, które dają zawsze $f(\overline{z_0}) = f(z_0)$.

Gdy taką funkcyą $f(z)$ wyobrazimy powierzchnię Riemann'a, to każde zamknięte na niej koło dopełnia właśnie warunku: $\overline{f}(z_0) = f(z_0)$ jest więc nietylko zamkniętem kołem w płaszczyźnie (z) — przecinającem się lub nie — ale zarazem i kołem wartości, jakie posiada na niem dana funkcya $f(z)$. Takie koło nazwiemy istotnem kołem, albo istotną linią zamkniętą.

116. Całka Cauchy'ego. Niech $f(z)$ będzie funkcyą regularną nie tylko w całym wnętrzu konturu (s), ale i na samym konturze (s), a x niech oznacza dowolny punkt we wnętrzu (s). Wtedy w całce:

$$J = \int\limits_{s\circlearrowleft} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

można bez zmiany jej wartości zmienić (s) na koło, którego środek znajduje się w x, u którego promień jest tak mały, aby całe to koło mieściło się całkowicie we wnętrzu (s). Połóżmyż: $z=x+\varrho e^{\varphi i}$, a więc $dz=\varrho i e^{\varphi i}d\varphi$, to mieć będziemy:

$$J=i\int\limits_{\Theta-\pi}^{\Theta+\pi} f(x+\varrho e^{\varphi i})d\varphi.$$

Lecz tu ϱ można dowolnie zmniejszyć, a gdy już ϱ zdąży do granicy: zero, dostaniemy:

$$J=if(x)\int\limits_{\Theta-\pi}^{\Theta+\pi} d\varphi=2\pi i.f(x).$$

Z tego wynika, że:

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s\circlearrowleft}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=f(x).$$

Przyjmijmy, że x leży zewnątrz (s). Wtedy funkcya $f(z)/(z-x)$ pozostaje regularną w wnętrzu (s) i na (s), a skutkiem tego mamy tu:

$$\int\limits_{s\circlearrowleft}\frac{f(z)}{z-x}=0.$$

Zauważmy obszar zamknięty dwoma konturami (s) (s') — fig. 62. i punkt x leżący wewnątrz tego obszaru. Gdy x leży w $(ABCC'B'A)=\sigma_1$ a drugi obszar $(c'cDAA'D'C')$ nazwiemy σ_2, to mamy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1\circlearrowleft}\frac{f(z)dz}{z-x}=f(x),\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2\circlearrowleft}\frac{f(z)dz}{z-x}=0,$$

a stąd wynika:

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s\circlearrowleft}\frac{f(z)dz}{z-x}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s'\circlearrowright}\frac{f(z)dz}{z-x}=f(x).$$

Okrążeniami $(s)\circlearrowleft$, $(s')\circlearrowright$ okrążamy w dodatnim kierunku całe wnętrze obszaru ograniczonego liniami (s), (s'). [T. I. art. 34.]. Gdy x leży poza tym obszarem, to suma całek (2) będzie zerem.

Całkę (1) nazywają całką Cauchy'ego, a wzory (1), (2) dają twierdzenie:

I. *Całka Cauchy'ego z funkcyą $f(z)$ regularną wewnątrz jej konturu i na konturze ma wartość $f(x)$, gdy x leży wewnątrz tego konturu, jest zaś zerem, gdy x leży zewnątrz tego konturu.*

Do obliczenia całek (1), (2) potrzebne są tylko wartości funkcyi $f(z)$ na konturze ograniczającym. Z tego powodu można powiedzieć:

II. *Gdy znane są wartości pewnej regularnej funkcyi na danym konturze to tem samem określona jest już funkcya we wszystkich punktach wewnątrz tego konturu.*

Uwaga 1. Gdy $f(z)$ jest analityczną funkcyą, a regularną wewnątrz (s) i na (s), to mamy w otoczeniu każdego punktu x wewnątrz (s):

$$f(z)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(z-x)+\frac{f''(x)}{2!}(z-x)^2+\ldots,\ \text{a}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s\circlearrowleft}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\frac{1}{2\pi i}\Big[f(x)\int\limits_{s\circlearrowleft}\frac{dz}{z-x}+\frac{f'(x)}{1!}\int\limits_{s\circlearrowleft}dz+\frac{f''(x)}{2!}\int\limits_{s\circlearrowleft}(z-x)\,dz+\ldots\Big].$$

Stosując zaś tu uwagi dane w Pd. 2., Pd. 3.. art. poprzedz. dostajemy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s\circlearrowleft}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=f(x).$$

Uwaga 2. Gdy danych jest k funkcyj $f_\alpha(z)$, $\alpha=1,2,\ldots,k$, regularnych odpowiednio wewnątrz różnych konturów (s_α), $\alpha=1,2,\ldots k$, które w dowolny sposób leżą względem siebie, a utworzymy wyrażenie:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{k}\int\limits_{s_\alpha\circlearrowleft}\frac{f_\alpha(z)dz}{z-x},$$

to ten jeden wyraz daje $f_p(x)+f_q(x)+f_r(x)+\ldots$ dla x równocześnie się zawierających w (s_p), (s_q), (s_r), ..., a jest zerem dla wszelkich x leżących zewnątrz wszystkich (s_α).

117. Szereg Taylora i Laurent'a. Wewnątrz konturu (s) obierzmy dowolny punkt a i z tego punktu, jako środka zatoczmy koło k zawierające się całkowicie w (s). Punkta wypełniające to koło nazwijmy x, a punkta na samym konturze (s) niech będą z. Wtedy mamy niezawodnie $|x-a|<|z-a|$, a ułame :

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{(z-a)-(x-a)}=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x-a}{z-a}}$$

da się rozwinąć na szereg zbieżny:

$$\frac{1}{z-a}+\frac{x-a}{(z-a)^2}+\frac{(x-a)^2}{(z-a)^3}+\frac{(x-a)^3}{(z-a)^4}+\ldots$$

którego reszta:

$$(a)\quad\begin{aligned}R_n&=\frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{(x-a)^{n+1}}{(z-a)^{n+2}}+\ldots\\&=\frac{(x-a)_n}{(z-a)^n}\left[\frac{1}{z-a}+\frac{x-a}{(z-a)^2}+\frac{(x-a)^2}{(z-a)^3}+\ldots\right]=\frac{(x-a)^n}{(z-a)^n(z-x)}.\end{aligned}$$

Mając to, możemy położyć:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)dz}{z-x}=$$

(1) $$=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)dz}{z-a}+\frac{x-a}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{2\pi i}\int\frac{f(z)dz}{(z-a)^n}+$$
$$+\frac{(x-a)^n}{2\pi i}\int\frac{f(z)dz}{(z-a)^n(z-x)}.$$

gdzie tu całkowania odbywają się po konturze (s) w dodatnim kierunku.

Po pierwszej stronie w (1) mamy $f(x)$ po drugiej zaś pierwszym wyrazem jest:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{z-a}=f(a).$$

Dalej łatwo spostrzeżemy, że:

(2) $$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)dz}{(z-a)^2}=\frac{f'(a)}{1!},\ \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)dz}{(z-a)^3}=\frac{f''(a)}{2!},\ldots,$$

a mając to na względzie dochodzimy do formy:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)dz}{z-x}\cdot\frac{(x-a)^n}{(z-a)^n}.$$

Ostatni wyraz jest zesumowaną resztą R'_n tego rozwinięcia. Zbadajmy wartość tej reszty, gdy n dąży do nieskończoności. Niech ζ będzie punktem na konturze (s), a S długością tego konturu; niech dalej λ będzie ilością taką, że $|\lambda|<1$, to podług formy (C'), art. 106, mamy:

$$R'_n=\frac{\lambda S}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}\left(\frac{x-a}{\zeta-a}\right)^n.$$

Tu $f(\zeta)/(\zeta-x)$ jest zawsze skończone, a że $\left|\frac{x-a}{\zeta-a}\right|<1$, więc ze zwiększeniem się n maleje R'_n czem raz więcej, a wreszcie możemy położyć $\lim\limits_{n=\infty} R'_n=0$. Stąd wnioskujemy, że szereg:

(3) $$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\ldots$$

jest zbieżny dla dostatecznie małych $|x-a|$ i mamy twierdzenie:

I. *Funkcya regularna wewnątrz pewnego konturu, a więc jednoznaczna skończona, ciągła i posiadająca oznaczoną pierwszą pochodnę* *daje się w otoczeniu każdego punktu tego wnętrza rozwinąć na szereg potęgowy (Taylora); jest więc funkcyą analityczną.*

W formach (2) zastąpmy kontur (s) kołem k, które ma środek w punkcie a i oczywiście musi leżeć wewnątrz zakresu zbieżności elementu (3). Wtedy kładąc $z = a + r \, . \, e^{\varphi i}$ dostajemy:

$$f^{(\alpha)}(a) = \frac{\alpha!}{2t} \int_0^{2\pi} i \frac{f(a + r e^{\varphi i})}{r^\alpha e^{\alpha \varphi i}} d\varphi, \qquad \text{a stąd:}$$

$$r^\alpha \frac{|f^{(\alpha)}(a)|}{\alpha!} \leqq \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} |f(a + r e^{\varphi i})| \, i \, d\varphi.$$

Za $|f(a + r e^{\varphi i})|$ położmy największą wartość g jaką $|f|$ na kole k przybiera, to mieć będziemy:

$$g \geqq r^\alpha |f^{(\alpha)}(a) / \alpha!| \qquad \text{[por. T. I. str. 418].}$$

Pd. 1. Zauważmy analityczną funkcyę $(1+z)^n$ z d o w o l n e m, a l e r z e c z y w i s t e m n. Jest ona regularną w obszarze $|z| < 1$ i w tym obszarze posiada rozwinięcie:

$$(1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \ldots + \binom{n}{p} z^p + \ldots$$

Podług wzorów (2) jest tu:

$$(a) \qquad \binom{n}{p} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(1+z)^n . dz}{z^{p+1}}$$

a całkę obliczyć trzeba po dowolnym konturze otaczającym punkt $z = 0$, a wykluczającym punkt $z = -1$. Niechże tym konturem będzie $ABCDA$ (fig. 63.), gdzie ABC jest łukiem koła o środku $z = 0$, a o promieniu $= 1$, a CDE łukiem koła o środku $z = -1$ a o promieniu $\rho < 1$.

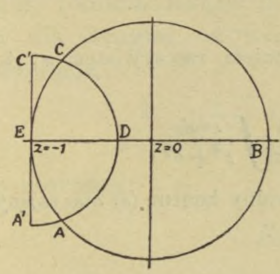


Fig. 63.

Zauważmy naprzód całkę (a) obliczoną po półkolu $C'CDAA'$. Kładąc w niej $z = -1 + \rho e^{\varphi i}$ przekonamy się łatwo, że ona, gdy ρ zdąży do granicy $= 0$, będzie także zerem.

Mając to na uwadze możemy za kontur całki (a) wziąć całkowity okrąg $ABCEA'$.

Położmyż $z = e^{\varphi i}$, to mieć będziemy:

$$(1+z)^n = (1 + e^{\varphi i})^n = e^{\frac{n\varphi i}{2}} \left(e^{-\frac{\varphi i}{2}} + e^{+\frac{\varphi i}{2}}\right)^n = \left(2 e^{\frac{\varphi i}{2}}\right)^n . \left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^n$$

$$z^{-(p+1)} = e^{-(2p+2)\frac{\varphi i}{2}}, \quad dz = i e^{2\frac{\varphi i}{2}} d\varphi, \quad \text{a więc:}$$

$$\frac{(1+z)^n dz}{z^{p+1}} = i d\varphi \left(2 . \cos \frac{\varphi}{2}\right)^n e^{(n-2p)\frac{\varphi i}{2}}$$

$$= i d\varphi \left(2 . \cos \frac{\varphi}{2}\right)^n \left[\cos (n-2p) \frac{\varphi}{2} + i \sin (n-2p) \frac{\varphi}{2}\right].$$

*

Lecz, że całka (a) ma mieć rzeczywistą wartość, przeto będzie:

$$2\pi\binom{n}{p}=\int_0^{2\pi}\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\cos(n-2p)\frac{\varphi}{2}.d\varphi.$$

Za n połóżmy tu $n+p$, a φ niech $=2t$, to mieć będziemy:

$$\binom{n+p}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(2\cos t)^{n+p}\cos(n-p)t.dt=$$

$$=\frac{(n+p)(n+p-1)...(n+1)}{1.2...p}.$$

Gdy $n=p$, to stąd wynika:

$$\int_0^\pi(2\cos t)^{2n}\,dt=\pi.\frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{2.2...n}.$$

Połóżmy tu $\cos t=u$, a więc $dt=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, to dojdziemy do całki:

$$2^n\int_{-1}^{+1}\frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}}=2^n.2\int_0^1\frac{u^{2u}du}{\sqrt{1-u^2}}=\pi.\frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{2.4.6...2n}.$$

Lecz, że $[(n+1)(n+2)....(2n)]/2^n=1.3.5....(2n-1)$, więc ostatecznie mieć będziemy:

$$\int_0^1\frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\pi}{2}.\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}.$$

Pd. 2. Zauważmy funkcyę $e^{zi}/(z+ai)$ o dodatniem rzeczywistem a, to podług wzorów (2) mamy:

$$(b)\qquad \frac{e^{(ai)i}}{2ai}=\frac{e^{-a}}{2ai}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{zi}\,dz}{(z-ai)(z+ai)}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{zi}\,dz}{z^2+a^2},$$

a za zamkniętą drogę całkowania można tu wziąć dowolny kontur (s) otaczający

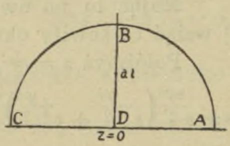


Fig. 64.

punkt $+ai$, a wykluczający punkt $-ai$ (gdyż w punkcie $-ai$ jest widocznie funkcya nieskończoną).

Niechże $(s)=ABCD$ (fig. 64.), gdzie ABC jest półkolem o środku $z=0$, a o promieniu $R>a$ Gdy R rosnąć będzie bezgranicznie, to całka (b) na samem półkolu ABC zdąży — co łatwo wywnioskować — do zera, a równanie (b) przybierze formę:

$$\pi\frac{e^{-a}}{a}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{xi}dx}{x^2+a^2},\quad (x \text{ rzeczywiste}),\quad \text{czyli:}$$

$$\pi.\frac{e^{-a}}{a}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x^2+a^2}dx. \quad \text{Stąd dostajemy:}$$

$$(c)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x.dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi.e^{-a}}{a},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x.dx}{x^2+a^2}=0.$$

W równaniu (2) — art. poprzedz. — zamieńmy kontury (s), (s') na koła spółśrodkowe k, k' ze środkiem: $z=0$. Z nich niech k będzie wewnątrz k', a równaniu (2) nadajemy formę:

$$(4)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_k\frac{f(z)dz}{z-x}-\int_{k'}\frac{f(z)dz}{z-x},$$

gdzie tu już i po kole k i po kole k' odbywa się całkowanie w dodatnim kierunku ze względu na punkta w ich wnętrzach leżące. W pierścieniu utworzonym przez te koła obierzmy dowolny punkt x. Gdy z w pierwszej całce oznacza punkta leżące na k, a w drugiej punkta leżące na k', to dla pierwszej całki mamy $|z|>|x|$, a dla drugiej $|x|>|z|$. Wskutek tego dostajemy tu zbieżne rozwinięcia:

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\frac{x^2}{z^3}+\dots,\qquad \frac{1}{z-x}=-\frac{1}{x}-\frac{z}{x^2}-\frac{z^2}{x^3}-\dots$$

o resztach:

$$R_n=\frac{x^n}{z^n}\frac{1}{z-x},\qquad S_n=\frac{z^n}{x^n}.\frac{1}{z-x}.$$

Użyjmyż tych rozwinięć w (4), to dostaniemy:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_k f(z)dz\left[\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\dots+\frac{x^{n-1}}{z^n}+\frac{x^n}{z^n}.\frac{1}{z-x}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{k'} f(z)dz\left[\frac{1}{x}+\frac{z}{x^2}+\dots+\frac{z^{n-1}}{x^n}-\frac{x^n}{z^n}.\frac{1}{z-x}\right].$$

A że tu okaże się:

$$\lim_{n=\infty}\int_k R_n.f(z)dz=0,\quad \lim_{n=\infty}\int_{k'} S_n.f(z)dz=0,$$

więc ostatecznie mieć będziemy:

$$f(x)=$$

$$(5)\quad \begin{aligned} &=\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_k \frac{f(z)dz}{z}+x.\int\limits_k \frac{f(z)dz}{z^2}+x^2\int\limits_k \frac{f(z)dz}{z^3}+\ldots\right]+ \\ &+\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{x}\int\limits_{k'} f(z)\,dz+\frac{1}{x^2}\int\limits_{k'} f(z)\,z\,dz+\frac{1}{x^3}\int\limits_{k'} f(z)z^2dz+\ldots\right]\end{aligned}$$

a to rozwinięcie zbieżne będzie na wszystkich punktach wewnątrz pierścienia $(k...k')$.

Gdy środek kół k, k' nie będzie $z=0$, ale punkt $z=c\neq 0$, to w (5) trzeba z i x zastąpić przez $(z-c)$, $(x-c)$.

Z tych uwag wynika:

II. *Funkcya regularna w pewnym pierścieniu kołowym o środku c da się w tym pierścieniu przedstawić zbieżnem rozwinięciem [Laurent'a (T. I., art. 202.)] postaci:*

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} b_\lambda (x-c)^\lambda ;$$

jest więc funkcyą analityczną.

Gdy koło k' maleje i staje się wreszcie punktem c, dostajemy w otoczeniu tego punktu:

$$f(x)=G\left(\frac{1}{x-c}\right)+\mathfrak{P}(x),$$

gdzie G jest funkcyą całkowitą wymierną lub przestępną swego argumentu, a punkt c jest wtedy osobliwym [T. I., art. 203].

118. Teorya pozostałości *(residuum)*. Gdy punkt a leżący w skończoności bierzemy pod uwagę, a funkcya $f(z)$ — lub jej jedna gałąź, jeżeli jest wieloznaczną — ma w punkcie a rozwinięcie:

$$f(z)=\frac{A_1}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\ldots+\mathfrak{P}(z-a)$$

zbieżne w obszarze $0<|z-a|<R$, to obrawszy koło k o środku w punkcie a, a o promieniu $<R$ dostajemy [art. 115., Pd. 2. Pd. 3.]:

$$\int\limits_k f(z)\,dz=A_1\int\limits_k \frac{dz}{z-a}=2\pi i.A_1. \quad \text{Stąd:}$$

$$A_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_k f(z)\,dz.$$

Taką całką otaczającą punkt a, który tu jest nieskończonościowym, lub istotnie osobliwym, nazywamy **pozostałością** *(residuum)* funkcyi w punkcie a i piszemy:

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a} f(z)dz = \underset{a}{Res}\, f(z).$$

Pozostałość jest widocznie współczynnikiem przy $(z-a)^{-1}$ w rozwinięciu funkcyi dla otoczenia punktu a.

Gdy $f(z)$ w otoczeniu punktu a zachowuje się regularnie, to mamy:

$$f(z) = b_0 + b_1(z-a) + \ldots, \qquad b_n = \frac{\overset{(n)}{f}(a)}{n!}, \text{ a}$$

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{b_0}{(z-a)^{n+1}} + \ldots + \frac{b_n}{z-a} + b_{n+1} + b_{n+2}(z-a) + \ldots$$

Stąd dostajemy:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \underset{a}{Res}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}.$$

Zauważmy kontur (s) wewnątrz którego funkcya $f(z)$ posiada punkta nieskończonościowe $a_1, a_2, \ldots, a_n$, o pozostałościach $A_1, A_2, \ldots A_n$, a zresztą jest w (s) regularną. Przyjmijmy $n = 3$ (fig. 65.) i zauważmy całkę:

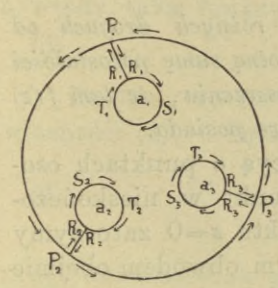


Fig. 65.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s} f(z)\,dz = [P_1P_2] + [P_2P_3] + [P_3P_1].$$

Otoczmy a_1, a_2, a_3 kołami k_1, k_2, k_3 tak małemi że k_α tylko punkt a_α w sobie zawiera i połączmy je prostemi R_1P_1, R_2P_2, R_3P_3 z konturem (s).

Zauważmy — mając to — kontur:

$$\begin{gathered}(P_1P_2) + (P_2R_2) + (R_2S_2T_2R_2) + (R_2P_2) + \\ + (P_2P_3) + (P_3R_3) + (R_3S_3T_3R_3) + (R_3P_3) + \\ + (P_3P_1) + (P_1R_1) + R_1S_1T_1R_1) + (R_1P_1),\end{gathered}$$

to punkta a_1, a_2, a_3 leżą już zewnątrz tego konturu, a wskutek tego suma całek:

$$[P_1P_2] + [P_2R_2] + [R_2S_2T_2R_2] + [R_2P_2] + \ldots = 0.$$

Lecz tu $[P_\alpha R_\alpha] + [R_\alpha P_\alpha] = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3.$

$$[R_\alpha S_\alpha T_\alpha R_\alpha] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k_\alpha)} f(z)dz = -\underset{a_\alpha}{Res}\, f(z), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

a wskutek tego mamy:

$$[P_1P_2]+[P_2P_3]+[P_3P_1]-\underset{s}{\Sigma} Res\, f(z)=0,$$

czyli:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s f(z)\, dz=\sum_s Res\, f(z); \tag{2}$$

Σ jest tu sumą wszystkich pozostałości zawartych wewnątrz (s). Mamy więc twierdzenie:

I. *Gdy funkcya $f(z)$ wewnątrz danego konturu posiada tylko punkta nieskończonościowe, lub istotnie osobliwe, to jej całka obliczona po (s) z czynnikiem $(2\pi i)^{-1}$ jest sumą wszystkich jej pozostałości w tym konturze.*

Gdy od punktu z_0 do punktu z_1 mamy dwie różne drogi $z_0\zeta z_1$, $z_0\zeta' z_1$, a $(z_0\zeta z_1)+(z_1\zeta' z_0)$ daje kontur (s) lub (s) a wewnątrz niego funkcya $f(z)$ posiada tylko punkta osobliwe określone w tw. I., to mamy:

$$J_{z_0\zeta z_1}+J_{z_1\zeta' z_0}=J_{z_0\zeta z_1}-J_{z_0\zeta' z_1}=\pm 2\pi i \underset{s}{\Sigma} Res\, f(z).$$

To znaczy:

II. *Całki funkcyi $f(z)$ obliczone po dwóch różnych drogach od punktu z_0 od punktu z_1, różnią się od siebie o $2\pi i$-krotną sumę pozostałości tej funkcyi zawartych między drogami w przypuszczeniu, że tam $f(z)$ tylko punkta nieskończonościowe lub istotnie osobliwe posiada.*

Niech $f(z)$ będzie jednoznaczną funkcyą o punktach osobliwych $a_1, a_2, \ldots$ leżących w skończoności (punkt w nieskończoności później rozważać będziemy). Gdy z punktu $z=0$ zatoczymy koło (R) tak dużym promieniem R, że ono swym obwodem obejmie wszystkie już punkta $a_1, a_2, \ldots$, to według tw. I. dostaniemy tu:

$$\int\limits_{R} f(z)\, dz=2\pi i(A_1+A_2+\ldots)=2\pi i\sum_R Res\,.f(z).$$

Lecz (R) otacza zarazem punkt $z=\infty$, a jeżeli w tem otoczeniu

$$f(z)=\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} B_\lambda z^\lambda, \quad \text{to}$$

$$\frac{f(z)}{z^{\lambda+1}}=\frac{B^\lambda}{z}+\ldots, \quad \text{a więc:}$$

$$B_\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R}\frac{f(z)}{z^{\lambda+1}}dz=\sum_R Res\frac{f(z)}{z^{\lambda+1}}, \quad \lambda=-\infty\ldots+\infty$$

W szczególności, gdy $\lambda=-1$, mamy:

(3) $$B_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R\circlearrowleft} f(z)\,dz=\sum_R Res\, f(z),$$

a B_{-1} trzeba uważać jako odjemną pozostałość funkcyi w punkcie $z=\infty$. Z (3) dostajemy:

$$-B_{-1}+\sum_R Res\, f(z)=\Sigma\, Res\, f(z)=0,$$ a to znaczy:

III. *Całkowita suma pozostałości danej funkcyi jednoznacznej — nie wyłączając i punktu $z=\infty$ — jest zawsze zerem.*

Przyjmijmy $B_{-1}=0$, to wtedy $\sum\limits_R Res\, f(z)=0$, a to znaczy:

IV. *Funkcya, która dla $z=\infty$ posiada takie rozwinięcie, że w niem niema wyrazu z potęgą z^{-1}, ma sumę wszystkich pozostałości pochodzących ze skończoności* $=0$.

Gdy w tem rozwinięciu oprócz $B_{-1}=0$, mamy jeszcze:

$$B_0=B_1=B_2=...=0,$$

to funkcya charakteryzuje się tem, że:

(4) $$\lim_{z=\infty} f(z)\,.\,z=0,$$

a wtedy taka funkcya posiada niezawodnie:

(5) $$\sum_R Res\, f(z)=0.$$

Połóżmy $z=Re^{\varphi i}$, a więc $dz=Re^{\varphi i}\,d\varphi i$, to — gdy $f(z)$ posiada własności (4) — będzie jej całka:

(6) $$\lim_{R=\infty}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(Re^{\varphi i})\,Re^{\varphi i}\,d\varphi i=0.$$

przy jakichkolwiek φ_0, φ_1, bo widocznie pod całką mamy tu na całej drodze całkowania:

$$\lim_{R=\infty} f(Re^{\varphi i})\,Re^{\varphi i}=\lim_{z=\infty} z\,.\,f(z)=0.$$

Funkcya wymierna $u(z)=f(z)\,/\,g(z)$, w której licznik ma stopień o 2 przynajmniej jednostki niższy od stopnia mianownika, posiada własność (4), a więc i własności (5), (6).

Przyjmijmy, że $g(z)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, a więc funkcya u nie ma miejsc nieskończonościowych na osi pierwszorzędnej xx'. Pozostałościami funkcyi u nad osią xx', a odpowiednio pod osią xx' niech będą: $(A_1, A_2, ...)$, $(A'_1, A'_2, ...)$. Mamy tu więc $A_1+A_2+...+A'_1+A'_2+...=0$, czyli:

$$A_1+A_2+...=-A'_1-A'_2-...$$

Przyjmijmy, że zamknięta droga całki $\int u\,.\,dz$ ma się składać: *a*) z nieograniczonej osi xx', *b*) z nieskończenie dużego półkola o środku $z=0$, a przebiegającego nad osią xx'. Wartość takiej zamkniętej całki będzie $\pi i(A_1+A_2+...)$; ale że ta całka obliczona po półkolu będzie miała wartość zero (wskutek własności (b)), więc stąd wynika:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} u(z)dz=2\pi i(A_1+A_2+...),\ \text{albo}$$

$$(7)\qquad =\pi i(A_1+A_2+...-A'_1-A'_2-...)$$
$$=\pi i(\Sigma A_s-\pi i\,\Sigma A'_s)$$

Pd. 1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n.x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{\pi}{\sin\frac{2m+1}{n}\pi},\ m\leqq n-1.$ [T. I. art. 65 Pd. 4.].

Pd. 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} n.\frac{x^{m-1}-x^{m'-1}}{1-x^{2n}}dx=\pi\left[cotg\frac{m\pi}{2n}-cotg\frac{m'\pi}{2n}\right]$

gdzie m, m' są nieparzyste, $m-1\leqq 2n-2$, $m'-1\leqq 2n-2$ [Por. T. I. art. 65. Pd. 5.*).
Za $m-1$, $m'-1$, które są parzyste, piszmy $2m$, $2m'$, a granice $-\infty$, $+\infty$, zmieńmy na 0, ∞, to dostaniemy:

$$(\alpha)\qquad \int_0^{\infty}\frac{x^{2m}-x^{2m'}}{1-x^{2n}}dx=\frac{\pi}{2n}\left[cotg\frac{2m+1}{2n}-cotg\frac{2m'+1}{2n}\right],$$

Podobnie z całki obliczonej w Pd. 1. dostaniemy:

$$(\beta)\qquad \int_0^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2m+1}{n}\pi}.$$

Pd. 3. Połóżmy w (α) $x=t^{\frac{1}{2n}}$, to po skróceniach dostaniemy:

$$(\gamma)\qquad \int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2n}-1}-t^{\frac{m'}{n}-\frac{1}{2n}-1}}{1-t}dt=\pi\left[cotg\frac{2m+1}{2n}-cotg\frac{2m'+1}{2n}\right].$$

Przyjmijmy, że m, m', n zwiększają się nieograniczenie i że wtedy m/n, m'/n dążą do niewymiernych dodatnich, ale ułamkowych granic: a, b, to wtedy równanie (γ) daje:

$$(\gamma')\qquad \int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}-t^{b-1}}{1-t}dt=\pi\,[cotg\,a\,\pi-cotg\,b\,\pi],\ a<1,\ b<1.$$

Pd. 4. Ponieważ $(a-1)$, $(b-1)$ są odjemne i ułamkowe, więc można położyć $b-1=-a$. Wtedy mamy:

*) Zob. *errata* w T. I.

$$(\delta)\qquad \int_0^\infty \frac{t^{a-1}-t^{-a}}{1-t}\,dt = 2\pi\, cotg\, a\pi = \int_0^1 \frac{t^{a-1}-t^{-a}}{1-t}\,dt + \int_0^\infty \frac{t^{a-1}-t^{-a}}{1-t}\,dt.$$

Połóżmy w drugiej całce $t=\tau^{-1}$, a potem za τ piszmy znowu t, to ostatecznie z (δ) dostaniemy:

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}-t^{-a}}{1-t}\,dt = \pi\,.\,cotg\, a\,\pi.$$

Pd. 5. Gdy $u(z)=1/(z^2+a^2)^m$, gdzie m jest całkowite dodatnie, a a dowolne i >0 to mamy tu:

$$\underset{+ai}{Res}\, u(z) = \frac{(-1)^{m-1}}{2a^{2m-1}\,.\,i^{2m-1}}\cdot\frac{m(m+1)\dots(2m-2)}{1.2\dots m},$$

a więc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+a^2)^m} = 2\pi\,.\,\frac{m(m+1)\dots(2m-2)}{1.2\dots m}\left(\frac{1}{2a}\right)^{2m-1},$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+a^2)^m} = \pi\,.\,\frac{m(m+1)\dots(2m-2)}{1.2\dots m}\left(\frac{1}{2a}\right)^{2m-1}.$$

Z nowszych prac o zastosowaniu całek i pozostałości czytaj: Painlève: *Sur le développement en séries...* C. R. T. 102. str. 672—675. Heine E. *Einige Anwendungen der Residuen-Rechnung von Cauchy.* C. J. T. str. 19—39.

119. Funkcye o kołowych cięciach (liniach zerwania ciągłości). Niech $f(z)$ będzie funkcyą jednoznaczną określoną w otoczeniu punktu $z=0$ elementem $\mathfrak{P}(z)$, zbieżnym w kole (R), a $\mathfrak{P}(z, m)$ niech oznacza wydzielony szereg *mod m* z tego elementu. Wtedy [T. I. str. 417.] mamy:

$$(1)\qquad \mathfrak{P}(z, m) = \frac{\mathfrak{P}(z)+\mathfrak{P}(z\varepsilon)+\dots+\mathfrak{P}(z\varepsilon^{m-1})}{m},$$

gdzie $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. To równanie można tak także napisać:

$$(2)\qquad \mathfrak{P}(z, m) = \frac{f(z)+f(z\varepsilon)+\dots+f(z\varepsilon^{m-1})}{m}$$

Przyjmijmy, że przeprowadzając szereg $\mathfrak{P}(z, m)$ poza koło (R) dochodzimy już do takiego szeregu $\mathfrak{P}_1(z-z', m)$, który w swem kole zbieżności zawiera punkt z_1. Uważając i drugą stronę w (1) za szeregi samego argumentu z i prowadząc każdy z szeregów $\mathfrak{P}(z)$, $(\mathfrak{P}(z\varepsilon), \ldots$, po tej samej drodze, co szereg $\mathfrak{P}(z, m)$, dostaniemy — co z formy (2) wnosimy — w tym punkcie z_1:

$$\mathfrak{P}_1(z_1-z', m)=\frac{f(z_1)+f(z_1\varepsilon)+\ldots+f(z_1\varepsilon^{m-1})}{m}.$$

To znaczy:

I. *Gdy z szeregu* $\mathfrak{P}(z)$ *zbieżnego w kole* (R), *a określającego funkcyę* $f(z)$ *wydzielimy szereg mod* m, *a potem ten wydzielony szereg, który — jak wiadomo — określa w* (R) *średnią arytmetyczną funkcyi* $f(z)$, *przeprowadzać będziemy, to w jego przeprowadzeniach dostajemy ciągle średnią arytmetyczną mod* m *(o wierzchołkach regularnego* m*-boku ze środkiem w punkcie* $z=0$).

Gdy funkcyę $f(z)$ określoną mamy elementem:

$$\mathfrak{P}(z-z_0)=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots$$

o promieniu zbieżności r, a $f(z)$ w argumencie $(z-z_0)$ ma postać $\varphi(z-z_0)$, to tu wydzielony szereg *mod* m z elementu $\mathfrak{P}(z-z_0)$ będzie:

$$\mathfrak{P}(z-z_0, m)=\frac{\varphi(z-z_0)+\varphi((z-z_0)\varepsilon)+\ldots+\varphi((z-z_0)\varepsilon^{m-1})}{m}.$$

Załóżmy $m=\infty$, to $\mathfrak{P}(z-z_0, \infty)=a_0=f(z_0)$. Lecz $\mathfrak{P}(z-z_0, \infty)$ można przedstawić takiem nieskończonem wyrażeniem:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} A(z)=\mathfrak{P}(z-z_0, 1)+[\mathfrak{P}(z-z_0, 2)-\mathfrak{P}(z-z_0, 1)]+ \\ +[\mathfrak{P}(z-z_0, 3)-\mathfrak{P}(z-z_0, 2]+[\mathfrak{P}(z-z_0, 4)-\mathfrak{P}(z-z_0, 3)]+ \\ \ldots\ldots\ldots \textit{in inft.}= \\ =U_1(z)+U_2(z)+U_3(z)+\ldots \textit{ in inft.} \end{array}\right.$$

Ma ono — gdy $|z-z_0|<r$ — stałą wartość $f(z_0)$.

Gdy $A(z)$ przeprowadzać będziemy poza koło (r) — [w ten sposób, że każde $U_\alpha(z)$ przeprowadzamy w niem] — to takie każde przeprowadzenie ma, podług tw. I., znaczenie średnio arytmetycznej z wartości funkcyi $\varphi(z-z_0)$ dla modułu $m=\infty$. Połóżmyż $|z-z_0|=\varrho$, to bez różnicy, czy $\varrho<r$, czy też $>r$ mamy:

$$(4)\quad A(z)=\lim_{m=\infty}\frac{\varphi(z-z_0)+\ldots+\varphi((z-z_0)\varepsilon^{m-1})}{m}.$$

Na kole (ϱ) mamy:

$$(5)\quad z-z_0=\varrho\cdot e^{\psi i}, \text{ gdzie } \psi=\left.\frac{2k\pi}{m}\right]_{m=\infty}, \ k=0, 1, 2, \ldots$$

a przez $d\psi$ trzeba rozumieć $\left.\frac{2\pi}{m}\right]_{m=\infty}$. Z (5) dostajemy:

$$dz=\varrho\cdot e^{\psi i}d\psi i=(z-z_0)d\psi i.$$

Pomnóżmyż w (4) licznik przez dz, a mianownik przez:

$$(z-z_0)d\psi i=(z-z_0)i\frac{2\pi}{m}\Big]_{m=\infty},$$

to otrzymamy:

$$A(z)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{m=\infty}\frac{\varphi(z-z_0)+\ldots+\varphi((z-z_0)\varepsilon^{m-1})}{z-z_0}dz$$

Lecz suma po prawej stronie jest wprost całką:

$$\int\frac{\varphi(z-z_0)dz}{z-z_0}=\int\frac{f(z)dz}{z-z_0},$$

obliczoną po kole (ϱ), a że ta całka $=2\pi i \underset{\varrho}{\Sigma Res}\frac{f(z)}{z-z_0}$, więc ostatecznie mamy:

$$A(z)=\underset{\varrho}{\Sigma Res}\frac{f(z)}{z-z_0},\ \text{gdy}\ |z-z_0|=\varrho.$$

W kole (r) ma $f(z)/(z-z_0)$ jedyną pozostałość $f(z_0)=a_0$. Przyjmijmy, że funkcya $f(z)$ ma punkta (istotnie lub nieistotnie) osobliwe:

$a)$ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ na kole $|z-z_0|=r$

$b)$ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ „ „ $|z-z_0|=\varrho_1$

$c)$ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots$ „ „ $|z-z_0|=\varrho_2$ i t. d.

$$r<\varrho_1<\varrho_2<\ldots$$

a już w pierścieniach $(r\ldots\varrho_1)$, $(\varrho_1-\varrho_2)$, ... zachowuje się regularnie. Przyjmijmy dalej, że funkcya $f(z)/(z-z_0)$ daje:

sumę pozostałości $=H$ w punktach (a)

„ „ $=H_1$ „ (a), (b)

„ „ $=H_2$ „ (a), (b), (c) i t. d.

to przy takich założeniach mamy:

$$A(z)=\begin{cases} f(z_0) & \text{gdy}\ |z-z_0|<r \\ H & \text{„}\ r<|z-z_0|<\varrho_1 \\ H_1 & \text{„}\ \varrho_1<|z-z_0|<\varrho_2 \\ H_2 & \text{„}\ \varrho_2<|z-z_0|<\varrho_3\ \text{i t. d.,} \end{cases}$$

Na samych okręgach kół (r), (ϱ_1), (ϱ_2), ... zmienia $A(z)$ swą wartość z $f(z_0)$ na H, z H na H_1, z H_1 na H_2 i t. d. Z tego powodu te okręgi nazywają się liniami zerwania, przerwy, albo cięciami. $A(z)$ jest funkcyą o całych liniach zerwania. Przykładów na takie funkcye mieliśmy już dostatecznie dużo w Tomie I. (str. 513—516).

120. Funkcye o dowolnych cięciach w postaci całek określonych*). Inna metoda tworzenia funkcyj z liniami przerwy bierze swój początek w takich rozmowaniach: Zauważmy całkę określoną:

$$(1)\qquad \Phi(z)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{dt}{t-\varphi(z)},\ (t_1>t_0),$$

rzeczywistej zmiennej t, a zawierającą urojony parametr $z=x+yi$. Połóżmy $\varphi(z)=u(x,y)+i.v(x,y)$, to na krzywej (lub w ogólności krzywych) o równaniu $v(x,y)=0$ leżeć będą te punkta $z=x+yi$, które dają $\varphi(z)$ o rzeczywistych wartościach t. Niechże $\varphi(z)=t_0$ w punkcie $A=z_0$ (fig. 66.), a $\varphi(z)=t_1$ w punkcie $B=z_1$, to $\varphi(z)$ zmieniające swe wartości od t_0 do t_1 określa poruszający się punkt z na płaszczyźnie (z) po pewnej linii AB. Pytanie, czem jest ta linia dla funkcyi $\Phi(z)$? Gdy z leży gdziekolwiek poza AB, to $t-\varphi(z)\neq 0$, a wtedy:

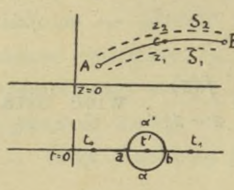


Fig. 66.

$$\Phi(z)=log\frac{t_1-\varphi(z)}{t_0-\varphi(z)}$$

ma zupełnie oznaczoną i skończoną wartość.

Przyjmijmy teraz, że punkt z zbliża się — z jednej lub z drugiej strony linii AB — nieskończenie do punktu c leżącego na samej tej linii AB. Aby zachowanie się funkcyi $\Phi(z)$ i w tym razie zbadać, zauważmy, że gdy rzeczywistą wartość t, zawartą między t_0, a t_1, a odpowiadającą wartości z zmienimy na $t+\delta i$, lub $t-\delta i$, gdzie δ jest nieskończenie małą, dodatnią (rzeczywistą) ilością, to z równań:

$$(2)\qquad t+\delta i=\varphi(z),\quad t-\delta i=\varphi(z),$$

wynikające z_1, z_2 będą nieskończenie bliskie punktu z i leżeć będą po przeciwnych stronach linii AB. Niechże z_1 leży po stronie S_1 (dodatniej), a z_2 po stronie S_2 (ujemnej) linii AB, a w (2) połóżmy $t=t'$, która-to wartość ma odpowiadać punktowi c, to równania:

$$t'+\delta i=\varphi(\overset{+}{z}),\quad t'-\delta i=\varphi(\overset{-}{z}),$$

określają odpowiednio taką parę punktów $\overset{+}{z}$, $\overset{-}{z}$, z których pierwszy leży po dodatniej, drugi po ujemnej stronie linii AB, ale obydwa są nieskończenie bliskie punktu c.

*) Hermite. *Cours d'Analyse.* Por. także: Picard. C. R. T. 95., str. 1405. Desaint. C. R. T. 119, str. 364.

Mając to, określmy:

$$\overset{+}{\Phi}(z)=\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}}\left[\int_{t_0}^{t'-\varepsilon}\frac{dt}{t-(t'+\delta i)}+\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}+\int_{t'+\varepsilon}^{t_1}\right]$$

$$\overline{\Phi}(z)=\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}}\left[\int_{t_0}^{t'-\varepsilon}\frac{dt}{t-(t'-\delta i)}+\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}+\int_{t'+\varepsilon}^{t_1}\right]\text{*)}$$

to z tych określeń widocznie wynika:

$$\overset{+}{\Phi}(z)-\overline{\Phi}(z)=\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \delta=0}}\left[\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\frac{dt}{t-(t'+\delta i)}-\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\frac{dt}{t-(t'-\delta i)}\right].$$

Lecz tu w całce pierwszej można drogę całkowania $(t'-\varepsilon \ldots t'+\varepsilon)$ zastąpić półkolem *aab* [fig. 66.] o promieniu $=\varepsilon$. Połóżmyż — ponieważ δ jest nieskończenie małe — $t-(t'+\delta i)=\varepsilon e^{\psi i}$, a więc: $dt=\varepsilon \,.\, e^{\psi i}\, d\psi$, to pierwsza całka będzie $=$

$$\int_{-\pi}^{0} i d\varphi=+\pi i,\ \text{choć już } \varepsilon=\delta=0.$$

Gdy analogicznie w drugiej całce zastąpimy $(t'-\varepsilon \ldots t'+\varepsilon)$ przez półkole $aa'b$, dostaniemy:

$$\int_{-\pi}^{0} i d\psi=-\pi i,\ \text{choć już } \varepsilon=\delta=0.$$

Z tego wynika, że:

$$\overset{+}{\Phi}(z)-\overline{\Phi}(z)=2\pi i, \tag{3}$$

a z należy do punktów określonych przez $t+\delta i=\varphi(z)$.

Linia *AB* jest więc znowu linią przerwy w funkcyi $\Phi(z)$.

Niech $u(t, z)=F(t, z) \,/\, G(t, z)$ będzie jednoznaczną funkcyą rzeczywistego argumentu t, a z niech w niej występuje jako dowolny parametr, mogący przybierać już-to rzeczywiste, już-to urojone wartości. Gdy $G(t, z)=0$ rozwiązane ze względu na t daje:

$$G(t, z)=(t-\varphi_1(z))^{\alpha}(t-\varphi_2(z))^{\beta}\ldots \quad \alpha>0,\ \beta>0, \ldots$$

to $t-\varphi_1(z)=0$, przy t zmieniającem się od t_0 do t_1 określa na płaszczyźnie (z) pewną linię krzywą A_1B_1, a to samo odnieść trzeba do dalszych czynników, tak, że równanie $G(t, z)=0$ przy $t=(t_0 \ldots t_1)$ daje linie A_1B_1, A_2B_2, ..., o których założymy, że się z sobą nie przecinają. Rozwijając funkcyę $u(t, z)$ jako funkcyę samego t w otoczeniu miejsca $t=\varphi_1(z)$ dostajemy:

---

*) W drugich i trzecich całkach mieszczą się te same funkcye, co w pierwszych.

$$u(t, z)=\frac{R_1(z)}{t-\varphi_1(z)}+P_1(t-\varphi(z)),$$

a to wskazuje, że funkcya $u(t, z)$ jest, gdy t zawsze pozostaje w obszarze $(t_0 \dots t_1)$, na każdem z leżącem na $A_1 B_1$ nieskończonością. P_1 nie zawiera już wyrazu z potęgą $[t-\varphi]^{-1}$, a $R_1(z)$ jest pozostałością funkcyi $u(t, z)$, jako funkcyi samej zmiennej t na miejscu $\varphi_1(z)$.

Mając to zauważmy funkcyę:

$$\Phi(z)=\int_{t_0}^{t_1} u(t, z)\, dt.$$

W otoczeniu $t=\varphi_1(z)$ mamy tu:

$$\Phi(z)=\int_{t_0}^{t_1} \frac{R_1(z)dt}{t-\varphi_1}+\int_{t_0}^{t_1} P_1(t-\varphi_1)dt,$$

a że druga całka na wszystkich punktach z linii $A_1 B_1$ jest skończoną*), więc stąd odrazu wnioskujemy:

$$\Phi(\overset{+}{z})=\Phi(\overset{-}{z})+2\pi i . R_1(z).$$

Analogicznie gdy z leży na linii $A_\alpha B_\alpha$ mieć będziemy:

$$\Phi(\overset{+}{z})=\Phi(\overset{-}{z})+2\pi i R_\alpha(z) \tag{4}$$

z tą samą uwagą o z, co w wypadku poprzedzającym. R_α jest pozostałością funkcyi $u(t, z)$ jako funkcyi samego t w punkcie $t=\varphi_\alpha(z)$.

Pd. 1. Niech $u(z)$ będzie funkcyą wymierną, ułamkową, posiadającą takie własności:

a) jej licznik jest stopnia o dwie, lub więcej jednostek niższego od stopnia mianownika;

b) jej miejsca nieskończonościowe są:

$c_1, c_2, \dots, c_r$ nad osią pierwszorzędną, a

$c'_1, c'_2, \dots, c'_\varrho$ pod osią pierwszorzędną, a więc:

$c_\alpha = a_\alpha + b_\alpha i$, $c'_\alpha = a'_\alpha - b'_\alpha i$, gdzie przyjmujemy:

$b_1 > b_2 > \dots$; $b'_1 > b'_2 > \dots$

c) Do tych miejsc należą odpowiednio pozostałości: $(A_1, A_2, \dots)$, $(A'_1, A'_2 \dots)$.

Funkcya $u(t+z)$, w której t jest nieograniczoną zmienną rzeczywistą, będzie nieskończoną na miejscach:

$$t+z=c_\alpha, \quad t+z=c'_\alpha \quad \text{czyli na miejscach:}$$

$$t+x+yi=a_\alpha+b_\alpha i, \quad t+x+yi=a'_\alpha-b'_\alpha i.$$

---

*) z wyjątkiem chyba samych punktów t_0, t_1 co wnosimy z obliczenia:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{(t-\varphi_1)^\mu}=\frac{1}{-\mu+1}\left[(t_1-\varphi_1)^{-\mu+1}-(t_0-\varphi_1)^{-\mu+1}\right] . \mu=2, 3, 4, \dots$$

Stąd dostajemy:

$$\left.\begin{array}{l} x=a_\alpha - t \\ y=b_\alpha \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x=a'_\alpha - t \\ y=-b'_\alpha \end{array}\right\} \quad t=(-\infty \ldots +\infty).$$

Te równania określają nieograniczone proste: $(C_1, C_2, \ldots, C_r), (C_1', C_2', \ldots, C_\varrho')$, równoległe do osi xx', a przechodząc odpowiednio przez $c_1, c_2, \ldots, c_r$, $c'_1, c'_2, \ldots c_\varrho$ (fig. 67.).

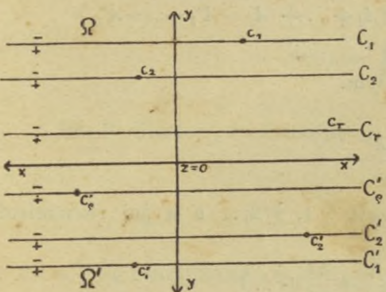


Fig. 67.

Według równań:

$$t+\delta i+z=c_\alpha$$
$$t+\delta i+z=c'_\alpha$$

trzeba na każdej prostej uznać tę jej stronę za dodatnią, z której wyprowadzić można normalną w kierunku malejących y.

Mając to zauważmy funkcyę:

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(z+t)dt,$$

dla której proste $C_1, C_2, \ldots, C_1', C_2', \ldots$ będą liniami przerwy (cięciami).

Przedewszystkiem — ponieważ:

$$\frac{du(z+t)}{dz}=\frac{du(z+t)}{dt}, \text{ więc:}$$

$$\frac{d\Phi(z)}{dz}=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(z+t)}{dt}\, dt=u(z+t)\Big]_{t=-\infty}^{+\infty}=0$$

wskutek założenia a). Z tego wynika, że $\Phi(z)=const.$, ale ta stała zmieniać się będzie za przekroczeniem każdej z pozostałych $C_1, C_2, \ldots, C_1', C_2', \ldots$ Zakładając $z=\infty$ mamy:

$$\Phi(z)]_{z=\infty}=\int_{-\infty}^{+\infty} u(t+z)\Big]_{z=\infty} dt=0$$

znowu wskutek założenia a), a tę wartość zatrzymać już trzeba w całych częściach Ω, Ω' płaszczyzny (z), rozciągających się nad cięciem C_2 i pod cięciem C'_1, [fig. 67.].

Wychodząc z Ω, dostaniemy po przekroczeniu cięcia C_1, stosując wzór (4):

$$\Phi(z)=2\pi i\, A_1 \text{ między cięciami } C_1 \text{ i } C_2;$$

przekroczywszy dalej cięcie C_2 dostaniemy:

$$\Phi(z)=2\pi i\, (A_1+A_2) \text{ między cięciami } C_2 \text{ i } C_3,$$

a idąc tak dalej dojdziemy nareszcie do wartości:

$$(a) \qquad \Phi(z)=2\pi i\, (A_1+A_2+\ldots+A_r) \text{ między } C_r \text{ a } C'_\varrho.$$

Gdy C'_ϱ przekroczymy, mieć będziemy:

$$\Phi(z)=2\pi i (A_1+\ldots+A_r+A'_\varrho) \text{ między } C'_\varrho \text{ a } C'_{\varrho-1},$$

a gdy wreszcie do Ω' dojdziemy, otrzymamy:

$$\Phi(z)=2\pi i\, (A_1+A_2+\ldots+A_r+A'_1+A'_2+\ldots+A'_\varrho).$$

Z tego wynika:

$$A_1 + A_2 + \ldots A_r = -A'_1 - A'_2 - \ldots - A'_\varrho,$$

co jest już wprost następstwem założenia a).

Kładąc w (a) $z=0$ dochodzimy do rezultatu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt = 2\pi i(A_1 + A_2 + \ldots + A_r) = \pi i(A_1 + \ldots + A_r - A'_1 - \ldots - A'_\varrho)$$

do jakiego już doszliśmy w art. poprzedzającym.

Pd. 2. Funkcya:

$$u(e) = \frac{e^{az} - e^{bz}}{1 - e^z}$$

ma punkta nieskończonościowe: $z = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a z jej rozwinięcia dla otoczenia punktu $2k\pi i$, a mianowicie:

$$\frac{\left(e^{2ak\pi i} - e^{2bk\pi i}\right)\left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \ldots\right)}{-\frac{h}{1!} - \frac{h^2}{2!} - \ldots}$$

wnosimy, że jej pozostałość w tym punkcie jest:

$$R_k = e^{2bk\pi i} - e^{2ak\pi i}, \text{ albo:}$$

$$R_k = \beta^k - \alpha^k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

jeżeli dla krótkości położyliśmy:

$$e^{2b\pi i} = \beta,\ e^{2a\pi i} = \alpha.$$

Funkcya:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a(z+t)} - e^{b(z+t)}}{1 - e^{z+t}} . dt$$

posiadać tu będzie znowu cięcia w C_k, przedstawiające się jako nieograniczone linie proste równoległe do osi xx', a przechodzące przez punkta $2k\pi i$. Ich dodatnie i odjemne strony określimy tu w taki sam sposób, jak w Pd. 1.

Zauważmy obszary (C_0, C_1), (C_1, C_2), (C_2, C_3),... ograniczone właśnie cięciami ujętemi tu w nawiasy. Gdy $\Phi(z)_0$ przedstawia funkcyę $\Phi(z)$ w pierwszym z tych obszarów, to w drugim obszarze mamy:

(a) $$\Phi(z)_1 = \Phi(z)_0 - 2\pi i . R_1 = \Phi(z)_0 - 2\pi i(\beta - \alpha),$$

w trzecim:

(b) $$\Phi(z)_2 = \Phi(z)_0 - 2\pi i(R_1 + R_2) = \Phi(z)_0 - 2\pi i(\beta - \alpha + \beta^2 - \alpha^2) \text{ i t. d.}$$

Aby $\Phi(z)_0$ znaleźć zauważmy, że gdy z jest punktem w obszarze pierwszym, to $z + 2\pi i$ jest punktem w obszarze drugim, $z + 4\pi i$ punktem w obszarze trzecim i t. d., a w tych obszarach dostajemy:

$$u(z + t + 2k\pi i) = \frac{\alpha^k . e^{a(t+z)} + \beta^k e^{b(t+z)}}{1 - e^{t+z}}.$$

Gdy $k = 0, 1, 2$, to łatwo sprawdzimy, że:

$$u(t + z + 4\pi i) - (\alpha + \beta)\, u(t + z + 2\pi i) = -\alpha\beta\, u(t + z),$$

a wskutek tego:

$$\Phi(z)_2 - (\alpha + \beta)\, \Phi(z)_1 = -\alpha\beta . \Phi(z)_0.$$

Zastosowawszy tu związki (a), (b) dostaniemy po wszystkich skróceniach i uproszczeniach:

$$\Phi(z)_0 = \pi i\left[\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right] = \pi\,[cotg\, a\pi - cotg\, b\pi].$$

Taką też wartość będzie miała i całka:

$$\Phi(0)_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at} - e^{bt}}{1 - e^t}\,.\,dt$$

Pd. 3. Okazać, że funkcya:

$$\Phi(z) = \int_{ai}^{bi} \frac{f(t)\,.\,e^{2\pi ti}}{e^{2\pi ti} - e^{2\pi zi}}\,dt$$

gdzie a, b są rzeczywiste, a $z = x + yi$, posiada nieskończenie wiele cięć, któremi są odcinki leżące na prostych $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a zawarte między prostemi $y = a$, $y = b$. [Guichard. *Ann. Sc.* T. 4 (1887)].

Pd. 4. Okazać, że funkcya:

$$\Phi(z) = \int_0^1 \frac{z\,dt}{\sqrt{(1-z^2t^2)(1-k^2z^2t^2)}}\,,\quad z = x + yi,$$

o urojonem k posiada cięcia takie: *a)* na prostej $y = 0$ cięcia $(-\infty \ldots 1)$, $(+1 \ldots + \infty)$ *b)* na prostej przechodzącej przez punkta $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ cięcia: $\left(-\infty \ldots -\frac{1}{k}\right)\left(+\frac{1}{k} \ldots + \infty\right)$. [Lerch. *Ann. Sc.* T. 6. S. 3. (1889)].

Liczne inne zastosowania i przykłady znajdują się w rozprawie|: E. Goursat. *Sur une classe des fonctions représentées per des integrales définies Acta math.* T. 2. (1883) str. 1—70.

121. Zastosowanie teoryi pozostałości do równań. Gdy jednoznaczna funkcya $f(z)$ ma w punkcie a punkt zerowy lub nieskończonościowy, to można ją w otoczeniu tego punktu przedstawić iloczynem:

$$f(z) = (z-a)^m\, \varphi(z) \quad m \gtreqless 0, \text{ całkowite.}$$

Pochodna jej:

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}\,\varphi(z) + (z-a)^m\,\varphi'(z),$$

a stąd:

$$(1) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

φ'/φ jest w punkcie a skończone i oznaczone, a stąd z równania (1) wnioskujemy, że:

$$(2) \qquad m = \underset{a}{Res}\,\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

*

Przyjmijmyż, że funkcya $f(z)$ w pewnym obszarze (s) ograniczonym zamkniętą linią s posiada m miejsc zerowych, n miejsc nieskończonościowych, a miejsc istotnie szczególnych niech wcale nie posiada, to w takim razie dostajemy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = m-n. \tag{3}$$

Przyjmijmy, że prócz funkcyi $f(z)$, która we wnętrzu (s) posiada miejsca zerowe:

$a_1, a_2, \ldots a_\mu$, o powtórzeniach:

$m_1, m_2, \ldots m_\mu$

i miejsca nieskończonościowe:

$b_1, b_2, \ldots, b_\nu$, o powtórzeniach:

$n_1, n_2, \ldots, n_\nu$,

mamy jeszcze funkcyę $F(z)$ jednoznaczną i skończoną wewnątrz (s).

W takim razie funkcya $F(z).\frac{f'(z)}{f(z)}$ będzie miała w a_s pozostałość $F(a_s)m_s$, a w b_s pozostałość: $-F(b_s).n_s$. Z tego wynika, że:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s} F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \left\{\begin{array}{l} m_1F(a_1)+m_2F(a_2)+\ldots+m_\mu F(a_\mu)- \\ -n_1F(b_1)-n_2F(b_2)-\ldots-n_\nu F(b_\nu). \end{array}\right. \tag{4}$$

Gdy w (s) znajduje się tylko jeden pierwiastek a funkcyi $f(z)$ to mamy:

$$F(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s} F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \tag{5}$$

W szczególności, jeżeli $F(z)=z$, dostajemy:

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_{s} \frac{z.f'(z)}{f(z)}\,dz, \tag{a}$$ a to znaczy:

I. *Gdy we wnętrzu konturu s znajduje się jeden tylko pierwiastek a równania $f(z)=0$, to przez wartości funkcyi $f(z)$ na tym konturze jest ten pierwiastek zupełnie oznaczony.*

Gdy w (s) zawiera się m pierwiastków równania $f(z)$, a miejsc nieskończonościowych funkcya ta tam nie posiada, to podług (3) mamy:

$$m = \frac{1}{2\pi i}\int_{s} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \tag{6}$$

Niech $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, a gdy t zmienia się od $t=a$ do $t=b$, niech punkt $z=\varphi(t)+i\psi(t)$ przebiega właśnie cały kontur s. Połóżmy:

(7) $$f(z)=f(\varphi+\psi i)=P(t)+Q(t)i=R_t\,.\,e^{\lambda_t i},$$
to oczywiście $R_a=R_b$, a λ_b, λ_a muszą się różnić od siebie o pewną wielokrotność liczby 2π. Okażemy, że **ta wielokrotność będzie właśnie** $=m$. Uwzględniając (7) w (6), możemy położyć:
$$m=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b d\,[\log R_t\,.\,e^{\lambda_t i}].\ \text{Stąd:}$$
$$m=\frac{1}{2\pi i}[\log R_t]_a^b+\frac{1}{2\pi i}\,i\lambda_t]_a^b$$
a że $R_a=R_b$, więc:
$$m=\frac{\lambda_b-\lambda_a}{2\pi},\ \text{albo:}$$
(8) $$\lambda_b=\lambda_a+2m\pi \quad \text{c. b. d. d.}$$

Gdy m nie znamy, to trzeba to m wyznaczyć z samego zachowania się funkcyi na konturze s. W tym celu zauważmy, że $\lambda_t=arctg\,\dfrac{Q(t)}{P(t)}=arc\,tg\,F(t)$, jeżeli $Q(t)/P(t)=F(t)$. Gdy wartości funkcyi $arc\,tg\,F(t)$ ograniczymy do zakresu $\left(-\frac{\pi}{2}...+\frac{\pi}{2}\right)$, co naznaczymy pisząc: $[arc\,tg\,F(t)]$, to z uwagi, że $F(a)=F(b)$, mamy także: $[arc\,tg\,F(a)]=[arc\,tg\,F(b)]$, a więc $\lambda_a=\lambda_b$, a to — gdy $m>0$ — nie zgadza się z równaniem (8).

Tę sprzeczność usuną takie uwagi: Przyjmijmy, że $a<b$, że α zawiera się między a i b, że $F(\alpha)$ ma skończoną wartość i że t przybiera wartości $>\alpha$, a tak bliskie punktu α, że między α i t pozostaje $F(t)$ skończone.

Wtedy różnica: $\lambda_t-\lambda_\alpha$, — choć się w niej λ_α położy $=$ $=[arc\,tg\,F(\alpha)]+\nu\pi$, $\nu=0, \pm 1, \pm 2,...$, a więc λ_α określimy w niej w najdowolniejszy dozwolony sposób — musi być zerem, gdy $t=\alpha$. Z tego wynika, że i λ_t wziąć trzeba w znaczeniu $[arc\,tg\,F(t)]+\nu\pi$, i że więc w tym razie zawsze jest:

(9) $$\lambda_t-\lambda_\alpha=[arc\,tg\,F(t)]-[arc\,tg\,F(\alpha)].$$

Mając to przyjmijmy, że między α, a obranem pewnem $t>\alpha$ znajduje się jeden tylko punkt τ taki, w którym $P(\tau)=0$, a więc $F(t)=\pm\infty$, i że w tym punkcie przechodzi $F(t)$ z wartości $+\infty$ na $-\infty$. Aby w tym razie obliczyć $(\lambda_t-\lambda_\alpha)$ zauważmy — obrawszy dowolnie małą dodatnią ilość ε — sumę:
$$S_{t,\alpha}=(\lambda_t-\lambda_{\tau+\varepsilon})+(\lambda_{\tau-\varepsilon}-\lambda_\alpha).$$

Ponieważ każdą różnicę mieszczącą się tu można przedstawić wzorem (9), więc mamy:
$$S_{t,\alpha}=[arc\,tg\,F(t)]-[arc\,tg\,F(\tau+\varepsilon)]+[arc\,tg\,F(\tau-\varepsilon)]-[arc\,tg\,F(\alpha)].$$

Przyjmijmy $\varepsilon=0$. Wtedy:

$$\lim_{\varepsilon=0}[arc\,tg\,F[\tau+\varepsilon)]=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{\varepsilon=0}[arc\,tg\,F(\tau-\varepsilon)]=+\frac{\pi}{2},$$

$$\text{a } S_{ta}=\lambda_t-\lambda_a=[arc\,tg\,F(t)]-[arc\,tg\,F(a)]+\pi.$$

W razie gdyby w punkcie τ zmieniało się $F(t)$ z $-\infty$ na $+\infty$ mielibyśmy:

$$\lambda_t-\lambda_a=[arc\,tg\,F(t)]-[arc\,tg\,F(a)]-\pi.$$

Gdy t jest tak duże, że w $(a...t)$ przechodzi $F(t)$ w M' punktach z wartości $+\infty$ na $-\infty$ a w N' punktach z wartości $-\infty$ na $+\infty$, to mieć będziemy:

$$(10)\qquad \lambda_t-\lambda_a=[arc\,tg\,F(t)]-[arc\,tg\,F(a)]+(M'-N')\,\pi,$$

a tę różnicę można także będzie przedstawić całką:

$$(11)\qquad \int_a^t \frac{F'(t)\,dt}{1+F(t)^2}.$$

Gdy $\tau_1, \tau_2, ...$ są punkta, na których w $(a...t)$ staje się $F(t)$ nieskończonością, to obliczymy nasamprzód sumę całek o granicach:

$$(a...\tau_1-\varepsilon),\ (\tau_1+\varepsilon...\tau_2-\varepsilon),\ ...,$$

a potem położymy $\varepsilon=0$. Z takiego obliczania wyniknie wzór (10).

Przyjmijmyż, że w całym zakresie $(a...b)$ funkcya $F(t)$ staje się nieskończonością na $(M+N)$ miejscach, a na M z tych miejsc przechodzi z $(+\infty)$ na $(-\infty)$, na N zaś pozostałych tych miejscach przechodzi z $(-\infty)$ na $(+\infty)$, to:

$$\lambda_b-\lambda_a=[arc\,tg\,F(b)]-[arc\,tg\,F(a)]+(M-N)\,\pi.$$

Porównując to ze związkiem (8) i zważając, że tu:

$$[arc\,tg\,F(b)]=[arc\,tg\,F(a)],$$

dostajemy:

$$m=\frac{M-N}{2}.$$

Gdy różnicę $(M-N)$ nazwiemy za Cauchy'm wskaźnikiem funkcyi $f(z)$, na danym konturze, to mamy twierdzenie:

II. *Ilość pierwiastków funkcyi $f(z)$ skończonej wewnątrz konturu (s) równa się połowie wskaźnika tej funkcyi na konturze (s).*

Różnicę $(M'-N')$ w (10) nazywamy wskaźnikiem funkcyi $F(t)$ w punkcie b.

Zastosowanie I. Niech $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, a konturem (s) niech będzie wnętrze koła $|z| = r$. Połóżmy $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, to dostaniemy:

$$F(t) = \frac{r^n a_0 \sin nt + r^{n-1} a_1 \sin(n-1)t + \ldots}{r^n a_0 \cos nt + r^{n-1} a_1 \cos(n-1)t + \ldots}.$$

Przyjmijmy $r = \infty$, to $F(t) = tg\, nt$ i staje się nieskończonością dla:

$$t = s \cdot \frac{\pi}{2n}, \quad s = 1, 3, 5, \ldots, 4n-1,$$

przechodząc każdym razem z wartości $+\infty$ na $-\infty$. Że zaś to się odbywa tu $2n$ razy, więc mamy $M-N = 2n$, a $(M-N)/2 = n$, co jest dowodem zasadniczego twierdzenia algebry.

Zastosowanie II. Niech znowu $f(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$, gdzie $a_0, a_1, \ldots$, są stałe rzeczywiste lub urojone, a część σ rozważanego konturu (s) niech się określa parą wymiernych funkcyj: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, w których $t = (a \ldots b)$. Wtedy w

$$f(z) = f(\varphi(t) + i\psi(t)) = V'(t) + i V_1'(t)$$

są $V'(t)$, $V'_1(t)$ wymiernemi funkcyami o rzeczywistych spółczynnikach, a iloraz $F(t) = V_1' / V$ można zawsze sprowadzić do ilorazu V / V_t dwóch wymiernych całkowitych już funkcyj argumentu t, nie posiadających wspólnego podzielnika.

Niechże:

$$(\alpha) \qquad \int_a^b \frac{F'(t)dt}{1+F(t)^2} = [arc\, tg\, F(b)] - [arc\, tg\, F(a)] + \nu\pi,$$

to ν jest wskaźnikiem funkcyi $F(t)$ w punkcie b.

Równocześnie z $F(t)$ rozważmy funkcyę $[F(t)]^{-1}$ i obliczmy:

$$(\beta) \qquad -\int_a^b \frac{F(t)dt}{1+F(t)^2} = \left[arc\, tg \frac{1}{F(b)}\right] - \left[arc\, tg \frac{1}{F(a)}\right] + \nu'\pi.$$

to ν' jest tu wskaźnikiem funkcyi $1/F(t)$ w punkcie b.

Ponieważ:

$$[arc\, tg\, v] + \left[arc\, tg \frac{1}{v}\right] = \begin{cases} +\frac{\pi}{2}, \text{ gdy } v > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ gdy } v < 0, \end{cases}$$

więc dodając (α), (β) do siebie, dostajemy:

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} \nu + \nu' = 0, \text{ gdy } F(a).F(b) > 0, \\ \nu + \nu' = 1, \text{ gdy } F(a) > 0,\ F(b) < 0, \\ \nu + \nu' = -1, \text{ gdy } F(a) < 0,\ F(b) > 0. \end{cases}$$

W takich związkach pozostają ze sobą wskaźniki funkcyj $F(t)$, $1/F(t)$ w punkcie b danego konturu.

Przyjmijmy, że V jest wyższego stopnia od V_1 i wykonajmy łańcuchowe dzielenie:

$$V = q_1 V_1 - V_2$$
$$V_1 = q_2 V_2 - V_3$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

... kończące się na dzieleniu:

$$V_{n-2} = q_n V_{n-1} - V_n,$$

w którem $V_n = const.$, gdyż V, V_1 były funkcyami względem siebie pierwszemi. Naznaczmy przez (U) wskaźnik funkcyi $U(t)$ w punkcie b i zauważmy sumy wskaźników:

$$(\delta)\qquad \left|\begin{array}{l} \left(\frac{V_1}{V}\right)+\left(\frac{V}{V_1}\right)=\varepsilon_1 \\ \left(\frac{V_2}{V_1}\right)+\left(\frac{V_1}{V_2}\right)=\varepsilon_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)+\left(\frac{V_{n-1}}{V_n}\right)=\varepsilon_n \end{array}\right|$$

(V_2, V_3, V_4... są-to reszty, wynikające z łańcuchowego dzielenia, a b r a n e z p r z e c i w n e m i z n a k a m i).

Mając wzgląd na związki (γ) mamy tu:

$$(\varepsilon)\qquad \left|\begin{array}{lll} \varepsilon_s=0, & \text{gdy } \frac{V_s(a)}{V_{s+1}(a)}, \ \frac{V_s(b)}{V_{s+1}(b)} & \text{są jednakowego znaku,} \\ \varepsilon_s=+1 & \text{,,} \qquad \text{,,} >0, \quad \text{,,} <0, & \\ \varepsilon_s=-1 & \text{,,} \qquad \text{,,} <0, \quad \text{,,} >0. & \end{array}\right.$$

Z drugiej strony z dzielenia $V = Q_1 V_1 - V_2$ dostajemy $V/V_1 = Q_1 - V_2/V_1$, a że Q_1 w całym zakresie $(a...b)$ pozostaje skończone, a w każdym punkcie, w którym V/V_1 przechodzi z $+\infty$ na $-\infty$ przechodzić będzie V_2/V_1 z $-\infty$ na $+\infty$ i odwrotnie, więc być musi:

$$\left(\frac{V}{V_1}\right)+\left(\frac{V_2}{V_1}\right)=0 \quad \text{i analogicznie:}$$
$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)+\left(\frac{V_3}{V_2}\right)=0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\left(\frac{V_{n-2}}{V_{n-1}}\right)+\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)=0.$$

Za dodaniem mamy stąd:

$$\left(\frac{V}{V_1}\right)+\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)+\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\right]+\left[\left(\frac{V_3}{V_2}\right)+\left(\frac{V_2}{V_3}\right)\right]+\dots+\left[\left(\frac{V_{n-2}}{V_{n-1}}\right)+\left(\frac{V_{n-1}}{V_{n-2}}\right)\right]+$$
$$+\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)=0$$

czyli — uwzględniając (δ) —

$$(\zeta)\qquad \left(\frac{V}{V_1}\right)+\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)=-[\varepsilon_2+\varepsilon_3+\dots+\varepsilon_{n-1}].$$

Lecz $\left(\frac{V}{V_1}\right)=-\left(\frac{V_1}{V}\right)+\varepsilon_1$ i analogicznie $\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)=-\left(\frac{V_{n-1}}{V_n}\right)+\varepsilon_n$. Lecz, że $\left(\frac{V_{n-1}}{V_n}\right)=0$, bo $V_n = const.$, więc $\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)=\varepsilon_n$. Uwzględniając to w (ζ) otrzymamy:

$$\left(\frac{V_1}{V}\right)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\dots+\varepsilon_n=\nu,$$

a to jest wskaźnik funkcyi $F(t)$ w punkcie b.

Zauważmy dalej, że warunki (ε) w ten sposób można wyrazić:

Gdy

$V_{s-1}(a),\ V_s(a)$	$V_{s-1}(b),\ V_s(b)$	
d a j ą		
następstwo znaków zmianę znaków	następstwo znaków zmianę znaków	to $\varepsilon_s = 0$
następstwo znaków	zmianę znaków	to $\varepsilon_s = +1$
zmianę znaków	następstwo znaków	to $\varepsilon_s = -1$

$s = 1, 2, 3, \ldots, n.$

Stąd twierdzenie: *Gdy w szeregu funkcyj:*

(I) $$V(a),\ V_1(a),\ V_2(a), \ldots,\ V_n(a)$$

mamy Z_1 zmian znaków, a w szeregu:

(II) $$V(b),\ V_1(b).\ V_2(b), \ldots\ V_n(b)$$

mamy ich Z_2, to wskaźnik v funkcyi $V_1/V = F(t)$ w punkcie b jest: $Z_2 - Z_1$, gdzie ta różnica jest ilością zyskanych zmian znaków przez przejście z wartości $z = a$ do wartości $z = b$.

Funkcye V, V_1, V_2,.., tworzą tak zwany szereg funkcyj Sturma.

Gdy stopień funkcyi V_1 będzie większy od stopnia funkcyi V, to zamiast równania $f(z) = V + V_1 i = 0$ weźmiemy pod uwagę równanie: $i f(z) = - V_1 + Vi = 0$, z którego dostajemy tu $F(t) = - V/V_1$. Pierwsze dwie funkcye, które potem mają przez łańcuchowe dzielenie dać funkcye dalsze, są tutaj $-V_1$, V.

Gdy $f(z) = 0$ jest równaniem wymiernem o spółczynnikach rzeczywistych, a α jest jego jednym z rzeczywistych pierwiastków i powtarza się m razy, to:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - \alpha} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Z tego wnosimy, że gdy punkt z przebiega oś xx' w dodatnim kierunku i przechodzi przez punkt α, to $f'(z)/f(z)$ staje się nieskończonością, zmieniając się z wartości $(-\infty)$ na $(+\infty)$. Iloraz $- f'(z)/f(z)$ przechodzi przeciwnie w punkcie α z wartości $(+\infty)$ na $(-\infty)$. Niech t poczynając od wartości a zwiększa się, zapełniając wartościami zakres $t = (a \ldots b)$, to wskaźnik funkcyi $F(t) = f'(t)/f(t)$ w punkcie b będzie $= Z_2 - Z_1$, gdzie Z_1 jest ilością zmian znaków w szeregu funkcyj:

(I') $$f(a),\ f'(a),\ f_2(a), \ldots$$

a Z_1 ilością zmian znaków w szeregu funkcyj:

(II') $$f(b),\ f'(b),\ f_2(b), \ldots$$

Wskaźnik ten jest < 0. Wskaźnik $(-F(t)) = -(F(t))$ będzie $= Z_1 - Z_2$, a to znaczy:

Gdy a, b są dwie rzeczywiste liczby, a z nich a jest mniejsze od b, to między a i b ma równanie $f(z) = 0$ tyle pierwiastków rzeczywistych, ile zmian znaków tracimy, przechodząc z szeregu funkcyj Sturma dla punktu a do takiegoż szeregu dla punktu b.

ROZDZIAŁ XVI.
Funkcye wielu zmiennych.

122. Linie przerwy w funkcyach wielu zmiennych. Zauważmy całkę określoną:

(1) $$\varphi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{apb}\frac{dz}{z-y},$$

w której y występuje jako zmienny parametr.

Dla wszystkich y leżących poza drogą apb (fig. 68.) — ma ta całka wartość:

(2) $$\varphi(y)=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{b-y}{a-y}.$$

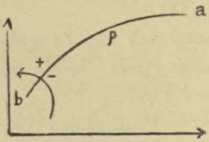


Fig. 68.

Zbadajmy zachowanie się tej funkcyi także przy przejściu punktu y przez drogę apb. Załóżmyż, że okrążając punkt b, (górną granicę całki), w dodatnim kierunku, przechodzimy z odjemnej strony linii apb na dodatnią i zastosujmy tu do całki (1) wszystkie te uwagi, jakie mieliśmy w art. 120, to dostajemy:

(3) $$\overset{+}{\varphi(y)}=\overset{-}{\varphi(y)}-1.$$

To znaczy:

I. *Dla funkcyi* $\varphi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{apb}\frac{dz}{z-y}$ *jest sama droga apb linią przerwy. Gdy przez nią przechodząc opuszczamy jej odjemną stronę, a dostajemy się do dodatniej, zmienia się* $\varphi(y)$ *na* $\varphi(y)-1$; *w przeciwnym razie zmienia się* $\varphi(y)$ *na* $\varphi(y)+1$.

W punkcie b funkcya $\varphi(y)-\frac{1}{2\pi i}\log(b-y)$, a w punkcie a funkcya $\varphi(y)+\frac{1}{2\pi i}\log(a-y)$ będzie skończona, oznaczona i ciągła a więc regularna.

Po tych uwagach przyjmijmy, że mamy funkcyę $f(x_1, x_2, \ldots x_n, y)$ $(n+1)$ zmiennych $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, regularną w pewnym obszarze g, przedstawiającym się jako zbiór zamkniętych obszarów: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, γ, leżących odpowiednio na płaszczyznach zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$. Obszar g mieści się więc całkowicie w zakresie zbieżności pewnego elementu $\mathfrak{P}(x_1-a_1, x_2-a_2, ..., y-b)=\mathfrak{P}_1(y-b)$ danej funkcyi, którą dla krótkości naznaczać będziemy przez $f(x, y)$.

Niech zmienne $x_1, x_2, ..., x_n$ pozostają ciągle wewnątrz obszaru $\Gamma=(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$, a nowa zmienna z niech ma wspólną płaszczyznę ze zmienną y. Zauważmy całkę:

$$\Phi(x, y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{apb}\frac{f(x, z)}{z-y}dz, \tag{4}$$

której droga całkowania apb zawiera się całkowicie w obszarze $(z)=\gamma$, a występująca w niej zmienna y, jako parametr ma się zmieniać bez ograniczenia.

W obszarze $(x)=\Gamma$ będzie funkcya $\Phi(x, y)$ regularną przy najdowolniejszej wartości y, byleby to y na samej drodze apb nie leżało. Aby i ten wypadek zbadać, ograniczmy y i z do obszaru γ i zauważmy funkcyę:

$$\frac{f(x, z)-f(x, y)}{z-y}=F'(x, y, z). \tag{5}$$

Jest ona w obszarze $(x)=\Gamma$, $(y)=\gamma$, $(z)=\gamma$ regularną, gdyż licznik jej $=\mathfrak{P}_1(z-b)-\mathfrak{P}_1(y-b)$ jest — przy najdowolniejszym punkcie b leżącym w γ — zawsze podzielny przez $z-y$, a więc nawet i wtedy, gdy $y=z$, jest $F'(x, y, z)$ skończoną i oznaczoną. Korzystając z relacyi (5) położymy:

$$\Phi(x, y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{apb}F'(x, y, z)dz+\frac{f(x, y)}{2\pi i}\int_{apb}\frac{dz}{z-y}.$$

Ta pierwsza całka da po obliczeniu funkcyę $F(x, y)$ regularną w obszarze (Γ, γ).

Funkcya $f(x, y)$ jest również podług założenia regularną w tym obszarze, a że druga całka z czynnikiem $(2\pi i)^{-1}$ jest $=\varphi(y)$ więc mamy:

$$\Phi(x, y)=F(x\, y)+f(x, y)\,.\,\varphi(y). \tag{6}$$

[Prawa strona — jakkolwiek wchodzące w niej elementa F, f są regularne tylko w obszarze (Γ, γ) — pozostaje jeszcze regularną dla $(x)=\Gamma$, i dla najdowolniejszych y leżących poza apb]. Na samej drodze apb mamy $F(x, \overset{+}{y})=F(x, \overset{-}{y})$, $f(x, \overset{+}{y})=f(x, \overset{-}{y})$, a że $\varphi(y)$ ma własność (4) więc mamy tu:

$$\Phi(x, \overset{+}{y})=\Phi(x, \overset{-}{y})-f(x, y). \tag{7}$$

Funkcye:

$$(8)\qquad \left[\Phi(x\,y)-\frac{f(x,y)}{2\pi i}\,log\,(b-y)\right],\ \left[\Phi(x,y)+\frac{f(x\,y)}{2\pi i}\,log\,(a-y)\right]$$

będą odpowiednio regularne w punktach b, a. Mamy więc twierdzenie:

II. *Funkcya $\Phi(xy)$ określona całką (4) jest — jeżeli $f(x,y)$ jest regularną w obszarze (Γ,γ) — regularną w obszarze Γ i przy dowolnej wartości y, nieleżącej na drodze całkowania. Sama droga całkowania jest w niej linią przerwy.*

123. Tworzenie funkcyi równoważnej z funkcyami o danym obszarze zmiennych. Niech zmienne x_1, x_2,... x_n wypełniają znowu wnętrze zakresu $\Gamma=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$, a zmienne y, z niech posiadają wspólną płaszczyznę. Na tej wspólnej płaszczyźnie zauważmy zwarty obszar S o ograniczeniu σ i podzielmy S — (fig. 69.) dowolnie na wieloboki. W tak utworzonej sieci mamy wierzchołki i boki, ale do boków nie zaliczymy AB, BC,... t. j. te, które leżą na samem już ograniczeniu σ.

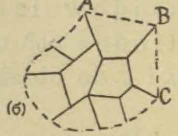


Fig. 69.

Każdy wielobok R_α otoczmy krzywą linią C_α tak, aby się R_α mieścił całkowicie w jej wnętrzu i w obszarze (Γ, C_α) określmy funkcyę $f_\alpha(x,y)$ posiadającą takie własności:

1. f_α ma być jednoznaczną w (Γ, C_α);

2. w tym obszarze nie ma posiadać próżni;

gdy R_β jest wielobokiem ograniczonym od R_α bokiem l — (takie wieloboki nazywać będziemy sąsiadujące) — a w (Γ, C_β) mamy już funkcyę $f_\beta(x,y)$, czyniącą zadość wymogom 1, 2, to różnica $f_\alpha-f_\beta$ ma być regularną w obszarze $(\Gamma, C_\alpha, C_\beta)$ punktów wspólnie do (Γ, C_α) (Γ, C_β) należących. Różnica ta jest więc regularną na całym boku l i na jego punktach końcowych przy dowolnych $(x_1, x_2,... x_n)$ leżących w Γ.

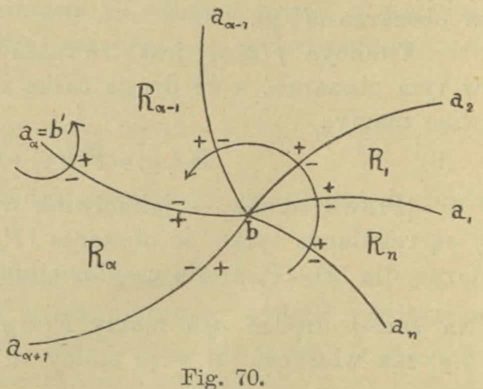


Fig. 70.

Zauważmy wierzchołek b leżący koniecznie wewnątrz S a nie na σ. Przyjmijmy, że w nim się schodzą wieloboki $R_1, R_2, ..., R_n$ (fig. 70.), odgraniczone od siebie bokami $a_1 b$, $a_2 b$, ..., $a_n b$ i że te boki natrafiamy w tym właśnie porządku okrążając wierzchołek b w dodatnim kierunku, a w tym kierunku przekraczamy każdy z tych boków, przechodząc z jego strony odjemnej na dodatnią.

Mając to utwórzmy całki:

$$(1) \qquad J_{\alpha-1,\alpha}(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a_\alpha}^{b}\frac{f_\alpha(x,z)-f_{\alpha-1}(x,z)}{y-z}\,dz, \quad \alpha=1,2,\dots,n,$$

nazywając je całkami należącemi do wierzchołka b, (gdy $\alpha=1$, to $\alpha-1=0$ brać trzeba w znaczeniu n).

Całka $J_{\alpha-1,\alpha}$ ma widocznie własność funkcyi $\Phi(xy)$ określonej w art. poprzedz.; a więc, gdy w $R_{\alpha-1}$ ma wartość $J_{\alpha-1,\alpha}(x\bar{y})$, to w R_α posiędzie wartość:

$$\overset{+}{J}_{\alpha-1,\alpha}(xy)=J_{\alpha-1,\alpha}(x,\bar{y})-(f_\alpha(xy)-f_{\alpha-1}(xy)),$$

a zresztą będzie regularną dla wszelkich y poza drogą $a_\alpha pb$ leżących. Wyraźnie podług (6) art. poprzedz. — mamy:

$$J_{\alpha-1,\alpha}=F_{\alpha-1\,\alpha}(xy)+\varphi_\alpha(y)[f_\alpha-f_{\alpha-1}],$$

gdzie $\varphi_\alpha=\frac{1}{2\pi i}log\frac{b-y}{a_\alpha-y}$, a $F_{\alpha-1,\alpha}$ jest regularną funkcyą w $(\Gamma, C_{\alpha-1}, C_\alpha)$.

Pomieniajmy w całce (1) i znaczki α, $(\alpha-1)$ i granice b, a_α ze sobą i tak przeinaczoną całkę nazwijmy $J_{\alpha,\alpha-1}$, to łatwo wywnioskujemy, że $J_{\alpha,\alpha-1}=J_{\alpha-1,\alpha}$ i że całka $J_{\alpha-1,\alpha}$ napisana w kształcie:

$$J_{\alpha,\alpha-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b}^{a_\alpha}\frac{f_{\alpha-1}-f_\alpha}{y-z}dz,$$

jest całką zupełnie taksamo utworzoną ze względu na wierzchołek $e_\alpha=b'$, jak całka (1) ze względu na wierzchołek b. Wskutek tego można całkę $J_{\alpha-1,\alpha}$ uważać albo za całkę należącą do wierzchołka b, albo za całkę należącą do wierzchołka b'.

Utwórzmy teraz sumę $\Psi(x,y)=\Sigma J_{\alpha-1,\alpha}$ odnoszącą się do wszystkich boków tworzących całą sieć wieloboków, (boki AB, BC, ... nie wliczając). Gdy R_p, R_q są dwoma sąsiadującymi wielobokami, o wspólnym boku l, a R_p uważamy za wielobok leżący po odjemnej stronie, R_q zaś za wielobok leżący po dodatniej stronie tego boku, to przechodząc z R_p do R_q przez l, dostaniemy z $\Psi(xy)$:

$$\Psi(xy)-(f_q-f_p).$$

Dla funkcyi Ψ są zatem wszystkie boki (niewpadające w ograniczenie σ) liniami przerwy. Pytanie zachodzi, jak się taka funkcya Ψ

zachowuje w każdym wierzchołku b, leżącym wewnątrz S? Aby na to odpowiedzieć, podzielmy sumę Ψ na dwie. Pierwsza $=\sum_b J_{\alpha-1,\alpha}$ niech zawiera same całki należące do b, druga wszystkie inne całki. Ta druga suma będzie oczywiście regularną w b. Co się tyczy sumy pierwszej, to mamy:

$$\sum_b J_{\alpha-1,\alpha}=\sum_b F_{\alpha-1,\alpha}(x,y)+\sum_b \varphi_\alpha(y)[f_\alpha-f_{\alpha-1}]=$$

(2)
$$=\sum_b F_{\alpha-1,\alpha}+\frac{1}{2\pi i}.log\,(b-y).\sum_b(f_\alpha-f_{\alpha-1})-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_b(f_\alpha-f_{\alpha-1}).log\,(a_\alpha-y).$$

Lecz $\sum_b(f_\alpha-f_{\alpha-1})=0$, a stąd wynika, że $\Psi(xy)$ jest funkcyą, która w każdym wierzchołku b, leżącym wewnątrz S zachowuje się regularnie. Wokoło wierzchołków $A, B, C, \ldots$, leżących w σ, nie mamy już cyklicznie ułożonych wieloboków, a więc w nich sumy: $\sum_A(f_\alpha-f_{\alpha-1})$, $\sum_B(f_\alpha-f_{\alpha-1})$, ... nie będą zerami, a stąd ostatecznie wynika:

I. *Funkcya $\Psi(xy)=\Sigma J_{\alpha-1,\alpha}$ jest funkcyą regularną wewnątrz S, t. j. w każdym obszarze, którego ograniczenie leży całkowicie w S, a wszystkie boki l, leżące wewnątrz S są jej liniami przerwy.*

We wszystkich wierzchołach b jest $\Psi(x,y)$ regularną.

Funkcyę $\Psi(x,y)$ można pojmować, jako wyrażenie analityczne, które określa wewnątrz różnych wieloboków R_α różne funkcye regularne $\varphi_\alpha(xy)$. Przyjmijmyż, że wychodząc z wieloboku R_p, wkraczamy do sąsiedniego wieloboku R_q, a dla boku l, rozdzielającego je jest R_p ujemną, a R_q dodatnią stroną.

W takim razie na samym boku l mamy albo $\varphi_p=\Psi$, albo $\varphi_q=\varphi_p-(f_q-f_p)$, a stąd wynika:

(3)
$$\varphi_p-\varphi_q=f_q-f_p.$$

W takich związkach pozostają ze sobą dwie sąsiadujące funkcye φ_p, φ_t, określone wewnątrz S przez $\Psi(xy)$.

Zmiana, jakiej doznaje funkcya $\varphi_p(xy)$ w punktach dowolnego boku wieloboku R_p jest skończoną, a po tej zmianie można ją już w sąsiednim wieloboku prowadzić do dalszych punktów. Z tego powodu powiadamy, że funkcya $\varphi_p(xy)$ jest regularną w takich punktach.

Określmy wreszcie wewnątrz S funkcyę $F(x,y)$ w ten sposób: W dowolnym punkcie, leżącym wewnątrz R_p, ma być;

(α)
$$F(x,y)=\varphi_p(x,y)+f_p(x,y).$$

Ta definicya przestaje jednak być jednoznaczną, gdy się punkt y znajdzie na którymkolwiek boku l lub w którymkolwiek wierzchołku tego wieloboku. Gdy bowiem po drugiej stronie boku l mamy wielobok R_q, to dla punktów y leżących na boku l, mamy oprócz definicyi (α) także i definicyę:

$$(\beta) \qquad F(x,y)=\varphi_q(xy)+f_q(xy).$$

Lecz wskutek związków (3) są wyrażenia (α), (β) identyczne, a z nich jedno dość jest zatrzymać.

Z tego odrazu wnosimy, że boki wieloboków nie będą liniami przerwy dla funkcyi $F(xy)$. Gdy w wierzchołku b schodzą się wieloboki R_p, R_q, R_r, R_s, ..., a więc punkt b należy równocześnie do zakresów istnienia funkcyj f_p, f_q, f_r, f_s, ..., to mamy tu:

$$\varphi_p=\Psi, \quad \varphi_q=\varphi_p-(f_q-f_p), \quad \varphi_r=\varphi_q-(f_r-f_q), \quad \varphi_s=\varphi_r-(f_s-f_r), \ldots,$$

a z tych związków wynikną równości:

$$\varphi_p+f_p=\varphi_q+f_q=\varphi_r+f_r=\varphi_s+f_s=\ldots,$$

to zaś wskazuje, że i w punkcie b jest funkcya $F(xy)$ jednoznacznie określoną.

We wnętrzu S mamy w otoczeniu każdego punktu y — (zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozostają ciągle we wnętrzu zakresu Γ) — zdefiniowaną pewną jednoznaczną funkcyę $f_p(xy)$. [Ze względu na funkcyę $F(xy)$ przyjmiemy wskutek identycznych wyrażeń (α) (β), że także i w otoczeniu każdego punktu na bokach l istnieje jedna tylko taka funkcya $f_p(xy)$]. Każdą taką funkcyę, istniejącą w punkcie xy obszaru (Γ, C_p) nazywać będziemy funkcyą należącą do tego punktu. Z równania (α) dostajemy:

$$F(x,y)-f_p(xy)=\varphi_p(xy),$$

gdzie $\varphi_p(xy)$ jest regularną funkcyą w otoczeniu punktu (xy), leżącego w wielobokach, a regularną w samym punkcie (x,y) gdy y leży na boku.

Nazwijmyż takie dwie funkcye, których różnica w punkcie (x,y) jest regularną już-to w otoczeniu tego punktu, już-to w samym tym punkcie, równoważnemi w tym punkcie, to mamy twierdzenie:

II. *We wnętrzu obszaru S można utworzyć funkcyę $F(x,y)$, jednoznaczną i nie posiadającą w tym obszarze ani próżni, ani linij przerwy, a o tej własności, że w otoczeniu każdego punktu leżącego wewnątrz S jest równoważną z funkcyą należącą do tego punktu.*

Obierzmy teraz $f_p(x,y)$ w postaci $\log u_p(x,y)$, gdzie $u_p(x,y)$ ma być regularną funkcyą w (Γ, C_p), a w (Γ, C_p, C_q) — gdy R_p, R_q

sąsiadują z sobą — ma być iloraz u_p / u_q regularny i różny od zera. Z tego wynika, że różnica $log\, u_p - log\, u_q = log\,(u_p / u_q)$ jest teraz regularną. Z tak obranych f_p dostajemy tu:

$$\sum_b (f_\alpha - f_{\alpha-1}) = log\, 1\,, \text{ a więc } = 2k\pi i\,,$$

gdzie k jest dowolną, całkowitą liczbą, a wskutek tego już nie sama funkcya $\sum\limits_b J_{\alpha-1,\alpha}$ — por. (2) — ale dopiero funkcya:

$$\sum_b J_{\alpha-1,\alpha} - \frac{1}{2\pi i} log(b-y).2k\pi i = \sum_b J_{\alpha-1,\alpha} - log(b-y)^k$$

będzie regularną w wierzchołku b.

Gdy teraz utworzymy funkcyę:

$$\overline{\Phi}(x,y) = \Phi(x,y) - \Sigma\, log(b-y)^k,$$

w której suma odnosi się do wszystkich wierzchołków b, leżących wewnątrz S, to taka funkcya ma wszystkie własności takie, jak funkcya Φ, z tą różnicą, że wskutek zawierania się w niej logarytmów, może posiadać dodatek $2m\pi i$ o dowolnem, całkowitem m. Funkcya $\overline{\Phi}$ określać więc będzie w R_p, R_q, ..., różniące się między sobą funkcye $\overline{\varphi}_p$, $\overline{\varphi}_q$, ..., a wreszcie funkcya:

$$\overline{F}(xy) = \overline{\varphi}_p(x,y) + log\, u_p(x,y)$$

będzie w każdym punkcie (x,y) wewnątrz S równoważną z $log\, u_p(xy)$

Połóżmyż:

$$U(xy) = e^{\overline{F}(xy)} = e^{\overline{\varphi}_p(xy)}.u_p(x,y) \text{ *)}$$

to stąd wynika:

$$\frac{U(xy)}{u_p(xy)} = e^{\overline{\varphi}_p(xy)}\,,$$

gdzie tu funkcya $U(xy)$ — wskutek regularnych funkcyj $\overline{\varphi}_p$, $u_p(xy)$ w każdym punkcie wewnątrz obszaru S będzie tam także i sama taką. To znaczy:

III. *We wnętrzu obszaru S można utworzyć funkcyę $U(xy)$, regularną w każdym punkcie tego wnętrza, a o tej własności, że podzielona przez funkcyę $u_p(xy)$, należącą do punktu (xy), daje iloraz regularny w tym punkcie i różny od zera.*

124. Ogólniejsze twierdzenie o równoważności funkcyi z danemi funkcyami. Niech zmienne nieograniczone $x_1, x_2, ..., x_n$ posiadają swoje płaszczyzny (x_1), (x_2), ..., (x_n).

*) Funkcye $\overline{F}$ — podobnie jak F — nie posiada linij przerwy wewnątrz S.

Na tych płaszczyznach zauważmy odpowiednio obszary S_1, S_2, ..., S_n, nazywając ich zbiór obszarem s. Wnętrze każdego z obszarów S_α nakryjmy samemi kołami k_α, k'_α, k''_α, ... w skończonej ilości w ten sposób, aby każde koło z sąsiedniemi koniecznie częściowo się przykrywało.

Zbiór dowolnych n kół: $(k_1^a, k_2^b, ..., k_n^t)$ takich, że żadne dwa nie leżą w jednej i tej samej płaszczyźnie nazwiemy kołem złożonem $\varkappa$. Takich kół $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$. ... różnych między sobą mamy tu tylko skończoną liczbę. Każdemu kołu $\varkappa$ podporządkujemy funkcyę jednoznaczną $f_\varkappa(x_1, x_2, ..., x_n) = f_\varkappa(x)$, istniejącą w tem kole bez próżni.

Dwa takie złożone koła, w których koła na $(n-1)$ obszarach są te same, a koła (k_α, k'_α) w obszarze S_α przykrywają się z sobą częściowo, nazywać będziemy s ą s i a d u j ą c e m i kołami złożonemi w obszarze S_α.

Gdy $\varkappa$, $\varkappa'$ są kołami sąsiadującemi, to różnica $f_\varkappa(x) - f_{\varkappa'}(x)$ ma być w wspólnej części $(\varkappa, \varkappa')$ tych kół regularną. W tej części — tak się i tu wyrażać będziemy — są funkcye $f_\varkappa$, $f_{\varkappa'}$ równoważne.

Mając to, zauważmy w obszarze S_n koło k_n i wszystkie koła z niem sąsiadujące. We wnętrzu koła k_n można będzie narysować wielobok R_n w ten sposób, aby każdy jego bok l_n zawierając się w kole k_n, zawierał się równocześnie w jednem z kół sąsiadujących. Zrobiwszy to w całem wnętrzu obszaru S_n, dostajemy tam sieć wieloboków R_n, ..., a każdy z nich otoczony jest kołem k_n. Boki ograniczające całą sieć już się do niej nie mają liczyć i nie spadają z krzywą σ_n, ograniczającą obszar S_n.

Tak przygotowany obszar S_n połączmy z dowolnemi kołami k_1^a, k_2^b, ..., k^r_{n-2}, k^s_{n-1} innych płaszczyzn w obszar:

(1) $$[k^a_1, k^b_2, ..., k^r_{n-2}, k^s_{n-1}, S_n],$$

to w takim obszarze można będzie utworzyć funkcyę $F_1(x)$, która w dowolnym punkcie tego obszaru równoważną będzie z tą funkcyą $f_\varkappa(x)$, jaka do tego punktu należy. Gdy spółrzędna x_n tego punktu mieści się we wnętrzu koła k_n, a zbiór kół:

$$(k^a_1, k^b_2, ..., k^s_{n-1}, k_n)$$

tworzy złożone koło $\varkappa$, to $f_\varkappa(x)$ jest właśnie tą funkcyą, która istnieje w tem kole.

W obszarze (1) zastąpmy koło k^s_{n-1} kołem $k^{s'}_{n-1}$, które się z pierwszem częściowo nakrywa. W tym nowym obszarze:

(2) $$(k^a_1, k^b_2, ..., k^r_{n-2}, k^{s'}_{n-1}, S_n)$$

można znowu utworzyć funkcyę $F'_1(x)$, która w dowolnym punkcie tego obszaru równoważną się okaże z funkcyą $f_{\varkappa'}(x)$, należącą do tego punktu. I tu znowu, gdy x_n mieści się w kole k_n, a złożone koło $(k^a_1, k^b_2, \ldots, k^r_{n-2}, k^{s'}_{n-1}, k_n)$ nazwiemy $\varkappa'$, to $f_{\varkappa'}$ jest właśnie funkcyą istniejącą w tem kole.

Lecz koła $\varkappa$, $\varkappa'$ są złożone i sąsiadujące w S_{n-1} a więc $f_\varkappa, f_{\varkappa'}$ są w $(\varkappa, \varkappa')$ równoważne. Zatem idzie, że i F_1, F'_1 są tam z sobą równoważne.*) Przez to doszliśmy w obszarze:

$$(3) \qquad (k^a_1, k^b_2, \ldots, k^r_{n-2}, S_{n-1}, S_n)$$

do całego systemu funkcyj $F_1, F'_1, F''_1, \ldots$ takich, że dwie z nich określone w dwóch kołach złożonych sąsiadujących w S_{n-1} są równoważne. Można więc tu znowu w tym obszarze utworzyć funkcyę $F_2(x)$ równoważną w dowolnym punkcie tego obszaru z pewną funkcyą $F_1^{(\nu)}$, należącą właśnie do tego punktu. Niechże x_{n-1}, x_n tego punktu mieszczą się odpowiednio w kołach k_{n-1}, k_n, to $F^{(\nu)}$ jest funkcyą istniejącą w kole: $\varkappa_1 = (k^a_1, k^b_2, \ldots, k^r_{n-2}, k_{n-1}, k_n)$. Zastąpmy w (3) koło k^r_{n-2} kołem $k^{r'}_{n-2}$, które się z kołem pierwszem na S_{n-2} częściowo nakrywa, to dostaniemy nowy obszar:

$$(k^a_1, k^b_2, \ldots, k^{r'}_{n-2}, S_{n-1}, S_n),$$

a w nim da się określić nowa funkcya $F'_2(x)$ o tej własności, że w każdym punkcie tego obszaru będzie równoważną z pewną funkcyą $F_1^{(\nu')}$, która do tego punktu należy. Gdy x_{n-1}, x_n są te same, co przódy, to $F_1^{(\nu')}$ jest funkcyą określoną w kole:

$$\varkappa'_1 = (k^a_1, k^b_2, \ldots, k^{r'}_{n-2}, k_{n-1}, k_n).$$

Koła $\varkappa_1$, $\varkappa'_1$ są znowu złożone i sąsiadujące w S_{n-2}. $F_1^{(\nu)}$, $F_1^{(\nu_1)}$ są więc równoważne w $[\varkappa_1 \varkappa'_1]$, a więc są odpowiednio równoważne z $f_{\varkappa_1}$, $f_{\varkappa'_1}$, a z tego wynika, że F_2 będzie w $[\varkappa_1 \varkappa'_1]$ równoważne z $f_{\varkappa_1}$ a F'_2 z $f_{\varkappa_1'}$.**) Postępując w ten sposób dalej, dojdziemy ostatecznie do takiego rezultatu:

I. *Gdy we wnętrzu obszaru* $s = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ *dane są funkcye* $f_\varkappa(x)$, *istniejące w złożonych kołach* $\varkappa$, *a posiadające tę własność, że*

---

*) Mamy bowiem:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= f_\varkappa + reg.funk. \\ F_1' &= f_{\varkappa'} + reg.funk. \end{aligned}\right\} \text{ a że } f_\varkappa - f_{\varkappa'} \text{ jest również } reg.\ funk., \text{ więc: } F_1 - F_1' = reg.funk.$$

**) Mamy bowiem:

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= F^{(\nu)} + reg.funk. \\ F_2' &= F^{(\nu')} + reg.funk. \end{aligned}\right\}. \quad \text{Lecz że: } \left\{\begin{aligned} F^{(\nu)} &= f_{\varkappa_1} + reg.funk. \\ F^{(\nu')} &= f_{\varkappa_1'} + reg.funk. \end{aligned}\right\},$$

więc z tego wynika:

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= f_{\varkappa_1} + reg.funk. \\ F_2' &= f_{\varkappa_1'} + reg.funk. \end{aligned}\right\}$$

we wspólnej części każdych dwóch sąsiadujących złożonych kół są równoważne, to w tym obszarze można utworzyć funkcyę $F(x_1)$ jednoznaczną, nieposiadającą próżni, a równoważną w każdym dowolnym punkcie wewnątrz obszaru z tą funkcyą $f_\varkappa$, która do tego punktu należy.

Funkcyę $F(x)$ dostaliśmy, idąc za wskazówkami art. poprzedzającego, a podług nich trzeba było poprzód utworzyć wewnątrz s funkcyę $\Phi(x)$ o takich własnościach:

W każdym obszarze S_α mieszczą się w jego kołach wieloboki. Naznaczmyż, gdy $\varkappa$, $\varkappa'$ są dwa złożone koła sąsiadujące w jakimkolwiek S_α, zbiór wieloboków mieszczących się w kołach składających $\varkappa$ przez $r_\varkappa$, a zbiór wieloboków mieszczących się w kołach składających $\varkappa'$ przez $r_{\varkappa'}$, to funkcya $\Phi(x)$ określająca w $r_\varkappa$ funkcyę $\varphi r_\varkappa$, określa w $r_{\varkappa'}$ funkcyę $\varphi r_\varkappa+(f_{\varkappa'}-f_\varkappa)$. Równoważność funkcyi $F(x)$ z funkcyą $f_\varkappa$ w danym punkcie wyraża się związkiem:

$$F(x)-f_\varkappa(x)=\varphi r_\varkappa(x).$$

Załóżmy, że $f_\varkappa(x)=log\, u_\varkappa(x)$, a $log\,(u_\varkappa/u_{\varkappa'})$ jest funkcyą regularną — a więc $u_\varkappa/u_{\varkappa'}$ jest $\neq 0$ — we wspólnych punktach $(\varkappa, \varkappa')$ dwóch kół złożonych sąsiadujących. W tym razie dojdziemy do funkcyi $\overline{F}(x)$ z dodatkiem $2m\pi i$, posiadającej w każdym punkcie wewnątrz s taką własność: $\overline{F}(x)=\overline{\varphi r_\varkappa}(x)+log\, u_\varkappa'x)$. Tworząc dalej: $e^{\overline{F}(x)}=V(x)$ mamy: $V(x)/u_\varkappa(x)=e^{\varphi r_\varkappa(x)}$, a to znaczy:

II. *Gdy wewnątrz obszaru s dane są funkcye $u_\varkappa(x)$ o tej własności, że $u_\varkappa$ jest w kole $\varkappa$ regularną funkcyą, a w $(\varkappa\varkappa')$ jest $u_\varkappa/u_{\varkappa'}$ regularne i różne od zera, to można zawsze wewnątrz s utworzyć taką funkcyę jednoznaczną i regularną, że ona w każdym punkcie wewnątrz s podzielona przez funkcyę $u_\varkappa$ należącą do tego punktu, daje iloraz regularny i różny od zera w tym punkcie.*

Niech k_α, k'_α będą dwa koła przykrywające się częściowo w S_α. Zauważmy — przyjmując dla uproszczenia $n=4$ — dwa koła złożone: $\varkappa=(k_1k_2k_3k_4)$, $\varkappa_4=(k'_1k'_2k'_3k'_4)$ z istniejącemi w nich odpowiednio funkcyami $f_\varkappa, f_{\varkappa_4}$. Oprócz tych kół zauważmy jeszcze koła:

$$\varkappa_1=(k'_1k_2k_3k_4),\ \varkappa_2=(k'_1k'_2k_3k_4),\ \varkappa_3=(k'_1k'_2k'_3k_4),$$

to pary: $\varkappa\varkappa_1$, $\varkappa_1\varkappa_2$, $\varkappa_2\varkappa_3$, $\varkappa_3\varkappa_4$ są sąsiadującemi z sobą odpowiednio w S_1, S_2, S_3, S_4, a gdy w kołach $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ istnieją funkcye $f_{\varkappa_1}$, $f_{\varkappa_2}$, $f_{\varkappa_3}$ i gdy równoważność dwóch funkcyi ψ, χ w pewnym obszarze naznaczymy przez $\psi \backsim \chi$, to mamy:

$$\begin{array}{lll} f_\varkappa \backsim f_{\varkappa_1} & \text{w} & (\varkappa\,\varkappa_1) \\ f_{\varkappa_1} \backsim f_{\varkappa_2} & ״ & (\varkappa_1\varkappa_2) \\ f_{\varkappa_2} \backsim f_{\varkappa_3} & ״ & (\varkappa_2\varkappa_3) \\ f_{\varkappa_3} \backsim f_{\varkappa_4} & ״ & (\varkappa_3\varkappa_4). \end{array}$$

Lecz $(\varkappa\varkappa_2)$ zawiera się w $(\varkappa\varkappa_1)$ i w $(\varkappa_1\varkappa_2)$,

$(\varkappa\varkappa_3)$ " " " $(\varkappa\varkappa_1)$, $(\varkappa_1\varkappa_2)$ i $(\varkappa_2\varkappa_3)$,

$(\varkappa\varkappa_4)$ " " " $(\varkappa\varkappa_1)$, $(\varkappa_1\varkappa_2)$, $(\varkappa_2\varkappa_3)$ i $(\varkappa_3\varkappa_4)$,

a stąd wynika:

$$f_\varkappa \backsim f_{\varkappa_2} \quad \text{w} \quad (\varkappa\varkappa_2),$$
$$f_\varkappa \backsim f_{\varkappa_3} \quad " \quad (\varkappa\varkappa_3),$$
$$f_\varkappa \backsim f_{\varkappa_4} \quad " \quad (\varkappa\varkappa_4), \quad \text{a to znaczy:}$$

Twierdzenia I., II. opierają się na równoważnych funkcyach we wspólnych częściach dwóch złożonych kół, sąsiadujących z sobą w jakikolwiek sposób, t. j. w jednym, kilku lub wszystkich obszarach S_α.

Przyjmijmy teraz, że według jakiegoś prawidła można każdy punkt $(a)=(a_1, a_2, ..., a_n)$ leżący wewnątrz s wziąć za środek pewnego dobrze określonego, złożonego koła $\varkappa_a$, a w niem żadno z kół składowych leżące w S_α, $\alpha=1, 2, ..., n$ nie redukuje się do punktu. Wtedy można wnętrze każdego obszaru S_α przykryć całkowicie skończoną ilością kół $k_\alpha, k'_\alpha, k''_\alpha, ...,$ określonych w przyjęty sposób, tak, że każde koło z wszystkiemi najbliższemi będzie się częściowo nakrywać. Gdy wtedy $\varkappa_a$, $\varkappa_b$ będą kołami sąsiadującemi już w obszerniejszem tego słowa znaczeniu, a podporządkujemy im funkcye f_a, f_b równoważne z sobą w $(\varkappa_a\varkappa_b)$, to już twierdzenia I., II. będą prawdziwe.

Obierzmy wewnątrz koła $\varkappa_a$ dowolny punkt $(a')=(a'_1, a'_2, ..., a'_n)$, to w otoczeniu tego punktu mamy $f_a \backsim f_{a'}$, gdzie $f_{a'}$ jest: albo funkcyą f_a w otoczeniu miejsca (a'), albo funkcyą sąsiadującego koła w tem otoczeniu. Z tego powodu możemy powiedzieć:

Gdy dowolny punkt (a) wewnątrz obszaru s otoczyć można kołem $\varkappa_a$ takiem, że gdy w niem wybierzemy dowolny punkt (a'), a do tych punktów należące funkcye są równoważne, to już twierdzenia I., II. są możliwe.

125. Zasadnicze twierdzenie [Cousin'a] o funkcyach jednoznacznych wielu zmiennych. Poszukiwania dwóch ostatnich art. posłużą do wyprowadzenia zasadniczego twierdzenia o jednoznacznych analitycznych funkcyach wielu zmiennych.

Przyjmijmy, że w obszarze $s=(S_1S_2...S_n)$ istnieje jednoznaczna funkcya analityczna $f(x_1x_2...x_n)$, posiadająca tam z punktów osobliwych same tylko punkta nieistotne, a więc wyrażająca się w otoczeniu dowolnego punktu $(a)=(a_1a_2...a_n)$, leżącego wewnątrz s ilorazem dwóch szeregów potęgowych:

$$(1) \qquad f = \frac{\mathfrak{P}_1(x_1 \ldots | a_1 \ldots)}{\mathfrak{P}_2(x_1 \ldots | a_1 \ldots)}.$$

Szeregi $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ przyjmujemy niewspółmiernymi [art. 53]. Są one równocześnie zbieżne w pewnem otoczeniu miejsca (a), a gdy miejsce $(a') = (a'_1 a'_2 \ldots a'_n)$ leży w tem otoczeniu, to mamy identycznie:

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{P}_1(x_1 \ldots | a_1 \ldots)}{\mathfrak{P}_2(x_1 \ldots | a_1 \ldots)} = \frac{\mathfrak{P}_1(x_1 \ldots | a'_1 \ldots)}{\mathfrak{P}_2(x_1 \ldots | a'_1 \ldots)} \;{}^{*)}$$

w otoczeniu miejsca (a'), a w tem dostatecznie małem otoczeniu — gdy (a') nie jest punktem istotnym — mamy:

$$(A) \qquad \frac{\mathfrak{P}_2(x_1 \ldots | a_1 \ldots)}{\mathfrak{P}_2(x_1 \ldots | a'_1 \ldots)} = reg.funk. \neq 0.$$

Lecz i wtedy, gdy (a') jest miejscem istotnem, musimy mieć własność (A). Inaczej bowiem funkcya f posiadałaby miejsce istotne (a') w dwojaki, różny sposób się objawiające, a to jest niemożliwe. Wskutek identyczności (2) mieć tu także będziemy [po uwzględnieniu (A)] własność:

$$(B) \qquad \frac{\mathfrak{P}_1(x_1 \ldots | a_1 \ldots)}{\mathfrak{P}_1(x_1 \ldots | a'_1 \ldots)} = reg.funk. \neq 0 \text{ w otoczeniu } (a').$$

Relacye (A), (B) wskazują — według uwagi przy końcu ostatniego art. — że tu można utworzyć wewnątrz s regularne funkcye V_1, V_2 w ten sposób się zachowujące:

$$\left.\begin{aligned} (3) \quad & \frac{V_1(x_1 \ldots x_n)}{\mathfrak{P}_1(x_1 \ldots | a_1 \ldots)} = \lambda_1(x_1 \ldots x_n) = reg.funk. \neq 0 \\ (4) \quad & \frac{V_2(x_1 \ldots x_n)}{\mathfrak{P}_2(x_1 \ldots | a_1 \ldots)} = \lambda_2(x_1 \ldots x_n) = reg.funk. \neq 0 \end{aligned}\right| \text{ w dowolnym punkcie } (a) \text{ wewnątrz } s.$$

Uwzględniając (4) w (1), dostajemy:

$$f = \frac{\mathfrak{P}_1(x_1 \ldots | a_1 \ldots).\lambda_2(x_1 \ldots x_n)}{V_2(x_1 \ldots x_n)}, \quad \text{czyli:}$$

$$(5) \qquad f.V_2 = \mathfrak{P}_1(x_1 \ldots | a_1 \ldots).\lambda_2(x_1 \ldots x_n).$$

To podług (3) wskazuje, że $f.V_2$ jest również funkcyą regularną w każdym punkcie wewnątrz s. Z (4) i (5) wynika dalej, że iloczyny:

$$\mathfrak{P}_2(x_1 \ldots | a_1 \ldots).\lambda_2(x_1 \ldots x_n), \quad \mathfrak{P}_1(x_1 \ldots | a_1 \ldots).\lambda_2(x_1 \ldots x_n)$$

są regularne w każdym dowolnym punkcie (a) wewnątrz s; a że

---

*) Dowodu nie można tu opierać na przeprowadzeniach szeregów do dowolnie dalekich punktów, bo w ogólności nie wiemy, czy regularny obszar funkcyi tworzy jednolite, zwarte *continuum*.

już sama funkcya λ_2 jest tam taką, więc przyjąć trzeba, że szeregi $\mathfrak{P}_1(x_1 ... | a_1 ...)$, $\mathfrak{P}_2(x_1 ... | a_1 ...)$ określają, gdy się punkt (a) wewnątrz s porusza, regularne funkcye (dają się z obranego punktu (a) wewnątrz s przeprowadzać do każdego innego punktu (a'), leżącego również wewnątrz s).

W tem ukrywa się ta własność szeregów $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ z dowolnem (a), że, gdy (c) jest punktem szczególnym najbliżej punktu a leżącym już-to szeregu $\mathfrak{P}_1$, już-to szeregu $\mathfrak{P}_2$, to taki punkt c nigdy nie zawiera się we wnętrzu s, ale: albo nieskończenie blisko ograniczenia σ tego obszaru, albo na samem ograniczeniu σ, albo wreszcie zewnątrz obszaru s.

Przyjmijmy, że s jest systemem kół: $R_\alpha = (R_1, R_2, ..., R_n)$ ze środkami $(a) = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Iloraz (1) określający właśnie funkcyę f w otoczeniu środka (a) będzie miał wtedy w liczniku i mianowniku szeregi zbieżne w całem wnętrzu koła R_α.

Mamy więc twierdzenie:

I. *Funkcyę analityczną wielu zmiennych, posiadającą w pewnem złożonem skończonem kole R_a o środku (a) tylko nieistotnie osobliwe punkta, określa iloraz dwóch szeregów danych dla otoczenia punktu (a), a zbieżnych równocześnie wewnątrz koła R_a.*

Przyjmując $R_1 = R_2 = ... = R_n = \infty$, a $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, dochodzimy do zasadniczego twierdzenia:

II. *Funkcya analityczna wielu zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$, posiadająca ze szczególnych punktów, leżących w skończoności tylko same punkta nieistotne, wyraża się ilorazem dwóch bezustannie zbieżnych szeregów o argumentach $x_1, x_2, ..., x_n$.**)

126. Całki podwójne (o dwóch zmiennych urojonych), obliczane po danych drogach. Gdy funkcya $f(x, y)$ dwóch zmiennych urojonych x, y zachowuje się regularnie wewnątrz zamkniętych krzywych c_1, c_2 i na samych tych krzywych, leżących odpowiednio w płaszczyznach $(x), (y)$, a (x,y) jest punktem zawartym w (c_1, c_2), to całkę:

---

*) Sposób wyprowadzania tego twierdzenia opracowany w tekscie podał P. Cousin w rozpr.: *„Sur les fonctions de n variables complexes“*. *Acta math.* T. 19. (1895). str. 1—61.

Poincaré już w inny sposób — [*„Sur les fonctions de deux variables“*. *Acta math.* T. 2. str. 97—113] — doszedł do takiego rezultatu, rozważając funkcye tylko dwu zmiennych, a Weierstrass, który pierwszy poruszył ten problem, zdołał udowodnić to twierdzenie tylko przy szczególnych założeniach.

$$(1)\qquad J=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{c_1}\int\limits_{c_2}\frac{f(\xi\eta)}{(\xi-x)(\eta-y)}\,d\xi\,d\eta,$$

w której według ξ całkuje się po drodze c_1, a według η po drodze c_2 — każdym razem w dodatnim kierunku — można w ten sposób obliczyć:

Według art. 116. mamy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1}\frac{f(\xi\eta)}{\xi-x}\,d\xi=f(x,\eta).$$

Uwzględniając to w J dostajemy:

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_2}\frac{f(x,\eta)}{\eta-y}\,d\eta=f(xy),$$

co jest już wynikiem całkowania (1) i jest analogią z całką Cauchy'ego o jednej zmiennej urojonej. W razie funkcyi o n zmiennych urojonych $x, y, z, \ldots$ mieć będziemy:

$$(2)\qquad f(x,y,z,\ldots)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{c_1}\int\limits_{c_2}\int\limits_{c_3}\cdots\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\ldots)}{(\xi-x)(\eta-y)(\zeta-z)\ldots}\,d\xi.d\eta.d\zeta\ldots$$

Z tego związku wynika przez różniczkowanie:

$$\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\,\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\cdot\frac{\partial^\gamma}{dz^\gamma}\ldots f(x,y,z,\ldots)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{c_1}\int\limits_{c_2}\int\limits_{c_3}\cdots\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\ldots)}{(\xi-x)^\alpha(\eta-y)^\beta(\zeta-z)^\gamma\ldots}\,d\xi.d\eta.d\zeta\ldots$$

a to będzie spółczynnik przy iloczynie $(\xi-x)^\alpha.(\eta-y)^\beta.(\zeta-z)^\gamma\ldots$ w rozwinięciu $\mathfrak{P}(\xi-x,\eta-y,\zeta-z,\ldots)$ funkcyi f w otoczeniu punktu $(x,y,z,\ldots)$.

Ograniczając się odtąd do funkcyj $f(x,y)$ dwóch zmiennych urojonych, połóżmy:

$$(\alpha)\quad x=x_1+x_2 i,\qquad (\beta)\quad y=x_3+x_4 i$$

i przyjmijmy, że:

$$(3)\qquad f(xy)=P(x_1,x_2,x_3,x_4)+Q(x_1,x_2,x_3,x_4)\,i,$$

gdzie P, Q mają już spółczynniki wyłącznie rzeczywiste, a jako składowe części funkcyi już-to urojonego argumentu (α), już-to argumentu (β) spełniają związki:

$$(a)\quad \frac{\partial P}{dx_1}-\frac{\partial Q}{\partial x_2}=0,\qquad (b)\quad \frac{\partial P}{\partial x_2}+\frac{\partial Q}{\partial x_1}=0,$$

$$(c)\quad \frac{\partial P}{\partial x_3}-\frac{\partial Q}{\partial x_4}=0,\qquad (d)\quad \frac{\partial P}{\partial x_4}+\frac{\partial Q}{\partial x_3}=0.$$

Z nich przez różniczkowania i rugowania dojdziemy do takich czterech równań:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial x_2{}^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_4}-\frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_3}+\frac{\partial^2 P}{\partial x_4 \partial x_2}=0, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial x_3{}^2}=0,$$

którym zawsze zadość uczyni część pierwszorzędna funkcyi $f(x, y)$. Mając to zauważmy całkę podwójną określoną:

$$J=\int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1} f(x, y)dx\, dy.$$

Aby jej nadać ustalone pewne znaczenie, trzeba przyjąć jakiś sposób, według którego przy jej obliczaniu posuwa się zmienna x na swojej płaszczyźnie od punktu a_0 do a_1, a zmienna y znowu na swojej płaszczyźnie od punktu b_0 do b_1. Temu zadość uczynimy kładąc:

$$(4) \qquad \begin{matrix} x_1=\varphi_1(\lambda) \\ x_2=\varphi_2(\lambda) \end{matrix}\ ; \qquad \begin{matrix} x_3=\psi_1(\mu) \\ x_4=\psi_2(\mu) \end{matrix}$$

przyczem o tych funkcyach rzeczywistych parametrów λ, μ robimy takie zastrzeżenia: $\varphi_1+\varphi_2 i$ ma być $=a_0$, gdy $\lambda=\lambda_0$, ma być $=a_1$, gdy $\lambda=\lambda_1$, a dla pośrednich wartości λ ma skreślić na płaszczyźnie (x) jednolity ciąg punktów, tworzący krzywę l_1, nieprzecinającą się z sobą. Podobnie $\psi_1+\psi_2 i$ ma być $=b_0$, gdy $\mu=\mu_0$, ma być $=b_1$, gdy $\mu=\mu_1$, a pośredniemi wartościami μ ma znowu na płaszczyźnie (y) określić krzywę l_2 nieprzecinającą się z sobą. Te dwie krzywe (l_1, l_2) dają drogę całkowania s.

Mając już to, napiszmy — nie troszcząc się o granice całkowania —

$$\int\int f(x, y)\, dx.dy=\int\int (P+Qi)(dx_1+dx_2 i)(dx_3+dx_4 i)=$$

$$(A) \qquad =\int\int [Pdx_1 dx_3-Pdx_2 dx_4-Qdx_1 dx_4-Qdx_2 dx_3]+$$

$$+i\int\int [Pdx_1 dx_4+Pdx_2 dx_3+Qdx_1 dx_3-Qdx_2 dx_4].$$

Wprowadzając tu podstawienia (4) dostaniemy:

$$(5) \quad J=\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}[P\frac{\partial x_1}{\partial \lambda}.\frac{\partial x_3}{\partial \mu}-...]\, d\lambda\, d\mu+i\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}[P\frac{\partial x_1}{\partial \lambda}.\frac{\partial x_4}{\partial \mu}+...]\, d\lambda\, d\mu=$$

$$=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}.i.$$

Przyjmujemy oczywiście, że f, P, Q są funkcyami jednoznacznemi, skończonemi i ciągłemi na wszystkich punktach drogi s.

Wszystkie punkta (x_1, x_2) drogi l_1 zmieńmy na $(x_1+\delta x_1,\ x_2+\delta x_2)$, a wszystkie punkta (x_3, x_4) drogi l_2 na $(x_3+\delta x_3, x_4+\delta x_4)$, przyjmując, że przyrosty $\delta x_1, \ldots$ są nieskończenie małe, tak, że już ich iloczyny lub potęgi — (nieskończenie małe drugiego i wyższego rzędu) — opuszczamy w rachunku, a w punktach a_0, a_1, b_0, b_1 są zerami. Przez to drogę całkowania $s=(l_1, l_2)$ zmieniliśmy na drogę $s'=(l'_1, l'_2)$ nieskończenie mało różną od drogi s, a poczynającą się i kończącą w tych samych punktach, co pierwotna droga s.

Przez te zmiany przejdzie P na: $P+\delta P=$

$$=P+\frac{\partial P}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial P}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial P}{\partial x_3}\delta x_3+\frac{\partial P}{\partial x_4}\delta x_4, \tag{6}$$

a $\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial\mu}$ na $\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial\mu}+\delta\left(\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial\mu}\right)=$

$$=\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial\mu}+\frac{\partial\delta x_1}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial\mu}+\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\delta x_3}{\partial\mu}, \quad \text{i t. d.} \tag{7}$$

Z pewnej całki zawartej w $\mathfrak{A}$ t. j. z całki:

$$J_1=\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1} P.\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial\mu}\,d\lambda.d\mu \quad \text{dostaniemy:}$$

$$J_1+\delta J_1=\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}(P+\delta P)\left(\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\,\frac{\partial x_3}{\partial\mu}+\delta\,\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\,\frac{\partial x_3}{\partial\mu}\right)d\lambda.d\mu\,;$$

stąd wynika, że J_1 zmieniło się o:

$$\delta J_1=\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}[P.\delta\,\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\,\frac{\partial x_3}{\partial\mu}+\delta P.\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial\mu}]\,d\lambda.d\mu$$

[opuściliśmy tu nieskończenie małe drugiego i wyższego rzędu]. Uwzględniając tu δP_1 i $\delta\,\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\,\frac{\partial x_3}{\partial\mu}$, jakie mamy w (6) i (7) dostaniemy:

$$\begin{aligned}\delta J_1=&\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1} P\,\frac{d\delta x_1}{d\lambda}\,\frac{dx_3}{d\mu}\,d\lambda.d\mu+\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1} P\,\frac{dx_1}{d\lambda}\,\frac{d\delta x_3}{d\mu}\,d\lambda.d\mu+\\ &+\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial P}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial P}{\partial x_3}\delta x_3+\frac{\partial P}{\partial x_4}\delta x_4\right)\frac{dx_1}{d\lambda}\,\frac{dx_3}{d\mu}\,d\lambda\,d\mu.\end{aligned} \tag{8}$$

Zauważmy, że:

$$\frac{d}{d\lambda}(P.\delta x_1)=\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\lambda}+\frac{\partial P}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\lambda}\right)\delta x_1+P\frac{d\delta x_1}{d\lambda}$$

to pierwszej całce zawartej w (8) będzie można nadać taki kształt:

$$\int_{\mu_0}^{\mu_1}\Big[P.\delta x_1\Big]_{\lambda_0}^{\lambda_1}\frac{dx_3}{d\mu}d\mu-\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\lambda}+\frac{\partial P}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\lambda}\right)\delta x_1.\frac{dx_3}{d\mu}\,d\lambda\,d\mu,$$

ale tu całka pierwsza jest zerem, bo $\delta x_1=0$ gdy $x_1=\lambda_0$, lub $=\lambda_1$. Analogicznie wychodząc z pochodnej $\frac{d}{d\mu}(P\delta x_3)$ i przerobiwszy drugą całkę w (8), dojdziemy wreszcie do:

$$\delta J_1=\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}\left[-\delta x_1\frac{\partial P}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\lambda}\frac{dx_3}{\partial\mu}+\delta x_2\frac{\partial P}{\partial x_2}\frac{dx_1}{d\lambda}\frac{dx_3}{\partial\mu}-\right.$$

$$\left.-\delta x_3\frac{\partial P}{\partial x_4}\frac{dx_1}{d\lambda}\frac{dx_4}{d\mu}+\delta x_4\frac{\partial P}{\partial x_4}\frac{dx_1}{\partial\lambda}\frac{dx_3}{\partial\mu}\right]d\lambda.d\mu. \tag{9}$$

Gdy pozostałe całki zawarte w $\mathfrak{A}$ nazwiemy po porządku: J_2, J_3, J_4, to ich zmiany: δJ_2, δJ_3, δJ_4 dostaniemy z (9) przez takie podstawienia:

$$(\alpha)\begin{pmatrix}Px_1x_2x_3x_4\\-Px_2x_1x_4x_3\end{pmatrix},\quad(\beta)\begin{pmatrix}Px_1x_2x_3x_4\\-Qx_1x_2x_4x_3\end{pmatrix},\quad(\gamma)\begin{pmatrix}Px_1x_2x_3x_4\\-Qx_2x_1x_3x_4\end{pmatrix}.$$

Z uwzględnieniem podstawienia (α) dostaniemy:

$$\delta J_1+\delta J_2=$$

$$=\frac{\partial P}{dx_1}\left(\delta x_1\frac{dx_2}{d\lambda}-\delta x_2\frac{dx_1}{d\lambda}\right)\frac{dx_4}{d\mu}+\frac{\partial P}{dx_2}\left(\delta x_2\frac{dx_1}{\partial\lambda}-\delta x_1\frac{dx_2}{d\lambda}\right)\frac{dx_3}{d\mu}+$$

$$+\frac{\partial P}{dx_3}\left(\delta x_2\frac{dx_4}{d\mu}-\delta x_4\frac{dx_3}{d\mu}\right)\frac{dx_2}{d\lambda}+\frac{\partial P}{dx_4}\left(\delta x_4\frac{dx_3}{d\mu}-\delta x_3\frac{dx_4}{d\mu}\right)\frac{dx_1}{d\lambda}=$$

$$=\frac{\partial P}{dx_1}H_1+\frac{\partial P}{\partial x_2}H_2+\frac{\partial P}{\partial x_3}H_3+\frac{\partial P}{\partial x_4}H_4,$$

gdzie spółczynniki przy $\frac{\partial P}{\partial x_1}$, ... nazwaliśmy odpowiednio H_1...

Za zastosowaniem podstawień (β), (γ) w δJ_1 dojdziemy do

$$\delta J_3+\delta J_4=$$

$$=-\frac{\partial Q}{\partial x_2}H_1+\frac{\partial Q}{\partial x_1}H_2-\frac{\partial Q}{\partial x_4}H_3+\frac{\partial Q}{\partial x_3}H_4;$$

a suma $\delta J_1+\delta J_2+\delta J_3+\delta J_4=\delta\mathfrak{A}$ okaże się — wskutek związków (a), (b), (c), (d) — identycznem zerem. Analogicznie sprawdzimy, że i $\delta\mathfrak{B}=0$, a stąd wnosimy, że całka J nie zmienia swej wartości za zmianą drogi s na s'. Zmieniając dalej s' na s'', s''' i t. d. dojdziemy do wniosków:

I. *Całka określona funkcyi dwóch zmiennych urojonych nie zmienia swej wartości, gdy się jej drogę całkowania zmienia na inną, byleby tylko te zmiany odbywały się w zakresie regularnego zachowania się funkcyi.*

II. *Całka o zamkniętej drodze jest zerem, gdy ta droga zawiera się w zakresie regularnego zachowania się całki.*

III. *Zamkniętą drogę, na której funkcya całki zachowuje się regularnie można — bez różnicy, czy obliczona całka jest $=0$, lub jest $\neq 0$ — zmienić na inną zamkniętą, nie zmieniając wartości całki, byleby tylko przy tej zmianie nie wychodzić z zakresu regularnego zachowania się funkcyi.*

127. Całki podwójne o zamkniętych konturach, których wnętrza są powierzchniami w 4-wymiarowej przestrzeni. Całce podwójnej z funkcyą dwóch zmiennych urojonych można — zamiast dawać im stałe punkta jako granice z określeniem drogi — podsunąć kontur całkowania wynikający z takich warunków:

Zatrzymując oznaczenia (α), (β) — art. poprzedz. — połóżmy:

$$x_\alpha=\varphi_\alpha(u, v), \quad \alpha=1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

gdzie u, v są parametrami rzeczywistymi, które mogą przybierać wartości określone takimi warunkami: Gdy uu, vv są osiami układu prostokątnego na płaszczyźnie, a na tej płaszczyźnie leży krzywa k zamknięta w ten sposób, że do jednej wartości u należą dwie tylko wartości $v=v_u'$, v_u'', a naodwrót do jednej wartości v należą dwie tylko wartości $u=u'_v$, u_v'', to (u, v), jakich użyć można w (1) leżą albo wewnątrz krzywej k, albo na niej samej. Systemy (u, v) leżące na samej krzywej k znaczyć będziemy przez (u_0, v_0). Niech w krzywej k będzie: najmniejsze $u=a_1$, największe $u=a_2$, najmniejsze $v=b_1$, największe $v=b_2$, a w całce:

$$J=\int\int f(x, y)\, dx\, dy, \tag{2}$$

napisawszy ją już w postaci (A) — w art. poprzedz. — odnieśmy jej wszystkie sumujące się elementa do tych tylko $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, które z dopieroco podanych ograniczeń parametrów (u, v) wynikają, to mieć będziemy:

$$
(3)\quad \begin{aligned}
J=&\int_{a_1}^{a_2}\int_{v'_u}^{v_u''}\left[P\frac{\partial(x_1x_3)}{\partial(uv)}-P\frac{\partial(x_2x_4)}{\partial(uv)}-Q\frac{\partial(x_1x_4)}{\partial(uv)}-Q\frac{\partial(x_2x_3)}{\partial(uv)}\right]du\,dv+\\
+i&\int_{a_1}^{a_2}\int_{v_u'}^{v_u''}\left[P\frac{\partial(x_1x_4)}{\partial(uv)}+P\frac{\partial(x_2x_3)}{\partial(uv)}+Q\frac{\partial(x_1x_3)}{\partial(uv)}-Q\frac{\partial(x_2x_4)}{\partial(uv)}\right]du\,dv=\\
&=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}i
\end{aligned}
$$

[w każdej z tych ośmiu całek można całkę $\int_{a_1}^{a_2}\int_{v_u'}^{v_u''}$ zamienić na $\int_{b_1}^{b_2}\int_{u_v'}^{u_v''}$ odwracając równocześnie porządek całkowania].

Dla krótkości mówić będziemy, że obszarem całkowania jest pewna powierzchnia S w czterowymiarowej przestrzeni, ograniczona punktami $\overset{(0)}{x_\alpha}=\varphi_\alpha(u_0, v_0)$, $\alpha=1, 2, 3, 4$.

W tym obszarze zmieńmy każdy punkt;

$$(4)\qquad (x_1x_2x_3x_4) \text{ na } (x_1+\delta x_1,\ x_2+\delta x_2,\ x_3+\delta x_3,\ x_4+\delta x_4),$$

gdzie δx_α są dowolne, nieskończenie małe i różne od zera dodatki, stające się zerami, gdy x_α stają się $=x_\alpha^{(0)}$. Przez to powierzchnia S przechodzi na inną S', ale ta z powierzchnią S ma to samo ograniczenie złożone z punktów $(x^0_1, x^0_2, x^0_3, x^0_4)$*).

Tworzy to analogię z wypadkiem omówionym już w art. poprzedz., gdzie drogę całkowania zmieniono na inną z tym samym punktem początkowym i końcowym. I tu więc trzeba zbadać, jaki wpływ ma ta zmiana na wartość całki.

Wskutek przyrostów δx_α zmieni się P o dodatek:

$$(5)\qquad \delta P=\frac{\partial P}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial P}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial P}{\partial x_3}\delta x_3+\frac{\partial P}{\partial x_4}\delta x_4,$$

a $\dfrac{\partial(x_1\,x_3)}{\partial(u\,v)}=\dfrac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial v}-\dfrac{\partial x_1}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial u}$ zmienia się o:

$$\frac{\partial\delta x_1}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}+\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial\delta x_3}{\partial v}-\frac{\partial\delta x_1}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}-\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial\delta x_3}{\partial u}.$$

Wskutek tego pierwsza całka w $\mathfrak{A}$ dozna dodatku:

Można to osiągnąć przyjmując, że φ_α zawierają oprócz u, v jeszcze jeden parametr ε w ten sposób, że $\varphi_\alpha(u, v, \varepsilon)$ okazują się niezależne od ε, gdy $u=u_0$, $v=v_0$. Zmieniając przyjętą wartość ε nieskończenie mało na inną przechodzimy z powierzchni pierwotnej S do innej S'.

$$(6)\quad \iint P\left[\frac{\partial\delta x_1}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}+\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial\delta x_3}{\partial v}-\frac{\partial\delta x_1}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}-\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial\delta x_3}{\partial u}\right]du\,dv+ \\ +\iint \delta P\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}-\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)du\,dv$$

[granic, gdzie ich do rachunku nie potrzeba, wypisywać nie będziemy].

Zauważmy, że:

$$\frac{\partial}{\partial u}(P\delta x_1)=\frac{\partial P}{\partial u}\delta x_1+P\frac{\partial\delta x_1}{\partial u},$$

to mieć stąd będziemy:

$$\int_{b_1}^{b_2}\int_{u_v'}^{u_v''}P\frac{\partial\delta x_1}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}du\,dv=$$

$$=\int_{b_1}^{b_2}\Big[P\delta x_1\Big]_{u_v''}^{u_v''}\frac{\partial x_3}{\partial v}dv-\int_{b_1}^{b_2}\int_{u_v'}^{u_v''}\frac{\partial P}{\partial u}\delta x_1\frac{\partial x_3}{\partial v}du\,dv.$$

Lecz $\Big[P\delta x_1\Big]_{u_v'}^{u_v''}=0$, gdyż $\delta x_1=0$ na ograniczeniu. Pozostanie więc tylko:

$$-\int_{b_1}^{b_2}\int_{u_v'}^{u_v''}\frac{\partial P}{\partial u}\delta x_1\frac{\partial x_3}{\partial v}du\,dv=-\int_{a_1}^{a_2}\int_{v_u'}^{v_u''}\frac{\partial P}{\partial u}\delta x_1\frac{\partial x_3}{\partial v}du\,dv.$$

Zastosujmyż to do dalszych trzech całek zawartych w (6), w ostatniej całce w (6) uwzględnijmy (5) i zauważmy, że:

$$\frac{\partial P}{\partial u}=\frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u}+\ldots,\quad \frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial P}{dx_1}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\ldots;$$

to ostatecznie po wszystkich skróceniach i ściąganiach dostaniemy:

$$\delta\iint P\frac{\partial(x_1x_3)}{\partial(u\,v)}du\,dv=$$

$$(a)\quad =\iint\frac{\partial P}{\partial x_2}\left[\delta x_1\frac{\partial(x_3x_2)}{\partial(uv)}+\delta x_3\frac{\partial(x_2x_1)}{\partial(uv)}+\delta x_2\frac{\partial(x_1x_3)}{\partial(uv)}\right]du\,.\,dv+ \\ +\iint\frac{\partial P}{\partial x_4}\left[\delta x_1\frac{\partial(x_3x_4)}{\partial(uv)}+\delta x_3\frac{\partial(x_4x_1)}{\partial(uv)}+\delta x_4\frac{\partial(x_1x_3)}{\partial(uv)}\right]du\,dv.$$

Po podstawieniu $\begin{pmatrix} P\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4\\ -P\,x_2\,x_1\,x_4\,x_3\end{pmatrix}$ mieć będziemy:

$$\delta\iint P\frac{\partial(x_2x_4)}{\partial(u\,v)}du\,dv=$$

$$(b) \quad \begin{aligned} &= -\iint \frac{\partial P}{\partial x_1}\left[\delta x_2 \frac{\partial(x_4 x_1)}{\partial(uv)} + \delta x_4 \frac{\partial(x_1 x_2)}{\partial(uv)} + \delta x_1 \frac{\partial(x_2 x_4)}{\partial(uv)}\right] du\, dv - \\ &- \iint \frac{\partial P}{\partial x_3}\left[\delta x_2 \frac{\partial(x_4 x_3)}{\partial(uv)} + \delta x_3 \frac{\partial(x_2 x_1)}{\partial(uv)} + \delta x_2 \frac{\partial(x_1 x_3)}{\partial(uv)}\right] du\, dv. \end{aligned}$$

Napiszmyż sumę dodatków (a), (b) w postaci:

$$(a') \qquad \iint \left[-\frac{\partial P}{dx_1} H_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2} H_2 - \frac{\partial P}{\partial x_3} H_3 + \frac{\partial P}{\partial x_4} H_4\right] du\, dv,$$

to dalej przez przedstawienia (β), (γ) art. poprzedzającego zastosowane do (a) dojdziemy do dodatku dwóch dalszych całek w $\mathfrak{A}$. Będzie on postaci:

$$(b') \qquad \iint \left[\frac{\partial Q}{\partial x_2} H_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_1} H_2 + \frac{\partial Q}{\partial x_4} H_4 + \frac{\partial Q}{\partial x_3} H_3\right] du\, dv.$$

Suma dodatków (a') (b') daje $\delta\mathfrak{A}=0$ wskutek związków (a), (b), (c), (d) art. poprzedzającego. Analogicznie okaże się $\delta\mathfrak{B}=0$, a to znaczy:

I. *Całka podwójna o danym, stałym konturze nie zmieni swej wartości, gdy — pozostawiając kontur zawsze ten sam — zmienimy jego wnętrze na inne.*

W najnowszych czasach próbują Picard i Simart *[Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes T. I. Paris 1897]* oparci na pracach swoich Poincaré'go i Betti'ego stworzyć teoryę całek podwójnych z funkcyą z, określoną równaniem algebraicznem: $f(x, y, z) = 0$. Przenoszą więc tu przedewszystkiem pojęcie całek okrężnych, pozostałości i t. p.

Por. w szczególności: Poincaré. *Sur les résidus des intégrales doubles. Acta math.* T. 9. str. 321—399. Picard. *Mémoire sur la th. des f. algébriques de deux variables. J. de l'école N. sup.* T. 5. (S. 4, 1889) str. 135—319.

ROZDZIAŁ XVII.

Całki określone Abla. Ich peryody; prawidło dodawania i odwracanie. Funkcye eliptyczne Jacobi'ego i Weierstrassa.

128. Peryody całek Abla pierwszego i drugiego rodzaju. Niech $f(x, y)=0$ będzie wymiernem równaniem, określającem algebraiczną funkcyę y rodzaju $p=\varrho$. Gdy dla wyobrażenia takiej funkcyi utworzymy powierzchnię Riemanna $\mathfrak{R}$, to każda funkcya wymierna $F(x, y)$ pary (x, y), spełniającej równanie $f=0$, jest jednoznaczną w powierzchni $\mathfrak{R}$ i przybiera na niej dowolną wartość c, skończoną, znikającą, lub nieskończoną na jednakiej ilości miejsc.

Chcąc badać określoną całkę $\int\limits_{x_0y_0}^{x_1y_1} F(xy)dx$, której droga całkowania przedstawia się jako dowolna linia krzywa, nieprzecinająca się z sobą, a dążąca na $\mathfrak{R}$ od punktu (x_0y_0) do (x_1y_1), dość jest, podług art. 81—82., wziąć pod uwagę całki:

$$(1)\qquad J_\alpha=\int\limits_{x_0y_0}^{x_1y_1} H(xy)_\alpha dx,\quad J'_\alpha=\int\limits_{x_0y_0}^{x_1y_1} H'(x,y)_\alpha dx,\quad U=\int\limits_{x_0y_0}^{x_1y_1} H(xy, x'y')dx'.$$
$$\alpha=1, 2, ..., \rho.$$

Naznaczmy dla krótkości punkt (x_0y_0) przez p_0, punkt (x_1, y_1) przez p_1, a drogę $(p_0...p_1)$ przez p_0gp_1, to teraz zbadać trzeba, jaki wpływ na wartość całek (1) ma zmiana tej drogi na inną: (p_0hp_1). Zajmijmy się całkami rodzaju pierwszego. Nie dają one w żadnym punkcie (x, y) powierzchni $\mathfrak{R}$ ani nieskończoności, ani logarytmów, a wskutek tego zmiana wartości każdej całki takiej może pochodzić jedynie z punktów rozgałęzienia. Całkę J_α obliczoną po drodze (p_0gp_1) naznaczmy przez $(p_0gp_1)_\alpha$, a obliczoną po drodze (p_0hp_1) przez $(p_0hp_1)_\alpha$; zamkniętą drogę $(p_0gp_1hp_0)$ nazwijmy l, a całkę J_α obliczoną po niej $(l)_\alpha$, to całka $(l)_\alpha$ będzie zerem, jeżeli koło l jest przywiedlnem, a będzie różną od zera, gdy l nie jest kołem przywiedlnem. Aby $(l)_\alpha$ obliczyć w tym drugim razie, zau-

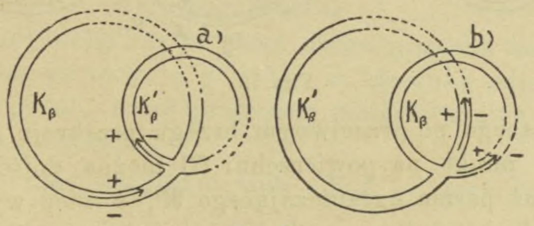


Fig. 71.

ważmy, że — gdy (K_β, K'_β), $\beta=1, 2, ..., \varrho$ jest całkowitym systemem kół nieprzywiedlnych na $\mathfrak{R}$, — to mamy równoważność:

$$(2)\qquad l=p_0gp_1hp_0=-\sum_\beta m'_\beta K_\beta+\sum m_\beta K'_\beta;$$

(art. 100., tw. I.), m_β, m'_β są całkowite liczby, których znaczenie zaraz poznamy.

Zauważmy dwa koła K_β, K'_β [fig. 71., *a)* lub *b)*] i zróbmy wzdłuż nich przekroje. Na przekroju (kole) K_β oznaczmy dowolny brzeg jego, jeden jako dodatni (+) a drugi jako odjemny (—). Na samem kole K_β uznajmy ten kierunek za dodatni, w którym poruszając się, mamy brzeg odjemny po prawej stronie. Na kole K'_β oznaczmy kierunek dodatni w ten sposób: Punkt poruszający się w dowolnym kierunku po dodatnim brzegu koła K_β dostaje się wreszcie na brzeg koła K'_β, a poruszając się w nim dalej oznacza na nim kierunek dodatni. Podług tego kierunku oznaczymy na K'_β brzeg jego dodatni i odjemny podług tej samej reguły, jak na kole K_β. Tak samo z każdą parą kół postąpić trzeba.

Dalej poprowadzimy takie znowu określenia:

Linia przecinająca K_β lub K'_β, przecina te koła w dodatnim kierunku, jeżeli poruszający się po niej punkt przechodzi z ich brzegu odjemnego na brzeg dodatni, a przecina je w kierunku odjemnym w razie przeciwnym.

Mając to weźmy dla uproszczenia $\varrho = p = 3$, z przekrojami: $K_1, K'_1, K_2, K'_2, K_3, K'_4, h_1, h_2$ (fig. 72.) sprowadźmy powierzchnię $\mathfrak{R}$ do $\mathfrak{R}'$ już jednokrotnie zwartej.

Niech droga l ma pierwszy punkt przecięcia się z tymi przekrojami w punkcie γ, leżącym po odjemnej stronie koła K_2. Do

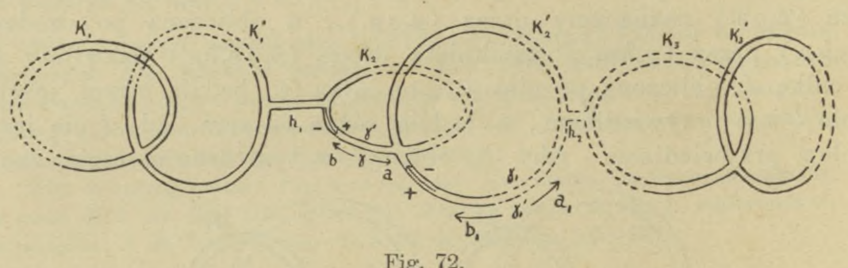


Fig. 72.

punktu γ', leżącego po przeciwnym brzegu przekroju K_2, [γ, γ' spadały w jeden punkt na powierzchni $\mathfrak{R}$] można dojść z punktu γ krocząc wzdłuż pasma ograniczającego $\mathfrak{R}'$, a więc wychodząc z γ albo w kierunku strzałki a, albo w kierunku strzałki b. Wychodząc w kierunku strzałki a i całkując $H(xy)_\alpha$ w tym kierunku (poczynając drogę w punkcie γ, a kończąc w punkcie γ') przekonamy się, że z całek obliczanych po brzegach kół i po h_2 wszystkie się poznoszą, z wyjątkiem całki okrążającej koło K_2 w kierunku odjemnym. Połóżmyż:

$$(a) \qquad \int\limits_{K_2'} H(xy)_\alpha dx = 2\omega'_{\alpha 2}$$

[całka obliczona w dodatnim kierunku po K'_2], to dopieroco omówione przecięcie zmieni $(l)_\alpha$ na $(l)_\alpha - 2\omega'_{\alpha 2}$.

Niech dalej droga l przecina koło K'_2 w dodatnim kierunku w punkcie γ_1. Na $\mathfrak{R}'$ ten punkt rozdziela się na dwa: γ_1, γ'_1, i aby w $\mathfrak{R}'$ dostać się z γ_1 do γ'_1 trzeba $\int H(xy)_\alpha dx$ obliczyć po paśmie poczynającem się w γ_1, a kończącem się w γ'_1. Wychodząc więc tu znowu czy-to w kierunku strzałki a_1, czy strzałki b_1, przekonamy się, że tu z całek obliczonych po brzegach kół i po brzegach przekrojów h_1, h_2 poznoszą się wszystkie z wyjątkiem całki obliczonej w dodatnim kierunku po K_2. Połóżmyż:

$$(b) \qquad \int\limits_{k_2} H(xy)_\alpha dx = 2\omega_{\alpha 2},$$

to to przecięcie zmieni $(l)_\alpha - 2\omega'_{\alpha 2}$ na $(l)_\alpha - 2\omega'_{\alpha 2} + 2\omega_{\alpha 2}$. W razie, gdy odjemne przecięcia się drogi l z kołami K_2, K'_2 bierzemy pod uwagę, trzeba $-2\omega'_{\alpha 2}$, $+2\omega_{\alpha 2}$ zmienić na $+2\omega'_{\alpha 2}$, $-2\omega_{\alpha 2}$.

Wszystkie te wnioski powtórzyć trzeba przy każdej parze kół, których-to par (przyjmujemy ogólnie), jest ϱ, a poszczególne pary znaczymy przez (K_β, K'_β).

Przyjmijmyż, że droga l przecina koło K_β w kierunku dodatnim p'_β razy, a p''_β razy w kierunku odjemnym i połóżmy:

$$p'_\beta - p''_\beta = m_\beta,$$

to te przecięcia zmieniają $(l)_\alpha$ na:

$$(l)_\alpha - 2m_\beta \omega'_{\alpha\beta}.$$

Przyjmijmy dalej, że ta sama droga przecina koło K'_β w kierunku dodatnim q'_β razy, a q''_β razy w kierunku odjemnym, i połóżmy: $q'_\beta - q''_\beta = m'_\beta$, to te przecięcia zmienią znowu $(l)_\alpha - 2m_\beta\omega'_{\alpha\beta}$ na $(l)_\alpha + 2m'_\beta\omega_{\alpha\beta} - 2m_\beta\omega'_{\alpha\beta}$.

Uwzględniając wszystkie koła $(K_\beta K'_\beta)$, $\beta = 1, 2, ..., \varrho$, dostaniemy:

$$(2) \qquad (l)_\alpha + \sum_\beta (2m'_\beta\omega_{\alpha\beta} - 2m_\beta\omega'_{\alpha\beta}) = 0,$$

gdyż cała ta zamknięta droga, znajdując się na jednokrotnie już zwartej powierzchni $\mathfrak{R}'$, jest kołem przywiedlnem.

Liczby m_β, m'_β nazywamy charakterystykami drogi l w kołach K_β, K'_β, $\beta = 1, 2, ..., \varrho$.

Porównując wzór (1) z wzorem (2) poznajemy znaczenie liczb m_β, m'_β we wzorze (1) i dostajemy twierdzenie:

I. *Każde nieprzywiedlne koło l, o znanych jego charakterystykach zmienić można na koło przywiedlne przez wstawienie pewnych oznaczonych ilości kół nieprzywiedlnych K_β, K'_β, $\beta=1,2,\dots,\varrho$.*

Z równania (2), pisząc je w postaci:

$$(l)_\alpha=\sum_\beta(2m_\beta\omega'_{\alpha\beta}-2m'_\beta\omega_{\alpha\beta})=2\omega_\alpha, \tag{3}$$

dochodzimy do wniosku:

II. *Każda całka pierwszego rodzaju, obliczona po pewnem nieprzywiedlnem kole, równa się sumie stosownie uwielokrotnionych całek obliczonych po kołach K_β, K'_β, $\beta=1,2,\dots,\varrho$.*

Zważywszy, że $l=(p_0gp_1)+(p_1hp_0)$, a więc:

$$(l)_\alpha=(p_0gp_1)_\alpha-(p_0hp_1)_\alpha,$$

dostajemy z (3):

$$(p_0hp_1)_\alpha=(p_0gp_1)_\alpha+\sum_\beta(2m'_\beta\omega_{\alpha\beta}-2m_\beta\omega'_{\alpha\beta}),$$

a to znaczy:

III. *Każda zmiana drogi określonej, ale niezamkniętej całki (z pozostawieniem tychsamych granic) zwiększa wartość całki o $-2\omega_\alpha$.*

Gdy w całce:

$$J_\alpha(xy)=\int_{(x_0y_0)}^{(xy)}H(xy)_\alpha dx \tag{A}$$

uważać będziemy górną granicę za miejsce bieżące na powierzchni $\mathfrak{R}'$, a więc $J_\alpha(xy)$ za funkcyę tego miejsca, to taką całkę określić możemy jako funkcyę na powierzchni $\mathfrak{R}'$ skończoną i oznaczoną, a posiadającą na samych kołach K_β, K'_β takie c i ę c i a, że:

$$\begin{aligned} \overset{+}{J_\alpha}(x,y)&=\overset{-}{J_\alpha}(x,y)-2\omega'_{\alpha\beta} && \text{na kole } K_\beta \\ \overset{+}{J_\alpha}(x,y)&=\overset{-}{J_\alpha}(x,y)+2\omega_{\alpha\beta} && \text{,, \quad ,, } K'_\beta. \end{aligned} \tag{4}$$

Analogiczne uwagi dadzą się wypowiedzieć o zamkniętej lub niezamkniętej całce drugiego rodzaju. W niej staje się $H'(xy)_\alpha dx$ nieskończonością d r u g i e g o s t o p n i a jedynie na miejscu $(a_\alpha b_\alpha)$ a z tego miejsca, choćby się je okrążało, nie dostaniemy nagłej zmiany ciągłości. Nazwijmyż:

$$\int_{k_\beta}H'(xy)_\alpha dx=2\eta_{\alpha\beta},\quad \int_{k'_\beta}H'(xy)_\alpha dx=2\eta'_{\alpha\beta},\quad \beta=1,2,\dots,\rho, \tag{c}$$

a $(l)'_\alpha$ niech przedstawia wartość całki rodzaju drugiego, obliczonej po nieprzywiedlnej drodze l, to tu mieć będziemy:

(5) $$(l)'_\alpha = \sum_\beta (2m_\beta \eta'_{\alpha\beta} - 2m'_\beta \eta_{\alpha\beta}) = 2\eta_\alpha,$$

a całka:

(B) $$J'_\alpha(xy) = \int_{(x_0 y_0)}^{(xy)} H'(xy)_\alpha dx$$

jako funkcya miejsca (x, y) będzie na samych kołach K_β, K' miała takie cięcia:

(6) $$\begin{aligned} J'_\alpha(\overset{+}{x}y) &= J'_\alpha(\overset{-}{x}y) - 2\eta'_{\alpha\beta} \quad \text{na kole } K_\beta, \\ J'_\alpha(\overset{+}{x}y) &= J'_\alpha(\overset{-}{x}y) + 2\eta_{\alpha\beta} \quad \text{„ „ } K'_\beta. \end{aligned}$$

D e f i n i c y e. *Całki zamknięte* $(l)_\alpha = 2\omega_\alpha$, $(l)'_\alpha = 2\eta_\alpha$, *których wartości n i e s ą z e r a m i*), nazywamy odpowiednio peryodami* α^{tej} *całki pierwszego lub drugiego rodzaju. Każdy dowolny peryod* $2\omega_\alpha$ *da się za dobraniem stosownych całkowitych spółczynników wyrazić liniowo jednorodnie przez* 2ϱ *całek:* $2\omega_{\alpha 1}, 2\omega_{\alpha 2}, ..., 2\omega_{\alpha\varrho}, 2\omega'_{\alpha 1}, 2\omega'_{\alpha 2}, ..., 2\omega'_{\alpha\varrho}$, *które z tego powodu nazywamy pierwotnymi peryodami całki* $J_\alpha(xy)$. *Analogicznie* $2\eta_{\alpha 1}, 2\eta_{\alpha 2}, ..., 2\eta_{\alpha\varrho}, 2\eta'_{\alpha 1}, 2\eta'_{\alpha 2}, ..., 2\eta'_{\alpha\varrho}$ *są pierwotnymi peryodami całki* $J'_\alpha(xy)$ *rodzaju drugiego.*

Gdy w (A) lub (B) mają $J(xy)$, $J'(xy)$ takie wartości, jakie się otrzymują po drodze $(x_0 y_0, ..., xy)$, nieprzecinającej żadnego z kół K_β, K'_β, to trzeba — uwzględniając najrozmaitsze drogi inne, przecinające już te koła — położyć:

(A') $$\int_{x_0 y_0}^{xy} H(xy)_\alpha dx = J(xy) + 2\omega_\alpha,$$

(B') $$\int_{x_0 y_0}^{xy} H'(xy)_\alpha dx = J'(xy) + 2\eta_\alpha,$$

gdzie $2\omega_\alpha$, $2\eta_\alpha$ są dowolnymi peryodami. W nich spółczynniki m_β, m'_β mogą być najdowolniejszemi liczbami całkowitemi $\gtreqless 0$, bo z dowolnego punktu r tej drogi możemy zboczyć, aby się dostać do punktu s, leżącego na jednym z brzegów koła K_β. Obiegając wtedy m_β razy pasmo złożone z kół i przekrojów $h_1, h_2, ...$, dostajemy dodatek $+2m_\beta\omega'_\beta$ lub $-2m_\beta\omega'_\beta$, a wróciwszy potem z s do r po tej samej drodze dostajemy już w punkcie r wartość całki, zmienioną o $+2m_\beta\omega'_\beta$ lub o $-2m_\beta\omega'_\beta$.

*) O tem będzie mowa w art. 130.

*

129. Związki między peryodami 2ω, 2η. Oprócz zamkniętej nieprzywiedlnej drogi l, dającej peryody:

$$(l)_\alpha = 2\omega_\alpha, \quad (l)'_\alpha = 2\eta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

utwórzmy jeszcze drugą zamkniętą, a również nieprzywiedlną drogę m, dającą:

$$(m)_\alpha = 2\bar{\omega}_\alpha, \quad (m)'_\alpha = 2\bar{\eta}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p$$

i zauważmy związek [art. 80.]:

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}H(xy, x'y') - \frac{d}{dx'}H(x'y', xy) =$$
$$= \sum_\alpha [H(x'y')_\alpha H'(xy)_\alpha - H'(x'y')_\alpha H(xy)_\alpha],$$

w którym $(x'y')$ ograniczamy wyłącznie do punktów drogi l. Pomnóżmy ten związek przez dx' i całkujmy po obydwu stronach po drodze l, to z uwagi, że:

$$\frac{d}{dx'}\int_l H(x'y', xy)dx' = 0$$

mieć będziemy:

$$(2) \qquad \frac{d}{dx}\int_l H(xy, x'y')dx' = \sum_\alpha [2\omega_\alpha H'(xy)_\alpha - 2\eta_\alpha H(xy)_\alpha].$$

Połóżmy:

$$\int_l H(xy, x'y')dx' = \Omega(xy),$$

to z uwagi, że w każdym punkcie $(x'y')$ drogi l mamy:

$$H(xy, x'y') = \frac{1}{x' - x} + \mathfrak{P}(x - x', y - y'),$$

posiadać będzie funkcya $\Omega(x, y)$ linię l jako c i ę c i e objawiające się w ten sposób:

Gdy punkt $(xy) = (\xi\eta)$ leży na samem kole l, to go trzeba uważać za punkt mający dwa znaczenia, a mianowicie: za punkt $(\overset{+}{\xi\eta})$ na dodatnim brzegu koła l i za punkt $(\overset{-}{\xi\eta})$ na odjemnym brzegu koła l. W takim punkcie $(\xi\eta)$ mamy [art. 120]:

$$\Omega(\overset{+}{\xi\eta}) - \Omega(\overset{-}{\xi\eta}) = +2\pi i.$$

Pomnóżmyż obie strony związku (2) przez dx i całkujmy je potem po drodze m w ten sposób, że na niej — poczynając od punktu (x_1y_1) — obieramy po porządku punkta:

$$(x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3), \ldots, (x_\lambda y_\lambda), (\xi_1\eta_1), (x_{\lambda+1}y_{\lambda+1}), \ldots$$
$$\ldots, (x_\mu y_\mu), (\xi_2\eta_2), \ldots, (x_n y_n), (x_1y_1),$$

to jeżeli w $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$, ... przecina droga m drogę l dodatnio, mieć będziemy:

$$\int\limits_m \frac{d}{dx}\Omega(xy)dx=$$

$$=[\Omega(x_2y_2)-\Omega(x_1y_1)]+[\Omega(x_3y_3)-\Omega(x_2y_2)]+\dots+$$

$$+[\Omega(\overset{-}{\xi_1}\eta_1)-\Omega(x_\lambda y_\lambda)]+[\Omega(x_{\lambda+1}y_{\lambda+1})-\Omega(\overset{+}{\xi_1}\eta_1)]+$$

$$+\dots+[\Omega(\overset{-}{\xi_2}\eta_2)-\Omega(x_\mu y_\mu)]+[\Omega(x_{\mu+1}y_{\mu+1})-\Omega(\overset{+}{\xi_2}\eta_2)+$$

$$+\dots\dots\dots\dots$$

$$=\sum_\alpha[2\omega_\alpha 2\overline{\eta}_\alpha-2\eta_\alpha.2\overline{\omega}_\alpha]$$

Lecz wszystkie Ω zawierające (xy) poznoszą się tu tak, że po pierwszej stronie pozostanie tylko:

$$(3)\qquad -[\Omega(\overset{+}{\xi_1}\eta_1)-\Omega(\overset{-}{\xi_1}\eta_1)]-[\Omega(\overset{+}{\xi_2}\eta_2)-\Omega(\overset{-}{\xi_2}\eta_2)]-\dots=-2\nu\pi i,$$

jeżeli m przecinało drogę l razy ν dodatnio, a ani razu odjemnie. Jeżeli przeciwnie z wszystkich tych przecięć mamy ν_1 dodatnich, a ν_2 odjemnych, to wtedy w (3) ν_1 tylko różnic zatrzyma znak —, a w ν_2 pozostałych różnicach trzeba znak — zmienić na +.

W tym więc razie otrzymamy:

$$\int\limits_m \frac{d}{dx}\,\Omega(xy)\,dx=$$

$$=\sum_\alpha[2\omega_\alpha.2\overline{\eta}_\alpha-2\overline{\omega}_\alpha 2\eta_\alpha]=-(\nu_1-\nu_2)2\pi i.$$

Połóżmy $\nu_1-\nu_2=\mu$, to ostatecznie będzie:

$$(4)\qquad \sum_\alpha[\eta_\alpha\overline{\omega}_\alpha-\omega_\alpha\overline{\eta}_\alpha]=\frac{\mu\pi i}{2}.$$

Gdy się l z m wcale nie przecina, jest $\mu=0$.

Odnieśmy to do kół K_β, K_β', z których pierwsze uważamy za drogę l, a drugie za drogę m, a które dają peryody $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$, $2\eta_{\alpha\beta}$, $2\eta'_{\alpha\beta}$, to, ponieważ one mają jeden tylko punkt przecięcia, a w nim K'_β przekracza przez K_β dodatnio, więc tu dostaniemy:

$$(5)\qquad \sum[\eta_{\alpha\beta}\,\omega'_{\alpha\beta}-\eta'_{\alpha\beta}\,\omega_{\alpha\beta}]=+\frac{\pi i}{2}.$$

Gdy β, γ są dwie różne liczby wyjęte z szeregu: $1, 2, \dots, \varrho$, to:

$$(a)\qquad \sum_\alpha[\eta_{\alpha\beta}\,\omega_{\alpha\gamma}-\eta_{\alpha\gamma}\,\omega_{\alpha\beta}]=0 \quad \text{dla kół } K_\beta,\ K_\gamma$$

$$(b)\qquad \sum_\alpha[\eta'_{\alpha\beta}\,\omega'_{\alpha\gamma}-\eta'_{\alpha\gamma}\,\omega'_{\alpha\beta}]=0 \quad ,, \quad ,, \quad K'_\beta,\ K'_\gamma$$

$$(c) \qquad \sum_{\alpha}[\eta_{\alpha\beta}\,\omega'_{\alpha\gamma}-\eta'_{\alpha\beta}\,\omega_{\alpha\beta}]=0 \quad " \quad " \quad K_\beta,\ K'_\gamma$$

$$(d) \qquad \sum_{\alpha}[\eta'_{\alpha\beta}\,\omega_{\alpha\gamma}-\eta_{\alpha\gamma}\,\omega'_{\alpha\gamma}]=0 \quad " \quad " \quad K'_\beta,\ K_\gamma.$$

W takich związkach pozostają ze sobą peryody wszystkich ϱ całek pierwszego i ϱ całek drugiego rodzaju, obliczone po dwóch kołach nieprzywiedlnych.

Gdy p_β, q_β, $\beta=1, 2, \ldots, \varrho$, są liczbami zupełnie nieoznaczonemi, a położymy:

$$(6) \qquad \left.\begin{aligned} P_\alpha &= \sum_{\beta}[2p_\beta\,\eta_{\alpha\beta}+2q_\beta\,\eta'_{\alpha\beta}] \\ Q_\alpha &= \sum_{\beta}[2p_\beta\,\omega_{\alpha\beta}+2q_\beta\,\omega'_{\alpha\beta}] \end{aligned}\right\}, \quad \alpha=1, 2, \ldots, \varrho,$$

to tych 2ϱ równań — jak zaraz się pokaże — będzie można zawsze rozwiązać przy zupełnie dowolnych P_β, Q_β. Z równań (6) dostajemy:

$$\sum_{\alpha}(P_\alpha\,\omega'_{\alpha\gamma}-Q_\alpha\eta'_{\alpha\gamma})=\sum_{\beta}2p_\beta\,.\sum_{\alpha}[\eta_{\alpha\beta}\,\omega'_{\alpha\gamma}-\eta'_{\alpha\gamma}\,\omega_{\alpha\beta}]+$$
$$+\sum_{\beta}2q_\beta\,.\sum_{\alpha}[\eta'_{\alpha\beta}\,\omega'_{\alpha\gamma}-\omega'_{\alpha\beta}\,\eta'_{\alpha\gamma}].$$

Tu po prawej stronie są spółczynniki przy wszystkich $2q_\beta$ zerami (por. (*b*)). Ze spółczynników przy $2p_\beta$, $\beta=1, 2, \ldots, \varrho$, są wszystkie zerami z wyjątkiem spółczynnika przy $2p_\gamma$, który podług związku (5) jest $=+\frac{\pi i}{2}$. Uwzględniając to mamy:

$$(e) \qquad p_\gamma=\frac{1}{\pi i}\sum_{\alpha}[P_\alpha\,\omega'_{\alpha\gamma}-Q_\alpha\,\eta'_{\alpha\gamma}];$$

analogicznie okaże się

$$(e') \qquad q_\gamma=-\frac{1}{\pi i}\sum_{\alpha}[P_\alpha\,\omega_{\alpha\gamma}-Q_\alpha\,\eta_{\alpha\gamma}]$$

$\gamma=1, 2, \ldots, \varrho,$

Gdy więc równania (6) rozwiązać można bez wszelkich zastrzeżeń o P_α, Q_α, to stąd wnosimy, że wyznacznik:

$$(f) \qquad \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12}\cdots & \eta_{1\varrho} & \eta'_{11} & \eta'_{12}\cdots & \eta'_{1\varrho} \\ \eta_{21} & \eta_{22}\cdots & \eta_{2\varrho} & \eta'_{21} & \eta'_{22}\cdots & \eta'_{2\varrho} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{\varrho 1} & \eta_{\varrho 2}\cdots & \eta_{\varrho\varrho} & \eta'_{\varrho 1} & \eta'_{\varrho 2}\cdots & \eta'_{\varrho\varrho} \\ \omega_{11} & \omega_{12}\cdots & \omega_{1\varrho} & \omega'_{11} & \omega'_{12}\cdots & \omega'_{1\varrho} \\ \omega_{21} & \omega_{22}\cdots & \omega_{2\varrho} & \omega'_{21} & \omega'_{22}\cdots & \omega'_{2\varrho} \\ \vdots & & & & & \\ \omega_{\varrho 1} & \omega_{\varrho 2}\cdots & \omega_{\varrho\varrho} & \omega'_{\varrho 1} & \omega'_{\varrho 2}\cdots & \omega'_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} \mp 0.$$

Gdy w (*e*) (*e'*) za γ położymy β, a za α położymy γ i tak wyrażone p_β, q_β wstawimy w (6), dostaniemy związki, które muszą być identycznościami, a uwzględniając to otrzymamy:

$$(a')\qquad \sum_\beta[\eta_{\alpha\beta}\,\omega'_{\gamma\beta}-\eta'_{\alpha\beta}\,\omega_{\gamma\beta}]=\begin{cases}0, & \text{gdy } \gamma\gtrless\alpha,\\ \dfrac{\pi i}{2}, & \ \ \gamma=\alpha;\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(b') & \sum_\beta[\eta_{\alpha\beta}\,\eta'_{\gamma\beta}-\eta'_{\alpha\beta}\,\eta_{\gamma\beta}]=0\\ (c') & \sum_\beta[\omega_{\alpha\beta}\,\omega'_{\gamma\beta}-\omega'_{\alpha\beta}\,\omega_{\gamma\beta}]=0\end{array}\right\}\gamma\gtreqless\alpha;$$

$$(d')\qquad \sum_\beta[\eta_{\gamma\beta}\,\omega'_{\alpha\beta}-\eta'_{\gamma\beta}\,\omega_{\alpha\beta}]=\begin{cases}0, & \text{gdy } \gamma\gtrless\alpha,\\ \dfrac{\pi i}{2}, & \ \ \gamma=\alpha.\end{cases}$$

To są związki, jakie zachodzą między wszystkimi peryodami, obliczonymi po kołach K_β, K'_β, $\beta=1,2,\dots,\varrho$, dwóch całek: α^{tych} i γ^{tych} pierwszego i drugiego rodzaju.

130. Peryody całki Abla rodzaju trzeciego. Funkcya $E(xy)$ Niech $2w_\alpha$, $2w'_\alpha$ przedstawiają wartości całki trzeciego rodzaju, obliczonej po kołach K_α, K'_α. Ponieważ:

$$(1)\qquad H(xy,x'y')dx'=\begin{cases}\dfrac{dx'}{x'-x}+\dots & \text{w otoczeniu punktu } (xy)\\[2mm] -\dfrac{dx'}{x'-a_0}+\dots & \quad ,, \qquad ,, \qquad ,, \quad (a_0b_0),\end{cases}$$

a zresztą wszędzie jest regularne w zmiennych x', y' przeto tylko w otoczeniu tych dwóch miejsc wystąpią po scałkowaniu logarytmy.

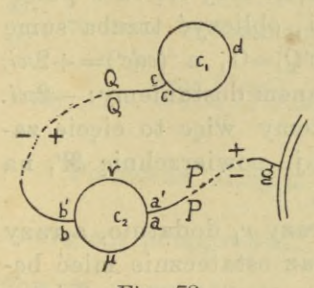


Fig. 73.

Przez okrążanie już-to miejsca $(x'y')$, już-to miejsca (a_0b_0), schodzimy z jednej gałęzi logarytmów do innej. Aby temu przeszkodzić, poprowadzimy z punktu $c_1=(xy)$ cięcie:

$$\pi'=[ga+a\mu b+bc+cdc'+c'b'+b'\nu a'+a'g],$$

okalające równocześnie i punkt $c_1=(xy)$ i punkt $c_2=(a_0b_0)$, nie przecinające się z sobą, a poczynające się i kończące w dowolnym punkcie g pasma π powierzchni już jednokrotnie zwartej $\mathfrak{R}'$. [fig. 73.]

Powierzchnię $\mathfrak{R}'$ już z cięciem po π' nazwijmy: $\mathfrak{R}''$. Przyjmijmy — mając to — że na powierzchni $\mathfrak{R}$ droga całkowania s całki zaczyna się w punkcie $(x'_0y'_0)$, a kończy się w (x', y'). Gdy teraz $\mathfrak{R}$ zmienimy na $\mathfrak{R}''$ — ponieważ już w $\mathfrak{R}'$ przy każdem przecięciu się drogi s z jednem z kół K_α, K'_α obiedz trzeba część pasma π' — trzeba będzie gdy na tej części pasma π' leży punkt g, wstawić tu po zmianie $\mathfrak{R}'$ na $\mathfrak{R}''$ sumę całek:

$$(2)\qquad (ga)+(a\mu b)+(bc)+(cdc')+(c'b')+(b'\nu a')+(a'g).$$

Lecz że tu: $(ga)+(a'g)=0$, $(bc)+(c'b)=0$, a gdy $(cdc')=\pm 2\pi i$, to $(a\mu b)+(b'\nu a')=\mp 2\pi i$, więc suma tych całek $=0$. Zauważymy przytem, że koła $(a\mu bb'\nu a')$, (cdc') można dowolnie zmniejszyć, tak, że tylko cięcie c_1c_2g można brać pod uwagę. Z powodu, że suma (2) okazała się $=0$, możemy — jeżeli s nie przecina wcale linii c_1c_2g, i jeżeli $U(xy|x'_0y'_0, x'y')$ przedstawia wartość całki, wtedy, kiedy droga s także i kół K_α, K'_α wcale nie przecina — położyć:

$$\int_{x'_0y'_0}^{x'y'} H(xy, x'y')dx' = U(xy|x'_0y'_0, x'y') + \sum_\alpha [2m'_\alpha w_\alpha - 2m_\alpha w'_\alpha] = U + 2w,$$

gdzie tu m_α, m'_α mają takie same znaczenie jak m_β, m'_β w art. 128., a droga s już się tak zmieniła, że przecina koła K_α, K'_α, ale jeszcze linii c_1c_2g nie przecina.

Przyjmijmy teraz, że droga s przecina także i linię c_1c_2g. Gdy to przecięcie znajduje się na c_2g w punkcie P, to aby się w tym punkcie dostać z jednego brzegu na drugi tej linii c_2g_2, trzeba utworzyć sumę całek:

$$(Pa) + (a\mu b) + (bc) + (cdc') + (c'b) + (b'\nu a') + (a'P).$$

Lecz ta jest także $=0$, a więc z przejścia drogi s przez c_2g nie przybędzie do $U+2w$ żaden dodatek. Aby teraz wpływ przecięcia się drogi s z c_1c_2 zbadać, oznaczmy naprzód na linii c_1c_2g jej brzeg odjemny i dodatni, i przyjmijmy, że droga s przecina tę linię d o d a t n i o w punkcie Q, leżącym na c_1c_2. Aby się tu w punkcie Q z brzegu odjemnego dostać na dodatni, obliczyć trzeba sumę całek: $\sigma=(Qc)+(cdc')+(c'Q)$, a że: $(Qc)+(c'Q)=0$, a $(cdc')=+2\pi i$, więc mamy: $\sigma=+2\pi i$. Przy przecięciu odjemnem dostaniemy: $-2\pi i$. Ponieważ c_2g nie zmienia wcale całki, możemy więc to cięcie zaniedbać i rozważać powierzchnię $\mathfrak{R}'_{c_1c_2}$, t. j. powierzchnię $\mathfrak{R}'$, na której cięcie c_1c_2 zrobiono.

Przyjmijmyż, że droga s przecina c_1c_2 razy ν_1 dodatnio, a razy ν_2 odjemnie i połóżmy $(\nu_1-\nu_2)=\mu$, to teraz ostatecznie mieć będziemy:

$$\int_{x'_0y'_0}^{x'y'} H(xy, x'y')\,dx' = U(xy\,|\,x'_0y'_0, x'y') + 2w + 2\mu\pi i.$$

Najogólniejszy zatem peryod całki rodzaju trzeciego jest: $2\mu\pi i+2w$; jest on jednorodną liniową funkcyą ze spółczynnikami całkowitymi $2\varrho+1$ pierwotnych peryodów:

$$2\pi i,\quad 2w_\alpha,\quad 2w'_\alpha,\quad \alpha=1, 2, ..., \varrho.$$

Połóżmy znowu:

$$(3)\qquad \int_l H(xy, x'y')dx = \Omega(x, y)$$

i wprowadźmy — jak przódy — oznaczenia:

$$(l)_\alpha = 2\omega_\alpha, \quad (l)'_\alpha = 2\eta_\alpha, \quad (m)_\alpha = 2\omega'_\alpha, \quad (m)'_\alpha = 2\eta'_\alpha.$$

Określmy:

$$E(xy) = e^{\Omega(x,y)}. \tag{4}$$

Po różnych brzegach drogi l mamy: $\overset{+}{\Omega}(xy) - \overset{-}{\Omega}(xy) = 2\pi i$, ale funkcya $E(xy)$ już drogi l nie będzie miała jako cięcie. Funkcya $E(x,y)$ ma przedewszystkiem własność:

$$E(a_0, b_0) = 1, \tag{5}$$

gdyż wskutek $H(a_0 b_0, x'y') = 0$ jest $\Omega(a_0 b_0) = 0$. Z (4) dostajemy:

$$\log E(xy) = \Omega(xy), \tag{6}$$

a z uwagi na (5) trzeba logarytm tak określić, że:

$$\log E(a_0 b_0) = 0, \text{ (a nie } 2r\pi i, \ r \text{ całkowite).}$$

Z (6) — uwzględniając (3) — mamy:

$$\frac{d}{dx} \log E(xy) = \frac{d}{dx} \int_l H(xy, x'y')\, dx'.$$

Stosując tu wzór (1), art. poprzedz., dostajemy:

$$\frac{d}{dx} \log E(xy) = \sum_\alpha [2\omega_\alpha H'(xy)_\alpha - 2\eta_\alpha H(xy)_\alpha]. \tag{7}$$

Zastąpmy tu (x,y) parą $(x_t y_t)$ i pomnóżmy obustronnie przez $\frac{dx_t}{dt}$, to mieć będziemy:

$$\frac{d \log E(x_t y_t)}{dt} = \sum_\alpha [2\omega_\alpha H'(x_t y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt} - 2\eta_\alpha H(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]. \tag{8}$$

Ponieważ $H(x_t y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt}$ wyraża się w otoczeniu każdego miejsca szeregiem potęgowym, a $H'(x_t y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt}$ jest wszędzie szeregiem potęgowym z wyjątkiem miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$, na którem ma rozwinięcie: $-t^{-2} + \mathfrak{P}_\beta(t)$, więc — uwzględniając to — dostajemy z (8):

$$\frac{d \log E(x_t y_t)}{dt} = \mathfrak{P}_1(t), \text{ a więc i}$$

(a) $E(x_t y_t) = \mathfrak{P}(t)$, gdy $(xy) \neq (a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho$, przyczem $\mathfrak{P}(0) \neq 0$.

Gdy w (8) za $(x_t y_t)$ wstawimy $(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t)$, to tylko α^{ty} dodajnik w sumie po prawej stronie okaże się z odjemną potęgą parametru t i to tak, że będzie:

$$\frac{d}{dt} \log E(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t) = -2\omega_\alpha t^{-2} + dod.\ pot. \quad \text{Stąd:}$$

$$\log E(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t) = 2\omega_\alpha t^{-1} + dod.\ pot.$$

$$E(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t) = e^{2\omega_\alpha t^{-1} + dod.\ pot.} \quad \text{czyli:}$$

$$(b) \qquad E(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t) = E.e^{2\omega_\alpha t^{-1}}\{1 + \mathfrak{P}_1(t)\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \varrho,$$

gdzie E jest stałą ilością. Z (a) i (b) wynika, że funkcya $E(xy)$ jest wszędzie skończoną i oznaczoną, z wyjątkiem miejsc:

$$(a_\alpha b_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \dots, \varrho.$$

Gdy drogę l weźmiemy raz w znaczeniu dowolnego koła K_β, a drugi raz w znaczeniu dowolnego koła K'_β, to dostaniemy 2ϱ funkcyj: $\Omega(xy)_\beta$, $\Omega'(xy)_\beta$, $\beta = 1, 2, \dots, \varrho$.

Z nich pierwsze mają odpowiednio cięcia na kołach K_β, drugie takież cięcia odpowiednio na kołach K'_β. Dalej otrzymamy 2ϱ funkcyj: $E(xy)_\beta$, $E'(xy)_\beta$, $\beta = 1, 2, \dots, \varrho$. Z nich dostajemy:

$$(\mathrm{I}) \qquad 2w_\beta = \log E(xy)_\beta, \quad 2w'_\beta = \log E'(xy)_\beta,$$

gdzie te logarytmy trzeba wziąć z takich gałęzi, jakie powstają przez ich przeprowadzenie z punktu $(a_0 b_0)$ do punktu (xy), przy obranej drodze $(a_0 b_0 \dots xy)$. Gdy punkt (xy) już się z swego położenia nie rusza, a droga całkowania się zmienia, (przyczem i granica górna może być ruchomą), to za każdem przekroczeniem w dodatni sposób koła K_β dostaje całka dodatek $-2w'_\beta$, a za każdem takiem przekroczeniem koła K'_β dodatek $2w_\beta$.

Lecz całka sama zawiera w sobie (xy), a jego ruch będzie miał wpływ na całkę, choć się jej granice i droga całkowania wcale nie zmieniają.

Aby to zbadać, zauważmy, że logarytmy funkcyj $E(xy)_\beta$; $E'(xy)_\beta$ zadość uczynią związkom (7), a więc:

$$(9) \qquad \left| \begin{aligned} &\frac{d}{dx} \log E(xy)_\beta = \sum_\alpha [2\omega_{\alpha\beta} H'(xy)_\alpha - 2\eta_{\alpha\beta} H(xy)_\alpha] \\ &\frac{d}{dx} \log E'(xy)_\beta = \sum_\alpha [2\omega'_{\alpha\beta} H'(xy)_\alpha - 2\eta'_{\alpha\beta} H(xy)_\alpha], \end{aligned} \right.$$

$$\beta = 1, 2, \dots, \varrho.$$

Równania te — gdy położymy:

$$2H'(xy)_\alpha = P_\alpha, \quad 2H(xy)_\alpha = Q_\alpha,$$

$$\frac{d}{dx} \log E'(xy)_\beta = \pi i.p_\beta, \quad \frac{d}{dx} \log E(xy)_\beta = -\pi i q_\beta$$

stają się związkami (e), (e'), art. poprzedz., a więc ich rozwiązaniami będą [por. (6), art. poprzedz.]:

$$(10)\quad \begin{cases} H(xy)_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_\beta [2\omega_{\alpha\beta} \frac{d}{dx} \log E'(xy)_\beta - 2\omega'_{\alpha\beta} \frac{d}{dx} \log E(xy)_\beta] \\ H'(xy)_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_\beta [2\eta_{\alpha\beta} \frac{d}{dx} \log E'(xy)_\beta - 2\eta'_{\alpha\beta} \frac{d}{dx} \log E(xy)_\beta], \end{cases}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \rho.$$

Całkując tu od $(a_0 b_0)$ do (xy), dostajemy całki pierwszego i drugiego rodzaju w takim kształcie:

$$(11)\quad \begin{cases} J(xy, a_0 b_0)_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_\beta [2\omega_{\alpha\beta} \log E'(xy)_\beta - 2\omega'_{\alpha\beta} \log E(xy)_\beta] \\ J'(xy, a_0 b_0)_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_\beta [2\eta_{\alpha\beta} \log E'(xy)_\beta - 2\eta'_{\alpha\beta} \log E(xy)_\beta] \end{cases}$$

gdyż $E(a_0 b_0)_\beta = E'(a_0 b_0)_\beta = 1$. W tych formach zawarte są już i wszystkie zmiany całek o ich peryody, gdy bowiem funkcye:

$$\log E(xy)_\beta = \Omega(xy)_\beta, \quad \log E'(xy)_\beta = \Omega'(xy)_\beta$$

są pierwotnie z tych brane gałęzi, na których mamy:

$$\Omega(a_0 b_0)_\beta = \Omega'(a_0 b_0)_\beta = 1,$$

to potem zmienić je trzeba o $\pm 2\pi i$, gdy droga $(a_0 b_0 \ldots xy)$ przecina już-to koło K_β już-to koło K'_β w dodatnim lub odjemnym kierunku.

Z (10) — jeżeli drogą całkowania jest $(x_0 y_0 \ldots xy)$ — dostaniemy:

$$(12)\quad \begin{cases} J(xy)_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_\beta \left[2\omega_{\alpha\beta} \log \frac{E'(xy)_\beta}{E(x_0 y_0)_\beta} - 2\omega'_{\alpha\beta} \log \frac{E(xy)_\beta}{E(x_0 y_0)_\beta}\right], \\ J'(xy)_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_\beta \left[2\eta_{\alpha\beta} \log \frac{E'(xy)_\beta}{E(x_0 y_0)_\beta} - 2\eta'_{\alpha\beta} \log \frac{E(xy)_\beta}{E(x_0 y_0)_\beta}\right], \end{cases}$$

a i stąd wynikają peryody, powstające z przecinania się drogi $(x_0 y_0 \ldots xy)$ z kołami K_β, K'_β.

Wstawmy wreszcie w związek:

$$\frac{d}{dx} \int_{x'_0 y'_0}^{x'y'} H(xy, x'y') dx' = \frac{d}{dx} U(xy \mid x'_0 y'_0, x'y') =$$

$$= H(x'y', xy) - H(x'_0 y'_0, xy) + \sum_\alpha [H'(xy)_\alpha J(x'y')_\alpha - H(xy)_\alpha J'(x'y')_\alpha]$$

za $J(x'y')_\alpha$, $J'(x'y')_\alpha$ wyrażenia (12), to mieć będziemy:

$$\frac{d}{dx} U(xy \mid x'_0 y'_0, x'y') = H(x'y', xy) - H(x'_0 y'_0, xy) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_\alpha \sum_\beta \left[\log \frac{E'(x'y')_\beta}{E'(x'_0 y'_0)_\beta} (2\omega_{\alpha\beta} H'(xy)_\alpha - 2\eta_{\alpha\beta} . H(xy)_\alpha) - \right.$$

$$\left. - \log \frac{E(x'y')_\beta}{E(x'_0 y'_0)_\beta} (2\omega'_{\alpha\beta} H'(xy)_\alpha - 2\eta'_{\alpha\beta} H(xy)_\alpha)\right.$$

Uwzględniając tu związki (9), położymy:

$$\frac{d}{dx}U(xy|x'_0y'_0,x'y')=H(x'y',xy)-H(x'_0y'_0,xy)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_\beta\left[\log\frac{E'(x'y')_\beta}{E'(x'_0y'_0)_\beta}\frac{d}{dx}\log E(xy)_\beta-\log\frac{E(x'y')_\beta}{E(x'_0y'_0)_\beta}\frac{d}{dx}\log E'(xy)_\beta\right]$$

a mnożąc po obydwu stronach przez dx i całkując od (a_0b_0) do (xy), dostaniemy — ponieważ:

$$\int_{a_0b_0}^{xy}\frac{d}{dx}H(xy,x'y')dx=H(xy,x'y')-H(a_0b_0,x'y')=H(xy,x'y')\ -$$

taką formę:

$$(13)\quad\left|\begin{aligned}&U(xy|x'_0y'_0,x'y')=\int_{a_0b_0}^{xy}[H(x'y',xy)-H(x'_0y'_0,xy)]dx+\\&+\frac{1}{2\pi i}\sum_\beta\left[\log\frac{E'(x'y')_\beta}{E'(x'_0y'_0)_\beta}\log E(xy)_\beta-\log\frac{E(x'y')_\beta}{E(x'_0y'_0)_\beta}\log E'(xy)_\beta\right].\end{aligned}\right.$$

O drodze $\lambda=(a_0b_0...xy)$ załóżmy, że ona żadnego z kół K_β, K'_β nie przecina. Wtedy całka $\int_{a_0b_0}^{xy}$ po prawej stronie może się zamieniać tylko o wielokrotność $2\pi i$, co zależy od przecinania się drogi λ z drogą $\lambda'=(x'_0y'_0...x'y')$. Gdy założymy, że droga λ' ma przecinać koła K_β, K'_β, to z przecięcia się jej z kołem K_β dostaniemy peryod $-\log E'(xy)_\beta$ a z przecięcia się z kołem K'_β, peryod $+\log E(xy)_\beta$, jak to już przódy mieliśmy. [W sumie Σ trzeba bowiem w pierwszym razie $\log E(xy)_\beta$, a w drugim $\log E'(xy)_\beta$ zwiększyć o $2\pi i$].

Połóżmy:

$$(14)\quad\int_{a_0b_0}^{xy}H(x'y',xy)-H(x'_0y'_0,xy)]\,dx=J(xy|x'y',x'_0y'_0)$$

(jestto oczywiście znowu pewna całka rodzaju trzeciego), to z (13) mamy:

$$J(xy|x'y',x'_0y'_0)=\int_{x_0y_0}^{x'y'}H(xy,x'y')dx-\frac{1}{2\pi i}\sum_\beta.$$

[a tu sumują się takiesame wyrażenia, jak w (13)].

Gdy teraz zakładamy, że droga λ' nie przecina wcale kół K_β, K'_β, to znowu całka po prawej stronie może tu tylko zmieniać swą wartość o wielokrotności $2\pi i$. Przeciwnie z przecinania się drogi λ z kołami K_β, K'_β, zmieni się J na:

$$J - log \frac{E'(x'y')_\beta}{E'(x'_0y'_0)_\beta} = J - A_\beta \text{ przy przekroczeniu koła } K_\beta, \text{ a na:}$$

$$J + log \frac{E(x'y')_\beta}{E(x'_0y'_0)_\beta} = J - A'_\beta \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad K'_\beta.$$

Funkcya $J(xy|x'y', x'_0y'_0)$ ma więc cięcia, określające się równaniem:

(II) $$\overset{+}{J} = \overset{-}{J} - A_\beta \text{ na kole } K_\beta, \text{ a równaniem:}$$
$$\overset{+}{J} = \overset{-}{J} + A'_\beta \quad \text{„} \quad \text{„} \quad K'_\beta.$$

Mając peryody całek 1^{go}, 2^{go} i 3^{go} rodzaju, łatwo już będzie obliczyć peryod na dowolnem zamkniętem kole każdej ogólnej całki Abla, przedstawiając funkcyę całki przez funkcye H.

Przyjmijmy, że wszelkie peryody takiej całki:

$$U = \int_{x_1y_1}^{xy} F(xy)dx$$

są zerami. W takim razie nie może U posiadać i peryodu $2\pi i$, a to pociągnąć musi za sobą tę własność funkcyi $F(xy)$, że ona na żadnem miejscu nie będzie miała w swem rozwinięciu wyrazu postaci Ct^{-1}. Całka U nie mając według założenia i innych peryodów, ma zatem charakter funkcyi wymiernej pary (x, y), a jako taka jest wprost taką funkcyą. Stąd twierdzenie:

I. *Każda dowolna całka Abla, nie posiadająca peryodów, redukuje się do wymiernej funkcyi pary* (xy).

Odnosząc te uwagi do całek pierwszego i drugiego rodzaju, dochodzimy do wniosku:

II. *Ani peryody* $2\omega_{\alpha\beta}, 2\omega'_{\alpha\beta}$, *ani peryody* $2\eta_{\alpha\beta}, 2\eta'_{\alpha\beta}$, $\beta = 1, 2, ..., \varrho$, *nie mogą być wszystkie równocześnie zerami.*

131. Peryody całek eliptycznych rodzaju pierwszego i drugiego. Według art. 87. — Pd. 6. — mamy dla obrazu eliptycznego:

$$y^2 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3) = 4s^3 - g_2s - g_3 = S;\ e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

funkcye H, H' w takich postaciach:

(1) $$H(s, y) = \frac{1}{\sqrt{S}},\quad H'(s, y) = \frac{s}{\sqrt{S}},$$

Niech e_1e_2, $e_3\infty$ będą liniami przejścia na powierzchni $\mathfrak{R}$. Gdy koło K wybierzemy tak, że zamyka w sobie punkta e_2, e_3, a punkt e_1 jest już zewnątrz niego (fig. 74., str. nast.), to K' może być kołem (zamkniętą linią), które mieści w sobie punkta e_1, e_2, a zewnątrz którego leży punkt e_3. Z punktów A, B tylko punkt A jest wtedy punktem przecięcia się tych kół.

Gdy na K uznamy za kierunek dodatni kierunek wskazany strzałką α, to na K' mieć będziemy kierunek dodatni taki, jak go strzałka β wskazuje,

Połóżmy, aby obliczyć peryod:

$$(2)\qquad 2\omega = \int\limits_K \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

$$(a)\qquad s = \frac{e_2+e_3}{2} + \frac{e_2-e_3}{2}\,\frac{\xi+\xi^{-1}}{2}, \text{ a więc:}$$

$$(b)\qquad s-e_1 = \frac{e_2+e_3}{2} - e_1 + \frac{e_2-e_3}{2}\,\frac{\xi+\xi^{-1}}{2},$$

$$(c)\qquad s-e_2 = \frac{e_3-e_2}{2}\left(1-\frac{\xi+\xi^{-1}}{2}\right),$$

$$(d)\qquad s-e_3 = -\frac{e_3-e_2}{2}\left(1+\frac{\xi+\xi^{-1}}{2}\right)$$

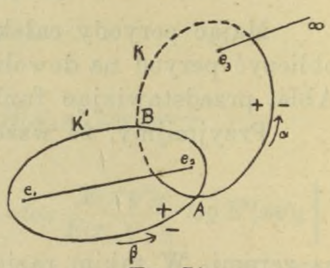


Fig. 74.

i zapytajmy, jak się punkt s w płaszczyźnie (s) porusza, jeżeli ξ na swojej płaszczyźnie (ξ) opasuje koło:

$$(e)\qquad \xi = r.e^{\varphi i}, \quad \varphi = (0...2\pi).$$

Z równań (c), (d) mamy:

$$(f)\qquad |s-e_2| + |s-e_3| = \left|\frac{e_3-e_2}{4}\right|\Big\{|2-(\xi+\xi^{-1})| + |2+(\xi+\xi^{-1})|\Big\}.$$

Uwzględniając (e) dostaniemy:

$$|2-(\xi+\xi^{-1})| = \sqrt{[2-(r+r^{-1})\cos\varphi]^2 + (r-r^{-1})^2\sin^2\varphi}$$
$$= \sqrt{4+r^2+r^{-2}+2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-4(r+r^{-1})\cos\varphi}.$$

Gdy położymy $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$, a potem zauważymy, że:

$$(2+r^2+r^{-2}) = (r+r^{-1})^2,$$

mieć będziemy:

$$\sqrt{(r+r^{-1})^2+4\cos^2\varphi-4(r+r^{-1})\cos\varphi} = (r+r^{-1})-2\cos\varphi.$$

Analogicznie okaże się:

$$|2+(\xi+\xi^{-1})| = (r+r^{-1})+2\cos\varphi,$$

a uwzględniając to w (f), dojdziemy do równania:

$$|s-e_2| + |s-e_3| = 2.\left|\frac{e_3-e_2}{4}\right|(r+r^{-1}).$$

Ono wskazuje, że gdy ξ zakreśla na swojej płaszczyźnie koło (e), to s na swej płaszczyźnie porusza się po elipsie, która ma ogniska w punktach e_2, e_3, a oś główną:

$$a = \left|\frac{e_3 - e_2}{4}\right|(r + r^{-1});$$

(widocznie $r+r^{-1}$ jest >1 przy każdem $r \gtrless 1$).

Odległość środka $\left(\frac{e_2+e_3}{2}\right)$ od ogniska jest $\left|\frac{e_3-e_2}{2}\right|$, a stąd, gdy b ma być osią poboczną tej elipsy, dostajemy:

$$\frac{|e_3-e_2|^2}{4^2}[(r+r^{-1})^2 - 4] = b^2, \text{ czyli: } b = \left|\frac{e_3-e_2}{4}\right|(r - r^{-1}).$$

Ponieważ b jest liczbą bezwzględną, więc trzeba założyć, że $r - r^{-1} > 0$ jest, a stąd wynika: $r > 1$, co odtąd w dalszym ciągu zatrzymamy.

Pytanie zachodzi, w jakim kierunku obiega punkt s elipsę, gdy φ zmienia się od 0 do 2π. Aby to rozstrzygnąć, połóżmy: $\frac{e_2+e_3}{2} = m$ i przyjmijmy, że z równania (a), gdy już w niem (e) uwzględniamy, dostajemy:

$$s - m = \frac{e_2-e_3}{2}\frac{r+r^{-1}}{2} = R_1 e^{\psi i}, \quad \text{gdy } \varphi = 0, \text{ to dalej:}$$

$$= \frac{e_2-e_3}{2}(r - r^{-1})i = R_2 e^{\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)i} \quad \text{,,} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$= -\frac{e_2-e_3}{2}(r + r^{-1}) = R_1 e^{(\psi+\pi)i} \quad \text{,,} \quad \varphi = \pi,$$

$$= -\frac{e_2-e_3}{2}(r - r^{-1}) = R_2 e^{(\psi + \frac{3}{2}\pi)i} \quad \text{,,} \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

Z tego widzimy, że równocześnie z wzrostem kąta φ porusza się promień, poczynający się w środku m elipsy, w ten sposób, że się jego kąt, jaki tworzy z xx', statecznie zwiększa. Punkt s na obwodzie elipsy porusza się więc tak, że krocząc z nim mamy wnętrze elipsy po lewej ręce. Właśnie taki ruch wskazuje i strzałka α na kole K.

Elipsę, jaką dopieroco utworzyliśmy, możemy wziąć za koło K i po niej dokonać całkowania (1), wychodząc z punktu A, w którym obydwa koła K, K' przecinają się na ćwiartce przedstawiającej: $(+y)$. To całkowanie w dodatnim kierunku ułatwimy sobie, przechodząc do zmiennej ξ za pomocą podstawień $(a), \ldots, (e)$.

Z nich mamy:

$$\sqrt{s-e_2 . s-e_3} = \frac{e_2-e_3}{2}\frac{\xi - \xi^{-1}}{2}, \quad ds = \frac{\xi-\xi^{-1}}{2\xi}\cdot\frac{e_2-e_3}{2}d\xi, \quad \text{a więc:}$$

$$(3) \qquad \frac{ds}{\sqrt{s-e_2 . s-e_3}} = \frac{d\xi}{\xi}.$$

Dalej połóżmy:

$$s-e_1=\frac{e_2+e_3}{2}-e_1+\frac{e_2-e_3}{2}\,\frac{\xi+\xi^{-1}}{2}=(g+h\xi)(g+h\xi^{-1})=$$

$$=g^2+h^2+gh(\xi+\xi^{-1}),$$

to stąd na określenie g, h wynikają takie równania:

$$g^2+h^2=\frac{e_2+e_3}{2}-e_1$$

$$2gh=\frac{e_2-e_3}{2}.$$ Z nich mamy:

$$g+h=\sqrt{e_2-e_1},\quad g-h=\sqrt{e_3-e_1},$$ a stąd znowu wynika:

$$g=\frac{\sqrt{e_2-e_1}+\sqrt{e_3-e_1}}{2},\quad h=\frac{\sqrt{e_2-e_1}-\sqrt{e_3-e_1}}{2}.$$

Pierwiastki wybieramy tu z tem zastrzeżeniem, aby $|h/g|<1$. Mając to, dostajemy teraz:

(4) $$s-e_1=g^2\left(1+\frac{h}{g}\xi\right)\left(1+\frac{h}{g}\xi^{-1}\right).$$

Uwzględnijmy (3) i (4) w (2), to mieć będziemy:

(5) $$2\omega=\frac{1}{g}\int\limits_K\frac{d\xi}{\xi}\left(1+\frac{h}{g}\xi\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{h}{g}\xi^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ponieważ $r>1$, więc i $|\xi|>1$. Obierzmy jednak $|\xi|$ tak mało różne ($>$) od jedności, że tylko jest $\left|\frac{h}{g}\xi^{-1}\right|<1$, ale także $\left|\frac{h}{g}\xi\right|<1$, to pierwiastki zawarte w (5) dadzą się rozwinąć na szeregi zbieżne:

$$1-\frac{1}{2}\frac{h\xi}{g}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{h\xi}{g}\right)^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{h\xi}{g}\right)^3+\ldots=\varphi(\xi),$$

$$1-\frac{1}{2}\frac{h\xi^{-1}}{g}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{h\xi^{-1}}{g}\right)^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{h\xi^{-1}}{g}\right)^3+\ldots=\varphi(\xi^{-1}),$$

a sama całka (5) będzie nieskończoną sumą całek postaci:

$$C_m\int\limits_K\xi^m d\xi=C_m r^{m+1}\int\limits_0^{2\pi}e^{(m+1)\varphi i}d\varphi i,\quad m=0,\pm1,\ldots$$

Lecz z tych całek tylko całka posiadająca $m+1=0$ będzie $\neq 0$ i będzie miała wartość $C_{-1}2\pi i$. Wszystkie inne będą zerami. Z tego wynika, że:

$$2\omega=\frac{1}{g}2\pi i\left[1+\frac{1^2}{2^2}\left(\frac{h}{g}\right)^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\left(\frac{h}{g}\right)^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\left(\frac{h}{g}\right)^6+\ldots\right]=\frac{2\pi i}{g}P(h,g).$$

Alnaogicznie zupełnie postępując z całką:

(6) $$2\omega'=\int\limits_{K'}\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

a więc uznając K' znowu za elipsę o ogniskach e_1, e_2 i kładąc:

$$g'=\frac{\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_2-e_3}}{2},\quad h'=\frac{\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_2-e_3}}{2}$$

dostaniemy:

$$2\omega'=\frac{2\pi i}{g'}P(h',g').$$

Aby peryody 2η, $2\eta'$ całki rodzaju drugiego obliczyć, połóżmy:

$$\frac{1}{g}\varphi(\xi)\varphi(\xi^{-1})=c_0+c_1\xi+c'_1\xi^{-1}+c_2\xi^2+c'_2\xi^{-2}+\dots$$

i zauważmy, że:

$$\frac{s\,ds}{\sqrt{S}}=\frac{d\xi}{\xi}\left[\frac{e_2+e_3}{2}+\frac{e_2-e_3}{4}\xi+\frac{e_2-e_3}{4}\xi^{-1}\right].\left[c_0+c_1\xi+c'_1\xi^{-1}+\dots\right]=$$

$$=\frac{d\xi}{\xi}\left[c_0\frac{e_2+e_3}{2}+\frac{e_2-e_3}{4}(c_1+c'_1)\right]+\dots$$

to otrzymamy:

$$2\eta=2\pi i\left[c_0\frac{e_2+e_3}{2}+\frac{e_2-e_3}{4}(c_1+c'_1)\right].$$

Analogicznie obliczy się $2\eta'$.

Całki (2), (6) nie zmienią się wcale [art. 115., tw. III], gdy elipsy K, K' dowolnie zmniejszymy w t e n s p o s ó b j e d n a k, aby wewnątrz pierwszej znajdowały się punkty e_2, e_3, a wewnątrz drugiej punkty e_1, e_2. Gdy je ostatecznie tak zmniejszymy, że K zmieni się na podwójny odcinek $\overline{e_2e_3}$, a K' na podwójny odcinek $\overline{e_1e_2}$, to dostaniemy:

$$2\omega=2\int_{e_2}^{e_3}\frac{ds}{\sqrt{S}},\quad 2\omega'=2\int_{e_1}^{e_2}\frac{ds}{\sqrt{S}}\ ^{*)}$$

a całkowanie od e_2 do e_3 i od e_1 do e_2 odbywa się tu po prostej linii.

---

*) W całce drugiej całkując naprzód od e_1 do e_2 i wychodząc z gałęzią $+y$, musimy potem okrążyć (raz) punkt e_2, aby znowu całkować od e_2 do e_1. Przez to okrążenie przechodzimy jednak z gałęzi $+y$ na gałąź $-y$, tak, że z powrotem mamy:

$$\int_{e_2}^{e_1}-\frac{ds}{\sqrt{S}}=\int_{e_1}^{e_2}\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

a więc znowu to samo, co dało całkowanie od e_1 do e_2 z gałęzią $+y$. To zresztą uwidocznić można bardzo dobrze, tworząc tu powierzchnię Riemanna z liniami przejścia $0e_1$ $0e_2$, $0e_3$, 0∞, gdzie 0 jest dowolny, zwykły punkt, leżący w skończoności.

Obraz algebraiczny $y^2=S$ ma — jak wiadomo — w nieskończoności punkt rozgałęzienia e_∞. Z tego wynika, że można tu utworzyć trzy koła zamknięte l_1, l_2, l_3 (fig. 75.), które odpowiednio bardzo blisko punktów e_1, e_2, e_3 przebiegają, dążą w nieskończoność, są bardzo wąskie, a koło l_α, okrążając punkt e_α, już drugiego punktu e_β, $\beta \gtreqless \alpha$, w swem wnętrzu nie zawiera. Dążąc po kole l_α na ćwiartce $+y$ od punktu e_α ku e_∞, wrócimy do e_α na ćwiartce $-y$, a ta łączy się z $+y$ na linii przejścia wychodzącej z e_α.

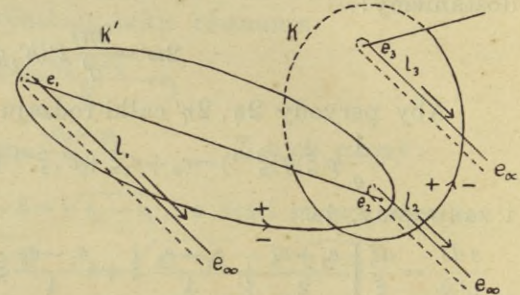


Fig. 75.

Koła l_1, l_2, l_3 są nieprzywiedlne. Lecz gdy zważymy, że koło l_1 przecina raz tylko koło K' w ujemnym kierunku, koło l_3 przecina koło K również raz tylko i to w ujemnym kierunku, a koło l_3 przecina koła K, K', obydwa również w ujemnym kierunku, to całki obliczone po drogach zamkniętych [art. 128.]:

$$l_1-K,\quad l_3+K',\quad l_2-K+K'$$

będą już zerami. Dostaniemy więc:

$$(l_1)=2\int_{e_1}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}}=2\omega,\quad (l_3)=2\int_{e_3}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}}=-2\omega',\quad (l_2)=2\int_{e_2}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}}=2\omega-2\omega';$$

a stąd: $(l_1)+(l_3)=(l_2)$.

Połóżmy: $2\omega=2\omega_1$, $-2\omega'=2\omega_3$, to $2\omega_1$, $2\omega_3$ będzie również parą pierwotnych peryodów, a ich połowy określą się całkami w ten sposób:

$$\omega_1=\int_{e_1}^{\infty}=\int_{e_2}^{e_3},\quad \omega_3=\int_{e_3}^{\infty}=\int_{e_2}^{e_1}. \tag{7}$$

Połóżmy wreszcie $(l_2)=(2\omega_1+2\omega_3)=-2\omega_2$, to mamy:

$$-\omega_2=\int_{e_2}^{\infty} \tag{7'}$$

a suma:

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=0. \tag{α}$$

Analogicznie do pary obranych peryodów pierwotnych 2ω, $2\omega'$ należeć będą takie pierwotne peryody całki rodzaju drugiego:

$$\eta = \int_{e_1}^{\infty} \frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_2}^{e_3}, \quad \eta' = -\int_{e_3}^{\infty} = \int_{e_1}^{e_2}, \quad \text{a całka:}$$

$$(7'') \qquad \int_{e_2}^{\infty} = \eta - \eta'.$$

Lecz po wprowadzeniu pierwotnej pary peryodów: $2\omega_1$, $2\omega_3$ trzeba do nich takie dobrać peryody $2\eta_1$, $2\eta_3$ całki rodzaju drugiego, aby utrzymał się związek:

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \eta_1(-\omega') - \eta_3\omega = \frac{\pi i}{2}.$$

Temu widocznie zadość się uczyni, gdy położymy:

$$(8) \qquad \eta_1 = -\eta = \int_{\infty}^{e_1} = \int_{e_3}^{e_2}, \quad \eta_3 = \eta' = \int_{\infty}^{e_3} = \int_{e_2}^{e_1}.$$

Wtedy (7″) przybiera postać:

$$\int_{e_2}^{\infty} = -(\eta_1 + \eta_3),$$

a gdy położymy $\eta_1 + \eta_3 = -\eta_2$, dostaniemy:

$$(9) \qquad -\eta_2 = \int_{\infty}^{e_2}, \quad \text{a suma:}$$

$$(\beta) \qquad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Zauważmy teraz obraz eliptyczny:

$$y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2);$$

ma on punkta rozgałęzienia: $(+1, -1)$, $\left(+\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)$, a gdy poprowadzimy linie przejścia:

$$\left(-\frac{1}{k} \ldots +1\right), \quad \left(\frac{1}{k} \ldots -1\right) \text{ [fig. 76.]},$$

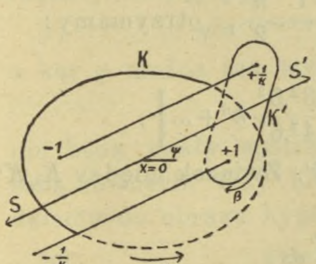


Fig. 76.

to jako parę nieprzywiedlnych kół zasadniczych możemy wziąć koło K, otaczające punkta $(+1, -1)$ i koło K' otaczające punkta $\left(+1, +\frac{1}{k}\right)$. Dodatnie kierunki na tych kołach wskazują strzałki α, β.

Mając to, możemy obliczyć zasadnicze peryody całki eliptycznej pierwszego rodzaju, danej w formie Legendre'a:

$$\int \frac{dx}{\Delta(x,k)}, \quad \Delta(x,k) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

*

Przedewszystkiem koła K, K' można i tu będzie zmienić na podwójne, prostolinijne odcinki, łączące już-to punkta $(+1, -1)$, już-to punkta $\left(+1, \frac{1}{k}\right)$. Po takiej zmianie dostaniemy peryody w postaciach:

$$4K = 4\int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x,k)}, \quad 2K'i = -2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\Delta(x,k)}.\text{*)}$$

Gdy jednak w drugiej całce położymy $1-k^2x^2 = k'^2t^2$, gdzie $k'^2 = 1-k^2$, to — gdy potem znowu x za t napiszemy — dostaniemy:

$$2K'i = 2i\int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x,k')} \text{ z określeniem: } \Delta(x,k') = \sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}.$$

Mamy więc:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x,k)}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x,k')}, \tag{10}$$

a gdy w K położymy $x = sin\varphi$, mieć będziemy:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[1+\frac{1}{2}k^2 sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}k^4 sin^4\varphi + \ldots\right],$$

a ten sereg przy założeniu $|k| < 1$ jest niezawodnie zbieżny.

Z uwagi, że:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5....2n-1}{2.4....2n}\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ otrzymamy:}$$

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \ldots\right],$$

a analogicznie K' wyrazi się przez moduł k'. Związek między K, K', a półperyodami:

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad \omega_3 = \int_{e_2}^{e_1} \frac{ds}{\sqrt{S}} \tag{11}$$

znajdziemy łatwo. Podstawiając tu bowiem:

---

*) K i K', wchodzące w te relacye, nie trzeba oczywiście mieniać z nazwami K, K' kół nieprzywiedlnych.

$$s-e_3=\frac{e_1-e_3}{x^2},\quad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},\quad \text{dostajemy:}$$

$$\omega_1=\frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}},\quad \omega_3=\frac{-K'i}{\sqrt{e_1-e_3}}. \tag{12}$$

132. Peryody całek hypereliptycznych rodzaju pierwszego i drugiego. Gdy w obrazie hypereliptycznym: $y'^2=(x'-b_1)\ldots.(x'-b_m)$ położymy:

$$(\alpha)\qquad x'=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad \text{to otrzymamy:}$$

$$x'-b_\nu=\frac{(\alpha-b_\nu\gamma)x+(\beta-b_\nu\delta)}{\gamma x+\delta},\quad \nu=1,2,\ldots,m,$$

a więc:

$$y'^2(\gamma x+\delta)^m=\Pi[(\alpha-b_\nu\gamma)x+(\beta-b_\nu\delta)].$$

Załóżmy m parzyste $=2n+2$, a α, γ tak wybierzmy, aby $\alpha-b_1\gamma=0$, to mieć będziemy:

$$y'^2(\gamma x+\delta)^{2n+2}=c.(x-a'_1)(x-a'_2)\ldots(x-a'_{2n+1}).$$

Połóżmy dalej:

$$(\beta)\qquad y=y'(\gamma x+\delta)^{n+1}.c^{-\frac{1}{2}},$$

to to podstawienie razem z (α) jest odwracalne, a stąd wynika, że tu można się ograniczyć do obrazów:

$$(a)\qquad y^2=(x-a'_1)(x-a'_2)\ldots(x-a'_{2n+1})$$

o nieparzystym stopniu $2n+1$; $n=\varrho$ jest ich defektem.

Niech $a'_\nu=\alpha'_\nu+\beta_\nu i$, $\nu=1,2,\ldots,2\varrho+1$, i przyjmijmy, że między α'_ν są i równe sobie, co oznacza, że niektóre z punktów rozgałęzienia a'_ν leżą grupami na prostopadłych prostych do osi pierwszorzędnej. Zastępując w tym razie x przez $xe^{\varphi i}$, dostaniemy z (a):

$$(b)\qquad y^2e^{-(2n+1)\varphi i}=(x-a'_1e^{-\varphi i})\ldots(x-a'_{2n+1}e^{-\varphi i}),$$

a kąt φ można tak wybrać, że żadne dwa punkty:

$$a'_1e^{-\varphi i},\quad a'_2e^{-\varphi i},\quad \ldots.$$

nie będą miały spółrzędnych pierwszorzędnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.$ między sobą równych. Gdy lewą stronę w (b) nazwiemy wprost y^2, dojdziemy do obrazu hypereliptycznego:

$$(c)\qquad y^2=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2\varrho+1}),$$

a w nim — ponieważ nazwy i uporządkowanie punktów rozgałęzienia są obojętną rzeczą — możemy już założyć:

$$\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{2\varrho+1}.$$

Dalej możemy przyjąć, że wszystkie punkta a_ν mieszczą się w tej części płaszczyzny (x), która ograniczoną jest dodatnią osią pierwszorzędną i dodatnią osią drugorzędną zmiennej x. To osiąga się podstawieniem $x-\varkappa$ za x ze stosownie obranym dodatkiem $\varkappa$.

Połóżmy:

$$P(x)=(x-a_2)(x-a_4)...(x-a_{2\varrho}),\quad Q(x)=(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_{2\varrho+1}),$$

to dla obrazu (c) mamy [art. 87., Pd. 4.]:

$$H(xy)_\alpha=\frac{P(x)}{(x-a_\alpha).2y},\quad H'(xy)_\alpha=\frac{Q(a_\alpha)}{P'(a_\alpha)}.\frac{P(x)}{(x-a_\alpha)^2.2y},$$
$$\alpha=2, 4. 6, ..., 2\varrho,$$

a peryody całek rodzaju pierwszego i drugiego obliczą się po obraniu ϱ par zasadniczych i nieprzywiedlnych kół K_β, K'_β.

Te pary można zaś w ten sposób wybrać, Gdy — dla uproszczenia — przyjmiemy $\varrho=2$, a więc $2\varrho+1=5$, a linie przejścia utworzymy wzdłuż prostolinijnych odcinków a_1a_2, a_3a_4, $a_5\infty$ (fig. 77.), to za koło K_1 możemy wziąć elipsę o ogniskach a_2, a_3, a za koło K_2 elipsę o ogniskach a_4, a_5. Koło K'_1 może być kołem o środku w punkcie $x=0$, a przechodzące między ogniskami a_2, a_3.

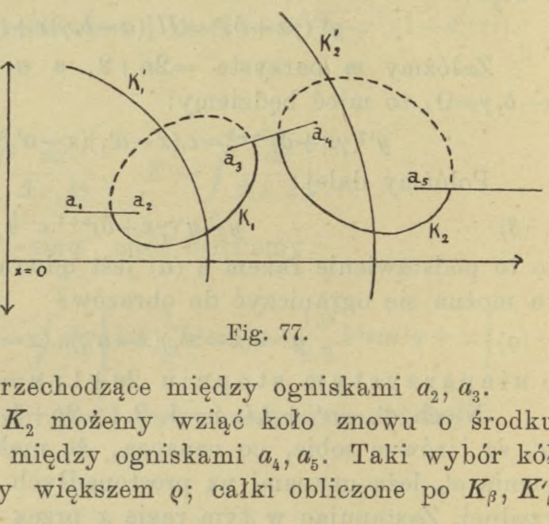


Fig. 77.

Podobnie za koło K_2 możemy wziąć koło znowu o środku w $x=0$, a przechodzące między ogniskami a_4, a_5. Taki wybór kół zatrzymać trzeba i przy większem ϱ; całki obliczone po K_β, K'_β dadzą peryody:

$$2\omega_{\alpha\beta},\ 2\omega'_{\alpha\beta},\ 2\eta_{\alpha\beta},\ 2\eta'_{\alpha\beta},\quad \alpha=2,4,...,2\varrho,\quad \beta=1,2,3,...,\varrho.\text{*)}$$

133. Charakterystyczne własności funkcyi $E(x,y)$. Funkcya $E(xy, c_2c_1)$. Przedstawienie każdej funkcyi wymiernej $R(x,y)$ iloczynem funkcyj E. Przyjmijmy, że mamy funkcyę $\overline{E}(xy)$, posiadającą takie własności:

---

*) O przedstawieniu peryodów η, ω przez szeregi hypergeometryczne, czyt.: Bruns. *Math. Annalen*, T. 27., str. 234...

L. Fuchs, R. Fuchs [C. J. T. 71., C. J. T. 119] i St. Kępiński [Rozpr. Akad. Krak. T. 37., str. 63—80] rozważają peryody ω, η jako funkcye jednego z punktów rozgałęzienia obrazu hypereliptycznego.

$$(a)\qquad \overline{E}(x_t y_t) = \overline{E}[1 + t\mathfrak{P}(t)],\quad \overline{E}(a_0 b_0) = 1,\quad \overline{E} = const.$$

$$(b)\qquad \overline{E}(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t) = E_\alpha e^{2c_\alpha t^{-1}}[1 + t.\mathfrak{P}_\alpha(t)];$$

ma ona widocznie własności funkcyi $E(xy)$ [art. 130.] z tą różnicą że w (b) zamiast $2\omega_\alpha$ występuje całkiem dowolna stała $2c_\alpha$.

Zbadajmy jej stosunek do funkcyi $E(xy)$.

Gdy $x = x_t$, to $dx = \frac{dx_t}{dt}dt$, a że $d\overline{E}(xy) = \frac{d\overline{E}(xy)}{dt}dt$, więc dalej mieć będziemy:

$$(c)\qquad \frac{d\overline{E}(xy)}{dx} = \frac{\frac{d\overline{E}(xy)}{dt}dt}{\frac{dx}{dt}dt} = \frac{d\overline{E}(xy)}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}.$$

Zauważmy wyrażenie:

$$v = \frac{d\log\overline{E}(xy)}{dx} = \frac{\frac{d\overline{E}(xy)}{dx}}{\overline{E}(xy)},$$

to wstawiając tu (c), dostaniemy:

$$v = \frac{\frac{d\overline{E}(xy)}{dt}}{\overline{E}(xy)\frac{dx}{dt}},\quad \text{a}\quad v\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d\overline{E}(xy)}{dt}}{\overline{E}(xy)}.$$

Stąd — za wstawieniem tu rozwinięcia (a) — wynika:

$$v\frac{dx}{dt} = \mathfrak{P}(t),\quad \text{gdy}\quad (xy) \neq (a_\alpha b_\alpha),$$

a gdy $(xy) = (a_\alpha b_\alpha)$, to:

$$v\frac{dx}{dt} = -2c_\alpha t^{-2} + \mathfrak{P}'_\alpha(t).$$

Gdy zauważymy, że właśnie iloczyn:

$$H'(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t)\frac{d\overset{\alpha}{x}_t}{dt} = -t^{-2} + \mathfrak{P}(t),$$

a zresztą jest wszędzie skończonym, to różnica:

$$[v - \Sigma 2c_\alpha H'(xy)_\alpha]\frac{dx}{dt}\quad \text{będzie}\quad = -\Sigma 2c'_\alpha H(xy)_\alpha \frac{dx}{dt},$$

gdzie $-\Sigma c'_\alpha H(xy)_\alpha$ jest ogólną funkcyą $H(xy)$, a stąd dostajemy:

$$(d)\qquad v = \frac{d}{dx}\log\overline{E}(xy) = \sum_\alpha [2c_\alpha H'(xy) - 2c'_\alpha H(xy)_\alpha].$$

Pomnóżmy tu obustronnie przez dx i całkujmy po kole K_β, obrawszy na niem po porządku punkta:

$$(x_0y_0),\ (x_1y_1),\ (x_2y_2),\ \ldots,\ (x_ny_n),\ (x'_0y'_0),$$

$[(x'_0y'_0)$ jest identyczne z (x_0y_0), ale po dokonanem już okrążeniu], to z całkowania po lewej stronie w (d) dostajemy:

$$log\frac{\overline{E}(x_1y_1)}{\overline{E}(x_0y_0)}+log\frac{\overline{E}(x_2y_2)}{\overline{E}(x_1y_1)}+\ldots+log\frac{\overline{E}(x'_0y'_0)}{\overline{E}(x_ny_n)}=log\frac{\overline{E}(x'_0y'_0)}{\overline{E}(x_0y_0)}=log\,1=2m_\beta\pi i,$$

gdzie m_β jest całkowite $\gtreqless 0$ i zależy od miejsc nieskończonościowych $(a_\alpha b_\alpha)$ funkcyi $\overline{E}(xy)$ zawartych wewnątrz K_β. Ponieważ prawa strona daje $\sum\limits_\alpha[4c_\alpha\eta_{\alpha\beta}-4c'_\alpha\omega_{\alpha\beta}]$, więc dostajemy równanie:

$$(1)\qquad m_\beta\pi i=\sum_\alpha[2c_\alpha\eta_{\alpha\beta}-2c'_\alpha\omega_{\alpha\beta}],\quad \beta=1,2,\ldots,\varrho.$$

Analogicznie, biorąc koło K'_β za drogę całkowania, mieć będziemy:

$$(2)\qquad m'_\beta\pi i=\sum_\alpha[2c_\alpha\eta'_{\alpha\beta}-2c'_\alpha\omega_{\alpha\beta}],\quad \beta=1,2,\ldots,\varrho.$$

Równania (1), (2) rozwiążą się w ten sposób [art 129.],

$$2c_\alpha=\Sigma[-2m'_\beta\omega_{\alpha\beta}+2m_\beta\omega'_{\alpha\beta}]=2\omega_\alpha,$$

$$2c'_\alpha=\Sigma[-2m'_\beta\eta_{\alpha\beta}+2m_\beta\eta'_{\alpha\beta}]=2\eta_\alpha.$$

Z pierwszych z tych równań wynika, że $\overline{E}(xy)=E(xy)$, gdzie $E(xy)$ otrzymano za uwzględnieniem drogi zamkniętej, dającej peryod $2\omega_\alpha$. Mamy więc twierdzenie:

I. *Każda funkcya posiadająca charakterystyczne własności funkcyi* $\overline{E}(xy)$ *jest funkcyą* $E(xy)$.

Przytem zauważyć potrzeba, że i odwrotność $[E(xy)]^{-1}$ będzie znowu funkcyą $\overline{E}(xy)$, odnoszącą się do peryodu $-2\omega_\alpha$.

Jak $\Omega(xy)$, wykładnik w funkcyi $E(xy)$, tak samo i z tejsamej przyczyny będzie i funkcya:

$$\int_{x'_0y'_0}^{x'_1y'_1}\Pi(xy,x'y')dx'=\Omega(xy,x'_1y'_1,x'_0y'_0)$$

posiadała na samej drodze całkowania $(x'_0y'_0\ldots x'_1y'_1)=(c_1\ldots c_2)$ cięcie charakteryzujące się tem, że:

$$\overset{+}{\Omega}(xy,c_2c_1)=\overset{-}{\Omega}(xy,c_2c_1)+2\pi i.$$

Przyjmijmy nasamprzód, że droga c_1c_2 nie przecina wcale kół K_α, K'_α i zbadajmy funkcyę $\Omega(xy,c_2c_1)$ i funkcyę (jednoznaczną):

$$E(xy,x'_1y'_1,x'_0y'_0)=e^{\Omega(xy,x'_1y'_1,x'_0y'_0)}$$

Gdy (x_ty_t) jest parą otaczającą miejsce (xy), a $(x'_\tau y'_\tau)$ parą otaczającą miejsce $(x'y')$ i gdy (xy) zakładamy różne od c_1, c_2 i od miejsc $(a_\alpha b_\alpha)$, to na całej drodze c_1c_2 mamy do obliczenia całki:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} H(x_t y_t x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau}d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathfrak{P}(t,\tau)d\tau.$$ Z tego wynika:

$$\Omega(x_t y_t, c_2 c_1) = \mathfrak{P}(t),$$ a dalej:

$$(A) \qquad E(x_t y_t, c_2 c_1) = e^{\mathfrak{P}(t)} = E[1 + t\mathfrak{P}(t)], \quad E = const.$$

Ograniczmy się do wypadku, że $(x'_1 y'_1) = c_2$ i $(x'_0 y'_0) = c_1$ różne są od $(a_\alpha b_\alpha)$ i przyjmijmy, że $(xy) = c_2$, a parą otaczającą to miejsce jest $(\overset{2}{x}_t \overset{2}{y}_t)$. Wszystkie całki obliczane po drodze $c_1 c_2$ od c_1 począwszy aż do najbliższego otoczenia punktu c_2 dają zwykłe szeregi potęgowe, a dopiero całkę:

$$(3) \qquad \int_{(\xi\eta)}^{c_2} H(\overset{2}{x}_t \overset{2}{y}_t, x'y')dx',$$

w której $(\xi\eta) = c'$ jest miejscem wziętem z pary $(\overset{2}{x}_t \overset{2}{y}_t)$ musimy osobno zbadać.

Zauważmy tu rozwinięcie:

$$H(\overset{2}{x}_t \overset{2}{y}_t, \overset{2}{x'} \overset{2}{y'}_t)\frac{dx'_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + \mathfrak{P}(t,\tau),$$

to gdy do c' należy wartość τ', dostaniemy z (3):

$$\int_{\tau'}^{0}\frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{\tau'}^{0}\mathfrak{P}(t,\tau)\,d\tau = log\frac{t}{t-\tau'} + \mathfrak{P}_2(t) =$$

$$log\, t - log\, \tau' - log\left(1 - \frac{t}{\tau'}\right) + \mathfrak{P}_2(t) = log\, t + \mathfrak{P}'_2(t).$$

Wskutek tego — mając już wzgląd na to, że wszystkie całki przedtem obliczone, dawały zwykłe szeregi potęgowe — dochodzimy tu do:

$$\Omega(\overset{2}{x}_t \overset{2}{y}_t c_2 c_1) = log\, t + \mathfrak{P}_3(t),$$

$$(B) \qquad E(\overset{2}{x}_t \overset{2}{y}_t, c_2 c_1) = E_2 t[1 + \mathfrak{P}(t)], \quad E_2 = const.$$

Analogicznie dostaniemy:

$$(C) \qquad E(\overset{1}{x}_t \overset{1}{y}_t, c_2 c_1) = E_1 t^{-1}[1 + t\mathfrak{P}(t)], \quad E_1 = const.$$

Zauważmy jeszcze miejse $(a_\alpha b_\alpha)$. W jego otoczeniu jest:

$$H(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau} = t^{-1}H(\overset{\alpha}{x}_\tau \overset{\alpha}{y}_\tau)_\alpha \frac{d\overset{\alpha}{x}_\tau}{d\tau} + \mathfrak{P}(t,\tau).$$

Stąd wyniknie:

$$\Omega(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, c_2 c_1) = t^{-1}\int_{c_1}^{c_2} H(xy)_\alpha dx + \mathfrak{P}_\alpha(t) \quad \text{i}$$

$$(D) \qquad E(\overset{\alpha}{x}_t \overset{\alpha}{y}_t, c_2 c_1) = E_\alpha e^{t^{-1}\int_{c_1}^{c_2} H(xy)_\alpha dx}[1 + t\mathfrak{P}'_\alpha(t)], \quad E_\alpha = const.$$

Na miejscu $(a_0 b_0)$ określamy:

$$(E) \qquad E(a_0 b_0, c_2 c_1) = 1,$$

z powodu, że $H(a_0 b_0 x' y') = 0$.

Równania (A), (B), (C), (D), (E) określają własność funkcyi $E(xy, c_2 c_1)$. Ma ona, będąc wszędzie regularną, jedno tylko miejsce zerowe $(x'_1 y'_1) = c_2$, jedno tylko miejsce nieskończonościowe $(x'_0 y'_0) = c_1$; miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$ są analogiczne z miejscami istotnie osobliwemi funkcyi jednoznacznej jednej zmiennej. Z tego powodu nazywa się $E(xy, c_2 c_1)$ funkcyą przestępną pierwszą.

Jeżeli teraz droga $c_1 c_2$ przecina koło K_β, to z tego przecięcia dostaje $\Omega(xy, c_2 c_1)$ dodatek (peryod):

$$-\log E(xy)_\beta = -\Omega(xy)_\beta,$$

a sama funkcya $E(xy, c_2 c_1)$ zmieni się na:

$$[E(xy)_\beta]^{-1} . E(xy, c_2 c_1) = e^{\int_{c_1}^{c_2} H(xy\, x'y')dx' - \log E'(xy)_\beta}$$

Wykładnik jest znowu całką trzeciego rodzaju o granicach c_1, c_2. Iloczyn jest więc znowu funkcyą $E(xy, c_2 c_1)$. Podobnie przecięcie się drogi $c_1 c_2$ z kołem K'_β da iloczyn:

$$E(xy)_\beta E(xy, c_2 c_1),$$

a ten określi się znowu tak, jak funkcya $E(xy, c_2 c_1)$. W ogólności więc będzie iloczyn $E(xy) . E(xy, c_2 c_1)$ określał się tak, jak funkcya $E(xy, c_2 c_1)$. Własności (A), (B), (C), (E) będzie ten iloczyn posiadał, a jego rozwinięcie w otoczeniu miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$ tem się tylko różnić będzie od (D), że tam zamiast całki:

$$\int_{c_1}^{c_2} H(xy)dx \quad \text{będzie:} \quad \int_{c_1}^{c_2} H(xy)_\alpha + 2\omega_\alpha$$

Lecz to jest także całka pierwszego rodzaju z drogą całkowania $(c_1 \dots c_2)$, w którę koło K_α wstawiono.

Obznajomiwszy się z własnościami funkcyi pierwszej E, przyjmijmy, że mamy daną funkcyę wymierną $R(xy)$ pary (xy) stopnia k^{go} o miejscach zerowych:

$$(\alpha) \qquad c_\nu = (x_\nu y_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots, k,$$

a nieskończonościowych:

$$(\beta) \qquad c'_\nu = (x'_\nu y'_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots, k.$$

Utwórzmy iloczyn:

$$R_1(xy) = \prod_{\nu=1}^{k} E(xy\, c'_\nu c_\nu) = \prod_{\nu=1}^{k} E_\nu.$$

Jest on — przy najdowolniejszych drogach $(c_\nu \dots c'_\nu)$ — funkcyą o jednokrotnych miejscach zerowych (α), o jednokrotnych miejscach nieskończonościowych (β), a w otoczeniu miejsca $(a_\alpha b_\alpha)$ daje rozwinięcie:

$$R_1(xy)=E_\alpha e^{t^{-1}\sum\limits_v\int_{c_v}^{c'_v} H(xy)_\alpha dx}[1+t.\mathfrak{P}(t)], \quad \alpha=1,2,\dots,\varrho,$$

$$=E_\alpha e^{-2c_\alpha t^{-1}}[1+t.\mathfrak{P}(t)].$$

Z tego wynika, że iloraz $R(xy)/R_1(xy)$ ma — pominąwszy własność $E(a_0b_0)=1$ — zresztą wszystkie własności pewnej funkcyi $E(xy)$, a jako taki $=C.E(xy)$, gdzie C jest stałą ilością.

Możemy więc położyć:

$$R(xy)=C.E(xy)\,R_1(xy),$$

a gdy czynnik $E(xy)$ złączymy z którąbądź funkcyą $E(xy\,c'_v c_v)$ zawartą w R_1, dostaniemy: $R(xy)=C.\Pi E_v$.

Gdy zauważymy miejsce (a_0b_0), na którem wszystkie E_v są $=1$, i przyjmiemy, że na tem miejscu jest $R(xy)=R_0$, to ostatecznie dostaniemy: $R(xy)=R_0\prod\limits_v E(xy,c'_v c_v)$. Stąd twierdzenie [Weierstrassa]:

II. *Każdą funkcyę wymierną pary* (xy) *o danych* k *miejscach zerowych i* k *miejscach nieskończonościowych i danej jej wartości* R_0 *na miejscu* (a_0b_0), *dającem* $H(a_0b_0, xy)=0$, *można przedstawić iloczynem* k *funkcyj pierwszych.*

Uwaga. Jeżeli funkcya $E(xy)$ złączona z jedną z funkcyj $E(xy, c'_v c_v)$ wykazała, że odnosi się do peryodu $-2\omega_\alpha$, to z rozwinięcia

$$R(xy)=R_0 E'_\alpha e^{t^{-1}\left[\sum\limits_v\int_{c_1}^{c_2} H(xy)_\alpha dx-2\omega_\alpha\right]}.\mathfrak{P}(t),$$

wynika, że zawsze być musi:

$$\sum_v\int_{c_v}^{c'_v} H(xy)_\alpha dx=2\omega_\alpha. \tag{4}$$

134. Prawidła dodawania całek Abla. W równaniu (4) możemy drogi $(c_v \dots c'_v)$ tak pozmieniać, że lewa strona dostanie dodatek $2\omega_\alpha$. Wtedy po takiej zmianie mieć będziemy:

$$\sum_v\int_{c_v}^{c'_v} H(xy)_\alpha dx=0. \tag{1}$$

Stąd twierdzenie:

I. *Sumę* k *całek* a^{tych} *pierwszego rodzaju o granicach dolnych* c_v, *będących miejscami zerowemi, a o granicach górnych* c'_v, *będących miejscami nieskończonościowemi pewnej funkcyi* $R(xy)$ *można zawsze — przy stosownym wyborze dróg całkowania — uczynić zerem.*

Niech $k=r+\varrho$, gdzie ϱ, jak zawsze, oznacza defekt, i napiszmy równanie (1) w postaci:

$$\sum_{\nu=1}^{r}\int_{c_\nu}^{c'_\nu} H(xy)_\alpha dx = -\sum_{\nu=r+1}^{k}\int_{c_\nu}^{c'_\nu} H(xy)_\alpha dx. \tag{2}$$

Zauważmy dalej, że tworząc funkcyę $R(xy)$, można dowolnie obrać k miejsc zerowych c_ν i $(k-\varrho)=r$ miejsc nieskończonościowych $c'_1, c'_2, \ldots, c'_r$. i że wtedy pozostałe miejsca nieskończonościowe $c'_{r+1}, \ldots, c'_k$, [jest ich ϱ], zależą od wszystkich tamtych algebraicznie, [art. 77., Uwaga 2.], to równanie (2) prowadzi do twierdzenia:

II. *Sumę* r, $(r \gtrless \varrho)$ *całek* a^{tych} *pierwszego rodzaju o dowolnych granicach można zredukować do sumy* ϱ *całek. W tych* ϱ *całkach są dolne granice całkiem dowolne, a górne okazują się funkcyami algebraicznemi wszystkich obranych już granic.*

Zbadajmy teraz sumę:

$$U=\sum_{\nu=1}^{r}\int_{c_\nu}^{c'_\nu} F(xy)dx$$

ogólnych całek Abla z dowolnemi granicami:

$$c_\nu,\ c'_\nu,\quad \nu=1,2,\ldots,r,\quad r \gtrless \varrho.$$

Dobrawszy jeszcze dowolnie $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_{r+\varrho}$, możemy utworzyć funkcyę wymierną $R(xy)$ o danych $k=r+\varrho$ miejscach zerowych c_ν i o miejscach nieskończonościowych $c'_1, c'_2, \ldots, c'_r$. Jej dalsze miejsca nieskończonościowe $c'_{r+1}, c'_{r+2}, \ldots, c'_k$ są algebraicznemi funkcyami miejsc $c_1, c_2, \ldots, c_k, c'_1, c'_2, \ldots, c'_r$. Mając to, utwórzmy sumę:

$$V=\sum_{\nu=1}^{k}\int_{c_\nu}^{c'_\nu} F(xy)dx$$

i spróbujmy ją obliczyć. Według art. 77., (3) można — jeżeli funkcya $F(xy)$ ma miejsca nieskończonościowe $(\xi_\mu \eta_\mu)$ — funkcyi $F(xy)$ nadać taki kształt:

$$F(xy)=\sum_\mu\left[F(\overset{\mu}{\xi}_t\overset{\mu}{\eta}_t)\frac{d\overset{\mu}{\xi}_t}{dt}.H(\overset{\mu}{\xi}_t\overset{\mu}{\eta}_t, xy)\right]_{t^{-1}}$$
$$+\sum_\alpha\left[F(\overset{\alpha}{x}_t\overset{\alpha}{y}_t)\frac{d\overset{\alpha}{x}_t}{dt}.H(\overset{\alpha}{x}_t\overset{\alpha}{y}_t, xy)\right]_{t^{-1}}.$$

Gdy to wstawimy w V, mieć będziemy:

$$V=\sum_\mu\left[F(\overset{\mu}{\xi}_t\overset{\mu}{\eta}_t)\frac{d\overset{\mu}{\xi}_t}{dt}.\sum_\nu\int_{c_\nu}^{c'_\nu} H(\overset{\mu}{\xi}_t\overset{\mu}{\eta}_t, xy)\,dx\right]_{t^{-1}} \tag{3}$$

z drugiej bowiem sumy dostajemy z e r o wskutek relacyi (1).

Zauważmy dalej, że:

$$\frac{R(xy)}{R_0}=\prod_\nu e^{\int_{c_\nu}^{c'_\nu} H(xy,x'y')dx'}=e^{\sum_\nu \int_{c_\nu}^{c'_\nu} H(xy,x'y')dx'};$$

a więc;

$$log\frac{R(xy)}{R_0}=\sum_\nu \int_{c_\nu}^{c'_\nu} H(xy,x'y')dx',$$

to uwzględniając to w (3), dojdziemy do związku:

$$(4)\qquad V=\sum_\mu \left[F(\overset{\mu}{\xi_t}\overset{\mu}{\eta_t})\frac{d\overset{\mu}{\xi_t}}{dt}.log\frac{R(\overset{\mu}{\xi_t}\overset{\mu}{\eta_t})}{R_0}\right]_{t^{-1}}=\Phi,$$

gdzie $R(xy)$ zawiera w swych spółczynnikach wymiernie wszystkie c_ν i wszystkie c'_ν, a $R(\overset{\mu}{\xi_t}\overset{\mu}{\eta_t})=log\,R_\mu+t[log\,R(\overset{\mu}{\xi_t}\overset{\mu}{\eta_t})]_t+.....$ ($R_\mu=$ stała zależna od c_ν, c'_ν).

Napiszmy dalej (4) w postaci:

$$\sum_{\nu=1}^{r}\int_{c_\nu}^{c'_\nu} F(xy)dx=\Phi-\sum_{\nu=r+1}^{k}\int_{c_\nu}^{c'_\nu} F(xy)dx,$$

to mamy twierdzenie:

III. *Suma r całek Abla o tej samej funkcyi $F(xy)$, a o dowolnych granicach dolnych: $c_1, c_2, ..., c_r$ i górnych: $c'_1, c'_2, ..., c'_r$ redukuje się do formy złożonej: 1) z ϱ całek tej samej funkcyi o dolnych granicach $c_{r+1}...c_k$ dowolnych, a o górnych granicach algebraicznie zależnych od wszystkich granic dotąd wprowadzonych, i 2) z wyrażenia zawierającego wymierne funkcye i logarytm wymiernej funkcyi wszystkich granic:*

$$c_\nu,\ c'_\nu,\quad \nu=1, 2, ..., k.$$

Gdy $F(xy)=H'(xy)_\alpha$, to z miejsc $(\xi_\mu\eta_\mu)$ mamy tylko jedno: $(a_\alpha b_\alpha)$, a że $H'(\overset{\alpha}{\xi_t}\overset{\alpha}{\eta_t})\frac{d\overset{\alpha}{\xi_t}}{dt}=-t^{-2}+...$, więc tu $\Phi=-[log\,R(\overset{\alpha}{x_t}\overset{\alpha}{y_t})]_t$ i nie zawiera widocznie logarytmu.

W razie $F(xy)=H(\xi\eta,xy)$ redukują się miejsca $(\xi_\mu\eta_\mu)$ do dwóch: $(\xi\eta)$, (a_0b_0). Iloczyn $H(\xi\eta,\overset{\mu}{\xi_t}\overset{\mu}{\eta_t})\frac{d\overset{\mu}{\xi_t}}{dt}$ ma w otoczeniu miejsca 1go wyraz $+t^{-1}$, a w otoczeniu miejsca drugiego wyraz $-t^{-1}$. Tu więc będzie: $\Phi=log\frac{R(\xi\eta)}{R(a_0b_0)}$, gdyż dla drugiego miejsca mamy:

$$\left[-t^{-1}\,log\frac{R(a_0b_0)}{R(a_0b_0)}\right]_{t^{-1}}=0.$$

Omówione tu redukcye r danych całek do sumy z wyrażenia Φ i sumy ϱ całek noszą nazwy: teoremów Abla dla całek funkcyj algebraicznych*), a drogą, jaką tu wyprowadziliśmy je, posługiwał się Weierstrass w swych wykładach o funkcyach Abla.

Pd. 1. Z równania różniczkowego:

$$\frac{dx}{\Delta x}+\frac{dy}{\Delta y}=0 \text{ [Euler]}, \tag{1}$$

w którem $\Delta x=\sqrt{1-x^2.1-k^2x^2}$, $\Delta y=\sqrt{1-y^2.1-k^2y^2}$, dostajemy, zakładając że wartości $x=0$ odpowiadać ma wartość $y=\zeta$, taki związek:

$$\int_0^x\frac{dx}{\Delta x}+\int_\zeta^y\frac{dy}{\Delta y}=0. \tag{2}$$

Lecz, że:

$$\int_\zeta^y\frac{dy}{\Delta y}=\int_0^y\frac{dy}{\Delta y}-\int_0^\zeta\frac{dy}{\Delta y}, \tag{A}$$

więc (2) możemy także tak napisać:

$$\int_0^x\frac{dx}{\Delta x}+\int_0^y\frac{dy}{\Delta y}=\int_0^\zeta\frac{dz}{\Delta z},\quad \Delta z=\sqrt{1-z^2.1-k^2z^2}. \tag{3}$$

Równanie (3) nazywa się całkowem równania (1); ζ jest tu stałą całkowania. Lecz rozwiążmy równanie (1) w inny jeszcze sposób (Lagrange'a).

Połóżmy:

$$\frac{dx}{\Delta x}=dt,\quad \text{a więc:}\quad \frac{dy}{\Delta y}=-dt,\quad \text{to mamy:}$$

---

*) Pod względem tego teoremu por.:

L. Königsberger: *Allgemeine Bemerkungen zum Abel'schen Theorem* [podaje znaczenie tego teoremu w układzie równań różniczkowych]. C. J. T. 90., str. 109—163. — *Beweis von der Unmöglichkeit eines anderen Functionaltheoremes als des Abel'schen.* C. J. T. 100., str. 121—136.

A. Schumann: *Ein Beweis des Additionstheoremes für die hyperelliptischen Integrale. Math. Ann.* T. 7., str. 623—634.

O. Staude: *Geom. Deutung der Additionstheoreme der hyperellipt. Integrale.... Math. Ann.* T. 22., str. 1—69, 145—176.

Scheibner W. *Zur Reduction ellipt., hyperellipt. und Abel'scher Integrale. Das Abel'sche Theorem für einfache und Doppelintegrale. Math. Annalen* T. 34., str. 473—493.

O zastosowaniu całek Abla do geometryi czytaj: F. Lindemann: *Vorlesungen über Geometrie von* A. Clebsch. T. I. (Lipsk 1876.), str. 661—923.

C. Humbert. *J. de l'école N. sup.* T. 3., str. 327—404, T. 5., str. 81—144 T. 6., str. 233—292.

Aronhold [C. J. T. 61., str. 95—145] wprowadza do całek Abla „jednorodne zmienne", przez co może stosować teoryę niezmienników.

$$(4)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1-(1+k^2)x^2+k^2x^4, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1-(1+k^2)y^2+k^2y^4.$$

Z tych równań dostajemy:

$$(5)\qquad y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1-k^2x^2y^2)(y^2-x^2).$$

Zróżniczkujmy równanie (4) podług t, to po skróceniu przez dx/dt otrzymamy związki:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(1+k^2)x+2k^2x^3, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -(1+k^2)y+2k^2y^3,$$

z których wyniknie:

$$(6)\qquad y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 2k^2xy.(x^2-y^2).$$

Dalej z dzielenia (6) przez (5) mamy:

$$\frac{y\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2y}{dt^2}}{y^2\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 - x^2\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = -\frac{2k^2xy}{1-k^2x^2y^2}, \quad \text{albo:} \quad \frac{y\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2y}{dt^2}}{y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}} = -\frac{2k^2xy\left(y\dfrac{dx}{dt}+x\dfrac{dy}{dt}\right)}{1-k^2x^2y^2},$$

albo wreszcie:

$$\frac{\dfrac{d}{dt}\left(y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}\right)}{y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}(1-k^2x^2y^2)}{1-k^2x^2y^2}.$$

Całkując po obydwu stronach, mamy:

$$log\,\frac{y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}}{1-k^2\Delta^2y^2} = C, \quad \text{albo:} \quad \frac{y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}}{1-k^2x^2y^2} = C'.$$

Lecz $\dfrac{dx}{dt} = \Delta x$, $\dfrac{dy}{dt} = -\Delta y$, a więc dostaniemy: $\dfrac{y\Delta x + x\Delta y}{1-k^2x^2y^2} = C'$.

Założyliśmy, że dla $x=0$ ma być $y=\zeta$. Otóż dla tych wartości dostajemy $C'=\zeta$, czyli: $\zeta = \dfrac{y.\Delta x + x\Delta y}{1-k^2x^2y^2}$.

Uwzględniając to w (A), dostajemy:

$$(A')\qquad \int_0^x \frac{dx}{\Delta x} + \int_0^y \frac{dy}{\Delta y} = \int_0^{\frac{y\Delta x + x\Delta y}{1-k^2x^2y^2} = \zeta} \frac{dz}{\Delta z}.$$

a to jest wyrazem teoremu Abla dla całki eliptycznej pierwszego rodzaju, danej w formie Legendre'a.*)

Pd. 2. Wyprowadzić — postępując analogicznie, jak w Pd. 1. — teoremy

$$(a)\qquad \int_0^x \frac{dx}{x} + \int_0^y \frac{dy}{y} = \int_0^{xy} \frac{dz}{z}, \quad \text{czyli:} \quad log\,x + log\,y = log\,(xy).$$

---

*) Por. także: Graefe. *Kurze Ableitung der Additionstheoreme der ellipt. Integrale aus der Gleichung* $(da/\Delta a)+(db/\Delta b)=0$. C. J. T. 90, str. 83—84.

$$(b)\qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \text{ czyli:}$$

$$arc\,sin\,x + arc\,sin\,y = arc\,sin\,(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})\,.$$

$$(c)\qquad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^{\frac{x+y}{1-xy}} \frac{dz}{1+z^2}, \text{ czyli:}$$

$$arc\,tg\,x + arc\,tg\,y = arc\,tg\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Pd. 3. Niech X^2, Y^2, Z^2 ma odpowiednio znaczenie funkcyi $4s^3-g_2s-g_3$, przy $s=x, y$, albo z, a zaważmy równanie różniczkowe:

$$(d)\qquad \frac{dx}{X}+\frac{dy}{Y}=0.$$

Gdy je tak rozwiązać chcemy, aby wartości $x=\infty$ odpowiadała wartość skończona $y=\zeta$, to dostajemy równanie całkowe:

$$\int_x^\infty \frac{dx}{X}+\int_y^\zeta \frac{dy}{Y}=0, \text{ albo ponieważ: } \int_y^\zeta \frac{dy}{Y}=\int_y^\infty \frac{dy}{Y}-\int_\zeta^\infty \frac{dz}{Z},$$

więc także położyć można:

$$(B)\qquad \int_x^\infty \frac{dx}{X}=\int_y^\infty \frac{dy}{Y}=\int_\zeta^\infty \frac{dz}{Z},$$

a ζ jest tu znowu stałą całkowania.

Lecz z drugiej strony możemy tak postąpić. Niech:

$$\frac{dx}{dt}=X, \text{ a więc: } \frac{dy}{dt}=-Y, \text{ to } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=X^2, \left(\frac{dy}{dt}\right)^2=Y^2,$$

a różniczkując te ostatnie związki podług t i skracając potem przez dx/dt, dostajemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=6x^2-\frac{g_2}{2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=6y^2-\frac{g_2}{2}.$$

Połóżmy:

$$\left.\begin{aligned} p&=x+y \\ q&=x-y \end{aligned}\right\}, \text{ a więc: } \left\{\begin{aligned} x&=\frac{p+q}{2} \\ y&=\frac{p-q}{2} \end{aligned}\right.,$$

to mamy stąd:

$$(a)\quad \frac{dp}{dt}=X-Y, \quad \frac{dq}{dt}=X+Y, \text{ a więc: } \quad (b)\quad \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=X^2-Y^2.$$

Dalej dostajemy z (a).

$$(c)\qquad \frac{d^2p}{dt^2}=\frac{dX}{dt}-\frac{dY}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=6(x^2+y^2)-g^2.$$

Wyrażając (b), (c) przez p, q mamy:

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=3p^2q+q^3-g_2q,\quad \frac{d^2p}{dt^2}=3p^2+3q^2-g_2.$$

Stąd — gdy drugi związek pomnożymy przez q i odejmiemy od niego związek pierwszy — wyniknie:

$$q\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt}=2q^3.$$

Pomnóżmy tu obustronnie przez $2\frac{dp}{dt}\Big/q^3$, to dostaniemy:

$$\frac{2q\dfrac{d^2p}{dt^2}\dfrac{dp}{dt}-2\left(\dfrac{dp}{dt}\right)^2\dfrac{dq}{dt}}{q^3}=4\frac{dp}{dt}.$$

Lewa strona jest tu $=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{q}\frac{dp}{dt}\right]^2$, a wskutek tego po scałkowaniu dostaniemy: $\left[\frac{1}{q}\frac{dp}{dt}\right]^2-4p=C'$. albo:

$$(e)\qquad \frac{1}{4}\left[\frac{X-Y}{x-y}\right]^2-(x+y)=C'.$$

Tu sprawdzimy, że $C'=\zeta$. Widocznie wartości $x=e_1$, $y=e_3$, przy $\zeta=e_2$ są rozwiązaniem równania różniczkowego (d). Wtedy bowiem lewa strona całkowego równania (B) daje sumę: $\omega_1+\omega_3$, a ta $=$

$$-\omega_2=\int\limits_{e_2}^{\infty}\frac{dz}{Z}\quad \text{[art. 131.]}$$

Z (e) dostajemy zaś w tym razie $-(e_1+e_3)=C'=e_2$. Ponieważ więc (e) daje w tym szczególnym razie C' właśnie w pożądanej wartości ζ, a jest stałe, więc i dla wszelkich innych (x, y) będzie: $\zeta=\frac{1}{4}\left[\frac{X-Y}{x-y}\right]^2-x-y$, a teorem Abla przedstawia się tu w taki sposób:

$$(B)\qquad \int\limits_{x}^{\infty}\frac{dx}{X}+\int\limits_{y}^{\infty}\frac{dy}{Y}=\int\limits_{\frac{1}{4}\left[\frac{X-Y}{x-y}\right]^2-x-y=\zeta}^{\infty}\frac{dz}{Z}$$

135. Odwrócenie całki eliptycznej. Określenie problemu Jacobi'ego. Gdy dane jest równanie różniczkowe:

$$(1)\qquad \frac{dx}{du}=X;\ \text{gdzie } X=\sqrt{x-a\,.\,x-b\,.\,x-c\,.\,x-d},$$

a chcemy je rozwiązać tak, aby x przedstawić przez u*), to prze-

*) O uwagi godnem całkowaniu równania (1) czytaj:
W. Kapteyn. *Nouvelle méthode pour l'intégration... Ann. scient. de l'école N. s.* T. 9. [S. 3., 1892.], str. 35—62.
O numerycznem odwracaniu całki elipt. por. C. Runge *Acta math.* T. 15., str. 221...

dewszystkiem trzeba zbadać własności funkcyi $x=\varphi(u)$, spełniającej właśnie to równanie. Aby tego dokonać, naznaczmy:

$$(2)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{du}\right)=X', \quad \frac{1}{2\,!}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)=X'', \ldots,$$

to dalej — uważając dx/du za funkcyę argumentu u, dostajemy:

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1!}\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{du}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{du}\right)\cdot\frac{dx}{du}=X'X=\xi_1, \\ \frac{1}{2!}\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{dx}{du}\right)=X''X^2+X'^2X=\xi_2, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Niech x_0 będzie skończone i różne od punktów a, b, c, d, a postarajmy się rozwiązać równanie różniczkowe w ten sposób, aby wartości x_0 odpowiadała wartość u_0 i aby rozwiązanie dawało wszystkie pary (x, u), zapełniające otoczenie miejsca (x_0, u_0). W tym celu zauważmy, że w otoczeniu punktu x_0 — gdy $X, X', \ldots$ na tem miejscu naznaczymy przez $X_0, X'_0, \ldots$ — mamy:

$$(4)\qquad \frac{dx}{du}=X_0+X'_0(x-x_0)+X''_0(x-x_0)^2+\ldots$$

Ten szereg zbieżny jest w każdym razie w kole: $|x-x_0|<R$ nie zawierającem w swem wnętrzu żadnego z punktów a, b, c, d, a gdy na obwodzie (r), gdzie $r=|x-x_0|<R$ ma $\left|\frac{dx}{du}\right|$ największą wartość g, to na tym całym obwodzie mamy [T. I., art. 163.]:

$$|X_0^{(m)}|<g\,r^{-m}, \quad m=0, 1, 2, \ldots.$$

Uważając $[dx/du]$ za funkcyę argumentu u, mamy — używając wyrażeń (3), których wartości na miejscu (x_0, u_0) nazwiemy $\xi^0_1, \xi^0_2, \ldots$, takie rozwinięcie w otoczeniu punktu u_0:

$$(5)\qquad \frac{dx}{du}=X_0+\xi^0_1(u-u_0)+\xi^0_2(u-u_0)^2+\ldots$$

Stąd wynika:

$$(6)\qquad x-x_0=X_0(u-u_0)+\xi^0_1\frac{(u-u_0)^2}{2}+\xi^0_2\frac{(u-u_0)^3}{3}+\ldots$$

Szereg ten — (o jego zbieżności będzie zaraz mowa) — spełnia równanie różniczkowe (1), albo — co jest tem samem — równanie różniczkowe (4). Gdy bowiem w (4) za każde $(x-x_0)$ wstawimy rozwinięcie (6), dojdziemy do związku (5), a ten jest znowu danem równaniem różniczkowem w otoczeniu miejsca $(x_0 u_0)$. W (6) mamy więc już formalną całkę równania (1), a aby teraz jej zbieżność zbadać, zauważmy równanie różniczkowe:

$$(7)\qquad \frac{dx}{du}=\frac{g}{1-\frac{x-x_0}{r}}=H.$$

Gdy założymy $|x-x_0|<r$, to:

$$H=g\left[1+\frac{x-x_0}{r}+\frac{(x-x_0)^2}{r^2}+\dots\right],\quad \text{gdzie tu:}\quad \frac{g}{r^m}=\frac{1}{m!}\left(\frac{d^mH}{dx^m}\right)_{x_0}=H_0^{(m)}.$$

Stąd wnosimy, że:

$$(8)\qquad |H_0^{(m)}|>|X_0^{(m)}|,\quad m=0,1,2,\dots$$

Równanie (7), pisząc je w formie:

$$(9)\qquad \left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)dx=g\,du,$$

możemy już zcałkować, a przestrzegając, aby x_0, u_0 były wartościami odpowiadającemi sobie, dostajemy:

$$\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^2\frac{r}{2}=\frac{r}{2}-g(u-u_0),\quad \text{czyli:}\quad \left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^2=1-\frac{2g}{r}(u-u_0).$$

Po rozwiązaniu dochodzimy do całki:

$$x-x_0=r\left[1+\sqrt{1-\frac{2g}{r}(u-u_0)}\right],$$

która widocznie w otoczeniu punktu u_0 rozwija się na szereg:

$$x-x_0=H_0(u-u_0)+h_1\frac{(u-u_0)^2}{2}+h_2\frac{(u-u_0)^3}{3}+\dots$$

zbieżny, gdy $|u-u_0|<\frac{r}{2g}$. Lecz z drugiej strony spółczynniki tego szeregu można określić w ten sposób, jak spółczynniki szeregu (6), a więc położyć:

$$h^0_1=H'_0H_0,\quad h^0_2=H_0''H_0{}^2+H_0'^2H_0,\ \dots.$$

a z tych form, gdy uwzględnimy nierówności (8), wynika:

$$|\xi^0_1|<|h^0_1|,\quad |\xi^0_2|<|h^0_2|,\ \dots.$$

Z tego wnosimy, że i szereg (6) będzie zbieżny w zakresie $|u-u_0|<\frac{r}{2g}$, a stąd twierdzenie:

I. *Równanie różniczkowe* (1) *daje w otoczeniu takiego miejsca* (x_0, u_0), *w którem* x_0 *różne jest od* a, b, c, d, *całkę* x *wyrażającą się zwykłym zbieżnym szeregiem potęgowym argumentu* $(u-u_0)$. *W razie* $u_0=\infty$ *trzeba* $(u-u_0)$ *zamienić na* u^{-1}.

Gdy dla $u=u_0$ ma być $x=x_0=a$, kładziemy $x=a+z^2$, a wtedy z równania (1) dostajemy równanie różniczkowe:

$$\frac{dz}{du}=\frac{1}{2}\sqrt{(z^2-b')(z^2-c')(z^2-d')}$$

*

a do tego równania — ponieważ $z=0$ jest różne od b', c' d' — zastosować można także twierdzenie I. Dostaniemy więc:

$$z=(u-u_0)\mathfrak{P}_1(u-u_0),\quad z^2=(u-u_0)^2\mathfrak{P}_2(u-u_0),\quad \text{a}$$
$$x=a+(u-u_0)^2\mathfrak{P}_2(u-u_0).$$

A więc i w otoczeniu każdego z punktów a, b, c, d, okazuje się x regularną funkcyą argumentu u.

Gdy wreszcie będzie $x=x_0=\infty$, to położymy $x=z^{-1}$, a wtedy dostaniemy:

$$\frac{dz}{du}=-\sqrt{1-az\,.\,1-bz\,.\,1-cz\,.\,1-dz.}$$

Stąd — podług tw. I. — wyniknie:

$$z=(u-u_0)\mathfrak{P}(u-u_0)\quad \text{i}\quad x=P(u-u_0)$$

z odjemnymi wykładnikami tylko do skończonego stopnia.

Gdy $u_0=\infty$, mamy stąd $x=P_1(u)$ z wykładnikami odjemnymi rosnącymi *in inft.* Zbierając te uwagi, dochodzimy do wniosku:

II. *Równanie różniczkowe* $\frac{dx}{du}=X$ *rozwiązuje się taką całką* x, *która w całej nieograniczonej płaszczyźnie* (u) *jest jednoznaczną; dla skończonych* u *posiada tylko bieguny, a punkt istotnie osobliwy występuje dopiero w nieskończoności. Całka* x *jest więc funkcyą, która się daje wyrazić ilorazem dwóch bezustannie zbieżnych szeregów argumentu* u. *)

Z (1) przy warunku, aby x_0 odpowiadało wartości u_0, dostajemy:

$$u-u_0=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{X}, \tag{10}$$

a tu prawa strona jest eliptyczną całką pierwszego rodzaju. Górna

---

*) W teoryi równań różniczkowych znaleźć można takie twierdzenie:

Aby całka x równania różniczkowego $\frac{dx}{du}=f(x)$ była jednoznaczną funkcyą argumentu u, muszą zajść takie warunki (konieczne i dostatezzne):

1°) Każdy punkt x, na którym jest $f(x)=\infty$, ma być punktem rozgałęzienia funkcyi $f(x)$.

2°) W swych punktach rozgałęzienia ξ, dających skończone $f(x)$, ma mieć $f(x)$ rozwinięcia postaci:

α) $f(x)=A(x-\xi)^{\frac{p+1}{p}}+B(x-\xi)^{\frac{p+2}{p}}+\ldots$, gdy $u=\infty$;

β) $f(x)=A(x-\xi)^{\frac{p-1}{p}}+B(x-\xi)^{\frac{p}{p}}+\ldots$, gdy $u=u_0$, skończone

W otoczeniu miejsca $x=\infty$ ma mieć $f(x)$ rozwinięcie:

$f(x)=Ax^{-2}+Bx^{-1}+C+Dx+\ldots$, albo: $f(x)=Ax^{-1}+B+Cx+\ldots$,

bez różnicy, czy u skończone lub nieskończone, a wreszcie rozwinięcie:

jej granica x jest według tw. II. jednoznaczną funkcyą argumentu $u-u_0$ (t. j. wartości samej całki).

Niechże ta funkcya $=\varphi(u)$, to mamy: $x=\varphi(u)$, a wyrażanie tego x przez u w opisany sposób, nazywa się **odwracaniem** całki (10). Lecz całka (10) ma dwa peryody Ω, Ω', takie, że każdy jej inny peryod przedstawia się w postaci:

(11) $$m\Omega+m'\Omega',\quad m \gtreqless m'=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Wskutek tego jedna i ta sama wartość x nie tylko $=\varphi(u)$, ale jeszcze $=\varphi(u+m\Omega+m'\Omega')$.

Ponieważ u jest dowolne, więc funkcya φ jest dwuperyodyczna, a jej wszystkie peryody mają postać (11). Przyjmijmy bowiem, że istnieje jeszcze peryod, różny od peryodów (11). Ten musiałby być i peryodem całki (10); jako taki (por. własności powierzchni Riemanna art. 110., tw. V.), musi być zawarty w (11), a założenie nasze było fałszywe. Peryody Ω, Ω', dające już **wszystkie** peryody funkcyi nazywają się **pierwotnymi**.

Poznawszy istotę odwracania całki eliptycznej pierwszego rodzaju, zauważmy dowolny obraz algebraiczny $f(xy)=0$ rodzaju ϱ i utwórzmy w nim ϱ funkcyj $H_\alpha(xy)$ rodzaju pierwszego [art. 72]. Połóżmy:

$$du_\alpha=\sum_\beta H(x_\beta y_\beta)_\alpha dx_\beta,\quad \alpha=1, 2, \ldots, \varrho,$$

to rozwiązanie tych współistniejących równań różniczkowych w ten sposób, aby każde x_β wyrazić w funkcyi argumentów $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ jest najogólniejszym problemem odwracania, wprowadzonym przez Jacobi'ego. Zajmować się tem szczegółowo, nie leży w zakresie tej książki. Ograniczamy się więc tylko do tego krótkiego określenia, przechodząc do dalszego badania odwróceń całki eliptycznej, a przedewszystkiem nasamprzód do badania funkcyj jednoznacznych i peryodycznych jednej tylko niezależnej zmiennej.

$$f(x)=Ax^{\frac{p+1}{p}}=Bx^{\frac{p}{p}}+Cy^{\frac{p-1}{p}}=\ldots,$$ gdy $u=u_0$, skończone, a rozwinięcie:
$$f(x)=Ax^{\frac{p-1}{p}}=Bx^{\frac{p-2}{p}}=\ldots,$$ gdy $u=\infty$.

[W badaniu miejsca $u=\infty$, trzeba już odrazu u zastąpić przez u^{-1}].

4°) Po przyjęciu tych wyliczonych wypadków ma być zresztą $f(x)$ zawsze regularną. Funkcya:

$$X_n=\sqrt{x-a_1 . x-a_2 \ldots x-a_n},\quad n>4$$

nie spełni w równaniu różniczkowem $\frac{dx}{du}=X_n$ nigdy warunków wyżej wyliczonycu, a stąd wynika, że całka x tego równania **nie jest funkcyą jednoznaczną**.

136. Peryodyczność funkcyj jednoznacznych. Niech $\varphi(u)$ będzie jednoznaczną funkcyą [bez miejsca istotnie osobliwego w skończoności], i niech posiada dwa peryody Ω, Ω'. Nie wchodząc w to, skąd wzięła początek ta funkcya i czy Ω, Ω' są peryodami pierwotnymi, możemy być pewni, że $m\Omega+m'\Omega'$, gdy m, m' są całkowite, są wtedy także peryodami — może nie wszystkimi jeszcze — funkcyi $\varphi(u)$. O peryodach Ω, Ω' — zakładając, że już $h'\Omega$, $h'\Omega'$ z żadnem h' ułamkowem dodatniem nie są peryodami — da się udowodnić takie twierdzenie:

I. *Jeżeli funkcya $\varphi(u)$ ma posiadać wistocie dwa peryody Ω, Ω' takie, że $h'\Omega$, $h'\Omega'$ z ułamkiem właściwym $h'>0$ już nie są peryodami, to stosunek Ω/Ω' nie może się wyrazić liczbą rzeczywistą.*

1°) Niech Ω/Ω' = wymiernemu ułamkowi p/q, w którym przyjąć można p, q pierwsze względem siebie, a ani p, ani q nie jest $=1$. Wtedy dadzą się dobrać zawsze dwie liczby całkowite g, h takie, że $hp-gq=1$. Zauważmyż peryod $h\Omega+g\Omega'$, Ponieważ $\Omega'=\frac{q}{p}\Omega$, więc napisać możemy:

$$h\Omega+g\Omega'=h\Omega+\frac{gq}{p}\Omega=\frac{\Omega}{p}.\quad \text{Stąd wyniknęłoby:}$$

$$\varphi(u)=\varphi\left(u+\frac{\Omega}{p}\right),$$

co jednak sprzeciwia się założeniu o peryodzie Ω. Nie może więc być $\Omega/\Omega'=p/q$.

2°) Niech $\Omega/\Omega'=\alpha$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą niewymierną. Rozwińmy α na ułamek łańcuchowy i zauważmy dwa po sobie bezpośrednio następujące wartości przybliżone: p/q, p'/q'. Temi wartościami zamknięte jest α. Połóżmyż:

$$\frac{\Omega}{\Omega'}=\frac{p}{q}+h\left(\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}\right),\quad |h|<1,$$

to z uwagi, że $\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}=\pm\frac{1}{qq'}$, mamy także:

$$\frac{\Omega}{\Omega'}=\frac{p}{q}\pm\frac{h}{qq'},\quad \text{a stąd:}$$

$$q\Omega-p\Omega'=\pm\frac{h}{q'}. \tag{1}$$

Po lewej stronie mamy tu peryod; prawa strona zaś, z uwagi, że h jest zawsze ułamkiem, a q można dowolnie zwiększać, może co do swej bezwzględnej wartości być mniejszą od dowolnie małej, dodatniej ilości ε. Równanie (1) wskazywałoby zatem, że funkcya może posiadać peryody dowolnie małe. Ale wtedy funkcya $\varphi(u)$ w otoczeniu dowolnego miejsca u przybiera na nieskończenie wielu miejscach tę samą wartość, a taka funkcya redukuje się do stałej. Założenie więc $\Omega / \Omega' = a$ trzeba także odrzucić, a twierdzenie I. mamy dowiedzione. Z tych uwag wynika naodwrót:

II. *Gdy dwa peryody* $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega'}$ *są takie, że* $\Omega / \overline{\Omega'} = p / q$, *to w obszarach* $h\overline{\Omega}$, $h\overline{\Omega'}$, $h = (0 \ldots 1)$ *muszą się znajdować peryody, a najmniejsze z nich co do bezwzględnej wartości muszą mieć jednaką wartość* ω. *Wtedy* $\Omega = pk\omega$, $\overline{\Omega'} = qk\omega$, *gdzie* k *jest liczbą całą, a funkcya jest tylko jednoperyodyczną, [o peryodzie* ω*].*

Wróćmy do dwóch istotnie różnych peryodów Ω, Ω', które krótko najmniejszymi nazywać będziemy. Ich stosunek — według tw. I. — jest koniecznie urojony. Gdy więc na płaszczyźnie (u) zauważymy pewien punkt dowolny u, a więc dla wygody $u=0$, i naznaczymy na niej punkta $P_{mm'} = m\Omega + m'\Omega'$, $m \gtreqless m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, to te wszystkie punkta będą przecięciami dwóch gromad, równoległych do siebie prostych. W jednej gromadzie będą wszystkie proste równoległe do $OP_{10} = O\Omega$, a w drugiej do $OP_{01} = O\Omega'$. Zbiór pierwszych prostych naznaczać będziemy przez (Ω), a drugich przez (Ω'). Punkta:

$$u=0, \ \Omega, \ \Omega', \ \Omega + \Omega'$$

tworzą równoległobok R (fig. 78.), a dwie wspomniane gromady prostych podzielą całą płaszczyznę (u) na same równoległoboki, przystające do R i przytykające do siebie. Wartości, jakie funkcya $\varphi(u)$ przybiera w R, odtwarzają się w każdym innym równoległoboku w ten sposób, że jeżeli u' leży w R, a w tym punkcie jest $\varphi(u') = c'$, to także:

$$\varphi(u' + P_{mm'}) = c',$$

a punkt $u' + P_{mm'}$ leży koniecznie w pewnym równoległoboku, różnym od R, i leży w nim tak samo, jak u' w R. Z tego powodu nazywają R (lub którykolwiek inny równoległobok) równoległobokiem peryodyczności. Dwa punkta u, u', których różnica wynosi $P_{mm'}$, nazywają równoważnymi albo odpowiednimi.

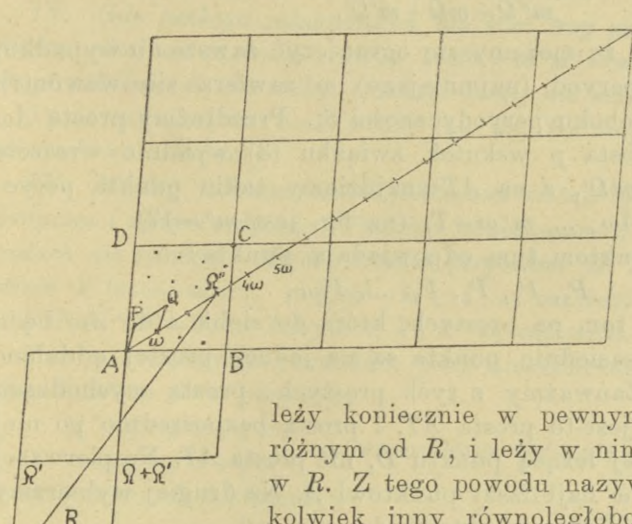


Fig. 78.

W równoległoboku którymkolwiek dość jest uwzględnić dwa tylko boki przyległe. Drugie dwa bowiem przyległe boki zawierają same punkta równoważne z punktami, leżącymi na pierwszej parze. Z wierzchołków wystarcza jeden tylko uwzględnić (punkt przecięcia się zatrzymanych boków.)

Lecz dalej nie można wykluczyć, że funkcya $\varphi(u)$ posiada jeszcze trzeci peryod Ω'', który nie spada z żadnym z punktów $P_{mm'}$. W takim razie mogą zajść dwie możliwości:

A) Między liczbami całkowitemi (dodatniemi i ujemnemi) można znaleść trzy: μ'', μ', μ takie, że zajdzie związek:

(2) $$\mu''\Omega''=\mu\Omega+\mu'\Omega'.$$

B) Równanie (12) nigdy zajść nie może.

Aby funkcyę w obydwu tych wypadkach zbadać i te wypadki należycie od siebie odróżnić, przyjmijmy nasamprzód, że Ω'' nie leży wewnątrz równoległoboku R, ale mieści się w pewnym równoległoboku $S_1=ABCD$ (fig. 78.) Wtedy różnica $\Omega''-A$, jako różnica dwóch peryodów, jest znowu pewnym peryodem $\overline{\Omega}$. Wynajdźmy — jeżeli $\overline{\Omega}$ na prostej $A\Omega''$ nie jest najmniejszym peryodem — najmniejszy na $A\Omega''$ leżący peryod, to on będzie $=\frac{1}{n}\overline{\Omega}=\omega$. Stąd mamy $\Omega''-A=n\omega$, czyli $\Omega''=A+n\omega$, a wstawiwszy to w (2), dostaniemy i tu związek:

(3) $$m''\Omega=m\Omega+m'\Omega'.$$

Z tego widać, że możemy się ograniczyć zawsze do wypadku, w którym trzeci peryod (najmniejszy) ω zawiera się wewnątrz pewnego równoległoboku peryodyczności S_1. Przedłużmy prostą $A\omega$ poza ω, to ta prosta p wskutek związku (3) wpadnie wreszcie w punkt $T=m\Omega+m'\Omega'$, a na AT znajdziemy takie punkta peryodów: ω, 2ω, 3ω, 4ω, ..., $m''\omega=T$, (na fig. jest $m''=17$).

Gdy w S_1 punktom tym odpowiadają punkta:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots,\ P_{m''},$$

to one rozłożą się tam na prostych, które do siebie i do $A\omega$ będą równoległe. Dwa sąsiednie punkta są na jednej prostej oddalone od siebie o $|\omega|$. Zauważmy z tych prostych: prostą wychodzącą z wierzchołka A, jest-to prosta AT, i prostą bezpośrednio po niej następującą a bliżej leżącą punktu D, niż prosta AT. Na pierwszej z nich jest punkt ω najbliższy punktowi A. Na drugiej wybierzmy także punkt P najbliższy punktowi A.

W trójkącie $AP\omega$ nie zawiera się z pewnością żaden punkt peryodu. Ale gdy i ten trójkąt dopełnimy do równoległoboku

$Z = APQ\omega$, to i w tym równoległoboku żadnego punktu peryodu nie będzie. Zawiera się on bowiem między dwiema bezpośrednio po sobie następującemi prostemi. Co się zaś tyczy jego obwodu, to ω i P są punktami peryodu, a że bok $A\omega = |\omega|$ i bok $PQ = |\omega|$, więc tylko wierzchołki A, P, Q, ω są punktami peryodu.

Nazwijmyż $P - A = \omega'$ i poprowadźmy gromady prostych równoległych: (ω), (ω'), to możemy być pewni, że poza punktami $m\omega + m'\omega'$ już żadnych punktów peryodu nie ma; ω, ω' są więc peryodami pierwotnymi, a funkcya $\varphi(u)$ jest tylko dwuperyodyczną. Stąd twierdzenie:

III. *Gdy między trzema peryodami Ω, Ω', Ω'' danej jednoznacznej funkcyi zachodzi związek:*

$$m''\Omega'' = m\Omega + m'\Omega',$$

to funkcya jest tylko dwuperyodyczna o peryodach pierwotnych ω, ω', dających się wyprowadzić z Ω, Ω', Ω''.

Rozbierzmy teraz wypadek *B)*. W tym razie prosta p dowolnie przedłużona, dopiero w nieskończoności trafi punkt:

$$[m\Omega + m'\Omega']_{\substack{m = \infty \\ m' = \infty}}$$

Na niej dostajemy nieskończoną mnogość punktów ω, 2ω, 3ω, ..., *in inft.* Im w równoległoboku odpowie wszędzie gęsta mnogość punktów peryodu: P_1, P_2, P_3, ..., *in inft.*, a funkcya $\varphi(u)$ musi się zredukować do stałej. Mamy więc twierdzenie:

IV. *Gdy funkcya jednoznaczna ma mieć trzy peryody Ω, Ω', Ω'', a między nimi nie zachodzi relacya postaci $m''\Omega'' = m\Omega + m'\Omega'$, to taka funkcya redukuje się do stałej, (funkcyi takiej nie ma).*

Ponieważ innych możliwości jak *A)*, *B)* niepodobna znaleść, więc stąd wnioskujemy:

IV. ***Między jednoznacznemi funkcyami można tylko znaleść jednoperyodyczne i dwuperyodyczne. Funkcye jednoznaczne o więcej niż dwóch peryodach nie istnieją. Między trzema peryodami Ω, Ω', Ω'', wyjętymi dowolnie z $(m\omega + m'\omega')$, $m \gtreqless m' = 0, \pm 1, \ldots$ zachodzi zawsze związek $k\Omega + k'\Omega' + k''\Omega'' = 0$, w którym k, k', k'' są całkowite.***

Par pierwotnych peryodów jest nieskończenie dużo. Zauważmy bowiem dwa peryody:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p\,\omega + q\,\omega' \\ \omega_2 &= p'\omega + q'\omega' \end{aligned}, \quad \text{z warunkiem } pq' - p'q = \pm 1,$$

to z tych równań dostajemy:

$$\omega = P.\omega_1 + Q\omega_2, \quad \omega' = P'\omega_1 + Q'\omega_2;$$

P, P', Q, Q' są całkowite. Z tego wynika, że dowolny peryod $m\omega + m'\omega'$ będzie także liniową jednorodną funkcyą o spółczynnikach całkowitych peryodów ω_1, ω_2. Peryody ω_1, ω_2 są więc również pierwotnymi. Równoległobok utworzony na zasadzie dowolnej pary pierwotnych peryodów, nazywa się zasadniczym.

137. Funkcye eliptyczne Jacobi'ego. Gdy w równaniu różniczkowem (1) — art. 135. — założymy:

$$X = \sqrt{1-x^2 . 1-k^2x^2} = \Delta(x, k),$$

a wartości $u=0$ ma odpowiadać $x=0$, to mamy odwrócić całkę:

$$(1) \qquad u = \int_0^x \frac{dx}{\Delta(x,k)}.$$

Połóżmy: $x = sin\varphi$, $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}$, to zamiast (1) mieć będziemy:

$$(2) \qquad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Jacobi kładzie $\varphi = amu$ *(amplitudo u)*, wskutek tego określa x jako *sin amu*. Gudermann używa krótszego oznaczania: $x = snu$. Taka funkcya x jest jednoznaczną z miejscem istotnie osobliwem w $u = \infty$ i ma wartość $x=0$, gdy $u=0$. Lecz na podstawie dotychczasowych poszukiwań możemy odrazu wnioskować, że:

$$snu = sn(u + 4mK + 2nK'i),$$

co znaczy, że snu jest funkcyą dwuperyodyczną o dwóch pierwotnych peryodach $4K$, $2K'i$.

Wprowadźmy dalej za Jacobim dalsze funkcye:

$$(3) \qquad \sqrt{1-x^2} = cos\,\varphi = cos\,am\,u, \quad \sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{1-k^2sin^2\varphi} = \Delta\,am\,u,$$

które podług Gudermanna znaczą krócej przez cnu, dnu, a w których pierwiastki określamy tak, aby $cn0 = 1$, $dn0 = 1$.

Funkcye cnu, dnu są — jak zaraz zobaczymy — jednoznacznemi funkcyami, a pierwiastki uwidocznione w ich określeniach (3) są tylko śladem związków:

$$(4) \qquad sn^2u + cn^2u = 1, \quad dn^2u + k^2sn^2u = 1.$$

Połóżmy bowiem w całce (1): $1-x^2 = z^2$, to dostaniemy:

$$u = -\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}}, \quad k^2 + k'^2 = 1,$$

a odwrócenie tej całki eliptycznej, znowu rodzaju pierwszego, określa $z=cnu$ jako funkcyę jednoznaczną z miejscem istotnie osobliwem tylko w nieskończoności.

Podobnie, gdy w całce (1) położymy $1-k^2x^2=z^2$, mieć będziemy:

$$u=-\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}},$$

a ta całka jest znowu eliptyczną rodzaju pierwszego i daje $z=dnu$ jako funkcyę jednoznaczną znowu z miejscem istotnie osobliwem tylko w nieskończoności.

Mając to — uwzględnijmy teorem dodawania całki (1), dany w Pd. 1. art. 134. Połóżmy:

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x}=u, \text{ a więc } x=snu, \quad \int_0^y \frac{dy}{\Delta y}=v, \text{ a więc } y=snv,$$

to wtedy:

$$\int_0^\zeta \frac{dz}{\Delta z}=(u+v); \quad \zeta=sn(u+v), \quad \text{a}$$

$$(\alpha) \qquad sn(u+v)=\frac{sn\,u.cn\,v.dn\,v+sn\,v.cn\,u.dn\,u}{1-k^2sn^2u.sn^2v}.$$

Połóżmy dla krótkości:

$$snu=s_1,\ snv=s_2,\ cnu=c_1,\ cnv=c_2,\ dnu=d_1,\ dnv=d_2,$$

to z (α), uwzględniając $[cn(u+v)]^2=1-[sn(u+v)]^2$, dostaniemy:

$$(5) \qquad [cn(u+v)]^2=\frac{(1-k^2s_1{}^2s_2{}^2)^2-(s_1c_2d_2+s_2c_1d_1)^2}{(1-k^2s_1{}^2s_2{}^2)^2}.$$

Po wprowadzeniu tu:

$$c_1d_1=\sqrt{1-(1+k^2)s_1{}^2+k^2s_1{}^4}, \quad c_2d_2=\sqrt{1-(1+k^2)s_2{}^2+k^2s_2{}^4}$$

będzie można licznik sprowadzić do postaci:

$$[\sqrt{1-s_1{}^2}.\sqrt{1-s_2{}^2}-s_1s_2\sqrt{1-k^2s_1{}^2}\sqrt{1-k^2s_2{}^2}]^2=(c_1c_2-s_1s_2d_1d_2)^2.$$

Wstawiając to w (5) i pierwiastkując po obydwu stronach, otrzymamy:

$$(\beta) \qquad cn(u+v)=\frac{cn\,u.cn\,v-sn\,u.sn\,v.dnu.dn\,v}{1-k^2sn^2u.sn^2v}.$$

Pierwiastka użyto ze znakiem $+$, aby przy $u=v=0$ okazało się stąd $cn0=+1$. W analogiczny sposób dojdziemy do formuły:

$$(\gamma) \qquad dn(u+v)=\frac{dnu.dn\,v-k^2snu.snv.cnu.cnv}{1-k^2sn^2u.sn^2v}.$$

Równania (α), (β), (γ) określają prawidła dodawania trzech funkcyj eliptycznych Jacobi'ego $sn\,u, cn\,u, dn\,u$.

Co się tyczy pochodnych trzech poznanych funkcyj, to dostajemy przedewszystkiem z równania (1):

$$\frac{dx}{du}=\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}, \quad \text{czyli:} \quad \frac{d(sn u)}{du}=cn\,u.dn\,u.$$

Dalej z określeń $cn\,u=\sqrt{1-sn^2u}$, $dn\,u=\sqrt{1-k^2sn^2u}$ dostajemy:

$$\frac{d(cn\,u)}{du}=-sn\,u.dn\,u, \quad \frac{d(dn\,u)}{du}=-k^2 sn\,u.cn\,u.$$

Zajmijmy się teraz pierwotnymi peryodami funkcyj $cn\,u, dn\,u$ — [$sn\,u$ ma pierwotne peryody $4K$, $2K'i$]. Wprowadzając amplitudę φ mamy:

$$(a) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=K.$$

Lecz — ponieważ także:

$$\int_{n.\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=K, \quad n=0. \pm1, \pm2, \ldots -$$

więc całka:

$$(b) \qquad \int_0^{\pm n\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\pm n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\pm nK, \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Z (a) wynika:

$$(c) \qquad \frac{\pi}{2}=am\,K,$$

z (b) zaś mamy $\pm n.\frac{\pi}{2}=am(\pm nK)$, a uwzględniając tu ($c$), dostaniemy: $\pm n\frac{\pi}{2}=am(\pm nK)=\pm n.am\,K$, $n=1, 2, 3, \ldots$

W szczególności mamy:

$am(\pm K)=\pm\frac{\pi}{2}$, $am(\pm 2K)=\pm\pi$, $am(\pm 3K)=\pm\frac{3}{2}\pi$, $am(\pm 4K)=\pm 2\pi$, a stąd dostajemy wartości.

$$(A) \quad \left|\begin{array}{lll} sn(\pm K)=\pm1, & cn(\pm K)=0, & dn(\pm K)=+k', \\ sn(\pm 2K)=0, & cn(\pm 2K)=-1, & dn(\pm 2K)=+1, \\ sn(\pm 3K)=\mp1, & cn(\pm 3K)=0, & dn(\pm 3K)=+k', \\ sn(\pm 4K)=0, & cn(\pm 4K)=+1, & dn(\pm 4K)=+1. \text{*)} \end{array}\right.$$

*) Do każdego z notowanych tu i w dalszym ciągu miejsca, dołącza się oczywiście zawsze cała nieskończona mnogość miejsc równoważnych.

Na podstawie tych wartości dojdziemy, stosując prawidła dodawania (α), (β), (γ), do takich wzorów:

$$
(B)\qquad \left|\begin{aligned}
sn(u \pm K) &= \pm \frac{cn\,u}{dn\,u},\\
cn(u \pm K) &= \mp \frac{k' sn\,u}{dn\,u},\\
dn(u \pm K) &= +\frac{k'}{dn\,u}.
\end{aligned}\right.
$$

Dalej zmieniając tu u na $u \pm K$, albo używając znowu prawideł dodawania (α), (β), (γ), mieć będziemy:

$$
(C)\qquad \left\{\begin{aligned}
sn(u \pm 2K) &= -sn\,u,\\
cn(u \pm 2K) &= -cn\,u,\\
dn(u \pm 2K) &= dn\,u.
\end{aligned}\right.
$$

Zmieńmy tu u na $(u \pm K)$ i użyjmy wzorów (B), to otrzymamy:

$$
(D)\qquad \left|\begin{aligned}
sn(u \pm 3K) &= \mp \frac{cn\,u}{dn\,u},\\
cn(u \pm 3K) &= \pm \frac{k' sn\,u}{dn\,u},\\
dn(u \pm 3K) &= +\frac{k'}{dn\,u}.
\end{aligned}\right.
$$

Wreszcie wszystkie 3 funkcye na miejscu $(u+4K)$ dostaną tę samą wartość, co na miejscu u. Z tego widzimy, że *z peryodów, mających się przedstawiać w wielokrotnościach całki K, mają $sn\,u$, $cn\,u$ peryod $4K$, a $dn\,u$ peryod $2K$.*

Dołączmy tu jeszcze funkcyę $tn\,u = \frac{sn\,u}{cn\,u}$, to z ($C$) wnosimy, że ta nowa funkcya ma peryod $2K$.

Zamiast $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$, $tn\,u$, można także pisać wyraźnie: $sn(u,k)$, $cn(u,k)$, $dn(u,k)$, $tn(u,k)$ *), co przypomina moduł całki, z której wzięła początek funkcya $sn\,u$.

Pochodna: $\frac{d}{du} tn(u,k) = \frac{dn\,u}{(cn\,u)^2}$, a gdy zważymy, że:

$$
(cn\,u)^2 = \frac{1}{1+tn^2u}, \quad dn\,u = \sqrt{1 - \frac{k^2 tn^2 u}{1+tn^2 u}} = \frac{\sqrt{1+k'^2 tn\,u}}{\sqrt{1+tn^2 u}},
$$

dostaniemy:

---

*) Zamiast $sn\,u$, pisze Abel $\lambda(u)$, a Briot i Bouquet zamiast $sn(u)$, $cn\,u$, $dn\,u$ piszą: $\lambda(u)$, $\mu(u)$, $\nu(u)$.

$$\frac{d}{du}tn(u,k)=\sqrt{(1+tn^2u)(1+k'^2tn^2u)}.$$

Połóżmy $tn(u,k)=\xi$, to mamy:

$$\frac{d\xi}{du}=\sqrt{(1+\xi^2)(1+k'^2\xi^2)},$$

a funkcya $tn(u,k)$ jest widocznie odwróceniem całki:

$$u=\int_0^\xi\frac{d\xi}{\sqrt{(1+\xi^2)(1+k'^2\xi^2)}}.$$

Analogicznie funkcya $tn(u,k')$ będzie odwróceniem całki:

$$u=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}}$$

i posiadać będzie peryod $2K'$. Połóżmy tu $z=\frac{x}{i}$, gdzie $i=\sqrt{-1}$, to dostaniemy:

$$ui=\int_0^{zi}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

a stąd: $zi=sn(ui,k)$, czyli:

(6) $$sn(ui,k)=i\,tn(u,k').$$

Z tego równania możnaby wywnioskować, że $sn(u,k)$ posiada peryod $2K'i$. Po prawej bowiem stronie mamy funkcyę o peryodzie $2K'$, a stąd wnioskujemy, że:

$$sn(ui,k)=sn(ui+2K'i,k).$$

Gdy za ui napiszemy tu wprost u, mamy:

$$sn(u,k)=sn(u+2K'i,k).$$

Stosując związek (6), dostajemy dalej:

(7) $$cn(ui,k)=\sqrt{1+tn^2(u,k')}=\frac{1}{cn(u,k')}.$$

Że zaś $cn(ui+2K,k)=-cn(ui,k)$, podług (C), więc:

(8) $$cn(ui+2K,k)=-\frac{1}{cn(u,k')}.$$

Z drugiej strony jest:

$$cn(u+2K',k')=-cn(u,k'),\text{ znowu podług }(C).$$

Uwzględnijmyż to w (8), to mieć będziemy:

$$cn(ui+2K+2K'i,k)=\frac{1}{cn(u,k')}=cn(ui,k),$$

a pisząc u zamiast ui, dostaniemy: $cn(u+2K+2K'i,k)=cn(u,k)$, co znaczy: *funkcya* $cn\,u$ *ma peryody* $4K$, $2K+2K'i$. *Są-to zarazem jej pierwotne peryody.*

Przechodząc do funkcyi $dn\,u$, dostajemy:

$$dn(ui,k)=\sqrt{1+k^2tn^2(u,k')},$$

$$=\frac{\sqrt{cn^2(u,k')+(1-k'^2)\,sn^2(u,k')}}{cn(u,k')}$$

$$=\frac{\sqrt{1-k'^2sn^2(u,k')}}{cn(u,k')},\quad \text{czyli:}$$

$$(9)\qquad dn(ui,k)=\frac{dn(u,k')}{cn(u,k')}.$$

Że zaś: $dn(u+4K',k')=dn(u,k')$, $cn(u+4K',k')=cn(u,k')$, więc:

$$dn(ui+4K'i,k)=\frac{dn(u,k')}{cn(u,k')}=dn(ui,k).$$

Pisząc tu znowu u, zamiast ui, dostaniemy:

$$dn(u+4K'i,k)=dn(u,k),$$

co wskazuje, że *funkcya* $dn(u,k)$ *ma pierwotne peryody:* $2K$, $4K'i$.

Pd. 1. Jaki drugi peryod — oprócz $2K$ — ma $tn(u,k)$.

Pd. 2. Jakich całek odwróceniami będą funkcye:

$$\frac{1}{sn(u,k)},\ \frac{1}{cn(u,k)},\ \frac{cn(u,k)}{sn(u,k)}=ctn(u,k)?$$

W równaniu (6) zmieńmy u na $u\pm K'$. Po prawej stronie dostaniemy wtedy:

$$(10)\qquad i\,tn(u\pm K',k')=i\frac{sn(u\pm K',k')}{cn(u\pm K',k')}.$$

Lecz — zachowując zupełną analogię — mamy podług (B):

$$sn(u\pm K',k')=\pm\frac{cn(u,k')}{dn(u,k')},\quad cn(u\pm K',k')=\mp\frac{k\,sn(u,k')}{dn(u,k')},$$

a stosując to w (10), otrzymamy: $i.tn(u\pm K',k')=\frac{1}{k}\frac{1}{i\,tn(u,k')}$.

Że zaś $i.tn(u,k')=sn(ui,k)$, więc będzie:

$$i.tn(u\pm K',k')=\frac{1}{k.sn(ui,k)}.$$

Wracając teraz do równania (6) i pisząc tam wprost u, zamiast ui, dostajemy:

$$(a')\qquad sn(u\pm K'i,k)=\frac{1}{k.sn(u,k)}.$$

Analogicznie postępując z równaniami (7) i (9), dojdziemy do wzorów:

$(b')\quad cn(u\pm K'i,k)=\mp\frac{i\,dn(u,k)}{k\,sn(u,k)};\qquad (c')\quad dn(u\pm K'i,k)=\mp\frac{i\,cn(u,k)}{sn(u,k)}$

i t. d.

138. Miejsca zerowe i nieskończonościowe funkcyj Jacobi'ego. Ich wspólne peryody. Przejdźmy do miejsc zerowych i nieskonczonościowych funkcyj snu, cnu, dnu, [modułu k już teraz znowu nie uwidoczniamy]. Funkcya $sin\,\varphi$ posiada, jak wiadomo, wyłącznie miejsca zerowe jednokrotne: $\varphi=n\pi$, $n=0, \pm1, \ldots$ Funkcya więc snu będzie zerem, i to jednokrotnie jedynie na miejscach $2nK$, $n=0, \pm1, \ldots$ Z nich na wnętrze zasadniczego równoległoboku R_s o wierzchołkach: $(0,\ 4K,\ 2K'i,\ 4K+2K'i)$ przypadnie tylko dwa, a mianowicie:

$(a'')\qquad 0,\ 2K.$

Z określeń (4) — art. poprzedz. — wynika, że $cnu=0$ na tych miejscach u, na których $snu=\pm1$, a takie miejsca podług (A) — art. poprzedz. — są $\pm K, \pm 3K, \pm 5K, \ldots$ Z nich w równoległoboku R_c o wierzchołkach $(0,\ 4K,\ 2K+2K'i,\ 6K+2K'i)$ przypadają:

$(b'')\qquad K,\ 3K.$

Podobnie z (4) wnosimy, że $dnu=0$ na tych miejscach u, na których $snu=\pm\frac{1}{k}$. Połóżmyż w (a') — art. poprzedz. — $u=\pm K$, to właśnie mamy: $sn(\pm K\pm K'i)=\pm\frac{1}{k}$, a stąd wynika, że w równoległoboku R_d o wierzchołkach: $(0,\ 2K,\ 4K'i,\ 2K+4K'i)$ będzie $dnu=0$ na miejscach:

$(c'')\qquad K+K'i.\quad K+3K'i.$

Miejsca (a'') są niezawodnie już wszystkie, na których $snu=0$ w swoim równoległoboku R_s. Niebawem przekonamy się, że także w R_c, R_d innych już (nierównoważnych) miejsc zerowych jak (b''), (c'') nie znajdziemy.

Aby już naprzód módz rozstrzygnąć, ile miejsc nieskończonościowych funkcyi snu spodziewać się można w jej równoległoboku R_s, zauważmy naprzód dowolną dwuperyodyczną funkcyę $f(u)$ o takim charakterze, jak nasze rozważane funkcye. W swym równoległoboku peryodyczności R, niech $f(u)$ posiada m_1 miejsc zerowych, a m_2 miejsc nieskończonościowych. Boki równoległoboku R nazwijmy: l_1, l_2, l_3, l_4, a z nich (l_1, l_3), (l_2, l_4) niech będą parami boków przeciwległych. Gdy λ oznaczać będzie obwód równoległoboku, to według art. 121., (3), mieć będziemy:

$$(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=(l_1)+(l_2)-(l_3)-(l_4)=m_1-m_2.$$

Lecz $(l_1)=(l_3)$, $(l_2)=(l_4)$ wskutek peryodyczności funkcyi. Z tego wynika, że $m_1=m_2$, a to znaczy:

I. *Każda funkcya dwuperyodyczna bez miejsc istotnie osobliwych w skończoności, ma wewnątrz swego równoległoboku peryodyczności dokładnie tyle miejsc zerowych, ile ilość miejsc nieskończonościowych wynosi.*

Zauważmy jeszcze funkcyę $f(u)-c$, gdzie c jest skończone i $\neq 0$. Jestto również funkcya dwuperyodyczna o tych samych peryodach, co funkcya $f(u)$, a w równoległoboku peryodyczności R ma te same miejsca nieskończonościowe, co funkcya $f(u)$. Z tego wynika, że $f(u)$ będzie $=c$ na m_1 miejscach w R, a to znaczy:

II. *Każda funkcya dwuperyodyczna bez miejsc istotnie osobliwych w skończoności, przyjmuje w swoim równoległoboku peryodyczności każdą dowolną wartość tę samą ilość razy. Gdy ta ilość jest m, to funkcyę nazywają m^{go} stopnia.*

Uwaga. Z twierdzenia I. wynika, że gdyby funkcya $f(u)$ w równoległoboku nie miała mieć wcale miejsc zerowych (nieskończonościowych), to nie mogłaby także mieć i miejsc nieskończonościowych (zerowych). Taka funkcya miałaby więc mieć postać $e^{g(u)}$, gdzie $g(u)$ jest funkcyą całkowitą. Później dopiero rozstrzygniemy, czy taki wypadek w istocie zajść może.

Na twierdzeniu I. opierając się, możemy być pewni, że funkcya snu tylko dwa będzie posiadała miejsca nieskończonościowe w R_s, a aby je znaleść, zauważmy, że każde takie miejsce $u=v$ określi się równaniem:

$$v=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\Delta(x,k)}.$$

Połóżmy $x=-x'$, to mieć będziemy także:

$$v=-\int_0^{-\infty}\frac{dx'}{\Delta(x',k)}=+\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\Delta(x,k)},$$

a stąd wnosimy, że:

$$(1)\qquad 2v=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\Delta(x,k)}.$$

Niech tu to całkowanie odbywa się po nieograniczonej prostej SS', przechodzącej przez punkt $x=0$, a nachylonej do pierwszorzędnej osi pod kątem ψ (fig. 76., str. 483.). Pomyślmy z punktu $x=0$, jako środka, zakreślone półkole W o promieniu nieskończenie wielkim, a opierające się na SS'. Całkowanie po tem półkolu — gdy położymy $x=\varrho e^{\tau i}$ — da:

$$\lim_{\varrho=\infty}\int_{\psi}^{\psi+\pi}\frac{i\varrho e^{\tau i}d\tau}{\varDelta(\varrho e^{\tau i},k)}=0,$$

a z tego wynika, że całkując po zamkniętej drodze, złożonej z nieograniczonej prostej SS' i z nieograniczonego półkola W, dostaniemy na rezultat całkę (1). Że zaś SS' przecina koła K, K' po jednym tylko razie i to w dodatnim kierunku, więc dostaniemy:

$2v=4K-2K'i$, [art. 128.], a stąd: $v=2K-K'i$.

Takie jest miejsce nieskończonościowe v. Z niego powstaje cała nieskończona mnogość biegunów $(4n+2)K+(2n'-1)K'$, a z nich tylko jeden: $(2K+K'i)$ leży wewnątrz R_s. Trzebaby teraz oznaczyć jego powtarzanie się, które mogłoby być jedynie $=2$. Lecz że z (a') [art. poprzedz.] — gdy tam $u=0$ położymy — wynika $sn(K'i)=\infty$, a $K'i$ leży niezawodnie wewnątrz R_s, więc bieguny $K'i$, $(2K+K'i)$ mogą być tylko jednokrotne, a oprócz nich $sn\,u$ nie ma już w R_s żadnych innych miejsc nieskończonościowych.

Przechodząc do funkcyj:

$$cn\,u=\sqrt{1-sn^2u},\qquad dn\,u=\sqrt{1-k^2sn^2u},$$

widzimy z tych ich określeń, że one również na miejscach $K'i$, $(2K+K'i)$ są nieskończonościami i to jednokrotnie, a że te miejsca leżą i w R_c i w R_d, a wszelkie z niemi równoważne podług peryodów już-to funkcyi $cn\,u$, już-to funkcyi $dn\,u$ leżą już po za R_c i R_d, więc i te funkcye mają w R_c i R_d dwa tylko jednokrotne bieguny: $K'i$, $(2K+K'i)$.

To mając na uwadze, wywnioskujemy z tw. I., że funkcye $cn\,u$, $dn\,u$ w swych równoległobokach innych miejsc zerowych jak (b''), (c'') nie posiadają. Z wszystkich tych poszukiwań wynika:

III. *Funkcye eliptyczne Jacobi'ego:* $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ *posiadają pierwotne peryody:* $(4K, 2K'i)$, $(4K, 2K+2K'i)$, $(2K, 4K'i)$.

W równoległobokach peryodyczności: R_s, R_c, R_d, *posiadają po dwa jednokrotne miejsca zerowe:* $(0, 2K)$, $(K, 3K)$, $(K+K'i, K+3K'i)$ *i po dwa jednokrotne bieguny, te same dla wszystkich trzech funkcyj:*

$K'i$, $(2K+K'i)$.

Każdą dowolną wartość skończoną i $\neq 0$, *przyjmują te funkcye w swoich równoległobokach peryodyczności zawsze tylko dwa razy; są więc funkcyami drugiego stopnia.*

Funkcya $sn\,u$ ma niezawodnie peryody $(4K, 4K'i)$. Funkcya $cn\,u$ będzie miała $4K$, $2(2K+2K'i)-4K=4K'$ z pewnością także jako peryody, a wreszcie funkcya $dn\,u$ ma $2.2K=4K$, $4K'i$ także jako peryody. Z tego wynika:

IV. *Funkcye* $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$ *mają wspólną parę (niepierwotnych już) peryodów* $4K$, $4K'i$.

139. Funkcya Weierstrassa $\wp(u)$. Załatwiwszy się z odwróceniem całki (1) [art. 137.], co nas do funkcyj Jacobi'ego poprowadziło, zajmiemy się teraz całką:

$$u=\int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

albo — co jest tem samem — całką:

$$(1)\qquad u=\int_\infty^s \frac{ds}{-\sqrt{S}},\quad S=4s^3-g_2s-g_3=4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3).$$

Górną granicę s, jako funkcyę argumentu u, nazwał Weierstrass $\wp(u)$. Ma ona tu widocznie spełnić warunek, aby do wartości $u=0$, należało $\wp(0)=\infty$. Z równania (1) dostajemy:

$$(2)\qquad \frac{ds}{du}=-\sqrt{4s^3-g_2s-g_3},$$

a rozwiązanie tego równania różniczkowego z warunkiem, aby $u=0$, $s=\infty$ były wartościami do siebie należącemi, jest równoważne z odwróceniem całki (1). Połóżmyż w (2): $s=z^{-2}$, to dostaniemy:

$$(3)\qquad \frac{dz}{du}=\frac{1}{2}\sqrt{-g_3z^6-g_2z^4+4},\quad \text{a stąd:}$$

$$(4)\qquad u=2\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{-g_3z^6-g_2z^4+4}}.$$

Ponieważ punkt $z=0$ nie jest punktem rozgałęzienia funkcyi $\sqrt{-g_3z^6-g_2z^4+4}$, więc całka (4) — z uwagi, że wartości $u=0$, $z=0$ mają do siebie należeć — da w otoczeniu miejsca $u=0$ odwrócenie postaci $z=A.u+u^2\mathfrak{P}(u)$. Tutaj widocznie jest:

$$A=\left(\frac{dz}{du}\right)_{u=0}=\left(\frac{dz}{du}\right)_{z=0},$$

a to podług (3) jest $=1$. Lecz dalej, gdy naznaczymy $z=\psi(u)$, to z (4) za zmienieniem z na $(-z)$ wyniknie $-z=\psi(-u)$, a to wskazuje, że z jest funkcyą nieparzystą argumentu u. Połóżmyż:

$$z=u+au^3+bu^5+\ldots,\quad \text{to tu:}$$

$$a=\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3z}{du^3}\right)_{u=0}=\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3z}{du^3}\right)_{z=0},$$

a łatwo przez różniczkowanie formy (3) sprawdzić, że pochodna a jest zerem. Mamy więc: $z=u+bu^5+\ldots$, a że $s=z^{-2}$, więc ostatecznie dostaniemy rozwinięcie:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\mathfrak{P}_1(u) \tag{5}$$

bez wolnego wyrazu. Przytem zauważyć potrzeba, że z^2 jest już parzystą funkcyą, a więc i $\wp(u)$ jest taką funkcyą. *Funkcya eliptyczna $\wp(u)$ — jednoznaczna i bez miejsc istotnie osobliwych w skończoności — jest więc funkcyą parzystą, ma dwukrotny biegun w punkcie $u=0$, jest funkcyą stopnia 2^{go}, a jej pierwotnymi peryodami są [art. 131.]* $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Połóżmy:

$$\int_x^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}}=u, \text{ a więc: } x=\wp(u), \qquad \int_y^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}}=v, \text{ a więc: } y=\wp(v),$$

to w równaniu:

$$\int_x^\infty+\int_y^\infty=u+v=\int_\zeta^\infty \qquad \text{[art. 134, Pd. 3.]}$$

będzie $\zeta=\wp(u+v)$, a gdy uwzględnimy kształt ζ, dostaniemy:

$$\wp(u+v)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2-\wp(u)-\wp(v). \tag{6}$$

Takie jest prawidło dodawania funkcyi $\wp(u)$.

Z uwagi wreszcie na (2), dostajemy między $\wp(u)$, a $\wp'(u)$ związek:

$$(\wp'u)^2=4(\wp u-e_1)(\wp u-e_2)(\wp u-e_3), \tag{7}$$

który po spierwiastkowaniu przechodzi na:

$$\wp'(u)=-2\sqrt{\wp u-e_1}\sqrt{\wp u-e_2}\sqrt{\wp u-e_3}. \tag{8}$$

Forma (8) określa pochodnę $\wp'(u)$ jako funkcyę dwuwartościową, co stoi w sprzeczności z tem, że ta funkcya, jako pochodna funkcyi jednoznacznej $\wp(u)$, ma być również jednoznaczną. Sprzeczność ta jednak jest tylko pozorna. Forma (8) określa $\wp'(u)$ w całym rozważanym równoległoboku, a że $\wp(u)$ jest funkcyą stopnia 2^{go}, więc wszystkie punkta, zawarte w tym równoległoboku, podzielić można na 2 nieskończone gromady punktów (u_1), (u_2) o tej własności, że gdy z pierwszej gromady wyjmiemy punkt u_1, dający $\wp(u_1)=\varkappa$, to już w tej gromadzie nie znajdziemy ani jednego punktu u, dającego $\wp(u)=\varkappa$. W drugiej gromadzie znajdzie się tylko jeden punkt u_2, dający $\wp(u_2)=\varkappa$. Takie punkta u_1, u_2 są nierównoważne, bo ich różnica nie jest peryodem, [art. 136.], a gdy w jednym z nich określimy pochodnę $\wp'(u_1)$ przez:

$$\wp'(u_1)=-2\sqrt{\varkappa-e_1}\sqrt{\varkappa-e_2}\sqrt{\varkappa-e_3}, \tag{P_1}$$

to w drugim z nich położyć trzeba:

(P_2) $$\wp'(u_2) = +2\sqrt{\varkappa - e_1}\sqrt{\varkappa - e_2}\sqrt{\varkappa - e_3}.$$

[Znaku — używa się w formie (8) z tego powodu, że tak $\wp u$ jak $\wp' u$ definiujemy rozwinięciami w otoczeniu punktu $u = 0$, i przez to na sprzeczność nie natrafiamy].

Połóżmy w całce:

$$u = \int_s^{\infty} \frac{ds}{2\sqrt{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}},$$

$s = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{x^2}$, to po wszystkich skróceniach dostaniemy:

$$\sqrt{e_1 - e_3}.u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Z tego okazuje się, że $x = sn(\sqrt{e_1 - e_3}.u, k)$ i że więc:

(I) $$\wp(u) - e_3 = \frac{e_1 - e_3}{sn^2(\sqrt{e_1 - e_3}.u, k)}.$$

Posługując się dalej określeniami (3), [art poprzedz.], mieć będziemy:

(II) $$\frac{\wp u - e_1}{\wp u - e_3} = cn^2(\sqrt{e_1 - e_3}.u, k),$$

(III) $$\frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3} = dn^2(\sqrt{e_1 - e_3}.u, k).$$

W takich związkach pozostają funkcye Jacobi'ego z funkcyą $\wp(u)$ Weierstrassa.

Zauważmy związek I. Dla $u = 0$ daje on dwukrotny biegun funkcyi $\wp(u)$, jak być powinno. Lecz $sn(\sqrt{e_1 - e_3}.u, k)$ staje się jeszcze zerem, gdy $\sqrt{e_1 - e_3}.u = 2K$, a więc na miejscu $u = \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}}$. To miejsce jednak $= 2\omega_1$, (art. 131.) i jest już dla funkcyi $\wp(u)$ równoważne z miejscem $u = 0$. Z tego powodu odrzucić je już trzeba i powiedzieć: *Funkcya $\wp(u)$ ma w każdym swoim równoległoboku peryodyczności jeden tylko, ale dwukrotny biegun $u = 0$. Każdą więc także inną wartość skończoną przybiera w takim równoległoboku tylko na dwóch miejscach i jest eliptyczną funkcyą stopnia drugiego.*

Gdy równoległobok ma wierzchołki $(0, 2\omega_1, 2\omega_3, 2\omega_1 + 2\omega_3)$, to każdy z tych wierzchołków jest biegunem funkcyi. Lecz stosownie do określenia równoległoboku peryodyczności, jeden tylko z tych biegunów zatrzymać trzeba.

Z tego, co się dotąd o funkcyi $\wp(u)$ powiedziało, wynika, że ta funkcya na całej płaszczyźnie (u) posiada bieguny dwukrotne jedynie w punktach:

$$w=2\nu_1\omega_1+2\nu_3\omega_3, \quad \nu_1 \gtreqless \nu_3=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

a w otoczeniu dowolnego punktu w, rozwija się na szereg:

$$\wp(u)=\frac{1}{(u-w)^2}+\mathfrak{P}_1(u-w),$$

który — wskutek peryodyczności funkcyi — powstaje z (5) przez zmienienie tam u na $(u-w)$. Poza punktami w jeśt $\wp(u)$ zresztą wszędzie skończona, a stąd i z jej peryodyczności wynika bezpośrednio, że za obraniem dowolnie małej dodatniej ilości δ, można dostatecznie wielkiemi u, nie zbliżającemi się dowolnie do w, zawsze spełnić nierówność:

$$\left|\frac{\wp(u)}{u}\right|<\delta. \tag{9}$$

Ta uwaga będzie nam zaraz użyteczną.

Zakładając $|u|<|w|$, mamy:

$$\frac{1}{(u-w)^2}=\frac{1}{w^2}+\mathfrak{P}\left(\frac{u}{w}\right), \quad \text{a stąd:} \quad \frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}=\mathfrak{P}\left(\frac{u}{w}\right).$$

Zajmijmyż się sumą:

$$q(u)=\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right], \tag{10}$$

gdzie kreska ma przypominać, że w sumie opuszczono wyraz z wartością $w=0$, i zbadajmy, czy ta suma jest analityczną funkcyą argumentu u. W każdym razie, co już z kształtu (10) wnosimy, będzie to funkcya dwuperyodyczna o tych samych peryodach pierwotnych $2\omega_1$, $2\omega_3$, co funkcya $\wp(u)$. W tym celu napiszmy sumę $q(u)$ w postaci:

$$q(u)=\frac{1}{u^2}+u\sum{}'\frac{1-\frac{u}{2w}}{\left(1-\frac{u}{w}\right)^2}\cdot\frac{1}{w^3}. \tag{11}$$

Ponieważ czynniki: $\left|\frac{1-\frac{u}{2w}}{\left(1-\frac{u}{w}\right)^2}\right|$ pozostają skończone przy wszelkich skończonych u różnych od w, więc $q(u)$ będzie jednostajnie zbieżne poza wszelkiemi w i będzie analityczną funkcyą, jeżeli udowodnimy, że suma:

$$\sum{}'\left|\frac{1}{w^3}\right| \tag{12}$$

jest zbieżną. Aby ten dowód przeprowadzić, zauważmy na płaszczyźnie (u) równoległobok S_n (fig. 79.) o wierzchołkach:

$$P_1=2n(\omega_1+\omega_3),\quad P_2=2n(-\omega_1+\omega_3),$$
$$P_3=2n(-\omega_1-\omega_3),\quad P_4=2n(\omega_1-\omega_3),$$

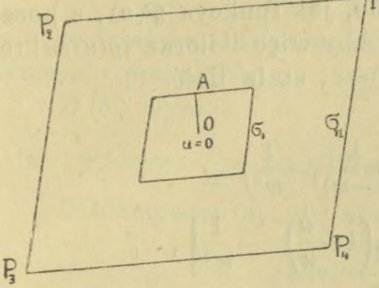


Fig. 79.

a jego obwód nazwijmy σ_n. Na całym obwodzie σ_n mamy punktów peryodu: $4(2n+1)-4=8n$, a gdy $n=1,2,3,\ldots$, to wszystkie peryody w podzielić możemy na grupy w ten sposób, że w $n^{\text{tą}}$ grupę wchodzi $8n$ peryodów, leżących na obwodzie σ_n. Gdy $|v|=0A$ jest najmniejszą odległością obwodu σ_1 od punktu $u=0$, to wszystkie w, leżące na σ_1, są takie, że $|w|>|v|$. Najmniejszą odległością obwodu σ_n od punktu $u=0$ będzie $n|v|$, a wszystkie w leżące na σ_n są tu znowu takie, że:

(13) $$|w|>n|v|.$$

Zauważmy — mając to — sumę $\sum\limits_{\sigma_n}\left|\frac{1}{w}\right|^{m+1}$, w którą wchodzą wszystkie w leżące na σ_n. Ponieważ takich w jest $8n$, więc uwzględniając nierówność (13), dostajemy:

$$\sum_{\sigma_n}\left|\frac{1}{w}\right|^{m+1}<\frac{8}{|v|^{m+1}}\frac{1}{n^m},$$

a gdy już wszystkie peryody w uwzględnimy, mieć będziemy:

$$\sum{}'\left|\frac{1}{w}\right|^{m+1}<\frac{8}{|v|^{m+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}.$$

Prawa strona jest rozbieżną dla $m=0,1$, ale jest już zbieżną dla $m=2$. Więc i lewa strona jest skończoną dla $m=2$, a to znaczy, że suma (12) jest zbieżną, a funkcya $q(u)$ jest analityczną. Ta funkcya staje się na wszystkich miejscach w nieskończonością w stopniu drugim i do tego takimi samymi dodajnikami, co funkcya $\wp(u)$; poza punktami w jest wszędzie — jak $\wp(u)$ — regularną. Wskutek tego musi być różnica:

$$\wp(u)-q(u)=\wp(u)-\left[\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left(\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right)\right]=g(u)$$

całkowitą wymierną lub przestępną funkcyą.

Zauważmy — aby $g(u)$ bliżej określić — równanie:

$$\frac{\wp(u)}{u}=\frac{q(u)}{u}+\frac{g(u)}{u}.$$

Dla dostatecznie wielkich u, nie zbliżających się dowolnie do w jest — podług (9) — $|\wp(u)/u|$ dowolnie małe. To samo łatwo wywnioskujemy o ilorazie: $|q(u)/u|$, gdy zważymy, że $q(u)$ jest funkcyą peryodyczną w ten sam sposób, jak funkcya $\wp(u)$, a poza punktami w jest wszędzie skończoną. Aby więc i iloraz $|g(u)/u|$ tę samą własność posiadał, musi być $g(u)=c$, stała ilość.

Mając to, położymy teraz:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+c+\sum{}'\left(\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right)$$
$$=\frac{1}{u^2}+c+\sum{}'\left[\frac{1}{w^2}\left(1-\frac{u}{w}\right)^{-2}-\frac{1}{w^2}\right],$$

a gdy zważymy, że sumy $\Sigma' w^{-\nu}$, o nieparzystych ν, są zerami i że

$$\binom{-2}{n}=(-1)^n(n+1),$$

dostaniemy w otoczeniu miejsca $u=0$:

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+c+3\sum{}'\frac{1}{w^4}u^2+5\sum{}'\frac{1}{w^6}u^4+\ldots$$

Lecz, że $c=0$, bo takie rozwinięcie nie ma zawierać wolnego wyrazu, więc ostatecznie mamy:

$$(A)\qquad \wp(u)=\frac{1}{u^2}+3\sum{}'\frac{1}{w^4}.u^2+5\sum{}'\frac{1}{w^6}.u^4+\ldots$$

Lecz spółczynniki tego rozwinięcia będzie można przedstawić w innych jeszcze formach. Oto połóżmy:

$$(a)\qquad \wp(u)=\frac{1}{u^2}+c_2u^2+c_3u^4+\ldots+c_\lambda u^{2\lambda-2}+\ldots$$

to stąd dostajemy:

$$(b)\qquad (\wp u)^3=\frac{1}{u^6}+3c_2\frac{1}{u^2}+3c_3+dod.\,pot.$$

$$(b')\qquad \wp'(u)=-\frac{2}{u^3}+2c_2u+4c_3u^3+\ldots+(2\lambda-2)c_\lambda u^{2\lambda-3}+\ldots$$

$$(c)\qquad [\wp'(u)]^2=\frac{4}{u^6}-8c_2\frac{1}{u^2}-16c_3+dod.\,pot.$$

Gdy rozwinięcia (a), (b), (c) wstawimy w równanie różniczkowe:

$$(14)\qquad (\wp' u)^2=4(\wp u)^3-g_2\wp u-g_3,$$

dostaniemy przez porównanie równomiennych wyrazów:

$$(15)\qquad c_2=\frac{g_2}{20}=3\sum{}'\frac{1}{w^4},\quad c_3=\frac{g_3}{28}=5\sum{}'\frac{1}{w^6}.$$

Aby i dalsze spółczynniki łatwym sposobem obliczyć, użyjemy do tego związku:

$$(16)\qquad \wp''u=6(\wp u)^2-\frac{g_2}{2},$$

jaki powstaje z (14) przez różniczkowanie podług u, a potem przez skrócenie przez $\wp'(u)$.

Z (b') wynika:

$$(d)\quad \wp''(u)=\frac{6}{u^4}+2c_2+12c_3u^2+\ldots+(2\lambda-2)(2\lambda-3).c_\lambda u^{2\lambda-4}+\ldots$$

Połóżmyż w (a), (d): $u^2=v$, to otrzymamy:

$$\wp(u)=\frac{1}{v}\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_\lambda v^\lambda,\quad c_0=1.$$

$$(\alpha)\qquad (\wp u)^2=\frac{1}{v^2}\sum_{\lambda=0}^{\infty}[c_0c_\lambda+c_1c_{\lambda-1}+\ldots+c_\lambda c_0]v^\lambda,$$

$$(\beta)\qquad \wp''(u)=\frac{1}{v^2}\sum_{\lambda=0}^{\infty}(2\lambda-2)(2\lambda-3)c_\lambda.v^\lambda.$$

Wstawmyż (α), (β) w związek (16), to porównując spółczynniki przy $v^4, v^5, \ldots$ i uwzględniając znalezione już spółczynniki (15), mieć będziemy:

$$(17)\qquad c_4=\frac{g_2{}^2}{2^4.3.5^2},\quad c_5=\frac{3g_2g_3}{2^4.5.7.11},\quad \text{i t. d.}$$

a wskutek tego:

$$(B)\quad \wp(u)=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{2^2.5}u^2+\frac{g_3}{2^2.7}u^4+\frac{g_2{}^2}{2^4.3.5^2}u^6+\frac{3g_2g_3}{2^4.5.7.11}u^8+\ldots$$

Wszystkie spółczynniki tego rozwinięcia są wymiernemi całkowitemi funkcyami niezmienników g_2, g_3.

140. Funkcye Weierstrassa: $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$, $\zeta(u)$. Utwórzmy tu jeszcze inną funkcyę: $\sigma(u)$, która nie jest wprawdzie już peryodyczną, ale tem jest ważna, że z jednej strony pozostaje w ścisłym związku z funkcyą $\wp(u)$, a z drugiej strony służyła Weierstrassowi za punkt wyjścia w teoryi (najogólniejszych) funkcyj eliptycznych.*) Oto z uwagi, że suma $\Sigma'\left|\frac{1}{w}\right|^{m+1}$ pozostaje zbieżną

*) Funkcyami eliptycznemi nazywają dziś w analizie wszystkie dwuperyodyczne, jednoznaczne funkcye z jedynem miejscem istotnie osobliwem w nieskończoności.

przy najmniejszem $m=2$, wnosimy odrazu [art. 29.], że istnieje funkcya całkowita przestępna o jednokrotnych miejscach zerowych w i że ta funkcya daje się przedstawić nieskończonym iloczynem:

(1) $$\sigma(u)=u.\Pi'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}.$$

Kreska przypomina znowu, że w iloczyn nie wchodzi czynnik z $w=0$. Z iloczynu tego dostajemy:

(2) $$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\zeta(u)=\frac{1}{u}-\sum{}'\frac{1}{w-u}+\sum{}'\left(\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right),$$

a stąd już odrazu wynika:

(3) $$-\frac{d}{du}\frac{\sigma' u}{\sigma u}=-\frac{d}{du}\zeta(u)=\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right]=\wp(u).$$

Naodwrót mamy:

(4) $$\zeta(u)=-\int\wp(u)du,$$

a wstawiwszy tu za $\wp(u)$ szereg (B) [art. poprzedz.], otrzymamy:

(C) $$\zeta(u)=\frac{1}{u}-\frac{g_2}{2^2.5}\frac{u^3}{3}-\frac{g_3}{2^2.7}\frac{u^5}{5}-\frac{g_2{}^2}{2^4.3.5^2}\frac{u^7}{7}-\ldots;$$

$\zeta(u)$ jest więc funkcyą nieparzystą. Z (2) wynika:

$$\frac{d}{du}\log\sigma(u)=\zeta(u),\quad \text{a więc:}\quad \log\sigma u=\int\zeta(u)du,$$

a to za uwzględnieniem (C), daje:

$$\log\sigma u=\log u-\frac{g_2}{2^2.5}\frac{u^4}{3.4}-\frac{g_3}{2^2.7}\frac{u^6}{5.6}-\ldots$$

Stąd już odrazu przejdziemy do bezustannie zbieżnego szeregu określającego funkcyę $\sigma(u)$. Mamy bowiem:

$$e^{\log\sigma u}=\sigma u=u.e^{-\frac{g^2}{2^2.5}\frac{u^4}{3.4}-\ldots},\quad \text{czyli:}$$

(D) $$\sigma(u)=u-\frac{g_2u^5}{2^4.3.5}-\frac{g_3u^7}{2^3.3.5.7}-\frac{g_2{}^2u^9}{2^9.3^2.5.7}-\ldots$$

Funkcya $\sigma(u)$ jest więc funkcyą nieparzystą.

Z określenia (3), gdy tam wskazane różniczkowanie wykonamy, dostajemy:

(E) $$\wp(u)=\frac{(\sigma' u)^2-\sigma u.\sigma'' u}{\sigma^2 u}.$$

Jestto iloraz dwóch bezustannie zbieżnych szeregów, a taką formę dopuszcza $\wp(u)$ już samym swoim charakterem.

Gdy w całce $u=\int_s^\infty ds/\sqrt{S}$, podstawimy:

(5) $$\sqrt{s-e_\alpha}=s_\alpha,$$

gdzie α ma znaczenie jednej z liczb: 1, 2, 3, to okaże się, że ta całka będzie znowu eliptyczną rodzaju pierwszego, a zawierającą zmienną s_α. Funkcya s_α — mimo, że jej definicya (5) wymaga pierwiastkowąnia — jest przeto funkcyą jednoznaczną, eliptyczną i ma te same peryody pierwotne, co $\wp(u)$. Pierwiastek bieżemy ze znakiem $+$.

Połóżmyż w (5) za $s=\wp(u)$ wyrażenie (E), to dostaniemy:

$$\sqrt{\wp u-e_\alpha}=\frac{\sqrt{(\sigma' u)^2-\sigma u.\sigma'' u-e_\alpha(\sigma u)^2}}{\sigma u},\quad \alpha=1,2,3,$$

a tu — wskutek jednoznaczności funkcyi $\sqrt{\wp u-e_\alpha}$ — musi się cały wyraz pod pierwiastkiem w liczniku dać zredukować do kwadratu pewnej całkowitej przestępnej funkcyi. Niechże:

$$(6)\qquad (\sigma' u)^2-\sigma u.\sigma'' u-e_\alpha(\sigma u)^2=(\sigma_\alpha u)^2,$$

to mamy:

$$(7)\qquad \sqrt{\wp u-e_\alpha}=\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u},\quad \alpha=1,2,3.$$

Mając to, połóżmy w formach (I), (II), (III) [art. poprzedz.] wiążących funkcyę $\wp(u)$ z funkcyami Jacobiego: $\sqrt{e_1-e_3}.u=v$, to korzystając w nich z określeń (7) dostaniemy:

$$(\mathrm{I}')\qquad sn(v,k)=\sqrt{e_1-e_3}.\frac{\sigma\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)},$$

$$(\mathrm{II}')\quad cn(v,k)=\frac{\sigma_1\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)},\qquad (\mathrm{III}')\quad dn(v,k)=\frac{\sigma_2\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\dfrac{v}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}.$$

Takimi ilorazami dwóch bezustannie zbieżnych szeregów dają się przedstawić funkcye $sn\,v$, $cn\,v$, $dn\,v$.

Uwaga I. Z określeń:

$$\omega_1=\int_\infty^{e_1}\frac{ds}{-\sqrt{S}},\quad \omega_3=\int_\infty^{e_3},\quad -\omega_2=\int_\infty^{e_2},$$

jakie mieliśmy w art. 131., wnosimy tu odrazu, że:

$$e_1=\wp(\omega_1),\quad e_3=\wp(\omega_3),\quad e_2=\wp(-\omega_2)=\wp(\omega_2)$$

i że związek $e_1+e_2+e_3=0$ jest równoważny ze związkiem:

$$(\alpha')\qquad \wp(\omega_1)+\wp(\omega_2)+\wp(\omega_3)=0.$$

Uwaga 2. Całkowanie (4) wykonaliśmy nie dodając żadnej stałej całkowania. Lecz to samo całkowanie określić można przez:

(8) $$\zeta(u) = -\int_0^u \wp(u)du,$$

z tem zastrzeżeniem, że do wartości $u=0$, należeć ma wartość całki $=\infty$. Że zaś temu warunkowi już sama funkcya $\zeta(u)$ zadość czyni, więc w istocie relacya (8) zastępuje relacyę (4). Zauważmy — mając to — całkę rodzaju drugiego:

(9) $$\int_\infty^s \frac{s\,ds}{\sqrt{S}}$$

i połóżmy w niej $s=\wp(u)$, $\sqrt{S}=-\wp'(u)$, $ds=\frac{ds}{du}du=\wp'(u)du$. Wtedy ta całka przejdzie na:

(10) $$-\int_0^u \wp(u)du; \text{ jest więc } =\zeta(u).$$

Pierwotnymi peryodami całki (9) są:

$$\eta_1 = \int_\infty^{e_1}, \quad \eta_3 = \int_\infty^{e_3}, \quad \text{a } -\eta_2 = \int_\infty^{e_2}.$$

Te peryody, wyrażone całkami o formie (10), będą:

$$\eta_1 = -\int_0^{\omega_1} \wp(u)du, \text{ a więc } =\zeta(\omega_1); \quad \eta_3 = -\int_0^{\omega_3} \wp(u)du, \text{ a więc } =\zeta(\omega_3).$$

Co się tyczy η_2, to — jak z uwagi 1ej wynika — odpowiada e_2 miejscu $u=-\omega_2$; połóżmy więc:

$$-\eta_2 = \int_0^{-\omega_2} \wp(u)du = \zeta(-\omega_2) = -\zeta(\omega_2),$$

to mamy: $\zeta(\omega_\alpha)=\eta_\alpha$, $\alpha=1, 2, 3$, a związek $\eta_1+\eta_2+\eta_3=0$ jest równoważny ze związkiem: $\zeta(\omega_1)+\zeta(\omega_2)+\zeta(\omega_3)=0$.

Pisząc równanie $\wp(u+2\omega_1)=\wp(u)$ w formie:

$$\frac{d\zeta(u+2\omega_1)}{du} = \frac{d\zeta(u)}{du},$$

mamy stąd po scałkowaniu:

(11) $$\zeta(u+2\omega_1)=\zeta(u)+C,$$

gdzie C jest stałą całkowania. Połóżmyż tu $u=-\omega_1$, to otrzymamy: $\zeta(\omega_1)=\zeta(-\omega_1)+C$. Że zaś $\zeta(u)$ jest nieparzystą funkcyą, więc $\zeta(-\omega_1)=-\zeta(\omega_1)$, a z ostatniego równania wynika: $C=2\zeta(\omega_1)=2\eta_1$. Równanie (11) daje więc:

(α) $$\zeta(u+2\omega_1)-\zeta(u)=2\eta_1;$$ analogiczne będzie:

(β) $$\zeta(u+2\omega_3)-\zeta(u)=2\eta_3$$ i ogólnie:

(γ) $$\zeta(u+2\nu_1\omega_1+2\nu_3\omega_3)-\zeta(u)=2\nu_1\eta_1+2\nu_3\eta_3.$$

Równania (α), (β), (γ) podają zmiany funkcyi $\zeta(u)$, kiedy się jej argument zwiększy o peryod.

ROZDZIAŁ XVIII.

Z teoryi (ogólnych) funkcyj eliptycznych.

141. Funkcye eliptyczne. Związki między ich miejscami zerowemi a nieskończonościowemi. Każdą funkcyę jednoznaczną dwuperyodyczną z peryodami zasadniczymi $2\omega_1, 2\omega_3$, a nieposiadającą miejsc istotnych w skończoności, nazywamy krótko e l i p t y c z n ą. O niej wiemy już, że w równoległoboku peryodyczności P [o wierzchołkach u_0, $u_0+2\omega_1$, $u_0+2\omega_3$, $u_0+2\omega_1+2\omega_3$] posiada tę samą ilość miejsc zerowych i nieskończonościowych, a także i każdą inną wartość c przybiera na tylu miejscach, na ilu staje się zerem lub nieskończonością [art. 138]. Niechżeż miejsca jej zerowe będą:

(1) $a_1, a_2, ..., a_m$, a nieskończonościowe:

(2) $b_1, b_2, ..., b_m$,

to teraz przedewszystkiem zbadać trzeba, o ile miejsca (1), (2) od siebie zależą, lub nie.

Zauważmy obwód równoległoboku P i całkę:

(3) $$V=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_P\frac{u.\varphi'(u)du}{\varphi(u)-c},$$

którą się ma obliczyć po tym obwodzie, a w której $\varphi'(u)$ jest pochodną, a c dowolną wielkością. Całka ta — jak zaraz pokażemy — będzie $=$ różnicy między sumą miejsc zerowych funkcyi $\varphi(u)-c$, a sumą miejsc nieskończonościowych tej funkcyi. Ponieważ zaś funkcya $\varphi(u)-c$ ma te same miejsca nieskończonościowe, co funkcya $\varphi(u)$, więc druga z tych sum $=\Sigma b_\alpha$. Przyjmijmy, że $\varphi(u)-c=0$ na miejscach $a'_1, a'_2, ..., a'_m$, to pierwsza suma będzie $=\Sigma' a_\alpha$, a wskutek tego mamy:

(4) $$V=\Sigma a'_\alpha-\Sigma b_\alpha.$$

D o w ó d. Gdy v jest miejscem zerowem lub nieskończonościowem funkcyi $\varphi(u)-c$, to w otoczeniu tego miejsca mamy:

(a) $$\varphi(u)-c=(u-v)^{\pm\mu}.\psi(u),$$

z całkowitem μ i z funkcyą $\psi(u)$ skończoną i różną od zera na miejscu v, a skończoną w najbliższem otoczeniu miejsca v.

Z formy (a) wynika:

(b) $$\varphi'(u)=\pm\mu(u-v)^{\pm\mu-1}.\psi(u)+(u-v)^{\pm\mu}.\psi'(u).$$

Połóżmy dalej:

(c) $$u=(u-v)+v,$$

to gdy (*a*), (*b*), (*c*) wstawimy w całkę (3), mieć będziemy:

$$V = \pm \frac{\mu . v}{2\pi i} \int_P \frac{du}{u-v} + \int_P h(u).du,$$

gdzie $h(u)$ jest funkcyą skończoną na miejscu v i w najbliższem otoczeniu tego miejsca.

Z tego wynika, że — gdy nam nie chodzi o wpływ na całkę (3), pochodzący z miejsc zerowych i nieskończonościowych, zawartych w P, a różnych od v — to z miejsca v dostajemy z całki (3) wyraz: $\pm \mu . v$, gdzie znak $+$ odnosi się do v, jako miejsca zerowego, a znak — do v, jako miejsca nieskończonościowego. Przez to jednak rezultat (4) mamy już udowodniony.

Z drugiej strony, jeżeli boki równoległoboku P nazwiemy po porządku:

$$l_1 = (u_0 ... u_0 + 2\omega_1), \quad l_2 = (u_0 + 2\omega_1 ... u_0 + 2\omega_1 + 2\omega_3),$$
$$l_3 = (u_0 + 2\omega_1 + 2\omega_3 ... u_0 + 2\omega_3), \quad l_4 = (u_0 + 2\omega_3 ... u_0),$$

to całkę V, uwzględniając peryodyczność funkcyi $\varphi(u)$ i taką samą peryodyczność funkcyi $\varphi'(u)$ *), możemy w takiej formie napisać:

$$V = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{l_1} \frac{u\,\varphi'(u)du}{\varphi(u)-c} - \int_{l_1} \frac{(u+2\omega_3)\varphi'(u)du}{\varphi(u)-c}\right] +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{l_2} \frac{(u+2\omega_1)\varphi'(u)du}{\varphi(u)-c} - \int_{l_2} \frac{u\,\varphi'(u)du}{\varphi(u)-c}\right].$$

Stąd po skróceniach mamy:

$$V = -\frac{2\omega_3}{2\pi i}\int_{l_1} \frac{\varphi'(u)\,du}{\varphi(u)-c} + \frac{2\omega_1}{2\pi i}\int_{l_2} \frac{\varphi'(u)\,du}{\varphi(u)-c} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left[-2\omega_3 log \frac{\varphi(u_0+2\omega_1)}{\varphi(u_0)} + 2\omega_1 log \frac{\varphi(u_0+2\omega_1+2\omega_3)}{\varphi(u_0+2\omega_1)}\right].$$

Że zaś: $\varphi(u_0+2\omega_1) = \varphi(u_0+2\omega_1+2\omega_3) = \varphi(u_0)$, więc:

$$V = \frac{1}{2\pi i}\left[-2\omega_3 log 1 + 2\omega_1 log 1\right].$$

Połóżmy $log 1 = 2\pi \nu_1$ w pierwszym wyrazie, a $log 1 = 2\pi\nu_3$ w drugim wyrazie, to ostatecznie mamy:

(5) $$V = 2\nu_1\omega_1 + 2\nu_3\omega_3, \quad \nu_1, \nu_3 \text{ całkowite.}$$

Porównując ten rezultat z wynikiem (4), dostajemy:

(6) $$\Sigma a'_\alpha - \Sigma b = 2\nu_1\omega_1 + 2\nu_3\omega_3 = 2\bar{\omega},$$

---

*) Peryodyczność pochodnej $\varphi'(u)$ wynika z jej formy:

$$\varphi'(u) = \lim_{h=0} \frac{\varphi(u+h) - \varphi(u)}{h}.$$

gdzie $2\tilde{\omega}$ jest pewnym peryodem samej funkcyi $\varphi(u)$. Przyjmijmy $c=0$. Wtedy każde a'_α przechodzi na a_α i dostajemy:

(7) $$\Sigma a_\alpha - \Sigma b_\alpha = 2\tilde{\omega}\,,$$

przyczem $2\tilde{\omega}$ w równaniu tem nie potrzebuje być identyczne z $2\tilde{\omega}$ w równaniu (6). Z równania (7) wynika:

I. *Różnica między sumą miejsc zerowych a sumą miejsc nieskończonościowych, zawartych w jednym równoległoboku peryodyczności P funkcyi eliptycznej $\varphi(u)$ wynosi zawsze pewien oznaczony peryod $2\tilde{\omega}$.*

Napiszmy równanie (7) w postaci:

(8) $$b_m = \Sigma a_\alpha - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{m-1}) - 2\tilde{\omega}\,,$$

to mamy stąd twierdzenie:

II. *Z m miejsc zerowych i m miejsc nieskończonościowych funkcyi eliptycznej $\varphi(u)$ jest jedno z nich zależne zawsze od $(2m-1)$ pozostałych, a zależność tę podaje wzór (8).*

Lecz, gdy b_m jest miejscem nieskończonościowem funkcyi $\varphi(u)$, to także i miejsce $b_m + 2\tilde{\omega}$ jest jej takiem miejscem, a w otoczeniu czy-to miejsca b_m, czy-to miejsca $b_m + 2\tilde{\omega}$, funkcya jednakowo się zachowuje. Weźmyż jako m^{te} miejsce nieskończonościowe właśnie $b_m + 2\tilde{\omega}$ i nazwijmy je wprost b_m, to — nie dotrzymując już warunku, aby i m^{te} miejsce nieskończonościowe leżało koniecznie w równoległoboku P — mamy relacyę:

(8') $$\Sigma a_\alpha - \Sigma b_\alpha = 0.$$

Przyjmijmy, że istnieje funkcya $\varphi(u)$ stopnia 1^{go}. W takim razie relacya (8') przechodzi na $a_1 = b_1$, co wskazywałoby, że taka funkcya musiałaby na jednem i tem samem miejscu być i zerem i nieskończonością. Lecz że to jest niemożliwe, więc stąd wnosimy:

III. *Funkcye eliptyczne stopnia pierwszego wcale nie istnieją.*

Uwzględniając relacyę (8) wnosimy odrazu, że funkcya $\wp u$, która ma dwukrotne miejsce nieskończonościowe $u=0$, a więc i sumę $\Sigma b_\alpha = 0$, posiada dwa nierównoważne miejsca zerowe, które się od siebie tylko znakiem różnią; [to wynika zresztą już i z parzystości funkcyi $\wp u$].

Funkcya $\wp' u$ ma trzykrotne miejsce nieskończonościowe $u=0$, a więc sumę $\Sigma b_\alpha = 0$.

Że zaś $\wp' u = -\sqrt{\wp u - e_1}\sqrt{\wp u - e_2}\sqrt{\wp u - e_3}$, a $\wp u = e_\alpha$ gdy $u = \omega_\alpha$, więc z tego wynika, że $\wp' u = 0$ na trzech miejscach nierównoważnych ω_1, ω_3 i $\omega_2 = -(\omega_1 + \omega_3)$. Przy tem mamy: $\Sigma a_\alpha = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, jak być powinno.

142. Wyznaczanie funkcyi eliptycznej. Gdy położymy $\wp u = x$, $\wp' u = y$ o peryodach $2\omega_1$, $2\omega_3$ i zauważymy związek:

(1) $$y^2 = 4x^2 - g_2 x - g_3\,,$$

to jest on równaniem algebraicznem między x i y rodzaju $p = \varrho = 1$, a wszystkie pary (x, y) o siebie podług związku (1) należące, znaleźć będzie można już w równoległoboku P. Z tego powodu, ile razy do argumentu u zejdziemy, ograniczyć się możemy do równoległoboku P. Oprócz x, y niech jeszcze daną będzie funkcya eliptyczna $\varphi(u)$ o tychsamych peryodach $2\omega_1$, $2\omega_3$, co utworzona funkcya $\wp u$ i jej pochodna $\wp' u$. Jej miejsca zerowe niech będą a_α, miejsca nieskończonościowe b_α, $\alpha=1, 2, ..., m$, a na miejscu $u=c$ niech będzie $\varphi(c)=E$. Ponieważ do jednej wartości u należy jedna tylko para wartości (x, y) — związanych ze sobą równaniem (1) — więc $\varphi(u)$ uważać zarazem trzeba za jednoznaczną funkcyę pary (x, y) tak, że położyć możemy: $\varphi(u)=\bar{\varphi}(x, y)$.

Lecz z drugiej strony możemy — ponieważ tu $p=\varrho=1$ — utworzyć całkiem wyznaczoną funkcyę wymierną $R(x, y)$, spełniającą warunki takie [art. 70., tw. II., III.]:

A) Funkcya $R(x, y)$ staje się zerem na m miejscach $(x_\alpha y_\alpha)$, a im w P odpowiadają miejsca a_α, $\alpha=1, 2, ..., m$;

B) Funkcya $R(x, y)$ staje się nieskończonością na $(m-1)$ miejscach (x_β, y_β), $\beta=1, 2, ..., (m-1)$, a im w P odpowiadają miejsca b_β, $\beta=1, 2, ..., (m-1)$;

C) Na miejscu (x_c, y_c), któremu w P odpowiada $u=c$, ma być $R(x_c y_c)=E$.

Lecz widocznie funkcya $\varphi(u)=\bar{\varphi}(x, y)$ posiada taki charakter, a stąd wynika [art. 67., tw. III.], że identycznie jest:

$$\varphi(u)=R(x, y), \quad \text{czyli:}$$

$$\varphi(u)=R(\wp u, \wp' u). \tag{2}$$

To znaczy:

I. *Każda funkcya eliptyczna $\varphi(u)$ daje się wyrazić wymiernie przez $\wp u$ i pochodną $\wp' u$, gdzie $\wp u$ (i $\wp' u$) ma te same peryody, co dana funkcya $\varphi(u)$.*

Lecz z warunków *A)*, *B)*, *C)*, dostatecznych już do wyznaczenia funkcyi $R(x, y)=R(\wp u, \wp' u)$ wynika dalej;

II. *Każda funkcya eliptyczna $\varphi(u)$ m^{go} stopnia o danych jej peryodach $2\omega_1$, $2\omega_3$ jest w zupełności wyznaczona, gdy z $2m$ miejsc, z których m przypada na jej miejsca zerowe a_α, m na miejsca nieskończonościowe b_α, danych jest dowolnie $(2m-1)$ tych miejsc i jeszcze jedno miejsce c różne od a_α, b_α, na którem $\varphi(c)$ ma przybrać wartość E skończoną i różną od zera.*

Zajmijmyż się teraz bliżej formą (2), uwzględniając warunki dane w tw. II.

Funkcya $\wp u$ jest funkcyą stopnia 2^{go}, a że jej rozwinięcie w otoczeniu miejsca $u=0$ jest postaci:

$$\wp u=\frac{1}{u^2}+dod.\,pot.,$$

więc jej pierwsza pochodna:

$$\wp' u=-2\frac{1}{u^3}+dod.\,pot.$$

będzie funkcyą stopnia 3^{go}, pochodna druga:

$$\wp'' u=2.3.\frac{1}{u^4}+dod.\,pot.$$

będzie funkcyą stopnia 4^{go} i t. d. Przy tem z formy:

$$\wp''=6(\wp u)^2-\frac{g_2}{2} \quad \text{dostajemy:}$$

$$\wp''' u=12\wp u.\wp' u, \quad \wp^{(4)}(u)=12\,[(\wp' u)^2+\wp u.\wp'' u].$$

Gdy zaś tu uwzględnimy:

$$(\wp' u)^2=4(\wp u)^3-g_2\wp u-g_3, \quad \wp'' u=6(\wp u)^2-\frac{g_2}{2},$$

mieć będziemy:

$$\wp^{(4)}(u)=12\,[10(\wp u)^3-\frac{3}{2}g_2\wp u-g_3].$$

W ogólności — gdy G_α, G_β użyjemy jako znaków funkcyj wymiernych całkowitych — okaże się:

(3) $\qquad \wp^{(\alpha)}(u)=\wp'(u).G_\alpha(\wp u)$, dla $\alpha=3, 5, 7, \ldots,$

(4) $\qquad \wp^{(\beta)}(u)=G_\beta(\wp u)$, dla $\beta=2, 4, 6, \ldots$

Mając to, zauważmy funkcyę:

$$\varphi_1(u)=A+A_0\wp u+A_1\wp' u+\ldots+A_{m-1}\wp^{(m-1)}(u),$$

z nieoznaczonymi jeszcze stałymi spółczynnikami $A, A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$. Przy jakichkolwiek wartościach tych spółczynników jest $\varphi_1(u)$ funkcyą eliptyczną. Jest stopnia $(m+1)^{go}$, posiadając jedno tylko, ale $(m+1)$-krotne miejsce nieskończonościowe $u=0$ w równoległoboku P_0. Według tw. II. można będzie spółczynnikom $A, A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ nadać takie wartości, aby $\varphi_1(u)$ była zerem na dowolnych miejscach $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *), dalej aby jeszcze znikała na miejscu:

(α) $\qquad a_{m+1}=2w_1-(a_1+a_2+\ldots+a_m),$

gdzie $2w_1$ — jak poniżej $2w_2$, $2w_3$, $2w_4$ — jest pewnym peryodem; i aby wreszcie na miejscu c, różnem od wszystkich punktów peryodu i od wszystkich a_α przybierała skończoną i różną od zera wartość E_1.

Taką funkcyę $\varphi_1(u)$ nazwijmy:

$$P_1(u, a_1, a_2, \ldots, a_m, c).$$

---

*) Jeżeli między miejscami a_α nie ma powtarzających się, to spółczynniki $A, A_0, \ldots$ oblicza się z równań $\varphi_1(a_\alpha)=0$, $\alpha=1, 2, \ldots, m$, $\varphi_1(c)=E_1$. W razie, gdy między miejscami a_α powtarza się miejsce a_γ razy r, to to miejsce powoduje r równań: $\varphi_1(a_\gamma)=0$, $\varphi'_1(a_\gamma)=0$, ..., $\varphi_1^{(r-1)}(a_\gamma)=0$.

W podobny sposób utwórzmy funkcyę:

$$\varphi_2(u)=B+B_0\wp u+B_1\wp' u+\ldots+B_{m-1}\wp^{(m-1)}(u),$$

która na miejscach b_1, b_2, ..., b_m i na miejscu:

$$(\beta)\qquad b_{m+1}=2w_2-(b_1+b_2+\ldots+b_m)$$

staje się zerem, a na miejscu c przybiera wartość E_2 i nazwijmy ją $P_2(u, b_1, b_2, \ldots, b_m, c)$.

Załóżmy jeszcze, że już b_m tak było obrane, aby:

$$(\gamma)\qquad (b_1+b_2+\ldots+b_m)-(a_1+a_2+\ldots+a_m)=2w_3,$$

to z (α) i (β) — za uwzględnieniem (γ) — dostajemy:

$$(\delta)\qquad a_{m+1}-b_{m+1}=2w_1-2w_2+2w_3=2w_4,$$

co wskazuje, że a_{m+1}, b_{m+1} są miejscami równoważnemi.

Utwórzmy — mając to — iloraz:

$$(5)\qquad \frac{P_1(u, a_1, a_2, \ldots, a_m, c)}{P_2(u, b_1, b_2, \ldots, b_m, c)}=\frac{A+A_0\wp u+A_1\wp'(u)+\ldots+A_{m-1}\wp^{(m-1)}(u)}{B+B_0\wp u+B_1\wp'(u)+\ldots+B_{m-1}\wp^{(m-1)}(u)}.$$

Będzie to funkcya eliptyczna, która na miejscu $u=0$ pozostaje skończoną, na miejscach a_1, a_2, ..., a_m jest zerem, na miejscach b_1, b_2, ..., b_m jest nieskończonością, na miejscach a_{m+1}, b_{m+1} nie jest wskutek (δ) ani zerem ani nieskończonością, a na miejscu c przybiera wartość E_1/E_2. Gdy E_1, E_2 wybraliśmy tak, aby $E_1/E_2=E$, to iloraz (5) jest funkcyą $\varphi(u)$, wyznaczoną warunkami podanymi w twierdzeniu II.

Stosując w (5) w liczniku i mianowniku formy (3), (4) i znacząc przez g_1, g_2 funkcye całkowite wymierne, dostaniemy:

$$\varphi(u)=\frac{g_1(\wp u, \wp' u)}{g_2(\wp u, \wp' u)},\quad \text{a więc } =R(\wp u, \wp' u)$$

jak być powinno.

Przyjmijmy, że $\varphi(u)$ ma być parzystą funkcyą, $[\varphi(u)=\varphi(-u)]$; wtedy w jej formę (5) mogą wejść — oprócz $\wp u$ — tylko same jej pochodne parzystego rzędu. A że te wyrażają się wymiernie przez samo $\wp u$, więc w tym razie mamy:

$$(6)\qquad \varphi(u)=\varphi(-u)=R(\wp u).$$

Gdy $\varphi(u)$ ma być funkcyą nieparzystą, $[\varphi(-u)=-\varphi(u)]$, to $[\varphi(u)/\wp' u]$ będzie już funkcyą parzystą. Podług (6) jest więc:

$$[\varphi(u)/\wp' u]=R(\wp u),\quad \text{a stąd:}$$

$$(7)\qquad \varphi(u)=-\varphi(-u)=\wp' u . R(u).$$

To znaczy:

III. *Funkcya eliptyczna parzysta jest wymierną funkcyą samego* $\wp u$, *nieparzysta zaś jest iloczynem pochodnej* $\wp' u$ *i wymiernej funkcyi samego* $\wp u$.

W szczególności funkcya o formie:

(8) $$\chi(u)=\frac{A\wp u+B}{C\wp u+D}$$

jest zawsze funkcyą parzystą i stopnia 2^{go}, bo jest liniową w $\wp(u)$.

Gdy więc jednem jej miejscem zerowem jest a_1, to drugiem jest $-a_1$; a gdy staje się nieskończonością na miejscu b_1, to jest także nieskończonością na miejscu $-b_1$. Wskutek tego musi być w (8): $B=A.\wp a_1$, $D=C.\wp b_1$, a więc:

(9) $$\chi(u)=K.\frac{\wp u-\wp a_1}{\wp u-\wp b_1},$$

gdzie $K=A/C$ wynika z warunku, aby funkcya na pewnem miejscu c różnem od $\pm a_1$ i od $\pm b_1$ (i od miejsc równoważnych z temi miejscami) przybierała daną wartość skończoną i różną od zera.

Gdy utworzymy drugą funkcyę drugiego stopnia: $\chi_1(u)$ znowu o miejscach zerowych $\pm a_1$ i nieskończonościowych $\pm b_1$, to jej forma może się od (9) różnić tylko stałym czynnikiem K.

Stąd wnosimy, że:

(10) $$\frac{\chi(u)}{\chi_1(u)}=const.$$

Mając to, zajmijmy się pytaniem, którego rozstrzygnięcie ważny wpływ mieć będzie na poszukiwania w dalszych artykułach.

Oto przyjmijmy, że może istnieć funkcya eliptyczna $\psi(u)$ pozbawiona i miejsc zerowych i miejsc nieskończonościowych w skończoności [art. 138.]. Taka funkcya miałaby więc mieć postać $e^{g(u)}$, gdzie $g(u)$ jest całkowitą wymierną lub przestępną funkcyą [art. 26].

Utwórzmy funkcyę eliptyczną 2^{go} stopnia: $\chi(u)$, posiadającą te same peryody, co funkcya $\psi(u)$, znikającą na miejscach $\pm a_1$, a stającą się nieskończonością na miejscach $\pm b_1$.

Iloczyn $\psi(u).\chi(u)$ będzie znowu funkcyą 2^{go} stopnia i znowu o miejscach zerowych $\pm a_1$, a nieskończonościowych $\pm b_1$. Połóżmyż

$$\psi(u).\chi(u)=\chi_1(u),$$

to stąd wynika $\psi(u)=\frac{\chi_1(u)}{\chi(u)}$, a ten iloraz jest — podług (10) — stałą ilością. Mamy więc twierdzenie:

IV. *Funkcya eliptyczna bez miejsc zerowych i nieskończonościowych w skończoności redukuje się do ilości stałej.*

Zastosujmy dalej formę (5) do funkcyi:

$$\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u),$$

która wskutek własności (α), (β), (γ) — art. 140. — jest funkcyą eliptyczną i to stopnia 3go, gdyż w równoległoboku P_0 posiada trzy tylko (jednokrotne) miejsca nieskończonościowe: $-v$, $+v$, 0.

Jej miejsca zerowe są: ω_1, ω_2, ω_3, o czem można się przekonać kładąc: $u=\omega_\alpha$, $\alpha=1,2,3$, $v=\omega_\alpha+v'$ i uwzględniając $\zeta(\omega_\alpha)=\eta_\alpha$ i $\zeta(v'+2\omega_\alpha)=\zeta(v')+2\eta_\alpha$.

Iloraz:

$$\frac{\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u)}{\wp' u}$$

będzie już funkcyą parzystą i to stopnia 2go, gdyż $\wp'(u)=0$ dla $u=\omega_\alpha$, $\alpha=1,2,3$, a $=\infty$ w drugim stopniu, gdy $u=0$. Posługując się więc tu wzorem (8) położymy:

$$\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u)=\wp' u.\frac{A\wp u+B}{C\wp u+D}, \tag{11}$$

a spółczynniki A, B, C, D w ten sposób wyznaczymy:

Dla $u=+v$ i $u=-v$ ma być funkcya nieskończonością stopnia 1go. Musi więc wskutek tego być $D=-C.\wp v$, a funkcya miałaby być formy: $\frac{\wp' u}{C}\cdot\frac{A\wp u+B}{\wp u-\wp v}$.

Dla $u=0$ mamy mieć nieskończoność znowu 1go stopnia. Wskutek tego być musi $A=0$ tak, że dostaniemy teraz formę:

$$\frac{B}{C}\cdot\frac{\wp' u}{\wp u-\wp v}.$$

Że zaś funkcya w otoczeniu punktu $u=0$ ma mieć rozwinięcie $\frac{-2}{u}+$*dod. pot.*, więc dalej musi być: $B/C=1$, tak, że ostatecznie:

$$\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u)=\frac{\wp'(u)}{\wp u-\wp v}. \tag{12}$$

Mieniając tu u, v ze sobą i uwzględniając nieparzystość funkcyi ζ, dojdziemy do nowej funkcyi:

$$\zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta(v)=-\frac{\wp' v}{\wp u-\wp v}. \tag{12'}$$

Wreszcie za dodaniem do siebie równań (12) i (12') otrzymujemy:

$$\zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v)=\frac{1}{2}\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}. \tag{13}$$

Gdy tu obie strony upochodnimy co do u, otrzymamy związek:

$$\wp(u+v)=\wp u+\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left[\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right], \tag{14}$$

który jest nową formą prawidła dodawania funkcyi $\wp(u)$.

143. Związki funkcyjne i prawidło dodawania funkcyj eliptycznych. Połóżmy znowu dla krótkości $\wp' u = y$, $\wp u = x$, to każda funkcya eliptyczna $\varphi(u)$ będzie teraz postaci: $\varphi(u) = R(x, y) = r$; jej pochodna $\varphi'(u) = R'(x, y) = r_1$ jest znowu wymierną w x, y, a obie te funkcye, jako wymierne w parach (x, y), spełniających związek:

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

zadość uczynią algebraicznemu równaniu:

$$(1) \qquad G(r, r_1) = 0, \quad \text{[art. 67.]},$$

które jest w r_1 stopnia m, jeżeli m było stopniem funkcyi $r = \varphi(u)$. Wiadomo, że związek $G = 0$ jest albo nieprzywiedlny, albo przywiedlny w ten sposób, że G jest potęgą (całkowitą) pewnej funkcyi $\Gamma(r, r_1)$ już nieprzywiedlnej [*ibid.*], tak, że w tym drugim razie związek $G = 0$ ma postać:

$$(2) \qquad [\Gamma(r, r_1)]^\mu = 0.$$

Zapytajmy, który z tych wypadków może tu zajść?

Przyjmijmy: $m = \mu . \nu$; równanie $\Gamma = 0$ jest wtedy ν^{go} stopnia w r_1, a z powodu swej nieprzywiedlności daje przy każdej dowolnej wartości funkcyi r koniecznie ν między sobą różnych pierwiastków $r_1 = \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu$. To — ponieważ w formie (2) mamy aż μ równań $\Gamma = 0$ — wskazuje, że w równoległoboku P_0 między m miejscami

$$(3) \qquad \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1\nu} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{\mu 1} & c_{\mu 2} & \cdots & c_{\mu\nu} \end{matrix}$$

na których $r = \varphi(u)$ przybiera tę samą wartość c, znajdujemy: ν takich miejsc $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1\nu}$, na których mamy:

$$\varphi(c_{11}) = \varphi(c_{12}) = \ldots = \varphi(c_{1\nu}) = c,$$

a na których pochodne: $\varrho_1 = \varphi'(c_{11})$, $\varrho_2 = \varphi'(c_{12})$, ..., $\varrho_\nu = \varphi'(c_{1\nu})$ są wszystkie między sobą różne; ν nowych takich miejsc $c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2\nu}$, na których znowu mamy: $\varphi(c_{21}) = \varphi(c_{22}) = \ldots = \varphi(c_{2\nu}) = c$, a na których pochodne mają znowu wartości:

$$\varrho_1 = \varphi'(c_{21}), \; \varrho_2 = \varphi'(c_{22}), \; \ldots, \; \varrho_\nu = \varphi'(c_{2\nu}),$$

są więc znowu wszystkie między sobą różne.

Idąc tak dalej, dojdziemy wreszcie do miejsc:

$$c_{\mu 1}, \; c_{\mu 2}, \; \ldots, \; c_{\mu\nu},$$

na których znowu mieć będziemy: $\varphi(c_{\mu 1}) = \varphi(c_{\mu 2}) = \ldots = \varphi(c_{\mu\nu}) = c$, a na których pochodne znowu się okazują o wartościach:

$$\varrho_1 = \varphi'(c_{\mu 1}), \; \varrho_2 = \varphi'(c_{\mu 2}), \; \ldots, \; \varrho_\nu = \varphi'(c_{\mu\nu}).\text{*)}$$

---

*) Oczywiście, że równocześnie za zmienieniem się wartości c wszystkie miejsca (3) poruszają się w równoległoboku P_0.

Z tego widzimy, że w razie przywiedlności równania $G=0$ istniałyby w równoległoboku P_0 grupy takich miejsc jak:

$$[c_{11}, c_{21}, \dots, c_{\mu 1}], \quad [c_{12}, c_{22}, c_{32}, \dots, c_{\mu 2}], \dots,$$

że na nich pojawiaćby się miały nietylko równe wartości funkcyi $\varphi(u)$, ale także i jej pochodne na tych miejscach miałyby być sobie równe. Udowodnimy jednak, że to jest niemożliwe.

Z samego związku (1), który teraz w formie $G(\varphi, \varphi')=0$ napiszmy, wynika przez różniczkowanie:

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial G}{\partial \varphi'}\varphi''=0, \quad \text{a stąd:} \quad \varphi'' = -\frac{\dfrac{\partial G}{\partial \varphi}}{\dfrac{\partial G}{\partial \varphi'}}.\varphi'.$$

Że zaś $\frac{\partial G}{\partial \varphi}, \frac{\partial G}{\partial \varphi'}$ są również wymiernemi, całkowitemi funkcyami w φ i φ', więc mamy:

(4) $$\varphi''=R_2(\varphi, \varphi'),$$

gdzie R_2 jest wymierną funkcyą. Stąd dalej dostajemy:

$$\varphi'''=\frac{\partial R_2}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial R_2}{\partial \varphi'}\varphi'',$$

a podstawiając tu za φ'' formę (4), mieć będziemy:

$$\varphi'''=R_3(\varphi, \varphi'),$$

gdzie R_3 jest znowu funkcyą wymierną.

Postępując tak dalej, dostaniemy $\varphi^{(\alpha)}(u)$, t. j. pochodnę funkcyi $\varphi(u)$ dowolnego rzędu $\alpha > 1$ w postaci:

(5) $$\varphi^{(\alpha)}(u)=R_\alpha(\varphi, \varphi'), \quad \alpha=2, 3, \dots,$$

gdzie R_α jest funkcyą wymierną. Stąd mamy twierdzenie:

I. *Pochodna dowolnego rzędu >1 funkcyi eliptycznej $\varphi(u)$ wyraża się zawsze wymiernie przez samą funkcyę $\varphi(u)$ i jej pierwszą pochodnę $\varphi'(u)$.*

Mając to wróćmy do naszego rozważania, przyjmując że w równoległoboku P_0 znajdują się dwa miejsca a, b takie, że one dają równocześnie równości:

$$(\alpha) \quad \varphi(a)=\varphi(b), \qquad (\beta) \quad \varphi'(a)=\varphi'(b).$$

Z tego założenia wynika podług (5), że także dalej będzie:

$$\varphi''(a)=\varphi''(b), \ \varphi'''(a)=\varphi'''(b), \dots \textit{in inft.}$$

i że więc wskutek tego rozwinięcia:

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+\frac{\varphi'(a)}{1!}h+\frac{\varphi''(a)}{2!}h^2+\dots$$

$$\varphi(b+h)=\varphi(b)+\frac{\varphi'(b)}{1!}h+\frac{\varphi''(b)}{2!}h^2+\dots$$

okazują się identyczne. Przyjmijmy dalej w identyczności:

$$\varphi(a+h)=\varphi(b+h)$$

przyrost dowolny h w postaci $(-a+v)$, to mieć będziemy:

$$\varphi(v)=\varphi(v+(b-a)).$$

To przy dowolnem [oczywiście dostatecznie małem] v wskazuje, że $(b-a)$ jest już peryodem funkcyi $\varphi(u)$, co jednak jest niemożliwe, bo a i b zawierają się równocześnie w jednym równoległoboku peryodyczności. Że zaś do tego fałszywego wniosku doszliśmy z założenia, że równanie $G(r, r_1)=0$ jest przywiedlne, więc i to założenie uważać trzeba za fałszywe i powiedzieć:

II. *Między samą funkcyą $\varphi(u)$, a jej pierwszą pochodną $\varphi'(u)$ zachodzi zawsze algebraiczne nieprzywiedlne równanie $G(\varphi, \varphi')=0$.*

Wróćmy teraz znowu do definicyi:

$$\varphi=r=R(x,y), \quad \varphi'=r_1=R'(x,y),$$

gdzie $y^2=4x^3-g_2x-g_3$. Ponieważ równanie $G(r, r_1)=0$ okazało się nieprzywiedlne, więc naodwrót [art. 68., tw. II.] można x, y wyrazić wymiernie przez r, r_1. Wracając zaś do argumentu u, mamy:

(6) $$\wp u=R_1(\varphi, \varphi'), \quad \wp' u=R_2(\varphi, \varphi'),$$

gdzie R_1, R_2 oznaczają wymierne funkcye. Mamy więc nowe twierdzenie:

III. *Funkcyę $\wp u$ i jej pochodną $\wp' u$ można zawsze wyrazić wymiernie przez dowolną eliptyczną funkcyę $\varphi(u)$ i jej pochodną, byleby tylko $\varphi(u)$ posiadała te same pierwotne peryody, co funkcya $\wp u$.*

Według art. poprzedz. mamy:

(7) $$\varphi(u+v)=R(\wp(u+v), \wp'(u+v)).$$

Prawidło dodawania funkcyi $\wp u$ daje:

(α') $$\wp(u+v)=\overline{R}(\wp u, \wp' u, \wp v, \wp' v)$$

[por. (6), art. 139.], a z niego mamy:

$$\wp'(u+v)=S(\wp u, \wp' u, \wp'' u, \wp v, \wp' v).$$

[S wymierna funkcya]. Wstawiając zaś tu: $\wp'' u=6(\wp u)^2-\frac{g_2}{2}$ mieć będziemy:

(β') $$\wp'(u+v)=\overline{R}'(\wp u, \wp' u, \wp v, \wp' v).$$

Uwzględniając (α') i (β') w (7), otrzymamy:

$$\varphi(u+v)=R(\wp u, \wp' u, \wp v, \wp' v),$$

a gdy tu $\wp u$, $\wp' u$ wyrazimy przez φu, $\varphi' u$, a $\wp v$, $\wp' v$ przez φv, $\varphi' v$, dojdziemy do związku:

(8) $$\varphi(u+v)=R(\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)),$$

który się tu nazywa prawidłem dodawania funkcyi eliptycznej.

Niech teraz dane będą dwie funkcye eliptyczne:

$$\varphi_1(u)=R_1(\wp u, \wp' u), \quad \varphi_2(u)=R_2(\wp u, \wp' u)$$

o tych samych peryodach $2\omega_1$, $2\omega_3$. Są one wymiernemi miejsc $[\wp u, \wp' u]$ obrazu algebraicznego $(\wp' u)^2=4(\wp u)^2-g_2\wp u-g_3$, a jako takie, związane są ze sobą równaniem algebraicznem:

$$G_{12}(\varphi_1, \varphi_2)=0$$

i to nieprzywiedlnem, bo w równoległoboku P_0 do każdej dowolnej wartości φ_1 należy jedna tylko wartość φ_2 i naodwrót. Mamy więc twierdzenie:

IV. *Między dwiema funkcyami eliptycznemi o tychsamych pierwotnych peryodach, zachodzi zawsze nieprzywiedlne algebraiczne równanie.*

Wyraźmy wreszcie w $\varphi_2(u)$ funkcye $\wp u, \wp' u$ wymiernie przez $\varphi_1(u)$ i $\varphi'_1(u)$, to dostaniemy: $\varphi_2=\overline{R}(\varphi_1, \varphi'_1)$, co znaczy:

V. *Każdą funkcyę eliptyczną φ_2 można wyrazić wymiernie przez inną dowolną funkcyę eliptyczną φ_1 i jej pochodnę, byleby tylko obie funkcye φ_1, φ_2 posiadały tę samą parę pierwotnych peryodów.*

144. Wyrażenie funkcyi eliptycznej przez elementa proste. Utwórzmy funkcyę:

$$(1) \qquad \overline{\varphi}(u)=A_1\zeta(u-a_1)+A_2\zeta(u-a_2)+\ldots+A_m\zeta(u-a_m),$$

gdzie a_1, a_2, ..., a_m są wszystkie różne od siebie, i [przy przyjętej parze pierwotnych peryodów $2\omega_1$, $2\omega_3$ na płaszczyźnie (u)] nie są także równoważne między sobą. Taka funkcya ma więc jednokrotne bieguny $a_1, a_2, \ldots, a_m$, a poza nimi w równoległoboku P_0 jest wszędzie już skończoną. Zmieńmy u na $u+2\omega_\alpha$, gdzie $\alpha=1$, lub 3, to dostaniemy:

$$\overline{\varphi}(u+2\omega_\alpha)=A_1\zeta(u-a_1)+\ldots+A_m\zeta(u-a_m)$$
$$+2\eta_\alpha[A_1+A_2+\ldots+A_m], \quad \text{czyli:}$$
$$\overline{\varphi}(u+2\omega_\alpha)=\overline{\varphi}(u)+2\eta_\alpha[A_1+A_2+\ldots+A_m].$$

Gdy $A_1, A_2, \ldots, A_m$, które są widocznie wszystkiemi pozostałościami funkcyi $\overline{\varphi}(u)$ w jej biegunach, tak wybierzemy, aby suma:

$$(2) \qquad A_1+A_2+\ldots+A_m=0,$$

to $\overline{\varphi}(u)$ będzie już funkcyą eliptyczną, a do wyrażenia jej wymiernie przez $\wp u$ i $\wp' u$, możemy dojść w ten sposób:

We wzorze:

$$\zeta(u+v)=\zeta(u)+\zeta(v)+\frac{1}{2}\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v} \quad [(13) \text{ art. } 142.],$$

kładąc po porządku $v=-a_\nu$, $\nu=1, 2, \ldots, m$, dostajemy:

$$\zeta(u-a_\nu)=\zeta(u)-\zeta(a_\nu)+\frac{1}{2}\frac{\wp' u-\wp' a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu},$$

a gdy to w (1) wstawimy, mieć będziemy:

$$(3)\qquad \begin{aligned}\overline{\varphi}(u)&=\zeta(u)[A_1+A_2+\ldots+A_m]\\&+\sum_{\nu=1}^{m}{}' A_\nu\left[\frac{1}{2}\frac{\wp'u+\wp'a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}-\zeta(a_\nu)\right],\end{aligned}$$

[kreska nad sumą ma wskazywać, że w razie, gdy jedno $a_\nu=0$, dodajnik odnoszący się do tego a_ν nie mieści się już w sumie, a to z przyczyny, że $\zeta(u-a_\nu)_{a_\nu=0}$ jest wprost $=\zeta(u)$].

Uwzględniając w (3) warunek (2) mamy ostatecznie:

$$(4)\qquad \overline{\varphi}(u)=\sum_{\nu=1}^{m}{}' A_\nu\left[\frac{1}{2}\frac{\wp'u+\wp'a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}-\zeta(a_\nu)\right].$$

Przyjmijmy naodwrót, że dana eliptyczna funkcya posiada jednokrotne tylko bieguny a_ν, $\nu=1,2,\ldots,m$, a w nich pozostałości jej są odpowiednio A_ν, $\nu=1,2,\ldots,m$. Utworzmy różnicę $\varphi(u)-\overline{\varphi}(u)$. Różnica ta jest funkcyą eliptyczną, bez wszelkich miejsc nieskończonościowych — więc i zerowych w P_0 — a jako taka = stałej ilości C, [art. 142., tw. IV]. Mamy zatem:

$$(5)\qquad \varphi(u)=c+\overline{\varphi}(u),$$

a że pozostałości funkcyi $\overline{\varphi}(u)$ są zarazem pozostałościami funkcyi $\varphi(u)$, więc warunek (2) zatrzymać trzeba i dla funkcyi $\varphi(u)$.

Z tych uwag wynikają takie twierdzenia:

I. *W funkcyi eliptycznej o jednokrotnych biegunach jest suma jej wszystkich pozostałości zerem.*

II. *Funkcya eliptyczna o jednokrotnych biegunach jest w zupełności wyznaczoną, gdy dane są jej bieguny a_ν, jej pozostałości A_ν z warunkiem $\Sigma A_\nu=0$ i jeszcze jedno miejsce różne od a_ν, na którem przybierać ma pewną obraną wartość.*

Przyjmijmy teraz, że eliptyczna funkcya $\varphi(u)$ posiada miejsca nieskończonościowe $a_1, a_2, \ldots, a_r$, powtarzające się odpowiednio razy $n_1, n_2, \ldots, n_r$, a w otoczeniu miejsca a_ν niech jej rozwinięcie ma postać:

$$\frac{A_1^{(\nu)}}{u-a_\nu}+\frac{A_2^{(\nu)}}{(u-a_\nu)^2}+\ldots+\frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{(u-a_\nu)^{n_\nu}}+\chi_\nu(u-a_\nu),$$
$$\nu=1,2,\ldots,r,$$

gdzie $\chi(u-a_\nu)$ zawiera już tylko dodatnie potęgi różnicy $(u-a_\nu)$.

Wiadomo że:

$$\zeta(u-a_\nu)=\frac{1}{u-a_\nu}+dod.\,pot., \quad \text{a więc:}$$

$$\zeta'(u-a_\nu)=-\frac{1!}{(u-a_\nu)^2}+ \;\text{"}\;\;\text{"}$$

$$\zeta''(u-a_\nu)=+\frac{2!}{(u-a_\nu)^3}+ \;\text{"}\;\;\text{"}$$

$$\zeta'''(u-a_\nu)=-\frac{3!}{(u-a_\nu)^4}+ \;\text{"}\;\;\text{"}\;\cdots\cdots$$

Gdy więc utworzymy funkcyę:

$$(6)\qquad \begin{aligned}\overline{\varphi}(u)=\sum_\nu\Big[&A_1^{(\nu)}\zeta(u-a_1)-\frac{A_2^{(\nu)}}{1!}\zeta'(u-a_\nu)+\frac{A_3^{(\nu)}}{2!}\zeta''(u-a_\nu)-\\ &-\ldots\pm\frac{A_{n_\nu}}{(n_\nu-1)!}\zeta^{(n_\nu-1)}(u-a_\nu)\Big],\end{aligned}$$

to różnica $\varphi(u)-\overline{\varphi}(u)$ jest znowu na całej płaszczyźnie (u) skończoną i jest z tego powodu stałą $=c$. Stąd wynika, że:

$$(7)\qquad \varphi(u)=c+\overline{\varphi}(u).$$

Lecz:

$$(\alpha)\qquad \zeta'(u-a_\nu)=\frac{d}{du}\frac{\sigma'(u-a_\nu)}{\sigma(u-a_\nu)}=\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u-a_\nu)=-\wp(u-a_\nu),$$

a gdy tu do $-\wp(u-a_\nu)$ zastosujemy prawidło dodawania, otrzymamy: $\zeta'(u-a_\nu)=-\wp(u-a_\nu)=R_1(\wp u,\wp' u)$, gdzie R_1, jak w dalszym ciągu R_2, R_3, R, jest funkcyą wymierną. Dalej mamy:

$$(\beta)\qquad \left|\begin{aligned}&\zeta''(u-a_\nu)=\frac{d}{du}\wp(u-a_\nu)=R_2(\wp u,\wp' u)\\ &\zeta'''(u-a_\nu)=\frac{d^2}{du^2}\wp(u-a_\nu)=R_3(\wp u,\wp' u)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right.$$

gdyż wszystkie pochodne funkcyi $\wp(u-a_\nu)$ są eliptycznemi funkcyami, a przeto są wymiernemi w $\wp u$ i $\wp' u$. Uwzględniając to w (6) i (7) mieć będziemy:

$$(8)\qquad \varphi(u)=c+\sum_\nu A_1^{(\nu)}\zeta(u-a_\nu)+R(\wp u,\wp' u),$$

a że $\varphi(u)$ jest dwuperyodyczną funkcyą, a różnica

$$\varphi(u)-c-R(\wp u,\wp' u)=\sum_{\nu=1}^{r}A_1^{(\nu)}\zeta(u-a_\nu)$$

musi być oczywiście także dwuperyodyczną, więc i tu zajść musi warunek: $A_1^{(1)}+A_1^{(2)}+\ldots+A_1^{(r)}=0$. Z tych uwag wynika:

III. *Funkcya eliptyczna jest w zupełności wyznaczona, gdy znamy: 1^0) wszystkie jej miejsca nieskończonościowe a_ν, wraz z ich powtórzeniami; 2^0) wszystkie wyrazy z odjemnemi potęgami różnicy $(u-a_\nu)$ w jej rozwinięciu w otoczeniu każdego takiego miejsca a_ν — i wreszcie 3^0) jej* *wartości na dowolnem miejscu, różnem od wszystkich a_ν. Przytem jej pozostałości $A_1^{(\nu)}$ muszą być tak dane, aby ich suma była* $=0$.

W (β) mamy same pochodne funkcyi $\wp(u-a_\nu)$. Stąd pochodzi, że w (6) z wyrazów zawierających $\zeta''(u-a_\nu)$, $\zeta'''(u-a_\nu)$, ... powstanie pochodna pewnej funkcyi eliptycznej. Nazwijmyż ją:

$$\frac{d}{du}\bar{R}(\wp u, \wp' u),$$

to mieć będziemy z (7):

$$(9)\qquad \varphi(u)=c+\sum_\nu A_1^{(\nu)}\zeta(u-a_\nu)-\sum_\nu A_2^{(\nu)}\zeta'(u-a_\nu)+\frac{d}{du}\bar{R}(\wp u, \wp' u).$$

Forma (5) i (7) stanowi analogię z przedstawieniem funkcyi wymiernej przez sumę ułamków częściowych i dlatego to każda z tych form znana jest pod nazwą formy przedstawiającej funkcyę $\varphi(u)$ przez elementa proste [*éléments simples*, Hermite].

145. Zastosowanie ostatniej formy do całkowania. Funkcya napisana w formie (9) — art. poprzedz. — jest już dogodną do całkowania. Mamy bowiem odrazu:

$$\int \varphi(u)du=cu+c'+\sum_{\nu=1}^{r} A_1^{(\nu)}\log\sigma(u-a_\nu)-\sum_\nu A_2^{(\nu)}\zeta(u-a_\nu)+\bar{R}(\wp u, \wp' u).$$

Lecz jeszcze dogodniejszą formę uzyskamy, przerabiając formę (9) [art. poprzedz.] w ten sposób: Wiadomo, że:

$$\zeta(u-a_\nu)=\zeta(u)-\zeta(a_\nu)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u+\wp' a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}.$$

Otóż wstawiając to w pierwszą sumę w (9), mieć będziemy:

$$\zeta(u)\sum_\nu A_1^{(\nu)}-\sum_\nu A_1^{(\nu)}\zeta(a_\nu)+\frac{1}{2}\sum_\nu A_1^{(\nu)}\,\frac{\wp' u+\wp' a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}.$$

Pierwsza z tych sum jest zerem; drugą można przyłączyć do stałej c, a wtedy pozostanie stąd w (9) tylko:

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{2}\sum_\nu A_1^{(\nu)}\,\frac{\wp' u+\wp' a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}.$$

W drugiej sumie w (9) połóżmy:

$$\zeta'(u-a_\nu)=\frac{d}{du}\zeta(u-a_\nu)=\frac{d}{du}\left[\zeta(u)-\zeta(a_\nu)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u+\wp' a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}\right],$$

to stąd sumę:

$$\frac{d}{du}\sum_\nu A_2^{(\nu)}\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u+\wp' a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}$$

złączyć znowu można będzie z $\frac{d}{du}\bar{R}(\wp u, \wp' u)$ tak, że ostatecznie po tych przerobieniach mieć będziemy postać:

$$(1)\quad \varphi(u)=c-\sum_{\nu} A_2^{(\nu)}\frac{d}{du}\zeta(u)+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{r} A_1^{(\nu)}\frac{\wp'u+\wp'a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}+\frac{d}{du}\bar{R}(\wp u,\wp'u).$$

Gdy teraz tę formę (1) będziemy całkowali, otrzymamy:

$$(2)\quad \int\varphi(u)du=cu+c'-\sum_{\nu} A_2^{(\nu)}\zeta(u)+\frac{1}{2}\sum_{\nu} A_1^{(\nu)}\int\frac{\wp'u+\wp'a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}du+ \\ +\bar{R}(\wp u,\wp'u).$$

Gdy wreszcie uwzględnimy, że:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'u+\wp'a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}=\zeta(u-a_\nu)-\zeta(u)-\zeta(a_\nu),\quad \text{a więc:}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{\wp'u+\wp'a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}=log\,\frac{\sigma(u-a_\nu)}{\sigma u.\sigma a_\nu}+\frac{\sigma' a_\nu}{\sigma a_\nu}u,$$

jeżeli jako stałę całkowania obraliśmy $-log\,\sigma(a_\nu)$, to ostatecznie okaże się:

$$(3)\quad \int\varphi(u)du=cu+c'+\bar{R}(\wp u,\wp'u)- \\ -\sum_{\nu} A_2^{(\nu)}\frac{\sigma' u}{\sigma u}+\sum_{\nu} A_1^{(\nu)}\left(log\,\frac{\sigma'(u-a_\nu)}{\sigma(u-a_\nu)}+\frac{\sigma'(a_\nu)}{\sigma(a_\nu)}u\right).$$

W ten sposób obliczyliśmy całkę $\int\varphi(u)du$. Wynik zawiera same znane i zbadane już w poprzednich art. funkcye przestępne.

Gdy $\varphi(u)=R(\wp u,\wp'u)$, a uwzględnimy związek:

$$(4)\quad S=4s^2-g_2 s-g_3,$$

gdzie $\wp u=s$, a $\wp'u=-\sqrt{S}$, to wtedy $\varphi(u)=R(s,-\sqrt{S})$, $\wp'u\,du=ds$, a więc: $du=\frac{ds}{-\sqrt{S}}$. Połóżmyż:

$$\varphi(u)=R(s,-\sqrt{S})\frac{ds}{-\sqrt{S}}=\tilde{R}(s,-\sqrt{S})\,ds,$$

to mamy:

$$\int\varphi(u)du=\int\tilde{R}(s,-\sqrt{S})\,ds.$$

Jestto całka Abla (eliptyczna), należąca do obrazu algebraicznego (4), a w formie (3) mamy ją obliczoną i wyrażoną przez argument u, który jest widocznie:

$$(5)\quad u=\int\frac{ds}{-\sqrt{S}},$$

jest więc wartością całki eliptycznej rodzaju pierwszego; cu zawiera się w (2). Mamy dalej w formie (2):

$$\sum_\nu A_2^{(\nu)}\zeta(u)=\sum_\nu A_2^{(\nu)}\int\zeta'(u)du=\sum_\nu A_2^{(\nu)}\int-\wp u\,du=\int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}}.$$

A wreszcie suma:

$$\sum_\nu A_1^{(\nu)}\int\frac{\wp' u+\wp' a_\nu}{\wp u-\wp a_\nu}du \quad \text{daje} \quad \sum_\nu A_1^{(\nu)}\int\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_\nu}}{s-s_\nu}\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

gdzie s_ν, $-\sqrt{S_\nu}$ odpowiadają wartościom $u=a_\nu$, $\nu=1,2,...,r$.

Wyrażając teraz całą formę (2) przez s i $-\sqrt{S}$, mamy:

$$\int\tilde{R}(s,-\sqrt{S})\,ds=R(s,-\sqrt{S})+c+$$

$$+c'\int\frac{ds}{-\sqrt{S}}+\sum_\nu A_2^{(\nu)}\int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}}+\sum_\nu A_1^{(\nu)}\int\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_\nu}}{s-s_\nu}ds.$$

Jestto widocznie forma przedstawiająca najogólniejszą eliptyczną całkę sumą złożoną: z wymiernej funkcyi pary $(s,-\sqrt{S})$, z jednej $(\varrho=1)$ całki eliptycznej rodzaju 1^{go}, z r całek eliptycznych rodzaju 2^{go} i wreszcie z r całek eliptycznych rodzaju 3^{go}.

Całkę taką oblicza się bardzo łatwo, wprowadzając w nią argument u przestępnie obliczony formą (5). [Stanowi to analogię z elementarnym n. p. wypadkiem: $J=\int\sqrt{1-x^2}.dx$; całkę taką łatwo obliczyć, wprowadzając $x=sin\,u$, a więc: $u=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Wtedy bowiem mamy:

$$J=\frac{1}{2}\int 2\,sin\,u.cos\,u.du=\frac{1}{2}\int sin\,2u.du=-\frac{1}{4}cos\,2u,$$

a całkę tę obliczono w ten sposób dlatego tylko łatwo, że poznano już własności funkcyj trygonometrycznych, a więc przestępnych].

146. Przedstawienie funkcyi eliptycznej ilorazem bezustannie zbieżnych szeregów (przez funkcye σ). Funkcyę $\sigma(u)$ określiliśmy jako funkcyę przestępną całkowitą z nieskończoną ilością miejsc zerowych $2w=2\,{}_1\omega_1+2\nu_3\omega_3$, $\nu_1 \gtreqless \nu_3=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$, a gdy a jest dowolną stałą różną od zera, to $\sigma(u-a)$ będzie również taką funkcyą i znikać będzie na miejscu a i na wszystkich miejscach równoważnych z miejscem a.

Mając to, zauważmy funkcyę eliptyczną $\varphi(u)$ o peryodach $2\omega_1$, $2\omega_3$, o miejscach zerowych:

(1) $\qquad a_1,\ a_2,\ ...,\ a_r,$

powtarzających się razy:

(1') $\qquad \mu_1,\ \mu_2,\ ...,\ \mu_r,$

a o biegunach:

(2) $$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_\varrho,$$

powtarzających się razy:

(2') $$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_\varrho.$$

Z własności funkcyi $\varphi(u)$ wynika, że być musi:

(a) $$\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_r=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\varrho$$

i że przyjąć możemy odrazu:

$$(\mu_1 a_1+\mu_2 a_2+\ldots+\mu_r a_r)=(\nu_1 b_1+\nu_2 b_2+\ldots+\nu_\varrho b_\varrho).$$

Utwórzmy funkcyę:

(3) $$\psi(u)=\frac{\Pi\sigma(u-a_s)^{\mu_s}}{\Pi\sigma(u-b_t)^{\nu_t}},$$

gdzie iloczyn w liczniku złożony jest z czynników o wskaźnikach $s=1, 2, \ldots, r$, a iloczyn w mianowniku z czynników o wskaźnikach $t=1, 2, \ldots, \varrho$.

Funkcya $\psi(u)$ ma zatem te same miejsca zerowe i te same miejsca nieskończonościowe, i do tego z temi samemi powtórzeniami, co eliptyczna funkcya $\varphi(u)$. Gdy więc utworzymy iloraz $\varphi(u)/\psi(u)$, to będzie to funkcya bez miejsc zerowych i nieskończonościowych w skończoności, a z (możliwem) miejscem istotnem w nieskończoności.

Połóżmyż $[\varphi(u)/\psi(u)]=e^{g(u)}$, to stąd mamy:

(4) $$\varphi(u)=e^{g(u)}.\psi(u),$$

a funkcyę całkowitą $g(u)$ trzeba tu tak wybrać, aby i prawa strona posiadała peryody $2\omega_1$, $2\omega_3$. Z (4) dostajemy:

$$\log\varphi(u)=g(u)+\Sigma\mu_s\log\sigma(u-a_s)-\Sigma\nu_t\log\sigma(u-b_t),$$

a stąd upochadniając obie strony według u, mamy:

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}=g'(u)+\Sigma\mu_s\zeta(u-a_s)-\Sigma\nu_t\zeta(u-b_t).$$

Funkcya $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$ jest eliptyczną, posiada bieguny jednokrotne w a_s i b_t, a w ich otoczeniu rozwija się na:

$$\frac{\mu_s}{u-a_s}+\mathfrak{P}_s(u-a_s),\quad -\frac{\nu_s}{u-b_t}+\mathfrak{P}_t(u-b_t).$$

Lecz tę samą własność ma funkcya:

$$\overline{\psi}(u)=\mu_s\Sigma\zeta(u-a_s)-\Sigma\nu_s\zeta(u-b_s),$$

a jest wskutek własności (a) eliptyczną [art. 144.] i to tu o tych samych pierwotnych peryodach, co funkcya $\varphi'(u)/\varphi(u)$. Stąd pochodzi, że różnica $[\varphi'(u)/\varphi(u)]-\overline{\psi}(u)=c=const.$ i że więc $g'(u)=c$, a $g(u)=cu+c'$. Mamy więc:

(5) $$\varphi(u)=C.e^{cu}\psi(u),$$

jeżeli $e^{c'}$ położyliśmy $=C$.

Aby c w formie (5) wyznaczyć, zauważmy, że w niej prawa strona ma być dwuperyodyczną, a że ψ składa się z samych funkcyj σ, więc trzeba przedewszystkiem zbadać, jak się zmienia funkcya $\sigma(u)$, gdy się jej argument zwiększy o $2\omega_\alpha$.

Wiadomo, że $\zeta(u+2\omega_\alpha)=\zeta(u)+2\eta_\alpha$, czyli że:

$$\frac{\sigma'(u+2\omega_\alpha)}{\sigma(u+2\omega_\alpha)}=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}+2\eta_\alpha.$$

Stąd przez całkowanie dostajemy: $\log\sigma(u+2\omega_\alpha)=\log\sigma(u)+2\eta_\alpha u+A'$, a stąd znowu wynika:

$$(6)\qquad \sigma(u+2\omega_\alpha)=A.\sigma(u).e^{2\eta_\alpha u}.$$

Aby stałą A oznaczyć, połóżmy $u=-\omega_\alpha$, to z formy (6) wyniknie: $\sigma(\omega_\alpha)=A\sigma(-\omega_\alpha)e^{-2\eta_\alpha\omega_\alpha}$, że zaś $\sigma(-\omega_\alpha)=-\sigma(\omega_\alpha)$, więc dostajemy: $-1=A.e^{-2\eta_\alpha\omega_\alpha}$, dalej $A=-e^{+2\eta_\alpha\omega_\alpha}$, $\alpha=1,2$, i wreszcie:

$$\sigma(u+2\omega_\alpha)=-\sigma(u)e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)},\quad \alpha=1,3.$$

Mając ten rezultat, zastosujmy go do formy (4), zmieniając w niej u na $u+2\omega_\alpha$. Uwzględniając, że $\psi(u)$ ma postać (3), mieć będziemy:

$$\varphi(u+2\omega_\alpha)=C.e^{cu+2c\omega_\alpha}\,\psi(u)\,e^{2\eta_\alpha u[\Sigma\mu_s-\Sigma\nu_t]}\,e^{-2\eta_\alpha[\Sigma\mu_s a_s-\Sigma\nu_t b_t]}.$$
$$.e^{2\eta_\alpha\omega_\alpha[\Sigma\mu_s-\Sigma\nu_t]}\,(-1)^{[\Sigma\mu_s-\Sigma\nu_t]},$$

a że $\Sigma\mu_s-\Sigma\nu_t=0$ i $\Sigma\mu_s a_s-\Sigma\nu_t b_t=0$, więc dostajemy:

$$\varphi(u+2\omega_\alpha)=C.e^{cu+2c\omega_\alpha}.\psi(u),$$

co ma być $=C.\psi(u)$ wskutek żądanej dwuperyodyczności. Musi więc być $e^{cu+2c\omega_\alpha}=0$ przy dowolnem u, co tylko tym sposobem stać się może, że $c=0$. Mając to, położymy teraz:

$$(7)\qquad \varphi(u)=C.\frac{\Pi\sigma(u-a_s)^{\mu_s}}{\Pi\sigma(u-b_t)^{\nu_t}},$$

a że tu licznik i mianownik da się rozwinąć na bezustanny szereg więc ostatecznie znajdujemy:

$$(8)\qquad \varphi(u)=C.\frac{G_1(u)}{G_2(u)}.$$

Stała C zależy od danej wartości funkcyi na pewnem obranem miejscu c, różnem od a_s i b_t.

Zastosujmy formę (7) do eliptycznej funkcyi $\wp u-\wp v$ zmiennego argumentu u. Ta funkcya posiada dwukrotne miejsce nieskończonościowe $u=0$. Z miejsc jej zerowych jedno jest: $u=v$; drugie zaś może być miejscem $u=-v$. Wskutek tego dostaniemy tu:

$$(9)\qquad \wp u-\wp v=C.\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2 u}.$$

Stałą C oznaczymy, rozwijając tu obie strony w otoczeniu miejsca $u=0$. Z tego rozwijania mamy:

$$\frac{1}{u^2}+dod.\,pot.=-C.\frac{\sigma^2(v)}{u^2}+dod.\,pot.,$$

a stąd wynika: $1=-C.\sigma^2 v$, czyli $C=-\frac{1}{\sigma^2(v)}$. Wstawiając tę wartość w (9), mamy:

$$\wp u-\wp v=-\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2 v.\sigma^2 u},$$

albo — zmieniając u na $-u$, przez co lewa strona nie ulegnie zmianie — dostaniemy:

$$\wp u-\wp v=\frac{\sigma(v+u).\sigma(v-u)}{\sigma^2 v.\sigma^2 u}. \tag{10}$$

Jak wiadomo, ma pochodna $\wp' u$ trzykrotne miejsce nieskończonościowe, a miejsca jej zerowe są: ω_1, ω_3 i $-(\omega_1+\omega_3)=\omega_2$. Położymy więc:

$$\wp' u=C.\frac{\sigma(u-\omega_1)\,\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u-\omega_3)}{\sigma^3 u}.$$

Rozwijając tu obie strony w otoczeniu miejsca $u=0$, mamy:

$$-\frac{2}{u^3}+dod.\,pot.=\frac{C.\sigma(-\omega_1)\,\sigma(-\omega_2)\,\sigma(-\omega_3)}{u^3}+dod.\,pot.$$

Stąd wynika:

$$C=\frac{2}{\sigma(\omega_1)\,\sigma(\omega_2)\,\sigma(\omega_3)} \quad \text{i}$$

$$\wp' u=2.\frac{\sigma(u-\omega_1)\,\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u-\omega_3)}{\sigma(\omega_1)\,\sigma(\omega_2)\,\sigma(\omega_3)\,\sigma^3(u)}. \tag{11}$$

Literatura:

H. Schwarz: *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.* — Berlin 1884.

Halphen: *Traité des fonctions elliptiques et de leurs application. Part. I., II.* — Paris 1886. 1888.

P. Appell et E. Lacour: *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications.* — Paris 1897.

L. Lévy: *Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numeriques et applications.* — Paris 1898.

A. G. Greenhill: *The applications of elliptic functions.* — London 1892.

Formami wynikającemi z odwrócenia całki $\int ds/\sqrt{S}$ posługiwał się przed Weierstrassem już także i Eisenstein [C. J. T. 35.].

Z prac polskich wymienić trzeba:

P. Dziwiński: „Krótki zarys teoryi funkcyj peryodycznych jednej zmiennej". — We Lwowie 1885.

J. Puzyna: „O twierdzeniu, upraszczającem obliczanie czynników wykładniczych w Weierstrassowskiej teoryi funkcyj eliptycznych". Prace matematyczno-fizyczne T. X. — Warszawa 1899—1900.

J. Sochocki: „O równaniach stopnia trzeciego i czwartego". Prace mat.-fiz. T. X. — Warszawa 1899—1900.

CZĘŚĆ VII.

FUNKCYE HARMONICZNE I ICH ZASTOSOWANIA.

ROZDZIAŁ XIX.

Funkcye harmoniczne w kole. Prostsze zagadnienia o odwzorowaniach.

---

147. Zasadnicze formy i definicye. Niech u, v będą funkcyami dwóch rzeczywistych zmiennych x, y, zawierającemi same rzeczywiste spółczynniki; każdy system wartości (x, y) niech przedstawia punkt na płaszczyźnie prostokątnego układu osi xx', yy'. Na tej płaszczyźnie niech leży zamknięta, nieprzecinająca się z sobą, krzywa c. Na tej krzywej i w jej wnętrzu niech funkcye u, v i jej pierwsze cząstkowe pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ będą skończone, oznaczone i ciągłe. Przy takich założeniach zauważmy całkę podwójną:

$$(1) \qquad J = \underbrace{\int\int}_{c} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Stosując tu całkowanie przez części i przyjmując, że wewnątrz krzywej c są pochodne $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ skończone, oznaczone i ciągłe, dostajemy:

$$(2) \qquad \underbrace{\int\int}_{c} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{c} u \frac{\partial v}{\partial x}\, dy - \underbrace{\int\int}_{c} u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, dx\, dy,$$

$$(3) \qquad \underbrace{\int\int}_{c} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{c} u \frac{\partial v}{\partial y}\, dx - \underbrace{\int\int}_{c} u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\, dx\, dy,$$

a stąd wynika:

$$4)\qquad J=\int_{c\circlearrowleft} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}dy-\frac{\partial v}{\partial y}dx\right)-\underbrace{\int\int}_{c} u.\Delta v.dx\,dy,$$

gdzie:

$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Gdy ds jest elementem łuku krzywej c, to określnikami kierunku jej stycznej t w punkcie $A=(xy)$ są:

$$(a)\qquad \frac{dx}{ds}=cos(x,t),\quad \frac{dy}{ds}=cos(y,t),$$

a te — jeżeli założymy, że styczna ruchoma nie zmienia nigdzie swego kierunku nagle — są funkcyami ciągłemi i jednoznacznemi wzdłuż całej krzywej c. Kierunek normalnej n w punkcie A określi się przez:

$$(b)\qquad cos(x,n)=\frac{dx}{dn}=-\frac{dy}{ds},\quad cos(y,n)=\frac{dy}{dn}=\frac{dx}{ds}.$$

Gdy n pojmować będziemy jako normalną, dążącą do wnętrza krzywej, a dn będzie jej elementem, poczynającym się w punkcie A, a kończącym się w nieskończenie bliskim punkcie A', leżącym wewnątrz krzywej c, to mamy:

$$\frac{dv}{dn}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dn},\quad \text{czyli:}$$

$$(c)\qquad \frac{dv}{dn}=\frac{\partial v}{\partial x}cos(x,n)+\frac{\partial v}{\partial y}cos(y,n),$$

albo wreszcie:

$$(c')\qquad \frac{dv}{dn}=-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dx}{ds}.$$

Pochodna ta jest — wskutek założenia o $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ i o kierunkach (a) — skończoną, oznaczoną i ciągłą funkcyą wzdłuż całej krzywej (c). Z (c') dostajemy:

$$-\frac{dv}{dn}ds=\frac{\partial v}{\partial x}dy-\frac{\partial v}{\partial y}dx,$$

a uwzględniając to w (4), mamy:

$$(5)\qquad J=-\int_{c\circlearrowleft} u.\frac{dv}{dn}ds-\underbrace{\int\int}_{c} u.\Delta v.dx\,dy.$$

Uwaga. Jeżeli długość obwodu krzywej c nazwiemy σ, to granicami pierwszej całki, bez względu, czy po krzywej c sumujemy elementa tej całki w dodatnim lub odjemnym kierunku, są zawsze: $(0...\sigma)$. Z tego powodu w takich całkach jak $\int u \frac{\partial v}{\partial n} ds$ nie potrzeba uwzględniać kierunku całkowania.

Forma (1) nie zmienia się wcale, gdy w niej u, v ze sobą pomieniamy. Zróbmyż to samo w (5), to mieć także będziemy:

$$J = -\int_c v \frac{du}{dn} ds - \underbrace{\int\int}_{c} v.\Delta u \, dx\, dy, \tag{5'}$$

gdzie znowu:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Z (5) i (5') dostajemy związek:

$$\int_c \left[u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right] ds + \underbrace{\int\int}_{c} [u\,\Delta v - v\,\Delta u]\, dx\, dy = 0, \tag{6}$$

który zwyczajnie formułą G r e e n'a nazywają. Zakładając $u=1$, dochodzimy z (6) do związku:

$$\int_c \frac{dv}{dn} ds + \underbrace{\int\int}_{c} \Delta v . dx\, dy = 0. \tag{7}$$

D e f i n i c y a. *Każda funkcya dwóch zmiennych rzeczywistych x, y zadość czyniąca cząstkowemu równaniu:*

$$\Delta \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0$$

nazywa się funkcyą harmoniczną albo funkcyą kulistą. Warunki, jakim poddawać można taką funkcyę, mogą być najrozmaitsze, a z nich odszczególniamy w dalszym ciągu te, które dla teoryi funkcyj będą doniosłego znaczenia. Lecz każdym razem wtedy trzeba będzie przedewszystkiem przekonać się — a to jest bardzo ważne — czy funkcya harmoniczna spełniająca pewne dane warunki, w istocie istnieć może.

Przyjmijmy, że funkcye u, v — posiadając wewnątrz c i na samej krzywej c własności już wyliczone — spełniają w c równanie różniczkowe $\Delta\Theta=0$, są więc tam harmonicznemi. Uwzględniając to, dostajemy z (6):

$$\int_c \left[u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right] ds = 0, \tag{8}$$

a z (7):

$$\int_c \frac{dv}{dn} ds = 0; \tag{9}$$

to znaczy:

I. *Gdy funkcya v jest harmoniczną w c, to całka okrężna:*

$$\int_c \frac{dv}{dn} ds = 0.$$

Gdy zamiast krzywej c mieć będziemy dwie krzywe c_1, c_2, a z nich c_2 leży wewnątrz c_1, to uważając obie te krzywe razem za zupełne ograniczenie zamkniętego niemi obszaru, mieć będziemy z (8):

$$(10) \qquad \int_{c_1} \left[u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right] ds + \int_{c_2} \left[u \frac{dv}{-dn} - v \frac{du}{-dn} \right] ds' = 0;$$

ds' jest elementem łuku krzywej c_2, a w drugiej całce $(-dn)$ jest elementem normalnej, dążącej n a z e w n ą t r z tej krzywej. Napiszmy (10) w postaci:

$$(11) \qquad \int_{c_1} \left[u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right] ds - \int_{c_2} \left[u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right] ds' = 0,$$

to tu już w obydwu całkach mamy pochodne ze względu na normalne wewnętrzne. Z (9) dostajemy w tym razie:

$$(12) \qquad \int_{c_1} \frac{dv}{dn} ds - \int_{c_2} \frac{dv}{dn} ds' = 0.$$

Przyjmijmy, że u, v są identyczne funkcye harmoniczne. Wtedy, uwzględniając już $\Delta u = 0$, mamy z (1) i (5):

$$(13) \qquad \underbrace{\int\int}_{c} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\,dy = - \int_c u \frac{du}{dn} ds,$$

a gdy funkcyę u poddamy warunkowi, aby na samej krzywej c była wszędzie zerem, to z (13) wynika:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Ten związek — ponieważ x, y są rzeczywiste, a także wszystkie spółczynniki funkcyi u są rzeczywiste — spełnić się może tylko tym sposobem, że:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

a więc $u = const.$; że zaś na krzywej c jest $u = 0$, więc u także we wnętrzu krzywej c jest zerem. To znaczy:

II. *Funkcya harmoniczna, posiadająca wartość z e r o wzdłuż krzywej c, jest identycznie zerem.*

Mając to przyjmijmy, że możliwa jest funkcya harmoniczna u, przybierająca na krzywej c pewne oznaczone wartości i przyjmijmy, że i druga funkcya harmoniczna u_1 przybiera na c te same wartości co u. Na c mamy więc $u-u_1=0$, a różnica $u-u_1$ jest oczywiście także funkcyą harmoniczną.

Według tw. II. jest więc identycznie $u-u_1=0$, czyli $u=u_1$, a stąd twierdzenie:

III. *Jeżeli istnieje funkcya harmoniczna wewnątrz krzywej c, przyjmująca pewne dane wartości na samej krzywej c, to taka funkcya jest tylko jedna.*

Właśnie cały dalszy ciąg naszych poszukiwań zmierzać będzie do rozstrzygnięcia pytania, czy w istocie istnieje funkcya harmoniczna wewnątrz c o danych jej wartościach na krzywej c. Te dane wartości zwane zwykle „warunkami granicznymi" rozumieć będziemy w ten sposób, że gdy na krzywej c na jej punkt p przypada wartość u_p, to funkcya harmoniczna u zbliża się dowolnie do wartości u_p, gdy ruchomy punkt wewnątrz c pozostający po dowolnej drodze zbliża się do p. Wnioskowanie o istnieniu funkcyi z danych jej granicznych warunków nazywają za Riemannem „zasadą Dirichleta" [por. Fricke-Klein, *Modulfunctionen*, T. I., str. 508].

148. Wartość funkcyi harmonicznej w pewnym punkcie (a, b) wewnątrz danej krzywej. Nie troszcząc się na razie o warunki graniczne, dostajemy jedno, bardzo proste rozwiązanie równania $\Delta\Theta=0$ w postaci:

$$(1) \qquad u=\log r, \quad r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Przyjmijmy, że (a, b) jest dowolnym punktem wewnątrz c, i otoczmy go kołem k, mającem środek w (a, b), a promień ϱ tak mały, że koło k leży całkowicie we wnętrzu c.

Gdy v jest funkcyą harmoniczną wewnątrz c, to stosując do $u=\log r$ i v wzór (11) — art. poprzedz. — mamy:

$$(2) \qquad \int\limits_c \left[\log r.\frac{dv}{dn}-v.\frac{d\log r}{dn}\right]ds-\int\limits_k \left[\log \varrho.\frac{dv}{dn}-v\frac{d\log \varrho}{dn}\right]ds'=0.$$

W pierwszej z tych całek jest r oddaleniem punktu (ab) od bieżącego punktu (xy) krzywej c. W drugiej całce mamy:

$$(\alpha) \qquad \int\limits_k \log \varrho\frac{dv}{dn}ds'=\log \varrho\int\limits_k \frac{dv}{dn}ds'=0 \text{ [tw. I. art. poprzedz.].}$$

Zauważmy dalej, że:

$$\frac{d\log\varrho}{dn}=\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dn}$$

i że $d\varrho=-dn$, gdyż ϱ ma dodatni kierunek swój od środka (ab) ku obwodowi, a więc kierunek przeciwny, jak na normalnej n, to dostaniemy:

$$(\beta)\qquad \frac{d\log\varrho}{dn}=-\frac{1}{\varrho}.$$

Uwzględniając (α), (β) w (2), mamy:

$$(3)\qquad \frac{1}{\varrho}\int\limits_k v.ds'=\int\limits_c\left[\log r\frac{dv}{dn}-v\frac{d\log r}{dn}\right]ds.$$

Jeżeli v ma na obwodzie koła k największą wartość M, a najmniejszą wartość m, to:

$$2\pi M>\frac{1}{\varrho}\int\limits_k v.ds'>2\pi m.$$

Przyjmijmy, że ϱ dowolnie malejąc, staje się wreszcie zerem. Koło k staje się wtedy punktem (a,b); między M i m nie ma wtedy odróżnienia, gdyż $M=m=v(ab)$, a z (3) dostajemy:

$$(4)\qquad v(ab)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_c\left[\log r.\frac{dv}{dn}-v\frac{d\log r}{dn}\right]ds.$$

Ta całka przedstawia wartość harmonicznej funkcyi v w dowolnym punkcie (a,b) zawartym wewnątrz c. W tę całkę wchodzą wartości funkcyi samej i wartości pochodnej $\frac{dv}{dn}$ na samej krzywej c.

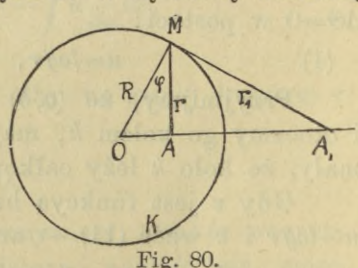


Fig. 80.

W razie, gdy krzywa c jest kołem K, da się forma (4) w ten sposób uprościć, że pod całką pozostanie wprawdzie v, ale $\frac{dv}{dn}$ już się tam zawierać nie będzie. Promieniem koła K niech będzie R [fig. 80.], a punkt $(a,b)=A$ niech leży wewnątrz tego koła. Przedłużając promień OA — [O jest środkiem koła K] — poza koło K, wybierzmy na nim punkt $A_1=(a_1b_1)$ taki, że: $OA.OA_1=R^2$. Wtedy, gdy M jest dowolnym punktem (x,y) na kole K, a położymy:

$$\overline{AM}^2=r^2=(x-a)^2+(y-b)^2,\quad \overline{A_1M}^2=r_1{}^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2$$

mamy:

$$(5)\qquad \frac{AM}{A_1M}=\frac{r}{r_1}=\frac{OA}{R}=C=const.$$

Gdy $u = \log r_1$, to — ponieważ ta funkcya harmoniczna pozostaje skończoną na wszystkich punktach wewnątrz koła K — mieć będziemy:

$$(a) \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_K \left[\log r_1 . \frac{dv}{dn} - v\frac{d\log r_1}{dn}\right] ds = 0, \quad [(8) \text{ art. poprzedz.}].$$

Jeżeli przeciwnie $u = \log r$, to podług równania (4) mamy:

$$(b) \qquad v(ab) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_K \left[\log r \frac{dv}{dn} - v\frac{d\log r}{dn}\right] ds.$$

Odejmując (a) od (b) dostajemy:

$$(6) \qquad v(ab) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_K \frac{dv}{dn}\log\frac{r}{r_1}\, ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_K v\left(\frac{d\log r_1}{dn} - \frac{d\log r}{dn}\right) ds.$$

Lecz wskutek (5) jest:

$$\int\limits_K \frac{dv}{dn}.\log\frac{r}{r_1}\, ds = \log C \cdot \int\limits_K \frac{dv}{dn}\, ds = 0,$$

a uwzględniając to w (6), dochodzimy do formuły:

$$(7) \qquad v(ab) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_K v\left(\frac{d\log r_1}{dn} - \frac{d\log r}{dn}\right) ds.$$

Tej formie nadamy jeszcze inne kształty. Połóżmy $0A = l$, $0A_1 = l_1$, to z trójkątów $0MA$, $0MA_1$ (fig. 80.) mamy odpowiednio:

$$(c) \qquad l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi, \quad l_1{}^2 = R^2 + r_1{}^2 - 2Rr_1\cos\varphi_1,$$
$$\varphi = \measuredangle(r, R), \quad \varphi_1 = \measuredangle(r_1, R).$$

Zauważmy:

$$\frac{d\log r_1}{dn} = \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dn}, \quad \frac{d\log r}{dn} = \frac{1}{r}.\frac{dr}{dn},$$

to mamy tu:

$$\frac{dr}{dn} = \frac{\partial r}{\partial x}.\frac{dx}{dn} + \frac{\partial r}{\partial y}.\frac{dy}{dn}.$$

Lecz, że $dn = -dR$ i że:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r} = \cos(x, r); \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} = \cos(y, r),$$

$$-\frac{dx}{dR} = -\cos(x, R); \quad -\frac{dy}{dR} = -\cos(y, R), \quad \text{więc:}$$

$$\frac{dr}{dn} = -\cos(r, R) = -\cos\varphi \quad \text{i podobnie:} \quad \frac{dr_1}{dn} = -\cos(r_1, R) = -\cos\varphi_1.$$

Z tego wynika:

$$\frac{d\log r_1}{dn}-\frac{d\log r}{dn}=\frac{\cos\varphi}{r}-\frac{\cos\varphi_1}{r_1}.$$

Z równań (c) wynika:

$$\frac{\cos\varphi}{r}-\frac{\cos\varphi_1}{Rr_1}=\frac{1}{2Rr^2r_1{}^2}[(R^2+r^2-l^2)r_1{}^2-(R^2+r_1{}^2-l_1{}^2)r^2)],$$

a gdy tu $r_1=\frac{r.R}{l}$, $l_1=\frac{R^2}{l}$ uwzględnimy, dostaniemy po wszystkich skróceniach:

$$\frac{\cos\varphi}{r}-\frac{\cos\varphi_1}{r_1}=\frac{R^2-l^2}{Rr^2}.$$

Wskutek tego formę (7) można także napisać tak:

$$(8)\qquad v(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_K v.\frac{R^2-l^2}{Rr^2}ds.$$

Przyjmijmy dla uproszczenia, że środek 0 koła K jest początkiem układu osi xx', yy' [fig. 81.]. $0A=l$ niech zawiera z osią xx' kąt φ, a $0M=R$ kąt ψ. Z trójkąta $0AM$ mamy wtedy:

$$r^2=R^2+l^2-2R.l.\cos(\psi-\varphi).$$

Ilości l, φ są biegunowemi spółrzędnemi punktu A, a element łuku $ds=Rd\psi$. Za wprowadzeniem tych biegunowych spółrzędnych, dostaniemy z (8):

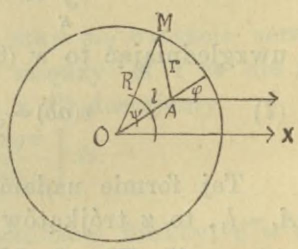


Fig. 81.

$$(9)\qquad v(ab)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{v_1(R,\psi)(R^2-l^2)}{R^2+l^2-2Rl.\cos(\psi-\varphi)}.d\psi.$$

gdzie $v_1(R,\psi)$ jest wartością funkcyi harmonicznej v w punkcie M. Położmyż $v_1(R,\psi)=f(\psi)$, to mieć będziemy:

$$(10)\qquad v(ab)=v_1(l,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi).\frac{R^2-l^2}{R^2+l^2-2Rl\cos(\psi-\varphi)}d\psi.$$

Położmy $a+bi=z=l.e^{\varphi i}$ i zauważmy funkcyę:

$$(11)\qquad F(z)=\frac{Re^{\psi i}+z}{Re^{\psi i}-z},$$

to jej rzeczywistą częścią będzie $\frac{R^2-l^2}{R^2+l^2-2Rl\cos(\psi-\varphi)}$, a że $f(\psi)$ przedstawia same rzeczywiste wartości na okręgu koła K, więc równanie (10) można także tak napisać:

$$(12) \qquad v(a,b)=\Re\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(z).f(\psi)d\psi\right],$$

gdzie $\Re$ wskazuje, że z wartości obliczonej całki trzeba zatrzymać tylko jej część rzeczywistą.

149. Rozwijanie funkcyi harmonicznej wewnątrz danego obszaru. W formach art. poprzedzającego mamy przedstawioną wartość funkcyi v w każdym poszczególnym, oddzielnym punkcie, leżącym wewnątrz krzywej c lub wewnątrz koła K. Postarajmyż się teraz o taką formę, którąby funkcyę v przedstawić mogła w pewnym zwartym obszarze punktów, leżących wewnątrz c lub wewnątrz K.

Biorąc ogólniejszą krzywę c pod uwagę, obierzmy w jej wnętrzu pewien stały punkt (x_0, y_0) i z tego punktu, jako środka, zakreślmy koło — o promieniu R — mieszczące się całkowicie wewnątrz c. Gdy (x, y) jest dowolnym punktem wewnątrz tego koła, a $x-x_0=a$, $y-y_0=b$, $a+bi=z=l.e^{\varphi i}$, to tu możemy już zastosować formę (12) art. poprzedz. Połóżmyż:

$$F(z)=\frac{1+\frac{l}{R}.e^{(\varphi-\psi)i}}{1-\frac{l}{R}.e^{(\varphi-\psi)i}},$$

to zakładając $l<R$, mamy:

$$F(z)=\left[1+\frac{l}{R}e^{(\varphi-\psi)i}\right]\left[1+\frac{l}{R}e^{(\varphi-\psi)i}+\frac{l^2}{R^2}e^{2(\varphi-\psi)i}+\ldots\right]=$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^n}{R^n}e^{n(\varphi-\psi)i},$$

$$\Re[F(z)]=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^n}{R^n}\cos n(\varphi-\psi),$$

a gdy położymy:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi.d\psi=A_n, \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi.d\psi=B_n,$$

$$n=0, 1, 2, \ldots,$$

to podług formy (12) — art. poprzedz. — będzie:

$$(1) \qquad v(a,b)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\frac{l^n\cos n\varphi}{R^n}+B_n\frac{l^n\sin n\varphi}{R^n}\right].$$

Połóżmy:

(2) $$\frac{(a+bi)^n}{R^n}=\frac{l^n}{R^n}[\cos n\varphi+i\sin n\varphi]=(a,b)_n+i(a,b)'_n,$$

gdzie $(a,b)_n$, $(a,b)'_n$ są-to jednorodne funkcye n^{go} stopnia, jakie powstają z rozwinięcia: $(a+bi)^n/R^n$, to ostatecznie mamy:

(3) $$v(a,b)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n(a,b)_n+B_n(a,b)'_n],$$

a że $a=(x-x_0)$, $b=(y-y_0)$, więc:

(4) $$v(x-x_0,y-y_0)=\frac{A_0}{2}+\varphi_1(x-x_0,y-y_0)+\varphi_2(x-x_0,y-y_0)+\dots,$$

gdzie φ_α są-to jednorodne funkcye stopnia α^{go} argumentów $(x-x_0)$, $(y-y_0)$. Rozwinięcie (4) jestto widocznie zwykły szereg potęgowy o rzeczywistych spółczynnikach i rzeczywistych argumentach:

$$(x-x_0),\ (y-y_0),$$

a chodzi jeszcze tylko o zbieżność i zakres zbieżności tego szeregu. Aby się tem zająć, wróćmy do formy (1). Z niej odrazu wynika:

$$|v(a,b)|\leq\left|\frac{A_0}{2}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{|A_n|\frac{l^n}{R^n}+|B_n|\frac{l^n}{R^n}\right\},$$

a tu wszystkie $|A_n|$, $|B_n|$ mają być skończone.

Zastąpmyż je wszystkie górną ich granicą g, to dostaniemy:

$$|v(a,b)|<\left|\frac{A_0}{2}\right|+2g\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^n}{R^n}.$$

Gdy zauważymy dalej, że $l=\sqrt{a^2+b^2}<|a|+|b|$, to tem bardziej będzie:

$$|v(a,b)|<\left|\frac{A_0}{2}\right|+2g\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|a|+|b|)^n}{R^n}.$$

Tu szereg po prawej stronie jest zbieżny niezawodnie, gdy $|a|<\frac{R}{2}$, $|b|<\frac{R}{2}$, a stąd wynika, że i rozwinięcie (4) jest zbieżne bezwarunkowo i absolutnie dla $|x-x_0|<\frac{R}{2}$, $|y-y_0|<\frac{R}{2}$.

To znaczy:

I. *Funkcya harmoniczna wewnątrz pewnej krzywej c daje się w otoczeniu każdego punktu* (x_0,y_0), *leżącego wewnątrz tej krzywej rozwinąć na zwykły szereg potęgowy argumentów* $(x-x_0)$, $(y-y_0)$. *Wewnątrz c jest więc funkcya harmoniczna analityczną funkcyą swoich argumentów, a gdy przeprowadzenia jej elementów istnieją i poza krzywą, to i funkcya harmoniczna istnieje jeszcze i zewnątrz krzywej.*

Gdy w otoczeniu punktu (x_0, y_0) mamy:

$$v=(x-x_0, y-y_0)_0+(x-x_0, y-y_0)_\nu+\dots,\quad \nu\geqq 1,$$

a przyjmiemy, że v posiada na tem miejscu *maximum* lub *minimum*, a więc ta wartość $=(x-x_0, y-y_0)_0$ jest albo większa, albo mniejsza od wszystkich w najbliższem otoczeniu, to musielibyśmy mieć — przy nieskończenie małych $|x-x_0|$, $|y-y_0|$ — w pierwszym razie:

$$(\alpha)\qquad v-(x-x_0, y-y_0)_0=(x-x_0, y-y_0)_\nu<0.$$

a w drugim razie:

$$(\beta)\qquad v-(x-x_0, y-y_0)_0=(x-x_0, y-y_0)_\nu>0.$$

Lecz $(x-x_0, y-y_0)_\nu=\frac{l^\nu}{R^\nu}(A_\nu cos\, \nu\varphi+B_\nu sin\, \nu\varphi)$, a że równanie:

$$A_\nu cos\, \nu\varphi+B_\nu sin\, \nu\varphi=0$$

zawsze posiada pierwiastki, więc istnienie nierówności (α) z wykluczeniem (β) lub nierówności (β) z wykluczeniem (α) jest niemożliwe, a to znaczy:

II. *Funkcya harmoniczna w całem wnętrzu krzywej c nie posiada ani maximum, ani minimum.*

W szczególności, gdy krzywa c jest kołem K, a funkcyę v rozwiniemy w otoczeniu punktu (x_0, y_0), środka tego koła, to dostajemy twierdzenie:

III. *Funkcya harmoniczna v wewnątrz pewnego koła K, rozwinięta dla otoczenia środka tego koła, daje szereg zbieżny we wszystkich punktach wewnątrz tego koła.*

W (2) jednorodne funkcye:

$$(a, b)_n=(x-x_0, y-y_0)_n,\quad (a, b)'_n=(x-x_0, y-y_0)'_n$$

spełniają obie równanie różniczkowe $\varDelta\Theta=0$. Z tego wynika, że w (3) każdy dodajnik sumy spełni także to równanie, jest więc funkcyą harmoniczną, a to znaczy:

IV. *Każde rozwinięcie funkcyi harmonicznej wewnątrz c jest sumą jednorodnych funkcyj harmonicznych wewnątrz c.*

150. Funkcye harmoniczne dla obszaru kołowego. W całkach, jakiemi przedstawiliśmy funkcyę harmoniczną wewnątrz c lub wewnątrz K zawierają się wartości funkcyi na samej krzywej c, lub na samem kole K. Pytanie więc zachodzi, czy temi formami całkowemi zadość będzie można uczynić warunkowi, aby funkcya na samej krzywej c lub na samem kole K przybierała pewne naprzód dane wartości.

Tymi granicznymi warunkami teraz się szczegółowo zajmiemy, biorąc naprzód pod uwagę obszar kołowy. *)

Przyjmijmy, że funkcya $f(\psi)$, która na tem kole daje właśnie żądany ciąg wartości, jest funkcyą ciągłą skończoną i jednoznaczną. Ta jednoznaczność domaga się, aby $f(\psi)$ była funkcyą peryodyczną o peryodzie 2π, co też odrazu założyć potrzeba.

Połóżmy, mając te założenia, $\psi = \vartheta + \varphi$, to forma (9) — art. 148. — napisze się teraz tak:

$$(1) \qquad v(a,b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{R^2 - l^2}{R^2 + l^2 - 2Rl \cos\vartheta} f(\vartheta + \varphi)\, d\vartheta.$$

Całkę tę nazywają całką Poisson'a.

Gdy $l < R$, to całka:

$$(a) \qquad L = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \frac{R^2 - l^2}{R^2 + l^2 - 2Rl \cos\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{\pi} \left[arc\,tg \left(\frac{R+l}{R-l} tg \frac{1}{2} \vartheta \right) \right]_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} = 1.$$

Wskutek tego, gdy położymy: $v(a,b) = \overline{v}(l, \varphi)$, będzie różnica:

$$J = \overline{v}(l, \varphi) - f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \{ f(\vartheta + \varphi) - f(\varphi) \} \frac{R^2 - l^2}{R^2 + l^2 - 2Rl \cos\vartheta} d\vartheta.$$

Lecz, że $f(\vartheta + \varphi)$ i $\cos\vartheta$ są funkcyami peryodycznemi o peryodzie 2π, więc możemy położyć:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{+\delta} + \frac{1}{2\pi} \int_{+\delta}^{2\pi-\delta} = J_1 + J_2.$$

Przyjmując, że δ jest dowolnie małą dodatnią ilością, mamy w pierwszej całce wartości $f(\vartheta + \varphi)$, zawarte w dowolnie małem otoczeniu $(-\delta + \varphi ... + \delta + \varphi)$ punktu (R, φ) na kole K. A gdy dalej przyjmiemy, że l dowolnie zbliża się do wartości R, (pozostając $< R$), to $\overline{v}(l, \varphi)$ daje wartości funkcyi $v(a, b)$ dla punktów $(a, b) = (l, \varphi)$, które leżąc we wnętrzu koła K, dowolnie się przybliżają do punktu (R, φ). O wartości różnicy J w tym razie wywnioskujemy, badając całki J_1, J_2.

Otóż, gdy g jest największą wartością różnicy $|f(\vartheta + \varphi) - f(\varphi)|$ w obszarze $\vartheta = (-\delta ... + \delta)$, to:

---

*) H. A. Schwarz. — *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. *Gesammelte math. Abhandlungen* T. 2., str. 175—210. Por. także: E. Picard. — *Traite d'Analyse* T. 2.

$$|J_1| < \frac{g}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{+\delta} \frac{R^2 - l^2}{R^2 + l^2 - 2Rl \cos\vartheta} d\vartheta,$$

a że: $\frac{R^2 - l^2}{R^2 + l^2 - 2Rl \cos\vartheta}$ pozostaje >0 na całem okręgu koła K, więc tem bardziej będzie:

$$|J_1| < \frac{g}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{R^2 - l^2}{R^2 + l^2 - 2Rl \cos\vartheta} d\vartheta.$$

Tu całka $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$ ma — podług (a) — wartość $=1$, a stąd wynika: $|J_1| < g$.

Lecz δ możemy tak małe obrać, że g będzie mniejsze od dowolnie małej obranej dodatniej ilości ε_1. Wtedy będzie:

(2) $$|J_1| < \varepsilon_1.$$

Gdy g jest znowu największą wartością różnicy $|f(\vartheta + \varphi) - f(\varphi)|$ w obszarze $\vartheta = (\delta + ... 2\pi - \delta)$, to:

(3) $$|J_2| < \frac{g}{2\pi} \int\limits_{\delta}^{2\pi - \delta} \frac{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{l}{R}\right)^2 - 2\frac{l}{R} \cos\vartheta} d\vartheta.$$

Utwórzmy różnicę:

$$\left[1 + \left(\frac{l}{R}\right)^2 - 2\frac{l}{R} \cos\vartheta\right] - 2\frac{l}{R}(1 - \cos\delta) =$$
$$= \left(1 - \frac{l}{R}\right)^2 - 2\frac{l}{R}(\cos\vartheta - \cos\delta),$$

to, ponieważ $(\cos\vartheta - \cos\delta)$ jest odjemne w całym rozważanym obszarze $\vartheta = (\delta ... 2\pi - \delta)$, mamy w tym obszarze:

$$1 + \left(\frac{l}{R}\right)^2 - 2\frac{l}{R} \cos\vartheta > 2\frac{l}{R}(1 - \cos\delta),$$

a nierówność (3) możemy zastąpić nierównością:

$$|J_2| < \frac{g}{2\pi} \cdot \frac{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2}{2\frac{l}{R}(1 - \cos\delta)} \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta, \quad \text{czyli:}$$

(4) $$|J_2| < \frac{g}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2}{\frac{l}{R}(1 - \cos\delta)}.$$

Jakkolwiek małe przyjmiemy δ, można zawsze l tak przybliżyć do R, że prawa strona nierówności (4) będzie mniejszą od dowolnie małej dodatniej ilości ε_2. Mamy więc równocześnie:

$$|J_1| < \varepsilon_1, \quad |J_2| < \varepsilon_2.$$

Stąd wynika:

$$|J_1 + J_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

a że $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ można znowu uczynić mniejszem od dowolnie małej dodatniej ilości ε, więc:

$$|J| = |\overline{v}(l,\varphi) - f(\varphi)| < \varepsilon,$$

gdy się (l, φ) dowolnie do punktu (R, φ) okręgu K przybliża. Z tych wszystkich uwag wynika:

I. *Zadaniu, aby funkcya harmoniczna v wewnątrz koła K przybierała na samym okręgu K dane wartości w ciągły sposób zmieniające się na tym okręgu można zawsze zadość uczynić. Taka bowiem funkcya istnieje i jest [tw. III., art. 147.] tylko jedna.*

Połóżmy w (1) znowu ψ za $\vartheta + \varphi$, a (a, b) niech będzie punktem w środku koła K. Wtedy $(a, b) = (0, 0)$, $l = 0$,

$$v(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi. \quad \text{To znaczy:}$$

II. *Wartość funkcyi v w środku koła K jest średnio arytmetyczną z wszystkich wartości funkcyi na okręgu K.*

Przyjmijmy, że $f(\psi) = c$, ma więc statecznie tę samą wartość stałą c na całym okręgu koła K. Wtedy $v(ab) = c.L$, a że całka $L = 1$ według (a), więc mamy: $v(a, b) = c$. To znaczy:

III. *Funkcya harmoniczna v, mająca przybierać na okręgu koła K statecznie tę samą wartość stałą c, jest $= c$ w całem wnętrzu koła K.*

Przyjmując $R = \infty$, zakładamy, że funkcya harmoniczna v pozostaje skończoną, oznaczoną i ciągłą w całej płaszczyźnie zmiennych x, y. Lecz wtedy $(R^2 - l^2) / (R^2 + l^2 - 2Rl \cos\psi) = 1$, a

$$v(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi,$$

gdzie $f(\psi)$ daje wartości funkcyi na okręgu bezgranicznie się zwiększającego koła K. Podług tw. I. przedstawia tu całka po prawej stronie wartość $v(0, 0)$, a więc mamy: $v(a, b) = v(0, 0)$ dla wszelkich (a, b), a to znaczy:

III. *Funkcya harmoniczna skończona, oznaczona i ciągła w całym nieograniczonym obszarze swoich zmiennych, redukuje się do stałej wartości.*

Uwaga. W rozumowaniach, jakiemi doszliśmy do twierdzenia I., był oczywiście punkt (R, φ) na kole K zupełnie dowolny, bo funkcyę $f(\psi)$ założono peryodyczną (o peryodzie 2π), a przytem skończoną i ciągłą. Przyjmijmy teraz, że funkcya $f(\psi)$ nie jest peryodyczną, ale że dla pewnej wartości $\psi = \varphi_1$ posiada własność: $\lim\limits_{\delta=0}[f(\varphi_1+\delta)-f(2\pi+\varphi_1-\delta)]=0$.

Wtedy — jeżeli zauważymy całkę:

$$J' = \int \{f(\vartheta+\varphi_1)-f(\varphi_1)\} \frac{R^2-l^2}{R^2+l^2-2Rl\cos\vartheta} d\vartheta$$

i damy jej granice:

$$(-\delta \ldots 2\pi-\delta) = (-\delta \ldots +\delta) + (+\delta \ldots 2\pi-\delta) \text{ —}$$

dojdziemy do wniosku, że całka:

$$\int_0^{2\pi} f(\psi) \cdot \frac{R^2-l^2}{R^2+l^2-2Rl\cos\vartheta} d\vartheta$$

dąży do granicy $f(\varphi_1)$, gdy się punkt (l, φ) w jakikolwiek sposób przybliża do punktu (R, φ_1) na okręgu koła K.

151. Uwzględnienie zrywania ciągłości na okręgu koła. Rozbierzmy teraz wypadek, w którym funkcya $f(\psi)$ posiadając ciągle peryod 2π, doznaje w niektórych punktach (R, φ_1) okręgu K takiego zerwania ciągłości, że:

$$(1) \qquad \lim_{\delta=0}[f(\varphi_1+\delta)-f(2\pi+\varphi_1-\delta)]=\mu,$$

a μ jest skończone i różne od zera.

Ponieważ $f(\psi)$ jest funkcyą peryodyczną, więc (1) można także tak napisać:

$$\lim_{\delta=0}[f(\varphi_1+\delta)-f(\varphi_1-\delta)]=\mu,$$

albo wreszcie krócej:

$$f(\varphi_1+0)-f(\varphi_1-0)=\mu.$$

Funkcya f przybiera widocznie różne wartości, według tego, czy się do punktu φ_1 zbliżamy na okręgu koła K w dodatnim czy w odjemnym kierunku.

Poza tymi punktami ma być zresztą $f(\psi)$ skończoną, oznaczoną i ciągłą na okręgu K.

Aby tu funkcyę harmoniczną utworzyć z danych w ten sposób granicznych warunków i poznać jej wartości $\overline{v}$ przy zbliżaniu się wewnątrz K do punktów φ_1, zauważmy naprzód funkcyę nieperyodyczną $f(\psi)=\psi$ i całkę:

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi \cdot \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)} d\psi, \quad \text{gdzie } r=\frac{l}{R}.$$

Tę całkę, gdy $r<1$, możemy sposobem podanym w art. 149. rozwinąć na szereg:

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi]$$

z określeniami:

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi.\cos n\psi.d\psi,\quad B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi.\sin n\psi.d\psi,$$

$$n=1, 2, 3, \ldots,\quad A_0=2\pi.$$

Lecz $A_n=0$, $B_n=-\frac{2}{n}$, [podług zasad rachunku całkowego], $n=1, 2, 3, \ldots$, a stąd wynika:

(2) $$J=\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n \sin n\varphi}{n}.$$

Aby ten szereg obliczyć, utwórzmy pochodną;

$$\frac{\partial J}{\partial r}=-2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\sin n\varphi,$$

to w niej zawarty szereg $\Sigma r^{n-1}\sin n\varphi$ jest urojoną częścią szeregu

$$\frac{1}{r}\sum r^n.e^{n\varphi i}=\frac{1}{r}\frac{re^{\varphi i}}{1-re^{\varphi i}},$$

a ta urojona część jest: $\frac{\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}$. Mamy więc:

$$\frac{\partial J}{\partial r}=-2.\frac{\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2},$$

a stąd po scałkowaniu dostajemy:

(3) $$J=\pi-2\, arc\, tg\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}.$$

Całkę J można było pojmować jako całkę obliczoną po kole k o promieniu $r=1$; (r,φ) są — gdy $r<1$ — spółrzędnemi punktów M — (fig. 82.) — leżących wewnątrz koła k. Niech M_0 będzie punktem $(1,0)$, to w trójkącie $0MA$, w którym $0M=r$, $\measuredangle M0A=\varphi$, mamy:

$$MA=r\sin\varphi,\quad 0A=r\cos\varphi,$$

a więc $AM_0=1-r\cos\varphi$, a wskutek tego;

$$\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}=\frac{AM}{AM_0}=tg\,\alpha,\text{ gdy } \alpha=MM_0A.$$

Uwzględniając to w (3), dostajemy;

(4) $$J=\pi-2\alpha.$$

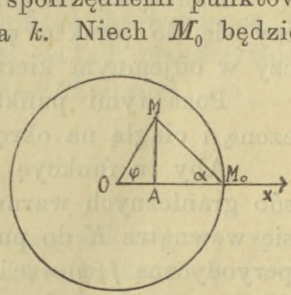


Fig. 82.

Gdy M nieskończenie przybliża się do M_0, a to zbliżanie odbywać się może w najrozmaitszych kierunkach, które z osią xx' dają wszelkie kąty, zawarte między $+\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$, to mamy w tym razie: $\lim J=\pi-2\alpha$, $\alpha=\left(+\frac{\pi}{2},...,-\frac{\pi}{2}\right)$, czyli:

$$\lim J=t.2\pi, \quad t=(0,...,1).$$

Mając ten rezultat, wróćmy do założenia (1), przyjmując zarazem dla uproszczenia, że $\varphi_1=0$ i że punkt $(R,\varphi_1)=0$ na okręgu K jest **jedyny**, w którym funkcya ma zerwanie ciągłości, określające się przez:

$$\lim_{\delta=0}[f(+\delta)-f(2\pi-\delta)]=\mu. \tag{5}$$

Zauważmy funkcyę:

$$F(\psi)=f(\psi)+\frac{\psi}{2\pi}\mu.$$

Jej wartości w punktach $\psi=\delta$ i $\psi=2\pi-\delta$ są odpowiednio:

$$F(\delta)=f(\delta)+\frac{\delta}{2\pi}\mu, \quad F(2\pi-\delta)=f(2\pi-\delta)+\frac{2\pi-\delta}{2\pi}\mu,$$

a ich różnica — wskutek (5) — jest dla $\delta=0$:

$$\lim_{\delta=0}[F(\delta)-F(2\pi-\delta)]=0.$$

Według uwagi na końcu art. poprzedzającego będzie całka:

$$\int_0^{2\pi} F(\psi)\frac{R^2-l^2}{R^2+l^2-2Rl\cos\vartheta}d\vartheta= \tag{6}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{R^2-l^2}{R^2+l^2-2R\cos\vartheta}d\vartheta+\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi.\frac{1-r^2}{1+r^2+2r\cos(\psi-\varphi)}d\psi \tag{7}$$

miała wartość $F(\delta)=f(\delta)$, gdy się punkt (l,φ) dowolnie do punktu $(R,0)$ przybliży. Że zaś pierwsza całka w (7) jest $=\overline{v}(l,\varphi)$ a druga całka, gdy się punkt (l,φ) zbliżył dowolnie do $(R,0)$, ma wartości $t.\mu$, $t=(0...1)$, więc ostatecznie mamy:

$$\lim_{\substack{l=R\\ \varphi=0}}\overline{v}(l,\varphi)+t.\mu=f(0), \quad t=(0...1), \quad \text{a stąd:}$$

$$\overline{v}(R,0)=f(0)-t.\mu, \quad t=(0...1), \quad \text{czyli:} \tag{8}$$

$$\overline{v}(R,0)=[f(0)...f(0)-\mu].$$

Podług (5) jest: $f[0)-\mu=f(2\pi-0)$, a z tego wynika, że:

$$\overline{v}(R,0)=[f(0)...f(2\pi-0)], \quad \text{albo:}$$

$$=[f(+0)...f(-0)].$$

Rozumowanie mało tylko się zmieni, gdy punktem zerwania ciągłości nie będzie punkt $(R,0)$, ale punkt (R,φ_1), $\varphi_1\gtreqless 0$, a to zerwanie ciągłości określa równanie (1). W tym razie określimy harmoniczną funkcyę, mającą posiadać wartości $f(\psi)$ na kole K, całką o granicach φ_1, $\varphi_1+2\pi$ i położymy: $f(\psi)=f_1(\psi-\varphi_1)$.

Wprowadźmy dalej funkcyę:

$$F_1(\psi-\varphi_1)=f_1(\psi-\varphi_1)+\frac{\psi-\varphi_1}{2\pi}\mu,$$

a kładąc $\psi-\varphi_1=\psi_1$, zauważmy całkę:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\psi_1)\frac{R^2-l^2}{R^2+l^2-2Rl.\cos\vartheta}d\vartheta,$$

to teraz już, podobnem rozumowaniem, jak w przypadku: $\varphi_1=0$, dostaniemy tu:

$$\overline{v}_1(R,0)=f_1(0)-t.\mu,\quad t=(0...1),\quad \text{albo:}$$

$$\overline{v}(R,\varphi_1)=f(\varphi_1)-t.\mu,$$

$$=[f(\varphi_1+0)...f(2\pi+\varphi_1-0)],$$

albo wreszcie:

$$\overline{v}(R,\varphi_1)=[f(\varphi_1+0)...f(\varphi_1--0)].$$

Przyjmijmy dalej, że na okręgu K mamy n punktów:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_s,\ ...,\ \varphi_n$$

takich, że w każdym z nich jest:

$$\lim_{\delta=0}[f(\varphi_s-\delta)-f(2\pi+\varphi_s-\delta)=\mu_s \gtreqless 0.$$

Zauważmy w tym razie funkcyę:

$$F(\psi)=f(\psi)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\psi-\varphi_s}{2\pi}\mu_s,$$

którą — przyjmując, że $\tau=1,2,...,s-1,s+1,...,n$, napiszmy w ten sposób:

$$F(\psi)=f(\psi)+\sum_{\tau}\frac{\psi-\varphi_\tau}{2\pi}\mu_\tau+\frac{\psi-\varphi_s}{2\pi}\mu_s.$$

Połóżmy dalej $\psi_1=\psi-\varphi_s$ i niech będzie:

$$F(\psi)=F_1(\psi_1),\quad f(\psi)=f_1(\psi_1),$$

to mamy teraz:

$$F_1(\psi_1)=f_1(\psi_1)+\sum_{\tau}\frac{\psi_1+\varphi_s-\varphi_\tau}{2\pi}\mu_\tau+\frac{\psi_1}{2\pi}\mu_s.$$

Z całki:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\psi_1).\frac{R^2-l^2}{R^2+l^2-2Rl\cos\vartheta}d\vartheta,$$

dostajemy tu, gdy się punkt (l,ψ_1) nieskończenie do punktu $(R,0)$ przybliża:

$$F_1(0)=\bar{v}_1(R,0)+\sum_\tau \frac{\varphi_s-\varphi_\tau}{2\pi}\mu_\tau+t\mu_s,\quad t=(0...1).$$

Lecz $F_1(0)=f_1(0)+\sum_\tau \frac{\varphi_s-\varphi_\tau}{2\pi}.\mu_\tau$, a więc:

$$f_1(0)=\bar{v}_1(R,0)+t.\mu_s,\ \text{albo:}\ \bar{v}(R,\varphi_s)=f(\varphi_s)-t.\mu_s,\ t=(0...1),$$

albo wreszcie:

$$\bar{v}(R,\varphi_s)=[f(\varphi_s+0)...f(\varphi_s-0)],\quad s=1,2,...,n.$$

Stąd twierdzenia:

I. *Funkcya harmoniczna v wewnątrz koła K, mająca się na samym okręgu tego koła tak zachowywać, że jest tam wszędzie skończoną, a ciągłość swą zrywa na skończonej tylko ilości punktów* φ_s *daje się zawsze wyznaczyć. Gdy w punkcie* φ_s *zerwanie ciągłości objawia się tem, że po obydwóch stronach:* (φ_s+0), (φ_s-0) *tego punktu ma funkcya różne wartości* A_s, B_s, *to za zbliżeniem się do tego punktu wewnątrz koła K przybiera funkcya v wszelkie wartości, zawarte między* A_s *i* B_s.

II. *Każda wartość* H_s, *zawarta między* A_s *i* B_s, *należy do jednego całkiem oznaczonego kierunku, po którym się punkt zbliża do* φ_s.

152. Odwzorowanie wieloboku w półpłaszczyźnie. Niech $w=f(z)$ będzie funkcyą analityczną regularną w otoczeniu punktu a i niech $f'(a)\neq 0$. Szereg:

$$(1)\qquad w=f(a)+f'(a)\frac{(z-a)}{1!}+...$$

da się dla dostatecznie małych $|z-a|$ odwrócić jednoznacznie, — [art. 50.] — a gdy tem odwróceniem jest:

$$(2)\qquad z-a=A(w-f(a))+A_1(w-f(a))^2+...$$

to je uważać trzeba za rozwiązanie równania (1) i to takie, że za obraniem dwóch dostatecznie małych dodatnich ilości c_1, c_2 i kół:

$$(c_1)\quad |z-a|<c_1,\quad (c_2)\quad |w-f(a)|<c_2$$

znajdziemy przy każdej wartości w, leżącej wewnątrz (c_2) jeden i jeden tylko pierwiastek z, leżący wewnątrz (c_1). Naodwrót rozwinięcie (1) jest rozwiązaniem równania (2) i to takiem, że dla każdej wartości z, leżącej w (c_1), mamy jeden tylko pierwiastek w, leżący w (c_2). Z tego wynika, że w całem wnętrzu koła (c_1) mamy $\frac{dw}{dz}\neq 0$, a w całem wnętrzu koła (c_2) jest naodwrót $\frac{dz}{dw}\neq 0$ i obie te pochodne są skończone.

Punkta z, w wyjęte odpowiednio z (c_1), (c_2) a związane ze sobą równaniem (1) lub (2), odpowiadają sobie nawzajem jednoznacznie; każdej linii zamkniętej i leżącej całkowicie w (c_1) na płaszczyźnie (z) odpowiada linia zamknięta (l_2), leżąca całkowicie wewnątrz (c_2) na płaszczyźnie w i naodwrót.

Gdy w_1, w_2, w_3 odpowiadają punktom z_1, z_2, z_3, które wszystkie w kole (c_1) leżeć mają, to mamy:

$$w_2 = w_1 + f'(z_1)(z_2 - z_1) + ...,$$
$$w_3 = w_1 + f'(z_1)(z_3 - z_1) + ...$$

Zakładając $|z_2 - z_1|$, $|z_3 - z_1|$ nieskończenie małe, opuścimy tu już potęgi 2^{gie}, 3^{cie}, ... i mieć będziemy:

$$(a) \qquad w_2 - w_1 = f'(z_1)(z_2 - z_1),$$
$$(b) \qquad w_3 - w_1 = f'(z_1)(z_3 - z_1).$$

Odejmując (a) od (b), dostajemy:

$$(c) \qquad w_3 - w_2 = f'(z_1)(z_3 - z_1).$$

A że $f'(z_1) \neq 0$, więc z (a), (b), (c) wynika:

$$|w_1 - w_2| : |w_2 - w_3| : |w_3 - w_1| = |z_1 - z_2| : |z_2 - z_3| : |z_3 - z_1|,$$

czyli $\triangle(z_1 z_2 z_3) \backsim \triangle(w_1 w_2 w_3)$, a to znaczy:

I. *W najbliższem otoczeniu punktów $z=a$, $w_a=f(a)$ odpowiadają sobie punkty z, w wskutek równania $w=f(z)$ w ten sposób, że tam powstaje odwzorowanie cząsteczkowe, (które tem samem jest i izogonalne).*

Mając to, połóżmy $w=\xi+\eta i$, $z=x+yi$ i zażądajmy takiego kształtu równania $w=f(z)$, aby za pomocą niego można było górną połowę płaszczyzny (z) odwzorować w zwykły zamknięty wielobok P, leżący na płaszczyźnie (w). Tę połowę płaszczyzny znaczyć będziemy krótko przez $\bar{z}$. Gdy każdy punkt w zastąpimy przez $w_1 = aw + b$, gdzie a, b są dowolne stałe, to dany wielobok P zamieni się na inny P', który będzie p o d o b n y do pierwszego, ale będzie względem P obrócony i przesunięty. Gdy nam jednak nie będzie chodziło ani o wielkość, ani o położenie wieloboku, to możemy zamiast w rozważać t a k i w y r a z, k t ó r y m i m o z m i a n y w n a $aw+b$ p o z o s t a j e t e n s a m. Zauważmyż, że:

$$\frac{dw_1}{\partial z} = a\frac{dw}{dz} \quad \text{i że} \quad log\frac{dw_1}{dz} = log\, a + log\frac{dw}{dz},$$

to stąd mamy:

$$\frac{d}{dz}\left[log\frac{dw_1}{dz}\right] = \frac{d}{dz}\left[log\frac{dw}{dz}\right],$$

a widocznie $Z = \frac{d}{dz}\left[log\frac{dw}{dz}\right]$ jest wyrazem o żądanej własności. Wyraz ten starać się będziemy teraz przedstawić przez z w ten sposób, aby danemu zadaniu odwzorowania zadość się mogło uczynić.

Przyjmijmy — co jest dozwolone ze względu na dowolność położenia wieloboku — że jeden jego wierzchołek a', o kącie wewnętrznym $=\alpha\pi$, $\alpha>0$, leży w punkcie $w=0$, a jeden bok A_1, wychodzący z tego wierzchołka wpada w oś pierwszorzędną ξ. Bok drugi B_1, wychodzący z punktu $w=0$, tworzy więc z A_1 kąt $=\alpha\pi$, a ten kąt trzeba na płaszczyźnie (z) odwzorować w kąt $=\pi$ tak położony, że jego obydwa ramiona wpadają w oś x. Zauważmyż równanie $v=w^{\frac{1}{\alpha}}$, to widocznie dostajemy tu $v=0$, gdy $w=0$, a dalej:

$$v=A_1^{\frac{1}{\alpha}},\text{ gdy } w=A_1: \quad v=B_1e^{\pi i},\text{ gdy } w=B_1e^{\alpha\pi i},$$

gdzie A_1, B_1 są zarazem długościami boków tak samo nazwanych. Na płaszczyźnie (v) mamy zatem już kąt $=\pi$, jako odwzorowanie kąta $=\alpha\pi$. Jego ramiona wpadają w oś pierwszorzędną tej płaszczyzny, a wierzchołek znajduje się w punkcie $v=0$. Z postaci $v=Be^{\pi i}$ wnosimy, że tu wnętrze wieloboku odwzorowuje się w górnej połowie płaszczyzny (v).

Gdy położymy:

(3) $$v=cz[1+a_1z+a_2z^2+...],$$

gdzie $c\neq0$, a_1, a_2, ... są stałe rzeczywiste, a szereg po prawej stronie ma pewien zakres zbieżności, to ten związek sprzęga ze sobą otoczenia punktów $v=0$, $z=0$ cząsteczkowo, a górna połowa płaszczyzny (v) odpowiada tu półpłaszczyźnie $\bar{z}$ w tych otoczeniach. To pokrewieństwo jest tu więc izogonalne, a stąd wynika, że kąt $=\pi$, który już mamy na płaszczyźnie v, odwzoruje się w taki kąt $=\pi$ na półpłaszczyźnie $\bar{z}$, którego wierzchołek leży w punkcie $z=0$, a którego ramiona wpadają w oś x. Można więc w równaniu $w=v^\alpha$ obrać v w postaci (3) i położyć:

(4) $$w=c^\alpha z^\alpha[1+b_1z+b_2z^2+...],$$

gdzie $c\neq0$, b_1, b_2, ... są znowu rzeczywiste.

W (4) mamy najogólniejszą postać funkcyi w, odwzorowującą kąt $=\alpha\pi$ w kąt $=\pi$ w opisanych ich położeniach. Z (4) dostajemy:

$$\frac{dw}{dz}=c^\alpha z^{\alpha-1}[\alpha+b_1(\alpha-1)z+...],\quad\text{a stąd:}$$

$$\frac{d}{dz}\left[log\frac{dw}{dz}\right]=\frac{\alpha-1}{z}+d_1+d_2z+...$$

Zauważmy wierzchołek $w=w_0$, nieleżący w punkcie $w=0$ o wewnętrznym kącie $=\omega\pi$ i przyjmijmy, że jemu na osi x odpowiadać ma punkt z_0. Wtedy — aby ten wypadek sprowadzić na poprzedzający — kładąc: $w'=w-w_0$, $z'=z-z_0$, dostajemy:

$$\frac{dw'}{dz'}=\frac{dw}{dz},$$

a stąd wynika, że w otoczeniu takiego wierzchołka mieć będziemy:

$$\frac{dw}{dz}=c_1^{\omega}.z^{\omega-1}[\omega+b'_1(\omega-1)(z-z_0)+...] \quad \text{i}$$

$$(5) \qquad \frac{d}{dz}\left[log\frac{dw}{dz}\right]=\frac{\omega-1}{z-z_0}+d'_1+d'_2(z-z_0)+...$$

Z tego widać, że Z w każdym punkcie z_0 (na osi x), odpowiadającym dowolnym wierzchołkom wieloboku (już i wierzchołek α' możemy przyjąć w dowolnym punkcie $w\neq 0$) posiada biegun (punkt nieskończonościowy) pierwszego stopnia. Te punkta naznaczmy przez $a, b, c, d, ..., k, l$, zakładając je naprzód wszystkie w skończoności, a wierzchołki, którym one odpowiadają, niech się nazywają $\alpha', \beta', \gamma', \delta', ..., \varkappa', \lambda'$. W nich wewnętrzne kąty mają wynosić: $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi, \delta\pi, ..., \varkappa\pi, \lambda\pi$.

Żądamy, aby odwzorowanie półpłaszczyzny $\bar{z}$ w wieloboku było cząsteczkowe. Z tego powodu przyjąć możemy, że w każdym najdowolniejszym punkcie z, leżącym ponad x i w każdym punkcie z na osi x, różnym od $a, b, ..., l$, jest $\frac{dw}{dz}\neq 0$ i skończone.

To spowoduje, że Z w otoczeniu każdego takiego punktu zachowuje się regularnie i że więc Z oprócz biegunów $a, b, c, ..., l$, spowodowanych dodajnikami:

$$\frac{\alpha-1}{z-a}, \frac{\beta-1}{z-b}, ..., \frac{\lambda-1}{z-l}$$

nie posiada zresztą w skończoności i w nieskończoności już żadnych biegunów. Różnica:

$$(6) \qquad Z-\frac{\alpha-1}{z-a}-\frac{\beta-1}{z-b}-...-\frac{\lambda-1}{z-l}$$

jest już w skończoności i nieskończoności wszędzie skończoną.

Przyjmijmy po pierwsze, że punkt $z=\infty$ (na osi x) odpowiada punktowi r na obwodzie wieloboku*), wtedy musi być:

$$w=\beta+\frac{k_1}{z}+\frac{k_2}{z^2}+..., \quad \text{a stąd mamy:}$$

$$Z=\frac{\frac{d^2w}{dz^2}}{\frac{dw}{dz}}=-\frac{2}{z}+\frac{h_1}{z^2}+\frac{h_2}{z^3}+...$$

Stąd wnosimy, że $(Z)_{z=\infty}=0$ i że więc różnica (6) będąc wszę-

*) Punkt r nie ma być wierzchołkiem wieloboku. Cała oś x odpowiadać ma całemu obwodowi wieloboku.

dzie skończoną, a w nieskończoności mając wartość $=0$, jest identycznem zerem i że więc:

$$(\mathrm{I})\qquad Z=\frac{\alpha-1}{z-a}+\frac{\beta-1}{z-b}+\ldots+\frac{\varkappa-1}{z-k}+\frac{\lambda-1}{z-l}.$$

Jeżeli po drugie l odpowiadające wierzchołkowi λ' jest nieskończonością, to wtedy w (4) zmienić trzeba z na z^{-1}, a α na λ. Dostaniemy więc w otoczeniu $z=l=\infty$:

$$w=c^{\lambda}z^{-\lambda}[1+b_1z^{-1}+\ldots],\quad \text{i}\quad Z=-\frac{(\lambda+1)}{z}+\frac{g_1}{z^2}+\ldots$$

Stąd wynika, że już samo Z jest w otoczeniu tego punktu zerem, że w tym razie już różnica:

$$Z-\frac{\alpha-1}{z-a}-\frac{\beta-1}{z-b}-\ldots-\frac{\varkappa-1}{z-k}$$

jest identycznie zerem i że więc:

$$(\mathrm{II})\qquad Z=\frac{\alpha-1}{z-a}+\frac{\beta-1}{z-b}+\ldots+\frac{\varkappa-1}{z-k}.$$

Przyjmując, że wielobok posiada n boków, mamy:

$$\alpha\pi+\beta\pi+\ldots+\varkappa\pi+\lambda\pi=(n-2)\pi,\quad \text{czyli:}$$

$$(\alpha)\qquad \alpha-1+\beta-1+\ldots+\varkappa-1+\lambda-1=-2.$$

Dla równania (II) ten związek można napisać w postaci:

$$(\beta)\qquad \alpha-1+\beta-1+\ldots+\varkappa-1=-(\lambda+1).$$

Jeżeli wielobok posiada jeden wierzchołek ϱ' w nieskończoności (dwa przyległe boki są równoległe), to kąt ϱ w tym wierzchołku jest $=0$.

Całkując równanie różniczkowe:

$$\frac{d}{dz}\left[\log\frac{dw}{dz}\right]=Z,$$

dostaniemy w wypadku (I):

$$(\mathrm{I}')\qquad w=A\int(z-a)^{\alpha-1}\ldots(z-l)^{\lambda-1}dz+B,$$

a w wypadku (II):

$$(\mathrm{II}')\qquad w=A\int(z-a)^{\alpha-1}\ldots(z-k)^{\varkappa-1}dz+B.$$

Połóżmy $A=1$, $B=w_0$ i ograniczmy się naprzód do samego obwodu wieloboku i do odpowiadającej mu osi x. Przyjmijmy, że punkt $z=z_0$ na osi x odpowiadać ma punktowi w_0, leżącemu na obwodzie wieloboku, to dostaniemy z (I'):

$$(A) \qquad w - w_0 = \int_{z_0}^{z} (z-a)^{\alpha-1} \dots (z-l)^{\lambda-1} dz \; *)$$

Gdy górna granica z tej całki posuwa się po osi x, poczynając od punktu z_0, a po przejściu przez punkt $z = \pm\infty$ wróci znowu do z_0, to punkt w na swej płaszczyźnie opisze cały obwód wieloboku. Same punkta $a, b, \dots, l$ przy całkowaniu omijać trzeba, zastępując nieskończenie małe odcinki mieszczące te punkta na osi x nieskończenie małymi łukami, przebiegającymi nad osią x.

Pytanie teraz zachodzi, ile z n punktów $a, b, c, \dots, l$ można na osi x wybrać całkiem dowolnie? W tym celu połóżmy:

$$(7) \qquad z = \frac{p\zeta + q}{r\zeta + s},$$

z założeniem, że p, q, r, s są rzeczywiste i że $ps - rq = +1$. Takie podstawienie odwzorowuje płaszczyznę (z) na płaszczyznę (ζ) w ten sposób, że osie pierwszorzędne sobie odpowiadają, a połowa $\overline{z}$ odwzorowuje się w górną połowę płaszczyzny (ζ) **).

Z (7) dostajemy dalej:

$$(8) \qquad \left| \begin{array}{l} dz = \dfrac{d\zeta}{(r\zeta + s)^2}, \\ z - a = \dfrac{p - ar}{r\zeta + s}(\zeta - a'), \quad z - b = \dfrac{p - br}{r\zeta + s}(\zeta - b'), \quad \dots, \end{array} \right.$$

gdzie a', b'. ... mają być punktami, leżącymi na pierwszorzędnej osi płaszczyzny (ζ), a odpowiadającymi punktom $a, b, \dots$ Po wstawieniu (8) w całkę (A), dostajemy za uwzględnieniem związku (α):

$$w - w_0 = C. \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - a')^{\alpha-1} (\zeta - b')^{\beta-1} \dots (\zeta - l')^{\lambda-1} d\zeta,$$

a ta forma odwzorowuje widocznie wielobok (powiększony i obrócony) w półpłaszczyźnie $\overline{\zeta}$. Lecz jakiekolwiek były $a, b, c, \dots$ można wskutek dowolnych p, q, r, s trzy z punktów $a', b', c', \dots$ obrać dowolnie. Gdy te punkta dowolne są a', b', c', to znowu naodwrót między punktami $a, b, c, \dots$ mogą trzy, a mianowicie: a, b, c być zupełnie dowolne.

---

*) H. A. Schwarz: *Ueber einige Abbildungsaufgaben*, l. c. str. 65—83. Niezależnie od Schwarza doszedł do tego samego wyniku Christoffel. (Schwarz, l. c. str. 76).

Por. także uwagi, jakie o tem podali: Schläfli. C. J., T. 78., str. 63—80. Phragmén. *Acta math.* T. 16., str. 225—232.

**) To sprawdzić można, kładąc $z = x + yi$, $\zeta = x' + y'i$ i porównywując potem z sobą części pierwszorzędne i drugorzędne w wzorze (7).

Gdy formie (II') nadamy postać:

$$(B) \qquad w - w_0 = \int_{z_0}^{z} (z-a)^{\alpha-1} \ldots (z-k)^{\varkappa-1} dz,$$

to znowu kładąc $z = p\zeta + q$ wywnioskujemy, że tu — oprócz już zużytego punktu $l = \infty$, odpowiadającego wierzchołkowi λ' — można jeszcze dwa punkty, n. p. punkty a, b wybrać całkiem dowolnie. W całkach (A), (B) były dotąd ich granice z_0, z punktami na osi x. Lecz oczywiście można z_0 obrać dowolnie nad osią x. Wtedy formy (A), (B) dają takie odwzorowanie, że punktowi w_0, leżącemu wewnątrz wieloboku, odpowiada punkt z_0.

Gdy górną granicę z pojmować będziemy jako punkt ruchomy, poruszający się dowolnie nad osią x i na samej osi x, to formy (A), (B) dają już całkowite wyobrażenie o zachodzącem tu odwzorowaniu, dają bowiem nieskończoną mnogość par, odpowiadających sobie punktów z, w.

Pd. 1. Załóżmy $a < b < c < \ldots$, $z_0 = a$, $w_0 = \alpha' = 0$, a z niech się porusza po osi x od a ku b i t. d., to będziemy mieli:

$$w = \int_a^z (z-a)^{\alpha-1} \ldots (z-l)^{\lambda-1} dz = \int_a^z \psi(z) dz.$$

Połóżmy:

$$w = \int_a^z \psi\, dz = R_1 e^{\varphi_a i}, \quad \text{gdy } a < z < b,$$

to tu $\varphi_a = \pi(\beta-1+\gamma-1+\ldots+\lambda-1)$, a odcinkowi ab odpowiada widocznie na (w) prostokreślny odcinek $\alpha'\beta' = R_1$. Napiszmy:

$$w = \int_a^b \psi\, dz + \int_b^z \psi\, dz, \quad \text{gdy } b < z < c,$$

to pierwsza całka ma wartość β', a gdy drugą całkę nazwiemy $R_2 e^{\varphi_b i}$, to miec będziemy:

$$w = \beta + \int_b^z \psi\, dz = \beta + R_2 e^{\varphi_b i};$$

tu widocznie: $\varphi_b = \pi(\gamma-1+\delta-1+\ldots+\lambda-1)$. A więc i odcinkowi bc odpowiada prostokreślny odcinek $\beta'\gamma' = R_2$. Odcinek $\beta'\gamma'$ tworzy z przedłużeniem odcinka $\alpha'\beta'$ kąt:

$$\pi(\gamma-1+\ldots) - \pi(\beta-1+\ldots) = -\pi(\beta-1),$$

a kąt przyległy (między $\alpha'\beta'$ i $\beta'\gamma'$) wynosi $\pi\beta$. Przechodząc do $c < z < d$, przekonamy się znowu, że odcinkowi cd odpowie prostokreślny odcinek $\gamma'\delta'$, który z $\beta'\gamma'$ zawiera kąt $\pi\gamma$ i t. d. W końcu trzeba tak samo zbadać punkta z, leżące tak na osi x, że $z > l$ i $z < a$. Przekonamy się wtedy, że całej osi x odpowiada obwód pewnego zamkniętego wieloboku. Jestto syntetyczny sposób dowodu, że forma (A) daje żądane odwzorowanie. [Laurent, Picard].

Pd. 2. W każdym trójkącie mamy $\alpha+\beta+\gamma=1$, a jego odwzorowanie w półpłaszczyźnie $\bar{z}$ daje równanie:

$$w=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{(z-a)^{1-\alpha}(z-b)^{1-\beta}(z-c)^{1-\gamma}}.$$

W szczególności, gdy $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=0$ mamy trójkąt z wierzchołkiem γ', leżącym w nieskończoności. Jestto więc pas zamknięty dwiema równoległemi prostemi, ciągnącemi się w nieskończoność w jedną stronę, a ucięty w skończoności prostą prostopadłą do tych prostych. W tym razie dostajemy:

$$w=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{(z-c)\sqrt{(z-a)(z-b)}}.$$

Gdy wierzchołkowi $\gamma'=\infty$ ma odpowiadać $c=\infty$, to:

$$w=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}.$$

Pd. 3. Zauważmy równanie:

$$w=\int_{0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2.1-k^2z^2}}.\quad \text{czyli}\quad z=\mathit{sin\,am}(w,k),$$

z rzeczywistym modułem $0<k<1$ i peryodami $4K$, $2K'i$, w których K, K' są w tym razie rzeczywiste. Gdy:

$$\begin{aligned} z&=1, &&\text{mamy} && w=\alpha'=K\\ z&=\frac{1}{k} && \text{"} && w=\beta'=K+K'i\\ z&=\infty && \text{"} && w=\gamma'=K'i\\ z&=0 && \text{"} && w=\delta'=0. \end{aligned}$$

Mamy tu zatem odwzorowanie półpłaszczyzny $\bar{z}$ w prostokącie o wierzchołkach: $[0, K, K+K'i, K'i]$.

Pd. 4. Gdy na płaszczyźnie (w) ma prostokąt o wierzchołkach α', β', γ', δ' dowolne położenie, a wierzchołkowi α odpowiadać ma na osi x punkt $x=\infty$, wierzchołkom zaś β' γ', δ' mają odpowiadać punkty $+1$, 0, d — gdzie d jest już dowolne — i gdy dalej punktowi $z=i$ odpowiadać ma punkt $w=0$, to takie odwzorowanie określa równanie:

$$(a)\qquad w=\int_{i}^{z}\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-d)}}.$$

Przyjmijmy, że prostokąt ma być kwadratem, który posiada środek w punkcie $w=0$. Dostatecznym tego warunkiem jest, aby $\beta'=-\alpha'i$; gdyż dalsze warunki: $\gamma'=-\alpha'$, $\delta'=+\alpha'i$ już same z siebie się spełnią. Równanie $\beta'=-\alpha'i$ ma postać:

$$(b)\qquad \int_{i}^{1}\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-d)}}=-i\int_{i}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-d)}}.$$

Położmy w całce po lewej stronie $z=\frac{z'-1}{z'+1}$, to dostaniemy z niej:

$$-i\int_i^\infty \frac{2dz'}{\sqrt{(z'+1)(z'-1)}\sqrt{2}\,.\sqrt{1-d}\sqrt{z'-\frac{1+d}{1-d}}},$$

a aby ta całka mogła być identyczną z całką po prawej stronie w (a) trzeba przyjąc: $d=-1$. Wtedy jednak równanie (a) ma postać:

$$(c) \qquad w=\int_i^z \frac{dz}{\sqrt{z(z^2-1)}},$$

i daje odwzorowanie kwadratu o środku $w=0$ w półpłaszczyznę $\bar{z}$. [Obchodząc jego obwód w kierunku: α', β', γ', δ', okrążamy punkt $w=0$ odjemnie].

Pd. 5. Aby dostać takie odwzorowanie, że właśnie część płaszczyzny (w), rozciągająca się zewnątrz wieloboku odpowiadać ma półpłaszczyźnie $\bar{z}$, trzeba we wzorach (A), (B) zastąpić $\alpha\pi$, $\beta\pi$, ... przez $2\pi-\alpha\pi$, $2\pi-\beta\pi$, ..., a więc α, β, ... zmienić na $2-\alpha$, $2-\beta$, .. Przez to dostaniemy zamiast (A) równanie:

$$w-w_0=\int_{z_0}^z (z-a)^{1-\alpha}(z-b)^{1-\beta}....(z-l)^{1-\lambda}dz,$$

które już daje żądane odwzorowanie.

Uwaga. Mówiliśmy dotąd o zwykłym wieloboku t. j. o takim, którego obwód sam z sobą się nie przecina. Wnętrze takiego wieloboku — który zarazem także częściowo sam z sobą przykrywać się nie może — tworzy *continuum*, tak samo jak półpłaszczyzna $\bar{z}$.

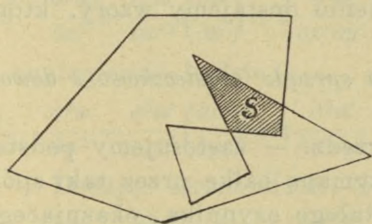


Fig. 83.

Lecz inna jest rzecz, jeżeli z przecięciami się obwodu łączy się równocześnie częściowe przykrywanie się wieloboku, jak to n. p. fig. 83. wskazuje. Na część S przypadają tu dwa przykrywające się z sobą wycinki S_1, S_2 wieloboku. Ale że z każdego punktu wycinka S_1 można — nie opuszczając wnętrza wieloboku — dostać się do każdego punktu wycinka S_2, więc mamy tu zachowane *continuum*, a gdy sumę kątów α, β, ... dobrze policzymy i zastosujemy wzór (A), osiągniemy już cząsteczkowe sprzęgnięcie takiego wieloboku z półpłaszczyzną $\bar{z}$. Różnica będzie tu ta tylko, że każdemu punktowi w, leżącemu wewnątrz S odpowiedzą w $\bar{z}$ dwa różne punkta.

153. Funkcye harmoniczne w wieloboku, w wycinku lub odcinku koła i w rozgałęzionym odcinku powierzchni Riemanna o ograniczeniu wielobocznem. Po uskutecznieniu cząsteczkowego pokrewieństwa między wnętrzem wieloboku a półpłaszczyzną $\bar{z}$, połóżmy:

$$(1) \qquad z=i\,\frac{1-z'}{1+z'}.$$

Niech $z=x+yi$, $z'=\zeta+\eta i$, to mamy stąd:

$$x+yi=\frac{2\eta}{(1+\xi)^2+\eta^2}-\frac{\xi^2+\eta^2-1}{(1+\xi)^2+\eta^2}i. \tag{2}$$

Oś x określa na płaszczyźnie (z) wartość $y=0$, a jej — podług (2) — odpowiadają na płaszczyźnie (z') punkty (ξ,η), spełniające równanie:

$$\xi^2+\eta^2-1=0. \tag{3}$$

Jestto koło R_1, które ma środek w punkcie $z'=0$, a promień $=1$. W całej półpłaszczyźnie $\bar{z}$ mamy zawsze $y>0$. Wtedy podług (2) mamy rzeczywiście: $\xi^2+\eta^2-1<0$, a to znaczy:

I. *Przez podstawienie* (1) *spokrewnia się cząsteczkowo półpłaszczyzna* $\bar{z}$ *z wnętrzem koła* R_1. *W szczególności punktowi* $z=i$ *odpowiada środek* $z'=0$ *tego koła.*

Gdybyśmy zamiast podstawienia (1) użyli podstawienia:

$$z=i\frac{r-z'}{r+z'}, \tag{4}$$

mielibyśmy półpłaszczyznę $\bar{z}$ sprzęgniętą cząsteczkowo z kołem, posiadającem promień r, a środek w punkcie $z'=0$. I tu ten środek odpowiada punktowi $z=i$.

Mając to, zróbmy w wzorach (A), (B) — art. poprzedz. — podstawienie (1), to po tem podstawieniu dostajemy wzory, które wskazują:

II. *Każdy dowolny wielobok można sprządz cząsteczkowo z dowolnem kołem.*

Gdy n. p. w Pd. 4. — art. poprzedz. — zastosujemy podstawienie (1), to — [mnożąc potem otrzymaną całkę przez taki spółczynnik, który będzie odwrotnością stałego czynnika, okazującego się w całce wskutek dokonanego podstawienia] — dostaniemy:

$$w=\int_0^{z'}\frac{dz'}{\sqrt{1-z'^4}},\quad \text{czyli}\quad z'=\sin am(w,\sqrt{-1}).$$

Ten wzór sprzęga cząsteczkowo kwadrat z kołem R_1 [Schwarz]. Gdy $z'=\pm1$ mamy $w=\pm K$ dla $z=\pm i$ dostaniemy $w=\pm Ki$. Kwadrat ma tu więc wierzchołki:

$$K,\ Ki,\ -K,\ -Ki,$$

a im na obwodzie koła odpowiadają punkty:

$$+1,\ +i,\ -1,\ -i.$$

Po tych uwagach załóżmy całkiem ogólnie, że na ograniczeniu a pewnego danego obszaru A, dany mamy jednolity ciąg wartości U_a, a punkty tego obszaru są: $z=x+yi$.

Niech przez równanie:

(5) $$z=f(z'),$$

albo — gdy $z'=x'+y'i$ — przez równania:

(6) $$x=\varphi(x'y'),\quad y=\psi(x'y'),$$

jakie z (5) powstają, sprzęga się wnętrze obszaru A z wnętrzem pewnego obszaru B, ograniczonego zamkniętą linią β. Same ograniczenia α, β mają sobie odpowiadać. Wskutek (6) dostaniemy z U_α jednolity ciąg wartości U_β, jakie się rozłożą wzdłuż ograniczającej linii β. Załóżmyż, że w B istnieje harmoniczna funkcya $u'(x'y')$, zadość właśnie czyniąca warunkowi, że na β przyjmuje wartości U_β.

Przez zastosowanie podstawienia (6) dostaniemy z $u'(x'y')$ pewną funkcyę $u(xy)$, a na odpowiednich punktach (xy), $(x'y')$ rozważanych obszarów będzie:

(7) $$u(xy)=u'(x'y').$$

Zapytajmy, czy tak utworzona funkcya $u(x,y)$ jest harmoniczną; na ograniczeniu α przyjmuje niezawodnie ciąg wartości U_α. Otóż z (7) dostajemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x},\quad \text{a stąd:}$$

$$(a)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u'}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u'}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}+\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2},$$

a analogicznie będzie:

$$(b)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u'}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}+\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}.$$

Dodając stronami (a), (b) do siebie, mamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2\right]+$$
$$+2\frac{\partial^2 u'}{\partial x'\partial y'}\left[\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial x'}{\partial y}\cdot\frac{\partial y'}{\partial y}\right]+\frac{\partial u'}{\partial x'}\left[\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}\right]+$$
$$+\frac{\partial u'}{\partial y'}\left[\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}\right].$$

Lecz — jeżeli odwróceniem równania (5) jest:

$$z'=x'+y'i=F(z)=F(x+yi),$$

to x', y' spełniają związki:

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial y'}{\partial y},\quad \frac{\partial x'}{\partial y}=-\frac{\partial y'}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}=0,$$

a uwzględniając to w (c), dostaniemy:

$$\Delta u=\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2\right]\Delta u'.$$

Że zaś $\Delta u'=0$ w obszarze B, więc także $\Delta u=0$ w obszarze A, a to znaczy:

III. *Gdy A jest obszarem o ograniczeniu a, a na a dany jest jednolity ciąg wartości U_a, a A można sprządz cząsteczkowo z pewnym obszarem B, który dopuszcza harmoniczną funkcyę z dowolnemi wartościami na swem ograniczeniu, to i w A istnieje harmoniczna funkcya o żądanych wartościach U_a na ograniczeniu a.*

Przyjmijmy, że A jest wielobokiem, a B kołem, to tu A i B można według tw. II. sprządz zawsze cząsteczkowo i mamy twierdzenie:

IV. *We wnętrzu dowolnie danego zwykłego wieloboku można zawsze utworzyć (jedną tylko) funkcyę harmoniczną o danym jednolitym ciągu jej wartości na obwodzie wieloboku.*

Zauważmy obszar A, ograniczony dwoma łukami kołowymi L, L' (fig. 84.), przecinającymi się na płaszczyźnie (z) w punktach z_0, z_1, a tworzącymi w tych punktach kąty: $a\pi = tz_0t'$.

Na łuku L obierzmy punkt z, i nazwijmy $\sphericalangle z_1 z \zeta = \omega$. Ten kąt pozostaje na całym tym łuku L ten sam, a że w chwili gdy z zajmie miejsce z_0 jest $\omega = \sphericalangle z_1 z_0 t$, więc takim jest on na całym łuku L.

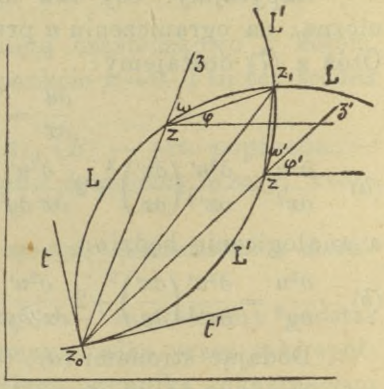


Fig. 84.

Podobnie, gdy na łuku L' obierzemy punkt z i nazwiemy:

$$\sphericalangle \zeta' z z_1 = \omega',$$

to i tu ω' na całym łuku L' pozostaje ten sam i jest: $= \sphericalangle t' z_0 z_1$.

Z tego wynika, że:

$$\omega + \omega' = \sphericalangle t z_0 t' = a\pi. \tag{8}$$

Z figury czytamy, że na łuku L' jest:

(α) $\quad z - z_0 = |z - z_0| e^{(\varphi+\omega)i}, \quad z_1 - z = |z - z_1| e^{\varphi i}$, a więc:

$$z - z_1 = |z - z_1| e^{(\varphi+\pi)i}. \tag{β}$$

Z (α), (β) dostajemy:

$$\frac{z-z_0}{z-z_1} = \left|\frac{z-z_0}{z-z_1}\right| e^{\omega i}.e^{-\pi i}. \tag{l}$$

Podobnie będzie na łuku L':

$$\frac{z-z_0}{z-z_1} = \left|\frac{z-z_0}{z-z_1}\right| e^{-\omega' i}.e^{-\pi i}. \tag{l'}$$

Połóżmy:

$$(9)\qquad z' = \left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

to widocznie punktom z, leżącym na łuku L, odpowiedzą na płaszczyźnie (z') punkty:

$$(p)\qquad z' = \left|\frac{z-z_0}{z-z_1}\right| e^{\frac{\omega}{\alpha}i} . e^{-\frac{\pi}{\alpha}i}.$$

Te punkty — gdy z przechodzi cały łuk L, poczynając od punktu z_0 — utworzą na (z') prostę p, poczynającą się w punkcie $z'=0$, dążącą w nieskończoność, a nachyloną do osi pierwszorzędnej x' pod kątem:

$$(r)\qquad \frac{\omega-\pi}{\alpha}.$$

Punktom z, leżącym na łuku L', odpowiedzą na (z') punkty:

$$(p')\qquad z' = \left|\frac{z-z_0}{z-z_1}\right| e^{-\frac{\omega'}{\alpha}i} . e^{-\frac{\pi}{\alpha}i},$$

które utworzą znowu prostę p', poczynającą się w punkcie $z'=0$, dążącą w nieskończoność, a nachyloną do x' pod kątem:

$$(r')\qquad -\frac{\omega'+\pi}{\alpha}.$$

Z (r), (r') dostajemy:

$$\measuredangle(p, p') = \frac{\omega+\omega'}{\alpha} = \pi,$$

a stąd wynika, że każda z tych prostych jest przedłużeniem drugiej. Obie razem tworzą więc jedną prostę P, nachyloną do osi x' pod kątem $(\omega-\pi)/\alpha = h$.

Ta prosta dzieli całą płaszczyznę (z') na dwie połowy, a która z nich będzie cząsteczkowo sprzągnięta z wnętrzem obszaru A, łatwo rozstrzygnąć. Dość jest bowiem wybrać we wnętrzu A dowolny punkt z_2 i wyszukać odpowiadający mu według (9) punkt z'_2, a potem tę połowę zatrzymać, w której właśnie punkt z'_2 leży.

Na prostej P leżą punkty:

$$z' = x'.e^{hi},\quad x' = -\infty \dots +\infty.$$

Połóżmyż $s = z'.e^{-hi}$, to prostej P odpowie na płaszczyźnie (s) jej oś pierwszorzędna ξ, dzieląca (s) na dwie połowy, z tych zatrzymamy i uznamy za górną połowę $\overline{s}$, tę, w której leżeć będzie punkt s_2, odpowiadający punktowi z'_2. Półpłaszczyznę $\overline{s}$ umiemy sprządz cząsteczkowo z wnętrzem pewnego koła B. Wskutek tego można będzie i wnętrze rozważanego obszaru A sprządz z kołem B.

W szczególności jeden z łuków L, L' może być linią prostą. Wtedy A jest odcinkiem koła, a przy $\alpha=\frac{1}{2}$ jest półkolem.

Stosując w tych wszystkich wypadkach twierdzenie III., dochodzimy do wniosku:

V. *Wnętrze obszaru ograniczone dwoma łukami koła — [odcinek koła — w szczególności wnętrze półkola] — można zawsze sprządz cząsteczkowo z kołem [Schwarz, l. c. str. 148]. W takich obszarach istnieje więc zawsze (tylko jedna) funkcya harmoniczna spełniająca warunek, aby na ograniczeniach tych obszarów przybierała dany jednolity ciąg wartości.*

Niech A będzie wycinkiem koła, które miało promień r. Jego wierzchołek niech leży w punkcie $z=0$, a jego kąt u wierzchołka niech $=\alpha\pi$. Wszystkie punkty takiego wycinka przedstawić można przez $z=|z|e^{\varphi i}$, $\varphi=(\beta ... \beta+\alpha\pi)$, $|z|\leqq r$.

Połóżmy $z'=z^{\frac{1}{\alpha}}$, to mamy:

$$z'=|z|^{\frac{1}{\alpha}}.e^{\frac{\varphi}{\alpha}i}, \text{ gdzie teraz: } \frac{\varphi}{\alpha}=\left(\frac{\beta}{\alpha}...\frac{\beta}{\alpha}+\pi\right), \ |z'|\leqq r^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Punkty z' wypełniają widocznie pewne półkole, a że je umiemy cząsteczkowo sprządz z kołem, więc stąd wynika:

VI. *W dowolnym wycinku koła istnieje zawsze (jedna tylko) funkcya harmoniczna z danym jej jednolitym ciągiem wartości na jego ograniczeniu.*

Zauważmy w dowolnej powierzchni Riemanna zamknięty wielobok, mieszczący w swojem wnętrzu j e d e n t y l k o punkt rozgałęzienia Q, łączący w sobie ν gałęzi (wielobok ν-krotny). Cały obwód takiego wieloboku — gdy uwidocznimy linię przejścia g, wychodzącą z punktu Q — składać się będzie: z pasma s_1, leżącego w pierwszej gałęzi, z pasma s_2, leżącego w drugiej gałęzi ..., a wreszcie z pasma s_ν w ν^{tej} gałęzi, które się z pasmem s_1 znowu złączy w pewnym punkcie linii g. Gdy taki wielobok ma n boków, a $\alpha\pi$, $\beta\pi$, ... są jego kątami wewnętrznymi, to mamy tu:

$$(10) \qquad \alpha+\beta+\gamma+...=(n-2\nu)\pi.$$

Do takiego wieloboku można podług uwagi, danej na końcu art. poprzedz., zastosować wzór:

$$w-w_0=\int_{z_0}^{z}(z-a)^{\alpha-1}...dz,$$

z zachowaniem warunku (10), a więc odwzorować go w półpłaszczyźnie $\bar{z}$. Dalej możemy go sprządz cząsteczkowo z kołem, a stąd wynika:

VII. *We wnętrzu takiego wycinka powierzchni Riemanna, którego ograniczeniem jest wielobok zamknięty, mieszczący w sobie jeden tylko punkt rozgałęzienia, istnieje (jedna tylko) harmoniczna funkcya z danym naprzód jednolitym ciągiem wartości na obwodzie takiego wieloboku.*

Aby pod względem istnienia harmonicznych funkcyj zbadać można wnętrza ogólniejszych jeszcze obszarów, zajmiemy się naprzód aż do końca tego rozdziału różnemi własnościami tych funkcyj, przypuszczając z góry istnienie jej w danym obszarze.

154. Uwzględnienie zerwania ciągłości na dowolnej krzywej ograniczającej. Niech $A, B, ...$ będą punktami na krzywej c (fig. 85.), a spółrzędne prostokątne tych punktów nazwijmy:

$$(\alpha, \alpha'),\ (\beta, \beta'),\ ....$$

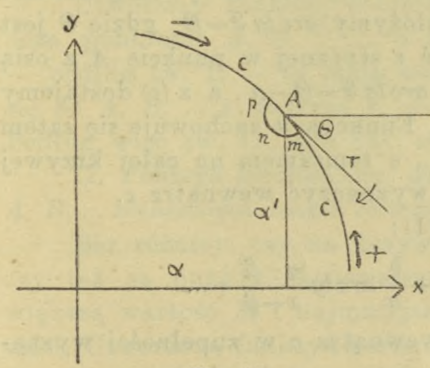


Fig. 85.

Funkcya v niech ma w A wartość $v_{A-\varepsilon}$, gdy się do punktu A zbliżamy po c, przebiegając c w dodatnim kierunku, $v_{A+\varepsilon}$ niech oznacza wartość funkcyi v w tym samym punkcie A, gdy się po c do tego punktu zbliżamy w odjemnym kierunku. Przyjmijmy, że:

$$v_{A-\varepsilon} - v_{A+\varepsilon} = a,\quad v_{B-\varepsilon} - v_{B+\varepsilon} = b,\ ...$$

i że a, b, ... są różne od zera. Wskazuje to, że funkcya v zrywa swoją ciągłość w punktach A, B, C, ..., leżących na c.

Punkt $A-\varepsilon$ ma spółrzędne: $(\alpha+\varepsilon_1, \alpha'-\varepsilon'_1)$, a punkt $A+\varepsilon$ spółrzędne: $(\alpha-\varepsilon_1, \alpha'+\varepsilon'_1)$, gdzie ε_1, ε'_1 są ilości dodatnie nieskończenie małe. Analogicznie wyrażą się spółrzędne punktów B, C, ... Zamiast funkcyi v zauważmy funkcyę:

$$(1)\qquad u = v - \frac{a}{\pi}\, arc\, tg\, \frac{y-\alpha'}{x-\alpha} - \frac{b}{\pi}\, arc\, tg\, \frac{y-\beta'}{x-\beta} + ...$$

Jestto również funkcya harmoniczna, która w punkcie A jako w $(A-\varepsilon)$ ma wartość:

$$(a)\qquad u_{A-\varepsilon} = v_{A-\varepsilon} - \frac{a}{\pi}\, arc\, tg \left(-\frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon_1}\right) - ...,$$

a w tym samym punkcie A, jako w punkcie $(A+\varepsilon)$, wartość:

$$(b)\qquad u_{A+\varepsilon} = v_{A+\varepsilon} - \frac{a}{\pi}\, arc\, tg \left(-\frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon_1}\right) - ...$$

Na dalsze dodajniki w (a), (b) nie ma wpływu zbliżanie się do punktu A z jednej lub z drugiej strony. Stąd dostajemy:

$$(c)\quad u_{A-\varepsilon}-u_{A+\varepsilon}=(v_{A-\varepsilon}-v_{A+\varepsilon})-\frac{a}{\pi}\left[arc\,tg\left(-\frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon_1}\right)-arc\,tg\left(-\frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon_1}\right)\right].$$

Lecz jasnem jest dalej, że gdy od punktu $A=(A-\varepsilon)$ poczynając, przebiegamy w odjemnym kierunku krzywę c, dostajemy się wreszcie znowu do punktu $A=(A+\varepsilon)$. Gdy funkcya:

$$tg\frac{y-\alpha'}{x-\alpha}$$

ma w $(A-\varepsilon)$ wartość ϑ, to zmieniając się podczas tego ruchu, dostaje w punkcie $(A+\varepsilon)$ po raz pierwszy znowu tę samą wartość ϑ. Wskutek tego, gdy w $(A-\varepsilon)$ założymy $arc\,tg\,\vartheta=\Theta$, gdzie Θ jest kątem, jaki tworzy odjemna część τ stycznej w punkcie A z osią xx' (fig. 85.), musi w $(A+\varepsilon)$ być: $arc\,tg\,\vartheta=\Theta-\pi$, a z (c) dostajemy $u_{A-\varepsilon}-u_{A+\varepsilon}=0$, gdyż $v_{A-\varepsilon}-v_{A+\varepsilon}=a$. Funkcya u zachowuje się zatem regularnie w punktach A, B, C, ..., a temsamem na całej krzywej c i da się z wartości swych na c wyznaczyć wewnątrz c.

Mając u, dostajemy dalej z (1):

$$(2)\qquad v=u+\frac{a}{\pi}arc\,tg\frac{y-\alpha'}{x-\alpha}+\frac{b}{\pi}arc\,tg\frac{y-\beta'}{x-\beta}+\ldots$$

przez co mamy już v i na c i wewnątrz c w zupełności wyznaczoną.

Aby zbadać, jak się v zachowuje, kiedy się do punktu A nieskończenie zbliżamy z wnętrza krzywej c, zauważmy, że w (2) suma wszystkich dodajników z wyjątkiem:

$$(3)\qquad \frac{a}{\pi}arc\,tg\frac{y-\alpha'}{x-\alpha}$$

przyjmuje jedną wartość W_A bez względu na sposób zbliżania się do A. Sam dodajnik (3) w punktach nieskończenie małego łuczku mnp, gdy go się od m przez n do p przebiega, przyjmuje wartości zawarte między:

$$\frac{a}{\pi}.\Theta,\quad \frac{a}{\pi}(\Theta-\pi).$$

Wskutek tego mamy:

$$v=[\,W_A+\frac{a}{\pi}\Theta,\ldots, W_A+\frac{a}{\pi}(\Theta-\pi)]=[v_{A-\varepsilon}\ldots v_{A+\varepsilon}],$$

bo widocznie:

$$W_A+\frac{a}{\pi}\Theta=v_{A-\varepsilon},\quad W_A+\frac{a}{\pi}(\Theta-\pi)=v_{A+\varepsilon}.$$

Stąd twierdzenie:

I. *Każda funkcya harmoniczna v, która w punktach A ograniczenia c doznaje skończonego zerwania ciągłości: $v_{A-\varepsilon}=v_{A+\varepsilon}=a$, posiada w punkcie A nieskończenie wiele wartości, zamkniętych właśnie granicami $v_{A-\varepsilon}$, $v_{A+\varepsilon}$. Każda wartość pośrednia zależy jedynie od kierunku, w jakim się z wnętrza c zbliżamy do A i od różnicy a, przypadającej na ten punkt.*

Przyjmijmy, że można utworzyć dwie funkcye harmoniczne v', v'' takie, że poza punktami A, B, C, ... przyjmują na krzywej c identyczne wartości, a w punktach A, B, C, ... doznają tych samych zerwań ciągłości:

$$v'_{A-\varepsilon}-v'_{A+\varepsilon}=v''_{A-\varepsilon}-v''_{A+\varepsilon}=a, \dots$$

Utwórzmy funkcyę $\overline{v}=(v'-v'')$. Jest ona $=0$ na c wszędzie poza punktami A, B, C, ..., a że obie funkcye v', v'' przybierają — podług tw. I. — tę samą wartość przy jednakowem zbliżaniu się do A, B, ... z wnętrza c, więc $\overline{v}=0$ także i w tych punktach. Podług więc tw. II., art. 147. mamy identycznie $v'=v''$, a to zn.:

II. *Funkcya harmoniczna, doznająca na ograniczeniu c w punktach A, B, ... skończonych danych zerwań ciągłości, jest tylko jedna wewnątrz c.*

Bez różnicy, czy na krzywej c mamy ciągły system wartości, czy też są punkty skończonego zerwania, znajdziemy na c największą wartość M i najmniejszą wartość m owych danych wartości. Utworzona funkcya harmoniczna v *) nie posiada wewnątrz c [tw. II. art. 149.] ani największości, ani najmniejszości. Z tego wynika, że w każdym dowolnym punkcie, leżącym wewnątrz c jest:

$$M>v>m, \text{ a to zn.:}$$

III. *Funkcya harmoniczna nie przybiera wewnątrz c nigdzie ani największej, ani najmniejszej z tych wartości, jakie ma przybierać na samej krzywej c.*

155. Szeregi funkcyj harmonicznych. Niech u_0, u_1, u_2, ... *in inft.* będą funkcyami harmonicznemi wewnątrz krzywej c, a ich wartości na samej krzywej c niech będą: U_0, U_1, U_2, ... *in inft.* Przyjmijmy, że szereg:

$$U_0+U_1+U_2+\dots$$

jest jednostajnie zbieżny. Wtedy po obraniu dowolnie małej dodatniej ilości ε, można zawsze przy dostatecznie dużem n osiągnąć, że: $|U_n+U_{n+1}+\dots+U_{n+p}|<\varepsilon$, $p=0, 1, 2, \dots$

---

*) Przypominamy, że funkcya harmoniczna jest funkcyą rzeczywistych zmiennych x, y i posiada wyłącznie rzeczywiste spółczynniki.

Suma $|U_n+U_{n+1}+\ldots+U_{n+p}|$ posiada na c w pewnym punkcie największą wartość $M_{n,p}$, a i ta największa wartość jest $<\varepsilon$. Że zaś — przy jakiemkolwiek skończonem p — jest:

$$|u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}|<M_{n,p},$$

co z własności funkcyi harmonicznej $(u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p})$ wynika, więc mamy:

$$|u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon,\ p=0,1,2,\ldots,$$

a to wskazuje, że szereg $(u_0+u_1+u_2+\ldots)$ jest jednostajnie zbieżny w całem wnętrzu krzywej c.

Zbadajmy, czy suma $(u_0+u_1+u_2+\ldots \mathit{in\ inft.})$ jest funkcyą harmoniczną. W tym celu nakreślmy wewnątrz c pewne koło k i przyjmijmy, że funkcye $u_0, u_1, u_2, \ldots$ przyjmują na jego okręgu wartości $V_0, V_1, V_2, \ldots$ Szereg $(V_0+V_1+V_2+\ldots \mathit{in\ inft.})$ jest niezawodnie jednostajnie zbieżny. Zauważmyż całkę Poisson'a:

$$(a) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(V_0+V_1+V_2+\ldots)\frac{r^2-l^2}{r^2-2rl\cos(\psi-\varphi)+l^2}d\psi,$$

którąby właśnie miała przedstawiać funkcyę: harmoniczną wewnątrz k, a przyjmującą na samym okręgu koła k wartości:

$$(V_0+V_1+V_2+\ldots).$$

Tę całkę — jeżeli $V_n+V_{n+1}+\cdots$, nazwiemy ϱ_n — napisać można w takiej formie:

$$u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varrho_n\cdot\frac{r^2-l^2}{r^2-2rl\cos(\psi-\varphi)+l^2}d\psi,$$

a że $|\varrho_n|<\varepsilon$, gdzie ε dowolnie do zera zbliżyć się może, więc stąd wynika, że całka (a) określa w istocie funkcyę $(u_0+u_1+\ldots)$ jako harmoniczną wewnątrz koła k. Mamy więc twierdzenie*):

I. *Gdy na samej krzywej c jest nieskończony szereg $\Sigma u_\alpha=t$, o samych funkcyach harmonicznych u_α, jednostajnie zbieżny, to także i w całem wnętrzu tej krzywej jest w ten sam sposób zbieżny i jest harmoniczną funkcyą wewnątrz c, a na samej krzywej ma wartość t_0, jeżeli szereg t na tej krzywej taką wartość posiada.*

Niech u_α będą — jak przódy — funkcyami harmonicznemi wewnątrz c, i niech w tem całem wnętrzu będą >0. Zauważmy wewnątrz c dowolny punkt 0 i z niego jako środka zatoczmy koło

*) Harnack. *Die Grundlagen der Theorie des logarythmischen Potentials.* (1887.), str. 67.

k, leżące całkowicie wewnątrz c, a mające promień r. Gdy $u_\alpha^{(0)}$ jest wartością funkcyi u_α w punkcie 0, a $\bar{u}_\alpha$ są wartościami tej funkcyi na samym okręgu k, to mamy:

$$u_\alpha^{(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}_\alpha \, d\psi \quad \text{[tw. II., art. 150.]}.$$

Gdy a jest innym dowolnym punktem zawartym wewnątrz k, a m jest takim punktem na okręgu koła k, że $0m$ tworzy kąt ψ z kierunkiem pierwszorzędnym, to wtedy:

$$u_\alpha^{(a)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}_\alpha \frac{r^2-l^2}{\overline{am}^2} d\psi, \quad l = 0a.$$

Lecz że $\frac{r^2-l^2}{\overline{am}^2} < \frac{r+l}{r-l}$, więc:

$$u_\alpha^{(a)} < \frac{r+l}{r-l}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}_\alpha \, d\psi = \frac{r+l}{r-l} u_\alpha^{(0)},$$

a stąd wynika:

$$(b) \quad [u_n^{(a)} + u_{n+1}^{(a)} + \ldots + u_{n+p}^{(a)}] < \frac{r+l}{r-l}[u_n^{(0)} + u_{n+1}^{(0)} + \ldots + u_{n+p}^{(0)}].$$

Z tego wnosimy, że szereg $\Sigma u_\alpha = t$ jest zbieżny także w punkcie a i wreszcie zbieżny także na całym okręgu koła $(l)_0$, mającego środek w 0, a promień $0a = l$. Na tym okręgu będzie ten szereg zarazem i jednostajnie zbieżny [bo dla całego tego okręgu pozostaje prawa strona w nierówności (b) ciągle ta sama], a więc szereg t jest we wnętrzu koła $(l)_0$ funkcyą harmoniczną. Mamy więc twierdzenie:

II. *Gdy szereg $t = \Sigma u_\alpha$ samych harmonicznych funkcyj dodatnich wewnątrz krzywej c jest zbieżny w jednym dowolnym punkcie wewnątrz tej krzywej, to jest zbieżny wewnątrz całej tej krzywej c i przedstawia funkcyę harmoniczną.*

Przyjmijmy, że za pomocą danych wartości na samej krzywej zamkniętej c chcemy wyznaczyć funkcyę harmoniczną z e w n ą t r z t e j k r z y w e j. Niech x, y będą spółrzędnymi punktów płaszczyzny, na której leży krzywa c, a początek układu osi xx, yy niech się zawiera wewnątrz c, $v(x,y)$ niech będzie żądaną funkcyą harmoniczną. Połóżmy:

$$x = \frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2} = p(x', y'), \quad y = \frac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2} = q(x', y'),$$

gdzie k^2 jest stałą, rzeczywistą wielkością > 0. Przez to krzywej c odpowie na płaszczyźnie osi $x'x'$, $y'y'$ krzywa c'. Każdemu punktowi (x,y) wewnątrz (zewnątrz) krzywej c odpowie punkt $(x'y')$ zewnątrz (wewnątrz) krzywej c' i naodwrót. Dalej mamy:

$$v(x,y)=v\left(\frac{k^2x'}{x'^2+y'^2},\frac{k^2y'}{x'^2+y'^2}\right)=v_1(x',y')$$

na punktach odpowiadających sobie, a że $p(x'y')$ jest pierwszorzędną, a $q(x',y')$ drugorzędną częścią funkcyi:

$$p+qi=\frac{k^2}{x'-y'i}$$

argumentu $x'-y'i$, więc przedewszystkiem mamy:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial q}{\partial y},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0.\quad \text{[art. 114]}.$$

Uwzględniając to we wzorach:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x'^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)^2+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\left(\frac{\partial q}{\partial x'}\right)^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial p}{\partial x'}\frac{\partial q}{\partial x'}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 p}{\partial x'^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 q}{\partial x'^2},$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial p}{\partial y'}\right)^2+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\left(\frac{\partial q}{\partial y'}\right)^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial p}{\partial y'}\frac{\partial q}{\partial y'}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 p}{\partial y'^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 q}{\partial y'^2},$$

dostaniemy:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y'^2}=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y'}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right].$$

Że zaś:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

podług założenia, więc mamy także:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y'^2}=0,$$

co dowodzi, że funkcya v_1 wewnątrz krzywej c' jest harmoniczną. Z tego widzimy, że żądanie wyznaczenia funkcyi harmonicznej zewnątrz pewnej krzywej c z jej wartości na tej krzywej, sprowadzić można zawsze do pierwotnego zadania wyznaczającego funkcyę harmoniczną dla wnętrza pewnej krzywej.

Funkcya v jest regularną w nieskończoności, gdy v_1 jest taką funkcyą w punkcie $(x'=0,\ y'=0)$.

ROZDZIAŁ XX.

Metoda wyrównawcza Schwarza.

---

156. Twierdzenie zasadnicze. Zajmijmy się teraz teoryą funkcyj harmonicznych w obszarach posiadających swoje ograniczenia o ogólniejszych formach niż te, jakie rozbieraliśmy w Rozdziele poprzedz. Do tego posłuży tak zwana m e t o d a wyrównywująca *)

---

*) *Ueber einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren. Ges. math. Abh.* T. 2., str. 133—143. *[Alternierendes Verfahren = Ausgleichungs-Methode = procédé alterné].* O zastosowaniu metody wyrównawczej do funkcyj wielu zmiennych por. S. Z a r e m b a. C. R. T. 124., str. 940.

Schwarza, a aby ją w najprostszy sposób przedstawić, przeprowadźmy naprzód takie rozumowania *):

Niech harmoniczna funkcya u będzie taką, że na części aab krzywej c (fig. 86.) posiada wartość $=0$, a na części $b\beta a$ tej krzywej wartość $=1$. Za zbliżaniem się do punktu a lub b we wnętrzu krzywej przybiera zatem u wartości zawarte między 0 a 1, [tw. I. art. 154.], a że i w całem wnętrzu krzywej jest [l. c. tw. II.] $u<1$, więc na łuku $a\gamma b$ przebiegającym wnętrze krzywej od a do b, posiada u wartości o górnej granicy $q<1$. Mamy więc:

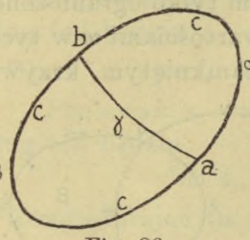


Fig. 86.

$$(a) \qquad u<q, \quad 0<q<1 \text{ na } a\gamma b.$$

Druga harmoniczna funkcya v niech ma znowu na aab statecznie wartość zero, a na $a\beta b$ niech wykazuje system wartości taki, że tam $|v|<g$. Zauważmy harmoniczną funkcyę $(gu+v)$. Będzie ona zerem w części aab, a będzie dodatnią w części $a\beta b$. Mamy więc:

$$(b) \qquad gu+v>0 \text{ na } a\beta b.$$

Tem samem i w całem wnętrzu krzywej c jest $gu+v>0$. Napiszmy tę nierówność w postaci: $g(u-q)+v+gq>0$ wewnątrz c, to ponieważ na $a\gamma b$ jest $u<q$, trzeba aby tam było: $v+gq>0$, skąd wypływa, że 1) odjemne wartości v na łuku $a\gamma b$ muszą być takie, że ich $|v|<gq$.

We wnętrzu c, a więc i na łuku $a\gamma b$, mamy dalej $-gu+v<0$, a to znowu znaczy, że 2) dodatnie wartości v na łuku $a\gamma b$ muszą być takie, że $v=|v|<gu$.

Uwzględniając wnioski 1), 2) dostajemy:

$$(c) \qquad |v|<gq \text{ na łuku } a\gamma b.$$

q nazywa się **ułamkowym mnożnikiem** funkcyi v na łuku $a\gamma b$; jest on od v niezależny, ale zależy od funkcyi u, która na tej samej części aab, co v, ma statecznie wartość $=0$, a na pozostałej $(a\beta b)$ jest statecznie $=1$.

157. Metoda wyrównawcza w najprostszych wypadkach [dla obszarów o zwartości =1]. Opierając się na tem przyjmijmy, że na krzywej $s=(ahbka)$, [fig. 87.], dany jest jednolity system (skończonych) wartości w, o największej wartości g.

---

*) E. Picard. *Traité d'Analyse*. T. 2., str. 77.

Poprowadźmy łuki $(a\alpha b)=s_1$, $(b\beta a)=s_2$ i utwórzmy funkcyę harmoniczną u_1 wewnątrz obszaru A, zamkniętego krzywą:

$$(ahba a)=L_1$$

podług takich warunków: na $(ahb)=\sigma_1$ ma być $u_1=w$ *), a na s_1 ma przybierać wartości dowolne (skończone) tem tylko ograniczone, że w a, b mają te wartości być identyczne z wartościami w w tych punktach. Utwórzmy dalej w obszarze B zamkniętym krzywą $(akb\beta a)=L_2$ funkcyę v_1 tak, abyśmy na s_2 mieli $v_1=u_1$, a na $(akb)=\sigma_2$: $v_1=w$.

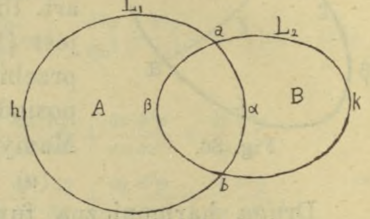
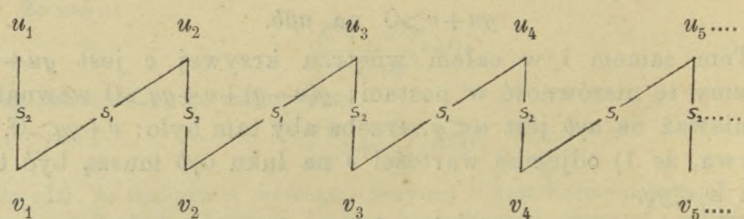


Fig. 87.

Wracając do A utwórzmy tam nową funkcyę u_2 taką, że na σ_1 jest $u_2=w$, a na s_1 mamy $u_2=v_1$.

Dalej przechodząc do B utwórzmy tam funkcyę v_2 o tej w łasności, że $v_2=w$ na σ_2, a $v_2=u$ na s_2 i t. d bez końca. Mamy więc dwa szeregi funkcyj harmonicznych:

(I) 

Pierwsze są określone wewnątrz L_1, a drugie wewnątrz L_2; u_α są $=w$ na σ_1, v_α są $=w$ na σ_2, a zaś:

$$(\alpha) \quad u_\alpha=v_\alpha \text{ na } s_2, \qquad (\beta) \quad u_\alpha=v_{\alpha-1} \text{ na } s_1,$$

co schemat (I) właśnie wskazuje.

Wskutek (α) mamy:

$$(\alpha') \qquad u_\alpha-u_{\alpha-1}=v_\alpha-v_{\alpha-1} \text{ na } s_2,\ \alpha=2,3,4,...,$$

a wskutek (β) mamy:

$$(\beta') \qquad u_{\alpha-1}-u_\alpha=v_\alpha-v_{\alpha-1} \text{ na } s_1,\ \alpha=2,3,4,....$$

Po tych uwagach przyjmijmy, że funkcya harmoniczna w A, która na σ_1 ma statecznie wartość $=1$, a na s_1 statecznie wartość $=0$, posiada na łuku s_2 mnożnik q_1, a funkcya harmoniczna w B, która na σ_2 jest statecznie $=1$, a na s_2 jest $=0$, posiada na łuku

*) w przedstawia zawsze cały ciąg wartości, a takie równanie, jak: $u_1=w$ wskazuje, że u w danym punkcie łuku $[ahb]$ taką przybiera wartość, jaka z ciągu w na ten punkt przypada.

s_1 mnożnik q_2. Większy z tych mnożników nazwijmy q, a

$$\{Max. |u_2 - u_1| \text{ na } s_2\}$$

nazwijmy g, to teraz — posługując się wzorem (c) [art. poprzedz.] — możemy tak rozumować:

Ponieważ $v_2 - v_1 = 0$ na σ_2, a $v_2 - v_1 = u_2 - u_1$ na s_2, więc [podług (c)] będzie:

(1) $$\text{na } s_1,\ |v_2 - v_1| < \{Max |u_2 - u_1| \text{ na } s_2\}.q = gq.$$

Ponieważ $u_3 - u_2 = 0$ na σ_1, a $u_3 - u_2 = v_2 - v_1$ na s_1, więc [podług (c)] będzie:

$$\text{na } s_2,\ |u_3 - u_2| < \{Max |v_2 - v_1| \text{ na } s_1\}.q,$$

a uwzględniając tu (1) dostajemy:

(2) $$\text{na } s_2,\ |u_3 - u_2| < \{Max |u_2 - u_1| \text{ na } s_2\}.q.q = gq^2.$$

Ponieważ $v_3 - v_2 = 0$ na σ_2, a $v_3 - v_2 = u_3 - u_2$ na s_2, więc [podług (c)] będzie:

$$\text{na } s_1,\ |v_3 - v_2| < \{Max |u_3 - u_2| \text{ na } s_2\}.q.$$

Uwzględniając zaś tu (2) dostaniemy:

(3) $$\text{na } s_1,\ |v_3 - v_2| < gq^3.$$

Dalej mamy $u_4 - u_3 = 0$ na σ_1, a $u_4 - u_3 = v_3 - v_2$ na s_1, a więc będzie:

$$\text{na } s_2,\ |u_4 - u_3| < \{Max |v_3 - v_2| \text{ na } s_1\}.q,$$

a po uwzględnieniu (3) dostaniemy:

(4) $$\text{na } s_2,\ |u_4 - u_3| < gq^4$$

i t. d. bez końca.

Z nierówności (1), (2), (3), ... wynika, że

na s_2: $|u_1| + |u_2 - u_1| + |u_3 - u_2| + \ldots < |u_1| + g[q^0 + q^1 + q^2 + \ldots]$, a

na s_1: $|v_1| + |v_2 - v_1| + |v_3 - v_2| + \ldots < |v_1| + g[q^1 + q^2 + q^3 + \ldots]$.

Że zaś $0 < q < 1$, więc widocznie:

(A) $$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots = lim\, u_n = u$$

jest skończoną funkcyą na s_2, a

(B) $$v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \ldots = lim\, v_n = v$$

jest skończoną funkcyą na s_1, a szeregi (A), (B) są jednostajnie zbieżne na tych łukach. Lecz według równań (α), (β) mamy:

$$lim\, u_n = lim\, v_n \quad \text{czyli} \quad u = v \text{ na } s_2$$
$$lim\, u_n = lim\, v_{n-1} \quad „ \quad u = v \ „ \ s_1.$$

W każdym więc punkcie łuków s_1, s_2 mamy $u = v$, a że te funkcye przedstawiają się na nich jednostajnie zbieżnymi szeregami, więc — podług tw. I., art. 155. — jest $u = v$ harmoniczną funkcyą wewnątrz $(aab\beta a) = (s_1 s_2)$. Lecz funkcya u istnieje jeszcze i wewnątrz $L'_1 = (ahb\beta a)$ i jest $= w$ na s_1, a funkcya v istnieje jeszcze i wewnątrz $L'_2 = (akbaa)$ i jest $= w$ na σ_2. Z tego wynika, że u jest [art. 149., tw. I.] w L'_1 przeprowadzeniem funkcyi v z $(s_1 s_2)$, a v jest w L'_2 przeprowadzeniem funkcyi u z $(s_1 s_2)$. Bez różnicy więc funkcya u lub v daje harmoniczną funkcyę wewnątrz krzywej s, przyjmującą na samej tej krzywej dany system wartości: w, a żądane zadanie mamy rozwiązane.

Jeżeli krzywe L_1, L_2 mają względem siebie takie położenie, jak fig. 88. wskazuje, to wtedy punkty a, b zastępują odpowiednio

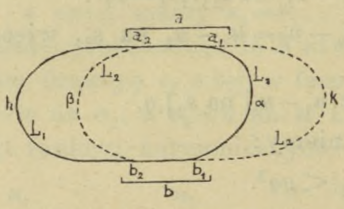


Fig. 88.

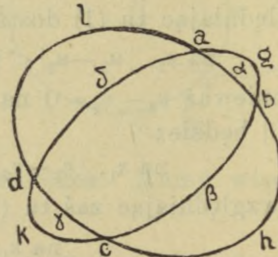


Fig. 89.

odcinki $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, na których funkcye u_α, v_α mają wartości w; łuk $s_1 = a_1 a b_1$, a łuk $s_2 = a_2 \beta b_2$.

Przyjmijmy teraz, że system wartości w dany jest na krzywej $s = (agbhckdla)$, [fig. 89.], a chcemy utworzyć harmoniczną funkcyę wewnątrz tej krzywej, przyjmującą wartość w na samej krzywej s. Łukami α, β, γ, δ utwórzmy z danego ograniczenia s dwie zamknięte krzywe $L_1 = (aabhcydla)$, $L_2 = (agb\beta cydla)$ i utwórzmy funkcyę harmoniczną u_1 w ten sposób się zachowującą: na $(agb) + (ckd) = \sigma_1$ ma być $u_1 = w$, a na łukach $\alpha + \gamma = s_1$ ma przybierać dowolne wartości z tem zastrzeżeniem, aby jej wartości w punktach a, b, c, d były identyczne z wartościami w, przypadającemi na te punkty.

Dalej tworzymy funkcyę harmoniczną v_1 wewnątrz L_2, czyniącą zadość takim warunkom: na $(ald) + (chb) = \sigma_2$ ma być $v_1 = w$ a na łukach $\gamma + \alpha = s_2$ ma być $u_1 = v_1$.

Dalej tworzymy funkcye u_2, v_2, u_3, v_3, .. podług takich warunków, jak w przypadku pierwszym i dochodzimy wreszcie do funkcyi $u = lim\, u_n = lim\, v_n$ spełniającej już żądane warunki.

Z tych uwag wynika:

I. *Gdy we wnętrzu dwóch zamkniętych obszarów A, B, które się częściowo nakrywają, a których obwody wkraczają jeden w drugi, istnieją,* *funkcye harmoniczne o dowolnie danych warunkach, to i w obszarze* $(A+B)$*) *istnieje harmoniczna funkcya o dowolnie danych wartościach na obwodzie tego obszaru.*

158. Funkcye harmoniczne w wieloboku kołowym. Najważniejszem w dowodzie ostatniego twierdzenia jest właśnie wkraczanie każdego z obwodów w obwód drugi. Wtedy bowiem tylko można wyrozumować nierówności (1), (2), (3), (4),... i z nich skorzystać, aby dowieść skończoności granicy $\lim u_n = \lim v_n$. Później poznamy obszary, które się całkowicie przykrywają, a ich obwody nie są identyczne, ale wkraczają w siebie i dlatego i w tych wypadkach będziemy mogli bez zastrzeżeń stosować metodę wyrównawczą.

Przez dołączenie nowej zamkniętej krzywej takiej, aby częściowo wkraczała w krzywe s określone na fig. 87., 88., 89. dojść możemy do ograniczenia bardziej złożonego i dla tego ograniczenia nowego rozwiązać problem Dirichlet'a.

Jako krzywe prostsze, w których wnętrzu istnieją funkcye harmoniczne, możemy brać [art. 153.]: koło, wycinki koła, odcinki koła i wieloboki prostokreślne. To mając na uwadze przyjmijmy, że dany obszar S ma ograniczenie złożone z boków, które są już-to prostolinijnymi odcinkami, już-to łukami kołowymi wypukłymi zawsze ku zewnątrz, a dwa boki bezpośrednio po sobie następujące nie stykają się z sobą w wierzchołku, który tworzą.

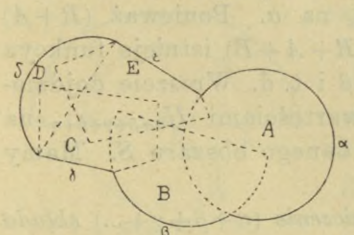


Fig. 90.

Na fig. 90. mamy boki łukowe: α, β, δ, a boki prostokreślne: γ, ε, Gdy więc w takim obszarze zechcemy utworzyć harmoniczną funkcyę z wartościami $U_{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon}$ na obwodzie:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon),$$

a z tych wartości przypada na α system U_α, na β system U_β, na $(\alpha+\beta)$ system $U_{\alpha+\beta}$ i t. d., to postąpimy w ten sposób: Każdy bok łukowy może dać początek kołu lub odcinkowi koła, mieszczącemu się całkowicie wewnątrz S. Koło A powstało w naszym wypadku z łuku α, odcinki koła B, D z łuków β, δ, a obszary A, B częściowo się nakrywają. Do boku γ przystawmy wielobok C, mieszczący się całkowicie w S, a taki,

*) W sumie $(A+B)$ część wspólną obszarom A, B tylko raz policzono.

aby się częściowo z B i z D nakrywał. Gdy wreszcie do boku ε przystawimy wielobok E, przykrywający się częściowo z A i z D, dostajemy w (A, B, C, D, E) szereg nadbrzeżnych obszarów takich, że każde dwa sąsiednie częściowo się nakrywają. W każdym z poszczególnych tych obszarów istnieją funkcye harmoniczne o dowolnych wartościach na ich obwodach. Istnieje zatem w A funkcya harmoniczna z wartościami U_α na α, w B funkcya harmoniczna z wartościami U_β na β i t. d.

Przyjmijmyż po pierwsze, że $(A+B+C+D+E)$ *) zapełnia już całkowicie S. Wtedy rozumujemy w ten sposób: Obszary A, B częściowo się nakrywają, a więc (na podstawie metody wyrównawczej) istnieje funkcya harmoniczna w $(A+B)$ z wartościami $U_{\alpha+\beta}$ na $\alpha+\beta$. Dalej $(A+B)$ nakrywa się cześciowo z C, a więc w $(A+B+C)$ istnieć będzie harmoniczna funkcya z wartościami $U_{\alpha+\beta+\gamma}$ na $\alpha+\beta+\gamma$. W ten sposób wnioskując dalej, udowodnimy wreszcie istnienia funkcyi harmonicznej w S z wartościami:

$$U_{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon} \text{ na } (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon).$$

Gdyby po drugie — obszary A, B, C, D, E nie zapełniły jeszcze całkowicie S — toby trzeba wyrysować wewnątrz S prostokreślny wielobok R, zapełniający wolną część obszaru S, a przykrywający częściowo każdy z obszarów nadbrzeżnych. Wnioskowanie byłoby w tym razie takie: W $(R+A)$ istnieje niezawodnie harmoniczna funkcya z wartościami U_α na α. Ponieważ $(R+A)$ nakrywa slę częściowo z B, więc w $(R+A+B)$ istnieje funkcya harmoniczna z wartościami $U_{\alpha+\beta}$ na $\alpha+\beta$ i t. d. Wreszcie dojdziemy i tu do harmonicznej funkcyi z wartościami $U_{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon}$ na $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$, a istniejącej wewnątrz danego obszaru S. Mamy więc twierdzenie:

I. *We wnętrzu obszaru, którego ograniczenie $(\alpha+\beta+\gamma+\dots)$ składa się już-to z łuków kołowych już-to z odcinków prostokreślnych, istnieje [jedna tylko] funkcya harmoniczna o danym ciągu wartości $U_{\alpha+\beta+\dots}$ na ograniczeniu.*

159. O łukach analitycznych. Zauważmy równania:

(1) $$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

w których φ, ψ są analitycznemi funkcyami, rzeczywistego argu-

*) Taka suma ma tu i w następnych poszukiwaniach takie znaczenie, że każdą część płaszczyzny, nakrytą równocześnie kilkoma obszarami ujętymi w nawiasy, raz tylko zatrzymujemy.

mentu t, a w otoczeniu pewnej rzeczywistej wartości $t=t_0$ rozwijają się na zwykłe szeregi potęgowe:

$$x=a+\varphi'(t_0)(t-t_0)+\dots,\quad y=b+\psi'(t_0)(t-t_0)+\dots$$

o rzeczywistych spółczynnikach. Gdy przynajmniej jedna z pochodnych $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$ nie jest zerem, to wtedy x przez y, lub y przez x, (lub wreszcie równocześnie x przez y i y przez x) da się wyrazić jednoznacznie w otoczeniu miejsca (a, b). Mówimy wtedy, że równania (1) określają pewien łuk analityczny, przechodzący przez punkt (a, b) pewnego układu prostokątnego i regularny w punkcie (a, b) lub w punkcie t_0, gdyż dla $t=t_0$ mamy właśnie $x=a$, $y=b$. Gdy bierzemy pod uwagę pewien zakres $t=(t_1 \dots t_2)$, a dla wszystkich punktów tego zakresu łuk jest regularny, to taki łuk nazywamy analitycznym łukiem regularnym.

Właśnie w dalszym ciągu rozważać będziemy zamknięte krzywe złożone z samych łuków regularnych*). Jeżeli na takim łuku rozpościerać będziemy pewne rzeczywiste wartości, to przyjmiemy, że ten system ma się dać przedstawić analityczną funkcyą parametru t, gdzie $t=(t_1 \dots t_2)$, jeżeli tym zakresem obejmujemy rozważany łuk regularny.

Przyjmijmy po tych określeniach, że mamy harmoniczną funkcyę u w zakresie $ACB=S$, leżącym całkowicie po jednej stronie osi xx, a w jednej swej części ograniczonym odcinkiem AB samej osi xx (fig. 91.). Na ACB przyjmuje u pewien system wartości w, a na AB jest statecznie $=0$. Obierzmy na AB punkt a i z niego jako środka zakreślmy koło $(R)=a\gamma\beta\gamma'$ tak, aby półkole rozciągające się po tej samej stronie, co S, leżało całkowicie wewnątrz S. W tem kole możemy utworzyć harmoniczną funkcyę v, mającą takie własności: W każdym punkcie k półkola $a\gamma\beta$ ma mieć v taką wartość, jaką u w tym punkcie posiada.

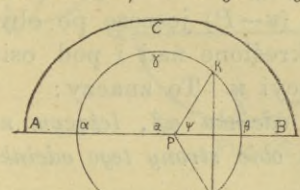


Fig. 91.

W punkcie k', który leżąc na półkolu $a\gamma'\beta$ ma być z punktem k symetrycznym względem xx', ma być $v=-u$. System wartości tak obrany na całym obwodzie (R) nazwijmy $f(\psi)$, gdzie $\psi=\sphericalangle\gamma pk$, to mamy:

$$(\alpha)\qquad f(\psi)=-f(2\pi-\psi).$$

Dla punktu p jest $\sphericalangle\varphi=0$ [por. fig. 81., str. 552.], a gdy $pk=pk'$ nazwiemy l, dostajemy:

*) Schwarz: l. c. str. 150....

$$(\beta) \qquad v_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-l^2)f(\psi)d\psi}{R^2-2Rl\cos\psi+l^2};$$

lecz wskutek (α) i wskutek $\cos\psi=\cos[-(2\pi-\psi)]$ jest $v_p=0$. W półkolu $\alpha\gamma\beta$ jest więc $v=u$, a że v istnieje jeszcze i w półkolu $\alpha\gamma'\beta$, więc u da się przeprowadzić przez $\alpha\beta$, t. j. przez oś xx' na jej drugą stronę. Stąd twierdzenie:

I. *Funkcya harmoniczna istniejąca po jednej stronie osi xx' w jej bezpośredniem sąsiedztwie, a mająca na osi xx' statecznie wartość* $=0$, *da się przeprowadzić na drugą stronę tej osi. [W punktach symetrycznie względem osi xx' leżących ma wartości o przeciwnych znakach].*

Przyjmijmy teraz, że funkcya u przyjmuje na $\alpha\beta$ (fig. 91.) wartości analitycznej funkcyi:

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-a)+\alpha_2(x-a)^2+...,$$

gdzie $x=(0\alpha...0\beta)$, a $\alpha_0, \alpha_1, ...$ są rzeczywiste. Funkcya:

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\alpha_2(z-a)^2+...$$

urojonego argumentu $z=x+yi$ będzie regularną w pewnem otoczeniu punktu a. Położmyż:

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y),$$

to różnica $[u-P(x,y)]$ będzie harmoniczną funkcyą na $\alpha\beta$ — [u według założenia, a P jako pierwszorzędna część funkcyi analitycznej jest taką funkcyą] i to taką, że na $\alpha\beta$ ma wartość zero.

Według twierdzenia I. istnieje zatem $(u-P)$ jeszcze po obydwóch stronach odcinka $\alpha\beta$, a że P jest określone nad i pod osią xx', więc to samo odnieść trzeba i do funkcyi u. To znaczy:

II. *Funkcya harmoniczna określona na odcinku $\alpha\beta$, leżącym na osi xx' funkcyą analityczną $f(x)$, da się na obie strony tego odcinka wyprowadzić.*

Niech wreszcie łuk $\alpha\beta$ będzie analitycznym i niech określa się równaniami:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_0+a_1(t-t_0)+... \\ y &= b_0+b_1(t-t_0)+... \end{aligned}\right\}, \quad t=(t_1...t_2),$$

w których a_1, b_1 nie są równocześnie zerami. Położmy:

$$(2) \qquad z=(a_0+b_0i)+(a_1+b_1i)(t'-t_0)+...,$$

to tu widocznie spółczynnik a_1+b_1i nie jest zerem, a wskutek tego równanie (2) daje cząteczkowe pokrewieństwo płaszczyzn (z), (t') w otoczeniach punktów $z=a_0+b_0i$, $t'=t_0$,

Punkty łuku $\alpha\beta$ na płaszczyźnie (z) są-to:

$$(3) \qquad z=x+yi=a_0+b_0i+(a_1+b_1i)(t-t_0)+...$$

Aby więc (2) określało to samo, co (3), musi być $t'=(t_1...t_2)$. Ograniczając się więc w istocie do tego obszaru, przekształciliśmy łuk analityczny, regularny $\alpha\beta$ na odcinek prostolinijny $t'=(t_1...t_2)$, leżący na pierwszorzędnej osi płaszczyzny (t'). Że zaś do tego ocinka odnosi się już twierdzenie II., więc stąd wynika:

III. *Wszelka harmoniczna funkcya, istniejąca na pewnym regularnym, analitycznym łuku $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ w ten sposób, że jej wartości na tym łuku przedstawiają się analityczną regularną funkcyą parametru t, da się wyprowadzić z tego łuku po jego obu stronach.*

160. Funkcye harmoniczne w obszarze zamkniętym liniami analitycznemi. Po tych przygotowaniach załóżmy, że mamy zakres S zamknięty krzywą L (fig. 92.), złożoną z dowolnej liczby regularnych łuków analitycznych $s_1, s_2, s_3, ...$ jużto wklęsłych już-to wypukłych bez różnicy. W żadnym z wierzchołków $b_1, c_2, ...$ nie ma kąt wewnętrzny wynosić 0^0. Taką linię L nazywać będziemy analityczną.

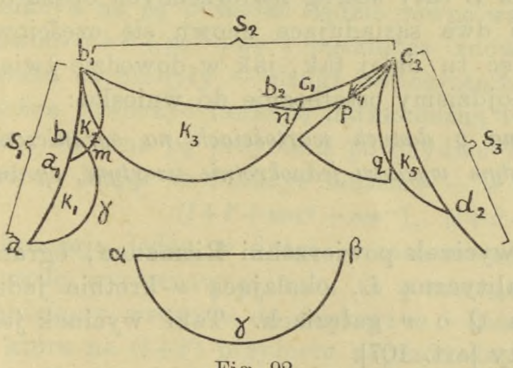


Fig. 92.

Na L dany jest pewien jednolity ciąg wartości w, a chcemy utworzyć harmoniczną funkcyę u wewnątrz S o tej własności, że właśnie na L przyjmować ma wartości danego systemu w.

Zauważmy na każdym łuku $s_1, s_2, ...$ części: (ab, a_1b_1), (b_1c_1, b_2c_2), $(c_2d_2, ...)$, ... takie, że dwie bezpośrednio po sobie następujące, częściowo się nakrywają.

Jedną taką część n. p. część ab weźmy pod uwagę. Jest ona regularnym, analitycznym łukiem, a jako taka da się — art. poprz. — cząsteczkowoprzekształcić na innej płaszczyźnie w prosty odcinek $\alpha\beta$.

Ciąg wartości wyrażony na ab analityczną funkcyą $f(t)$ przejdzie na ciąg wartości $\varphi(\tau)$ na $\alpha\beta$, a harmoniczna funkcya $\varphi(\tau)$, istniejąca na $\alpha\beta$, da się wyprowadzić z $\alpha\beta$. Połączmyż punkty α, β pewnym łukiem koła $\alpha\gamma\beta$ takim, aby mu odpowiadała krzywa $a\gamma'\beta$ leżąca wewnątrz S, to teraz wnioskować już możemy, że we wnętrzu k_1 krzywej $(ab\gamma'a)$ istnieje funkcya harmoniczna h_1, która na ab posiada dane wartości, a na $a\gamma'b$ wartości odpowiadające wartościom rozpostartym na $\alpha\gamma\beta$. Tak samo postępujemy z łukami

$a_1 b_1$, $b_1 c_1$, ... Tworzymy więc wewnątrz S nadbrzeżne obszary k_1, k_2, k_3, ... a w nich harmoniczne funkcye h_1, h_2, h_3, ... Dwa po sobie następujące obszary, które przytykają do tego samego łuku jak k_1, k_2, przykrywają się zawsze częściowo, a w punkcie (m) gdzie się ich obwody przecinają, mamy zawsze $h_1 = h_2$, bo obie funkcye są przeprowadzeniem tej samej funkcyi istniejącej na ab_1. Co się tyczy dwóch obszarów stykających się z sobą w wierzchołku, to te albo się także częściowo z sobą nakrywają, jak obszary k_2, k_3 w wierzchołku b_1, albo się nie nakrywają z sobą wcale, jak obszary k_4, k_5 w wierzchołku c_2. W takim wierzchołku c_2 umieszczamy wewnątrz S wycinek kołowy, którego wierzchołek również w c_2 wpada, a który obwody obszarów k_4, k_5 przecina w punktach p, q. W nim tworzymy harmoniczną funkcyę h' o wartości $= w$ w c_2 i takich zresztą wartościach na jego całem ograniczeniu, aby w p było $h' = h_4$, a w q abyśmy mieli $h' = h_5$. W ten sposób utworzyliśmy wewnątrz S i wzdłuż L cały szereg nadbrzeżnych obszarów k_1, k_2, k_3, ..., a z nich co dwa sąsiadujące znowu się częściowo nakrywają. Postępując więc tu dalej tak, jak w dowodzie twierdzenia I. — art. 158. — dojdziemy ostatecznie do wniosku:

I. *Funkcya harmoniczna o danych wartościach na ograniczeniu istnieje (tylko jedna) w każdym wycinku jednokrotnie zwartym, ograniczonym krzywą analityczną.*

Weźmy pod uwagę wycinek powierzchni Riemanna, ograniczony zamkniętą linią analityczną L, okalającą ν-krotnie jeden tylko punkt rozgałęzienia Q o ν gałęziach. Taki wycinek jest jeszcze jednokrotnie zwarty [art. 107].

Gdy tu nadbrzeżne obszary k_1, k_2, ... utworzymy w ten spo-sposób jak w wypadku pierwszym, ale tak małe, że żaden z nich w swem wnętrzu nie zawiera punktu Q, (to można zawsze osiągnąć, gdyż funkcye odwzorowujące są ciągłe), to dalej wnętrze wolne od obszarów k_1, k_2, ... przykryjemy ν-krotnym wielobokiem zachodzącym częściowo na każdy z obszarów k_1, k_2, .., a rozumując znowu podobnie jak w dowodzie twierdzenia I. — art. 158. — wnioskujemy:

II. *W odcinku powierzchni Riemanna zamkniętym analityczną linią a zawierającym w swem wnętrzu jeden tylko punkt rozgałęzienia, istnieje zawsze (tylko jedna) funkcya harmoniczna o danych wartościach na linii ograniczającej.*

161. Metoda wyrównawcza dla obszarów o zwartości >1. Funkcye harmoniczne o danych peryodach. Zadanie 1. Zauważmy wycinek S_2 zamknięty dwiema analitycznemi liniami l, l' (fig. 93.), z których l' zawiera się całkowicie wewnątrz l, a na $l+l'$ niech będzie dany system wartości U. Taki wycinek jest już dwukrotnie zwarty.

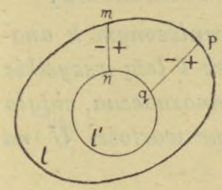


Fig. 93.

Poprowadźmy w nim dwa przekroje mn, pq, odróżniając w każdym z nich dwa brzegi:

$$(mn^+, mn^-), \quad (pq^+, pq^-).$$

Obwód $(l+l'+mn^++mn^-)$ ogranicza — gdy przekrój pq uważamy za niebyły — jednokrotnie już zwarty ocinek A, a w nim istnieje niezawodnie funkcya harmoniczna u_1 z wartościami U na $(l+l')$ i z dowolnie obranemi wartościami U' na $(mn^+ + mn^-)$, spadającemi w m, n z wartościami, jakie na te punkty przypadają z systemu U. Ta funkcya na pq posiadać będzie pewne wartości U_2. Z drugiej strony obwód $(l+l'+pq^++pq^-)$ ogranicza znowu — gdy się przekrój mn uważa za niebyły — drugi jednokrotnie zwarty odcinek B. W nim można utworzyć funkcyę harmoniczną v_1, która na $(l+l')$ ma wartości U, a na pq przybiera po obydwu brzegach wartości U_2 funkcyi u_1. Mając te funkcye możemy — z uwagi, że obwody

$$(l+l'+mn^++mn^-), \quad (l+l'+pq^++pq^-)$$

wkraczają jeden w drugi — zastosować (por. początek art. 158.) metodę wyrównawczą tak, że z szeregu funkcyj u_1, v_1, u_2, v_2, ... dojdziemy wreszcie do funkcyi u, która w $S_2=(A+B)$ istnieje, a która na $(l+l')$ przybiera naprzód dane wartości U.

Zadanie 2. Możemy przejść teraz z łatwością do wycinka S_3 trzykrotnie zwartego, ograniczonego trzema analitycznemi liniami l, l', l'', z których l', l'' leżą całkowicie wewnątrz l — (fig. 94.). Na jego obwodzie niech będzie dany jednolity ciąg wartości U. Poprowadźmy dwa przekroje mn, pq odróżniając znowu ich brzegi:

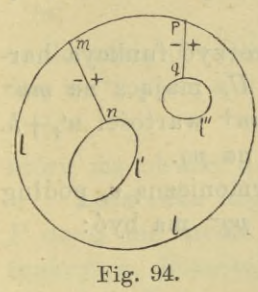


Fig. 94.

$$(mn^+, mn^-), \quad (pq^+, pq^-),$$

to obwód $(l+l'+l''+mn^++mn^-)$ ogranicza dwukrotnie już zwarty odcinek S_2, a obwód:

$$(l+l'+l''+pq^++pq^-)$$

granicza takiż odcinek S'_2, a te obwody wkraczają znowu jeden w drugi.

W nich można — na podstawie rozwiązanego już zadania 1. — określić odpowiednio: funkcyę u_1 w S_2, funkcyę v_1 w S'_2, w analogicznym pozostające do siebie stosunku, jak funkcye u_1, v_1 w obszarach A, B zadania 1go. Z tych funkcyj dojdziemy do funkcyi u, która w S_3 istnieje, a na obwodzie $(l+l'+l'')$ przyjmuje naprzód dane wartości U. Możemy teraz przejść do czterokrotnie zwartego odcinka S_4, a postępując tak dalej, dojdziemy do twierdzenia:

I. *W każdym odcinku S_k k-krotnie zwartym, ograniczonym k analitycznemi liniami l, l', l'', ..., $l^{(k-1)}$, z których wewnątrz l leżą wszystkie pozostałe, istnieje (tylko jedna) harmoniczna funkcya jednoznaczna, ciągła i skończona wewnątrz S_k, a przybierająca naprzód dane wartości U na obwodzie $[l+l'+...+l^{(k-1)}]$.*

Zobaczymy, że funkcyę u można będzie w S_k tak utworzyć, aby wewnątrz S_k zadość czyniła pewnym (skończonym) zerwaniom ciągłości, zatrzymując na ograniczeniu naprzód dane wartości*).

Zadanie 3. Zauważmy znowu wycinek dwukrotnie zwarty S_2 (fig 95.) i spróbujmy utworzyć funkcyę harmoniczną u, zachowującą się w ten sposób: 1) Na samych krzywych l, l' ma u przyjmować dany ciąg wartości U; 2) Jeżeli jej wartości na mn^+ są u^+, a na mn^- są u^-, to w każdym punkcie przekroju mn, według tego, czy ten punkt do mn^+ czy do mn^- zaliczamy, ma być:

$$u^+ = u^- + h,$$

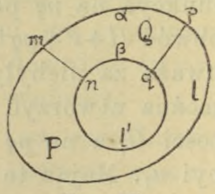


Fig. 95.

gdzie h jest stałą, rzeczywistą wielkością, zwaną peryodem funkcyi na na przekroju mn.

Powierzchnię o ograniczeniu $(l+l'+mn^+ + mn^-)$ nazwijmy znowu A i poprowadźmy jeszcze drugi przekrój pq o brzegach (pq^+, pq^-), a powierzchnię ograniczoną obwodem $(l+l'+pq^+ + pq^-)$ nazwijmy B. Te obwody wkraczają jeden w drugi; można więc tu stosować metodę wyrównawczą zmieniając tylko warunki, spowodowane żądaniem peryodów.

W zakresie A da się w każdym razie utworzyć funkcya harmoniczna u_1, przybierająca na $(l+l')$ wartości U, mająca na mn^- dowolnie wybrane wartości u'_1, a na mn^+ wartości $u'_1 + h$. Taka funkcya posiadać będzie pewne wartości na pq.

Utwórzmy dalej w zakresie B funkcyę harmoniczną v_1 podług takich warunków: na pq^+ ma być $v_1 = u_1$, a na pq^- ma być:

$$v_1 = u_1 - h.$$

---

*) H. A. Schwarz. *Auszug aus einem Briefe an Herrn F. Klein.* l. c. str. 303—306.

Na łukach α, β (fig. 95.) ma być $v_1 = U - h$, a na $(l - \alpha)$, $(l - \beta)$ ma być $v_1 = U$. Mamy więc dotąd:

$$(A) \quad \begin{cases} u_1 = U & \text{na } (l + l') \\ u_1 = u'_1 + h & \text{,, } mn^+ \\ u_1 = u'_1 & \text{,, } mn^+ \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} v_1 = U & \text{na } (l + l' - \alpha - \beta) \\ v_1 = U - h & \text{,, } (\alpha + \beta) \\ v_1 = u_1 & \text{,, } pq^+ \\ v_1 = u_1 - h & \text{,, } pq^-. \end{cases}$$

Wróćmy do obszaru A i utwórzmy w nim funkcyę podług takich warunków:

$$(A') \quad \begin{cases} u_2 = U & \text{na } (l + l') \\ u_2 = v_1 + h & \text{,, } mn^+ \\ u_2 = v_1 & \text{,, } mn^- \end{cases}$$

Utwórzmy dalej w obszarze B funkcyę v_2 tak się zachowującą:

$$(B') \quad \begin{cases} v_2 = U & \text{na } (l + l') \\ v_2 = U - h & \text{,, } (\alpha + \beta) \\ v_2 = u_2 & \text{,, } pq^+ \\ v_2 = u_2 - h & \text{,, } pq^- \end{cases} \qquad \text{i t. d. } \textit{in inft.}$$

Z tego czytamy:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \begin{cases} u_s = v_s & \text{na } pq^+ \\ u_s = v_{s-1} & \text{,, } mn^- \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} v_s = u_{s-1} - h & \text{,, } pq^- \\ v_s = u_s - h & \text{,, } mn^+ \end{cases} \end{array}\right\}, \quad s = 2, 3, \ldots$$

Nazwijmy $\lim u_s = u$, $\lim v_s = v$, to z relacyj (1) wnioskujemy, że:

$$(a) \qquad u = v \text{ w obszarze } P,$$

o obwodzie $(l - \alpha) + (l' - \beta) + pq^+ + mn^-$, do którego widocznie wchodzą mn^+, pq^-, a z relacyj (2) wynika, że:

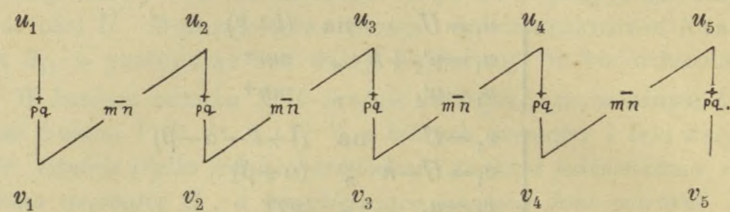
$$(b) \qquad u = v + h \text{ w obszarze } Q,$$

który ma obwód $\alpha + \beta + pq^- + mn^+$.

Lecz taka nagła zmiana z v na $v + h$ przy przejściu z obszaru P do Q nie może nastąpić wzdłuż pq, bo pq nie jest cięciem funkcyi v. Pozostaje więc tylko przekrój mn, wzdłuż którego według (a), (b) mamy:

$$u^+ = u^- + h.$$

Funkcya u będzie więc już żądaną harmoniczną funkcyą, jeżeli tylko dowiedziemy, że $\lim u_s = u$ pozostaje skończone. To jednak łatwo wywnioskujemy, tworząc tu schemat:



i powtarzając rozumowanie art. 157. Różnice $(u_s - u_{s-1})$, $(v_s - v_{s-1})$, jakie w przeprowadzeniu tego dowodu tu wejdą, są już pozbawione peryodów. Zadanie postawione mamy więc rozwiązane.

Zadanie 4. W odcinku S_3 — fig. 96. — poprowadźmy dwa przekroje mn, pq. W odcinku S_2 o obwodzie $(l+l'+l''+mn^+ + mn^-)$, który — gdy pq uważamy za niebyły — jest już tylko dwukrotnie zwartym, istnieje — według zadania 3. — funkcya harmoniczna u_1, mająca na $(l+l'+l'')$ dane wartości U, na $(mn^+ + mn^-)$ dowolne wartości, a na pq zerwanie ciągłości:

$$u_1^+ = u_1^- + h' \quad \text{(na } pq\text{)}.$$

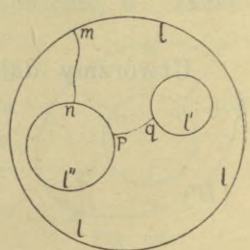


Fig. 96.

Z takich funkcyj wybierzmy taką, która na mn^- przybiera dowolnie dane wartości A_1, a na mn^+ ma wartości $A+h$; (h, h' są stałe $\gtreqless 0$). W odcinku S'_2 o obwodzie: $(l+l'+l''+pq^+ + pq^-)$, który jest znowu dwukrotnie tylko zwarty, możemy utworzyć funkcyę v_1, która na $(l+l'+l'')$ ma wartości U, na pq^- ma wartości u_1^-, na pq^+ wartości $u_1^- + h$, a na mn cięcie:

$$v_1^+ = v_1^- + h \quad \text{(na } mn\text{)}.$$

[Obwody obszarów S_2, S'_2 wkraczają jeden w drugi].

Dalej wracając do S_2 utworzymy funkcyę u_2 o takich własnościach:

$$u_2 = U \text{ na } (l+l'+l''),$$

$$u_2 = v_1^- \text{ na } (mn^-), \quad u_2 = v_1^- + h \text{ na } (mn^+),$$

a na pq ma cięcie:

$$u_2^+ = u_2^- + h' \quad \text{(na } pq\text{)}.$$

Idąc tak dalej dostaniemy z funkcyj u_1, v_1, u_2, v_2, ..., przeprowadzając wszystko podług metody wyrównawczej, funkcyę harmoniczną u o wartościach U na $(l+l'+l'')$ a o cięciach:

$$u^+ = u^- + h \text{ na } mn, \quad u^+ = u^- + h' \text{ na } pq.$$

Gdy mieć będziemy odcinek S_k k-krotnie zwarty, $k>3$, to prowadząc w nim dwa przekroje mn, pq, nie łączące równocześnie tych samych linij ograniczających, dostaniemy w nim odcinek S_{k-1} o obwodzie $(l+l'+...+l^{(k-1)}+mn^{+}+mn^{-})$ i odcinek S'_{k-1} o obwodzie $(l+l'+...+l^{(k-1)}+pq^{+}+pq^{-})$, a te obwody wkraczają jeden w drugi. Tworząc dalej szeregi funkcyj $u_1, u_2, ...; v_1, v_2, ...$, o $(k-2)$ cięciach, dojdziemy do funkcyi u o danych wartościach U na $(l+l'+...+l^{(k-1)})$, a o cięciach:

$$u^{+}=u^{-}+h_s, \quad s=1, 2, ..., k-1$$

na liniach $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{k-1}$, wzdłuż których porobione przekroje sprowadziłyby S_k do jednokrotnej zwartości.

Mamy więc twierdzenie:

II. *W odcinku S_k k-krotnie zwartym o liniach ograniczających $l, l', l'', ..., l^{(k-1)}$, z których pierwsza obejmuje wszystkie pozostałe, istnieje (tylko jedna) funkcya harmoniczna u, przybierająca dane wartości U na obwodzie $(l+l'+l''+...+l^{(k-1)})$, a posiadająca dane peryody h_s wzdłuż linij $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{k-1}$, któreby S_k sprowadziły do jednokrotnej zwartości. Wartości u^{-} (lub u^{+}) na $\sigma_1, \sigma_2, ...$ są już wynikiem danych warunków: U, h_s, $s=1, 2, ..., k-1$. Przytem można zażądać, aby niektóre z h_s były zerami. Gdy wszystkie $h_s=0$, mamy funkcyę określoną w twierdz. I.*

162. Funkcye harmoniczne w otwartej powierzchni Riemanna. W rozdziałach traktujących o całkach Abla było początkiem naszych badań pewne algebraiczne nieprzywiedlne równanie $f(x,y)=0$, do którego potem dołączała się powierzchnia Riemanna, uzmysławiająca przebieg algebraicznej funkcyi y. Tu przeciwnie początkiem naszych poszukiwań będzie dowolnie utworzona powierzchnia Riemanna $\mathfrak{R}$ dowolnego rodzaju ϱ, a równania algebraicznego nie wciągniemy zupełnie w rachubę już z tej prostej przyczyny, że nie wiemy, czy w ogólności do dowolnie danej powierzchni $\mathfrak{R}$ należy zawsze pewne równanie $f(x, y)=0$, z którego wynikająca funkcya y da się właśnie uzmysłowić powierzchnią $\mathfrak{R}$.

Po tej uwadze — przechodząc do dalszej teoryi funkcyj harmonicznych — zróbmy na jednej ćwiartce d o w o l n i e d a n e j powierzchni $\mathfrak{R}$ otwór ograniczony zamkniętą linią γ i taką już otwartą powierzchnię nazwijmy $\mathfrak{R}_\gamma$. Narysujmy dalej na $\mathfrak{R}_\gamma$ ϱ par zasadniczych nieprzywiedlnych kół (K_α, K'_α), $\alpha=1, 2, ..., \varrho$, i zróbmy wzdłuż tych wszystkich kół przekroje.

Tak rozcięta powierzchnia $\mathfrak{R}_\gamma$ tworzy zupełny analogon z odcinkiem $S_{\varrho+1}$, rozważanym w art. poprzedz. Linia γ zastępuje tu zamkniętą linię l, a każde $(K_\alpha + K'_\alpha)$, posiadające jedno pasmo zamknięte, zastępuje linię $l^{(\alpha)}$, $\alpha=1, 2, ..., \varrho$. Możnaby więc tu, podobnie jak w zadaniu 2giem artykułu poprzedz., już wnioskować, że istnieć będzie (tylko jedna) funkcya harmoniczna U o danych wartościach U_γ na γ, o danych wartościach u_α^+, u_α^- na brzegach kół K_α i o danych wartościach $u'_\alpha{}^+$, $u'_\alpha{}^-$ na brzegach kół K'_α, $\alpha=1, 2, ..., \varrho$, gdyby nie punkta rozgałęzienia, które tu koniecznie w $\mathfrak{R}_\gamma$ występują.

Tę trudność jednak usuniemy łatwo w ten sposób: Narysujmy na całej powierzchni $\mathfrak{R}_\gamma$ zakresy zamknięte analitycznemi liniami z zastrzeżeniami, że: 1⁰) każde dwa sąsiednie zakresy mają się częściowo z sobą przykrywać, 2⁰) odcinki zamknięte wielokrotnemi liniami mają zawierać tylko po jednym punkcie rozgałęzienia. W każdym takim zakresie istnieje harmoniczna funkcya z dowolnie danymi warunkami, a stąd na podstawie wyrównawczej metody możemy wnioskować o istnieniu żądanej funkcyi u w $\mathfrak{R}_\gamma$. Mamy więc twierdzenie:

I. *W otwartej powierzchni $\mathfrak{R}_\gamma$ istnieje zawsze harmoniczna funkcya z danemi dowolnie wartościami na γ i na obydwu brzegach każdego z nieprzywiedlnych kół: K_α, K'_α, $\alpha=1, 2, ..., \varrho$.*

Przejdźmy do rozwiązania śmielszego zagadnienia, a mianowicie takiego:

Na $\mathfrak{R}_\gamma$ ma być określoną funkcya harmoniczna u wartościami u_γ i peryodami h_α, h'_α, $\alpha=1, 2, ..., \varrho$ na kołach K_α, K'_α.

Gdy w K_α nazwiemy brzeg odjemny: λ_α, brzeg dodatni: λ'_α, w kole K'_α brzeg odjemny μ_α, a brzeg dodatni μ'_α, $(\alpha=1, 2, ..., \varrho)$, to — jeżeli chodzi o odróżnienie brzegów — mamy:

$$K_\alpha=(\lambda_\alpha+\lambda'_\alpha), \quad K'_\alpha=(\mu_\alpha+\mu'_\alpha),$$

a $\mathfrak{R}_\gamma$ możemy w dwojaki sposób pojmować:

1⁰) $\mathfrak{R}_\gamma$ ma jako ograniczenie linie zamknięte $\gamma, \lambda_1, \lambda'_1, \lambda_2, \lambda'_2, ..., \lambda_\varrho, \lambda'_\varrho$, a w niej przebiegają linie:

$$\begin{array}{cccc} K'_1 & \text{od } \lambda_1 & \text{do } \lambda'_1 \\ K'_2 & ,, \ \lambda_2 & ,, \ \lambda'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K'_\varrho & ,, \ \lambda_\varrho & ,, \ \lambda'_\varrho. \end{array}$$

Tak pojętą powierzchnię nazwijmy $\mathfrak{R}_{\gamma,\lambda}$.

2⁰) $\mathfrak{R}_\gamma$ ma jako ograniczenie linie zamknięte:

$$\gamma, \mu_1, \mu'_1, \mu_2, \mu'_2, ..., \mu_\varrho, \mu'_\varrho,$$

a w niej przebiegają linie:

$$\begin{array}{llll} K_1 & \text{od} & \mu_1 & \text{do } \mu'_1 \\ K_2 & " & \mu_2 & " \ \mu'_2 \\ \vdots & & \vdots & \ \ \vdots \\ K_\varrho & " & \mu_\varrho & " \ \mu'_\varrho. \end{array}$$

Tak pojętą powierzchnię nazwiemy $\mathfrak{R}_{\gamma,\mu}$.

Postępując zupełnie tak samo, jak w zadaniu 4tem — (punkty rozgałęzienia nie są już przeszkodą) — wywnioskujemy, że w $\mathfrak{R}_{\gamma,\lambda}$ istnieje funkcya u_1, przybierająca dowolne wartości na

$$(\gamma+\lambda_1+\lambda'_1+...+\lambda_\varrho+\lambda'_\varrho)=(\lambda+\gamma),$$

a mająca dane peryody h'_α na kołach K'_α, $\alpha=1,2.\,...,\varrho$, a więc $u_1^+=u_1^-+h'_\alpha$ na K'_α. Między funkcyami u_1 znajdą się i takie, które zachowując peryody h'_α i wartości u_γ na γ, mają na

$K_\alpha^-=\lambda_\alpha$ dane dowolne wartości A_α, a na

$K_\alpha^+=\lambda'_\alpha$ wartości $A_\alpha+h_\alpha$, $\alpha=1,2,...,\varrho$.

Mając taką funkcyę u_1 utwórzmy dalej w $\mathfrak{R}_{\gamma,\mu}$ funkcyę v_1 o takiem zachowaniu się: na γ ma być $v_1=u_\gamma$: na każdem $(\mu_\alpha+\mu'_\alpha)$ ma przyjmować wartości funkcyi u_1, a więc:

$$v_1=u_1^- \text{ na } K'^-_\alpha=\mu_\alpha, \qquad v_1=u_1^-+h'_\alpha \text{ na } K'^+_\alpha=\mu'_\alpha,$$

a na kołach K_α ma mieć peryody h_α określone przez:

$$v^+=v^-+h_\alpha \text{ (na } K_\alpha).$$

$\mathfrak{R}_{\gamma,\mu}$ ma obwód: $(\gamma+\mu_1+\mu'_1+...+\mu_\varrho+\mu'_\varrho)=(\mu+\gamma)$, a widocznie obwody $(\lambda+\gamma)$, $(\mu+\gamma)$ wkraczają jeden w drugi. Można więc tu będzie zastosować mętodę wyrównawczą.

Powróćmyż więc do $\mathfrak{R}_{\gamma,\lambda}$ i określmy tam funkcyę u_2 o takich własnościach: na γ ma być $u_2=u_\gamma$, na $(\lambda_\alpha+\lambda'_\alpha)$ ma przyjmować wartości funkcyi v_1, a więc ma być:

$$u_2=v^- \text{ na } K_\alpha^-=\lambda_\alpha, \qquad u_2=v^-+h_\alpha \text{ na } K_\alpha^+=\lambda'_\alpha,$$

a na K'_α ma mieć peryody h'_α tak, że:

$$u_2^+=u_2^-+h'_\alpha \text{ (na } K'_\alpha).$$

Tworząc dalej według tych wskazówek funkcye v_2, u_3, v_3, ... *in inft.* dojdziemy — wyczerpawszy metodę wyrównawczą — do funkcyi zadość czyniącej postawionemu zadaniu. Mamy więc twierdzenie:

II. *Na powierzchni otwartej $\mathfrak{R}_\gamma$ istnieje funkcya harmoniczna o danych wartościach u_γ na γ i o danych peryodach h_α, h'_α na ϱ parach nieprzywiedlnych kół zasadniczych (K_α, K'_α), $\alpha=1,2,...,\varrho$. Wartości u_α^- (lub u_α^+) na kołach K_α, K'_α nie potrzebują być dane, one już z wybranych u_γ, h_α, h'_α mają wyniknąć.*

Pytanie, dlaczego tu użyliśmy powierzchni $\mathfrak{R}_\gamma$ z otworem, a nie powierzchni $\dot{\mathfrak{R}}$ z punktem? Na to tak odpowiemy: Gdyby

γ zmniejszyło się do punktu, w którym u_γ ma być skończone, mielibyśmy w funkcyi utworzonej u funkcyę harmoniczną w całym nieograniczonym obszarze zmiennych (x, y) — [w całej powierzchni $\mathfrak{R}$ za włączeniem do $\mathfrak{R}$ i punktu γ] — skończoną, oznaczoną, a o tyle nieciągłą, że tu występują peryody h_α, h'_α, czyli cięcia:

$$u^+ = u^- + h_\alpha, \quad u^+ = u^- + h'_\alpha.$$

Mieliśmy zaś twierdzenie: Funkcya harmoniczna skończona, oznaczona i ciągła w całym nieograniczonym obszarze zmiennych (x, y), redukuje się do stałej. Nie wiemy jednak, o ile przyjęte cięcia ochraniają utworzoną w tw. II. funkcyę od redukowania się jej do stałej ilości. Trzeba dopiero zbadać, czy na powierzchni Riemanna $\mathfrak{R}$ mogą istnieć funkcye harmoniczne wszędzie skończone i jednoznaczne, a o nadwerężonej ciągłości tylko przez peryody na kołach K_α, K'_α. Do tego teraz przystąpimy.

163. Funkcye harmoniczne na powierzchni Riemanna bez otworu [na powierzchni zamkniętej]. Z punktu γ jako środka zatoczmy dwa koła (R), (r) o takich promieniach $R > r$, aby nie tylko w (r), ale jeszcze i w (R) nie było ani jednego punktu rozgałęzienia powierzchni $\mathfrak{R}$.

Utwórzmy funkcyę u_1 wewnątrz (R), a przyjmującą pewne dowolnie dane wartości U_R na okręgu (R). Taka funkcya jest wewnątrz (R) skończona i ciągła, a na okręgu (r) posiada pewne wartości U_r. Utwórzmy dalej zewnątrz (r) funkcyę v_1, która na okręgu (r) przyjmuje właśnie wartości U_r, a na kołach K_α, K'_α posiada dane peryody: h_α, h'_α. Taka funkcya — według tw. II. art. poprzedz. — istnieje zawsze, a na okręgu (R) przyjmuje pewne wartości $V_{1,R}$. Utwórzmy dalej funkcyę u_2 wewnątrz (R) z wartościami $V_{1,R}$ na okręgu (R) i t. d. *in inft.*

Mamy tu ciągle:

(*a*) $\quad u_n = v_{n-1}$ na okręgu (R),

(*b*) $\quad u_n = v_n$ „ „ (r).

Połóżmyż $\lim u_n = u$, $\lim v_n = v$, to tu skończoności tych granic jest daleko trudniej dowieść, niż we wszystkich poprzedzających wypadkach, bo tu obwód (R), wewnątrz którego mamy funkcye u_n, i obwód (r), zewnątrz którego mamy funkcye v_n, nie wkraczają jeden w drugi. Lecz i tu znajdzie się sposób dowiedzenia skończoności granic u, v. *)

*) H. A. Schwarz: *Ges. math. Abh.* T. 2., str. 189—190. — E. Picard: *Traité.* T. 2., str. 470—473.

Zakreślmy około punktu γ koło (ϱ) takim promieniem, że $R > \varrho > r$, i naznaczmy średnią ze wszystkich wartości funkcyi u_s lub v_s na ckręgu (ϱ) przez $M(u_s, \varrho)$, lub odpowiednio przez $M(v_s, \varrho)$, to mieć będziemy:

$$(c) \quad \begin{aligned} M(u_n, R) &= M(v_{n-1}, R) \quad \text{wskutek } (a), \\ M(u_n, r) &= M(v_n, r) \quad\quad\;\; \text{„} \quad (b). \end{aligned}$$

Lecz:

$$(d) \qquad M(u_n, R) = M(u_n, \varrho) = M(u_n, r),$$

bo funkcya u_n jest skończoną i ciągłą wewnątrz (R), a średnia z jej wartości na wszelkich kołach (ϱ) będzie równa wartości funkcyi w punkcie (γ) – [art. 150., tw. II.].

Z (c) i (d) wynika:

$$(1) \qquad M(u_n, R) = M(v_n, r).$$

Poprowadźmy dalej w powierzchni $\mathfrak{R}$ przekrój q_1, łączący parę kół (K_1, K'_1) z parą kół (K_2, K'_2), przekrój q_2, łączący (K_2, K'_2) z parą kół (K_3, K'_3), i t. d., to każdy z przekrojów q_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho - 1$, ma dwa brzegi (q_α, q'_α), a gdy i wzdłuż kół (K_α, K'_α) porobimy przekroje, dostaniemy na $\mathfrak{R}$ jedno zamknięte pasmo:

$$(q_1 + q'_1 + \cdots + q_{\varrho-1} + q'_{\varrho-1} + \lambda + \mu) = (\varkappa)\ ^{*)}.$$

Każda z funkcyj v_n jest wewnątrz obszaru ograniczonego przez $(\varkappa)$ i (ϱ) — [obszar ten jest już dwukrotnie zwarty] — jednoznaczną skończoną i ciągłą. Zastosujmyż do v_n relacyę (12) — art. 147. — to dostaniemy:

$$\int\limits_{(\varkappa)} \frac{dv_n}{dn}\, ds - \int\limits_{(\varrho)} \frac{dv_n}{dn}\, ds = 0.$$

Tu $\frac{dv}{dn}$ nie posiada już peryodów na K_α, K'_α, a gdy na λ_α, μ_α lub q_α uważamy dn za dodatnie, to na λ'_α, μ'_α lub q'_α będzie już dn odjemne. Z tego powodu — podług tw. I. w art. 147. — mamy:

$$\int\limits_{(\varkappa)} \frac{dv_n}{dn}\, ds = 0, \quad \text{a pozostaje tylko:}$$

$$(2) \qquad \int\limits_{(\varrho)} \frac{dv_n}{dn}\, ds = 0.$$

Ponieważ normalna n jest tu promieniem ϱ, a $ds = \varrho\, d\varphi$, więc (2) możemy w takiej formie napisać:

$$\varrho \int\limits_0^{2\pi} \frac{dv_n}{d\varrho}\, d\varphi = 0.$$

*) λ i μ mają tu takie same znaczenie, jak w art. poprzedz.

Opuszczając czynnik ϱ, mamy:

$$\frac{d}{d\varrho}\int_0^{2\pi} v_n(\varrho, \varphi)\, d\varphi = 0.$$

To wskazuje, że całka:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_n . d\varphi$$

nie zależy od ϱ, a że ta całka daje właśnie średnią: $M(v_n, \varrho)$ na okręgu (ϱ), więc wnioskujemy stąd:

(3) $$M(v_n, r) = M(v_n, R).$$

Z drugiej strony dostajemy podług (c):

(4) $$M(v_n, R) = M(u_{n+1}, R),$$

a uwzględniając (1), (3), (4) mamy ostatecznie:

(5) $$M(u_n, R) = M(u_{n+1}, R), \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

co znaczy, że *wszystkie funkcye u_n mają te same średnie na okręgu (R), a więc tę samą wartość U_γ w punkcie γ.*

Niech a będzie dowolnym punktem okręgu (r), a $(u_{n+1} - u_n)_a$ niech będzie wartością różnicy $(u_{n+1} - u_n)$ w tym punkcie.

Jeżeli punkt a ma spółrzędne biegunowe (r, φ), a punkty na okręgu (R) mają spółrzędne (R, ψ), to:

(α) $$(u_{n+1} - u_n)_a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u_{n+1} - u_n)_R . \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi.$$

Dla punktu γ jest $r = 0$, a różnica $(u_{n+1} - u_n)_\gamma = 0$. Mamy więc:

(β) $$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u_{n+1} - u_n)_R\, d\psi.$$

Odejmując (β) od (α) dostajemy:

(γ) $$(u_{n+1} - u_n)_a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2r.(u_{n+1} - u_n)_R . \frac{R\cos(\psi - \varphi) - r}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi.$$

Na całym okręgu (R) jest:

$$|R\cos(\psi - \varphi) - r| < R + r < 2R, \quad |R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2| > (R - r)^2.$$

Niech dalej na okręgu (R) będzie $Max. |u_{n+1} - u_n|_R = g_n$, to z (γ) dostajemy:

$$|u_{n+1} - u_n|_a < g_n . \frac{4Rr}{(R - r)^2}.$$

W stosunku do obranego R możemy r wziąć tak małe, aby r/R, będąc dostatecznie małem, dało:

$$\frac{4\frac{r}{R}}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^2}<q<1,$$

gdzie q jest obranym ułamkiem właściwym, który widocznie od n nie zależy. Mamy wtedy:

(6) $$|u_{n+1}-u_n|_r<q.g_n,$$

a tu znaczek r wskazuje, że ta nierówność odnosi się do wszystkich punktów okręgu (r). Według (a) jest:

$$|u_3-u_2|_R=|v_2-v_1|_R, \quad \text{a więc:}$$

(7) $$|u_3-u_2|_R<Max|v_2-v_1|_R.$$

Według (b) mamy znowu:

(8) $$|u_2-u_1|_r=|v_2-v_1|_r.$$

Różnica $|v_2-v_1|$ nie posiada już peryodów na kołach K_α, K'_α, a jako skończona, oznaczona i ciągła zewnątrz (r), posiada własność:

$$Max|v_2-v_1|_R\leqq Max|v_2-v_1|_r, \quad \text{czyli:}$$
$$\leqq Max|u_2-u_1|_r \quad \text{[podług (8)]},$$
$$\leqq q.g_1=q.Max.|u_2-u_1|_R \quad \text{[podług (6)]}.$$

Uwzględniając to w (7) dostajemy:

$$|u_3-u_2|_R<q.Max|u_2-u_1|_R.$$

Analogicznie będzie:

$$|u_4-u_3|_R<q.Max|u_3-u_2|_R, \quad \text{czyli:} \quad |u_4-u_3|_R<q^2.Max|u_2-u_1|_R,$$

i t. d. bez końca. Te nierówności dowodzą, że granica:

$$u=u_1+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\ldots=v$$

będzie skończona na okręgu (R). Lecz i na okręgu (r) jest także $u=v$, a więc ta identyczność tych funkcyj jest w całym pierścieniu $(R...r)$. Lecz u istnieje jeszcze i wewnątrz (r), a więc wnosić trzeba, że i v da się w wnętrze (r) wprowadzić i że tam będzie także $v=u$. Że zaś funkcya u jest tam skończona, ciągła i jednoznaczna, więc i funkcya v będzie się tam także tak zachowywać, a w punkcie γ jest $v=U_\gamma$. Z tych wszystkich uwag wynika:

I. *Na zamkniętej powierzchni Riemanna* $\mathfrak{R}$ *istnieje tylko jedna funkcya harmoniczna, wszędzie jednoznaczna i skończona, z nadwerężoną ciągłością tylko przez peryody na kołach* K_α, K'_α, *a o danej naprzód wartości w pewnym nieosobliwym punkcie* γ *tej powierzchni.*

Przyjmijmy, że mamy dwie różne funkcye u, u' o tych samych peryodach na kołach K_α, K'_α. Ich różnica $(u-u')$ nie posiada już peryodów, jest więc w całej powierzchni $\mathfrak{R}$ skończoną i ciągłą. Taka funkcya jest stałą ilością $=c$, a stąd mamy $u=u'+c$. To znaczy:

II. *Dwie funkcye harmoniczne na całej powierzchni skończone, a o tych samych peryodach na kołach K_α, K'_α, różnią się tylko o stałą ilość.*

*
* *

164. Funkcye harmoniczne rodzaju 1go, 2go i 3go na powierzchni Riemanna. Zauważmy równanie algebraiczne $f(z,\eta)=0$ rodzaju ϱ, połóżmy w niem $z=x+yi$, $\eta=\varphi(z)$ i utwórzmy dowolną całkę rodzaju pierwszego $J_1(z)$, dopuszczającą peryody:

$$2\omega_\alpha=A_\alpha+B_\alpha i,\quad 2\omega'_\alpha=A'_\alpha+B'_\alpha i.$$

Gdy w J_1 wstawimy $z=x+yi$ i uwidocznimy część pierwszorzędną i drugorzędną, dostaniemy:

$$(A)\qquad J_1=u_1(x,y)+v_1(x,y)i,$$

a tu widocznie funkcye u_1, v_1 należą do funkcyj harmonicznych *), opisanych w tw. II. art. poprzedz. Pierwsza z nich posiada peryody A_α, A'_α, druga zaś peryody B_α, B'_α. Z tegoto powodu nazywamy każdą funkcyę, którą określiliśmy w tw. II. art. poprzedz., a którą możemy niezawodnie utworzyć w dowolnie danej powierzchni $\mathfrak{R}$ rodzaju ϱ, funkcyą harmoniczną rodzaju pierwszego.

Niech $J_2(z)$ będzie całką rodzaju drugiego o peryodach:

$$2\eta_\alpha=C_\alpha+D_\alpha i,\quad 2\eta'_\alpha=C'_\alpha+D'_\alpha i,$$

a z jedynem miejscem nieskończonościowem c. Gdy w jego otoczeniu jest:

$$J_2=\frac{1}{z-c}+\mathfrak{P}(z-c),$$

to różnica $J_2-(z-c)^{-1}$ jest już funkcyą $u''_1(x,y)+v''_1(x,y)i$, wszędzie skończoną i oznaczoną, a o peryodach $2\eta_\alpha$, $2\eta'_\alpha$, gdyż $(z-c)^{-1}$ jako wymierna funkcya nie posiada żadnych peryodów. Z tego wynika, że u''_1, v''_1 są harmonicznemi funkcyami rodzaju pierwszego.

Połóżmy:

$$c=a+bi,\quad |z-c|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\varrho,$$
$$(z-c)^{-1}=\varrho^{-1}e^{-\varphi i}=\varrho^{-1}[\cos\varphi-i\sin\varphi],$$

to mieć będziemy:

---

*) Zaliczając miejsce (x,y) do coraz innej ćwiartki powierzchni $\mathfrak{R}$, dostajemy coraz inne wartości funkcyj u_1, v_1.

$$J_2=\left[\frac{\cos\varphi}{\varrho}+u''_1(x,y)\right]+\left[\frac{-\sin\varphi}{\varrho}+v''_1(x,y)\right]i,$$

gdzie $\cos\varphi=\frac{x-a}{\varrho}$, $\sin\varphi=\frac{y=b}{\varrho}$.

Funkcye:

$$(B)\qquad u_2=\frac{\cos\varphi}{\varrho}+u''_1(x,y),\quad v_2=-\frac{\sin\varphi}{\varrho}+v''_1(x,y)$$

są harmonicznemi w powierzchni $\mathfrak{R}$, i posiadają jedno tylko miejsce nieskończonościowe, spowodowane dodajnikami $\varrho^{-1}\cos\varphi$, $-\varrho^{-1}\sin\varphi$. Funkcya u_2 ma peryody C_α, C'_α, a funkcya v_2 peryody D_α, D'_α. Z tego powodu nyzywamy każdą funkcyę harmoniczną, która da się niezawodnie utworzyć na dowolnie danej powierzchni $\mathfrak{R}$ rodzaju ϱ, a która posiada pewne peryody na kołach K_α, K'_α i jedno tylko miejsce nieskończonościowe, spowodowane dodajnikiem $\varrho^{-1}\cos\varphi$ lub dodajnikiem $-\varrho^{-1}\sin\varphi$, funkcyą harmoniczną rodzaju drugiego.

Każda funkcya u_2 jest już w zupełności wyznaczona, gdy damy jej miejsce nieskończonościowe (a,b) i funkcyę harmoniczną u''_1 w jej formę wchodzącą, albo: gdy damy jej miejsce nieskończonościowe (a,b), jej peryody i jej wartość na dowolnem miejscu, różnem od (a,b). To samo odnieść trzeba do funkcyi v_2.

Wprowadźmy wreszcie całkę rodzaju trzeciego $J_3(z)$, wykazującą peryody: $w_\alpha=E_\alpha+F_\alpha i$, $w'_\alpha=E'_\alpha+F'_\alpha i$. Gdy taka całka ma punkty logarytmiczne $c_1=a_1+b_1 i$, $c_2=a_2+b_2 i$, to w ich otoczeniach mamy:

$$J_3=\log(z-c_1)+\mathfrak{P}_1(z-c_1),\quad J_3=-\log(z-c_2)+\mathfrak{P}_2(z-c_2),$$

a różnica:

$$J_3-\log\frac{z-c_1}{z-c_2}=u'''_1(xy)+v'''_1(xy)i$$

będzie znowu funkcyą wszędzie skończoną i oznaczoną, a o peryodach w_α, w'_α, gdyż $\log\frac{z-c_1}{z-c_2}$ daje tylko peryod $2\pi i$ na cięciu $(c_1...c_2)$. Z tego wynika, że i tu funkcye u'''_1, v'''_1 są harmonicznemi rodzaju pierwszego.

Połóżmy $z-c_1=\varrho_1 e^{\varphi_1 i}$, $z-c_2=\varrho_2 e^{\varphi_2 i}$, to:

$$\log\frac{z-c_1}{z-c_2}=\log\frac{\varrho_1}{\varrho_2}+(\varphi_1-\varphi_2)i,\quad \text{a}$$

$$J_3=\left[\log\frac{\varrho_1}{\varrho_2}+u'''_1\right]+\left[(\varphi_1-\varphi_2)+v'''_1\right]i.$$

Tutaj występują dwie harmoniczne funkcye:

$$(C) \qquad u_3 = \left[log\frac{\varrho_1}{\varrho_2} + u'''_1 \right], \quad v_3 = \left[(\varphi_1 - \varphi_2) + v'''_1 \right],$$

a w drugiej z nich można $\varphi_1 - \varphi_2$ zastąpić przez:

$$\frac{1}{i} log \frac{\varrho_2(z-c_1)}{\varrho_1(z-c_2)}.$$

Obie posiadają logarytmiczne punkty (a_1, b_1), (a_2, b_2). Funkcya u_3 ma peryody E_α, E'_α, a v_3 peryody F_α, F'_α, a wzdłuż cięcia $(c_1 ... c_2)$ peryod 2π *). Funkcye harmoniczne o charakterze (C), utworzone na dowolnie danej powierzchni $\mathfrak{R}$ rodzaju ϱ, nazywamy f u n k c y a m i h a r m o n i c z n e m i r o d z a j u t r z e c i e g o.

Każda funkcya u_3 jest tu znowu w zupełności wyznaczoną, gdy znamy jej punkty logarytmiczne $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, jej peryody E_α, E'_α i jej wartość na dowolnem miejscu, różnem od $(a_1 b_1)$ i $(a_2 b_2)$. To samo odnosi się do funkcyi v_3.

Zwróćmy jeszcze na chwilę uwagę na funkcye harmoniczne rodzaju pierwszego. Wybierzmy z nich 2ϱ funkcyj U_β, $\beta = 1, 2, ..., 2\varrho$, o dowolnych peryodach $A_{\beta\alpha}$, $A'_{\beta\alpha}$, $\alpha = 1, 2, ..., \varrho$, i przyjmijmy, że między temi funkcyami zachodzi związek:

$$(1) \qquad F = \sum_{\beta=1}^{2\varrho} C_\beta U_\beta = const.,$$

w którym spółczynniki C_β nie są zerami. Funkcya harmoniczna F jako $= const.$ nie posiada wcale peryodów na kołach K_α, K'_α; a więc być musi:

$$(2) \qquad \begin{cases} H_1 = C_1 A_{11} + C_2 A_{21} + ... + C_{2\varrho} A_{2\varrho,1} = 0 \text{ na } K_1 \\ H_2 = C_1 A_{12} + C_2 A_{22} + ... + C_{2\varrho} A_{2\varrho,2} = 0 \text{ na } K_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ H_\varrho = C_1 A_{1\varrho} + C_2 A_{2\varrho} + ... + C_{2\varrho} A_{2\varrho,\varrho} = 0 \text{ na } K_\varrho \\ H'_1 = C_1 A'_{11} + C_2 A'_{21} + ... + C_{2\varrho} A'_{2\varrho,1} = 0 \text{ na } K'_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ H'_\varrho = C_1 A'_{1\varrho} + C_2 A'_{2\varrho} + ... + C_{2\varrho} A'_{2\varrho,\varrho} = 0 \text{ na } K'_\varrho. \end{cases}$$

Toby wskazywało, że wyznacznik A tych równań jest zerem, a $A = 0$ zaprzecza widocznie założeniu, że peryody $A_{\beta\alpha}$, $A'_{\beta\alpha}$ są dowolne. Związek (1) jest więc niedopuszczalny. Funkcya F jest

*) Przez równoczesne okrążenie punktów c_1, c_2 zmienia się równocześnie φ_1, φ_2 na $\varphi_1 + 2\pi$, $\varphi_2 + 2\pi$, przez co różnica $(\varphi_1 - \varphi_2)$ nie zmienia się. Gdy przeciwnie okrążamy jeden tylko punkt n. p. punkt c_1, zmienia się tylko φ_1 na $\varphi_1 + 2\pi$; φ_2 pozostaje to samo, a różnica $(\varphi_1 - \varphi_2)$ przechodzi na $(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\pi$.

harmoniczną o peryodach H_α, H'_α, różnych od zera, a tym można nadać dowolne wartości, bo potem z równań (2) dadzą się — wskutek $A \neq 0$ — obliczyć C_β tak, że równania (2) przejdą na identyczności. Stąd twierdzenie:

I. *Gdy z pomiędzy funkcyj harmonicznych rodzaju 1^{go} wybierzemy 2ϱ funkcyj o dowolnych peryodach, to każdą inną funkcyę harmoniczną tego rodzaju można przez te wyjęte przedstawić liniowo niejednorodnie.*

Inaczej: Z funkcyj harmonicznych rodzaju 1^{go} można zawsze i to na nieskończenie wiele sposobów wybrać 2ϱ ich liniowo od siebie niezależnych.

165. Funkcye rodzajów 1., 2., 3. urojonego argumentu $z=x+yi$ na powierzchni Riemanna. Zwróćmy się teraz do funkcyj urojonego argumentu.

D e f i n i c y a. *Funkcyę harmoniczną urojonego argumentu $z=x+yi$, istniejącą na powierzchni Riemanna, a posiadającą pewne peryody, nazywamy funkcyą rodzaju 1^{go}, 2^{go}, lub 3^{go}, według tego, czy ona pod względem peryodów i punktów osobliwych ma własności całki Abla rodzaju pierwszego, drugiego, lub trzeciego.*)*

Że takie funkcye rzeczywiście istnieją, dowiedziemy w ten sposób:

Gdy $U=u+vi$ jest jedną z rozważanych funkcyj, to między u a v zachodzą związki:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

a z nich dostajemy:

$$v=\int \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = -\int \frac{\partial u}{\partial y}\, dx \tag{2}$$

z przyjętą wartością v_0 na pewnem miejscu (a_0, b_0) powierzchni $\mathfrak{R}$.

Niech $u=u_1$ będzie funkcyą harmoniczną rodzaju pierwszego. Wtedy i v musi być koniecznie funkcyą v_1 rodzaju pierwszego, bo gdyby v miało formę (B) lub (C) [art. poprzedz.], nie mogłyby zachodzić związki (1). Funkcya $U=u_1+v_1 i$ z oznaczonem v_1 podług (2) będzie funkcyą rodzaju pierwszego.

Przyjmijmy $u=u_2$ w formie (B) art. poprzedz. Wtedy v musi

*) R i e m a n n: *Ges. Werke*, str. 105.... — Por. także: F. K l e i n: *Vorlesungen über die Th. der ellipt. Modulfunctionen von* R. F r i c k e (Lipsk 1890). T. 1., str. 492—572.

być $=v_2$, t. j. musi mieć również formę (B), bo inaczej między u_2, v_2 znowu nie zaszłyby związki (1).

Funkcya $U=u_2+v_2 i$ jest rodzaju drugiego. Podobnie wywnioskujemy, że gdy $u=u_3$, musi być także $v=v_3$. Funkcya $U=u_3+v_3 i$ jest rodzaju trzeciego. Mamy więc twierdzenie:

I. *Na powierzchni Riemanna istnieją funkcye urojonego argumentu, mające własności całek Abla rodzaju pierwszego, drugiego lub trzeciego. Nazywamy je odpowiednio funkcyami rodzaju pierwszego, drugiego i trzeciego.*

Gdy u_ν, $\nu=1,2,3$ posiada przyjęte dowolnie peryody P_α, P'_α, to v_ν ma już peryody Q_α, Q'_α, wyznaczone warunkami uwzględnionymi w u_ν. $P_\alpha+Q_\alpha i$, $P'_\alpha+Q'_\alpha i$ będą peryodami funkcyi $U_\nu=u_\nu+v_\nu i$ a w jej wyznaczaniu będzie można widocznie P_α, P'_α przyjąć zupełnie dowolnie. Uwzględniając to, dojdziemy do takich twierdzeń:

II *a*. *Funkcyę U_1 rodzaju pierwszego wyznaczamy, dając jej dowolną wartość (skończoną) na dowolnem nieosobliwem miejscu powierzchni $\mathfrak{R}$ i dowolne wartości pierwszorzędnych części w jej peryodach.*

II *b*. *Funkcyę U_2 rodzaju drugiego wyznaczamy, dając jej dowolny biegun (stopnia 1^{go}), spowodowany dodajnikiem $(z-c)^{-1}$, a zresztą zatrzymując warunki twierdzenia II a.*

II *c*. *Funkcyę U_3 rodzaju trzeciego wyznaczamy, dając jej dowolnie dwa punkty logarytmiczne, uwidaczniające się dodajnikiem $\log\frac{z-c_1}{z-c_2}$, a zresztą zatrzymując warunki twierdzenia II b.*

O ile te funkcye mogą być, lub są identyczne z samemi całkami Abla rodzajów 1., 2., 3., wykażą dalsze poszukiwania.

Dwie funkcye harmoniczne u_ν, v_ν tego samego rodzaju: ν i takie, że $(u_\nu+v_\nu i)$ jest już funkcyą urojonego argumentu, nazwiemy sprzężonemi.

Weźmy pod uwagę parę sprzężonych harmonicznych funkcyj (u_1, v_1) rodzaju pierwszego i przyjmijmy, że przy pewnych obranych stałych *a, b, c* może zachodzić związek:

$$au_1+bv_1=c. \tag{3}$$

Z niego dostajemy:

$$a\frac{\partial u_1}{\partial x}+b\frac{\partial v_1}{\partial x}=0, \quad a\frac{\partial u_1}{\partial y}+b\frac{\partial v_1}{\partial y}=0, \quad \text{a stąd:}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial y}=0.$$

To jednak jest niemożliwe, bo pochodne funkcyj u_1, v_1 związane są zawsze relacyami:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Związek (3) jest więc niedopuszczalny, (chyba, że $a=b=c$). Weźmy inną funkcyę harmoniczną u_2 znowu rodzaju pierwszego, ale taką, aby się nie wyrażała formą Au_1+Bv_1+C. Doszukajmy do niej funkcyi sprzężonej v_2 i przypuśćmy, że między funkcyami u_1, v_1, u_2, v_2 może istnieć związek:

(4) $$au_1+bv_1+\alpha u_2+\beta v_2=c',$$

gdzie spółczynniki i wolny wyraz c' nie są zerami. Lewa strona w (4) jest pierwszorzędną częścią funkcyi:

$$V=(a-bi)(u_1+v_1 i)+(\alpha-\beta i)(u_2-v_2 i),$$

a drugorzędna część tej funkcyi ma postać:

(5) $$-bu_1+av_1-\beta u_2-\alpha v_2,$$

a ta — w przypuszczeniu, że związek (4) istnieje — musiałaby także być stałą (bo do funkcyi, która $=const.$, może należeć tylko funkcya sprzężona, która znowu $=const.$).

Z (4) i (5) dostajemy:

(6) $$(a\alpha-b\beta)u_1+(b\alpha+a\beta)v_1+(\alpha^2+\beta^2)u_2=const.,$$

tu $\alpha=\beta=0$ przyjąć nie można, bo wtedy (5) daje relacyę:

$$-bu_1+av_1=const,$$

która, jak już dowiedliśmy, jest niedopuszczalną. Gdy zaś $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, to (6) wskazuje, że $u_2=Au_1+Bv_1+C$, a to znowu już samym wyborem u_2 wykluczono. W ten sposób możemy iść dalej, aż wreszcie dojdziemy do ϱ par:

$$(u_1,v_1),\ (u_2,v_2),\ \ldots,\ (u_\varrho,v_\varrho),$$

sprzężonych funkcyj rodzaju pierwszego, a w nich zawarte funkcye w liczbie 2ϱ będą od siebie niezależne. Przez takie funkcye można będzie — jak w tw. I. art. poprzedz. — wyrażać każdą najdowolniejszą harmoniczną funkcyę rodzaju pierwszego. [Picard *Traite d'Analyse*, T. 2., str. 475].

ROZDZIAŁ XXI.

Zastosowania funkcyj harmonicznych.

166. Własności peryodów funkcyj (urojonego argumentu) rodzajów: 1go, 2go i 3go. Niech P, Q będą dwiema funkcyami harmonicznemi rodzaju pierwszego na danej powierzchni Riemanna $\mathfrak{R}$

rzędu ϱ. Poprowadźmy w niej kołowe przekroje K_α, K'_α i przekroje $q_1, q_2, ..., q_{\varrho-1}$ [art. 163.], to brzegi tych wszystkich przekrojów dają jedno zamknięte pasmo:

$$(1) \qquad (q_1+q'_1+...+q_{\varrho-1}+q'_{\varrho-1}+\lambda+\mu)=(\varkappa) \quad \text{[l. c.]},$$

a wskutek niego powierzchnia $\mathfrak{R}$ przeszła na powierzchnię $\mathfrak{R}_\varkappa$ jednokrotnie już zwartą. Zauważmy całkę podwójną:

$$(2) \qquad J=\underbrace{\int\int}_{\mathfrak{R}_\varkappa}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

sumującą swoje elementa w całem wnętrzu powierzchni $\mathfrak{R}_\varkappa$.

Stosując tu całkowanie przez części i uwagi podane w art. 111., dostajemy:

$$J=\int_\varkappa P\frac{\partial Q}{dy}dy-\int\int P\frac{\partial^2 Q}{dx\,dy}dx\,dy+$$

$$+\int_\varkappa P\frac{\partial Q}{dx}dx-\int\int P\frac{\partial^2 Q}{dx\,dy}dx\,dy=\int_\varkappa P\left(\frac{\partial Q}{dx}dx+\frac{\partial Q}{dy}dy\right),$$

a więc:

$$(3) \qquad J=\int_\varkappa PdQ.$$

Na obydwu brzegach każdego przekroju q_α mamy te same wartości P, a że przebiegając pasmo $(\varkappa)$ przebiegamy jeden brzeg każdego z tych przekrojów wprost w przeciwnym kierunku jak brzeg drugi, więc wszystkie całki:

$$\int_{q_\alpha+q'_\alpha} PdQ=0, \quad \alpha=1,2,...,\varrho-1.$$

Przejdźmy do tych części całki (2), które obliczać trzeba po brzegach λ_α, λ'_α koła K_α. Załóżmy, że P ma peryody A_α, A'_α, a Q ma peryody B_α, B'_α tak, że na kole K_α mamy:

$$(4) \qquad P^+=P^-+A_\alpha, \quad Q^+=Q^-+B_\alpha,$$

a na kole K'_α:

$$(5) \qquad P^+=P^-+A'_\alpha, \quad Q^+=Q^-+B'_\alpha,$$

i przyjmijmy, że pasmo $(\varkappa)$ tak przebiegamy, że po każdym brzegu dodatnim λ'_α poruszamy się w dodatnim kierunku. Temsamem po odjemnym brzegu λ_α kroczymy w kierunku odjemnym. Z tych założeń i za uwzględnieniem równań (4) i (5) dostajemy:

$$(6) \qquad \int\limits_{\lambda_\alpha+\lambda'_\alpha} PdQ = \int\limits_{\lambda'_\alpha} (P^- + A_\alpha)\,dQ - \int\limits_{\lambda_\alpha} P^- dQ,$$

a tu obie całki po prawej stronie obliczamy już w dodatnim kierunku po obydwu brzegach λ_α, λ'_α. Po uproszczeniach mamy z (6):

$$(7) \qquad \int\limits_{\lambda_\alpha+\lambda_\alpha'} PdQ = A_\alpha \int\limits_{\lambda_\alpha} dQ.$$

Niech koła K_α, K'_α przecinają się w punkcie r. Gdy od punktu r poczynając przebiegamy koło K_α w dodatnim kierunku, to opuszczamy w punkcie r brzeg odjemny μ_α koła K'_α, a potem — po całkowitem okrążeniu po K'_α — wracamy do punktu r, do brzegu dodatniego μ'_α koła K'_α [por. n. p. fig. 71., str. 463.]. Wskutek tego będzie:

$$\int\limits_{\lambda_\alpha} dQ = Q^+ - Q^- \text{ na } K'_\alpha = Q^{-1} + B'_\alpha - Q^- = +B'_\alpha;$$

całka (7) da więc wartość $A_\alpha . B'_\alpha$, a suma wszystkich części całki (3), odnoszących się do brzegów kół K_α, będzie $=\Sigma A_\alpha B'_\alpha$. Przechodząc do całkowań po brzegach μ_α, μ'_α kół K'_α, zauważymy przedewszystkiem, że poruszając się na $(\varkappa)$ w ten sposób, że brzegi λ'_α przebiegamy dodatnio, przebieżemy, schodząc potem na brzegi kół K'_α, właśnie μ_α dodatnio, a μ'_α odjemnie.

Po zastosowaniu dalej tych samych rozumowań, co wyżej, dojdziemy do wniosku, że te częci całki (3), które się odnoszą do brzegów kół K'_α, dadzą $-\sum\limits_\alpha A'_\alpha B_\alpha$. W rezultacie mieć więc będziemy:

$$(A) \qquad \int\!\!\int \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_\alpha (A_\alpha B'_\alpha - A'_\alpha B_\alpha).$$

To równanie jest — jak zobaczymy — wielkiej doniosłości.

I⁰) Niech P, Q będą harmoniczne sprzężone funkcye rodzaju pierwszego. $P+Qi$ jest wtedy funkcyą U_1 pierwszego rodzaju urojonego argumentu z, a posiada peryody:

$$2\omega_\alpha = A_\alpha + B_\alpha i, \quad 2\omega'_\alpha = A'_\alpha + B'_\alpha i.$$

Między P i Q zachodzą związki:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

a wskutek tego relacya (A) przechodzi na:

$$\int\!\!\int \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = \sum_\alpha [A_\alpha B'_\alpha - A'_\alpha B_\alpha].$$

*

Tu lewa strona jest zawsze dodatnia, a zerem może być tylko wtedy, gdy P, a więc i Q są stałe. A więc i prawa strona jest zcwsze dodatnia, To znaczy:

I. *Pierwszorzędne i drugorzędne części peryodów każdej funkcyi pierwszego rodzaju, a urojonego argumentu z, spełniają warunek:*

(8) $$\sum_{\alpha}[A_\alpha B'_\alpha - A'_\alpha B_\alpha] > 0.$$

Gdybyśmy przyjęli, że wszystkie $2\omega_\alpha=0$, to wtedy wszystkie A_α, B_α musiałyby być zerami. Nierówność (8) jużby się nie spełniła, a że to niemożliwe, więc mamy twierdzenie:

II. *Funkcya U_1 nie może mieć wszystkich peryodów $2\omega_\alpha$ na kołach K_α — (lub peryodów $2\omega'_\alpha$ na K'_α) — o wartości zero.*

Z tej samej przyczyny dochodzimy do wniosku:

III. *Wszystkie peryody $2\omega_\alpha$, $2\omega'_\alpha$ funkcyi U_1 nie mogą być równocześnie albo rzeczywiste, albo czysto urojone.*

II^0) Samo przez się rozumie się, że w całce J można P i Q pojmować jako dwie różne funkcye pierwszego rodzaju argumentu urojonego z, a nazywając wtedy:

$$A_\alpha=2\omega_\alpha,\quad A'_\alpha=2\omega'_\alpha,\quad B_\alpha=2\overline{\omega}_\alpha,\quad B'_\alpha=2\overline{\omega}'_\alpha$$

dojść do formy (A), która się tu teraz tak przedstawi:

(9) $$\iint\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=4\sum_{\alpha}(\omega_\alpha\overline{\omega}'_\alpha-\omega'_\alpha\overline{\omega}_\alpha).$$

Lecz tu w każdym punkcie powierzchni $\mathfrak{R}$ mamy:

$$i.\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad i\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Wskutek tego w (9) mamy po lewej stronie zero, a to znaczy:

IV. *Między peryodami $(2\omega_\alpha, 2\omega'_\alpha)$, $(2\overline{\omega}_\alpha, 2\overline{\omega}'_\alpha)$ dwóch różnych funkcyj P, Q pierwszego rodzaju, urojonego argumentu z, zachodzi zawsze związek:*

(10) $$\sum_{\alpha}(\omega_\alpha\overline{\omega}'_\alpha-\omega'_\alpha\overline{\omega}_\alpha)=0.$$

III^0) Niech teraz Q będzie funkcyą pierwszego rodzaju urojonego argumentu z, a P takąż funkcyą rodzaju drugiego z biegunem c. Q niech posiada peryody $2\omega_\alpha$, $2\omega'_\alpha$, a P peryody $2\eta_\alpha$, $2\eta'_\alpha$. Z dowolnego punktu q brzegu λ'_α poprowadźmy do punktu c przekrój l, a powierzchnię $\mathfrak{R}_\varkappa$, opatrzoną już tym przekrojem nazwijmy $\mathfrak{R}_{\varkappa,l}$. Brzegi przekroju l nazwijmy: l', l''. Przechodząc pasmo $(\varkappa)$, trzeba teraz z punktu q podążyć po l do c, a potem po l' wrócić znowu do q, aby dalej prowadzić posuwanie się po paśmie $(\varkappa)$. Przez to równocześnie okrążamy punkt c w dodatnim kierunku.

W każdym punkcie wewnątrz $\mathfrak{R}_{\varkappa,l}$ mamy:

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}=0,$$

a więc tu będzie całka $J=0$, a wskutek tego uwzględniając (3), mamy:

$$\int\limits_{\varkappa+l'+l''} PdQ=\int\limits_{\varkappa} PdQ+\int\limits_{l'+l''} PdQ=0. \tag{11}$$

Całka o drodze $\varkappa$ daje tu $4\Sigma(\omega_\alpha\eta'_\alpha-\omega'_\alpha\eta_\alpha)$.

Aby drugą całkę obliczyć, zauważmy, że w otoczeniu punktu c mają Q, P takie rozwinięcia:

$$Q=C_0+C_1(z-c)+C_2(z-c)^2+\ldots,\quad P=\frac{1}{z-c}+\ldots$$

Stąd $P.dQ=\dfrac{C_1dz}{z-c}+\mathfrak{P}(z-c)\,dz$, a całka $\displaystyle\int\limits_{l+l'} PdQ_1=C_1.2\pi i.$

Wracając do (11), mieć będziemy:

$$4\Sigma(\eta_\alpha\omega'-\eta'_\alpha\omega_\alpha)+2\pi i\,C_1=0,\quad \text{czyli:}$$

$$\Sigma(\eta_\alpha\omega'-\eta'_\alpha\omega_\alpha)=-\frac{C_1\pi i}{2},\quad \text{gdzie } C_1=\left(\frac{dQ}{dz}\right)_c. \tag{12}$$

IV⁰) Niech teraz P będzia funkcyą trzeciego rodzaju urojonego argumentu z, a Q funkcyą rodzaju pierwszego. P niech posiada logarytmiczne punkty c_1, c_2 i peryody $2w_\alpha$, $2w'_\alpha$, a Q niech ma peryody $2\omega_\alpha$, $2\omega'_\alpha$.

W otoczeniach c_1, c_2 mamy:

$$P=log(z-c_1)+\mathfrak{P}_1(z-c_1);\quad P=-log(z-c_2)+\mathfrak{P}_2(z-c_2).$$

Gdy znowu z dowolnego punktu q brzegu λ'_α poprowadzimy przekrój: l_1 do c_1 i przekrój l_2 do c_2, a powierzchnię z pasmem $\varkappa$ i przekrojami l_1, l_2 nazwiemy $\mathfrak{R}_{\varkappa,l_1,l_2}$, to w takiej powierzchni, w każdym jej punkcie mamy:

$$\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,dy=0,$$

a z tego wynika, że:

$$\int\limits_{\varkappa} P.dQ+\int\limits_{l_1+l_2} PdQ=0.$$

Pierwsza z tych całek ma — jak w dwóch poprzedzających wypadkach — wartość $4\Sigma(w_\alpha\omega'_\alpha-w'_\alpha\omega_\alpha)$. Co się tyczy drugiej całki to przekrój l_1 o brzegach l_1, l'_1 (fig. 97.) uważać trzeba za zamkniętą krzywą, po której okrążamy punkt c_1 w kierunku dodatnim. Gdy więc na brzegu l_1 jest $log(z-c_1)=L_1$, to na brzegu l'_1 jest $log(z-c_1)=L_1+2\pi i$. Z przekroju l_1 dostaniemy więc:

$$\int\limits_{l_1+l'_1} PdQ = \int\limits_{q}^{c_1}[L_1+...]dQ+\int\limits_{c_1}^{q}[L_1+2\pi i+...]dQ=$$

$$=\int\limits_{q}^{c_1}[L_1+...]dQ-\int\limits_{q}^{c_1}[L_1+2\pi i+...]dQ=$$

$$=-2\pi i\int\limits_{q}^{c_1}dQ=-2\pi i[Q(c_1)-Q(q)].$$

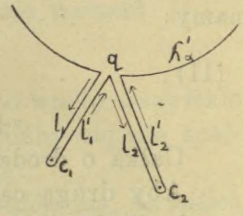


Fig. 97.

Analogicznie na przekroju l_2 dostaniemy:

$$\int\limits_{l_2+l'_2} P.dQ=-2\pi i[Q(c_2)-Q(q)].$$

Mieć więc będziemy ostatecznie:

(13) $$\Sigma(w_\alpha\omega'_\alpha-w'_\alpha\omega_\alpha)=\frac{\pi i}{2}[Q(c_1)-Q(c_2)],$$

a całka:

(14) $$\int\limits_{l_1+l_2} PdQ=-2\pi i\int\limits_{c_1}^{c_2}dQ(z).$$

167. Wyznaczenie całek Abla rodzajów 1^{go}, 2^{go} i 3^{go}. Całki normalne. Wyjdźmy teraz z równania algebraicznego $f(z,\eta)=0$ rodzaju ϱ, łącząc z niem powierzchnię $\Re_f$, dającą wyobrażenie o przebiegu funkcyi η, i utwórzmy ϱ całek pierwszego rodzaju: $J_1, J_2, ..., J_\varrho$. Wiadomo, że wtedy suma:

$$c+c_1J_1+c_2J_2+...+c_\varrho J_\varrho=J$$

z najdowolniejszymi spółczynnikami:

(1) $$c_\beta=g_\beta+h_\beta i,\quad c=g+hi$$

jest znowu całką pierwszego rodzaju (a nigdy do stałej ilości zredukować się nie może — art. 83.). Połóżmy:

(2) $$J_\beta=u_\beta+v_\beta i,$$

i przyjmijmy, że ta całka ma peryody:

(3) $$2\omega_{\alpha\beta}=A_{\alpha\beta}+B_{\alpha\beta}i,\quad 2\omega'_{\alpha\beta}=A'_{\alpha\beta}+B'_{\alpha\beta}i,$$
$$\alpha=1,2,...,\rho,\quad \beta=1,2,...,\rho.$$

Uwzględniając oznaczenia (1), (2), dostajemy:

$$J = \sum_\beta (g + g_\beta u_\beta - h_\beta v_\beta) + i\sum (h + g_\beta v_\beta + h_\beta u_\beta).$$

Każda z sum tu wchodzących jest funkcyą harmoniczną rodzaju pierwszego, a pierwsza z nich posiada peryody:

$$\sum_\beta (g_\beta A_{\alpha\beta} - h_\beta B_{\alpha\beta}) \text{ na } K_\alpha, \quad \sum_\beta (g_\beta A'_{\alpha\beta} - h_\beta B'_{\alpha\beta}) \text{ na } K'_\alpha,$$

które są pierwszorzędnemi częściami peryodów całki J.

Spółczynniki g_β, h_β można tak oznaczyć, aby te peryody miały dowolnie dane wartości. Z tych uwag wynika:

I. *Całka pierwszego rodzaju jest w zupełności wyznaczoną, gdy damy jej wartość na dowolnem miejscu powierzchni* $\mathfrak{R}_f$ *i pierwszorzędne części jej peryodów na* K_α, K'_α.

W szczególności możemy utworzyć takie całki J_β, $\beta=1, 2, \ldots, \varrho$, że J_β mieć będzie peryody:

(4) $$2\omega_{\alpha\beta}=0, \text{ gdy } \alpha \gtrless \beta, \text{ a } 2\omega_{\alpha\alpha}=\pi i.$$

Takie całki nazywamy normalnemi rodzaju pierwszego. Są one od siebie liniowo niezależne, a przez nie będzie można liniowo (za dodaniem jeszcze stałego dodajnika) wyrazić każdą najdowolniejszą całkę rodzaju pierwszego.

Oczywiście, że peryody każdej całki J rodzaju pierwszego, posiadać będą te wszystkie własności, jakie posiadały funkcye U_1 rodzaju pierwszego [art. poprzedz.]. Z tych własności powtórzymy tu jedną, a mianowicie:

II. *Wszystkie peryody* $2\omega_\alpha$ *lub* $2\omega'_\alpha$ *dowolnej całki* J *nie mogą być zerami.*

Między funkcyami U_1 będzie też można znaleść system ϱ funkcyj o peryodach (4), a potem przez nie wyrazić każdą najdowolniejszą funkcyę U_1.

Z systemu ϱ całek normalnych wybierzmy dwie J_β, J_γ. Ich peryody na kołach K'_α nazwijmy $2\omega'_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\gamma}$, $\alpha=1, 2, 3, \ldots, \varrho$.

Całka J_β ma tylko na kole K_β peryod różny od zera, a mianowicie $2\omega_{\beta\beta}=\pi i$. Podobnie z peryodów całki J_γ mamy tylko jeden peryod $2\omega_{\gamma\gamma}=\pi i$, różny od zera. Gdy więc do tych całek zastosujemy relacyę (10), art. poprzedz., mieć będziemy:

$$2\pi i[\omega'_{\beta\gamma} - \omega'_{\gamma\beta}]=0, \text{ czyli:}$$

(5) $$\omega'_{\beta\gamma}=\omega'_{\gamma\beta}, \quad \beta \gtreqless \gamma = 1, 2, \ldots, \varrho,$$

t. zn.: β^{ty} *peryod w całce* γ^{tej} *jest taki sam, jak* γ^{ty} *peryod w całce* β^{tej}.

Wyprowadzimy jeszcze inną własność peryodów, odnoszących się do kół K'_α w systemie całek normalnych.

W sumę $J = c + c_1 J_1 + \ldots + c_\varrho J_\varrho$ niech wchodzą już same normalne całki J_β, a c_β niech będą wszystkie rzeczywistemi liczbami. Gdy J_β ma na kole K'_α peryod $A'_{\alpha\beta} + B'_{\alpha\beta} i$, to J na tem kole ma peryod: $\sum_\beta c_\beta (A'_{\alpha\beta} + B'_{\alpha\beta} i)$. Na kołach K_α ma zaś J peryody $c_\alpha \pi i$. Połóżmy $J = P + Qi$, to harmoniczna funkcya P ma na wszystkich kołach K_α peryody $A_\alpha = 0$, a na kołach K'_α peryody $A'_\alpha = \sum_\beta c_\beta A'_{\alpha\beta}$. Funkcya Q posiada na kołach K_α peryody $B_\alpha = c_\alpha \pi$, a na kołach K'_α peryody $B'_\alpha = \sum_\beta c_\beta A'_{\alpha\beta}$. Zastosujmyż tu twierdzenie I. z art. poprzedz., to dostaniemy:

$$-\sum_\alpha c_\alpha \pi \sum_\beta c_\beta . A'_{\alpha\beta} > 0, \text{ czyli: } \sum_\alpha c_\alpha \sum_\beta c_\beta A'_{\alpha\beta} < 0.$$

Lecz, że $A'_{\alpha\beta} = A'_{\beta\alpha}$ wskutek (5), więc ostatecznie mamy:

$$\sum_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta . A'_{\alpha\beta} < 0 \tag{6}$$

przy wszelkich możliwych rzeczywistych wartościach c_α, (c_β). Ta suma może być zerem tylko w tym razie, gdy wszystkie $c_\alpha = 0$.

Niech W będzie pewną oznaczoną całką rodzaju drugiego z biegunem c, a z peryodami $2\eta_\alpha = C_\alpha + D_\alpha i$, $2\eta'_\alpha = C'_\alpha + D'_\alpha i$. Gdy J jest dowolną całką rodzaju pierwszego, to suma:

$$\overline{W} = C + W + J, \tag{7}$$

w której C jest dowolną stałą, jest znowu całką Abla i to nie inną, jak całką rodzaju drugiego z biegunem c, a jest zarazem funkcyą drugiego rodzaju urojonego argumentu z w powierzchni $\mathfrak{R}_f$. Gdy J ma peryody:

$$2\omega_\alpha = A_\alpha + B_\alpha i, \quad 2\omega'_\alpha = A'_\alpha + B'_\alpha i,$$

to $\overline{W}$ posiada peryody:

$$2\overline{\eta}_\alpha = (C_\alpha + A_\alpha) + (B_\alpha + D_\alpha) i, \quad 2\overline{\eta}'_\alpha = (C'_\alpha + A'_\alpha) + (B'_\alpha + D'_\alpha) i.$$

Lecz A_α, A'_α można — tworząc całkę J — wybrać całkiem dowolnie, a stąd wynika:

III. *Całka rodzaju drugiego jest w zupełności wyznaczona, gdy damy jej biegun, jej wartość na pewnem miejscu powierzchni $\mathfrak{R}_f$ i pierwszorzędne części jej peryodów na kołach K_α, K'_α.*

Niech w (7) będzie $J = c_1 J_1 + \ldots + c_\varrho J_\varrho$, gdzie J_β są już normalnemi całkami rodzaju pierwszego. Peryody całki $\overline{W}$ na kołach K_α dadzą się wtedy przedstawić w ten sposób:

$$2\overline{\eta}_\alpha + 2c_\alpha \pi i, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \varrho.$$

Gdy więc spółczynniki c_α wybierzemy tak, aby $c_\alpha = -\overline{\eta}_\alpha / \pi i$, to całka $\overline{W}$ posiadać będzie na wszystkich kołach K_α peryody $= 0$, co — jak widzieliśmy w całkach rodzaju pierwszego — nigdy zajść nie może. Takie całki rodzaju drugiego nazywamy normalnemi.

Peryody $2\overline{\eta}'_\alpha$ takiej normalnej całki oblicza się stosując relacyę (12) art. poprzedz. do peryodów całki $\overline{W}$ i α^{tej} całki normalnej J_α rodzaju pierwszego. Ta relacya daje tu:

$$(8) \qquad 2\overline{\eta}'_\alpha = 2\left(\frac{\partial J_\alpha}{\partial z}\right)_c, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \varrho.$$

Przyjmijmy, że mamy dwie całki normalne W, $\overline{W}$ o tym samym biegunie c. Ich różnica ma być całką rodzaju pierwszego bez peryodów na kołach K_α. Taka całka jednak redukuje się do pewnej stałej C. Mamy więc $\overline{W} = W + C$, a stąd wynika:

IV. *Normalną całkę rodzaju drugiego wyznaczamy, dając jej pewną wartość na dowolnem miejscu powierzchni* $\mathfrak{R}_f$ *i jej biegun na tej powierzchni.*

Niech $V_{c_1c_2}$ będzie pewną oznaczoną całką rodzaju trzeciego o punktach logarytmicznych c_1, c_2. Gdy utworzymy sumę:

$$\overline{V}_{c_1c_2} = V_{c_1c_2} + J + C,$$

w której J jest dowolną całką rodzaju pierwszego, a C ilością stałą, to ta suma jest całką, i to znowu całką rodzaju trzeciego z punktami logarytmicznymi w c_1, c_2 Rozumując tu zupełnie tak samo, jak o całkach rodzaju drugiego, dojdziemy do wniosku:

V. *Całkę rodzaju trzeciego wyznacza się, dając jej punkta logarytmiczne, jej wartość w pewnym punkcie i wybierając dowolnie pierwszorzędne części jej peryodów na kołach* K_α.

I tu dojdziemy do całek normalnych, charakteryzujących się tem, że ich wszystkie peryody $2w_\alpha$ na kołach K_α są zerami. O tych całkach — jak w poprzednim wypadku — udowodnimy:

VI. *Całka normalna rodzaju trzeciego jest wyznaczona, gdy znamy jej punkty logarytmiczne* c_1, c_2 *i jeszcze jej wartość w dowolnym punkcie powierzchni* $\mathfrak{R}_f$ *poza* c_1, c_2.

Aby peryody $2w'_\alpha$ normalnej całki $V_{c_1c_2}$ obliczyć, zestawmy tę całkę z całką normalną J_α rodzaju pierwszego i zastosujmy do ich peryodów związek (13), art. poprzedz. Mamy tu wszystkie $w_\alpha = 0$, $\omega_\beta = 0$, $\beta \gtreqless \alpha$, $\omega_\alpha = \frac{\pi i}{2}$, a więc z wspomnianego związku wynika:

$$(9) \qquad 2w'_\alpha = 2\,[J_\alpha(c_2) - J_\alpha(c_1)].$$

Co się tyczy funkcyj — [a nie całek] — rodzaju 2^{go} i 3^{go}, to do nich oczywiście trzeba odnieść wszystkie własności, jakie w swych peryodach posiadają całki. Między funkcyami rodzajów 2^{go}, 3^{go} będą istnieć także systemy po ϱ funkcyj normalnych na powierzchni $\mathfrak{R}$.

Gdy zauważymy dwie całki rodzaju 3^{go}: jedną $V_{c_1 c_2}$ z punktami logarytmicznymi c_1, c_2, a z peryodami $2w_\alpha$, $2w'_\alpha$, drugą $V_{d_1 d_2}$ z punktami logarytmicznymi d_1, d_2, a z peryodami $2\overline{w}_\alpha$, $2\overline{w}'_\alpha$, to — jak na początku art. poprzedz. — wywnioskujemy, że:

$$S=\int\limits_{\varkappa} V_{c_1 c_2}.dV_{d_1 d_2}=4\Sigma(w_\alpha\overline{w}'_\alpha-\overline{w}_\alpha w'_\alpha). \tag{10}$$

Lecz S — jeżeli całki nie są normalne — nie jest zerem, bo wewnątrz powierzchni $\mathfrak{R}_{f,\varkappa}$ posiada punkty osobliwe, a więc **nie w każdym** punkcie wewnątrz $\mathfrak{R}_{f,\varkappa}$ zachodzi związek:

$$\frac{\partial V_{c_1 c_2}}{\partial x}\cdot\frac{\partial V_{d_1 d_2}}{\partial y}-\frac{\partial V_{d_1 d_2}}{\partial x}\cdot\frac{\partial V_{c_1 c_2}}{\partial y}=0. \tag{11}$$

Gdy przeciwnie $V_{c_1 c_2}$, $V_{d_1 d_2}$ są już całkami normalnemi, to $w_\alpha=\overline{w}_\alpha=0$, a więc $S=0$, mimo że związek (11) jeszcze się nie spełnia w każdym punkcie powierzchni $\mathfrak{R}_{f,\varkappa}$.

Zatrzymując założenie, że całki są już normalnemi, poprowadźmy z punktu q brzegu λ'_α przekroje l_1, l_2 do punktów c_1, c_2 i przekroje l_3, l_4 do punktów d_1, d_2.

W powierzchni $\mathfrak{R}'_{f,\varkappa}$ z pasmem $(\varkappa)$ i z tymi przekrojami już się związek (11) wszędzie spełnia, a wskutek tego mamy:

$$\int\limits_{(\varkappa+l_1+l_2+l_3+l_4)} V_{c_1 c_2}.dV_{d_1 d_2}=0.$$

Lecz całka obliczona po pasmie $(\varkappa)$ jest już zerem. Pozostaje więc:

$$\int\limits_{l_1+l_2} V_{c_1 c_2}.dV_{d_1 d_2}+\int\limits_{l_3+l_4} V_{c_1 c_2}.dV_{d_1 d_2}=0. \tag{12}$$

Pierwsza z tych całek da wynik zupełnie analogiczny z (14), art. poprzedz., a więc będzie $=-2\pi i\int\limits_{c_1}^{c_2} dV_{d_1 d_2}(z)$.

Co się tyczy drugiej całki, to ona po scałkowaniu jej przez części, będzie $=$

$$[V_{c_1 c_2}.V_{d_1 d_2}]_q^q-\int\limits_{l_3+l_4} V_{d_1 d_2}.dV_{c_1 c_2}. \tag{13}$$

Podstawienie $(\,]_q^q)$ trzeba tu tak rozumieć, że q w dolnej granicy jest tym punktem q, w którym opuszczamy brzeg λ'_α, a q w górnej granicy jest tym punktem q, w którym — po przebieżeniu brzegów przekroju l_3+l_4 — wracamy znowu do λ'_α. W obydwu punktach q ma $V_{c_1c_2}$ tę samą wartość, a że:

$$[V_{d_1d_2}]_q^q=[log(q-d_1)+2\pi i-log(q-d_2)-2\pi i+...]$$
$$-[log(q-d_1)-log(q-d_2)+...]=0,$$

więc w (13) wyraz pierwszy odpada; pozostała zaś tam całka:

$$-\int\limits_{l_3+l_4} V_{d_1d_2}.dV_{c_1c_2}=+2\pi i\int_{d_1}^{d_2} dV_{c_1c_2}.$$

Mając te wyniki i wstawiając je w (12), dostajemy związek:

$$(14)\qquad \int_{c_1}^{c_2} dV_{d_1d_2}=\int_{d_1}^{d_2} dV_{c_1c_2},$$

który jest wyrazem teoremu, znanego powszechnie pod nazwą „teoremu o przemienianiu argumentu z parametrem".

168. Tworzenie funkcyi wymiernej na danej powierzchni Riemanna za pomocą całek Abla rodzaju 2go. Zauważmy k całek normalnych: W_1, W_2, ..., W_k drugiego rodzaju, posiadających odpowiednio bieguny: $c_1, c_2, ..., c_k$, i utwórzmy wyrażenie:

$$(1)\qquad F=A+A_1W_1+A_2W_2+...+A_kW_k.$$

F jest więc funkcyą, która w ogólności ma bieguny $c_1, c_2, ..., c$ i posiada peryody:

$$2P_\alpha=A_1 2\eta'_{1\alpha}+A_2 2\eta'_{2\alpha}+...+A_k 2\eta'_{k\alpha}\neq 0$$

na kołach K'_α. Uwzględnijmy tu formy (8) — art. poprzedz. — to mieć będziemy:

$$P_\alpha=A_1\left(\frac{dJ_\alpha}{dz}\right)_{c_1}+A_2\left(\frac{\partial J_\alpha}{\partial z}\right)_{c_2}+...+A_k\left(\frac{\partial J_\alpha}{\partial z}\right)_{c_k},$$
$$\alpha=1,2,...,\rho,$$

gdzie $\left(\frac{dJ_\alpha}{\partial z}\right)_{c_\nu}=H_\alpha(c_\nu,\eta_\nu)$ są funkcyami H_α Weierstrassa. Połóżmy:

$$P_\alpha=A_1H_\alpha(c_1\eta_1)+A_2H_\alpha(c_2\eta_2)+...+A_kH_\alpha(c_k\eta_k)=0,$$
$$\alpha=1,2,...,\rho.$$

Zakładając $\varkappa>\varrho$, gdzie ϱ jest rodzajem powierzchni $\mathfrak{R}_f$, możemy zawsze $A_1, A_2, ..., A_k$ tak wyznaczyć, że wszystkie P_α będą zerami. Ze stałych $A_1, A_2, ..., A_k$ pozostaje dowolnych $(k-\varrho)$. Funkcya F będzie więc na $\mathfrak{R}_f$ funkcyą jednoznaczną z k jednokrotnymi biegunami, a pozbawiona peryodów tak na kołach K_α, jak na kołach K'_α. Jestto więc wymierna funkcya pary (z, η) stopnia k^{go}. Z tego wnosimy, że całki normalne rodzaju drugiego mogą posłużyć do utworzenia funkcyi wymiernej pary (z, η) o danych naprzód jednokrotnych biegunach.

Uważajmy teraz $W_1, W_2, \ldots, W_k$ za funkcye drugiego rodzaju argumentu urojonego z na dowolnie danej powierzchni $\mathfrak{R}$ rodzaju ϱ, to tworząc z nich znowu wyrażenie F, dostajemy w F funkcyę urojonego argumentu o k biegunach $c_1, c_2, \ldots, c_k$, zresztą wszędzie skończoną, oznaczoną i ciągłą. Po za punktami rozgałęzienia powierzchni $\mathfrak{R}$ rozwija się F w otoczeniu dowolnego punktu na każdej gałęzi na zwykły szereg potęgowy, a rozwinięcia z ułamkowymi wykładnikami przypaść mogą jedynie tylko w punkty rozgałęzienia, których oczywiście jest tylko skończona ilość. Funkcya F ma zatem charakter funkcyi algebraicznej i to monogenicznej, bo już w samej powierzchni $\mathfrak{R}$ można się z każdej jej gałęzi na każdą inną dostać po stosownych drogach. Przyjmijmyż, że $\mathfrak{R}$ ma m gałęzi, to funkcyę F określi równanie algebraiczne nieprzywiedlne:

$$f(F, z) = 0$$

m^{go} stopnia w F. Powierzchnia $\mathfrak{R}$ wyobraża już teraz przebieg funkcyi F i staje się powierzchnią $\mathfrak{R}_F$. Równanie $f=0$ należy do całej klasy [art. 69.] równań tego samego rodzaju ϱ, a wszystkie miejsca dwóch którychbądź obrazów algebraicznych jednej klasy odpowiadają sobie nawzajem jednoznacznie. Stąd wynika:

I. *Danej dowolnie powierzchni* $\mathfrak{R}$ *odpowiada cała klasa równań algebraicznych (tego samego rodzaju).*

Gdy powierzchnię $\mathfrak{R}$ uznamy za $\mathfrak{R}_f$ i utworzymy — wychodząc z równania $f=0$ — całki rodzaju 1^{go}, 2^{go} i 3^{go}, to, po uwzględnieniu warunków, jakimi takie całki dają się w zupełności określić, dojdziemy do wniosku:

II. *Funkcye rodzajów: 1., 2., 3. urojonego argumentu* z, *na dowolnej powierzchni* $\mathfrak{R}$ *rodzaju* ϱ, *są wprost całkami rodzaju* 1^{go}, 2^{go}, 3^{go}, *utworzonemi na podstawie pewnego równania* $f=0$, *które można uważać za należące do* $\mathfrak{R}$.

169. Odwracanie całki Abla rodzaju 1ᵍᵒ. Moduły. Zauważmy ogólną całkę rodzaju 1^{go}:

$$(1) \qquad u = \int_{z_0}^{z} \psi(z)dz, \quad \psi(z) = \frac{G_{n-3}(z, \eta)}{f(z, \eta)_2},$$

gdzie $f(z, \eta)=0$ jest równaniem rodzaju ϱ, $G_{n-3}=0$ równaniem dołączonej krzywej $(n-3)^{go}$ stopnia, a $f(z, \eta)_2=\frac{d}{d\eta}f(z, \eta)$.

Niech $r_1, r_2, ..., r_\varrho$ będą na powierzchni $\Re_f$ punktami, w których się odpowiednio przecinają z sobą koła (K_1, K'_1), (K_2, K'_2), ..., (K_ϱ, K'_ϱ), dające peryody $(2\omega_1, 2\omega'_1)$, $(2\omega_2, 2\omega'_2)$, .., $(2\omega_\varrho, 2\omega'_\varrho)$.

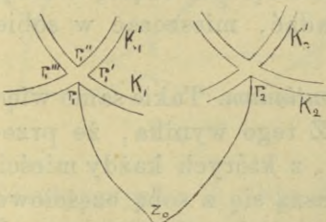


Fig. 98.

Po zamienieniu tych kół na przekroje dostaniemy z każdego z punktów r_α aż 4 punkty; r_1 da początek punktom: $(r_1, r_1', r_1'', r_1''')$ [fig. 98.], i t. d.

Przyjmijmy, że w całce (1) jest jej górna granica $z=r_1$, że droga $(z_0...r_1)$ nie przecina żadnego z kół K_α, K'_α, $\alpha=1, 2, ..., \varrho$, i że wtedy:

$$\int_{z_0}^{r_1} \psi(z)dz=u_1.$$

Gdy r_1 przebiegnie obydwa brzegi kół K_1, K'_1 [podczas czego przeszło przez punkta r_1', r_1'', r_1'''] i wróci do punktu r_1, punkt u_1 równocześnie na płaszczyźnie (u) rozpocznie ruch i opisze obwód P_1 pewnego równoległoboku R_1 (krzywolinijnego lub prostolinijnego) o wierzchołkach:

$$[u_1, u_1+2\omega_1, u_1+2\omega_1+2\omega'_1, u_1+2\omega'_1].$$

Mając to, dajmy całce (1) górną granicę $z=r_2$, przyjmując znowu, że droga $(z_0...r_2)$ nie przecina żadnego z kół K_α, K'_α, $\alpha=1, 2, ..., \varrho$. Niech wtedy:

$$\int_{z_0}^{r_2} \psi(z)dz=u_2,$$

a r_2 niech znowu przebiegnie brzegi kół K_2, K'_2 i niech wróci do punktu r_2. Punkt u_2 na płaszczyźnie u rozpocznie równocześnie ruch opisując obwód P_2 równoległoboku R_2 o wierzchołkach:

$$[u_2, u_2+2\omega_2, u_2+2\omega_2+2\omega'_2, u_2+2\omega'_2].$$

Tak samo postępujemy dalej; wychodzimy więc z punktów $r_3, r_4, ..., r_\varrho$, przebiegamy brzegi kół (K_3, K'_3), ..., (K_ϱ, K'_ϱ) i tworzymy na płaszczyźnie (u) równoległoboki $R_3, R_4, ..., R_\varrho$ o obwodach $P_3, P_4, ..., P_\varrho$. Zbiór obwodów $(P_1+P_2+...+P_\varrho)$ jest odwzorowaniem brzegów:

$$(\lambda_1+\lambda'_1+...+\lambda_\varrho+\lambda'_\varrho+\mu_1+\mu'_1+...+\mu_\varrho+\mu'_\varrho)$$

wszystkich kół $(K_\alpha+K'_\alpha)$, $\alpha=1, 2, ..., \varrho$. A gdy powierzchnię $\Re_f$ z wykonanymi w niej przekrojami wzdłuż tych kół nazwiemy $\overline{\Re}_f$, to pytanie zachodzi, jakie punkty na płaszczyźnie (u) są odwzorowaniem tej powierzchni $\mathfrak{R}_{f}$. Na to, gdy zauważymy, że u nigdy nie jest nieskończone (chyba za dodaniem nieskończonych wielokrotności peryodów), mamy odrazu odpowiedź taką: Powierzchni $\mathfrak{R}_{f}$ — punktom z tej powierzchni — odpowiada suma wnętrzy równoległoboków t. j. $\overline{Z}_1=(R_1+R_2+...+R_\varrho)$. [Zewnętrzna część, rozciągająca się poza $\overline{Z}_1$, nie może jej odpowiadać, mieszcząc w sobie punkt $u=\infty$].

Lecz powierzchnia $\mathfrak{R}_{f}$ jest zwartem *continuum*. Takie samo więc *continuum* musi się dać utworzyć i z $\overline{Z}_1$. Z tego wynika, że przedewszystkiem równoległoboki $R_1, R_2, ..., R_\varrho$, z których każdy mieści się na osobnej płaszczyźnie S_α (liściu), muszą się z sobą częściowo przykrywać. Dalej muszą być możliwe przejścia z każdego z tych równoległoboków do każdego innego. Połóżmyż $z=\varphi(u)$ i zaważmy wspólną część σ_1 wszystkich równoległoboków R_α, $\alpha=1, 2, ..., \varrho$. Gdy dowolny punkt u wyjmiemy z tej części, to według tego, do którego równoległoboku go zaliczymy, dostaniemy na funkcyę z w ogólności ϱ wartości $z_1, z_2, ..., z_\varrho$, między sobą różnych. Wartości z_α przywiązane są do punktów u, zapełniających równoległobok R_α. Obok σ_1 zauważmy obszar σ'_1 samych takich punktów u w $\overline{Z}_1$, że w nim każdy punkt u należy przynajmniej do dwóch równoległoboków R_α. Gdy z tej części wybierzemy takie punkty u, w których mamy $\frac{du}{dz}=0$, to będą-to wartości u całki (1), odnoszące się do takich z, które dają $G_{n-3}(z,\eta)=0$ poza punktami rozgałęzenia równania $f(z,\eta)=0$. Że zaś dołączona krzywa $G_{n-3}=0$ przecina krzywę $f=0$ poza punktami rozgałęzienia w $(2\varrho-2)$ punktach $p_1, p_2, ..., p_{2\varrho-2}$, więc w części σ'_1 będzie tyleż punktów u dających $\frac{du}{dz}=0$.

Z drugiej strony warunek $\frac{du}{dz}=0$ przeszkadza jednoznacznemu wyrażeniu funkcyi z przez u w otoczeniu każdego takiego punktu. Każdy taki punkt będzie więc pewnym punktem rozgałęzienia funkcyi $z=\varphi(u)$. Z tego wynika, że gdy w σ'_1 (w $\overline{Z}_1$) zrobimy przekroje $p_1p_2, p_2p_3, ..., p_{2\varrho-3}p_{2\varrho-2}$ nieprzecinające się z sobą i z tych przekrojów utworzymy linie przejścia podług natury punktów rozgałęzienia funkcyi z, zmienimy system $\overline{Z}_1$ na system jednolity Z_1, przypominający swą budową powierzchnię Riemanna o ϱ liściach. Linie przejścia umożliwiają w niej przejście z wartości z, rozpostartych na dowolnym równoległoboku R_α do wartości rozpostartych na dowolnym innym równoległoboku R_β, $\beta \gtrless \alpha$. [Gdy $\varrho=2$, to powierzchnia Z_1 będzie miała taką postać, jak ją fig. 99. przedstawia].

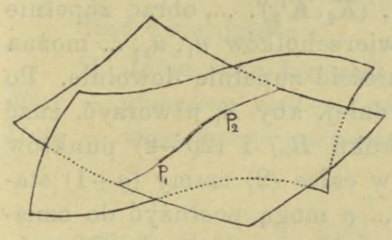


Fig. 99.

Tak utworzona zwarta już powierzchnia Z_1 przedstawia przebieg funkcyi z, zależnej od u bez uwzględnienia jeszcze jej peryodów:

$$\Sigma[2n_\alpha\,\omega_\alpha + 2n'_\alpha\,\omega'_\alpha].$$

Mając to, naznaczmy dwa przeciwległe boki w równoległoboku R_α przez b_α, b'_α, i utwórzmy dowolną liczbę zwartych powierzchni Z_2, Z_3, Z_4, ..., identycznych z Z_1. Gdy Z_2 przystawimy do Z_1 w ten sposób, że bok b_α, należący do Z_1, padnie na bok b'_α, należący do Z_2, i wzdłuż tych spadających na siebie boków spoimy Z_1 z Z_2, dostaniemy zwartą powierzchnię $(Z_1 + Z_2)$, w której już i pewne peryody funkcyi z można uwzględnić. Lecz do Z_1 można 4ϱ powierzchni Z_2, Z_3, ... przystawić podług prawidła dopieroco wyłożonego. Dalej do każdego wolnego jeszcze boku przystawionych powierzchni Z_2, Z_3, ... można znowu — trzymając się ciągle tegosamego prawidła — przystawić nowe zwarte powierzchnie Z'_1, Z'_2, ... (wszystkie identyczne z Z_1).

W ten sposób postępować możemy bez końca. Przezto utworzy się powierzchnia Riemanna $Z_{(z,u)}$ o nieskończenie wielu liściach, a o peryodycznie powtarzających się punktach rozgałęzienia p_1, p_2, ..., $p_{2\varrho-2}$. Taka powierzchnia daje już zupełne wyobrażenie o przebiegu funkcyi $\varphi(u)$ z uwzględnieniem wszelkich możliwych jej peryodów. Każdy punkt u tej powierzchni należy do nieskończenie wielu listków, funkcya $\varphi(u)$ jest więc nieskończenie wielowartościowa. Stąd twierdzenie:

I. *Odwrócenie całki Abla rodzaju 1ᵍᵒ, należącej do obrazu algebraicznego rzędu $\varrho > 1$, daje funkcyę nieskończenie wielowartościową*).*

Zauważmy ogólną całkę rodzaju pierwszego:

$$u = J = C + C_1 J_1 + C_2 J_2 + \dots + C_\varrho J_\varrho. \tag{2}$$

*) Por. co do tego: Riemann. *Ges. Werke*, str. 120—121. Casorati. *„Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelquonque de périodes"*. *Acta math.* T. 8., str. 345—359. *„Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales Abéliennes"*. *Acta math.* T. 8., str. 360—386. [Casorati zajmuje się odwróceniem dowolnej całki Abla i przychodzi do wniosku, że każde takie odwrócenie daje funkcyę nieskończenie wielowartościową. Powierzchnię Z_1 nazywa *„lieu fondamental"*].

C, C_α są tu stałe, a J_α są dowolnemi całkami rodzaju pierwszego. Na powierzchni $\mathfrak{R}_f$ można punkty $r_1, r_2, \ldots$, w których mają się przecinać z sobą koła (K_1, K'_1), (K_2, K'_2), ..., obrać zupełnie dowolnie. Z tego powodu każdy z wierzchołków $u_1, u_2, \ldots$ można na odpowiednich listkach $S_1, S_2, \ldots$ umieścić zupełnie dowolnie. Po obraniu ich w pewien sposób, trzeba dalej, aby Z_1 utworzyć, znać peryody (boki każdego z równoległoboku R_α) i $(2\varrho-2)$ punktów rozgałęzienia $u=p_1, p_2, \ldots, p_{2\varrho-2}$. Otóż w całce (2) mamy $(\varrho+1)$ stałych dowolnych. Z nich C_α, $\alpha=1, 2, \ldots, \varrho$ mogą posłużyć do oznaczenia ϱ peryodów $2\omega_\alpha$, $\alpha=1, 2, \ldots, \varrho$, według upodobania, a stała C do oznaczenia położenia jednego z punktów rozgałęzienia, n. p. punktu p_1.

Z tego wynika, że na każdym liściu S_α możemy punkt $(u_\alpha+2\omega_\alpha)$ obrać dowolnie. Bok zatem $(u_\alpha \ldots u_\alpha+2\omega_\alpha)$ jest dowolny. Boki $(u_\alpha \ldots u_\alpha+2\omega'_\alpha)$ — jest ich ϱ — nie będą już dowolne, a tak samo i punkty p_ν, $\nu=2, 3, \ldots, 2\varrho-2$ będą już zależne od p_1 i $2\omega_\alpha$, $\alpha=1, 2, \ldots, \varrho$.

Peryody $2\omega'_\alpha$ i punkty p_ν przedstawiają się jako $(3\varrho-3)$ wielkości:

(2) $$M_\varkappa(p_1, 2\omega_1, \ldots, 2\omega_\alpha)_f, \quad \varkappa=1, 2, \ldots, 3\varrho-3,$$

zależnych od p_1 i $2\omega_\alpha$. Po ich obliczeniu dostaniemy już powierzchnię Z_1 w zupełności oznaczoną i utworzoną.

Mając to, wybierzmy z klasy, do której $f=0$ należy, jeszcze jedno równanie $f'=0$, i utwórzmy powierzchnię Riemanna $\mathfrak{R}_{f'}$. Powierzchnie $\mathfrak{R}_f$, $\mathfrak{R}_{f'}$ odpowiadają sobie wzajemnie i jednoznacznie. Stąd wynika, że gdy całkę J przerobimy przez odwracalne podstawienia na całkę:

$$\bar{u}=\bar{J}=C+C_1\bar{J}_1+\cdots+C_\varrho\bar{J}_\varrho,$$

używając tych samych C, C_α, co przódy, to na odpowiadających sobie drogach zamkniętych lub niezamkniętych mamy $u=\bar{u}$, a w tych samych punktach, w których jest $\frac{du}{dz}=0$, mamy także $\frac{d\bar{u}}{dz}=0$ i naodwrót. Całka $\bar{J}$ ma więc znowu peryody $2\omega_\alpha$, $2\omega'_\alpha$; jej powierzchnia $\bar{Z}_1$ analogiczna z Z_1 będzie zarazem identyczną z Z_1; punkty $p_1, p_2, \ldots, p_{2\varrho-2}$ są w obydwu powierzchniach tesame. Uważajmyż i tu $2\omega_\alpha$, $\alpha=1, 2, \ldots, \varrho$, i punkt p_1 jako dane, to pozostałe peryody $2\omega'_\alpha$ i punkty $p_2, p_3, \ldots, p_{2\varrho-2}$ będą tu wielkościami:

$$M_\varkappa(p_1, 2\omega_1, \ldots, 2\omega_\varrho)_{f'}, \quad \varkappa=1, 2, \ldots, 3\varrho-3$$

podług tychsamych reguł utworzonemi, co wyrażenia (2) w obrazie $f=0$.

Przytem oczywiście mamy:

$$M_\varkappa(p_1, 2\omega_1, ..., 2\omega_\varrho)_f = M_\varkappa(p_1, 2\omega_1, ..., 2\omega_\varrho)_{f'}, \quad \varkappa = 1, 2, 3, .., (3\varrho - 3).$$

Stąd twierdzenie:

II. *Jedna klasa krzywych posiada* $(3\varrho-3)$ *modułów, t. j. wyrażeń, które — utworzone podług tychsamych praw dla dowolnej krzywej tej klasy — mają tesame wartości.*

* * *

170. Zastosowanie funkcyi harmonicznej do odwzorowań dwóch obszarów jednokrotnie zwartych. Wiemy już z art. 152., co rozumieć przez cząsteczkowe odwzorowanie dwóch jednokrotnie zwartych obszarów, danych na dwóch (różnych) płaszczyznach. Zajmiemy się tu teraz bliżej możliwością takiego odwzorowania, opierając się na dowodach o istnieniu funkcyj harmonicznych.

We wnętrzu pewnego obszaru A, leżącego na płaszczyźnie (z), a ograniczonego jedną linią analityczną s (złożoną z samych łuków regularnych), istnieje zawsze — jak wiemy — jedna tylko funkcya harmoniczna z danemi wartościami na s. Otóż to istnienie takiej funkcyi posłuży do udowodnienia, że obszar A można zawsze sprządz cząsteczkowo z kołem K, które leżąc na płaszczyźnie (w) ma środek w punkcie $w=0$, a promień $=1$. Przyjmijmy, że takie sprzężenie określa równanie $w=f(z)$, i że środkowi koła $w=0$ odpowiadać ma pewien punkt $z=z_0$ wewnątrz A. Wskutek tego założenia jest $f(z_0)=0$, a równanie $f(z)=0$ nie może — oprócz pierwiastka z_0 — mieć wewnątrz A i na ograniczeniu s żadnych innych pierwiastków, bo w przeciwnym razie odpowiadałoby punktowi $w=0$ więcej punktów w A, a to się sprzeciwia jednoznacznemu odwzorowaniu. Z tego wynika, że:

$$w = f(z) = (z - z_0)\, e^{H(z)},$$

gdzie $H(z)$ ma być funkcyą analityczną i jednoznaczną w całem wnętrzu A. Połóżmy:

$$z = x + yi, \quad z_0 = x_0 + y_0 i, \quad z - z_0 = re^{\varphi i},$$

a więc: $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, $\varphi = arc\,tg\,\frac{y-y_0}{x-x_0}$, i połóżmy dalej: $H = P(x,y) + Q(x,y)i$, to dostaniemy:

$$w = re^{\varphi i} \,.\, e^{P+Qi} = e^{(P+\log r)+i(Q+\varphi)}.$$

Aby ograniczenie s odpowiadało właśnie obwodowi koła, trzeba aby na wszystkich punktach z tego ograniczenia było $|w|=1$, a to się osiągnie, gdy założymy, że na ograniczeniu s mamy:

$$P + log\, r = 0, \text{ czyli } P = -log\, r.$$

Funkcya P jako część pierwszorzędna analitycznej funkcyi $H(z)$ jest harmoniczną, a ma posiadać tę własność, że w punktach z na ograniczeniu s ma dawać wartości:

$$-log\, r = -log \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Taka harmoniczna funkcya istnieje, a że:

$$Q = \int_{x_0 y_0}^{xy} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dy + \frac{\partial P}{\partial y} dx \right) + c,$$

więc istnienie funkcyi $f(z)$ mamy już dowiedzione. Połóżmy:

$$P + log\, r = U, \quad Q + \varphi = V,$$

to mamy: $w = f(z) = e^{U+Vi}$, a stałą c mieszczącą się w Q — a więc i w V — wyznaczymy, żądając, aby dla pewnego punktu $z = \zeta$ ograniczenia s (tam jest statecznie $U=0$) było: $f(\zeta) = e^{\varkappa i} = w'$, t. j. aby punktowi ζ na obwodzie s odpowiadał pewny obrany punkt w' okręgu koła K. Mamy więc twierdzenie:

I. *Dany jednokrotnie zwarty obszar A [na płaszczyźnie (z)] o obwodzie analitycznym s, można zawsze sprządz cząsteczkowo z kołem K [na płaszczyźnie (w)], o środku $w=0$ i promieniu $=1$, obierając we wnętrzu A punkt z_0, który ma odpowiadać środkowi $w=0$, a na ograniczeniu s punkt ζ, odpowiadający pewnemu punktowi w' okręgu koła.*

Przyjmijmy, że już i forma funkcyi $f(z)$ — a więc i funkcyj U, V — jest znana; połóżmy $U = f_1(x,y)$, $V = f_2(x,y)$, gdzie $f_1 = -\infty$ w punkcie $(x_0 y_0)$, a $f_1 = 0$ w każdym punkcie obwodu s, i zauważmy równania:

$$(a) \qquad f_1 - a = 0, \quad f_2 - b = 0,$$

które mają określać krzywe linie, zmieniające swój kształt ze zmiennymi parametrami a, b, $[-\infty \leq a \leq 0]$. Dla pewnej obranej wartości a, a przy dowolnem b dostajemy:

$$|w| = e^a,$$

a to wskazuje, że krzywe $f_1 - a = 0$ odpowiadają kołom k, współśrodkowym z kołem K, a leżącym we wnętrzu tego koła. Gdy $a = -\infty$, dostajemy $w = 0$, a krzywa $f_1 - a = 0$ zmalała do punktu $(x_0 y_0)$. Gdy a dowolnie zbliża się do zera, dostajemy w równaniu $f_1 - a = 0$ krzywę, dowolnie się zbliżającą do obwodu s, a odpowiadającą kołu k, zbliżającemu się dowolnie do okręgu koła K. Przyjmijmy teraz $b = const.$, a a dowolne, to wtedy dostajemy:

$$w = e^a . e^{bi}, \quad a = (-\infty \ldots 0),$$

a takie punkty w tworzą widocznie promień koła K, nachylony o kąt b do osi pierwszorzędnej płaszczyzny (w).

Z tego wynika, że każde dwie krzywe (a) przecinają się z sobą ortogonalnie.

Utwórzmyż 2 gromady krzywych:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 - a_s = 0 \\ f_2 - b_s = 0 \end{array}\right\}, \quad s = 1, 2, 3, \ldots,$$

to im częściej po sobie następują dwie krzywe jednej i dwie krzywe drugiej gromady, tem dokładniej zbliżają się cząsteczki obszaru A, podzielonego przez te gromady do kwadratów. Każdy taki kwadrat odpowiada pewnemu kwadratowi, utworzonemu w kole K przez dwa sąsiednie promienie i dwa sąsiednie koła, a podzielenie w ten sposób obszaru A i koła K, odpowiada właśnie cząsteczkowemu odwzorowaniu.

Gdy mieć będziemy dwa różne jednokrotnie zwarte obszary A, A' z ograniczeniami s, s' na płaszczyznach (z), (ζ), to możemy obydwa sprządz cząsteczkowo z kołem K. Jednemu punktowi w koła K odpowiadać będzie jeden tylko punkt z w obszarze A i jeden tylko punkt ζ w obszarze A'. Lecz przez to mamy już same obszary A, A', sprzągnięte ze sobą cząsteczkowo z odpowiadającymi sobie punktami (z, ζ). Stąd twierdzenie:

II. *Dwa jednokrotnie zwarte obszary można zawsze sprządz ze sobą cząsteczkowo.*

Zauważmy podstawienie liniowe:

$$w = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}, \tag{1}$$

w którem α, β, γ, δ są stałe, i przyjmijmy, że na płaszczyźnie (w) mamy koło o środku w punkcie $w = A + Bi$, a o promieniu R.

Połóżmy: $w = X + Yi$, $w_0 = X - Yi$, $A + Bi = q$, $A - Bi = q_0$, to równanie takiego koła w układzie prostokątnym (XOY) można w ten sposób napisać:

$$[w - (A + Bi)][w_0 - (A - Bi)] = R^2, \text{ albo:}$$

$$w.w_0 - qw_0 - q_0 w + p = 0, \text{ gdzie } p = q.q_0 - R^2. \tag{2}$$

Naodwrót każde równanie:

$$Sw.w_0 - Tw_0 - T_0 w + P = 0, \tag{3}$$

w którem S, P są rzeczywiste, a T, T_0 sprzężone, określa pewne koło w płaszczyźnie (w).

Gdy w przez u wyraża się formą (1), to:

$$w_0 = \frac{\alpha_0 u_0 + \beta_0}{\gamma_0 u_0 + \delta_0}, \tag{4}$$

gdzie $(u_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ są sprzężone odpowiednio z $(u, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Wstawmyż (1) i (4) w (2), to dostaniemy po skróceniach równanie:

$$Su.u_0 - Tu_0 - T_0 u + P = 0, \quad \text{w którem} \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \alpha\alpha_0 - q\alpha_0\gamma - q_0\alpha\gamma_0 + p\gamma\gamma_0 \\ P = \beta\beta_0 - q\beta_0\delta - q_0\beta\delta + p\delta\delta_0 \end{array}\right\} \text{ są rzeczywiste;}$$

*

$$\left.\begin{array}{l} T=q\alpha_0\delta+q_0\beta\gamma_0-p\gamma_0\delta-\alpha_0\beta_0 \\ T_0=q_0\alpha\delta_0+q\beta_0\gamma-p_0\gamma\delta_0-\alpha\beta \end{array}\right\} \text{ są sprzężone.}$$

Równanie (5) jest więc równaniem koła, a stąd twierdzenie:

III. *Równanie $w=(\alpha u+\beta)/(\gamma u+\delta)$ sprzęga ze sobą płaszczyzny (u), (w) nietylko cząsteczkowo (a więc i izogonalnie), ale daje zarazem kołowe pokrewieństwo tych płaszczyzn.*

W szczególności, gdy w (1) wybierzemy stosunki $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ w ten sposób, aby 3 punktom w_1, w_2, w_3 odpowiadały 3 punkty u_1, u_2, u_3, leżące na prostej linii, to przez takie podstawienia odpowie kołu przechodzącemu na (w) przez w_1, w_2, w_3 prosta linia, przechodząca przez u_1, u_2, u_3.

Mając ten rezultat, powróćmy do równania $w=f(z)$ i zastąpmy w niem w przez $(\alpha u+\beta)/(\gamma u+\delta)$, obierając α, β, γ, δ tak, aby trzem punktom w_1, w_2, w_3 koła K odpowiadały trzy punkty u_1, u_2, u_3, leżące na osi pierwszorzędnej $\xi\xi'$ płaszczyzny (u). Z równania $w=f(z)$ dostaniemy już teraz związek $u=F(z)$, a jeżeli punkt u_0, odpowiadający punktowi $w=0$ leży w połowie $\bar{u}$ (nad $\xi\xi'$, lub pod $\xi\xi'$) płaszczyzny (u), to równanie $u=F(z)$ daje odwzorowanie obszaru A w połowie płaszczyzny $\bar{u}$.

Przyjmijmy, że obwód s składa się z jednego tylko łuku regularnego, określającego się równaniami:

(6) $$x=\varphi_1(u),\quad y=\varphi_2(u),$$

zawierającemi rzeczywisty parametr u i że gdy u zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, to punkt (x,y) przebiega cały obwód s. Jego punktami w płaszczyźnie (z) są więc:

(7) $$x+yi=\varphi_1(u)+\varphi_2(u)i=\Phi(u).$$

Zmieńmy u na urojoną zmienną $u+vi=w$, i połóżmy:

(8) $$z=\Phi(w)=\Phi(u+vi).$$

Gdy tu w jest rzeczywiste $=u$ i zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, to w przebiega całą oś pierwszorzędną uu' płaszczyzny (w); z przebiega obwód s, jedna połowa $\bar{w}$ płaszczyzny (w) odpowiada cząsteczkowo wnętrzu A, a to spokrewnienie cząsteczkowe określa równanie (8). Niech $\Phi(u+vi)=\psi_1(u,v)+\psi_2(u,v)i$, to mamy:

$$x=\psi_1(u,v),\quad y=\psi_2(u,v),$$

a gdy z tych równań wyeliminujemy raz u, a drugi raz v, dostaniemy dwa równania:

$$\omega_1(x,y;u)=0,\quad \omega_2(x,y;v)=0.$$

Gdy c_1, c_2 są stałe dowolne, to $u=c_1$ określa w $\bar{w}$ prostą, równoległą do osi drugorzędnej vv', a $v=c_2$ ($c_2>0$ lub <0, według potrzeby) prostą, równoległą do osi uu'. Takim prostym odpowiedzą w A krzywe $\omega_1(x,y;c_1)=0$, $\omega_2(x,y;c_2)=0$. Krzywe te przecinają się z sobą w A ortogonalnie, a podziałowi płaszczyzny $\overline{w}$ przez proste:

$$(\alpha) \qquad u=c_{1,s},\quad v=c_{2,s},\quad s=1,2,3,\dots$$

odpowiada podział obszaru A przez krzywe:

$$(\beta) \qquad \omega_1(x,y;c_{1,s})=0,\quad \omega_2(x,y;c_{2,s})=0,\quad s=1,2,\dots$$

Ten podział daje już dokładne wyobrażenie o cząsteczkowem spokrewnieniu (8).

[Ponieważ prostej $v=0$ odpowiada sam obwód s, więc równanie $\omega_2(x,y;0)=0$ określi właśnie ten obwód].

Uwaga. Zastąpmy $u+vi$ przez funkcyę $F(\zeta_1+\zeta_2 i)$ o rzeczywistych spółczynnikach, a sama funkcya F niech będzie taką, że przebiega swemi wartościami (raz tylko) obszar $(-\infty\dots+\infty)$, gdy — przy $\zeta_2=0$ — zmienia się ζ_1 od $-\infty$ do $+\infty$. Wtedy widocznie równania:

$$x=\varphi_1(F(\zeta_1))=\overline{\varphi}_1(\zeta_1),\qquad y=\varphi_2(F(\zeta_1))=\overline{\varphi}_2(\zeta_1)$$

określają również obwód s. Gdy z tych równań wychodząc, wyprowadzać będziemy wszystkie relacye analogiczne z (6), (7), (8), (α), (β), dojdziemy do związku: $z=\overline{\Phi}(\zeta_1+\zeta_2 i)$, którym pewną połowę $\overline{\zeta}$ płaszczyzny $(\zeta)=(\zeta_1+\zeta_2 i)$ sprzęgamy z obszarem A w ten sposób, że prostym:

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha') & \zeta_1=c_{1s},\quad \zeta_2=c_{2s}, \\ \text{odpowiadają tu krzywe:} & \\ (\beta') & \Omega_1(x,y,c_{1s})=0,\quad \Omega_2 x,y,c_{2s})=0, \end{array}\right\},\quad s=1,2,\dots$$

Mamy tu więc znowu sprzężenie cząsteczkowe między obszarem A, a połową płaszczyzny, ale ono tu jest w ogólności inne, jak w wypadku poprzedzającym. Kształty krzywych (β') zależeć tu będą od wprowadzonej — a bardzo dowolnej — funkcyi F.

$\Omega_2(x,y;0)=0$ będzie tu równaniem samego obwodu s. Przyjmijmy, że $\overline{\zeta}$ jest górną połową płaszczyzny (ζ), to wtedy równanie:

$$(9) \qquad \Omega_2(x,y;\varepsilon)=0,$$

gdzie ε jest dowolnie małą dodatnią ilością określi krzywę nieskończenie mało różną od samego obwodu s, a leżącą całkowicie w A. Krzywę (9) nazwiemy sąsiadującą z obwodem s.

Pokażemy, że naodwrót przez określenie w pewien obrany sposób krzywej sąsiadującej, da się zarazem i funkcya F określić. Powróćmy w tym celu do równań (6). Funkcye $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ zawierają same rzeczywiste spółczynniki. Jeden z nich ϑ weźmy pod uwagę i przyjmijmy, że zmieniając ϑ na $\vartheta+\varepsilon$, gdzie ε jest nieskończenie małym (według potrzeby dodatnim lub odjemnym) dodatkiem, zmieniają się równania:

$$(10) \qquad x=\varphi_1(u,\vartheta),\quad y=\varphi_2(u,\vartheta),$$

określające obwód s na równania:

$$(10') \qquad x_1=\varphi_1(u,\vartheta)+\varepsilon\Phi_1(u,\vartheta),\quad y_1=\varphi_2(u,\vartheta)+\varepsilon\Phi_2(u,\vartheta)\ ^{*}),$$

które już określają sąsiadującą krzywę s_1.

---

*) Wyrazów z czynnikami ε^2, ε^3, ... zaniedbano.

Tak w (10) jak w (10') możnaby u zastąpić przez funkcyę $F(\zeta_1)=u$. Dokonawszy tego w (10), dostaniemy na punkty obwodu (s):

(11) $$x+yi=\varphi_1(F(\zeta_1))+\varphi_2(F(\zeta_1))i.$$

Gdy tu ζ_1 zmienimy na $\zeta_1+\zeta_2 i$, gdzie ζ_2 jest nieskończenie małym dodatkiem — który obrać możemy w formie $A\varepsilon$, $A=$stała — mieć będziemy:

$$x_2+y_2 i=\varphi_1(F+\frac{dF}{d\zeta_1}\zeta_2 i)+\varphi_2(F+\frac{dF}{d\zeta_1}\zeta_2 i)i=$$
$$=\varphi_1(F)+\varphi'_1(F)\frac{dF}{d\zeta_1}\zeta_2 i+(\varphi_2(F)+\varphi'_2(F)\frac{dF}{d\zeta_1}\zeta_2 i)i,$$

a stąd:

(11') $$x_2=\varphi_1(F)-\varphi'_2(F)\frac{dF}{d\zeta_1}A\varepsilon,\qquad y_2=\varphi_2(F)+\varphi'_1(F)\frac{dF}{d\zeta_1}A\varepsilon.$$

Są-to równania, określające znowu pewną sąsiadującą krzywę s_2; jej kształt zależy od wprowadzonej funkcyi F i od kształtu $A\varepsilon$. Przyjmijmy, że — przy obranym już dodatku $\zeta_2=A\varepsilon$ — funkcya F jest już taką, że krzywe s_1, s_2, są identyczne. Wtedy (10') i (11') dają na jednej sąsiadującej krzywej s_1 dwa bardzo bliskie siebie punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2). Gdy założymy, że w (10') trzeba $u=F(\zeta_1)$ zamienić na $u-\mu$, gdzie μ jest znowu nieskończenie małą ilością rzeczywistą, aby punkt (x_1, y_1) spadł już z punktem (x_2, y_2), to oprócz (11') dostaniemy na określenie spółrzędnych x_2, y_2 jeszcze takie wzory:

(12) $$x_2=\varphi_1(F)-\mu\varphi'_1(F)+\varepsilon\Phi_1,\qquad y=\varphi_2(F)-\mu\varphi'_2(F)+\varepsilon\Phi_2.$$

Stąd i z (11') mamy:

$$-\mu\varphi'_1=-\varepsilon\Phi_1-\varphi'_2\frac{dF}{d\zeta_1}A\varepsilon,\qquad -\mu\varphi'_2=-\varepsilon\Phi_2-\varphi'_1\frac{dF}{d\zeta_1}A\varepsilon,$$

a stąd znowu dochodzimy do związku:

$$A[\varphi'_1\Phi_2-\varphi'_2\Phi_1]=\frac{dF}{d\zeta_1}(\varphi'^2_1+\varphi'^2_2),\quad \text{czyli:}\quad A\,d\zeta_1=\frac{\varphi'^2_1+\varphi'^2_2}{\varphi'_1\Phi_2-\varphi'_2\Phi_1}dF.$$

Po scałkowaniu mamy:

$$A\zeta_1=\int\frac{\varphi'^2_1+\varphi'^2_2}{\varphi'_1\Phi_2-\varphi'_2\Phi_1}dF\quad\text{[Bertini, Forsyth],}$$

tak, że $F(\zeta_1)$ okazuje się odwróceniem tej całki. $F(\zeta_1+\zeta_2 i)$ będzie już funkcyą szukaną, t. j. spełniającą ten warunek, aby krzywa sąsiadująca była kształtu krzywej s_1.

171. Przykłady.

Pd. 1. Zauważmy związek:

(a) $$2z'=(a-b).z+\frac{a+b}{2},$$

w którym a, b są rzeczywiste dodatnie, a przytem jest $a>b$. Niech:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad\text{a}\quad z'=x'+y'i,$$

to z równania (a) dostajemy:

(α) $$2x'=[(a-b)r+(a+b)r^{-1}]\cos\varphi,$$

(β) $$2y'=[(a-b)r-(a+b)r^{-1}]\sin\varphi,$$

Eliminując stąd φ, dochodzimy do związku:

(e) $$\frac{x'^2}{2^{-2}[(a-b)r+(a+b)r^{-1}]^2}+\frac{y'^2}{2^{-2}[(a-b)r-(a+b)r^{-1}]^2}=1,$$

a ten wskazuje, że kołom $r = const.$, leżącym na płaszczyźnie (z), odpowiadają elipsy (e) na płaszczyźnie (z'). Wszystkie te elipsy mają środek $z'=0$, są współogniskowe, a ich ogniska są oddalone od siebie o $2.\sqrt{a^2-b^2}$.

Przyjmijmy teraz $\varphi = const.$, a r dowolne. Przedewszystkiem gdy $\varphi = 0$, mamy na (z) oś pierwszorzędną xx. Jej w (z) odpowiadają punkty:

$$x' = 2^{-1}[(a-b)r + (a+b)r^{-1}], \quad y' = 0,$$

a te leżą na osi pierwszorzędnej $x'x'$. Gdy $\varphi = \frac{\pi}{2}$, mamy w (z) oś drugorzędną yy, a jej w (z') odpowie znowu oś drugorzędna $y'y'$. Przy innych jakichkolwiek wartościach $\varphi = const.$, mamy w (z) prostą linię $y = tg\,\varphi$. Wyeliminujmyż z równań (α), (β) dowolne r, to dostaniemy związek:

$$(h) \qquad \frac{x'^2}{(a^2-b^2)cos^2\varphi} - \frac{y'^2}{(a^2-b^2)sin^2\varphi} = 1,$$

a ten wskazuje znowu, że prostym $y = tg\,\varphi$ odpowiadają współogniskowe hyperbole (h), mające znowu środek $z' = 0$, a odległość ich ognisk jest znowu $2\sqrt{a^2-b^2}$.

Gdy $r = 1$, dostajemy z (e) elipsę:

$$(E) \qquad x'^2/a^2 + y'^2/b^2 = 1,$$

a gdy z elips (e) zażądamy takiej, która ma obejmować elipsę (E), to jej osie mają być:

$$\left.\begin{aligned}(a-b)r+(a+b)r^{-1} &> 2a\\ (a-b)r-(a+b)r^{-1} &> 2b.\end{aligned}\right\} \text{ Stąd za dodaniem wynika:}$$

$$2(a+b)/r > 2(a+b), \quad \text{czyli: } r<1,$$

a to znaczy: *Przez równanie (a) odwzorowuje się część płaszczyzny (z'), leżąca zewnątrz elipsy (E) we wnętrze koła $r = 1$, leżącego na płaszczyźnie (z), a wnętrze elipsy (E), w część płaszczyzny (z), rozciągającej się poza kołem $r = 1$.*

Pd. 2. Zbadajmy cząsteczkowe odwzorowanie, określone związkiem:

$$(b) \qquad \varkappa^{-\frac{1}{2}} z' = sn\left(\frac{2K}{\pi}.z\right),$$

w którym moduł $\varkappa < 1$ jest rzeczywisty; z nim więc i peryody K, K' są rzeczywiste.

Połóżmy tymczasowo: $(2K/\pi).z = \zeta = \xi + \eta i$, a $z' = x' + y'i$, to mamy:

$$(b') \qquad \varkappa^{-\frac{1}{2}}(x' + y'i) = sn\zeta = sn(\xi + \eta i) = \frac{sn\,\xi.cn\,\eta i.dn\,\eta i + sn\,\eta i.cn\,\xi\,dn\,\xi}{1-\varkappa^2 sn^2\xi.sn^2\eta i}.$$

Połóżmy $\zeta = \pm i(K'/2)$, przez co w płaszczyźnie (ζ) uwzględniamy dwie proste: $\eta = \pm(K'/2)$, równoległe do osi pierwszorzędnej $\xi\xi$, to z uwagi, że:

$$sn\left(\pm\frac{K'i}{2}\right) = \pm\frac{i}{\sqrt{\varkappa}}, \quad cn\left(\pm\frac{K'i}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}, \quad dn\left(\pm\frac{K'i}{2}\right) = \sqrt{1+\varkappa},$$

dostaniemy z (b'):

$$x' + y'i = \frac{(1+\varkappa)sn\,\xi}{1+\varkappa sn^2\xi} \pm i\frac{cn\,\xi.dn\,\xi}{1+\varkappa sn^2\xi}, \quad \text{a stąd:}$$

$$(b'') \qquad x' = \frac{(1+\varkappa)sn\,\xi}{1+\varkappa sn^2\xi}, \quad y' = \pm\frac{cn\,\xi.dn\,\xi}{1+\varkappa sn^2\xi}.$$

Te formy, gdy w nich położymy $cn\,\xi = \sqrt{1-sn^2\xi}$, $dn\,\xi = \sqrt{1-\varkappa^2 sn^2\xi}$, do-prowadzą do związku $x'^2+y'^2=1$. Że zaś prostym $\eta=\pm(K'/2)$, odpowiadają w (z) proste:

$$(p)\qquad y=\pm\frac{\pi K'}{4K},$$

więc widocznie prostym (p) w płaszczyźnie (z) odpowie w płaszczyźnie (z') koło $K_{z'}$ o równaniu:

$$(k)\qquad x'^2+y'^2=1.$$

Gdy ma być $y=+(\pi K'/4K)$, a we wzorach (b'') ograniczymy ξ do obszaru $(+K...-K)$, a więc x do obszaru $\left(+\frac{\pi}{2}...-\frac{\pi}{2}\right)$, to wtedy w (b'') zmienia się x' w granicach $(+1...-1)$, a y' pozostaje dodatnie. Z tego wynika, że prostej $y=+(\pi K'/4K)$ odpowiada z koła $K_{z'}$ półkole K_1 nad osią $x'x'$. Analogicznie prostej $y=-(\pi K'/4K)$ odpowie z koła $K_{z'}$ półkole K_2 pod osią $x'x'$.

Mając to, zauważmy na płaszczyźnie (z) prostokąt P_z o wierzchołkach:

$$[x=\pm\frac{\pi}{2},\ y=\pm\pi K'/4K],\quad \text{(fig. 100)},$$

z wszelkiemi możliwemi zestawieniami znaków: $(++)$, $(+-)$, $(-+)$, $(--)$.

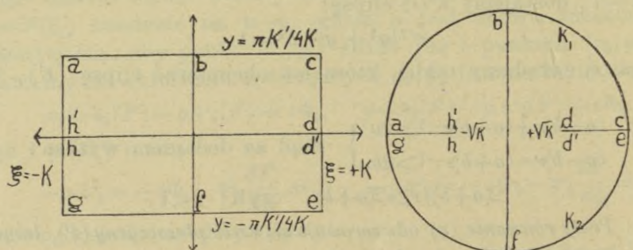


Fig. 100.

Boki wpadające w proste (p) odpowiadają półkolom koła $K_{z'}$. Co się tyczy dwóch boków pozostałych, które wpadają w proste $x=\pm\pi/2$, a którym w płaszczyźnie (ζ) odpowiadają proste $\xi=\pm K$, to aby ich odwzorowania w (z') znaleźć, trzeba w (b') położyć raz: $\xi=+K$, a drugi raz: $\xi=-K$ przy dowolnem η. Gdy $\xi=+K$, dostajemy:

$$\varkappa^{\frac{1}{2}}(x'+y'i)=cn\,\eta i/dn\,\eta i,$$

a więc $y'=0$, i

$$(b''')\qquad x'=\varkappa^{\frac{1}{2}}\frac{cn\,\eta i}{dn\,\eta i}=\varkappa^{\frac{1}{2}}\frac{cn(2Kyi/\pi)}{dn(2Kyi/\pi)}.$$

Lecz na samych bokach rozważanych zmienia się y od $+\pi K'/4K$ do $-\pi K'/4K$, a z (b''') wywnioskujemy, że na boku $x=+\frac{\pi}{2}$

obszarowi $y=(+\pi K'/4K...0)$ odpowie obszar $x'=(1...\varkappa^{\frac{1}{2}})$

" $y=(0...-\pi K'/4K)$ " " $x'=(\varkappa^{\frac{1}{2}}...1)$,

a więc bokowi wpadającemu w prostą $x=\frac{\pi}{2}$ odpowiadają brzegi wcięcia $(1...\varkappa^{\frac{1}{2}})$, wpadającego w oś $x'x'$. Podobnie bokowi, leżącemu na prostej $x=-\frac{\pi}{2}$ odpowiedzą brzegi wcięcia $(-1...-\varkappa^{\frac{1}{2}})$. Obwód *abcdd'efghh'a* odpowiada obwodowi koła i brzegom wcięć, a homologiczne odcinki są naznaczone temi samemi literami. Dalej przekonać się można, że po wyjęciu wspomnianych wcięć, odpowiada tu wnętrze prostokąta P_z wnętrzu koła $K_{z'}$. Mamy więc taki wynik:

Przez równanie (b) sprzęga się prostokąt P_z o wierzchołkach $[\pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi K'/4K]$ *z wnętrzem koła $K_{z'}$, o środku $z'=0$, a o promieniu $=1$, ale do ograniczenia takiego koła zaliczyć jeszcze trzeba brzegi dwóch wcięć* $(1 \ldots \sqrt{\varkappa})$, $(-1, \ldots -\sqrt{\varkappa})$.

Pd. 3. Z równania:

$$(c) \qquad z' = c.\sin z,$$

w którem c jest stała rzeczywista, dostajemy — gdy $z' = x' + y'i$, $z = x + yi$ — związek:

$$(c') \qquad x' + y'i = c[\sin x . \cos yi + \cos x . \sin yi].$$

Że zaś:

$$\cos yi = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cos hy, \quad \sin yi = i\frac{e_y - e^{-y}}{2} = i \sin hy, \text{*)}$$

więc z (c') mamy:

$$(\alpha) \quad x' = c.\sin x . \cos hy, \qquad (\beta) \quad y' = c \cos x . \sin hy,$$

Eliminacya x z tych dwóch równań daje:

$$(e) \qquad \frac{x'^2}{c^2 \cos h^2 y} + \frac{y'^2}{c^2 \sin h^2 y} = 1,$$

a to wskazuje, że każdej z prostych $y = const.$ odpowiada pewna elipsa (e); wszystkie te elipsy są współogniskowe o oddaleniu ognisk $= 2c$.

W razie $y = 0$ mamy z (α) i (β): $x' = c.\sin x$, $y' = 0$, co wskazuje, że osi xx płaszczyzny (z) odpowiada na (z') odcinek $(-c \ldots + c)$.

Z (α) i (β) dostajemy dalej:

$$\frac{4x'^2}{c^2 \sin^2 x} = e^{2y} + e^{-2y} + 2, \qquad \frac{4y'^2}{c^2 \cos^2 x} = e^{2y} + e^{-2y} - 2,$$

a stąd po dodaniu wynika:

$$(h) \qquad \frac{x'^2}{c^2 \sin^2 x} - \frac{y'^2}{c^2 \cos^2 x} = 1.$$

Są-to współogniskowe hyperbole o ogniskach $+c$, $-c$. Odpowiadają one na płaszczyźnie (z) prostym, równoległym do osi yy.

W szczególności, gdy $x = 0$, mamy na (z) samą oś drugorzędną yy, a że wtedy związki (α), (β) dają $x' = 0$, y' dowolne, więc tej osi odpowiada na płaszczyźnie (z') również oś drugorzędna $y'y'$.

Mając to, zauważmy na płaszczyźnie (z) prostokąt $\overline{P}_z$, którego boki wpadają w proste: $y = \pm\lambda$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$ [fig. 101]. Ponieważ:

$$\cosh^2(+\lambda) = \cosh^2(-\lambda), \quad \sinh^2(+\lambda) = \sinh^2(-\lambda),$$

więc parze prostych $y = \pm\lambda$ odpowiada jedna elipsa:

$$(E_{z'}) \qquad \frac{x'^2}{c^2 \cosh^2\lambda} + \frac{y'^2}{c^2 \sinh^2\lambda} = 1.$$

---

*) $\sinh$ = *sinus hyperbolicus;* $\cosh$ = *cosinus hyperbolicus.*

Z prostych $y=\pm\lambda$ trzeba jednak uwzględnić tylko odcinki, zawarte między prostemi $x=\pm\frac{\pi}{2}$. Otóż z (α) — gdy $y=+\lambda$, a $x=\left(-\frac{\pi}{2}...+\frac{\pi}{2}\right)$ — dostajemy: $x'=(-c\cosh\lambda...+c\cosh\lambda)$. Z ($\beta$) przy tych samych warunkach wynika $y'=(0...c.\sinh\lambda)$, to wskazuje, że bokowi wpadającemu w prostę $y=+\lambda$ odpowiada górna połowa obwodu elipsy $E_{z'}$. Analogicznie bokowi $y=-\lambda$ odpowie dolna połowa obwodu tej elipsy.

Przejdźmy do drugiej pary przeciwległych boków. Gdy $x=+\pi/2$, a y zmienia się od $+\lambda$ do $-\lambda$, to z (β) i (α) mamy:

$$y'=0, \quad x'=c.\cosh y, \quad y=(+\lambda...-\lambda),$$

W szczególności, gdy $y=(+\lambda...0)$ jest:

$$x'=(c.\cosh\lambda...c),$$

a gdy $y=(0...-\lambda)$ jest $x'=(c...\cosh\lambda)$. Gdy wreszcie przy $x=-\frac{\pi}{2}$ zmieniać się będzie y od $-\lambda$ do $+\lambda$, dostaniemy $y'=0$, a

$$x'=(-c\cosh\lambda...-c), \text{ gdy } y=(-\lambda...0),$$
$$x'=(-c...-c\cosh\lambda) \quad \text{„} \quad y=(0...+\lambda).$$

Obwód prostokąta *abcdd'efghh'a* [fig. 101.] odpowiada tu obwodowi elipsy $E_{z'}$ i brzegom wcięć: $(cd+d'e)$, $(gh+h'a)$, a homologiczne odcinki są tu znowu naznaczone temi samemi literami. *Przez równanie* (*c*) *sprzęga się więc cząsteczkowo wnętrze prostokąta* $\overline{P}_z$ *z wnętrzem elipsy* $E_{z'}$, *opatrzonej wcięciami* $A(+c)$, $B(-c)$.

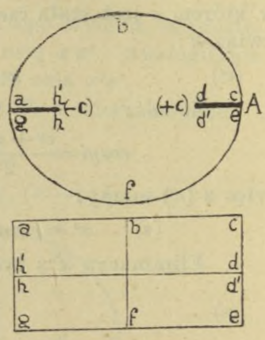


Fig. 101.

Pd. 4. Widzieliśmy w Pd. 2„ że równanie:

$$(A) \qquad \sqrt{\varkappa}.z'=\sin\left(\frac{2K}{\pi}z\right)$$

odkształca prostokąt P_z, leżący na płaszczyźnie (z), a o bokach $y=\pm\pi K'/4K$, $x=\pm\pi/2$ w koło $K_{z'}$ z wcięciami $(\pm1...\pm\sqrt{\varkappa})$.

Z drugiej strony, gdy w Pd. 3. położymy $\lambda=\pi K'/4K$, to $\overline{P}_z$ będzie identyczny z P_z, a równanie:

$$(B) \qquad z''=c.\sin z, \quad (z''=x''+y''i)$$

odkształca ten sam prostokąt P_z w elipsę:

$$(E_{z''}) \qquad \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1,$$

gdzie: $a=c.\cosh(\pi K'/4K)$, $b=c\sinh(\pi K'/4K)$, a więc $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Napiszmy (B) w formie:

$$z=\arcsin\frac{z''}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

to wstawiając to za z w (A) dostaniemy:

$$(d) \qquad \sqrt{\varkappa}.z'=\sin\left[\frac{2K}{\pi}\arcsin\frac{z''}{\sqrt{a^2-b^2}}\right],$$

a ten *związek* (*d*) *sprzęga widocznie cząsteczkowo koło* $K_{z'}$, *wcięte wzdłuż* $(\pm1..,\pm\sqrt{\varkappa})$ *z elipsą* $E_{z''}$ *wciętą wzdłuż* $A(+c)$, $B(-c)$.

Pd. 5. W równaniu:

$$(e) \qquad z'=4/(z+1)^2$$

położmy $z = e^{\varphi i}$, $\varphi=(0...2\pi)$. Punkty z mieszczą się więc na okręgu koła K_1, o środku $z=0$, a o promieniu $=1$. Gdy równocześnie ma być $z' = r.e^{\psi i}$, to dostajemy z (e):

$$re^{\psi i} = 4/(1+e^{\varphi i})^2, \text{ albo: } \frac{4}{r}e^{-\psi i} = (1+e^{\varphi i})^2, \text{ albo: } \frac{2}{\sqrt{r}}e^{-\frac{\psi i}{2}} = 1+e^{\varphi i},$$

albo wreszcie:

$$\frac{2}{\sqrt{r}}\cos\frac{\psi}{2} - \frac{2i}{\sqrt{r}}\sin\frac{\psi}{2} = (1+\cos\varphi) + i\sin\varphi.$$

Stąd mamy:

$$\frac{2}{\sqrt{r}}\cos\frac{\psi}{2} - 1 = \cos\varphi, \quad \frac{2}{\sqrt{r}}\sin\frac{\psi}{2} = -\sin\varphi,$$

a eliminacya φ daje związek:

$$(p) \qquad r\cos^2\frac{\psi}{2} = 1.$$

Położmy: $z' = x' + y'i$, a dalej:

$$\frac{x'}{r} = \cos\psi, \quad \frac{y'}{r} = \sin\psi, \quad r = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

to w spółrzędnych x', y' związek (p) w ten sposób się przedstawi:

$$(p) \qquad y'^2 = 4(1-x');$$

jestto parabola, mająca za oś: $x'x'$, ognisko w punkcie $(x'=0,\ y'=0)$, a przecinająca oś $x'x'$ w punkcie $(x'=1,\ y'=0)$. Taka parabola (p) odpowiada tu kołu K_1. Zauważmy parabolę:

$$(p_\mu) \qquad r\cos^2\frac{\psi}{2} = \mu^2, \quad \mu > 1,$$

która przebiega całkowicie zewnątrz paraboli (p), ma ognisko znowu w punkcie $(x'=0,\ y'=0)$, a oś: $x'x'$. Jej punktami są:

$$z' = \frac{\mu^2 e^{\psi i}}{\cos^2\frac{\psi}{2}},$$

a gdy to z' w (e) wstawimy, dostaniemy:

$$\mu^2\frac{e^{\psi i}}{\cos^2\frac{\psi}{2}} = \frac{4}{(z+1)^2}, \quad \text{czyli: } \frac{\mu . e^{\frac{\psi i}{2}}}{\cos\frac{\psi}{2}} = \frac{2}{z+1}.$$

Stąd mamy:

$$z+1 = \frac{2}{\mu}\cos\frac{\psi}{2} . e^{-\frac{\psi i}{2}}, \quad \text{albo: } x+yi+1 = \frac{2}{\mu}\cos^2\frac{\psi}{2} - \frac{2i}{\mu}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi}{2}.$$

Stąd dochodzimy do dwóch związków:

$$\left.\begin{aligned} x+1 &= \frac{2}{\mu}\cos^2\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\mu}(1+\cos\psi) \\ y &= -\frac{2}{\mu}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi}{2} = -\frac{1}{\mu}\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad \text{czyli:}$$

$$x+1-\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\cos\psi, \quad y = -\frac{1}{\mu}\sin\psi.$$

Eliminując stąd ψ, dostajemy:

$$\left(x+1-\frac{1}{\mu}\right)^2 + y^2 = \mu^{-2}.$$

Jestto relacya, która określa koło K_μ o środku w punkcie ($x=\mu^{-1}$, $y=0$), a o promieniu $=\mu^{-1}$. Koło to odpowiada paraboli (p_μ) i leży całkowicie wewnątrz koła K_1. Gdy μ zmienia się od 1 do $+\infty$, dostajemy na płaszczyźnie (z) nieskończoną mnogość kół, odpowiadających parabolom (p_μ) na płaszczyźnie (z'). Wszystkie te koła stykają się ze sobą w punkcie ($x=-1$, $y=0$). Gdy $\mu=1$, dostajemy koło K_1, odpowiadające paraboli (p), gdy $\mu=\infty$, dostajemy $(x+1)^2+y^2=0$, a więc punkt ($x=-1$, $y=0$). Z tych uwag wynika, że *przez związek* (e) *dostajemy odwzorowanie wnętrza koła K_1 płaszczyzny* (z) *w tej części płaszczyzny* (z'), *która się rozciąga poza wnętrzem paraboli* (p).

Pd. 6. Gdy:

$$z'=tg^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{z}\right), \text{ to } \sqrt{z'}=tg\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{z}\right), \text{ a} \tag{f}$$

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{z}=arc\,tg\sqrt{z'}=\frac{1}{2i}\log\frac{1+i\sqrt{z'}}{1-i\sqrt{z'}}. \quad \text{Stąd wynika:}$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}\sqrt{z}}=\frac{1+i\sqrt{z'}}{1-i\sqrt{z'}}. \quad \text{Położmy:} \tag{f'}$$

$$z=r(\cos\psi+i\sin\psi), \quad z'=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

to z (f') mamy:

$$e^{\frac{\pi i}{2}\sqrt{r}\left(\cos\frac{\psi}{2}+i\sin\frac{\psi}{2}\right)}=\frac{1+i\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{1-i\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)}= \tag{g}$$

$$=\frac{1-\rho+2i\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}}{1+\rho-2i\sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Niech będzie $\sqrt{r}.\cos\frac{\psi}{2}=\mu$, a więc $r.\cos^2\frac{\psi}{2}=\mu^2$, i położmy $\sqrt{r}.\sin\frac{\psi}{2}=\mu'$, to z równania ($g$) dostajemy:

$$e^{-\frac{\pi}{2}\mu'}.e^{\frac{\pi i}{2}\mu}=\frac{1-\rho+2i\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}}{1+\rho-2i\sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}}, \text{ a stąd:}$$

$$\left.\begin{aligned} e^{-\frac{\pi}{2}\mu'}\cos\frac{\pi\mu}{2}&=\frac{1-\rho}{1+\rho-2i\sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}} \\ e^{-\frac{\pi}{2}\mu'}\sin\frac{\pi\mu}{2}&=\frac{2\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}}{1+\rho-2i\sqrt{\rho}.\sin\frac{\varphi}{2}} \end{aligned}\right\} \text{ i ostatecznie:}$$

$$tg\frac{\pi\mu}{2}=\frac{2\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}}{1-\rho}. \tag{h}$$

Gdy $\mu = 1$, mamy na płaszczyźnie (z) parabolę:

$$(p) \qquad r\cos^2\frac{\psi}{2} = 1,$$

a że wtedy lewa strona w (h) jest $= +\infty$, więc być musi $\rho = 1$, a to wskazuje, że paraboli (p) odpowie na płaszczyźnie (z') koło K_1 o środku $z' = 0$, a o promieniu $= 1$. Gdy μ zmniejsza się przechodząc wartości: $\mu = (1...0)$, to w (h) pierwsza strona maleje i staje się wreszcie zerem, a całe wnętrze paraboli (p) zapełnia się parabolami (p_μ) o równaniach $r\cos^2\frac{\psi}{2} = \mu$. Lecz równocześnie po prawej stronie w (h) i ρ maleć będzie i stanie się wreszcie zerem. Z tego wnosimy, że *przez związek (f) sprzęga się cząsteczkowo wnętrze koła K_1 z wnętrzem paraboli (p).*

CZĘŚĆ VIII.

POCHODNA SCHWARZA I FUNKCYE TRÓJKĄTA.

ROZDZIAŁ XXII.

Odwzorowanie wieloboku i trójkąta kołowego w półpłaszczyźnie.

---

172. Wielobok kołowy i półpłaszczyzna. Do poważniejszych zadań o odwzorowaniach należy z a d a n i e c z ą s t e c z k o w e g o s p r z ę ż e n i a wieloboku, ograniczonego samymi łukami kół z połową danej płaszczyzny (z), albo z danem kołem. Taki wielobok P nazywać będziemy krótko k o ł o w y m. Niech on leży na płaszczyźnie (w'). Zauważmy dwa jego boki MA, MB po sobie bezpośrednio następujące, a przecinające się w punkcie $M = w'_0$ pod kątem $\mu\pi$, gdzie $\mu > 0$ (fig. 102). Gdy obwody kół, których częściami są właśnie łuki MA, MB przecinają się w punkcie $M' = w''_0$, a położymy:

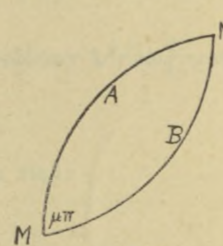


Fig. 102.

$$(\alpha) \qquad t = \frac{K}{w' - w''_0},$$

gdzie K jest liczbą rzeczywistą, dodatnią, >0, to między punktami t, w' zachodzi tu wskutek tej relacyi pokrewieństwo i k o ł o w e i i z o g o n a l n e. A że punktowi $w' = w''_0$ odpowiada tu punkt $t = \infty$, więc widocznie wszystkim kołom, przechodzącym przez punkt M', odpowiadają proste, które — jeżeli $M = w'_0$ — przecinają się w punkcie $t_0 = K/(w'_0 - w''_0)$. I łukom zatem MA, MB odpowiedzą na płaszczyźnie (t) prostolinijne odcinki M_1A_1, M_1B_1, które — wskutek izogonalnego pokrewieństwa — zawierać będą między sobą kąt $\mu\pi$, $\mu > 0$. Lecz w (α) możemy w' zastąpić przez $\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, przez co zmieni się wielobok P na inny znowu kołowy wielobok P', spokrewniony cząsteczkowo z P, a leżący na płaszczyźnie (w). Po takiem podstawieniu dostaniemy z (α) relacyę:

$$(\beta) \qquad w = \frac{At+B}{Ct+D},$$

a i tu — jeżeli bokom MA, MB odpowiadają boki $M'A'$, $M'B'$ wieloboku P' — odpowiedzą na płaszczyźnie (t) łukom $M'A'$, $M'B'$ prostolinijne odcinki ma_1, mb_1, zawierające kąt $\mu\pi$, gdyż przy $w'=w_0$ jest równocześnie $(aw+\beta)/(\gamma w+\delta)=w_0$, a takiemu w odpowiada w (β): $t=\infty$.

Mając to, przyjmijmy, że właśnie równanie $w=f(z)$ daje odwzorowanie wieloboku P' w górnej półpłaszczyźnie: $\tilde{z}$ i napiszmy (β) w ten sposób:

$$Cwt+Dw-At-B=0,$$

to stąd dalej — naznaczając pochodne według z kreskami — mamy:

$$\begin{aligned} C(wt)' + Dw' - At' &= 0, \\ C(wt)'' + Dw'' - At'' &= 0, \\ C(wt)''' + Dw''' - At''' &= 0. \end{aligned}$$

Eliminując z tych 4 równań stałe C, D, $-A$, $-B$, dochodzimy do związku:

$$\begin{vmatrix} (wt)', & w', & t' \\ (wt)'', & w'', & t'' \\ (wt)''', & w''', & t''' \end{vmatrix} = (wt)'[w''t'''-w'''t'']-w'[(wt)'t'''-(wt)'''t'']+$$
$$+t'[(wt)''w'''-(wt)'''w'']=0,$$

który także do takiej formy da się sprowadzić:

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = \frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2.$$

Nazwijmy pierwszą stronę tego związku: $\{w, z\}$, albo $[w]_z$, to i prawa strona jest tu także $\{t, z\}$, albo $[t]_z$, i mamy:

$$(\gamma) \qquad \{w, z\} = \{t, z\}, \text{ albo } [w]_z = [t]_z.$$

Cayley nazwał $\{w, z\}$ pochodną Schwarza, a równanie (γ) określa tę pochodną jako bezwzględny niezmiennik przy wszelkich liniowych (ułamkowych) podstawieniach.

Pochodna Schwarza da się także napisać w postaci:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(log \frac{dw}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz} log \frac{dw}{dz}\right)^2,$$

o czem przekonać się można, wykonując naznaczone tu różniczkowania.

Zastosujmy do boków ma_1, mb_1 formy, które $am+mb$ odwzorowują na osi xx płaszczyzny (z), a pole kąta $\mu\pi$ przekształcają w kąt π, zawarty w górnej połowie $\tilde{z}$ płaszczyzny (z).

Niech β będzie punktem na mb_1, ale niech nie wpada ani w m ani w b_1. Gdy takiemu punktowi odpowiadać ma na osi xx punkt b, to musi być: $(t-\beta)=(z-b).\mathfrak{P}(z-b)$. Stąd:

$$\frac{dt}{dz}=c_0+c_1(z-b)+..., \quad log\frac{dt}{dz}=c'_0+(z-b).\mathfrak{P}_1(z-b), \quad \text{i} \quad \{t,z\}=\mathfrak{P}(z-b).$$

Gdy ma być $b=\infty$ (na osi xx), to

$$(t-\beta)=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+..., \quad \frac{dt}{dz}=\frac{1}{z^2}.\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{i}$$

$$\{t,z\}=\frac{1}{z^4}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)_{z=\infty}\neq 0.$$

Weźmy punkt m pod uwagę. Niech mu na osi xx odpowiada punkt a. Wtedy, stosując tu formę (5) [art. 152.] — mamy:

$$(A) \qquad \frac{d}{dz}\left(log\frac{dt}{dz}\right)=\frac{\mu-1}{z-a}+\mathfrak{P}(z-a) \quad \text{i}$$

$$\{t,z\}=\frac{\frac{1}{2}(1-\mu^2)}{(z-a)^2}+\frac{A}{z-a}+\mathfrak{P}(z-a).$$

W razie $a=\infty$, zastąpimy $(z-a)$ przez $\frac{1}{z}$ i dostaniemy:

$$\{t,z\}=\frac{\frac{1}{2}(1-\mu^2)}{z^2}+\frac{1}{z^2}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)_{z=\infty}=0.$$

Gdy t' jest punktem wewnątrz wieloboku, a jemu ma odpowiadać punkt z' wewnątrz $\tilde{z}$, to mamy:

$$t-t'=\mathfrak{P}(z-z'), \quad \mathfrak{P}(0)=0 \quad \text{i} \quad \{t,z\}=\mathfrak{P}_1(z-z').$$

Lecz $\{t,z\}=\{w,z\}$, a stąd wynika:

I. *Gdy wielobok kołowy P, leżący na płaszczyźnie (w), a o wszystkich kątach wewnętrznych >0, ma się cząsteczkowo odwzorować w połowie $\tilde{z}$ płaszczyzny (z), to muszą zachodzić takie związki:*

Gdy z' jest skończone i odpowiada punktowi w wewnątrz P, lub na jego obwodzie (ale nie w jego wierzchołku), to:

$$\text{(I)} \qquad \{w,z\}=\mathfrak{P}(z-z').$$

Gdy w leży na obwodzie, a jemu na osi xx odpowiadać ma $z=\infty$, to:

$$\text{(I')} \qquad \{w,z\}=\frac{1}{z^4}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Gdy w ma być dowolnym wierzchołkiem w P, a jemu ma odpowiadać punkt a, leżący w skończoności na osi xx, to:

$$\text{(II)} \qquad \{w,z\}=\frac{A}{z-a}+\frac{\frac{1}{2}(1-\mu^2)}{(z-a)^2}+\mathfrak{P}(z-a).$$

Gdy w tym razie jest $x=\infty$, to:

$$(\mathrm{II}')\qquad \{w,z\}=\frac{\frac{1}{2}(1-\mu^2)}{z^2}+\frac{1}{z^2}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Funkcya $\{w,z\}$ jest więc wewnątrz $\tilde{z}$ wszędzie skończona i ciągła. Na osi xx ma skończoną tylko ilość biegunów d r u g i e g o s t o p n i a, *a w nieskończoności jest zerem 4^{go} stopnia, gdy punkt $x=\infty$ nie odpowiada wierzchołkowi, a jest zerem 2^{go} stopnia, gdy $x=\infty$, odpowiadać ma wierzchołkowi.*

Połóżmy $\{w,z\}=\varphi(z)=\varphi(x+yi)$, $y>0$, to $\varphi(z)$ z uwagi, że posiada na osi xx skończoną tylko ilość biegunów — istnieć będzie także i w drugiej dolnej połowie płaszczyzny (z), a jej definicyą (przeprowadzeniem) będzie: $\varphi(x-yi)$. Funkcya $\{w,z\}$ istnieje zatem w całej płaszczyźnie (z), a do jej formy dojdziemy takiem rozumowaniem:

Niech A_1, B_1, C_1, ... będą wierzchołkami wieloboku P, a w nich niech ten wielobok ma kąty: $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, ..., gdzie $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, ... Tym wierzchołkom niech odpowiadają na osi xx punkty a_1, b_1, c_1, ...

Przyjmijmy:

I^0) p u n k t y a_1, b_1, c_1, ... l e ż ą w s z y s t k i e w s k o ń c z o n o ś c i. Wtedy — uwzględniając rozwinięcia (II) i tworząc różnicę:

$$(B)\qquad \{w,z\}-\sum\frac{A}{z-a_1}-\frac{1}{2}\sum\frac{1-\alpha^2}{(z-a_1)^2},$$

w której sumy odnoszą się do wszystkich wierzchołków, dostajemy w niej funkcyę skończoną dla skończonych z, a równą zeru, gdy $z=\infty$, gdyż tam ona posiada rozwinięcie (I'). Różnica ta jest więc identycznie $=0$, a sama funkcya $\{w,z\}$ będzie:

$$(C)\qquad \{w,z\}=\sum\frac{A}{z-a_1}+\frac{1}{2}\sum\frac{1-\alpha^2}{(z-a_1)^2}=2J(z).$$

Niech:

$$\{w,z\}=\frac{c_4}{z^4}+\frac{c_5}{z^5}+\ldots,$$

w otoczeniu $z=\infty$. Z (C) dostajemy zaś w otoczeniu tego punktu:

$$(C')\qquad \sum\frac{A_1}{z}\left(1+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots\right)-\frac{1}{2}\sum(1-\alpha^2)\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2a_1}{z}+\ldots\right).$$

Porównując (C) z (C') dochodzimy tu do związków:

$$(a)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Sigma A=0,\quad \Sigma Aa_1-\frac{1}{2}\Sigma(1-\alpha^2)=0,\\ \Sigma Aa_1{}^2-\Sigma a_1(1-\alpha^2)=0.\end{array}\right.$$

Takie trzy związki zachodzą tu między kątami $\alpha\pi$, ..., punktami a_1, ..., a licznikami A, B, ...

Przyjmijmy:

II⁰) z wierzchołków $a_1, b_1, c_1, \ldots$ leży a_1 w nieskończoności. Utwórzmy w tym razie różnicę:

$$(D) \qquad \{w, z\} - \sum \frac{B}{z-b_1} - \frac{1}{2}\sum \frac{1-\beta^2}{(z-b_1)^2},$$

gdzie sumy odnoszą się tu do b_1, c_1, ..., to ta różnica jest wszędzie w skończoności skończoną, a w nieskończoności posiada rozwinięcie (II'). Jest więc i tam skończoną, bo ma wartość $=0$. Różnica (D) jest więc identycznie $=0$, a stąd wynika:

$$(D') \qquad \{w, z\} = \sum \frac{B}{z-b_1} + \frac{1}{2}\sum \frac{1-\beta^2}{(z-b_1)^2} = 2I(z).$$

Dla $z=\infty$ niech będzie:

$$(D'') \qquad \{w, z\} = \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \ldots, \quad c_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha^2),$$

to tu z porównania rozwinięć (D'), (D'') ze sobą dojdziemy do związków:

$$(b) \qquad \Sigma B = 0, \quad \Sigma B b_1 + \frac{1}{2}\Sigma(1-\beta^2) - \frac{1}{2}(1-\alpha^2) = 0.$$

Z tych uwag dochodzimy do takiego wyniku:

II. *Gdy $w=f(z)$ ma dawać cząsteczkowe odwzorowanie wieloboku kołowego P w półpłaszczyźnie $\bar{z}$, to w określa się równaniem różniczkowem:*

$$(c) \qquad \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = 2J(z),$$

gdy a_1 wraz z b_1, c_1, ... leży w skończoności, a równaniem różniczkowem;

$$(c') \qquad \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = 2I(z),$$

gdy a_1 leżeć ma w nieskończoności. [*$J(z)$ jest wymierną funkcyą, określoną formą (C) z warunkami (a), a $I(z)$ funkcyą wymierną (D) z warunkami (b)*].

173. Trójkąt kołowy i półpłaszczyzna. Niech teraz wielobokiem na płaszczyźnie (w) będzie trójkąt kołowy ABC o wszystkich trzech kątach $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, różnych od zera, i przyjmijmy, że:

wierzchołkowi A z kątem $\lambda\pi$ odpowiadać ma $z=0$,

„ B „ $\mu\pi$ „ „ $z=1$,

„ C „ $\nu\pi$ „ „ $z=\infty$.

W tym razie musimy użyć równania (D') — art. poprzedz. — i położyć:

$$(1)\qquad \{w,z\}=\frac{B}{z}+\frac{C}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1-\lambda^2}{z^2}+\frac{1}{2}\frac{1-\mu^2}{(z-1)^2}=2I(z)$$

z warunkami:

$$B+C=0,\quad C+\frac{1}{2}(1-\lambda^2)+\frac{1}{2}(1-\mu^2)-\frac{1}{2}(1-\nu^2)=0\quad [(D''),\ \text{art poprz.}].$$

Z tych warunków dostajemy:

$$C=-B=-\frac{1}{2}(1-\lambda^2)-\frac{1}{2}(1-\mu^2)+\frac{1}{2}(1-\nu^2),$$

co uwzględniając w (1) dostajemy:

$$(2)\qquad I(z)=\frac{1}{4}\frac{1-\lambda^2}{z^2}+\frac{1}{4}\frac{1-\mu^2}{(z-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{z(z-1)}\quad \text{i}$$

$$(3)\qquad \{w,z\}=\frac{1}{2}\frac{1-\lambda^2}{z^2}+\frac{1}{2}\frac{1-\mu^2}{(z-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{z(z-1)}.$$

Sama funkcya $w=f(z)$, spełniająca to równanie różniczkowe, musi być regularną we wszystkich punktach z, różnych od 0, 1, ∞. Co się zaś tyczy tych ostatnich 3 punktów, to naznaczając którykolwiek z nich przez a, zatoczmy z (a) jako środka, półkole K_a o nieskończenie małym promieniu, a przebiegające w górnej półpłaszczyźnie $\tilde{z}$. Takiemu półkolu K_a odpowiadać ma na płaszczyźnie (w) nieskończenie mały wycinek koła W_a o kącie $\alpha\pi$, jeżeli $\alpha\pi$ ma oznaczać którykolwiek z kątów $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. Takie odwzorowanie, zachodzące między K_a a W_a, przedstawia się formą:

$$(w-w_a)=c_a(z-a)^\alpha,\quad \alpha>0,$$

jeżeli w_a przedstawia punkt A, B, albo C według potrzeby, a c_a jest stałym spółczynnikiem.

Uwzględniając to, dostaniemy na przybliżone rozwinięcia funkcyi w, w otoczeniu punktów 0, 1, ∞ odpowiednio:

$$w-w_0=c_0z^\lambda,\quad w-w_1=c_1(z-1)^\mu,\quad w=c_\infty z^{-\nu}.$$

Wstawiając te przybliżone rozwinięcia w:

$$(4)\qquad \{w,z\}=\frac{\frac{d^3w}{dz^3}}{\frac{dw}{dz}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2w}{dz^2}}{\frac{dw}{dz}}\right)^2,$$

dostajemy:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\{w,z\}&=\frac{1}{2}\frac{1-\lambda^2}{z^2}+\dots\quad \text{w otoczeniu } z=0,\\ &=\frac{1}{2}\frac{1-\mu^2}{(z-1)^2}+\dots\qquad\quad ,, \qquad z=1,\\ &=\frac{1}{2}\frac{1-\nu^2}{z^2}+\dots\qquad\quad ,, \qquad z=\infty,\end{aligned}$$

*

co i forma (3) potwierdza swojemi rozwinięciami w otoczeniu tych punktów.

Lecz w trójkącie kołowym mogą być także kąty $=0$ (jeden, dwa lub nawet wszystkie trzy). Wskutek tego uwzględnić trzeba jeszcze i wypadek: $\alpha=0$. W tym razie półkole K_a ma się odkształcić w trójkąt kołowy T_a, którego dwa boki s_1, s_2 stykają się z sobą w punkcie w_a, a trzeci bok t przecina pierwsze prostopadle. Funkcya $\{w, z\}$ nie zmienia się, jak wiemy, gdy w niej w zastąpimy przez:

$$(6) \qquad w' = \frac{1}{w - w_a}.$$

Na płaszczyźnie (w') odpowie trójkątowi T_a obszar Θ, ograniczony: dwiema równoległemi prostemi σ_1, σ_2, odpowiadającemi bokom s_1, s_2*) i prostą τ, prostopadłą do σ_1, σ_2, a odpowiadającą bokowi t. Potrzeba więc teraz K_a odwzorować w Θ, co stanie się — jak zaraz zobaczymy — za pomocą podstawienia:

$$(7) \qquad w' = P.log\,(z-a) + Q,$$

gdzie P, Q są dowolne stałe, o których możemy założyć, że są rzeczywiste.

Gdy z przebiega średnicę koła K_a, leżącą na osi pierwszorzędnej, to $(z-a) = \pm r$, a $r = (0 \ldots \varrho)$, jeżeli ϱ jest promieniem koła K_a. Podstawiając to w (7) mamy:

$$(8) \qquad w' = P.log\,r + Q + P\varepsilon.\pi i,$$

gdzie $\varepsilon=0$, gdy $(z-a) = +r$, a $\varepsilon=1$, gdy $(z-a) = -r$. Wtedy jednak (8) przedstawia dwie równoległe proste, z których jedna poczyna się w punkcie: $(P log\,\varrho + Q) = p$, a druga w punkcie:

$$(P log\,\varrho + Q + P\pi i) = q;$$

obie dążą w jedną stronę w nieskończoność, a oddalone są od siebie o $P\pi$.

Gdy dalej z przebiega cały łuk półkola K_a, a więc $z - a = \varrho e^{\varphi i}$, to dostajemy z (7):

$$w' = P log\,\varrho + Q + P\varphi i, \quad \varphi = (0 \ldots \pi),$$

a takie punkty w' zapełniają widocznie odcinek prostolinijny, łączący z sobą punkty: p, q. Odcinek ten jest prostopadły do prostych (8). Widocznie więc za pomocą związku (7) dostajemy wzajemne odwzorowanie obszarów K_a, Θ. [Klein].

*) Z podstawienia (6) wynika bowiem, że koła, na których łuki s_1, s_2 leżą, przejdą na koła, które mają się ze sobą stykać w rzeczywistym punkcie, leżącym w nieskończoności. Takie zaś koła tworzą parę równoległych prostych.

Uwzględniając (7) w (6) mamy:

$$w = w_a + \frac{1}{P.log(z-a) + Q},$$

a ta forma daje już odwzorowanie półkola K_a w trójkącie T_a.

Ponieważ z tej formy wynika $log(z-a)$ jako liniowa funkcya w w, więc w $\{w, z\}$ możemy za w wziąć wprost:

$$w = log(z-a).$$

Za wstawieniem tego w (4) mieć będziemy:

$$\{w, z\} = \frac{1}{2(z-a)} + \ldots$$

co także i z formy (3) wynika, gdy tam albo $\lambda=0$, albo $\mu=0$, albo wreszcie $\nu=0$ położymy. Z tych wszystkich uwag wynika:

I. *Odwzorowanie trójkąta kołowego w półpłaszczyźnie, bez względu na to, czy jego wszystkie kąty są* >0, *czy też w nim jeden jego kąt* $=0$, *lub dwa z tych kątów, lub wreszcie wszystkie trzy jego kąty są* $=0$, *odbywa się za pomocą funkcyi* $w=f(z)$, *spełniającej równanie różniczkowe* $\{w, z\} = 2I(z)$.

II. *Funkcya* w *jest regularną z wyjątkiem punktów* $z=0, 1, \infty$, *w których jest rozgałęzioną jak* z^λ, $(z-1)^\mu$, $z^{-\nu}$, *jeżeli trójkąt posiada same kąty* >0, *a zawiera* $log z$, $log(z-1)$, $log z^{-1}$, *jeżeli odpowiednio w wierzchołku* A, B, *lub* C *jest kąt* $=0$. *Taką funkcyę* w *nazywamy* *funkcyą trójkąta.*

W następnych art. pokażemy, że funkcya w i funkcya wymierna $I(z)$ biorą swój początek jeszcze w innych rozważaniach, nic wspólnego z zadaniem odwzorowania nie mających.

174. Z teoryi równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego. Niech będzie dane równanie różniczkowe liniowe 2go rzędu:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 2P\frac{dy}{dz} + Qy = 0, \tag{1}$$

w którem P, Q są najogólniejszemi analitycznemi funkcyami zmiennej z, a z jest zmienną niezależną. Połóżmy $y=vw$, to dalej mamy:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dv}{dz}w + \frac{dw}{dz}v,$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d^2v}{dz^2}w + \frac{d^2w}{dz^2}v + 2\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dw}{dz},$$

a równanie (1) przejdzie na:

$$w\frac{d^2v}{dz^2} + 2\left(\frac{dw}{dz} + P.w\right)\frac{dv}{dz} + \left(\frac{d^2w}{dz^2} + 2P\frac{dw}{dz} + Qw\right)v = 0. \tag{2}$$

Przyjmijmy, że w wybraliśmy w ten sposób, aby:

$$\frac{dw}{dz}+Pw=0. \text{ Wtedy dostajemy:}$$

(3) $$w=e^{-\int P.dz}, \text{ a więc: } y=v.e^{-\int P.dz},$$

równanie (2) redukuje się do:

(4) $$w\frac{d^2v}{dz^2}+\left(\frac{d^2w}{dz^2}+2P\frac{dw}{dz}+Qw\right)v=0,$$

a ten związek ma dać v, jeżeli weń wstawimy znalezione już w o formie (3). Wstawmyż w istocie w (4) za w formę (3), a za $\frac{dw}{dz}$, $\frac{d^2w}{dz^2}$ pochodne tej formy (3), to dostaniemy:

$$e^{-\int Pdz}\left[\frac{d^2v}{dz^2}+\left(Q-\frac{dP}{dz}-P^2\right)v\right]=0.$$

Połóżmy:

(5) $$Q-\frac{dP}{dz}-P^2=H(z),$$

to równaniem określającem v będzie:

$$\frac{d^2v}{dz^2}+H(z)v=0.$$

Po znalezieniu stąd v i wstawieniu w $y=w.v$, dostajemy y jako rozwiązanie (całkę) równania (1).

Funkcya $H(z)$ ma tu doniosłe teoretyczne znaczenie dla samego równania (1). I tak: Połóżmy w równaniu (1): $y=u.f(z)$, gdzie $f(z)$ jest dowolną funkcyą, to dojdziemy do równania o takiej samej postaci:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+2P_1\frac{du}{dz}+Q_1u=0,$$

a gdy tu położymy znowu $u=w_1v_1$ i postąpimy dalej tak samo, jak przódy, dojdziemy do związku:

$$\frac{d^2v_1}{dz^2}+H(z)v_1=0,$$

z temsamem jak przódy $H(z)$, tak że identycznie jest:

$$Q-\frac{dP}{dz}-P^2=Q_1-\frac{dP_1}{dz}-P_1{}^2=H(z).$$

Z tego powodu $H(z)$ nazywają niezmiennikiem równania (1).

Teorya równań różniczkowych poucza dalej, że dla równania (1) można znaleść zawsze taką całkę y_1, któraby na danem miejscu z_0 posiadała pewną żądaną wartość η_0, a jej pochodna na tem miejscu miała wartość żądaną i dowolnie obraną η'_0.

Przyjmijmy, że druga całka y_2 ma na tem miejscu z_0 wartość $\overline{\eta}_0$, a jej pochodna wartość $\overline{\eta'}_0$, i że te dwie szczególne całki (ze szczególnemi wartościami ich samych i ich pochodnych na miejscu z_0) nie pozostają do siebie w stosunku stałym przy bieżącem z. Z takich dwóch całek y_1, y_2, które zawsze znaleść można*), utworzona funkcya liniowa jednorodna:

$$(6) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

z dowolnymi stałymi spółczynnikami c_1, c_2 jest przedewszystkiem również całką równania (1), a jest całką ogólną t. j. taką, że od niej wymagać można, aby na dowolnem miejscu $z=\zeta$ miała dowolnie żądaną wartość C, a jej pochodna dowolną wartość C'. Uwzględniając bowiem wartości C, C', mamy:

$$\left.\begin{array}{l} C = c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ C' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 \end{array}\right\},$$

a c_1, c_2 dadzą się wyznaczyć, jeżeli:

$$r = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Przyjmijmyż $r=0$ na dowolnym miejscu $z=\zeta$, to stądby wynikło:

$$\frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{y_2}, \text{ czyli } \log y_1 = \log c y_2,$$

czyli wreszcie:

$$y_1 = c y_2.$$

Lecz ten związek wykluczono, a stąd wynika, że (6) jest w istocie ogólną całką równania (1). Całki szczególne y_1, y_2 tworzą tak zwany zasadniczy system całek równania (1). Mają one jeszcze tę własność, że identyczny związek $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ zajść może tylko, gdy $c_1 = c_2 = 0$.

Przyjmując bowiem, że taki związek także i przy c_1, c_2, różnych od zera, istnieć może, mamy stąd: $y_1 / y_2 = const.$, a to jest niemożliwe.

175. Równanie różniczkowe ilorazu y_1/y_2. Niech (y_1, y_2) będzie zasadniczym systemem całek równania (1) art. poprzedz.,

*) L. Schlesinger: „*Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*". Lipsk 1895.

L. Heffter: „*Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen*". Lipsk 1894.

a te całki niech odpowiadają systemowi (v_1, v_2) równania:

(1) $$\frac{d^2v}{dz^2}+H(z).v=0.$$

W takim razie jest [por. (3) art. poprzedz.]:

$$y_1=v_1e^{-\int Pdz},\quad y_2=v_2e^{-\int Pdz},\ \text{a więc:}\ \frac{y_1}{y_2}=\frac{v_1}{v_2}=w.$$

Poszukajmy równania różniczkowego, określającego ten stosunek w. Z równania $v_1/v_2=w$ mamy:

$$log\,w=log\,v_1-log\,v_2,\ \text{a stąd.}$$

(2) $$\frac{w'}{w}=\frac{v'_1}{v_1}-\frac{v'_2}{v_2}.$$

Przez różniczkowanie mieć stąd dalej będziemy:

$$\frac{w''}{w}-\left(\frac{w'}{w}\right)^2=\frac{v_1''}{v_1}-\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^2-\frac{v_2''}{v_2}+\left(\frac{v_2'}{v_2}\right)^2,$$

a że podług (1) jest:

$$\frac{v_1''}{v_1}=\frac{v_2''}{v_2}\ (=-H(z)),\ \text{więc:}$$

$$\frac{w''}{w}-\left(\frac{w'}{w}\right)^2=-\left(\frac{v_1'}{v_1}-\frac{v'_2}{v_2}\right).\left(\frac{v_1'}{v_1}+\frac{v_2'}{v_2}\right).$$

Uwzględniając tu (2), dostaniemy:

$$\frac{w''}{w}-\left(\frac{w'}{w}\right)^2=-\frac{w'}{w}.\left(\frac{v_1'}{v_1}+\frac{v_2'}{v_2}\right),\ \text{czyli:}$$

$$\frac{w''}{w'}-\frac{w'}{w}=-\left(\frac{v_1'}{v_1}+\frac{v_2'}{v_2}\right).$$

Gdy tu za w'/w wprowadzimy znowu różnicę (2), mieć będziemy:

$$\frac{w''}{w'}=-2\frac{v_2'}{v_2},$$

a gdy ten związek raz jeszcze zróżniczkujemy, dostaniemy:

$$\frac{w'''}{w'}-\left(\frac{w''}{w'}\right)^2=-2\frac{v_2''}{v_2}+2\left(\frac{v_2'}{v_2}\right)^2.$$

Że zaś: $v_2''/v_2=-H(z)$, $2(v_2'/v_2)=-(w''/w')$, czyli:

$$2(v_2'/v_2)^2=\frac{1}{2}(w''/w')^2,\ \text{więc:}$$

$$\frac{w'''}{w'}-\left(\frac{w''}{w'}\right)^2=2H(z)+\frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2,\ \text{czyli:}\ \{w,z\}=2H(z),$$

gdzie $\{w,z\}=\dfrac{w'''}{w'}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{w''}{w'}\right)^2$ jest — jak przódy, [art. 172.] — pochodną Schwarza. Stąd twierdzenie:

I. *Gdy równanie różniczkowe drugiego rzędu:*

$$\frac{d^2y}{dz^2}+2P\frac{dy}{dz}+Q=0$$

ma niezmiennik $H(z)$ *i zasadniczy system całek:* (y_1, y_2), *to iloraz* $(y_1/y_2)=w$ *spełnia równanie różniczkowe:* $\{w, z\}=2H(z)$.

II. *Całkę* w *można — ponieważ identycznie* $y_1/y_2=v_1/v_2$ *— określić także stosunkiem* v_1/v_2, *gdzie* (v_1, v_2) *jest systemem zasadniczych całek równania* $\frac{d^2v}{dz^2}+H(z)v=0$, *zwanego* ***normalną formą*** *równania:*

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P\frac{dy}{dz}+Qy=0.$$

III. *Ponieważ* $\{w, z\}$ *jest bezwzględnym niezmiennikiem we wszelkich liniowych ułamkowych podstawieniach, więc gdy równanie:*

$$\{w, z\}=H(z),$$

ma jedną całkę $w=\frac{y_1}{y_2}=\frac{v_1}{v_2}$, *to jego* ***wszystkiemi*** *całkami są:*

$$\frac{aw+b}{cw+d}=\frac{ay_1+by_2}{cy_1+dy_2}=\frac{av_1+bv_2}{cv_1+dv_2}$$

z najdowolniejszymi spółczynnikami a, b, c, d.

176. Równanie różniczkowe Gaussa i funkcya trójkąta w. Po tych uwagach zauważmy równanie różniczkowe:

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1-\lambda+(\lambda+\mu-2)z}{z(1-z)}\frac{dy}{dz}+\frac{\nu^2-(1-\lambda-\mu)^2}{4z(1-z)}y=0.$$

W niem mamy:

$$P=\frac{1}{2}\frac{1-\lambda+(\lambda+\mu-2)z}{z(1-z)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\lambda}{z}-\frac{1-\mu}{1-z}\right],$$

a więc:

$$-\frac{dP}{dz}=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\lambda}{z^2}+\frac{1-\mu}{(1-z)^2}\right]$$

$$-P^2=-\frac{1}{4}\left[\frac{(1-\lambda)^2}{z^2}+\frac{(1-\mu)^2}{(1-z)^2}-2\cdot\frac{(1-\lambda)(1-\mu)}{z(1-z)}\right],$$

a że:

$$Q=\frac{\nu^2-(1-\lambda-\mu)^2}{4z(1-z)},$$

więc niezmiennik $I(z)$ równania (1) będzie tu:

$$I(z)=Q-\frac{dP}{dz}-P^2=\frac{1}{4}\frac{1-\lambda^2}{z^2}+\frac{1}{4}\frac{1-\mu^2}{(z-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{z(z-1)}.$$

Jestto tosamo $I(z)$, jakie mieliśmy w art. 173. i jakie zawiera się w równaniu różniczkowem $\{w, z\}=2I(z)$, z którego ma wypaść funkcya $w=f(z)$, dająca odwzorowanie półpłaszczyzny $\bar{z}$ w trójkącie kołowym ABC o kątach λ, μ, ν.

Połóżmy:

$$(a)\qquad \lambda^2=(1-\gamma)^2,\quad \mu^2=(\gamma-\alpha-\beta)^2,\quad \nu^2=(\alpha-\beta)^2,$$

to równanie (1) przejdzie na:

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dz^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}\frac{dy}{dz}-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}y=0.$$

Gdy to równanie napiszemy w postaci:

$$(3)\qquad z(1-z).\frac{d^2y}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{dy}{dz}-\alpha\beta.y=0$$

i spróbujemy je rozwiązać szeregiem potęgowym $y=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$, sprawdzimy, że przy $c_0=1$ jest szereg Gaussa [T. I., str. 448.]:

$$(4)\qquad y=y_1=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma.(\gamma+1)}z^2+\ldots=F(\alpha,\beta,\gamma,z),$$

jedną szczególną całką równania (2) lub (3) w otoczeniu punktu $z=0$. Z tego powodu równanie (2) nazywają równaniem różniczkowem Gaussa.

Według uwag, danych w art. 174., posiada to równanie oprócz całki (4) jeszcze drugą całkę y_2 w otoczeniu punktu $z=0$. Te dwie całki nie będą pozostawać w stałym stosunku do siebie przy bieżącem z, a funkcya liniowa $c_1y_1+c_2y_2$ będzie już ogólną całką równania w otoczeniu punktu $z=0$.

To samo odnosi się oczywiście do każdego punktu z*). W otoczeniu dowolnego punktu z, różnego od 0, 1, ∞, są obie całki zasadnicze y_1, y_2 zawsze regularne, mają więc postacie zwykłych szeregów potęgowych. Przeciwnie w otoczeniu punktów 0, 1, ∞, dostajemy jedną przynajmniej całkę w takiej postaci, że ogólna całka $c_1y_1+c_2y_2$ ma te punkty za punkty rozgałęzienia, a w razie już-to $\lambda=0$, już-to $\mu=0$, lub $\nu=0$ — lub w razie λ, μ, ν całkowitych — występują w niej już-to w punkcie 0, już-to w punkcie 1, lub ∞ logarytmy.

W najogólniejszym więc wypadku dostajemy, okrążając punkt 0, 1, lub ∞, z początkowej wartości $c_1y_1+c_2y_2$ całki ogólnej za powrotem do tego samego punktu wartość jej inną: $c_1\bar{y}_1+c_2\bar{y}_2$, przyczem $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ będą znowu liniowemi, jednorodnemi funkcyami

*) Oprócz dzieł, przytoczonych już w art. 174., por. Kummer: „*Ueber die hypergeom. Reihe* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}.x+\ldots$" C. J. T. 15., str. 39—83. i str. 127—172.

całek y_1, y_2, gdyż każdą jakąkolwiek całkę w takiej formie można odnaleść. Połóżmyż:

$$\bar{y}_1 = d_1 y_1 + d_2 y_2, \quad \bar{y}_2 = d'_1 y_1 + d'_2 y_2,$$

to spółczynniki d_1, d_2, d'_1, d'_2 posiędą pewne wartości i to: inne w otoczeniu punktu 0, inne w otoczeniu punktu 1, a inne w otoczeniu punktu ∞. Z formy niezmiennika $I(z)$ równania różniczkowego (1), a więc i równania (3) wynika:

I. *Każda funkcya trójkąta w jest ilorazem y_1/y_2 dwóch zasadniczych całek równania różniczkowego* G a u s s a.

II. *Gdy $w=y_1/y_2$ jest wartością, z którą poczynamy okrążanie punktu* 0, 1, *lub* ∞, *to po dokonanem okrążeniu przechodzi w na:*

$$w' = \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2}{d'_1 y_1 + d'_2 y_2} = \frac{d_1 w + d_2}{d'_1 w + d'_2},$$

a więc na liniową ułamkową funkcyę początkowej wartości w.

Geometrycznem znaczeniem owej zmiany wartości w na w' przy wspomnianych okrążaniach zajmiemy się w następnych ustępach.

Uwaga. Jasnem jest, że wyrażenie:

$$I(z) = \frac{1}{4}\frac{1-\lambda^2}{z^2} + \frac{1}{4}\frac{1-\mu^2}{(z-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{z(z-1)},$$

nie jest w y ł ą c z n i e niezmiennikiem równania (1). Gdy bowiem położymy: $I(z) = Q - \frac{dP}{dz} - P^2$, to widocznie, ze spółczynników P, Q można jeden wybrać zupełnie dowolnie, a oznaczywszy kształt drugiego, dojść do równania:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 2P\frac{dy}{dz} + Qy = 0,$$

które nie będzie już równaniem (1).

*
* *

177. Obrazy trójkąta w jego bokach. Przez równanie $\zeta' = (r^2/\zeta)$ spokrewniają się ze sobą płaszczyzny (ζ), (ζ') izogonalnie i kołowo.

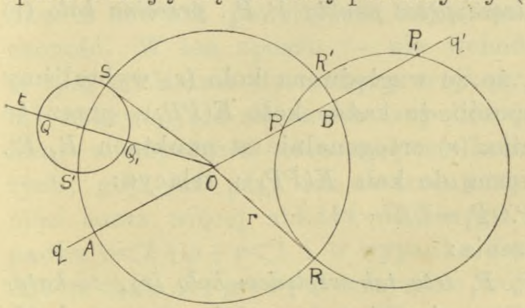


Fig. 103.

Gdy r^2 jest liczbą rzeczywistą i dodatnią, a położymy: $\zeta = \varrho e^{\varphi i}$, to w takim razie być musi $\zeta' = \varrho' . e^{-\varphi i}$, gdzie $\varrho\varrho' = r^2$.

Mając to, zauważmy koło (r) o promieniu r, a o środku w punkcie $\zeta = 0$ (fig. 103). Obierzmy dowolny punkt P, leżący wewnątrz lub zewnątrz koła (r), i poprowadźmy przez niego i środek

O koła (r) prostę qq'. Na tej prostej wybierzmy taki punkt P_1, aby $OP.OP_1=r^2$. Gdy punkty $P=\zeta$ wypełniają płaszczyznę (ζ), a punkty $P_1=\zeta_1$, wypełniają znowu tę samą płaszczyzn, to sprzężenie punktów P, P_1 za pomocą równania $OP.OP_1=r^2$ nazywa się odwróceniem punktów P w kole (r). P_1 nazywają obrazem albo odbiciem punktu P w kole (r) i naodwrót. Gdy $P=\varrho e^{\varphi i}$, to $P_1=\varrho' e^{\varphi i}$. Pytanie, czy takie pokrewieństwo jest izogonalne i kołowe? Aby to zbadać, połóżmy $P=\zeta=\varrho e^{\varphi i}$, a więc $OP=\varrho$, wtedy punktowi P odpowiada wskutek $\zeta'\zeta=r^2$ punkt $\zeta'=P'=\varrho' e^{-\varphi i}$, a widocznem jest, że: $\zeta_1=P_1=\zeta' e^{2\varphi i}=P'.e^{2\varphi i}$.

Punkty P_1 powstają więc z punktów P', gdy promień OP' obrócimy o kąt 2φ, albo inaczej: płaszczyzna (ζ_1) powstaje z płaszczyzny (ζ'), gdy tę płaszczyznę (ζ') obrócimy o 180^0 około jej osi pierwszorzędnej. Lecz mimo takiego obrotu, pozostaje pokrewieństwo i izogonalne i kołowe, a stąd wynika:

I. *Odwrócenie płaszczyzny w dowolnem kole daje pokrewieństwo izogonalne i kołowe.*

Gdy prosta qq' przecina koło (r) w punktach A, B, to relacya $OP.OP_1=r^2$ wskazuje, że $(ABPP_1)$ są czwórką harmonicznych punktów.

Gdy $OP=r$, to i $OP_1=r$, a stąd wynika, że obwód samego koła r odpowiada sam sobie, a i każdy punkt tego obwodu jest sam sobie odpowiadający.

Poprowadźmy dowolne koło $K(PP_1)$, przechodzące przez punkty P, P_1. Niech to koło przecina (r) w punkcie R (i R'). Ponieważ punkt R sam sobie odpowiada, więc mamy $OP.OP_1=\overline{OR}^2$. Stąd z własności koła (jego potęgi) wnosimy, że OR jest styczną do koła $K(PP_1)$. Że zaś OR jest zarazem i promieniem koła r, więc stąd wnosimy:

II. *Każde koło, przechodzące przez punkty P, P_1, przecina koło (r) ortogonalnie.*

Przyjmijmy naodwrót, że ze względu na koło (r) wybraliśmy dwa punkty P, P_1 w ten sposób, że każde koło $K(PP_1)$, przez te punkty przechodzące, przecina (r) ortogonalnie w punktach R, R'. W takim razie OR jest styczną do koła $K(PP_1)$; relacya:

$$OP.OP_1=\overline{OR}^2=r^2$$

tu zachodzi, a stąd twierdzenie:

III. *Gdy dwa punkty P, P_1 leżą tak względem koła (r), że każde koło, przechodząc przez P, P_1, przecina się ortogonalnie z (r), to każdy z punktów P, P_1 jest obrazem drugiego w kole (r).*

Niech K będzie dowolnem kołem, przecinającem się z (r) ortogonalnie w punktach S, S' (fig. 103). Poprowadźmy z O dowolną poprzeczną Ot i promień OS. Gdy poprzeczna Ot przecina K w punktach Q, Q_1, to mamy $OQ.OQ_1 = \overline{OS}^2 = r^2$, a stąd wynika:

IV. *Każde koło K, przecinające się z (r) ortogonalnie, odpowiada samo sobie przy odwróceniu punktów w kole (r).*

Zauważmy teraz trójkąt kołowy $\Delta = ABC$ o kątach $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$.

I⁰. Gdy $\lambda+\mu+\nu<1$ jest, a boki AB, BC, CA należą odpowiednio do kół K_3, K_2, K_1 (fig, 104.), to taki system trzech kół posiada zawsze i to jedno tylko rzeczywiste koło K, które je równocześnie przecina ortogonalnie. Takie koło nazwiemy g ł ó w n e m; sam trójkąt ABC zawiera się całkowicie w kole K, a gdy $\lambda=\mu=\nu=0$, w którym-to razie mamy graniczny wypadek $\lambda+\mu+\nu=0$ (co dwa koła z systemu K_1, K_2, K_3 stykają się z sobą), to same wierzchołki A, B, C leżą na obwodzie koła K.

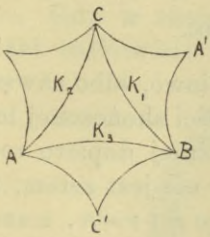


Fig. 104.

Trójkąt $ABC = \Delta$ możemy odbić w każdym z boków AB, BC, CA, (w każdem z kół K_1, K_2, K_3). Przez to powstaną 3 nowe odbite trójkąty:

$$\Delta_1 = A'BC, \quad \Delta_2 = AB'C, \quad \Delta_3 = ABC'.$$

Przez każde z tych odbić nie naruszy się wcale koło główne K [tw. IV.], a trójkąty Δ_1, Δ_2, Δ_3 mieścić się będą znowu wewnątrz K. Dalej każdy z trójkątów Δ_1, Δ_2, Δ_3 możemy odbijać w jego bokach, niebędących równocześnie bokami trójkąta Δ. Przez to dostaniemy 6 nowych trójkątów, a te znowu całkowicie mieścić się będą wewnątrz K. Takie odbite trójkąty możemy dalej tworzyć wychodząc z nowych powstałych trójkątów i prowadzić to w nieskończoność. W ten sposób — nie wchodząc tu w to jeszcze, czy w tym pochodzie dostaniemy trójkąty częściowo się nakrywające, lub nakrywające się zawsze zupełnie (a więc przystające) — zapełnimy w zupełności całe wnętrze koła K trójkątami. Trójkątów tych, gdy już przy ich tworzeniu tylko na to baczymy, aby się nimi coraz więcej zbliżyć do okręgu koła K, musi być i w wypadku $0<\lambda+\mu+\nu<1$ i w wypadku $\lambda+\mu+\nu=0$ nieskończenie dużo. Ale w razie $\lambda+\mu+\nu=0$ wszystkie trójkąty mają zawsze wszystkie trzy wierzchołki na kole K, a trójkątów, przykrywających się częściowo, nie znajdziemy tu wcale (fig. 105., str. nast.).

II⁰. Gdy $\lambda+\mu+\nu>1$, to koła K_1, K_2, K_3 (fig. 106.) nie posiadają koła głównego (koło to jest urojone), a trójkąty,

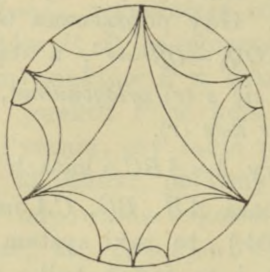


Fig. 105.

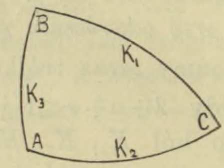


Fig. 106.

tworzone przez odbicia *in inft.*, mogą się albo częściowo, albo zawsze w zupełności nakrywać. O tem, jak i o ich mnogości skończonej lub nieskończonej tych trójkątów, będziemy mogli później dopiero rozstrzygnąć. Gdy $\lambda+\mu+\nu=1$, a żadna z liczb λ, μ, ν nie jest zerem, to mamy trójkąt ABC (fig. 107 *a*), a gdy $\lambda=0$, a więc $\mu+\nu=\pi$, mamy

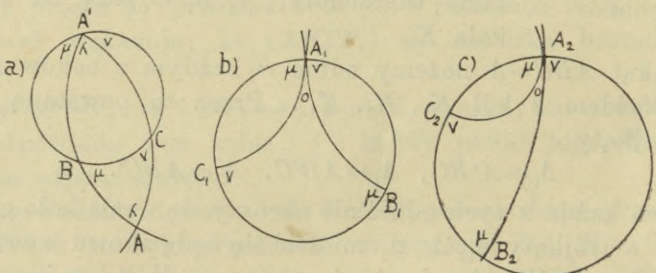


Fig. 107.

trójkąt $A_1B_1C_1$ lub $A_2B_2C_2$ (fig. 107 *b*, *c*). Gdy taki trójkąt leży na płaszczyźnie (ζ), a położymy $\zeta'=(\alpha\zeta+\beta)/(\gamma\zeta+\delta)$ z warunkiem, aby — gdy $\zeta=A'$, lub $=A_1$, lub $=A_2$ — odpowiadający punkt ζ' leżał na płaszczyźnie (ζ') w nieskończoności, to trójkąt ABC przejdzie na trójkąt prostolinijny o kątach $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, a w wypadkach *b)*, *c)* dostaniemy obszar rozciągający się między dwiema równoległemi p, q w jedną stronę w nieskończoność, a w skończoności ograniczony prostą r (fig. 108).

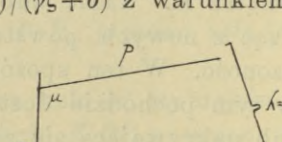


Fig. 108.

178. Własności funkcyi $w=f(z)$ i jej odwrócenia $z=\varphi(w)$. Podstawienia liniowe i ich grupy. Gdy w jest jedną całką równania $\{w, z\}=2I(z)$ [art. 173.], to także:

$$(1) \qquad w_1 = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$$

z dowolnemi α, β, γ, δ jest całką tego równania, a forma ta wyczerpuje już wszystkie możliwe całki [art. 176., tw. III.]. Wartości obrane: α, β, γ, δ zmieniają dany trójkąt $\Delta = ABC$ na inny:

$$\Delta' = A'B'C',$$

który z Δ pozostaje w pokrewieństwie cząsteczkowem. Niech punkty A, B, C leżą tak na płaszczyźnie (w), że w tym właśnie kierunku okrążamy trójkąt dodatnio. Punkty A, B, C odpowiadają — jak przódy — po porządku punktom: $z=0$, $z=1$, $z=\pm\infty$.

Gdy w równaniu (1) obierzemy tak α, β, γ, δ, aby bok $A'B'$, leżał całkowicie na osi pierwszorzędnej $0u$ [fig. 109.] płaszczyzny

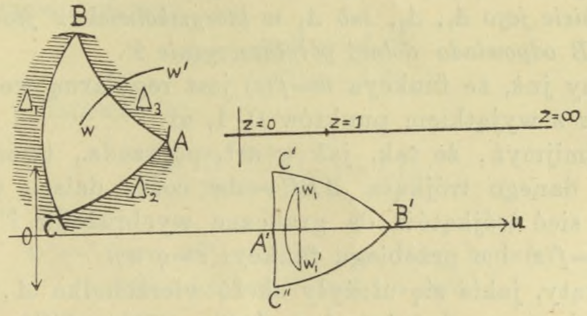


Fig. 109.

(w_1), dostaniemy trójkąt $\Delta' = A'B'C'$ z jednym już prostolinijnym bokiem $A'B'$. Ten teraz trójkąt zapełniony jest punktami w_1, odpowiadającymi górnej półpłaszczyźnie $\tilde{z}$. Na płaszczyźnie (z) zauważmy dwa dowolne sprzężone punkty $M = x + yi$, $M' = x - yi$, $y > 0$, to gdy położymy:

$$(\alpha) \qquad w_1 = f_1(x+yi) = u(xy) + iv(xy),$$

będzie $v(x,y) \gtreqless 0$, według tego, czy Δ' leży nad osią, lub pod osią $0u$. Że zaś funkcya $f_1(z)$ daje się przeprowadzać przez oś xx', zatem być musi:

$$(\beta) \qquad w'_1 = f_1(x-yi) = u(xy) - iv(xy).$$

Punkty w'_1 muszą więc wypełnić trójkąt $\Delta'' = A'B'C''$ (fig. 109.), który ze względu na oś $0u$ będzie symetryczny do trójkąta $\Delta' = A'B'C'$, a podług (β) dolna połowa płaszczyzny (z) odpowiada właśnie trójkątowi $A'B'C''$. Niech naodwrót:

$$(2) \qquad w = \frac{\alpha' w_1 + \beta'}{\gamma' w_1 + \delta'}.$$

Pytanie zachodzi, jakie punkty w, w' odpowiedzą punktom w_1, w'_1. Punkt w, odpowiadający punktowi w_1, leży oczywiście w danym trójkącie ABC. Co się tyczy punktu w', to zauważmy naprzód, że każde koło przechodzące przez w_1, w'_1, przecina ortogonalnie bok $A'B'$ (lub jego przedłużenie). Dalej z tej uwagi, że podstawienie (2) jest izogonalne i kołowe, wnioskujemy, że i wszelkie koła, przechodzące przez w, w', przecinają bok AB (lub jego przedłużenie) ortogonalnie.

To podług tw. III., art. poprzedz. wskazuje, że punkty w, w' są swymi obrazami w kole AB i że trójkątowi $A'B'C''$ odpowiada trójkąt $\Delta_3 = ABC_1$, będący obrazem danego trójkąta w boku AB. Z tego jednak wynika:

I. *Gdy sam trójkąt dany ABC odpowiada górnej półpłaszczyźnie $\tilde{z}$, to to odbicie jego Δ_1, Δ_2, lub Δ_3 w którymkolwiek z jego boków BC, CA, lub AB odpowiada dolnej półpłaszczyźnie $\tilde{z}'$.*

Wiemy już, że funkcya $w=f(z)$ jest regularną we wszystkich punktach z z wyjątkiem punktów 0, 1, ∞.

Przyjmijmyż, że tak, jak w art. poprzedz., tworzymy przez odbicia z danego trójkąta $ABC = \Delta w$ coraz dalsze trójkąty, to cała taka sieć trójkątów da graficzne wyobrażenie i o przebiegu funkcyi $w=f(z)$ i o przebiegu funkcyi $z=\varphi(w)$.

Trójkąty, jakie się ułożyły około wierzchołka A, naznaczmy w tej sieci przez Δw, $\Delta w'$, $\Delta w''$, $\Delta w'''$, ... (fig. 110.), i obierzmy

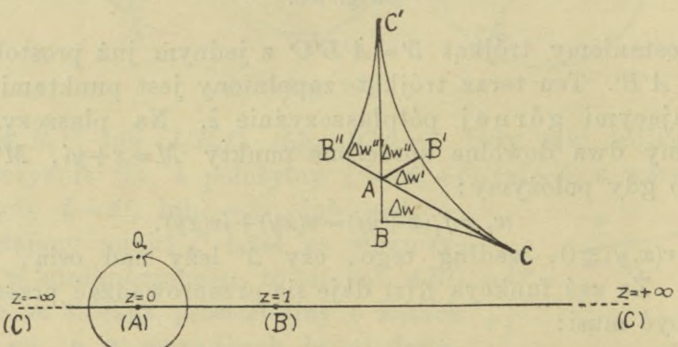


Fig. 110.

w górnej półpłaszczyźnie $\tilde{z}$ dowolny punkt Q. Jemu odpowie w płaszczyźnie (w) pewien punkt w, leżący w trójkącie Δw. Gdy teraz z punktu Q wychodząc, okrążamy punkt $z=0$ dodatnio, przechodzimy przez $(0 \ldots -\infty)$ do $\tilde{z}'$, a potem przez $(0 \ldots 1)$ wracamy do punktu Q. Równocześnie punkt w wyjdzie z trójkąta Δw, przejdzie przez AC do $\Delta w'$, a z $\Delta w'$ przez AB' do $\Delta w''$. Trójkąt $\Delta w''$ odpowiada więc znowu półpłaszczyźnie $\tilde{z}$, a że w'' zapełniając trójkąt $\Delta w''$ jest całką równania $\{w, z\} = I(z)$, a wszystkie całki tego równania mają postać:

$$(\alpha w+\beta)/(\gamma w+\delta), \text{ więc i } w'' = \frac{\alpha_1''w+\beta_1''}{\gamma_1''w+\delta_1''}$$

z pewnemi — powstającemi z okrążenia punktu A — stałemi α_1'', β_1'', γ_1'', δ_1''. Wróciwszy w opisany dopieroco sposób do Q, okrążajmy punkt $z=0$ na nowo w dodatnim kierunku. Wtedy punkt w'' wyjdzie równocześnie z trójkąta $\Delta w''$ przez AC', znajdzie się w trójkącie $\Delta_1 w'''$, a potem przez bok AB'' wkroczy w trójkąt $\Delta w^{(4)}$.

Trójkąt $\Delta w^{(4)}$ odpowiada więc znowu półpłaszczyźnie $\tilde{z}$, a że wszystkie w nim zawarte $w^{(4)}$ są znowu całkami równania $\{w, z\} = I(z)$, więc i tu znowu mamy:

$$w^{(4)} = \frac{\alpha_1^{(4)}w+\beta_1^{(4)}}{\gamma_1^{(4)}w+\delta_1^{(4)}}.$$

Niech podstawienie:

$$\left(w, \frac{\alpha_1''w+\beta_1''}{\gamma_1''w+\delta_1''}\right) = (A),$$

to widocznie mamy:

$$w'' = (A)w, \quad w^{(4)} = (A)^2 w, \quad \text{a dalej będzie:}$$
$$w^{(6)} = (A)^3 w, \text{ i t. d. } in\ inft.$$

Jeżeli punkty $w^{(2k_1)} = (A)^{k_1} w$ przy skończonem k_1 zapełnią znowu **dokładnie** trójkąt Δw, z któregośmy wyszli (tak, że trójkąty Δw, $\Delta w^{(2k_1)}$ są identyczne), to funkcya $w = f(z)$ jest taka, że w punkcie $z=0$ posiada cykliczny element k_1^go^ stopnia.

Jeżeli przeciwnie takiego skończonego k_1 znaleść nie można, to tu w punkcie $z=0$ występuje cykliczny element, łączący ze sobą nieskończenie dużo gałęzi funkcyi w. Funkcya w jest z tego powodu już nieskończenie wielowartościową.

Naznaczmy czworobok $(\Delta w + \Delta w')$ przez P_1, to około punktu A ułożyły się po porządku czworoboki:

(Γ) $\quad P_1, \ (A)P_1, \ (A)^2 P_1, \ (A)^3 P_1, \ \ldots.$

Takie same badania przeprowadzić trzeba w otoczeniu punktów $z=1$, $z=\pm\infty$. Mogą więc tu wypaść znowu cykliczne elementa stopni skończonych: k_2, k_3.

Niech przez okrążenie punktu $z=1$ przechodzi w na $\dfrac{\alpha_2''w+\beta_2''}{\gamma_2''w+\delta_2''}$ a podstawienie $\left(w, \dfrac{\alpha_2''w+\beta_2''}{\gamma_2''w+\delta_2''}\right)$ niech $=(B)$, to około punktu B —

gdy dwa po sobie następujące trójkąty ze wspólnym wierzchołkiem B tworzą czworobok P_2 — układają się na płaszczyźnie (w) czworoboki:

(II) P_2, $(B)P_2$, $(B)^2P_2$, $(B)^3P_2$, ...

Gdy wreszcie w przechodzi przez dodatnie okrążenie punktu $z=\infty$ na $\frac{\alpha_3''w+\beta_3''}{\gamma_3''w+\delta_3''}$, a podstawienie $\left(w, \frac{\alpha_3''w+\beta_3''}{\gamma_3''w+\delta_3''}\right)=(C)$, to około punktu C układają się czworoboki:

(III) P_3, $(C)P_3$, $(C)^2P_3$, $(C)^3P_3$, ...,

jeżeli P_3 utworzyły dwa sąsiadujące trójkąty z wspólnym wierzchołkiem C.

Szeregi (I), (II), (III) wskazują zarazem gałęzie funkcyi w, łączące się cyklicznie w punktach rozgałęzienia 0, 1, ∞.

Weźmy pod uwagę którykolwiek z czworoboków (I), n. p. czworobok $(A)^mP_1$, gdzie m jest całkowite $\gtreqless 0$, to z niego przez n-krotne okrążenie punktu $z=1$ dostaniemy czworobok $(B)^n(A)^mP_1$, a z tego czworoboku znowu dojdziemy p-krotnem okrążeniem punktu $z=\infty$ do czworoboku $(C)^p(B)^n(A)^mP_1$ i t. d. Przez składanie zatem podstawień liniowych (A), (B), (C) — i to w dowolnym porządku — dochodzimy do każdego czworoboku (do każdej gałęzi funkcyi w), zawartego w tworzącej się sieci czworoboków.

Cały zbiór różnych między sobą podstawień — nie wyłączając identycznego podstawienia $=1$ — tworzy grupę $G=(1, s_1, s_2, ...)$. Podstawienia (A), (B), (C) są związane ze sobą relacyą $(A)(B)=(C)^{-1}$, albo relacyą $(A)(B)(C)=1$, albo wreszcie relacyą:

(α) $\qquad (A)^{-1}(B)^{-1}=C,$

gdyż okrążając punkty $z=0$, $z=1$ w kierunku dodatnim, okrążamy temsamem punkt $z=\infty$ w kierunku odjemnym. W razie gdy k_1, k_2, k_3 są skończone i całkowite, dołączają się tu jeszcze relacye:

(β) $\qquad (A)^{k_1}=1,\ (B)^{k_2}=1,\ (C)^{k_3}=1.$

Wskutek relacyi (α) można całą grupę utworzyć wyłącznie z podstawień (A), (B), które z tego powodu nazywają się **zasadniczemi** grupy G.

Niech:

(a) $\qquad A,\ A',\ A'',\ ...$

będą punktami odpowiadającymi punktowi A podług utworzonej grupy G.

Analogiczne znaczenie niech mają:

(b) $\quad B,\ B',\ B'',\ ...,$ i $\quad (c)$ $\quad C,\ C',\ C'',\ ...$

Niech przytem $(A)^{k_1}P_1=P_1$, $(B)^{k_2}P_2=P_2$, $(C)^{k_3}P_3=P_3$. W takim razie przebieg funkcyi $w=f(z)$ możemy już dokładnie określić w ten sposób: Jeżeli punktów (a) jest m, punktów (b) jest n, a punktów (c) jest p, (gdzie m, n, p mogą być skończone lub nieskończone), to funkcya w jest taką wielowartościową funkcyą, że posiada: w punkcie $z=0$, m cyklicznych elementów stopnia k_1, w punkcie $z=1$, n cyklicznych elementów stopnia k_2, a w punkcie $z=\infty$, p cyklicznych elementów stopnia k_3.

Co się tyczy funkcyi $z=\varphi(w)$, to ona wyobrażona jest punktami całej płaszczyzny (z), a wychodząc tu z dowolnego punktu z i wróciwszy do niego po rozmaitych okrążeniach punktów $z=0$, 1, ∞, mamy znowu tę samą wartość z, podczas gdy w zmienia się na s_1w, s_2w, ... Stąd wnosimy, że:

$$z=\varphi(w)=\varphi(s_1w)=\varphi(s_2w)=...,$$

czyli, że: funkcya z posiada grupę G, bez względu, czy ta funkcya z okazuje się jednoznaczną czy wieloznaczną. Jednoznaczną jest wtedy, gdy w sieci utworzonych trójkątów nigdy nie znajdujemy 2 trójkątów częściowo się tylko przykrywających ze sobą. W razie przeciwnym będzie funkcya z wieloznaczną, gdyż jeden obrany punkt w, należąc do różnych i różnie położonych trójkątów, ma różne swoje odwzorowania: z_1, z_2, ... na płaszczyźnie (z).

Niech $\mathfrak{R}_{w,z}$ będzie powierzchnią Riemanna, wyobrażającą przebieg funkcyi w, to całą sieć czworoboków, utworzoną na płaszczyźnie (w), uważać trzeba za odwzorowanie powierzchni $R_{w,z}$ na jednolišciowej powierzchni — (płaszczyźnie) — (w). Na każdy trójkąt przypada jeden półliść powierzchni $\mathfrak{R}_{w,z}$.

Funkcye trójkąta dzielą się na dwa rodzaje: na funkcye rodzaju pierwszego o $(\lambda+\mu+\nu)>1$ i na funkcye rodzaju drugiego o $(\lambda+\mu+\nu)<1$.

179. Funkcye trójkąta rodzaju pierwszego ($\lambda+\mu+\nu>1$). Trójkąt kołowy o $(\lambda+\mu+\nu)>1$ można zamienić zawsze na taki, że dwa boki AB, AC będą prostolinijne, a bok trzeci BC będzie już łukiem koła, wypukłym tu koniecznie na zewnątrz trójkąta (fig. 111). Gdy łuk BC dopełnimy do całego koła k, okaże się, że tu wierzchołek A zawsze leży wewnątrz

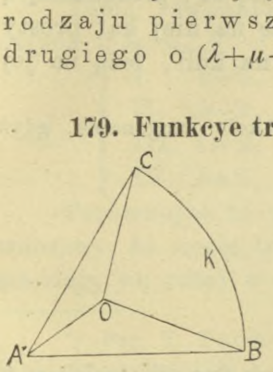


Fig. 111.

tego koła *); wskutek tego — gdy nazwiemy $A0=d$, $0C=0B=r$ — mamy tu zawsze $r>d$, a wielkość $R=\sqrt{r^2-d^2}$ jest rzeczywistą. Zatoczmyż z punktu A, jako środka, kulę K promieniem R, a jej promień prostopadły do płaszczyzny (w) trójkąta niech ją przecina w punkcie A (fig. 113.), to mamy w niej przedewszystkiem:

$$0A_1=\sqrt{R^2+d^2}=r.$$

Gdy teraz z punktu A_1 rzucimy punkty płaszczyzny (w) stereograficznie na tę kulę, to boki AB, AC przejdą na kuli w łuki

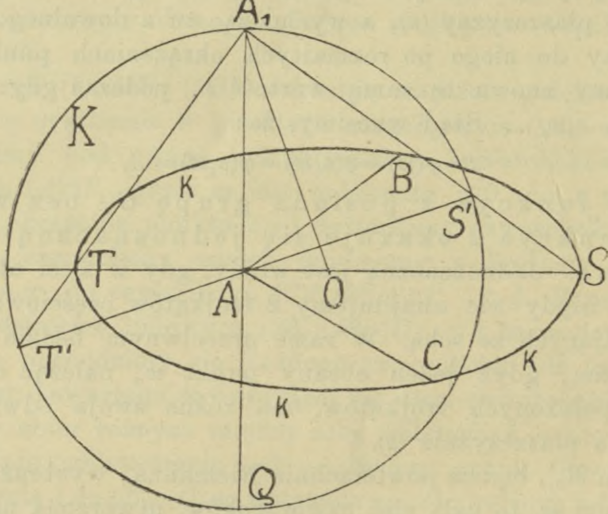


Fig. 113.

wielkich kół, przecinających się w A_1 pod kątem λ. Co się tyczy rzutu boku trzeciego BC, to ten będzie oczywiście kołem [T. I., str. 147]. Lecz gdy w kole k zauważymy średnicę ST, przechodzącą przez A, to wskutek $0S=0A_1=0T=r$ spiera się na niej kąt prosty $\sphericalangle TA_1S$, a rzuty stereograficzne S', T', leżąc na kuli, leżą na jej

---

*) W razie przeciwnym posiadałby trójkąt ABC koło ortogonalne, gdyż

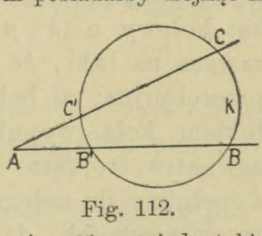


Fig. 112.

trójkąt $AB'C'$, który ma $\lambda+\mu+\nu<1$, posiada takie koło (ma ono środek w A, a przecina ortogonalnie koło K).

wielkiem kole $T'A_1S'Q$ tak, że prosta $S'T'$ podpiera w tem kole również kąt prosty $T'A_1S'$. Wskutek tego $S'T'$ będąc średnicą wielkiego koła $T'A_1S'Q$ jest zarazem i średnicą kuli K. Zauważmy koło k, na którem leży bok BC. Na kuli przejdzie k na takie koło, które się przetnie z $T'A_1S'Q$ w punktach S', T'. Że zaś $S'T'$ jest średnicą kuli, więc k przejdzie na kuli również w wielkie koło, a BC na łuk wielkiego koła. Trójkątowi ABC będzie na kuli K odpowiadał zwykły trójkąt sferyczny $A_1B_1C_1$ o kącie λ w wierzchołku A_1, a o kątach μ, ν w wierzchołkach B_1, C_1.

Wychodząc z trójkąta ABC, utwórzmy przez odbicia na płaszczyźnie (w) całą sieć trójkątów i całą tę sieć rzućmy na kulę z punktu A_1. Każdy trójkąt rzucony na kulę będzie na niej zwykłym sferycznym trójkątem, o kątach λ, μ, ν. Z tego wynika, że wszystkie trójkąty na kuli będą przystające, a więc będą zawsze tejsamej powierzchni: $R^2(\lambda+\mu+\nu-1)\pi$.*)

Przyjmijmy, że funkcya $z=\varphi(w)$, wynikająca z funkcyi w, ma tu być jednoznaczną. Wtedy cała kula K ma się przykryć raz tylko **) pewną ilością czworoboków, a gdy tych czworoboków jest N na całej kuli, to mamy:

$$2R^2(\lambda+\mu+\nu-1)\pi=\frac{4R^2\pi}{N}, \quad \text{czyli:} \quad \lambda+\mu+\nu-1=\frac{2}{N}.$$

Taki jest warunek konieczny, aby funkcya z była jednoznaczną. Lecz wskutek identycznego przykrywania się ze sobą wyłącznie identycznych czworoboków (za każdem dalszem pokrywaniem kuli) musi być: $2\pi:2\lambda\pi=l$, liczba cała, skąd wynika $\lambda={}^1/_l$. Podobnie musi być $\mu={}^1/_m$, $\nu={}^1/_n$, gdzie m, n są znowu liczby całe, a dostatecznym już warunkiem jednoznaczności funkcyi z będzie: $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1=\frac{2}{N}$.

Temu równaniu zadość uczynią takie jedynie układy liczb całych l, m, n, N:

$$(A)\left\{\begin{array}{llllll} \text{I.} & l=2, & m=2, & n=n, & \text{dowolne}, & N=2n; \\ \text{II.} & l=2, & m=3, & n=3, & & N=12; \\ \text{III.} & l=2, & m=3, & n=4, & & N=24; \\ \text{IV.} & l=2, & m=3, & n=5, & & N=60. \end{array}\right.$$

Porównując te wyniki z poszukiwaniami Rozdz. VIII. Tom I. wnosimy, że siecie trójkątów utworzone na płaszczyźnie (w), przedstawiają się tutaj w ten sposób:

---

*) Por. T. Todhunter. *Spherical Trig.* Londyn 1886. — Dziwiński. Wykłady matematyki I. Wykład IV. str. 49.

**) Każde powtórne przykrycie kuli przez trójkąty ma być już identyczne z przykryciem pierwszem.

1) W wypadku I. mamy stereograficzny rzut kuli, podzielonej przez wszystkie płaszczyzny symetryi wpisanego w nią dwuścianu (o *n* krawędziach) [fig. 114.];

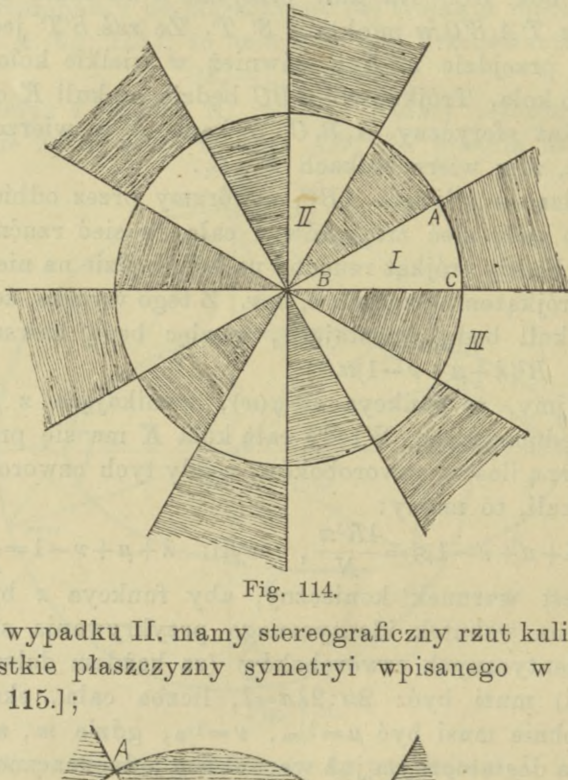


Fig. 114.

2) W wypadku II. mamy stereograficzny rzut kuli, podzielonej przez wszystkie płaszczyzny symetryi wpisanego w nią czworościanu [fig. 115.];

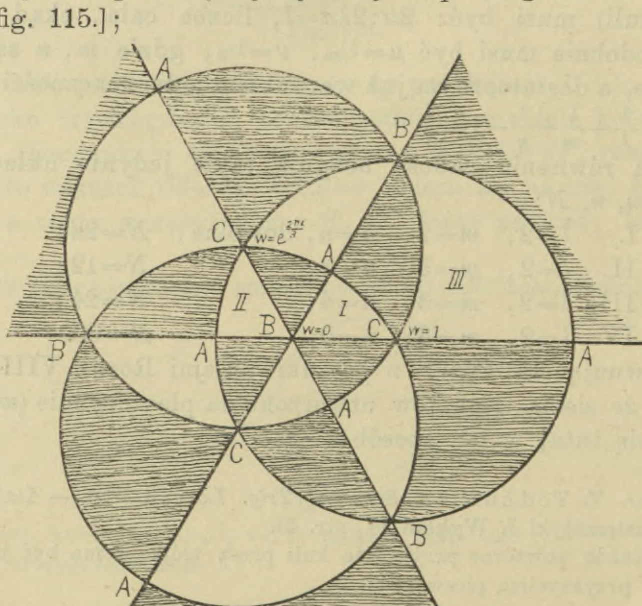


Fig. 115.

3) W wypadku III. stereograficzny rzut kuli, podzielonej przez wszystkie płaszczyzny symetryi wpisanego w nią ośmiościanu [fig. 116.]:

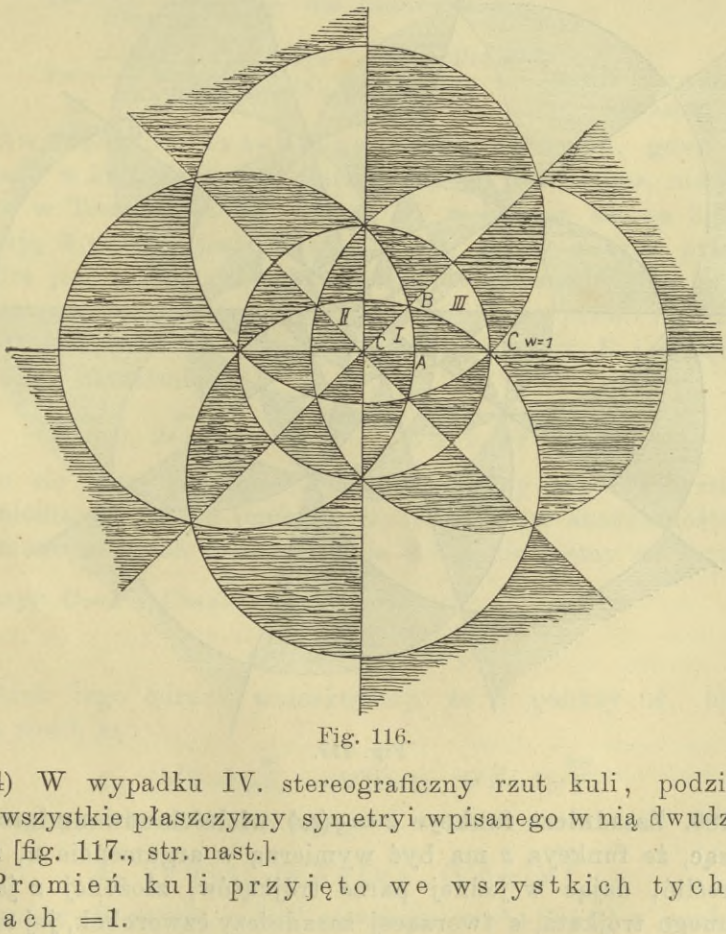


Fig. 116.

4) W wypadku IV. stereograficzny rzut kuli, podzielonej przez wszystkie płaszczyzny symetryi wpisanego w nią dwudziestościanu [fig. 117., str. nast.].

Promień kuli przyjęto we wszystkich tych wypadkach =1.

Sieć trójkątów w wypadku 2) wynikła z takiego położenia czworościanu w kuli, że jego jedna wysokość *h*, przebiwszy środek ściany, trafia kulę w biegun, który ma właśnie służyć za środek rzutu stereograficznego. [Płaszczyzna (*w*) przechodzi przez środek czworościanu i jest prostopadłą do *h*].

W wypadku 3) i 4) bieguny wpadają w dwa przeciwległe naroża wielościanów.

Punkty *A* są rzutami środków krawędzi;
" *B* " " " ścian;
" *C* " " naroży.

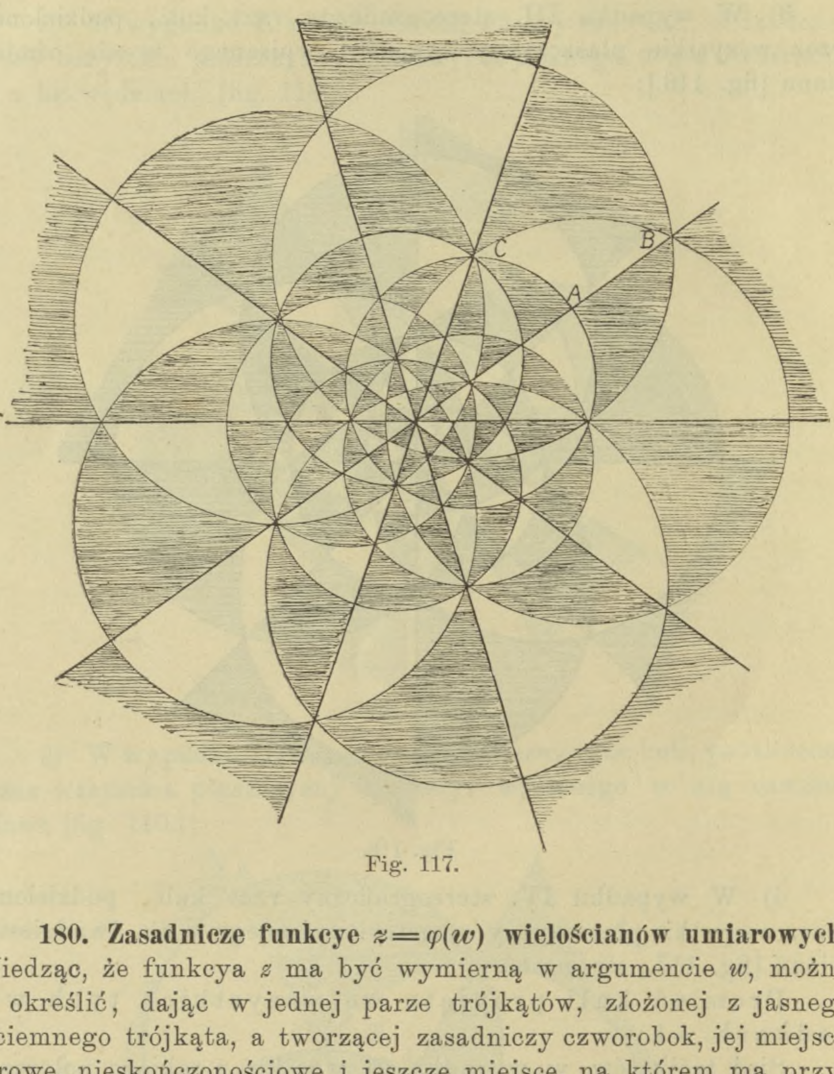


Fig. 117.

180. Zasadnicze funkcye $z=\varphi(w)$ wielościanów umiarowych. Wiedząc, że funkcya z ma być wymierną w argumencie w, można ją określić, dając w jednej parze trójkątów, złożonej z jasnego i ciemnego trójkąta, a tworzącej zasadniczy czworobok, jej miejsca zerowe, nieskończonościowe i jeszcze miejsce, na którem ma przybierać daną wartość skończoną i różną od zera. Żądając:

$$(A)\qquad \begin{cases} \text{aby } z \text{ było } =1 \text{ w punktach } A, \\ \quad ,, \ z \ ,, \ =0 \quad ,, \quad B, \\ \quad ,, \ z \ ,, \ =\infty \quad ,, \quad C, \end{cases}$$

schodzimy przez to do zasadniczych funkcyj $[Z(z)]$, jakie mieliśmy w Tomie I., Rozdz. VIII., [art. 105—122.], dla każdego z wyliczonych wielościanów. Według uwag tam zamieszczonych, a za uwzględnieniem warunków (A) będzie tu:

I. $z = -\dfrac{4w^n}{(w^n - 1)^2}$ dla dwuścianu,

III. $z = \dfrac{(w^8 + 14w^4 + 1)^3}{108w^4(w^4 - 1)^4}$ dla ośmiościanu,

IV. $z = \dfrac{-[(w^{20} + 1) - 228(w^{15} - w^5) + 494w^{10}]^3}{1728[w(w^{10} + 11w^5 - 1)]^5}$ dla dwudziestościanu.

Czworościan trzeba na nowo omówić, gdyż położenie jego w kuli względem płaszczyzny (w) jest tu inne, niż jak-to przyjęto w Tomie I. (l. c.). Punkt B, w którym się na fig. 115. przecinają 3 proste, jest punktem $w=0$, a gdy z tych prostych tę, która jest poziomą, weźmiemy za oś pierwszorzędną uu' płaszczyzny (w), to punkt C, leżący na tej osi na prawo od punktu $B=w=0$ jest punktem $w=1$. Wszystkie punkty B i C będą tu miały takie określenia:

$$B\ldots\ 0,\ 2e^{\frac{\pi i}{3}},\ 2e^{\pi i},\ 2e^{\frac{5\pi i}{3}};\qquad C\ldots\ 1,\ e^{\frac{2\pi i}{3}},\ e^{\frac{4\pi i}{3}}, \infty.$$

Co się tyczy punktów A, to zauważmy przedewszystkiem, że oddalenia co dwóch punktów C, leżących w skończoności, są promieniami ϱ trzech równych sobie kół, jakie mamy na rysunku. Obierzmyż $C=1$ i $C=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, to:

$$\varrho = \left|1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right| = \sqrt{3},$$

a wskutek tego odrazu wnioskujemy, że 3 punkty A, bliższe punktu $w=0$, są:

$$A\ldots\ (\sqrt{3}-1)e^{\frac{\pi i}{3}},\ -(\sqrt{3}-1),\ (\sqrt{3}-1)e^{\frac{5\pi i}{3}},$$

a zaś trzy punkty A dalsze będą:

$$A\ldots\ (\sqrt{3}+1),\ (\sqrt{3}+1)e^{\frac{2\pi i}{3}},\ (\sqrt{3}+1)e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Punkty B czynią zadość równaniu $w(w^3+8)=0$, a punkty C równaniu $w^3-1=0$. Gdy więc — podobnym sposobem, jak w Tomie I. — utworzymy:

II. $$z = \frac{w^3(w^3+8)^3}{64(w^3-1)^3},$$

to będzie to funkcya, która w punktach B jest trzykrotnie zerem, a w punktach C trzykrotnie nieskończonością; [w każdym z punktów B i C schodzi się po 3 pary trójkątów]. Gdy zażądamy wartości w, na których ma być $z=1$, to otrzymamy z (II) równanie:

$$(w^6 - 20w^3 - 8)^2 = 0,$$

a to równanie ma wszystkie punkty A jako pierwiastki*) (każdy pierwiastek jest dwukrotny). Funkcya z jest więc funkcyą, która rozwiązuje zadanie w wypadku II.

Połóżmy w II.:

$$z=\frac{1}{Z},\quad w=\frac{(1+\sqrt{3})v-\sqrt{2+\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})}{v-\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

to mieć będziemy:

$$\text{II}'.\qquad Z=\frac{[v^4-2\sqrt{3}.v-1]^3}{[v^4+2\sqrt{3}.v-1]^3},$$

a to jest funkcya, jaką mieliśmy w Tomie I., przy przyjętem tam położeniu czworościanu.

Za pomocą równań I., II., [lub II'], III., IV. rozwiązuje się zadania odwzorowania danej półpłaszczyzny w trójkącie kołowym o przyjętych jego kątach w każdym poszczególnym wypadku, a trzeba dodać, że **tylko liczby** l, m, n, **zestawione w** (A) [art. poprzedz.] **prowadzą do odwzorowań, określających się równaniem** $z=\varphi(w)$ z wymierną funkcyą $\varphi(w)$.

Uwaga I. Powiedzieliśmy już wyżej, że cała grupa podstawień, zapomocą których obraną którąkolwiek parę sąsiadujących trójkątów (czworobok) przetworzyć można na parę inną, jest złożeniem lub powtórzeniem 2 podstawień (A), (B), lub (B), (C) lub wreszcie (C), (A). Takie dwa podstawienia są **zasadniczemi**. Podstawienie (A) odtwarza jasny trójkąt $\Delta=ABC$ znowu w jasny trójkąt, mający wspólny wierzchołek A z trójkątem Δ, a przegrodzony od A jednym tylko trójkątem ciemnym. Analogiczne znaczenia mają podstawienia (B), (C).

Wybierzmy w wypadku 1) [art. poprzedz.] trójkąty I, II, III (fig. 114.), to trójkąt I przetwarza się w II przez substytucyę:

$$(B)=(w', we^{\frac{2\pi i}{n}})=S \quad (\text{na fig. 114. jest } n=6),$$

---

*) Z równania $w^6-20w^3-8=0$ mamy:

$$w=\sqrt[3]{10\pm\sqrt{108}}.e^{\frac{2s\pi i}{3}},\quad s=0,1,2.$$

Że zaś:

$$10\pm\sqrt{108}=1+3.3\pm6\sqrt{3}=1+3.3\pm3\sqrt{3}\pm(\sqrt{3})^3=(1\pm\sqrt{3})^3,$$

a więc:

$$w=(1\pm\sqrt{3})e^{\frac{2s\pi i}{3}},\quad s=0,1,2,$$

czyli dla znaku + mamy:

$$w=(\sqrt{3}+1).e^{\frac{2s\pi i}{3}},\quad s=0,1,2,$$

a dla znaku — dostajemy:

$$w=-(\sqrt{3}-1)e^{\frac{2s\pi i}{3}}=(\sqrt{3}-1)e^{\frac{(2s+1)\pi i}{3}},\quad s=0,1,2.$$

a przetwarza się w trójkąt III przez substytucyę:

$$(C)=\left(w', \frac{1}{w}\right)=T.$$

Cała więc grupa dwuścianu posiada zasadnicze substytucye S, T.

Gdy na fig. 115. zauważymy trójkąty I, II, III, to trójkąt I przetworzy się w II za substytucyą:

$$(B)=(w', e^{\frac{2\pi i}{3}} w)=S,$$

a przetworzy się w trójkąt III za substytucyą:

$$(C)=\left(w', \frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}\right)=T,$$

w której α, β, γ, δ tak wybrać trzeba, aby punktom:

$$\left.\begin{aligned} w &= A = (\sqrt{3}-1)e^{\frac{\pi i}{3}} \\ w &= B = 0 \\ w &= C = 1 \end{aligned}\right\} \text{(wierzcholkom trójkąta I)}$$

odpowiadały punkty:

$$\left.\begin{aligned} w' &= A = \sqrt{3}+1 \\ w' &= B = 2e^{\frac{\pi i}{3}} \\ w' &= C = 1 \end{aligned}\right\} \text{(wierzcholki trójkąta III)}.$$

Tak utworzone substytucye S, T będą zasadniczemi grupy czworościanu.

W rzucie stereograficznym kuli, podzielonej podług ośmiościanu (fig. 116.), zauważmy znowu trzy trójkąty I, II, III, to widocznie trójkąt I przejdzie na II przez substytucyę:

$$(C)=(w', \sqrt{-1}.w)=S,$$

a przejdzie na trójkąt III przez substytucyę:

$$(B)=\left(w', -\frac{w-i}{w+i}\right)=T\ ^{*})$$

i to będą zasadnicze substytucye grupy ośmiościanu.

W dwudziestościanie wreszcie dostaniemy grupę o zasadniczych substytucyach:

$$S=(w', \varepsilon w), \quad T=\left(w, \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)w+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)w+(\varepsilon-\varepsilon^4)}\right), \quad \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{5}} \quad \text{[T. I., art. 118]}.$$

---

*) Z tego podstawienia wynika, że wierzchołkom $w=C=0$ i $w=A=tg\frac{\pi}{8}$ w trójkącie I odpowiadają wierzchołki:

$$w'=C=1 \quad \text{i} \quad w'=A=e^{\frac{\pi i}{4}}$$

w trójkącie III. Co się tyczy wspólnego wierzchołka B, to go obliczyć możemy z równania $w(w+i)=-(w-i)$, z którego dostajemy:

$$w=w'=B=\frac{-1-i\pm\sqrt{6}\sqrt{i}}{2}=\frac{e^{\pi i}-e^{\frac{\pi i}{2}}\pm\sqrt{6}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}{2}=$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{2}\left[e^{\frac{3}{4}\pi i}-e^{\frac{\pi}{4}i}\pm\sqrt{6}\right]=\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{2}\left[2.\frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}+e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{2}\pm\sqrt{6}\right]=$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2}\left[2\cos\frac{3}{4}\pi\pm\sqrt{6}\right].$$

Uwaga 2. Funkcya w, wynikająca z równania $z=\varphi(w)$, jest w każdym z opisanych czterech wypadków algebraiczną i jest:

w wypadku 1ym (dwuścianu) stopnia $(2n)$go;
" 2gim (czworościanu) " 12go;
" 3cim (ośmiościanu) " 24go;
" 4tym (dwudziestościanu) " 60go.

Gdy $\mathfrak{R}(w,z)$ oznacza powierzchnię Riemanna, wskazującą każdym razem przebieg funkcyi w, to rysunki zamieszczone na fig. 114—117 są cząsteczkowemi odwzorowaniami tej powierzchni na (jednolistnej) płaszczyźnie (w). Te rysunki dadzą więc wyobrażenie i o naturze funkcyi w i o złączonej z nią powierzchni $\mathfrak{R}(w,z)$ *).

W dwuścianie (fig. 114.) mamy: n punktów A, n punktów B i 2 punkty C. W każdym punkcie A i w każdym punkcie B schodzi się po 2 czworoboki (2 pary trójkątów), a w każdym punkcie C po n czworoboków (n par trójkątów). Z tego wnosimy: *Funkcya w dwuścianu jest taką funkcyą algebraiczną argumentu z, że w punkcie $z=1$ i w punkcie $z=0$ posiada po n dwukrotnych punktów rozgałęzienia nad sobą położonych, a w punkcie $z=\infty$ ma dwa n-krotne punkty rozgałęzienia, znowu nad sobą leżące.*

W czworościanie (fig. 115.) mamy: 6 punktów A, a w każdym z nich schodzi się po dwa czworoboki, dalej mamy tam 4 punkty B o trzech schodzących się w nich czworobokach, a wreszcie cztery punkty C znowu o trzech schodzących się w nich czworobokach. Z tego wnosimy: *Funkcya algebraiczna w czworościanu posiada w $z=1$ sześć punktów dwukrotnych rozgałęzienia nad sobą leżących, a w punktach $z=0$, $z=\infty$ ma po cztery trzykrotne punkty rozgałęzienia nad sobą leżące.*

W ośmiościanie (fig. 116.) mamy: 12 punktów A, a w każdym z nich schodzą się po dwa czworoboki, 8 punktów B o trzech schodzących się w nich czworobokach i wreszcie 6 punktów C, a w każdym z nich schodzi się po 4 czworoboki. Stąd wnosimy: *Funkcya algebraiczna w ośmiościanu posiada w $z=1$ dwanaście dwukrotnych punktów rozgałęzienia, w $z=0$ ośm trzykrotnych punktów rozgałęzienia, a w $z=\infty$ sześć czterokrotnych punktów rozgałęzienia.*

W dwudziestościanie (fig. 117.) mamy: 30 punktów A, a w każdym z nich schodzą się po dwa czworoboki, 20 punktów B o trzech schodzących się w każdym z nich czworobokach i wreszcie 12 punktów C, a w każdym z nich schodzi się po 5 czworoboków. Stąd wniosek: *Funkcya algebraiczna w dwudziestościanu posiada 30 dwukrotnych punktów rozgałęzienia w $z=1$, 20 trzykrotnych punktów rozgałęzienia w $z=0$, a 12 pięciokrotnych punktów rozgałęzienia w $z=\infty$.*

---

*) Gdy punkt w poruszył się w otoczeniu punktu A, B, C w ten sposób, że początkowo zawierał się w białym trójkącie, a potem przez jeden trójkąt ciemny przeszedłszy, dostał się znowu do trójkąta jasnego i zajął tam położenie $\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}$ punktu odpowiedniego, to ta zmiana równoważna jest z jednem całkowitem okrążeniem punktu $z=0$, $z=1$, lub $z=\infty$ z początkową wartością z w górnym półliściu $\tilde{z}$ powierzchni $\mathfrak{R}(w,z)$.

181. Funkcye trójkąta rodzaju drugiego ($\lambda+\mu+\nu<1$) i graniczne wypadki $\lambda+\mu+\nu=1$, $\lambda+\mu+\nu=0$. Przejdźmy do funkcyj rodzaju drugiego [o sumie $\lambda+\mu+\nu<1$]. Przedewszystkiem odrazu wnosić można, że gdy jedna tylko z liczb λ, μ, ν będzie niewymierną, to z okaże się funkcyą nieskończenie wielowartościową. Przyjmijmyż wszystkie te 3 liczby wymierne i połóżmy:

$$\lambda=\frac{l'}{l},\quad \mu=\frac{m'}{m},\quad \nu=\frac{n'}{n}.$$

Z równania: $\qquad 2\pi\frac{l'}{l}=2\pi\lambda$, $\quad$ mamy:

$$2\pi l'=2\pi\lambda . l.$$

To wskazuje, że wychodząc z trójkąta ABC, dochodzimy dopiero po l' okrążeniach punktu A do trójkąta, który się okazuje identycznym z ABC. Podobnie dopiero m' okrążeń około punktu B, a n' okrążeń około punktu C doprowadzi do początkowego trójkąta ABC. Funkcya z okazuje się w tym razie wielowartościową ze skończoną ilością gałęzi, jeżeli jedna przynajmniej z liczb l', m', n' okazuje się >1. Gdy przeciwnie jest $l'=m'=n'=1$, to trójkątów przykrywających się nieidentycznie wcale nie ma, a funkcya $z=\varphi(w)$ jest jednoznaczną. Mamy więc twierdzenie:

I. *Gdy λ, μ, ν są w funkcyi w drugiego rodzaju odwrotnościami liczb całkowitych, to $z=\varphi(w)$ jest w tym jedynym wypadku funkcyą jednoznaczną.*

To samo twierdzenie odnieść trzeba do granicznego wypadku $\lambda+\mu+\nu=1$. Ale tu, kładąc $\lambda=1/l$, $\mu=1/m$, $\nu=1/n$ można równaniu

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$$

tylko jedynie takimi układami liczb całkowitych l, m, n zadość uczynić:

(α) $\qquad l=2,\ m=3,\ n=6;$

(β) $\qquad l=2,\ m=4,\ n=4;$

(γ) $\qquad l=3,\ m=3,\ n=3.$

W pierwszym razie mamy trojkąt ABC, jaki powstaje po obydwu stronach wysokości trójkąta równobocznego. W drugim trójkąt ABC jest równoramienny i prostokątny, a w trzecim jest równoboczny. Tworzeniem obrazów danego trójkąta, a dalej obrazów powstających ciągle trójkątów, zakryjemy tu całą płaszczyznę (w), nie wykluczając i części jej, leżących w nieskończoności.

Punkt $w=\infty$ otoczony więc tu będzie nieskończoną mnogością trójkątów, a stąd wynika, że funkcya $z=\varphi(w)$ — jednoznaczna na podstawie twierdzenia I. — zbliża się w otoczeniu $w=\infty$ do każdej wartości, jaką posiada w dowolnej parze trójkątów. Punkt $w=\infty$ jest więc jej jedynym punktem istotnie osobliwym.

Ale jeszcze bliżej możemy określić charakter funkcyi z. Oto przez sieć trójkątów, jaką mamy na płaszczyźnie (w), tworzą się zarazem w każdym z trzech wypadków dwie gromady równoległych prostych, a w powstających stąd równoległobokach powtarzają się wartości funkcyi $z=\varphi(w)$ peryodycznie. Stąd twierdzenie:

I. *Funkcya* $z=\varphi(w)$ *w razie* $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$ *przy całkowitych* l, m, n, *jest funkcyą eliptyczną.*

Podług art. 152. określi ją równanie:

$$w=\int_0^z z^{\lambda-1}(1-z)^{\mu-1}dz,$$

albo równanie różniczkowe:

$$\frac{dw}{dz}=z^{\lambda-1}(1-z)^{\mu-1}.$$

Funkcya $w=f(z)$ będzie tu funkcyą nieskończenie wielowartościową, a z identycznych podstawień:

$$\begin{array}{lll} (A)^2=1,\ (B)^3=1,\ (C)^3=1, & \text{w wypadku} & (\alpha), \\ (A)^2=1,\ (B)^4=1,\ (C)^4=1 & \quad " & (\beta), \\ (A)^3=1,\ (B)^3=1,\ (C)^3=1 & \quad " & (\gamma), \end{array}$$

wywnioskujemy z łatwością, jakiej krotności są dla w punkty rozgałęzienia, przypadające na $z=0, 1, \infty$. W każdym razie w każdym z tych punktów powtarzają się punkty rozgałęzienia tejsamej krotności nieskończenie wiele razy.

W razie $\lambda+\mu+\nu=0$, a więc: $\lambda=\mu=\nu=0$, jest funkcya z zawsze jednoznaczną [art. 177., fig. 105]. Co się tyczy funkcyi w w tym wypadku, to zauważmy, że wskutek $\lambda=\mu=\nu=0$ ma równanie Gaussa (1) — art. 176. — postać:

$$(A)\qquad \frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1-2z}{z(1-z)}\frac{dy}{dz}-\frac{1}{4z(1-z)}y=0,$$

a jemu — jak łatwo można sprawdzić — zadość czynią całki:

$$(a)\qquad K(z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-z\sin^2\varphi}},\quad K'(z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-z)\sin^2\varphi}}\ ^{*)},$$

*) Całkując równanie A szeregiem potęgowym, przekonamy się, że jemu zadość czyni szereg:

$$\mathfrak{P}(z)=C[1+\frac{1^2}{2^2}z+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}z^2+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}z^3+...],$$

prowadzące do peryodów funkcyj eliptycznych Jacobi'ego z modułem $k^2=z$.

Wskutek tego można tu położyć:

$$w=-\frac{iK'(z)}{K(z)}=\frac{\omega_3}{\omega_1}\text{*)}\ \text{[art. 131, (12)]}.$$

Gdy $z=0$, dostajemy z (a): $K'=\infty$, a K skończone. Dla $z=1$ dostaniemy przeciwnie $K=\infty$, a K' skończone. Stąd pochodzi, że:

$$(b)\qquad \begin{array}{l} w=\infty,\ \text{gdy } z=0, \\ w=0,\ \text{gdy } z=1. \end{array}$$

Napiszmy, gdy ma być $z=\infty$, formy (a) w postaciach:

$$K(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{z^{-1}-\sin^2\varphi}},\quad K'(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{z^{-1}-(z^{-1}-1)\sin^2\varphi}},$$

to przekonamy się, że:

$$(c)\qquad w=1,\ \text{gdy } z=\infty.$$

Łatwo dalej sprawdzić można, że między K a K' zachodzi równanie różniczkowe:

$$K\frac{dK'}{dz}-K'\frac{dK}{dz}=-\frac{\pi}{4z(1-z)}\text{**)}.$$

Z niego dostajemy:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{K'}{K}\right)=-\frac{\pi}{4K^2z(1-z)},$$

a gdy tu po prawej stronie za K^2 wstawimy szereg:

$$\frac{\pi^2}{4}\left[1+\ldots\ldots\right]$$

i rozwiniemy potem $-\pi/4K^2z(1-z)$ w otoczeniu $z=0$, to dostaniemy:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{K'}{K}\right)=-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+z\mathfrak{P}(z)\right\}.$$

---

a ten — gdy $C=\frac{\pi}{2}$ — jest $=K(z)$, art. 131. Gdy dalej w równaniu (A) położymy $z=1-z'$, okaże się, że całe równanie zmieni się tylko o tyle, że w nim wszędzie zamiast z wystąpi z'. Że zaś naodwrót $z'=1-z$, więc i $K'(z)$ będzie całką równania (A).

*) Czynnik $(-i)$ dodany ilorazowi K'/K nie zmieni wcale natury zadania, bo w można zastąpić dowolną liniową funkcyą, utworzoną z w.

**) Trzeba tylko K i K' przedstawić szeregami:

$$K(z)=\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1^2}{2^2}z+\ldots\right],\quad K'(z)=\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1^2}{2^2}(1-z)+\ldots\right].$$

Stąd mamy:

$$\frac{K'}{K}=-\frac{1}{\pi}\log z+\mathfrak{P}_1(z),\ \text{a więc: } K'=-\frac{K}{\pi}\log z+K\mathfrak{P}_1(z).$$

Gdy punkt $z=0$ okrążymy raz w dodatnim kierunku, to K przez to nie dozna zmiany, bo punkt $z=0$ nie jest dlań szczególnym. Przeciwnie K' przejdzie na $K'-2Ki$; a więc $-iK'$ przechodzi na $(-iK'-2K)$, a iloraz w zmienia się na $(w-2)$.

W podobny sposób wywnioskujemy, ża przez okrążenie punktu $z=1$, który jest znowu zwyczajnym punktem dla K', zmieni się tylko K na $K-2iK'$, a więc w na $\frac{w}{2w+1}$.

Z tego — według ogólnych zasad teoryi funkcyj trójkąta — wynika, że funkcya $z=\varphi(w)$ zmieniać się nie będzie w nieskończonej grupie podstawień, utworzonej z dwóch zasadniczych podstawień:

$$(w', w-2),\quad \left(w', \frac{w}{2w+1}\right).$$

Zamiast pierwszej z tych substytucyj możemy wziąć jej odwrotność i tworzyć grupę z podstawień:

$$S=(w', w+2),\quad T=\left(w', \frac{w}{2w+1}\right).$$

Co się tyczy kształtu trójkąta, to z (*b*), (*c*) wynika, że ma on mieć wierzchołki w punktach 0, 1, ∞. Położmyż $w=u+vi$, a $w=\infty$ obierzmy w punkcie $vi=+\infty i$, to kołem łączącem punkty $w=0$ i $vi=\infty i$ będzie oś vv, określająca się równaniem $u=0$. Zakreślmy dalej nad osią uu z punktu $u=\frac{1}{2}$, jako środka, półkole k promieniem $=\frac{1}{2}$, a dalej narysujmy prostę $u=1$, to trójkąt położony nad osią uu, a ograniczony prostemi $u=0$, $u=1$ i półkolem k, będzie już spełniał warunki, dane w (*b*) i w (*c*). Taki-to trójkąt Δ odwzorowuje się tu w półpłaszczyźnie $\bar{z}$. Trójkąt Δ wraz z trójkątem Δ_1, który może być obrazem pierwszego w prostej $u=0$, będzie już zasadniczym czworokątem $(\Delta+\Delta_1)$ utworzonej grupy.

Funkcya $z=\varphi(w)$ nie zmienia się w tej grupie i istnieje tylko ponad osią uu, która jest tu ortogonalnem kołem dla trójkątów całej nieskończonej sieci. Argument zatem $w=\omega_3/\omega_1=\alpha+\beta i$ posiada zawsze $\beta>0$. To zaś spełnić można zawsze, bo w razie $\beta<0$ dość jest zamiast (ω_3, ω_1) użyć pierwotnej pary peryodów $(-\omega_3, \omega_1)$. Spółrzędna β może się dowolnie przybliżać do zera, ale zerem nigdy być nie może, gdyż stosunek peryodów nie może nigdy wyrażać się liczbą rzeczywistą.

182. Grupa harmoniczna i jej funkcya. Na fig. 118. mamy z punktów $w=0$, $w=1$ zakreślone koła o promieniu $=1$ i ich wspólną cięciwę; przechodzi ona przez punkt $w={}^1/_2$ i jest prosto-

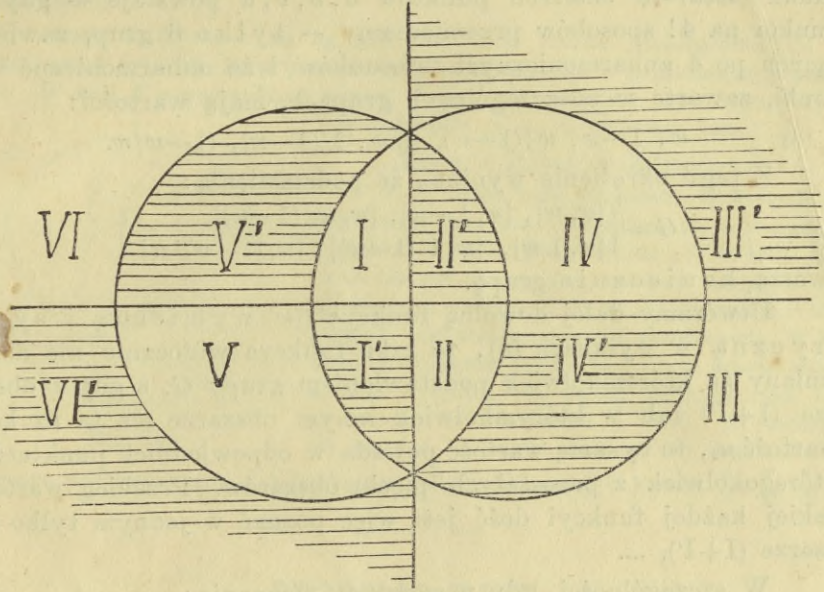


Fig. 118.

padła do osi pierwszorzędnej płaszczyzny (w). Te dwa koła wraz z ową wspólną cięciwą i osią pierwszorzędną, dzielą całą płaszczyznę (w) na 12 trójkątów kołowych, a gdy z nich co drugi zaciemnimy, spostrzeżemy łatwo, że w każdej parze trójkątów o wspólnym boku jest każdy obrazem drugiego w tym boku. Zauważmy trójkąt jasny I, a każdy punkt w nim zawarty nazwijmy w. Wtedy w trójkącie jasnym II leżą punkta $(1-w)$; w trójkącie jasnym III $1/w$; w trójkącie jasnym IV punkta $1/(1-w)$; w trójkącie jasnym V punkta $w/(w-1)$; a w trójkącie jasnym VI punkta $(w-1)/w$.

Dopełnijmy trójkąt I trójkątem ciemnym I', będącym odbiciem trójkąta I w osi pierwszorzędnej i niech w przedstawia punkta zawarte w obszarze (I+I'), to teraz cała płaszczyzna (w) rozpadnie się na 6 takich obszarów:

Obszar	(I+I')	zapełniony	punktami	w;
„	(II+II')	„	„	$(1-w)$;
„	(III+III')	„	„	$1/w$
„	(IV+IV')	„	„	$1/(1-w)$,

Obszar (V+V') zapełniony punktami $w/(w-1)$;
" (VI+VI') " " $(w-1)/w$.

Wiadomo z rzutowej geometryi, że z anharmonicznego stosunku $(abcd)=w$ czterech punktów a, b, c, d powstaje — gdy te punkta na 4! sposobów przemieniamy — tylko 6 grup, zawierających po 4 anharmonicznych stosunków i że anharmoniczne stosunki, zawarte w poszczególnych grupach, mają wartości:

(a) w, $1-w$, $w/(1-w)$, $1/w$, $1/(1-w)$, $(1-w)/w$.

Z tego określenia wynika, że podstawienia:

$$G=\left\{\begin{matrix}[w, w], [w, 1-w], [w, w/(1-w)] \\ [w, 1/w], [w, 1/(1-w)], [w, (1-w)/w]\end{matrix}\right\}$$

tworzą koniecznie grupę.

Utwórzmy dalej dowolną funkcyę $f(w)$ wymierną i symetryczną w wyrazach (a), to taka funkcya widocznie nie dozna zmiany za któremkolwiek podstawieniem grupy G, a gdy w obszarze (I+I') lub w którymkolwiek innym obszarze ma ta funkcya wartość u_z, to tę samą wartość posiada w odpowiednich punktach*) któregokolwiek z pozostałych pięciu obszarów. Przebieg wartości takiej każdej funkcyi dość jest więc poznać w jednym tylko obszarze (I+I'), ...

W szczególności, gdy utworzymy równanie:

$$[v-w][v-(1-w)]\left[v-\frac{w}{1-w}\right]\left[v-\frac{1}{w}\right]\left[v-\frac{1}{1-w}\right]\left[v-\frac{w-1}{w}\right]=0,$$

to jego spółczynniki, jako symetryczne w wyrazach (a), będą już funkcyami o grupie G. Że zaś to równanie sprowadza się do postaci:

$$v^6-4v^5+[6-A(w)]v^4-[7-2A(w)]v^3+[6-A(w)]v^2-3v+1=0,$$

gdzie:

$$(b) \qquad A(w)=\frac{(w^2-w+1)^3}{(w^2-w)^2}=z,$$

więc widocznie i funkcya $A(w)$ należeć będzie do funkcyj niezmieniających się wcale w grupie G. Ta grupa — jak łatwo można okazać — posiada dwie zasadnicze substytucye:

$$S=\left(w, \frac{1}{w}\right), \quad T=(w, 1-w).$$

---

*) Gdy punkta obszaru (II+II') naznaczymy na chwilę przez w', to punkt w' związany równaniem $w=1-w'$ uważamy za odpowiadający w tym obszarze punktowi w obszaru (I+I'). W ten sam sposób doszuka się punktów odpowiadających punktowi w, a leżących w dalszych obszarach (III+III'), ...

Uwaga 1. Gdy położymy $w=k^2$, dostaniemy z (b) $\frac{27}{4}J(k)$, gdzie $J(k)$ jest niezmiennikiem całek lub funkcyj eliptycznych o module k — por. art. 91.

Połóżmy: $w=-\left(\frac{v^2-1}{2v}\right)^2$, to dostaniemy z (b) zasadniczą funkcyę $z(v)$ ośmiościanu.

Uwaga 2. Rysunek na fig. 118. jest także rzutem stereograficznym na płaszczyznę (w) kuli K w pewien sposób podzielonej, a posiadającej promień $=1$. W kuli K poprowadźmy równik R (fig. 119.), a przez jego bieguny P, P' trzy południki p_1, p_2, p_3 tworzące kąty:

$$\sphericalangle(p_1p_2)=\sphericalangle(p_2p_3)=\sphericalangle(p_3p_1)=\frac{\pi}{3}.$$

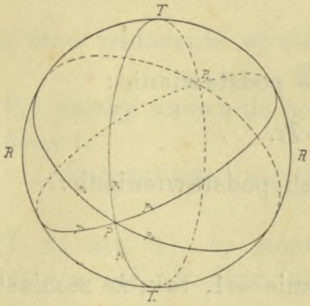


Fig. 119.

T, T_1 niech będą punktami, w których się południk p_1 przecina z równikiem R, a w punkcie T_1 połóżmy płaszczyznę styczną (w) do kuli. Gdy teraz tak podzieloną kulę rzucimy na (w) stereograficznie z punktu T, to na (w) dostaniemy taki podział, jaki właśnie fig. 118. przedstawia. W każdym z trójkątów mamy tam $l=2$, $m=2$, $n=3$, a więc wypadek ten należy zaliczyć (jak jest w istocie) do dwuścianu o $n=3$, a równanie (b) uważać za takie, którem się cząsteczkowo sprzęga półpłaszczyzną $\bar{z}$ z trójkątem kołowym [na (w)] o kątach $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$.

ROZDZIAŁ XXIII.

Z teoryi funkcyj modułowych.

---

183. Grupa modułowa. Całkowity nieskończony zbiór podstawień:

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}=Sz \tag{1}$$

o całkowitych rzeczywistych spółczynnikach, czyniących zawsze zadość warunkowi, aby wyznacznik: $\Delta=ad-bc=+1$, jest na podstawie już swojego określenia — grupą. Złożenie bowiem dwóch takich substytucyj Sz, S_1z daje substytucyę znowu o całkowitych spółczynnikach, a gdy pierwsza ma wyznacznik $\Delta=+1$, a druga wyznacznik $\Delta_1=+1$, to złożenie SS_1z*) ma wyznacznik $\Delta.\Delta_1$, a więc znowu $=+1$. Tosamo dalej odnosi się do złożeń dowolnie wielu substytucyj i do iteracyj dodatnich, a nawet o d j e m n y c h dowolnego stopnia, nie wyłączając i każdej odwrotnej substytucyi.

---

*) SS_1z oznacza, że na z dokonano naprzód podstawienia S_1, z czego powstało S_1z, a potem S_1z poddano podstawieniu S.

*

Taką grupę nazywamy m o d u ł o w ą. W niej znajdują się niezawodnie dwie takie substytucye:

$$Sz=z+1,\quad Tz=-\frac{1}{z}.$$

Z tych pierwsza iteracyami (dodatniemi i odjemnemi) nie doprowadzi nigdy do substytucyi identycznej, gdyż mamy:

(2) $$S^\nu z=z+\nu,\quad \nu=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$$

Przeciwnie z drugiej dostajemy:

(3) $$T^2 z=z,$$

a więc identyczną substytucyę, a odwrotne podstawienie:

(4) $$T^{-1}z=-\frac{1}{z},\ \text{a więc} =Tz.$$

Z tego powodu we wszelkich złożonych podstawieniach:

(5) $$\begin{aligned}&\ldots S^\alpha T^{\alpha'} S^\beta T^{\beta'} \ldots S^\lambda\\ &\ldots S^\alpha T^{\alpha'} S^\beta T^{\beta'} \ldots S^\lambda T^{\mu'}\end{aligned}$$

mogą być wykładniki substytucyi T wyłącznie $=1$, tak, że zamiast (5) dostajemy:

(6) $$\begin{aligned}&\ldots S^\alpha T S^\beta T \ldots S^\lambda,\ \text{lub}\\ &\ldots S^\alpha T S^\beta T \ldots S^\lambda T.\end{aligned}$$

gdzie α, β, ,.., λ mogą być dodatnie lub odjemne.

Złożenia (6) zaczynają się (w ich pisaniu) albo od T albo od S^w. Takie złożenia należą oczywiście do grupy modułowej, bo posiadają spółczynniki całkowite, a ich wyznaczniki mają zawsze wartość $=+1$.

Udowodnimy naodwrót, że każda dowolna substytucya grupy modułowej da się przedstawić złożeniem substytucyj S, T, a to znaczy:

I. *Grupa modułowa ma dwie zasadnicze substytucye:*

$$Sz=z+1,\quad Tz=-\frac{1}{z}.$$

D o w ó d. Zauważmy najdowolniejszą substytucyę:

$$Uz=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc=+1,$$

a obok niej substytucyę:

$$U'z=\frac{-cz-d}{az+b}.$$

$U'z$ należy znowu do modułowych, bo i jej wyznacznik jest $ad-bc$, a z niej dostaniemy widocznie Uz poddając ją substytucyi T, tak, że:

(α) $$Uz=TU'z.$$

Mając to, zauważmy nasamprzód taką substytucyę Uz, w której $|a| \geqq |c|$ i połóżmy:

$$(7) \qquad Uz = \left(\frac{az+b}{cz+d} - \lambda\right) + \lambda,$$

gdzie λ ma być liczbą całkowitą, a o jej znaku później rozstrzygniemy. Z (7) dostajemy:

$$Uz - \lambda = \frac{(a-c\lambda)z + (b-d\lambda)}{cz+d} = V_1 z,$$

a stąd widocznie wynika:

$$S^\lambda(Uz-\lambda) = Uz = S^\lambda V_1 z.$$

$V_1 z$ należy znowu do podstawień modułowych, bo i tu wyznacznik $\varDelta = +1$.

Założyliśmy $|a| \geqq |c|$. Przyjmijmyż λ takiego znaku, aby

$$Sign\, a = Sign\, c\lambda,$$

[T. I., art. 8.], to można dalej $|\lambda|$ tak wybrać, aby się okazało $|c| > |a-c\lambda|$. Podług (α) można położyć:

$$V_1 z = TV_2 z, \quad \text{a więc:}$$

$$Uz = S^\lambda T V_2 z.$$

W $V_2 z$ jest spółczynnikiem przy z w liczniku: $-c$, a spółczynnik przy z w mianowniku jest: $(a-c\lambda)$. Połóżmyż znowu:

$$V_2 z = S^\mu V_3 z,$$

to dostaniemy:

$$Uz = S^\lambda T S^\mu V_3 z;$$

przytem w $V_3 z$ mamy jako spółczynnik przy z w liczniku:

$$c-(a-c\lambda)\mu,$$

a spółczynnikiem przy z w mianowniku będzie: $(a-c\lambda)$. Tutaj μ będzie można znowu tak obrać, aby było:

$$|a-c\lambda| > |c-(a-c\lambda)\mu|.$$

Podług (α) można dalej położyć:

$$V_3 z = TV_4 z, \quad \text{a więc:}$$

$$Uz = S^\lambda T S^\mu T V_4 z.$$

Dalej będzie:

$$Uz = S^\lambda T S^\mu T S^\nu T V_5 z \quad \text{i t. d.}$$

Pojawia się tu szereg liczb:

$$a,\ c,\ a-c\lambda,\ c-(a-c\lambda)\mu,\ (a-c\lambda)-[c-(a-c\lambda)\mu]\nu,\ \ldots.$$

taki, że:

$$|a| > |c| > |a-c\lambda| > |c-(a-c\lambda)\mu| > \ldots.$$

a że to są same liczby całkowite, więc ostatecznie po skończonej ilości przerobień dojdziemy do:

(8) $$Uz = S^{\lambda} T S^{\mu} T \ldots S^{\omega} T . V_{\omega} z, \text{ gdzie:}$$

$$V_{\omega} z = \frac{\beta}{\gamma z + \delta}.$$

Lecz, jak w Uz, $V_1 z$, $V_2 z$, ..., tak samo i w $V_{\omega} z$ musi być wyznacznik: $0.\delta - \beta.\gamma = +1$ przy całkowitych δ, β, γ.

Gdy więc okaże się $\beta = -1$, $\gamma = +1$, to mamy:

$$V_{\omega} z = \frac{-1}{z + \delta}.$$

Z tego kształtu wnosimy, że:

$$V_{\omega} z = T S^{\delta} z.$$

Wstawiając to w (8) i uwzględniając, że $TT = 1$, mieć będziemy ostatecznie kształt:

(a) $$Uz = S^{\lambda} T S^{\mu} T \ldots T S^{\varrho} z.$$

W razie $\beta = +1$, $\gamma = -1$, mamy:

$$V_{\omega} z = \frac{+1}{-z + \delta} = \frac{-1}{z - \delta} = T S^{-\delta} z,$$

a więc i tu kształt (a) utrzyma się. Uz jest więc — w założeniu $|a| > |c|$ — zawsze złożeniem podstawień: S, T.

Przyjmijmy teraz $|a| < |c|$. Tworząc wtedy:

$$TUz = \frac{-cz + d}{az + b}$$

mamy już w tej substytucyi spółczynnik przy z w liczniku większy bezwzględnie niż bezwzględny spółczynnik przy z w mianowniku. Tę substytucyę będzie więc można przedstawić znowu złożeniem substytucyj S, T. Połóżmyż:

$$TUz = S^{\lambda} T S^{\mu} T \ldots T S^{\varrho} z,$$

to stąd — poddając obie strony podstawieniu $T^{-1} = T$ — dostaniemy

(b) $$Uz = T S^{\lambda} T S^{\mu} T \ldots T S^{\varrho} z,$$

Każda więc substytucya grupy modułowej jest złożeniem substytucyj S, T. Twierdzenie I. mamy udowodnione.

Każde dwa punkta: z, $z' = Uz$, gdzie Uz jest dowolną substytucyą grupy modułowej, nazywamy równoważnymi. Gdy tak nie jest, punkta z, z' są nierównoważne; [te określenia pozostają w każdej dowolnej grupie].

O punktach równoważnych trzeba zauważyć:

Gdy $z' = Uz = \frac{az + b}{cz + d}$, a położymy $z = x + yi$, z warunkiem, że $y > 0$ jest, to w z' otrzymamy na część czysto urojoną wyraz:

$$vi = \frac{+yi}{(cx + d)^2 + c^2 y^2},$$

a tu widocznie $v > 0$. Z tego wnosimy:

II. *Dowolnie wybrany punkt z na płaszczyźnie (z) nigdy — po zastosowaniu do niego dowolnej substytucyi grupy modułowej — nie przeniesie się na drugą stronę pierwszorzędnej osi xx.*

W szczególności, gdy $z=x$, a więc leży na osi xx, to także i każde z' leży na tej osi.

Gdy $|z|=\infty$, to $z'=\left.\frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}\right]_{z=\infty}=\frac{a}{c}$, a stąd wynika, że punktom z, leżącym w nieskończoności, odpowiada wszędzie gęsta mnogość punktów z', rozpostarta na osi xx.

Należałoby teraz ograniczyć na płaszczyźnie (z) taki obszar $[z]$, któryby tworząc continuum zwarte — zawierał same nierównoważne, i to wszystkie nierównoważne punkta. Taki obszar będzie zasadniczym obszarem grupy. Dalej wychodząc z obszaru $[z]$ należałoby na płaszczyźnie (z) wyznaczyć wszelkie obszary $U[z]$, jakie z $[z]$ powstają, przez zastosowanie do wszystkich jego punktów wszelkich możliwych substytucyj grupy modułowej.

Tego dokonamy w następnych art., szukając funkcyi, która właśnie w grupie modułowej wcale zmieniać się nie będzie.

184. Funkcya modułowa $J(\tau)$. Gdy $2\omega_1$, $2\omega_3$ mają być pierwotną parą peryodów funkcyi eliptycznej $\wp(u)$, to można o nich zawsze założyć, że w ilorazie:

$$\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\alpha+\beta i$$

jest $\beta>0$ — art. 181.

Przyjmijmy, że do utworzonej funkcyi $\wp(u)$ należą niezmienniki g_2, g_3 i utwórzmy jej bezwzględny niezmiennik:

$$J=\frac{g_2{}^3}{g_2{}^3-27g_3{}^2}. \tag{1}$$

Podług art. 139., (15) jest:

$$g_2=60\sum{}'\frac{1}{(2\mu_1\omega_1+2\mu_3\omega_3)^4},\quad g_3=140\sum{}'\frac{1}{(2\mu_1\omega_1+2\mu_3\omega_3)^6}, \tag{2}$$

gdzie sumowanie odbywa się na wszelkich $\mu_1 \gtreqless \mu_3=0, \pm1, \pm2, \ldots$, ale μ_1, μ_3 równocześnie $=0$ nie wchodzą w te sumy. Niezmiennik g_2 jest więc jednorodną funkcyą $(-4)^{go}$ stopnia peryodów $2\omega_1$, $2\omega_3$, a $g_2{}^3$ będzie takąż funkcyą już $(-12)^{go}$ stopnia tych peryodów. Niezmiennik g_3 jest jednorodną funkcyą $(-6)^{go}$ stopnia peryodów

$2\omega_1$, $2\omega_3$, a jego potęga $g_3{}^2$ będzie znowu takąż funkcyą $(-12)^{go}$ stopnia. Z tego wynika, że mianownik $(g_2{}^3-27g_3{}^2)$ będzie również już funkcyą jednorodną $(-12)^{go}$ stopnia. Połóżmyż:

$$(3) \qquad g_2=G_2(\omega_1\omega_3),\ g_2{}^3-27g_3{}^2=G_3(\omega_1,\omega_3),$$

to wyjmując po prawych stronach czynnik $\omega_1{}^{-12}$, dostaniemy:

$$(4) \qquad \begin{aligned} g_2&=\frac{1}{\omega_1{}^{12}}G_2(1,\tau)=\frac{1}{\omega_1{}^{12}}H_2(\tau),\\ g_3&=\frac{1}{\omega_1{}^{12}}G_3(1,\tau)=\frac{1}{\omega_1{}^{12}}H_3(\tau),\end{aligned}$$

a stąd wynika, że:

$$(5) \qquad J=J(\tau)=\frac{H_2(\tau)}{H_2(\tau)}=\varphi(\tau)$$

okazuje się funkcyą samego ilorazu $\frac{\omega_3}{\omega_1}=\tau$.

Lecz formy (2) nie zmieniają się wcale, jeżeli w nich zamiast $2\omega_1, 2\omega_3$ użyjemy jakiejkolwiek innej pary pierwotnych peryodów $2\bar{\omega}_1, 2\bar{\omega}_3$. Że zaś każda taka nowa para peryodów związana jest z $2\omega_1$, $2\omega_3$ związkiem:

$$\bar{\omega}_1=p\omega_3+q\omega_1,\qquad \bar{\omega}_3=p'\omega_3+q'\omega_1$$

z dowolnymi całkowitymi p, q, p', q' o wyznaczniku:

$$\Delta=pq'+p'q=\pm 1,$$

więc stąd wynika, że funkcya J w formie (5), a więc jako funkcya ilorazu τ, nie zmieni się wcale, gdy w niej τ zastąpimy przez:

$$(6) \qquad \tau'=\frac{p\tau+q}{p'\tau+q'}$$

o dowolnych całkowitych p, q, p', q' z wyznacznikiem $\Delta=\pm 1$.

Zatrzymując z podstawień (6) te tylko, w których $\Delta=+1$, dochodzimy do wniosku:

I. *Funkcya $J=\varphi(\tau)$ nie zmienia się wcale mimo podstawień grupy modułowej, albo inaczej: funkcya J jest automorficzną w grupie modułowej.*

185. Równanie różniczkowe peryodu całki eliptycznej rodzaju pierwszego. Każdy dowolny peryod $2\bar{\omega}=2n_1\omega_1+2n_3\omega_3$ da się — jak wiadomo — przedstawić całką:

$$(a) \qquad 2\bar{\omega}=\int\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}$$

obliczoną po pewnej zamkniętej drodze σ, leżącej na powierzchni Riemanna obrazu algebraicznego $S^2=4s^3-g_2s-g_3$; [droga ta składa się z wielokrotnych kół nieprzywiedlnych K_1, K'_1]. Gdy po tejsamej drodze obliczony peryod całki rodzaju drugiego nazwiemy $2\tilde{\eta}$, to:

$$(b) \qquad 2\tilde{\eta}=\int\frac{s\,ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}.$$

Połóżmy w (a) $s=\frac{g_3}{g_2}z$, to mieć będziemy:

$$2\tilde{\omega}=\int\sqrt{\frac{g_2}{g_3}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{4z^3-\frac{g_2{}^3}{g_3{}^2}(z+1)}}.$$

Że zaś — jak z (1) art. poprzedz. wynika —

$$\frac{g_2{}^3}{g_3{}^2}=\frac{27J}{J-1},$$

co nazwiemy krótko g, więc kładąc jeszcze $2\tilde{\omega}.\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}=\Omega$, dostajemy:

$$(a') \qquad \Omega=\int\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g(z+1)}}.$$

Analogicznie postępując z całką (b) i kładąc $2\tilde{\eta}\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}=-H$, mieć będziemy:

$$(b') \qquad -H=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3+g(z+1)}}.$$

Z form (a'), (b') wynika, że peryody Ω, $-H$ będą funkcyami parametru J, zawartego w całkach. Połóżmy:

$$\sqrt{4z^3+g(z+1)}=R,$$

to różniczkując Ω i $-H$ podług g, dostaniemy:

$$(\mathrm{I}) \qquad \left|\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dg}&=-\int\frac{dz}{2R^2}-\int\frac{z\,dz}{2R^3}\\ \frac{dH}{dg}&=\int\frac{z\,dz}{2R^3}+\int\frac{z^2dz}{2R^3}.\end{aligned}\right.$$

Po prawej stronie mamy tu trzy całki:

$$\int\frac{z^\alpha dz}{2R^3}, \quad \alpha=0,1,2,$$

które trzeba obliczyć. W tym celu zauważmy przedewszystkiem, że każda z funkcyj $\frac{z^\alpha}{R}$, $\alpha=0,1,2$, mając w pewnym punkcie P drogi σ pewną wartość W_α, przybiera tę samą wartość W_α, gdy — po całkowitem obejściu drogi σ — znowu do punktu P wrócimy. Wskuteg tego będą całki:

(1) $$\int_\sigma d\left(\frac{z^\alpha}{R}\right)=0, \quad \alpha=0, 1, 2,$$

[obliczone po drodze σ]. Gdy $\alpha=0$, to:

$$d\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{-12z^2-g}{2R^3}dz,$$

a więc dostajemy tu podług (1):

(A) $$12\int\frac{z^2dz}{2R^3}+g\int\frac{dz}{2R^3}=0.$$

Gdy $\alpha=1$, lub $=2$, to:

(2) $$d\left(\frac{z^\alpha}{R}\right)=\frac{2R^2\alpha z^{\alpha-1}-z^\alpha(12z^2+g)}{2R^3}dz,$$

a więc dla $\alpha=1$ mamy podług (1):

(3) $$\int\frac{dz}{R}-\int\frac{12z^3+gz}{2R^3}dz=0, \quad \text{albo:}$$

$$\int\frac{dz}{R}-\int\frac{3(4z^3+gz+g)-2gz-3g}{2R^3}=0,$$

albo wreszcie:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{R}+2g\int\frac{z\,dz}{2R^3}+3g\int\frac{dz}{2R^3}=0.$$

Że zaś $\frac{1}{2}\int\frac{dz}{R}=\frac{\Omega}{2}$, więc mamy stąd:

(B) $$2g\int\frac{z\,dz}{2R^3}+3g\int\frac{dz}{2R^3}=\frac{\Omega}{2}.$$

Analogicznie postępując z całkowaniem formy (2) przy $\alpha=2$, dojdziemy do związku:

(C) $$2g\int\frac{z^2dz}{2R^2}+3g\int\frac{z\,dz}{3R^3}=\frac{H}{2}.$$

Gdy równania (A), (B), (C) rozwiążemy ze względu na 3 wchodzące w nie całki, otrzymamy:

$$\int\frac{z^2dz}{2R^3}=\frac{2H-2\Omega}{8(g+27)}, \quad \int\frac{z\,dz}{2R^3}=\frac{9\Omega+18H}{4g(g+27)}, \quad \int\frac{dz}{2R^3}=\frac{9\Omega-6H}{2g(g+27)}.$$

Po wstawieniu tych tak obliczonych całek w równania (I), dostajemy:

(II) $$\begin{cases} 4(g+27)\dfrac{d\Omega}{dg}+(18+g)\Omega+6H=0, \\ 4(g+27)\dfrac{dH}{dg}+\dfrac{1}{2}g\Omega-(g+18)H=0. \end{cases}$$

Uwzględniając tu:

$$g=\frac{27J}{1-J} \quad \text{i} \quad dg=\frac{27}{(1-J)^2}dJ,$$

mieć będziemy po wszelkich skróceniach:

$$(A') \qquad 36J(J-1)\frac{d\Omega}{dJ}-3(J+2)\Omega+2(J-1)=0,$$

$$(B') \qquad 24(J-1)J\frac{dH}{dJ}-3J\Omega+2(J+2)H=0.$$

Dalej różniczkowaniem równania (A'), dochodzimy do związku:

$$(C') \quad 36J(J-1)\frac{d^2\Omega}{dJ^2}=(69J-42)\frac{d\Omega}{dJ}+2(J-1)\frac{dH}{dJ}-3\Omega+2H=0,$$

a gdy z równań (A'), (B'), (C') wyeliminujemy H i $\frac{dH}{dJ}$, dojdziemy do równania:

$$(5) \qquad \frac{d^2\Omega}{dJ^2}+\frac{1}{J}\frac{d\Omega}{dJ}+\frac{\frac{31}{144}J-\frac{1}{36}}{J^2(J-1)^2}\Omega=0. \text{*)}$$

Jestto równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego. Jego całką jest $\Omega=\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}2\bar{\omega}$, a więc także i każdy dowolny peryod $2\bar{\omega}$. Całkami tego równania będą więc i pierwotne peryody $2\omega_1$, $2\omega_3$, a ogólną całką będzie $2c_1\omega_1+2c_3\omega_3$, przy najdowolniejszych wartościach stałych c_1, c_2. W razie całkowitych c_1, c_2 daje taka całka peryody $2\bar{\omega}$, jako funkcye niezmiennika J.

Według teoryi równań różniczkowych liniowych rozwija się każda całka równania (5) na zwykły szereg potęgowy p o z a p u n k t a m i $J=0$, $J=1$, $J=\infty$.

Przeciwnie punkta $J=0, 1, \infty$ są punktami rozgałęzienia każdej całki $(2c_1\omega_1+2c_3\omega_3)$, a okrążenie każdego z tych punktów zmienia tę całkę w ten sposób, że w niej (po dokonanem okrążeniu) w miejsce ω_1, ω_3 trzeba wstawić $2d_1\omega_1+2d_3\omega_3$ z stosownie obliczonemi stałemi d_1, d_2 dla każdego z punktów 0, 1, ∞.

186. Zasadniczy czworobok grupy modułowej. Gdy utworzymy dla równania różniczkowego (5) — art. poprzedz. — niezmiennik I analogicznym sposobem, jak w art. 176., dla równania różniczkowego G a u s s a, okaże się, że on tu ma postać:

$$(\alpha) \qquad I=\{\tau, J\}=\frac{4}{9J^2}+\frac{3}{8(1-J)^2}+\frac{23}{72J(1-J)},$$

---

*) Por. K l e i n (F r i c k e) — „*Vorles. über d. Th. der elliptischen Modulfunctionen*". T. I., str. 33—34. Ω, H nazywa Klein „peryodami unormowanymi".

a gdy tę formę porównamy z

$$(\beta)\qquad \{w, z\} = \frac{1-\lambda^2}{2z^2} + \frac{1-\mu^2}{2(1-z)^2} + \frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{2z(z-1)}$$

sprawdzimy, że — przy $J=z$ — (α) będzie identyczne z (β), gdy położymy:

$$\lambda=\frac{1}{3},\ \mu=\frac{1}{2},\ \nu=0.$$

Z tego wnosimy, że $\tau=f(J)$ jest taką funkcyą trójkąta, zapomocą której odwzorowuje się trójkąt kołowy ABC, leżący na płaszczyźnie (τ), a o kątach:

$$\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ 0.$$

w górnej połowie płaszczyzny (J).

Wierzchołkowi A o kącie $\frac{\pi}{3}$ odpowiada $J=0$, wierzchołkowi B o kącie $\frac{\pi}{2}$ odpowiada $J=1$, a wierzchołkowi C o kącie 0 odpowiada $J=\infty$.

Z (α) wynika dalej, że funkcya $\tau=f(J)$ jest nieskończenie wielowartościową, a jej wartości są: $(p\tau+q)/(p'\tau+q')$ o wszelkich całkowitych p, q, p', q', czyniących zadość warunkowi $(pq'-p'q)=+1$.

Przeciwnie funkcya $J=\varphi(\tau)$ jest jednoznaczną, istnieje tylko w górnej połowie płaszczyzny (τ) i jest automorficzną w grupie modułowej.

Aby teraz kształt i położenie zasadniczego obszaru grupy modułowej i odwzorowującego się trójkąta $\Delta=ABC$ znaleść, zauważmy, że grupa ma dwie zasadnicze substytucye:

$$S\tau=\tau+1,\quad T\tau=-\frac{1}{\tau}$$

i że trójkąt Δ wraz z jednym ze swych trzech obrazów da już zasadniczy czworobok grupy. Taki czworobok ma zawierać takie tylko punkta τ, które po zastosowaniu już-to substytucyi S, już-to substytucyi T przenoszą się na zewnątrz tego czworoboku. Niech $\tau=\xi+\eta i$. Poprowadźmy w górnej półpłaszczyźnie dwie proste:

$$(p_1)\quad \xi=-\frac{1}{2},\qquad (p_2)\quad \xi=+\frac{1}{2}\quad \text{[fig. 120. str. nast.]},$$

to między temi prostemi zawierają się takie punkta, że jakiekolwiek dwa z nich są nierównoważne ze względu na podstawienie S, a tylko każdy punkt $\tau_1=-\frac{1}{2}+\eta i$, leżący na prostej p_1, odpowiada punktowi $\tau'_1=+\frac{1}{2}+\eta i$, leżącemu na prostej p_2. W tym tak utworzonym pasie (p_1, p_2) trzeba jednak do $(\Delta+\Delta')$ zaliczyć tylko takie punkta, które także i ze względu na podstawienie:

$$(1) \qquad T\tau = \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

będą nierównoważne. Położmyż: $\tau' = \varrho' e^{\varphi' i}$ i $\tau = \varrho e^{\varphi i}$, gdzie ϱ przyjmujemy >1, a φ tak obierzemy, aby punkt τ leżał w (p_1, p_2), to mamy z (1): $\varrho.\varrho'.e^{(\varphi+\varphi')i} = -1 = e^{\pi i}$. Z tego wynika, że: $\varrho\varrho' = 1$, $\varphi' = \pi - \varphi$, a więc $\varrho' = \frac{1}{\varrho} < 1$. Z tego wnosimy, że gdy z punktu $\tau = 0$ zakreślimy promieniem $=1$ koło K_0, to część obszaru $(p_1 p_2)$, która rozciąga się poza kołem K_0, będzie już zasadniczym czworobokiem $(\varDelta + \varDelta')$, Oś drugorzędna $\eta\eta$ dzieli ten czworobok na dwa trójkąty $(ABC) = \varDelta$, $A'BC = \varDelta'$, każdy z nich jest obrazem drugiego w osi $\eta\eta$ i każdy ma kąty $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0. Sam czworobok $(\varDelta + \varDelta') = ABA'C$ i ma kąty:

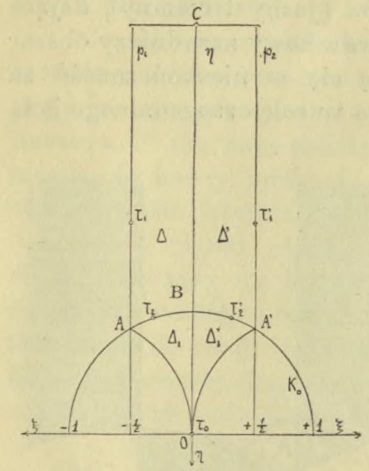


Fig. 120.

$$\frac{\pi}{3}, \ \pi, \ \frac{\pi}{3}, \ 0$$

odpowiednio u wierzchołków:

$$A \quad B \quad A' \quad C.$$

Trójkąt ABC jest właśnie szukanym trójkątem $\varDelta$. Jego wierzchołki są:

$$A = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad B = i, \quad C = \infty i, \quad \text{gdzie } i = \sqrt{-1},$$

a w nich odpowiednio jest:

$$J(\tau) = 0, \quad J(\tau) = 1, \quad J(\tau) = \infty,$$

W czworoboku $ABA'C$ odpowiadają sobie boki AC, $A'C$ podług substytucyi S, a boki AB, $A'B$ podług substytucyi T. Na tych dwóch ostatnich bokach co dwa punkta:

$$\tau'_2 = e^{\psi i}, \quad \tau_2 = e^{(\pi - \psi)i}, \quad \psi = \left(\frac{\pi}{3} \cdots \frac{\pi}{2}\right),$$

a więc symetrycznie ze względu na wierzchołek B leżące, są równoważne. Z obwodu czworoboku dość zatem będzie zatrzymać tylko boki CA, AB, (albo boki CA', AB).

Gdy $\varDelta$ w łuku AB, a $\varDelta'$ w łuku $A'B$ odbijemy, dostaniemy trójkąty $AB0 = \varDelta_1$, $A'B0 = \varDelta'_1$, przyczem podług substytucyi T odpowiadać sobie będą $\varDelta$, $\varDelta'_1$ i $\varDelta'$, $\varDelta_1$. Czworobok $ABA'0 = (\varDelta_1 + \varDelta'_1)$ można wziąć znowu za zasadniczy obszar grupy modułowej.

187. Podział półpłaszczyzny przez grupę modułową. Gdy teraz z trójkąta Δ wychodząc, tworzyć będziemy czemraz dalsze i dalsze trójkąty przez odbicia, a co drugi z nich zaciemnimy, utworzymy przez to nad osią $\xi\xi$ nieskończoną sieć trójkątów (fig. 121.) Każda para sąsiadujących przez bok trójkątów (jasny i ciemny), dająca czworobok o kątach $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{\pi}{3}$, 0 daje znowu nowy zasadniczy obszar grupy. Trójkąty maleją i zagęszczają się w nieskończoność za zbliżaniem się do osi $\xi\xi$. Ta oś odgrywa tu rolę ortogonalnego koła wszystkich trójkątów utworzonej sieci.

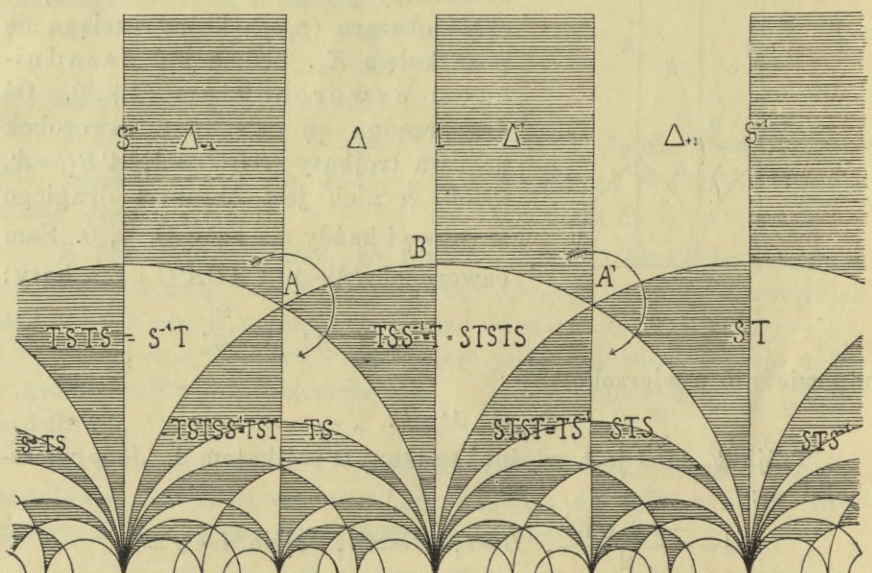


Fig. 121.

Podstawienie S odpowiada jednokrotnemu obrotowi około punktu $J=\infty$, bo przetwarza parę trójkątów $(\Delta+\Delta')$ o wspólnym wierzchołku $C=\infty i$, w następną parę o tymże wierzchołku. Podstawienie T odpowie jednokrotnemu obrotowi około punktu $J=1$, gdyż przetwarza parę trójkątów $(\Delta+\Delta')$ o wspólnym wierzchołku B w parę następną, [dolną, oznaczoną przez $(\Delta_1+\Delta'_1)$ na fig. 120.]. Wskutek tego [art. 178.] podstawienia ST, TS, odpowiedzą obrotom około punktu $J=0$, zmieniając parę trójkątów o wspólnym wierzchołku A, w następną parę o tym samym wspólnym wierzchołku A. Że zaś około punktu A mamy 3 takie pary, więc być musi:

$$STSTST=1 \quad \text{i} \quad TSTSTS=1.$$

Podstawienia ST, TS nie są identyczne; stąd wynika, że odpowiadają one okrążeniom punktu $J=0$ w dwóch przeciwnych kierunkach.

U wierzchołków B schodzą się po dwie zawsze pary trójkątów, i tem tłómaczy się relacya $T^2=1$.

Co się tyczy wierzchołków C, to jeden z nich leży w nieskończoności, a inne wszystkie na osi $\xi\xi$. Około każdego z nich grupuje się nieskończenie wiele trójkątów; z tego to powodu żadna iteracya S^ν nie daje substytucyi identycznej. Przytem zauważyć trzeba, że każdy punkt C, (w którym mamy $J(\tau)=\infty$), jest zarazem punktem istotnie osobliwym funkcyi $J(\tau)$.

Jeżeli obszar $(\varDelta+\varDelta')$ naznaczymy krótko przez 1, to każdy obszar tworzący się będzie miał nazwę $(...S^\alpha TS^\beta.T...)$. Każde przesunięcie dowolnego obszaru V wprzód lub wstecz (o $\pm\nu$ jedynostek) równolegle do osi $\xi\xi$ nazwać trzeba $S^{\pm\nu}V$, a każde odbicie jego w kole K_0 z odwróceniem jego około osi $\eta\eta$ będzie miało nazwę TV. Ponad największymi półkolami rozpościerać się więc będą obszary:

$$1,\ S,\ S^{-1},\ S^2,\ S^{-2},\ \ldots.$$

Wewnątrz koła K_0 dostaniemy z obszarów 1, S, S^{-1} odpowiednio obszary: T, TS, TS^{-1}, a te znowu przesunięte o ± 1, równolegle do osi $\xi\xi$, dadzą:

$$S^{-1}T,\quad ST,\quad STS,\quad S^{-1}TS,\quad STS^{-1},\quad S^{-1}TS^{-1}=TST.$$

Zauważmy obszary ułożone około wierzchołka A', a następujące po sobie w kierunku strzałki α'. Są one:

$$(A)\qquad \begin{array}{l} 1,\ S,\ ST,\ STS,\ STST=TS^{-1},\ STSTS=T \\ \qquad \text{i wreszcie: } STSTST=1. \end{array}$$

Z obszaru 1 weźmy pod uwagę tylko ciemny trójkąt $\varDelta'$. Wtedy dwa następujące trójkąty ciemne z wierzchołkiem A' będą:

$$(\alpha)\qquad ST.\varDelta',\quad STST.\varDelta'=TS^{-1}\varDelta'.$$

Gdy podobnie z obszaru S weźmiemy pod uwagę jasny trójkąt $\varDelta_{+1}$, to dalsze dwa jasne trójkąty z wierzchołkiem A' będą:

$$(\beta)\qquad ST\varDelta_{+1},\quad ST.ST.\varDelta_{+1}.$$

Przejście z jednego trójkąta ciemnego lub jasnego do bezpośrednio następującego ciemnego lub jasnego odpowiada tu jednorazowemu okrążeniu punktu $J=0$. Takie okrążenie daje — jak to wspomnieliśmy — podstawienie ST, (lub TS), a z tem oznaczenia (α), (β) zgadzają się w zupełności.

Analogicznie z jasnego trójkąta $\varDelta$ z wierzchołkiem A dostajemy, idąc w kierunku strzałki α, dwa dalsze jasne trójkąty:

$$TS\varDelta,\quad TSTS\varDelta=S^{-1}T\varDelta,$$

a z trójkąta ciemnego $\varDelta_{-1}$ mamy znowu dwa następujące ciemne w postaci: $TS\varDelta_{-1}$, $TSTS\varDelta_{-1}$, a te oznaczenia znowu zgadzają się z tem, że TS odnosi się do jednorazowego okrążenia punktu $J=0$. Około wierzchołka A mamy więc 6 takich obszarów:

$$(B)\quad \begin{cases} 1,\ T,\ TS,\ TST,\ TSTS=S^{-1}T,\ TSTST=S^{-1} \\ \text{i wreszcie znowu: } TSTSTS=1. \end{cases}$$

Jeżeli W jest dowolnem podstawieniem grupy, a ono wierzchołki A', A przeistacza w A'_1, A_1, to około A'_1 mieć będziemy sześć obszarów:

$$W,\ WS,\ WST,\ WSTS,\ ...,$$

a około A_1 sześć obszarów:

$$W,\ WT,\ WTS,\ WTST,\ ....$$

* * *

Wszelka funkcya $\varphi(\tau)$ jednoznaczna, a automorficzna w grupie modułowej nazywa się modułową. Lecz w teoryę tych funkcyj wchodzić tu nie możemy, jak równie nie leży w zakresie tej książki rozbierać funkcye automorficzne t. j. funkcye, które pozostają niezmienione w pewnej skończonej lub nieskończonej liczbie liniowych podstawień tworzących grupę. W tym zakresie badań istnieją dziś znakomite dzieła i prace Fuchsa, Poincaré'go, Kleina, Rausenbergera, Hurwitza i w. i. O grupach podstawień liniowych traktują rozprawy Dycka i dzieło Burnside'a.

KONIEC.

Neuwittelsbach koło Monachium, w maju 1900.

Spis autorów przytoczonych.*)

*) Tu i w alfabetycznym rejestrze rzeczy — str. 691 — odnoszą się liczby do stron.

Alfabetyczny rejestr rzeczy.

0,01