1/2
Z 10 —

TEORYA
FUNKCYJ ANALITYCZNYCH

NAPISAŁ

Dr. JÓZEF KNIAŻ PUZYNA,

PROFESOR UNIWERSYTETU LWOWSKIEGO.

TOM I.

[Z 54 figurami w tekście].

LWÓW.

Nakładem autora z zasiłkiem Akademii Umiejętności w Krakowie.

Główny skład w księgarni H. Altenberga we Lwowie.

1898.

PIERWSZA ZWIĄZKOWA DRUKARNIA WE LWOWIE, ul. Lindego 4.

PRZEDMOWA.

Od lat kilkunastu zajęty wykładami matematyki na Uniwersytecie lwowskim, odczuwałem brak dzieła, któreby mogło obznajamiać z teoryą funkcyj analitycznych tworzących z jednej strony podstawę do rozumienia klasycznych dzieł i rozpraw, pisanych przez współczesnych autorów, a z drugiej strony dających możność dochodzenia do nowych, niewyśledzonych jeszcze dotąd związków analitycznych. Z tego powodu zamierzyłem, korzystając z zaczerpniętych wiadomości u autorów pracujących w tej gałęzi matematyki i z nabranego doświadczenia z wykładów, jakie peryodycznie o funkcyi miewałem, przystąpić do ogłoszenia zebranych i uporządkowanych materyałów, wydając ten oto Tom I. Teoryi funkcyj analitycznych.

Lecz — aby takie dzieło mogło ile możności być przystępne — uważałem za stosowne: w tym I. Tomie zamieścić i ustępy elementarniejsze, które zarówno mogłyby i Algebrze wyższej i Teoryi funkcyi służyć za początek. Do tego skłaniałem się tem bardziej, że u nas i dziś jeszcze niektóre z tych rzeczy, jak n. p. nauka o mnogościach, funkcye symetryczne i wielopostaciowe, eliminacye, grupy i funkcye wielościanów umiarowych, nauka o formach jednorodnych i t. p. na nowo opracowane i ogłoszone nie są uprzykrzonem powtórzeniem tego, co już przódy pisano.

Zamierzając zresztą zamknąć teoryę funkcyi w dwóch obszerniejszych tomach, chciałem już i wstępne rzeczy przedstawić tak, jak ich później potrzebować będę, a uwagę czytającego zwrócić już naprzód na to, co w dalszym ciągu badań stanowić może analogie ujednostajniające system i ułatwiające temsamem objęcie całości teoryi.

Toż przez 400 stron tego tomu zajmuję się — po opracowaniu na początku elementów arytmetyki, (do czego i mnogości nieskończone zaliczam) — wyłącznie funkcyami wymiernemi jednej i wielu zmiennych. A rozwijam tu już-to wszystkie ich charakterystyczne własności, kładąc nacisk na warunki potrzebne do ich wyznaczenia, już-to na wyniki rugowania, które, szczególnie gdy występują w formach wymiernych, ważną potem w dalszych poszukiwaniach odegrają rolę. Teoryę form, a głównie niezmienniki form dwójkowych wydało mi się koniecznem wciągnąć do tego zakresu badań.

W dwóch częściach ostatnich (str. 401—541) wprowadzam teoryę szeregów potęgowych, a z nich wysnuwam pojęcie funkcyj analitycznych dając tu tylko najogólniejszy ich podział, a to: na funkcye jednoznaczne i wieloznaczne i na funkcye wymierne i przestępne. Nie pominąłem także funkcyj z próżniami i wyrażeń analitycznych, przedstawiających w różnych obszarach różne analityczne funkcye.

Rachunek całkowy lub równania różniczkowe nie należą do środków, jakimi posługiwałem się w tym Tomie, a funkcye trygonometryczne mają w ciągu tej całej książki czysto geometryczne znaczenie. Przy tem używałem często symbolu 1_φ wprowadzonego u nas przez Żmurkę, a zastępującego wyrażenie dłuższe: $\cos\varphi + i \sin\varphi$, bo się okazał dogodnym w wielu formach, dowodach i związkach.

W opracowaniu trzymałem się metody Weierstrassa, — uwzględniając autorów, którzy za nim w jego kierunku pracowali, jak: Stolz, Biermann, Pringsheim, Tannery J., Poincaré, Borel, Bendixson, Dautheville i w. i. Zresztą odnośniki wskażą, skąd czerpałem wiadomości, choć niektóre z nich mają tylko na celu zachęcenie do dalszego badania rzeczy krótko omówionych w tekście.

Przytaczając Weiertrassa wspomnieć muszę, że dziś na wyższych zakładach u wszystkich cywilizowanych narodów wygłaszają jego teoryę, a bez obznajomienia się z jego pomysłami trudno postępować. A jakiej miary, jakiego znaczenia są te pomysły, dość przytoczyć słowa Kroneckera, jakiemi ten niemniej sławny uczony skreślał zasługi Weierstrassa:

„Niejedne pytania matematyki są stare jak świat i każ„demu zrozumiałe, jak: kwadratura koła, algebraiczne roz„wiązanie zadań. Ale pytanie, któremu Weierstrass poświęcił „swoje życie, nabrało po większej części formę dopiero w jego „rękach i dlatego nie jest ani powszechnie znane, ani nie da „się wyrazić krótkiemi słowami" [por. W. Killing: *„Karl Weierstrass. Rede gehalten beim Antritt des Rektorats an der kgl. Akademie zu Münster am 15. Oktober 1897"* — Münster 1897].

Niechże — jeżeli dokonałem choć w części podjętego zadania — i u nas znajdzie się dzieło, któreby dla jednych było początkiem tej wiedzy, dla drugich przypomnieniem tego, co już ich ducha stało się własnością.

Kończąc nie mogę nie wyrazić wdzięczności Akademii Umiejętności w Krakowie, która dbała zawsze o rozwój naszych nauk i w tym razie przyszła w pomoc z zasiłkiem na wydanie tej książki.

Kolega mój p. Placyd Dziwiński, profesor tutejszej Szkoły politechnicznej, podjął się trudu, aby — czytając manuskrypt po ostatniej mojej redakcyi — tu i ówdzie usunąć mimowolne usterki. Przez to niejedno miejsce zyskało na jasności, za co Mu tutaj składam podziękowanie.

Wreszcie nadmienić mi przyjemnie, że PP. Roman Jamrógiewicz i Franciszek Słuszkiewicz, słuchacze wyższych lat lwowskiego Uniwersytetu, prowadzili ze mną bardzo pilnie korektę, a P. Stanisław Ruxer, również słuchacz tego Uniwersytetu, ułożył spis przytoczonych autorów i alfabetyczny rejestr rzeczy. Za ten ich gorliwy współudział należy się Im pełne z mej strony uznanie.

We Lwowie, w październiku 1898 r.

Autor.

*

SPIS RZECZY.

CZĘŚĆ I.

O liczbach, ilościach zmiennych i mnogościach.

Rozdział I. **Z Arytmetyki.**

Art.		Str.
1.	Określenie rzeczywistych liczb wymiernych i niewymiernych i ich systematyczne rozwinięcia	1
2.	Rozwinięcie liczby wymiernej w nieskończonej formie peryodycznej	5
3.	Rozwinięcia nieskończone, a nieperyodyczne. Określenie liczb niewymiernych przez szereg liczb wymiernych, posuwających się w nieskończoność	11
4.	Działania arytmetyczne liczbami niewymiernemi . . .	14
5.	Szeregi liczb dodatnich i ich rozbieżność lub zbieżność .	15
6.	Działania arytmetyczne szeregami o dodajnikach dodatnich .	20
7.	Praktyczne znamiona zbieżności	21
8.	Szeregi o wyrazach dodatnich i ujemnych. Określenie ich bezwarunkowej zbieżności	24
9.	Warunkowa zbieżność. Przykład	27
10.	Zbieżność szeregów o dodajnikach naprzemian dodatnich i ujemnych	30
11.	Szeregi wahające. Twierdzenia Abla i Dirichleta . .	32
12.	Iloczyny nieskończone o czynnikach rzeczywistych. Konieczny warunek ich zbieżności	35
13.	Bezwarunkowo zbieżne iloczyny	36
14.	Współistnienie zbieżności bezwarunkowej i absolutnej. Warunkowo zbieżne iloczyny	38
15.	Rozwijanie liczby rzeczywistej na ułamek łańcuchowy. Skończony i nieskończony ułamek łańcuchowy. Systematyczne rozwinięcie Straussa	41

Rozdział II. **O liczbach złożonych.**

16.	Określenie liczby złożonej (urojonej) i jednostki urojonej .	48
17.	Łączenie liczb złożonych za pomocą działań arytmetycznych .	50

Art.		Str.
18.	Bezwzględna wartość liczby złożonej. Twierdzenia o bezwzględnej wartości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu . . .	52
19.	Geometryczne przedstawienie liczby złożonej. Płaszczyzna liczbowa	54
20.	Geometryczne wykonywanie działań arytmetycznych . .	55
21.	Wprowadzenie symbolu 1_φ. Wzory Moivre'a i Eulera .	56
22.	Obliczenie n^{go} pierwiastka liczby złożonej. Całkowity system reszt	59
23.	Algebraiczna postać n^{go} pierwiastka przy $n=2^q$. Algebraiczna postać, dająca przybliżenie przy dowolnem n. . . .	63
24.	Pierwiastek n^{ty} jednostki $+1$. Pierwotne pierwiastki jednostki	65
25.	Dwa twierdzenia o pierwotnych pierwiastkach . . .	68
26.	Przypadki algebraicznych rozwiązań równania $\omega^n-1=0$. Geometryczne konstrukcye wykonalne za pomocą cyrkla i linii .	68
27.	Uwaga o ogólnej potędze $(a+bi)^{\alpha+\beta i}$	71
28.	Szeregi nieskończone o dodajnikach złożonych. Ich warunkowa i bezwarunkowa zbieżność	72
29.	Iloczyny nieskończone o czynnikach złożonych. Różne rodzaje ich zbieżności	74

Rozdział III. Z teoryi mnogości.

30.	Zmienna rzeczywista i zmienne rzeczywiste. Ograniczone i nieograniczone ich obszary. Miejsca i otoczenia	79
31.	Obszar jednej zmiennej urojonej x.	81
32.	Różne sposoby ograniczenia obszaru jednej urojonej zmiennej. Miejsce obszaru. Otoczenie miejsca	83
33.	Punkt w nieskończoności	85
34.	Okrążanie punktu leżącego w skończoności lub nieskończoności	86
35.	Obszary kilku zmiennych urojonych	87
36.	Nieskończona mnogość miejsc wyjętych. Punkta skupienia .	89
37.	Mnogości pochodne. Mnogości pierwszego i drugiego rodzaju. Przykłady	93
38.	Mnogość miejsc odosobnionych. Mnogość zamknięta. Mnogość wszędzie gęsta. Stosunek pochodnych do samej danej mnogości	95
39.	Liczby pozaskończone. Mnogości pochodne o wskaźnikach pozaskończonych	96
40.	Mnogości pierwszej mocy, albo przeliczalne. Przykłady . .	100
41.	Mnogości złożone z przeliczalnych mnogości	102
42.	Mnogości mocy wyższych. Mnogości mocy drugiej w jednokrotnym obszarze	105
43.	Mnogość w obszarze n-krotnym. Obszary ciągłe *(continua)* .	109
44.	Moc pierwsza i druga (ostatnia) mnogości w obszarze n-krotnym	113
45.	Obszar punktów pozostający po wydzieleniu przeliczalnej mnogości	115
46.	Pojęcie granicy dolnej i górnej	116
47.	Rzut stereograficzny płaszczyzny liczbowej na kulę . .	118

Art. Str.

CZĘŚĆ II.

O funkcyach wymiernych.

Rozdział IV. O wymiernych całkowitych funkcyach jednej zmiennej.

48. Określenia funkcyi wymiernej całkowitej $f(x)$ jednej zmiennej. Jej rozwinięcia, ciągłość i pochodne 122
49. Wartości funkcyi w nieograniczonym obszarze jej zmiennej x 125
50. Zasadnicze twierdzenie algebry. Miejsca zerowe (pierwiastki) . 127
51. Wielokrotne pierwiastki. Pierwiastki $=0$ i $=\infty$. Wartość funkcyi dla $x=\infty$ 132
52. Wzór interpolacyjny Lagrange'a. Uogólnienie wzoru Lagrange'a 134
53. Wzór interpolacyjny Gaussa 140
54. Dzielenie dwóch funkcyj całkowitych przez siebie . . . 142
55. Łańcuchowe dzielenie 143
56. Wspólny podzielnik jako jednorodna liniowa funkcya danych funkcyj 144
57. Rugownik dwóch funkcyj. Wyróżnik funkcyi . . . 145
58. Niewspółmierność funkcyj. Związki $(m, n, \alpha)=0$. Dostateczne warunki istnienia największego wspólnego podzielnika stopnia k 148
59. Wypadek znikania podwyznaczników rugownika $R=0$ . . 151
60. Obliczenie największego wspólnego podzielnika z samego rugownika $R=0$. Największy wspólny podzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność n funkcyj $(n>2)$ 153

Rozdział V. O wymiernych funkcyach ułamkowych jednej zmiennej.

61. Określenia. Miejsca zerowe i nieskończonościowe i wartości funkcyi ułamkowej $u(x)$ 157
62. Ciągłość i pochodne funkcyi $u(x)$ 159
63. Warunki potrzebne do zupełnego wyznaczenia funkcyi $u(x)$. 161
64. Wyznaczanie funkcyi z danych warunków 163
65. Rozkład na ułamki częściowe funkcyi $u(x)$ danej w najprostszej formie 165
66. Rozkład funkcyi z mianownikiem o powtarzających się pierwiastkach 169
67. Rozkład funkcyi nieskróconej na ułamki częściowe . . 172
68. Rozkład funkcyi na ułamki o mianownikach pierwszego i drugiego stopnia 173
69. O średnich wartościach *mod.* m funkcyi $f(x)=\sum_{-n'}^{n} a_\lambda x^\lambda$ i o spółczynnikach takiej funkcyi 174

Art. Str.

Rozdział VI. **O wymiernych funkcyach całkowitych i ułamkowych wielu zmiennych.**

70. Określenie funkcyi całkowitej, jej stopnie, wymiar i ilość wyrazów w niej zawartych 177
71. Miejsca zerowe funkcyi f w skończoności lub nieskończoności 179
72. Cząstkowe pochodne 183
73. Rozwijanie funkcyi 184
74. Zachowanie się funkcyi w otoczeniu miejsca zerowego. Równanie algebraiczne $f=0$ i funkcya algebraiczna . . . 187
75. Funkcye jednorodne. Twierdzenie Eulera. Zastosowanie do wyróżnika 191
76. Wyznaczenie funkcyi całkowitej z danych warunków . . 194
77. Zastosowanie metody Lagrange'a do wyznaczenia funkcyi . 197
78. Dzielenie dwóch funkcyj. Iloraz. Reszta 200
79. Podzielność jednej funkcyi przez drugą. Iloraz w kształcie funkcyi całkowitej we wszystkich zmiennych 202
80. Największy wspólny podzielnik. Łańcuchowe dzielenie . . 204
81. Rugownik dwóch danych funkcyj. Znamię współmierności i niewspółmierności 207
82. Przywiedlność lub nieprzywiedlność funkcyi całkowitej $F(x, x_1, ..., x_p)$, lub równania $F=0$ 210
83. Wspólne miejsca zerowe dwóch funkcyj i zachowanie się ich w otoczeniu tych miejsc 211
84. Funkcya ułamkowa wielu zmiennych. Jej wartości skończone i nieskończone. Jej zachowanie się w miejscach wspólnych zerowych licznika i mianownika 212
85. Ciągłość i pochodne funkcyi U 215
86. O średnich wartościach *modd.* $[m_1, m_2, ...]$ 216

CZĘŚĆ III.

O funkcyach symetrycznych i wielopostaciowych. O obrotach wielościanów umiarowych i ich funkcyach.

Rozdział VII. **O funkcyach symetrycznych, grupach i o funkcyach wielopostaciowych.**

87. Określenie funkcyi symetrycznej i grupy symetrycznej. Elementarne funkcye symetryczne 220
88. Zasadnicze twierdzenie o funkcyach symetrycznych . . 222
89. Metoda bezpośrednia wyrażania funkcyj symetrycznych przez elementarne 225
90. Zastosowanie symetrycznych funkcyj do tworzenia rugowników i wyróżników 228

Art. Str.

91. Wspólny jednokrotny, lub wielokrotny pierwiastek dwóch równań o jednej lub wielu zmiennych 232
92. Wyznaczanie funkcyi symetrycznej z danych warunków. Zastosowania 234
93. Wymierna funkcya pierwiastka lub pierwiastków danego równania $f(x)=0$ 236
94. Złożenia i iteracye podstawień 237
95. Przestawienia i cykle 239
96. Grupy i funkcye wielopostaciowe. Tworzenie funkcyi o danej grupie 243
97. Funkcye półsymetryczne i grupa półsymetryczna. Funkcye dwupostaciowe 246
98. Rozdzielenie grupy symetrycznej na substytucye, sprowadzające różne wartości funkcyi ϱ-wartościowej. Rząd i wskaźnik grupy. Podgrupa i jej rząd 248
99. Grupy należące do poszczególnych ϱ wartości funkcyi (przetwarzanie grup) 251
100. Wyróżniona częściowa grupa. Szereg złożenia. Złożenia grupy symetrycznej i półsymetrycznej 253
101. O podstawieniach przemiennych z danem podstawieniem i z daną grupą. Izomorfizm 255
102. Związek algebraiczny między ϱ wartościami danej funkcyi . 258
103. Związek między funkcyami o tej samej grupie lub funkcyami, z których jedna należy do podgrupy drugiej 261
104. Gatunki funkcyj. Zawieranie się gatunku w gatunku. Gatunki sprzężone. Gatunek Galois 264

Rozdział VIII. **O obrotach wielościanów umiarowych i ich funkcyach.**

105. Grupa obrotów dwuścianu 265
106. Grupa czwórki. Szereg złożenia grupy czwórki i grupy dwuścianu 268
107. Grupa obrotów czworościanu umiarowego. Izomorfizm . . 271
108. Podział kuli opisanej na czworościanie przez jego przekroje symetryi. Izomorfizm Szereg złożenia 274
109. Grupa obrotów ośmiościanu umiarowego. Podział kuli opisanej na ośmiościanie przez jego przekroje symetryi. Izomorfizm. Szereg złożenia 276
110. Grupa dwudziestościanu umiarowego. Podział kuli opisanej na dwudziestościanie przez jego przekroje symetryi . . . 280
111. Dwie zasadnicze substytucye grupy dwudziestościanu. Izomorfizm. Niepodzielność grupy 284
112. Liczby ν_1, ν_2, ν_3 charakteryzujące wielościany umiarowe. Grupa rozszerzona 285
113. Grupa punktów danego wielościanu. Rozszerzona grupa punktów. Szczególne grupy punktów 287
114. Stereograficzny rzut kuli podzielonej podług wpisanego umiarowego wielościanu. Liniowe podstawienia jednorodne i niejednorodne 288

Art. Str.

115. Grupy liniowych podstawień dwuścianu i jego zasadnicza funkcya Z 291
116. Grupy liniowych podstawień czworościanu i ośmiościanu . 295
117. Zasadnicza funkcya Z czworościanu i ośmiościanu . . . 298
118. Grupy liniowych podstawień dwudziestościanu . . . 301
119. Ogólna metoda wyprowadzenia formy F_3 303
120. Wyprowadzanie formy F_1. Zasadnicza funkcya Z dwudziestościanu 307
121. Zachowanie się funkcyi Z w grupach rozszerzonych . . 310
122. Przedstawienie dowolnej funkcyi wielościanu przez funkcyę Z 311

CZĘŚĆ IV.

O eliminacyach i teoryi form dwójkowych.

Rozdział IX. O eliminacyach z dwóch równań.

123. Metoda Sylwestra tworzenia rugownika dwóch równań o jednej niewiadomej 312
124. Stopień rugownika wynikającego z dwóch równań o dwóch niewiadomych 315
125. Ilość miejsc wspólnych zerowych danych równań o dwóch niewiadomych 317
126. Wprowadzenie podstawienia $x=\varrho t_1$, $y=\varrho t_2$. Wyznaczenie miejsc wspólnych zerowych, leżących w nieskończoności . . . 321
127. Metoda dająca się stosować dla miejsc wspólnych zerowych, leżących w skończoności i nieskończoności 323
128. Symetryczna funkcya wszystkich gałęzi algebraicznej funkcyi. Rugownik jako taka symetryczna funkcya 325
129. Wyróżnik równania $f(x, y)=0$. Wielokrotne miejsca tego równania 326
130. Wyznaczenie równania $f(x,y)=0$ z danych miejsc zerowych funkcyi f. Punkta wyjątkowe. Pęki krzywych . . . 329
131. Wyznaczenie takich punktów na danej krzywej, które mogą być wszystkiemi przecięciami się jej z drugą krzywą . . 334

Rozdział X. O eliminacyach z n równań ($n>2$).

132. Symetryczna funkcya wszystkich miejsc zerowych wspólnych dwóch równań o dwóch niewiadomych 337
133. Wprowadzenie do równań zmiennego parametru. Postać funkcyi symetryczuej w tym wypadku. 339
134. Rugownik trzech równań o 3 niewiadomych 342
135. Ilość wspólnych miejsc zerowych trzech równań o 3 niewiadomych. 344
136. Symetryczne funkcye wspólnych miejsc zerowych trzech równań o 3 niewiadomych. 347

Art. Str.

137. Rugownik czterech, lub więcej danych równań. Osądzenie jego stopnia i oznaczenie wspólnych miejsc zerowych tych równań 348
138. Równoważność dwóch funkcyj według danych modułów . 352
139. Wprowadzanie równoważności z funkcyą jednej tylko zmiennej 355
140. Rugownik ilukolwiek równań w postaci wyznacznika lub w postaci liniowej jednorodnej funkcyi pierwszych stron samych równań 357
141. Wyznaczenie funkcyi wielu zmiennych, która na wspólnych miejscach zerowych danych równań ma przybierać dane wartości, (interpolacyjny wzór H. Laurent'a) 359

Rozdział XI. **Z teoryi form.**

142. Własności wyznaczników Hessego i Jacobiego . . 362
143. Własności rugowników i wyróżników form jednorodnych . 365
144. Niezmienniki i współzmienniki form dowolnego stopnia . . 368
145. Kształt i własności niezmiennika formy dwójkowej . . 371
146. Równania różniczkowe, którym zadość czyni niezmiennik formy dwójkowej 374
147. Równania liniowe (jednorodne) spółczynników niezmiennika. Zupełne wyznaczenie niezmiennika ze znanej już jego formy . 376
148. Kształt i własności współzmiennika formy dwójkowej . . 379
149. Równania różniczkowe, którym zadość czyni współzmiennik. Zupełne wyznaczenia współzmiennika o danych jego stopniach (e, σ) 381
150. Półzmiennik. Niezmiennik jako funkcya pierwiastków formy . 382
151. Źródło (półzmiennik) współzmiennika. Wyprowadzenie współzmiennika z jego źródła 385
152. Inna metoda wyprowadzania współzmiennika z danego źródła. Współzmienniki formy kwadratowej dwójkowej. Współzmiennik jako funkcya pierwiastków formy 387
153. Niezmienniki współzmienników. Niezmienniki wspólne . . 390
154. Niezmienniki i współzmienniki danej formy dwójkowej, niezależne od siebie algebraicznie. Określenie systemu podstawowych form niezmienniczych 392
155. System form podstawowych kubicznej formy dwójkowej . . 394
156. System form podstawowych dwukwadratowej formy dwójkowej 397

CZĘŚĆ V.

O szeregach potęgowych.

Rozdział XI. **O szeregach potęgowych; o ich zbieżności.**

157. Określenia. Zakres zbieżności szeregu $\mathfrak{P}(x)$ 401
158. Sposoby zachowania się szeregu na jego obwodzie zbieżności. Wspólny zakres zbieżności dwóch szeregów 404

Art. Str.

159. O szeregach $P(x)$ 405
160. Zbieżność szeregu potęgowego wielu zmiennych. O szeregach $P(x, y, z, ...)$ 407
161. Jednostajna zbieżność i ciągłość szeregów jednej zmiennej . 411
162. Jednostajna zbieżność i ciągłość szeregów wielu zmiennych . 414
163. O wydzielonych szeregach podług danego modułu lub danych modułów. Twierdzenia o spółczynnikach 416
164. Punkta zerowe (pierwiastki) szeregu potęgowego jednej zmiennej w zakresie zbieżności 420
165. Punkta zerowe (pierwiastki) szeregu potęgowego wielu zmiennych w zakresie zbieżności 421

Rozdział XIII. **Arytmetyczne łączenie szeregów potęgowych.**

166. Sumowanie skończonej liczby szeregów jednej lub wielu zmiennych 423
167. Zakresy jednostajnej zbieżności sumy $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)$ i jej ciągłość w tych zakresach 424
168. Sumowanie nieskończenie wielu szeregów jednej zmiennej w razie jednostajnej zbieżności 428
169. Ciągłość sumy nieskończenie wielu szeregów wielu zmiennych w razie jej jednostajnej zbieżności. Sumowanie nieskończenie wielu szeregów kilku zmiennych 432
170. Mnożenie i dzielenie szeregów o jednej i wielu zmiennych . 437
171. Szereg dwumienny (Newtona). Arytmetyczne obliczanie pierwiastka danej liczby 440
172. Badanie zbieżności szeregu $N(x, \mu)$ w punktach $x = \pm 1$. 444
173. Znamiona zbieżności szeregu $u_0 + u_1 + ...$ obmyślone przez Gaussa i Raabe'go. Przykłady 446

Rozdział XIV. **Rozwijania ułamkowych funkcyj wymiernych.**

174. Rozwijanie funkcyi wymiernej ułamkowej na szereg zwrotny *(serie récourrante)* 450
175. Zastosowanie do funkcyi $f'(x):f(x)$ 452
176. Szeregi liczb zwrotnych 454
177. Przedstawienie liczb szeregu zwrotnego przez stałe parametry 457
178. Funkcye Aleph ($\aleph$) Wrońskiego 459
179. Rozwijanie funkcyi ułamkowej wymiernej w różnych zakresach jej argumentu 461

Art. Str.

CZĘŚĆ VI.

Przeprowadzanie szeregów. Określenie i najogólniejszy podział funkcyj analitycznych.

Rozdział XV. Przeprowadzanie szeregów potęgowych.

180. Przeprowadzania szeregu $\mathfrak{P}(x)$ w wnętrzu jego zakresu zbieżności 463
181. Pochodne i pierwotne szeregi i ich zakresy zbieżności . . 467
182. Charakterystyka szeregu potęgowego w jego kole zbieżności . 469
183. Znaczenie wspólnego zakresu zbieżności szeregu i jego przeprowadzenia 471
184. Górna i dolna granica kół zbieżności szeregów przeprowadzonych. Punkta osobliwe 473
185. Znamiona zachowania się szeregu na całym jego obwodzie zbieżności 478
186. Warunkowa zbieżność. Punkt $x=+1$ 483
187. Określenie wartości szeregu w punktach okręgu zbieżności . 487
188. Punkt szczególny szeregu w jego pierwotnych i pochodnych szeregach 490
189. Szeregi o samych punktach osobliwych na okręgu zbieżności . 491
190. Przeprowadzenia szeregu $\mathfrak{P}(x, y, z, \ldots)$ wielu zmiennych . . 493
191. Miejsca zerowe szeregu $\mathfrak{P}(x, y, z)$. Szeregi identyczne. Wspólne obszary zbieżności dwóch szeregów $\mathfrak{P}(x, y, z|a, b, c)$, $\mathfrak{P}_1(x, y, z|a', b', c')$ 496
192. Punkta osobliwe 499

Rozdział XVI. Określenie i ogólne własności funkcyi analitycznej, albo sum takich funkcyj.

193. Przeprowadzenie szeregu $y=\mathfrak{P}(x)$ poza zakres zbieżności . 499
194. Zakres istnienia funkcyi y. Jej punkta osobliwe i linie punktów osobliwych. Próżnie 501
195. Analityczne, monogeniczne funkcye jednej zmiennej lub wielu zmiennych. Jej elementa i granice 505
196. Określenie spółczynników w przeprowadzeniach funkcyi za pomocą pochodnych, albo średnich wartości 507
197. Znaczenie nieskończonej sumy $S(x)=\Sigma P_k(x)$ w różnych zakresach jej jednostajnej zbieżności 510
198. Różniczkowanie i całkowanie sumy $S(x)$ 516
199. Ogólniejsze szeregi zwrotne. (Metoda André'go) . . . 517
200. O nieskończonych sumach $S(x, y, z, \ldots)=\Sigma P_k(x, y, z, \ldots)$ . . 520

Rozdział XVII. Twierdzenie Laurent'a. Najogólniejszy podział jednoznacznych funkcyj analitycznych.

201. Średnie wartości funkcyi $f(x)$ regularnej w pierścieniu $(r_1 \ldots r_2)$. Zasadnicze własności takich średnich wartości . . . 521

Art.		Str.
202.	Twierdzenie Laurent'a	525
203.	Punkta nieskończonościowe i istotnie osobliwe . . .	528
204.	Zachowanie się funkcyi w otoczeniu punktu istotnie osobliwego	530
205.	Punkt osobliwy: $x=\infty$	533
236.	Charakterystyczne własności funkcyi wymiernej. Funkcya przestępna	536
207.	Charakterystyka funkcyi podług jej wartości . . .	537
208.	Punkta istotnie i nieistotnie osobliwe analitycznych funkcyj wielu zmiennych	538
209.	Punkta osobliwe funkcyi wymiernej całkowitej lub ułamkowej wielu zmiennych	539
	Spis autorów przytoczonych	543
	Alfabetyczny rejestr rzeczy	546

Ważniejsze pomyłki.

Str.	10	wiersz 9 z góry	zam.:	$\frac{1}{6}+\frac{0}{6}+\frac{0}{6^2}$ ma być: $\frac{1}{6}+\frac{0}{6^2}$.
„	10	„ 11 „	„	„czwartego“ „ „ „trzeciego“.
„	12	„ 2, 1 od dołu	„	„posuwających się“ ma być „posuwający się“.
„	16	„ 15 z góry	„	„a przez zwiększenie n możemy“ ma być „a przy ε dowolnie małem możemy n zwiększając“.
„	39	„ 6 „	„	„według (A) i (B)“ ma być: „według (A) i (B), [art. 13.]“.
„	40	„ 17 „	„	„$\Sigma\beta_\lambda$“ ma być: „Σb_λ“.
„	43	„ 18 „	„	„M_n“ ma być: „M_{n-2}“.
„	70	„ 12 „	„	„n“ ma być: „n_1“.
„	71	„ 17, 18 i 19 z góry	zam.:	„2^{q_1}“ ma być: „$2^{2^{q_1}}$“.
„	87	„ 7 od dołu	zam.:	$+$ ma być: $=$.
„	88	„ 1 „	„	$\lvert y-\beta\rvert=\varrho\varrho=(0\ldots\infty)$, ma być: $\lvert y-\beta\rvert=\varrho$, $\varrho=(0\ldots\infty)$.
„	90	„ 17 z góry	„	„(1)“ ma być: „(2)“.
„	140	„ 9 „	„	„U_1“ „ „ „U'_1“.
„	141	„ 16 od dołu	„	„$s=1, 2, \ldots$“ ma być: „$s=0, 1, \ldots$“.
„	151	“ 8 „	„	„wspólną“ ma być: „wspólny“.
„	152	„ 4 „	„	„aby $R(fg)$“ ma być: „aby w $R(fg)$“.
„	169	„ 8 i 9 „	„	$\left[cotg\frac{m'}{2n}\pi-cotg\frac{m}{2n}\pi\right]$ ma być: $\left[cotg\frac{m'}{2n}\pi-cotg\frac{m}{2n}\pi\right]\frac{1}{i}$.
„	177	„ 11 z góry	„	„m^{go}“ ma być: „n^{go}“.
„	181	„ 9 od dołu	„	„t_1, t_2, t_n“ ma być; „$t_1, t_2, \ldots, t_n$“

Str. 181	wiersz 21	od dołu,	zam.:	„spółczyników z początku lub z końca“ ma być: „spółczynników z końca lub z początku“.
„ 184	„ 15	z góry	„	„funkcyę“ ma być: „funkcyą“.
„ 185	„ 5	„	„	„A_1“ ma być: „A“.
„ 185	„ 5	„		zamiast końcowego wyrazu: „$h_1^{\nu_1}$“ ma być: „$h_1^{a_1}$“.
„ 185	„ 6	„		zamiast końcowego wyrazu: „$h_n^{\nu_n}$“ ma być: „$h_n^{a_n}$“.
„ 189	„ 15	z góry	zam.:	„$(\varphi_0+u_0\xi_1^{\mu}$“ ma być: „$(\varphi_0+u_0)\xi_1^{\mu}$“
„ 189	„ 19	„	„	„pierwiastka wnosimy“ ma być: „pierwiastka x_1, wnosimy“.
„ 197	„ 8	od dołu	„	„$x_{\mu-1}$“ ma być: „$x_{\mu+1}$“.
„ 208	„ 12	z góry	„	„Spółczynniki“ ma być: „Spółczynniki ich“.
„ 214	„ 16	„	„	„Wyjąwszy“ ma być: „Z wyjątkiem“.
„ 240	„ 17	„	„	„założenia“ „ „ „złożenia“.
„ 249	„ 20	„	„	„$G\sigma_2$“ ma być: „$G_1\sigma_2$“.
„ 261	„ 9	„	„	„substytucya“ ma być: „substytucye“.
„ 262	„ 16	„	„	„do funkcyi $\leqq(\varrho-1)$“ ma być: „do funkcyi stopnia $\leqq(\varrho-1)$“.
„ 270	„ 9	„	„	„podstawień“ ma być: „podstawienia“.
„ 271	„ 14	„	„	„x,“ ma być: „x_α“.
„ 271	„ 18	„	„	„β) około“ ma być: „β). Około“.
„ 273	„ 4	„	„	„U_1.“ ma być: „U'_1,“
„ 279	„ 14, 15	„	„	„ośmiościanu“ ma być: „ośmiościan“.
„ 316	„ 18, 17	od dołu	„	„z niego na iloczyn elementów jej głównej i iloczyn elementów jej pobocznej przekątni wyrazy“ ma być: „w nim między innymi dwa takie wyrazy“.
„ 326	„ 14	z góry	zam.:	„$y^2+y^3=0$“ ma być: „$x^2+y^3=0$“.
„ 328	„ 16	„	„	$c)\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$ „ „ $c)\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}$.
„ 328	„ 15	od dołu	„	„równanie“ „ „ „równania“.
„ 331	„ 7	„	„	„systemem“ „ „ „systemu“.

„ 355 zamiast pierwszych czterech wierszy w górze ma być: „$A_s-A'_s$ znika widocznie na wspólnych miejscach funkcyj: $f_1, f_2, \ldots, f_{s-1}, f_{s+1} \ldots, f_k$, a że jest funkcyą całkowitą, więc stosując tu twierdzenie I. dostajemy relacyę:

„ 401	wiersz 9	od dołu	zam.:	„było“ ma być: „była“.
„ 402	„ 9	„	„	„$\varepsilon(x)$“ „ „ „$E(x)$.
„ 406	„ 3	z góry	„	$\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} a_{-\lambda}x^{-\lambda}$ ma być: $\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} a_{-\lambda}x^{-\lambda}$.
„ 406	„ 18	od dołu	„	„reduje„ „ „ „redukuje“.
„ 416	„ 15	z góry	„	$\left(\sum\limits_{0}^{n-1} w_\alpha - \sum\limits_{0}^{n-1} v_\alpha\right)\left(\sum\limits_{n}^{\infty} w_\alpha - \sum\limits_{n}^{\infty} v_\alpha\right)$ ma być:

$$\left(\sum_{0}^{n-1} w_\alpha - \sum_{0}^{n-1} v_\alpha\right) + \left(\sum_{n}^{\infty} w_\alpha - \sum_{n}^{\infty} v_\alpha\right).$$

Str. 429 wiersz 11 z góry zam.: $\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_{k-\mu}\right| r^{-\mu}$ ma być:

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,-\mu}\right| r^{-\mu}.$$

„ 429 „ 13 „ „ $\sum_{\lambda=-1}^{\infty}\left(\sum a_{k\lambda}\right)x^{\lambda}$ ma być:

$$\sum_{\lambda=-1}^{-\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k\lambda}\right)x^{\lambda}.$$

„ 429 „ 12 od dołu „ „Z tego wynika, że suma szeregów (6), (7) równa się“ ma być: „Z tego wynika, że suma:“

„ 430 „ 1 „ „ $\sum_{\lambda=-1}^{\infty}$ ma być: $\sum_{\lambda=-1}^{-\infty}$.

„ 433 „ 7 „ „ „dostatecznem“ ma być: „dostatecznie“.

„ 435 „ 1 z góry po $+\sum_{k=n}^{\infty} P_k$ ma być wstawiony znak $=$.

„ 491 „ 1 od dołu zam.: „punktów!“ ma być: „punktów:“.

CZĘŚĆ I.

O LICZBACH, ILOŚCIACH ZMIENNYCH I MNOGOŚCIACH.

ROZDZIAŁ I.

Z Arytmetyki.

1. Określenie rzeczywistych liczb wymiernych i niewymiernych i ich systematyczne rozwinięcia. W najelementarniejszej matematyce, (nauce rachunków), szuka się wielkości (niewiadomych) zadaniami określonych, a przedstawia się je liczbami.*) Według tego liczbami dodatniemi lub ujemnemi rozwiązuje się n. p. zadania:

$$(1) \qquad 2x+3=5x, \quad \frac{x}{2}-1=3x+4, \quad x^2=4,$$

wyznaczając x na podstawie pewnych zasad arytmetyki. Trudniejsze są już zadania

$$(2) \qquad x=\sqrt{7}+3, \quad 12^x=45, \quad x^5=6, \quad \text{i t. p.}$$

choćby się tylko żądało przybliżonego obliczenia niewiadomej x.

Odrzućmy na razie z naszych poszukiwań takie zagadnienia, których rozwiązania prowadzą do:

$$(3) \qquad x=A+\sqrt{-B},$$

gdzie B dodatnią jest liczbą (jak n. p. w równaniu: $x^2-4x+13=0$), to pierwszem, głównem i bardzo ogólnem zadaniem arytmetyki będzie: znaleść sposób szukania i formę niewiadomej, (w pewien sposób określonej wielkości), w takich zadaniach jak (1) i (2).

*) Co do zapatrywań na istotę liczb i ich arytmetykę najrozmaitszych myślicieli por. S. Dickstein. „Pojęcia i metody matematyki“ T. I. Warszawa 1891.

Niechżeż x będzie jakkolwiekbądź określoną wielkością, to w założeniu, że do postaci (3) nie prowadzi, a więc jest — jak się wyrażać będziemy — r z e c z y w i s t ą i że jest prócz tego dodatnią, możemy ją zawsze j e d n ą, s y s t e m a t y c z n ą f o r m ą przedstawić, a to w sposób następujący:

Gdy g jest liczbą dodatnią, całkowitą i większą od 1, to w naturalnym szeregu liczb 1, 2, 3,...... znajdziemy zawsze taką liczbę μ_0, że będzie

$$(\alpha) \qquad \frac{\mu_0}{g^0} < x < \frac{\mu_0+1}{g^0}.$$

Podobnie znajdziemy tam liczby μ_1, μ_2,...... takie, że

$$(\beta) \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\mu_1}{g} < x < \dfrac{\mu_1+1}{g} \\ \dfrac{\mu_2}{g^2} < x < \dfrac{\mu_2+1}{g^2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\mu_{s-1}}{g^{s-1}} < x < \dfrac{\mu_{s-1}+1}{g^{s-1}}. \end{array}$$

Tworząc te nierówności musimy w ogóle albo przyjąć, że się one zakończą równością:

$$(a) \qquad \frac{\mu_s}{g^s} = x$$

albo, że do takiej równości nie dojdziemy, tak, że prócz (α) i (β) mieć jeszcze będziemy nierówności:

$$(b) \qquad \frac{\mu_t}{g^t} < x < \frac{\mu_t+1}{g^t},$$

$$t=s, \quad s+1, \quad s+2, \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

W pierwszym przypadku wielkość x przedstawia się liczbą wymierną $\frac{\mu_s}{g^s}$, albo — krócej mówiąc — jest liczbą wymierną $\frac{\mu_s}{g^s}$. Lecz, aby dać poznać, za pomocą jakiego szeregu nierówności (α), (β) do jej przedstawienia (a) dochodzimy, napiszmy raczej

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x=\mu_0+\left(\dfrac{\mu_1}{g}-\mu_0\right)+\left(\dfrac{\mu_2}{g^2}-\dfrac{\mu_1}{g}\right)+\left(\dfrac{\mu_3}{g^3}-\dfrac{\mu_2}{g^2}\right)+\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots+\left(\dfrac{\mu_{s-1}}{g^{s-1}}-\dfrac{\mu_{s-2}}{g^{s-2}}\right)+\left(\dfrac{\mu_s}{g^s}-\dfrac{\mu_{s-1}}{g^{s-1}}\right), \quad \text{czyli} \\ x=\mu_0+\dfrac{h_1}{g}+\dfrac{h_2}{g^2}+\ldots+\dfrac{h_s}{g^s}. \end{array} \right.$$

gdzie $$h_\lambda=\mu_\lambda-g\mu_{\lambda-1},$$
$$\lambda=1,\ 2,\dots\ s.$$

Wszystkie liczniki h_λ są widocznie całkowite; lecz pokażemy, że są one prócz tego dodatnie i $\leqq g-1$, nie wykluczając zera. Napiszmy w tym celu dwie po sobie następujące nierówności:

$$\frac{\mu_\lambda}{g^\lambda}<x<\frac{\mu_\lambda+1}{g^\lambda},\qquad \frac{\mu_{\lambda+1}}{g^{\lambda+1}}<x<\frac{\mu_{\lambda+1}+1}{g^{\lambda+1}},$$

to z nich dostajemy:

$$\frac{\mu_\lambda}{g^\lambda}<\frac{\mu_{\lambda+1}+1}{g^{\lambda+1}},\qquad \frac{\mu_{\lambda+1}}{g^{\lambda+1}}<\frac{\mu_\lambda+1}{g^\lambda}.$$

Pierwsza z nich daje: $\mu_{\lambda+1}-\mu_\lambda g>-1$, druga zaś daje: $\mu_{\lambda+1}-\mu_\lambda g<g$, a to znaczy, że $g>h_\lambda>-1$, *c. b. d. d.*

W formie (4) mamy przedstawienie liczby x na zasadzie g analogiczne z rozwinięciem danego ułamka na ułamek dziesiętny (skończony), jak tego uczy elementarna arytmetyka; cyfry bowiem ułamka dziesiętnego są wszystkie mniejsze od 10, a jednostką miejsca λ^{go} jest $\frac{1}{10^\lambda}$. Lecz ta analogia jest jeszcze dalej idąca.

Nierówność $\frac{\mu_\lambda}{g^\lambda}<x<\frac{\mu_\lambda+1}{g^\lambda}$ wskazuje, że $x-\frac{\mu_\lambda}{g^\lambda}<\frac{1}{g^\lambda}$.

Z (4) wynika zaś, że, gdy

$$\mu_0+\frac{h_1}{g}+\frac{h_2}{g^2}+\dots+\frac{h_\lambda}{g^\lambda}=\frac{\mu_\lambda}{g^\lambda}=H_\lambda$$

to

$$x-H_\lambda=R_{\lambda+1}=\frac{h_{\lambda+1}}{g^{\lambda+1}}+\dots+\frac{h_s}{g^s}<\frac{1}{g^\lambda},$$

a to znaczy: *Reszta formy (4) poczynająca się od miejsca* $(\lambda+1)^{go}$ *jest zawsze mniejszą niż jednostka* $\frac{1}{g^\lambda}$ *ostatniego zatrzymanego miejsca* (λ^{go}). *To samo dzieje się i w ułamku dziesiętnym.*

Po uwidocznieniu reszty $R_{\lambda+1}$ mamy

$$x=\mu_0+\frac{h_1}{g}+\frac{h_2}{g^2}+\dots+\frac{h_\lambda}{g^\lambda}+R_{\lambda+1}$$
$$=\frac{\mu_0 g^\lambda+h_1g^{\lambda-1}+\dots+h_\lambda}{g^\lambda}+R_{\lambda+1}$$
$$=\frac{\mu_\lambda}{g^\lambda}+R_{\lambda+1},$$

a że $R_{\lambda+1}<\frac{1}{g^\lambda}$ jest, więc stąd wynika:

*

I. *Rozwinięcie (4), obliczone tylko do miejsca λ^{go}, wskazuje swym licznikiem μ_λ ile razy najwyżej $\frac{1}{g^\lambda}$ jako dodajnik w liczbie x dokładnie mieścić się może. Stąd nazwa:* r o z w i n i ę c i e s y s t e m a t y c z n e.

Ponieważ $H_\lambda = \frac{\mu_\lambda}{g^\lambda}$, a $\frac{\mu_\lambda}{g^\lambda} < x < \frac{\mu_\lambda + 1}{g^\lambda}$,

więc stąd mamy:

$$H_\lambda < x < \mu_0 + \frac{h_1}{g} + \frac{h_2}{g^2} + \ldots + \frac{h_\lambda + 1}{g^\lambda} = H'_\lambda;$$

to znaczy: *Gdy w początkowem rozwinięciu aż do miejsca λ^{go} zwiększymy ostatni licznik h_λ o jednostkę, dostaniemy wartość większą od x; przytem jest*

$$x - H_\lambda < \frac{1}{g^\lambda}, \quad H'_\lambda - x < \frac{1}{g^\lambda}.$$

Pd. 1. Gdy $x = \frac{17}{32}$, a $g = 2$, to mamy szereg nierówności:

$$o < x < 1, \quad \frac{1}{2} < x < \frac{2}{2}, \quad \frac{2}{2^2} < x < \frac{3}{2^2},$$

$$\frac{4}{2^3} < x < \frac{5}{2^3}, \quad \frac{8}{2^4} < x < \frac{9}{2^4}, \quad \frac{17}{32} = x.$$

Stąd $\mu_0 = 0$, $h_1 = 1 - 2.0$, $h_2 = h_3 = h_4 = 0$, $h_5 = 17 - 8.2 = 1$; a więc

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5}.$$

Uwaga. Rozwinięcie (4) sięgające aż do miejsca s^{go} daje po zsumowaniu ułamek, który ma mianownik g^s, a który przez żadną potęgę liczby g skrócić się nie daje.

Gdy mamy dwa systematyczne rozwinięcia

$$\mu_0 + \frac{h_1}{g} + \frac{h_2}{g^2} + \ldots + \frac{h_s}{g^s}, \quad \mu'_0 + \frac{h'_1}{g} + \frac{h'_2}{g^2} + \ldots + \frac{h'_\sigma}{g^\sigma},$$

które tę samą liczbę x przedstawiać mają, to musi być przedewszystkiem $\mu_0 = \mu'_0$, gdyż tak jedno, jak drugie rozwinięcie ma element $\frac{1}{g^0}$ tę samą ilość razy najwyżej mieścić w sobie. Lecz wtedy rozwinięcia $\frac{h_1}{g} + \frac{h_2}{g^2} + \ldots + \frac{h_s}{g^s}$, $\frac{h'_1}{g} + \frac{h'_2}{g^2} + \ldots + \frac{h'_\sigma}{g^\sigma}$ tę samą ilość razy mają dokładnie mieścić w sobie element $\frac{1}{g}$; a więc musi być $h_1 = h'_1$. Dalej w rozwinięciach

$$\frac{h_2}{g^2} + \frac{h_3}{g^3} + \ldots + \frac{h_s}{g^s}, \quad \frac{h'_2}{g^2} + \frac{h'_3}{g^3} + \ldots + \frac{h'_\sigma}{g^\sigma}$$

musi być $h_2 = h'_2$ i t. d. W końcu okazać się musi $s=\sigma$, a stąd wynika:

II. *Dwa rozwinięcia o tej samej zasadzie przedstawiające tę samą liczbę są identyczne. Naodwrót: dwa różnej postaci rozwinięcia nigdy równej nie mogą być wartości.*

Przejdźmy do przypadku drugiego, kiedy nierówności (α), (β) utrzymują się w nieskończoność (nierównościami (b)). Wtedy wielkość x można ułamkiem $\frac{\mu_t}{g^t}$ dopiero przy $t=\infty$ dokładnie przedstawić, a wskutek tego w miejsce skończonego rozwinięcia (4) dostajemy tu nieskończone rozwinięcie

$$(5) \qquad x=\mu_0+\frac{h_1}{g}+\frac{h_2}{g^2}+\frac{h_3}{g^3}+\ldots+ \text{ in inf.}, \quad h_\lambda=\mu_\lambda-g\,\mu_{\lambda-1},$$
$$\lambda=1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

Wszystkie uwagi, jakie wypowiedzieliśmy o formie (4) stosują się jednak i tutaj z tą różnicą, że tu reszta $R_{\lambda+1}$ jest rozwinięciem nieskończonem $=\frac{h_{\lambda+1}}{g^{\lambda+1}}+\frac{h_{\lambda+2}}{g^{\lambda+2}}+\ldots$ in inf.

Mamy więc i tu:

III. 1. $\qquad -1<h_\lambda<g.$

2. Gdy $H_\lambda=\mu_0+\frac{h_1}{g}+\ldots+\frac{h_\lambda}{g^\lambda}=\frac{\mu_\lambda}{g^\lambda}$, to

$$x-H_\lambda=R_{\lambda+1}<\frac{1}{g^\lambda}.$$

3. Gdy $H'_\lambda=\mu_0+\frac{h_1}{g}+\ldots+\frac{h_\lambda+1}{g^\lambda}=\frac{\mu_\lambda+1}{g^\lambda}$, to

$$H'_\lambda-x<\frac{1}{g^\lambda}.$$

4. *Dwa równej wartości rozwinięcia o tej samej zasadzie są koniecznie identyczne.*

2. Rozwinięcie liczby wymiernej w nieskończonej formie peryodycznej. Pierwsze pytanie jakie się tu nasuwa jest: czy i kiedy wymierny, właściwy ułamek można przy danem g przedstawić nieskończonem rozwinięciem (5) [art. 1.] i czem się takie rozwinięcie charakteryzuje?

Dany ułamek właściwy — (w razie niewłaściwego ułamka wydzielono już z niego liczbę całą) — niech będzie $=\frac{m}{n}$, a obrana zasada g niech będzie taką, że za pomocą pewnego całkowitego dodatniego c można uzyskać $cn=g^s$. Gdy c — co przyjmujemy — nie jest wielokrotnością zasady g, to potęga g^s jest najniższą z potęg (liczby g) równych wielokrotności liczby n.

Przyjąwszy, że istnieje takie c, mamy dalej:

$$x=\frac{m}{n}=\frac{c.m}{c.n}=\frac{\mu_s}{g^s}.$$

Szereg nierówności (β), [art. 1.], zakończy się wtedy równaniem (α), [art. 1.], a rozwinięcie będzie skończone i będzie sięgać aż do miejsca s^{go}.

Ten przypadek jedyny, w którym $\frac{m}{n}$ dać może rozwinięcie skończone, wykluczając odtąd, przyjmijmy, że: I° g jest dowolną liczbą, pierwszą względem n [tem samem przypadek $c.n=g^s$ jest już wykluczony].

Liczby $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_{\varphi(n)}$ niech przedstawiają wszystkie liczby pierwsze względem n i mniejsze od n (nie wyjmując liczby 1).

Utwórzmy liczby

$$(\alpha) \qquad g r_1,\ g r_2, \ldots,\ g r_{\varphi(n)}.$$

Są one również pierwsze względem n, a gdy je po porządku dzielić będziemy przez n, dostaniemy na reszty: $\varphi(n)$ liczb pierwszych względym n i mniejszych od n. Te reszty muszą być wszystkie różne między sobą; przyjmując bowiem że dwa dzielenia dają tę samą resztę r' mamy

$$g r_\alpha=na+r',\quad g r_\beta=nb+r',\quad \alpha \gtrless \beta.$$

Stąd dostajemy:

$$g(r_\alpha-r_\beta)=n(a-b).$$

Toby wskazywało, że iloczyn $g(r_\alpha-r_\beta)$ jest podzielny przez n. Lecz to jest niemożliwe, bo $(r_\alpha-r_\beta)$ bezwzględną wartością jest $<n$, a g jest pierwsze względem n.

Muszą więc reszty r' być wszystkie różne między sobą, a że one są wszystkie pierwsze względem n i mniejsze od n, a jest ich wszystkich dokładnie $\varphi(n)$, więc owe reszty są liczbami $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ w pewnem jakiemś uporządkowaniu n. p.

$$(\beta) \qquad r_{k_1},\ r_{k_2}, \ldots,\ r_{k_{\varphi(n)}}.$$

Dzielenie liczb (α) przez n przedstawia się teraz w ten sposób:

$$(\gamma) \qquad g r_s=n.q_s+r_{k_s},\quad s=1, 2, \ldots, \varphi(n).$$

Mnożąc równania (γ) stronami ze sobą, dostajemy związek:

$$g^{\varphi(n)}.r_1.r_2\ldots r_{\varphi(n)}=n.C+r_1r_2\ldots r_{\varphi(n)},\quad \text{albo}$$
$$r_1.r_2\ldots r_{\varphi(n)}[g^{\varphi(n)}-1]=n.C.$$

Liczba n nie jest podzielna przez iloczyn $r_1.r_2\ldots r_{\varphi(n)}$, musi być zatem C podzielne przez ten iloczyn. Położmyż $C:r_1r_2\ldots r_{\varphi(n)}=c$, liczba cała, to mamy

$$(\delta)\qquad g^{\varphi(n)}-1=c.n.$$

Gdy $\varphi(n)$ naznaczymy krótko przez ν, to powiemy:

I. *Ułamek* $\frac{m}{n}$ *można przez pomnożenie licznika i mianownika przez stosowny czynnik c sprowadzić zawsze do postaci* $\frac{m.c}{g^\nu-1}$, *gdy g jest pierwsze względem n. Wykładnik* ν *pozostaje zawsze ten sam* $=\varphi(n)$ *przy każdem, dowolnem g, pierwszem względem n.*)*

Z dzielenia $g^\nu-1:g-1$ dostajemy $g^{\nu-1}+g^{\nu-2}+\ldots+1$, a stąd:

$$g^\nu-1=(g-1)g^{\nu-1}+(g-1)g^{\nu-2}+\ldots+(g-1)g+(g-1).$$

Ponieważ $mc<g^\nu-1$ założono, więc po systematycznem rozwinięciu licznika mc według zasady g, (przedstawienie w układzie o zasadzie g), dostaniemy:

$$mc=h_{\nu-1}g^{\nu-1}+h_{\nu-2}g^{\nu-2}+\ldots+h_1g+h_0,$$

gdzie koniecznie nie wszystkie h_λ będą $=g-1$.

Mając to, położymy

$$\frac{1}{g^\nu-1}=\frac{1}{g^\nu}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{g^\nu}}=\frac{1}{g^\nu}+\frac{1}{g^{2\nu}}+\frac{1}{g^{3\nu}}+\ldots\ \text{in inf., i}$$

$$\frac{m}{n}=\frac{h_{\nu-1}g^{\nu-1}+h_{\nu-2}g^{\nu-2}+\ldots+h_0}{g^\nu-1}$$
$$=(h_{\nu-1}g^{\nu-1}+h_{\nu-2}g^{\nu-2}+\ldots+h_0)\left[\frac{1}{g^\nu}+\frac{1}{g^{2\nu}}+\frac{1}{g^{3\nu}}+\ldots\right],\quad\text{czyli}$$

$$(A)\quad\left|\begin{aligned}&\frac{m}{n}=\left(\frac{h_{\nu-1}}{g}+\frac{h_{\nu-2}}{g^2}+\ldots+\frac{h_0}{g^\nu}\right)+\left(\frac{h_{\nu-1}}{g^{\nu+1}}+\frac{h_{\nu-2}}{g^{\nu+2}}+\ldots+\frac{h_0}{g^{2\nu}}\right)+\\&\quad+\left(\frac{h_{\nu-1}}{g^{2\nu+1}}+\frac{h_{\nu-2}}{g^{2\nu+2}}+\ldots+\frac{h_0}{g^{3\nu}}\right)+\ldots\ \text{in inf.}\end{aligned}\right.$$

Jestto widocznie rozwinięcie systematyczne, nieskończone, od początku peryodyczne, o peryodzie ν miejsc zawierającym. Lecz

---

*) W teoryi liczb dowodzi się, że niekiedy wykładnikiem $\delta<\nu$ można dojść do związku $g^\delta-1=c_1n$ i że wtedy δ jest podzielnikiem liczby ν. W naszych poszukiwaniach jednak nie będziemy potrzebowali uwzględniać tych przypadków. Równanie (δ) jest wyrazem tak zwanego twierdzenia Fermata; por. n. p. G. Wertheim „*Elemente der Zahlentheorie*“ (Lipsk 1887).

może się zdarzyć, że już w porządku napisanych liczb: $h_{\nu-1}$, $h_{\nu-2}$,... h_1, h_0 zawiera się kilka n. p. ν' peryodów. Wtedy każdy peryod zawiera miejsc $\frac{\nu}{\nu'}=\delta$, gdzie δ jest podzielnikiem liczby ν.

Stąd twierdzenie:

II. *Ułamek właściwy, wymierny o mianowniku n pierwszym względem g daje nieskończone systematyczne rozwinięcie o zasadzie g peryodyczne od początku. Ilość miejsc zawartych w peryodzie jest albo dokładnie* $=\varphi(n)$, *albo jest podzielnikiem tej liczby.*

Pd. 1. Gdy $\frac{m}{n}=\frac{5}{8}$, to $\varphi(n)=4$, a gdy $g=3$, mamy $3^4-1=10.8$, $(c=10)$. Stąd

$$\frac{m}{n}=\frac{50}{3^4-1}=\frac{3^3+2.3^2+3+2}{3^4-1}=\frac{3^3+2.3^2+3+2}{3^4}+\frac{3^3+2.3^2+3+2}{3^8}+\dots$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\dots.$$

Peryod zawiera tu widocznie 2 miejsca, gdzie 2 jest podzielnikiem liczby $\varphi(n)=4$.

Z drugiej strony mamy także $3^2-1=1.8$, $(c=1)$, tak, że

$$\frac{m}{n}=\frac{5}{3^2-1}=\frac{3+2}{3^2-1}=\frac{3+2}{3^2}+\frac{3+2}{3^4}+\frac{3+2}{3^6}+\dots.$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\dots.$$

Jestto widocznie ten sam rezultat, co przy użyciu wykładnika $\varphi(n)=4$.

Tak samo w każdym innym przypadku, w którym wykładnik $\delta<\nu$ istnieje, nie ma potrzeby uwzględniać go ze stanowiska teoretycznego. Jeżeli bowiem przy wykładniku ν dostajemy rozwinięcie o zasadzie g, a potem przy wykładniku δ również takie rozwinięcie, to one — według art. 1. — muszą być identyczne.

Pd. 2. Przedstawić $\frac{11}{16}$ rozwinięciem systematycznem o zasadzie $g=11$.

Pd. 3. Przedstawić $\frac{3}{5}$ rozwinięciem systematycznem o zasadzie $g=46$.

III. *Naodwrót: pewne dane naprzód, systematyczne rozwinięcie* (*A*) *przedstawia wymierną liczbę*

$$\frac{h_{\nu-1}g^{\nu-1}+\dots+h_0,}{g^\nu-1},$$

co wynika z zwijania (sumowania) tego rozwinięcia.

II°. Przyjmijmy teraz, że w właściwym ułamku $\frac{m}{n}$ mianownik n zawiera czynniki obranej zasady g i to nawet z wyższymi wykładnikami, niż w g. Tak n. p. może być $n=2^2.3.5$, a $g=6$. W takim razie wydzielamy z n wszystkie czynniki liczby g z ich zupełnymi wykładnikami i mnożymy n przez taki czynnik c, aby on wraz z wyłączonymi czynnikami dał g^α z możliwie najmniejszem α. W przykładzie przytoczonym wyłączyć według tego potrzeba $2^2.3$, a mnożąc $n=2^2.3.5$ przez $c=3$ dostajemy

$$cn=3.2^2.3.5=6^2.5.$$

Ułamek dany piszemy dalej w formie $\frac{c.m}{c.n}$, gdzie $cn=g^\alpha.n_1$ i gdzie n_1 jest już pierwsze względem g. Gdy $n_1=1$, mamy skończone rozwinięcie:

$$\frac{m}{n}=\frac{h_1}{g}+\frac{h_2}{g^2}+\ldots+\frac{h_\alpha}{g^\alpha}.$$

W ogólniejszym przypadku $n_1>1$ dostajemy:

$$\frac{m}{n}=\frac{c.m}{g^\alpha.n_1}=\frac{1}{g^\alpha}\cdot\frac{c.m}{n_1}.$$

Położmy $\frac{cm}{n_1}=\mu+\frac{m_1}{n_1}$ gdzie μ jest największą liczbą całą $\geqq 0$ zawartą w $\frac{cm}{n_1}$, a $\frac{m_1}{n_1}$ jest już ułamkiem właściwym, to mamy według I.:

$$\mu+\frac{m_1}{n_1}=\mu+\left(\frac{h_{\nu-1}}{g}+\frac{h_{\nu-2}}{g^2}+\ldots+\frac{h_0}{g^\nu}\right)+\left(\frac{h_{\nu-1}}{g^{\nu+1}}+\frac{h_{\nu-2}}{g^{\nu+2}}+\ldots+\frac{h_0}{g^{2\nu}}\right)+\ldots\ldots$$

a stąd

$$\frac{m}{n}=\frac{\mu}{g^\alpha}+\left(\frac{h_{\nu-1}}{g^{\alpha+1}}+\frac{h_{\nu-2}}{g^{\alpha+2}}+\ldots+\frac{h_0}{g^{\alpha+\nu}}\right)+\ldots\ldots\ldots$$

Ponieważ dany ułamek założyliśmy właściwym, więc z ostatniej relacyi wynika, że μ w układzie o zasadzie g przedstawione może najwyżej $g^{\alpha-1}$ zawierać. Położmyż

$$\mu=k_{\alpha-1}g^{\alpha-1}+k_{\alpha-2}g^{\alpha-2}+\ldots+k_1g+k_0$$

gdzie $k_{\alpha-1}$, $k_{\alpha-2}$, ..., k_0 są wszystkie $<g$ (początkowych kilka może być zerami, a w razie $\mu=0$ wszystkie są $=0$), to ostatecznie mamy:

$$(B)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{m}{n}=\frac{k_{\alpha-1}}{g}+\frac{k_{\alpha-2}}{g^2}+\ldots+\frac{k_0}{g^\alpha}+\left(\frac{h_{\nu-1}}{g^{\alpha+1}}+\frac{h_{\nu-2}}{g^{\alpha+2}}+\ldots+\frac{h_0}{g^{\alpha+\nu}}\right)+\\ +\left(\frac{h_{\nu-1}}{g^{\alpha+\nu+1}}+\frac{h_{\nu-2}}{g^{\alpha+\nu+2}}+\ldots+\frac{h_0}{g^{\alpha+2\nu}}\right)+\ldots\ldots \text{ in inf.}\end{aligned}\right.$$

Jestto widocznie rozwinięcie, które począwszy od miejsca $(\alpha+1)^{\text{go}}$, $(\alpha>0)$, posuwa się już peryodycznie, a stąd twierdzenie:

IV. *Gdy w ułamku (właściwym) $\frac{m}{n}$ mianownik nie jest dokładnie $=g^s$, ale nie jest też i pierwszem względem g, to, gdy rozwinięcie jego podług zasady g jest nieskończone, jest zarazem i peryodyczne począwszy od $(\alpha+1)^{go}$ miejsca, $(\alpha>0)$. Ilość miejsc w peryodzie jest i tu $=\varphi(n)$ albo jest podzielnikiem tej liczby.*

Pd. 4. W ułamku $\frac{m}{n} = \frac{53}{64}$ mamy $n = 4^3$, a gdy $g = 28 = 4.7$ obierzemy, to położymy: $c.n = 7^3.4^3$, $(c = 7^3)$ i $\frac{m}{n} = \frac{7^3.53}{28^3}$. Lecz $7^3.53$ podług zasady 28 uporządkowane daje $23.28^2 + 5.28 + 7$, a stąd będzie:

$$\frac{m}{n} = \frac{23}{28} + \frac{5}{28^2} + \frac{7}{28^3}.$$

Pd. 5. Gdy dla ułamka $\frac{m}{n} = \frac{11}{60}$ obierzemy $g = 6$, mamy $n = 2^2.3.5$, a więc $3n = 6^2.5$, $(c = 3,\ n_1 = 5)$. Stąd

$$\frac{3m}{3n} = \frac{33}{6^2.5} = \frac{1}{6^2}\left[6 + \frac{3}{5}\right] = \frac{1}{6^2}\left[6 + \frac{3}{6-1}\right]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{3}{6^2}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{0}{6} + \frac{0}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \frac{3}{6^4} + \frac{3}{6^5} + \ldots\ldots$$

Peryod zawiera tu jedno tylko miejsce, a peryodyczne rozwinięcie zaczyna się od miejsca czwartego. W ułamku $\frac{3}{5}$ użyto dozwolonego $\delta = 1 < \nu$, gdyż ν jest tu $= \varphi(5) = 4$. W istocie mamy $6^4 - 1 = 1295$, a więc podzielne przez 5.

Pd. 6. Przy danym ułamku $\frac{m}{n} = \frac{17}{48}$ i $g = 8$ mamy $n = 4^2.3$. Obierzmy $c = 2^2$ a więc $c.n = 8^2.3$, to mamy $\frac{m}{n} = \frac{4.17}{8^2.3} =$

$$= \frac{1}{8^2} \cdot \frac{68}{3} = \frac{1}{8^2}\left[22 + \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{8^2}\left[2.8 + 6 + \frac{21.2}{8^2-1}\right]$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{6}{8^2} + \frac{5.8+2}{8^2}\left[\frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{8^6} + \ldots\right]$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{6}{8^2} + \left(\frac{5}{8^3} + \frac{2}{8^4}\right) + \left(\frac{5}{8^5} + \frac{2}{8^6}\right) + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

V. *Naodwrót każde systematyczne rozwinięcie* (B), *naprzód dane, przedstawia liczbę wymierną*

$$\frac{k_{\alpha-1}\, g^{\alpha-1} + \ldots + k_0}{g^\alpha} + \frac{h_{\nu-1}\, g^{\nu-1} + \ldots + h_0}{g^\alpha (g^\nu - 1)}$$

$$= \frac{c_{\alpha+\nu-1} \cdot g^{\alpha+\nu-1} + \ldots + c_0}{g^\alpha (g^\nu - 1)},$$

co znowu ze zwijania tego wyrażenia wynika.

Obejmując rozwinięcia, podane w (A) i (B) tego artykułu wspólną nazwą „peryodyczne", powiemy:

VI. *Każdy ułamek wymierny — (w razie niewłaściwego ułamka trzeba w* (A) *i* (B) *dodać z początku całą liczbę* μ_0) *— a więc każda liczba wymierna — daje rozwinięcie według dowolnej zasady* g *albo skończone, albo nieskończone, ale peryodyczne.*

Uwaga. Niech x będzie skończonem, systematycznem rozwinięciem

(a) $$x=\mu_0+\frac{h_1}{g}+\frac{h_2}{g^2}+\ldots+\frac{h_s}{g^s}.$$

Połóżmy

$$\frac{h_s}{g^s}=\frac{h_s-1}{g^s}+\frac{1}{g^s},$$

to z uwagi, że

$$1=\frac{g-1}{g}+\frac{g-1}{g^2}+\frac{g-1}{g^3}+\ldots\ldots$$

możemy położyć:

$$\frac{h_s}{g^s}=\frac{h_s-1}{g^s}+\frac{g-1}{g^{s+1}}+\frac{g-1}{g^{s+2}}+\ldots\ldots \text{ i}$$

(b) $$x=\mu_0+\frac{h_1}{g}+\ldots+\frac{h_s-1}{g^s}+\frac{g-1}{g^{s+1}}+\frac{g-1}{g^{s+2}}+\ldots\ldots$$

Widzimy tu, że dwa różne rozwinięcia (a), (b) tę samą liczbę wymierną przedstawiają. Lecz stąd nie wynika, aby zastrzeżenie, że skończone systematyczne rozwinięcie wyklucza nieskończone i naodwrót, nie było prawdziwem. Zajmowaliśmy się bowiem dotąd tylko rozwinięciami systematycznemi i do takich tylko odnosi się owo zastrzeżenie. Tutaj rozwinięcie (a) jest systematycznem, podczas gdy rozwinięcie (b) już takiem nie jest, [reszta jego $R_{s+1}=\frac{1}{g^s}$, a więc nie jest $<\frac{1}{g^s}$ jak to ma miejsce w rozwinięciach systematycznych]. Tej to okoliczności przypisać tu trzeba, że różne rozwinięcia (a), (b) tę samą liczbę określają.*) Możemy zatem być pewni, że jak długo liczby wymierne rozwijamy systematycznie, tak dlugo twierdzenia II., III. [art. 1.] nie doznają wyjątku.

3. Rozwinięcia nieskończone, a nieperyodyczne. Określenie liczb niewymiernych przez szereg liczb wymiernych, posuwających się w nieskończoność. Po tem, co się o rozwijaniu wymiernych liczb powiedziało, możemy przejść do rozwinięć nieperyodycznych:

(1) $$x=\mu_0+\frac{h_1}{g}+\frac{h_2}{g^2}+\ldots+\text{ in inf.}$$

Jest ich nieskończenie dużo, bo z jednej strony można g na nieskończenie wiele sposobów obrać ($g=2, 3, 4, \ldots\ldots$), a z drugiej strony przy każdem g istnieje nieskończenie dużo nieperyodycznych porządków μ_0, h_1, h_2,...., $(-1<h_\lambda<g)$.

Że tak utworzone rozwinięcie (1) liczby wymiernej nie przedstawia, łatwo okazać.

Przyjmijmy bowiem, że x = ułamkowi wymiernemu $\frac{m}{n}$. Ułamek $\frac{m}{n}$ rozwinięty według zasady g jest — według art. 1go

*) Takich rozwinięć, jak (b), używa n. p. Peano. Por. cytat w art. 44.

i 2^{go} — albo rozwinięciem skończonem, albo peryodycznem. W razie więc $\frac{m}{n}=x$ musiałoby być to rozwinięcie skończone, albo peryodyczne identycznem z rozwinięciem nieperyodycznem (1). Lecz to, [art. 1., tw. III.], jest niemożliwe.

Rozwinięcie (1) jest zatem nie tylko co do formy, ale także i co do istoty, t. j. zdolności określania pewnej wielkości x różne od rozwinięć peryodycznych. Dokładniej ta różnica określi się w ten sposób:

Gdy w rozwinięciu danem bez względu, czy ono jest peryodycznem, czy nieperyodycznem, położymy, jak wyżej:

$$\mu_0+\frac{h_1}{g}+\ldots+\frac{h_\lambda}{g^\lambda}=\frac{\mu_\lambda}{g^\lambda}=H_\lambda,\ \mu_0+\frac{h_1}{g}+\ldots+\frac{h_\lambda+1}{g^\lambda}=\frac{\mu_\lambda+1}{g^\lambda}=H'_\lambda,$$

możemy dowolnie zwiększając λ, podać granice, między któremi wielkość x się mieści:

$$H_\lambda<x<H'_\lambda,\quad \lambda=1,\ 2,\ 3,\ \ldots..$$

Przy $\lambda=t$ różnica H'_t-H_t wynosi $\frac{1}{g^t}$ i jest tem mniejszą, im większe t obrano. Że zaś w zwiększaniu t nie mamy żadnego ograniczenia, więc $\frac{1}{g^t}$ wreszcie do zera zredukować się może, a wtedy mamy $H_t=H'_t$ przy $t=\infty$. To wyrażamy krócej, pisząc:

$$\lim_{t=\infty} H_t=\lim_{t=\infty} H'_t=x.$$

W rozwinięciach peryodycznych szeregi liczb (wymiernych) H_λ, $H_{\lambda+1}$, ...; H'_λ, $H'_{\lambda+1}$, ... nie przedstawiają żadnej wartości, bo zwijanie tych rozwinięć, jest tu lepszą, praktyczniejszą drogą, do dokładnego określenia wielkości x prowadzącą.

Przeciwnie w rozwinięciach nieperyodycznych tylko przez użycie bardzo wielkich λ w szeregach H_λ, ...; H'_λ, ... możemy coś dokładniejszego o wielkości x przysądzić, a granica $\lim_{t=\infty} H_t$, nie dająca się wprawdzie osiągnąć, ale istniejąca logicznie, jest jedyną definicyą tej wielkości x. Stąd wnosimy:

I. *Prócz liczb wymiernych istnieje jeszcze nowy rodzaj liczb, które dokładnie się określają przez szereg liczb wymiernych, posuwających się w nieskończoność. Te nowe liczby nazywamy niewymiernemi.* *)

*) Tę definicyę liczb niewymiernych prawie równobrzmiącą dali Weierstrass i G. Cantor. Gdy x ma oznaczać liczbę niewymierną, to „x jest znakiem tylko wskazującym, że istnieje pewien dany szereg liczb". Por. E. Illigens *Math. Ann.* T. 33., str. 155. Por. także G. Cantor, *Math. Ann.* T. 22., str. 484,

Naznaczmy na prostej nieograniczonej stały punkt P_0 i obierzmy pewien odcinek liniowy za jednostkę długości. Każdą liczbę wymierną $\frac{m}{n}$ przedstawić wtedy możemy na tej prostej długością P_0P, zawierającą dokładnie $\frac{m}{n}$ obranych jednostek. O samym punkcie P mówimy, że on przedstawia liczbę $\frac{m}{n}$, albo jest punktem liczby $\frac{m}{n}$.

Biorąc wszystkie możliwe liczby wymierne, dodatnie i ujemne pod uwagę, możemy na prostej po jednej stronie punktu P_0 naznaczyć punkta wszystkich liczb dodatnich wymiernych, po drugiej jego stronie punkta wszystkich ujemnych takich liczb.

Na prostej pozostanie — mimo nieskończonego zagęszczenia się punktów P — jeszcze nieskończenie dużo punktów wolnych R. Te już odnosić się będą do liczb niewymiernych tak, że każdy odcinek P_0R — albo wprost punkt R — przedstawiać będzie $\lim\limits_{t=\infty} H_t$ pewnej liczby niewymiernej. Każdy punkt R jest przy tem granicą w nieskończoność malejących różnic odcinków $H'_\lambda - H_\lambda = \frac{1}{g^\lambda}$ pewnego nieperyodycznego rozwinięcia.

W przypadku n. p. określenia $x = \sqrt{\frac{m}{n}}$, gdzie liczba wymierna $\frac{m}{n}$ nie jest kwadratem innej liczby wymiernej, jest x niewymierne. Lecz mimo tego pisząc w miejsce równania $x = \sqrt{\frac{m}{n}}$ proporcyą $x : \frac{m}{n} = 1 : x$, mamy sposób geometryczny (szukanie średniej geometryczno-proporcyonalnej między $\frac{m}{n}$ a 1, za pomocą linii i cyrkla) dozwalający przedstawić x całkiem dokładnie pewnym wyznaczonym odcinkiem linii. Tą samą drogą możemy dalej dojść do przedstawienia wielkości $x = \sqrt[2q]{\frac{m}{n}}$, $q = 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$ i t. p.

Istnienia liczb niewymiernych dowiedliśmy powyżej, biorąc

R. Lipschitz, „*Grundlagen der Analysis*“, T. 1, str. 37. i nast.; J. Thomae „*Elementare Theorie der analytischen Functionen*“ (Halle 1880), str. 15., a wreszcie H. Weber, „*Lehrbuch der Algebra*“ (Brunszwik 1895), T. I., str. 1—20.

systematyczne, nieskończone i nieperyodyczne rozwinięcia za określenie wielkości. Lecz jasnem jest, że liczba jakbądź określona, n. p. za pomocą równań (2), [art. 1.], o której dowieść można, że nie jest wymierną, a także i kształtu (3), [art. 1.], nie dopuszcza, daje się jedynie nieperyodycznem rozwinięciem przedstawić i jest „niewymierną“.

W pierwiastkowaniu n. p. liczb całkowitych dodatnich jest rozstrzygającą uwaga, że każdy pierwiastek takiej liczby, nie będącej potęgą drugiej liczby całkowitej, jest niewymiernym. Podobnie w określeniu $10^x = b$ jest x liczbą niewymierną, gdy b nie jest liczbą całkowitą, dodatnią i t. p.

Ze względu na poszukiwania w dalszych ustępach podajemy tu jeszcze takie uwagi:

1. Gdy x jest rozwinięciem nieskończonem, to każdą liczbę ε, (wymierną lub niewymierną), której pewna wielokrotność $\nu\varepsilon$ ($\nu=1, 2, 3, \ldots\ldots$) mieści się w x z resztą $<\varepsilon$, lub $=0$ nazywamy elementem liczby x. Wtedy jest $\nu\varepsilon < x < (\nu+1)\varepsilon$. Do takich elementów ε należały liczby $\frac{1}{g^\lambda}$.

2. Ponieważ zawsze $R_{\lambda+1} < \frac{1}{g^\lambda}$, to — obrawszy dowolnie małą dodatnią ilość δ — można λ obrać tak duże, że będzie $\frac{1}{g^\lambda} < \delta$, a tem samem będzie $R_{\lambda+1} < \delta$. To znaczy: Z rozwinięcia x możemy zawsze wydzielić restę $R_{\lambda+1}$ tak, że $R_{\lambda+1}$ będzie mniejszą od dowolnie małej obranej ilości.

4. Działania arytmetyczne liczbami niewymiernemi. Gdy dwie dane są liczby niewymierne m, n, a do nich należą szeregi liczb wymiernych $H_\lambda^{(m)}$, $H_{\lambda+1}^{(m)}$, ...; $H_\lambda^{(n)}$, $H_{\lambda+1}^{(n)}$, ..., tak, że $m = \lim\limits_{t=\infty} H_t^{(m)}$, $n = \lim\limits_{t=\infty} H_t^{(n)}$, to $(m \pm n)$, $m.n$, $\frac{m}{n}$ określą się w ten sposób:

Z sumą, różnicą: $(m \pm n)$ połączony jest szereg liczb wymiernych $H_\lambda^{(m)} \pm H_\lambda^{(n)}$, a więc:

$$(m \pm n) = \lim_{t=\infty} (H_t^{(m)} \pm H_t^{(n)});$$

z iloczynem $m.n$ łączy się szereg liczb wymiernych $H_\lambda^{(m)} . H_\lambda^{(n)}$, a więc:

$$m.n = \lim_{t=\infty} H_t^{(m)} . H_t^{(n)};$$

z ilorazem $\frac{m}{n}$ ostatecznie złączony jest szereg wymiernych liczb $\frac{H_\lambda^{(m)}}{H_\lambda^{(n)}}$, a więc:

$$\frac{m}{n} = \lim_{t=\infty} \frac{H_t^{(m)}}{H_t^{(n)}}.$$

Przy tem zauważyć trzeba, że $m \pm n$, $m.n$, $\frac{m}{n}$ mogą niekiedy wypaść w liczbach wymiernych.

Gdy a jest liczbą wymierną, a m — jak wyżej — liczbą niewymierną z szeregiem $H_\lambda^{(m)}$, ..., to a^m określa szereg liczb (niewymiernych):

$$a^{H_\lambda^{(m)}}, \quad \lambda=1, 2, 3, ...$$

dających w przybliżeniu a^m, a samo

$$a^m = \lim_{t=\infty} a^{H_t^{(m)}}.$$

Gdy wreszcie a jest także liczbą niewymierną z szeregiem K_λ, $\lambda=1, 2, ...$ to szeregiem liczb (niewymiernych) $K_\lambda^{H_\lambda^{(m)}}$, $\lambda=1, 2, ...$ przybliżamy się czem raz więcej do a^m, a samo

$$a^m = \lim_{t=\infty} K_t^{H_t^{(m)}}.$$

W ten sposób należy pojmować działania arytmetyczne, podjęte na liczbach niewymiernych.

5. Szeregi liczb dodatnich i ich rozbieżność lub zbieżność. W analizie okazuje się często potrzeba badać nieskończone sumy liczb dodatnich (wymiernych, niewymiernych)

$$s = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... \text{ in inf.}$$

Taką sumę nazywają zwykle szeregiem (tu: szeregiem liczb dodatnich). Każde a_λ ($\lambda=0, 1, 2, ...$) — podobnie jak $\frac{h_\lambda}{g^\lambda}$ w rozwinięciu systematycznem — jest $(\lambda+1)^{\text{szym}}$ dodajnikiem, albo wyrazem szeregu.

Przedewszystkiem chodzi o to, czy suma s jest skończoną czy nieskończoną (czy określa liczbę skończoną, czy nieskończoną)?

W razie jej skończoności musi — choć w możliwość zupełnego obliczenia s nie wchodzimy — istnieć nieskończenie dużo liczb ε

takich, że pewna wielokrotność $\nu\varepsilon$ zawiera się w s z resztą $<\varepsilon$ lub $=0$. Taką każdą liczbę ε nazywamy i tu elementem (por. zakończenie art. 3go). Związek między ε a s wyraża się nierównością:

$$(a) \qquad \nu\varepsilon < s < (\nu+1)\varepsilon$$

i wskazuje, że suma s jest skończoną, albo — jak mówią — że szereg $a_0+a_1+\ldots\ldots$ jest zbieżny.

Lecz jeżeli przy obranem ε spełnia s nierówność (a), to już i suma $s'_n=a_{k_1}+a_{k_2}+\ldots+a_{k_n}$ pewnych, w jakimbądź porządku wyjętych dodajników $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots\ldots, a_{k_n}$ przy dostatecznie dużem n musi także podobną nierówność spełnić. Musi więc także być:

$$(a') \qquad \nu\varepsilon < s'_n < (\nu+1)\varepsilon;$$

s i s'_n możemy więc zawsze zamknąć w tych samych granicach $\nu\varepsilon$, $(\nu+1)\varepsilon$. Stąd wynika, że różnica $s-s'_n$ bezwzględnie wzięta jest $<\varepsilon$, a przez zwiększenie n możemy s'_n dowolnie zbliżyć do s. Z tego wnosimy:

I. *Suma szeregu zbieżnego o samych dodatnich wyrazach jest niezależną od porządku jego dodajników.*

Prostem następstwem tego, jest także i to, że w takim szeregu można dodajniki dodawaniem dowolnie łączyć w grupy: A_1, A_2, A_3, ... i te grupy (sumy) potem dodawać. Suma taka $A_1+A_2+A_3+\ldots\ldots$ będzie $=s$.

Gdy się naodwrót da w jakiś sposób wywnioskować, że się pewien element ε mieści w s nieskończenie wiele razy, to suma s nie jest skończoną, a szereg $a_0+a_1+\ldots\ldots$ nazywają rozbieżnym. Takie szeregi w analizie nie mają znaczenia.

Rozbieżnym według tej uwagi jest n. p. szereg:

$$H=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

zwany harmonicznym.

Połóżmy bowiem:

$$(\alpha) \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2t}=v_{2t}$$

$$(\beta) \qquad \frac{1}{2t+1}+\frac{1}{2t+2}+\ldots+\frac{1}{4t}=v_{4t}$$

$$(\gamma) \qquad \frac{1}{4t+1}+\frac{1}{4t+2}+\ldots+\frac{1}{8t}=v_{8t}, \quad \text{i t. d.}$$

to gdy w (α) za każdy dodajnik podstawimy ostatni $\frac{1}{2t}$, dostaniemy $2t.\frac{1}{2t}=1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, przy czem będzie $v_{2t}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Podobnie gdy w ($\beta$) podstawimy za każdy dodajnik $\frac{1}{4t}$, dostaniemy $2t.\frac{1}{4t}=\frac{1}{2}$, gdzie znowu będzie $v_{4t}>\frac{1}{2}$. Tak samo z (γ) wyniknie tym samym sposobem: $v_{8t}>\frac{1}{2}$ i t. d.

Dostaniemy zatem:

$$H=v_{2t}+v_{4t}+v_{8t}+\ldots\ldots>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\text{ in inf.}$$

W H zawiera się zatem element $\varepsilon=\frac{1}{2}$ nieskończoną ilość razy, a skutkiem tego: Szereg H jest rozbieżny.

Bardzo dużo zbieżnych szeregów o dodatnich dodajnikach można tworzyć w sposób następujący:

Położmy $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=s_n$ i zażądajmy, aby $s_n=f(n)$, gdzie $f(n)$ jest wyrażeniem zależnem od n, skończonem, dodatniem przy $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots..$ i posiadającem skończoną dodatnią granicę $\lim\limits_{n=\infty} f(n)$. [Lieblein].

W tym razie mamy więc

$$s=a_0+a_1+a_2+\ldots\text{ in inf.}=\lim_{n=\infty} f(n),$$

a dodajniki: $a_0=f(0)$, $a_1=s_1-s_0=f(1)-f(0)$,

$$a_2=s_2-s_1=f(2)-f(1),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_n=s_n-s_{n-1}=f(n)-f(n-1),\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Suma s jest skończoną, a więc szereg $a_0+a_1+a_2+\ldots$ in inf. zbieżny.

Pd. 1. Gdy $s_n=\frac{3n+2}{4n+3}$, to $s=\lim\limits_{n=\infty}\frac{3n+2}{4n+3}=\frac{3}{4}$, $s_0=\frac{2}{3}$,

$$s_n-s_{n-1}=a_n=\frac{3n+2}{4n+3}-\frac{3(n-1)+2}{4(n-1)+3}=\frac{1}{(4n-1)(4n+3)},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

i w tym razie mamy:

$$s=\frac{2}{3}+\frac{1}{3.7}+\frac{1}{7.11}+\frac{1}{11.15}+\frac{1}{15.19}+\ldots=\frac{3}{4}.$$

Pd 2. Gdy $s_n=\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}$, to

$$s=\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\frac{n^2+n}{4n^2+4n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{8},\quad s_0=0,$$

$$s_n-s_{n-1}=a_n=\frac{n}{(4n^2-1)^2}=\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots..,$$

a szereg zbieżny jest:

$$s=\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{2}{3^2.5^2}+\frac{3}{5^2.7^2}+\frac{4}{7^2.9^2}+\ldots=\frac{1}{8}.$$

Pd. 3. Utworzyć szeregi, których s_n są:

$$\frac{3\,.\,2^{n+1}-6}{2^n}, \quad \frac{2^n+1}{2^n+4}.$$

Mieliśmy nierówność $s-s'_n<\varepsilon$, gdzie $s'_n=a_{k_1}+a_{k_2}+\ldots+a_{k_n}$, a gdy zważymy, że ε dowolnie małą (dodatnią) ilością być może, powiemy:

II. *Z szeregu zbieżnego $s=a_0+a_1+\ldots.$ można zawsze wyjąć dostatecznie dużo dodajników w ten sposób, że suma pozostałych dodajników będzie mniejsza od dowolnie małej obranej ilości.*

W rozważaniach jednak, z któremi ma się do czynienia w teoryi funkcyi, albo w ogólności w analizie, spotykamy się zwykle z takimi szeregami $s=a_0+a_1+\ldots.$, że z nich przy każdej dowolnie małej obranej ilości ε trzeba wydzielać sumę $(n+1)$ pierwszych dodajników

$$s_n=a_0+a_1+\ldots+a_n,$$

aby przy dostatecznie dużem n dostać:

$$(b) \qquad s-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots\ldots=R_{n+1}<\varepsilon.$$

R_{n+1} nazywa się resztą szeregu. Stąd twierdzenie:

III. *Resztę $R_{n+1}=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots.$ zbieżnego szeregu*

$$a_0+a_1+\ldots=s$$

można przez zwiększenie n uczynić mniejszą od dowolnie małej obranej (dodatniej) ilości ε.

Połóżmy $(n+1)=\lambda$, to mamy $R_\lambda<\varepsilon$, a dalej

$$R_\lambda>R_{\lambda+1}>R_{\lambda+2}>\ldots.$$

i wreszcie $\lim\limits_{\lambda=\infty} R_\lambda=0$ tak, że w miejsce twierdzenia III. można powiedzieć:

IV. *Reszta szeregu zbieżnego zdąża zawsze do zera.*

V. *Naodwrót: Gdy reszta R_λ danego szeregu staje się przy dostatecznie dużem λ mniejszą od dowolnie małej obranej ilości, albo — co jest tem samem — gdy granica jej $\lim\limits_{\lambda=\infty} R_\lambda=0$, to szereg jest niezawodnie zbieżny.*

Mamy bowiem w $s_{\lambda-1}=a_0+a_1+\ldots+a_{\lambda-1}=g$ skończoną i oznaczoną sumę, a $R_\lambda<\varepsilon$; stąd wynika, że $s=s_{\lambda-1}+R_\lambda<g+\varepsilon=$ skończona ilość.

Gdy $R_\lambda=\delta<\varepsilon$, a $R_{\lambda+1}=\delta'$, $R_{\lambda+2}=\delta''$, ... to oczywiście $\delta>\delta'>\delta''>\ldots..$, a tem bardziej $a_\lambda<\delta$, $a_{\lambda+1}<\delta'$, $a_{\lambda+2}<\delta''$, ... To znaczy:

VI. *W szeregu zbieżnym, począwszy od dostatecznie dużego wskaźnika λ, są dodajniki a_λ, $a_{\lambda+1}$, ... mniejsze od dowolnie małych wciąż malejących ilości, a w granicy być musi $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0$.*

Warunek ten jest koniecznym, aby dany szereg był zbieżnym; nie jest jednak dostatecznym, bo i w szeregach rozbieżnych jak n. p. w szeregu H, dodajniki w ten sam sposób się zachowują, a jednak suma takich szeregów nie jest skończoną.

Z warunku $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ wynika:

VII. *Szereg zbieżny można zawsze od pewnego dość dalekiego dodajnika tak uporządkować, że te dodajniki wciąż po sobie maleją. Szeregi, z jakimi się w analizie spotykamy, są zwykle już począwszy od $n=0$ w ten sposób dane.*

Przy skończonem n to malenie dodajników objawia się tem, że ilorazy $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ są ułamkami właściwymi. Nie potrzebuje jednak wtedy także i $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ być ułamkiem właściwym; ta granica bowiem często mieć może wartość $=1$, jak to w wielu szeregach zbieżnych ma miejsce.

Na tem możnaby już zakończyć rozbiór szeregów zbieżnych, gdyby nie używano w analizie określeń zbieżności inaczej wysłowionych, niż, jaktośmy mieli w twierdzeniu V.

I tak: gdyśmy położyli $a_0 + a_1 + \ldots + a_{\lambda-1} = g$, a $R_{\lambda+1} < \varepsilon$ założono, to wtedy okazało się $s < g + \varepsilon$. Lecz wtedy jest oczywiście

$$s_0 < g + \varepsilon, \quad s_1 < g + \varepsilon, \quad s_2 < g + \varepsilon, \quad \ldots\ldots \text{ in inft.},$$

co znaczy:

VIII. *Szereg jest zbieżny, gdy suma dowolnie wielu jego dodajników pozostaje zawsze mniejszą od pewnej danej skończonej liczby.*

Gdy $R_\lambda = a_\lambda + a_{\lambda+1} + \ldots = \sum\limits_{\nu=\lambda}^{\infty} a_\nu < \varepsilon$ jest, to także — wskutek dodatnich wszystkich wyrazów a_ν — będzie $\sum\limits_{\nu=\lambda}^{\lambda+\lambda'} a_\nu < \varepsilon$ gdzie $\lambda' = 1, 2, 3, \ldots$

To znaczy:

IX. *Szereg jest zbieżny, gdy poczynając od dostatecznie dalekiego dodajnika a_λ suma ilukolwiek dalszych dodajników pozostaje zawsze mniejszą od pewnej dostatecznie małej ilości ε.*

Zauważyć wreszcie trzeba, że z sumą $s = a_0 + a_1 + \ldots.$ łączy się ściśle szereg liczb $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, ..., $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dążący do granicy $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$ i że pod tym względem mamy tu także zupełną analogię z rozwinięciami systematycznemi. W szeregu n. p.

$$s = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots.$$

kładąc

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \text{ dostajemy :}$$

$$s_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Szeregiem zatem liczb $1-\frac{1}{n+1}$, $n=1, 2, 3, \ldots.$, zbliżamy się do sumy szeregu

$$s=\lim_{n=\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1.$$

6. Działania arytmetyczne szeregami o dodajnikach dodatnich. Z tej uwagi ważne wyprowadzają się wnioski. Weźmy dwa szeregi $s=a_0+a_1+\ldots.$ i $s'=b_0+b_1+\ldots.$ Do pierwszego z nich niech należą liczby $s_0, s_1, s_2, \ldots.$, dążące do granicy $\lim\limits_{n=\infty} s_n=s$; w drugim szeregu analogiczny szereg liczb $s'_0, s'_1, s'_2, \ldots.$, niech dąży do granicy $\lim\limits_{n=\infty} s'_n=s'$. *Aby było $s=s'$, musi się koniecznie spełnić warunek taki:*

Przy jakkolwiekbądź małej obranej ilości ε musi się znaleść dostatecznie duże n takie, że — począwszy od tego n — mamy zawsze różnicę $s_{n+n'}-s'_{n+n'}$ co do bezwzględnej wartości $<\varepsilon$.

Szeregi n. p.:

$$s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots., \qquad s'=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots.$$

mają równą wartość, mamy bowiem:

$$s_n=1-\frac{1}{2^n}, \qquad s'_n=1-\frac{1}{n+1}, \qquad s_n-s'_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2^n},$$

a różnicę $\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2^n}\right]$ co do jej bezwzględnej wartości można przez zwiększenie n uczynić mniejszą od dowolnie małej obranej ilości ε.

Za pomocą liczb s_n, s'_n, $n=0, 1, 2, 3, \ldots.$, dołączających się do szeregów s, s' dochodzimy wreszcie do takich definicyj:

I. *Do sumy $s+s'$ dołącza się szereg liczb $s_n+s'_n$*, $n=0, 1, 2, \ldots.$, *a więc $s+s'=\lim\limits_{n=\infty}(s_n+s'_n)$. Analogicznie mamy $s-s'=\lim\limits_{n=\infty}(s_n-s'_n)$.*

II. *Iloczyn* $s.s'$ *określa się granicą* $\lim_{n=\infty} s_n . s'_n$, *do której zdąża szereg liczb* $s_n . s'_n$, $n=0, 1, \ldots..$ *Analogicznie określa się iloraz* $\frac{s}{s'}$.

III. *Potęga* $s^{s'} = \lim_{n=\infty} s_n^{s'_n}$ *jest granicą liczb* $s_n^{s'_n}$, $n=0, 1, 2, \ldots,$ *przyczem* $\lim_{n=\infty} s_n$, $\lim_{n=\infty} s'_n$ *mogą się równocześnie okazać liczbami niewymiernemi.*

7. Praktyczne znamiona zbieżności. Twierdzenia art. 5., określające zbieżność szeregu s o samych dodatnich wyrazach, mają wprawdzie wielką teoretyczną doniosłość, w praktyce jednak nie są wygodne i dlatego — nie wchodząc w dość wielką ilość znamion zbieżności szeregu*) — podamy jedną przynajmniej zasadę używaną nierzadko w analizie. Zasada ta jest taka:

Gdy porównywając dany szereg $s = a_0 + a_1 + \ldots.$ *z drugim szeregiem* $c_0 + c_1 + c_2 + \ldots.$, *o którym wiemy na pewno, że jest zbieżny, możemy wykazać, że od pewnego n począwszy, jest zawsze:*

$$a_n < c_n, \quad a_{n+1} < c_{n+1}, \quad a_{n+2} < c_{n+2}, \quad \ldots.,$$

to szereg s jest zbieżny. Niech n. p. okazuje się statecznie $a_{n+1} < r a_n$, $a_{n+2} < r^2 a_n$, $a_{n+3} < r^3 a_n$, $\ldots.$, gdzie r jest ułamkiem właściwym, to wtedy mamy:

$$(\alpha) \qquad a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots. < a_n[r + r^2 + r^3 + \ldots.] = a_n \frac{r}{1-r},$$

liczba skończona, a szereg dany jest zbieżny.

Na podstawie tego okażemy:

I. *Gdy w szeregu* $s = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ *od pewnego n począwszy, okazuje się statecznie:*

$$1) \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < r, \qquad 2) \ \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < r, \qquad 3) \ \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < r, \quad \ldots.. \text{ in inft.},$$

*gdzie r jest ułamkiem właściwym, to szereg jest zbieżny.***)

Mamy bowiem:

z 1) $a_{n+1} < r a_n$; z 2) $a_{n+2} < r a_{n+1}$, a więc: $a_{n+2} < r^2 a_n$; z 3) $a_{n+3} < r a_{n+2}$, a więc: $a_{n+3} < r^3 a_n$; ....

Z tego widocznie nierówność (α) wynika, a więc szereg jest zbieżny.

---

*) Dużo znamion zbieżności jużto ogólnej, jużto mniej ogólnej wartości, zebrał i podał Wł. Witkowski w dziele: „Nowy rachunek funkcyi granicznych". Warszawa 1865.

**) Cauchy: *Cours d'Analyse (de l'école royale polytechnique)* [1821] str. 134

Gdy dla skończonych n ma być $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$, to także $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ okazać się może, ale nie musi [art. 5.]. Lecz gdy ta granica jest $< r$, to od pewnego $n = n_1$ począwszy mamy niezawodnie *in infin.* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$, a stąd wynika, że ostatnie twierdzenie także tak krócej wypowiedzieć można:

I'. *Szereg jest zbieżny, gdy granica ilorazu* $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *okazuje się ułamkiem właściwym.*

I *a. Jeżeli przeciwnie okazuje się od pewnego n począwszy* $\frac{a_{n+1}}{a_n} > r$, $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} > r$, $\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} > r, \ldots$, (albo $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$), *gdzie r jest większe od jedności, to szereg jest rozbieżny.*

Wtedy bowiem mamy:

$$a_{n+1} > r a_n, \quad a_{n+2} > r^2 a_n, \quad a_{n+3} > r^3 a_n, \quad \ldots\ldots,$$

a stąd:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots\ldots > a_n [r + r^2 + r^3 + \ldots] = \infty.$$

Pd. 1. Szereg $1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2.3.4}{3.5.7} + \frac{2.3.4.5}{3.5.7.9} + \ldots\ldots$ jest zbieżny, gdyż tu $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Pd. 2. Okazać, że szereg $1 + \frac{2}{1} + \frac{2.3}{1.4} + \frac{2.3.4}{1.4.7} + \frac{2.3.4.5}{1.4.7.10} + \ldots\ldots$ jest zbieżnym, a szereg $1 + \frac{2}{9} + \frac{2.5}{9.11} + \frac{2.5.8}{9.11.13} + \frac{2.5.8.11}{9.11.13.15} + \ldots\ldots$ jest rozbieżnym.

W pierwszym z tych szeregów jest każdy dodajnik iloczynem ułamków: $\frac{p}{3p-5}$, $p = 2, 3, \ldots\ldots$, a w drugim ułamków: $\frac{3p-1}{2p+7}$, $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Pd. 3. Jakimi są szeregi:

(a) $1 + \frac{1.2}{1.4} + \frac{1.2.2.3}{1.4.3.7} + \frac{1.2.2.3.3.4}{1.4.3.7.5.10} + \frac{1.2.2.3.3.4.4.5}{1.4.3\ 7.5.10.7.13} + \ldots$

(b) $1 + \frac{1}{8} + \frac{1.5}{8.11} + \frac{1.5.9}{8.11.14} + \ldots$ [Dziwiński: Matematyka, kurs I. 1886].

Przypadek $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ (odgraniczający znamię niewątpliwej zbieżności od znamienia niewątpliwej rozbieżności) — przypadek wątpliwy — trzeba osobno zbadać.

Przyjmijmy naprzód, że mamy do czynienia z szeregiem $s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, w którym od pewnego n począwszy mamy statecznie $a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \ldots\ldots$ Ponieważ w dowodzeniu obojętną jest wysokość wskaźnika n, więc zakładając $n=1$, mamy $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots$, a wskutek tego:

$$a_1 < 2a_1, \quad 2a_2 = 2a_2, \quad 4a_4 < 2a_3 + 2a_4,$$
$$8a_8 < 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Stąd wynika:

$$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \ldots < 2s.$$

Położmy: $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \ldots\ldots = s'$, to mamy krótko:

$$(\beta) \qquad s' < 2s.$$

Z drugiej strony mamy:

$$a_1 = a_1, \quad 2a_2 > a_2 + a_3, \quad 4a_4 > a_4 + a_5 + a_6 + a_7,$$
$$8a_8 > a_8 + a_9 + \ldots + a_{15}, \quad \ldots\ldots\ldots,$$

a stąd:

$$(\beta') \qquad s' > s.$$

Nierówności (β), (β') wskazują, że *szereg s jest rozbieżny, gdy s' jest rozbieżny, a jest zbieżny, gdy s' jest zbieżny. Pod względem zbieżności jest więc s takim samym szeregiem, jak s'.* *)

Gdy więc w szeregu s mamy $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to tworzymy przedewszystkiem s' i staramy się rozstrzygnąć, czy s' jest zbieżnym lub rozbieżnym szeregiem.

Zastosujmy to porównywanie szeregu s z szeregiem s', w przypadku:

$$s = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots, \quad \alpha > 0,$$

w którym okazuje się właśnie $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Tworząc s' mamy tu:

$$s' = 1 + 2^{1-\alpha} + 4^{1-\alpha} + 8^{1-\alpha} + \ldots =$$
$$= 1 + 2^{1-\alpha} + (2^{1-\alpha})^2 + (2^{1-\alpha})^3 + (2^{1-\alpha})^4 + \ldots\ldots$$

Jest więc szereg s' zbieżnym, gdy $2^{1-\alpha} < 1$, a rozbieżnym, gdy $2^{1-\alpha} \geqq 1$. Dany szereg s będzie więc zbieżny dla $\alpha > 1$, rozbieżny dla $\alpha \leqq 1$.

Z tego to powodu są szeregi:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots, \qquad H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

rozbieżne, a szeregi

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots, \qquad 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots$$

zbieżne.

---

*) Cauchy: l. c. str. 135, 136.

Korzystając z zasady porównywania szeregów ze sobą dochodzimy przez zestawienie szeregu danego $a_0, + a_1 + a_2 + \ldots$. z szeregiem geometrycznym $1+r+r^2+\ldots$, $r<1$, jeszcze do nowego znamienia, a to:

II. *Gdy od pewnego n począwszy, okazuje się statecznie:*

$$a_{n+n'} < r^{n+n'},\ n'=0, 1, 2, 3, \ldots \ \textit{czyli}\ \sqrt[n+n']{a_{n+n'}} < r,$$

to szereg jest zbieżny. *)

To wynika z nierówności:

$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots < r^n + r^{n+1} + r^{n+2} + \ldots$ (= skończona liczba), która w takim razie ma miejsce.

Podług tego będzie n. p. szereg:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+\frac{1}{33}+\ldots$$

zbieżnym, bo — przy $r=\frac{1}{2}$ — mamy zawsze:

$$a_n = \frac{1}{2^n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Gdy szereg jest tak uporządkowany, że od pewnego n począwszy, mamy statecznie $\sqrt[n]{a_n} > \sqrt[n+1]{a_{n+1}} > \ldots$, a $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$, ułamek właściwy, to możemy wtedy pewną ułamkową ilość $\beta > \alpha$ tak wyznaczyć, że — od pewnego $\nu \geqq n$ poczynając — mieć będziemy:

$$a_\nu < \beta^\nu,\quad a_{\nu+1} < \beta^{\nu+1},\ \ldots\ldots \text{ i}$$
$$a_\nu + a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \ldots < \beta^\nu + \beta^{\nu+1} + \beta^{\nu+2} + \ldots$$

Stąd-to twierdzenie II. w ten sposób zwykle wysłowiają:

III. *Gdy w szeregu* $s = a_0 + a_1 + \ldots$ *okazuje się* $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *ułamkiem właściwym, to szereg jest zbieżny.*

8. Szeregi o wyrazach dodatnich i ujemnych. Określenie ich bezwarunkowej zbieżności. Przejdźmy teraz do ogólniejszych szeregów złożonych z wyrazów dodatnich i ujemnych, a aby w tym kierunku poszukiwania uprościć, wprowadźmy tak zwane bezwzględne wartości liczb i ich oznaczenia.

Bezwzględną wartością liczby dodatniej $+a$ *jest sama liczba* $+a$, *bezwzględną zaś wartością liczby ujemnej* $-a$ *jest* $+a$.

---

*) Cauchy, l. c. str. 132, 133.

Niech więc symbol $sgn\,a$ (czytaj: *signum* liczby a, albo krócej: *signum* a) oznacza $+1$ lub -1 według tego, czy a jest dodatnią, czy ujemną liczbą, to iloczyn $sgn\,a\,.\,a$ jest zawsze bezwzględną wartością liczby a.*) W krótszy jednak sposób będziemy bezwzględną wartość liczby a naznaczać znakiem $|a|$, wprowadzonym przez Weierstrassa. Według tego $|+12|=+12$, $|-6|=$ $=+6$ i t. p.

Z tej definicyi odrazu wynika twierdzenie:

Gdy $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *są liczbami rzeczywistemi, to:*

$$(a) \qquad |a_1+a_2+\ldots+a_m| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_m|.$$

Znak równości tylko wtedy występuje, gdy $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *są wszystkie jednakowego znaku.*

Weźmyż po tych uwagach szereg s, złożony z dodatnich wyrazów $a_0, a_1, a_2, \ldots$ i ujemnych $-b_0, -b_1, -b_2, \ldots$, dodanych do siebie w pewnym, dowolnym porządku.

Załóżmy, że szeregi

$$a_0+a_1+a_2+\ldots=A, \qquad b_0+b_1+b_2+\ldots=B$$

są zbieżnymi i połóżmy $\nu_1\varepsilon < A < (\nu_1+1)\varepsilon$, $\nu_2\varepsilon < B < (\nu_2+1)\varepsilon$, gdzie ε jest pewnym obranym elementem. Przyjmijmy $A > B$, a więc $\nu_1 \geq \nu_2$, to — w jakikolwiek sposób następują po sobie dodajniki a_λ, $-b_\lambda$ w s, — trzeba przez s rozumieć ilość dodatnią $<(\nu_1+1)\varepsilon-\nu_2\varepsilon$.

Że zaś przy bezustannem maleniu elementu ε mamy $(\nu_1+1)\varepsilon=A$, $\nu_2\varepsilon=B$, więc $s=A-B$ przy każdem uporządkowaniu dodajników. Gdy ma być $A<B$, to pisząc $A-B=-(B-A)$ stosujemy tu to samo rozumowanie. Z tego wynika:

I. *Szereg s, w którym suma wyrazów dodatnich dla siebie, a suma wyrazów ujemnych dla siebie jest zbieżną, jest zbieżny i niezależny od porządku dodajników. Tę niezależność od porządku dodajników określają, mówiąc, że szereg s jest bezwarunkowo zbieżny.*

Napiszmy:

$$s=u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots,$$

gdzie u_r oznacza pewne a_σ lub pewne $-b_\tau$ według tego, czy na $(r+1)^{\text{em}}$ miejscu mamy wyraz dodatni, czy ujemny, to w razie zbieżności szeregów $a_0+a_1+a_2+\ldots$, $b_0+b_1+b_2+\ldots$ będzie koniecznie szereg:

$$S=|u_0|+|u_1|+|u_2|+\ldots\ldots$$

---

*) Wygodne w wielu przypadkach (szczególnie w teoryi liczb) wprowadzenie symbolu $sgn\,\alpha$ zawdzięczamy Kroneckerowi.

zbieżnym. Naodwrót zbieżność szeregu S musi pociągnąć za sobą zbieżność szeregów $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$.

Szereg s, którego suma S bezwzględnych jego dodajników jest zbieżną, nazywamy a b s o l u t n i e z b i e ż n y m, a wskutek tego twierdzenie I. możemy króciej tak wyrazić:

II *a. Szereg s absolutnie zbieżny jest zarazem i bezwarunkowo zbieżnym, czyli: absolutna zbieżność pociąga za sobą zbieżność bezwarunkową.*

Przyjmijmy, że o szeregu s wiemy tylko to, że jest zbieżnym bezwarunkowo. W takim razie jest on zbieżny także i w porządku $[a_0 + a_1 + \ldots - (b_0 + b_1 + \ldots)]$ i tę wartość przy każdym innym porządku zatrzymuje. Z tego wynika, że szeregi $a_0 + a_1 + \ldots$, $b_0 + b_1 + \ldots$ muszą być równocześnie zbieżne, a także ich suma

$$a_0 + a_1 + \ldots + b_0 + b_1 + \ldots = |u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots$$

jest zbieżną. To zaś znaczy:

II *b. Bezwarunkowa zbieżność szeregu pociąga za sobą zbieżność absolutną; obie więc własności są pod względem określenia zbieżności szeregu identyczne.*

W szeregu S możemy — jak wiadomo — wydzielić zawsze pewną skończoną, dostatecznie dużą ilość dodajników w ten sposób, że suma pozostałych dodajników

$$|u_\alpha| + |u_\beta| + |u_\gamma| + \ldots = R$$

będzie mniejszą od dowolnie małej dodatniej ilości ε.

Lecz wtedy — podług nierówności (a), która się oczywiście utrzymuje przy dowolnie rosnącem m — mamy równocześnie:

$$|u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots| < \varepsilon.$$

To znaczy:

III. *Z szeregu bezwarunkowo (albo absolutnie) zbieżnego można zawsze wydzielić dostateczną ilość dodajników w ten sposób, że bezwzględna wartość sumy pozostałych dodajników (reszty) okazuje się mniejszą od dowolnie małej obranej ilości.*

O ile to twierdzenie da się odwrócić, rozbierzemy później [art. 10. tw. I'].

Pd. 1. Ponieważ szereg $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ jest zbieżny, więc i szereg

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots$$

będzie bezwarunkowo zbieżny.

Pd. 2. Ponieważ szereg $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ jest zbieżny, więc także i szereg

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \ldots.$$

będzie bezwarunkowo zbieżnym. Jaką wartość przedstawia szereg s?

Pd. 3. Szeregi $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots.$, $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots\ldots$ są zbieżne. Jakąż wartość ma szereg

$$1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4.5} + \ldots.?$$

Pd. 4. Czy szereg $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + , \ldots..$ jest absolutnie (i bezwarunkowo) zbieżny?

Równość dwóch danych bezwarunkowo zbieżnych szeregów, ich sumy, różnice, iloczyny, ilorazy i potęgi określają się tu tak samo, jak w art. 6., gdzieśmy rozważali szeregi o dodajnikach jednakowego znaku.

9. Warunkowa zbieżność. Przykład. Gdy w szeregu

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots..$$

okazuje się suma $|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots.$ rozbieżną, wtedy przynajmniej jeden ze szeregów:

$$a_0 + a_1 + \ldots. = \Sigma a_\lambda, \quad b_0 + b_1 + \ldots. = \Sigma b_\lambda$$

musi być rozbieżny. Przyjmijmyż, że obydwa te szeregi są rozbieżne, ale w obydwóch szeregach równocześnie jest $\lim_{\lambda=\infty} a_\lambda = 0$, $\lim_{\lambda=\infty} b_\lambda = 0$.

Obliczenie szeregu s sposobem

$$s = \Sigma a_\lambda - \Sigma b_\lambda$$

jest widocznie bez znaczenia, bo ta różnica $= \infty - \infty$, i nic oznaczonego nie daje. Pytanie więc zachodzi, czy taki szereg trzeba już wskutek tego raz na zawsze jako nieprzydatny odrzucić? Na to odpowiemy takiem rozumowaniem:

Niech A_0, A_1, A_2, ... przedstawiają sumy pewnych grup dodajników a_λ *), tak, że:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots. = \Sigma a_\lambda.$$

B_0, B_1, B_2, ... niech przedstawiają podobne sumy grup dodajników b_λ, tak, że:

$$B_0 + B_1 + B_2 + \ldots. = \Sigma b_\lambda.$$

Prócz tego niech będzie dany dowolny szereg z b i e ż n y

$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \ldots..$$

samych liczb dodatnich. Możemy dalej A_0, A_1, ..., B_0, B_1, ..., zawsze tak powybierać, że spełni się szereg nierówności:

$$|A_0 - B_0| < C_0, \quad |A_1 - B_1| < C_1, \quad |A_2 - B_2| < C_2, \quad \ldots..$$

*) n. p. $A_1 = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$; $A_2 = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+\mu}$, ...

To jednak znaczy, że szereg

$$(A_0-B_0)+(A_1-B_1)+(A_2-B_2)+\dots=\Sigma v_\lambda,$$

o dodajnikach $v_\lambda=(A_\lambda-B_\lambda)$, jest już absolutnie zbieżny, a sam szereg s obliczany w porządku $A_0-B_0+A_1-B_1+\dots$ jest zbieżny.

Przy użyciu innych $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots$ możemy dostać inny szereg $\Sigma v'_\lambda$ znowu zbieżny i o innej wartości. Wreszcie — co zaraz pokażemy — możemy z pewnych uporządkowań dostać szereg rozbieżny.

Gdy bowiem $C'_0+C'_1+C'_2+\dots$ jest rozbieżnym szeregiem ($\lim C'_\lambda=0$) *) o samych dodatnich wyrazach, to znowu można na bardzo wiele sposobów dostać nierówności:

$$v_0=A_0-B_0>C'_0, \quad v_1=A_1-B_1>C'_1, \quad v_2=A_2-B_2>C'_2, \quad \dots$$

Stąd rozbieżność szeregu Σv_λ, albo szeregu s obliczonego w porządku $A_0-B_0+A_1-B_1+\dots$ odrazu wynika.

Co się tyczy porządków dających skończoną wartość, to udowodnimy, że przez stosowne uporządkowanie możemy każdą dowolną wartość g daną otrzymać.

Niechżeż g będzie naprzód dowolną dodatnią liczbą. Wtedy możemy zawsze tyle początkowych dodajników z szeregu Σa_λ złączyć w grupę A_0, że będzie $A_0>g$. Dalej z szeregu Σb_λ tworzymy sumę B_0 tylu początkowych wyrazów, aby było $A_0-B_0<g$ i aby ta różnica pozostała dodatnią. Połóżmyż:

$$(1) \qquad A_0-B_0=g-g',$$

to mamy: $A_0>g>g'$.

Z szeregu Σa_λ bierzemy dalej sumę A_1, tylu bezpośrednio dalszych dodajników, aby dostać $A_1>g'$, a z dalszych dodajników szeregu Σb_λ tworzymy taką sumę B_1, aby się okazało:

$$(2) \qquad A_1-B_1=g'-g'',$$

gdzie znowu $A_1>g'>g''$.

W ten sposób postępując dalej, otrzymamy analogicznie n^{te} równanie:

$$(3) \qquad A_{n-1}-B_{n-1}=g^{(n-1)}-g^{(n)},$$

gdzie znowu $A_{n-1}>g^{(n-1)}>g^{(n)}$.

Im większe jest n, tem dalsze dodajniki z szeregów Σa_λ, Σb_λ wchodzą w A_{n-1}, B_{n-1}; a że te dodajniki są przy czem raz większem n, czem raz mniejsze, więc w równaniu (3) można $g^{(n)}$ uczynić dowolnie małe. Wtedy z równań (1), (2), ..., (3) dostajemy związek:

---

*) Podobnie jak tu będziemy i w dalszym ciągu pisać często wprost: lim zamiast $\lim\limits_{\lambda=\infty}$.

$$A_0-B_0+A_1-B_1+A_2-B_2+\ldots+A_{n-1}-B_{n-1}=g-g^{(n)}$$

z dowolnie małem $g^{(n)}$. Przechodząc poza n dostajemy dalej: $g^{(n)}>g^{(n+1)}>g^{(n+2)}>,\ldots,$ tak, że ostatecznie w równaniu granicznem: $A_0-B_0+A_1-B_1+A_2-B_2+\ldots$ in inf. $=g-\lim\limits_{n=\infty} g^{(n)}$ możemy przyjąć $\lim\limits_{n=\infty} g^{(n)}=0$ i napisać: $A_0-B_0+A_1-B_1+\ldots=g$.

W razie ujemnego g mieniają swoje role sumy A_λ, B_λ.

Z wszystkich tych uwag wynika:

I. *Szereg s, którego $|u_0|+|u_1|+|u_2|+,\ldots$ jest sumą rozbieżną, zmienia swą wartość ze zmianą porządku dodajników. W uporządkowaniach dających zbieżność może przedstawiać każdą dowolną wartość,*) a w niektórych uporządkowaniach okazuje się rozbieżnym. Taki szereg nazywają warunkowo zbieżnym.*

Niech n. p. $\Sigma a_\lambda=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$, a $\Sigma b_\lambda=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$

Szereg Σb_λ jest niezawodnie rozbieżny, bo w postaci:

$$\Sigma b_\lambda=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right]$$

okazuje się połową szeregu harmonicznego.

Co się tyczy szeregu Σa_λ, to mamy po porządku $a_\lambda>b_\lambda$. co od razu na jego rozbieżność wskazuje. Utwórzmy teraz z szeregów Σa_λ, $-\Sigma b_\lambda$ sumę:

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots.$$

W tym porządku dodajników będzie ten szereg zbieżny, bo pisząc:

$$s=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\ldots$$

mamy:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\ldots<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots=1. \quad \text{(art. 5)}.$$

Połóżmyż $s=\alpha$, to $0<\alpha<1$.

Samo przez się rozumie się, że gdy w s — nie zmieniając porządku — będziemy dodajniki w grupy łączyć i grupy te do siebie dodawać, dostaniemy tę samą wartość. A więc n. p. otrzymamy:

$$(a) \quad s=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\ldots=\alpha.$$

---

*) Por. Riemann: *Ges. math. Werke*, wydanie II. str. 235.

Weźmy pod rozwagę inny porządek dodajników n. p.:

$$(b)\quad s' = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

Odejmując (a) od (b) dostajemy:

$$s' - s = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right] = \frac{s}{2}.$$

Stąd wynika: $s' = \frac{3}{2}s = \frac{3}{2}a.$

Porządek (b) daje więc inną wartość, niż porządek (a).

10. Zbieżność szeregów o dodajnikach naprzemian dodatnich i ujemnych. Gdy w szeregu warunkowo zbieżnym mamy pewien porządek:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = (A_0 - B_0) + (A_1 - B_1) + \ldots = \Sigma v_\lambda,$$

dający jego zbieżność, to oczywiście, że za obraniem dowolnie małej, dodatniej ilości δ możemy przy dostatecznie dużem n dostać $\left|\sum_{\lambda=n}^{\infty} v_\lambda\right| < \delta$, gdyż Σv_λ jest już absolutnie zbieżnym szeregiem [art. 9.]. Lecz wtedy możemy równocześnie przy dostatecznie dużem ν otrzymać:

$$R_\nu = |u_\nu + u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \ldots| < \delta \text{ i } \lim R_\nu = 0.$$

To znaczy:

I. *W szeregu warunkowo zbieżnym uporządkowanym tak, że daje wartość skończoną, jest granica jego reszty zerem.*

I'. *Naodwrót: Szereg dający (w pewnem uporządkowaniu) resztę zdążającą do zera jest zbieżny, a ta zbieżność może być albo warunkowa, albo bezwarunkowa.*

Zastosujmy to twierdzenie do szeregu:

$$S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots..$$

o dodajnikach naprzemian dodatnich i ujemnych i takich, że od pewnego n począwszy, mamy:

$$a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \ldots \text{ i } \lim a_{n+s} = 0.$$

Przyjmijmy n parzyste i połóżmy:

1. $a_n - a_{n+1} = a_n - a_{n+1}$, 2. $a_{n+2} - a_{n+3} = a_{n+1} - a'_{n+3}$,

3. $a_{n+4} - a_{n+5} = a'_{n+3} - a'_{n+5}$, 4. $a_{n+6} - a_{n+7} = a'_{n+5} - a'_{n+7}$ .....

$$\ldots . a_{n+2t} - a_{n+2t+1} = a'_{n+2t-1} - a'_{n+2t+1},$$

Ilości a'_λ są tu już przez wprowadzenie pierwszej a'_{n+3} całkiem dobrze określone i są wszystkie dodatnie.*) Utwórzmy wyrażenie:

$$R_{n,t} = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \ldots + (a_{n+2t} - a_{n+2t+1}),$$

to ono jest niezawodnie dodatnie przy każdem dostatecznie dużem n i jest: $= a_n - a'_{n+2t+1}$.

W razie $n = \infty$ i $t = \infty$ mamy w

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ t=\infty}} R_{n,t} = \lim_{n=\infty} a_n - \lim_{\substack{n=\infty \\ t=\infty}} a'_{n+2t+1}$$

granicę reszty poczynającej się od parzystego dodajnika i jako sumy parzystej ilości dodajników. Lecz gdy — jak to założono — $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, a $\lim\limits_{\substack{n=\infty \\ t=\infty}} R_{n,t} = -\lim\limits_{\substack{n=\infty \\ t=\infty}} a'_{n+2t+1}$ ujemnem być nigdy nie może, więc przyjąć trzeba także $\lim\limits_{\substack{n=\infty \\ t=\infty}} a'_{n+2t+1} = 0$, wskutek czego mamy $\lim R_{n,t} = 0$. To wskazuje, że szereg S z swym porządkiem dodajników jest zbieżny, gdy się bada granicę wyżej określonej reszty.

Utwórzmy, przyjmując znowu n parzyste, wyrażenie;

$$R'_{n,t} = a_n - [(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \ldots + (a_{n+2t-1} - a_{n+2t})]$$

i wprowadźmy ilości a'_{n+4}, a'_{n+6}, ... a'_{n+2t}, to mieć będziemy:

$$R'_{n,t} = a_n - [(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a'_{n+4}) + \ldots + (a'_{n+2t-2} - a'_{n+2t})]$$
$$= a_n - [a_{n+1} - a'_{n+2t}].$$

Wyraz w nawiasie — wskutek $a_{n+1} > a_{n+2} > a_{n+3} > \ldots$ — znowu nigdy ujemnym być nie może; a że przy $n = \infty$ jest $\lim\limits_{n=\infty} a_{n+1} = 0$, więc musi być także $\lim\limits_{\substack{n=\infty \\ t=\infty}} a'_{n+2t} = 0$ i wreszcie:

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ t=\infty}} R'_{n,t} = 0.$$

To wskazuje, że szereg S z swem uporządkowaniem dodajników okazuje się zbieżnym, gdy się bada granicę jego reszty, jako sumy nieparzystej ilości dodajników, a poczynającej się od parzystego wyrazu.

To samo oczywiście dotyczyć będzie granicy reszt:

---

*) Wynika to stąd: ponieważ $a_{n+1} > a_{n+2}$, więc w równaniu 2. (str. 30.), być musi $a'_{n+3} > a_{n+3}$. A więc także jest $a'_{n+3} > a_{n+4}$, a wtedy z równania 3. wynika $a'_{n+5} > a_{n+5}$. Równocześnie jest więc $a'_{n+5} > a_{n+6}$, a wskutek tego w równaniu 4. musi być $a'_{n+7} > a_{n+7}$. Zawsze więc jest $a'_{n+3} > a_{n+3}$, $a'_{n+5} > a_{n+5}$, $a'_{n+7} > a_{n+7}$, ... a że a_λ są dodatnie, więc i a'_λ muszą być dodatnie.

$$-a_{n+1}+a_{n+2}-a_{n+3}+a_{n+4}-\ldots=-[a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\ldots],$$
poczynających się od wyrazu nieparzystego. Stąd twierdzenie:

II. *Szereg, którego dodajniki są naprzemian dodatnie i ujemne, a co do bezwzględnej wartości wciąż maleją, dążąc do granicy: zero, okazuje się w tem uporządkowaniu zawsze zbieżnym, bez względu na to, czy suma wyrazów dodatnich i suma wyrazów ujemnych są równocześnie zbieżne czy rozbieżne.*)*

Tej-to okoliczności zawdzięczyć należy, że szereg
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots.$$
okazał się zbieżnym, jak to wykazano w art. 9.

11. Szeregi wahające. Twierdzenia Abla i Dirichleta. Dotychczas zajmowaliśmy się takimi szeregami $u_0+u_1+u_2+\ldots$, w których zawsze $\lim\limits_{n=\infty}|u_n|=0$ było. Nie trudno jednak będzie tworzyć i takie — pewne znaczenie mające — szeregi, w których okazuje się $\lim\limits_{n=\infty}|u_n|=\varrho$, gdzie $\varrho>0$ jest.

Wyobraźmy sobie w tym celu dwa nieskończone następstwa samych dodatnich skończonych liczb:

(1) $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots$

(2) $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots$

dążących do tej samej granicy: $\lim a_n=\lim b_n=\varrho$, i utwórzmy z nich szereg:
$$s=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\ldots=\Sigma v_\lambda,$$ albo szereg:
$$s'_\mu=a_0+a_1+\ldots+a_{\mu-1}+(a_\mu-b_0)+(a_{\mu+1}-b_1)+\ldots=\Sigma v'_\lambda,$$
albo wreszcie szereg:
$$s''_\nu=-b_0-b_1-\ldots-b_{\nu-1}+(a_0-b_\nu)+(a_1-b_{\nu+1})+\ldots=\Sigma v''_\lambda.$$

Mają one wszystkie tę własność, że:
$$\lim v_\lambda=\lim v'_\lambda=\lim v''_\lambda=0;$$
spełniają więc w dodajnikach v_λ, v'_λ, v''_λ konieczny warunek zbieżności (art. 5. tw. VI.) i może się zdarzyć, że są zbieżne. W dodajnikach a_λ, $-b_\lambda$ mamy przeciwnie $\lim a_\lambda=\lim b_\lambda=\varrho$, a same szeregi s, s'_μ, s''_ν są różnemi uporządkowaniami tych dodajników. Przyjmijmy, że szereg s w dodajnikach v_λ jest zbieżnym i że $=\alpha$. Ta wartość jest granicą, do której zdążają sumy:

---

*) W jaki sposób dany szereg rozważanego tu rodzaju przerobić można na zbieżniejszy — por. Oltramare: *Note sur les séries decroissantes... Crelle J.* T. 45. str. 345—348.

$$s_q=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)+\ldots+(a_q-b_q)$$

przy czemraz wzrastającem q.

Aby z szeregiem s porównać szereg s'_μ, położmy:

$$s'_{\mu,q}=a_0+a_1+\ldots+a_{\mu-1}+(a_\mu-b_0)+(a_{\mu+1}-b_1)+\ldots+(a_{\mu+q}-b_q),$$

to przy każdem q mamy: $s'_{\mu,q}-s_q=a_{q+1}+a_{q+2}+\ldots+a_{q+\mu}$.

Stąd — gdy $q=\infty$ — dostaniemy:

$$s'_\mu-a=\lim[a_{q+1}+a_{q+2}+\ldots+a_{q+\mu}]=\mu.\varrho,\quad \text{czyli:}\quad s'_\mu=a+\mu.\varrho.$$

Położmy analogicznie:

$$s''_{\nu,q}=-b_0-b_1-\ldots-b_{\nu-1}+(a_0-b_\nu)+(a_1-b_{\nu+1})+\ldots+(a_q-b_{\nu+q}),$$

to mamy $s''_{\nu,q}-s_q=-b_{q+1}-b_{q+2}-\ldots-b_{\nu+q}$, a stąd przy $q=\infty$:

$$s''_\nu=a-\nu.\varrho.$$

Trzy szeregi s, s'_μ, s''_ν różnią się więc od siebie całkowitemi wielokrotnościami pewnej liczby ϱ. Przy $\mu=1$, mamy:

$$s'_1=a_0+(a_1-b_0)+(a_2-b_1)+\ldots..$$
$$=a_0-(b_0-a_1)-(b_1-a_2)-(b_2-a_3)-\ldots.=a+\varrho.$$

Podczas więc, gdy $s=a$ określa się granicą

$$\lim_{q=\infty}[(a_0-b_0)+(a_1-b_1)+\ldots+(a_q-b_q)],$$

mamy: $s'_1=a+\varrho=\lim[a_0-(b_0-a_1)-\ldots-(b_q-a_q)]$, a to znaczy:

I. *Szereg s — według tego, czy go się uważa za granicę sumy parzystej, lub nieparzystej liczby dodajników — daje inną wartość.*

Pd. 1. Najprostszym szeregiem tego rodzaju jest:

$$s=a-a+a-a+\ldots..$$

Jest on $=0$, a daje $s'_\mu=\mu a$, $s''_\nu=-\nu a$, $s'_1=a$.

Pd. 2. Gdy $a_\lambda=\frac{2\lambda}{2\lambda-1}$, $b_\lambda=\frac{2\lambda+1}{2\lambda}$, $\lambda=1, 2, \ldots$ to $\lim a_\lambda=\lim b_\lambda=1$,

a $s=\left(\frac{2}{1}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{6}{5}-\frac{7}{6}\right)+\ldots=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\ldots<1$

$s'_1=\frac{2}{1}-\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)-\left(\frac{7}{6}-\frac{8}{7}\right)-\ldots=s+1$ i t. p.

Szeregi, jakie tu poznaliśmy, nazywać będziemy wahającymi, albo wahająco zbieżnymi.

Kończąc teoryę szeregów nieskończonych, podamy tu jeszcze kilka twierdzeń, z których później korzystać będziemy.

II. *Gdy szereg*

$$s=u_0+u_1+u_2+\ldots..$$

jest zbieżny bezwarunkowo, a liczby γ_0, γ_1, γ_2, ... są takie, że $|\gamma_0|$, $|\gamma_1|$, $|\gamma_2|$, ... są mniejsze od pewnej dodatniej ilości C, to szereg $\gamma_0 u_0+\gamma_1 u_1+\gamma_2 u_2+\ldots..$ jest również bezwarunkowo zbieżnym.

Z założenia o szeregu wynika, że $|u_0|+|u_1|+\ldots.$ jest skończoną sumą, z założenia zaś o liczbach γ_λ wynika nierówność:

$$|u_0\gamma_0|+|u_1\gamma_1|+|u_2\gamma_2|+\ldots.< C(|u_0|+|u_1|+\ldots.)$$

co już dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Uwaga. System $\gamma_0, \gamma_1, \ldots.$ o samych skończonych γ_λ, (i różnych od zera) dopełni już warunku potrzebnego w tw. II.

III. *Gdy szereg* $s=u_0+u_1+u_2+\ldots.$ *jest rozbieżny, a liczby* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots.$ *są takie, że* $|\gamma_0|, |\gamma_1|, \ldots..$ *są większe od pewnej dodatniej ilości* $C>0$, *to szereg* $\gamma_0 u_0+\gamma_1 u_1+\ldots..$ *jest rozbieżny, albo warunkowo zbieżny. W razie* $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots..$ *jednakowego znaku jest szereg* $\gamma_0 u_0+\gamma_1 u_1+\gamma_2 u_2+\ldots..$ *stanowczo rozbieżnym.*

Z założeń bowiem mamy:

$$|\gamma_0 u_0|+|\gamma_1 u_1|+\ldots.> C(|u_0|+|u_1|+\ldots.),$$

a stąd już prawdziwość twierdzenia wynika.

Przyjmijmy, że szeregami liczb (1), (2), danych do utworzenia szeregu wahającego, są:

(1') $b_1, b_2, b_3, \ldots.,$ (2') $b_0, b_1, b_2, \ldots.,$ $\lim b_n=\varrho$

Wtedy:

$$s=\lim_{q=\infty}[(b_1-b_0)+(b_2-b_1)+\ldots.+(b_q-b_{q-1})]=-b_0+\varrho,$$

a gdy założymy $b_0>b_1>b_2>\ldots.$ albo $b_0<b_1<b_2<\ldots.$ to s w dodajnikach $b_\lambda-b_{\lambda-1}=v_\lambda$ będzie bezwarunkowo zbieżnym, gdyż w takim razie v_λ są wszystkie jednakowego znaku, a ich suma jest skończona $=-b_0+\varrho$.

Mając to, przyjmijmy, że szereg:

$$\sigma=u_0+u_1+u_2+\ldots..$$

jest bezwarunkowo, warunkowo lub wahająco zbieżnym. Jego więc częściowe sumy $\sigma_0=u_0$, $\sigma_1=u_0+u_1$, $\sigma_2=u_0+u_1+u_2, \ldots.$ nie przechodzą bezwzględnemi swemi wartościami pewnej dodatniej skończonej liczby C. Według tw. II. jest wtedy równocześnie z s zbieżnym bezwarunkowo także szereg:

$$t=\sigma_0(b_1-b_0)+\sigma_1(b_2-b_1)+\sigma_2(b_3-b_2)+\ldots.$$

Lecz częściowa jego suma:

$$t_n=\sigma_0(b_1-b_0)+\sigma_1(b_2-b_1)+\ldots+\sigma_{n-1}(b_n-b_{n-1})=$$
$$=-\sigma_0 b_0-(\sigma_1-\sigma_0)b_1-(\sigma_2-\sigma_1)b_2-\ldots-(\sigma_{n-1}-\sigma_{n-2})b_{n-1}+\sigma_{n-1}b_n.$$

Stąd — gdy zważymy, że $\sigma_\lambda-\sigma_{\lambda-1}=u_\lambda$, że $\lim b_n=\varrho$, a granica $\lim \sigma_n$ jest skończoną, dostaniemy:

$$t=-b_0u_0-b_1u_1-b_2u_2-\ldots.+\varrho\lim_{n=\infty}\sigma_n,$$

a to wskazuje, że szereg $b_0u_0+b_1u_1+\ldots$ jest zbieżnym. Mamy więc twierdzenie:

IV. *Gdy szereg* $u_0+u_1+u_2+\ldots$ *jest bezwarunkowo, warunkowo lub wahająco zbieżny — w razie warunkowej zbieżności dąży do skończonej granicy w danym porządku swych dodajników — a dane liczby* $b_0, b_1, b_2, \ldots$ *statecznie malejąc lub rosnąc — dążą do skończonej granicy, to szereg* $b_0u_0+b_1u_1+b_2u_2+\ldots$ *w tym porządku dodajników jest zbieżny.*)*

12. Iloczyny nieskończone o czynnikach rzeczywistych. Konieczny warunek ich zbieżności. Na wzór szeregów nieskończonych można także badać iloczyn nieskończenie wielu liczb rzeczywistych albo — jak krócej mówią — iloczyn nieskończony

$$P=a_1 . a_2 . a_3 \ldots\ldots = \prod_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda .$$

Jeżeli te tu naznaczone mnożenia wykonane *in inf.* dać mają ostatecznie skończoną liczbę, to mówimy, że iloczyn (w tym wskazanym porządku czynników) jest zbieżnym.

Aby konieczne i dostateczne warunki jego zbieżności wyprowadzić, wyłączmy na zawsze z naszych poszukiwań takie iloczyny, w których znajdują się czynniki, wartość zera mające.

Już z pojęcia zbieżności iloczynu P wynika — podobnie jak w teoryi szeregów — że obrawszy dowolną dodatnią liczbę ε, zamknąć możemy wartość P — gdy dodatnią jest — nierównością:

$$(a) \qquad \nu\varepsilon < P < (\nu+1)\varepsilon,$$

a — w razie jej ujemności — nierównością:

$$(b) \qquad -\nu\varepsilon > P > -(\nu+1)\varepsilon.$$

Przy bardzo małem ε — co odtąd przyjmujemy — są te granice bardzo siebie bliskie.

Wtedy z iloczynu P będzie można zawsze wyjąć $(n+r)$ pewnych jego czynników, tak, że przy dostatecznie dużem n i $r=0, 1, 2, \ldots$ iloczyn tych czynników: $P^{(n+r)}$ będzie się również równocześnie z P między granicami (a) lub (b) zawierał.

Lecz zwykle iloczyny P, jakie spotykamy w analizie, są tak utworzone, że $P^{(n+r)}$ może być iloczynem pierwszych $(n+r)$ czynników. Oznaczmy ten iloczyn przez P_{n+r}, to mamy:

(a_1) $\qquad \nu\varepsilon < P_{n+r} < (\nu+1)\varepsilon$ równocześnie z (a), a zaś

(b_1) $\qquad -\nu\varepsilon > P_{n+r} > -(\nu+1)\varepsilon$ równocześnie z (b).

Z nierówności (a), (a_1) lub (b), (b_1) wynika:

---

*) Abel. *Oeuvres complètes (par L. Sylow et S. Lie.* — Christiania 1881) T. I, str. 219 i nast. Dirichlet. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Wyd. 3. (1879), str. 376.

*

$$|P - P_{n+r}| < \varepsilon.$$

Po podzieleniu przez $|P_{n+r}|$, co jest dozwolone, gdyż założyliśmy, że w P_{n+r} nie ma czynnika $=0$, dostajemy:

$$\left|\frac{P}{P_{n+r}} - 1\right| < \varepsilon',$$

gdzie $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|P_{n+r}|}$ pozostaje ciągle dowolnie małą dodatną ilością.

Połóżmyż:

$$\left|\frac{P}{P_{n+r}} - 1\right| = \delta, \quad 0 < \delta < \varepsilon'.$$

to mamy stąd:

$$(c) \qquad \frac{P}{P_{n+r}} = 1 \pm \delta.$$

To równanie wskazuje, że się iloczynami P_{n+r} — zwiększając n — dowolnie zbliżyć możemy do dokładnej wartości iloczynu P. Napiszmy równanie (c) w formie:

$$P_{n+r} = P.\frac{1}{1 \pm \delta} = P(1 \pm \eta_r),$$

gdzie η_r jest również ilością dodatnią dowolnie małą, to stąd przy $r=1$ i $r=0$ mamy:

$$P_{n+1} = P(1 \pm \eta_1), \quad P_n = P(1 \pm \eta_0).$$

Z podzielenia i z uwagi, że $\frac{P_{n+1}}{P_n} = a_{n+1}$ dostajemy tu związek:

$$a_{n+1} = \frac{1 \pm \eta_1}{1 \pm \eta_0} = 1 \pm \delta_{n+1},$$

gdzie δ_{n+1} również dowolnie małą dodatnią jest ilością. Stąd wynika:

I. *Aby iloczyn nieskończony P był zbieżny, jest koniecznem, aby od dostatecznie dużego n począwszy, czynniki a_{n+r} różniły się nieskończenie mało przez nadmiar albo niedomiar od jednostki.*

Wyrażając to inaczej warunkiem $\lim\limits_{r=\infty} a_{n+r} = 1$, mamy w tem analogię do warunku $\lim a_n = 0$ w teoryi szeregów.

W iloczynach n. p.:

$$(\alpha) \ \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^\nu}\right), \quad (\beta) \ \prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right), \quad (\gamma) \ \prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$$

ten warunek się spełnia i dlatego możemy dalej badać, czy one są rzeczywiście zbieżnymi.

13. Bezwarunkowo zbieżne iloczyny. Sprowadźmyż każdy czynnik a_λ iloczynu P do formy $1+(a_\lambda - 1) = 1 + b_\lambda$, $\lambda = 0, 1, \ldots.$

i przyjmijmy, że zadość się czyni warunkowi koniecznemu $\lim_{\lambda=\infty} b_\lambda = 0$, to o iloczynie

$$P = \prod_{\lambda=0}^{\infty}(1+b_\lambda)$$

— w razie jego zbieżności — powiadamy:

1. *Iloczyn P jest absolutnie zbieżny, gdy* $\prod_{\lambda=0}^{\infty}(1+|b_\lambda|)$ *jest zbieżne.*

2. *Iloczyn P jest bezwarunkowo zbieżny, gdy się jego wartość nie zmienia za zmianą porządku jego czynników.*

Trzymając się zasad obliczania iloczynów skończonych, mamy formalnie:

(1) $$P = 1 + \Sigma b_\lambda + \Sigma b_\lambda b_\mu + \Sigma b_\lambda b_\mu b_\nu + \ldots\ldots$$
$$\lambda = 0, 1, 2, \ldots., \mu = 0, 1, 2, \ldots., \nu = 0, 1, 2, \ldots., \ldots..$$

a w sumach nigdy dwa znaczki równe się nie schodzą. Z równania (1) wynika, że iloczyn P uznać trzeba za zbieżny, gdy nieskończona suma szeregów po stronie prawej będzie skończoną. Aby to zbadać, połóżmy $|b_\lambda| = \varrho_\lambda$ i załóżmy, że Σb_λ jest szeregiem bezwarunkowo zbieżnym. Wtedy jest także szereg $\Sigma \varrho_\lambda$ zbieżny, a spełnienie tego jedynego warunku jest — jak się pokaże — dostatecznym warunkiem zbieżności iloczynu P.

A. Połóżmy $\Sigma \varrho_\lambda = \varrho$ i załóżmy $\varrho < 1$. Jest więc ϱ dodatnim właściwym ułamkiem. Wtedy mamy tem bardziej $\Sigma \varrho_\lambda \varrho_\mu < \varrho^2$, $\Sigma \varrho_\lambda \varrho_\mu \varrho_\nu < \varrho^3 \ldots..$, a stąd wynika nierówność:

$$1 + \Sigma \varrho_\lambda + \Sigma \varrho_\lambda \varrho_\mu + \ldots. < 1 + \varrho + \varrho^2 + \ldots. = \frac{1}{1-\varrho}$$

wskazująca, że szereg $1 + \Sigma \varrho_\lambda + \ldots.$ jest zbieżnym. Lecz, że

$$1 + \Sigma |b_\lambda| + \Sigma |b_\lambda| |b_\mu| + \ldots. = 1 + \Sigma \varrho_\lambda + \Sigma \varrho_\lambda \varrho_\mu + \ldots,$$

więc szereg $1 + \Sigma b_\lambda + \Sigma b_\lambda b_\mu + \ldots.$ jest absolutnie i bezwarunkowo zbieżnym, a iloczyn P — według równania (1) — zbieżnym być musi.*) Lecz, jak szereg $1 + \Sigma b_\lambda + \ldots.$ jest rozwinięciem samego iloczynu P, tak też i szereg $1 + \Sigma |b_\lambda| + \ldots.$ jest rozwinięciem iloczynu $\prod_{\lambda=0}^{\infty}(1+|b_\lambda|)$, a że ten szereg jest zbieżny więc, widocznie iloczyn P jest absolutnie zbieżny. Zmieńmy dalej porządek $b_0, b_1, b_2, \ldots.$ na inny $b_{k_0}, b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots.$, to w miejsce szeregu $1 + \Sigma b_\lambda + \ldots.$ dostaniemy $1 + \Sigma b_{k_\lambda} + \ldots.$, gdzie jednak niezawodnie jest:

(2) $$1 + \Sigma b_\lambda + \ldots. = 1 + \Sigma b_{k_\lambda} + \ldots,$$

*) Weierstrass: *Math. Werke.* Tom I. str. 173.

a że ten drugi szereg jest rozwinięciem iloczynu $\prod\limits_{\lambda=0}^{\infty}(1+b_{k_\lambda})$, więc z równania (2) wynika:

$$P=\prod_{\lambda=0}^{\infty}(1+b_{k_\lambda}),$$

a to znaczy, że iloczyn P jest bezwarunkowo zbieżny.

B. Przyjmijmy teraz, że szereg Σb_λ jest wprawdzie bezwarunkowo zbieżnym, jak przódy, ale że $\Sigma|b_\lambda|=\Sigma\varrho_\lambda$ okazuje się >1.

Z szeregu $\Sigma\varrho_\lambda=|b_0|+|b_1|+|b_2|+\ldots..$ wyłączmy wtedy taką resztę $|b_n|+|b_{n+1}|+\ldots.$, że się ona już <1 okazuje, a iloczyn P przedstawmy w ten sposób:

$$P=\prod_{\lambda=0}^{n-1}(1+b_\lambda).\prod_{\lambda=n}^{\infty}(1+b_\lambda).$$

Pierwszy czynnik jest iloczynem skończonej liczby czynników, a jako taki jest skończony.

W drugim iloczynie mamy $|b_n|+|b_{n+1}|+|b_{n+2}|+\ldots.=\varrho<1$, a więc ten iloczyn według ustępu *A.* jest absolutnie i bezwarunkowo zbieżnym. Cały więc iloczyn ma również te własności.

Z tych uwag dochodzimy do twierdzenia:

I. *Gdy w iloczynie P jest szereg Σb_λ bezwarunkowo (i absolutnie) zbieżnym, to iloczyn jest równocześnie absolutnie i bezwarunkowo zbieżnym.*

Według tego iloczyn (α) [art. 12.] posiada niezawodnie obie te własności.

14. Współistnienie zbieżności bezwarunkowej i absolutnej. Warunkowo zbieżne iloczyny. Zapytać teraz należy, czy warunek absolutnej i bezwarunkowej zbieżności szeregu Σb_λ jest dostatecznym, aby iloczyn łączył w sobie oba te rodzaje zbieżności.

W tym celu przyjmijmy, że

I° przekonaliśmy się — nie badając Σb_λ — że iloczyn P jest absolutnie zbieżny.

Iloczyn $\prod\limits_{\lambda=0}^{\infty}(1+\varrho_\lambda)$, $\varrho_\lambda=|b_\lambda|$, jest więc zbieżny, a gdy

$$P_{n+r}=\prod_{\lambda=0}^{n+r}(1+\varrho_\lambda),\quad P_n=\prod_{\lambda=0}^{n}(1+\varrho_\lambda),\quad \text{to}$$

$$\frac{P_{n+r}}{P_n}-1=(1+\varrho_{n+1})(1+\varrho_{n+2})(1+\varrho_{n+3})\ldots.(1+\varrho_{n+r})-1$$

przy dowolnem r jest zawsze skończone i przy dostatecznie dużem n może być mniejsze od dowolnie małej dodatniej ilości δ. Mamy więc:

$$(1+\varrho_{n+1})(1+\varrho_{n+2})\ldots.(1+\varrho_{n+r})-1<\delta \quad \text{czyli}$$

$$(1+\varrho_{n+1})(1+\varrho_{n+2})\ldots.(1+\varrho_{n+r})<1+\delta,$$

a że $(1+\varrho_{n+1})(1+\varrho_{n+2})\dots(1+\varrho_{n+r}) > 1+\varrho_{n+1}+\dots+\varrho_{n+r}$, więc

$$1+\varrho_{n+1}+\varrho_{n+1}+\varrho_{n+2}+\dots+\varrho_{n+r} < 1+\delta, \quad \text{czyli}$$

$$\varrho_{n+1}+\varrho_{n+2}+\dots+\varrho_{n+r} < \delta.$$

To jest znakiem, że szereg $\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\dots$ (art. 5. tw. IX.) jest zbieżnym, że zatem szereg Σb_λ jest absolutnie i bezwarunkowo zbieżny i że według *A.* i *B.* mamy twierdzenie:

I. *Iloczyn absolutnie zbieżny jest zarazem i bezwarunkowo zbieżnym.*

Przyjmijmy teraz, że

II° o iloczynie P — nie badając Σb_λ — wiemy, że jest bezwarunkowo zbieżny.

Gdy w P są wszystkie b_λ dodatnie, to Σb_λ jest zbieżną absolutnie i bezwarunkowo — a tem samem — według *A.* lub *B.* i iloczyn jest absolutnie zbieżnym.

Przy tem zauważyć trzeba, że gdy przy samych dodatnich b_λ jest $\Sigma b_\lambda = \infty$, to iloczyn $P=\infty$, jest więc rozbieżny, gdyż $P > 1+\Sigma b_\lambda$. Takim jest iloczyn (β) [art. 12].

Gdy przeciwnie w P są b_λ wszystkie ujemne tak, że $P=\prod\limits_{\lambda=0}^{\infty}(1-a_\lambda)$, $a_\lambda > 0$, to w każdym razie przy dostatecznie dużem n, są a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ... już ułamkami właściwymi i wtedy mamy:

$$0 < 1-a_\lambda^2 < 1, \quad \text{czyli} \quad 0 < 1-a_\lambda < \frac{1}{1+a_\lambda}, \quad \lambda=n,\ n+1, \dots.$$

Stąd wynika:

$$\prod_{\lambda=n}^{\infty}(1-a_\lambda) < \prod_{\lambda=n}^{\infty}\frac{1}{1+a_\lambda} = \frac{1}{(1+a_n)(1+a_{n+1})\dots},$$

a że $(1+a_n)(1+a_{n+1})\dots > 1+a_n+a_{n+1}+\dots$ więc tem bardziej będzie:

$$\prod_{\lambda=n}^{\infty}(1-a_\lambda) < \frac{1}{1+a_n+a_{n+2}+\dots}$$

Przyjmując, że szereg Σa_λ jest rozbieżnym, mamy $\prod\limits_{\lambda=n}^{\infty}(1-a_\lambda) < 0$. Lecz ten iloczyn składa się z samych dodatnich czynników, a stąd wynika, że w miejsce nierówności $\prod\limits_{\lambda=n}^{\infty}(1-a_\lambda) < 0$ wystąpić tu musi równość: $\prod\limits_{\lambda=n}^{\infty}(1-a_\lambda)=0$. Tem samem i cały iloczyn $\prod\limits_{\lambda=n}^{\infty}(1-a_\lambda)=0$ choć żaden z jego czynników nie jest zerem. O takim iloczynie mówimy, że on jest rozbieżnym do zera, a to wyrażenie tem usprawiedliwiamy, że jego rozwinięcie zawiera sumę $\Sigma a_\lambda = \infty$. Takim iloczynem był iloczyn (γ) [art. 12.].

Po uwzględnieniu rozbieżności sumy Σa_λ, prowadzącej do rozbieżnych iloczynów o wartości: zero, pozostaje tylko ta jedna możliwość, a to: przyjąć, że w iloczynie bezwarunkowo zbieżnym jest suma Σa_λ absolutnie i bezwarunkowo zbieżną. [Warunkowej zbieżności tu nie ma, bo jest to szereg o samych dodatnich wyrazach]. Ale wtedy iloczyn P jest nietylko bezwarunkowo ale i absolutnie zbieżny.

Niech teraz iloczyn P, o którym wiemy, że jest bezwarunkowo zbieżnym, składa się z nieskończenie wielu czynników o dodatnich $b_\lambda = +\beta_\lambda$ i nieskończenie wielu czynników o ujemnych $b_\lambda = -\beta'_\lambda$. Wskutek bezwarunkowej jego zbieżności, mamy także:

$$P = \Pi(1+\beta_\lambda) \cdot \Pi(1-\beta'_\lambda) = \Pi(1+b_\lambda),$$

gdzie każdy z częściowych iloczynów jest bezwarunkowo zbieżnym. Pierwszy z nich ma same dodatnie b_λ, drugi same ujemne b_λ, a wtedy — jakto dopieroco widzieliśmy — muszą być sumy $\Sigma\beta_\lambda$, $\Sigma\beta'_\lambda$ bezwarunkowo (i absolutnie) zbieżne. Wtedy jednak także i suma $\Sigma\beta_\lambda - \Sigma\beta'_\lambda = \Sigma\beta_\lambda$ jest w ten sposób zbieżną, bo tu dodajniki dodatnie dla siebie i dodajniki ujemne dla siebie tworzą sumy zbieżne. Suma $\Sigma|b_\lambda|$ jest więc zbieżną, a to wskazuje, że iloczyn dany jest absolutnie zbieżny. Z tych wszystkich uwag wynika:

II. *W iloczynie zbieżnym występują zbieżność absolutna i bezwarunkowa zawsze równocześnie. Jedna z nich pociąga za sobą drugą i powoduje bezwarunkową zbieżność sumy* Σb_λ. *Naodwrót bezwarunkowa zbieżność szeregu* Σb_λ *jest koniecznym i dostatecznym warunkiem, aby iloczyn był absolutnie i bezwarunkowo zbieżnym.*

Gdy a_λ, b_λ są dodatnie liczby, a Σb_λ, Σa_λ są szeregami rozbieżnymi o $\lim a_\lambda = 0$, $\lim b_\lambda = 0$, to iloczyny

$$(a) \quad \Pi(1+a_\lambda) = \infty \qquad (b) \quad \Pi(1-b_\lambda) = 0$$

a z szeregów Σa_λ, $-\Sigma b_\lambda$ utworzyć można — [art. 9.] — szereg Σc_λ zdążający do dowolnej wartości. Spróbujmy, czy też podobnie nie można z (a) i (b) utworzyć warunkowo zbieżnego iloczynu o danej naprzód wartości. Oznaczmy częściowe iloczyny $\prod\limits_{m_1}^{m_2}(1+a_\lambda)$ przez $A_{m_1 m_2}$ a częściowe iloczyny $\prod\limits_{n_1}^{n_2}(1-b_\lambda)$ przez $B_{n_1 n_2}$, to przedewszystkiem jest zawsze $A_{m_1 m_2} > 1$, a gdy wszystkie $b_\lambda < 1$ są, to wszystkie $B_{n_1 n_2}$ są dodatnie i <1. Obierzmy dalej dowolną, skończoną dodatnią liczbę g, to możemy zawsze częściowym iloczynem A_{1m_1} uzyskać nierówność $A_{1m_1} > g$. Niech więc będzie $A_{1m_1} = \frac{g}{k_1}$, $k_1 < 1$. Z iloczynu (b) możliwem jest znowu wyjąć taki częściowy iloczyn B_{1n_1}, że przy dostatecznie dużem n_1 okaże się $B_{1n_1} < k_1$.

Niech więc $B_{1n_1} = \frac{k_1}{g_2}$, gdzie $g_2 > 1$, to mamy teraz:

$$A_{1m_1} \cdot B_{1n_1} = \frac{g}{k_1} \cdot \frac{k_1}{g_2}.$$

Dalej możliwem jest utworzyć:

$$A_{m_1+1, m_2} > g_2, \text{ tak, że } A_{m_1+1, m_2} = \frac{g_2}{k_2}, \; k_2 < 1.$$

Wtedy będzie: $A_{1m_1} B_{1n_1} \cdot A_{m_1+1, m_2} = \frac{g}{k_1} \cdot \frac{k_1}{g_2} \cdot \frac{g_2}{k_2}$. Dalej tym samym sposobem dostaniemy: $B_{n_1+1, n_2} < k_2$, $B_{n_1+1, n_2} = \frac{k_2}{g_3}$, $g_3 > 1$, tak, że teraz będzie: $A_{1m_1} B_{1n_1} A_{m_1+1, m_2} B_{n_1+1, n_2} = \frac{g}{k_1} \cdot \frac{k_1}{g_2} \cdot \frac{g_2}{k_2} \cdot \frac{k_2}{g_3}$ i t. d. Stąd wynika, że po ciągłych skróceniach, jakie tu po porządku bez końca wykonywać można, dostaniemy:

$$A_{1m_1} B_{1n_1} A_{m_1+1, m_2} B_{n_1+1, n_2} A_{m_2+1, m_3} B_{n_2+1, n_3} \cdot \ldots \ldots = g,$$

a to znaczy:

III. *Iloczyn warunkowo zbieżny o wszystkich iloczynach częściowych dodatnich można tak uporządkować, że on się dowolnie do dowolnie danej skończonej dodatniej wartości przybliża.*)*

15. Rozwijanie liczby rzeczywistej na ułamek łańcuchowy. Skończony i nieskończony ułamek łańcuchowy. Systematyczne rozwinięcie Straussa. Przejdźmy do innego rodzaju rozwinięć zwanych ułamkami ciągłymi, albo łańcuchowymi i pokażmy, że liczba dodatnia x' wymierna lub niewymierna, da się zawsze rozwinąć na taki ułamek. Sposób rozwijania polega tu znowu na ścieśnianiu pewnych granic, pomiędzy któremi zamykamy liczbę daną x' [art. 1.]. Gdy $x' = \mu_0 + x$, gdzie μ_0 jest największą liczbą całkowitą, zawartą w x', to dalej w szeregu liczb 1, 2, 3, 4, ... znajdziemy zawsze taką liczbę m_1 i tylko jednę taką, że będzie:

$$(a) \qquad \frac{1}{m_1} > x > \frac{1}{m_1+1}.$$

*) Poszukiwania tego art. przeprowadzono podług rozprawy A. Pringsheima: „*Ueber die Convergenz unendlicher Producte*" *Math. Ann.* Tom 33. — str. 119. (1889).

Położmyż: $x=\frac{1}{m_1+x_1}$, gdzie koniecznie $0<x_1<1$, to znowu x_1 określić będzie można podobną nierównością, jak (α), n. p.

$$(\beta) \qquad \frac{1}{m_2}>x_1>\frac{1}{m_2+1}$$

z jednoznacznie określonem m_2.

Stąd wynika, że $x_1=\frac{1}{m_2+x_2}$, gdzie znowu $0<x_2<1$ i że

$$x=\cfrac{1}{m_1+\cfrac{1}{m_2+x_2}}.$$

Postępując analogicznie z x_2 i prowadząc to rozwijanie dalej dostaniemy albo: $x_\nu=\frac{1}{m_k}$ albo do takiego określenia nigdy nie dojdziemy. W pierwszym razie mieć będziemy:

$$(a) \qquad x'=(\mu_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k)=\mu_0+\cfrac{1}{m_1+\cfrac{1}{m_2+\cdots+\cfrac{1}{m_k}}},$$

w drugim:

$$(b) \qquad x'=(\mu_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots\ldots)=\mu_0+\cfrac{1}{m_1+\cfrac{1}{m_2+\cdots}} \text{ in inft.*)}$$

Położmy: $P_0=\mu_0=\frac{\mu_0}{1}=\frac{L_0}{M_0}$, $(L_0=\mu_0,\ M_0=1)$,

$$P_1=(\mu_0,\ m_1)=\mu_0+\frac{1}{m_1}=\frac{m_1\mu_0+1}{m_1}=\frac{L_1}{M_1},\ (L_1=m_1\mu_0+1,\ M_1=m_1),$$

$$P_2=(\mu_0,\ m_1,\ m_2)=\frac{\left(m_1+\frac{1}{m_2}\right)\mu_0+1}{m_1+\frac{1}{m_2}}=\frac{m_2(m_1\mu_0+1)+\mu_0}{m_2m_1+1}$$

$$=\frac{m_2L_1+L_0}{m_2M_1+M_0}=\frac{L_2}{M_2},\ (L_2=m_2L_1+L_0,\ M_2=m_2M_1+M_0)$$

i przyjmijmy, że:

$$P_{n-1}=(\mu_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{n-1})=\frac{m_{n-1}L_{n-2}+L_{n-3}}{m_{n-1}M_{n-2}+M_{n-3}}=\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}},$$

to podstawiając tu $m_{n-1}+\frac{1}{m_n}$ za m_{n-1}, otrzymamy:

---

*) A. Hurwitz podał sposób rozwijania danej ilości x' na ułamek ciągły o mianownikach odmiennych od m_1, m_2, ..., zawartych w (a), (b). Por. „*Ueber eine besondere Art der Kettenbruchentwickelung reeller Grössen*" *Acta Mathematica* T. 12. (1889), str. 367—405.

$$P_n = \frac{m_n L_{n-1} + L_{n-2}}{m_n M_{n-1} + M_{n-2}} = \frac{L_n}{M_n}, \text{ gdzie}$$

$$(\gamma) \qquad L_n = m_n L_{n-1} + L_{n-2}, \quad M_n = m_n M_{n-1} + M_{n-2},$$

czem mamy stwierdzoną jednakową budowę wszystkich P_n, L_n, M_n i gdzie $n \leqq k$ w przypadku (a), $n=2, 3, 4, \ldots.$

Ułamki P_0, P_1, P_2, ... nazywają się przybliżonemi wartościami ułamków łańcuchowych (a) lub (b).

W przypadku (a) mamy odrazu:

$$(a') \qquad x' = P_k,$$

w przypadku zaś (b) położyć trzeba:

$$(b') \qquad x' = \lim_{k=\infty} P_k.$$

W tym drugim przypadku wyraża się więc x' — jak to z określeń (γ) przy $n=\infty$ wynika — ułamkiem o liczniku i mianowniku nieskończonym. Z tego powodu tem nowem określeniem (b') musimy się bliżej i dokładniej zająć. Lecz — aby zająć odrazu ogólniejsze stanowisko — rozważajmy formy (a), (b) same dla siebie t. j. jako wyrażenia, które przy danych μ_0, m_1, m_2, ... pewne wielkości x' określać mają i obliczmy różnicę

$$P_n - P_{n-1} = \Delta_n = \frac{m_n L_{n-1} + L_{n-2}}{m_n M_{n-1} + M_n} - \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}}$$

$$= -\frac{M_{n-2}}{M_n}\left[\frac{L_{n-1}}{M_{n-1}} - \frac{L_{n-2}}{M_{n-2}}\right] = -\frac{M_{n-2}}{M_n} \cdot \Delta_{n-1}.$$

Stąd po porządku dostajemy:

$$\Delta_1 = +\frac{1}{M_1}, \quad \Delta_2 = -\frac{1}{M_2} \cdot \Delta_1, \quad \Delta_3 = -\frac{M_1}{M_3} \cdot \Delta_2, \ \ldots, \ \Delta_n = -\frac{M_{n-2}}{M_n} \cdot \Delta_{n-1},$$

a stąd znowu wynika relacya:

$$(\delta) \qquad \Delta_n = P_n - P_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{M_{n-1} M_n}.$$

Napiszmyż — gdy mamy rozwinięcie (a) —

$$P_k = P_0 + (P_1 - P_0) + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_k - P_{k-1})$$

to wprowadzając (δ) dostajemy:

$$(c) \quad P_k = x' = \mu_0 + \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_1 M_2} + \frac{1}{M_2 M_3} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{k-1} M_k}$$

a ta suma określa tę samą wielkość x' co rozwinięcie (a).

W razie rozwinięcia (b) określimy wielkość x' przez owo rozwinięcie zdefiniowaną, szeregiem:

$$(d) \quad x' = \mu_0 + \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_1 M_2} + \frac{1}{M_2 M_3} - \frac{1}{M_3 M_4} + \ldots \text{ in inf.}$$

Lecz m_1, m_2, ... są liczbami całkowitemi dodatniemi. Wskutek tego uwzględniając (γ) mamy tu niezawodnie wszystkie $M_n > 0$,

$$\frac{1}{M_1} > \frac{1}{M_1 M_2} > \frac{1}{M_2 M_3} > \ldots\ldots \text{ i } \lim_{n=\infty} \frac{1}{M_n M_{n+1}} = 0,$$

a szereg (d) [art. 10, tw. II.] jest zbieżnym.

To znaczy:

I. *Każdy nieskończony łańcuchowy ułamek przedstawia pewną skończoną wartość, czyli jest zbieżny, a każda wielkość, którą takim ułamkiem przedstawić można, da się równocześnie określić szeregiem zbieżnym.*

Przez to mamy tę korzyść, że wielkość x' rozwiniętą na ułamek (b) i określoną potem granicą (b'), mamy teraz przedstawioną w formie znanej i już zbadanej, bo w szeregu zbieżnym.

Zbadajmy teraz bliżej przybliżone wartości $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ nieskończonego ułamka (b). Mamy tu:

$$P_0 = \mu_0 < x', \quad P_1 = \mu_0 + \frac{1}{m_1} = (\mu_0,\ m_1) > x', \quad P_2 = (\mu_0,\ m_1,\ m_2) < x' \text{ i t. d.}$$

a więc zawsze mamy: $P_{2n} < x' < P_{2n+1}$, co znaczy:

II. *Dokładna wartość rozwinięcia* (b) *zawiera się zawsze między dwiema, bezpośrednio po sobie następującemi wartościami przybliżonemi. Z nich większą zawsze jest przybliżona wartość nieparzysta (o nieparzystym znaczku).*

Z równania (d) mamy dalej:

$$x' - \left[\mu_0 + \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_1 M_2} + \ldots + (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{1}{M_{\mu-1} M_\mu}\right] = (-1)^\mu \cdot \varrho_\mu$$

albo $x' - P_\mu = (-1)^\mu \varrho_\mu$, gdzie:

$$\varrho_\mu = \frac{1}{M_\mu M_{\mu+1}} - \frac{1}{M_{\mu+1} M_{\mu+2}} + \ldots\ldots$$

Są to ilości zawsze dodatnie i malejące (dążące do zera) ze zwiększającem się μ. Różnica więc $|x' - P_\mu|$ maleje z wzrastającem μ, a gdy się przy tem uwzględni twierdzenie II., to mieć będziemy $P_0 < P_2 < P_4 < \ldots\ldots < x'$; $P_1 > P_3 > P_5 > \ldots\ldots > x'$. To znaczy:

III. *Przybliżone wartości parzyste przybliżają się do x' rosnąc, nieparzyste zaś malejąc.*

Gdy równaniu (δ) nadamy postać:

$$(\delta') \qquad P_n - P_{n-1} = \frac{L_n}{M_n} - \frac{L_{n-1}}{M_{n-1}} = \frac{L_n M_{n-1} - M_n L_{n-1}}{M_{n-1} \cdot M_n}$$

to z (δ) i (δ') dostajemy związek:

$$(\varepsilon) \qquad L_n \cdot M_{n-1} - M_n L_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

który wskazuje, że L_n, M_n z jednej strony, a L_{n-1}, M_{n-1} z drugiej strony są liczbami pierwszemi względem siebie. Gdyby bowiem jedna z tych par liczb miała wspólny czynnik $h > 1$, to przez ten czynnik i $(-1)^{n-1}$ musiałoby być podzielne, co jest niemożliwe.

Stąd twierdzenie:

IV. *Przybliżone wartości* P_0, P_1, P_2, ... *są ułamkami w najprostszych swych formach.*

Lecz z równania (ε) wynika także, że M_n, M_{n-1} są zawsze pierwsze względem siebie, a stąd dalej wnosimy:

V. *Gdy pierwszy licznik* M_1 *jest parzysty, to* M_1, M_3, M_5, ... *są liczbami parzystemi, a* M_2, M_4, M_6, ... *są nieparzystemi liczbami. W razie nieparzystego* M_1 *ma się rzecz odwrotnie.*

To twierdzenie jest bardzo ważne, za jego bowiem pośrednictwem możemy zbadać wymierność lub niewymierność liczby x', określonej nieskończonem rozwinięciem (b). Przyjmijmyż — aby mieć pewien oznaczony przypadek — że:

I) M_1, M_3, M_5, ... są liczby nieparzyste, a

II) M_2, M_4, M_6, ... są liczby parzyste.

W tym razie jest więc liczba 2 pierwszą względem wszystkich mianowników I) a liczba 3 pierwszą względem wszystkich mianowników II). Weźmy ułamek $P_\alpha = \frac{L_\alpha}{M_\alpha}$, $\alpha = 1, 3, 5, ...$ pod uwagę. Jego systematyczne rozwinięcie o zasadzie $=2$ będzie peryodyczne od początku [art. 2, tw. I.] a po jego zwinięciu dostaniemy:

$$P_\alpha = \frac{H_\alpha}{2^{\nu_\alpha} - 1}, \quad \alpha = 1, 3, 5, ..., $$

gdzie ν_α wskazuje ilość miejsc, zawartych w peryodzie. Przy tem zauważymy, że:

$$(\zeta) \qquad 2^{\nu_\alpha} - 1 = c_\alpha . M_\alpha \geqq M_\alpha, \quad \alpha = 1, 3, 5, ... \quad \text{[art. 2. } (\delta)\text{]}.$$

Gdy analogicznie ułamek $P_\beta = \frac{L_\beta}{M_\beta}$, $\beta = 2, 4, 6, ...$, rozwiniemy systematycznie według zasady $=3$, będziemy po zwinięciu mieli:

$$P_\beta = \frac{H_\beta}{3^{\nu_\beta} - 1}, \quad \beta = 2, 4, 6, ..., $$

gdzie znowu jest:

$$(\zeta') \qquad 3^{\nu_\beta} - 1 = c_\beta . M_\beta \geqq M_\beta.$$

Żaden z ułamków P_α, P_β nie daje się skrócić [Tw. IV.], a że mianowniki M_α i M_β wciąż wzrastają, dążąc do nieskończoności, to równocześnie z nimi — według (ζ), (ζ') — wykładniki ν_α, ν_β rosnąć będą do nieskończoności.

Granice: $lim\, P_\alpha = lim\, P_\beta = x'$. Ale wtedy mamy $\nu_\alpha = \infty$, $\nu_\beta = \infty$, co wskazuje, że x' nie daje się ani na zasadzie 2, ani na zasadzie

3 przedstawić rozwinięciem peryodycznem i jest liczbą przestępną. Stąd twierdzenie:

VI. *Nieskończony ułamek łańcuchowy* $(\mu_0, m_1, m_2, \ldots.)$ *nie przedstawia nigdy liczby wymiernej.*

Stąd dalej wynika wniosek:

VII. *Liczba wymierna nigdy się nie rozwiju na nieskończony ułamek łańcuchowy.*

Rozwijając daną liczbę x' na ułamek łańcuchowy, dostaliśmy mianowniki $m_1, m_2, \ldots..$ (w nierównościach (α), (β)) w jednoznacznie określonych liczbach. Stąd wnosimy, że x' tylko w jeden sposób da się rozwinąć na ułamek łańcuchowy.

Zauważmy naodwrót dwa różne ułamki łańcuchowe:

$$(\mu_0, m_1, m_2, \ldots..), \quad (\mu'_0, m'_1, m'_2, \ldots..)$$

skończone lub nieskończone i przyjmijmy, że one jednę i tę samą liczbę x' określać mają. W takim razie musi być przedewszystkiem $\mu_0 = \mu'_0$, gdyż w równaniu: $\mu_0 + (m_1, m_2, \ldots.) = \mu'_0 + (m'_1, m'_2, \ldots.)$ rozwinięcia $(m_1, m_2, \ldots.)$, $(m'_1, m'_2, \ldots.)$ są już ułamkowe i mają przedstawiać znowu tę samą liczbę (ułamkową) x.

Połóżmy: $(m_2, m_3, \ldots.) = x_1$, $(m'_2, m'_3, \ldots.) = x'_1$, gdzie x_1, x'_1 są oczywiście znowu ułamkami właściwymi, to mamy równocześnie

$$x = \frac{1}{m_1 + x_1}, \quad x = \frac{1}{m'_1 + x'_1}.$$

Toby wskazywało, że równocześnie ma być:

$$\frac{1}{m_1} > x > \frac{1}{m_1 + 1} \quad \text{i} \quad \frac{1}{m'_1} > x > \frac{1}{m'_1 + 1}.$$

Lecz to jest niemożliwe, gdy $m_1 \gtrless m'_1$. Musi być zatem $m_1 = m'_1$. Wskutek tego muszą dalej rozwinięcia $(m_2, m_3, \ldots)$, $(m'_2, m'_3 \ldots)$ przedstawiać jedną liczbę x_1, a gdy do nich zastosujemy analogiczne rozumowanie, dostaniemy $m_2 = m'_2$ i t. d. Mamy stąd twierdzenie:

VIII. *Dana liczba wymierna lub niewymierna daje się tylko w jeden sposób rozwinąć na ułamek łańcuchowy, a dwa ułamki łańcuchowe skończone lub nieskończone — jeżeli mają tę samą liczbę przedstawiać — muszą być identyczne.*)*

Rozwinięcie (c) lub (d) danej ilości x' możemy także wprost otrzymać, a to na podstawie uwagi, że gdy dana jest ułamkowa

---

*) Wyczerpującą teoryę ułamków łańcuchowych znajdzie w dziele O. Stolz a „*Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*" (Lipsk 1886). T. 2., str. 264....

Por. także: E. Chrystal — *Algebra an elementary text-book.* Part. 2. Ch. 32, 33.

wielkość x, to w szeregu liczb $1, 2, 3, \ldots.$ znajdzie się jedna tylko m spełniająca nierówność:

$$(A) \qquad \frac{1}{m}-1<x\leqq\frac{1}{m}.$$

Ułamek x można wtedy przedstawić w formie:

$$(B) \qquad x=\frac{1}{m}(1-x_1),$$

gdzie x_1 jest znowu ułamkiem. Gdy więc dane jest $x'=\mu_0+x_1$, $0<x_1<1$, to dalej mamy według (A) i (B):

$$\frac{1}{M_1}-1<x_1<\frac{1}{M_1}, \quad \text{a więc} \quad x_1=\frac{1}{M_1}(1-x_2)$$
$$\frac{1}{M_2}-1<x_2<\frac{1}{M_2}, \quad \text{a więc} \quad x_2=\frac{1}{M_2}(1-x_3)$$
$$\frac{1}{M_3}-1<x_3<\frac{1}{M_3}, \quad \text{a więc} \quad x_3=\frac{1}{M_3}(1-x_4)$$

. . . .

Stąd — uwzględniając kolejno x_2 w x_1, x_3 w x_2, i t. d. — dostajemy:

$$x'=\mu_0+\frac{1}{M_1}-\frac{1}{M_1M_2}+\frac{1}{M_1M_2M_3}-\ldots,$$

gdzie to rozwinięcie będzie skończone, w razie wymierności, a nieskończone w razie niewymierności x'. Lecz tę formę rozwinięcia możemy jeszcze uogólnić, a to w ten sposób: Niech będzie dany szereg dodatnich całkowitych liczb: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots.$ różnych od 0 i od 1. Dana ilość wymierna lub niewymierna x_1 niech będzie dodatnia i (po odrzuceniu całkowitej zawartej w niej liczby) <1.

Połóżmy:

$$\alpha_1x_1=a_1+x_2, \quad \alpha_2x_2=a_2+x_3, \quad \alpha_3x_3=a_3+x_4, \quad \ldots.$$

gdzie a_ν jest największą całkowitą liczbą, zawartą w $\alpha_\nu x_\nu$, to z szeregu tych równań wynika przedewszystkiem: $a_\nu\leqq\alpha_\nu-1$, a potem:

$$(C) \qquad x_1=\frac{a_1}{\alpha_1}+\frac{a_2}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{a_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}+\ldots.$$

To rozwinięcie jest znowu skończone, albo nieskończone.

Uwzględniając resztę tego rozwinięcia od wyrazu ν^{go} mamy:

$$R_\nu=\frac{a_\nu}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}+\frac{a_{\nu+1}}{\alpha_2\alpha_2\ldots\alpha_{\nu+1}}+\ldots<\frac{\alpha_\nu-1}{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_\nu}+\frac{\alpha_{\nu+1}-1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\nu+1}}+\ldots.$$
$$=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\nu-1}}\left[1-\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\alpha_\nu}-\frac{1}{\alpha_\nu\alpha_{\nu+1}}+\frac{1}{\alpha_\nu\alpha_{\nu+1}}-\ldots\right]=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\nu-1}}.$$

Stąd wynika, że — gdy rozwinięcie (C) bez różnicy, czy jest skończone, czy nieskończone — urywamy na $(\nu-1)^{\text{szym}}$ wyrazie, to w dokładnem określeniu wielkości x_1 popełniamy błąd $<\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1}}$. Gdy więc rozwinięcie (C) jest nieskończone, to można niem — sumując dostatecznie dużo początkowych jego dodajników — wielkość x_1 przedstawić z żądaną dokładnością. *)

ROZDZIAŁ II.

O liczbach złożonych.

16. Określenie liczby złożonej (urojonej) i jednostki urojonej. Już w bardzo elementarnych zadaniach znaleść można takie, których za pomocą liczb rzeczywistych Rozdziału I^go rozwiązać niepodobna. Mając n. p. rozwiązać równanie stopnia drugiego:

(1) $$ax^2+2bx+c=0$$

o rzeczywistych a, b, c możemy je przerobić na równanie:

(2) $$(ax+b)^2=b^2-ac.$$

Gdy $b^2-ac\geq 0$, okazuje się $(ax+b)$, a tem samem x rzeczywistą liczbą. W razie $b^2-ac<0$, a więc n. p. $b^2-ac=-k^2$, napiszmy (2) w postaci:

(3) $$\left(\frac{ax+b}{k}\right)^2=z^2=-1,$$

to rozwiązanie zagadnienia (1) sprowadzamy do określenia takiej wielkości z, której kwadrat ma być $=-1$.

Takiej wielkości nie podobna przedstawić liczbą rzeczywistą, a gdy mimo tego zadanie postawione ma być przedmiotem poszukiwań matematycznych, to trzeba zakres liczb rozszerzyć liczbami nowemi. Z tych pierwszą, zasadniczą ma być liczba z spełniająca związek $z^2=-1$. Nazwijmy ją i, albo $\sqrt{-1}$, to dostajemy $z=\pm i$, albo $=\pm\sqrt{-1}$ i mamy odrazu już zarazem i jedną jej regułę arytmetyczną: $i.i=-1$, albo $(-i)(-i)=-1$, regułę, która zmusza wydzielić ją z zakresu liczb rzeczywistych. Z tej reguły wynika dalej, że $z^2+1=(z+i)(z-i)$.

W zakresie liczb rzeczywistych jest $+1$ i -1 zarówno jednostką. Otóż wskutek tego, z analogii, jaką spostrzegamy w ró-

---

*) Por. rozprawę E. Straussa p. t. „*Eine Verallgemeinerung der decadischen Schreibweise nebst functionentheoretischer Anwendung*" *Acta Mathematica*. T. 11. (1887—88), str. 13—18.

wnaniach $1.1=+1$, $(-1)(-1)=+1$; $i.i=-1$, $(-i)(-i)=-1$ nazywamy $+i$ jednostką urojoną dodatnią, a $-i$ jednostką urojoną ujemną.

Lecz ze związku (3) dojść nam trzeba do wyznaczenia niewiadomej x, t. j. do ostatecznego rozwiązania równania (1).

Ze związku (3) dostajemy formalnie:

$$(4) \qquad (ax+b)=\pm k.i,$$

gdzie k jest rzeczywistą dodatnią liczbą i gdzie przedewszystkiem $+k.i$ określić nam trzeba.

Gdy k jest całkowitą dodatnią liczbą, to jest zbiorem k dodatnich jednostek $+1$. Iloczyn $k\alpha$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą, określają często tak: $k.\alpha$ powstaje z liczby k w ten sposób, że za każdą jednostkę liczby k położyć trzeba α. Trzymając się tej definicyi, mamy: $k.i=i+i+....+i$.

Gdy $k=1/n$, gdzie n jest całkowite, dodatnie, to podług praw mnożenia mamy $(1/n)i=i/n$. Lecz $1/n$ określają często tak: Jest to liczba, którą pomnożona liczba n daje $+1$. Na wzór tej definicyi określimy i/n jako taką liczbę, przez którą pomnożone n daje $+i$. Ułamek $1/n$ nazywają jednostką ułamkową. Otóż i/n nazwiemy analogicznie urojoną jednostką ułamkową. Iloczyn $\frac{m}{n}i=\frac{mi}{n}$, gdzie m i n są całkowite dodatnie liczby, będzie zbiorem m jednostek ułamkowych urojonych i/n.

Gdy ν jest liczbą niewymierną, dodatnią, do której się zbliżamy nieskończonym szeregiem liczb wymiernych H_1, H_2, ... [art. 3.], to νi określi się granicą, do której się zbliżają liczby $H_1 i$, $H_2 i$, ...

W ten sposób uzyskujemy matematyczne określenie liczby $+ki$. Jestto pewna suma (zbiór) jednostek urojonych i lub i/n. Liczba $-ki$ będzie zbiorem takichże jednostek ujemnych.

Każdą liczbę bi o rzeczywistem b nazywamy czysto urojoną.

Z relacyi (4) dostajemy dalej formalnie: $ax=-b\pm ki$ a stąd okazuje się potrzeba określenia naznaczonej sumy $\alpha+\beta i$. Przedewszystkiem zapytać trzeba, czy ona z inną sumą tego samego rodzaju równoważną być może, (jak w zakresie liczb rzeczywistych mamy n. p. $5+2=3+4$ i t. p.) Połóżmyż: $\alpha+\beta i=\alpha'+\beta' i$, gdzie $\alpha \gtrless \alpha'$, $\beta \gtrless \beta'$, to stąd — zatrzymując prawidła arytmetyczne — wynika $i=(\alpha-\alpha')/(\beta'-\beta)=$ liczba rzeczywista. Lecz to jest niemożliwe, a przeto przyjąć trzeba $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. To znaczy, że suma ta nie daje się przywieść do żadnej sumy o innej postaci. Nie daje się więc i wykonać, co zwykle się łączy z pojęciem naznaczonej sumy, a z tego powodu uważać ją raczej trzeba za zbiór jednostek rzeczywistych zwyczajnych ($+1$, -1) lub ułamkowych z dołączeniem pewnego zbioru takich jednostek urojonych. Sumę taką nazywać będziemy krótko liczbą złożoną albo liczbą urojoną.

W liczbie $\alpha + \beta i$ nazywają α jej częścią rzeczywistą, βi jej częścią urojoną. Same liczby α, β nazywają spółrzędnemi i to: α spółrzędną pierwszorzędną (albo pierwszą), a β spółrzędną drugorzędną (albo drugą).

Ostawanie się równania $\alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$ tylko przy $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ wysłowimy teraz w ten sposób:

I. *Dwie równe liczby urojone są identyczne.*

I *a*. *W razie* $\alpha + \beta i = 0$ *musi być równocześnie* $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

W przeciwnym bowiem razie mielibyśmy $i = -\alpha/\beta$, liczba rzeczywista, co jest niemożliwe.

17. Łączenie liczb złożonych za pomocą działań arytmetycznych. Przejdźmy do łączenia liczb urojonych za pomocą działań arytmetycznych. Z uwagi, że w liczbie $\alpha + \beta i$ część urojona jest w istocie iloczynem liczb (β, i), wykonywać będziemy wszystkie działania arytmetyczne według przepisów algebry z tem jednem ważnem zastrzeżeniem, że w miejsce iloczynu $i.i$ zawsze wstawimy -1. Według tego dostajemy:

$$(\alpha)\qquad (a+bi)+(a'+b'i)+(a''+b''i)+\ldots = $$
$$= (a+a'+a''+\ldots)+(b+b'+b''+\ldots)i \quad \text{a także:}$$
$$(\beta)\qquad (a+bi)-(a'+b'i) = (a-a')+(b-b')i.$$

Prócz tego wnosimy z równania (α), że suma kilku liczb urojonych nie zmieni swej wartości za zmianą porządku dodajników.

Podług praw algebry mnożąc dwie liczby $(a+bi)$, $(a'+b'i)$ ze sobą, dostajemy:

$$(a+bi)(a'+b'i) = aa' + bb'i.i + (ab'+a'b)i.$$

Lecz za $i.i$ położyć trzeba -1, a wskutek tego:

$$(\gamma)\qquad (a+bi)(a'+b'i) = aa' - bb' + (ab'+a'b)i.$$

Mieniając czynniki ze sobą musimy po prawej stronie a z a' a b z b' pomieniać; lecz przez to wyrażenie po prawej stronie nie ulegnie zmianie; stąd wnosimy, że tu tak, jak w zakresie liczb rzeczywistych, ze zmianą czynników nie zmienia się iloczyn. To prawo można wykazać i w iloczynie złożonym z więcej niż 2 czynników.

Ale w zakresie liczb rzeczywistych mamy iloczyn $a.b=0$ tylko wtedy, gdy jeden z czynników jest zerem. Zapytajmyż, czy to i tutaj ma miejsce? Niechżeż w (γ) liczba urojona po prawej stronie będzie zerem. Jej obie spółrzędne muszą być wtedy zerem, a więc: $aa'-bb'=0$, $ab'+a'b=0$. Stąd dostajemy równoczesne relacye: $a/b=b'/a'$, i $a/b=-a'/b'$, a te widocznie tylko wtedy mają miejsce, gdy albo $a=b=0$, a więc $a+bi=0$, albo $a'=b'=0$, a więc $a'+b'i=0$. To znaczy:

I. *Iloczyn dwóch (lub więcej) liczb złożonych jest wtedy tylko zerem, gdy jeden z jego czynników jest zerem.*

Liczby złożone $\alpha=a+bi$, $\alpha_0=a-bi$ nazywają się sprzężone. Ich iloczyn $\alpha\alpha_0=a^2+b^2$ jest sumą kwadratów ich spółrzędnych i nazywa się normą tak liczby α jak liczby z nią sprzężonej α_0.

Ilorazem $\dfrac{a+bi}{a'+b'i}$ nazywamy taką liczbę złożoną $r+si$, która spełnia równanie $(r+si)(a'+b'i)=a+bi$. Po wykonaniu mnożenia mamy: $(ra'-sb')+(rb'+sa')i=a+bi$. Być więc musi $a'r-b's=a$, $b'r+a's=b$. Z tych dwóch równań dostajemy:

$$r=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2},\quad s=\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2},\ \text{a więc:}$$

$$(\delta)\qquad \frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(aa'+bb')+(a'b-ab')i}{a'^2+b'^2}.$$

Gdy $a'^2+b'^2=0$, a więc $a'=b'=0$ — inaczej bowiem byłoby $a'=\pm b'i$, co jest niemożliwe — to widocznie wtedy dzielnik jest zerem, a dzielenie (jak w zakresie liczb rzeczywistych) jest niemożliwe.

Pd. 1. Okazać:

Gdy $\alpha=a+bi$, $\alpha'=a'+b'i$, a utworzymy liczby z niemi sprzężone: $\alpha_0=a-bi$, $\alpha'_0=a'-b'i$, to

$$(1)\ (\alpha+\alpha'),\ (\alpha_0+\alpha'_0),\qquad (2)\ (\alpha-\alpha'),\ (\alpha_0-\alpha'_0),$$

$$(3)\ \alpha.\alpha',\ \alpha_0.\alpha'_0,\qquad (4)\ \frac{\alpha}{\alpha'},\ \frac{\alpha_0}{\alpha'_0}$$

są parami sprzężonych liczb.

Pd. 2. Gdy $R(\alpha, \alpha', \alpha''\ldots)$ jest wyrażeniem utworzonem z liczb złożonych α, α', α'', ... przez dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, a $R(\alpha_0, \alpha'_0, \alpha''_0, \ldots)$ jest takiem samem wyrażeniem, utworzonem z odpowiednich liczb sprzężonych, wyrozumować, że $R(\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots)$, $R(\alpha_0, \alpha'_0, \alpha''_0, \ldots)$ są liczbami sprzężonemi.

Pd. 3. Co wynika z równania $a+bi=a-bi$?

*

Rozszerzyliśmy zakres liczb rzeczywistych w ten sposób, że teraz każda liczba jest zbiorem jednostek $+1$, -1, $+i$, $-i$ i jednostek ułamkowych $+1/n$, $-1/n$, $+i/n$, $-i/n$.

Z tych 1, i nazywają się jednostkami głównemi tego obszaru.*)

Jednostki $+1$, -1, $+i$, $-i$ mają tę własność, że ich normy są $=+1$. I tak: gdy $x+yi=\pm 1$, to $x=\pm 1$, $y=0$ i $x^2+y^2=+1$,
„ $x+yi=\pm i$, to $x=0$, $y=\pm 1$ i $x^2+y^2=+1$.

Te jednostki można otrzymać przez potęgowanie jednostki i. I tak mamy:

$$(\varepsilon) \qquad i^0=+1,\ i^1=+i,\ i^2=-1,\ i^3=-i$$

i^4 jest znowu $=+1$ tak, że z i^4, i^5, i^6, i^7 dostajemy znowu po porządku $+1$, $+i$, -1, $-i$, i t. d. Także $i^{4\varrho}=+1$, gdy ϱ jest całkowitą dodatnią liczbą, a gdy całkowita dodatnia liczba σ ma postać $4\varrho+\varepsilon$, $\varepsilon=0, 1, 2, 3$, to

$$i^\sigma=i^\varepsilon,\quad \varepsilon=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

i jest jedną z jednostek (ε). Dalej mamy:

$$i^{-1}=\frac{i^4}{i}=i^3=-i,\quad i^{-2}=i^{+2}=-1,\quad i^{-3}=i,\quad i^{-4}=+1,$$

a więc także $i^{-4\varrho}=+1$ (ϱ całkowite, dodatnie).

$$\text{Potęga } i^{-\sigma}=\frac{1}{i^{4\varrho+\varepsilon}}=\frac{i^{4\varrho}}{i^{4\varrho+\varepsilon}}=i^{-\varepsilon},\quad \varepsilon=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

18. Bezwzględna wartość liczby złożonej. Twierdzenia o bezwzględnej wartości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu. Mając liczbę złożoną $\alpha=a+bi$, nazywamy dodatnią (bezwzględną) wartość pierwiastka $\sqrt{a^2+b^2}$ bezwzględną wartością liczby α, a naznaczamy ją krótko przez $|\alpha|$. Mamy więc:

$$|\alpha|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Gdy $b=0$, mamy liczbę rzeczywistą a, a pierwiastek $\sqrt{a^2}=|a|$, co zgadza się z definicyą bezwzględnej wartości liczby rzeczywistej [art. 8.].

O bezwzględnych wartościach liczb złożonych da się udowodnić:

I. *Bezwzględna wartość sumy dwóch liczb nie jest nigdy większa od sumy bezwzględnych wartości dodajników.*

Niechże $\alpha=a+bi$, $\alpha'=a'+b'i$. to

$$|\alpha|+|\alpha'|=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2},\quad |\alpha+\alpha'|=\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2}.\ \text{Stąd:}$$

$$\{|\alpha|+|\alpha'|\}^2=a^2+b^2+a'^2+b'^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}$$

$$|\alpha+\alpha'|^2=a^2+b^2+a'^2+b'^2+2aa'+2bb'.$$

Lecz łatwo przekonać się, że pierwsza z tych ilości jest większą od drugiej, albo równą drugiej. Spróbujmy bowiem — odrzucając z obydwu ilości sumę $a^2+b^2+a'^2+b'^2$ — położyć:

*) Co się tyczy liczb złożonych z n głównych jednostek, por. C. Weierstrass: „*Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen*". — *Göttinger-Nachrichten.* Rocznik 1884, str. 516—519. Por. także uwagi Schwarza w T. II. (str. 346—349) jego *Gesammelte math. Abhandlungen.*

$$\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} \geqq aa'+bb',$$

to podnosząc obie strony do kwadratu, dostajemy:

$$a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2 \geqq a^2a'^2+b^2b'^2+2aa'bb', \text{ czyli}$$

$$a^2b'^2+a'^2b^2 \geqq 2aa'bb', \text{ czyli ostatecznie}$$

$$(a) \qquad (ab'-a'b)^2 \geqq 0,$$

co prawdą i to jedyną jest prawdą. Zatem $|\alpha|+|\alpha'| \geqq |\alpha+\alpha'|$. Znak równania odpowiada takiemuż znakowi w (a), a to zajdzie wtedy, gdy $a:a'=b:b'$ t. j. gdy $\alpha'=\varrho\alpha$, gdzie ϱ jest liczbą rzeczywistą.

Łatwo teraz wyrozumować, że mając $\alpha_1=a_1+b_1i$, $\alpha_2=a_2+b_2i$, ... $\alpha_m=a_m+b_mi$ dostaniemy i tutaj:

$$(b) \qquad |\alpha_1|+|\alpha_2|+....+|\alpha_m| \geqq |\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_m|, \quad m>2.$$

II. *Bezwzględna wartość różnicy dwóch liczb α, α' nie jest nigdy mniejszą od różnicy bezwzględnych ich wartości.*

Mamy udowodnić, że prawdziwą jest nierówność

$$(c) \qquad |\alpha-\alpha'| \geqq |\alpha|-|\alpha'|.$$

W razie $|\alpha|<|\alpha'|$ jest ta nierówność z pewnością prawdziwa; pozostaje więc tylko przypadek $|\alpha|>|\alpha'|$ bliżej rozebrać. W tym celu pisząc tę nierówność wyraźnie, mamy:

$$\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2} \geqq \sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a'^2+b'^2}.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu i odrzucając po obydwu stronach sumę $a^2+a'^2+b^2+b'^2$ dostajemy:

$$-(aa'+bb') \geqq -\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a'^2+b'^2}, \text{ albo}$$

$$(aa'+bb') \leqq \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a'^2+b'^2}.$$

Po podniesieniu obydwóch stron do kwadratu i odrzuceniu z nich sumy $a^2a'^2+b^2b'^2$, mamy:

$$2aa'bb' \leqq a^2b'^2+a'^2b^2, \text{ czyli}$$

$$(c') \qquad 0 \leqq (ab'-a'b)^2,$$

co prawdą — i to jedyną jest prawdą.

Twierdzenie II. jest zatem udowodnione. Znak równości w (c') odpowiada takiemuż znakowi w (c), a to zajdzie znowu, gdy będzie $a:a'=b:b'$.

Podobnie łatwo sprawdzimy, że

$$(d) \qquad |\alpha|.|\alpha'|=|\alpha\alpha'| \text{ i że}$$

$$(e) \qquad \left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|=\frac{|\alpha|}{|\alpha'|}, \text{ a to znaczy:}$$

III. *Bezwzględna wartość iloczynu równa się iloczynowi bezwzględnych wartości czynników.*

IV. *Bezwzględna wartość ilorazu równa się ilorazowi bezwzględnych wartości z dzielnej i dzielnika.*

19. Geometryczne przedstawienie liczby złożonej. Płaszczyzna liczbowa. Napiszmy liczbę $\alpha=a+bi$ w postaci

$$\alpha=|\alpha|\left\{\frac{a}{|\alpha|}+\frac{b}{|\alpha|}i\right\},\quad |\alpha|=\sqrt{a^2+b^2},$$

to widocznie $\frac{a^2}{|\alpha|^2}+\frac{b^2}{|\alpha|^2}=1$, a ilości $\frac{a}{|\alpha|}$, $\frac{b}{|\alpha|}$ mają tę własność, co funkcye trygonometryczne wstawa i dostawa dowolnego kąta. Połóżmy zatem $|\alpha|=r$, $\frac{a}{|\alpha|}=\cos\varphi_1$, $\frac{b}{|\alpha|}=\sin\varphi_1$, to mamy:

$$\alpha=r(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad a=r.\cos\varphi_1,\quad b=r.\sin\varphi_1.$$

Poprowadźmyż na danej nieograniczonej płaszczyźnie dwie do siebie prostopadłe nieograniczone proste xx', yy' przecinające się w punkcie 0 (fig. 1.). Punkt 0 niech odgranicza części dodatnie $0x$, $0y$ od części ujemnych $0x'$, $0y'$ owych prostych. Na jednej z nich: xx' (poziomej) odetnijmy od punktu 0 odcinek $a=0P_1$, a na drugiej yy' odcinek $b=0P_2$ z uwzględnieniem ich znaków. Przez P_1 poprowadźmy prostą równoległą do yy', a przez P_2 prostą równoległą do xx'. Poprowadźmy dalej, gdy te dwie proste przecinają się w punkcie P, prostą $0P$, to dostajemy trójkąt $0P_1P$, w którym

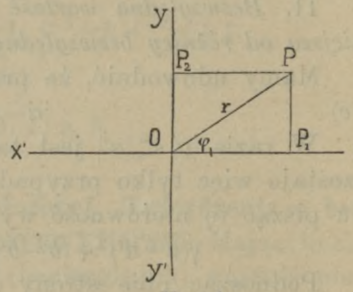


Fig. 1.

$$0P_1=a,\quad P_1P=0P_2=b,\quad 0P=\sqrt{a^2+b^2}=|\alpha|=r.$$

Gdy kąt P_10P nazwiemy φ_1, to mamy dalej:

$$0P_1=r.\cos\varphi_1,\quad 0P_2=r\sin\varphi_1,$$

a już konstrukcyą samą dostajemy kąt do liczby α się odnoszący. Ale i punkt P jest tu całkiem jednoznacznie określony; jest on — jeżelibyśmy proste xx', yy' wzięli za osie spółrzędne geometryi analitycznej — punktem o spółrzędnych a, b. Z drugiej strony gdy promień ruchomy, z punktu 0 wychodzący, nachylimy do osi xx' o kąt φ_1 i na tym promieniu od punktu 0 długość r odetniemy, to w punkcie końcowym tej długości dostaniemy również ten sam dobrze oznaczony punkt P. Z tego powodu powiadają, że punkt P przedstawia liczbę α i naznaczają go wprost literą α. Naodwrót każdy dowolny punkt na rozważanej płaszczyźnie przedstawia jedną i tylko jedną liczbę postaci $a+bi$, a cała płaszczyzna, na której prostą xx', yy' poprowadzono, wszystkimi swoimi punktami przedstawia wszelkie liczby $a+bi$ i zwie się płaszczyzną liczbową. Każdy punkt na osi xx' przedstawia pewną liczbę $a+0i=a$, a więc liczbę rzeczywistą i z tego powodu ta oś xx' nazywa się osią rzeczywistą albo pierwszorzędną. Obrany dowolnie punkt na osi yy' przedstawia liczbę postaci $0+bi=bi$, a więc liczbę czysto urojoną i z tego powodu tę oś nazywają urojoną, albo drugorzędną. Punkt początkowy 0 należy do liczby $0+0i$ t. j. do zera.

Kąt φ_1 konstrukcyą geometryczną $(P_1 0 P=\varphi_1)$ wyznaczony jest wprawdzie jednoznaczny, gdy się jednak zważy, że:
$\cos\varphi_1=\cos(\varphi_1+s.360^0)$, $\sin\varphi_1=\sin(\varphi_1+s.360^0)$, $s=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots.$,
to widocznie możemy φ_1 którymkolwiek z kątów: $\varphi_1+s.360^0$, $s=\pm1, \pm2, \ldots.$ zastąpić.

Dwa punkty przedstawiające liczby sprzężone — dwa punkty sprzężone — leżą na płaszczyźnie liczbowej po różnych stronach osi xx' są równo oddalone od osi xx' a łącząca je prosta jest prostopadła do tej osi.

Dwa punkty $\alpha=a+bi$, $-\alpha=-a-bi$, — punkty przeciwne — leżą na jednym promieniu przechodzącym przez punkt 0 po różnych jego stronach i są równo od niego oddalone.

20. Geometryczne wykonywanie działań arytmetycznych. Mając dwie liczby $\alpha=a+bi$, $\alpha'=a'+b'i$ i ich punkty P, P' mamy w odcinkach $0P$, $0P'$ (fig. 2.) ich bezwzględne wartości. $\triangle P0P'$ dopełnijmy do równoległoboku $P0P'Q$, to widocznie mamy:

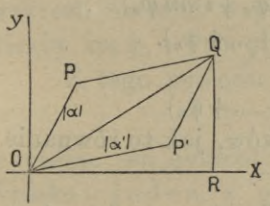


Fig. 2.

$$0R=a+a',\quad RQ=b+b',$$

a stąd wynika, że punkt Q przedstawia sumę $\alpha+\alpha'$. Odcinek $0Q=|\alpha+\alpha'|$. W trójkącie $0PQ$ mamy:

$$0P=|\alpha|,\quad PQ=|\alpha'|,\quad 0Q=|\alpha+\alpha'|,$$

a więc według elementarnych twierdzeń z geometryi dostajemy:

I°. $|\alpha|+|\alpha'|>|\alpha+\alpha'|$, [art. 18., tw. I.], II°. $||\alpha|-|\alpha'||<|\alpha+\alpha'|$,

III°. $|\alpha+\alpha'|+|\alpha|>|\alpha'|$ lub $|\alpha+\alpha'|+|\alpha'|>|\alpha|$,

IV°. $||\alpha+\alpha'|-|\alpha||<|\alpha'|$ lub $||\alpha+\alpha'|-|\alpha'||<|\alpha|$.

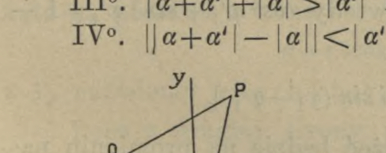


Fig. 3.

Gdy z liczb α, α' utworzyć chcemy różnicę $\alpha-\alpha'$ i wyznaczyć punkt tej różnicy, to postąpimy w ten sposób: Do punktu $P'=\alpha'$ (fig. 3) doszukamy przeciwnego $P'_1=-\alpha'$ i dopełniamy $P'_1 0P$ do równoległoboku $P'_1 0PQ_1$. Punkt Q_1 będzie $=(\alpha-\alpha')$. W trójkącie $0P'_1Q_1$ mamy: $0P'_1=|\alpha'|$, $P'_1Q_1=|\alpha|$, $0Q_1=|\alpha-\alpha'|$, a więc i tu będzie:

V°. $|\alpha-\alpha'|>||\alpha|-|\alpha'||$ [art. 18. tw. II.],

VI°. $|\alpha-\alpha'|<|\alpha|+|\alpha'|$,

VII°. $|\alpha-\alpha'|+|\alpha|>|\alpha'|$ lub $|\alpha-\alpha'|+|\alpha'|>|\alpha|$,

VIII°. $||\alpha-\alpha'|-|\alpha||<|\alpha'|$ lub $||\alpha-\alpha'|-|\alpha'||<|\alpha|$.

Nierówności I°, ..., VIII° przechodzą w równania, gdy P, P' leżą w prostej linii z punktem 0.

Geometrycznie znajdziemy punkt iloczynu $\alpha . \alpha'$ w ten sposób: Połóżmy:

$$\alpha=r\,(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad \alpha'=r'\,(\cos\varphi'_1+i\sin\varphi'_1),\quad r=0P,\quad r'=0P',$$

to stąd dostajemy:

$$(A)\qquad \alpha . \alpha'=r . r'[\cos(\varphi_1+\varphi'_1)+i\sin(\varphi_1+\varphi'_1)].$$

Poprowadźmyż z punktu 0 promień nachylony do osi pierwszorzędnej pod kątem $\varphi_1+\varphi'_1$, a na nim od punktu 0 odetnijmy odcinek $0Q'=r . r'$, to punkt Q' będzie punktem $\alpha . \alpha'$. Całą tę konstrukcyę wykonać można za pomocą liniału i cyrkla.

W razie iloczynu n (>2) czynników $\alpha_s=r_s\,(\cos\varphi_s+i\sin\varphi_s)$, $s=1, 2, ..., n$, otrzymamy analogicznie:

$$\alpha_1 . \alpha_2 .... \alpha_n=r_1 r_2 .... r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)].$$

Skracając tu przez czynnik $r_1 . r_2 .... r_n$, dostajemy:

$$(A')\qquad \begin{aligned}&(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)....(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)\\ &=\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n).\end{aligned}$$

Naodwrót każdą liczbę postaci:

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2+....+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+....+\varphi_n)$$

przedstawić będzie można iloczynem n czynników, jak to równanie (A') wskazuje.

Gdy wreszcie chodzi nam o punkt ilorazu

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{r}{r'}\,\frac{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{\cos\varphi'_1+i\sin\varphi'_1},$$

to mnożąc licznik i mianownik przez $\cos\varphi'_1-i\sin\varphi'_1$, dostaniemy — z uwagi, że w mianowniku będzie wtedy $\cos^2\varphi'_1+\sin^2\varphi'_1=1$ — iloraz żądany w takiej postaci:

$$(B)\qquad \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{r}{r'}[\cos(\varphi_1-\varphi'_1)+i\sin(\varphi_1-\varphi'_1)].$$

Stąd widzimy, że punkt α/α' leżeć będzie na promieniu nachylonym do osi xx' pod kątem $\varphi_1-\varphi'_1$, a oddalony będzie od punktu 0 o r/r'. I tę konstrukcyę będzie można wykonać za pomocą liniału i cyrkla.

21. Wprowadzenie symbolu 1_φ. Wzory Moivre'a i Eulera. W równaniu $\alpha=r\,(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ jest $\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1$ liczbą urojoną o bezwzględnej wartości 1; często ją nazywać będziemy charakterystyką liczby a. Wchodzą w nią funkcye trygonometryczne $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1$ kąta φ_1. Lecz analiści obliczając takie funkcye nie przedstawiają ich wprost przez kąt φ_1, ale raczej przez łuk φ jaki w kole o promieniu $=1$ do tego kąta należy. Łuk ten określa się proporcyą $\varphi : 2\pi = \varphi_1 : 360$, z której wynika:

$$\varphi = \frac{2.\varphi_1}{360} . \pi = \mu\pi,$$

gdzie μ jest wymierną lub niewymierną liczbą. Z tego powodu będziemy odtąd zamiast $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ pisali $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, rozumiejąc przez φ łuk, a nie kąt, jakkolwiek w liczbowych przykładach można nie odstępować od utartego sposobu pisania: $\sin 60^0$, $\cos 45^0$, i t. p. Po tej uwadze liczbę $\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$, napiszemy teraz w postaci: $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Jej punkt na płaszczyźnie liczbowej znajdziemy w dwojaki sposób:

1° gdy jednostkę $+1$ na osi xx', od punktu 0 odciętą, obrócimy o kąt φ_1; [punkt końcowy tej jednostki w jej nowem położeniu będzie punktem liczby $\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$], albo

2° gdy punkt liczby 1, na dodatniej części osi xx' leżący, zakreśli na kole o promieniu $=1$ łuk φ; [punkt zajmie położenie liczby $\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$, przedstawionej przez $\cos\varphi + i\sin\varphi$].

Z tego powodu położymy krótko:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = 1_\varphi,$$

czytając ten symbol: jeden z obrotem kąta, którego łuk $=\varphi$, albo krótko: jeden z obrotem φ.*) W szczególności dostajemy:

$$1_0 = +1, \quad 1_{\frac{\pi}{2}} = +i, \quad 1_\pi = -1, \quad 1_{\frac{3}{2}\pi} = -i, \quad 1_{2\pi} = +1.$$

$$1_{2k\pi} = +1, \quad 1_{(2k+1)\pi} = -1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

Wskutek tego oznaczenia i wprowadzenia łuku φ zamiast kąta φ_1 położymy teraz:

$$a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r . 1_\varphi,$$

a 1_φ nazwiemy charakterystyką liczby a.

Lecz z drugiej strony punkt samej liczby a na płaszczyźnie liczbowej tak się określi: gdy na dodatniej części osi xx' odetniemy od punktu 0 długość r i obrócimy tę długość o kąt φ_1, to punkt

---

*) Zatrzymuję tę nazwę taką, jak ją Żmurko w swoich wykładach wprowadził, nadmieniając, że 1_φ — już z łukiem φ — możnaby także czytać w ten sposób: punkt 1 z przesunięciem φ (na kole o promieniu 1).

końcowy tego odcinka w tem położeniu będzie punktem liczby a. Z tego powodu — wprowadzając łuk φ w miejsce kąta φ_1 — położymy:

$$a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_\varphi$$

i ten symbol czytać będziemy: r z obrotem kąta, którego łuk $= \varphi$, albo krócej: r z obrotem φ.

Stąd wynika, że iloczyn $a.a'$ i iloraz a/a' liczb: $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r.1_\varphi$, $a' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi) = r.1_{\varphi'}$, gdzie φ, φ' są już łuki, wyrazić możemy teraz krótko równaniami:

$$(a)\quad a.a' = r.r'\,1_{\varphi+\varphi'} = (r\,r')_{\varphi+\varphi'}, \qquad (b)\quad \frac{a}{a'} = \frac{r}{r'}1_{\varphi-\varphi'} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\varphi-\varphi'}.$$

Stąd czytamy, że charakterystyką*) iloczynu (a) jest $1_{\varphi+\varphi'}$, a ilorazu (b) $1_{\varphi-\varphi'}$.

Z wzoru pierwszego, założywszy $a = a'$, dostajemy $a^2 = r^2.1_{2\varphi}$, stąd dalej mamy $a^3 = r^3.1_{3\varphi}$ i ogólnie:

$$a^m = r^m.1_{m\varphi},\ m > 0,\ \text{całkowite.}$$

Że zaś $a^m = r^m.(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m$, więc stąd wynika wzór:

$$(m)\qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi,$$

znany powszechnie pod nazwą wzoru Moivre'a.

Z niego — przy $m = 2$ — dostajemy:

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2\cos\varphi.\sin\varphi.i = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi, \quad \text{a więc:}$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \quad \sin 2\varphi = 2\cos\varphi.\sin\varphi.$$

Przy $m = 3$ wynika związek:

$$\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi.\sin\varphi.i - 3\cos\varphi.\sin^2\varphi - \sin^3\varphi.i = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi, \quad \text{a z niego}$$

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi.\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi \quad \text{i t. d.}$$

Wzór (m) oddaje więc ważne usługi w obliczaniu $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$ przez $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

Określmy, jak w arytmetyce liczb rzeczywistych

$$(a+bi)^{-m} = \frac{1}{(a+bi)^m},$$

to dostajemy po skróceniu przez r^{-m}:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} = \frac{1}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi}.$$

Pisząc prawą stronę w postaci $\dfrac{\cos 2\pi + i\sin 2\pi}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi}$, mamy stąd podług wzoru (b) — przy $r = r' = 1$ —

$$\cos(2\pi - m\varphi) + i\sin(2\pi - m\varphi) = \cos m\varphi - i\sin m\varphi,$$

a więc ostatecznie:

*) Nazwę „charakterystyka" wprowadził A. Pringsheim w rozprawie, którą już przytoczyliśmy w Rozdziele I.

(m') $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-m}=1_{-m\varphi}=\cos m\varphi-i\sin m\varphi.$

Stąd widać, że wzór (m) tak przy dodatniem, jak ujemnem całkowitem m zarówno się utrzymuje.

Przy $m=1$ dostajemy z (m'):

$$\cos\varphi-i\sin\varphi=\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=1_{-\varphi}.$$

To znaczy: *Odwrotność liczby złożonej o bezwzględnej wartości* $=+1$, *jest do niej sprzężoną.*

Zauważymy wreszcie, że i w zakresie liczb urojonych zatrzymujemy definicyę $(a+bi)^0=1$.

Z równań $1_\varphi=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $1_{-\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$ dostajemy uwagi godne formy:

$$(\varepsilon)\qquad \cos\varphi=\frac{1_\varphi+1_{-\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{1_\varphi-1_{-\varphi}}{2i}.$$

Są to formy Eulera.*)

22. Obliczenie n^{go} pierwiastka liczby złożonej. Całkowity system reszt. Obliczyć n^{ty} pierwiastek danej liczby $a=(a+bi)=$ $=r(\cos\psi+i\sin\psi)$ znaczy to samo, co: znaleść wszystkie różne między sobą liczby $\omega=\alpha+\beta i=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ spełniające równanie:

$$(1)\qquad \omega^n=a+bi.$$

Trzeba więc umieć rozwiązać równanie (1). W tym celu napiszmy je w formie:

$$\varrho^n\cos n\varphi+i\varrho^n\sin n\varphi=r\cos\psi+ir\sin\psi,$$

to stąd mamy:

$$(2)\qquad \varrho^n\cos n\varphi=r\cos\psi,\quad \varrho^n\sin n\varphi=r\sin\psi.$$

Podnosząc do potęgi drugiej obie strony tych równań i dodając następnie stronami otrzymujemy $\varrho^{2n}=r^2$, a dalej:

$$\varrho=\sqrt[n]{r}=\sqrt[n]{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt[n]{|a|}.$$

Pierwiastek n^{ty} obliczyć tu trzeba arytmetycznie. Mając ϱ dostajemy z równań (2) związki: $\cos n\varphi=\cos\psi$, $\sin n\varphi=\sin\psi$, wskazujące, że $n\varphi=\psi+2s\pi$, $s=0,\ \pm1,\ \pm2,\ .....$, a więc:

$$\varphi=\frac{\psi}{n}+\frac{2s\pi}{n},\quad s=0,\ \pm1,\ \pm2,\ ......$$

---

*) *Introductio in Analysin infinitorum* (1748), str. 120.

Co się tyczy bliższych, historycznych szczegółów wprowadzenia liczb złożonych (Argand, Moivre, Euler, d'Alembert, Gauss, Cauchy) por. rozprawę R. Baltzera *„Ueber die Einführung der complexen Zahlen"*. Crelle J. T. 94. (1883) str. 87—92.

Z tych znanych już wartości ϱ i łuku φ wynika:

$$\omega = \sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}.\left[cos\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2s\pi}{n}\right)+i\,sin\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2s\pi}{n}\right)\right]$$

albo, [art. 20. (A')]:

$$(3) \qquad \omega = \sqrt[n]{r}.\left(cos\frac{\psi}{n}+i\,sin\frac{\psi}{n}\right).\left(cos\frac{2s\pi}{n}+i\,sin\frac{2s\pi}{n}\right),$$

albo wreszcie, [art. 21.]:

$$(3') \qquad \omega = \sqrt[n]{r}.1_{\frac{\psi}{n}}.1_{\frac{2s\pi}{n}}, \quad s=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots..$$

Z trzech czynników, tu się mieszczących, tylko ostatni jest wielowartościowy; zmienia bowiem swą wartość ze zmianą wartości s. Aby tę wielowartościowość bliżej określić, zauważmy, że

$$(4) \qquad 1_{\frac{2s\pi}{n}} = 1_{\frac{2(kn+s)\pi}{n}}, \quad k \text{ całkowite dodatnie lub ujemne.}$$

Połóżmyż $s=0, 1, 2, \ldots.., n-1$, to $1_{\frac{2s\pi}{n}}$, daje wtedy n między sobą różnych wartości.

$$(5) \qquad 1,\ 1_{\frac{2\pi}{n}},\ 1_{\frac{4\pi}{n}},\ \ldots..,\ 1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

Lecz przy $s=0, 1, \ldots., n-1$ ma dać $1_{\frac{2(kn+s)\pi}{n}}$ — według równania (4) — te same wartości i w tym samym porządku, a to można także w ten sposób tłómaczyć, że za s kładziemy po porządku wartości kn, $kn+1$, $kn+2$, ..., $kn+n-1$.

Gdy $k=1$ dostajemy: $s=n$, $n+1$, $n+2$, ..., $2n-1$, a przy $k=-1$ mamy: $s=-n$, $-n+1$, $-n+2$, ..., -1. Dalej dostajemy te same wartości (5) i w tym samym porządku dla: $s=2n$, $2n+1$, ..., $3n-1$, $(k=+2)$ lub dla: $s=-2n$, $-2n+1$, ..., $-n+1$, $(k=-2)$ i t. d.

Z tego widać, że dość jest wziąć $s=0, 1, 2, \ldots.., n-1$, albo $s=-1, -2, \ldots.., -n$, aby dostać wszystkie różniące się między sobą n^{te} pierwiastki danej liczby $a+bi$.

Używszy pewnego s z szeregu liczb $0, 1, 2, \ldots.., n-1$ w $1_{\frac{2s\pi}{n}}$, widzimy z równania (4), że liczby:

$$s=0.n+s,\ \pm n+s,\ \pm 2n+s,\ \pm 3n+s,\ \ldots..,\ \pm kn+s,\ \ldots.$$

są z tego względu równoważne, że dają tę samą wartość pierwiastka ω. W jakim stosunku zostają takie liczby do siebie? Widocznie każde $kn+s$ jest liczbą (dodatnią lub ujemną), dającą tę samą dodatnią resztę s, z dzielenia przez n. Niechże $k_1n+s=\alpha_1$, $k_2n+s=\alpha_2$, to G a u s s określa takie dwie liczby jako p r z y s t aj ą c e, albo pozostające z sobą w kongruencyi *modulo* n i tę ich własność naznacza „kongruencyą“

$$a_1 \equiv a_2 \ (mod.\ n).$$

Według tego określenia powiemy:

I, *Wszystkie liczby przystające do siebie, modulo n podstawione za s, dają tę samą wartość pierwiastka.*

Do liczb a_1, a_2, ... zalicza się także i ich wspólna reszta s, a z tego powodu możemy także powiedzieć:

II. *Wszystkie liczby przystające do s mod. n dają tę samą wartość $1_{\frac{2s\pi}{n}}$ w pierwiastku ω.*

III. *Gdy w $1_{\frac{2s\pi}{n}}$ jest $s \geqq n$ albo ujemne, to można to s zawsze sprowadzić do liczby dodatniej $< n$, nie zmieniając wartości pierwiastka.*

Pd. 1. Gdy mamy $s = 9$, to przy $n = 4$ dostajemy $9 = 2.4 + 1$, a więc możemy położyć $s = 1$ i $1_{\frac{18\pi}{4}} = 1_{\frac{2\pi}{4}}$. Przy $s = -17$ i $n = 4$ mamy $-17 = -5.4 + 3$, a więc znowu położyć możemy $s = 3$ i $1_{-\frac{34\pi}{4}} = 1_{\frac{6\pi}{4}}$ i t. p.

Pd. 2. Liczby: 5, 11, 17, 23, 29, ..., -1, -7, -13, -19, -25, ... są wszystkie przystające do siebie *mod.* 6. Mają one bowiem wszystkie postać $\pm k6 + 5$, a więc wspólną resztę 5, [$17 = 2.6 + 5$, ..., $-1 = -1.6 + 5$, ...]. Wskutek tego jest: $1_{\frac{2.5}{6}\pi} = \ldots = 1_{-\frac{2\pi}{6}} = 1_{-\frac{2.7}{6}\pi} = \ldots$

Pd. 3. Znaleść wszystkie liczby przystające do liczby 15 *modulo* 7. Ponieważ $15 = 2.7 + 1$, więc wspólną resztą żądanych liczb będzie 1, a same liczby będą: 1, $2.7 + 1 = 15$, $3.7 + 1 = 22$, ..., $-1.7 + 1 = -6$, $-2.7 + 1 = -13$, ...

Niech h będzie dowolną całkowitą dodatnią albo ujemną liczbą. Utwórzmy szereg n po sobie następujących liczb: h, $h+1$, $h+2$, ..., $h+n-1$ i dzielmy je przez n. A więc:

$$h = k_0 n + s_0,\ h+1 = k_1 n + s_1,\ h+2 = k_2 n + s_2, \ldots, h+n-1 = k_{n-1}.n + s_{n-1}.$$

Liczby s_0, s_1, ..., s_{n-1} są-to najmniejsze dodatnie reszty, jakie z tego dzielenia wynikają i są jako takie, wszystkie $< n$. Przyjmijmy że między temi resztami znajdują się i równe tak, że n. p. $s_\alpha = s_\beta$. Odejmując wtedy od siebie:

$$\left.\begin{aligned} h+\alpha &= k_\alpha n + s_\alpha \\ h+\beta &= k_\beta n + s_\beta \end{aligned}\right\},\ \text{dostajemy:}\ \alpha - \beta = (k_\alpha - k_\beta) n.$$

To równanie wskazuje, że $\alpha - \beta$ jest podzielne przez n. Lecz to jest niemożliwe, gdyż α i β równocześnie są liczbami $< n$. Muszą zatem reszty s_0, s_1, s_2, ..., s_{n-1} być w s z y s t k i e r ó ż n e, a że ich jest dokładnie n i wszystkie są $< n$, więc muszą to być liczby 0, 1, 2, ..., $n-1$ w pewnym porządku. Z tego jednak i z tej uwagi, że za $s_\alpha < n$ położyć można $k_\alpha n + s_\alpha$, wynika:

IV. *Dając w czynniku* $1_{\frac{2s\pi}{n}}$ — *w* (3') — *znaczkowi s wartości n po sobie następujących liczb, zaczynając od dowolnej dodatniej lub ujemnej — dostajemy wszystkie n wartości pierwiastka, różniące się między sobą.*

Weźmy ogólniej n liczb h_0, h_1, ..., h_{n-1} i przyjmijmy, że one z dzielenia przez n dają reszty różne między sobą. Reszty te muszą być zatem znowu liczbami 0, 1, 2, ..., $n-1$ w pewnym porządku, a z tego powodu można będzie — nadając znaczkowi s po porządku wartości $h_0, h_1, ..., h_{n-1}$ — dostać wszystkie różne wartości pierwiastka ω. Gauss nazywa system liczb $h_0, h_1, ..., h_{n-1}$ całkowitym systemem reszt *mod. n*, (takim systemem był w szczególności szereg liczb h, $h+1$, ..., $h+n-1$), a zatrzymując tę nazwę powiemy:

V. *Aby dostać wszystkie różne wartości pierwiastka* ω, *potrzeba w* (3') *w jego trzecim czynniku* $1_{\frac{2s\pi}{n}}$ *za s podstawiać wszystkie liczby dowolnego całkowitego systemu reszt mod. n.*

Pd. 4. Całkowitym systemem reszt *mod.* 5 będzie szereg liczb postaci:

$[5k_0+0,\ 5k_1+1,\ 5k_2+2,\ 5k_3+3,\ 5k_4+4]$, a więc n. p.:

$[5,\ 16,\ 12,\ 23,\ 4]$, albo $[15,\ 1,\ 22,\ 3,\ 14]$ i t. p.

Lecz w naszych rozumowaniach pominęliśmy milcząco jedną okoliczność. Oto dochodząc do formy (3') położyliśmy $a+bi = r\,.\,1_\psi$. Lecz ψ zastąpić tu można przez $\psi + 2k\pi$ (k dodatnie lub ujemne, ale całkowite), a wtedy zapytać się trzeba czy z tego powodu nie dostaniemy teraz nowych jeszcze pierwiastków ω?

Otóż tego obawiać się nie ma potrzeby. Używając bowiem $\psi + 2k\pi$ zamiast ψ dostajemy z (3'):

$$\omega = \sqrt[n]{r}\,.\,1_{\frac{\psi}{n}}\,.\,1_{\frac{2(k+s)\pi}{n}},\quad s=0,\ 1,\ 2,\ .....,\ n-1. \tag{6}$$

a $k+s$ przy $s=0$, 1, ..., $n-1$ okazuje się szeregiem n liczb po sobie następujących.

Pisząc (6) w postaci $\omega = \sqrt[n]{r}\,.\,1_{\frac{\psi+2k\pi}{n}}\,.\,1_{\frac{2s\pi}{n}}$ mamy twierdzenie:

VI. *Jakikolwiek n^{ty} pierwiastek danej liczby* $(a+bi)$ *mnożony przez* $1_{\frac{2s\pi}{n}}$, $s=0$, 1, 2, ..., $n-1$ *daje wszystkie pierwiastki n^{te} tej liczby.*

Nadmieniamy wreszcie, że $\sqrt[n]{r}\,.\,1_{\frac{\psi}{n}}$, (a więc $s=0$) nazywamy główną, albo arytmetyczną wartością pierwiastka $\sqrt[n]{a+bi}$.

Pd. 5. Rozwiązać równanie $\omega^n = -A$, gdzie A jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Kładąc $-A = A\,.\,1_\pi$ dostajemy:

$$\omega = \sqrt[n]{-A} = \sqrt[n]{A}\,.\,1_{\frac{\pi}{n}}\,.\,1_{\frac{2s\pi}{n}},\quad s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Pd. 6. Gdy $a + bi = 16 - 16\sqrt{3}.i$ czyli $= 32\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$, to — z uwagi, że $\frac{1}{2} = \cos\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{5\pi}{3}$ — mamy:

$$\sqrt[5]{a+bi} = 2\,.\,1_{\frac{\pi}{3}}\,.\,1_{\frac{2s\pi}{3}},\quad s = 0.\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{gdzie } 1_{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

23. Algebraiczna postać n^{go} pierwiastka przy $n = 2^q$. Algebraiczna postać dająca przybliżenie przy dowolnem n. W szczególności zajmijmy się równaniem:

(1) $$\omega^2 = a+bi.$$

Z niego, gdy, jak przódy, $a+bi = r(\cos\psi + i\sin\psi)$, położymy, dostajemy $\omega = \sqrt{r}\,.\,1_{\frac{\psi}{2}}\,.\,1_{\frac{2s\pi}{2}}$, $s=0$, 1, a że $1_0 = +1$, $1_\pi = -1$, więc mamy $\omega = \pm\sqrt{r}\,.\,1_{\frac{\psi}{2}}$.

Lecz prócz tej formy, zawierającej funkcye trygonometryczne, możemy dostać jeszcze inną, algebraiczną formę.

Gdy bowiem ma być $\omega = \alpha + \beta i$, to mamy:

(2) $$(\alpha+\beta i)^2 = a+bi,\ \text{czyli}\ \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = a+bi,\ \text{a więc:}$$

$$(a)\ \alpha^2 - \beta^2 = a, \qquad (b)\ 2\alpha\beta = b.$$

Z drugiej strony równe liczby (2) muszą posiadać jednakową bezwzględną wartość, a to znaczy, że:

(c) $$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Z równań (a) i (c) dostajemy dalej:

$$\alpha^2 = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2},\quad \beta^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2},\ \text{a stąd:}$$

(3) $$\omega = \alpha + \beta i = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,.\,i,$$

gdzie wyrazy pierwiastkowe są liczbami rzeczywistemi.

Tu jest $\varepsilon_1 = +1$ lub -1, ε_2 również $= +1$, -1, a w jakiem z tych znaczeń ich użyć, trzeba dopiero wyrozumować. Do tego posłuży związek (b), a ten wskazuje:

I°. Gdy $b > 0$, to α, β mają być jednakowego znaku i wtedy mamy jeden pierwiastek ω z $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1$, drugi zaś z $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = -1$:

II°. Gdy $b < 0$, to α, β mają być znaków przeciwnych i wtedy mamy jeden pierwiastek ω z $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$, drugi zaś z $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = +1$.

III°. Gdy $b = 0$, redukuje się (3) do $\omega = \varepsilon_1 \sqrt{a}$, $\varepsilon_1 = \pm 1$.

Algebraiczne rozwiązanie równania (1) jest więc w zupełności gotowe.

Naznaczmy dwa pierwiastki — bez względu, czy one do wypadku I^go^, II^go^ lub III^go^ należą — przez Ω_1, Ω_2, to możemy teraz, posuwając się o krok dalej, rozważyć równanie:

$$\omega^4 = a + b\,i. \tag{4}$$

Połóżmy tu $\omega^2 = \omega_1$, to mamy teraz równanie $\omega_1{}^2 = a + bi$, którego dwa pierwiastki nazwijmy $\omega_1 = \Omega_1$, $\omega_1 = \Omega_2$. Lecz wracając do ω — dostajemy stąd dwa równania: $\omega^2 = \Omega_1$, $\omega^2 = \Omega_2$, które znowu algebraicznie rozwiązać możemy. Każde z nich daje dwa algebraicznie wyrażone pierwiastki. One razem dają cztery pierwiastki równania (4) w formach algebraicznych. Przy tem zauważymy, że formy te t y l k o d r u g i e p i e r w i a s t k o w a n i a zawierać w sobie będą.

Pd. 1. Przeprowadzić całkowicie rachunek, dający 4 pierwiastki algebraiczne równania (4).

Pd. 2. Rozwiązać algebraicznie równania: $\omega^2 = 3 + 2i$, $\omega^2 = 5 - 7i$, $\omega^4 = i$, $\omega^4 = -i$, $\omega^4 = +7$, $\omega^4 = -7$, $\omega^4 = 1 + i$.

Analogicznie postępując z równaniem $\omega^8 = a + b\,i$, dalej z równaniem $\omega^{16} = a + b\,i$ i t. d. dojdziemy wreszcie do ogólnego wniosku:

I. *Każde równanie* $\omega^n = a + b\,i$, *którego* n *ma postać* 2^q *daje się rozwiązać algebraicznie. W jego* n *pierwiastkach zawierają się tylko drugie pierwiastkowania, które po kolei wykonać należy.*

Dalej pokażemy:

II. *Gdy* n *n i e j e s t* $= 2^q$, *a mamy wartości* $\omega = \sqrt[n]{a + b\,i}$ *obliczyć, to możemy je w d o w o l n e m p r z y b l i ż e n i u algebraicznie przedstawić formami zawierającemi wyłącznie drugie pierwiastkowania.*

Obierzmy bowiem bardzo duże q, to możemy znaleść zawsze taką całkowitą dodatnią liczbę t, że będzie $t/2^q < 1/n < (t+1)/2^q$. Wtedy $t/2^q$ i $(t+1)/2^q$ różnią się nieskończenie mało od $1/n$, (o ilość $< 1/2^q$), a gdy w $\omega = r^{\frac{1}{n}} 1_{\frac{\psi}{n}} . 1_{\frac{2s\pi}{n}}$, $s = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$ zamiast $\frac{1}{n}$ użyjemy $\frac{t}{2^q}$ (albo $\frac{t+1}{2^q}$) dostaniemy w przybliżeniu:

$$\omega = r^{\frac{t}{2q}} 1_{\frac{t}{2q}\psi} \cdot 1_{\frac{2t\pi s}{2q}} = \left[r^{\frac{1}{2q}} 1_{\frac{\psi}{2q}} \cdot 1_{\frac{2\pi s}{2q}} \right]^t, \quad s=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Formy te dają żądane, algebraiczne, przybliżone rozwiązania.

24. Pierwiastek n^{ty} jednostki $+1$. Pierwotne pierwiastki jednostki. Bardzo ważne i częste w zastosowaniach są tak zwane n^{te} pierwiastki jednostki t. j. liczby ω, spełniające równanie $\omega^n=1$. Są one $\omega = 1_{\frac{2s\pi}{n}}$, $s=0, 1, \ldots, n-1$. Gdy n jest parzyste $=2m$, a położymy: $s=-(m-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m$, to mamy dwa jedyne pierwiastki rzeczywiste, a to $\omega=+1$ dla $s=0$ i $\omega=-1$ dla $s=m$. Inne pierwiastki podzielą się widocznie na pary sprzężonych pierwiastków.

Gdy n nieparzyste $=2m+1$, a położymy: $s=-m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m$, to mamy tylko jeden rzeczywisty pierwiastek $\omega=+1$ przy $s=0$. Inne pierwiastki podzielą się znowu na pary pierwiastków sprzężonych.

W obydwóch razach mieszczą się na płaszczyźnie liczbowej punkta przedstawiające owe pierwiastki (punkta pierwiastkowe) na okręgu koła o promieniu 1 ze środkiem w punkcie początkowym i są wierzchołkami zwykłego, niekrzyżującego się umiarowego n boku.

Pisząc wyraźnie $\omega = cos\frac{2s\pi}{n} + i\, sin\frac{2s\pi}{n}$, $s=0, 1, \ldots, n-1$ i naznaczając pierwiastek z $s=1$ t. j. $cos\frac{2\pi}{n} + i\, sin\frac{2\pi}{n}$ przez ε_1, widzimy, że pierwiastki wszystkie możemy także przedstawić w postaci $\omega=\varepsilon_1{}^s$, $s=0, 1, 2, \ldots, n-1$ [art. 21, (m)]. Istnieje zatem jeden taki pierwiastek, którego potęgi dają wszystkie pozostałe, a pierwsze pytanie, które się tu nasuwa, jest: czy inny pierwiastek może mieć analogiczną własność?

Weźmyż pierwiastek $\varepsilon_l = 1_{\frac{2l\pi}{n}}$ pod uwagę.

I°. Przyjmijmy, że l, n nie są pierwsze względem siebie. Ułamek l/n po skróceniu ma postać λ/ν, gdzie już λ, ν są pierwsze względem siebie, a sam pierwiastek $\varepsilon_l = 1_{\frac{2\lambda}{\nu}\pi}$. Z potęg tego pierwiastka są — jak to zaraz udowodnimy — tylko potęgi:

$$(a) \qquad \varepsilon_l{}^0, \ \varepsilon_l{}^1, \ \varepsilon_l{}^2, \ \ldots, \ \varepsilon_l{}^{\nu-1}$$

między sobą różne. Wyraźnie mają one postać $1_{\frac{2\lambda\sigma}{\nu}\pi}$, $\sigma=0, 1, 2, \ldots, \nu-1$, a gdy szereg liczb $\lambda.0, \lambda.1, \ldots, \lambda(\nu-1)$ przez ν podzielimy, otrzymamy — (podobnie postępując, jak w art. 22., str. 61.) — reszty $s_0, s_1, \ldots, s_{\nu-1}$ wszystkie między sobą różne. Jest ich dokładnie ν, a wszystkie są $<\nu$; przedstawiają więc szereg liczb 0, 1, ..., $\nu-1$ w pewnym porządku. Same liczby $\lambda\sigma=\lambda.0$, $\lambda.1$, ..., $\lambda(\nu-1)$ tworzą całkowity system reszt *mod.* ν, a nim — jak to już wiemy — wyczerpujemy wszystkie różne między sobą wartości liczby $1_{2\frac{\lambda\sigma}{\nu}\pi}$. Stąd wynika: *Potęgi* (*a*) *są tylko częścią pierwiastków* (*ν pierwiastkami*) *równania* $\omega^n=1$, *a wszystkimi pierwiastkami równania* $\omega^\nu=1$. *Nie jest więc możliwe potęgowaniem takiego pierwiastka dostać wszystkie* n^{te} *pierwiastki jednostki.*

II°. Przyjmijmy przeciwnie, że l jest pierwsze względem n. Wtedy przeprowadzając tu takie rozumowanie, jak o liczbach λ, ν, dojdziemy do przekonania, że $l.0$, $l.1$, $l.2$, ..., $l(n-1)$ jest całkowitym systemem reszt *mod.* n i że więc potęgi

(*b*) $$\varepsilon_l^0,\ \varepsilon_l^1,\ .....,\ \varepsilon_l^{n-1}$$

przedstawiają wszystkie różne między sobą pierwiastki równania $\omega^n=1$. Każdy taki pierwiastek ε_l, w którym l jest pierwszem względem n, nazwiemy pierwotnym pierwiastkiem równania $\omega^n=1$, albo pierwotnym n^{tym} pierwiastkiem jednostki, i powiemy:

I. *Z każdego pierwiastka pierwotnego podnosząc go do potęg* 0, 1, 2, ..., $n-1$ *dostajemy wszystkie pierwiastki równania* $\omega^n-1=0$.

Zwykle ilość liczb pierwszych do n i mniejszych od n naznaczają przez $\varphi(n)$ [art. 2.], a stąd wynika:

II. *Równanie* $\omega^n-1=0$ *ma dokładnie* $\varphi(n)$ *różnych między sobą pierwotnych pierwiastków. Równanie* $\omega^n=1$ *o wykładniku* n *bezwzględnie pierwszym, ma dokładnie* ($n-1$) *pierwotnych pierwiastków.*

Ponieważ w pierwotnym pierwiastku $\varepsilon_l=1_{2\frac{l}{n}\pi}$ ułamek l/n skrócić się nie daje, więc stąd wynika, że taki pierwiastek nie jest równocześnie pierwiastkiem żadnego równania $\omega^\nu-1=0$ niższego stopnia; ale i naodwrót wnioskować można na pewno:

III. *Każdy pierwiastek* ε_l *równania* $\omega^n-1=0$ *niebędący pierwiastkiem równania niższego stopnia* $\omega^\nu-1=0$ *jest pierwotnym.*

Gdy ε_l nie jest pierwotnym pierwiastkiem równania $\omega^n-1=0$ to $\varepsilon_l=1_{2\frac{\lambda}{\nu}\pi}$, a λ, ν są pierwsze względem siebie. Z tego powodu jest ε_l pierwotnym pierwiastkiem równania $\omega^\nu-1=0$. To wyrazimy w twierdzeniu:

IV. *Każdy niepierwotny pierwiastek równania* $\omega^n-1=0$ *jest pierwotnym pierwiastkiem równania niższego stopnia* $\omega^\nu-1=0$, *gdzie* ν *jest podzielnikiem wykładnika* n.

Z tegoto właśnie powodu dostaliśmy w szeregu (a) wszystkie pierwiastki równania $\omega^{\nu}-1=0$.

Z dwóch ostatnich twierdzeń wynika:

V. *Każdy dowolny pierwiastek równania* $\omega^{n}-1=0$ *jest albo jego pierwotnym pierwiastkiem albo jest koniecznie pierwotnym pierwiastkiem równania* $\omega^{\nu}-1=0$, *gdzie* ν *jest podzielnikiem wykładnika* n. *Innych pierwiastków równanie nie posiada.*

Niech wykładnik n w równaniu $\omega^{n}-1=0$ ma podzielniki 1, d_2, d_3, ..., d_{q-1}, n i niech to będą wszystkie podzielniki tej liczby n, a przy tem niech będzie $1<d_2<d_3<....<d_{q-1}<n$.

Zauważmy równania:

$$(1)\ \omega-1=0,\quad (2)\ \omega^{d_2}-1=0,\quad (3)\ \omega^{d_3}-1=0,\ \ldots,\ (q)\ \omega^{n}-1=0$$

i w każdem z nich wyznaczmy pierwotne pierwiastki. Równanie (1) ma pierwiastek $\omega=1$ i ten jest zarazem jego pierwotnym pierwiastkiem. Pierwotne pierwiastki równania (2) — a jest ich $\varphi(d_2)$ — są wszystkie różne od 1. Takież pierwiastki równania (3) — a jest ich $\varphi(d_3)$ — są znowu różne od pierwiastków równań (1) i (2). Podobnie pierwotne pierwiastki równania (4) — a jest ich $\varphi(d_4)$ — nie są pierwiastkami równań (1), (2), (3) i t. d. Wszystkie zatem tak wyznaczone pierwiastki są różne między sobą i są albo pierwotnymi pierwiastkami danego równania $\omega^{n}-1=0$, albo takimiż pierwiastkami wszystkich równań $\omega^{\nu}-1=0$, gdzie ν jest podzielnikiem liczby n. Stąd według twierdzenia V. wynika.

VI. *Pierwotne pierwiastki samego równania* $\omega^{n}-1=0$, *i takież pierwiastki wszystkich równań* $\omega^{\nu}-1=0$, *gdzie* $\nu(=1,\ d_2,\ d_3,....,n)$ *oznacza podzielniki liczby* n, *dają razem wszystkie różne między sobą* n^{te} *pierwiastki jednostki, stąd także wnosimy, że:*

$$1+\varphi(d_2)+\varphi(d_3)+...+\varphi(d_{q-1})+\varphi(n)=n,$$

co jest wyrazem twierdzenia z teoryi liczb.

Pd. 1. Wyznaczyć wszystkie pierwotne pierwiastki równań $\omega^{7}-1=0$, $\omega^{12}-1=0$, $\omega^{15}-1=0$.

Pd. 2. Okazać: Gdy ε jest jednym z pierwotnych pierwiastków równania $\omega^{n}-1=0$, to $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ są punktami pewnego umiarowego n—boku, którego kształt zależy od obranego ε.

Pd. 3. Okazać: Gdy ε jest jednym z pierwotnych pierwiastków równania $\omega^{n}-1=0$, to w szeregu ε^0, ε^1, ε^2,..., ε^{n-1} można zamiast wykładników 0, 1, 2,..., $n-1$ użyć wykładników k_0, k_1, k_2,..., k_{n-1} byleby one tworzyły całkowity system reszt *mod. n.* (Trzeba w tym celu dowieść, że szereg liczb $k_0 l$, $k_1 l$, ..., $k_{n-1}.l$ który tu w miejsce $0.l$, $1.l$,... $(n-1).l$ występuje, jest całkowitym systemem reszt *mod. n.*)

Pd. 4. Okazać: Gdy ε jest jednym z pierwotnych pierwiastków równania

$\omega^n-1=0$, a $\omega=1_{\frac{2s\pi}{n}}$, $s<n$, jest dowolnym n^{tym} pierwiastkiem jednostki, to $\omega\varepsilon^0, \omega\varepsilon^1, \omega\varepsilon^2, \ldots, \omega\varepsilon^{n-1}$ są wszystkimi pierwiastkami równania $\omega^n-1=0$.

25. Dwa twierdzenia o pierwotnych pierwiastkach. Przedstawiwszy wszystkie n^{te} pierwiastki jednostki szeregiem $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{n-1}$, możemy bardzo łatwo dowieść twierdzeń, które nieraz później ważną odegrają rolę.

I. *Suma q^{tych} potęg wszystkich n pierwiastków jest $= n$ albo $= 0$, według tego czy q jest (całkowitą) wielokrotnością liczby n, lub nią nie jest.*

Kładąc $\varepsilon^{0\cdot q}+\varepsilon^{1\cdot q}+\varepsilon^{2\cdot q}+\ldots+\varepsilon^{(n-1)\cdot q}=s_q$ widzimy odrazu, że — przy $q=\pm k.n$ (k całkowite) jest $s_q=n$, gdyż wtedy każde

$$(\varepsilon^s)^{\pm k\,n}=+1.$$

Gdy przeciwnie q nie jest wielokrotnością liczby n, to mamy:

$$s_q=1+(\varepsilon^q)^1+(\varepsilon^q)^2+\ldots+(\varepsilon^q)^{n-1}=\frac{1-\varepsilon^{qn}}{1-\varepsilon^q}$$

lecz $1-\varepsilon^q \neq 0$, a $1-\varepsilon^{qn}=0$, a więc $s_q=0$.

II. *Iloczyn wszystkich n pierwiastków n^{tych} jest $=+1$ lub -1, według tego, czy n jest nieparzyste czy parzyste.*

Mamy bowiem $\varepsilon^0.\varepsilon^1.\varepsilon^2\ldots\varepsilon^{n-1}=\varepsilon^{\frac{n}{2}(n-1)}=1_{l(n-1)\pi}$, gdy $\varepsilon=1_{\frac{2l}{n}\pi}$. Gdy n jest nieparzyste, to l i $(n-1)$ są równocześnie parzyste, a iloczyn ma wartość $=+1$. W razie parzystego n są l i $(n-1)$ równocześnie nieparzyste, a więc iloczyn $=-1$.

Lecz także i z równania $1_{\frac{2.0.\pi}{n}}.1_{\frac{2\pi}{n}}..1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}=1_{(n-1)\pi}$ dochodzimy do tego samego wniosku.

26. Przypadki algebraicznych rozwiązań równania $\omega^n-1=0$. Geometryczne konstrukcye wykonalne za pomocą cyrkla i linii. Równanie $\omega^n-1=0$ będzie miało — gdy $n=2^q$ — podług ogólnych rozważań art. 23. — pierwiastki które algebraicznie wyrazić będzie można, które tylko drugie pierwiastkowania zawierać w sobie będą. Lecz tu — jak to G a u s s pokazał — dołączają się jeszcze równania $\omega^n-1=0$ z takimi wykładnikami n, które mają postać $2^{2^{q_1}}+1$ i są przy tem bezwzględnie pierwszemi liczbami. Takiemi liczbami są n. p. $2^0+1=1$, $2^1+1=3$, $2^2+1=5$, $2^4+1=17$, $2^8+1=257$. Poszukiwania ogólne w tym kierunku należą jednak do teoryi liczb i algebry i nie leżą w zakresie tej książki[1]).

[1]) Por. pod tym względem dzieło B a c h m a n n a „*Die Lehre von der Kreistheilung*“.... 1872.

Rozbierzmy przypadki $q_1=0$ i $q_1=1$, w których mamy równania $\omega^3-1=0$, $\omega^5-1=0$.

A. Ze związku $\omega^3-1=0$ dostajemy $\omega=1_{\frac{2s\pi}{3}}$ $s=0, 1, 2$, a więc $\omega=1$, $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

B. Z równania $\omega^5-1=0$ dostajemy:

$$\omega=\cos\frac{2s\pi}{5}+i\sin\frac{2s\pi}{5},\ s=0, 1, 2, 3, 4.$$

Połóżmy $\frac{2\pi}{5}=a$, to mamy $\cos a>0$, $\sin a>0$, a $tg\, a$ jest największą między dodatniemi $tg\frac{2s\pi}{5}$. Dalej $\cos a+i\sin a$ będzie pierwotnym pierwiastkiem i spełni (jak każdy inny pierwiastek) niezawodnie równanie:

$$1=(\cos a+i\sin a)^5=\cos^5 a+5\cos^4 a.i.\sin a$$
$$-10\cos^3 a.\sin^2 a-10\cos^2 a.i\sin^3 a+5\cos a\sin^4 a+i\sin^5 a.$$

Stąd wynika, że $5\cos^4 a\sin a-10\cos^2 a.\sin^3 a+\sin^5 a=0$ czyli:

$$5-10\,tg^2 a+tg^4 a=0$$

Rozwiązaniami tego równania są $tg\, a=\pm\sqrt{5\pm2\sqrt{5}}$. Z nich największem, dodatniem rozwiązaniem jest $tg\, a=+\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. Ta wartość przedstawia zatem $tg\frac{2\pi}{5}$ a że ma być $\cos\frac{2\pi}{5}>0, \sin\frac{2\pi}{5}>0$, a więc położymy:

$$\cos a=\frac{1}{\sqrt{1+5+2\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin a=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

i dostajemy pierwotny pierwiastek:

$$\varepsilon=\frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Wszystkie pierwiastki równania $\omega^5-1=0$ dadzą potęgi ε^h, $h=0, 1, 2, 3, 4$.

Oznaczmy liczby bezwzględnie pierwsze postaci $2^{2^{q_1}}+1$ literą p a liczby takież, różne między sobą literami p_1, $p_2, \ldots$, to udowodnimy.

I. *Nietylko równania $\omega^n-1=0$ z wykładnikiem $n=2^q$, lub $n=p$, ale także z wykładnikiem $n=p_1\,p_2\ldots 2^q$ (gdzie q także zerem być może) dadzą się algebraicznie rozwiązać a do ich rozwiązań wejdą tylko drugie pierwiastkowania.*

To okażemy, dowodząc takiego twierdzenia:

II. *Gdy $n=n_1.n_2$, gdzie n_1, n_2 są liczby względem siebie pierwsze i gdy równania $\omega^{n_1}-1=0$, $\omega^{n_2}-1=0$ mają pierwiastki:*
$\omega_{s_1}=1_{\frac{2s_1\pi}{n_1}}$, $s_1=0, 1, 2,\ldots, n_1-1$; $\omega_{s_2}=1_{\frac{2s_2\pi}{n_2}}$, $s_2=0, 1, 2,\ldots, n_2-1$, *to iloczyny $\omega_{s_1}.\omega_{s_2}$, których — kombinując $s_1=0, 1,\ldots, n_1-1$ z $s_2=0, 1, 2,\ldots, n_2-1$ — dostajemy dokładnie n, są wszystkimi (między sobą różnymi) pierwiastkami równania $\omega^n-1=0$.*

Gdy dowiedziemy, że w iloczynach $\omega_{s_1}.\,\omega_{s_2}=1_{\frac{2(n_1 s_2+n_2 s_1)\pi}{n}}$ liczby $n_1 s_2+n_2 s_1$ stanowią całkowity system reszt mod. n, to i twierdzenie II. będzie udowodnione. Załóżmyż w tym celu, że między n liczbami $n_1 s_2+n_2 s_1$ znaleść można dwie takie $n_1 s_2+n_2 s_1$, $n_1 s_2'+n_2 s_1'$, które z dzielenia przez n dają równe najmniejsze dodatnie reszty. Mamy wtedy:

$$(a)\qquad n_1 s_2+n_2 s_1=kn+\sigma,\ n_1 s'_2+n_2 s'_1=k'n+\sigma$$

(k,k' mogą mieć wartość 0 lub 1), a odejmując te związki od siebie, dostajemy:

$$n_1(s_2-s'_2)+n_2(s_1-s'_1)=(k-k')n.$$

($k-k'$ może mieć wartości $0,+1,-1$). Stąd:

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{(k-k')\,n-(s_1-s'_1)}{s_2-s'_2}$$

Liczby n_1, n_2 są względem siebie pierwsze, a $|s_2-s'_2|<n_2$. To równanie wskazywałoby zatem, że ułamek $\frac{n_1}{n_2}$ można przedstawić innym ułamkiem o mianowniku $<n_2$. Lecz to jest niemożliwe. W razie $s_2=s'_2$, (a więc $s_1 \gtrless s'_1$), mielibyśmy $n_2(s_1-s'_1)=(k-k')\,n$, co także jest niemożliwe.

Założenie przeto (a) jest fałszywe; liczby $n_1 s_2+n_2 s_1$ są rzeczywiście całkowitym systemem reszt *mod.* n, a twierdzenie II. mamy udowodnione.

Łatwo teraz to twierdzenie uogólnić, przyjmując $n=n_1.n_2...n_r$, gdzie $n_1, n_2,.., n_r$ są pierwsze względem siebie. Przyjmijmy bowiem, że liczby:

$s_1 n_1+s_2 n_2+....+s_{r-1}n_{r-1}$, ($s_1=0, 1,..., n_1-1,..., s_{r-1}=0, 1, 2... n_{r-1}-1$) okazały się już całkowitym systemem reszt mod. $(n_1 n_2...n_{r-1})$. Te liczby można zatem zastąpić liczbami $0, 1, 2,..., (n_1 n_2...n_{r-1})-1$, a gdy położymy $(n_1.n_2...n_{r-1})=m_1$, $n_r=m_2$, to iloczyny:

$$\omega_{\sigma 1}\cdot\omega_{\sigma 2}=1_{\frac{2\sigma_1\pi}{m_1}}\cdot 1_{\frac{2\sigma_2\pi}{m_2}},\ \begin{cases}\sigma_1=0,1,..,m_1-1\\ \sigma_2=0,1,...,m_2-1\end{cases}$$

będą wszystkimi, między sobą różnymi pierwiastkami równania $\omega^n-1=0$ (według tw. II.). Lecz liczby σ_1 zastąpić tu można napowrót liczbami $s_1 n_1+s_2 n_2+..+s_{r-1}n_{r-1}$, $s_1=0, 1,...n_1-1,..,s_{r-1}=$ $=0, 1,...n_{r-1}-1$, a stąd wynika, że iloczyny

$$1_{\frac{2s_1\pi}{n_1}}\cdot 1_{\frac{2s_2\pi}{n_2}}\cdots 1_{\frac{2s_r\pi}{n_r}},\ \begin{cases}s_1=0,1,...,n_1-1\\ \vdots\\ s_r=0,1,...,n_r-1\end{cases}$$

są wszystkimi różnymi między sobą pierwiastkami równania

$\omega^n - 1 = 0$*). Twierdzenie II. mamy zatem uogólnione, a przez to i twierdzenie I. już dowiedziono (p_1, p_2,..., 2^q są właśnie liczbami względem siebie pierwszemi).

Pd. 1. Rozwiązać algebraicznie równanie $\omega^{10} - 1 = 0$.

Pd. 2. Jakiemi liczbami (algebraicznemi) wyrażają się wierzchołki regularnego sześcioboku, ośmioboku i dwudziestoboku?

Pd. 3. Rozwiązać algebraicznie równanie $\omega^{15} - 1 = 0$, $(15 = 3 . 5 = p_1 . p_2)$.

Elementarna geometrya uczy w bardzo prosty sposób przedstawić średnio geometryczną proporcyonalną x określoną proporcyą $x : a = 1 : x$ albo równaniem $x = \sqrt{a}$, odcinkiem linii prostej za pomocą liniału i cyrkla. Każde więc algebraiczne, nieurojone wyrażenie, które zawiera tylko drugie pierwiastkowania z powtórzeniem lub po porządku (n. p. $\sqrt{\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}}}$ i t. p.) da się także za pomocą liniału i cyrkla pewnym odcinkiem linii prostej — przy obranej jednostce — całkiem dokładnie przedstawić.

W równaniach $\omega^n - 1 = 0$, które algebraicznie rozwiązać można, każdy pierwiastek $\cos\alpha + i \sin\alpha$ ma właśnie $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ takiej postaci. W tych równaniach jest $n = 2^q$ albo $= 2^{q_1} + 1 = p$, albo $= p_1 p_2 ... 2^q$. Stąd wnosimy: *Każdy umiarowy wielobok, którego ilością boków jest $n = 2^q$, $2^{q_1} + 1 = p$ albo $p_1 . p_2 ... 2^q$ da się wykreślić za użyciem jedynie liniału i cyrkla, albo: koło (o promieniu $= 1$) da się za pomocą liniału i cyrkla podzielić na n równych części, gdy $n = 2^q$, $2^{q_1} + 1 = p$, lub $= p_1 p_2 ... 2^q$.*

27. Uwaga o ogólnej potędze $(a+bi)^{\alpha+\beta i}$. Po tych rozważaniach możemy już każdą potęgę $(a+bi)^\mu$, gdzie μ jest rzeczywistą, wymierną liczbą, całkiem dokładnie określić. Gdy $\mu = p/q$ i jest ułamkiem w najprostszej swej formie, to $(a+bi)^\mu$ jest q—wartościowe. Jeżeli μ jest niewymierną liczbą, a do jej idealnej wartości zbliżamy się szeregiem liczb wymiernych H_λ, $\lambda = 0, 1, 2, ...$, to $(a+bi)^\mu$ określi się granicą, do której zdążają wielowartościowe wyrażenia:

$$(a+bi)^{H_\lambda}, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Ponieważ $H_\lambda = \mu_\lambda / g^\lambda$ są ułamkami właściwymi, lub niewłaściwymi o mianownikach (i licznikach) wciąż rosnących, więc stąd wnosić wypada, że wyrażenie $(a+bi)^\mu$ o niewymiernem μ jest nieskończenie wielowartościowe.

Lecz mimo tego nie jesteśmy w stanie za pomocą zdobytych dotąd środków określić potęgi:

$$(a+bi)^{\alpha+\beta i}$$

Przyjmując bowiem, że i tu, w zakresie liczb urojonych, byłby dozwolony związek:

---

*) Pod względem pierwiastkowania liczb urojonych por. także: Wł. Zajączkowski *„Zasady Algebry wyższej"* (Lwów 1884) str. 14—23.

$$(a) \qquad (a+bi)^{\alpha+\beta i}=(a+bi)^{\alpha}(a+bi)^{\beta i},$$

to mamy w tym związku czynnik $(a+bi)^{\beta i}$, który się usuwa z pod wszelkiej arytmetycznej interpretacyi. To jest punkt, w którym arytmetyka przestaje dopisywać, zdając określenie naznaczonej potęgi (a) innej gałęzi matematyki, zwanej teoryą funkcyi. Później — gdy już środki na to pozwolą — zapełnimy tę lukę, przechodząc teraz do szeregów i iloczynów nieskończonych, złożonych z liczb urojonych.

28. Szeregi nieskończone o dodajnikach złożonych. Ich warunkowa i bezwarunkowa zbieżność. Gdy w szeregu:

$$s=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots,$$

w którym $\alpha_\lambda=a_\lambda+b_\lambda i$, a $\lim|\alpha_\lambda|=0$, położymy:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda=P, \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_\lambda=Q,$$

a szeregi P, Q okażą się w wskazanym porządku swych dodajników zbieżne, to kładziemy $s=P+Qi$ i mówimy, że szereg s jest w swym porządku dodajników zbieżnym.

Gdy sumy Σa_λ, Σb_λ są absolutnie i bezwarunkowo zbieżne, to mówimy, że i szereg s jest absolutnie i bezwarunkowo zbieżnym. Wtedy także suma $|a_1|+|b_1|+|a_2|+|b_2|+\ldots\ldots$ jest zbieżną, a że

$$|a_\lambda|+|b_\lambda|\geqq\sqrt{a_\lambda^2+b_\lambda^2}=|\alpha_\lambda|, \quad \lambda=1, 2, 3, \ldots.$$

więc tem samem jest szereg $\Sigma|\alpha_\lambda|$ zbieżnym. To znaczy:

I. *Gdy szereg s jest absolutnie i bezwarunkowo zbieżnym, w tem znaczeniu, że szeregi P, Q są w ten sposób zbieżne, to wtedy suma bezwzględnych wartości dodajników szeregu s jest zbieżną.*

Nazwa absolutnej i bezwarunkowej zbieżności przenosi się tu z szeregów P, Q na szereg s, a że te — jeżeli nie są warunkowo zbieżne — są zawsze równocześnie i absolutnie i bezwarunkowo zbieżne [art. 8.] więc i o szeregu s to samo powiedzieć trzeba.

Przyjmijmy teraz — nie wchodząc w zbieżność szeregów P, Q — że mamy sumę $\Sigma|\alpha_\lambda|$ zbieżną.

Połóżmy $|a_\lambda|=|\alpha_\lambda|\cdot\frac{|a_\lambda|}{|\alpha_\lambda|}$, to $\frac{|a_\lambda|}{|\alpha_\lambda|}=\varepsilon_\lambda$ jest ułamkiem właściwym dodatnim, albo jednością, a

$$\Sigma|a_\lambda|=\Sigma|\alpha_\lambda|\varepsilon_\lambda.$$

Lecz suma po prawej stronie jest niezawodnie zbieżną, a stąd wynika, że i $\Sigma|a_\lambda|$ jest zbieżną. Analogicznie można dowieść, że $\Sigma|b_\lambda|$ jest zbieżną. Ze zbieżności tych dwóch sum wypływa, że szeregi P, Q są bezwarunkowo (i absolutnie) zbieżne i że tem samem w ten sam sposób jest szereg s zbieżny. Mamy więc i odwrócenie twierdzenia I.:

II. *Gdy suma bezwzględnych wartości dodajników szeregu s jest zbieżną, to szereg s jest bezwarunkowo (i absolutnie) zbieżny.*

Zbieżność sumy $\Sigma|\alpha_\lambda|$ jest więc nie tylko koniecznym, ale i dostatecznym warunkiem bezwarunkowej zbieżności szeregu s.

Pd. 1. W jaki sposób są zbieżne szeregi

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2}i\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2.3}i\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3.4}i\right)+\ldots..,$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}i\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}i\right)+\ldots...$$

i jakie wartości mają w nich P i Q?

Pd. 2. Gdy $P=r_1 cos\,\varphi+r_2 cos\,2\varphi+r_3 cos\,3\varphi+\ldots..$, znaleść Q w ten sposób, aby w $P+Qi=\Sigma\alpha_\lambda$ była suma $\Sigma|\alpha_\lambda|=r_1+r_2+r_3+\ldots.$?

Pd. 3. Przy jakich rzeczywistych α będzie szereg

$$s=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^\alpha\,(cos\,\varphi_\lambda+i\,sin\,\varphi_\lambda)}$$

absolutnie zbieżnym.

Za obraniem dowolnie małej dodatniej ilości δ możemy przy dostatecznie dużem n ze zbieżnego szeregu samych dodatnich wyrazów $|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+\ldots.$ wyłączyć taką resztę, że ta reszta będzie $|\alpha_n|+|\alpha_{n+1}|+|\alpha_{n+2}|+\ldots.<\delta$ [art. 5., tw. III.].

Lecz $|\alpha_n+\alpha_{n+1}+\ldots.|\leqq|\alpha_n|+|\alpha_{n+1}|+\ldots.$ a stąd wynika, że $R_n=|\alpha_n+\alpha_{n+1}+\ldots.|<\delta$, i że także $|\sum_n^{n+t}\alpha_\lambda|<\delta$, $t=1, 2, 3, \ldots..$

To znaczy:

III. *Z szeregu $s=\Sigma\alpha_\lambda$ absolutnie zbieżnego można za obraniem dostatecznie małej dodatniej ilości δ przy dostatecznie dużem n wydzielić resztę $\alpha_n+\alpha_{n+1}+\ldots.$ taką, że jej bezwzględna wartość R_n będzie mniejszą od δ, i że — przy dowolnem $t=1, 2, 3, \ldots..$ — jest statecznie $|\sum_n^{n+t}\alpha_\lambda|<\delta$.*

Lecz odwrotnie z nierówności $R_n<\delta$ nie można wnioskować o absolutnej zbieżności szeregu s. Gdy bowiem szereg s jest zbieżny warunkowo w ten sposób, że szeregi P, Q są warunkowo zbieżne, a są skończone w wskazanym porządku swych dodajników przez Σa_λ, Σb_λ, to także i tu będzie niezawodnie $R_n<\delta$ i $|\sum_n^{n+t}\alpha_\lambda|<\delta$. Możemy więc tylko powiedzieć:

IV. *Gdy w szeregu s okazuje się $R_n<\delta$, lub przy dowolnem $t=1, 2, 3, \ldots..$, $|\sum_n^{n+t}\alpha_\lambda|<\delta$, to szereg w porządku swych dodajników wskazanym przez $\Sigma\alpha_\lambda$ jest zbieżnym.*

Przeciwnie — gdy zamiast R_n weźmiemy $R'_n = |\alpha_n| + |\alpha_{n+1}| + \ldots$ pod uwagę, to możemy stanowczo twierdzić:

V. *Gdy w szeregu s okazuje się $R'_n < \delta$, to szereg s jest absolutnie (i bezwarunkowo) zbieżnym; albo: gdy w szeregu s okazują się sumy $\sum\limits_{\lambda=n}^{n+t} |\alpha_\lambda|$ przy dowolnie rosnącem t zawsze skończone, to szereg jest absolutnie (i bezwarunkowo) zbieżnym. Przy dostatecznie dużem n będą te sumy mniejsze od dowolnie małej dodatniej ilości δ. [art. 5., tw. IX.].*

Do tych uwag o szeregach liczb złożonych dołączamy jeszcze twierdzenie, które zaraz w następnym art. zastosujemy. Jest ono takie:

VI. *Gdy w szeregu $s = \Sigma \alpha_\lambda$ są $\alpha_\lambda = \varepsilon a_\lambda + \varepsilon' b_\lambda i$,* a ε, ε' *mają we wszystkich dodajnikach ustalone znaczenie* $+1$ *lub* -1 *($\varepsilon = \varepsilon'$, lub $\varepsilon \neq \varepsilon'$), to szereg s jest bezwarunkowo (i absolutnie) zbieżnym, albo rozbieżnym.*

Prawdziwość tego wynika stąd, że szeregi $P = \varepsilon \Sigma a_\lambda$, $Q = \varepsilon' \Sigma b_\lambda$ mogą być tylko albo bezwarunkowo (i absolutnie) zbieżne, albo — jeden z nich, lub obydwa — rozbieżne, a nigdy warunkowo zbieżne być nie mogą.

Zauważmy wreszcie m szeregów absolutnie zbieżnych

$$s_1 = [\alpha_{11} + \alpha_{12} + \ldots],\ s_2 = [\alpha_{21} + \alpha_{22} + \ldots],\ \ldots,\ s_m = [\alpha_{m1} + \alpha_{m2} + \ldots].$$

Ich suma jest oczywiście znowu absolutnie zbieżnym szeregiem, a stąd wynika:

VII. *W sumie skończonej liczby absolutnie zbieżnych szeregów można dodajniki dowolnie grupować lub grupami w sumy łączyć.*

Uwaga. W zbieżnych szeregach, jakimi dotąd zajmowaliśmy się, mieliśmy zawsze $\lim |\alpha_\lambda| = 0$. Przyjmijmy teraz $\lim |\alpha_\lambda| = \rho > 0$. Wtedy w $s = P + Qi$ możemy mieć:

1⁰. P lub Q rozbieżne przy wahającej zbieżności szeregu Q lub P.

2⁰. P i Q równocześnie rozbieżne

3⁰. P i Q równocześnie wahająco zbieżne.

Szereg s jest więc: albo rozbieżny, albo — najwyżej — wahająco zbieżny.

29. Iloczyny nieskończone o czynnikach złożonych. Różne rodzaje ich zbieżności. Przejdźmy do nieskończonego iloczynu

$$(a) \qquad P = \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots.$$

liczb złożonych $\alpha_\lambda = a_\lambda + b_\lambda i$. Przyjmijmy, że ten iloczyn — w porządku (a) swoich czynników obliczony ma się zbliżyć do skończonej wartości (P), a żaden z jego czynników α_λ nie jest zerem.

W takim razie możemy — tworząc iloczyny $P_{n+r}=a_1 . a_2 ... a_{n+r}$ — przy dostatecznie dużem n dowolnie się przybliżyć wartościami P_{n+r} do P i otrzymać nierówności:

$$|P-P_{n+r}| < \varepsilon, \ r=0, 1, ...,$$

w których ε dowolnie małą dodatnią jest ilością. Dzieląc przez $|P_{n+r}|$, a jest to dozwolone wskutek wszystkich $a_\lambda \neq 0$, mamy:

$$\left|\frac{P}{P_{n+r}}-1\right| < \varepsilon'.$$

Połóżmyż $\frac{P}{P_{n+r}}-1=\delta'_r$, gdzie δ'_r jest urojoną ilością o bezwzględnej wartości $< \varepsilon'$, to mamy:

$$\frac{P}{P_{n+r}}=1+\delta'_r, \text{ albo } P_{n+r}=\frac{P}{1+\delta'_r}=P(1+\delta_r).$$

Przy $r=1$ i $r=0$, mamy:

$$P_{n+1}=P(1+\delta_1), \quad P_n=P(1+\delta_0), \quad \text{a stąd:}$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=a_{n+1}=\frac{1+\delta_1}{1+\delta_0}=1+\eta_{n+1},$$

gdzie η_{n+1} jest ilością urojoną o nieskończenie małej bezwzględnej wartości.

Pisząc ostatnie równanie w postaci $|a_{n+1}-1|=|\eta_{n+1}|$ przychodzimy do wniosku:

Gdy iloczyn P ma być zbieżnym, koniecznem jest, aby, od dostatecznie dużego n począwszy, jego czynniki a_{n+r} bezwzględną wartością dowolnie mało różniły się od jednostki.

Przedstawmyż wszystkie czynniki a_λ w postaci $1+c_\lambda$, to teraz — podobnie, jak w zakresie liczb rzeczywistych — szukać trzeba za dostatecznym warunkiem zbieżności iloczynu

$$P=\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+c_\lambda).$$

Rozwijając ten iloczyn, mamy według praw arytmetyki

$$P=1+\Sigma c_\lambda+\Sigma c_\lambda c_\mu+....$$

Przenieśmy tu definicyę absolutnej i bezwarunkowej zbieżności iloczynu z art. 13go i przeprowadźmy rozumowania (A) i (B) tego artykułu, to dojdziemy do wniosku:

I. *Gdy w iloczynie P jest Σc_λ szeregiem bezwarunkowo (i absolutnie) zbieżnym, to iloczyn jest równocześnie absolutnie i bezwarunkowo zbieżny.*

Potrzeba teraz i tu zbadać, o ile jedna zbieżność pociąga za sobą drugą.

Przyjmując, że P jest absolutnie zbieżnym, mamy:

$$\Pi(1+|c_\lambda|)=1+\Sigma|c_\lambda|+....,$$

a suma $\Sigma|c_\lambda|$ jest tu zbieżną. Stąd wynika, że $\Sigma|c_\lambda|$ jest bezwarunkowo zbieżną, a iloczyn P również w ten sposób zbieżnym.

To znaczy:

II. *Absolutna zbieżność iloczynu pociąga za sobą zbieżność bezwarunkową, a wtedy szereg $\Sigma|c_\lambda|$ jest koniecznie zbieżnym.*

Nim do odwrócenia tego twierdzenia przejdziemy, zbadajmy przedewszystkiem w jaki sposób zachowują się iloczyny

$$P_1 = \Pi[1+(\varepsilon p_\lambda + \varepsilon' q_\lambda i)]$$

o takich własnościach:

1. p_λ, q_λ, są w nich dodatnie liczby;

2. ε jest we wszystkich czynnikach bez wyjątku albo$=+1$, albo we wszystkich czynnikach bez wyjątku $=-1$, a to samo odnieść trzeba i do ε';

3. Suma $\Sigma c_\lambda = \Sigma(\varepsilon p_\lambda + \varepsilon' q_\lambda i)$ jest rozbieżną, a $lim\, p_\lambda = lim\, q_\lambda = 0$.

Połóżmy $1+\varepsilon p_\lambda + \varepsilon' q_\lambda i = r_\lambda . 1_{\varphi_\lambda}$, ($lim\, r_\lambda = 1$), to mamy

$$cos\, \varphi_\lambda = \frac{1+\varepsilon p_\lambda}{r_\lambda},\ sin\, \varphi_\lambda = \frac{\varepsilon' q_\lambda}{r_\lambda}.$$

Przy dostatecznie dużem λ, n. p. dla $\lambda \geqq l$, mamy $1+\varepsilon p_\lambda > 0$*) a więc i $cos\, \varphi_\lambda > 0$, a $sin\, \varphi_\lambda$ pozostaje tego samego znaku. Z tego powodu można przyjąć, że:

$$(\alpha) \quad \left.\begin{array}{l} \text{albo } 0 \leqq \varphi_\lambda \leqq \frac{\pi}{2}, \text{ gdy } \varepsilon' = +1 \\ \text{albo } 0 \geqq \varphi_\lambda \geqq -\frac{\pi}{2}, \text{ gdy } \varepsilon' = -1 \end{array}\right\} \text{dla } \lambda \geqq l$$

a tak w pierwszym, jak drugim razie mamy

$$(\beta) \qquad \text{łuk } |\varphi_\lambda| > \frac{q_\lambda}{r_\lambda}$$

Z założonej rozbieżności szeregu Σc_λ wynika, że w nim jeden przynajmniej ze szeregów Σp_λ, Σq_λ jest rozbieżnym (art. 28, tw. VI). Przyjmijmyż nasamprzód, że $\Sigma q_\lambda = +\infty$, a suma Σp_λ jest skończoną, lub nieskończoną i rozważmy obok siebie szeregi:

$$\Sigma q_\lambda,\ \Sigma\left(\frac{q_\lambda}{r_\lambda}\right)$$

Ponieważ r_1^{-1}, r_2^{-1}, r_3^{-1},..... są wszystkie dodatnie, skończone i dążą do skończonej granicy $=1$, więc szereg $\sum \frac{q_\lambda}{r_\lambda}$ jest rozbieżny (art. 11, tw. III), a wskutek warunku (α) i nierówności (β) będzie

$$\Sigma\varphi_\lambda = +\infty,\ \text{lub} = -\infty$$

Z tego — ponieważ $P_1 = (\Pi r_\lambda) . 1_{\Sigma\varphi_\lambda} = |P_1| . 1_{\Sigma\varphi_\lambda}$ — wynika, że

*) To zastrzeżenie potrzebne jest wtedy, gdy $\varepsilon = -1$. a p_λ są początkowo >1.

iloczyn P_1 ma w tym razie charakterystykę nieoznaczoną:

$$1_{+\infty}\ , \text{ lub } 1_{-\infty}.$$

Przyjmijmy teraz, że suma Σq_λ jest skończoną — wtedy suma Σp_λ, a z nią suma $\Sigma(1+\varepsilon p_\lambda)$ jest rozbieżną i $=+\infty$ *).

Połóżmy w tym razie $\varphi_\lambda=\frac{\pi}{2}-\varphi'_\lambda$, a więc:

$$\frac{1+\varepsilon p_\lambda}{r_\lambda}=\sin\varphi'_\lambda,\quad \frac{\varepsilon' q_\lambda}{r_\lambda}=\cos\varphi'_\lambda$$

to można tu założyć, że:

$$(\gamma)\qquad \left.\begin{array}{l} \text{albo } 0\leqq\varphi'_\lambda\leqq\frac{\pi}{2},\ \text{gdy } \varepsilon'=+1 \\ \text{albo } \frac{\pi}{2}\leqq\varphi'_\lambda\leqq\pi,\ \text{gdy } \varepsilon'=-1 \end{array}\right\}\ \text{dla } \lambda\geqq l.$$

Stąd wynika, że tu $\varphi'_\lambda>0$ i że łuk $\varphi'_\lambda>\frac{1+\varepsilon p_\lambda}{r_\lambda}$, $\lambda\geqq l$.

Postępując dalej taką samą drogą jak wyżej dojdziemy do wniosku, że $\sum\frac{1+\varepsilon p_\lambda}{r_\lambda}=+\infty$, i że $\Sigma\varphi'_\lambda=\sum\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_\lambda\right)=+\infty$, czyli

$$\Sigma\varphi_\lambda=n\frac{\pi}{2}\Big]_{n=\infty}-\infty,$$

a to wskazuje, że iloczyn P_1 ma i w tym razie charakterystykę nieoznaczoną. Zbierając te uwagi, mamy twierdzenie:

III. *Iloczyn* $P_1=\Pi\,(1+c_\lambda)$, *w którym* $c_\lambda=\varepsilon p_\lambda+\varepsilon' q_\lambda$, *a tak* ε, *jak* ε' *we wszystkich czynnikach ma znaczenie* $+1$, *lub* -1, ($\varepsilon=\varepsilon'$ *lub* $\varepsilon\neq\varepsilon'$) *i w którym* $\lim p_\lambda=\lim q_\lambda=0$, *a* Σc_λ *jest rozbieżną, ma — bez względu na to, czy* $|P_1|$ *okaże się skończone lub nieskończone — charakterystykę nieoznaczoną.*

Rozbieżność szeregu $\Sigma|c_\lambda|$ *w takim iloczynie wyklucza zbieżność jego najzupełniej. Iloczyn taki jest nieoznaczony***).

Co się tyczy tego, czy bezwzględna wartość

$$|P_1|=\Pi r_\lambda,\ (r_\lambda=\sqrt{(1+\varepsilon p_\lambda)^2+q^2_\lambda}),$$

jest skończoną lub nieskończoną, to się o tem przekonamy, pisząc $|P_1|$ w formie $\Pi[1+(r_\lambda-1)]$ i badając zbieżność szeregu $\Sigma(r_\lambda-1)$. Zadanie to można jeszcze tem ułatwić, że się zamiast $|P_1|$ weźmie $|P_1|^2=\Pi[1+(r_\lambda^2-1)]$ i zbada się szereg $\Sigma(r_\lambda^2-1)$. Do iloczynów nieoznaczonych należą w szczególności iloczyny postaci $\Pi(1+q_\lambda i)$, $\Pi(1-q_\lambda i)$ o rozbieżnym szeregu Πq_λ.

---

*) W razie $\varepsilon=+1$ jest to odrazu widoczne. Gdy $\varepsilon=-1$, to suma $\Sigma(1+\varepsilon p_\lambda)$ zawierać będzie — wskutek $\lim\ p_\lambda=0$ — nieskończenie dużo dodajników zbliżających się dowolnie do 1; stąd jej wartość $+\infty$ wynika.

**) Por. Pringsheim *Math. Ann.* T. 33. str. 136. i nast.

Pd. 1. W iloczynie $\Pi\left(1+\frac{i}{\lambda}\right)$ jest $|P_1|^2=\Pi\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)$ a więc $|P_1|^2$ i $|P_1|$ są skończone.

Pd. 2. Zbadać iloczyny $\Pi\left(1+\frac{i}{2\lambda}\right)$, $\Pi\left(1+\frac{i}{\sqrt{\lambda}}\right)$ pod względem ich bezwzględnych wartości.

Pd. 3. Bezwzględna wartość iloczynu $\Pi\left(1+\frac{1}{\lambda}-\frac{i}{\lambda^2}\right)$ jest nieskończoną gdyż $|P_1|^2=\Pi\left[1+\left(\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^4}\right)\right]$, a suma $\sum\left(\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^4}\right)=\infty$.

Pd. 4. Okazać, że bezwzględna wartość iloczynu $\Pi\left(1-\frac{1}{\lambda}+\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,i\right)$ jest skończoną.

Gdy teraz przyjmiemy, że w P_1 jest suma $\Sigma c_\lambda=\Sigma(\varepsilon p_\lambda+\varepsilon' q_\lambda i)$ zbieżną, to z tej uwagi, że taki szereg nie inaczej, jak tylko bezwarunkowo i absolutnie jest zbieżny, (art. 28. tw. VI.), dochodzimy do wniosku:

IV. *Iloczyn P_1 — jeżeli jest zbieżny — to jest równocześnie absolutnie i bezwarunkowo zbieżny.*

Po tych uwagach możemy przejść do odwrócenia twierdzenia II.

W iloczynie $P=\Pi(1+c_\lambda)$, o którym przyjmiemy teraz, że jest bezwarunkowo zbieżnym, niech znajdują się czynniki postaci: $1+(p_\alpha+q_\alpha i)=a'_\alpha$, $1+(-p_\beta-q_\beta i)=b'_\beta$, $1+(p_\gamma-q_\gamma i)=c'_\gamma$, $1+(-p_\delta+q_\delta i)=d'_\delta$.

Wskutek przyjętej bezwarunkowej zbieżności będzie także

$$\Pi(a'_\alpha).\Pi(b'_\beta).\Pi(c_\gamma').\Pi(d'_\delta)=P.$$

Lecz każdy z tych czterech iloczynów jest równocześnie i absolutnie i bezwarunkowo zbieżnym, a szeregi:

$$\Sigma|a'_\alpha|,\quad \Sigma|b'_\beta|,\quad \Sigma|c'_\gamma|,\quad \Sigma|d'_\delta|$$

są zbieżne. Ich suma $=\Sigma|c_\lambda|$ jest zbieżną, a to znaczy, że iloczyn P jest i absolutnie zbieżny. Stąd twierdzenie:

V. *Bezwarunkowa zbieżność iloczynu P pociąga zawsze za sobą i absolutną jego zbieżność.*

Z wszystkich powyższych twierdzeń wynika ostatecznie:

VI. *Koniecznym i dostatecznym warunkiem zbieżności iloczynu $P=\Pi(1+c_\lambda)$ jest zbieżność absolutna i bezwarunkowa szeregu Σc_λ. Oba te rodzaje zbieżności występują w P zawsze równocześnie tak, że jedna pociąga za sobą drugą.*

ROZDZIAŁ III.

Z teoryi mnogości.

30. Zmienna rzeczywista i zmienne rzeczywiste. Ograniczone i nieograniczone ich obszary. Miejsca i otoczenia. I. Wielkość rzeczywista x, która może przybierać wszystkie możliwe wartości od $-\infty$ do $+\infty$ nazywa się zmienną, a cały zbiór wartości tej zmiennej zawarty między $-\infty$, a $+\infty$ nazywamy nieograniczonym obszarem (zakresem) tej zmiennej, albo nieograniczonym obszarem jednokrotnym. Naznaczamy go pisząc:

$$(a) \qquad (x)=(-\infty ... +\infty).$$

Całkowity zbiór systemów wartości $(x_1, x_2,..., x_n)$ jakie nadać można n zmiennym rzeczywistym $x_1, x_2,..., x_n$ mogącym się zmieniać od $-\infty$ do $+\infty$ nazywamy n-krotnym, nieograniczonym obszarem, albo: nieograniczonym zakresem n zmiennych $x_1, x_2,..., x_n$.

Naznaczamy go, pisząc

$$(a') \qquad (x_1, x_2,..., x_n)=(-\infty ... +\infty, -\infty ... +\infty, ..., -\infty ... +\infty)$$

Czasem rozważa się także ograniczone obszary zmiennych rzeczywistych. I tak: Całkowity zbiór wartości, jakie zmienna rzeczywista x przybierać może między skończonemi granicami a, b tworzy obszar ograniczony

$$(b) \qquad (x)=(a...b)$$

tej zmiennej, (jednokrotny ograniczony obszar).

Wszelkie systemy wartości $(x_1, x_2,..., x_n)$ wyjętych z ograniczonych obszarów $x_1=(a_1...b_1)$, $x_2=(a_2...b_2)$,..., $x_n=(a_n...b_n)$ tworzą ograniczony obszar n zmiennych rzeczywistych:

$$(b') \qquad (x_1, x_2,..., x_n)=(a_1...b_1, a_2...b_2,..., a_n...b_n)$$

(n-krotny ograniczony obszar).

Gdy w (b) jedna z granic a, b a w (b') niektóre — ale nie wszystkie — z granic $a_1, a_2,.., a_n, b_1, b_2,..., b_n$ są $=+\infty$, lub $=-\infty$ to takie obszary uważać będziemy za ograniczone.

II. Pewien oznaczony system $x_1=c_1$, $x_2=c_2$,..., $x_n=c_n$ wyjęty z ograniczonego lub nieograniczonego obszaru n zmiennych x_1, x_2,..., x_n nazywa się miejscem, albo punktem tego obszaru.

Takie miejsca znaczymy pisząc $x_1=c_1$, $x_2=c_2$,..., $x_n=c_n$ albo $(x_1, x_2,..., x_n)=(c_1, c_2,..., c_n)$ albo $(c_1, c_2,..., c_n)$; [w jednokrotnym obszarze piszemy $x=c_1$, albo wprost (c_1)]. Gdy takie miejsce może się zmieniać, to nazywamy je bieżącem albo zmiennem.

III. Całkowity zbiór wartości zmiennych x_1, x_2,..., x_n leżących w obszarze ograniczonym

$(x_1, x_2,..., x_n)=(c_1-\delta_1...c_1+\delta'_1, c_2-\delta_2...c_2+\delta'_2,..,c_n-\delta_n...c_n+\delta'_n)$

gdzie δ_1, δ'_1,..., δ_n, δ'_n dowolnie małe, dodatnie są ilości, nazywamy otoczeniem miejsca $(c_1, c_2,..., c_n)$. W jednokrotnym obszarze piszemy $(x_1)=(c_1-\delta_1... c_1+\delta'_1)$.

IV. Gdy na prostej nieograniczonej obierzemy stały punkt 0 i założymy — zgodnie z art. 3., — że (dodatni lub ujemny) odcinek $x=0P$, a raczej jego punkt końcowy P przedstawia liczbę x to powiemy: prosta nieograniczona ze wszystkimi swoimi punktami przedstawia geometrycznie jednokrotny albo liniowy obszar nieograniczony. Wszystkie jej punkta między a i b zawarte, a więc punkta odcinka ab przedstawiają ograniczony liniowy obszar $x=(a...b)$.

Gdy na płaszczyźnie położymy prostokątny układ Descartes'a $(x0y)$, a (x,y) — jak zwykle — oznaczać będzie punkt o spółrzędnych x, y, to taka nieograniczona płaszczyzna swoimi punktami przedstawia nieograniczony obszar dwóch rzeczywistych zmiennych x, y.

Na takiej płaszczyźnie przedstawi się ograniczony obszar $(x, y)=(a_1...a_2, b_1...b_2)$ jako zbiór punktów leżących w prostokącie o wierzchołkach:

$$(c) \qquad (a_1 b_1), (a_2 b_1), (a_2 b_2), (a_1 b_2)$$

Z obszaru nieograniczonego, albo płaszczyzny (x, y) trzeba czasem wydzielić obszar ograniczony w rozmaity sposób inny [nie koniecznie ograniczony obwodem prostokąta (c)] i taki obszar należycie określić.

Pd. 1. Obszar wypełniający odcinek łączący punkta (x_1y_1), (x_2y_2) określić można równaniami:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \; y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \; \lambda=0...1.$$

P. 2. Gdy w obszarze nieograniczonym (x, y) tylko te punkta uwzględniamy które leżą na obwodzie koła

$$(k) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

to już samo to równanie określa ten obszar. Lecz można go także określić równaniami $x-a=r\cos\varphi, y-b=r\sin\varphi$, $\varphi=(0...2\pi)$.

Pd. 3. Wszystkie punkta (x, y) leżące wewnątrz koła (k) wypełnią obszar, który się określi nierównością $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$.

Gdy w przestrzeni położymy prostokątny układ Descartes'a $0(xyz)$, to dowolny system wartości (x, y, z) wyznacza pewien jakiś punkt w tej nieograniczonej przestrzeni, a taka przestrzeń jest obrazem nieograniczonego obszaru 3 zmiennych x, y, z (nieograniczonego trójkowego obszaru).

Trójkowy ograniczony obszar $(x, y, z)=(a_1...a_2, b_1...b_2, c_1...c_2)$ będzie w tej przestrzeni zbiorem wszystkich punktów (miejsc) zawartych w prostościanie o wierzchołkach:

$$(a_1 b_1 c_1),\ (a_2 b_1 c_1),\ (a_2 b_2 c_1),\ (a_1 b_2 c_1)$$
$$(a_1 b_1 c_2),\ (a_2 b_1 c_2),\ (a_2 b_2 c_2),\ (a_1 b_2 c_2).$$

Każdy system $(x_1\, y_1\, z_1)=(k_1, k_2, k_3)$ taki, że — gdy $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$ — mamy $a_1 < k_1 < a_2$, $b_1 < k_2 < b_2$, $c_1 < k_3 < c_2$ — jest miejscem tego ograniczonego obszaru. Otoczenie miejsca (k_1, k_2, k_3) oznaczone przez $(k_1 - \delta_1 ... k_1 + \delta'_1, k_2 - \delta_2 ... k_2 + \delta'_2, k_3 - \delta'_3 ... k_3 + \delta'_3)$, gdzie δ_1, δ'_1, δ_2, δ'_2, δ_3, δ'_3 są dowolnie małe dodatnie ilości, będzie dowolnie małym prostościanem w którego wnętrzu leży punkt (k_1, k_2, k_3).

31. Obszar jednej zmiennej urojonej x. Wielkość urojona $x = u + v i$, której spółrzędne zmieniać się mogą w obszarach:

(1) $$u = (-\infty ... +\infty),\ v = (-\infty ... +\infty)$$

nazywa się nieograniczoną zmienną urojoną. Cały nieskończony zbiór jej wartości z u, v branych z obszarów (1) jest jej nieograniczonym obszarem, albo zakresem. Taki obszar jest więc nie czem innem, jak tylko nieograniczoną płaszczyzną liczbową (art. 19.), której punkta przez x naznaczamy, a której osie są uu', vv'. Z tego powodu taki, nieograniczony obszar (x) nazywamy także krócej płaszczyzną zmiennej (urojonej) x.

Gdy zważymy, że wszystkie punkta x leżące w płaszczyźnie (x) na okręgu koła (r) o środku $x=0$, a o promieniu r, określają się równaniem

(2) $$|x| = r,$$

to stąd wynika, że tu nieograniczony obszar (x) także tak określić możemy $|x| = (0 ... \infty)$ albo $|x| \leqq \infty$.

Gdy przeciwnie w zmiennej x jej spółrzędne u, v przybierać mogą tylko wartości zawarte w obszarach $u=(a_1...a_2)$, $v=(b_1...b_2)$ to całkowity zbiór wartości x z tak ograniczonemi u, v jest ograniczonym obszarem tej zmiennej. Jeżeli uu', vv' uważamy za osie spółrzędnych Descartes'a, to na tej płaszczyźnie przedstawia się taki obszar jako zbiór punktów zawierających się w prostokącie $(u, v)=(a_1...a_2, b_1...b_2)$.

Lecz jeszcze i w rozmaite inne sposoby możemy ograniczać obszar urojonej zmiennej x. Tak n. p. równanie (2) przedstawia tylko te punkta, które mieszczą się na okręgu koła (r). Nierównością $|x| < r$ określimy obszar ograniczony, zamknięty kołem (r).

Nierówność $|x| > r$ określi obszar ograniczony, na który się składają te punkta płaszczyzny (x), które leżą poza kołem (r). Przytem same okręgi koła (r) do tych obszarów się nie wliczają.

Gdy przeciwnie do obszarów tych i punkta okręgu (r) chcemy wliczyć, to to naznaczymy, pisząc $|x| \leqq r$, $|x| \geqq r$.

Gdy z punktu $x=0$, jako środka zakreślimy dwa koła (r), (r'), $(r < r')$, to wszystkie punkta zawarte między temi kołami [w pierścieniu $(r...r')$] utworzą ograniczony obszar, który określimy, pisząc $r < |x| < r'$.

Gdy i punkta okręgów (r), (r') do tego obszaru wliczyć się mają, to napiszemy $r \leqq |x| \leqq r'$. Zakreślmy teraz koło $(r)_\alpha$ o promieniu r z punktu $\alpha = a + b\,i \neq 0$, jako środka. Jego równanie w spółrzędnych Descartes'a uu', vv' jest $(u-a)^2+(v-b)^2=r^2$, albo

(3) $$\sqrt{(u-a)^2+(v-b)^2}=r.$$

Lecz tu lewa strona nie jest czem innem, jak właśnie bezwzględną wartością liczby urojonej

$$(u-a)+(v-b)\,i=(u+v\,i)-(a+b\,i)=x-\alpha$$

Wskutek tego w miejsce równania (3) możemy napisać $|x-\alpha|=r$ i to równanie wziąć za określenie ograniczonego obszaru, na który się składają wszystkie punkta okręgu koła $(r)_\alpha$, leżącego w płaszczyźnie (x).

Łatwo teraz zrozumieć, że nierówności

(4) $$|x-\alpha| < r, \quad |x-\alpha| > r$$

określają: pierwsza zbiór punktów leżących wewnątrz koła $(r)_\alpha$, druga zbiór wszystkich punktów zewnątrz tego koła leżących. Przy tem do tych ograniczonych obszarów nie wlicza się sam okręg koła $(r)_\alpha$. Relacye:

(5) $$|x-\alpha| \leqq r, \quad |x-\alpha| \geqq r$$

określą obszary (4) z wliczeniem do nich punktów całego okręgu koła $(r)_\alpha$.

Równania

(6) $$|x-\alpha|=r, \quad |x-\alpha|=r', \quad r' > r$$

określą dwa koła $(r)_\alpha$, $(r')_\alpha$ o wspólnym środku α, a nierówność

(7) $$r < |x-\alpha| < r'$$

oznacza obszar, na który się składają wszystkie punkta zawarte między okręgami kół $(r)_\alpha$, $(r')_\alpha$ bez wliczenia do niego punktów tych kół.

Gdyby w (6) przy znaku nierówności był jeszcze i znak równości, to do obszaru (6) i same okręgi $(r)_\alpha$, $(r')_\alpha$ wliczyćby potrzeba.

32. Różne sposoby ograniczenia obszaru jednej urojonej zmiennej. Miejsce obszaru. Otoczenie miejsca. Gdy w nieograniczonym obszarze (x) dane są dwa punkta $x_1 = u_1 + v_1 i$, $x_2 = u_2 + v_2 i$, to w układzie osi uu', vv' ich oddalenie wyrazi się wzorem:

$$\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|,$$

którego używać będziemy, chcąc określić obszary inaczej, niż dotąd, ograniczone.

Pd. 1. Obierzmy na płaszczyżnie (x) dwa stałe punkta α, β i zażądajmy bieżącego punktu x w ten sposób, aby suma jego oddaleń od punktów α, β była stałą i $= 2A$. Taki punkt x spełni związek:

$$(e) \qquad |x - \alpha| + |x - \beta| = 2A,$$

a jego miejscem geometrycznem będzie elipsa, której oś główna $= 2A$, oś poboczna $2B = \sqrt{4A^2 - |\alpha - \beta|^2}$, a jej ogniskami są punkta α, β. Nierówności

$$(e') \qquad |x - \alpha| + |x - \beta| < 2A, \quad |x - \alpha| + |x - \beta| > 2A$$

dają: pierwsza wszystkie punkta leżące wewnątrz elipsy (e), druga wszystkie punkta zewnątrz niej leżące.

Pd. 2. Związek $|x - \alpha| - |x - \beta| = 2A$ określa na płaszczyźnie (x) hyperbolę (h) o osi głównej $2A$, a osi pobocznej $2B = \sqrt{4A^2 + |\alpha - \beta|^2}$, a o ogniskach α, β. [Określić obszar, leżący wewnątrz i obszar leżący zewnątrz hyperboli (h)?].

Pd. 3. Na jakiej krzywej leżą punkta x, określone warunkiem $|x|^2 = |1 - x^2|$?

[Odp. Na hyperboli równobocznej $\dfrac{u^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \dfrac{v^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$].

Pd. 4. Gdy $\dfrac{|\alpha - \beta|}{2} = d$, a

$$(l) \qquad |x - \alpha| \, . \, |x - \beta| = r, \quad r > 0,$$

to równanie (l) określa krzywę Cassini'ego, która —

gdy $r > d^2$, jest jednym owalem,

„ $r = d^2$, jest lemniskatą,

„ $r < d^2$, jest parą owalów.

Ogniskami tych krzywych są punkta α, β.

Gdy $r = 0$, a $d > 0$, mamy parę punktów α, β. Gdy $r > 0$, a $d = 0$, a więc $\alpha = \beta$, mamy koło o promieniu r, a o środku α. Nierówność

$$|x - \alpha| \, . \, |x - \beta| < r$$

określa obszar leżący wewnątrz jednej z krzywych Cassini'ego.

Pd. 5. Okazać, że: *a)* równaniem $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| = 1$ wydzielamy z płaszczyzny (x) prostą $u = \dfrac{1}{2}$, równoległą do osi drugorzędnej vv' i oddaloną od niej o $\dfrac{1}{2}$ — *b)* równaniem $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| = 1$ prostą $u = -\dfrac{1}{2}$ — *c)* równaniem $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| = r$, $r < 1$, koło o środku $x = -\dfrac{r^2}{1 - r^2}$ i o promieniu $\dfrac{r}{1 - r^2}$, a wreszcie — *d)* równaniem $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| = r$, $r > 1$, koło o środku $x = \dfrac{r^2}{r^2 - 1}$, a o promieniu $\dfrac{r}{r^2 - 1}$.

*

Pd. 6. Jakie punkta określa równanie $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 1$?

Pd. 7. Jaki obszar określa równanie $|x-\alpha_1| . |x-\alpha_2| \dots |x-\alpha_n| = 0$?

Pd. 8. Równanie $x = r . 1_\varphi$, w którem $r = const.$, a

$$0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \varphi_5 < \varphi_6 < 2\pi$$

określa – jeżeli $\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_3 \dots \varphi_4)$, $\varphi = (\varphi_5 \dots \varphi_6)$ – obszar składający się z 3 łuków koła (r).

Wydzielmy z nieograniczonej płaszczyzny (x) pewną ilość skończoną lub nieskończoną punktów x_1, x_2, x_3, ..., to pozostałą po tem wydzieleniu płaszczyznę uważać możemy za obszar, którego ograniczeniem są punkta x_1, x_2, ... Obszar, n. p. określony nierównością $|x| > 0$ jest nieograniczoną płaszczyzną (x) po uprzedniem wydzieleniu z niej punktu $x=0$.

Nierówność $|x-a_1| . |x-a_2| \dots |x-a_n| > 0$ określa nieograniczoną płaszczyznę (x) po uprzedniem wyjęciu z niej punktów a_1, a_2, ..., a_n.

Na ograniczenie obszaru mogą się wreszcie złożyć punkta $(x_1, x_2, ...)$ i pewne linie $(l_1, l_2, ...)$.

Czy w takim obszarze możliwem będzie dwa dowolne jego punkta ξ_1, ξ_2 połączyć linią nieprzecinającą ograniczenia $(l_1, l_2, ...)$, zależy to od jakości i położenia linij l_1, l_2, ...

Z tych wszystkich uwag wynika, że w płaszczyźnie (x) możemy mieć takie obszary:

(I) obszar nieograniczony — (II) obszar ograniczony linią zamkniętą lub kilkoma takiemi liniami — (III) obszar, którego ograniczeniem jest pewna skończona, lub nieskończona ilość punktów — (IV) obszar, na którego ograniczenie składają się punkta i linie; te obszary są *obszarami o dwóch wymiarach*. (V) obszar będący linią krzywą, jej odcinkiem lub złożony z odcinków linij krzywych; takie obszary nazywamy *liniowymi*. (VI) obszar złożony z grupy punktów [Pd. 7.].

Uwaga. Gdy obszar ograniczony dwuwymiarowy zajmuje skończoną i w skończoności leżącą część płaszczyzny (x), to można go zawsze objąć obszarem prostokątnym $(u, v) = (a_1 \dots a_2, b_1 \dots b_2)$ w ten sposób, że wszystkie punkta danego obszaru i jego ograniczenie całkowicie się mieszczą w tym prostokącie.

Gdy $x=c=a+bi$ jest miejscem wyjętem z nieograniczonego, lub ograniczonego obszaru zmiennej urojonej x, to a, b nazywać będziemy spółrzędnemi tego miejsca.

Gdy $c=a+bi$ jest miejscem w obszarze zmiennej $x=u+vi$ to $(u, v) = (a-\delta_1 \dots a+\delta'_1, b-\delta_2 \dots b+\delta'_2)$, gdzie δ_1, δ'_1, δ_2, δ'_2 są dowolnie małe dodatnie ilości utworzą *otoczenie miejsca* c. Jestto dowolnie mały prostokąt, w którego wnętrzu leży punkt c. Lecz także i obszar $|x-c| < \delta$ gdzie δ jest dowolnie małą dodatnią ilością będzie otoczeniem miejsca c. Jestto dowolnie małe koło, w którego środek wpada punkt c.

Gdy w obszarze liniowym punkt c leży na linii l, to otoczeniem punktu c będzie tu nieskończenie mały odcinek linii l mieszczący w sobie punkt c. W szczególności może być punkt c punktem końcowym tego odcinka.

33. Punkt w nieskończoności. Co się tyczy poszczególnych miejsc zawartych w nieograniczonej płaszczyźnie (x), to przedewszystkiem zwrócić uwagę trzeba na punkta leżące w nieskończoności. Takie wszystkie punkta wyrażają się liczbami, których bezwzględne wartości są $=\infty$, a więc są — to punkta:

$$(1)\quad \begin{array}{l} (a)\ (+\infty+\infty i),\ (-\infty-\infty i)\quad (b)\ (+\infty-\infty i),\ (-\infty+\infty i) \\ (c)\ (\mu+\infty i),\ (\mu-\infty i),\ (d)\ (+\infty+\mu i),\ (-\infty+\mu i), \end{array}$$

gdzie w $c)$ $d)$ jest μ dowolną skończoną rzeczywistą liczbą dodatnią, lub ujemną, a także zerem być może.

Krócej możemy punkta (1) naznaczyć równaniem

$$(2)\qquad x=\infty\,.\,1_\varphi,\ \varphi=(0...2\pi),$$

wszystkie bowiem takie x mają rzeczywiście $|x|=\infty$. Widzimy stąd, że obszar punktów x leżących na płaszczyźnie (x) w nieskończoności składa się z nieskończenie wielu punktów, które oznaczeniami (1), albo oznaczeniem (2) w całości wyczerpujemy.

Lecz najczęściej spotykamy się w teoryi funkcyi z takiemi zagadnieniami, że w nich: albo obojętnem jest, której z wartości $a)$, $b)$, $c)$, $d)$, używamy, albo — gdy rozróżnienie to jest potrzebne i do różnych wyników prowadzi — te różne wyniki i bez owego rozróżnienia można wyprowadzić. Tak n. p. wyrażenie $1/x$ staje się zerem gdy x jest nieskończonością b e z r ó ż n i c y, k t ó r ą z n i e s k o ń c z o n o ś c i (2) za x p o ł o ż y m y. Gdy więc δ jest dowolnie małą dodatnią ilością to nierówność

$$(3)\qquad 1/|x|<\delta$$

wskazuje, że $|x|$ od pewnej granicy począwszy — bezustannie róść może dążąc do ∞, a samo x przytem dążyć może do którejbądź z wartości (2).

Wskutek tego możemy związku (3) używać do określenia otoczenia któregokolwiek z punktów (2).

Właściwie na wzór nierówności $|x-a|<\delta$, dającej otoczenie punktu a leżącego w skończoności należałoby i tu analogicznej relacyi: $|x-\infty 1_\varphi|<\delta$, $\varphi=(0...\pi)$ użyć do określenia otoczenia punktów (2). Lecz — wskutek nieuchwytności tego oznaczenia — zatrzymamy raz na zawsze określenie (3) i zgodzimy się zarazem każdą różnicę $(x-\infty\, 1_\varphi)$ zastępywać przez $1/x$.

Ale przez to wszystkim wartościom nieskończonym *(a), (b), (c), (d)* równą nadajemy rolę, tak, że obejmując je wszystkie odtąd jednym znakiem $x=\infty$ wyrażać się będziemy:

I. *Płaszczyzna nieograniczona (x) ma jeden tylko punkt* $x=\infty$ *w nieskończoności. Jego otoczenie tworzą takie punkta* x, *które spełniają nierówność* $1/|x|<\delta$ *z dowolnie małą dodatną ilością* δ. *Różnicę* $(x-\infty)$ *zastępywać zawsze będziemy przez* $1/x$.

Wracając do związku (3), napisać go możemy także w formie $|x|>1/\delta=R'$ gdzie R' dowolnie dużą dodatnią jest liczbą. Z tego powodu powiadamy:

II. *Otoczeniem punktu* $x=\infty$ *są wszystkie punkta leżące na płaszczyźnie* (x) *poza pewnem dostatecznie dużem kołem* (R') *o środku* $x=0$. *Jak duże ma być owo koło, to zależy każdym razem od danych i dobrze określonych warunków.*

34. Okrążanie punktu leżącego w skończoności lub nieskończoności. Do ograniczeń pewnego danego obszaru (x) niech należy zamknięta nieprzecinająca się z sobą linia l_1, a wzdłuż całej tej linii niech do niej z jej jednej strony (wewnętrznej, lub zewnętrznej) przylega albo część $[x]$ danego obszaru, albo cały obszar (x). W pierwszym przypadku może jeszcze i po drugiej stronie linii l_1 w całej jej rozciągłości przylegać inna część $[x]'$ rozważanego obszaru.

Niech dalej po l_1 przebiega punkt ruchomy, to ruch tego punktu w ten sposób określamy:

Gdy wyobrażamy sobie, że w kierunku ruchu, strzałką s (fig. 4.) *oznaczonym po linii* l_1 *kroczymy i mamy wtedy* $[x]$ *po lewej ręce, to mówimy, że każdy punkt części* $[x]$ *i całą tę część okrążamy po* l_1 *w kierunku dodatnim. To samo określenie przenosimy na każdą zamkniętą linię należącą do ograniczeń obszaru* (x). *Przeciwne kierunki dają okrążania ujemne.*

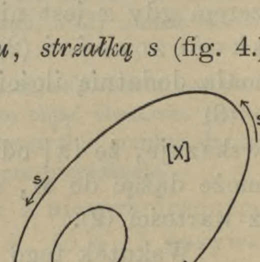


Fig 4.

Pd. 1. Koło (r) określone równaniem $|x|=r$ ogranicza albo obszar (α) $|x|<r$, albo obszar (β) $|x|>r$, (fig. 5. na str. nast.).

Ruchomy punkt poruszający się w kierunku strzałki s okrąża obszar (α) w dodatnim, a obszar (β) w ujemnym kierunku. Przeciwnie ruchem punktu wskazanym strzałką s' okrążamy obszar (α) w kierunku ujemnym, a obszar (β) w kierunku dodatnim.

Pd. 2. Gdy mamy obszar określony nierównością $r < |x| < r'$ (fig. 6.), to po kole (r) okrążamy go dodatnio w kierunku strzałki s, a po kole (r') dodatnio w kierunku strzałki s'.

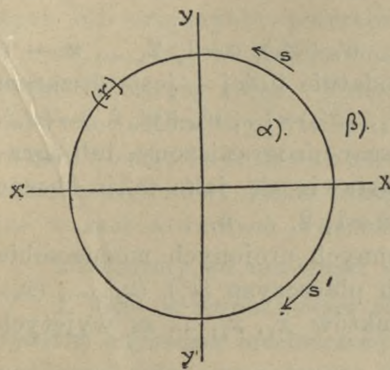


Fig. 5.

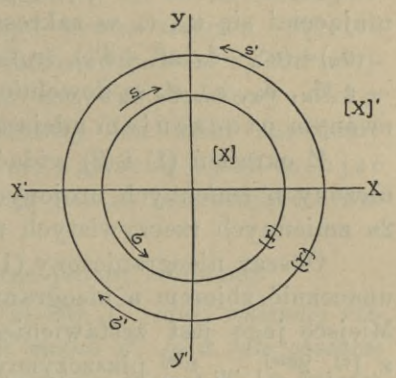


Fig. 6.

Pd. 3. Gdy te same koła (fig. 6.) ograniczają obszar złożony z części: $[x]$ określonej przez $|x| < r$ i części $[x]'$ określonej przez $|x| > r'$, to część jego $[x]$ okrążamy dodatnio po kole (r) w kierunku strzałki σ, a część $[x]'$ po kole (r') w kierunku strzałki σ'.

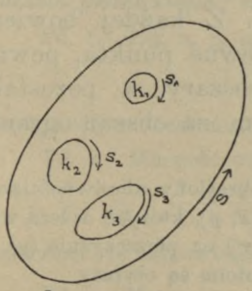


Fig. 7.

Pd. 4. Obszar, który ograniczają zamknięte linie k, k_1, k_2, k_3, (fig. 7.) okrążamy w dodatnim kierunku, poruszając ruchomy punkt po k, k_1, k_2, k_3 w kierunkach strzałek s, s_1, s_2, s_3.

Widzieliśmy, że dostatecznie duże koło (R) o środku $x=0$ jest ograniczeniem otoczenia punktu $x=\infty$. Stąd — gdy uwzględnimy określenie okrążania punktów obszaru — wynika:

I. *Punkt $x=\infty$ okrążamy, prowadząc po kole (R) punkt ruchomy w ujemnym kierunku ze względu na dowolny punkt leżący wewnątrz (R).*

35. Obszary kilku zmiennych urojonych. Gdy danych jest n zmiennych urojonych $x_1 = u_1 + v_1 i$, $x_2 = u_2 + v_2 i$, ..., $x_n = u_n + v_n i$, a przytem:

(1) $(u_\alpha, v_\alpha) = (-\infty ..., +\infty, -\infty ... +\infty)$ albo

(2) $(u_\alpha, v_\alpha) + (a_\alpha ... a'_\alpha, b_\alpha ... b'_\alpha)$ $\alpha = 1, 2, ... n$,

to zbiór wszystkich systemów $(x_1, x_2, .. x_n)$ o u_α, v_α branych z zakresów (1) nazywamy nieograniczonym obszarem n zmiennych urojonych $x_1, x_2, ... x_n$, a zbiór tych systemów z wartościami u_α, v_α leżącemi w zakresach (2) ograniczonym obszarem takich zmiennych.

Każdy system $(x'_1, x'_2, ..., x'_n) = (u'_1, + v'_1 i, u'_2 + v'_2 i, ..., u'_n + v'_n i)$ którego u'_α, v'_α leżą w (1) lub (2) nazywa się m i e j s c e m, albo punktem obszaru; $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ są spółrzędnemi tego miejsca.

Zbiór systemów $(x_1, x_2, ..., x_n)$, w które wchodzą x_α ze zmieniającemi się u_α, v_α w zakresach
$(u_\alpha)=(u'_\alpha-\delta_\alpha...u'_\alpha+\delta'_\alpha)$, $(v_\alpha)=(u'_\alpha-\varepsilon_\alpha...v'_\alpha+\varepsilon'_\alpha)$, $\alpha=1, 2, ..., n$ — — a δ_α, δ_α, ε_α, ε'_α są dowolnie małe dodatnie ilości — jest obszarem zwanym otoczeniem miejsca $(x'_1, x'_2, .. x'_\alpha)=(..., u'_\alpha+v'_\alpha i...)=(x'_\alpha)$.

Z określeń (1) i (2) widać, że obszar nieograniczony, lub ograniczony n zmiennych urojonych przedstawia się jako takiż obszar $2n$ zmiennych rzeczywistych u_α, v_α, $\alpha=1, 2, ..., n$.

Obszar nieograniczony (1) n zmiennych urojonych można sobie unaocznić zbiorem n nieograniczonych płaszczyzn (x_1), (x_2),..., (x_n). Miejsce jego jest zestawieniem n punktów $x_1, x_2, ..., x_n$ wyjętych z 1^{ej}, 2^{giej}, ..., n^{tej} płaszczyzny.

Ograniczony obszar (2) będzie znowu zbiorem n prostokątów leżących w płaszczyznach (x_1), (x_2), ..., (x_n).

Lecz oprócz obszarów w ten sposób ograniczonych możemy i tu mieć obszary ograniczone w inny sposób. Z każdej bowiem z płaszczyzn (x_1), (x_2)..., (x_α) możemy wyjąć pewne punkta, pewne linie, a wreszcie i pewne dwuwymiarowe obszary, a pozostałe części (płaszczyzny niezupełne) uważać razem za obszar ograniczony.

Pd. 1. Obszar dwóch urojonych zmiennych x, y określony nierównościami $|x|<r$, $|y|<r'$ wypełniają tylko takie pary punktów (x, y), których x leżą wewnątrz koła (r) na płaszczyźnie (x), a y wewnątrz koła (r') na płaszczyźnie (y).

Pd. 2. Jakimi punktami płaszczyzn (x), (y) zapełnione są obszary
$$(\alpha)\ |x|<r,\ |y|>r', \qquad (\beta)\ |x|>r,\ |y|>r'?$$

Pd. 3. Jakie punkta płaszczyzn (x), (y) tworzą obszar
$$\left|\frac{x}{x-1}\right|<1, \quad \left|\frac{y}{y-1}\right|>1? \text{ (por. art. 32. Pd. 5.)}$$

Oprócz obszarów ograniczonych, lub nieograniczonych mamy tu jeszcze nowy rodzaj obszarów takich, że spółrzędne ich miejsc muszą zależeć od siebie. Takie obszary nazywać można obszarami o miejscach niedowolnych.

Pd. 4. W obszarze dwóch zmiennych x, y określonym równaniem $|x|.|y|=1$ należy do takiego x że $|x|=r=(0...\infty)$ wprawdzie nieskończenie dużo wartości y, ale te wszystkie y mają bezwzględną wartość $=\frac{1}{r}$.

Pd. 5. Zauważmy obszar: $|x-\alpha|+|y-\beta|=1$ to — gdy x jest takim punktem w (x), że $|x-\alpha|=\rho<1$, — to do owych x mogą jedynie należeć y o $|y-\beta|=1-\rho$.

Pd. 6. W obszarze $|x-\alpha|-|x-\beta|=1$ mamy $|x-\alpha|\geq 1$, a gdy $|x-\alpha|=1+\rho$, to $|y-\beta|=\rho\ \rho=(0...\infty)$.

36. Nieskończona mnogość miejsc wyjętych. Punkt skupienia. Zdarza się często, że w obszarze ograniczonym, lub nieograniczonym jednej zmiennej x, lub n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (rzeczywistych lub urojonych) potrzeba oznaczyć pewne miejsca (x'_1) lub $(x'_1. x'_2, \ldots, x'_n)$ w skończonej lub nieskończonej ilości i temi miejscami bliżej się zająć. Takie miejsca nazywać będziemy określonemi albo wyjętemi, a całkowity ich zbiór nazwiemy skończoną, lub nieskończoną mnogością tych miejsc albo punktów. Takie mnogości mają bardzo interesujące i ważne w zastosowaniach własności.

Zacznijmy od mnogości w obszarze jednej zmiennej.

I. *Gdy w ograniczonym obszarze* $(x)=(0\ldots1)$ *jednej zmiennej rzeczywistej wyjmiemy nieskończoną mnogość miejsc* x', *to w tym obszarze znajdziemy jedno przynajmniej, dobrze oznaczone miejsce* x_0, *w którego otoczeniu* $(x_0-\delta\ldots x_0+\delta)$ *zawierać się będzie nieskończona ilość tych miejsc wyjętych. Miejsce* x_0, *które nazywamy punktem skupienia, albo punktem granicznym, może do wybranych należeć lub nie należeć.*

Pd. 1. Tak n. p. na prostolinijnym odcinku $(x)=(0\ldots1)$ punkta

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots\ldots$$

skupiają się w nieskończonej ilości około jedynego punktu $x=0$.

Pd. 2. Mnogość punktów:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6},\ \ldots$$

mieszcząca się całkowicie w obszarze $(0\ldots1)$ ma dwa punkta skupienia 0 i $\frac{1}{2}$.

Pd. 3. Mnogość punktów

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{5},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{5},$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6},\ \frac{1}{4}+\frac{1}{6},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \ldots$$

mieszcząca się również w obszarze $(0\ldots1)$ posiada nieskończenie wiele punktów skupienia, a mianowicie: $0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$ *)

Z tych przykładów widać, że — jeżeli punktów skupienia jest więcej, niż jeden — to może ich być albo ilość skończona, albo nieskończona.

Dowód. Jeżeli w obszarze $(0\ldots1)$ jest miejsc określonych x' nieskończona ilość, to przynajmniej w jednym z częściowych

*) Przykłady 2., 3. znajdują się w dziele: Ul. Dini (Lüroth, Schepp) — *Grundlagen für eine Th. der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse* (1892) str. 23, 24.

obszarów $\left(0....\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}....1\right)$ [w jednej z połów] musi ich być nieskończenie dużo.

Niechże ε_1 znaczy 0, albo 1, to $\left(\frac{\varepsilon_1}{2}...\frac{\varepsilon_1+1}{2}\right)$ oznacza połowę $\left(0....\frac{1}{2}\right)$, albo połowę $\left(\frac{1}{2}....1\right)$ według tego, czy $\varepsilon_1=0$, czy $\varepsilon_1=1$.

Zatrzymując tylko tę połowę, w której miejsc x' jest niezawodnie nieskończenie dużo, możemy ją w każdym razie przedstawić przez:

(1) $$\left(\frac{\varepsilon_1}{2}....\frac{\varepsilon_1+1}{2}\right),$$

gdzie $\varepsilon_1=0$, albo $=1$ według potrzeby. [W razie, gdyby w obydwu połowach było miejsc nieskończenie dużo, zatrzymamy na razie jedną tylko z nich].

W połowie (1) mamy nieskończenie dużo miejsc x'; musi się przeto znowu w jednej przynajmniej z jej połów zawierać nieskończona ilość tych miejsc.

Tę połowę obszaru (1), kładąc $\varepsilon_2=0$, albo $=1$, oznaczymy, pisząc:

(1) $$\left(\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}....\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2+1}{2^2}\right).$$

Przy $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$ mamy w (2): $\left(0....\frac{1}{4}\right)$

" $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=1$ " " " $\left(\frac{1}{4}....\frac{1}{2}\right)$

" $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=1$ " " " $\left(\frac{1}{2}....\frac{3}{4}\right)$

" $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=1$ " " " $\left(\frac{3}{4}....1\right)$.

Otóż według tego, w której z tych ćwiartek całego obszaru jest miejsc x' nieskończenie dużo, używamy ε_1, ε_2 w jednem z powyższych znaczeń. [W razie, gdyby ćwiartek takich było więcej (2, 3 lub 4) zatrzymujemy znowu na razie jedną z nich tylko].

W ćwiartce (2), w której już ε_1, ε_2 mają ustalone znaczenie, znajduje się zatem znowu nieskończona ilość miejsc x', a więc — rozumując tak samo jak o (1) — powiemy: przynajmniej w jednej z jej połów znajduje się tych miejsc nieskończenie dużo. Tę połówkę obszaru (2), $(1/8)^{\text{ma}}$ całego obszaru (0...1) oznaczymy przez:

(3) $$\left(\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\frac{\varepsilon_3}{2^3}\dots\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\frac{\varepsilon_3+1}{2^3}\right),$$

gdzie znowu $\varepsilon_3=0$, albo $=1$, według potrzeby.

Takie wnioski można widocznie prowadzić dowolnie daleko i z zakresu $(0\dots1)$ wydzielić tę jego $\left(\frac{1}{2^\nu}\right)^{\text{tą}}$ część, w której miejsca określone nagromadziły się w nieskończonej ilości. Tę część przedstawimy formą.

(3′) $$\left(\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\dots+\frac{\varepsilon_\nu}{2^\nu}\dots\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\dots\frac{\varepsilon_\nu+1}{2^\nu}\right),$$

gdzie ogólnie z ε_1, ε_2, ..., ε_ν niektóre są $=0$, a niektóre $=1$. Dla $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\dots=\varepsilon_\nu=0$ obszar (3′) byłby pierwszą, a dla $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\dots=\varepsilon_\nu=1$ ostatnią, $\left(\frac{1}{2^\nu}\right)^{\text{tą}}$ częścią obszaru $(0\dots1)$. Połóżmy:

$$\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\frac{\varepsilon_3}{2^3}+\dots+\frac{\varepsilon_\nu}{2^\nu}=x_\nu,$$

to zamiast (3′) napiszemy krótko:

(4) $$\left(x_\nu\dots x_\nu+\frac{1}{2^\nu}\right).$$

Dobierając dalej $\varepsilon_{\nu+1}$, $\varepsilon_{\nu+2}$, $\varepsilon_{\nu+3}$, ... w znaczeniu 0 lub 1 według wyżej już danych reguł, przyjmijmy, że:

(5) $$\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\frac{\varepsilon_3}{2^3}+\dots+\frac{\varepsilon_\nu}{2^\nu}+\frac{\varepsilon_{\nu+1}}{2^{\nu+1}}+\dots\ \textit{in inf.}=x_0,$$

to mamy niezawodnie [art. 3.]:

(6) $$x_\nu<x_0<x_\nu+\frac{1}{2^\nu},$$

a punkt x_0 mieści się widocznie w obszarze (4).

Niechże δ będzie dowolnie małą dodatnią ilością, to możemy ν wybrać zawsze tak duże, że będzie: $\delta>\frac{1}{2^\nu}$. Wtedy — wskutek (6) — sprawdzają się nierówności:

$$x_0-\delta<x_\nu,\quad x_\nu+\frac{1}{2^\nu}<x_0+\frac{1}{2^\nu}.$$

Nierówności te wskazują, że obszar (4) zawiera się całkowicie w obszarze:

$$(x_0-\delta\dots x_0+\delta),$$

który j e s t o t o c z e n i e m p u n k t u x_0.

W nim mieści się zatem miejsc wyjętych nieskończenie dużo, a punkt x_0 jest według określenia — punktem skupienia.

Punkt ten dostaliśmy tym sposobem, żeśmy z 2^ν równych części obszaru $(0\dots1)$ każdym razem tylko jedną zatrzymali i ją dalej dzielili. Jeżeli w owych 2^ν częściach mamy więcej takich, które zawierają w sobie miejsc określonych nieskończenie dużo, to każdą z tych części trzeba uwzględnić i ją dalej dzielić. Tym sposobem można dojść w niektórych mnogościach do skończonej, w niektórych do nieskończonej liczby punktów skupienia. [Por. Pd. 2., 3].

II. *W obszarze ograniczonym* $(x)=(a...b)$ *różnym od* $(0...1)$ *określona nieskończona mnogość punktów* x' *posiada przynajmniej jeden punkt skupienia.*

Połóżmy $x=a(1-t)+bt$, a więc $t=(x-a)/(x-b)$, to widocznie gdy x zmienia się od a do b, t zmienia się od 0 do 1, a w obszarze $t=(0...1)$ mieści się mnogość punktów $t'=(x'-a)/(x'-b)$. Ta mnogość — według twierdzenia I. — posiada przynajmniej jeden punkt skupienia t_0, a to dowodzi, że i mnogość (x') w obszarze $(a...b)$ będzie miała jeden przynajmniej punkt skupienia $x_0=a(1-t_0)+bt_0$.*)

III. *W nieograniczonym obszarze* $(x)=(-\infty...+\infty)$ *określona nieskończona mnogość* (x') *posiada przynajmniej jeden punkt skupienia.*

Obierzmy dwa punkty a, b, $a<b$, i cały obszar złóżmy z trzech:

$$(-\infty...a),\quad (a...b),\quad (b...+\infty).$$

Gdy $(a...b)$ zawiera nieskończenie dużo miejsc wybranych x' to w nim [tw. II.] znajdziemy przynajmniej jeden punkt skupienia. W przeciwnym razie punktów skupienia tam nie będzie. Gdy w pozostałej części $(a...-\infty)$, $(+\infty...b)$ mamy miejsc x' nieskończenie dużo, to i tu da się udowodnić istnienie przynajmniej jednego punktu skupienia.

Obierzmy w tym celu dowolny punkt c w obszarze $(a...b)$ leżący, a więc $a<c<b$ i połóżmy:

$$t=\frac{b-c}{b-a}\cdot\frac{x-a}{x-c}$$

Gdy x zmienia się od a do $-\infty$ a dalej od $+\infty$ do b, to t równocześnie zmienia się od 0 do $(b-c)/(b-a)$ i od $(b-c)/(b-a)$ do 1; przytem $(b-c)/(b-a)$ jest właściwym dodatnim ułamkiem. Zmienna t tworzy zatem obszar $(0...1)$, a w nim mamy nieskończoną mnogość punktów $\frac{b-c}{b-a}\cdot\frac{x'-a}{x'-c}$. Ta mnogość posiada przynajmniej jeden punkt skupienia t_0. Odpowiadający mu podług równania (7) punkt

---

*) Dwom bowiem nieskończenie bliskim wartościom t, t' w obszarze (t) odpowiadają także wartości x, x' w obszarze (x).

$$x_0 = \frac{a(b-c)-c(b-a)t_0}{(b-c)-(b-a)t_0}$$

będzie punktem skupienia w obszarach $(a \dots -\infty)$, $(+\infty \dots b)$.

Gdy w szczególności $t_0 = (b-c)/(b-a)$, to punkt skupienia x_0 wypada w nieskończoności. Do takiej należy n. p. mnogość punktów 1, 2, 3, 4, ...

Przeciwnie mnogość $x_\nu = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+1}}$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.. rozrzucona w nieograniczonym obszarze, posiada miejsca skupienia $+1$, -1. Miejsce $x = \infty$ (dla $\nu = \pm 1$) jest tu wprawdzie miejscem należącem do mnogości, ale nie jest jej punktem skupienia.

37. Mnogości pochodne. Mnogości pierwszego i drugiego rodzaju. Przykłady. Daną nieskończoną mnogość naznaczmy krótko literą P. Jej miejsca skupienia są albo w skończonej ilości [Pd. 1. i 2., art. 36] albo ich jest nieskończenie dużo. [Pd. 3., art. 36.]. Tworzą one mnogość P', którą nazywać będziemy pierwszą pochodną mnogości danej P.

Gdy P' zawiera miejsc nieskończenie dużo, to z niej znowu dostaniemy pochodną mnogość P''; nazwiemy ją drugą pochodną danej mnogości P. [W Pd. 3. druga pochodna jest jednym punktem: 0].

To tworzenie pochodnych w ten sposób określonych możemy posuwać tak daleko, póki nie dojdziemy do pochodnej $P^{(\nu)}$ złożonej już ze skończonej ilości miejsc. Taka mnogość bowiem nie posiada już mnogości pochodnej, co naznaczymy, pisząc $P^{(\nu+1)}=0$.

Lecz z drugiej strony istnieją takie mnogości P, że ich pochodne

$$P', P'', P''', \dots, P^{(\nu)}, \dots$$

o dowolnie dużych, skończonych wskaźnikach okazują się statecznie nieskończonemi mnogościami. Według tego możemy mnogości odróżniać między sobą w ten sposób:

Definicye. *Mnogościami pierwszego rodzaju są te, które tylko skończoną liczbę pochodnych posiadają. Gdy taka mnogość ma pochodnę $P^{(\nu)}$ złożoną już ze skończonej liczby miejsc (a więc $P^{(\nu+1)}=0$); to tę mnogość nazywamy pierwszego rodzaju, a ν^{go} stopnia. Mnogość P zerowego stopnia, a więc taka, że jej pierwsza pochodna $P'=0$, jest mnogością skończoną.*

Mnogość posiadającą pochodne dowolnego skończonego rzędu:

$$P', P'', P''', \dots, P^{(\nu)}, \dots$$

nazywamy mnogością drugiego rodzaju.

Pd. 1. Nieskończona mnogość P niech będzie złożoną z miejsc:

$$(s_1 s_2 \dots s_\nu) = \frac{1}{2^{s_1}} + \frac{1}{2^{s_1+s_2}} + \frac{1}{2^{s_1+s_2+s_3}} + \dots + \frac{1}{2^{s_1+s_2+\dots+s_\nu}}$$

Wykładniki $s_1, s_2, \dots, s_\nu$ przyjmują równe lub różne wartości, wyjęte z szeregu $+1, +2, +3, \dots$.

Miejscami skupienia tej mnogości będą tu punkta:

$$(a) \qquad \lim_{s_1}(s_1 s_2 \dots s_\nu), \quad \lim_{s_2}(s_1 s_2 \dots s_\nu), \quad \dots, \quad \lim_{s_\nu}(s_1 s_2 \dots s_\nu)$$

gdzie s_λ, $\lambda = 1, 2, \dots, \nu$, umieszczono dla krótkości pod *lim* zamiast $s_\lambda = \infty$. Właściwie należałoby jeszcze prócz miejsc (a) uwzględnić miejsca

$$\lim_{s_\alpha s_\beta \dots s_\gamma}(s_1 s_2 \dots s_\nu) = [\alpha\beta\dots\gamma],$$

gdzie $s_\alpha, s_\beta \dots, s_\gamma$ jest dowolnym zbiorem kilku wykładników $s_1, s_2, \dots, s_\nu$. Lecz — jeżeli $\alpha < \beta < \dots < \gamma$ to widocznie $[\alpha\beta\dots\gamma] = \lim_{s_\alpha}(s_1 s_2 \dots s_\nu)$, a to miejsce jest już w (a) zawarte.

Miejscami (a) sa więc już wszystkie miejsca skupienia objęte, tak, że w nich dostajemy pierwszą pochodną mnogość:

$$P' = 0, \ \frac{1}{2^{s_1}}, \ \left(\frac{1}{2^{s_1}} + \frac{1}{2^{s_1+s_2}}\right), \ \dots, \ \left(\frac{1}{2^{s_1}} + \frac{1}{2^{s_1+s_2}} + \dots + \frac{1}{2^{s_1+s_2+\dots+s_{\nu-1}}}\right).$$

Ta pochodna jest tu nieskończoną, gdyż $s_1, s_2, \dots, s_{\nu-1}$ przybierają wszystkie (różne, równe) wartości szeregu liczb $1, 2, 3, \dots$ Na wzór miejsc samej mnogości P, możemy położyć:

$$P' = 0, \ (s_1), \ (s_1 s_2), \ (s_1 s_2 s_3), \ \dots, \ (s_1 s_2 \dots s_{\nu-1}).$$

Z P' dojdziemy do P'' dając wykładnikom $s_1, s_2, \dots, s_{\nu-1}$ po porządku wartość ∞. Mieć więc będziemy:

$$P'' = 0, \ \frac{1}{2^{s_1}}, \ \left(\frac{1}{2^{s_1}} + \frac{1}{2^{s_1+s_2}}\right), \ \dots, \ \left(\frac{1}{2^{s_1}} + \frac{1}{2^{s_1+s_2}} + \dots + \frac{1}{2^{s_1+s_2+\dots+s_{\nu-2}}}\right),$$

albo $$P'' = 0, \ (s_1) \ (s_1 s_2), \ \dots, \ (s_1 s_2 \dots s_{\nu-2})$$

o nieskończonej ilości miejsc, gdyż każde $s_\lambda = 1, 2, \dots$.

Pochodna k^{go} stopnia $(k < \nu)$ będzie znowu zbiorem nieskończenie wielu miejsc:

$$(b) \qquad P^{(k)} = 0, \ (s_1), \ (s_1 s_2), \ \dots, \ (s_1 s_2 \dots s_{\nu-k}).$$

Postępując w ten sposób dalej otrzymamy:

$$P^{(\nu-1)} = 0, \ \frac{1}{2^{s_1}}, \ s_1 = 1, 2, 3, \dots \ \text{a} \ P^{(\nu)} = \text{punkt zero}.$$

Mnogość P jest zatem — według definicyi — mnogością pierwszego rodzaju, a ν^{go} stopnia. [M i t t a g - L e f f l e r: *Acta mathematica* T. IV. str. 58].

Pd. 2. W obszarze (0...1) niech się zawiera mnogość P złożona z wszystkich punktów μ przedstawiających właściwe wymierne ułamki.

Szukajmy jej mnogości pochodnej P'. Niech w tym celu α przedstawia dowolną wartość w y m i e r n ą lub n i e w y m i e r n ą taką, że $0 \leq \alpha \leq 1$. Wtedy w jej otoczeniu znajdziemy niezawodnie zawsze nieskończenie dużo punktów μ, a stąd pochodzi, że $P' = (0 \dots 1)$ wraz z punktami 0 i 1. Ale wtedy mieć statecznie będziemy $P'' = P''' = \dots = (0 \dots 1)$, co znaczy, że mnogość rozważana jest rodzaju drugiego.

38. Mnogość miejsc odosobnionych. Mnogość zamknięta. Mnogość wszędzie gęsta. Stosunek pochodnych do samej danej mnogości. Dowodząc istnienia punktu skupienia mnogości P, powiedzieliśmy, że on do P może, ale nie musi należeć. Wskutek tego punkta pochodnej mnogości P' albo:

1° mieszczą się w P całkowicie, albo

2° zawierają się w P częściowo tylko, albo wreszcie

3° będą punktami różnymi od punktów mnogości P.

Gdy przez P_{01} lub (PP') naznaczymy punkta wspólne mnogościom P, P', to równania

(1) $P_{01}=P'$, (2) $P_{01}=R$ $(<P')$, (3) $P_{01}=0$
charakteryzują owe trzy wspomniane przypadki.

I. *Mnogość P nieposiadającą punktów wspólnych ze swoją pierwszą pochodną — a więc scharakteryzowaną równaniem* (3) — *nazywamy mnogością odosobnionych punktów, albo mnogością odosobnioną (izolowaną).*

Mnogość rozważana w art. 37. [Pd. 1.] jest odosobnioną.

Weźmy mnogość P o równaniu (1) lub (2) pod uwagę. Odrzuciwszy z niej punkta P_{01}, dostaniemy nową mnogość, którą przez

(4) $$J=P-P_{01}$$

naznaczyć możemy, a która będzie już izolowaną. Lecz z równania (4) mamy dalej:

(5) $$P=J+P_{01}.$$ Stąd wynika:

II. *Każdą mnogość można uważać za zespolenie pewnej odosobnionej mnogości i mnogości wspólnej jej samej i jej pochodnej.*

III. *Mnogość scharakteryzowaną równaniem* (1) *nazywa* C a n t o r *mnogością zamkniętą.*

Przyjmijmy teraz, że mnogość P — bez względu na to, czy jest rodzaju pierwszego czy drugiego — posiada prócz pierwszej pochodnej jeszcze i dalsze, a więc 2gą, 3cią, ... Weźmy pochodną $P^{(m)}$, o s k o ń c z o n y m znaczku $m \geq 2$ i jeden jej punkt ξ pod uwagę, to pokażemy, że ten punkt do mnogości P' koniecznie zaliczyć się musi.

Gdy bowiem punkt ξ do P' nie należy, to w otoczeniu $(\xi-\delta....\xi+\delta)$ mamy tylko skończoną ilość punktów mnogości P, albo tam nie ma ani jednego punktu tej mnogości. Wtedy całe to otoczenie wolne jest nie tylko od punktów mnogości P', ale i wszystkich wyższych pochodnych. Lecz to sprzeciwia się założeniu, że ξ należy do $P^{(m)}$. Stąd:

IV. *Gdy mnogość P prócz pochodnej P' posiada jeszcze i wyższe* *pochodne* $P^{(m)}$, $m=2, 3, \ldots.$ *to każda z nich o skończonem m jest częścią składową pochodnej* P'.

Zestawmy mnogości $P^{(m-2)}$, $P^{(m-1)}$, $P^{(m)}$ i uważajmy $P^{(m-2)}$ za mnogość daną, to $P^{(m)}$ mieści się w $P^{(m-1)}$ całkowicie. Lecz w zestawieniu $P^{(m-3)}$, $P^{(m-2)}$, $P^{(m-1)}$ mieści się znowu $P^{(m-1)}$ w $P^{(m-2)}$ całkowicie i t. d. Stąd wynika:

V. *Pochodna* $P^{(m)}$ *jest wspólną częścią wszystkich mnogości* $P^{(m-1)}$, $P^{(m-2)}$, ..., P', *a utworzywszy* P', *nie dostajemy w* P'', P''', ... *już żadnych nowych punktów. Każda zatem pochodna jest zamkniętą mnogością.*

W szczególności — gdy P jest mnogością w obszarze $(a...b)$, a $P^{(m)}$, $m \geq 2$, wypełnia całkowicie ten obszar [a więc $P^{(m)}=(a..b)$], to i $P'=(a...b)$ być musi, a dana mnogość P jest widocznie taką, że w otoczeniu każdego punktu w $(a...b)$ znajdujemy jej punktów nieskończenie dużo. Taką mnogość nazywa Cantor wszędzie gęstą, a Du-Bois-Reymond: pantachiczną, albo pantachią. Taką n. p. jest mnogość wszystkich ułamków wymiernych, zawartych w (0...1).

VI. *Gdy P jest pierwszego rodzaju, a jej* $P^{(\nu+1)}=0$, *to* $P^{(\nu)}$ *jest wspólną wszystkim mnogościom* $P^{(\nu-1)}$, $P^{(\nu-2)}$, ..., P'. *Gdy P jest zamkniętą mnogością, to* $P^{(\nu)}$ *mieści się jeszcze i w P.*

Gdy P jest mnogością drugiego rodzaju, to tworzenie pochodnych P', P'', P''', ... można dowolnie daleko prowadzić, a o nich da się udowodnić:

VII. *Wszystkie pochodne o skończonych stopniach mnogości drugiego rodzaju posiadać muszą pewne wspólne punkta. Gdy wszystkie te punkta zbierzemy, utworzą one największą mnogość, jaka się w owych pochodnych zawierać może.*

Oznaczmy ową największą wspólną mnogość przez $P^{(\omega)}$, to dowód twierdzenia VII. przeprowadzimy, okazując, że $P^{(\omega)}$ nigdy zerem być nie może. $P^{(\omega)}$ uważać trzeba za pierwszą pochodną, następującą po wszystkich pochodnych o skończonych stopniach, tak, że ω zastępuje tu ∞. Przyjmijmyż, że $P^{(\omega)}=P^{(\infty)}=0$, to widocznie już pewna pochodna $P^{(\nu)}$ o skończonym wskaźniku ν składałaby się ze skończonej ilości miejsc, a sama mnogość P nie byłaby drugiego rodzaju, jak założono.

Z dowodu tego wynika zarazem nowe twierdzenie:

VIII. *Równanie* $P^{(\omega)}=0$ *charakteryzuje wyłącznie mnogość pierwszego rodzaju.*

39. Liczby pozaskończone. Mnogości pochodne o wskaźnikach pozaskończonych. Gdy $P^{(\omega)}$ — według twierdzenia VII. [art. poprz.] —

nie może być zerem, to musi być albo mnogością skończoną, albo nieskończoną.

Gdy $P^{(\omega)}$ jest mnogością nieskończoną, to posiadać znowu będzie pochodne, które po porządku nazwiemy:

(1) $$P^{(\omega+1)},\ P^{(\omega+2)},\ P^{(\omega+3)},\ \ldots.$$

Tu mogą zajść znowu dwa przypadki, albo 1° $P^{(\omega)}$ jest rodzaju pierwszego, tak, że mamy $P^{(\omega+\nu+1)}=0$, a $P^{(\omega+\nu)}$ jest skończoną mnogością; albo 2° Szereg (1) jest nieskończony.

W tym drugim przypadku wszystkie mnogości (1) mieć znowu będą swoją wspólną mnogość $P^{(2\omega)}$ różną od zera. Gdy ta jest nieskończoną, to posiada pochodne

(2) $$P^{(2\omega+1)},\ P^{(2\omega+2)},\ P^{(2\omega+3)},\ \ldots.,$$

które znowu albo skończą się pochodną $P^{(2\omega+\nu+1)}=0$, albo okażą się **wciąż** mnogościami nieskończonemi.

W tym drugim przypadku muszą pochodne (2) znowu posiadać wspólną mnogość $P^{(3\omega)}$.

Przyjmijmy, że w ten sposób postępując, nigdy nie dochodzimy do mnogości skończonej. Znaczy to innemi słowy, że wtedy pochodne o wskaźnikach:

I.		1	2	...	ν...
	ω	$\omega+1$	$\omega+2$	...	$\omega+\nu$...
	2ω	$2\omega+1$	$2\omega+2$	...	$2\omega+\nu$...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
	$\nu_1\omega$	$\nu_1\omega+1$	$\nu_1\omega+2$	...	$\nu_1\omega+\nu$...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
	ω^2	ω^2+1	ω^2+2	...	$\omega^2+\nu$...
	$2\omega^2$	$2\omega^2+1$	$2\omega^2+2$	...	$2\omega^2+\nu$...
II.	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
	$\nu_2\omega^2$	$\nu_2\omega^2+1$	$\nu_2\omega^2+2$	...	$\nu_2\omega^2+\nu$...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
	$\nu_2\omega^2+\nu_1\omega$	$\nu_2\omega^2+\nu_1\omega+1$	$\nu_2\omega^2+\nu_1\omega+2$	...	$\nu_2\omega^2+\nu_1\omega+\nu$...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
	$\nu_k\omega^k+\ldots+\nu_1\omega$	...	...	...	$\nu_k\omega^k+\ldots+\nu_1\omega+\nu$...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
	ω^ω	$\omega^\omega+1$	...	...	...

statecznie istnieją, a każda jest zamkniętą.

Lecz znaku ω użyliśmy zamiast ∞. Z tego powodu liczby II. objąć można nazwą „**liczby pozaskończone**" *(transfinitae)*, albo — odróżniając je od liczb I. — nazwać je **liczbami klasy**

II., podczas gdy liczby I. (liczby skończone) nazywać będziemy liczbami klasy I.

Liczby klasy II. mają tę własność, że po każdej z nich dowolnie wyjętej następuje inna, tylko jedna, całkiem dobrze oznaczona. Lecz naodwrót każdej z nich nie poprzedza zawsze liczba oznaczona. Liczby bowiem postaci $\nu_k\omega^k+\nu_{k-1}\omega^{k-1}+\ldots+\nu_1\omega$, a więc bez wolnego wyrazu nie mają oznaczonych liczb bezpośrednio przed niemi stojących.

Wprowadziwszy te nazwy i oznaczenia, a przytem uwzględniając i to, że w tworzeniu pochodnych $P^{(\nu_k\omega^k+\nu_{k-1}\omega^{k-1}+\ldots+\nu_1\omega)}$ możemy dojść wreszcie i do mnogości pierwszego rodzaju, powiemy:

I. *Mnogości drugiego rodzaju są albo takie, że — gdy α jest pewną liczbą klasy II. — to $P^{(\alpha)}=0$, albo takie, że dla wszelkich liczb tej klasy nigdy nie mamy $P^{(\alpha)}=0$.*

Pd. 1. Zauważmy mnogość P złożoną z miejsc:

$$(1)\ (s_1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{1+s_1}},\quad (2)\ (s_1s_2)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^{2+s_1}}+\frac{1}{2^{2+s_1+s_2}},$$

$$(3)\ (s_1s_2s_3)=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^{3+s_1}}+\frac{1}{2^{3+s_1+s_2}}+\frac{1}{2^{3+s_1+s_2+s_3}},\ldots$$

(r) $(s_1s_2\ldots s_r)=\frac{1}{2^r}+\frac{1}{2^{r+s_1}}+\frac{1}{2^{r+s_1+s_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{r+s_1+s_2+\ldots+s_r}}\ldots$ *in inft.*, w których $s_1, s_2,\ldots s_r,\ldots$ przybierają wartości liczb 1, 2, 3,.., *in inft.*

Miejsca (1), (2), (3),... (r)... są w niej po porządku mnogościami 1-go, 2-go, 3-go,..., r-go,... stopnia.

Pochodna r-ta miejsc (r) będzie jednem miejscem $=\frac{1}{2^r}$ podczas gdy r-te pochodne miejsc (1), (2)..., $(r-1)$ nie istnieją. Lecz r zwiększając się bez końca, dosięgnie wreszcie wartości $\omega=\infty$, a wtedy miejsce $\lim\limits_{r=\infty}\frac{1}{2^r}=0$ jest pochodną $P^{(\omega)}$ całej mnogości P. Mamy więc tu

$$P^{(\omega)}=\text{punkt zero}.$$
$$P^{(\omega+1)}=0.\quad \text{[Mittag-Leffler l. c]}$$

Punkt zero będzie się więc tu zawierał we wszystkich pochodnych skończonego stopnia.

Pd. 2. Na mnogość P niech się składają miejsca:

$$(1)\quad \frac{1}{2^{s_1}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu+1+p_1}}$$

$$(2)\quad \frac{1}{2^{s_1}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu+2+p_1+p_2}}$$

(3) $\frac{1}{2^{s_1}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu+3+p_1+p_2+p_3}},\ldots$

(r) $\frac{1}{2^{s_1}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu+r+p_1+p_2+\ldots+p_r}},\ldots$

$s_1, s_2,\ldots, s_\nu, p_1, p_2,\ldots,p_r$ przybierają tu wszystkie (równe, różne) wartości szeregu 1, 2, 3,.......

Miejsca (1), (2), (3),..., (r) są tu po porządku mnogościami stopni $(\nu+1)$, $(\nu+2)$, $(\nu+3)$,..., $(\nu+r)$,....

Gdy $r=\nu+k$, to r^{te} pochodne mnogości (1), (2), (3),..., $(k-1)$ już nie istnieją, a r^{ta} pochodna mnogości (r) będzie

$$0,\ \frac{1}{2^{s_1}},\ \frac{1}{2^{s_1}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2}},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{s_1}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu}},$$

$$\frac{1}{2^{s_1}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu+r}}.$$

Gdy $r=\omega=\infty$, to i k równocześnie jest $=\omega=\infty$, a wtedy pochodne miejsc (1), (2), (3), ... są wszystkie zerami, a r^{ta} pochodna miejsc (r) — przy $r=\omega$ — daje:

$$P^{(\omega)}\ldots 0,\ \frac{1}{2^{s_1}},\ \frac{1}{2^{s_1}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2}}\ \ldots,\ \frac{1}{2^{s_1}}+\frac{1}{2^{s_1+s_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{s_1+s_2+\ldots+s_\nu}}.$$

Jestto mnogość nieskończona ν^{go} stopnia tak, że z niej dostajemy: $P^{(\omega+\nu)}=$ punkt z e r o, $P^{(\omega+\nu+1)}=0$ [Mittag-Leffler l. c.].

Pd 3. Zauważmy mnogość złożoną z miejsc:

(1) $$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+s_1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+s_1+s_2+\ldots+s_n}}+\frac{1}{2^{n+s_1+s_2+\ldots+s_n+1}}+$$
$$+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+1+p_1}},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

(2) $$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+s_1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n}}+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+2}}+$$
$$+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+2+p_1}}+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+2+p_1+p_2}},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

(3) $$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+s_1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n}}+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+3}}+$$
$$+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+3+p_1}}+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+3+p_1+p_2}}+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+3+p_1+p_2+p_3}},$$
$$n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

: :

(r) $$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+s_1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n}}+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+r}}+$$
$$+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+r+p_1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+s_1+\ldots+s_n+r+p_1+p_2+\ldots+p_r}},$$
$$n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Dalej następują miejsca $(r+1)$, $(r+2)$, ... *in inft.*, a s_1, s_2, ..., s_n, p_1, p_2, ..., p_r przybierają wszelkie (różne, równe) wartości szeregu liczb 1, 2, 3, 4, ...

*

Miejsca (1), (2), (3), ... zawierają po porządku mnogości o stopniach $(n+1)$ $(n+2)$, $(n+3)$, ..., $n=1, 2, 3, ...$ Pochodne $(n+r)^{te}$ miejsc (r) zawierają po jednem tylko miejscu, a to: $\frac{1}{2^n}$, $n=1, 2, 3, ...$, podczas gdy $(n+r)^{te}$ pochodne wszystkich miejsc poprzedzających (1), (2), ..., $(r-1)$, a przy danem n, takież pochodne miejsc (r) o $n=1, 2, ..., (n-1)$ już nie istnieją. Gdy więc położymy $n=r=\omega=\infty$, to $(n+r)^{ta}$ pochodna wszystkich mnogości $(r)_{r=\omega}$ będzie już ich pochodną stopnia 2ω i będzie zarazem pochodną tegoż stopnia danej mnogości P. Mamy więc tu

$$P^{(2\omega)} = \text{punkt zero}, \quad P^{(2\omega+1)} = 0.$$

Pd. 4. Gdy P jest mnogością wszędzie zagęszczoną w obszarze $(a...b)$, to — [art. 38.] — $P' = P'' = ... = (a....b)$, a gdy α jest dowolną liczbą klasy II., to mamy statecznie $P^{(\alpha)} = (a...b)$.

40. Mnogości pierwszej mocy, albo przeliczalne. Przykłady.

Dane mnogości odróżnialiśmy dotąd między sobą według skończonej lub nieskończonej ilości ich pochodnych. Lecz mają one jeszcze inne, nie mniej ważne cechy, któremi je charakteryzować można, a gdy te cechy nie mają już wynikać z mnogości pochodnych, więc daną mnogość pojmować odtąd możemy i będziemy daleko ogólniej jako nieskończenie wiele danych, dowolnie zdefiniowanych, różnych między sobą elementów e (n. p. brył, powierzchni, odcinków, punktów, liczb i t. p.). Z takiej mnogości, którą przez (e) naznaczymy, możemy dowolne elementa wyjmować. Nazwijmyż pierwszy wyjęty element: e_1, drugi wyjęty: e_2, ..., ν^{ty} wyjęty: e_ν i t. d., to mogą tu — gdy przy tem następstwie elementów po sobie trzymaliśmy się pewnego prawidła — dwie zajść możliwości, albo I^0 porządkiem

$$(1) \qquad e_1, e_2, e_3, ..., e_\nu, ... \textit{ in inft.}$$

ustalonym według założonego prawa wyczerpujemy całą mnogość (e), albo II^0 porządkiem (1) nie wyczerpiemy całej mnogości, tak, że jeszcze skończona, lub nieskończona liczba elementów pozostaje niewyjętą.

Gdy n. p. dana jest mnogość liczb parzystych, to gdy je wypiszemy w porządku 2, 4, 6, 8, ..., a więc $e_\nu = 2\nu$, to je tym sposobem wyczerpujemy w zupełności. Gdybyśmy jednak wybierali naprzód liczby podzielne przez 4 i je uporządkowali w ten sposób: 4, 8, 12, 16, ...; $e_\nu = 4\nu$, to widocznie nie wyczerpujemy tu całej mnogości, bo jeszcze pozostały elementa 2, 6, 10, ... t. j. wszystkie liczby podzielne tylko przez 2. Podobnie, gdybyśmy nazwali:

$$2(n+1)=e_1, \quad 2(n+2)=e_2, \quad 2(n+3)=e_3, \quad ....$$

to przez $e_1, e_2, e_3, ...$ nie wyczerpujemy całej mnogości liczb parzystych; pozostają bowiem jeszcze nieuwzględnione elementa $2, 4, 6, ..., 2n$.

D e f i n i c y a. *Mnogość, której elementa można choć w jeden sposób wyczerpać porządkiem* $e_1, e_2, e_3, \ldots$ *in inft. nazywamy mnogością m o c y p i e r w s z e j albo mnogością przeliczalną*)*

Jej elementa dają się widocznie podporządkować w pewien sposób liczbom szeregu 1, 2, 3, 4, ..., gdy do niego zaliczymy i liczbę ω bezpośrednio następującą po wszystkich liczbach skończonych. Każdy element e_ν, (ν=1, 2, 3, ...) ma ν^{te} miejsce, a element poprzedzający go i po nim następujący są niedwuznacznie oznaczone (są-to elementa $e_{\nu-1}$, $e_{\nu+1}$). [Do takich mnogości pierwszej mocy zaliczają się wszystkie mnogości skończone]. Z tej definicyi bezpośrednio wynika:

I. *Każda część mnogości mocy pierwszej jest również mocy pierwszej.*

Gdy bowiem mnogość dana mocy pierwszej jest już uporządkowana, tak, że

$$(\alpha) \qquad (e)=e_1, e_2, e_3, \ldots,$$

a częściową jej mnogością jest (e_α), to możemy e_α przedstawić w takim porządku:

$$(\beta) \qquad (e_\alpha)=e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3}, \ldots$$

że i w szeregu (α) jest e_{α_λ} późniejszym elementem niż $e_{\alpha_{\lambda-1}}$, ale wtedy widocznie mnogość (β) jest przeliczalną. *c. b. d. d.*

Z tego powodu wszystkie liczby parzyste lub nieparzyste, lub wreszcie wszystkie liczby dodatnie pozostające w kongruencyi z daną liczbą q (*mod. n*) tworzą mnogość przeliczalną.

II. *Gdy z szeregiem* 1, 2, 3, ... *jest pewna dana mnogość tak związana, że doszedłszy w szeregu* 1, 2, 3, ... *do liczby k zmuszeni jesteśmy podług pewnego obranego prawa z tej danej mnogości wyjmować skończoną ilość* $\left(\gtrless k\right)$ *elementów całkiem dobrze określonych, to taka mnogość jest przeliczalną.*

Z określenia takiego wynika bowiem, że każdy element zajmie całkiem oznaczone miejsce, a cała mnogość da się potem podporządkować szeregowi liczb 1, 2, 3, 4, ...

Stosując twierdzenie II. udowodnimy:

A. Nieskończona mnogość odcinków π *mieszczących się w skończonym odcinku (a...b) o długości p w ten sposób, że jeden odcinek nie zachodzi na drugi a więc dwa sąsiednie co najwyżej stykają się z sobą, daje się liczyć.* Gdy bowiem zauważymy długości $p/1, p/2, p/3, \ldots$ tworzące widocznie mnogość przeliczalną i zauważymy p/ν, to odcinków π większych od p/ν jest tylko skończona liczba $\leq \nu$. Stąd wynika przeliczalność odcinków π.

---

*) U Niemców: „*Mengen der ersten Mächtigkeit, abzählbare Mengen*“ — U Francuzów: „*Ensembles de la prémiere puissance, ensembles dénombrables*“.

To samo odnieść trzeba i do odcinków w obszarze nieograniczonym, taki bowiem obszar można zawsze [art. 36.] zmieniać na zakres (0...1).

B. Mnogość P punktów odosobnionych jest przeliczalną. W takiej mnogości nie zawierają się — jak wiemy — punkta pierwszej jej pochodnej P'. Znaczy to, że wszelkie oddalenia co dwóch sąsiednich punktów w P mają dolną granicę ρ koniecznie >0. Wskutek tego można każdy punkt mnogości zamknąć takiem otoczeniem, że 1^0 w jego wnętrzu tylko się ten jeden punkt zawiera, 2^0 dwa sąsiednie otoczenia nie mają wspólnych punktów. Otoczenia te przedstawiają się jako odcinki, które — według A — dają się liczyć. Tem samem i mnogość P jest przeliczalną.

C. Nieskończona mnogość, której miejsca wyrażają się przez $(s_1 s_2 .. s_\nu)$, *zawierają więc* ν *parametrów, a te parametry przybierać mogą wszystkie (równe, różne) wartości z szeregu liczb* 1, 2, 3, ..., *jest pierwszej mocy.* Niech n będzie $\geq \nu$, to wszystkich miejsc $(s_1, s_2, \ldots, s_\nu)$, w których parametry $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ mają najwyżej wartość n, jest n^ν.

Zauważmyż szereg liczb $\nu, \nu+1, \nu+2, \ldots$ to widocznie przeliczając go i doszedłszy do liczby $n+r$ zbieramy równocześnie w mnogości $(s_1 s_2 \ldots s_\nu)$ miejsc $n^{\nu+r}$, a więc ilość skończoną. Stąd — według twierdzenia II. — będzie ta mnogość mocy pierwszej.

D. Mnogość ułamków wymiernych, właściwych jest mocy pierwszej. Niech $k=2n-1$, to wszystkie ułamki właściwe p/q, w których $p+q=2n-1$ są $\frac{1}{2n-2}, \frac{2}{2n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, a ich liczba jest $(n-1)$, $n=2, 3, 4, \ldots$

Gdy $k=2n$, to wszystkie ułamki właściwe p/q, w których $p+q=2n$ są $\frac{1}{2n-1}, \frac{2}{2n-2}, \ldots, \frac{n-1}{n+1}$, a ich liczba jest znowu $(n-1)$, $n=2, 3, 4, \ldots$
W ten sposób z liczb $k=3, 4, 5, 6, \ldots$ dostajemy po porządku:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{4}\right), \ldots$$

Przeliczając szereg 3, 4, 5, ... i tworząc odpowiadające tym liczbom ułamki dostajemy — doszedłszy do liczby $k=2n-1$ — ułamków:

$$l_{2n-1} = \sum_{\nu=3}^{n} 2(\nu-2) + (n-1) = (n-1)^2.$$

Gdy $k=2n$, to tych ułamków mamy:

$$l_{2n} = \sum_{\nu=2}^{n} 2(\nu-1) = n(n-1)$$

Widocznie $l_{2n-1} < (2n-1)^2$, a $l_{2n} < (2n)^2$, a gdy jeszcze i to uwzględnimy, że powtarzające się ułamki trzeba tylko raz policzyć, to tem bardziej mamy $l_k < k^2$. To wskazuje — według tw. II. — że mnogość uważanych ułamków jest rzeczywiście mocy pierwszej.

41. Mnogości złożone z przeliczalnych mnogości. Zwróćmy się teraz do składania danych przeliczalnych mnogości w jedną mnogość. Przeliczalną mnogość (o ilości elementów ω) przedstawmy raz na zawsze szeregiem liczb 1, 2, 3, ..., nazywając ją P_ω i weźmy pod uwagę mnogość złożoną z n_1 mnogości przeliczalnych

$$(A)\quad \begin{cases} [1_1, 2_1, 3_1, \ldots], [1_2, 2_2, 3_2, \ldots], \ldots, [1_{n_1}, 2_{n_1}, 3_{n_1}, \ldots] \\ \text{i mnogości skończonej } [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]. \end{cases}$$

Ilością jej elementów jest $n_1\omega+n$, a więc liczba klasy II., na co już sam porządek (A) wypisanych elementów wskazuje.

Pierwsze pytanie, jakie się tu nasuwa jest: czy taka mnogość jest pierwszej mocy t. j. czy można znaleźć taki porządek, któryby spełniał warunki definicyi w art. 40. Wypiszmyż w tym celu elementa złożonej mnogości w porządku:

$$(B)\quad \begin{cases} a_1, a_2, \ldots, a_n;\ 1_1, 1_2, \ldots, 1_{n_1};\ 2_1, 2_2, \ldots, 2_{n_1}; \\ 3_1, 3_2, \ldots 3_{n_1};\ 4_1, 4_2, \ldots, 4_{n_1}, \ldots; \end{cases}$$

to widocznie dowolny element k_s, $s=1, 2, \ldots, n_1$ ma swoje całkiem oznaczone miejsce $[n+(k-1)n_1+s]^{\text{te}}$, a element poprzedzający go i następujący po nim są również jednoznacznie oznaczone. Elementa więc złożonej mnogości wypisane porządkiem (B) dają się podporządkować szeregowi 1, 2, 3, ... i dają się tym porządkiem całkowicie wyczerpać. To znaczy:

I. *Mnogość złożona ze skończonej liczby przeliczalnych mnogości jest przeliczalną. Niektóre — lub nawet wszystkie*) — mnogości w skład wchodzące mogą być skończone, albo*

Mnogość $P_{n_1\omega+n}$ o ilości elementów $n_1\omega+n$ jest przeliczalną.

Jej każda część [art. 40., tw. I.] będzie również przeliczalną.

Taka złożona mnogość ma w porządku (A) ilość elementów $n_1\omega+n$; w porządku (B) przeciwnie przedstawia się ta ilość jako ω i wskazuje na przeliczalność mnogości.

Już z tego przykładu widać, że „ilość“ w nieskończonej mnogości nie jest czemś ustalonem niezmiennem. Lecz w każdym razie, gdy przeliczalność pewnej danej mnogości została już stwierdzoną, to można zawsze wziąć ω za jej ilość. Przypuszczać bowiem trzeba, że się ją już ma tak uporządkowaną, że jej elementa odpowiadają liczbom 1, 2, 3, 4, ... i w tym porządku wyczerpuje ją się w zupełności.

Na podstawie twierdzenia I. możemy dowieść:

A_1. *Mnogość P, której pochodna P' daje się liczyć, jest przeliczalną.* Połóżmy bowiem $(P, P')=P_{01}$ [art. 38.], to $P-P_{01}=J$ jest mnogością izolowaną i daje się liczyć [art. 40., tw. B]. P_{01} jako część przeliczalnej (według założenia) mnogości P' daje się także liczyć. Stąd $P=J+P_{01}$ jako złożona z dwóch przeliczalnych mnogości jest pierwszej mocy.

B_1. *Każda mnogość P pierwszego rodzaju a n^{go} stopnia daje się liczyć.* Gdy ta mnogość ma pochodne $P', P'', \ldots, P^{(n)}$, $(P^{(n+1)}=0)$, to możemy położyć

$$P'=(P'-P'')+(P''-P''')+\ldots+(P^{(n-1)}-P^{(n)})+P^{(n)}.$$

---

*) Wtedy złożona mnogość jest skończoną.

Lecz $P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$, są mnogościami izolowanych punktów, gdyż każde $P^{(\alpha)}$ jest zamkniętą mnogością. $P^{(n)}$ jest mnogością skończoną. Stąd wynika, że P' jako mnogość złożona ze skończonej ilości mnogości przeliczalnych jest także mnogością przeliczalną. Z nią i P — na podstawie tw. A_1 — daje się liczyć.

Z szeregu:

(α) $\qquad 1, 2, 3, 4, \ldots$

utwórzmy nieskończenie wiele szeregów w ten sposób: Szeregiem pierwszym niech będzie sam szereg (α). Szereg drugi niech zawiera jako elementa dwukrotne liczby szeregu (α). Szereg trzeci niech będzie złożony z 3-krotnych liczb szeregu (α) i t. d. *in inft.*

Wszystkie tak utworzone szeregi przedstawiają się w sposób następujący:

(α)	1.1,	1.2,	1.3,	1.4,	1.5,	....
(β)	2.1,	2.2,	2.3,	2.4,	2.5,	....
(γ)	3.1,	3.2,	3.3,	3.4,	3.5,	....
(δ)	4.1,	4.2,	4.3,	4.4,	4.5,	....
(ε)	5.1,	5.2,	5.3,	5.4,	5.5,	....
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Tworzą one razem mnogość P_{ω^2} o ilości elementów ω^2. Gdy te elementa wypiszemy w porządku:

$$(B')\ \begin{cases} 1,\ (1.2,\ 2.1,\ 2.2),\ (1.3,\ 3.1,\ 2.3,\ 3.2,\ 3.3),\ \ldots \\ \ldots,\ (1.k,\ k.1,\ 2.k,\ k.2,\ 3.k,\ k.3,\ \ldots,\ k.k),\ \ldots \end{cases}$$

to widocznie mnogość ta jest przeliczalną, a stąd:

II. *Nieskończona przeliczalna mnogość przeliczalnych mnogości* (α), (β), (γ), ... *jest mnogością pierwszej mocy. [Niektóre z przeliczalnych mnogości w skład jej wchodzące mogą być skończone] — albo*

Mnogość P_{ω^2} o ilości elementów ω^2 jest przeliczalną.

Za pomocą tego twierdzenia udowodnimy:

C_1. *Każda mnogość drugiego rodzaju, której $P^{(\omega)}$ jest mnogością przeliczalną (albo skończoną) jest również przeliczalną.* Jej pierwszą pochodną mnogość P' możemy przedstawić w ten sposób:

$$P' = (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots\ldots + P^{(\omega)}$$

Jest ona złożeniem nieskończenie wielu przeliczalnych mnogości, jest zatem i sama przeliczalną. Gdy zaś P' daje się liczyć to i P — według tw. A_1 — będzie pierwszej mocy.

D_1. *Mnogość, której miejsca wyrażają się w dowolny sposób przez* (s_1), $(s_1 s_2)$, $(s_1\ s_2\ s_3)$, ... *in inft., a w których* s_1, s_2, s_3, ... *są parametry mogące przybierać wszystkie (różne, równe) wartości liczb* $1, 2, 3, \ldots$ *jest przeliczalną.* Taka mnogość składa się bowiem z nieskończonej przeliczalnej liczby mnogości

$$P_1 = (s_1),\ P_2 = (s_1 s_2),\ P_3 = (s_1 s_2 s_3),\ \ldots.$$

również przeliczalnych [art. 40. tw. *C.*] a więc jest i sama pierwszej mocy.

Okazaliśmy, że mnogość P_{ω^2} jest pierwszej mocy. Gdy teraz mieć będziemy n_2 mnogości

$$P_{\alpha,\,\omega^2},\ \alpha=1,\ 2.\ 3,\ \ldots,\ n_2$$

o ilości elementów ω^2, n_1 mnogości

$$P_{\beta,\,\omega},\ \beta=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_1$$

o ilości elementów ω, a oprócz tego n elementów a_1, a_2, ...a_n, to z nich złożona mnogość $P_{n_2\omega^2+n_1\omega+n}$ będzie — według I. — przeliczalną.

Podobnie z ω mnogości $P_{\alpha,\,\omega^2}$, $\alpha=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ utworzona mnogość P_{ω^3} będzie mocy pierwszej.

W ten sposób postępując dalej i stosując przy składaniu mnogości to twierdzenie I., to twierdzenie II., dojdziemy do wniosku:

III. *Wszelkie mnogości*

$$(a)\qquad P_{\omega^s},\ P_{n_k\omega^k+n_{k-1}\omega^{k-1}+\ldots+n_1\omega+n},$$

w których s, k, n_k, n_{k-1}, ..., n_1, n *są skończone, dają się liczyć. Znaczki*

$$(b)\qquad \omega^s,\ n_k\omega^k+n_{k-1}\omega^{k-1}+\ldots+n_1\omega+n$$

wskazują ilość elementów zawartych w tych mnogościach, gdy się P_{ω^s} *pojmuje jako złożoną z* ω *różnych mnogości* $P_{\omega^{s-1}}$, *a* $P_{n_k\omega^k+\ldots+n_1\omega+n}$ *jako złożoną*

z n_k	*różnych*	*mnogości*	P_{ω^k}
„ n_{k-1}	„	„	$P_{\omega^{k-1}}$
⋮	⋮	⋮	⋮
„ n_1	„	„	P_{ω}

i z n *elementów* a_1, a_2, ..., a_n.

Po wszystkich liczbach (b), które wszystkie do klasy II. należą następuje ω^ω [art. 39.]. Występuje ona jako granica wszystkich liczb (b), a mnogość P_{ω^ω} jako mnogość, do której przez tworzenie bez końca mnogości (a) zdążamy.

Pytanie, jakiej mocy jest ta mnogość P_{ω^ω} która po wszystkich mnogościach pierwszej mocy następuje, czy jest ona jeszcze także mocy pierwszej?

42. Mnogości mocy wyższych. Mnogości mocy drugiej w jednokrotnym obszarze. W art. 15. okazaliśmy, że liczba niewymierna rozwija się zawsze na nieskończony ułamek łańcuchowy i że naodwrót każdy nieskończony taki ułamek określa liczbę niewymierną. Dwa różne ułamki nigdy tej samej liczby nie przedstawiają.

Pomyślmyż sobie całą nieskończoną mnogość N różnych między sobą, nieskończonych ułamków $(m_1, m_2, m_3, ...)$ niezaczynających się liczbą całą, to one przedstawiają wszystkie niewymierne liczby zawarte w zakresie (0...1) a ich ilość jest ω^ω.

Gdy bowiem w skończonym ułamku łańcuchowym $(m_1, m_2, ..., m_n)$ za jego mianowniki podstawiać będziemy wszystkie waryacye z powtórzeniami liczb 1, 2, 3, ..., n, to otrzymamy n^n różnych między sobą ułamków wymiernych właściwych. Gdy teraz 1, 2, 3, ..., n zmienimy na nieskończony szereg liczb 1, 2, 3, 4, ..., ω i ich waryacyj z powtórzeniami użyjemy w rozwinięciu $(m_1, m_2, m_3, ...)$ dostaniemy ω^ω ułamkowych liczb niewymiernych. Widać stąd, że elementa mnogości P_{ω^ω} można podporządkować jednoznacznie elementom mnogości N i naodwrót, a stąd wynika:

I. *Mnogość P_{ω^ω} ma moc mnogości wszystkich liczb niewymiernych zawartych w zakresie* (0....1).

Dwie takie mnogości P_1, P_2 których elementa dadzą się jednoznacznie podporządkować [jak P_{ω^ω} i N] nazywać będziemy równoważnemi, a ich równoważność naznaczać będziemy przez $P_1 \backsim P_2$. Mając to określenie udowodnimy:

II. *Mnogość wszystkich liczb niewymiernych zakresu* (0...1) *a więc i mnogość P_{ω^ω} ma taką moc, jak mnogość wszystkich punktów zakresu* (0...1).

Niechże d przedstawia wszystkie liczby niewymierne zakresu (0...1), a ich mnogości nazwijmy: $N=(d)$. Niech x przedstawia dowolne miejsce tego zakresu, a $(x)=(0...1)$. Niech dalej φ_ν, $\nu = 1, 2, 3, ...$ przedstawia ułamki właściwe wymierne zawarte w (0...1), a ich całą mnogość naznaczmy przez (φ_ν). (Jest ona przeliczalną według art. 40). Określmy wreszcie w zakresie (0...1) dowolną, przeliczalną mnogość (η_ν) liczb niewymiernych η_ν $\left(\text{n. p.} \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}\right)$.

Mając te mnogości połóżmy: $(x) - (\varphi_\nu) - (\eta_\nu) = (h)$ tak, że (h) przedstawia mnogość wszystkich punktów zakresu (0...1) po uprzedniem wyjęciu z nich punktów φ_ν i η_ν. Wtedy widocznie jest $(x)=(h)+(\varphi_\nu)+(\eta_\nu)$, co możemy krócej napisać:

$$(x)=(h, \varphi_\nu, \eta_\nu)$$

Mnogość (d) złożoną będzie z miejsc h i z miejsc η_ν, a więc

$$(d)=(h, \eta_\nu).$$

Lecz to samo można napisać we formie $(d)=(h, \eta_{2\nu-1}, \eta_{2\nu})$, bo (η_ν) można podzielić na dwie przeliczalne mnogości $(\eta_{2\nu-1})$, $(\eta_{2\nu})$, $\nu=$

$=1, 2, 3, \ldots\ldots$ Lecz $(h)=(h)$, $(\eta_{2\nu-1}) \backsim (\varphi_\nu)$, $(\eta_{2\nu}) \backsim (\eta^\nu)$ a więc będzie $N=(d) \backsim (h, \varphi_\nu, \eta_\nu)=(x)=(0\ldots1)$, *c.b.d.d.*

Z tego wynika, że trzeba nam teraz przedewszystkiem zbadać moc mnogości (0...1). Otóż co do tego udowodnimy:

III. *Mnogość* (0...1) *nie jest mocy pierwszej, nie daje się liczyć.*

Gdy w (0...1) określimy d o w o l n ą, p r z e l i c z a l n ą mnogość $P=(u_1, u_2, u_3, \ldots)$, a dowiedziemy, że w (0...1) można znaleść nieskończenie wiele punktów π, które się do P nie zaliczają to tem samem i twierdzenie III. udowodnimy.

Niech $(\alpha\ldots\beta)$, $\alpha<\beta$, będzie dowolnym zakresem mieszczącym się w (0...1). Gdy P nie jest mnogością wszędzie zagęszczoną, to znajdziemy nieskończenie dużo odcinków $(\alpha\ldots\beta)$ takich, że w nich miejsc u_k wcale nie ma. Każdy punkt π tych odcinków nie mieści się w P.

Gdy P jest pantachiczną mnogością w całym zakresie (0...1), to pozostaje taką i w dowolnym zakresie $(\alpha\ldots\beta)$ mieszczącym się w (0...1). Niechżeż w porządku $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ w którym — najogólniej — miejsca nie są ułożone podług wielkości, będzie u_{k_1} pierwszem miejscem a u_{k_2} drugiem mieszczącem się we wnętrzu $(\alpha\ldots\beta)$.

Mniejszą z wartości u_{k_1}, u_{k_2} naznaczamy przez α', a większą przez β' to mamy $\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$ a we w n ę t r z u $(\alpha'\ldots\beta')$ nie mieszczą się z pewnością miejsca $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{k_2}$, gdzie musi być $k_2 \geqq 2$ (u_{k_1}, u_{k_2} są krańcami tego zakresu).

Zauważmy pozostałe miejsca $u_{k_2+1}, u_{k_2+2}, u_{k_2+3}, \ldots$ to w tym porządku znajdziemy znowu, pierwsze miejsce n. p. u_{k_3}, a potem drugie u_{k_4} mieszczące się we wnętrzu $(\alpha'\ldots\beta')$. Naznaczmy mniejsze z miejsc u_{k_3}, u_{k_4} przez α'' a większe przez β'', to mamy

$$\alpha<\alpha'<\alpha''<\beta''<\beta'<\beta$$

a we w n ę t r z u $(\alpha''\ldots\beta'')$ nie mieszczą się miejsca $u_1, u_2, \ldots, u_{k_4}$ gdzie znowu $k_4 \geqq 4$. Postępując tak dalej mieć będziemy

$$\alpha<\alpha''<\alpha'''<\ldots<\alpha^{(\nu)}<\beta^{(\nu)}<\beta^{(\nu-1)}<\ldots<\beta$$

a we wnętrzu zakresu $(\alpha^{(\nu)}\ldots\beta^{(\nu)})$ nie zawierają się miejsca

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{k_{2\nu}}, \quad k_{2\nu} \geqq 2\nu.$$

Z powodu, że mnogość P jest wszędzie zagęszczona, nie dojdziemy tu do odcinka $(\alpha^{(\nu)}\ldots\beta^{(\nu)})>0$ wolnego od miejsc całej mnogości, ale to zmiejszanie odcinków da się tu prowadzić dalej i dalej. Granicą tego zmniejszania będzie:

$$q=\lim_{\nu=\infty}(\alpha^{(\nu)}\ldots\beta^{(\nu)})=0$$

a więc punkt $\lim\limits_{\nu=\infty}\alpha^{(\nu)}=\lim\limits_{\nu=\infty}\beta^{(\nu)}=\pi$

Poza nim leżą wszystkie miejsca u_s t. j. cała mnogość P, gdyż *in inft.* mamy $k_{2\nu} \geqq 2\nu$. Punkt π nie należy więc do P, a że $(\alpha...\beta)$ można wybrać dowolnie, więc takich punktów π znajdziemy w $(0...1)$ nieskończenie dużo.

Gdyśmy tak istnienia nieskończenie dużo punktów π nieliczących się do pantachicznej, lub niepantachicznej mnogości P wykazali, udowodniliśmy tem samem twierdzenie III. w zupełności.

Mnogość P_{ω^ω} ma moc, która — jak to wykazaliśmy — odmienną jest od mocy pierwszej, a że następuje bezpośrednio po wszystkich mnogościach mocy pierwszej, więc jej moc nazwiemy drugą. Z drugiej strony okazało się, że ta mnogość jest równoważną z całkowitym obszarem $(0...1)$, a tem samem z dowolnym całkowitym obszarem ograniczonym $(a...b)$ lub nieograniczonym $(-\infty...+\infty)$ [art. 36.]. Taki zakres jest oczywiście mnogością najwyższej mocy, jaką w nim określić można. Stąd wynika:

IV. *a) W obszarach jednokrotnych są mnogości mocy drugiej zarazem mnogościami ostatniej, najwyższej mocy.*

b) Tworzenie liczb klasy II., określających ilość elementów w mnogości punktów na danym odcinku (w mnogościach liniowych) można zakończyć liczbą ω^ω.

Oznaczmy przez (x) zakres $(0...1)$ z wliczeniem do niego punktów końcowych 0, 1, przez $(y)'$ taki zakres $(0...1)$ z uprzedniem wyjęciem punktu końcowego 0, a przez (y) znowu zakres $(0...1)$ z wliczeniem do niego punktów 0, 1 (a więc (y) jest tem samem, co (x)). Połóżmy dalej:

$$(1)\qquad (x) = \left(0....\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}....\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}....\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right) + ...$$

a

$$(2)\qquad (y) = \left(\frac{1}{2}....0\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}....\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}....\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right) + ...$$

to widzimy, że każdemu punktowi podziału zakresu (x) odpowiadają dwa różne punkta końcowe częściowych zakresów zakresu (y) a to w ten sposób:

punktowi $x = \frac{1}{2}$	punkta $y = 0\,,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$	(α)
„ „ $= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$	„ „ $= \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$	(β)
„ „ $= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$	„ „ $= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}$	(γ)
⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	

Z każdych tych dwóch punktów odrzućmy jeden, a to: w (α) punkt 0, w (β) zaś, w (γ), w (δ), ... odrzućmy zawsze punkt drugi. Wtedy widocznie (2) przechodzi na $(y)'$, a że zresztą punkta leżące wewnątrz częściowych zakresów (2) można jednoznacznie podporządkować odpowiednim zakresom (1) [i naodwrót], więc mamy:

$$(x) \backsim (y)', \quad \text{a to znaczy:}$$

V. *Każdy całkowity zakres* (0...1) *jest równoważny z sobą po uprzedniem wyjęciu z niego jednego z punktów końcowych* 0, 1.

To samo dotyczy każdego zakresu $(a...b)$, *w którym* a *lub* b *ma skończoną wartość.*

Naznaczmy to, pisząc:

$$(a...b) \backsim (a...b)_a \backsim (a...b)_b,$$

gdzie znaczki a, b u dołu wskazują wyjęcie punktu a lub b z zakresu.

Mając to twierdzenie zauważmy w ograniczonym lub nieograniczonym obszarze liniowym pewną skończoną, lub nieskończoną ilość odcinków następujących po sobie:

$$(a) \qquad (a_1...b_1),\ (a_2...b_2),\ (a_3...b_3),\ ....,$$

leżących tak, że dwa sąsiednie leżą zewnątrz siebie, albo najwyżej stykają się z sobą, a ich punkta końcowe wliczają się do nich.

Zastąpmy (a) równoważnymi odcinkami:

$$(a_1...b_1)_{b_1},\ (a_2...b_2)_{b_2},\ (a_3...b_3)_{b_3},\ ....$$

i zsuńmy je w ten sposób, aby tworzyły jednolity odcinek $(\alpha...\beta)$, to mamy:

$$(b) \qquad (a_1...b_1)_{b_1} + (a_2...b_2)_{b_2} + (a_3...b_3)_{b_3} + ... \backsim (\alpha...\beta)$$

gdyż wskutek wyjęcia punktów b_1, b_2, b_3, ... każdy punkt po zsunięciu już tylko raz występuje.

Gdy zważymy dalej, że $(\alpha...\beta)$ jest mocy drugiej i że w razie nieskończonej ilości odcinków (a) jest ich mnogość przeliczalną, to z równoważności (b) wnioskujemy:

VI. *Skończona albo nieskończona, ale przeliczalna ilość odcinków zawiera w sobie mnogość punktów drugiej mocy.*

43. Mnogość w obszarze n-krotnym. Obszary ciągłe *(continua)*. Przejdźmy teraz do obszaru $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n zmiennych rzeczywistych i do nieskończonej mnogości miejsc $(x'_1, x'_2, ..., x_n')$ zdefiniowanych w tym obszarze. Tutaj da się udowodnić:

I. *Gdy w ograniczonym obszarze n zmiennych rzeczywistych*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (0...1,\ 0...1,\ ...,\ 0...1)$$

zdefiniujemy nieskończoną ilość miejsc $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, *to znajdzie się* *w tym obszarze jedno przynajmniej miejsce* $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, *w którego otoczenie zgromadzą się miejsca zdefiniowane w nieskończonej ilości. Takie miejsce nazywa się i tu miejscem, albo punktem skupienia.*

Przy $n=2$ mamy obszar $(x_1, x_2)=(0...1, 0...1)$, a jeżeli w nim mamy miejsc zdefiniowanych nieskończenie dużo, to przynajmniej w jednej z czwartych części 1, 2, 3, 4 (fig. 8.) tego obszaru (kwadratu) musi ich być nieskończona ilość. Taką czwartą część możemy naznaczyć w ten sposób:

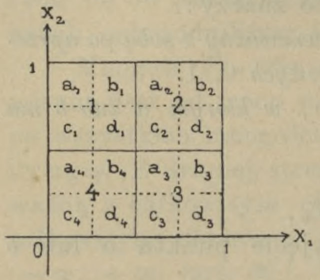


Fig. 8.

$$(a) \qquad \left(\frac{\varepsilon_1}{2} \cdots \frac{\varepsilon_1+1}{2}, \ \frac{\eta_1}{2} \cdots \frac{\eta_1+1}{2}\right),$$

gdzie według potrzeby $\varepsilon_1=0$, $\eta_1=0$, albo $\varepsilon_1=0$, $\eta_1=1$, albo $\varepsilon_1=1$, $\eta_1=0$, albo $\varepsilon_1=1$, $\eta_1=1$.

Tak samo rozumując o obszarze (a) powiemy: Przynajmniej w jednej z czwartych jego części gromadzić się muszą miejsca zdefiniowane w nieskończonej ilości. Tę część — będzie to jeden z $4^2=16$ kwadratów $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, \ldots, a_4, b_4, c_4, d_4$ — zatrzymamy i naznaczymy ją w ten sposób:

$$(b) \qquad \left(\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2} \cdots \frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2+1}{2^2}, \ \frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_2}{2^2} \cdots \frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_2+1}{2^2}\right).$$

Tutaj znowu $\varepsilon_2=0$, $\eta_2=0$, albo $\varepsilon_2=0$, $\eta_2=1$, albo $\varepsilon_2=1$, $\eta_2=0$, albo wreszcie $\varepsilon_2=1$ $\eta_2=1$, według potrzeby.

Prowadząc to dzielenie i wydzielanie jednej z czwartych części dalej, przedstawić możemy $(1/4^\nu)^{\text{tą}}$ część — $\nu>2$ — zatrzymaną przez

$$(c) \qquad \left| \begin{array}{l} \left(\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\ldots+\frac{\varepsilon_\nu}{2^\nu} \cdots \frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\ldots+\frac{\varepsilon_\nu+1}{2^\nu}, \right. \\ \left. \frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_2}{2^2}+\ldots+\frac{\eta_\nu}{2^\nu} \cdots \frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_2}{2^2}+\ldots+\frac{\eta_\nu+1}{2^\nu}\right), \end{array} \right.$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ są albo wszystkie $=0$, albo wszystkie $=1$, albo niektóre są $=0$, a pozostałe $=1$. Tak samo się zachowują $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$. Połóżmy:

$$\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\ldots+\frac{\varepsilon_\nu}{2^\nu}=x_1^{(\nu)}, \qquad \frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_2}{2^2}+\ldots+\frac{\eta_\nu}{2^\nu}=x_2^{(\nu)},$$

to obszar (c) możemy krótko tak napisać:

$$(c') \qquad \left(x_1^{(\nu)} \ldots x_1^{(\nu)}+\frac{1}{2^\nu}, \quad x_2^{(\nu)} \ldots x_2^{(\nu)}+\frac{1}{2^\nu}\right),$$

przy czem ν dowolnie duże być może. Obierzmyż dowolnie małą dodatnią ilość δ, to możemy ν tak duże założyć, że będzie $\delta > 1/2^\nu$, a gdy położymy:

$$\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\frac{\varepsilon_3}{2^3}+\ldots \textit{ in inf.} = x_1^{(0)}, \quad \frac{\eta_1}{2}+\frac{\eta_2}{2^2}+\frac{\eta_3}{2^3}+\ldots \textit{ in inf.} = x_2^{(0)},$$

to obszar

$$(d) \qquad (x_1^{(0)}-\delta \ldots x_1^{(0)}+\delta, \quad x_2^{(0)}-\delta \ldots x_2^{(0)}+\delta)$$

jest otoczeniem punktu $(x_1^{(0)}\ x_2^{(0)})$ i mieści w sobie całkowicie obszar (c'). W otoczeniu zatem (d) mamy miejsc zdefiniowanych nieskończenie dużo, a punkt $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, do którego tu dojść musimy, jest punktem skupienia.

Dla $n=2$ mamy zatem twierdzenie I. udowodnione. Gdy $n>2$, to dowód poprowadzi się analogicznie z tą różnicą, że obszar

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(0\ldots1, 0\ldots1, \ldots, 0\ldots1)$$

podzielić tu trzeba na 2^n równych części, a każdą z nich — gdy $\varepsilon_1, \eta_1, \delta_1, \ldots, \pi_1$ są n znakami mogącymi znaczyć 0 albo 1 — wyrazimy przez:

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\ldots\frac{\varepsilon_1+1}{2}, \ \frac{\eta_1}{2}\ldots\frac{\eta_1+1}{2}, \ \frac{\delta_1}{2}\ldots\frac{\delta_1+1}{2}, \ \ldots, \ \frac{\pi_1}{2}\ldots\frac{\pi_1+1}{2}\right).$$

Tę część znowu trzeba będzie podzielić na 2^n części i t. d.

Zauważmy obszar ograniczony

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(a_1\ldots b_1, a_2\ldots b_2, \ldots, a_n\ldots b_n)$$

różny od obszaru $(0\ldots1, 0\ldots1, \ldots, 0\ldots1)$ i o skończonych a_ν, b_ν, $\nu=1, 2, \ldots, n$. W nim niech się znajduje nieskończona mnogość miejsc zdefiniowanych $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Kładąc

$$(e) \qquad x_\nu=a_\nu(1-t_\nu)+b_\nu t_\nu, \quad \nu=1, 2, \ldots, n$$

przeróbmy ten obszar na

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n)=(0\ldots1, 0\ldots1, \ldots, 0\ldots1),$$

to w nim miejsca $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)$ odpowiadające — podług (e) — miejscom $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ mieć będą jeden przynajmniej punkt skupienia $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots, t_n^{(0)})$. Tem samem i w obszarze $(a_1\ldots b_1, a_2\ldots b_2, \ldots, a_n\ldots b_n)$ mieć będziemy jedno miejsce skupienia $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ odpowiadające miejscu $(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots, t_n^{(0)})$.

Przyjmijmy teraz, że mamy nieskończoną mnogość miejsc zdefiniowanych $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ w nieograniczonym obszarze

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(-\infty\ldots+\infty, -\infty\ldots+\infty, \ldots, -\infty\ldots+\infty).$$

Obierzmy w każdym zakresie $x_\nu=(-\infty\ldots+\infty)$ trzy miejsca a_ν, b_ν, c_ν, $(a_\nu<c_\nu<b_\nu)$ i połóżmy

$$(f) \qquad t_\nu=\frac{b_\nu-c_\nu}{b_\nu-a_\nu}\cdot\frac{x_\nu-a_\nu}{x_\nu-c_\nu}, \quad \nu=1, 2, \ldots, n$$

to dostaniemy [art. 36.] obszar

$$(t_1, t_2, ..., t_n)=(0...1,\ 0...1, ..., 0...1)$$

a w nim mnogość miejsc $(t'_1, t'_2, ... t'_n)$ odpowiadających podług (f) miejscom $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$. Miejsca $(t'_1, t'_2, ..., t'_n)$ muszą mieć przynajmniej jeden punkt skupienia. Tem samem i miejsca $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ w nieograniczonym obszarze posiadać będą przynajmniej jeden taki punkt. Z tych uwag wynika:

II. *W ograniczonym obszarze* $(x_1, x_2, ..., x_n)=(a_1...b_1, a_2...b_2, ..., a_n...b_n)$, *albo w obszarze, który się całkowicie wraz z swem ograniczeniem w nim mieści, albo wreszcie w nieograniczonym obszarze nieskończona mnogość miejsc zdefiniowanych posiada przynajmniej jeden punkt skupienia. Krócej: W dowolnym obszarze mieszcząca się taka mnogość ma przynajmniej jeden punkt skupienia.*

Gdy zważymy, że obszar n urojonych zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$, $(x_\nu=u_\nu+v_\nu i,\ \nu=1, 2, ..., n)$, przedstawia się jako obszar $2n$ zmiennych rzeczywistych $(u_1, v_1, u_2, v_2, ..., u_n, v_n)$, [art. 35], to odrazu wnioskować możemy:

III. *Gdy w dowolnym obszarze n urojonych zmiennych* $x_\nu=u_\nu+v_\nu i$ *mamy nieskończoną mnogość miejsc zdefiniowanych* $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, $x'_\nu=u'_\nu+v'_\nu i$, *to ta mnogość musi posiadać jeden przynajmniej punkt skupienia. Ten punkt jest* $(u_1^{(0)}+v_1^{(0)}i,\ u_2^{(0)}+v_2^{(0)}i, ..., u_n^{(0)}+v_n^{(0)}i)$, *jeżeli miejsca* $(u'_1, v'_1, u'_2, v'_2, ..., u'_n v'_n)$ *mają miejsce skupienia*

$$(u^{(0)}{}_1, v^{(0)}{}_1, u^{(0)}{}_2, v^{(0)}{}_2, ..., u^{(0)}{}_n, v^{(0)}{}_n).$$

Uwaga. Podobnie, jak w mnogościach liniowych możemy i tu dostać skończoną lub nieskończoną ilość punktów skupienia; dalej — co samo przez się jasnem jest — możemy tu mieć mnogości pierwszego lub drugiego rodzaju, mnogości wszędzie zagęszczone, izolowane lub zamknięte, a to odróżnianie mnogości w ten sposób, zależne jest i tu od zachowania się ich pochodnych mnogości [art. 37, 38] względem mnogości danej.

Pd. 1. Mnogość $(x'\, y')=(1/n_1,\ 1/n_2)$, $n_1=n_2=1, 2, 3, ...$ mieści się w obszarze $(x_1 y_1)=(0...1,\ 0...1)$ i ma jeden punkt skupienia $(0, 0)$.

Pd. 2. Mnogość $(x', y', z')=(a, b, c)$, gdzie a, b, c przybierają (różne, równe) wartości ułamków właściwych wymiernych mieści się w obszarze (0...1, 0...1, 0..1) i jest mnogością wszędzie zagęszczoną w tym obszarze.

Pd. 3. W obszarze jednej urojonej zmiennej $x=u+vi$ określona mnogość miejsc

$$x'=u'+v'i=\left[1+\frac{(-1)^{s+1}}{s+1}\right]\left(cos\,\frac{2k\pi}{s+1}+i\,sin\,\frac{2k\pi}{s+1}\right)=(s, k)$$

$$s=0, 1, 2, ..., \quad k=0, 1, 2, ..., \quad s \gtreqless k$$

posiada punkta skupienia

$$\lim_{s=\infty}(s, k)=\lim_{s=\infty}\left(cos\,\frac{2k\pi}{s+1}+i\,sin\,\frac{2k\pi}{s+1}\right)$$

$$k=0, 1, 2, 3, ...\ in\ inft.$$

Jest więc tu miejsc skupienia nieskończenie dużo. Tworzą one mnogość pochodną P', która się mieści całkowicie na okręgu koła zakreślonego na płaszczyźnie (x) z punktu $x = 0$ promieniem $= 1$ i jest mnogością wszędzie zagęszczoną na tym okręgu. (Mittag Leffler. l. c.)

Widzieliśmy już-to w teoryi mnogości liniowych, już-to tu, rozważając mnogości w n-krotnych obszarach, że pochodna P' mnogości P wszędzie zagęszczonej w danym obszarze przedstawia się jako sam dany obszar. Z tego widzimy, że całkowity, ograniczony lub nieograniczony obszar uważać trzeba często za mnogość. Taki obszar nazywają także krótko „continuum" albo obszarem ciągłym a definiują go jako mnogość w ten sposób:

Definicya. *a) Mnogość o takiej własności, że wszystkie punkta leżące w otoczeniu dowolnego jej punktu należą do mnogości, tworzą „continuum". Punkta, w otoczeniu których znajdują się i punkta należące do mnogości i punkta nie wliczające się do niej tworzą granicę obszaru ciągłego (ograniczenie obszaru; art. 32., I—V., art. 35.)*

b) „Continuum" P takie, że z dowolnego jego miejsca $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ do innego dowolnego jego miejsca $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$ przejść można przechodząc przez same miejsca należące do tegoż „continuum" nazywa się zwartem, albo obszarem zwartym.

44. Moc pierwsza i druga (ostatnia) mnogości w obszarze n-krotnym. Przejdźmy do nowego punktu w rozważaniu mnogości zawartych w n-krotnym obszarze $(n > 1)$ a to do pytania: jakiej mocy mogą być takie mnogości?

W tym celu zauważmy obszar n zmiennych rzeczywistych:

$$(a) \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0\ldots1,\ 0\ldots1,\ \ldots,\ 0\ldots1),$$

do którego — jak to widzieliśmy — wszystkie obszary n-krotne przywieść można. Równocześnie z nim niech będzie dany obszar jednej zmiennej t:

$$(b) \qquad (t) = (0\ldots1).$$

Podług art. 42. tw. II. jest obszar (b) równoważny z mnogością (d) wszystkich liczb niewymiernych d zawartych w $(0\ldots1)$, a więc

$$(b') \qquad (t) \sim (d).$$

Podobnie — gdy $(d_1), (d_2), \ldots, (d_n)$ mają takie samo znaczenie jak (d), są więc również mnogościami wszystkich liczb niewymiernych zawartych w $(0\ldots1)$ — możemy położyć:

$$(c) \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim [(d_1), (d_2), \ldots, (d_n)],$$

gdyż każda zmienna x_ν w (a) wypełnia zakres $(0\ldots1)$.

Według równoważności (c) będzie każdemu miejscu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ odpowiadało pewne oznaczone miejsce $(d_1, d_2, ..., d_n)$, którego spółrzędne $d_1, d_2, ..., d_n$ są albo wszystkie różne albo są częściowo lub nawet wszystkie sobie równe. Niechże

$$d_1=(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, ...), \quad d_2=(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}, ...),$$
$$d_3=(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}, \alpha_{43}, ...), ..., \quad d_n=(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \alpha_{3n}, ...)$$

będą rozwinięciami liczb $d_1, d_2, ..., d_n$ na ułamki łańcuchowe, nieskończone [art. 15.]. Z temi n niewymiernemi liczbami można zawsze sprządz $(n+1)^{\text{szą}}$ liczbę niewymierną postaci

$$d=(\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1n}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{2n}, \alpha_{31}, ...).$$

Ale i naodwrót gdy mamy dowolną liczbę $d=(\beta_1, \beta_2, \beta_3, ...)$ wyjętą z mnogości (d) to można z nią w jednoznaczny sposób sprządz n liczb niewymiernych tak utworzonych:

$$d_1=(\beta_1, \beta_{n+1}, \beta_{2n+1}, ...), \quad d_2=(\beta_2, \beta_{n+2}, \beta_{2n+2}, ...),$$
$$d_3=(\beta_3, \beta_{n+3}, \beta_{2n+3}, ...), ... \quad d_n=(\beta_n, \beta_{2n}, \beta_{3n}, ...).$$

Z tego wynika równoważność

$$[(d_1), (d_2), ..., (d_n)] \backsim (d),$$

a z niej — wskutek (b) i (c) — równoważność $(x_1, x_2, ..., x_n) \backsim (t)$. To znaczy:

I. *Ograniczony n-krotny obszar* $(x_1, x_2, ..., x_n)=(0...1, 0...1, ..., 0...1)$ *da się całkowicie i jednoznacznie sprządz z obszarem* $(t)=(0...1)$ *jednej zmiennej w ten sposób, że miejscu* $(x'_1, x'_2, ... x'_n)$ *jedno całkiem oznaczone miejsce* t', *a miejscu* t' *naodwrót nie inne miejsce, ale* $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ *odpowiadać będzie*)*.

Ponieważ w jednokrotnych obszarach mamy tylko mnogości pierwszej, lub drugiej mocy, więc — na podstawie tw. I. — wnioskujemy:

II. *Wszelkie mnogości, jakie określić można w obszarach n-krotnych są — jak liniowe — albo mocy pierwszej, albo mocy drugiej (tertium non datur).*

A. Miejsca $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ zdefiniowane tak, że spółrzędne x'_α przybierają wartości pewnych mnogości przeliczalnych, tworzą mnogość pierwszej mocy. To udowodni się w ten sam sposób, jak przeliczalność mnogości rozważanej w C art. 40.

---

*) Co się tyczy bliższych szczegółów podporządkowywania w ciągły sposób punktów odcinka (0...1) punktom kwadratu (0...1, 0...1) por. G. Peano „*Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*". *Mathematische Annalen.* T. 36. str. 157. (1890). D. Hilbert „O odwzorowywaniu ciągłem linii na kawałku powierzchni". Prace matematyczno-fizyczne. T. 5. str. 13. (1894).

B. Gdy w obszarze *n*-krotnym mieści się przeliczalna mnogość, to znajdują się w nim punkta, które do tej mnogości nie należą.

C. Jak w liniowym obszarze mnogość takich odcinków, że dwa sąsiednie nie mają wspólnych punktów, daje się liczyć, tak — podobnie — w obszarze (x, y) mnogość powierzchni, a w obszarze (x, y, z) mnogość brył tak ułożonych, że względem jednej, dowolnej z nich wszystkie inne leżą całkowicie zewnątrz niej, jest mocy pierwszej.

Przerobiwszy dane obszary na (0...1, 0...1) lub (0...1, 0...1, 0...1) prowadzić można dalej dowód tak, jak w art. 40. *A*.

45. Obszar punktów pozostający po wydzieleniu przeliczalnej mnogości. W teoryi funkcyi ma ważne zastosowanie następujące twierdzenie:

Gdy w dowolnym obszarze (x, y) dwóch zmiennych rzeczywistych mieści się przeliczalna mnogość P miejsc $(x'\ y')$, to, po wyłączeniu z tego obszaru tych miejsc, pozostałe punkta tworzą c o n t i n u u m zwarte.

Rozbierzmy przypadek najmniej korzystny, przyjmując, że mnogość P jest w danym obszarze wszędzie zagęszczona. Połączmy dwa punkta s_1, s'_1 do mnogości nie należące, dowolną linią l, leżącą całkowicie w obszarze; na niej znajdować się będzie skończona albo nieskończona ale przeliczalna ilość punktów mnogości P. a w dowolnie małym odcinku znajdują się niezawodnie punkta, które do P nie należą. Z tych punktów zauważmy punkta $s_1, s_2, s_3, \ldots$ po sobie na l następujące i tak położone, że proste odcinki $s_1 s_2$, $s_2 s_3$, ... całkowicie się mieszczą w obszarze.

Między s_1 a s_2 niech się na l mieszczą punkta mnogości P, Przez punkta s_1, s_2 da się przeprowadzić nieskończona ilość kół

$$(a) \qquad (s_1\ s_2)_1,\ (s_1\ s_2)_2,\ (s_1\ s_2)_3,\ \ldots$$

Środki tych kół leżeć będą na prostej (połowiącej odcinek $s_1 s_2$ i prostopadłej do niego). Na tej prostej można wyznaczyć taki odcinek $\alpha\beta$, że w nim leżące punkta występują w s z y s t k i e jako środki t y c h k ó ł (a), które się całkowicie mieszczą w obszarze. Z tych kół pewna ich ilość, zawsze przeliczalna, przechodzić będzie przez punkta mnogości P. Ich środki tworzą więc na $\alpha\beta$ także mnogość przeliczalną, a stąd wynika, że na $\alpha\beta$ znajdują się punkta π (art. 42.) do nich nie należące. Zatoczmyż z punktu π koło przechodzące przez s_1, s_2 i zastąpmy łukiem tego koła odcinek linii l_1 łączący s_1 z s_2, to mamy w tym łuku przejście z punktu s_1 do s_2 z ominięciem punktów mnogości. Tak samo postąpić trzeba z częściami $s_2 s_3$, $s_3 s_4$, ... linii l, jeżeli się w nich punkta mnogości zawierają. Przez to uzyskujemy przejście z punktu s_1 do s'_1 z ominięciem punktów mnogości P, a że te punkta (s_1, s'_1) są dowolne, więc twierdzenie jest udowodnione.

To samo da się udowodnić o obszarze jednej urojonej zmiennej $x=u+vi$, gdy go zamienimy na obszar dwóch rzeczywistych zmiennych (u, v).

To samo wreszcie da się przenieść i do obszaru (x, y, z) trzech rzeczywistych zmiennych. Potrzeba tylko w dowodzie koła $(s_1 s_2)_1$, $(s_1 s_2)_2$ ... zastąpić kulami przez punkta s_1, s_2 przechodzącemi*).

46. Pojęcie granicy dolnej i górnej. Przejdźmy teraz do nowego pojęcia, jakie się wyłania z teoryi mnogości.

Niech nieskończona mnogość P miejsc wyjętych (rzeczywistych) x' zawiera się w ograniczonym obszarze $(0...1)$. Gdy punkt 1 ani do wyjętych miejsc nie należy, ani nie jest miejscem skupienia mnogości, to punkta ξ, których spółrzędne są większe od wszystkich x', mieścić się będą w pewnem continuum $(G...1)$, a punkt G, $0 < G < 1$, będzie punktem x' albo najbliższym punktu 1 — $\left[\text{jak n. p. punkt } \frac{1}{2} \text{ w mnogości } P=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right),\right]$ — albo będzie punktem skupienia mnogości a więc także punktem całkiem oznaczonym $\Bigg[$jak n. p. punkt $\frac{1}{2}$ w przypadku, gdy

$$P=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}-\frac{1}{5}, \frac{1}{2}-\frac{1}{6}, \ldots\right)\Bigg].$$

W szczególności może sam punkt 1 być takim punktem G.

---

*) Rozprawy i dzieła, podług których w tekście opracowano naukę o mnogościach miejsc określonych, są:

M. Cantor. „*Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*". *Mathematische Annalen:* T. 15., str. 1.—7., T. 17., str. 355.—358., T. 20., str. 113—121., T. 21., str. 51—58, i str. 545—591., T. 23. str. 453—488. (W francuskim języku okazały się artykuły tego autora traktujące o tym samym przedmiocie w „*Acta mathematica*").

M. Cantor. „*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*". Crelle. Journal T. 84. str. 242—258.

Bendixson J. „*Quelques théorèmes de la théorie des ensembles*". *Acta mathematica.* T. 2. str. 415—429. G. Mittag-Leffler: „*Sur la représentation analytique des functions monogenes uniformes d'une variable independante*". *Acta mathematica.* T. 4. str. 1—79., szczególnie §. 3. str. 57—63.

Du Bois Reymond. „*Allgemeine Functionen-Theorie*".

Podobnie, gdy punkt 0 ani nie należy do określonych, ani nie jest miejscem skupienia mnogości P, to continuum miejsc ξ' takich, że ξ' są mniejsze od wszelkich x', będzie $(0...g)$, a g, $(0 < g < 1)'$ być może albo pierwszem miejscem określonem w P, albo punktem skupienia tej mnogości. I tu w szczególnych przypadkach mógłby sam punkt 0 być takim punktem g.

Gdy zważymy dalej, że wszelki ograniczony lub nieograniczony liniowy obszar da się zamienić na $(0...1)$, to stąd wnioskujemy, że każda liniowa nieskończona mnogość posiada koniecznie punkta G, g. W szczególności mogą być: $G = +\infty$, $g = -\infty$, albo jeden z tych punktów leżeć może w nieskończoności. Te punkta G, g określamy w ten sposób:

Definicya: Gdy dana jest w ograniczonym obszarze liniowym nieskończona mnogość miejsc określonych (zdefiniowanych) x', to zawsze znajdziemy całkiem oznaczony punkt G o takiej własności, że zdefiniowanych x' większych od G nie ma, a w obszarze $(G-\delta...G)$, gdzie δ jest dowolnie małą dodatnią ilością, znajdują się miejsca określone — (przynajmniej jedno). — Sam punkt G do określonych albo należy, albo nie należy.

Podobnie musi się znaleść punkt g o takiej własności, że g jest mniejsze od wszelkich określonych x', a w obszarze $(g...g+\delta)$, gdzie δ znowu dowolnie małą dodatnią jest ilością, miejsca x' — (przynajmniej jedno) — zawsze się znajdują. Gdy G, g nie są miejscami skupienia, to w $(G...G-\delta)$ i w $(g...g+\delta)$ mieszczące się miejsca x' są-to: samo miejsce G i samo miejsce g.

Przechodząc do nieograniczonego obszaru możemy mieć w szczególnych przypadkach: $G = +\infty$, $g = -\infty$, albo $G = +\infty$ przy skończonem g, albo wreszcie $g = -\infty$ przy skończonem G.

Punkt G nazywamy górną granicą, a punkt g dolną granicą miejsc wyjętych. $G = \infty$ określamy w ten sposób, że między wyjętemi x' znajdują się i takie, które okazują się $> A$, choć A jest dowolnie dużą dodatnią ilością. Analogicznie określa się $g = -\infty$.

Z tych uwag wynika:

I. *Nieskończona mnogość miejsc określonych rzeczywistych (nieskończona mnogość określonych liczb rzeczywistych) musi koniecznie posiadać pewną górną i dolną granicę. Granice te do zdefiniowanych miejsc (liczb) nie potrzebują należeć.*

Pd. 1. Mnogość wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich ma górną granicę $G = +\infty$, dolną zaś $g = 0$.

Pd. 2. Wszystkie ułamki właściwe wymierne mają dolną granicę $g = 0$, a górną $G = 1$, przytem granice te do mnogości zdefiniowanej nie należą.

Pd. 3. Mając szereg $s=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots$, w którym $lim\, \alpha_n=0$, połóżmy $R_{n,t}=|\alpha_n+\alpha_{n+1}+\cdots+\alpha_{n+t}|$, $R'_{n,t}=|\alpha_n|+|\alpha_{n+1}|+\cdots+|\alpha_{n+t}|$ z dowolnem t. Obierzmy dowolnie małą dodatnią ilość δ i przyjmijmy, że przy dostatecznie dużem skończonem n spełnia się albo nierówność

(α) $R_{n,t}<\delta$, albo nierówność (β) $R'_{n,t}<\delta$.

W razie nierówności (α) leżą wszystkie miejsca $R_{n,t}$, $t=0, 1, 2, \ldots$ (aż do $t=\omega$) w obszarze $(0\ldots\delta)$, a więc i $R_0=\lim\limits_{t=\infty} R_{n,t}$ musi się znajdować w tym obszarze, a szereg s jest w danym porządku zbieżnym, (choć bezwarunkowa zbieżność nie jest wykluczona). R_0 jest tu punktem skupienia miejsc $R_{n,t}$ a w szczególnych przypadkach może być górną lub dolną granicą tych miejsc.

Gdy się nierówność (β) sprawdza, to mamy $R'_{n,0}<R'_{n,1}<R'_{n,2}, \ldots$ a wszystkie te miejsca leżą znowu w obszarze $(0\ldots\delta)$. Lecz ich punkt skupienia $\lim\limits_{t=\infty} R'_{n,t}$ występuje tu zawsze jako górna granica. Szereg s jest bezwarunkowo zbieżnym, [art. 5. tw. IX. i art. 28. tw. IV.].

47. Rzut stereograficzny płaszczyzny liczbowej na kulę. Niektórzy autorowie, jak C. Neumann*), F. Klein**) mają w zwyczaju zamiast nieograniczonej płaszczyzny urojonej zmiennej, którą teraz dla wygody nazwiemy $z=x+yi$, używać kuli, która z płaszczyzną (z) w taki sposób jest złączona: Jej środek jest w punkcie $z=0$, jej promień $=1$, tak, że jej równanie — gdy osie $\xi\xi'$, $\eta\eta'$ wpadają w osie: pierwszorzędną xx, drugorzędną yy, a oś $\zeta\zeta'$, jest prostopadłą do płaszczyzny (z) — ma postać:

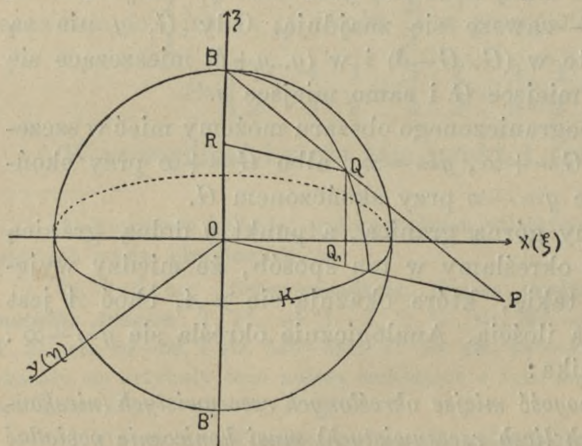


Fig. 9.

(α) $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$.

Na płaszczyźnie (z), którą za równikową kuli uważamy, obierzmy dowolny punkt $P=x+yi$ (fig. 9.) i połączmy go z biegunem B ($\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=1$) prostą, to prosta ta raz i tylko raz przebije kulę w punkcie Q. Jego spółrzędne niech będą ξ, η, ζ.

*) *Vorlesungen ü. Riemanns Theorie der Abelschen Integrale* — Lipsk 1884. (Wydanie drugie).

**) *Vorlesungen ü. das Ikosaëder und Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* — Lipsk 1884. str. 32.

Połączmy punkta P, 0, prostą i poprowadźmy $QQ_1 \parallel 0B$ dalej $QR \# Q_1 0$, to mamy:

$$0P:RQ=0B:RB.$$

Połóżmy $0P=r=\sqrt{x^2+y^2}$, $RQ=0Q_1=\varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ i zauważmy, że $0B=1$, $RB=1-\zeta$, to mamy:

$$(\beta) \qquad \frac{r}{\varrho}=\frac{1}{1-\zeta}, \text{ albo } r=\frac{\varrho}{1-\zeta}.$$

Lecz, gdy $P=x+yi=r1_\varphi$, to także $Q_1=\xi+\eta i=\varrho 1_\varphi$, a wtedy w miejsce równania (β) położyć możemy:

$$(A) \qquad z=x+yi=(\xi+\eta i)/(1-\zeta), \text{ stąd}$$

$$(\gamma) \qquad x=\xi/(1-\zeta),\ y=\eta/(1-\zeta), \text{ gdzie } \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.$$

Ze związków (γ) dostajemy $(1-\zeta)^2(x^2+y^2)=\xi^2+\eta^2$, a gdy to wstawimy w równanie (α), mieć będziemy:

$$(1-\zeta)^2(x^2+y^2)=1-\zeta^2=(1-\zeta)(1+\zeta); \text{ stąd}$$

$$(\delta) \qquad \zeta=\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

Wstawiając tę wartość w związki (γ) dostaniemy

$$(\delta') \qquad \xi=\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \qquad \eta=\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

W (δ) i (δ') mamy wyrażone spółrzędne punktu Q przez x, y punktu P.

Gdy P przebiega całą płaszczyznę (z) zewnątrz koła K, to Q przebiega całą tą półkulę, na której leży biegun B. Sam biegun B odpowiada punktowi $z=\infty$.

Gdy punkt P wejdzie w wnętrze koła K i w niem poruszać się będzie, to tej części płaszczyzny (z) odpowie półkula druga z biegunem B' na sobie.

Cała kula może więc zastąpić całą płaszczyznę nieograniczoną (z); dowolnemu punktowi $x+yi$ tej płaszczyzny odpowiada jeden tylko punkt na kuli o spółrzędnych obliczonych w (δ) i (δ').

Naodwrót każdemu punktowi (ξ, η, ζ) kuli odpowie na płaszczyźnie (z) jeden tylko punkt $z=x+yi$ przedstawiony wzorem (A), a o spółrzędnych x, y obliczonych w (γ).

Takie sprzężenie kuli (jej punktów Q) z jej płaszczyzną równikową (z jej punktami P) nazywa się jej rzutem stereograficznym albo stereograficzną projekcyą — na płaszczyznę.

Biorąc kulę w miejsce płaszczyzny (z) ma się tę korzyść, że tu punkt B zastępujący punkt w nieskończoności nie zachowuje się wyjątkowo w stosunku do wszelkich innych punktów kuli.

Uwagi. — I. ***Rzutem stereograficznym każdego koła leżącego na kuli jest również koło.*** Niech bowiem na kuli leży koło K (fig. 10) o środku c na kuli. Poprowadźmy przez c południk λ, a dalej — co na stereograficzny rzut koła nie będzie mieć wpływu — obróćmy kulę około jej osi BB' tak, aby południk λ padł na płaszczyznę papieru (fig. 11.).

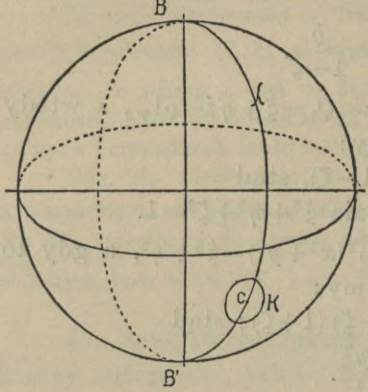


Fig. 10.

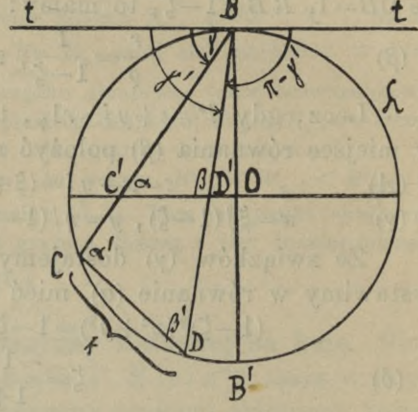


Fig. 11.

Rzucając koło K z bieguna B dostaniemy skośny, kołowy stożek CBD, a stereograficzną projekcyą koła $K=(CD)$ będzie płaska zamknięta krzywa $(C'D')$ leżąca na stożku.

Narysujmy w B styczną t do koła λ, to dostajemy:

$$\sphericalangle\gamma=\sphericalangle\alpha=\sphericalangle\beta'\,;\ \sphericalangle(\pi-\gamma')=\sphericalangle\beta=\sphericalangle\alpha', \text{ a więc:}$$

$$\sphericalangle\alpha=\sphericalangle\beta' \text{ i } \sphericalangle\beta=\sphericalangle\alpha'.$$

Z tego wynika, że płaszczyzna równikowa $C'D'$ przecina dwie rodzące stożka BC, BD leżące w jego płaszczyźnie osiowej pod takimi samymi kątami, jak płaszczyzna CD danego koła (CD), a wskutek tego krzywa $(C'D')$, będzie również kołem *c. b. d. d.* To określamy, mówiąc: ***Przez rzut stereograficzny powstaje pokrewieństwo kołowe kuli z płaszczyzną.***

II. Z równania (A) przez różniczkowanie dostajemy:

$$dz=[(1-\zeta)(d\xi+d\eta i)+(\xi+\eta i)\,d\zeta]/(1-\zeta)^2;\ \text{stąd}$$

$$|dz|^2=\frac{[(1-\zeta)d\xi+\xi d\zeta]^2+[(1-\zeta)\,d\eta+\eta\,d\zeta]^2}{|1-\zeta|^4},$$

a po wykonaniu działań w liczniku i uwzględnieniu związku $\xi d\xi+\eta\,d\eta+\zeta d\zeta=0$, który z (α) wynika, mieć będziemy:

$$|dz|^2=(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)/|1-\zeta|^4, \text{ a więc}$$

$$(\varepsilon)\qquad |dz|=(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)^{1/2}/|1-\zeta|^2.$$

Lecz $(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)^{1/2}=d\sigma$ uważać można za element łuku poczynający się w punkcie (ξ, η, ζ) a należący do dowolnej krzywej, leżącej na kuli i przechodzącej przez punkt (ξ, η, ζ).

$|dz|$ przedstawia wtedy odpowiedni element łuku ds na płaszczyźnie (z). Przy tych oznaczeniach napisze się związek (ε) w postaci:

$$(1)\qquad ds=d\sigma/|1-\zeta|^2.$$

Gdy ds', $d\sigma'$ będą elementami innych dwóch odpowiednich łuków takich, że ds' poczyna się znowu w punkcie z, a $d\sigma'$ w punkcie odpowiednim (ξ, η, ζ), to także będzie:

(2) $$ds' = d\sigma' / |1 - \zeta|^2.$$

Ze związków (1), (2) wynika:

(3) $$ds : ds' = d\sigma : d\sigma'.$$

Połóżmy $ds = PP_1$, $ds' = PP_2$, $d\sigma = QQ_1$, $d\sigma' = QQ_2$, to także oddalenia P_1P_2 (na płaszczyźnie), Q_1Q_2 (na kuli) będą odpowiednimi sobie łukowymi elementami ds'', $d\sigma''$; przy tem wyniknie i tu:

(4) $$ds : ds'' = d\sigma : d\sigma'',$$

a z rezolucyj (3) i (4) mieć będziemy:

(5) $$ds : ds' : ds'' = d\sigma : d\sigma' : d\sigma'',$$

co znaczy: *W rzucie stereograficznym każde dwa nieskończenie małe trójkąty (płaski i sferyczny) odpowiadające sobie są podobne.*

Każde pokrewieństwo o tej własności nazywamy cząsteczkowem.

III. Z tej własności wypływa, że dwie przecinające się krzywe pod kątem φ w punkcie Q na kuli, dają w stereograficznych swych rzutach dwie krzywe przecinające się w odpowiednim punkcie P również pod kątem φ. Tę okoliczność określają mówiąc: *Przez rzut stereograficzny powstaje pokrewieństwo izogonalne.*

IV. Pokrewieństwo kuli z płaszczyzną nie przestanie być kołowem, cząsteczkowem, a w dalszym ciągu izogonalnem, gdy płaszczyzna (z) — przestając być równikową — pozostaje równoległą do pierwotnego swego położenia.

Sprzężenie punktów kuli z płaszczyzną we wszystkich takich położeniach obejmują również wspólną nazwą: rzutu stereograficznego, określając rzut o równikowej płaszczyźnie (z) — jeżeli go odróżnić potrzeba — jako rzut stereograficzny równikowy.*)

---

*) Literatura. Gauss: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden....* *Werke*. T. 4. str. 189. — N. Herz: *Lehrbuch der Landkartenprojection.* Lipsk 1885. — G. Holzmüller: *„Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandschaften“.* (Lipsk 1882).

CZĘŚĆ II.

O FUNKCYACH WYMIERNYCH.

ROZDZIAŁ IV.

O wymiernych całkowitych funkcyach jednej zmiennej.

48. Określenia funkcyi wymiernej całkowitej $f(x)$ jednej zmiennej. Jej rozwinięcia, ciągłość i pochodne. Jedną z najprostszych form, w których stałe ilości połączone być mogą arytmetycznie z nieograniczoną zmienną x, jest funkcya wymierna całkowita m^{go} stopnia:

$$(1) \qquad f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_m, \quad a_0\neq 0.$$

Spółczynniki a_0, a_1, ..., a_m są — bez różnicy — rzeczywistemi lub urojonemi stałemi.

Przedewszystkiem widać odrazu, że $f(x)$ dla wszelkich skończonych wartości x*) jest zawsze skończoną, a na dowolnem miejscu skończonem x przybiera — jak zaraz się przekonamy — jedną i tylko jedną wartość; jest więc — jak się wyrażają — funkcyą jednoznaczną, albo jednowartościową.

Jeżeli $f(x)$ swoim jednym kształtem miałoby w pewnem miejscu x przedstawić kilka wartości, to to zjawisko mogłoby być spowodowane jedynie różną definicyą tego samego miejsca x. Otóż dowolne miejsce x można zawsze przedstawić w postaci $x=a+r.1_\varphi$, gdzie a jest dowolnie obranym punktem w skończo-

---

*) Zmienną x wchodzącą w $f(x)$ nazywają często argumentem tej funkcyi.

ności, a r i φ podług niego wybrano. Lecz to samo miejsce może mieć postać $x = a + r.1_{\varphi+2\pi}$, która wskazuje, że wychodząc z punktu x okrążono punkt a posuwając punkt na płaszczyźnie (x) po pewnej zamkniętej linii i wrócono znowu do tego samego punktu x. Kształt krzywej zależy od zmieniania się promienia podczas ruchu; po zupełnem okrążeniu przybiera ten promień znowu wartość r. Dodajniki funkcyi $f(x)$ mają postać $a_{m-\lambda}.x^{\lambda}$ a gdy w nich połóżymy za zmienną x jej kształt pierwszy a potem jej kształt drugi, to wskutek $(a+r.1_{\varphi})^{\lambda} = (a+r.1_{\varphi+2\pi})^{\lambda}$, (bo λ są całkowite i >0), nie będzie miało dokonane okrążenie wpływu na dodajniki a tem samem i na funkcyą.

Podług art. 34. tw. I. okrążą się punkt $x=\infty$, okrążając punkt $x=0$ w ujemnym kierunku po pewnem kole. Niechże to koło ma promień R, a punkt x leżący na niem niech będzie $R.1_{\varphi}$, to po okrążeniu punktu $x=\infty$ dostaniemy $x = R.1_{\varphi-2\pi}$. Lecz i tu także jest $(R.1_{\varphi})^{\lambda} = (R.1_{\varphi-2\pi})^{\lambda}$ co stwierdza, że i okrążenie punktu $x=\infty$ nie może zmienić wartości funkcyi. Funkcya $f(x)$ jest więc jednoznaczną.

Obrawszy dowolne miejsce x leżące w skończoności, zastąpmy w funkcyi zmienną x przez $(x+h)$, gdzie h jest dowolnym dodatkiem; dostaniemy wtedy: $f(x+h) = a_0(x+h)^m + a_1(x+h)^{m-1} + \ldots + a_m$, a — po uporządkowaniu podług potęg h — mieć będziemy:

$$(2) \qquad f(x+h) = f(x) + f'(x).\frac{h}{1!} + f''(x).\frac{h^2}{2!} + \ldots + f^{(m)}(x).\frac{h^m}{m!}, \quad \text{gdzie}$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = m.a_0x^{m-1} + (m-1)\,a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} \\ f''(x) = m(m-1)\,a_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)\,a_1x^{m-3} + \ldots + 2.1.a_{m-2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f^{(m)}(x) = m!\,a_0 \end{array} \right.$$

Wzór (2) nazywa się rozwinięciem funkcyi $f(x)$ w otoczeniu miejsca x.

Uważmy w (3) x za nieograniczoną zmienną, to wtedy $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(m)}(x)$ są funkcyami wymiernemi całkowitemi i nazywają się pochodnemi funkcyi $f(x)$; $f'(x)$ nazywa się pierwszą, $f''(x)$ drugą, ..., $f^{(m)}(x)$ m^{ta} pochodną. Są one odpowiednio stopni: $(m-1)^{\text{go}}$, $(m-2)^{\text{go}}$, ...; ostatnia pochodna m^{ta} jest stopnia zerowego, czyli jest ilością stałą. Dalsze pochodne są już zerami.

Pierwsza pochodna $f'(x)$ tworzy się z samej funkcyi $f(x)$ w ten sposób, że w $f(x)$ — opuszczając wolny wyraz a_m — za każde x^s kładziemy $s.x^{s-1}$. Podobnie i $f^{(\nu)}(x)$ tworzy się z $f^{(\nu-1)}(x)$ przez opuszczenie wolnego wyrazu w $f^{(\nu-1)}(x)$ i podstawienie $s.x^{s-1}$ za x^s. Z równania (2) dostajemy z drugiej strony:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+f''(x).\frac{h}{2!}+\ldots+f^{(m)}(x).\frac{h^{m-1}}{m!},$$

a stąd wynika:

$$(4)\qquad f'(x)=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

którem to równaniem określona pierwsza pochodna na miejscu x przedstawia się jako granica ilorazu $[f(x+h)-f(x)]:h$, dla $h=0$.*) Granica ta, niezależna od tego, w jaki sposób na płaszczyźnie (x), h do zera zdąża, pozostaje zawsze ta sama $=f'(x)$. Z tej samej równości (2) dostajemy dalej

$$(5)\qquad |f(x+h)-f(x)|=|h|.\left|f'(x)+f''(x).\frac{h}{2!}+\ldots+f^{(m)}(x).\frac{h^{m-1}}{m!}\right|.$$

Zażądajmy, aby — gdy δ jest dowolnie małą dodatnią obraną ilością — spełniała się nierówność

$$(\alpha)\qquad |f(x+h)-f(x)|<\delta.$$

Temu — podług (5) — zadość uczynią wszelkie bardzo małe $|h|$ nie przechodzące pewnej dowolnie małej dodatniej granicy δ_1. A więc, gdy $|h|<\delta_1$, to wtedy i (α) się spełnia, a to określamy mówiąc, że *funkcya* $f(x)$ *jest funkcyą ciągłą swego argumentu.*

Gdy daną funkcyę $f(x)=a_m+a_{m-1}x+\ldots+a_1x^{m-1}+a_0x^m$ uważać chcemy za pochodną pewnej funkcyi całkowitej wymiernej $F(x)$, to $F(x)$ łatwo utworzymy z $f(x)$ zmieniając każde x^s na $x^{s+1}/(s+1)$, nie wyłączając x^0 i dodając jeszcze stałą dowolną c. Dostaniemy więc:

$$F(x)=a_mx+a_{m-1}\frac{x^2}{2}+\ldots+a_1\frac{x^m}{m}+a_0\frac{x^{m+1}}{m+1}+c.$$

Funkcyę $F(x)$ nazywają pierwotną, albo całkową funkcyą funkcyi $f(x)$. Widocznie przy jakiejkolwiek wartości c jest $f(x)$ pochodną funkcyi $F(x)$.

Oznaczenia: $F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}F(x)$ i $F(x)=\int f(x)dx+c$, jakich się w rachunku różniczkowym i całkowym używa, przyjmujemy tu i w dalszym ciągu jako wiadome.

Rozwijając funkcyę $f(x)$ w otoczeniu miejsca danego x_0 podług wzoru (2) mamy

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\ldots+\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}h^m,$$

*) Analogicznie można także określić:

$$f^{(\nu)}(x)=\lim_{h=0}\frac{f^{(\nu-1)}(x+h)-f^{(\nu-1)}(x)}{h},\quad \nu=2,3,\ldots,m.$$

gdzie h jest dowolnym dodatkiem. Połóżmyż $x_0+h=x$, gdyż przy dowolnem h można dowolne x w tej formie wyrazić, to mamy $h=x-x_0$ i

$$(6)\qquad f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m.$$

Stąd wynika:

I. *Funkcya wymierna całkowita m^{go} stopnia jest w zupełności oznaczona, gdy na pewnem danem miejscu x_0 jej argumentu znamy jej wartość i wartości m jej pochodnych.*

Aby ją sprowadzić do formy $a_m+a_{m-1}x+\ldots+a_0x^m$ dość jest rozwinięcie (6) podług potęg x uporządkować.

W szczególności, gdy $x_0=0$ mamy: $f(x)=a_m+a_{m-1}x+a_{m-2}x^2+$

$$+\ldots+a_0x^m=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

a stąd wynika, że spółczynniki a_m, a_{m-1}, ..., a_0 mają po porządku znaczenie $f(0)$, $\frac{f'(0)}{1!}$, ..., $\frac{f^{(m)}(0)}{m!}$.

Pd. 1. Wyznaczyć funkcyę m^{go} stopnia taką, że na miejscu $x=1$ ma wartość 1, a jej pochodne wszystkie mają również wartość 1?

Pd. 2. Wyznaczyć funkcyę 3^{go} stopnia posiadającą na miejscu $x=1$ wartość 4, a pochodne po porządku są o wartościach 5, 8, 6?

Pd. 3. Jaką jest funkcya 5^{go} stopnia o wartości $f(i)=1$, a o wartościach pochodnych $f'(i)=f''(i)=f'''(i)=0$, $f^{(4)}(i)=24$, $f^{(5)}(i)=120$?

Gdy mamy iloczyn skończonej ilości funkcyj całkowitych wymiernych $f(x)=f_1(x).f_2(x).f_3(x)...$ to on jest również funkcyą całkowitą wymierną. Połóżmy w nim $(x+h)$ za x, to mieć będziemy:

$$f(x+h)=[f_1(x)+\frac{f'_1(x)}{1!}h+\ldots].[f_2(x)+\frac{f'_2(x)}{1!}h+\ldots].[f_3(x)+\frac{f'_3(x)}{1!}h+\ldots]\ldots$$

Pochodną funkcyi $f(x)$ jest spółczynnik przy h w rozwinięciu $f(x+h)$ podług potęg h. Ten spółczynnik wprost z prawej strony wynika w postaci:

$$f'_1(x)[f_2(x).f_3(x)\ldots]+f'_2(x)[f_1(x).f_3(x)\ldots]+f'_3(x)[f_1(x).f_2(x)\ldots]+\ldots$$

Jest on zarazem pochodną $f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}[f_1(x).f_2(x).f_3(x)....]$ danego iloczynu.

49. Wartości funkcyi w nieograniczonym obszarze jej zmiennej x. Zajmijmy się teraz dokładnie wartościami funkcyi $f(x)$ rozpostartemi w całym, nieograniczonym obszarze jej argumentu. Napiszmy $f(x)$ w formie:

$$f(x)=a_0x^m\left[1+\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2}+\ldots.+\frac{a_m}{a_0}\frac{1}{x^m}\right]$$ i połóżmy:

$1+\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2}+\ldots.+\frac{a_m}{a_0}\frac{1}{x^m}=\sigma$. Według art. 20 [II^0] mamy:

$$(a)\qquad |\sigma| \geqq \left|1 - \left|\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_m}{a_0}\frac{1}{x^m}\right|\right|.$$

Kładąc dla krótkości $|x| = \xi$, mamy dalej [art. 20., I⁰]:

$$(b)\qquad \left|\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_m}{a_0}\frac{1}{x^m}\right| \leqq \left|\frac{a_1}{a_0}\right|\frac{1}{\xi} + \left|\frac{a_2}{a_0}\right|\frac{1}{\xi^2} + \dots + \left|\frac{a_m}{a_0}\right|\frac{1}{\xi^m},$$

a gdy z liczb dodatnich $|a_1/a_0|$, $|a_2/a_0|$, ..., $|a_m/a_0|$ największa ma wartość α, to zachodzi nierówność:

$$(c)\qquad \left|\frac{a_1}{a_0}\right|\frac{1}{\xi} + \left|\frac{a_2}{a_0}\right|\frac{1}{\xi^2} + \dots + \left|\frac{a_m}{a_0}\right|\frac{1}{\xi^m} < \alpha\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \dots + \frac{1}{\xi^m}\right) = \frac{\alpha}{\xi^m}\cdot\frac{\xi^m - 1}{\xi - 1}.$$

Przytem bardzo jest łatwo znaleść taką dostatecznie dużą wartość $\xi = r$, że dla niej, a więc i dla wszystkich $\xi > r$, będzie prawa strona tej nierówności dodatnim ułamkiem właściwym. Taką wartością r jest n. p. $\alpha + 1$; mamy bowiem wtedy:

$$\frac{\alpha}{\xi^m}\cdot\frac{\xi^m - 1}{\xi - 1} = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^m}\,\frac{(\alpha+1)^m - 1}{\alpha} = \frac{(\alpha+1)^m - 1}{(\alpha+1)^m} < 1.$$

Dla takich $\xi \geqq r = \alpha + 1$ będzie także — wskutek (c) i (b) — wyraz $\left|\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \dots + \frac{a_m}{a_0}\frac{1}{x^m}\right|$ ułamkiem właściwym dodatnim, a gdy go w (a) zastąpimy ułamkiem większym $\frac{\alpha}{\xi^m}\frac{\xi^m - 1}{\xi - 1}$, to otrzymamy: $|\sigma| > 1 - \alpha(\xi^m - 1)/\xi^m(\xi - 1)$. Opuśćmy tu jeszcze po prawej stronie dodatnią ilość $\alpha/\xi^m(\xi - 1)$, to mamy $|\sigma| > 1 - \alpha/(\xi - 1)$, a że

$$|f(x)| = |a_0|\xi^m . |\sigma|, \quad \text{więc}$$

$$(d)\qquad |f(x)| > |a_0|\xi^m\left(1 - \frac{\alpha}{\xi - 1}\right) \text{ przy } \xi \geqq r = \alpha + 1.$$

Mając nierówność (d) przyjmijmy, że chodzi nam o te miejsca x, na których $f(x) = c$, gdzie c dowolną skończoną jest wartością. Utworzywszy $|c|$, możemy — gdy w obszarze $|x| > r$ nie jest jeszcze statecznie $|a_0|\xi^m\left(1 - \frac{\alpha}{\xi - 1}\right) > |c|$ — znaleść takie $r_1 > r$, że dla $\xi > r_1$ już się to ciągle sprawdzać będzie. Wtedy jednak w tym obszarze $|x| > r_1$ statecznie także okazywać się będzie $|f(x)| > |c|$, a to znaczy:

I. *Biorąc jakąkolwiek skończoną ilość c możemy na płaszczyźnie (x) odgraniczyć zawsze taki obszar $|x| > r_1$, że się w nim okazuje statecznie $|f(x)| > |c|$;* albo:

Szukając miejsc x, na których ma być $f(x) = c$, można się ograniczyć do pewnego dobrze oznaczonego obszaru $|x| < r_1$; poza nim bowiem nie znajdziemy miejsc dających $f(x) = c$.

Z nierówności (d) wynika dalej:

II. *Jeżeli w obszarze nieograniczonym argumentu x mają się znajdować miejsca dające $f(x)=0$, to one wszystkie mieszczą się w kole $|x|<\alpha+1$.*

Przez bezustanne zwiększanie ξ — poczynając od $\xi=\alpha+1$, — można dalej w (d) uczynić ułamek $\frac{\alpha}{\xi-1}$ dowolnie małym (dodatnim) $=\varepsilon$; dla $\xi=\infty$ staje się on zerem. Wskutek tego przy bardzo wielkich $|x|$ mamy:

$$(e) \qquad |f(x)|\geqq|a_0|.|x|^m(1+\varepsilon),$$

a że, gdy $\xi=\infty$, staje się $\sigma=1$, więc mamy $\lim\limits_{|x|=\infty}\frac{f(x)}{a_0x^m}=1$; to znaczy:

III. *Funkcya $f(x)$ staje się nieskończonością równocześnie z argumentem w ten sposób, że iloraz $[f(x):a_0x^m]$ zdąża do granicy $=1$.*

Pd. 1. Okazać, że miejsca x, na którychby funkcya

$$f(x)=4x^5-x^4+3x^3-2x^2+x-4$$

mogła przybrać wartość $=0$, mieszczą się wszystkie w kole o promieniu $=2$, a o środku w $x=0$, a wszystkie miejsca, na którychby ta funkcya mogła mieć wartość c, gdzie $|c|=100$, w obszarze $|x|<3$.

Pd. 2. Jak duże koło zakreślone z punktu $x=0$ jako środka, zawiera wszystkie możliwe miejsca x dające $f(x)=4x^4-(2+3i)x^3-3x^2+(3+4i)=0$ a jak duże koło (o środku $x=0$) zawiera wszystkie miejsca x dające $|f(x)|=110$?

50. Zasadnicze twierdzenie algebry. Miejsca zerowe (pierwiastki). W artykule poprzedzającym (tw. II.) podaliśmy obszar $|x|<\alpha+1$, w którym miejsc spełniających równanie $f(x)=0$ (jeżeli istnieją) szukać wyłącznie trzeba. Czy jednak w istocie takie miejsca istnieją, trzeba dopiero zbadać. W tym celu obierzmy dowolne, leżące w skończoności miejsce x, na którem jest $f(x)\neq 0$ i dodajmy do x dowolny dodatek h. Według art. 48 mamy wtedy:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(m)}(x)}{m!}h^m.$$

Stąd, gdy położymy dla krótkości:

$$\frac{f'(x)}{1!f(x)}=c_1,\quad \frac{f^{(2)}(x)}{2!f(x)}=c_2,\quad \ldots,\quad \frac{f^{(m)}(x)}{m!f(x)}=c_m,$$

dostaniemy:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)}=1+c_1h+c_2h^2+\ldots+c_mh^m.$$

Przyjmijmy dla ogólności, że na miejscu x jest:

$$f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(\nu-1)}(x)=0,$$

a $f^{(\nu)}(x)\neq 0$, to wtedy $c_1=c_2=\ldots=c_{\nu-1}=0$, $c_\nu\neq 0$, a

$$(a) \qquad \frac{f(x+h)}{f(x)}=1+c_\nu h^\nu+c_{\nu+1}h^{\nu+1}+\ldots+c_mh^m.$$

Gdy $c_\nu = |c_\nu| 1_\varphi$, a położymy $h^\nu = -\varrho^\nu 1_{-\varphi}$ z dowolnem $\varrho > 0$, to $h = h_s = \varrho . 1_{\frac{\pi-\varphi}{\nu}} . 1_{\frac{2s\pi}{\nu}}$, $s = 0, 1, ..., \nu-1$, [art. 22], a $c_\nu . h^\nu = -|c_\nu| \varrho^\nu$.

Dalsze dodajniki rozwinięcia (a) będą kształtu:

$c_{\nu+1} h_s^{\nu+1} = c^{(s)}{}_{\nu+1} . \varrho^{\nu+1}$, $c_{\nu+2} h_s^{\nu+2} = c^{(s)}{}_{\nu+2} . \varrho^{\nu+2}$, ..., $c_m h_s^m = c_m^{(s)} . \varrho^m$,

gdzie spółczynniki przy $\varrho^{\nu+1}$, $\varrho^{\nu+2}$, ... ϱ^m są-to ilości stałe o wartościach zależnych od użytego h_s, co przypomina znaczek (s) u góry. W miejsce (a) dostajemy więc:

$$(b) \qquad \frac{f(x+h_s)}{f(x)} = 1 - |c_\nu| \varrho^\nu + c^{(s)}{}_{\nu+1} \varrho^{\nu+1} + ... + c_m^{(s)} \varrho^m.$$

Gdy ϱ obierzemy tak małe, że $|c_\nu| \varrho^\nu = u$ jest ułamkiem (dodatnim) właściwym, a więc $\varrho < 1/\sqrt[\nu]{|c_\nu|}$, to $1 - |c_\nu| \varrho^\nu$ jest ilością dodatnią tak, że $|1 - |c_\nu| \varrho^\nu| = 1 - |c_\nu| \varrho^\nu$. Skutkiem tego — uważając w (b) wyraz $(1 - |c_\nu| \varrho^\nu)$ za pierwszy dodajnik po prawej stronie — możemy położyć:

$$\left| \frac{f(x+h_s)}{f(x)} \right| \leqq 1 - |c_\nu| \varrho^\nu + |c^{(s)}{}_{\nu+1}| \varrho^{\nu+1} + ... + |c^{(s)}{}_m| \varrho^m, \text{ albo}$$

$$\left| \frac{f(x+h_s)}{f(x)} \right| \leqq 1 - |c_\nu| \varrho^\nu \left(1 - \left| \frac{c^{(s)}{}_{\nu+1}}{c_\nu} \right| \varrho - ... - \left| \frac{c^{(s)}{}_m}{c_\nu} \right| \varrho^{m-\nu} \right).$$

Gdy dalej wartości $\varrho < 1/\sqrt[\nu]{|c_\nu|}$ ograniczymy jeszcze — jeżeli potrzeba — tak, aby wyrażenie $1 - \left| \frac{c^{(s)}{}_{\nu+1}}{c_\nu} \right| \varrho - ... - \left| \frac{c^{(s)}{}_m}{c_\nu} \right| \varrho^{m-\nu}$ było ułamkiem (dodatnim) właściwym v, to mamy:

$$\left| \frac{f(x+h_s)}{f(x)} \right| \leqq 1 - u.v. \text{ Stąd widać, że:}$$

$$(c) \qquad |f(x+h_s)| < |f(x)|,$$

jeżeli tylko ϱ nie przechodzi pewnej górnej granicy ϱ_1, obliczonej podług wyżej podanych warunków.

Gdy ϱ rośnie od zera nie dochodząc do ϱ_1, to miejsca $x+h_0$, $x+h_1$, ..., $x+h_{\nu-1}$ oddalają się od punktu x po prostych wychodzących z punktu x, a nachylonych do osi pierwszorzędnej pod kątami:

$$\frac{\pi-\varphi}{\nu}, \quad \frac{\pi-\varphi+2\pi}{\nu}, \quad \frac{\pi-\varphi+4\pi}{\nu}, \quad ..., \quad \frac{\pi-\varphi+2(\nu-1)\pi}{\nu}.$$

Podczas tego ruchu nierówność (c) statecznie się utrzymuje. To znaczy:

I. *Gdy na miejscu x leżącem w skończoności mamy $f(x) \neq 0$, to można zawsze z tego miejsca x poprowadzić w jedną stronę przynajmniej* *jedną prostę o takim kierunku, że na niej we wszystkich punktach x' dostatecznie bliskich punktu x będzie $|f(x)| > |f(x')|$.*

Zatrzymując taki jeden punkt x' i przekonawszy się, że $f(x') \neq 0$ jest, możemy tu znowu zastosować to samo twierdzenie. Znajdziemy więc przynajmniej jedną, całkiem oznaczoną prostę wychodzącą z x' o takiej własności, że w jej punktach x'' dostatecznie bliskich punktu x' będzie znowu statecznie $|f(x')| > |f(x'')|$.

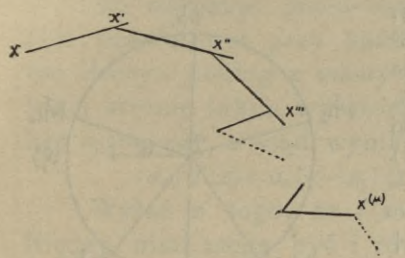


Fig. 12.

Gdy tak dalej postępować będziemy, dostaniemy na płaszczyźnie (x) wielobok $x x' x'' x''' \ldots x^{(\mu)} \ldots$ (fig. 12.) o tej własności że punkt ruchomy ξ przebiegając po nim począwszy od punktu x daje czem raz mniejsze $|f(\xi)|$. Podczas tego ruchu musi się wreszcie $|f(\xi)|$, a więc i $f(\xi)$ stać żerem [art. 46. Pd. 1.], a tę wartość przybierze w punkcie x_1, który leżyć musi w skończoności, gdyż miejsca x dające $f(x)=0$ leżą w obszarze $|x| < \alpha + 1$. To znaczy:

II. *W płaszczyźnie argumentu x dowolnej, wymiernej, całkowitej funkcyi $f(x)$ znajduje się koniecznie jedno przynajmniej miejsce x_1, dające $f(x_1)=0$. Takie miejsce nazywa się pierwiastkowem, albo zerowem, albo wreszcie wprost pierwiastkiem funkcyi $f(x)$, [równania $f(x)=0$].*)*

Pd. 1. Funkcya:

$$f(x) = 32 - i x + 5 x^2 + 10 i x^3 - 10 x^4 - 5 i x^5 + x^6$$

daje w otoczeniu punktu $x = i$ rozwinięcie $f(i+h) = 32 + i \,.\, h^5 + h^6$, gdzie $32 = f(i)$. Stąd:

$$\frac{f(i+h)}{f(i)} = 1 + \frac{i}{32} \,.\, h^5 + \frac{1}{32} \,.\, h^6.$$

Mamy tu $c_5 = \frac{i}{32} = \frac{1}{32} \,.\, 1_{\frac{\pi}{2}}$, $\left(\nu = 5,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$; połóżmyż:

$h^5 = -\rho^5 \,.\, 1_{-\frac{\pi}{2}}$, $h_s = \rho \,.\, 1_{\frac{\pi}{10}} \,.\, 1_{\frac{2s\pi}{5}}$, $s = 0, 1, 2, 3, 4$, to wtedy będzie:

---

*) Dowód podany w tekscie jest Cauchy'ego. Por. *Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique (Iere partie* 1821*)* str. 329, Por. także 3 dowody Gaussa *Werke* T. III. Dowód 1szy str. 3. i nast. Dowód 2gi str. 33. i nast. Dowód 3ci str. 59. i nast.

Z współczesnych prac por.: P. Gordan: *„Über den Fundamentalsatz der Algebra"* (uproszczenie 2go dowodu Gaussa). *Math. Ann.* T. 10. str. 572 (1876). — E. Holst. *„Beweis des Satzes, dass eine jede algebr. Gleichung eine Wurzel hat." Acta math.* T. 8. str. 155 (1886). — F. Mertens. *Der Fundamentalsatz der Algebra. Monatshefte f. M. u. Phys.* T. 3. str. 293.

$$\frac{f(i+h_s)}{f(i)}=1-\frac{1}{32}\rho^5+\frac{1}{32}\cdot\left(1_{\frac{\pi}{10}}\cdot 1_{\frac{2s\pi}{5}}\right)^6\rho^6, \text{ i}$$

$$\left|\frac{f(i+h_s}{f(i)}\right|<1-\frac{1}{32}\rho^5+\frac{1}{32}\rho^6, \text{ przytem } \rho<\sqrt[5]{32}=2.$$

Napiszmy dalej $\left|\frac{f(i+h_s)}{f(i)}\right|<1-\frac{1}{32}\rho^5(1-\rho)$ to gdy założymy $\rho<1$, dostaniemy

$$|f(i+h_s)|<|f(i)|$$

Zatoczmyż z punktu $x=i$ jako środka koło (ρ) o dowolnym promieniu $\rho<1$, a z punktu i poprowadźmy prostą, która z osią pierwszorzędną tworzy kąt 18^0 (fig. 13.), to ona przetnie koło (ρ) w punkcie $i+h_0$. Inne punkta $i+h_1$, $i+h_2$, $i+h_3$, $i+h_4$ utworzą razem z punktem $i+h_0$ wierzchołki regularnego pięcioboku wpisanego w koło (ρ).

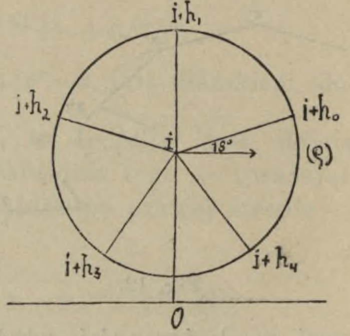


Fig. 13.

Pd. 2. Rozwinięcie funkcyi $f(x)=1-60x^2+100x^3-45x^4-12x^5+10x^6$ ma w otoczeniu punktu $x=1$ postać $f(1+h)=-6+45h^4+48h^5+10h^6$. Okazać, że: $|f(1+h_s)|<|f(1)|$, $s=0, 1, 2, 3$, gdy $h_s=\rho\cdot 1_{\frac{2s\pi}{4}}$, $\rho\leqq\frac{1}{2}$.

Okazawszy, że dowolna całkowita wymierna funkcya zawsze jeden pierwiastek posiada, możemy teraz dalej dowieść:

III. *Każda funkcya wymierna całkowita m^{go} stopnia posiada m, i tylko m pierwiastków.*

Dana funkcya niech będzie:

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m;$$

jednym jej pierwiastkiem niech będzie x_1, tak, że:

$$f(x_1)=a_0x_1{}^m+a_1x_1{}^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x_1+a_m=0$$

Stąd wynika, że możemy położyć:

$$f(x)=f(x)-f(x_1)=a_0(x^m-x_1{}^m)+a_1(x^{m-1}-x_1{}^{m-1})+\ldots+a_{m-1}(x-x_1)$$

Po wyłączeniu czynnika $(x-x_1)$ dostaniemy:

$$f(x)=(x-x_1)\,[a_0(x^{m-1}+x^{m-2}x_1+\ldots+x_1{}^{m-1})+$$
$$+a_1(x^{m-2}+x^{m-3}x_1+\ldots+x_1{}^{m-2})+\ldots+a_{m-2}(x+x_1)+a_{m-1}],$$

gdzie drugi czynnik po prawej stronie jest funkcyą całkowitą wymierną $(m-1)^{go}$ stopnia. Nazwijmy ją $f_{m-1}(x)$, to mamy:

$$(\alpha) \qquad f(x)=(x-x_1)\,f_{m-1}(x)$$

Lecz funkcya $f_{m-1}(x)$ ma — według tw. II. — znowu jeden pierwiastek x_2. Stosując więc do niej to samo, co do funkcyi $f(x)$, dostaniemy:

$$(\beta) \qquad f_{m-1}(x)=(x-x_2)\,f_{m-2}(x),$$

gdzie $f_{m-2}(x)$ jest funkcyą stopnia $(m-2)^{go}$.

Posługując się tak dalej twierdzeniem II. otrzymamy po porządku:

$$(\gamma)\ f_{m-2}(x)=(x-x_3)f_{m-3}(x), \dots\ (\delta)\ f_2(x)=(x-x_{m-1})f_1(x),$$
$$(\varepsilon)\ f_1(x)=(x-x_m)f_0(x),$$

gdzie funkcya $f_0(x)$ jako funkcya zerowego stopnia jest pewną stałą ilością c. Z równań (α), (β), (γ), ..., (δ), (ε) dostajemy:

$$f(x)=c(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_m)$$

To wskazuje przedewszystkiem, że takim iloczynem można $f(x)$ przedstawić przy każdej dowolnej wartości x. Porządkując ten iloczyn podług x mamy cx^m jako wyraz zawierający x^m. Po lewej stronie takim wyrazem jest a_0x^m. Musi więc przy każdem x być $a_0x^m=cx^m$, a stąd wynika: $c=a_0$, i ostatecznie:

$$(a_1)\ f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m) \text{ przy każdem } x.$$

Widać z tego, że $f(x)$ ma m pierwiastków x_1, x_2, x_3, ..., x_m. Między nimi mogą być i równe sobie. Gdy mamy $x_1=x_2=\dots=x_\nu$ $(\nu \leq m)$, to x_1 nazywa się ν-krotnie powtarzającym się, albo ν-krotnym pierwiastkiem. Każdy ν-krotny pierwiastek liczy się ν razy.

Załóżmy, że dana funkcya $f(x)$, stopnia m staje się zerem jeszcze na $(m+1)^{\text{szem}}$ miejscu; wtedy a_0 musi być $=0$, bo czynniki $(x-x_s)$ zawarte w (a_1) temu żądaniu zadość uczynić nie mogą. Lecz, gdy $a_0=0$, to mamy do czynienia już z funkcyą $(m-1)^{go}$ stopnia: $(a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots+a_m)$, a o niej założyć analogicznie trzeba, że jest zerem na m miejscach. To założenie pociągnie za sobą warunek: $a_1=0$, a idąc w tem wnioskowaniu dalej, dojdziemy do: $a_0=a_1=\dots=a_m=0$, co wskazuje, że przy uczynionem założeniu musiałoby być identycznie: $f(x)=0$, przez co twierdzenie III. mamy już w zupełności udowodnione*).

Dalej wnosimy, że dana funkcya m^{go} stopnia da się tylko w jeden sposób rozłożyć na czynniki $(x-x_s)$, $s=1, 2, \dots, m$, które nazywamy czynnikami pierwiastkowymi. Z tego naodwrót wynika:

IV. *Funkcya wymierna całkowita jest zupełnie wyznaczona, gdy znamy jej miejsca pierwiastkowe i jeszcze jej wartość na miejscu ξ różnem od tych miejsc.*

Gdy bowiem miejsca pierwiastkowe mają być x_1, x_3, ..., x_r i powtarzać się odpowiednio ν_1, ν_2, ..., ν_r razy, to żądana funkcya $f(x)$ ma postać:

$$c'(x-x_1)^{\nu_1}.(x-x_2)^{\nu_2}\dots(x-x_r)^{\nu_r}.$$

---

*) O ile wyznaczenie punktów pierwiastkowych x_1, x_2, ... x_m na płaszczyźnie (x) prowadzi do twierdzeń geometrycznych (łączy analizę z geometryą) por. F. Lucas *„Nouvelle methode d'Analyse..."* *Comptes Rendus* T. 75. str. 1250.

Dla wartości $x=\xi$ mamy dostać:

$c'(\xi-x_1)^{\nu_1}(\xi-x_2)^{\nu_2}\dots(\xi-x_r)^{\nu_r}=c$. Stąd obliczywszy c', dostaniemy:

$$(b_1)\qquad f(x)=c\cdot\frac{(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\dots(x-x_r)^{\nu_r}}{(\xi-x_1)^{\nu_1}(\xi-x_3)^{\nu_2}\dots(\xi-x_r)^{\nu_r}}$$

Pd. 3. Gdy $f(x)=A_0+A_1x+\dots+A_nx^n$ ma mieć pierwiastki

$$-1,-\frac{1}{p},-\frac{1}{p^2},\dots,-\frac{1}{p^{n-1}},\ p\mp 1,$$

a na miejscu $x=1$ ma mieć wartość

$$2(1+p)(1+p^2)\dots(1+p^{n-1}),$$

to podług (b_1) — po wszystkich skróceniach dostajemy:

$$(a)\qquad f(x)=(1+x)(1+px)(1+p^2x)\dots(1+p^{n-1}x),\ A_0=1.$$

Okazać, że spółczynniki A_t znalezionej funkcyi przedstawić można formami

$$A_t=\prod_{r=0}^{t-1}\left(\frac{1+p+p^2+\dots+p^{n-r-1}}{1+p+p^2+\dots+p^r}\right),\quad t=1,2,\dots,n$$

W razie $p=1$, dostajemy $A_t=\binom{n}{t}$, a więc

$$f(x)=(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+x^n,$$

jak to z elementów matematyki wynika [Eisenstein: *Crelle J.* T. 28. str. 44—48].

Iloczyn samych czynników pierwiastkowych:

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)=\frac{f(x)}{a_0}$$
$$=x^m-(x_1+x_2+\dots+x_m)x^{m-1}+(x_1x_2+\dots+x_{m-1})x_mx^{m-2}+\dots+$$
$$+(-1)^mx_1.x_2\dots x_m,$$

a stąd widzimy: W każdej funkcyi m^{go} stopnia o spółczynniku $=1$ przy x^m jest spółczynnik

$$(c_1)\quad\begin{cases}\text{przy } x^{m-1} \text{ odjemną sumą pierwiastków } =-S(x_1)\\ \text{,, } x^{m-2} \text{ dodatnią sumą iloczynów co 2 pierwiastków } =+S(x_1x_2)\\ \text{,, } x^{m-3} \text{ odjemną sumą iloczynów co 3 pierwiastków } =-S(x_1x_2x_3)\\ \vdots\\ \text{,, } x^0 \text{ iloczynem pierwiastków z czynnikiem } (-1)^m.\end{cases}$$

51. Wielokrotne pierwiastki. Pierwiastki $=0$ i $=\infty$. Wartość funkcyi dla $x=\infty$. Przyjmijmy, że dana funkcya m^{go} stopnia ma wszystkie spółczynniki $a_0, a_1, \dots, a_m$ rzeczywiste, a jej pierwiastki są: $x', x'', \dots x^{(m)}$. Zmieńmy wszystkie pierwiastki na sprzężone: $x'_0, x''_0, \dots, x_0^{(m)}$, to w $f(x)$ wszystkie spółczynniki $a_0, a_1, \dots, a_m$

mają przejść na sprzężone (art. 17. Pd. 2). Lecz, że są rzeczywiste, więc się przez to nie zmienią, a stąd wynika, że gdy $f(x)$ posiada ν-krotny urojony pierwiastek $x^{(\alpha)}$ to posiadać także musi i ν-krotny pierwiastek sprzężony $x_0^{(\alpha)}$, czyli:

I. *Funkcya $f(x)$ o samych rzeczywistych spółczynnikach może posiadać pierwiastki rzeczywiste, a pierwiastki urojone są w niej zawsze parami sprzężone.*

Niech równanie $f(x)=0$ ma ν-krotny pierwiastek x_1. Rozwijając $f(x)$ w otoczeniu tego pierwiastka dostajemy:

$$f(x)=f(x_1)+\frac{f'(x_1)}{1!}(x-x_1)+\frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2+\ldots+\frac{f^{(\nu-1)}(x_1)}{(\nu-1)!}(x-x_1)^{\nu-1}+$$
$$+\frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!}(x-x_1)^{\nu}+\ldots+\frac{f^{(m)}(x_1)}{m!}(x-x_1)^{m}.$$

Lecz $f(x_1)=0$, a czynnik $(x-x_1)$ musi się dać wyłączyć z $f(x)$ w potędze ν^{tej}. Stąd wynika, że być musi:

$$f'(x_1)=0,\ f''(x_1)=0,\ \ldots,\ f^{(\nu-1)}(x_1)=0.$$

To znaczy:

II. *Gdy równanie $f(x)=0$ ma pierwiastek x_1 powtarzający się ν — a nie więcej — razy, to x_1 jest równocześnie pierwiastkiem pochodnych równań $f'(x)=0$, $f''(x)=0$, ..., $f^{(\nu-1)}(x)=0$, a $f^{(\nu)}(x)\neq 0$. Naodwrót, gdy okazuje się $f(x_1)=f'(x_1)=\ldots=f^{(\nu-1)}(x_1)=0$, a $f^{(\nu)}(x_1)\neq 0$, to x_1 jest ν-krotnym pierwiastkiem równania $f(x)=0$.*

Napiszmy $f(x)=(x-x_1)^{\nu}\varphi(x)$, to stąd wynika $f'(x)=(x-x_1)^{\nu-1}\varphi_1(x)$, gdzie $\varphi(x)$ i $\varphi_1(x)$ nie są zerami dla $x=x_1$. Z tego wnosimy:

II*a*. *Pierwiastek ν-krotny jest $(\nu-1)$-krotnym równania pochodnego, a w równaniach $f(x)=0$, $f'(x)=0$, $f''(x)=0$, ..., $f^{(\nu-1)}(x)=0$ powtarza się pierwiastek x_1 odpowiednio razy ν, $\nu-1$, $\nu-2$, ..., 1.*

W równaniu:

$$(a)\qquad f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0$$

znamy już z art. poprzedniego znaczenie ilorazów $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_m}{a_0}$. Z nich dostajemy:

$$\frac{a_{m-1}}{a_m}=-\frac{S(x_1.x_2\ldots x_{m-1})}{x_1.x_2\ldots x_m}=-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_m}\right)=-S\left(\frac{1}{x_1}\right)$$
$$\frac{a_{m-2}}{a_m}=+\frac{S(x_1.x_2\ldots x_{m-2})}{x_1.x_2\ldots x_m}=+\left(\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{m-1}}.\frac{1}{x_m}\right)=+S\left(\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}\right)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$\frac{a_0}{a_m}=(-1)^m\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}...\frac{1}{x_m}$, a stąd wynika, że równanie

(b) $\varphi(z)=a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+...+a_1 z+a_0=0.$

ma pierwiastki $z_1=\frac{1}{x_1}$, $z_2=\frac{1}{x_2}$,..., $z_m=\frac{1}{x_m}$.

Mając ten związek między równaniami (a) i (b) przyjmijmy, że w równaniu (a) mamy ν początkowych spółczynników (przy najwyższych potęgach niewiadomej) o wartości zero. W równaniu (b) mamy wtedy ν spółczynników końcowych (przy najniższych potęgach niewiadomej) o wartości zero i — jak łatwo wywnioskować — ν pierwiastków o wartości zero. Niech te pierwiastki będą $z_1=z_2=...=z_\nu=0$, to ponieważ $x_1=\frac{1}{z_1}$, $x_2=\frac{1}{z_2}$, ..., $x_\nu=\frac{1}{z_\nu}$, mamy w równaniu (a) ν pierwiastków x_1, x_2, ..., x_ν nieskończonościami. Stąd twierdzenie:

III. *Gdy w równaniu* m^{go} *stopnia* ν *spółczynników* ($\nu=1, 2, ..., m$) *przy najwyższych potęgach niewiadomej znika, to równanie posiada wtedy* ν *pierwiatków nieskończenie wielkich.*

Gdy c ma dowolną skończoną stałą wartość, a równanie $f(x)=c$ napiszemy w formie:

(c) $a_0 x^m+a_1 x^{m-1}+...+a_{m-1}x+(a_m-c)=0,$

to wnioskujemy odrazu (art. poprzedzający tw. III):

IV. *Funkcya wymierna całkowita* m^{go} *stopnia przybiera na* m *i tylko* m *miejscach dowolnie daną skończoną wartość.*

Gdy $c=\infty$, a równanie (c) napiszemy w tym przypadku w formie:

$$\lim_{|c|=\infty} c.\left[\frac{a_0}{c}.x^m+\frac{a_1}{c}x^{m-1}+...+\frac{a_{m-1}}{c}x+\frac{a_m}{c}-1\right]=0,$$

dostaniemy równanie $\lim\limits_{|c|=\infty} c.\left[0.x^m+0x^{m-1}+...+0.x-1\right]=0$, które swym drugim czynnikiem wskazuje — podług tw. III. — m pierwiastków x nieskończenie wielkich. Stąd:

V. *Funkcya wymierna całkowita* m^{go} *stopnia staje się nieskończonością* m*-krotnie dla nieskończonej wartości swego argumentu.*

52. Wzór interpolacyjny Lagrange'a. Uogólnienie wzoru Lagrange'a. Twierdzenie III. (art. 50.) o ograniczeniu ilości pierwiasków funkcyi m^{go} stopnia do liczby m, można także tak wyrazić:

I. *Gdy funkcya m^{go} stopnia ma znikać na więcej, niż m miejscach, to musi być identycznie zerem, (jej wszystkie spółczynniki muszą być zerami).*

Takie wysłowienie prowadzi do dalszych, bardzo ważnych własności funkcyj całkowitych wymiernych.

Prócz funkcyi $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$ niech będzie dana jeszcze druga funkcya $g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$ niższego stopnia $n<m$.

Przyjmijmy, że obie funkcye na $(m+1)$ miejscach:

$$(\alpha) \qquad x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{m+1}$$

między któremi mogą się także znajdować grupy miejsc równych, przybierają obie odpowiednio wartości:

$$(\beta) \qquad y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{m+1}.$$

(Do równych sobie miejsc (α) odnoszące się wartości (β) będą również sobie równe). Tworząc różnicę:

$$f(x)-g(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-n-1}.x^{n+1}+(a_{m-n}-b_0)x^n+$$
$$+(a_{m-n+1}-b_1)x^{n-1}+\ldots+(a_m-b_n),$$

dostajemy w niej funkcyę wymierną, całkowitą m^{go} stopnia, która na $(m+1)$ miejscach (α) staje się zerem. Jest więc — według tw. I. — identycznie zerem, a to znaczy: $a_0=0$, $a_1=0$, ..., $a_{m-n-1}=0$; $a_{m-n}=b_0$, $a_{m-n+1}=b_1$, ..., $a_m=b_n$. Stąd twierdzenie:

II. *Taka funkcya wymierna całkowita m^{go} stopnia, która na $(m+1)$ danych miejscach x_1, x_2, ..., x_{m+1} przybiera wartości $g(x_1)$, $g(x_2)$, ..., $g(x_{m+1})$ funkcyi $g(x)$ niższego stopnia n, nie istnieje; jest ona wprost funkcyą $g(x)$. W szczególności $f(x)=c$, ilość stała, gdy $f(x)$ na $(m+1)$ miejscach przybiera wartość c. [$g(x)$ jest zerowego stopnia].*

Gdy $n=m$, a więc $g(x)$ jest stopnia m, a jest przytem daną oznaczoną funkcyą, to mamy twierdzenie:

III. *Gdy dwie funkcye m^{go} stopnia na miejscach x_1, x_2, ..., x_{m+1} przybierają równocześnie wartości dane y_1, y_2, ..., y_{m+1}, to są identyczne*).*

Z twierdzeń II. i III. wnioskujemy:

IV. *Funkcya wymierna całkowita m^{go} stopnia, która na $(m+1)$, danych miejscach ma przybierać dane wartości, jest tylko jedna. W szczególności może się ona zredukować do funkcyi niższego stopnia niż m, ale i wtedy także jest tylko jedną*

---

*) Cauchy „*Cours d'Analyse*" str. 87, 88.

Inaczej wyrazić to możemy w ten sposób:

V. *Funkcya wymierna całkowita m^{go} stopnia jest w zupełności wyznaczoną swemi $(m+1)$ wartościami $y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}$ na $(m+1)$ danych miejscach $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$. W szczególności może się w niej kilka spółczynników przy najwyższych potęgach argumentu okazać zerami.*

A. Przyjmijmy naprzód, że miejca (α) są wszystkie między sobą różne.

Jedną funkcyą przybierającą wartości (β) na tych miejscach jest:

$$(L) \qquad f(x) = X_1 y_1 + X_2 y_2 + \ldots + X_\lambda y_\lambda + \ldots + X_{m+1} y_{m+1}, \text{ gdzie}$$

$$X_\lambda = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{\lambda-1})(x-x_{\lambda+1})\ldots(x-x_{m+1})}{(x_\lambda-x_1)\ldots(x_\lambda-x_{\lambda-1})(x_\lambda-x_{\lambda+1})\ldots(x_\lambda-x_{m+1})}, \; \lambda=1, 2, \ldots, m+1$$

a że innej takiej funkcyi — według twierdzenia IV. — nie ma, więc formą (L) wyraża się funkcya żądana. Ta forma nazywa się interpolacyjną formą Lagrange'a*).

Ten wzgląd, że w szeregu (α) zawiera się każde x_λ tylko jednokrotnie, nie potrzebuje koniecznie pociągać za sobą jednokrotnego tylko powtarzania się pierwiastka x_λ w równaniu $y - y_\lambda = 0$.

Gdy funkcya $f(x)$ m^{go} stopnia jest dana, to ją naodwrót przedstawić można formą (L).

Lecz wyznaczając funkcyę z danych jej wartości na $(m+1)$ miejscach jej argumentu możemy czasem — jak to wspomnieliśmy w tw. IV. — dojść do funkcyi niższego stopnia niż m. Stąd i naodwrót wynika:

VI. *Daną funkcyę $f(x)$ nietylko m^{go}, ale także niższego stopnia można zawsze przedstawić formą (L) z danych $(m+1)$ jej wartości na $(m+1)$ danych różnych między sobą miejscach jej argumentu.*

Formę (L) można także w ten sposób wyprowadzić: Gdy żądana funkcya ma mieć postać $y = f(x) = a_m + a_{m-1}x + a_{m-2}x^2 + \ldots + a_1 x^{m-1} + a_0 x^m$, to mamy związek:

$$y - a_m - a_{m-1}x - \ldots - a_1 x^{m-1} - a_0 x^m = 0$$

a oprócz niego jeszcze $(m+1)$ równań:

$$y_\lambda - a_m - a_{m-1}x_\lambda - \ldots - a_1 x_\lambda^{m-1} - a_0 x_\lambda^m = 0, \; \lambda = 1, 2, 3, \ldots, m+1$$

Z tych $(m+2)$ równań liniowych, jednorodnych eliminując $1, -a_m, -a_{m-1}, \ldots, -a_1, -a_0$ dostajemy związek:

---

*) *Journal de l'école polytéchnique* 7ème et 8ème *cahier* (1812) str. 274—278 w „*Leçons élementaires sur les mathématiques données à l'école normale en 1795*“.

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} y, & 1, & x, & \ldots, & x^m \\ y_1, & 1, & x_1, & \ldots, & x_1{}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m+1} & 1, & x_{m+1}, & \ldots, & x_{m+1}^m \end{vmatrix} = 0.$$

Wskutek założenia, że wszystkie miejsca x_λ są między sobą różne nie mamy w tym wyznaczniku dwóch wierszy identycznych. Rozwijając go podług wyrazów pionu pierwszego, otrzymamy stąd — pozostawiając samo y z czynnikiem $= 1$ po jednej stronie — właśnie formę (L).

Jeżeli w (1) są $y_\lambda = g(x_\lambda)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, m+1$, a

$$g(x) = b_n + b_{n-1}x + \ldots + b_1 x^{n-1} + b_0 x^n, \quad n < m,$$

to odejmując w (1) od elementów pionu 1go b_n-krotne elementa pionu 2go, b_{n-1}-krotne elementa pionu 3go, ... b_0-krotne elementa pionu $(n+2)$go, dostaniemy:

$$\begin{vmatrix} y - g(x), & 1, & x, & \ldots, & x^m \\ 0, & 1, & x_1, & \ldots, & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & 1, & x_{m+1}, & \ldots, & x_{m+1}^m \end{vmatrix} = 0,$$

czyli wprost $y = g(x)$ [Tw. II. i VI].

Położmy $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m+1}) = \varphi(x)$, to pochodną tego iloczynu jest: $\varphi'(x) = \sum_{\lambda=1}^{m+1} (x-x_1)\ldots(x-x_{\lambda-1})(x-x_{\lambda+1})\ldots(x-x_{m+1})$. Dla $x = x_\lambda$ ma ona wartość:

$$\varphi'(x_\lambda) = (x_\lambda - x_1)\ldots(x_\lambda - x_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda+1})\ldots(x_\lambda - x_{m+1}),$$

a wskutek tego λ^{ty} spółczynnik X_λ w formie (L) napisać będzie można tak:

$$X_\lambda = \frac{\varphi(x)}{(x-x_\lambda)\,\varphi'(x_\lambda)}.$$

Sama forma (L) przybierze wtedy postać:

$$(L_1) \qquad f(x) = \varphi(x) \cdot \sum_{\lambda=1}^{m+1} \frac{y_\lambda}{(x-x_\lambda)\,\varphi'(x_\lambda)}.$$

Pd. 1. Szukając funkcyi $m$go stopnia, która na $(m+1)$ miejscach $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ ma odpowiednio wartości $x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots, x_{m+1}^\mu$, $\mu = 0, 1, \ldots, m$, dostaniemy $f(x) = x^m$,

Pd. 2. Funkcyą $m$go stopnia, która na miejscach x_λ, $(\lambda = 1, 2, \ldots, m+1)$ ma wartości:

$$y_\lambda = (x_\lambda - x_1)\ldots(x_\lambda - x_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda+1})\ldots(x_\lambda - x_{m+1}) \quad \text{jest}$$

$$f(x) = \sum_{\lambda=1}^{m+1} (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\lambda-1})(x-x_{\lambda+1})\ldots(x-x_{m+1}).$$

Jestto widocznie pochodna funkcyi $\varphi(x)$.

Pd. 3. Stosując formę Lagrange'a (L_1) do funkcyi $f(x)$ redukującej się do stałej c, t. j. do funkcyi stopnia zerowego (tw. VI.), mamy na dowolnych $(m+1)$ miejscach x_λ zawsze $y_\lambda = c$, a więc:

$$c = c\sum_{\lambda=1}^{m+1} \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{\lambda-1})(x-x_{\lambda+1})\dots(x-x_{m+1})}{\varphi'(x_\lambda)}, \quad \text{albo}$$

$$(\alpha) \qquad \sum_{\lambda=1}^{m+1} X_\lambda = 1.$$

J e s t t o z w i ą z e k i d e n t y c z n y, j a k i m i ę d z y s p ó ł c z y n n i k a m i X_λ k a ż d e j f o r m y L a g r a n g e'a z a w s z e z a c h o d z i. W z w i ą z k u t y m j e s t x c a ł k i e m d o w o l n e.

Pd. 4. Gdy $f(x) = x^n$ $(n \leq m)$, a do tej funkcyi, jako do funkcyi m^{go} stopnia redukującej się do x^n, zastosujemy formę L a g r a n g e'a, to mieć będziemy

$$(\alpha_1) \qquad x^n = \sum_{\lambda=1}^{m+1} x_\lambda^n . \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{\lambda-1})(x-x_{\lambda+1})\dots(x-x_{m+1})}{\varphi'(x_\lambda)}.$$

Położmy: $(x-x_1)\dots(x-x_{\lambda-1})(x-x_{\lambda+1})\dots(x-x_{m+1}) =$

$$(\beta_1) \qquad = x^m - A_{\lambda 1} x^{m-1} + A_{\lambda 2} x^{m-2} - \dots + (-1)^m A_{\lambda, m},$$

gdzie $A_{\lambda 1}, A_{\lambda 2}, \dots, A_{\lambda, m}$ mają takie znaczenie, jak sumy (c_1) w art. 50. z tą różnicą, że w nie tu wchodzą $x_1, x_2, \dots, x_{\lambda-1}, x_{\lambda+1}, \dots, x_{m+1}$, to wstawiając (β_1) w (α_1) i porządkując podług potęg x, dostajemy:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} x^n &= x^m \sum \frac{x_\lambda^n}{\varphi'(x_\lambda)} - x^{m-1} \sum \frac{A_{\lambda 1} x_\lambda^n}{\varphi'(x_\lambda)} + x^{m-2} \sum \frac{A_{\lambda 2} x_\lambda^n}{\varphi'(x_\lambda)} - \\ &\dots + x^n (-1)^{m-n} \sum \frac{A_{\lambda, m-n} \cdot x_\lambda^n}{\varphi'(x_\lambda)} \pm \dots + (-1)^m \sum \frac{A_{\lambda, m} x_\lambda^n}{\varphi'(x_\lambda)}. \end{aligned}$$

Z tej relacyi, która ma miejsce przy dowolnem x, dostajemy związki:

$$(\beta) \qquad \sum \frac{A_{\lambda, m-n} \cdot x_\lambda^n}{\varphi'(x_\lambda)} = (-1)^{m-n}, \quad n = 0, 1, \dots, m, \quad A_{\lambda, 0} = 1.$$

$$(\gamma) \qquad \sum \frac{A_{\lambda, m-n'} \cdot x_\lambda^n}{\varphi'(x_\lambda)} = 0, \quad n' \gtrless n, \quad \begin{matrix} n = 0, 1, \dots, m \\ n' = 0, 1, \dots, m \end{matrix}.$$

W (α), (β), (γ) odnoszą się sumy do $\lambda = 1, 2, \dots, m+1$.

Równania (β), (γ) są-to identyczne związki jakie zawsze zachodzą między $(m+1)$ dowolnemi danemi liczbami $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ między sobą różnemi.

Z (β) — gdy $n = m$ — mamy relacyę:

$$(\delta_1) \qquad \Sigma x_\lambda^m / \varphi'(x_\lambda) = 1,$$

a z (γ) zaś przy $n = m - \alpha$ i $n' = m$, dostajemy:

$$(\delta_2) \qquad \Sigma x_\lambda^{m-\alpha} / \varphi'(x_\lambda) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

Związki identyczne (δ_1), (δ_2) znane są pod nazwą f o r m E u l e r a.

Pd. 5. Sprawdzić związki (β), (γ), $[(\delta_1), (\delta_2)]$ dla liczb:
$[1, 2, 3, 4]$, $[+i, -i, +1, -1]$, $[a+bi, a-bi]$.

B. Gdy przyjmiemy teraz, że między miejscami $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ są i równe sobie, to już forma (L) nie będzie przydatną, tak, że funkcyę $y = f(x)$, m^{go} stopnia, która na miejscach x_λ, $\lambda = 1, 2, \dots,$

$r < (m+1)$ przybiera ν_λ-krotnie wartość y_λ, spełnia więc warunki:

(*a*) $f(x) - y_\lambda = (x - x_\lambda)^{\nu_\lambda} F_\lambda(x)$, gdzie $F_\lambda(x_\lambda)$ może być albo $=0$, albo $\neq 0$, $\Sigma \nu_\lambda = (m+1)$, trzeba będzie przedstawić odmienną formą.

Połóżmy w tym razie:

$$\frac{(x-x_1)^{\nu_1} \dots (x-x_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}} (x-x_{\lambda+1})^{\nu_{\lambda+1}} \dots (x-x_r)^{\nu_r}}{(x_\lambda-x_1)^{\nu_1} \dots (x_\lambda-x_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}} (x_\lambda-x_{\lambda+1})^{\nu_{\lambda+1}} \dots (x_\lambda-x_r)^{\nu_r}} = X_\lambda$$

i zauważmy funkcyę:

$$(L') \quad y = f(x) = \sum_{\lambda=1}^{r} X_\lambda . y_\lambda \left(1 + \frac{c_{\lambda 1}}{1!}(x-x_\lambda) + \dots + \frac{c_{\lambda,(\nu_\lambda - 1)}}{(\nu_\lambda - 1)!}(x-x_\lambda)^{\nu_\lambda - 1}\right)$$

o nieoznaczonych jeszcze spółczynnikach $c_{\lambda 1}$, $c_{\lambda 2}$, ... Jest ona stopnia m^{go} i spełnia już warunki $f(x_\lambda) = y_\lambda$, gdyż dla $x = x_\lambda$ jest $X_\lambda = 1$, $X_\alpha = 0$, $\alpha \gtrless \lambda$.

Ponieważ ze spółczynników X_α tylko X_λ nie zawiera czynnika $(x - x_\lambda)$, inne zaś X_α zawierają go wszystkie w potędze ν_λ, więc kładąc:

$$X_\lambda = 1 + \frac{U'_\lambda}{1!}(x-x_\lambda) + \dots, \quad X_\alpha = P_\alpha . (x-x_\lambda)^{\nu_\lambda} + \dots, \quad \alpha \gtrless \lambda,$$

otrzymamy z (L') w otoczeniu miejsca x_λ:

$$y - y_\lambda = y_\lambda \left[1 + \frac{U'_\lambda}{1!}(x-x_\lambda) + \dots\right]\left[1 + \frac{c_{\lambda 1}}{1!}(x-x_\lambda) + \dots\right] - y_\lambda + (x-x_\lambda)^{\nu_\lambda} P(x),$$

a aby ta różnica zadość uczyniła warunkowi (*a*) trzeba zażądać, aby dla $\lambda = 1, 2, \dots, r$ było:

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{U'_\lambda}{1!} + \frac{c_{\lambda 1}}{1!} = 0, \quad \frac{U''_\lambda}{2!} + \frac{U'_\lambda}{1!} . \frac{c_{\lambda 1}}{1!} + \frac{c_{\lambda 2}}{2!} = 0, \dots \\ & \dots \frac{U_\lambda^{(\nu_\lambda - 1)}}{(\nu_\lambda - 1)!} + \frac{U_\lambda^{(\nu_\lambda - 2)}}{(\nu_\lambda - 2)!} \frac{c_{\lambda 1}}{1!} + \dots + \frac{c_{\lambda,(\nu_\lambda - 1)}}{(\nu_\lambda - 1)!} = 0. \end{aligned} \right.$$

Z tych równań oblicza się $c_{\lambda 1}$, $c_{\lambda 2}$, ..., $\lambda = 1, 2, \dots, r$. Funkcya (L') w ten sposób utworzona spełnia już wszystkie warunki (*a*), a że taka funkcya jest tylko jedna, więc forma (L') w którą już wstawiono spółczynniki $c_{\lambda, s}$ obliczone z (*b*) jest żądaną formą.

Ma ona postać:

$$(L') \qquad y = \sum_{\lambda=1}^{r} \overline{X}_\lambda y_\lambda .$$

Połóżmy $[(x-x_1)^{\nu_1} \dots (x-x_r)^{\nu_r}] = \varphi(x)$, a

$$[(x_\lambda - x_1)^{\nu_1} \dots (x_\lambda - x_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}} (x_\lambda - x_{\lambda+1})^{\nu_{\lambda+1}} \dots (x - x_r)^{\nu_r}] = K_\lambda,$$

to formę (L') można będzie także tak napisać:

$$(L_1') \; f(x)=\varphi(x)\sum_{\lambda=1}^{r}\frac{1}{(x-x_\lambda)^{\nu_\lambda}}\frac{y_\lambda}{K_\lambda}\left[1+\frac{c_{\lambda_1}}{1!}(x-x_\lambda)+\ldots+\frac{c_{\lambda,(\nu_\lambda-1)}}{(\nu_\lambda-1)!}(x-x_\lambda)^{\nu_\lambda-1}\right]$$

Pd. 6. Utworzyć funkcyę, która
na 3-krotnem miejscu $x=1$ ma mieć wartość $y_1=1$
„ 2- „ „ $x=2$ „ „ „ $y_2=2$
„ 1- „ „ $x=3$ „ „ „ $y_3=3$.

Mamy tutaj:

$$\overline{X}_1=\frac{(x-2)^2(x-3)}{(1-2)^2(1-3)}\left(1+c_{11}(x-1)+\frac{c_{12}}{2!}(x-1)^2\right),$$

$$\overline{X}_2=\frac{(x-1)^3(x-3)}{(2-1)^3(2-3)}(1+c_{21}(x-2)),\quad \overline{X}_3=\frac{(x-1)^3(x-2)^2}{(3-1)^3(3-2)^2}.$$

Z rozwinięć tych wyrażeń dostaniemy $U_1=-\frac{5}{2}$, $U''_1=+\frac{8}{2}$, $U'_2=2$, a stosując równania (b), otrzymamy $c_{11}=\frac{5}{2}$, $c_{12}=\frac{17}{2}$, $c_{21}=-2$. Żądaną funkcyą będzie więc:

$$-\frac{(x-2)^2(x-3)}{2}\left[1+\frac{5}{2}(x-1)+\frac{17}{4}(x-1)^2\right]$$

$$-2(x-1)^3(x-3)[1-2(x-2)]+3.\frac{(x-1)^3(x-2)^2}{8}$$

Uwaga. Weźmy dla uproszczenia funkcyę 6^{go} stopnia $y=a_0x^6+\ldots+a_6=f(x)$ i zażądajmy, aby na 2-krotnem miejscu przybierała wartość y_1
„ 4- „ „ „ „ y_2
„ 1- „ „ „ „ y_3

Prócz równania

(α) $$y-f(x)=0$$

mają się więc spełnić jeszcze równania:

(β) $$y_1-f(x_1)=0,\; y_2-f(x_2)=0,\; y_3-f(x_3)=0$$

Lecz pierwsze z nich ma dwukrotny pierwiastek x_1, a drugie 4-krotny pierwiastek x_2. Wskutek tego oprócz (α) i (β) muszą zajść jeszcze związki:

(γ) $$-f'(x_1)=0,\; -f'(x_2)=0,\; -f''(x_2)=0,\; -f'''(x_2)=0$$

Z równań (α), (β), (γ) eliminując $1, -a_0, \ldots, -a_6$, dojdziemy do wyznacznika $D=0$, a z jego rozwinięcia — pozostawiając y ze spółczynnikiem 1 po jednej stronie — dostaniemy żądaną funkcyę. Analogicznie postąpić należy i w ogólnym przypadku.

Pd. 7. Utworzyć w ten sposób funkcyą 3^{go} stopnia, która na 2-krotnem miejscu $x=1$ ma wartość $=0$, a na dwukrotnem miejscu $x=2$ ma wartość $=3$; [odp. $y=-6x^3+27x^2-36x+15$].

53. Wzór interpolacyjny Gaussa. Formę Lagrange'a (L) można inną zastąpić. Połóżmy — gdy $f(x)$ ma na $(m+1)$ miejscach x_λ, $\lambda=1, 2, \ldots, m+1$, przybierać wartości $y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}$ —,

(M) $$f(x)=A_0+A_1(x-x_1)+A_2(x-x_1)(x-x_2)+\ldots+A_m(x-x_1)\ldots(x-x_m),$$

to z równań:

(1) $y_\lambda = A_0 + A_1(x_\lambda - x_1) + ... + A_{\lambda-1}(x_\lambda - x_1)...(x_\lambda - x_{\lambda-1})$,
$\lambda = 1, 2, 3, ..., m, m+1$,

dadzą się spółczynniki A_0, A_1, ... A_m obliczyć; a gdy je w (M) wstawimy, dostaniemy żądaną funkcyę. Forma (M) nazywa się formą interpolacyjną Gaussa*).

Pd. 1. Utworzyć funkcyą 3^{go} stopnia która na miejscach $x = 0, 1, 2, 3$ ma przybierać odpowiednio wartości $1, \frac{8}{3}, \frac{19}{3}, 13$.

Pd. 2. Wyjaśnić, że zmiana porządku par wartości (x_λ, y_λ) na jakikolwiek inny zmienia formę (M) na inną, ale nie zmienia funkcyi $f(x)$.

Pd. 3. Uważając równania (M), (1) za współczesne i wyrażając tę współczesność wyznacznikiem $=0$, wyprowadzić stąd formę (M).

Pd. 4. Gdy dany jest szereg liczb: $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$, o tej własności, że $a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ...$ i dane są wartości $f(a_0), f(a_1), f(a_2), ...$, pewnej całkowitej wymiernej funkcyi $f(x)$, to kładziemy:

(α) $$f(a_{s+1}) - f(a_s) = \Delta f(a_s), \quad s = 0, 1, 2, ...,$$

a więc w szczególności

(β) $$\Delta f(a_0) = f(a_1) - f(a_0).$$

Stosując dalej oznaczenie (α), położymy $\Delta f(a_1) - \Delta f(a_0) = \Delta\Delta f(a_0) = \Delta^2 f(a_0)$, a że $\Delta f(a_1) - \Delta f(a_0) = f(a_2) - f(a_1) - f(a_1) + f(a_0)$, więc $\Delta^2 f(a_0) = f(a_2) - 2f(a_1) + f(a_0)$ i analogicznie

(γ) $$\Delta^2 f(a_s) = f(a_{s+2}) - 2f(a_{s+1}) + f(a_s), \quad s = 1, 2, ...$$

Wzory (β), (γ) możemy symbolicznie w ten sposób napisać:

$$\Delta f = (z-1)_f, \quad \Delta^2 f = (z-1)^2_f,$$

gdzie tu w rozwinięciach: $z - z^0$, $z^2 - 2z + z^0$, trzeba za z^0, z^1, z^2 położyć odpowiednio $f(a_0), f(a_1), f(a_2)$. Przyjmijmyż, że i λ^{ta} różnica $\Delta^\lambda f(a_0) = \Delta^{\lambda-1} f(a_1) - \Delta^{\lambda-1} f(a_0)$ daje się wyrazić symbolicznie formą $(z-1)^\lambda_f$, to w takim razie $[z.(z-1)^\lambda]_f$ oznaczać będzie $\Delta^\lambda f(a_1)$, bo czynnik z podnosi tu w każdem $a_0, a_1, a_2, ...$ znaczek o jedność. Zauważmy teraz $(z-1)^{\lambda+1}_f = [(z-1)(z-1)^\lambda]_f = [z(z-1)^\lambda]_f - (z-1)^\lambda_f$. Tutaj $[z(z-1)^\lambda]_f = \Delta^\lambda f(a_1)$, a $(z-1)^\lambda_f = \Delta^\lambda f(a_0)$, mamy więc $(z-1)^{\lambda+1}_f = \Delta^\lambda f(a_1) - \Delta^\lambda f(a_0)$ a to jest $(\lambda+1)^{sza}$ różnica $\Delta^{\lambda+1} f(a_0)$. Ogólność więc symbolu $\Delta^\lambda f(a_0) = (z-1)^\lambda_f$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, ...$ mamy udowodnioną**).

Po tych uwagach postarajmy się przedstawić formą Gaussa taką funkcyę wymierną całkowitą $f(x)$ stopnia n, która na miejscach $0, 1, 2, ..., n$ przybierać ma odpowiednio wartości $f(0), f(1), f(2), ..., f(n)$. Połóżmy:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x(x-1) + ... + A_n x(x-1)...(x-\overline{n-1})$$

to na wyznaczenie spółczynników $A_0, A_1, A_2, ...$ mieć będziemy równania:

---

*) *Theoria interpolationis methodo nova tractata. Werke.* T. 3. p. 274.

**) Por. W. Folkierski. Zasady rachunku różniczkowego i całkowego (Paryż 1870). Tom I. str. 18—31. Por. także: *Collection of exemples of the applications of the calculus of finite differences by* J. F. W. Herschel. (Cembrigde 1820).

$$f(\alpha)=A_0+A_1\alpha+2\binom{\alpha}{2}A_2+3\binom{\alpha}{3}A_3+\ldots+(\alpha-1)\binom{\alpha}{\alpha-1}A_{\alpha-1}+\alpha!\,A_\alpha$$
$$\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Pierwszych λ owych równań mnożąc po kolei przez $(-1)^\lambda$, $(-1)^{\lambda-1}\binom{\lambda}{\lambda-1}$, $(-1)^{\lambda-2}\binom{\lambda}{\lambda-2}$, ... i dodając dostaniemy:

$$A_\lambda=\frac{f(\lambda)-\binom{\lambda}{1}f(\lambda-1)+\binom{\lambda}{2}f(\lambda-2)-\ldots\pm f(0)}{\lambda!}=\frac{\Delta^\lambda f(0)}{\lambda!},$$

gdyż $\binom{\lambda}{0}\binom{\lambda}{\mu}-\binom{\lambda}{1}\binom{\lambda-1}{\mu}+\ldots\pm\binom{\lambda}{\mu}$ jest zawsze $=0$, gdy $\mu=0, 1, 2, \ldots, \lambda-1$. Po wyznaczeniu w ten sposób spółczynników A_0, A_1, ..., mamy:

$$f(x)=f(0)+\frac{\Delta f(0)}{1!}x+\frac{\Delta^2 f(0)}{2!}x(x-1)+\ldots+\frac{\Delta^n f(0)}{n!}x(x-1)\ldots(x-\overline{n-1}).$$ i to jest żądana forma.

---

54. Dzielenie dwóch funkcyj całkowitych przez siebie. Przejdźmy do rozważania dwóch funkcyj całkowitych wymiernych równocześnie danych:

$$f(x)=a_0x^m+\ldots+a_m,\quad g(x)=b_0x^n+\ldots+b_n.$$

Zakładając $m\geq n$, dobierzmy jeszcze trzecią funkcyę $(m-n)^{go}$ stopnia $h(x)=c_0x^{m-n}+\ldots+c_{m-n}$ o niewyznaczonych c_0, c_1, ..., c_{m-n} i zauważmy wyrażenie $f(x)-g(x)h(x)$. Porządkując je według potęg x, dostajemy:

$$f(x)-g(x)h(x)=$$
$$(a_0-b_0c_0)x^m+(a_1-b_1c_0-c_1b_0)x^{m-1}+\ldots+(a_m-b_n.c_{m-n})=r(x).$$

Lecz w $h(x)$ mamy $(m-n+1)$ dowolnych spółczynników c_0, c_1, ... c_{m-n}, a te możemy tak wybrać, aby w $r(x)$ spółczynniki przy x^m, x^{m-1}, ..., x^n były zerami. Takie c_s znajdziemy z równań:

$$(a)\qquad \begin{aligned} &a_0-b_0c_0=0\\ &a_1-b_1c_0-b_0c_1=0\\ &\vdots\\ &a_{m-n}-b_{m-n}c_0-b_{m-n-1}c_1-\ldots-b_0c_{m-n}=0,\end{aligned}$$

w których b_s o znaczkach $s>n$ zastąpić trzeba zerami. Wyznaczone stąd c_s wstawiając w $h(x)$ i w dalsze spółczynniki funkcyi $r(x)$, dostaniemy $r(x)$ jako funkcyę $(n-1)^{go}$, albo niższego stopnia. Mamy więc:

$$(b)\qquad f(x)-g(x)h(x)=r(x),$$ a stąd twierdzenie:

I. *Gdy mamy dwie funkcye całkowite wymierne $f(x)$ stopnia m^{go} i $g(x)$ stopnia n^{go} — $m\geq n$ — to można zawsze oznaczyć funkcyę $h(x)$ $(m-n)^{go}$ stopnia w ten sposób, że $f(x)-g(x)h(x)$ jest funkcyą $r(x)$ najwyżej $(n-1)^{go}$ stopnia.*

Oznaczenie funkcyi $h(x)$ i $r(x)$ za pomocą równań (a) dających ich spółczynniki określamy jako dzielenie funkcyi $f(x)$ przez $g(x)$. Funkcya $h(x)$ jest ilorazem, a $r(x)$ resztą dzielenia.

W szczególności mogą oznaczone z równań (a) spółczynniki c_s sprowadzić $r(x)$ do identycznego zera: $0x^{n-1}+0x^{n-2}+...+0$. Wtedy mówimy, że $f(x)$ jest podzielną przez $g(x)$, albo — co z równania $f(x)=g(x).h(x)$ w tym przypadku wynika — funkcya $g(x)$ jest podzielnikiem funkcyi $f(x)$.

Pd. 1. Podzielić $3x^4-3x^3-2x+1$ przez x^2-1, a $x^3 \pm a^3$ przez $x-a$.

Pd. 2. Podzielić $4x^4-6x^3-8x^2+6x+4$ przez x^3-2x^2-x+2.

55. Łańcuchowe dzielenie. Gdy $g(x)$ nie jest podzielnikiem funkcyi $f(x)$, to można badać, czy te funkcye nie mają wspólnego podzielnika w postaci funkcyi całkowitej wymiernej, albo — jak się krócej wyrażają — czy nie są wspólmierne. Taki podzielnik o możliwie największym stopniu nazywa się największym wspólnym podzielnikiem. Oznaczyć go można w sposób następujący:

Dzielimy $f(x)$ przez $g(x)$:

(1) $f(x)=g(x).h(x)+g_1(x)$; dzielimy $g(x)$ przez $g_1(x)$:

(2) $g(x)=g_1(x).h_1(x)+g_2(x)$; dzielimy $g_1(x)$ przez $g_2(x)$:

(3) $g_1(x)=g_2(x).h_2(x)+g_3(x)$

i tak postępujemy dalej. Z uwagi, że stopnie reszt $g_1, g_2, g_3, \cdots$ ciągle się obniżać będą, dojdziemy wreszcie do dzielenia, z którego reszta wypadnie zerowego stopnia t. j. będzie = stałej ilości c. Na tem owe dzielenia, z których ostatnie są:

(4) $g_{\nu-3}(x)=g_{\nu-2}(x).h_{\nu-2}(x)+g_{\nu-1}(x)$

(5) $g_{\nu-2}(x)=g_{\nu-1}(x).h_{\nu-1}(x)+g_{\nu}(x)$

(6) $g_{\nu-1}(x)=g_{\nu}(x).h_{\nu}(x)+c$, kończymy.

Ostatnia reszta c może być $=0$, albo $\neq 0$.

Gdy $c=0$, to widocznie g_ν jest podzielnikiem funkcyi $g_{\nu-1}$, a prawa strona w (5) jest podzielną przez g_ν. Zatem i lewa strona w (5) t. j. $g_{\nu-2}$ jest podzielną przez g_ν. W (4) jest więc prawa strona, a tem samem i lewa, t. j. $g_{\nu-3}$ podzielną przez g_ν. Idąc tak dalej do czem raz wyższych równań, dojdziemy wreszcie do wniosku, że $g_\nu(x)$ jest wspólnym podzielnikiem funkcyj $f(x)$, $g(x)$.

Lecz można zarazem okazać, że $g_\nu(x)$ jest największym wspólnym podzielnikiem funkcyj $f(x)$, $g(x)$. Przyjmijmy bowiem, że te funkcye posiadają podzielnik $\chi(x)$ wyższego stopnia, niż $g_\nu(x)$. Z równania (1) wynika wtedy, że $\chi(x)$ jest także podzielnikiem funkcyi $g_1(x)$. Według równania (2) byłaby funkcya $\chi(x)$ także podzielnikiem funkcyi $g_2(x)$ i t. d. Okazałoby się ostatecznie, że $\chi(x)$ jest także podzielnikiem funkcyi $g_\nu(x)$. Lecz to jest niemożliwe. Zatem $g_\nu(x)$ jest w istocie największym podzielnikiem funkcyj $f(x)$, $g(x)$. Naznaczmy ten największy wspólny podzielnik $g_\nu(x)$ przez $t(x)$ i przyjmijmy, że jest on stopnia k^{go}, to mamy dalej:

(7) $$f(x)=t(x).\varphi_{m-k}(x),\quad g(x)=t(x).\gamma_{n-k}(x),$$

gdzie φ_{m-k}, γ_{n-k} są stopni: $(m-k)$, $(n-k)$. Lecz — gdy c_1 jest dowolną stałą $\neq 0$ — to także położyć możemy:

$$f(x)=c_1.t(x).\frac{\varphi_{m-k}}{c_1},\quad g(x)=c_1 t(x).\frac{\gamma_{n-k}}{c_1}$$

i w miejsce $t(x)$ uznać $c_1 t(x)$ za największy wspólny podzielnik. Stąd wynika, że największy wspólny podzielnik trzeba pojmować jako funkcyę z dowolnym stałym czynnikiem.

Ta okoliczność może ułatwić dzielenia (1), (2), ..., (6); możemy bowiem każdorazową dzielną lub dzielnik pomnożyć naprzód stosownym czynnikiem.

Pd. 1. Znaleść największy wspólny podzielnik funkcyj:

$$f(x)=2x^4+x^3-5x^2-x+3,\quad g(x)=5x^3+x^2-5x-1.$$

W dzieleniu $f(x)$ przez $g(x)$ będziemy mieli dwa częściowe dzielenia. Stąd więc korzystnem tu będzie dzielić $5^2.f(x)$ p.zez $g(x)$. Z tego dzielenia dostajemy:

$$5^2.f(x)=(5x^3+x^2-5x-1)(10x+3)+(-78x^2+78);\quad g_1(x)=-78.x^2+78.$$

Zamiast dzielić $g(x)$ przez $g_1(x)$, dzielmy raczej $g(x)$ przez $-\frac{1}{78}g_1(x)$, to dostaniemy: $5x^3+x^2-5x-1=(x^2-1).(5x+1)+0$. Z tego okazuje się, że (x^2-1) jest największym wspólnym podzielnikiem danych funkcyj.

Pd. 2. Jaki jest największy wspólny podzielnik funkcyj:

$$(x)=6x^5+11x^4+x^3-x^2-5x-12,\quad g(x)=24x^4+38x^3-31x^2-43x+12?$$

[Odp.: $=6x^3+11x^2-5x-12$].

56. Wspólny podzielnik jako jednorodna liniowa funkcya danych funkcyj. Z równań (1), (2), ..., (6) — [art. 55.] — gdzie $c=0$ znowu założymy, możemy wszystkie reszty $g_1, g_2, ..., g_\nu$ wyrazić przez f i g. I tak z równania (1) mamy:

(a) $$g_1=f-gh;$$

równanie (2) — [l. c] — daje $g_2=g-g_1 h_1$, a gdy tu za g_1 wstawimy wyrażenie (a), dostaniemy:

(b) $$g_2=-f.h_1+(hh_1+1)g.$$

W ten sposób postępując dalej, otrzymamy ostatecznie $g_\nu(x)=$

(1) $$t(x)=\gamma(x).f(x)+\varphi(x).g(x),$$ a to znaczy:

I. *Największy wspólny podzielnik $t(x)$ dwóch danych funkcyj $f(x)$, $g(x)$ daje się przedstawić liniowo, jednorodnie przez te funkcye.*

Z drugiej strony mamy:

$$f(x)=t(x).\varphi_{m-k}(x), \quad g(x)=t(x).\gamma_{n-k}(x),$$

a z tych równań wynika związek:

$$(2) \qquad \gamma_{n-k}(x)f(x)-\varphi_{m-k}g(x)=0.$$

Związkami (1), (2) zajmiemy się później, a teraz przyjmijmy, że funkcye $f(x)$, $g(x)$ stają się równocześnie zerem wyłącznie na miejscach x_1, x_2, ..., x_r. Na tych miejscach niech $f(x)=0$ razy ν'_1, ν'_2, ..., ν'_r, a $g(x)=0$ razy ν''_1, ν''_2, ..., ν''_r. Naznaczmy mniejszą liczbę zawartą w parze $(\nu'_\alpha, \nu''_\alpha)$, $\alpha=1, 2, ..., r$ przez ν_α, to iloczyn $c.(x-x_1)^{\nu_1}.(x-x_2)^{\nu_2}...(x-x_r^{\nu_r})=t(x)$ z dowolnym stałym czynnikiem c będzie największym wspólnym podzielnikiem funkcyj $f(x)$, $g(x)$. Z tego wynika:

II. *Dwie funkcye f, g mają wspólny podzielnik, gdy posiadają jeden przynajmniej wspólny pierwiastek.*

57. Rugownik dwóch funkcyj. Wyróżnik funkcyi. Pomnóżmy związek (2) — art. 56. — przez funkcyę u_ϱ dowolnego stopnia ϱ i o dowolnych spółczynnikach, to mieć będziemy:

$$(1) \qquad f(x).\gamma_{n-k}.u_\varrho-g(x)\varphi_{m-k}.u_\varrho=0.$$ Połóżmy:

$$(2) \qquad \gamma_{n-k}.u_\varrho=\gamma_{n-(k-\varrho)}, \quad \varphi_{m-k}.u_\varrho=\varphi_{m-(k-\varrho)},$$

gdzie znaczki $n-(k-\varrho)$, $m-(k-\varrho)$ oznaczają stopnie i połóżmy dalej $k-\varrho=\alpha$, to mieć będziemy z (1):

$$(3) \qquad f(x).\gamma_{n-\alpha}-g(x)\varphi_{m-\alpha}=0\,^{*)} \quad \alpha=1, 2, 3, ..., k,$$

jeżeli — jak to dostatecznem będzie — do tych tylko liczb ograniczymy znaczek α.

Z tych rozważań — pisząc związki (3) krótko w postaci $(m, n, \alpha)=0$ — dostajemy twierdzenie:

I. *Gdy funkcye f, g posiadają największy wspólny podzielnik k^{go} stopnia, to możliwem jest dobrać (na bardzo wiele sposobów) k par funkcyj $\varphi_{m-\alpha}$, $\gamma_{n-\alpha}$ w ten sposób, że identycznie sprawdzają się równania $(m, n, \alpha)=0$, $\alpha=1, 2, ..., k$. Związek $(m, n, k+1)=0$ jest już niemożliwy.*

Przyjmijmy naodwrót, że do danych funkcyj f, g daje się para funkcyj $\gamma_{n-\alpha}$, $\varphi_{m-\alpha}$ tak dobrać, że identycznie zachodzi równanie $(m, n, \alpha)=0$, a więc wyraźnie: $f\gamma_{n-\alpha}-g\varphi_{m-\alpha}=0$. Dla ka-

*) Związki (3) można także pisać w postaci $f.\gamma_{n-\alpha}+g\varphi_{m-\alpha}=0$, bo użycie znaku $+$ lub $-$ przed funkcyami jeszcze nieoznaczonemi nie zmieni rozumowania.

żdego z pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_m$ równania $f=0$ jest $f.\gamma_{n-\alpha}=0$; musi więc także dla tych samych pierwiastków być $g\,\varphi_{m-\alpha}=0$. Z nich może funkcya $\varphi_{m-\alpha}$ najwyżej $m-\alpha$ posiadać, a stąd wynika, że α z nich, albo i więcej, posiada funkcya g. Z tego wnosimy, że: (I⁰) f, g mają wspólny podzielnik α^{go}, albo wyższego stopnia i że (II⁰) — jeżeli $\alpha > 1$ — to jeszcze prócz związku $(m, n, \alpha)=0$, dadzą się wyznaczyć związki $(m, n, 1)=0$, $(m, n, 2)=0, \ldots, (m, n, \alpha-1)=0$. Stąd twierdzenie:

II. *Aby funkcye f, g posiadały największy wspólny podzielnik stopnia k^{go}, koniecznem i dostatecznem jest, aby można dobrać dwie pary funkcyj $(\gamma_{n-k}, \varphi_{m-k})$, $(\gamma_{n-(k+1)}, \varphi_{m-(k+1)})$ w ten sposób, że $(m, n, k)=0$, $(m, n, k+1)\neq 0$. Związki $(m, n, \alpha)=0$, $\alpha=1, 2, \ldots, k-1$ muszą się wtedy także dać koniecznie utworzyć; pierwszy z nich wskazuje, że funkcye są współmierne.*

Z tych wszystkich uwag wynika, że przedewszystkiem trzeba zbadać, czy spełnia się identyczny związek $(m, n, 1)=0$, nim się przystąpi do szukania największego wspólnego podzielnika za pomocą szeregu dzieleń.

Przyjmijmy dla uproszczenia:

$$f(x)=a_0x^5+a_1x^4+\ldots+a_4x+a_5,\quad g(x)=b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3$$

i położmy:

$$\gamma_{n-1}=\gamma_2=c_0x^2+c_1x+c_2,\quad \varphi_{m-1}=\varphi_4=-d_0x^4-d_1x_3-\ldots-d_4,$$

to identyczny związek $(m, n, 1)=(3, 5, 1)=0$ daje tu takich $m+n=8$ jednorodnych liniowych równań:

$$(A)\quad\begin{cases}
a_0c_0+0\,c_1+0c_2+b_0d_0+0.d_1+0.d_2+0.d_3+0d_4=0\\
a_1c_0+a_0c_1+\,.\,+b_1d_0+b_0d_1+\,.\quad.\quad.\quad=0\\
a_2c_0+a_1c_1+a_0c_2+b_2d_0+b_1d_1+b_0d_2+\,.\quad.\quad=0\\
a_3c_0+a_2c_1+a_1c_2+b_3d_0+b_2d_1+b_1d_2+b_0d_3+\,.\quad=0\\
a_4c_0+a_3c_1+a_2c_2+\,.\,+b_3d_1+b_2d_2+b_1d_3+b_0d_4=0\\
a_5c_0+a_4c_1+a_3c_2+\,.\quad.\,+b_3d_2+b_2d_3+b_1d_4=0\\
.\,+a_5c_1+a_4c_2+\,.\quad.\quad.\,+b_3d_3+b_2d_4=0\\
.\quad.\,+a_5c_2+\,.\quad.\quad.\quad.\,+b_3d_4=0
\end{cases}$$

Z równań tych — jeżeli $f(x)$, $g(x)$ są współmierne — muszą spółczynniki funkcyj φ_4, γ_2 wypaść $\neq 0$.

Warunkiem zaś tego koniecznym i dostatecznym jest, aby wyznacznik:

$$(B)\qquad R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

Wyznacznik $R(f,g)$ nazywa się rugownikiem (rezultantem) funkcyj $f(x)$, $g(x)$.

Z tego szczególnego przypadku $m=5$, $n=3$ łatwo wywnioskować, jak w każdym innym razie tworzyć rugownik. W pierwszym jego wierszu wypisujemy po porządku spółczynniki a_0, a_1, ... jednej z funkcyj, dając spółczynnikowi a_0 miejsce elementu głównego. Po ostatnim elemencie wypisujemy tyle zer, aby cały wiersz 1szy zawierał elementów $(m+n)$. W drugim, trzecim, ... wierszu przesuwamy a_0, a_1, ... o jeden pion, o dwa piony ... naprzód, wypełniając wolne miejsca z początku i na końcu zerami. To przesuwanie odbywa się tak długo, aż się ostatni element a_m dostanie do pionu ostatniego. Następny wiersz tworzymy tak, jak pierwszy, ze spółczynników b_0, b_1, ... drugiej funkcyi, a w analogiczny sposób (jak a_0, a_1, ...) przesuwając je, tworzymy dalsze wiersze tak długo, aż b_n dostanie się do pionu ostatniego.

Sprowadziwszy w ten sposób całe badanie, czy istnieje wspólny podzielnik danych funkcyj, do obliczenia wyznacznika, możemy teraz powiedzieć:

III*a*). *Dwie dane funkcye $f(x)$, $g(x)$ są współmierne, gdy ich rugownik $R(f,g)=0$.*

Gdy $R(f,g)\neq 0$, to nie istnieje wtedy para funkcyj φ_{m-1}, γ_{n-1} spełniająca związek $(m,\ n,\ 1)=0$ a stąd — na postawie tw. II. — wnioskujemy:

III*b*). *Gdy $R(f,g)\neq 0$, to funkcye f, g nie posiadają żadnego wspólnego podzielnika, albo — jak mówią — są względem siebie pierwsze.*

Widzieliśmy w art. 51., że gdy równanie $f(x)=0$ posiada λ-krotny pierwiastek x_1, a więc $f(x)$ mieści w sobie czynnik $(x-x_1)^\lambda$, to w równaniu pochodnem $f'(x)=0$ jest x_1 pierwiastkiem $(\lambda-1)$-krotnym; zawiera się więc w niem czynnik $(x-x_1)^{\lambda-1}$.

Z tego wypływa, że gdy wszystkie powtarzające się czynniki pierwiastkowe, zawarte w $f(x)$ tworzą iloczyn $(x-x_1)^\lambda(x-x_2)^\mu(x-x_3)^\nu\ldots$, $\lambda>1$, $\mu>1$, $\nu>1$, ..., to w $f'(x)$ mieści się iloczyn $t(f,f')=(x-x_1)^{\lambda-1}$. $(x-x_2)^{\mu-1}(x-x_3)^{\nu-1}\ldots$, który będzie największym wspólnym po-

*

dzielnikiem funkcyj $f(x)$, $f'(x)$. Gdy przeciwnie $f(x)=0$ nie ma powtarzających się pierwiastków, to $f(x)$, $f'(x)$ są względem siebie pierwsze. Stąd twierdzenie:

IV. *Równanie $f(x)=0$ posiada powtarzające się pierwiastki, jeżeli rugownik $R(f,f')$, który tu nazywa się wyróżnikiem, (dyskryminantem) równania (funkcyi $f(x)$), jest zerem. W razie $R(f,f')\neq 0$, nie ma powtarzających się pierwiastków.*

Pd. 1. Funkcye $f(x)=2x^4+3x^3-6x^2-5x+6$, $g(x)=2x^3+3x^2-2x-3$ posiadają

$$R=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 & -5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -6 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -6 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

gdyż po dodaniu wyrazów wszystkich pionów do wyrazów pionu pierwszego, dostajemy w pionie pierwszym same zera. Jakiż jest największy wspólny podzielnik tych funkcyj? [Odp. $2x^2+x-3$]

Pd. 2. Jakim jest rugownik R funkcyj:
$f(x)=2x^2-x-3$, $g(x)=2x^2-5x+3$? [Odp $R=0$, $t(x)=2x+3$].

Pd. 3. Okazać że równanie

$$f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$$

ma powtarzające się pierwiastki, stwierdzając, że wyróżnik $R(f,f')=0$.

Pochodna $f'(x)=5x^4-4x^3-15x^2+2x+8$, a łańcuchowe dzielenie daje tu:
$5^2f(x)=f'(x).(5x-1)-54(x^3-3x-2)$, $f'(x)=(x^3-3x-2)(5x^2-4)+0$;
stąd wynika, że $t(f,f')=x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$ i że: $x=-1$ jest 3-krotnym, a $x=2$ dwukrotnym pierwiastkiem równania.

Pd. 4. Równanie $f(x)=x^3+px+q=0$ ma wyróżnik

$$R(f,f')=\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix}=4p^3+27q^2.$$

W szczególnym przypadku, gdy $f(x)=4x^3-g_2x-g_3=0$, mamy:

$$p=-\frac{g_2}{4},\ q=-\frac{g_3}{4},\ \text{a więc}$$

$$-4^2R(f,f')=g_2{}^3-27\,g_3{}^2.$$

Uwaga. Gdy $f(x)=a_0x^m+\ldots=0$, to $f'(x)=a_0m.x^{m-1}+\ldots=0$ a równanie $\varphi(x)=m.f(x)-xf'(x)=0$ jest $(m-1)^{go}$ stopnia. Zamiast wyznaczania wyróżnika równań $f(x)=0$, $f'(x)=0$ można szukać rugownika równań $f'(x)=0$, $\varphi(x)=0$ i przez to poszukiwanie ułatwić.

58. Niewspółmierność funkcyj. Związki $(m, n, \alpha)=0$. Dostateczne warunki istnienia największego wspólnego podzielnika stopnia k. Gdy szereg dzieleń (1), (2), ..., (6), [art. 55.], zakończy się dzieleniem $g_{\nu-1}=g_\nu h_\nu+c$ o reszcie $c\neq 0$, to ta okoliczność wykluczy tak dobrze możliwość wspólnego podzielnika, jak $R(f,g)\neq 0$.

Przyjmijmy, że do danych funkcyj f, g możliwem jest dobrać dwie funkcye γ_{n-1}, φ_{m-1} w ten sposób, że identycznie spełnia się związek

(1) $$(m, n, 1)=1.$$

Szukając spółczynników $c_0, c_1, ..., d_0, d_1, ...$ funkcyj γ_{n-1}, φ_{m-1}, dostaniemy na ich wyznaczenie z równań (A) — art. 57. — wszystkie z wyjątkiem ostatniego, które teraz przechodzi na

$$a_m c_{n-1}+b_n d_{m-1}=1.$$

Dostajemy zatem system $(m+n)$ równań liniowych, niejednorodnych:

(2) $$(A')$$

Z nich $c_0, c_1, ..., d_0, d_1, ...$ dadzą się wyznaczyć, gdy $R(fg)\neq 0$. Lecz wtedy f, g są względem siebie pierwsze, a stąd wynika:

I. *Gdy dane funkcye $f(x)$, $g(x)$ nie posiadają wspólnego podzielnika, to istnieje para funkcyj φ_{m-1}, γ_{n-1} spełniająca identycznie związek $(m, n, 1)=1$. Odwrócenie tego twierdzenia jest także prawdziwe.*

Za pomocą ostatniego twierdzenia możemy bliżej określić związek $t(x)=\gamma f-\varphi g$, [art. 56.]. Tam funkcye γ, φ wynikały z łańcuchowego dzielenia, a wskutek tego stopień tych funkcyj nie dał się ogólnie podać. Połóżmy jednak $f(x)=t(x).\varphi_{m-k}$, $g(x)=t(x).\gamma_{n-k}$, to ponieważ φ_{m-k}, γ_{n-k} nie mają już żadnego wspólnego podzielnika, znajdzie się para funkcyj $\gamma_{n-k-1}, \varphi_{m-k-1}$ spełniająca identycznie związek

(3) $$\gamma_{n-k-1}\,\varphi_{m-k}-\varphi_{m-k-1}\,\gamma_{n-k}=1.$$

Mnożąc ten związek przez $t(x)$ dostajemy:

(4) $$t(x)=\gamma_{n-k-1}\cdot f(x)-\varphi_{m-k-1}\cdot g(x)=\gamma(x)f(x)+\varphi(x)g(x),$$

a stąd wynika, że γ i φ są odpowiednio stopni $n-(k+1)$, $m-(k+1)$ i że $t(x)=(m, n, k+1)$.

Ze związku (3), w którym w $t(x)$ (stopnia k^{go}), i w γ, φ, (odpowiednio stopni $n-(k+1)$, $m-(k+1)$), są spółczynniki jeszcze nieoznaczone, dostaniemy (przez porównanie równomiennych wyrazów) dostateczną ilość równań do wyznaczenia tych wszystkich spółczynników a więc i największego wspólnego podzielnika $t(x)$. Mamy więc twierdzenie:

II. *Gdy $f(x)$, $g(x)$ mają mieć największy wspólny podzielnik k^{go} stopnia, to musi się dać $(k+1)$ par funkcyj $\gamma_{n-\alpha}$, $\varphi_{m-\alpha}$, $\alpha=1, 2, ..., k+1$ tak wyznaczyć, że identycznie $(m, n, \alpha)=0$, $\alpha=1, 2, ... k$, a wyrażenie $(m, n, k+1)$ redukujące się do funkcyi stopnia k jest żądanym podzielnikiem.*

Pd. 1. Funkcye $f(x) = -1 + x - 3x^2 + 3x^3$, $g(x) = 1 + x + 3x^2 + 3x^3$ posiadają największy wspólny podzielnik stopnia 2go; wyznaczyć go.

Tutaj $\gamma_{n-k-1} = c$, $\varphi_{m-k-1} = d$. Połóżmy $t(x) = t_2 + t_1 x + t_0 x^2$, to mamy: $c(-1 + x - 3x^2 + 3x^3) + d(1 + x + 3x^2 + 3x^3) = t_2 + t_1 x + t_0 x^2$, stąd $c - d = 0$, $-3c + 3d = t_0$, $c + d = t_1$, $-c + d = t_2$, a więc: $c = -d$, $t_0 = 6d$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2d$ i $t(x) = c'(1 + 3x^2)$.

Pd. 2. Funkcye
$f(x) = -12 - 5x - x^2 + x^3 + 11x^4 + 6x^5$, $g(x) = 12 - 43x - 31x^2 + 38x^3 + 24x^4$ mają największy wspólny podzielnik stopnia 3go [por. Pd. 2. art. 55.]; wyznaczyć go.

Stwierdziwszy, że istnieje związek $(m, n, k) = 0$, połóżmy:

$$\gamma_{n-(k+1)} = c_0 x^{n-k-1} + \ldots + c_{n-k}, \quad \varphi_{m-(k+1)} = d_0 x^{m-k-1} + \ldots + d_{m-k},$$
$$t(x) = t_0 x^k + t_1 x^{k-1} + \ldots + t_k, \quad t_0 \neq 0,$$

to w związku $(m, n, k+1) = t(x)$ zrównując ze sobą spółczynniki przy $x^{m+n-k-1}$, $x^{m+n-k-2}$, ..., x^k dostajemy dostateczną ilość równań do obliczenia spółczynników c_0, c_1, ..., d_0, d_1, ..., (w funkcyi t_0). Równania te w razie $m=5$, $n=3$ i $k=1$, mają postać:

$$\begin{aligned}
&a_0 c_0 + b_0 d_0 && = 0 \\
&a_1 c_0 + a_0 c_1 + b_1 d_0 + b_0 d_1 && = 0 \\
&a_2 c_0 + a_1 c_1 + b_2 d_0 + b_1 d_1 + b_0 d_2 && = 0 \\
&a_3 c_0 + a_2 c_1 + b_3 d_0 + b_2 d_1 + b_1 d_2 + b_0 d_3 && = 0 \\
&a_4 c_0 + a_3 c_1 + 0\, d_0 + b_3 d_1 + b_2 d_2 + b_1 d_3 && = 0 \\
&a_5 c_0 + a_4 c_1 + 0\, d_0 + 0\, d_1 + b_3 d_2 + b_2 d_3 && = t_0 .
\end{aligned}$$

Wspólny mianownik niewiadomych jest tu:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\
0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2
\end{vmatrix}$$

i powstaje z $R(f,g)$ przez opuszczenie ostatniego wiersza z elementami a_s, ostatniego wiersza z elementami b_s i dwóch pionów ostatnich.

W ogólnym wypadku mianownikiem takim będzie wyznacznik Δ_k powstający z $R(f, g)$ przez opuszczenie k wierszy ostatnich z elementami a_s, k wierszy ostatnich z elementami b_s i $2k$ ostatnich pionów, a ażeby c_0, c_1, ..., d_0, d_1, ..., były skończone, koniecznem i dostatecznem jest, aby $\Delta_k \neq 0$ było.

Przyjmijmy $\Delta_k=0$. Wtedy musiałoby być i $t_0=0$, a wspólny podzielnik $t(x)$ musiałby się zredukować do funkcyi o stopniu $(k-1)$. To jednak jest niemożliwe po stwierdzeniu już związku $(m, n, k)=0$ chyba, że z $t_0=0$ także równocześnie $t_1=t_2=...=t_k=0$, a więc zachodzi jeszcze związek $(m, n, k+1)=0$.

Mamy więc przy $R(f, g)=0$:

I⁰. $(m, n, k+1)=0$, gdy $(m, n, k)=0$ i $\Delta_k=0$;

II⁰. $(m, n, k+1)=t(x)$, gdy $(m, n, k)=0$ i $\Delta_k \neq 0$ —

a zatrzymując II., mamy dalej podług I.:

$$
\begin{array}{l}
(m, n, k)=0, \quad \text{gdy } (m, n, k-1)=0 \ \text{ i } \ \Delta_{k-1}=0; \\
(m, n, k-1)=0, \quad \text{gdy } (m, n, k-2)=0 \ \text{ i } \ \Delta_{k-2}=0; \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
(m, n, 2)=0, \quad \text{gdy } (m, n, 1)=0 \ \text{ i } \ \Delta_1=0; \\
(m, n, 1)=0, \quad \text{gdy } R(f, g)=0.
\end{array}
$$

Stąd twierdzenie:

III. *Aby dwie dane funkcye f, g posiadały największy wspólny podzielnik stopnia k, dostatecznem jest aby*

$$R(f, g)=0, \quad \Delta_1=0, \quad \Delta_2=0, \quad ..., \quad \Delta_{k-1}=0, \quad \Delta_k \neq 0.$$

59. Wypadek znikania podwyznaczników rugownika $R=0$. W związku $(m, n, 1)=0$ jest $\gamma_{n-1}=\gamma_{n-k}.U_{k-1}$, $\varphi_{m-1}=\varphi_{m-k}.U_{k-1}$, gdzie U_{k-1} jest funkcyą $(k-1)^{\text{go}}$ stopnia o dowolnych spółczynnikach. Z tego wynika, że albo w γ_{n-1}, albo w φ_{m-1} można będzie znowu k spółczynników obrać zupełnie dowolnie.

Pomyślmyż sobie równania (A) — art. 57 — utworzone przy ogólnych m, n i przyjmijmy, że rugownik tych równań $R(f, g)=0$. Te równania — gdy $t(x)$ ma być stopnia k — muszą się dać rozwiązać w ten sposób, że k spółczynników c_s pozostaje dowolnych.

Jestto znakiem, że z równań (A) można wtedy opuścić k równań, albo że w $R(f, g)=0$ wszystkie podwyznaczniki 1sze, 2gie, ..., $(k-1)$sze znikają, ale z podwyznaczników $k$tych nie wszystkie są $=0$. Stąd twierdzenie:

I. *Gdy f, g mają największy wspólną podzielnik stopnia k, to w $R(f, g)=0$ znikają wszystkie podwyznaczniki 1sze, 2gie, ... $(k-1)$sze, a z $k$tych podwyznaczników nie wszystkie są $=0$.*

Przyjmijmy naodwrót, że w $R(f, g)=0$ znikają wszystkie podwyznaczniki 1sze, 2gie, ..., $(k-1)$sze, a $k$te podwyznaczniki nie wszystkie $=0$. Opuśćmy w tym przypadku z równań (A) k równań pierwszych — zawierają one c_s, d_s — z najmniejszymi znaczkami — to wtedy przez

(1) $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_{k-1}$

które pozostają całkiem dowolne, będzie można z pozostałych równań liniowo jednorodnie przedstawić wszystkie inne spółczynniki $c_k,\ c_{k+1},\ \dots,\ c_{n-1};\ d_0,\ d_1,\ \dots,\ d_{m-1}$.

Położmyż po rozwiązaniu:

$c_k=L_k,\ c_{k+1}=L_{k+1},\ \dots,\ c_{n-1}=L_{n-1};\ d_0=L'_0,\ d_1=L'_1,\ \dots,\ d_{m-1}=L'_{m-1}$,

gdzie $L_k,\ L_{k+1},\ \dots\ L'_0,\ L'_1,\ \dots$ są właśnie wspomnianemi jednorodnemi funkcyami, to wtedy przy dowolnych ilościach (1) tak obranych, że $c_0 \neq 0$ — a więc wskutek $a_0c_0+b_0d_0=0$ także jest $d_0 \neq 0$ — mamy:

$$(2)\quad \begin{aligned} \gamma_{n-1}&=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\dots+c_{k-1}x^{m-k}+L_kx^{n-k-1}+\dots+L_{n-1}\\ \varphi_{m-1}&=L'_0x^{m-1}+L'_1x^{m-2}+\dots+L'_{m-1}, \end{aligned}$$

a związek $(m,\ n,\ 1)=0$ niezawodnie się spełnia.

Wskutek dowolnych ilości (1) możemy przyjąć $c_0=0,\ c_1 \neq 0$; dostajemy wtedy równocześnie $d_0=0$ (z równania $a_0c_0+b_0d_0=0$); a w (2) mamy parę drugą $\gamma_{n-2},\ \varphi_{m-2}$ spełniającą związek $(m,\ n,\ 2)=0$.

Gdy dalej założymy $c_0=c_1=0,\ c_2 \neq 0$, to z równania $a_0c_0+b_0d_0=0$ dostajemy równocześnie $d_0=0$, a z równania $a_1c_0+a_0c_1+b_1d_0+b_0d_1=0$ wyniknie $d_1=0$. Z założenia więc $c_0=c_1=0,\ c_2 \neq 0$ dostajemy w (2) trzecią parę $\gamma_{n-3},\ \varphi_{m-3}$ spełniającą związek $(m,\ n,\ 3)=0$.

Początkowych k równań (A), [art. 57], zawiera po porządku z ilości $c_s,\ d_s$ tylko takie, jakie tu — pisząc te równania w skróconych postaciach:

$$(3)\quad \begin{aligned} &(c_0,\ d_0)=0,\ (c_0,\ c_1,\ d_0,\ d_1)=0,\ \dots,\\ &(c_0,\ c_1,\ \dots,\ c_{k-1},\ d_0,\ d_1,\ \dots,\ d_{k-1})=0 \end{aligned}$$

ujęte mamy w nawiasach.

Położmyż $c_0=c_1=\dots=c_{k-2}=0$, to z równań (3) wyniknie równocześnie $d_0=d_1=d_2=\dots=d_{k-2}=0$; w funkcyach (2) dostaniemy parę $\gamma_{n-k},\ \varphi_{m-k}$, a dalej związek $(m,\ n,\ k)=0$.

Założenie dalsze: $c_0=c_1=\dots=c_{k-1}=0$ już jest niemożliwe. Ono bowiem prócz $d_0=d_1=\dots=d_{k-1}=0$ powoduje jeszcze:

$$L_k=L_{k+1}=\dots=L'_0=L'_1=\dots=0,$$

co znaczy, że funkcye $\gamma_{n-(k+1)},\ \varphi_{m-(k+1)}$ mające spełnić związek $(m,\ n,\ k+1)=0$ są identycznie zerami. Związek więc $(m,\ n,\ k+1)=0$ już nie istnieje, a stąd wynika:

II. *Aby $f,\ g$ posiadały największy wspólny podzielnik stopnia k dostatecznem jest, aby $R(f,\ g)=0$ wszystkie podwyznaczniki 1^{sze}, 2^{gie}, ..., $(k-1)^{sze}$ były $=0$, z podwyznaczników zaś k^{tych} nie wszystkie były zerem.*

Łącząc to twierdzenie z twierdzeniem III. — art. 58 — tego samego znaczenia wnosimy:

III. *Gdy w rugowniku $R(f, g)=0$ okazuje się $\Delta_1=\Delta_2=...=\Delta_{k-1}=0$, $\Delta_k \neq 0$, to jego wszystkie 1^{sze}, 2^{gie}, ..., $(k-1)^{sze}$ podwyznaczniki znikają a z k^{tych} podwyznaczników nie wszystkie są $=0$. Odwrócenie tego jest także prawdziwe.*

60. Obliczenie największego wspólnego podzielnika z samego rugownika $R=0$. Największy wspólny podzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność n funkcyj ($n>2$). Postarajmyż się teraz o wyznaczenie największego wspólnego podzielnika $t(x)$ w formie $(m, n, k+1)$ z samego rugownika.

W tym celu weźmy dla uproszczenia funkcye f, g z art. 57., $[m=5, n=3]$, a w $R(f, g)=0$ o 8^2 elementach pomnóżmy wyrazy pionu 1^{go}, 2^{go}, ..., 7^{go} odpowiednio przez x^7, x^6, ..., x i dodajmy do odpowiednich wyrazów pionu ostatniego. Dostaniemy wtedy:

$$R(f, g)=\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & 0, & x^2f(x) \\ 0, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & x\,f(x) \\ 0, & 0, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & f(x) \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & 0, & 0, & 0, & x^4g(x) \\ 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & 0, & 0, & x^3g(x) \\ 0, & 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & 0, & x^2g(x) \\ 0, & 0, & 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & x\,g(x) \\ 0, & 0, & 0, & 0, & b_0, & b_1, & b_2, & g(x) \end{vmatrix}=0.$$

Po rozwinięciu podług ostatniego pionu mieć będziemy:

$$R(f, g)=f(x)\,[c_0x^2+c_1x+c_2]+g(x)\,[d_0x^4+d_1x^3+d_2x^2+d_3x+d_4]=0,$$

co wskazuje, że rugownik R dwóch funkcyj f, g (bez względu, czy ma być $=0$, czy nie) daje się zawsze przedstawić liniowo jednorodnie przez funkcye f, g i jest $=(m, n, 1)$.

Gdy przy $R=0$ jest $\Delta_1 \neq 0$, a odrzucimy z wyznacznika $R(f, g)$ danego w pierwotnej formie (B), [art. 57.], ostatni wiersz z elementami a_s, ostatni wiersz z elementami b_s i ostatni pion, to po wydaleniu tych elementów pozostanie prostokątny schemat:

$$S_1 \cdots \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}.$$

Utwórzmy z niego wyznacznik o 6^2 elementach:

$$(\mathrm{I.})\qquad R_1=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5x+0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4x+a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0x+0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0x+0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3x+0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2x+b_3 \end{vmatrix}=\Delta_1x+\Delta'.$$

Pomnóżmy wyrazy pionu 1^{go}, 2^{go}, ..., 5^{go} odpowiednio przez x^6, x^5, ..., x^2 i dodajmy do odpowiednich wyrazów pionu ostatniego, to stąd dostaniemy:

$$R_1=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & xf(x) \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & f(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & x^3g(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & x^2g(x) \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & xg(x) \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & g(x) \end{vmatrix}=$$

$$(\beta)\qquad =f(x)\,[c'_0x+c'_1]+g(x)\,[d'_0x^3+d'_1x^2+d'_2x+d'_3]=\Delta_1x+\Delta'_1\,;$$

[Δ_1 należy do wyznaczników Δ_α określonych w art. 58].

Ponieważ $\Delta_1 \neq 0$ założono, więc (β) jest wyrażeniem (m, n, 2) n i e z n i k a j ą c e m i d e n t y c z n i e, a że jest stopnia 1^{go}, więc — [tw. II., art. 58.] — mamy $t(x)=\Delta_1x+\Delta'_1$, co zn. że funkcye f, g mają taki właśnie największy wspólny podzielnik.

Przyjmijmy $R=\Delta_1=0$, $\Delta_2 \neq 0$ i odrzućmy z wyznacznika $R=0$ danego znowu w pierwotnej formie (B) dwa ostatnie wiersze z elementami a_s, dwa ostatnie wiersze z elementami b_s i dwa ostatnie piony. Pozostałe elementa utworzą schemat:

$$S_2\ldots\ \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{Bmatrix},$$

z którego utwórzmy wyznacznik:

$$(\mathrm{II.})\qquad R_2=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3x^2+a_4x+a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3x^2+0.x+0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2x^2+b_3x+0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1x^2+b_2x+b_3 \end{vmatrix}=\Delta_2x^2+\Delta'_2x+\Delta''_2.$$

Pomnóżmy tu wyrazy pionu 1^{go}, 2^{go}, 3^{go} odpowiednio przez x^5, x^4, x^3 i dodajmy je do opowiednich wyrazów pionu ostatniego, to dostaniemy także:

$$R_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & f(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & x^2 g(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & x\,g(x) \\ 0 & 0 & b_0 & g(x) \end{vmatrix} =$$

$$(\gamma) \qquad f(x)\,c_0'' + g(x)\,[d_0''x^2 + d_1''x + d_2''] = \Delta_2 x^2 + \Delta_2' x + \Delta_2''.$$

W razie $\Delta_2 \neq 0$, mamy w (γ) wyrażenie $(m, n, 3)$, nieznikające identycznie, a że jest stopnia 2go, więc $t(x) = \Delta_2 x^2 + \Delta'_2 x + \Delta''_2$.

W razie $R = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, a $\Delta_3 \neq 0$, zwracamy się do utworzenia wyrażenia $(m, n, 4)$ przez odrzucenie z $R(f, g)$ trzech ostatnich wierszy z a_s, trzech ostatnich wierszy z b_s i trzech ostatnich pionów i t. d. W ten sam sposób postępować należy i w każdym innym razie*).

Pd. 1. W Pd. 1. — art. 57. — okazaliśmy już, że $R = 0$. Dalej okaże się:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -6 & -5 \\ 2 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -16.$$

Stąd wynika, że:

$$t(x) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -6x^2 - 5x + 6 \\ 2 & 3 & -2x^2 - 3x + 0 \\ 0 & 2 & 3x^2 - 2x - 3 \end{vmatrix} = -16x^2 - 8x + 24,$$

albo $t(x) = 2x^2 + x - 3$.

Pd. 2. Tą samą metodą znaleść $t(x)$ funkcyj rozważanych w Pd. 2. art. 57.

Pd. 3. W Pd. 3. — art. 57. — okaże się oprócz $R(f, f') = 0$, jeszcze $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, a $\Delta_3 = -54$, a więc:

$$t(f, f') = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5x^3 + x^2 + 8x + 4 \\ 5 & -4 & -15x^3 + 2x^2 + 8x + 0 \\ 0 & 5 & -4x^3 + 15x^2 + 2x + 8 \end{vmatrix}$$

$$= -54.x^3 + 3.54.x + 2.54, \text{ albo } t(f, f') = x^3 - 3x - 2.$$

Pd. 4. Gdy utworzymy rugownik równań $x^4 - 1 = 0$, $b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0$ i w nim dodamy pion 5ty do 1go, 6ty do 2go, 7my do 3go, dostaniemy:

---

*) Baltzer. *Theorie und Anwendung der Determinanten* [5te wydanie 1881.] str. 117, 118.

Por. dalej: Wł. Kretkowski. Przyczynek do teoryi eliminacyi. Prace mat. fizyczne. T. 2. str. 21—32.

Lemonnier. *„Thérèmes concernant les équations, qui ont des racines communes. Comptes Rendus.* T. 80. str. 111.

Ventéjols. *„Sur un problème comprenant la théorié de l'élimination.* C. R. T. 84. str. 546.

P. Mansion. *Sur l'élimination.* C. R. T. 87. str. 975.

$$(\alpha)\quad R=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_3 & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \end{vmatrix} = b_0^4 + \dots$$

Gdy ε jest jednym z pierwiastków równania $x^4-1=0$, a ostatnią formą rugownika przetworzymy tak, że teraz:

$$R=\begin{vmatrix} b_0+b_1\varepsilon+b_2\varepsilon^2+b_3\varepsilon^3, & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_3+b_0\varepsilon+b_1\varepsilon^2+b_2\varepsilon^3, & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_2+b_3\varepsilon+b_0\varepsilon^2+b_1\varepsilon^3, & b_3 & b_0 & b_1 \\ b_1+b_2\varepsilon+b_3\varepsilon^2+b_0\varepsilon^3, & b_2 & b_3 & b_0 \end{vmatrix}$$

, to z uwagi, że

$$b_3+b_0\varepsilon+b_1\varepsilon^2+b_2\varepsilon^3=\varepsilon(b_0+b_1\varepsilon+b_2\varepsilon^2+b_3\varepsilon^3)=\varepsilon\beta$$
$$b_2+b_3\varepsilon+b_0\varepsilon^2+b_1\varepsilon^3=\varepsilon^2\beta$$
$$b_1+b_2\varepsilon+b_3\varepsilon^2+b_0\varepsilon^3=\varepsilon^3\beta,$$ dostaniemy:

$$R=(b_0+b_1\varepsilon+b_2\varepsilon^2+b_3\varepsilon^3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \varepsilon^1 & b_0 & b_1 & b_2 \\ \varepsilon^2 & b_3 & b_0 & b_1 \\ \varepsilon^3 & b_2 & b_3 & b_0 \end{vmatrix}$$

Takie przekształcenie rugownika R da się przeprowadzić za użyciem każdego z 4 pierwiastków ε. Utwórzmyż iloczyn:

$$(\beta)\qquad \prod_{\varepsilon}(b_0+b_1\varepsilon+b_2\varepsilon^2+b_3\varepsilon^3)=b_0^4+\dots,$$

to z (α) i (β) wynika:

$$R=\prod_{\varepsilon}(b_0+b_1\varepsilon+b_2\varepsilon^2+b_3\varepsilon^3),$$

gdyż R z jednej strony zawierać musi każdy z czynników $[b_0+b_1\varepsilon+b_2\varepsilon^2+b_3\varepsilon^3]$, a z drugiej strony przy b_0^4 ma mieć spółczynnik $+1$.

Gdy danych funkcyj jest więcej niż dwie n. p. $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, a posiadają największy wspólny podzielnik $t(x)$, to go znajdujemy w ten sposób:

Wyznaczamy największy wspólny podzielnik:

t_{12} funkcyj f_1, f_2
t_{23} „ f_2, f_3
t_{34} „ f_3, f_4.

Dalej szukamy największego wspólnego podzielnika:

τ_2 funkcyj t_{12}, t_{23}
τ_3 „ t_{23}, t_{34}.

Największy wspólny podzielnik funkcyj τ_2, τ_3 będzie żądanym podzielnikiem $t(x)$ danych funkcyj.

Zauważmy te same funkcye f_1, f_2, f_3, f_4 i położmy:

$$f_1 = th_1, \ f_2 = th_2, \ f_2 = th_3, \ f_4 = th_4,$$

gdzie h_1, h_2, h_3, h_4 sąto całkowite wymierne funkcye jakie z podzielenia danych funkcyj przez ich największy podzielnik t wynikają, to wtedy funkcyę $T(x) = th_1 h_2 h_3 h_4$ nazywamy najmniejszą wspólną wielokrotnością danych funkcyj. Jest to funkcya najniższego stopnia podzielna przez f_1, f_2, f_3, f_4.

Gdy dane funkcye są niewspółmierne, to $T(x) = f_1 . f_2 . f_3 . f_4$.

ROZDZIAŁ V.

O wymiernych funkcyach ułamkowych jednej zmiennej.

61. Określenia. Miejsca zerowe i nieskończonościowe i wartości funkcyi ułamkowej $u(x)$. Poznaliśmy dotąd własności funkcyi wymiernej całkowitej jednej zmiennej jako najprostszej formy łączącej ilości stałe ze zmiennym argumentem. Przejdźmy teraz do innej, ogólniejszej formy, a to do funkcyi wymiernej ułamkowej

$$(1) \qquad u(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}, \quad m \gtreqless n.$$

Jest ona najogólniejszym rezultatem łączenia pewnych stałych ilości ze zmienną x za pomocą już wszystkich czterech działań arytmetycznych, a jako iloraz dwóch funkcyj jednoznacznych jest sama jednoznaczną funkcyą.

Funkcyę $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = f(x)$ nazywamy licznikiem, a funkcyę $b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = g(x)$ mianownikiem funkcyi $u(x)$ i przyjmujemy raz na zawsze, że $f(x)$, $g(x)$ są względem siebie pierwsze. Do takiej bowiem „najprostszej formy“ można zawsze każdą wymierną ułamkową funkcyę sprowadzić odrzucając z licznika i mianownika największy ich wspólny podzielnik.

Przy takiem założeniu nie mają funkcye $f(x)$, $g(x)$ wspólnych pierwiastków, [art. 57. tw. I.] tak, że gdy

$$(2) \quad f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m), \quad g(x) = b_0 (x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n),$$

to żadno z miejsc α_1, α_2, ..., α_m nie jest identyczne z żadnem z miejsc β_1, β_2, ..., β_n.

Uwzględniając tylko skończone wartości argumentu x widzimy odrazu z (1) i (2) że $u(x)$ jest zerem na m miejscach:

$$(a) \qquad \alpha_1, \ \alpha_2 \ \ldots, \ \alpha_m$$

i jest wszędzie skończoną i oznaczoną w skończoności z wyjątkiem miejsc zerowych mianownika:

(b) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n,$

na których staje się nieskończonością. Miejsca (a) nazywają się zerowemi, a miejsca (b) nieskończonościowemi funkcyi $u(x)$.

Jeżeli w szeregu (a) lub (b) pewne miejsce powtarza się ν razy, to je nazywamy ν-krotnem zerowem lub nieskończonościowem. Uważamy je za ν miejsc spadających na siebie i powiadamy, że funkcya na tem miejscu znika, albo jest nieskończonością ν razy, albo w ν^{tym} stopniu. Z tego wynika, że funkcya $u(x)$ jest w skończoności tyle razy zerem, ile stopień licznika zawiera jednostek, a tyle razy nieskończością, ile jednostek zawiera stopień mianownika.

Uwzględnijmy obok wszystkich skończonych x jeszcze i punkt $x=\infty$ i zbadajmy funkcyą $u(x)$ w tym punkcie. Napiszmy:

$$u(x)=x^{m-n}\frac{a_0+a_1\frac{1}{x}+\ldots+a_m\frac{1}{x^m}}{b_0+b_1\frac{1}{x}+\ldots+b_n\frac{1}{x^n}},$$ to stąd mamy:

$$(3)\qquad u(x)_{x=\infty}=\frac{a_0}{b_0}.\,x^{m-n}\Big]_{x=\infty},$$ a więc:

gdy $m=n$, to $u(x)_{x=\infty}=\frac{a_0}{b_0}$, skończona wartość $\neq 0$,

„ $m>n$ „ „ $=\infty$ $(m-n)$ razy*)

„ $m<n$ „ „ $=0$ $(n-m)$ „

a to znaczy:

I. *Funkcya $u(x)$ staje się w całym, nieograniczonym obszarze swego argumentu zawsze tyle razy zerem i tyle razy nieskończonością, ile jednostek zawiera niemniejszy ze stopni funkcyj $f(x)$, $g(x)$, a mianowicie: gdy $m=n$, mamy tylko miejsca (a) i (b), gdy $m>n$, mamy miejsca (a) (b) i jeszcze $(m-n)$ miejsc nieskończonościowych w nieskończoności, gdy $m<n$, to prócz (a) i (b) mamy jeszcze $(n-m)$ miejsc zerowych w nieskończoności.*

Gdy $c\neq 0$ jest skończoną, dowolną ilością to równaniem:

$$(4)\qquad u(x)=c$$

*) Wyrażamy się w ten sposób dlatego, że funkcya $\frac{a_0}{b_0}x^{m-n}$ jest przy $m>n$ wymierną całkowitą stopnia $(m-n)$ i staje się dla $x=\infty$ nieskończonością $(m-n)$ razy [art. 51. tw. V.].

żądamy tych miejsc, na których funkcya ma wartość c. Ponieważ na tych miejscach nie będzie z pewnością $g(x)=0$ (gdyż c założyliśmy skończone), to możemy równanie (4) pomnożyć przez $g(x)$ i napisać je w postaci:

$$(5) \qquad f(x)-c\,.\,g(x)=0.$$

Równanie to ma taki stopień, ile jednostek niemniejszy ze stopni funkcyj $f(x)$, $g(x)$ zawiera. Na tylu też miejscach leżących w skończoności (przy c skończonem, $\neq 0$) będzie $u(x)=c$.

Dołączając tu jednak i wartości $c=0$, $c=\infty$ i uwzględniając twierdzenie I., powiemy:

II. *Funkcya $u(x)$ przybiera w nieograniczonym obszarze swego argumentu każdą dowolną wartość — a więc i wartości 0 i ∞ — zawsze na tylu miejscach ile jednostek niemniejszy ze stopni funkcyj $f(x)$, $g(x)$ wynosi.*

62. Ciągłość i pochodne funkcyi $u(x)$. Niech x będzie miejscem leżącem w skończoności a różnem od wszystkich miejsc nieskończonościowych β_λ, $\lambda=1, 2, \ldots n$, funkcyi $u(x)$. Połóżmy $x+h$, za x, gdzie h jest dowolnym dodatkiem, to różnica

$$(a) \qquad u(x+h)-u(x)=\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$=\frac{g(x)[f(x)+f'(x)h+\ldots]-f(x)[g(x)+g'(x)h+\ldots]}{g(x+h)\,g(x)}.$$

Możemy to napisać krótko:

$$(b) \qquad u(x+h)-u(x)=h\frac{g(x)\,f'(x)-f(x)\,g'(x)+h\,.\,H(x,h)}{g(x+h)\,.\,g(x)},$$

gdzie $H(x,h)$ jest funkcyą całkowitą wymierną ilości h ze spółczynnikami przedstawiającymi się jako takież funkcye obranego miejsca x.

Gdy przyjmiemy $|h|$ tak małe, że $x+h$ nie jest żadnem z miejsc β_λ, to różnica $u(x+h)-u(x)$ jest skończoną. Dalej mamy

$$(c) \qquad |u(x+h)-u(x)|=|h|\,.\left|\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)+hH(x,h)}{g(x+h)g(x)}\right|.$$

Obierzmy dowolnie małą dodatnią ilość δ_1 i zażądajmy, aby

$$(a') \qquad |u(x+h)-u(x)|<\delta_1$$

było, to widocznie temu zadość uczynimy obierając

$$(b') \qquad |h|<\delta,$$

a więc dowolnie małe, nieprzechodzące pewnej dowolnie małej granicy δ.

Tę własność funkcyi $u(x)$ określamy i tu mówiąc: funkcya $u(x)$ jest ciągłą dla wszelkich skończonych x z wyjątkiem jej miejsc nieskończonościowych.

Z równania (b) wynika dalej:

$$(d) \qquad \lim_{h=0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Tę granicę nazywamy (na wzór takiej granicy w teoryi funkcyi całkowitej wymiernej [art. 48.]) pochodną (pierwszą) funkcyi $u(x)$ i naznaczamy ją przez $u'(x)$ albo $\frac{du(x)}{dx}$ albo wreszcie przez $\frac{d}{dx}u(x)$.

Gdy w (d) przyjmiemy x jako zmienny argument, to powiemy: pierwsza pochodna funkcyi $u(x)$ jest skończoną i oznaczoną na wszystkich miejscach x leżących w skończoności z wyjątkiem jej miejsc nieskończonościowych. (Jej wartość nie zależy od sposobu, w jaki h na płaszczyźnie x zdąża do zera).

Pochodna ta jest znowu funkcyą wymierną ułamkową. Możemy więc tworzyć znowu jej pochodną i nazwać ją drugą pochodną funkcyi $u(x)$. Pochodna tej drugiej pochodnej będzie trzecią pochodną funkcyi $u(x)$ i t. d. bez końca. To znaczy: z funkcyi $u(x)$ można tworzyć pochodne aż do stopnia nieskończonego:

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3}, \quad \ldots$$

Wszystkie są funkcyami wymiernemi ułamkowemi i wszystkie mają miejsca nieskończonościowe β_λ.

Gdy α_λ jest ν-krotnem pierwiastkiem licznika $f(x)$, to jest ν-krotnem miejscem zerowem funkcyi $u(x)$. Prócz $f(\alpha_\lambda)=0$ mamy wtedy także $f'(\alpha)_\lambda=0$, a — jak z równania (d) widać — mamy wtedy prócz $u(\alpha_\lambda)=0$ jeszcze równocześnie i $u'(\alpha_\lambda)=0$. Lecz i naodwrót, gdy $u(\alpha_\lambda)=0$ i $u'(\alpha_\lambda)=0$, to α_λ jest niezawodnie powtarzającem się miejscem zerowem funkcyi $u(x)$. Tworząc dalej pochodnę drugą, trzecią i t. d. przekonać się można, że: gdy α_λ jest ν-krotnem miejscem zerowem funkcyi $u(x)$, to wtedy:

$$u(\alpha_\lambda)=0, \; u'(\alpha_\lambda)=0, \ldots u^{(\nu-1)}(\alpha_\lambda)=0, \; u^{(\nu)}(\alpha)\neq 0.$$

Odwrócenie tego twierdzenia jest również prawdziwe.

63. Warunki potrzebne do zupełnego wyznaczenia funkcyi $u(x)$. Widzieliśmy, że funkcya $u(x)$ ma tylko m miejsc zerowych leżących w skończoności, a n miejsc nieskończonościowych leżących również w skończoności.

Żądając, aby funkcya $u(x)$ na $(m+1)$ miejscach leżących w skończoności przybierała wartość zero, musimy dostać identycznie $u(x)=0$, gdyż licznik takiej funkcyi będzie identycznie zerem. Podobnie żądając, aby $u(x)=\infty$ na $(n+1)$ miejscach leżących w skończoności musimy dostać identycznie $u(x)=\infty$, gdyż mianownik takiej funkcyi jest identycznie zerem. To znaczy:

I. *Funkcya $u(x)$ o liczniku stopnia m, a mianowniku stopnia n, któraby na $(m+1)$ lub więcej miejscach leżących w skończoności była zerem, albo na $(n+1)$ lub więcej miejscach leżących w skończoności była $=\infty$, nie istnieje. Jest ona w pierwszym przypadku zerem, a w drugim nieskończonością na całej płaszczyźnie argumentu x.*

Naznaczmy większą z liczb m, n przez μ i zażądajmy, aby $u(x)$ na $(\mu+1)$ miejscach leżących w skończoności miała wartość c, skończoną i różną od zera. Równanie

$$(a) \qquad f(x)-c\,.\,g(x)=0 \quad \mu^{\text{go}} \text{ stopnia}$$

ma wtedy $(\mu+1)$ pierwiastków, jest identycznem a wskutek tego mamy $u(x)=c$.

Gdy n. p. $m>n$ jest, to z identycznego równania (a) dostajemy:

$$a_0=0,\ a_1=0,\ \ldots,\ a_{n-m-1}=0,$$
$$a_{n-m}=c\,b_0,\ a_{n-m+1}=c\,b_1,\ \ldots,\ a_m=c\,b_n;$$

stąd widocznie (a analogicznie i w razie $m\leqq n$) wynika $u(x)=c$. To znaczy:

II. *Funkcya wymierna ułamkowa $u(x)$, w której ze stopni m, n niemniejszy jest μ, a która na $(\mu+1)$, lub więcej miejscach leżących w skończoności przybiera wartość c skończoną i różną od zera, redukuje się do tej stałej c.*

Zauważmy dwie funkcye wymierne ułamkowe:

$$(b) \qquad u(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad u_1(x)=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

o stopniach w licznikach i mianownikach (m, n), (m_1, n_1). Z tych funkcyj pierwsza niech będzie dana w najprostszej formie.

Przyjmijmy, że z sum $(m+n_1)$, (m_1+n) jest większą (a przynajmniej niemniejszą) suma $m+n_1$ i że obydwie funkcye (b) na

$(m+n_1+1)$ miejscach leżących w skończoności przybierają te same wartości $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m+n_1}$. W różnicy:

$$u(x)-u_1(x)=\frac{f(x)g_1(x)-f_1(x)g(x)}{g(x)\cdot g_1(x)}$$

dostajemy funkcyę ułamkową, której licznik jest stopnia $(m+n_1)$ i która na $(m+n_1+1)$ miejscach staje się zerem. Według tw. I. jest więc ta różnica identycznie zerem a równocześnie i jej licznik $f(x)\cdot g_1(x)-f_1(x)\cdot g(x)$ jest identycznie $=0$. Stąd wynika, że identycznie:

$$(c) \qquad f(x)\cdot g_1(x)=f_1(x)\cdot g(x), \text{ i że dalej}$$

$$m+n_1=m_1+n \text{ czyli } m_1-m=n_1-n.$$

Gdy więc $m_1=m+\alpha$, musi być równocześnie $n_1=n+\alpha$, co znaczy, że stopnie funkcyi u_1 muszą być o tę samą liczbę większe od stopni funkcyi u.

Połóżmy wyraźnie:

$$f(x)=f(x)_{m_1-\alpha}, \quad g(x)=g(x)_{n_1-\alpha},$$

gdzie znaczki wskazują stopnie tych funkcyj, to teraz identyczny związek (c) będzie miał postać:

$$f(x)_{m_1-\alpha}\cdot g_1(x)-g(x)_{n_1-\alpha}\cdot f_1(x)=0,$$

a to wskazuje, że funkcye f_1, g_1 mają największy wspólny podzielnik stopnia $\geqq \alpha$. Lecz, że f, g są funkcyami względem siebie pierwszemi, więc ten wspólny podzielnik $t(x)$ jest stopnia α^{go}. Mamy więc $f_1=t\cdot f$, $g_1=t\cdot g$ i identycznie $u_1(x)=u(x)$. Stąd twierdzenie:

III. *Funkcya $u_1(x)$, która z funkcyą $u(x)$ o najprostszej formie i o stopniach m, n te same wartości $u_0, u_1, \ldots u_{m+n}$ na $(m+n+1)$ miejscach leżących w skończoności przybiera, jest z $u(x)$ identyczną*, albo:

Wymierna ułamkowa funkcya, której licznik ma być stopnia m, a mianownik stopnia n, jest zupełnie wyznaczona, gdy na $(m+n+1)$ miejscach leżących w skończoności przyjmuje dane wartości $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m+n}$. Z $(m+n+1)$ owych wartości może ich być m — ale nie więcej — zerami, albo n — ale nie więcej — równych nieskończoności, albo μ — ale nie więcej — równych sobie.

W najprostszy sposób wyznaczają funkcyę $u(x)$ dane równocześnie: *a)* jej miejsca zerowe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ leżące w skończoności, *b)* jej miejsca nieskończonościowe $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ leżące w skończoności, *c)* jej wartość u_0 na miejscu x_0, różnem od miejsc α_λ, β_λ.

Danych miejsc mamy tu razem $(m+n+1)$, jak tego twierdzenie wymaga.

Dwa pierwsze warunki określają funkcyę o tyle, że:

$$(\alpha) \qquad u(x)=c.\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_m)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)...(x-\beta_n)}$$

a stała c jest dowolną. Z warunku trzeciego mamy:

$$c=u_0[(x_0-\beta_1)...(x_0-\beta_n)]/[x_0-\alpha_1)...(x_0-\alpha_m)].$$

Tę wartość c wstawiając w (α) dostajemy żądaną funkcyę.

Gdy żądamy funkcyi z zerowemi miejscami $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, a przybierającej wartości:

$$(\beta) \qquad u_0, u_1, ..., u_{n+1}$$

na miejscach:

(γ) $\qquad x_0, x_1, ..., x_{n+1}$, różnych od α_λ, to jej licznik $f(x)$ możemy położyć $=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_m)$. Co się tyczy jej mianownika $g(x)$, to go z warunków:

$$g(x_\lambda)=\frac{f(x_\lambda)}{u_\lambda}, \quad \lambda=0, 1, 2, ..., n,$$

wyznaczyć możemy, przedstawiając go formą (L) lub (L') [art. 52.] lub wreszcie formą (M) [art. 53.].

Gdy dane będą wartości (β) i miejsca nieskończonościowe $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, to możemy naprzód $[u(x)]^{-1}$ wyznaczyć, a potem utworzyć $u(x)$.

64. Wyznaczanie funkcyi z danych warunków. Przejdźmy teraz do najogólniejszego wyznaczenia funkcyi $u(x)$ z danych jej wartości:

(U) $\qquad u_0, u_1, u_2, ..., u_{m+n}$ na miejscach:

(X) $\qquad x_0, x_1, x_2, ..., x_{m+n}$.

A. Między miejscami (X) nie ma powtarzających się.

Gdy ma być $u(x)=f(x)/g(x)$, to przy danych warunkach prócz równania:

$$(1) \qquad u.g(x)-f(x)=0$$

mają się jeszcze spełnić równania:

$$(2) \qquad u_\lambda.g(x_\lambda)-f(x_\lambda)=0, \quad \lambda=0, 1, 2, 3, ..., m+n.$$

[Dla krótkości piszemy u zamiast $u(x)$].

Wszystkich równań (1), (2) mamy tu $m+n+2$. Są one liniowe, jednorodne ze względu na $m+n+2$ ilości:

$$a_0, a_1, ..., a_m; \ b_0, b_1, ..., b_n,$$

a te eliminując, dochodzimy do wyznacznika:

$$(3) \qquad D_1(u, x)=0.$$

*

Z jego rozwinięcia — pozostawiając u ze spółczynnikiem $=1$ na jednej stronie — dostajemy żądaną funkcyę u.

Pd. 1. Przyjmując $m=n=1$ mamy:

$$D_1 = \begin{vmatrix} u, & u\,x, & 1, & x \\ u_0, & u_0 x_0, & 1, & x_0 \\ u_1, & u_1 x_1, & 1, & x_1 \\ u_2, & u_2 x_2, & 1, & x_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ a stąd:}$$

$$u = \frac{\dfrac{u_0 u_1}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)}(x - x_2) + \dfrac{u_1 u_2}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}(x - x_0) + \dfrac{u_2 u_0}{(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)}(x - x_1)}{\dfrac{u_0(x_0 - x)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \dfrac{u_1(x_1 - x)}{(x_1 - x_0\,(x_1 - x_2)} + \dfrac{u_2(x_2 - x)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}}$$

Por. Serret J. A. Algebra w niem. tłóm. Wertheima, wyd. 2. T. I., str. 426.

Forma funkcyi $u(x)$, jaka powstaje z rozwinięcia wyznacznika (3) nazywa się interpolacyjną formą Cauchy'ego.*)

B. Między miejscami (X) znajdują się równe między sobą.

Przyjmijmy dla uproszczenia, że $m=3$, $n=2$ i że,

$$u=(a_0 x^3+\ldots+a_3)\,/\,(b_0 x^2+b_1 x+b_2) \quad \text{ma:}$$

1^0 na 3 miejscach x_0 być $=u_0$;

2^0 na 2 „ x_1 „ $=u_1$;

3^0 na jednem miejscu x_2 „ $=u_2$.

Mamy tu przedewszystkiem:

$$(\alpha) \qquad f(x)-ug(x)=0.$$

Równanie $f(x)-u_0 g(x)=0$ ma trzykrotny pierwiastek x_0, a wskutek tego mamy związki:

$$(\beta) \quad f(x_0)-u_0 g(x_0)=0, \quad f'(x_0)-u_0 g'(x_0)=0, \quad f''(x_0)-u_0 g''(x_0)=0.$$

Równanie $f(x)-u_1 g(x)=0$ będzie miało dwukrotny pierwiastek x_1, a więc spełnią się relacye:

$$(\gamma) \qquad f(x_1)-u_1 g(x_1)=0, \quad f'(x_1)-u_1 g'(x_1)=0.$$

Z trzeciego warunku dostajemy:

$$(\delta) \qquad f(x_2)-u_2 g(x_2)=0.$$

Z równań (α), (β), (γ), (δ) eliminując $-b_2$, $-b_1$, $-b_0$, a_3, a_2, a_1, a_0 mamy wyznacznik $D_2(u,x)=0$, który znowu, jak w pierwszym razie daje żądaną funkcyę u.

Pd. 2. Wyznaczyć funkcyę $u(x)$ o stopniach $m=1$, $n=2$, która
na dwukrotnem miejscu $x_0=3$ ma wartość $u_0=1$
„ „ „ $x_1=2$ „ „ $u_1=5$.

[Odp. $u=\dfrac{25-10x}{-11+14x-4x^2}$].

---

*) *Cours d'Analyse.* Note V., str. 325 [r. 1821].

65. Rozkład na ułamki częściowe funkcyi $u(x)$ danej w najprostszej formie. Dana ułamkowa funkcya $u_1(x)$ niech ma mianownik n^{go} stopnia:

$$Q(x)=q_0x^n+q_1x^{n-1}+\ldots+q_n=q_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$
$$=q_0\varphi(x);\quad \varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Jej licznik $P_1(x)$ niech będzie stopnia m. Przyjmując $m\geqq n$, podzielmy $P_1(x)$ przez $Q(x)$, to dostaniemy:

$$(a)\qquad P_1(x)=Q(x).G(x)+P(x),$$

gdzie $P(x)$, jako reszta [art. 54.] jest funkcyą $(n-1)^{go}$, albo niższego stopnia. Z relacyi (a) dostajemy $u_1(x)=G(x)+P(x)/Q(x)$ gdzie $G(x)$ jest funkcyą całkowitą stopnia $(m-n)$, a drugi dodajnik

$$(b)\qquad u(x)=P(x)/Q(x)$$

jest tak zwaną ułamkową funkcyą właściwą i posiada te same miejsca nieskończonościowe, co funkcya $u_1(x)$. [W razie $m<n$, dana funkcya $u_1(x)$ jest już odrazu właściwą].

Gdy $P_1(x)$ i $Q(x)$ nie mają żadnego wspólnego podzielnika, to także — jak z równania (a) wynika — $P(x)$ i $Q(x)$ są względem siebie pierwsze, a funkcya $u(x)$ — co tu założymy — jest w najprostszej formie.

Napiszmy: $u(x)=q_0{}^{-1}P(x)/\varphi(x)$ i przyjmijmy naprzód, że: miejsca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wszystkie różne między sobą.

Do $P(x)$ możemy zastosować wtedy formę Lagrange'a (L_1) [art. 52.] tak, że mieć będziemy:

$$(c)\qquad q_0{}^{-1}P(x)=\varphi(x)\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{q_0{}^{-1}P(x_\lambda)}{(x-x_\lambda)\,\varphi'(x_\lambda)}=\varphi(x)\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{P(x_\lambda)}{(x-x_\lambda)\,Q'(x_\lambda)}.$$

Połóżmy:

$$(d)\qquad P(x_\lambda)/Q'(x_\lambda)=A_\lambda,\ \lambda=1,2,\ldots,n,$$

to dzieląc równanie (c) przez $\varphi(x)$, dostajemy:

$$(e)\qquad u(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n},$$

a stąd przechodzimy do $u_1(x)$ za dodaniem $G(x)$. To znaczy:

I. *Funkcyę ułamkową $u_1(x)$ o n jednokrotnych miejscach nieskończonościowych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ można zawsze przedstawić sumą złożoną z funkcyi całkowitej (która się do zera redukować może) i z sumy n „częściowych ułamków" postaci $A_\lambda/(x-x_\lambda)$.*

Liczniki A_λ są stałe i określone równościami (d).

Takie przedstawienie funkcyi $u_1(x)$ nazywa się jej rozkładem na ułamki częściowe.

Przyjmijmy, że inną metodą postępując, dostajemy:

$$(e') \qquad u(x)=\frac{A'_1}{x-x_1}+\frac{A'_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A'_n}{x-x_n},$$

gdzie tu liczniki A'_1, A'_2, ..., A'_n różne są od liczników obliczonych w (e) przez zastosowanie formy Lagrange'a. Połóżmy:

$$u(x)-A_\lambda/(x-x_\lambda)=H(x), \quad u(x)-A'_\lambda/(x-x_\lambda)=H'(x),$$

to mamy: $u(x)=$

$$(f) \qquad H(x)+\frac{A_\lambda}{x-x_\lambda}=H'(x)+\frac{A'_\lambda}{x-x_\lambda}$$

a $H(x)$, $H'(x)$ są funkcyami skończonemi na miejscu x_λ.

Przyjmując $A_\lambda \neq A'_\lambda$, dostalibyśmy z (f) związek:

$$H(x)=H'(x)+(A'_\lambda-A_\lambda)/(x-x_\lambda)$$

niemożliwy, bo $H(x)$ na miejscu x_λ jest skończone, podczas gdy drugi dodajnik po prawej stronie jest na miejscu x_λ nieskończonym. Musi więc być $A_\lambda=A'_\lambda$, $\lambda=1, 2, 3, \ldots, n$, a to znaczy:

II. *Funkcya $u(x)$ [a więc i $u_1(x)$] tylko w jeden sposób da się rozłożyć na ułamki częściowe.*

Gdy tak jest, to niech będzie $q_0^{-1}.P(x)=b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_n$, gdzie z początkowych spółczynników kilka ich może znikać i połóżmy $u(x)=$

$$\frac{b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_n}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n},$$

przyjmując A_1, A_2, ..., A_n jeszcze nieoznaczone.

Z tego równania, które ma być identycznością, dostajemy dalej:

$$\frac{b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_n}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}=\frac{A_1(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\ldots+A_n(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}$$

Mianowniki są tu identyczne; muszą więc być i liczniki identyczne, a ten wzgląd prowadzi do równań:

$$(S) \qquad \begin{aligned} &A_1+A_2+\ldots+A_n=b_1, \quad b_{21}A_1+b_{22}A_2+\ldots+b_{2n}A_n=b_2, \\ &b_{31}A_1+b_{32}A_2+\ldots+b_{3n}A_n=b_3, \ldots, b_{n1}A_1+b_{n2}A_2+\ldots b_{nn}A_n=b_n, \end{aligned}$$

w których lewe strony są-to spółczynniki przy x^{n-1}, x^{n-2}, ..., x, x^0 otrzymane z uporządkowania licznika

$$A_1(x-x_2)\ldots(x-x_n)+\ldots+A_n(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

podług potęg argumentu x.

Z tych równań obliczą się liczniki A_1, A_2, ..., A_n *)

---

*) Ten sposób rozkładania funkcyi na ułamki częściowe podał Dirksen. *Über die Zerfällung einer echt gebrochenen Function in einfache Brüche.* Crelle J. T. 1. str. 23. — Ten sam autor wyprowadza z rozkładu funkcyi formę interpolacyjną Lagrange'a por. *Bemerkung über die Lagrange'sche Interpolations-Formel.* Crelle J. T. 1. str. 221.

Nie ma obawy, aby wyznacznik pierwszych stron równań (S) okazał się zerem, gdyż — podług tw. II. — liczniki A_1, A_2, ... wypadają zawsze te same i całkiem jednoznaczne, jakąkolwiek metodą rozkładu dokonywamy. (Por. zresztą: Dirksen l. c.).

Gdy $b_1=0$, to mamy $A_1+A_2+...+A_n=0$, a stąd twierdzenie:

III. *W funkcyi, w której stopień mianownika przewyższa stopień licznika o 2, lub więcej jednostek, jest suma częściowych liczników zerem.*

Do definicyi (d) liczników A_λ można także dojść, nie używając formy Lagrange'a.

Wyjdźmy bowiem z identycznej równości (e), to w niej A_λ jako stałe pozostają te same przy każdej wartości x. Dla $x=x_\lambda$ mamy zaś z (e)

$$P(x_\lambda).\frac{x-x_\lambda}{Q(x)}\Big]_{x=x_\lambda}=A_\lambda, \text{ a że}$$

$$\frac{x-x_\lambda}{Q(x)}=\frac{1}{q_0(x-x_1)..(x-x_{\lambda-1})(x-x_{\lambda+1})...(x-x_n)}, \text{ więc}$$

$$\frac{x-x_\lambda}{Q(x_\lambda)}\Big]_{x=x_\lambda}=\frac{1}{Q'(x_\lambda)}, \text{ i } A_\lambda=P(x_\lambda)/Q'(x_\lambda),\ \lambda=1,\ 2, ..., n, \text{ jak wyżej.}$$

Jeżeli $q_0 \neq 1$ jest, to możemy rozkład na ułamki częściowe zastosować naprzód do funkcyi $v(x)=P(x)/\varphi(x)$ a potem z niej przejść do funkcyi $u(x)$.

Pd. 1. $u(x)=\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x-x_n}$, co otrzymujemy odrazu, wiedząc, że

$$\varphi'(x)=\sum_{\lambda=1}^{n}[(x-x_1)...(x-x_{\lambda-1})(x-x_{\lambda+1})...(x-x_n)].$$

Tutaj mamy: $A_1+A_2+\ldots+A_n=n=$ ilości pierwiastków mianownika.

Pd. 2. $u(x)=\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2-1}=(x+2)-\dfrac{x-3}{x^2-1}$;

$$\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}, \text{ gdyż}$$

$$A_1=\frac{x-3}{x-1}\Big]_{x=-1}=2,\ A_2=\frac{x-3}{x+1}\Big]_{x=1}=-1, \text{ a więc}$$

$$u(x)=(x+2)-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

Pd. 3. $u(x)=\dfrac{x^4+5x^2-3}{(x-1)(x-2)}=x^2+3x+12+\dfrac{30x-27}{(x-1)(x-2)}=$

$$=x^2+3x+12-\frac{3}{x-1}+\frac{33}{x-2}.$$

Pd. 4. $u(x)=\dfrac{n\,.\,x^{2m}}{x^{2n}+1}$, $\varphi(x)=x^{2n}+1$, $\varphi'(x)=2n.x^{2n-1}$. Zakładając $m<n$

mamy $m \leqq n-1$, a więc $2m \leqq 2n-2$, co znaczy, że w funkcyi $u(x)$ jest stopień mianownika o 2 lub więcej jednostek większy od stopnia licznika.

Równanie $x^{2n}+1=0$ ma same pierwiastki urojone

$$x_s = 1_{\frac{\pi}{2n}} \cdot 1_{\frac{2s\pi}{2n}} = 1_{\frac{\pi}{2n}} \cdot 1_{\frac{s\pi}{n}}, \quad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1.$$

Połóżmy $1_{\frac{\pi}{2n}} = v$, $1_{\frac{\pi}{n}} = \varepsilon$, gdzie widocznie ε jest pierwotnym pierwiastkiem równania $z^{2n}=1$, to mamy teraz krótko: $x_s = v\,.\,\varepsilon^s$. Pierwiastki $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$ mają urojone dodajniki dodatnie i są z pierwiastkami $x_{2n-1},\ x_{2n-2},\ \ldots,\ x_n$ po porządku sprzężone.

Rozkładając $u(x)$ na ułamki częściowe, dostaniemy licznik:

$$A_s = \left.\frac{n\,.\,x^{2m}}{2n\,.\,x^{2n-1}}\right]_{x=x_s} = \left.\frac{1}{2}\,x^{2m-2n+1}\right]_{x=x_s}, \text{ a że } x_s^{-2n} = -1, \text{ więc}$$

$$A_s = -\left.\frac{1}{2}\,.\,x^{2m+1}\right]_{x=x_s} = -\frac{1}{2}\,v^{2m+1}\,.\,\varepsilon^{s(2m+1)},\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1. \text{ Stąd}$$

$$(\alpha) \qquad \sum_{s=0}^{2n-1} A_s = -\frac{1}{2}\,v^{2m+1}\,.\sum_{s=0}^{2n-1} \varepsilon^{s(2m+1)} = 0 \text{ [art. 25., tw. I.]},$$

jak być powinno, gdyż tu $2m \leqq 2n-2$. Gdy $\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, to do pierwiastka x_α należy $A_\alpha = -\frac{1}{2}\,.\,v^{2m+1}\,\varepsilon^{\alpha(2m+1)}$, a do sprzężonego pierwiastka x_β należy licznik $A_\beta = -\frac{1}{2}\,.\,v^{-(2m+1)}\,\varepsilon^{-\alpha(2m+1)}$ gdyż A_β z A_α musi być sprzężone [art. 17. Pd. 2.]. Suma

$$\sum_\alpha A_\alpha = -\frac{1}{2}\,.\,v^{2m+1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\varepsilon^{\alpha(2m+1)} = -\frac{1}{2}\,.\,v^{2m+1}\,.\,\frac{1-\varepsilon^{n(2m+1)}}{1-\varepsilon^{2m+1}}.$$

Lecz $\varepsilon^{n(2m+1)} = 1_{\pi(2m+1)} = -1$, a więc

$$(\beta) \qquad \sum_\alpha A_\alpha = -\frac{1}{2}\,.\,v^{2m+1}\,.\,\frac{2}{1-\varepsilon^{2m+1}} = -\frac{v^{2m+1}}{1-\varepsilon^{2m+1}}$$

Wskutek związku (α) musi więc być:

$$(\gamma) \qquad \sum_\beta A_\beta = +\frac{v^{2m+1}}{1-\varepsilon^{2m+1}},$$

a że sumy (β), (γ) są sprzężone, więc muszą one być zarazem czysto urojone. W istocie tak jest; pomnóżmy bowiem licznik i mianownik ułamka $\frac{v^{2m+1}}{1-\varepsilon^{2m+1}}$ przez $\varepsilon^{-\frac{2m+1}{2}} = 1_{-\frac{2m+1}{2n}\pi} = v^{-(2m+1)}$, to dostaniemy:

$$\frac{1}{\varepsilon^{-\frac{2m+1}{2}} - \varepsilon^{+\frac{2m+1}{2}}} = -\frac{1}{2i}\,.\,\frac{2i}{\varepsilon^{\frac{2m+1}{2}} - \varepsilon^{-\frac{2m+1}{2}}} = -\frac{1}{2i}\left[\sin\frac{2m+1}{2n}\pi\right]^{-1},$$

a stąd wynika, że ostatecznie będzie:

$$\sum_\alpha A_\alpha = -\sum_\beta A_\beta = \frac{1}{2i}\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}\text{, i że}$$

$$i\left[\sum_\alpha A_\alpha - \sum_\beta A_\beta\right] = \frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

To znaczy: Gdy obliczymy częściowe liczniki A_s funkcyi $\frac{n \,.\, x^{2m}}{x^{2n}+1}$, pomnożymy każdy licznik A_s przez $\varepsilon_s = +1$, lub $= -1$ według tego, czy A_s należy do pierwiastka z dodatnią częścią urojoną lub odjemną tą częścią, to

$$(A)\qquad \sum_{s=0}^{2n-1} \varepsilon_s A_s = \frac{1}{i \,.\, \sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

Pd. 5. W funkcyi $u(x) = n \,.\, \frac{x^{m-1} - x^{m'-1}}{x^{2n}-1}$ zakładamy m, m' nieparzyste, dodatnie i $m-1 \leqq 2n-2$, $m'-1 \leqq 2n-2$.

Naznaczając pierwiastki równania $x^{2n}-1=0$ przez $x_s = 1_{\frac{s\pi}{n}}$, $s=0, 1, 2, \ldots,$ $2n-1$ okazać, że:

$$1^0.\ A_s = \frac{1}{2}\left[1_{\frac{ms\pi}{n}} - 1_{\frac{m's\pi}{n}}\right],\ s=0, 1, 2, \ldots, 2n-1; \sum_{s=0}^{2n-1} A_s = 0.$$

$$2^0.\ \sum_{s=0}^{n-1} A_s = \frac{1}{2}\left[-\frac{1_{-\frac{m}{2n}\pi}}{i\sin\frac{m}{2n}\pi} + \frac{1_{-\frac{m'}{2n}\pi}}{i\sin\frac{m'}{2n}\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cot g\,\frac{m'}{2n}\pi - \cot g\,\frac{m}{2n}\pi\right] = -\sum_{s=n}^{2n-1} A_s\text{, a więc}$$

$$(B)\qquad \sum_{s=0}^{n-1} A_s - \sum_{s=n}^{2n-1} A_s = \cot g\,\frac{m'\pi}{2n} - \cot g\,\frac{m\pi}{2n}\ {}^{*)}$$

66. Rozkład funkcyi z mianownikiem o powtarzających się pierwiastkach.

Dla uproszczenia przyjmijmy:

$$Q(x) = q_0 (x-x_1)^{\nu_1} (x-x_2)^{\nu_2} (x-x_3)^{\nu_3} = q_0\, \varphi(x)$$

Licznik $q_0^{-1} P(x)$ funkcyi $u(x) = q_0^{-1} P(x) / \varphi(x)$ możemy wtedy [art. 52.] przedstawić formą Lagrange'a (L_1'), tak że dostaniemy:

---

*) Co do funkcyj w Pd. 4. i 5. por. — G. F. Meyer — „*Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale*". (Lipsk 1871.) str. 74. i nast.

$$\frac{1}{q_0}P(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-x_1)^{\nu_1}}[A_{\nu_1}+A_{\nu_1-1}(x-x_1)+\ldots+A_1(x-x_1)^{\nu_1-1}]$$
$$+\frac{\varphi(x)}{(x-x_2)^{\nu_2}}[B_{\nu_2}+B_{\nu_2-1}(x-x_2)+\ldots+B_1(x-x_2)^{\nu_2-1}]$$
$$+\frac{\varphi(x)}{(x-x_3)^{\nu_3}}[C_{\nu_3}+C_{\nu_3-1}(x-x_3)+\ldots+C_1(x-x_3)^{\nu_3-1}].$$

Stąd wynika:

$$(a)\qquad u(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_{\nu_1}}{(x-x_1)^{\nu_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\ldots+\frac{B_{\nu_2}}{(x-x_2)^{\nu_2}}+$$
$$+\frac{C_1}{x-x_3}+\ldots+\frac{C_{\nu_3}}{(x-x_3)^{\nu_3}}.$$

Takie przedstawienie funkcyi $u(x)$ nazywa się i tu jej rozkładem na ułamki częściowe.

Przyjmijmy, że w inny sposób postępując dostajemy tę samą funkcyę przedstawioną podobną formą jak (a) i że w tej drugiej formie w miejsce:

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ (A_1,\ \ldots,\ A_{\nu_1}),\ (B_1,\ \ldots,\ B_{\nu_2}),\ (C_1,\ \ldots\ C_{\nu_3})$$

mamy:

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ (A'_1,\ \ldots,\ A'_{\mu_1}),\ (B'_1,\ \ldots,\ B'_{\mu_2}),\ (C'_1,\ \ldots\ C'_{\mu_3}).$$

Przedewszystkiem musi być $\mu_1=\nu_1$, gdyż tak z pierwszej jak drugiej formy musi wyniknąć x_1 jako miejsce nieskończonościowe tej samej krotności. Analogicznie da się wyrozumować, że $\mu_2=\nu_2$ $\mu_3=\nu_3$ być musi.

Połóżmy $u(x)-A_{\nu_1}/(x-x_1)^{\nu_1}=H(x)$, $u(x)-A'_{\nu_1}/(x-x_1)^{\nu_1}=H'(x)$ to mamy teraz

$$u(x)=H(x+\frac{A_{\nu_1}}{(x-x_1)^{\nu_1}},\quad u(x)=H'(x)+\frac{A'_{\nu_1}}{(x-x_1)^{\nu_1}}\quad \text{i}$$
$$H(x)-H'(x)=\frac{A'_{\nu_1}-A_{\nu_1}}{(x-x_1)^{\nu_1}}.$$

Różnica po lewej stronie jest na miejscu x_1 nieskończonością najwyżej w stopniu (ν_1-1) a nigdy w stopniu ν_1. Stąd pochodzi, że koniecznie być musi $A'_{\nu_1}=A_{\nu_1}$. Odrzućmyż z $u(x)$ tak w formie (a) jak w drugiej formie identyczny dodajnik $A_{\nu_1}/(x-x_1)^{\nu_1}$, to teraz do dodajników $A_{\nu_1-1}/(x-x_1)^{\nu_1-1}$, $A'_{\nu_1-1}/(x-x_1)^{\nu_1-1}$ da się to samo zastosować; dostaniemy więc $A_{\nu_1-1}=A'_{\nu_1-1}$, dalej $A_{\nu_1-2}=A'_{\nu_1-2}$, ... i wreszcie $A_1=A'_1$.

Analogicznie dowiedziemy, że:

$$B'_{\nu_2}=B_{\nu_2},\ B'_{\nu_2-1}=B_{\nu_2-1},\ \ldots,\ B'_1=B_1,$$
$$C'_{\nu_3}=C_{\nu_3},\ C'_{\nu_3-1}=C_{\nu_3-1},\ \ldots,\ C'_1=C_1.$$

Przez to i tu dowiedliśmy, że funkcya $u(x)$ da się tylko w jeden sposób rozłożyć na ułamki częściowe.

Pojmujmyż w równaniu (a) liczniki $A_1, \ldots, B_1, \ldots, C_1, \ldots$ jako jeszcze nieoznaczone stałe ilości i sprowadźmy prawą stronę do wspólnego mianownika, to mieć będziemy związek:

$$(b) \qquad \frac{q_0^{-1}P(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1\xi_{n-1}+\ldots+A_{\nu_1}\xi_{n-\nu_1}+B_1\eta_{n-1}+\ldots+B_{\nu_2}\eta_{n-\nu_2}+C_1\zeta_{n-1}+\ldots+C_{\nu_3}\zeta_{n-\nu_3}}{\varphi(x)},$$

w którym $\xi_{n-1}, \ldots \eta_{n-1}, \ldots, \zeta_{n-1}, \ldots$ są-to funkcye o takich stopniach, jak ich znaczki wskazują. Przy najwyższej potędze x mają wszystkie spółczynnik $=1$.

Gdy związek (b) zachodzić ma identycznie, a mianowniki po obydwu stronach są już identyczne, to i liczniki identyczne być muszą, a więc $q_0^{-1}P(x)=b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_n=$
$A_1\xi_{n-1}+\ldots+A_{\nu_1}\xi_{n-\nu_1}+B_1\eta_{n-1}+\ldots+B_{\nu_2}\eta_{n-\nu_2}+C_1\zeta_{n-1}+\ldots+C_{\nu_3}\zeta_{n-\nu_3}$.
Z tej identyczności dostaniemy — zrównując ze sobą spółczynniki przy równych potęgach x — dokładnie n liniowych równań:

$$(c) \quad L_1(A_1, \ldots, B_1, \ldots C_1, \ldots)=b_1,\ L_2(A_1, \ldots B_1, \ldots, C_1, \ldots)=b_2 \ldots$$
$$L_n(A_1, \ldots, B_1, \ldots C_1 \ldots,)=b_n$$

między n licznikami. Z tych równań dadzą się więc te liczniki całkiem dokładnie obliczyć. Liczniki A_1, B_1, C_1, nazywamy pierwszymi, A_2, B_2, C_2 drugimi... częściowymi licznikami i t. d.

Pierwszy ze związków (c) ma postać $A_1+B_1+C_1=b_1$ a gdy $b_1=0$, to mamy $A_1+B_1+C_1=0$, co znaczy:

I. *Gdy w funkcyi $u(x)$ stopień mianownika jest o dwie lub więcej jednostek większy od stopnia licznika, to suma pierwszych liczników jest zerem.*

Pd. 1. $u(x)=\frac{x+1}{(x-1)^3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}$. Tutaj równania ($c$) mają postać $A_1=0$, $-2A_1+A_2=1$, $A_1-A_2+A_3=1$ i dają $A_1=0$, $A_2=1$, $A_3=2$, a więc $u(x)=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$.

Pd. 2. Do każdej funkcyi $u(x)$ postaci $\frac{f(x)}{(x-x_1)^n}$ można także zastosować taką metodę:

Rozwijając $f(x)$ w otoczeniu punktu x_1, mamy:

$f(x)=f(x_1)+\frac{f(x_1)}{1!}(x-x_1)+\ldots+\frac{f^{n-1}(x_1)}{(n-1)!}(x-x_1)^{n-1}$. Wstawiając to rozwinięcie w $u(x)$ dostajemy:

$$u(x)=\frac{f^{(n-1)}(x_1)}{(n-1)!}\frac{1}{x-x_1}+\frac{f^{(n-2)}(x_1)}{(n-2)!}\frac{1}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{f(x_1)}{(x-x_1)^n}.$$

Zastosować ten sposób do Pd. 1.

Pd. 3. $u(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-3)^2(x+4)}=\dfrac{A_1}{x-3}+\dfrac{A_2}{(x-3)^2}+\dfrac{B}{x+4}.$

Równania (c) są tu: $A_1+B=1$, $A_1+A_2-6B=0$, $-12A_1+4A_2+9B=1$.

Z nich dostajemy:

$$A_1=\frac{32}{49},\quad A_2=\frac{70}{49},\quad B=\frac{17}{49}\quad \text{i}\quad u(x)=\frac{1}{49}\left[\frac{32}{x-3}+\frac{70}{(x-3)^2}+\frac{17}{x+4}\right].$$

67. Rozkład funkcyi nieskróconej na ułamki częściowe. W dwu ostatnich art. mówiliśmy o funkcyi $u(x)$ danej zawsze w najprostszej formie. Przyjmijmy teraz, że tak nie jest i że we wspólnym podzielniku licznika i mianownika funkcyi $u(x)$ zawiera się czynnik $(x-x_1)^\alpha$, $\alpha<\nu_1$. Połóżmy:

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\nu_1}}{(x-x_1)^{\nu_1}}=\frac{G_1(x)}{(x-x_1)^{\nu_1}},$$

a analogicznie $G_2(x)/(x-x_2)^{\nu_2}$, $G_3(x)/(x-x_3)^{\nu_3}$ niech będą sumami ułamków o licznikach B_λ i C_λ, to mamy: $u(x)=$

$$\frac{G_1(x)(x-x_2)^{\nu_2}(x-x_3)^{\nu_3}+G_2(x)(x-x_3)^{\nu_3}(x-x_1)^{\nu_1}+G_3(x)(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}}{q_0(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}(x-x_3)^{\nu_3}}.$$

W liczniku zawiera tu dodajnik drugi i trzeci niezawodnie czynnik $(x-x_1)^\alpha$. Stąd wynika, że i w pierwszym dodajniku musi $G_1(x)$ zawierać ten czynnik. Lecz

$$G_1(x)=A_{\nu_1}+A_{\nu_1-1}(x-x_1)+\ldots+A_1(x-x_1)^{\nu_1},$$

a ażeby żądany warunek się spełnił, musi być

$$A_{\nu_1}=A_{\nu_1-1}=\ldots=A_{\nu_1-(\alpha-1)}=0.$$

To znaczy, że jeżeli funkcyę $u(x)$ skrócić można przez $(x-x_1)^\alpha$ — a przez $(x-x_1)^{\alpha+1}$ już jej skrócić nie można — to w jej rozkładzie na ułamki częściowe dostajemy tylko:

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\nu_1-\alpha}}{(x-x_1)^{\nu_1-\alpha}}.$$

To samo dotyczy oczywiście i sum ułamków częściowych z mianownikami B_λ, C_λ; a wskutek tego funkcya $u(x)$, która się da skrócić najwyżej przez $(x-x_1)^\alpha.(x-x_2)^\beta.(x-x_3)^\gamma$, będzie po rozkładzie na ułamki częściowe miała postać:

$$u(x)=\frac{A_1}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_{\nu_1-\alpha}}{(x-x_1)^{\nu_1-\alpha}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\ldots+\frac{B_{\nu_2-\beta}}{(x-x_2)^{\nu_2-\beta}}$$
$$+\frac{C_1}{x-x_3}+\ldots+\frac{C_{\nu_3-\gamma}}{(x-x_3)^{\nu_3-\gamma}}.$$

Stąd twierdzenie:

I. *Rozkład na ułamki częściowe funkcyi $u(x)$ — bez różnicy, czy jej mianownik ma same różne czy i powtarzające się pierwiastki — daje zarazem poznać, czy funkcya jest dana w najprostszej formie, czy nie, i daje możność wyznaczenia największego wspólnego podzielnika licznika i mianownika tej funkcyi $u(x)$.*

Pd. 1. Gdy w $\varphi(x)=(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}(x-x_3)^{\nu_3}$ są $\nu_1>1$, $\nu_2>1$, $\nu_3>1$; to $\varphi(x)$ i $\varphi'(x)$ mają największy wspólny podzielnik

$$t(x)=(x-x_1)^{\nu_1-1}(x-x_2)^{\nu_2-1}(x-x_3)^{\nu_3-1} \quad \text{[art. 51., tw. II } a.].$$

$$\varphi'(x)=\nu_1(x-x_1)^{\nu_1-1}(x-x_2)^{\nu_2}(x-x_3)^{\nu_3}+\nu_2(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2-1}(x-x_3)^{\nu_3}+$$
$$+\nu_3(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}(x-x_3)^{\nu_3-1}=\varphi(x)\left[\frac{\nu_1}{x-x_1}+\frac{\nu_2}{x-x_2}+\frac{\nu_3}{x-x_3}\right], \text{ stąd}$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{\nu_1}{x-x_1}+\frac{\nu_2}{x-x_2}+\frac{\nu_3}{x-x_3}.$$

Z tej formy rozkładu widać, że wspólny podzielnik funkcyj $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, jest $t(x)$ i że suma liczników jest $=n=$ ilości pierwiastków mianownika.

Pd. 2. $$u(x)=\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-2)(x+3)(x+5)}=$$
$$=\frac{0}{x-1}+\frac{0}{x-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+5};$$

stąd wynika, że tu $t(x)=(x-1)(x-2)$ i że $u(x)=\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}$.

Pd. 3. $$u(x)=\frac{x^4-3x^3-12x^2+52x-48}{(x-2)(x-3)^2(x-1)^2}$$
$$=\frac{0}{x-2}+\frac{7}{4}\frac{1}{x-3}+\frac{0}{(x-3)^2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{10}{4}\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Stąd wynika, że $u(x)$ daje się tu skrócić przez $(x-2)(x-3)$.

68. Rozkład funkcyi na ułamki o mianownikach pierwszego i drugiego stopnia. W funkcyi $u(x)$ niech jej mianownik będzie postaci $Q(x)=\varphi_1(x)^\alpha.\varphi_2(x)^\beta.\varphi_3(x)^\gamma(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}(x-x_3)^{\nu_3}$, gdzie φ_1, φ_2, φ_3 są wszystkie funkcyami całkowitemi drugiego stopnia, a $2(\alpha+\beta+\gamma)+\nu_1+\nu_2+\nu_3=n$ jest stopniem tego mianownika.

Jej licznik niech będzie $P(x)=c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+...+c_n$. Położmy:

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned} u(x)=&\frac{A_1}{x-x_1}+...+\frac{A_{\nu_1}}{(x-x_1)^{\nu_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+...+\frac{B_{\nu_2}}{(x-x_2)^{\nu_2}}+\\ &+\frac{C_1}{x-x_3}+...+\frac{C_{\nu_3}}{(x-x_3)^{\nu_3}}+\\ &+\frac{M_1+N_1x}{\varphi_1(x)}+\frac{M_2+N_2x}{\varphi_1(x)^2}+...+\frac{M_\alpha+N_\alpha x}{\varphi_1(x)^\alpha}\\ &+\frac{P_1+Q_1x}{\varphi_2(x)}+\frac{P_2+Q_2x}{\varphi_2(x)^2}+...+\frac{P_\beta+Q_\beta x}{\varphi_2(x)^\beta}\\ &+\frac{S_1+T_1x}{\varphi_3(x)}+\frac{S_2+T_2x}{\varphi_3(x)^2}+...+\frac{S_\gamma+T_\gamma x}{\varphi_3(x)^\gamma}\end{aligned}\right.$$

gdzie $A_1, \ldots, B_1, \ldots, C_1, \ldots, M_1, \ldots, N_1, \ldots, P_1, \ldots, Q_1, \ldots, S_1, \ldots, T_1 \ldots$ są jeszcze nieoznaczone stałe. Sumując po prawej stronie dostajemy ułamek, którego mianownik będzie $Q(x)$, a licznik będzie miał postać:

$$(b) \begin{cases} A_1\xi_{n-1}+\ldots+A_{\nu_1}\xi_{n-\nu_1}+B_1\eta_{n-1}+\ldots+B_{\nu_2}\eta_{n-\nu_2}+ \\ \quad +C_1\zeta_{n-1}+\ldots+C_{\nu_3}\zeta_{n-\nu_3} \\ \quad +(M_1+N_1x)\xi'_{n-2}+\ldots+(M_\alpha+N_\alpha x)\xi'_{n-2\alpha} \\ \quad +(P_1+Q_1x)\eta'_{n-2}+\ldots+(M_\beta+N_\beta x)\eta'_{n-2\beta} \\ \quad +(S_1+T_1x)\zeta'_{n-2}+\ldots+(S_\gamma+T_\gamma x)\zeta'_{n-2\gamma}\,; \end{cases}$$

gdzie $\xi_{n-1}, \ldots, \eta_{n-1}, \ldots, \zeta_{n-1}, \ldots, \xi'_{n-2}, \ldots, \eta'_{n-2}, \ldots, \zeta'_{n-2}, \ldots$ są tu funkcyami całkowitemi o takich stopniach, jak ich znaczki wskazują.

Jeżeli (a) ma być związkiem identycznym, to funkcya (b) musi być identyczną z licznikiem $P(x)$, a że jest $(n-1)^{\text{go}}$ stopnia, a jej spółczynniki są liniowemi funkcyami n nieoznaczonych stałych $A_1, \ldots, T_\gamma$, więc porównanie spółczynników daje tu n liniowych związków:

$$L_1(A_1, \ldots, T_\gamma)=c_1;\quad L_2(A_1, \ldots, T_\gamma)=c_2;\quad \ldots;\quad L_n(A_1, \ldots, T_\gamma)=c_n$$

Z nich wynikające wartości stałych $A_1, \ldots, T_\gamma$ sprawdzają równania (a) identycznie i dają nowy rozkład rozważanej funkcyi $u(x)$.

Takiego rozkładu funkcyi używa się z korzyścią wtedy, gdy licznik i mianownik mają spółczynniki rzeczywiste, a mianownik (prócz możliwych rzeczywistych pierwiastków) posiada pierwiastki parami sprzężone.

Pd. 1. $u(x)=\dfrac{4x^4-x^3+8x^2+1}{(x^2+1)^2(x-1)}=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{M_1+N_1x}{(x^2+1)}+\dfrac{M_2+N_2x}{(x^2+1)^2}$. Stąd: $4x^4-x^3+8x^2+1=A_1(x^2+1)^2+(M_1+N_1x)(x^2+1)(x-1)+(M_2+N_2x)(x-1)$, a więc: $4=A_1+N_1$, $-1=M_1-N_1$, $8=2A_1-M_1+N_1+N_2$, $0=M_1-N_1+M_2-N_2$, $1=A_1-M_1-M_2$. Z tych równań dostajemy:

$$A_1=3,\ M_1=0,\ N_1=1;\ M_2=2,\ N_2=1 \quad\text{i}\quad u(x)=\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2+x}{(x^2+1)^2}.$$

69. O średnich wartościach *mod. m* funkcyi $f(x)=\sum_{-n'}^{n} a_\lambda x^\lambda$ i o spółczynnikach takiej funkcyi. Funkcya:

$$f(x)=a_{-n'}x^{-n'}+a_{-n'+1}x^{-n'+1}+\ldots+a_{-1}x^{-1}+a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

jest funkcyą wymierną ułamkową z jednem n'-krotnem miejscem nieskończonościowem $x=0$, gdy $n'>0$, a jest funkcyą wymierną całkowitą $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, gdy $n'=0$. Spółczynniki funkcyi

$f(x)$ — bez różnicy, czy $n' > 0$, czy $n'=0$ — są w pewien charakterystyczny sposób związane z wartościami funkcyi. Tym związkiem tu się zajmiemy.

Gdy $\varepsilon_0=1$ i $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{m-1}$ są wszystkimi pierwiastkami równania $z^m-1=0$, to [art. 25. tw. I.] $s_t=\varepsilon^t_0+\varepsilon^t_1+...+\varepsilon^t_{m-1}=m$, gdy t jest wielokrotnością m, a $s_t=0$ przy wszelkiem innem całkowitem t. Wprowadzając s_t mamy:

$$f(x\varepsilon_0)+f(x\varepsilon_1)+...+f(x\varepsilon_{m-1})=\varphi_0+\varphi_1+...+\varphi_m=$$

$$\sum \varphi_k=\sum_{t=-n'}^{n} a_t.x^t.s_t=f(x, m),$$

a gdy w n' i n mieszczą się największe wielokrotności $\varrho' m$, ϱm, to:

(1) $f(x, m)=a_{-\varrho' m}.x^{-\varrho' m}+...+a_{-m}x^{-m}+a_0+a_m x^m+...+a_{\varrho m}x^{\varrho m}$.

$f(x, m)$ jest widocznie średnią arytmetyczną wartości funkcyi $f(x)$, jakie wypadają w wierzchołkach:

(a) $x, x\varepsilon_1, x\varepsilon_2, ..., x\varepsilon_{m-1}$

regularnego m-boku (fig. 14. dla $m=8$) o środku $x=0$, a o jednym pierwszym wierzchołku w dowolnym punkcie x.

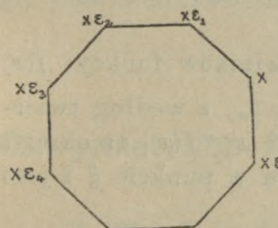


Fig. 14.

Tę średnią wartość nazwiemy średnią arytmetyczną *mod. m* z wartości funkcyi, a punkta (a) wierzchołkami tej średniej wartości. Prawa strona w równaniu (1) powstaje z $f(x)$ w ten sposób, że z tej ostatniej zatrzymujemy tylko te dodajniki, których wykładniki podzielne są przez m. Tak utworzoną funkcyę nazwijmy funkcyą wydzieloną *mod. m*, to mamy twierdzenie:

I. *Średnia arytmetyczna mod. m z wartości funkcyi $f(x)$ jest równa funkcyi wydzielonej mod. m na jednym z wierzchołków tej średniej arytmetycznej.* *)

Przy dowolnem m takiem, że $m > n$ i $m > n'$ dostajemy ze związku (1) relacyę:

(2) $f(x, m)=a_0$

o dowolnym pierwszym wierzchołku x.

*) Widocznie $f(x, m)$ nie zmienia się za podstawieniem $x\varepsilon_\alpha$ za x, gdyż posiada same wykładniki $\equiv 0$ (*mod. m*).

Ze środka $x=0$ zakreślmy koło (r) promieniem $|x|=r$. Na okręgu tego koła pozostaje funkcya $f(x)$ ciągłą i skończoną, a między wartościami $|f(x)|$ na okręgu tego koła będzie jedna największą. Niech ta największa wartość wypada w punkcie ξ (fig. 15.), a $|f(\xi)|$ niech będzie $=g$. Relacya (2), jeżeli tylko zatrzymamy $m>n$, $m>n'$, utrzyma się i wtedy, gdy pierwszy wierzchołek x umieścimy w punkcie ξ. Będziemy

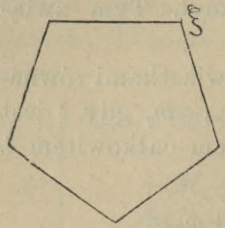


Fig. 15.

więc mieli: $\dfrac{f(\xi)+f(\xi\varepsilon_1)+\ldots+f(\xi\varepsilon_{m-1})}{m}=a_0$, a stąd:

$$\frac{|f(\xi)|+|f(\xi\varepsilon_1)|+\ldots+|f(\xi\varepsilon_{m-1})|}{m}\geqq|a_0|.$$

Gdy tu po lewej stronie wszystkie dodajniki $|f(\xi)|$, $|f(\xi\varepsilon_1)|$, ..., $|f(\xi\varepsilon_{m-1})|$ zastąpimy przez g, to tem bardziej będzie:

(3) $$g\geqq|a_0|,$$

a stąd twierdzenie:

II. *Gdy na płaszczyźnie* (x) *ze środka* $x=0$ *zakreślimy koło* (r) *o dowolnym promieniu* r, *a z wartości* $|f(x)|$ *na okręgu tego koła największa jest* g, *to bezwzględna wartość wolnego wyrazu* a_0 *funkcyi* $f(x)$ *nie jest nigdy większą od tej wartości* g.

Niech $a_\alpha x^\alpha$, $\alpha \gtrless 0$, będzie jednym z dodajników funkcyi $f(x)$ Funkcya $x^{-\alpha}.f(x)=F(x)$ ma wtedy wolny wyraz a_α, a według twierdzenia II. jest tu: $|a_\alpha|\leqq$ od *maximum* wartości $|x|^{-\alpha}|f(x)|$ na okręgu (r). Ta największa wartość wypada i tu znowu w punkcie ξ i jest $=r^{-\alpha}.g$; mamy więc $|a_\alpha|\leqq r^{-\alpha}.g$, albo:

(4) $$g\geqq|a_\alpha|r^\alpha=|a_\alpha x^\alpha|;$$ to znaczy:

III. *Bezwzględna wartość każdego dodajnika funkcyi* $f(x)$ *z dowolnem* $|x|=r$ *nie jest nigdy większa od największej wartości* $|f(x)|$, *mieszczącej się na kole* (r).

Gdy z wartości $|f(x)|$ na kole (r) najmniejsza jest $\gamma=|f(\xi')|$, to także mieć będziemy:

(5) $$\gamma\leqq|a_0|,\quad \gamma\leqq|a_\alpha x^\alpha|,$$ a więc:

(6) $$g\geqq|a_\alpha x^\alpha|\geqq\gamma,\quad \alpha=-n', \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n.$$

[Znak nierówności tylko po jednej stronie może tu być zastąpiony przez znak równości]. Z równania (6) mamy ostatecznie takie twierdzenie:

IV. *Gdy na płaszczyźnie argumentu* x *z punktu* $x=0$, *jako środka zakreślimy dowolne koło* (r), *a na jego okręgu największa wartość* $|f(x)|$

jest g, a najmniejsza jest γ, to bezwzględna wartość każdego z dodajników funkcyi zawsze się mieści między g i γ.

Gdy $f(x)$ jest wymierną całkowitą funkcyą n^{go} stopnia a jej przeprowadzenie do punktu x ma postać:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n,$$

to średnia arytmetyczna *mod.* m z wartości funkcyi $f(x+h)$, jako funkcyi argumentu h ma — gdy $m>n$ — wartość:

$$f(x+h,\ m)=[f(x+h)+f(x+h\varepsilon_1)+\ldots+f(x+h\varepsilon_{m-1})]/m=f(x).$$

To znaczy:

V. *Gdy na płaszczyźnie argumentu x funkcyi wymiernej całkowitej m^{go} stopnia narysujemy dowolny m-bok regularny o ilości boków $m>n$, to średnia arytmetyczna z wartości funkcyi w jej wierzchołkach jest zawsze równa wartości funkcyi w środku tego m-boku. Gdy środek m-boku jest punktem pierwiastkowym funkcyi, to średnia arytmetyczna jest zerem.**)

Pd. 1. Znaleść średnią arytmetyczną *mod.* 3 funkcyi:

$$f(x)=1+x^2+4x^4+5x^6+9x^8$$

przy dowolnie obranym pierwszym wierzchołku x. [Odp. $f(x,3)=1+5x^6$].

Pd. 2. Jaką jest średnia arytmetyczna *mod.* 4. funkcyi:

$$f(x)=1+2x^2+3x^4+5x^7+6x^8+5x^9$$

gdy pierwszym wierzchołkiem jest $x=i$. [Odp. $f(x,4)=10$].

ROZDZIAŁ VI.

O wymiernych funkcyach całkowitych i ułamkowych wielu zmiennych.

70. Określenie funkcyi całkowitej, jej stopnie, wymiar i ilość wyrazów w niej zawartych. Skończoną sumę

(1) $$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\Sigma C_{\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \sigma}\cdot x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\beta}\ldots x_n^{\sigma},$$

---

*) Pierwszą krótką notatkę o średniej arytmetycznej *mod.* m podał E. Rouché w rozprawie *„Mémoire sur la serie de Lagrange“* w *„Journal de l'école politechnique“* Cah. 39. [1862]. str. 199.

Por. także A. Gutzmer *„Ein Satz über Potenzreihen“ Mathematische Annalen.* I. 32. str. 596. (1888).

Por. dalej: J. Puzyna „O wartościach funkcyi analitycznej na okręgach spółśrodkowych z kołem zbieżności jej elementu“. Rozp. Wydz. mat. przyr. Akad. Um. w Krakowie. T. 26. str. 311. — Tegoż „O nierówności $g\geq|a_0|$.“ Prace matematyczno-fizyczne T. 5. str. 1. Dowód twierdzenia II. podany jest w tekście podług tej rozprawy.

Por. także: W. Lewicki „O wyrażeniach symetrycznych z wartości funkcyi *mod. m.*“ Prace mat.-fiz. T. 5. str. 7.

w ktorej $x_1, x_2, ..., x_n$ są zmienne, $C_{\alpha\beta...\sigma}$ stałe, a wykładniki α, β, ..., σ są w każdym z dodajników całkowitemi dodatniemi liczbami, nazywamy wymierną całkowitą funkcyą n (nieograniczonych) zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$, m^{go} wymiaru, jeżeli w jej dodajnikach suma $\alpha+\beta+...+\sigma$ najwyżej jest $=m$. Gdy x_s w $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ występuje z najwyższym wykładnikiem n_s, to mówimy, że f jest w tej zmiennej stopnia n_s^{go}.

Zupełną funkcyą $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ m^{go} wymiaru nazywamy taką, w której znajdujemy wolny wyraz v_0, $(\alpha+\beta+\gamma+...+\sigma=0)$, a dalej dodajniki o wszelkich możliwych $(\alpha+\beta+...+\sigma)\leqq m$. Gdy sumę wszystkich dodajników o $(\alpha+\beta+...+\sigma)=\tau$ nazwiemy v_τ, to możemy położyć:

$$f=v_0+v_1+v_2+...+v_m. \tag{2}$$

Pierwsze pytanie, jakie się tu nasuwa, jest: ile wyrazów (dodajników) taka funkcya zawiera? Suma v_τ o samych dodajnikach posiadających $(\alpha+\beta+...+\sigma)=\tau$ nazywa się jednorodną n zmiennych, a stopnia, albo wymiaru τ. Zawiera ona (jeżeli — jak tu — jest zupełną) tyle wyrazów, ile potęga:

$$(x_1+x_2+...+x_n)^\tau \tag{3}$$

po jej wykonaniu, zawierać ich będzie. Do liczby wyrazów potęgi (3) możemy zaś dojść w ten sposób:

$$(\alpha) \qquad (x_1+x_2)^\tau \text{ zawiera wyrazów } \tau+1=\binom{\tau+1}{1}.$$

Połóżmy $x_2+x_3=X_2$, to

$$(\beta) \qquad (x_1+X_2)^\tau=x_1^\tau+\tau.x_1^{\tau-1}X_2+\binom{\tau}{2}x_1^{\tau-2}.X_2^2+...+X_2^\tau,$$

a stosując tu (α) do $X_2, X_2^2, ..., X_2^\tau$, dostaniemy w (β) wyrazów

$$1+2+...+(\tau+1)=\frac{(\tau+2)(\tau+1)}{2}=\binom{\tau+2}{2}.$$

Przyjmijmyż, że $(x_1+x_2+...+x_{n-1})^\tau$ ma wyrazów:

$$(\gamma) \qquad \binom{\tau+n-2}{n-2},$$

to kładąc teraz $x_2+x_3+x_n=\overline{X}_2$ i $(x_1+x_2+...+x_n)^\tau=(x_1+\overline{X}_2)^\tau=$

$$x_1^\tau+\tau.x_1^{\tau-1}\overline{X}_2+\binom{\tau}{2}x_1^{\tau-2}.\overline{X}_2^2+...+\overline{X}_2^\tau$$

i stosując tu do $\overline{X}_2, \overline{X}_2^2, ..., \overline{X}_2^\tau$ wzór (γ) dostaniemy na liczbę wyrazów w (3):

$$1+\binom{n-1}{n-2}+\binom{n}{n-2}+\binom{n+1}{n-2}+...+\binom{n+\tau-2}{n-2}=\binom{\tau+n-1}{n-1} \text{ *)}$$

*) W. Żmurko: Wykład matematyki. T. I., str. 129.

Zauważmy teraz zupełną funkcyę jednorodną m^{go} stopnia, o $(n+1)$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$; zawiera ona wyrazów $\varrho=\binom{m+n}{n}$. Kładąc w niej $x_{n+1}=1$, dostaniemy z niej funkcyę zupełną n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ już niejednorodną, a w niej zawierać się będzie również wyrazów: *)

$$(4) \qquad \varrho=\binom{m+n}{n}=\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+1)}{1.\ 2.\ \ldots\ n.}, \text{ to znaczy:}$$

I. *Każda funkcya wymierna całkowita n zmiennych, a m^{tego} wymiaru posiada najwyżej wyrazów* $\varrho=\binom{m+n}{n}$.

Gdy f podług potęg jednej ze zmiennych n. p. podług potęg zmiennej x_1 uporządkujemy, dostaniemy:

$$(5) \qquad f=\varphi_m+\varphi_{m-1}x_1+\varphi_{m-2}x_1{}^2+\ldots+\varphi_{m-n_1}x_1{}^{n_1},$$

gdzie m jest wymiarem funkcyi f, n_1 jej stopniem w zmiennej x_1, a $\varphi_m, \varphi_{m-1}, \ldots, \varphi_{m-n_1}$ są całkowitemi wymiernemi funkcyami pozostałych zmiennych $x_2, x_3, \ldots, x_n$ o takich najwyżej wymiarach, jak ich znaczki wskazują. Jedna jednak z tych funkcyj musi być dokładnie takiego wymiaru, jak jej znaczek wskazuje, inaczej bowiem funkcya sama f nie byłaby wymiaru m. Z zupełnej funkcyi dostaniemy:

$$(6) \qquad f=\varphi_0 x_1{}^m+\varphi_1 x_1{}^{m-1}+\varphi_2 x_1{}^{m-2}+\ldots+\varphi_m$$

a każda z funkcyj φ_α jest tu dokładnie wymiaru α i jest zupełną funkcyą pozostałych zmiennych $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

71. Miejsca zerowe funkcyi f w skończoności lub nieskończoności. Z samego określenia i kształtu funkcyi f wynika, że jest ona na każdem miejscu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, leżącem w skończoności (o skończonych spółrzędnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$) skończoną.

Rozumując podobnie jak w art. 48., dojdziemy i tu do wniosku, że funkcya f jest jednowartościową w swoich argumentach.

Na dowolnem miejscu $(x'_2, x'_3, \ldots, x'_n)$, leżącem również w skończoności, dostają funkcye φ_α w (5) i (6) [art. poprzedzający] skończone wartości φ'_α, a równanie $f(x_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n)=0$ ma n_1, a względnie m pierwiastków $x_1,=x_{11}, x_{12}, \ldots$ To ma miejsce przy każdym dowolnie obranym skończonym systemie $(x'_2, x'_3, \ldots, x'_n)$, a że takich systemów jest nieskończenie wiele, więc stąd wynika,

*) Serret: *Algebra* (po niem Wertheim). T. 1. str. 121.

*

że funkcya f ma w nieograniczonym obszarze $(x_1, x_2, ..., x_n)$ swoich zmiennych nieskończenie dużo miejsc zerowych.

Gdy c jest dowolną, ale skończoną wartością, to $f-c$ jest również funkcyą całkowitą wymierną, a równanie $f-c=0$ ma również nieskończenie wiele miejsc zerowych. Stąd wynika, że funkcya f przybiera każdą skończoną, dowolną wartość na nieskończenie wielu miejscach. Wartość $c=\infty$ tylko na miejscach o nieskończonych spółrzędnych (przynajmniej niektórych) przybierać może, co wynika z samego jej kształtu.

Aby teoryę funkcyi f posunąć dalej, trzeba już tu uwzględnić nową formę zawierającą n zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$. Powstaje ona w ten sposób: Gdy $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ są dwiema różnemi całkowitemi funkcyami, to ułamek:

$$R(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) / f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$

nazywamy funkcyą wymierną ułamkową zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$. Na danem miejscu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ma ona jedną tylko wartość (gdyż f_1, f_2, są jednowartościowe) i to wartość ułamka, którego licznik jest wartością f_1, a mianownik wartością f_2 na tem miejscu. Taką funkcyą zajmiemy się później systematycznie. Tu wystarczy nadmienić, że ma ona skończoną i oznaczoną wartość na każdem miejscu leżącem w skończoności i dającem $f_2 \neq 0$.

Gdy f_1, f_2 są iloczynem kilku czynników, będących funkcyami całkowitemi, a zawierają ten sam czynnik $g(x_1, x_2, ..., x_n)$, to przez ten czynnik — co arytmetycznie jasnem jest — można R skrócić na każdem miejscu $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Nie troszcząc się o wymiar całkowitej funkcyi f, napiszmy równanie $f=0$ w postaci:

$$(a) \qquad \varphi_0 x_1^{\mu} + \varphi_1 x_1^{\mu-1} + ... + \varphi_{\mu} = 0;$$

jest więc ono stopnia μ w zmiennej x_1.

Przyjmijmy, że dla niektórych miejsc:

$$(b) \qquad (x_2, x_3, ..., x_n),$$

okazują się funkcye:

$$\varphi_{\mu}, \varphi_{\mu-1}, ..., \varphi_{\mu-(k-1)},$$

o bezwzględnych wartościach dowolnie małych. Funkcya φ_0 na tych miejscach niech nie staje się dowolnie małą.

Gdy $x_{11}, x_{12}, ..., x_{1\mu}$ są pierwiastkami x_1, jakie z równania (a) przy użyciu takich miejsc wynikają, to wtedy jest [art. 50.]:

$$(c)\quad \frac{\varphi_\mu}{\varphi_0}=(-1)^\mu . x_{11} . x_{12} \ldots x_{1\mu}, \quad \frac{\varphi_{\mu-1}}{\varphi_0}=(-1)^{\mu-1} S(x_{11} . x_{12} \ldots x_{1\mu-1}), \ldots$$
$$\ldots \frac{\varphi_{\mu-(k-1)}}{\varphi_0}=(-1)^{\mu-k+1} S(x_{11} x_{12} \ldots x_{1\mu-(k-1)}).$$

Te ilości są dowolnie małe, a mogą być takiemi tylko tym sposobem, że między pierwiastkami x_1 jest ich k (co do swej bezwzględnej wartości) nieskończenie małych.

Gdy φ_0 jest funkcyą (nie stałą ilością), a z miejsc (b) używamy tych, które φ_0 czynią dowolnie małem, gdy dalej na tych miejscach — prócz φ_0 — jeszcze także φ_1, φ_2, ..., φ_{k-1} są dowolnie małe, ale φ_m nie jest takie, to wtedy z pierwiastków x_{11}, x_{12}, ..., $x_{1\mu}$ równania (a) będzie ich k nieskończenie dużych [art. 51.]. Stąd twierdzenie:

I. *Gdy w równaniu $f=0$ na miejscu $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ można przy potęgach zmiennej x_1, dostać k spółczynników końcowych nieskończenie małych, to równanie ma k pierwiastków x_1 nieskończenie małych. Gdy zaś możliwe są miejsca $(x_2, \ldots, x_n)$, które dają k spółczynników początkowych o wartościach nieskończenie małych, to mamy tyleż pierwiastków x_1 nieskończenie dużych.*

Dalej wnioskujemy:

I *a. W razie znikania k spółczyników z początku lub z końca równania, na miejscu $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ są pierwiastki x_1 — w liczbie k — wprost zerami, a względnie nieskończonościami.*

Z drugiej części twierdzenia I. wnosićby trzeba, że nie każde równanie $f=0$ posiada miejsca zerowe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o niektórych lub wszystkich spółrzędnych nieskończonych. Tak jednak nie jest, a aby to okazać, napiszmy równanie $f=0$ w postaci $v_m+v_{m-1}+\ldots+v_1+v_0=0$ [por. (2) art. 70.] i połóżmy $x_1=\varrho t_1$, $x_2=\varrho t_2$, ..., $x_n=\varrho t_n$, gdzie t_1, t_2, ..., t_n są nowe zmienne, a ϱ czynnik dowolny.

Równanie przybierze wtedy postać:

$$(d)\qquad T_m \varrho^m+T_{m-1} \varrho^{m-1}+\ldots+T_1 \varrho+T_0=0,$$

a w niem T_m, T_{m-1}, ..., T_1, $T_0=v_0$ są jednorodnemi funkcyami zmiennych t_1, t_2, t_n i powstają z v_m, v_{m-1}, ..., v_1, v_0 przez podstawienie zmiennych t_1, t_2, ..., t_n w miejsce x_1, x_2, ..., x_n. Wykluczając miejsce $(t_1=0,\ t_2=0, \ldots, t_n=0)$ znajdziemy w obszarze zmiennych t_β nieskończenie dużo miejsc $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)$ w których niewszystkie spółrzędne będą $=0$, a które dają $T_m=0$. Dla takich miejsc jeden przynajmniej z pierwiastków ϱ równania (d) będzie $=\infty$, a miejce

$$(e)\qquad (x_1=\varrho t_1', x_2=\varrho t_2', \ldots, x_n=\varrho t_n'), \text{ przy } \varrho=\infty,$$

będzie niezawodnie przynajmniej jednokrotnem miejscem zerowem równania $f=0$.

Gdy w $(t'_1, t'_2, \dots t'_n)$ jest $t'_s=0$, to $x_s=\varrho t_s$ daje w miejscu (e) s^{ta} jego spółrzędną o wartości dowolnej. Stąd twierdzenie:

II. *Każde równanie $f=0$ posiada miejsce zerowe leżące w nieskończoności (o niektórych, lub wszystkich spółrzędnych nieskończonych).*

Gdy równanie jest o dwóch tylko zmiennych x, y, to ze związku $v_m=0$ obliczone $\frac{y}{x}=\alpha_1, \alpha_2, \dots$ wskazują, w jakim stosunku pozostają do siebie spółrzędne miejsc zerowych, leżących w nieskończoności.

Po odrzuceniu wszystkich pierwiastków $\varrho=\infty$, dostaniemy dalej z równania (d) na miejscu $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ jeszcze pewną ilość n. p. ν pierwiastków skończonych:

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_\nu, \ \nu < m.$$

Za ich użyciem dostaniemy z $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ jeszcze ν miejsc leżących w skończoności a to:

$$(x_1=\varrho_\alpha t_1', \ x_2=\varrho_\alpha t'_2, \dots, x_n=\varrho_\alpha t'_n), \ \alpha=1, 2, \dots, \nu;$$

razem więc z miejscami (e) mamy m miejsc zerowych.

Niech teraz miejsce $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ będzie takie, że na niem $T_m \neq 0$, jest. Na tem miejscu ma równanie (d) m skończonych pierwiastków ϱ_α, $\alpha=1, 2, \dots, m$. Z każdego z nich dostaniemy m miejsc zerowych leżących w skończoności $(x_1=\varrho_\alpha t'_1, x_2=\varrho_\alpha t'_2, \dots, x_n=\varrho_\alpha t'_n)$, $\alpha=1, 2, \dots, m$, a stąd wynika:

III. *Gdy równanie $f=0$, o n zmiennych, jest wymiaru m., a obierzemy dowolny system n skończonych liczb $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$, to podporządkowując liczbę t'_s zmiennej x_s, znajdziemy między miejscami zerowemi tego równania zawsze m takich, że ich spółrzędne będą proporcyonalne do owych liczb.*

Równanie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$ nazywa się a l g e b r a i c z n e m.

Uwaga. Gdy system liczb $(t'_1, t_2, \dots, t'_n)$ tak obrano, że on wprost jest miejscem zerowem równania $f=0$, to równanie (d) ma wtedy niezawodnie jeden przynajmniej pierwiastek $\rho=1$.

Pd. 1. System liczb $t'_1=t'_2=t'_3=1$ powoduje w równaniu:

$$(4x^3-y^3-z^3)-2z(x+4y+z)+11(x+y)-12=0$$

t r z y miejsca zerowe: (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3); kładąc bowiem $x=y=z=\rho$, dostajemy — po skróceniu przez 2 — równanie $\rho^3-6\rho^2+11\rho-6=0$, którego pierwiastkami są: $\rho=1, 2, 3$.

Pd. 2. Kładąc w równaniu:

$$(x^2y^3-x^3y^2)z+(x^2+y^2)z^2+xyz+1=0$$

$x=\rho i$, $y=\rho$, $z=\rho$ (a więc $t'_1=i$, $t'_2=1$, $t'_3=1$) dostajemy związek $(1-i)\rho^6-i\rho^3-1=0$, z którego wynikają wartości:

$$\rho=\sqrt[3]{\frac{i\pm\sqrt{3-4i}}{2(1-i)}}$$

Każdy system ($t'_1 = a \mp 0$, $t'_2 = b \mp 0$, $t'_3 = 0$) daje tu trzykrotne miejsce zerowe: $x = \infty$, $y = \infty$, przy dowolnem z.

System ($t'_1 = t'_2 \mp 0$, $z = c \mp 0$) powoduje jednokrotne miejsce zerowe:

$$x = \infty,\ y = \infty,\ z = \infty.$$

Jakie są pozostałe dwa miejsca zerowe leżące w skończoności przy ($t'_1 = t'_2 = 3$, $z = 5$)?

72. Cząstkowe pochodne. Niech f będzie zupełną funkcyą wymiaru m, a $Ax_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}...x_n^{\nu_n} = U$ niech będzie jednym z jej dodajników. Tworząc jego pochodne według x_1, [art. 48.] mamy:

$$(\alpha)\quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = \nu_1 \frac{U}{x_1},\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1{}^2} = \nu_1(\nu_1 - 1)\frac{U}{x_1{}^2},\ ...,\ \frac{\partial^{\nu_1} U}{\partial x_1{}^{\nu_1}} = \nu_1!\,A\,.\,x_2^{\nu_2}...x_n^{\nu_n}.$$

Z każdej pochodnej (α) możemy znowu tworzyć pochodne według x_2. Będą one postaci:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_1{}^\alpha}\cdot\frac{\partial^\beta}{\partial x_2{}^\beta} U = \nu_1(\nu_1-1)...(\nu_1-\alpha+1).\nu_2(\nu_2-1)...(\nu_2-\beta+1)\frac{U}{x_1{}^\alpha . x_2{}^\beta}$$

$$\alpha \leqq \nu_1,\ \beta \leqq \nu_2,$$

a postępując tak dalej dostaniemy dalej pochodne:

$$(\beta)\qquad \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1{}^\alpha}\cdot\frac{\partial^\beta}{\partial x_2{}^\beta}\cdots\frac{\partial^\gamma}{\partial x_n{}^\gamma} U = C_{\alpha\beta...\gamma}.A.x_1{}^{\nu_1-\alpha}x_2{}^{\nu_2-\beta}...x_n{}^{\nu_n-\gamma},$$

w których $C_{\alpha\beta...\gamma} = [\nu_1(\nu_1-1)...(\nu_1-\alpha+1)...\nu_n(\nu_n-1)...(\nu_n-\gamma+1)]$, a które nie są identycznie zerami, jeżeli $\alpha \leqq \nu_1$, $\beta \leqq \nu_2$, ..., $\gamma \leqq \nu_n$. Pochodne (β) nazywają się cząstkowemi pochodnemi rzędów $(\alpha + \beta + ... + \gamma)$ dodajnika U. Łatwo przekonać się, że:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_s{}^\alpha}\cdot\frac{\partial^\beta}{d x_t{}^\beta} U = \frac{\partial^\beta}{\partial x_t{}^\beta}\cdot\frac{\partial^\alpha}{\partial x_s{}^\alpha} U,\ s \gtrless t$$

a stąd wyniknie, że żadna z pochodnych (β) nie zmienia się za zmianą porządku różniczkowania.

Cząstkowa pochodna $\frac{\partial^\alpha}{\partial x_1{}^\alpha}\cdot\frac{\partial^\beta}{\partial x_2{}^\beta}\cdots\frac{\partial^\gamma}{d x_n{}^\gamma} f = \frac{\partial^{\alpha+\beta+...+\gamma}}{\partial x_1{}^\alpha \partial x_2{}^\beta ... \partial x_n{}^\gamma} f$ będzie sumą takichże pochodnych wszystkich dodajników U zawartych w f. A że w f mamy dodajniki U o wszelkich możliwych $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n \leqq m$, więc stąd wnosimy:

I. *Zupełna funkcya m^{go} wymiaru posiada wszelkie możliwe cząstkowe pochodne nie będące identycznie $=0$ aż do rzędu m włącznie. Pochodne rzędów $< m$ są funkcyami wymiernemi, pochodne rzędów $= m$ są stałemi; pochodne rzędów $> m$ są wszystkie identycznie $=0$.*

O funkcyi niezupełnej f zauważyć potrzeba:

II. *Niezupełna funkcya f posiada z pochodnych niebędących identycznie $=0$: wszystkie pochodne pierwsze $\frac{\partial f}{\partial x_s}$, $s = 1, 2, ..., n$; inaczej* *bowiem nie byłaby funkcyą wszystkich zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Posiada też koniecznie pochodne rzędu 2^{go}, 3^{go}, ..., m^{go}, ale nigdy w takiej ilości, jak je posiada funkcya zupełna.*

Gdy f jest funkcyą jednorodną m^{go} stopnia, a jednym jej dodajnikiem jest:

$$(a) \qquad A \,.\, x_1^{\nu_1} . \,x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}, \quad \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=m,$$

to jej pochodna:

$$(a') \qquad \frac{\partial^{\nu_1}}{\partial x_1^{\nu_1}} \cdot \frac{\partial^{\nu_2}}{\partial x_2^{\nu_2}} \cdots \frac{\partial^{\nu_n}}{\partial x_n^{\nu_n}} f = \nu_1!\, \nu_2! \ldots \nu_n!\, A.$$

W dodajnikach bowiem różnych od (a) musi koniecznie jedna przynajmniej ze zmiennych (x_s, $s=1, 2, \ldots, n$) zawierać się z wykładnikiem mniejszym od ν_s, a wskutek tego z tych dodajników dostajemy same zera.

Tę uwagę zastosujemy do wypadku, który w dalszem poszukiwaniu okaże się wielkiej doniosłości.

Daną funkcyę całkowitą wymierną n zmiennych $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ niech będzie:

$$(b) \qquad \varphi=(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)^{\mu}, \quad \mu \text{ całkowite} > 0.$$

Z wykonania tej potęgi dostaniemy jednorodną funkcyę μ^{tego} stopnia zmiennych $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Jednym z dodajników tej funkcyi niech będzie $A \xi_1^{\nu_1} \xi_2^{\nu_2} \ldots \xi_n^{\nu_n}$, $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=\mu$. Połóżmy krótko $\varphi=[\ldots+A\xi_1^{\nu_1}\zeta_2^{\nu_2}\ldots\xi_n^{\nu_n}+\ldots]$, to według zrobionej dopiero uwagi mamy:

$$(c) \qquad \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n}\varphi}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\ldots\partial x_n^{\nu_n}} = \nu_1!\nu_2!\ldots\nu_n!A.$$

Lecz z drugiej strony mamy także:

$$(d) \qquad \frac{\partial^{\nu_1+_2+\ldots+\nu_n}}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\ldots\partial x_n^{\nu_n}} (\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)^{\mu} = \mu!$$

Z (c) i (d) wynika więc, że $A=(\mu!)/(\nu_1!\, \nu_2! \ldots \nu_n!)$ i że

$$(e) \qquad (\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)^{\mu} = \sum \frac{\mu!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_n!} \xi_1^{\nu_1}\xi_2^{\nu_2}\ldots\xi_n^{\nu_n},$$
$$\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=\mu.$$

73. Rozwijanie funkcyi. Mając tę formę (e) obierzmy w nieograniczonym obszarze zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pewne miejsce $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ leżące w skończoności i w danej funkcyi zupełnej*) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ połóżmy x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n zamiast $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ są zupełnie dowolne dodatki.

---

*) Funkcyę niezupełną możemy i będziemy pisać w teoretycznych rozważaniach zawsze w formie zupełnej z tem zastrzeżeniem, że niektóre ze spółczynników są zerami, a w dalszem następstwie niektóre z wyższych cząstkowych pochodnych nie istnieją.

Jednym z dodajników funkcyi niech będzie $Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n} = W_{a_1...a_n}$ Połóżmy:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = ...+Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}+..., \text{ to:}$$

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) = ...+A(x_1+h_1)^{a_1}(x_2+h_2)^{a_2}...(x_n+h_n)^{a_n}+...$$

$$= ...+A_1\left[x_1^{a_1}+...+\binom{a_1}{\nu_1}x_1^{a_1-\nu_1}h_1^{\nu_1}+...+h_1^{\nu_1}\right]...\left[x_n^{a_n}+...\right.$$

$$\left. ...+\binom{a_n}{\nu_n}x_n^{a_n-\nu_n}h_n^{\nu_n}+...+h_n^{\nu_n}\right]+...$$

Po wykonaniu mnożeń w tym dodajniku, wyjmijmy z niego wyraz zawierający $(h_1^{\nu_1}.h_2^{\nu_2}...h_n^{\nu_n})$. Jest on:

$$(1)\qquad \left[A\binom{a_1}{\nu_1}x_1^{a_1-\nu_1}\binom{a_2}{\nu_2}x_2^{a_2-\nu_2}...\binom{a_n}{\nu_n}x_n^{a_n-\nu_n}\right]h_1^{\nu_1}.h_2^{\nu_2}...h_n^{\nu_n}$$

$$= \left[A\,a_1(a_1-1)...(a_1-\nu_1+1)x_1^{a_1-\nu_1}...a_n(a_n-1)...(a_n-\nu_n+1)x_n^{a_n-\nu_n}\right].$$

$$.\left(\frac{h_1^{\nu_1}}{\nu_1!}.\frac{h_2^{\nu_2}}{\nu_2!}...\frac{h_n^{\nu_n}}{\nu_n!}\right).$$

Iloczyn w nawiasie jest tu =

$$(2)\qquad \frac{\partial^{\nu_1}}{\partial x_1^{\nu_1}}.\frac{\partial^{\nu_2}}{\partial x_2^{\nu_2}}...\frac{\partial^{\nu_n}}{\partial x_n^{\nu_n}}W_{a_1, a_2, ..., a_n}$$

a więc (1) — gdy jeszcze położymy $\nu_1+\nu_2+...+\nu_n=\mu$ — napisać możemy w postaci:

$$(3)\qquad \frac{1}{\mu!}\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial x_1^{\nu_1}}...\frac{\partial^{\nu_n}}{\partial x_n^{\nu_n}}W_{a_1a_2...a_n}\frac{\mu!}{\nu_1!\,\nu_2!...\nu_n!}h_1^{\nu_1}.h_2^{\nu_2}...h_n^{\nu_n}.$$

Lecz z każdego dodajnika funkcyi f, który posiada cząstkową pochodną (2) różną od zera, dostaniemy analogiczny dodajnik (3) w $f(x_1+h_1, ...)$. Ich suma będzie:

$$(4)\qquad \frac{1}{\mu!}\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial x_1^{\nu_1}}.\frac{\partial^{\nu_2}}{\partial x_2^{\nu_2}}...\frac{\partial^{\nu_n}}{\partial x_n^{\nu_n}}f(x_1x_2...x_n)\frac{\mu!}{\nu_1!\,\nu_2!...\nu_n!}h_1^{\nu_1}h_2^{\nu_2}...h_n^{\nu_\nu}$$

Uwzględnijmy dalej w s z y s t k i e takie wyrazy, jak (4) z w s z y s t k i e m i takiemi zestawieniami $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$, że $\nu_1+\nu_2+...+\nu_n=\mu$, to sumując je dostaniemy w $f(x_1+h_1, ...)$ zawartą sumę:

$$(5)\qquad \frac{1}{\mu!}\sum\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial x_1^{\nu_1}}\frac{\partial^{\nu_2}}{\partial x_2^{\nu_2}}...\frac{\partial^{\nu_n}}{\partial x_n^{\nu_n}}f(x_1x_2...x_n)\frac{\mu!}{\nu_1!\,\nu_2!...\nu_n!}h_1^{\nu_1}h_2^{\nu_2}...h_n^{\nu_n}$$

$$\mu=\nu_1+\nu_2+...+\nu_n,\quad \nu_s\geqq 0.$$

Napiszmy (5) symbolicznie:

$$\frac{1}{\mu!}\sum\frac{\mu!}{\nu_1!\,\nu_2!...\nu_n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1\right)^{\nu_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}h_2\right)^{\nu_2}...\left(\frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^{\nu_n}.f(x_1x_2...x_n),$$

to podług (e), [art. 72.], mamy dalej symbolicznie:

$$\sum \frac{\mu!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1\right)^{\nu_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}h_2\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^{\nu_n}=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right]^{\mu}.$$ Połóżmy:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}h_n=\Delta \tag{6}$$

to teraz (5) można symbolicznie w ten sposób krótko wyrazić: $\Delta^{\mu}f(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\mu!$. Takie wyrazy utworzone dla $\mu=0$, $\mu=1, \ldots$ $\mu=m$ (m jest wymiarem funkcyi f) dodane do siebie przedstawią już w zupełności $f(x_1+h_1, \ldots)$, tak, że ostatecznie mieć będziemy:

$$f(x_1+h_1, \ldots,)=f+\frac{\Delta f}{1!}+\frac{\Delta^2 f}{2!}+\ldots+\frac{\Delta^{\mu} f}{\mu!}+\ldots+\frac{\Delta^m f}{m!}. \tag{A}$$

W szczególności mamy:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\\
\Delta^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}h_1{}^2+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2}h_n{}^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}h_1h_2+\ldots\\
\Delta^3 f &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1{}^3}h_1{}^3+\ldots+\frac{\partial^3 f}{\partial x_n{}^3}h_n{}^3+3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x_1{}^2\partial x_2}h_1{}^2h_2+\ldots+\\
&\quad +6\,\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}h_1h_2h_3+\ldots \text{ i. t. d.}
\end{aligned}\right.$$

Każde $\Delta^{\mu}f$ jest jednorodną funkcyą μ^{ego} stopnia dowolnych dodatków $h_1, h_2, \ldots h_n$. Naznaczmy to, pisząc $W_{\mu}(h_s)$ za $\Delta^{\mu}f$ to mamy:

$$f(x_1+h_1, \ldots)=f+\frac{W_1(h_s)}{1!}+\frac{W_2(h_s)}{2!}+\ldots+\frac{W_m(h_s)}{m!}. \tag{B}$$

Weźmy w szczególności miejsce $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pod uwagę, to ponieważ dodatki h_s są całkiem dowolne, może a_s+h_s przedstawiać dowolną wartość zmiennej x_s, tak, że położyć możemy $x_s=a_s+h_s$, a stąd $h_s=x_s-a_s$. Wskutek tego dostaniemy teraz z (A) i (B):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(a_1, a_2, \ldots, a_n)+\frac{\Delta f}{1!}+\frac{\Delta^2 f}{2!}+\ldots+\frac{\Delta^m f}{m!}, \tag{A_1}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(a_1, a_2, \ldots, a_n)+\frac{W_1(x_s-a_s)}{1!}+\frac{W_2(x_s-a_s)}{2!}+\ldots+\frac{W_m(x_s-a_s)}{m!}. \tag{B_1}$$

W tych formach przypomina pierwszy wyraz $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$, że wszelkie cząstkowe pochodne wchodzące w dalsze dodajniki trzeba obliczyć na miejscu $(a_1, a_2, ..., a_n)$, a wszelkie h_s zastąpić przez $x_s - a_s$, $s=1, 2, ..., n$.

Rozwinięcie (A_1) lub (B_1) nazywać będziemy rozwinięciem funkcyi (f) w otoczeniu miejsca $(a_1, a_2, ... a_n)$, albo przeprowadzeniem funkcyi do otoczenia miejsca $(a_1, a_2, ..., a_n)$ i naznaczać krótko przez $f(x_1, x_2, ..., x_n | a_1, a_2, ..., a_n)$.

Pd. 1. Utworzyć cząstkowe pochodne funkcyi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2 + 3x_1 + 4x_1x_2 + 5x_1{}^2x_2x_3 + 6x_2{}^3$$

i okazać, że w otoczeniu miejsca (1, 1, 1) jest:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3 | 1, 1, 1) =$$
$$20 + (17h_1 + 9h_2 + 5h_3) + (5h_1{}^2 + 18h_2{}^2 + 14h_1h_2 + 5h_2h_3 + 10h_3h_1)$$
$$+ (6h_2{}^3 + 5h_1{}^2h_2 + 5h_1{}^2h_3 + 10h_1h_2h_3) + 5h_1{}^2h_2h_3$$
$$h_1 = x_1 - 1,\ h_2 = x_2 - 1,\ h_3 = x_3 - 1.$$

Pd. 2. Rozwinąć funkcyę:
$f(x_1, x_2. x_3) = 1 + x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_1{}^4 + x_2{}^4 + x_3{}^4$ w otoczeniu miejsca (1, 2, 1). Jedyne cząstkowe pochodne tej funkcyi są:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 2x_\alpha + 4x^3{}_\alpha,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2{}_\alpha} = 2 + 12x_\alpha{}^2,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3{}_\alpha} = 24x_\alpha,\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4{}_\alpha} = 24$$
$$\alpha = 1, 2, 3.$$

a więc tu dostajemy $f(x_1, x_2, x_3 | 1, 2, 1) = 25 + 6(x_1-1) + 36(x_2-2) + 6(x_3-1) +$
$$+ 7(x_1-1)^2 + 25(x_2-2)^2 + 7(x_3-1)^2 + 4(x_1-1)^3 + 8(x_2-2)^3 + 4(x_3-1)^3 +$$
$$+ (x_1-1)^4 + (x_2-2)^4 + (x_3-1)^4.$$

Połóżmy: $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + ...$
$$... + X_{\nu_1\, \nu_2\, \nu_n} h_1{}^{\nu_1} h_2{}^{\nu_2} ... h_n{}^{\nu_n} + ...,$$

to stąd dostajemy:

$$| f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) | \leq$$
$$... + | X_{\nu_1, \nu_2 ... \nu_n} | \, | h_1 |^{\nu_1} . | h_2 |^{\nu_2} ... | h_n |^{\nu_n} + ...$$

Z tego wnosimy, że, żądając takich $h_1, h_2, ..., h_n$, aby

(α) $\quad | f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) | < \delta$,

musi być równocześnie:

(β) $\quad | h_1 | < \delta_1,\ | h_2 | < \delta_2,\ ...,\ | h_n | < \delta_n$

a więc $|h_1|, |h_2|, ..., |h_n|$ nie mogą przechodzić pewnych dowolnie małych według δ obranych granic.

Tę własność funkcyi f określoną równocześnie nierównościami (α), (β) wyrażają w ten sposób: *funkcya f jest na każdem miejscu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ leżącem w skończoności ciągłą.*

74. Zachowanie się funkcyi w otoczeniu miejsca zerowego. Równanie algebraiczne $f=0$ i funkcya algebraiczna. Z ciągłości funkcyi f wynika, że w otoczeniu miejsca zerowego $(x_1, x_2, ..., x_n)$ leżącego w skończoności [art. 71.] będzie funkcya f przybierała same wartości nieskończenie małe. Pytanie więc zachodzi, czy w tem nieskończenie małem otoczeniu miejsca zerowego znajdą się znowu miejsca zerowe funkcyi?

Aby na to odpowiedzieć, napiszmy równanie $f=0$ w postaci

$$(1) \qquad v_m+v_{m-1}+\ldots+v_1+v_0=0$$

gdzie v_α są jednorodne funkcye stopnia α.

Gdy już w każde v_α wstawimy miejsce zerowe $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, to równanie:

$$v_m\varrho^m+v_{m-1}\varrho^{m-1}+\ldots+v_1\varrho+v_0=0$$

mieć musi jeden przynajmniej pierwiastek $\varrho=1$ i ten się właśnie do obranego miejsca zerowego odnosi [art. 71].

Zauważmy system liczb $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)=(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, \ldots, x_n+\xi_n)$ o dowolnie małych $|\xi_s|$. Każde v_α — prócz v_0 — zmieni się wtedy na $v_\alpha+\delta_\alpha$, gdzie $|\delta_\alpha|$ będą również dowolnie małe. Temu systemowi liczb odpowie miejsce zerowe $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ o spółrzędnych $x_s'=$ $=\varrho' t_s'=\varrho'(x_s+\xi_s)$, [art. 71]; a gdy czynnikowi proporcyonalności ϱ' nadamy kształt $(1+\sigma)$, to dodatek σ będzie pierwiastkiem równania:

$$(v_m+\delta_m)(1+\sigma)^m+(v_{m-1}+\delta_{m-1})(1+\sigma)^{m-1}+\ldots+(v_1+\delta_1)(1+\sigma)+v_0=0.$$

Po uporządkowaniu tego równania podług potęg σ — z uwzględnieniem $v_m+\ldots+v_0=0$ — dostaniemy związek:

$$(v_m+\delta_m)\sigma^m+[m(v_m+\delta_m)+(v_{m-1}+\delta_{m-1})]\sigma_{m-1}+\ldots$$
$$\ldots+(\delta_m+\delta_{m-1}+\ldots+\delta_1)=0.$$

W nim wolny wyraz jest widocznie dowolnie małą ilością, a że równocześnie $v_m+\delta_m$ nie jest dowolnie małem (bo v_m, nie będąc na obranem miejscu zerowem dowolnie małe, nie może w najbliższem swem otoczeniu stać się znikomem), więc jeden pierwiastek $\sigma=\sigma_1$ jest niezawodnie nieskończenie małym, [art. 71., tw. I.]. Przy takiem σ_1 mamy $x'_s=(1+\sigma_1)(x_s+\xi_s)=x_s+\eta_s$, $s=1, 2, \ldots, n$, gdzie η_s są nieskończenie małe dodatki. Z tego okazuje się, że w otoczeniu obranego miejsca zerowego mamy znowu miejsce zerowe i że ich— dobierając dodatki ξ_s na nieskończenie wiele sposobów — mamy tam nieskończenie dużo. To znaczy:

I. *W dowolnie małem otoczeniu miejsca zerowego leżącego w skończoności znajduje się nieskończenie dużo miejsc zerowych.*

Aby tę mnogość bliżej określić, zbadajmy naprzód, jak się skończony pierwiastek x_1, odpowiadający skończonemu miejscu $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ zmienia, gdy to miejsce nieskończenie mało zmienimy na inne.

Pierwiastek x_1 przyjmijmy różny od zera — (w razie przeciwnym, położywszy $x_1 = z_1 - \alpha$, $\alpha \neq 0$, dostaniemy z danej funkcyi funkcyą o zmiennych $z_1, x_2, x_3, ..., x_n$, a o pierwiastku $z_1 = \alpha$ na uważanem miejscu) — i napiszmy równanie $f = 0$ w postaci

$$(2) \qquad \varphi_0 x_1{}^{\mu} + \varphi_1 x_1{}^{\mu-1} + ... + \varphi_\mu = 0,$$

zakładając, że φ_0 na miejscu $(x_2, x_3, ..., x_n)$ nie jest nieskończenie małe, a więc i pierwiastki dalsze, dołączające się do x_1 są wszystkie na tem miejscu skończone. Zmieńmy dalej miejsce $(x_2, x_3, ..., x_n)$ na $(x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3, ..., x_n + \xi_n)$, gdzie $\xi_2, \xi_3, ..., \xi_n$ są nieskończenie małe, a pierwiastek x_1 na tem miejscu naznaczmy przez $(x_1 + \xi_1)$ z niewiadomym jeszcze dodatkiem ξ_1. Równanie (2) przejdzie wtedy — gdy φ_α przechodzą na $(\varphi_\alpha + u_\alpha)$ — na związek $(\varphi_0 + u_0)(x_1 + \xi_1)^{\mu} + ...$ $... + (\varphi_{\mu-1} + u_{\mu-1})(x_1 + \xi_1) + \varphi_\mu = 0$, który w uporządkowaniu podług potęg ξ_1 ma postać:

$$(\varphi_0 + u_0 \xi_1{}^{\mu} + ... + (u_0 x_1{}^{\mu} + u_1 x_1{}^{\mu-1} + ... + u_\mu x_1) = 0.$$

Wolny wyraz jest tu dowolnie małym (nie jest zerem, bo $x_1 \neq 0$ założono), a że $(\varphi_0 + u_0)$ nie jest dowolnie małe, więc stąd wynika, że jeden z dodatków ξ_1 będzie dowolnie małym. Odnosząc go do pierwiastka wnosimy, że x_1, a więc i każdy ze skończonych pierwiastków nieskończenie mało się zmienia, gdy miejsce $(x_2, x_3, ..., x_n)$ nieskończenie mało przesuwamy. Zmienia się więc x_1 — jak powiadają — w sposób ciągły z miejscem $(x_2, x_3, ..., x_n)$.

Wartość zmiennej x_1 jest w ogólności zawsze zależną od obranego miejsca $(x_2, x_3, ..., x_n)$, a to określamy, mówiąc, że x_1 jest funkcyą pozostałych $(n-1)$ zmiennych, jakkolwiek owo x_1 spełniające razem z $(x_2, x_3, ..., x_n)$ równanie $f = 0$, nie umiemy jeszcze wyrazić przez te ostatnie zmienne. Równanie $f = 0$ nazwaliśmy algebraicznem, a z tego powodu i x_1 nazywamy algebraiczną funkcyą zmiennych $x_2, x_3, ..., x_n$.

Funkcya algebraiczna x_1 nie jest jednoznaczną, jeżeli równanie $f = 0$ jest w zmiennej x_1 stopnia > 1. Jest ona — jak powiadają — funkcyą wieloznaczną, albo wielowartościową, gdyż na każdem miejscu $(x_2, x_3, .., x_n)$ ma równanie $f = 0$ kilka pierwiastków x_1. Z własności funkcyi x_1 — a tem samem każdego x_s, jako algebraicznej funkcyi pozostałych zmiennych — poznaliśmy tu dwie, a wyrazimy je w twierdzeniu:

Ia. *Przez równanie algebraiczne $f = 0$ określa się każde x_s jako funkcya (algebraiczna) pozostałych zmiennych. Taka funkcya jest (w ogólności) wielowartościową funkcyą na każdem miejscu $(x_1, ..., x_{s-1}, x_{s+1}, ..., x_n)$ i jest ciągłą funkcyą na miejscach, gdzie przybiera skończoną wartość przy skończonych wartościach pozostałych zmiennych.*

W geometryi analitycznej określa równanie algebraiczne $f(x,y) = 0$ o dwóch zmiennych krzywą, którą algebraiczną nazywają.

Wielowartościowość wspomnianą w tw. I.*a* później dopiero będziemy mogli całkiem ogólnie zbadać. Lecz już tu możemy uwzględnić pewien szczególny przypadek, który w zastosowaniach jest ważny. Oto przyjmijmy, że mamy dane algebraiczne równanie postaci:

$$\varphi_0(x_1,x_2,...,x_n)y^m - \varphi_1(x_1,x_2,...,x_n) = 0, \text{ albo}$$

$y^m = \frac{\varphi_1}{\varphi_0} = R(x_1,x_2,...,x_n)$. Położmy $x_\alpha = r_\alpha \cdot 1_{\psi_\alpha}$, $\alpha = 1, 2,...,n$ i niech będzie $R = \rho \cdot 1_\psi$,

to mamy $y = \sqrt[m]{\rho} \cdot 1_{\frac{\psi}{m}} \cdot 1_{\frac{2s\pi}{m}}$, $m = 0,1,2...,m-1$ albo także,

$$(A) \qquad y = \sqrt[m]{\rho} \cdot 1_{\frac{\psi+2k\pi}{m}} \cdot 1_{\frac{2s\pi}{m}}, \quad m = 0,1,..., m-1,$$

[art. 22. tw. VI.]. Lecz czynnik $\sqrt[m]{\rho} \cdot 1_{\frac{\varphi+2k\pi}{m}}$ jest dowolnym m^{tym} pierwiastkiem funkcyi R. Zamiast (*A*) napisać więc możemy:

$$(B) \qquad y = \sqrt[m]{R(x_1,x_2,...,x_n)} \cdot 1_{\frac{2s\pi}{m}}, \quad s = 0, 1,..., m-1.$$

Uwaga. Wielowartościowość nie jest zawsze do każdej ze zmiennych wchodzących w równanie przywiązaną, bo jeżeli n. p. mamy równanie:

$$x^2yz + 2xz + 3 = 0$$

to w niem y będzie wymierną, a więc jednoznaczną funkcyą zmiennych x, z. Dlatego-to w twierdzeniu I*a*. powiedzieliśmy, że równanie algebraiczne określa w ogólności każdą ze zmiennych jako wielowartościową pozostałych zmiennych.

Po tych uwagach możemy teraz bliżej określić mnogość miejsc, o których mowa była w tw. I. Gdy $x_s = u_s + v_s i$, $s = 1,..., n$ są spółrzędnemi miejsca zerowego funkcyi f, to

$$(3) \qquad (...,u_s-\delta...u_s+\delta,...; ...v_s-\delta...v_s+\delta,...),$$

gdzie δ jest skończoną, bardzo małą dodatnią ilością, przedstawia otoczenie tego miejsca i tworzy n-krotny ciągły obszar (continuum), [art. 35., art. 43.].

Z tego obszaru zauważmy część jego tylko, a mianowicie: dowolny jeden system spółrzędnych:

$$(\alpha) \qquad (x_2', x_3',..., x_n')$$

leżący w (3) złączony ze wszystkiemi wartościami:

$$(4) \qquad x_1' = u_1 + v_1 i \text{ obszaru}$$

$$(\beta) \qquad (u_1-\delta...u_1+\delta, v_1-\delta...v_1+\delta).$$

Łatwo wywnioskujemy, że miejsca zerowe otaczające dane miejsce zerowe $(x_2, x_3,..., x_n)$ nie wypełniają nawet tej części $[(\alpha),(\beta)]$ obszaru ciągłego (3). Każdy bowiem obrany system (α) utworzy miejsca zerowe funkcyi ze skończoną tylko ilością wartości (4), a nigdy ze wszystkiemi leżącemi w (β). Stąd wynika twierdzenie wielkiej doniosłości:

II. *Miejsca zerowe funkcyi f otaczające pewne jej miejsce zerowe nigdy nie utworzą* c o n t i n u u m *n-krotnego, gdzie n jest ilością zmiennych wchodzących w f, a funkcya, któraby miała być zerem na wszystkich miejscach pewnego — choć bardzo małego — takiego* c o n t i n u u m *musi być identycznie zerem. Podobnie w takiem* c o n t i n u u m *nie może nigdy funkcya f mieć statecznie wartości stałej $c \neq 0$.*

Dodać przytem należy:

II*a*. *Już funkcya n zmiennych, która przy danych wartościach $(n-1)$ zmiennych $x_2, x_3, \ldots, x_n$ miałaby być zerem, lub stałą wartością $c \neq 0$, dla n^{tej} zmiennej x_1 wypełniającej choćby bardzo małe* c o n t i n u u m, *jest identycznie $=0$, lub $=c$.*

Dla krzywej algebraicznej $f(x,y)=0$ mają dwa ostatnie twierdzenia takie znaczenie:

a) Dwuwymiarowe — choćby bardzo małe — otoczenie dowolnego punktu krzywej nigdy nie będzie wypełnione samymi punktami należącymi do krzywej.

b) Dowolnej prostej nigdy nie będzie krzywa dotykała w jednolitym ciągu punktów mogących utworzyć choćby bardzo mały odcinek na tej prostej.

Uwaga. Przyjmijmy, że na zerowem miejscu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ma się pierwiastek x_1 powtórzyć μ, — ale nie więcej — razy. Wtedy — [art. 51. tw. II.] — muszą na tem miejscu sprawdzić się związki:

$$f=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \ldots, \frac{\partial^{\mu-1} f}{\partial x_1^{\mu-1}}=0,\ \frac{\partial^{\mu} f}{\partial x_1^{\mu}} \neq 0,$$

a w rozwinięciu:

$$(c) \qquad f(x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n) = \frac{\Delta f}{1!} + \frac{\Delta^2 f}{2!} + \ldots + \frac{\Delta^m f}{m!}$$

nie zawierają się wtedy wyrazy postaci $C_1 h_1, C_2 h_1^2, \ldots, C_{\mu-1} h_1^{\mu-1}$.

Jeżeli na tem miejscu zerowem ma być każda ze spółrzędnych x_s wielokrotnym pierwiastkiem, to k o n i e c z n e m jest, aby na tem miejscu — oprócz $f=0$ — było jeszcze

$$(d) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}=0.$$

Pd. 1. Okazać, że równanie:

$$3+x-2y-2x^2+y^2+x^3=0$$

ma miejsce zerowe $(x,y)=(1,1)$ takie, że w niem $x=1$ i $y=2$ są dwukrotnymi pierwiastkami.

Pd. 2. W równaniu:

$$-3+8x-10y-5x^2+5y^2+8xy+x^3-4xy^2-2yx^2+x^2y^2=0$$

będzie do $x=2$ należał dwukrotny pierwiastek $y=1$, a do $y=1$, trzykrotny pierwiastek $x=2$.

75. Funkcye jednorodne. Twierdzenie Eulera. Zastosowanie do wyróżnika. Zastosujmy teraz rozwinięcie (A) [art. 73.]. do funkcyi jednorodnej $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ m-$^{\text{tego}}$ stopnia, kładąc $h_s = x_s t$, a więc zastępując każde x_s przez $x_s+x_st=x_s(1+t)$, $s=1,2,\ldots,n$, gdzie t jest także nieograniczoną zmienną. Z jednorodności funkcyi wynika:

$$\varphi(x_1(1+t), x_2(1+t),\ldots, x_n(1+t))=(1+t)^m\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Z drugiej strony — gdy położymy:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}x_1t+\frac{\partial}{\partial x_2}x_2t+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}x_nt=$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}x_n\right)t=\Delta_x.t\ —$$

dostaniemy $\varphi(x_1(1+t), x_2(1+t),\ldots, x_n(1+t))=$

$$(1)\qquad (1+t)^m\varphi=\varphi+\frac{\Delta_x\varphi}{1!}t+\frac{\Delta^2{}_x\varphi}{2!}t^2+\ldots+\frac{\Delta_x{}^\mu\varphi}{\mu!}t^\mu+\ldots+\frac{\Delta_x{}^m\varphi}{m!}t^m.$$

W tym związku po lewej stronie spółczynnikiem przy t^μ jest wyraz $\binom{m}{\mu}\varphi$.

Po prawej jego stronie spółczynnikiem przy t^μ jest $(\Delta_x{}^\mu\varphi/\mu!)$ Stąd — ponieważ związek (1) jest identycznością, a więc istnieje przy każdym systemie $(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$ — otrzymujemy:

$$\binom{m}{\mu}\varphi=\frac{\Delta_x{}^\mu\varphi}{\mu!},\ \text{albo}$$

$$(2)\qquad \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}\Delta_x{}^\mu\varphi.$$

W szczególności dostajemy:

$$(\alpha)\qquad \varphi=\frac{1}{m}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}x_2+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}x_n\right]$$

$$(\beta)\qquad \varphi=\frac{1}{m(m-1)}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1{}^2}x_1{}^2+\ldots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n{}^2}x^2{}_n+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}x_1x_2+\ldots\right],$$

i t. d. To znaczy:

I. *Każdą jednorodną funkcyę m^{tego} stopnia, $m>1$, można przedstawić jednorodną liniową funkcyą wszystkich jej cząstkowych pochodnych tego samego rzędu.*

Każda jednorodna funkcya $\varphi(x_1,x_2,\ldots x_n)$ m^{tego} stopnia ma tę własność, że po wydzieleniu z niej czynnika $x_s{}^m$, mamy:

$$\varphi=x_s{}^m g\left(\frac{x_1}{x_s},\frac{x_2}{x_s},\ldots\frac{x_{s-1}}{x_s},\frac{x_{s+1}}{x_s},\ldots,\frac{x_m}{x_s}\right),$$

gdzie g jest funkcyą całkowitą samych już ilorazów x_α/x_s, $\alpha=1, 2,\ldots,s-1, s+1,\ldots,m$.

Lecz i naodwrót łatwo wywnioskować:

II. *Gdy całkowita wymierna funkcya n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest taka, że po wyjęciu z niej czynnika x_s^m pozostaje całkowita wymierna funkcya ilorazów x_α / x_s, $\alpha \gtreqless s$, to taka funkcya jest jednorodną m^{tego} stopnia.*

Przyjmijmy, że funkcya całkowita wymierna $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — gdy się w niej położy za $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, $(\mu < n)$ odpowiednio $tx_1, tx_2, \ldots, tx_\mu$, a za $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ odpowiednio $\tau x_{\mu+1}, \ldots, \tau x_n$ — przechodzi na $t^a \tau^b f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Funkcyę f uważać więc trzeba za jednorodną tak w zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, jak i w zmiennych $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$. Lecz gdy $t = \tau$, mamy $t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a to wskazuje, że f jest funkcyą jednorodną we wszystkich zmiennych.

Stąd twierdzenie:

III. *Funkcya jednorodna w pewnej ilości swych zmiennych i jednorodna w pozostałych zmiennych, jest jednorodną we wszystkich swych zmiennych.*

W funkcyi całkowitej wymiernej m^{go} stopnia

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

połóżmy $\dfrac{x}{y}$ w miejsce x, a potem ją pomnóżmy przez y^m. Dostaniemy wtedy jednorodną funkcyę:

$$F(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + a_m y^m,$$

a według (α) mieć będziemy:

$$m \,.\, F(x, y) = [m.a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2}.y + \ldots + a_{m-1} y^{m-1}] x$$
$$+ [a_1 x^{m-1} + 2a_2 x^{m-2}.y + \ldots + m a_m y^{m-1}] y.$$

Kładąc tu $y = 1$, mamy:

(3) $$m.f(x) = \varphi(x).x + f'(x), \quad \text{gdzie}$$

$$\varphi(x) = m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1},$$

a $f'(x)$ jest pochodną. Z (3) wynika, że jeżeli równania $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ mają wspólny pierwiastek, to go także posiadać musi i równanie $\varphi = 0$, Szukając więc wyróżnika $R(f, f')$ funkcyi f (równania $f = 0$), zastąpić go można rugownikiem:

(4) $$R(f', \varphi) = \left| \begin{array}{cccccc} a_1, & 2a_2, & 3a_3, & \ldots, & & \\ & a_1, & 2a_2, & 3a_3, & \ldots, & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ m a_0, & (m-1)a_1, & (m-2)a_2, & \ldots, & & \\ & m a_0, & (m-1)a_1, & (m-2)a_2, & \ldots, & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array} \right|$$

i ten rugownik uważać wprost za wyróżnik (dyskryminant) równania $f = 0$. Nazywają go także wyróżnikiem j e d n o r o d n e j f u n k c y i $F(x, y)$.

Okazać, że do postaci (4) sprowadza się rugownik równań $f'(x) = 0$ i $m.f(x) - xf'(x) = 0$ [por. uwagę na końcu art. 57].

76. Wyznaczenie funkcyi całkowitej z danych warunków. Przejdźmy teraz do wyznaczania funkcyi zupełnej $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z danych warunków. Niech

(1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a + bx_1 + cx_2 + \dots + px_n{}^m = f(a, b, c, \dots, p, x_1, x_2, \dots, x_n)$,

gdzie spółczynników a, b, c, ..., p mamy tu $\varrho = \binom{m+n}{n}$.

Z miejsc jej zerowych, których, [art. 71.], jest nieskończenie dużo, wyjmijmy ich ϱ dowolnych:

(2) $(x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}'), (x_1{}'', x_2{}'', \dots, x_n{}''), \dots, (x_1{}^{(\varrho)}, x_2{}^{(\varrho)}, \dots, x_n{}^{(\varrho)})$

z tem tylko zastrzeżeniem, że wszystkie są między sobą różne.

Te miejsca czynią zadość równaniom:

(3) $f(a, b, c, \dots, p, x_1{}^{(\nu)}, x_2{}^{(\nu)}, \dots, x_n{}^{(\nu)}) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, \varrho.$

Są one wszystkie liniowe, jednorodne w spółczynnikach a, b, c, ..., p; eliminując więc z nich te spółczynniki, dostaniemy związek:

(4) $$P = \begin{vmatrix} 1, x_1{}', & x_2{}', & \dots \\ 1, x_1{}'', & x_2{}'', & \dots \\ \vdots & & \\ 1, x_1{}^{(\varrho)}, & x_2{}^{(\varrho)}, & \dots \end{vmatrix} = 0. \text{ To znaczy:}$$

I. *Między ϱ dowolnemi, między sobą różnemi miejscami zerowemi funkcyi f zachodzi zawsze związek $P=0$.*

Zbadajmy, do czego doprowadzi założenie, że istnieje funkcya f, wymiaru m, o ϱ miejscach zerowych (2) nie spełniających równania $P=0$?

Połóżmy $f(a, b, c, \dots, p, x_1, x_2, \dots, x_n) = z$, to prócz równania:

(5) $z - f(a, b, \dots, p, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ mamy jeszcze:

(6) $0 - f(a, b, \dots, p, x_1{}^{(\nu)}, x_2{}^{(\nu)}, \dots, x_n{}^{(\nu)}) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, \varrho.$

Z $(\varrho+1)$ równań (5), (6), eliminując 1, $-a$, $-b$, ..., $-p$ dostajemy:

$$\begin{vmatrix} z, & 1, & x_1, & x_2, & \dots \\ 0, & 1, & x_1{}', & x_2{}', & \dots \\ 0, & 1, & x_1{}'', & x_2{}'', & \dots \\ \vdots & & & & \\ 0, & 1, & x_1{}^{(\varrho)}, & x_2{}^{(\varrho)}, & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd — gdy wyznacznik rozwijamy podług elementów pionu pierwszego — wynika: $Pz=0$, a że $P \neq 0$ założono, więc mamy tu: $z=0$, a to znaczy:

II. *Funkcya f, m^{go} wymiaru, która na ϱ miejscach, dających $P \neq 0$, staje się zerem, jest identycznie $=0$.*

W razie $P=0$, mamy $0.z=0$, a więc $z=\frac{0}{0}$, co znaczy:

III. *Funkcyj f m^{go} wymiaru, przybierających wartość zera na ϱ miejscach, spełniających równanie $P=0$, jest nieskończenie dużo.*

W wyznaczniku $P=0$ niech minory pierwszego (albo któregokolwiek innego) wiersza będą: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi$, i niech nie będą zerami. (Do tego tylko przypadku tu się ograniczymy).

Spółczynniki $a, b, c, \ldots, p$ funkcyi f o miejscach zerowych, czyniących zadość równaniu $P=0$ będą proporcyonalne do tych minorów. Połóżmyż $a=\lambda\alpha$, $b=\lambda\beta$, $c=\lambda\gamma$, ..., $p=\lambda\pi$, gdzie λ dowolną jest stałą, to dostaniemy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\lambda f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a to znaczy:

IV *a*. *Gdy jedną funkcyą m^{go} wymiaru o miejscach zerowych, spełniających związek $P=0$ jest $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, to wszystkie funkcye określone w twierdzeniu III. będą $\lambda f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gdzie λ całkiem dowolną jest stałą.*

Gdy w wyznacznik $P=0$ wstawimy $(\varrho-1)$ pewnych miejsc zerowych, to ϱ^{te} miejsce będzie już warunkiem $P=0$ w pewien oznaczony — choć wieloznaczny — sposób określone i będzie miejscem zerowem każdej z funkcyj $\lambda . f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Z tego powodu twierdzenie IV *a*. można także tak wyrazić:

IV *b*. *Funkcya, która na $\varrho-1$ miejscach danych ma być zerem, jest oznaczoną o tyle, że można ją opatrzeć dowolnym stałym czynnikiem.*

Pd. 1. Funkcya $z=a+bx+cy$ przedstawia rzędne z płaszczyzny:

$$z-bx-cy-a=0.$$

Wszystkie punkta zerowe tej funkcyi spełniają równanie:

$$(a) \qquad a+bx+cy=0,$$

które w geometryi analitycznej przedstawia prostę przecięcia się płaszczyzny z poziomem $(x0y)$. Gdy trzy z tych miejsc zerowych są:

$$(b) \qquad \left(x_\alpha, \, y_\alpha=-\frac{a+bx_\alpha}{c}\right), \quad \alpha=1, 2, 3, \quad \rho=3$$

to spełniają zawsze związek:

$$P=\begin{vmatrix} 1, x_1, y_1 \\ 1, x_2, y_2 \\ 1, x_3, y_3 \end{vmatrix}=0, \quad \text{gdyż leżą na prostej } (a).$$

Płaszczyzna przechodząca przez trzy punkta (b) przechodzi zarazem przez całą prostę (a), a taka płaszczyzna nie jest jedna. Jest ich nieskończenie dużo; wszystkie określone są równaniem $z=\lambda(a+bx+cy)$, przy λ dowolnem. To równanie daje zarazem wszystkie funkcye z, których trzy miejsca zerowe spełniają związek $P=0$.

Gdy $P \neq 0$, to trzy punkty x_α, y_α nie leżą w linii prostej, a płaszczyzna, która przez nie przechodzi, będzie samym poziomem $(x0y)$; t. zn. $z=0$. Funkcya z jest więc wtedy identycznie zerem.

*

Pd. 2. Funkcya:

$$(a) \qquad z = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

przedstawia rzędne z nieśrodkowej powierzchni stopnia drugiego. Poziom $(x0y)$ przecina ta powierzchnia w krzywej:

$$(b) \qquad a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0,$$

a związek (b) spełniają wszystkie miejsca zerowe funkcyi z. Sześć z owych miejsc zerowych zadość uczyni zawsze związkowi:

$$P = \begin{vmatrix} 1, x_1, y_1, x_1^2, x_1y_1, y_1^2 \\ 1, x_2, y_2, x_2^2, x_2y_2, y_2^2 \\ \vdots \\ 1, x_6, y_6, x_6^2, x_6y_6, y_6^2 \end{vmatrix} = 0,$$

a każda powierzchnia (a), przechodząca przez te miejsca $(x_1y_1), (x_2y_2), \ldots, (x_6y_6)$ przechodzi przez krzywę (b) i określa się równaniem:

$$z = \lambda(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2).$$

Gdy $P \neq 0$, to powierzchnia ma przechodzić przez 6 punktów w poziomie, nie leżących na krzywej (b), a taka powierzchnia jest wtedy samym poziomem $(x0y)$ t. j. $z = 0$.

Gdy f na ϱ miejscach, dających $P \neq 0$ ma przybierać tę samą wartość c', to $f - c'$ jest zerem na tych miejscach, jest więc — według tw. II. — identycznie zerem, a $f = c'$. To znaczy:

V. *Funkcya f, m^{go} wymiaru, przybierająca na ϱ miejscach o $P \neq 0$ tę samą wartość c', jest wprost tą stałą c'.*

Po tych uwagach weźmy dwie funkcye zupełne f i f_1, m^{tego} wymiaru, pod uwagę. Przyjmijmy, że one na ϱ danych miejscach między sobą różnych i dających $P \neq 0$, przybierają te same wartości $z_1, z_2, \ldots, z_\varrho$, a wykluczone są wartości: $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_\varrho$. Różnica $f - f_1$ jest również funkcyą zupełną wymiaru m o tej własności, że na ϱ miejscach owych jest zerem. Według twierdzenia II. będzie więc identycznie $f - f_1 = 0$ i $f = f_1$, a stąd wynika:

VI. *Funkcya m^{tego} wymiaru, przybierająca wartości $z_1, z_2, \ldots, z_\varrho$ na ϱ danych miejscach, nie spełniających związku $P = 0$ jest tylko jedna i jest wskutek tego przez te wartości zupełnie wyznaczona. Przy tem $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_\varrho = c'$ wyklucza się, bo w tym razie funkcya f redukuje się do stałej c'.*

Szukając funkcyi f m^{tego} wymiaru, która przez te warunki ma być wyznaczoną, połóżmy $z = f(a, b, c, \ldots, p, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gdzie f z nieoznaczonymi jeszcze spółczynnikami ma formę funkcyi zupełnej, to mamy przedewszystkiem związek;

$$(7) \qquad z - f(a, b, c, \ldots, p, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Gdy dalej f ma mieć na miejscach $(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)})$ wartości z_α, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, \varrho$, to prócz równania (7) mają się jeszcze spełnić związki:

(8) $z_\alpha - f(a, b, c, \ldots, p, x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)}) = 0, \ \alpha = 1, 2, 3, \ldots, \varrho.$

Z równań (7) i (8) eliminując $1, -a, -b, -c, \ldots, -p$, dostajemy ich wyznacznik: $D(z, z_1, \ldots, z_\varrho, x_1, x_1', \ldots) = 0$.

Stąd wyznaczymy z, rozwijając ten wyznacznik podług wyrazów wiersza pierwszego i zostawiając z ze spółczynnikiem $=1$ po jednej stronie.

Uwaga. W szczególnych wypadkach może wynikająca stąd funkcya z okazać się wymiaru niższego niż m, albo wypaść niezupełną, albo wreszcie być niezupełną i równocześnie wymiaru niższego niż m.

Pd. 3. Funkcya $z = f(x, y)$ wymiaru $=1$, przybierająca na miejscach (1, 1), (0, 0), (1, 2) odpowiednio wartości $z_1 = 6$, $z_2 = 5$, $z_3 = 4$, wynika ze związku:

$$\begin{vmatrix} z, & 1, & x, & y \\ 6, & 1, & 1, & 1 \\ 5. & 1, & 0, & 0 \\ 4, & 1, & 1, & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i jest: } z = 5 + 3x - 2y.$$

Pd. 4. Wyznaczyć funkcyę $z = f(x, y)$ pierwszego wymiaru o wartościach $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 0$ na miejscach (1, 1), (2, 4), (3, 9).

[Odp. $z = -3 + \frac{11}{2}x - \frac{3}{2}y$].

Pd. 5. Wyznaczyć funkcyę $z = f(x, y)$ drugiego wymiaru, która na miejscach (0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (2, 0), (1, 1) ma mieć odpowiednio wartości: 1, 1, -2, -5, -15, -1.

[Odp. $z = 1 + 2x + 3y - 5x^2 + xy - 3y^2$].

77. Zastosowanie metody Lagrange'a do wyznaczenia funkcyi. Inny sposób wyznaczania funkcyi bierze swój początek w żądaniu, aby funkcya f w zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ była odpowiednio stopni $n_1, n_2, \ldots, n_n$, gdzie przy tem jej wymiar pomija się milczeniem. Zauważmy naprzód funkcyę $f(x, y)$ dwóch zmiennych x, y i przyjmijmy, że ma być o stopniu μ w zmiennej x, a o stopniu ν w zmiennej y.

Gdy w tym razie dany jest szereg $(\mu+1)$ wartości:

(a) $$x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$$

zmiennej x i szereg $(\nu+1)$ wartości:

(b) $$y_1, y_2, \ldots, y_{\nu+1}$$

zmiennej y i wartości funkcyi:

$$z_{\alpha\beta} = f(x_\alpha, y_\beta), \quad \alpha \gtreqless \beta, \quad \begin{matrix} \alpha = 1, 2, \ldots, \mu+1 \\ \beta = 1, 2, \ldots, \nu+1 \end{matrix},$$

a więc na $(\mu+1)(\nu+1)$ miejscach (x_α, y_β), tworzących wszystkie zestawienia jednej wartości (a) z jedną wartością (b), to funkcyę żądaną można już w zupełności wyznaczyć.

Przyjmijmy dla ogólności, że tak między miejscami (a), jak (b) mogą być i powtarzające się, tak, że te szeregi miejsc — wypisując powtarzające się miejsca raz tylko — można przedstawić przez:

(a') $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\sigma, \sigma \leq \mu+1$, (b') $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\tau, \tau \leq \nu+1$,

to uważając funkcyę $f(x, y)$ jako funkcyę jednej zmiennej x dostajemy z danych warunków:

(c) $$f(x, y)=f(\xi_1, y)X_1+f(\xi_2, y)X_2+\ldots+f(\xi_\sigma, y)X_\sigma.$$

Ta forma w razie $\sigma=\mu+1$ jest wprost formą Lagrange'a (L), [art. 52.], a w razie $\sigma<\mu+1$ (t. j. w razie powtarzających się wartości w szeregu (a)) jest uogólnioną formą (L'), zatrzymującą jednak stopień μ.

Każdą z wartości $f(\xi_s, y)$ jako funkcyę jednej zmiennej y o stopniu ν możemy dalej znowu przedstawić albo formą (L) albo formą (L'). Dostaniemy więc:

(d) $$f(\xi_s, y)=f(\xi_s, \eta_1)Y_1+f(\xi_s, \eta_2)Y_2+\ldots+f(\xi_s, \eta_\tau)Y_\tau, \quad s=1, 2, \ldots, \sigma,$$

a wstawiając (d) w (c) otrzymujemy żądaną funkcyę już wyznaczoną.

Pd. 1. Wyznaczyć funkcyę $f(x, y)$ o stopniu 3 w zmiennej x, o stopniu 2 w zmiennej y, a dla kombinacyi wartości szeregu:

(a) $x_1=x_2=x_3=\xi_1=2$, $x_4=\xi_2=5$ z wartościami szeregu:

(b) $y_1=1$, $y_2=3$, $y_3=4$ przybierającą wartości:

(α) $f(2, 1)=0$, $f(2, 3)=1$, $f(2, 4)=3$;

(β) $f(5, 1)=2$, $f(5, 3)=0$, $f(5, 4)=4$.

Żądana funkcya, jako funkcya samego x przedstawi się formą (L') w ten sposób:

(γ) $$f(2, y)\frac{x-5}{2-5}\left[1+c_{11}(x-2)+\frac{c_{12}}{2!}(x-2)^2\right]+f(5, y)\frac{(x-2)^3}{(5-2)^3},$$

a spółczynniki c_{11}, c_{12} obliczone podług równań (b), [art. 52.], mają tu wartości:

(δ) $$c_{11}=\frac{1}{3}, \quad c_{12}=\frac{2}{9}.$$

Funkcya $f(2, y)$ przybierająca na jednokrotnych miejscach (b) wartości (α) przedstawi się formą (L):

(ε) $$f(2, y)=1.\frac{(y-1)(y-4)}{(3-1)(3-4)}+3.\frac{(y-1)(y-3)}{(4-1)(4-3)}=\frac{1}{2}(y^2-3y+2).$$

Analogicznie mieć będziemy:

(ε') $$f(5, y)=2.\frac{(y-3)(y-4)}{(1-3)(1-4)}+4.\frac{(y-1)(y-3)}{(4-1)(4-3)}=\frac{1}{3}(5y^3-23y+24).$$

Wstawiając (δ), (ε), (ε') w (γ) otrzymamy żądaną funkcyę o postaci $f(x, y)=$

$$-\frac{1}{2}(y^2-3y+2).\frac{x-5}{3}\left[1+\frac{1}{3}(x-2)+\frac{1}{9}(x-2)^2\right]$$
$$+\frac{1}{3}(5y^3-23y+24)\frac{(x-2)^3}{27}.$$

Pd. 2. Funkcya $f(x, y)$, która — gdy dane są szereregi wartości ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$), ($y_1 = 0$, $y_2 = 1$) — przybiera wartości $f(1,0) = 1$, $f(1,1) = 2$, $f(2,0) = 2$, $f(2,1) = 1$, wyrazi się — jako funkcya samego x — formą:

$$f(1,y)\frac{x-2}{1-2} + f(2,y)\frac{x-1}{2-1}.$$

Z danych warunków wynika dalej:

$$f(1,y) = f(1,0)\frac{y-1}{-1} + f(1,1)\frac{y}{1} = y+1,$$

$$f(2,y) = f(2,0)\frac{y-1}{-1} + f(2,1)\frac{y}{1} = -y+2,$$

a więc ostatecznie mieć będziemy:

$$f(x,y) = -(y+1)(x-2) - (y-2)(x-1).$$

Uwaga. Co do samych danych wartości $f(x_\alpha, y_\beta)$, to jeszcze zauważyć potrzeba: Gdy każdy szereg wartości:

$$f(x_\alpha y_1),\ f(x_\alpha y_2), \ldots, f(x_\alpha y_{\nu+1}),\quad \alpha = 1, 2, \ldots, \mu+1,$$

z osobna przedstawia równe sobie wartości c_α, to wtedy już funkcye $f(x_\alpha y)$ jednej zmiennej, jakie formami (d) przedstawiać mamy, są stałemi ilościami c_α, [art. 52. II.], a funkcya żądana $f(x, y)$ redukuje się widocznie do funkcyi jednej tylko zmiennej x

Gdy wszystkie wartości $f(x_\alpha, y_\beta)$ są te same $= c$, to wtedy widocznie formą (c) wyznaczamy funkcyą $f(x, y)$ samego x o tej własności, że na $(\mu+1)$ miejscach tę samą wartość c przybiera. Taka więc funkcya jest wprost $= c$.

Łatwo wywnioskować, że ta metoda wyznaczania daje się analogicznie zastosować do funkcyi więcej, niż dwóch zmiennych; wyznaczające ją warunki określą się tu w ten sposób:

I. *Funkcya całkowita, wymierna n-zmiennych $x, y, z, \ldots, w$ jest wyznaczona, gdy żądamy 1^0 aby była w tych zmiennych odpowiednio stopni $\mu, \nu, \varrho, \ldots, \tau$, 2^0 aby — gdy dane są szeregi wartości:*

$$(A)\quad (x_1, x_2 \ldots, x_{\mu+1}),\ (y_1, y_2, \ldots, y_{\nu+1}),\ (z_1, z_2, \ldots, z_{\varrho+1}), \ldots, (w_1, w_2, \ldots, w_{\tau+1}),$$

przybierała dane wartości $f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma, \ldots, w_\varepsilon)$ na $(\mu+1).(\nu+1).(\varrho+1)\ldots(\tau+1)$ miejscach $(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma, \ldots, w_\varepsilon)$ o spółrzędnych tworzących wszelkie kombinacye wartości wyjętych z (A).

Szukając formy, jaką tak określona funkcya ma się przedstawić, zaczynamy od tego, że ją naprzód uważamy za funkcyę jednej tylko zmiennej i ją jako taką przedstawiamy formą (L) lub (L'), [art. 52]. Do funkcyj $(n-1)$ zmiennych zawartych w tej formie zastosowujemy znowu to samo, aż w ten sposób dochodzimy do formy, w której już tylko funkcye jednej zmiennej się zawierają. Po ich wyznaczeniu otrzymujemy ostatecznie żądaną funkcyę.

Na szczególniejszą uwagę zasługuje przypadek, w którym funkcya n-zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, stopnia najwyżej $(n-1)^{\text{ro}}$ w każdej z tych zmiennych, ma być wyznaczoną z danych jej wartości na n^n miejscach tworzących wszystkie waryacye n^{tej} klasy danych liczb $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Połóżmy:

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)=g(z),$$

to uważając f za funkcyą samego x_1, dostaniemy:

$$(\alpha)\qquad \frac{f(x_1\, x_2 \dots x_n)}{g(x_1)}=\sum_{k_1}\frac{f(\alpha_{k_1}, x_2, \dots, x_n)}{g'(\alpha_{k_1})(x_1-\alpha_{k_1})},\quad k_1=1, 2, \dots, n. \text{ [art. 65.]}$$

Podobnie dostaniemy:

$$(\beta)\qquad \frac{f(\alpha_{k_1}, x_2, \dots, x_n)}{g(x_2)}=\sum_{k_2}\frac{f(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, x_3, \dots, x_n)}{g'(\alpha_{k_2})(x_2-\alpha_{k_2})},\quad k_2=1, 2, \dots, n,$$

a uwzględniając to w (α) mieć będziemy:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\sum_{k_1, k_2}\frac{g(x_1)\,g(x_2)\,f(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, x_3, \dots, x_n)}{g'(\alpha_{k_1})g'(\alpha_{k_2})(x_1-\alpha_{k_1})(x_2-\alpha_{k_2})}$$

Przedstawiając dalej po porządku funkcye:

$$\frac{f(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, x_3 \dots, x_n)}{g(x_3)}, \dots, \frac{f(\alpha_{k_1}\, \alpha_{k_2} \dots, \alpha_{k_{n-1}}, x_n)}{g(x_n)}$$

podobnym sposobem, dojdziemy do postaci:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=[g(x_1)\dots g(x_n)]\sum\frac{f(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2} \dots \alpha_{k_n})}{[g'(\alpha_{k_1})\dots g'(\alpha_{k_n})](x_1-\alpha_{k_1})\dots(x_n-\alpha_{k_n})},$$

w której sumowanie odnosi się do wszystkich n^n waryacyj utworzonych z liczb $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

78. Dzielenie dwóch funkcyj. Iloraz. Reszta.

Przejdźmy do dzielenia dwóch funkcyj całkowitych wymiernych. Gdy dane są funkcye F, G tych samych zmiennych $x, x_1, x_2, \dots, x_p$ o wymiarach m i n, to, trzymając się oznaczeń przyjętych, możemy je napisać w formach:

$$F=v_m+v_{m-1}+\dots+v_0,\quad G=w_n+w_{n-1}+\dots+w_0$$

gdzie v_s, w_s są to jednorodne funkcye zmiennych $x, x_1, \dots, x_p$ stopnia s.

Gdy te funkcye zechcemy uporządkować podług potęg jednej ze zmiennych n. p. x, to możemy tu natrafić na dwa przypadki: albo w funkcyach v_m, w_n znajdują się dodajniki a'_0x^m, b'_0x^n, albo tam tych dodajników nie znajdujemy. W tym drugim przypadku połóżmy:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha_{00}u+\alpha_{01}u_1+\dots+\alpha_{0p}u_p\\ x_1 &= \alpha_{10}u+\alpha_{11}u_1+\dots+\alpha_{1p}u_p\\ &\vdots\\ x_p &= \alpha_{p0}u+\alpha_{p1}u_1+\dots+\alpha_{pp}u_p, \end{aligned}$$

w których-to podstawieniach są $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \dots, \alpha_{pp}$ stałe, a $u, u_1, u_2, \dots, u_p$ są nowemi niezależnemi między sobą zmiennemi. Stałe $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \dots, \alpha_{pp}$ mają spełniać warunek:

$$(2) \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01}, & \dots & \alpha_{0p} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11}, & \dots & \alpha_{1p} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{p0} & \alpha_{p1}, & \dots & \alpha_{pp} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wstawiając za $x, x_1, \dots, x_p$ w funkcye F, G liniowe formy (1) dostaniemy funkcye f, g zmiennych $u, u_1, u_2, \dots, u_p$ znowu wymiarów m i n. W f spółczynnikiem przy u^m będzie:

$$(3) \qquad a_0 = v_m(\alpha_{00}, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{p0}),$$

a w g przy u^n dostaniemy spółczynnik

$$(4) \qquad b_0 = w_n(\alpha_{00}, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{p0}).$$

Poddawszy stałe $\alpha_{00}, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{pp}$ warunkowi (2), możemy je jeszcze — nie naruszając tego warunku — wybrać na bardzo wiele sposobów tak, że równocześnie będzie

$$(5) \qquad a_0 \neq 0, \; b_0 \neq 0.$$

Porządkując dalej f i g podług potęg zmiennej u, dostaniemy:

$$f = a_0 u^m + a_1 u^{m-1} + \dots + a_m, \quad g = b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + \dots + b_n,$$

g d z i e a_0, b_0 s ą s t a ł e i l o ś c i $\neq 0$ a a_s, b_s, $s > 0$, są funkcyami całkowitemi wymiernemi zmiennych $u_1, u_2, \dots, u_p$ o wymiarze s.

Przyjmijmy $m \geqq n$; wtedy w przerobionych funkcyach f, g ich stopnie w zmiennej u są: $m \geqq n$. Utwórzmy w tym razie funkcyę:

$$h = c_0 u^{m-n} + c_1 u^{m-n-1} + \dots + c_{m-n}$$

o nieoznaczonych jeszcze spółczynnikach $c_0, c_1, \dots, c_{m-n}$ i zażądajmy, aby różnica:

$$f - gh = r(u) = d_0 u^{n-1} + d_1 u^{n-2} + \dots + d_{n-1},$$

aby więc w zmiennej u była stopnia $(n-1)^{go}$.

Wtedy — podobnie jak w art. 54. — dostaniemy związki

$$(6) \qquad a_0 - b_0 c_0 = 0, \; a_1 - b_0 c_1 - b_1 c_0 = 0, \dots, \; a_m - b_n c_{m-n} = d_{n-1}.$$

Z pierwszych $(m-n+1)$ tych równań obliczymy $c_0, c_1 \dots, c_{m-n}$. Te ilości tak obliczone wstawione w dalsze równania dadzą d_0, $d_1, \dots, d_{n-1}$. Każda z obliczonych ilości c_s będzie miała za mianownik $b^s{}_0$, a więc liczbę stałą; będzie więc całkowitą wymierną funkcyą zmiennych $u_1, u_2, \dots, u_p$ wymiaru s. Spółczynniki $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ będą również całkowitemi wymiernemi funkcyami tych zmiennych, ale d_s nie będzie już wymiaru s.

Identycznem równaniem $f - gh = r$ określamy d z i e l e n i e f u n k c y i f p r z e z g; h nazywa się ilorazem, a r resztą dzielenia.

Wskutek warunku $\delta \neq 0$ możemy napowrót wrócić do funkcyj F, G. Funkcyom h i r odpowiedzą w zmiennych $x, x_1, \dots, x_p$ funkcye całkowite H, R, z których pierwsza będzie wymiaru $(m-n)$, a dzielenie funkcyi F przez G określi się tu równaniem identycznem:

(7) $$F - GH = R.$$

Uwaga. Jeżeli funkcya G wymiaru n posiada dodajnik $b'x^n$ a funkcya F uporządkowana podług potęg zmiennej x posiada dodajnik $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)x^\mu$, gdzie φ jest funkcyą całkowitą a μ jest największym wykładnikiem zmiennej x i jest $\geq n$, to możemy — nie przerabiając F, G na f, g — dzielenie F przez G wprost wykonać. Funkcye bowiem H i R okażą się tu odrazu funkcyami całkowitemi.

Pd. 1. Podzielić funkcyę $F = x^3 + y^3$ przez funkcyę $G = xy + a$. Połóżmy $x = u + v, y = u - v$, gdzie u, v są nowe zmienne, a $\delta = -2$, to dostajemy:

$$f = (u+v)^3 + (u-v)^3 = 2u^3 + 6v^2u,\ g = (u+v)(u-v) + a = u^2 - v^2 + a,$$
$$h = 2u,\ r = (8v^2 - 2a)u.$$

Wracając do danych funkcyj mamy:

$$u = \frac{x+y}{2},\ v = \frac{x-y}{2};$$

wtedy z h i r dostajemy:

$$H = x + y,\ R = x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y - ax - ay,$$

a równanie (7) określające dzielenie F przez G ma tu postać:

$$(x^3 + y^3) - (xy + a)(x + y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y - ax - ay.$$

Pd. 2. Funkcyę $F = yzx^4 + (y + z)x^3 - yx^2 + ax + yz^5$ przez funkcyę:

$$G = x^2 - 3(y - z)x + yz$$

możemy dzielić bez ich przerobienia; kładziemy więc:

$$(yzx^4 + (y + z)x^3 - yx^2 + ax + yz^5) - (c_0x^2 + c_1x + c_2).(x^2 - 3(y-z)x + yz)$$
$$= d_0x + d_1,$$

a wtedy równania (6) określające spółczynniki w funkcyach H i R mają postać:

$$yz - c_0 = 0,\ (y + z) + 3(y - z)c_0 - c_1 = 0,$$
$$-y - yzc_0 + 3(y - z)c_1 - c_2 = 0,\ a - yzc_1 + 3(x - z)c_2 = d_0,$$
$yz^5 - yzc_2 = d_1$. Z nich dostajemy:
$$c_0 = yz,\ c_1 = 3y^2z - 3yz^2 + y + z,$$
$$c_2 = -19y^2z^2 + 9y^3z + 9yz^3 + 3y^2 - 3z^2 - y,$$

a przez to już d_0, d_1 są wyznaczone.

Żądany iloraz będzie tu:

$$H = yzx^2 + (3y^2z - 3yz^2 + y + z)x - (19y^2z^2 - 9y^3z - 9yz^3 - 3y^2 + 3z^2 + y),$$

a resztą dzielenia będzie $R =$

$$[a - yz(3y^2z - 3yz^2 + y + z) - 3(y - z)(19y^2z^2 - 9y^3z - 9yz^3 - 3y^2 + 3z^2 + y)]\,x$$
$$+ [yz^5 + yz(19y^2z^2 - 9y^3z - 9yz^3 - 3y^2 + 3z^2 + y)].$$

79. Podzielność jednej funkcyi przez drugą. Iloraz w kształcie funkcyi całkowitej we wszystkich zmiennych. W obydwóch wspomnianych przypadkach dzielenia zdarzyć się może, że po wyznaczeniu c_s i spółczynników $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$, te ostatnie okażą się wszystkie identycznie zerami. Wtedy mamy identycznie $R=0$, a dzielenie F przez G określa się równaniem: $F=G.H$, gdzie H jest całkowitą funkcyą we wszystkich zmiennych.

Gdy to zachodzi, to mówimy, że F jest podzielne przez G, albo że G jest podzielnikiem funkcyi F.

Kilka funkcyj danych może posiadać ten sam podzielnik, wtedy nazywamy je współmiernemi funkcyami. Gdy ten podzielnik jest wymiaru k, a funkcye już nie posiadają wspólnego podzielnika wymiaru $>k$, to taki podzielnik nazywamy największym. Szukaniem takiego największego podzielnika dwóch funkcyj zajmiemy się później, rozbierając przedtem jeden bardzo ważny przypadek podzielności dwóch danych funkcyj, nie przerabiając ich na funkcye f, g przez podstawienia (1) art. poprzedz.

Dzielmy F przez G, uważając je za funkcye samego x i przyjmijmy, że w G spółczynnik b_0 przy x^n nie jest ilością stałą, ale funkcyą pozostałych zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Dzielenie tych funkcyj tak pojętych niech wykaże podzielność funkcyi F przez G, a więc $F=G.H$, gdzie spółczynniki $c_0, c_1, \ldots$, funkcyi H, całkowitej w zmiennej x, dostajemy z równań

$$a_0-b_0c_0=0,\ a_1-b_0c_1-b_1c_0=0, \ldots$$

o postaciach:

$$c_0=\frac{a_0}{b_0},\ c_1=\frac{a_1b_0-b_1a_0}{b_0{}^2}, \ldots$$

Są one w ogólności ułamkowemi funkcyami zmiennych x_1, x_2, ..., x_p, gdyż b_0 jest funkcyą a nie stałą ilością.

Pd. 1. Dzielenie funkcyi $F=z^3+2yz^2+(y^2-x^3y)z-x^3y^2$ przez

$$G=xyz+xy^2$$

daje — gdy się je równocześnie uważa za funkcye samego z —

$$H=\frac{z^2}{xy}+\frac{z}{x}-x^2,\quad R=0.$$

Pd. 2. Funkcya: $F=yz^2x^3-y^2(z^2-1)x^2-(y^3-az^2)x-ayz^2$ jest jako funkcya samego x podzielną przez funkcyę $G=y^2z^2x-y^3z^2$ pojętą znowu jako funkcya samego x. Na ich iloraz dostajemy tu: $H=\frac{1}{y}.x^2+\frac{1}{z^2}x+\frac{a}{y^2}$.

Lecz i w tym przyjętym wypadku, t. j. gdy b_0 nie jest ilością stałą, ale funkcyą zmiennych x_1, x_2, ..., x_p, możemy — dzieląc F jako funkcyę samego x przez funkcyę G jako funkcyę samego x — dostać z ich podzielności iloraz H w funkcyi całkowitej wymiernej wszystkich zmiennych x, x_1, x_2, ..., x_p. Da się bowiem łatwo udowodnić twierdzenie:

I. *Gdy F jako funkcya samej zmiennej x jest podzielna przez G jako funkcyę samej zmiennej x, a spółczynniki b_0, b_1, ..., w G nie po-*

siadają wspólnego podzielnika, to wtedy F jest podzielne przez G, gdy je już za funkcye wszystkich zmiennych uważamy — co znaczy, że iloraz H jest funkcyą wymierną całkowitą we wszystkich zmiennych.

Przyjmijmy bowiem, że i w tym przypadku funkcya H ma spółczynniki ułamkowe. Wspólnym ich mianownikiem niech będzie całkowita funkcya $\gamma(x_1, x_2, ..., x_p)$. Połóżmy:

(1) $$H = H_1/\gamma,$$

gdzie H_1 jest funkcyą całkowitą wszystkich zmiennych, to mamy teraz: $F = G.(H_1/\gamma)$.

Równanie to jest identycznością. Po lewej jego stronie mamy funkcyę całkowitą wymierną F. Jego prawa strona musi więc także być taką funkcyą, a że funkcya G nie może zawierać czynnika γ, bo jej spółczynniki założyliśmy bez wspólnego podzielnika, więc H_1 musi być podzielne przez γ. To znaczy jednak że H jest funkcyą całkowitą wymierną wszystkich zmiennych (a funkcyi H można było nadać formę (1) tylko tym sposobem, że ją równocześnie pomnożyliśmy i podzielili przez γ).

80. Największy wspólny podzielnik. Łańcuchowe dzielenie. Po tych określeniach dzielenia dwóch funkcyj, lub ich podzielności przejdźmy do szukania największego wspólnego podzielnika danych funkcyj F, G zmiennych x, x_1, x_2, ..., x_p.

Bez względu na to, czy F, G posiadają największy wspólny podzielnik zależny jedynie od $x_1, x_2, ..., x_p$, lub go nie posiadają, szukać będziemy tylko takiego największego wspólnego podzielnika T, który zawiera w sobie koniecznie zmienną x. Wszelki zawarty w nim czynnik, zależny jedynie od pozostałych zmiennych odrzucimy. Ilorazy $(F:T)$, $(G:T)$ mają być całkowitemi funkcyami we wszystkich zmiennych.

Tak pojmując najw. wspólny podzielnik przystąpmy do metody wyznaczania go.

Gdy F, G pojmujemy jako funkcye samego x o stopniach m, n w tej zmiennej i założymy $m \geq n$, to — bez względu na ich wymiary — mamy, szukając ich wspólnego podzielnika (jako funkcyj samego x), dokonywać po porządku takich dzieleń:

$$(a) \quad \begin{aligned} & F = GH + \frac{G_1}{h_1}, \quad G = \frac{G_1}{h_1} H_1 + \frac{G_2}{h_2}, \\ & \frac{G_1}{h_1} = \frac{G_2}{h_2} H_2 + \frac{G_3}{h_3}, \quad \frac{G_2}{h_2} = \frac{G_3}{h_3} H_3 + \frac{G_4}{h_4}, \ ... \text{ [art. 55].} \end{aligned}$$

W resztach dzielenia: $\frac{G_1}{h_1}$, $\frac{G_2}{h_2}$, $\frac{G_3}{h_3}$, $\frac{G_4}{h_4}$, ... są G_1, G_2, G_3,

G_4, ... całkowitemi wymiernemi funkcyami wszystkich zmiennych; h_1, h_2, ..., zawierają jedynie x_1, x_2, ..., x_p, a ilorazy H_1, H_2, ..., są całkowitemi funkcyami w zmiennej x, a mają w ogólności ułamkowe spółczynniki w x_1, x_2, ..., x_p.

W tych dzieleniach musimy dojść do reszty zerowego stopnia w x, a więc do reszty będącej funkcyą już tylko pozostałych zmiennych.

Przyjmijmy dla uproszczenia, że taką resztą jest już G_4/h_4 i załóżmy, że ta reszta identycznie $=0$. Wtedy — jak w art. 55. — wnosimy, że G_3/h_3 jest jako funkcya samego x podzielnikiem funkcyj F, G pojętych również jako funkcye samego x. Mamy więc:

$$(b) \quad \begin{aligned} &F=(G_3/h_3).F', \quad G=(G_3/h_3).G', \text{ albo} \\ &F=G_3.(F'/h_3), \quad G=G_3.(G'/h_3), \end{aligned}$$

gdzie F', G' są funkcyami całkowitemi w zmiennej x, ale w ogólności nie potrzebują być takiemiż funkcyami w zmiennych pozostałych.

Przyjmijmy naprzód, że wszystkie spółczynniki przy potęgach x w G_3 są względem siebie pierwsze. Wtedy — według tw. I. art. poprzedzającego — muszą być w (b) funkcye F'/h_3, G'/h_3 całkowitemi funkcyami a G_3 jest podzielnikiem funkcyj F, G jako funkcyj wszystkich zmiennych.

Gdy przeciwnie spółczynniki w G_3 mają największy wspólny podzielnik $\gamma(x_1, x_2, ..., x_p)$, tak, że $G_3=\gamma.\, T(x, x_1, ..., x_p)$ to wtedy mamy $F=T.(\gamma F'/h_3)$, $G=T.(\gamma G'/h_3)$, a że w T spółczynniki są już względem siebie pierwsze, więc $\gamma.F'/h_3$, $\gamma.G'/h_3$ są tu funkcyami całkowitemi we wszystkich zmiennych, a $T(x, x_1, x_2, ..., x_p)$ jest wspólnym podzielnikiem funkcyj F, G.

Stąd wynika:

I. *Gdy w łańcuchowem dzieleniu* (a) *dojdziemy do dzielenia bez reszty, to licznik w dzielniku tego ostatniego dzielenia po wydaleniu wspólnego podzielnika jego spółczynników jest podzielnikiem danych funkcyj.*

Znaleziony podzielnik T niech będzie wymiaru k, co naznaczymy pisząc T_k za T. Przyjmijmy, że F, G posiadają prócz T_k jeszcze wspólny podzielnik T_l wymiaru $l > k$. Wtedy — [art. 55.] — musiałoby T_k być podzielne przez T_l. Za pomocą podstawień (1) — art. 78. — możemy T_k i T_l przerobić na funkcye zmiennych u, u_1, u_2, ..., u_p, a po uporządkowaniu ich podług potęg zmiennej u, dostaniemy:

$$(d) \qquad T_k = a_k u^k + \ldots + a_0, \quad T_l = b_l u^l + \ldots + b_0$$

ze spółczynnikami a_k, b_k stałymi i różnymi od zera.*)

Wskutek $k < l$ nie może być jednak T_k podzielne przez T_l w zmiennej u, a tem samem w zmiennych $u, u_1, u_2, \ldots, u_p$. Założenie więc, że istnieje wspólny podzielnik T_l jest fałszywe, a stąd wynika:

II. *Podzielnik $T = T_k$ jest zarazem wspólnym podzielnikiem najwyższego wymiaru czyli — jak mówimy — największym wspólnym podzielnikiem.*

Uwaga 1. Lecz także i możliwość istnienia podzielnika T' różnego od T, a o tym samym wymiarze k, musi być wykluczoną. Przyjmijmy bowiem, że taki podzielnik T' oprócz T istnieje. Przerobiwszy T i T' na funkcye zmiennych $u, u_1, \ldots, u_p$ możemy dostać $T = \alpha_k u^k + \ldots + \alpha_0$, $T' = \beta_k u^k + \ldots + \beta_0$ ze stałymi spółczynnikami α_k, β_k różnymi od zera. Przytem T musiałoby być podzielne przez T', a to jest tylko tym sposobem możliwe, że $\alpha_k : \beta_k = \ldots = \alpha_0 : \beta_0$. Pierwszy z tych stosunków jest ilością stałą, a stąd wynika, że i wszystkie dalsze odpowiednie spółczynniki pozostają do siebie w stałym stosunku $= \alpha_k / \beta_k$. Lecz przez to T i T' nie są od siebie istotnie różne, *c. b. d. d.*

Uwaga 2. Aby dostać największy wspólny podzielnik dwóch funkcyj odrzuciliśmy w ostatniem dzieleniu (a) z dzielnika wspólny podzielnik jego spółczynników. Tę uwagę zużyć można w zastosowaniach, a to w tym celu, aby wszystkie dzielenia w łańcuchu (a) ile możności ułatwić. Można bowiem będzie w razie potrzeby dzielną poszczególnego dzielenia pomnożyć stosownie obranym czynnikiem, albo z dzielnika odrzucić wspólny podzielnik jego spółczynników.

Pd. 1. Szukając największego wspólnego podzielnika funkcyj:

$$F = z^5 + (1 + y^2)z^4 + (xy + y + y^2)z^3 + (x + xy + y^3)z^2 + 2xy^2z + x^2y$$
$$G = (x + y)z^3 + [x + y^2(x + y)]z^2 + [xy(x + y) + xy^2]z + x^2y,$$

uważmy je za funkcye samego z. Zamiast dzielić F przez G, możemy dzielić $(x + y)^3 . F$ przez G [por. art. 55. Pd. 1.]. Z równania:

$$(x + y)^3 F - (c_0 z^2 + c_1 z + c_2)\, G = d_0 z^2 + d_1 z + d_2,$$

określającego to dzielenie, dostaniemy iloraz:

$$H = (x + y)^2 z^2 + y(x + y)z + [y(x + y)^2 - x] \quad \text{i resztę:}$$
$$G_1 = x^2[(x + y)^2 + y]z^2 + x^2y^2[(x + y)^2 + y]z + x^3y[(x + y)^2 + y].$$

Z tej reszty możemy wydzielić czynnik $x^2[(x + y)^2 + y]$ i dzielić dalej G przez $z^2 + y^2z + xy$. To dzielenie daje już resztę $= 0$, a więc tu

$$T(x, y, z) = z^2 + y^2z + xy.$$

Pd. 2. Dane funkcye są:

$$F = x^4 + (3y^2 + y)x^3 + 3y^3x^2 - x - y, \quad G = x^3 + yx^2 + y^3x + y^4.$$

Uważając je za funkcye samej zmiennej x i dzieląc F przez G dostajemy iloraz $H = x + 3y^2$, a resztę $G_1 = -[y^3x^2 + (1 + y^4 + 3y^5)x + (y + 3y^6)]$.

Dzieląc dalej $y^6.G$ przez $-G_1$ dostajemy z równania:

$$y^6 G - (c_0 x + c_1)(-G_1) = d_0 x + d_1$$

---

*) Przerobienia takiego tylko wtedy użyć trzeba, gdy $T_k\, T_l$ w zmiennych $x, x_1, x_2, \ldots, x_p$ nie mają formy (d).

iloraz $H_1 = c_0 x + c_1 = y^3 . x - (1 + 3y^5)$ i resztę:

$$G_2 = d_0 x + d_1 = [y^9 + (1 + 3y^5)^2](x + y).$$

Oddalając z tej reszty czynnik pierwszy i dzieląc dalej $-G_1$ przez $(x + y)$, dostaniemy już resztę $= 0$, a więc tu

$$T(x, y) = x + y.$$

81. Rugownik dwóch danych funkcyj. Znamię współmierności i niewspółmierności. Z samego oznaczania największego wspólnego podzielnika i określenia jego wynika, że dwie funkcye F, G, które posiadają jako funkcye samego x największy wspólny podzielnik stopnia k, posiadają zarazem i największy wspólny podzielnik całkowity wymierny we wszystkich zmiennych, a stopnia k w zmiennej x. Połóżmyż:

$$F = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m, \quad G = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ są całkowitemi funkcyami pozostałych zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_p$ i utwórzmy rugownik:

$$R(F, G) = \begin{vmatrix} a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0 \\ \vdots \\ b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, \ldots, 0 \\ \vdots \end{vmatrix} = R(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

to możemy wnioskować [art. 60.]:

I. *Gdy identycznie*

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \ \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_{k-1} = 0, \ a \ \Delta_k \neq 0,$$

to funkcye F, G jako funkcye samego x posiadają największy wspólny podzielnik $t = \Delta_k x^k + \Delta'_k x^{k-1} + \ldots + \Delta_k^{(k)}$. Gdy, odrzuciwszy z $\Delta_k, \Delta'_k, \ldots, \Delta_k^{(k)}$ największy ich wspólny czynnik, dostaniemy stąd

$$T(x, x_1, x_2, \ldots, x_p) = t_0 x^k + t_1 x^{k-1} + \ldots + t_k,$$

to T jest największym wspólnym podzielnikiem funkcyj F, G jako funkcyj wszystkich zmiennych.

Ze względu na dalsze poszukiwania określimy współmierność funkcyj F, G jeszcze w inny sposób: Identyczny związek:

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$$

wskazuje, że funkcye F, G mają wspólny pierwiastek x na każdem dowolnem miejscu $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Naodwrót, gdy F, G mają mieć wspólny pierwiastek x na dowolnem miejscu pozostałych zmiennych, to R być musi identycznie zerem.

Ograniczmy teraz dowolność miejsc $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ w ten sposób, że bierzemy pod uwagę tylko te miejsca, które tworzą dowolnie małe *continuum*. Rugownik będzie w tem *continuum* $= 0$, a skutkiem tego [art. 74., tw. II.] będzie identycznie zerem.

Stąd twierdzenia:

II. *Gdy dwie funkcye F, G mają pierwiastek x jednakowo się zmieniający z bieżącem miejscem $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, [mają wspólny pierwiastek x na dowolnem miejscu pozostałych zmiennych], albo — co dostatecznem jest — mają wspólny pierwiastek na wszystkich miejscach dowolnie małego continuum zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_p$ [n. p. na wszystkich miejscach otoczenia pewnego miejsca $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$], to takie funkcye są współmierne.*

III. *Gdy $R(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ nie jest identycznie zerem, to F, G są względem siebie pierwsze.*

Co się tyczy związków $(m, n, \alpha)=0$, $\alpha=1, 2, \ldots$, [art. 57, 58], to zauważyć tu trzeba: Parą funkcyj w związku $(m, n, 1)=0$, która tu, gdy funkcye F, G pojmujemy jako współmierne funkcye samego x, niezawodnie istnieje, niech będzie Γ'_{n-1}, Φ'_{m-1}. Spółczynniki $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, $d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$ są jeszcze nieznane, ale mają się wyznaczyć z równań:

$$(A)\quad a_0 c_0 + b_0 d_0 = 0,\ a_1 c_0 + a_0 c_1 + b_1 d_0 + b_0 d_1 = 0, \ldots, a_m c_{n-1} + b_n d_{m-1} = 0.$$

Gdy $R=0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_{k-1} = 0$, $\Delta_k \neq 0$, to w wyznaczniku $R=0$ tych równań znikają wszystkie 1^{sze}, $2^{\text{gie}}, \ldots, (k-1)^{\text{sze}}$ podwyznaczniki, a z k^{tych} podwyznaczników nie wszystkie są $=0$ (art. 59.). Uznajmy wtedy $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ za wielkości zupełnie dowolne (a więc najlepiej za stałe dowolne), to dostaniemy:

$$c_k = \frac{L_k}{\psi},\ c_{k+1} = \frac{L_{k+1}}{\psi}, \ldots, c_{n-1} = \frac{L_{n-1}}{\psi};\ d_0 = \frac{L'_0}{\psi},\ d_1 = \frac{L_1'}{\psi}, \ldots, d_{m-1} = \frac{L'_{m-1}}{\psi}.$$

$L_k, L_{k+1}, \ldots, L'_0, L'_1, \ldots$ są-to całkowite funkcye zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_p$, a liniowe jednorodne funkcye dowolnych stałych $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$. Wspólny mianownik ψ jest całkowitą wymierną funkcyą zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Połóżmy:

$\psi . \Gamma'_{n-1} = \Gamma_{n-1}$, $\psi\, \Phi'_{m-1} = \Phi_{m-1}$, albo wyraźnie:

$$\Gamma_{n-1} = \psi[c_0 x^{n-1} + \ldots + c_{k-1} x^{n-k}] + L_k . x^{n-k+1} + \ldots + L_{n-1},$$
$$\Phi_{m-1} = L'_0 x^{m-1} + L_1' x^{m-2} + \ldots + L'_{m-1},$$

to tej pary użyć można w związku $(m, n, 1)=0$, (gdy $c_0 \neq 0$) i z niej dalsze pary, (por. art. 59.) wynikną. Stąd twierdzenie:

IV. *Pary funkcyj $\Gamma_{n-\alpha}$, $\Phi_{m-\alpha}$, $\alpha=1, 2, \ldots, k$, jakie spełniają związki $(m, n, \alpha)=0$ są całkowitemi wymiernemi we wszystkich zmiennych.*

Pd. 1. Funkcye $F = x^3 + y^2x^2 - y^2x - 1$, $G = x^2 + yx - (y+1)$ jako funkcye samej zmiennej x mają identycznie:

$$R(F,G) = \begin{vmatrix} 1 & y^2 & -y^2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & y^2 & -y^2 & -1 \\ 1 & y & -(y+1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & -(y+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & -(y+1) \end{vmatrix}$$

$= 0$, gdyż za dodaniem wyrazów wszystkich pionów do odpowiednich wyrazów pionu pierwszego, dostaniemy w nim same zera.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & y^2 & -y^2 \\ 1 & y & -(y+1) \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix} = -y^3+y+1 \text{ nie jest identycznie zerem.}$$

Utworzmyż:

$$\begin{vmatrix} 1 & y^2 & -y^2x-1 \\ 1 & y & -(y+1)x+0 \\ 0 & 1 & yx-(y+1) \end{vmatrix} = (-y^3+y+1)(x-1), \text{ to widocznie}$$

$$T(x, y) = x-1.$$

Pd. 2. Funkcye $F = yx^3 + x^2 + y^3x + y^2$, $G = x^3 - x^2 + y^2x - y^2$ jako funkcye samego x posiadają rugownik $R(f,g) = 0$*).

Dalej dostajemy:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y & 1 & y^3 & y^2 \\ 0 & y & 1 & y^3 \\ 1 & -1 & y^2 & -y^2 \\ 0 & 1 & -1 & y^2 \end{vmatrix} = y^2 \begin{vmatrix} y & 1 & y^3 & 1 \\ 0 & y & 1 & y \\ 1 & -1 & y^2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ a}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -y-1 \text{ nie jest identycznie zerem. Utwórzmyż:}$$

$$\begin{vmatrix} y, & x^2+y^3x+y^2 \\ 1, & -x^2+y^2x-y^2 \end{vmatrix} = -(y+1)x^2-(y+1)y^2, \text{ to widocznie}$$

$$T(x, y) = x^2 - y^2.$$

Pd. 3. Znaleźć największy wspólny podzielnik funkcyj $F = x^3 + (y+z)x^2 + z^2x + z^2(y+z)$, $G = x^2 + zx - y(y+z)$. [Odp. $T(x,y,z) = x+y+z$].

Gdy dane funkcye F, G nie posiadają wspólnego podzielnika, a uważamy je za funkcye samego x, to dadzą się do nich dobrać dwie funkcye Γ'_{n-1}, Φ'_{m-1} stopni $n-1$, $m-1$ w zmiennej x, takie że zachodzi identycznie związek $F\Gamma'_{n-1} + G\Phi'_{m-1} = 1$ [art. 58.] Z niego — jeżeli $c_0, c_1, \ldots$ są jak przódy spółczynnikami funkcyi Γ'_{n-1}, a $d_0, d_1, \ldots$ spółczynnikami funkcyi Φ'_{m-1} — dostaniemy na oznaczenie tych spółczynników wszystkie równania (A) [art. 57.], z wyjątkiem ostatniego, które teraz zastąpić trzeba przez równanie

$$a_m c_{n-1} + b_n d_{m-1} = 1.$$

Każde c_s, d_s tak obliczone posiadać będzie jako mianownik $R(x_1, x_2, \ldots x_p) \neq 0$. Ich liczniki będą wymiernemi całkowitemi funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Połóżmyż:

$$\Gamma_{n-1} = R \,.\, \Gamma'_{n-1}, \quad \Phi_{m-1} = R \,.\, \Phi'_{m-1},$$

to mieć także będziemy:

$F\Gamma_{n-1} + G\Phi_{m-1} = R(x_1, x_2, \ldots x_p)$; a stąd twierdzenie:

---

*) Wyjmując bowiem w $R(f, g)$ z przedostatniego pionu y^2 i takiż czynnik z pionu ostatniego, a następnie odejmując wyrazy pionu ostatniego od pionu czwartego dostaniemy $R(f, g)$ w takiej formie, w której po wyłączeniu y^2 z pionu czwartego mamy pion 2gi i 4ty identyczne.

V. *Gdy funkcye F, G nie są wspólmierne, to istnieje para funkcyj Γ_{n-1}, Φ_{m-1} całkowitych wymiernych we wszystkich zmiennych o tej własności, że $F\Gamma_{n-1}+G\Phi_{m-1}$ równa się rugownikowi tych funkcyj.*

82. Przywiedlność lub nieprzywiedlność funkcyi całkowitej $F(x, x_1, \ldots, x_p)$, lub równania $F=0$. Całkowitą wymierną funkcyę $F(x, x_1, \ldots, x_p)$, którą można przedstawić iloczynem kilku całkowitych wymiernych funkcyj tych samych zmiennych nazywamy przywiedlną. Gdy takiej formy nadać jej nie można, to ją nazywamy nieprzywiedlną.

O funkcyach przywiedlnych da się udowodnić.

I. *Funkcyę przywiedlną można tylko w jeden sposób przedstawić iloczynem kilku funkcyj nieprzywiedlnych.*

Przyjmijmy bowiem, że równocześnie jest:

$$(a) \qquad F=F_1.F_2\ldots F_\mu,\ F=F_1'.F_2'\ldots F_\mu',$$

gdzie $F_1, F_2, \ldots, F_1', F_2', \ldots$ są nieprzywiedlnemi funkcyami. Z równań (a) wynika, że iloczyn $(F_1.F_2\ldots F_\mu)$ jest podzielny przez F_1', a że funkcye $F_1, F_2, \ldots F_\mu$, F_1' są nieprzywiedlne, to to jest tym sposobem możliwe, że jedna z funkcyj $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ jest identyczną z F_1'. Przyjmijmyż, że $F_1 \equiv F'_1$. Oddalając te identyczne czynniki, wnioskujemy dalej, że iloczyn $(F_2.F_3\ldots F_\mu)$ jest podzielny przez F'_2. Musi więc być znowu jedna z funkcyj $F_2, F_3, \ldots F_\mu$ identyczną z F_2' n. p. $F_2 \equiv F_2'$. Tak postępując dalej otrzymamy $F_1 \equiv F_1', F_2 \equiv F_2'$, $\ldots, F_\mu \equiv F_\mu'$ i $\mu=\nu$ *c. b. d. d.*

Przyjmijmy teraz, że F stopnia m w zmiennej x jest funkcyą nieprzywiedlną i posiada z drugą funkcyą $\Phi(x, x_1, \ldots, x_p)$ — stopnia $\geqq m$, w zmiennej x — jeden wspólny pierwiastek x. [Równania $F=0$, $\Phi=0$ mają na bieżącem miejscu $(x_1, x_2, \ldots x_p)$ ten sam pierwiastek x.].

Funkcye F, Φ posiadają zatem jako funkcye samego x wspólny podzielnik T, który, [art. 81.], ma być wymiernym całkowitym we wszystkich zmiennych. Jego stopień w x nie może być $<m$, gdyż F jest funkcyą nieprzywiedlną. Może więc być jedynie $T \equiv F$, a stąd wynika, że funkcyę nieprzywiedlną można także tak określić:

II. *Funkcya jest nieprzywiedlną, gdy każda inna funkcya, posiadając z nią jeden pierwiastek wspólny x, posiada tem samem wszystkie jej inne pierwiastki $x=x', x'', \ldots$*

Przyjmijmy, że nieprzywiedlna funkcya F, jako funkcya samego x posiada powtarzający się pierwiastek x zależny od bieżącego miejsca $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

Na dowolnem miejscu $(x_1, x_2, \ldots x_p)$ zajść muszą wtedy równocześnie równania:

$$F(x, x_1, \ldots, x_p)=0, \quad \frac{\partial F(x, x_1, \ldots, x_p)}{\partial x}=0.$$

Funkcye F, $\frac{\partial F}{\partial x}$ posiadaćby zatem musiały wspólny podzielnik całkowity, wymierny we wszystkich zmiennych, a F nie byłaby funkcyą nieprzywiedlną, jak założono. Stąd wynika:

III. *Nieprzywiedlna funkcya F nie posiada nigdy wielokrotnych pierwiastków w którejkolwiek zmiennej na bieżącem miejscu pozostałych zmiennych.*

Nazwę przywiedlności lub nieprzywiedlności przenosimy także na równanie algebraiczne $F(x, x_1, \ldots, x_p)=0$.

83. Wspólne miejsca zerowe dwóch funkcyj i zachowanie się ich w otoczeniu tych miejsc. Widzieliśmy, że współmierne funkcye $(p+1)$ zmiennych posiadają wspólny pierwiastek x na bieżącem miejscu $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, [art. 81.], a więc wspólne miejsca zerowe z zupełnie dowolnym systemem wartości p zmiennych. Zbadajmy teraz czy takie funkcye, a także i funkcye niewspółmierne nie posiadają jeszcze wspólnych miejsc zerowych innego rodzaju.

I^0. Dane funkcye F, G, są względem siebie pierwsze.

Jako funkcye samej zmiennej x mają rugownik $R(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ nie będący identycznie zerem. Ale ten rugownik, jako funkcya całkowita p zmiennych posiada przecież swoje miejsca zerowe, i to w skończonej liczbie, gdy $p=1$, a w nieskończonej, [art. 71.], gdy $p>1$.

Gdy jednem takiem miejscem zerowem jest $(x_1', x_2', \ldots, x_p')$ to funkcye $F(x, x_1', x_2', \ldots, x'_p)$, $G(x, x_1', x_2', \ldots, x_p')$ jednej już tylko zmiennej x posiadają przynajmniej jeden wspólny pierwiastek x'. Stąd wynika, że funkcye F, G jako funkcye wszystkich zmiennych posiadają koniecznie wspólne miejsca zerowe $(x', x_1', x_2', \ldots x_p')$, a spółrzędne $x_1', x_2', \ldots, x_p'$ tych miejsc określa równanie $R(x_1, x_2, \ldots, x_p)=0$.

II^0. Gdy F, G posiadają wspólny podzielnik T, to wszystkie miejsca dające $T=0$ są już miejscami zerowemi tych funkcyj. Do nich jednak dołączają się jeszcze inne miejsca zerowe, jeżeli przypadkowo nie jest T identyczne z G lub z F, albo jeżeli w równaniach:

$$F=T\,\Phi_{m-k}, \quad G=T\,\Gamma_{n-k}$$

funkcya Φ_{m-k} jest funkcyą tych zmiennych, których właśnie w Γ_{n-k}

brakuje. Za wyłączeniem tych dwóch przypadków będą funkcye Φ_{m-k}, Γ_{n-k} — jak w przypadku I. funkcye F, G — posiadały wspólne miejsca zerowe. Stąd twierdzenie:

I. *Jakiekolwiek dwie funkcye całkowite wymierne tych samych zmiennych posiadają w nieograniczonym obszarze swych zmiennych zawsze wspólne miejsca zerowe.*

Pd. 1. Funkcye F, G w Pd. 3. [art. 81.] mają przedewszystkiem wspólne miejsca zerowe $x+y+z=0$. Po wydaleniu z tych funkcyj największego wspólnego podzielnika dostaniemy $\Phi_2=x^2+z^2$, $\Gamma_1=x+y$; te funkcye są już względem siebie pierwsze, a ich wspólne miejsca zerowe bedą:

(a) $x=\pm zi$, $y=\mp zi$ z dowolnem z.

Wszystkie więc miejsca zerowe funkcyj F, G są: $x+z=0$ z dołączeniem miejsc (a).

Pd. 2. Okazać, że spółrzędne y wspólnych miejsc zerowych funkcyj $F=x^2+yx+y^2$, $G=y^3x^2+x-1$ względem siebie pierwszych są pierwiastkami równania $y^{10}-y^6+y^5+y^2+y+1=0$.

Niech F, G będą funkcyami niewspółmiernemi a jednem z ich wspólnych miejsc zerowych niech będzie $(x, x_1, \ldots, x_p)$. Przyjmijmy, że wszystkie miejsca zerowe funkcyi F (lub G) leżące w otoczeniu tego miejsca są zarazem miejscami zerowemi funkcyi G (lub F).

Spółrzędne $x_1, x_2, \ldots, x_p$, jakich przy uczynionem założeniu użyć mamy w rozważanych miejscach zerowych funkcyi F (lub G) wypełnić mają całe bardzo małe *continuum* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. W niem rugownik $R(F, G)=0$, jest więc identycznie zerem, [art. 81., tw. II.], a wskutek tego funkcye F, G nie są niewspółmierne, jak założono. Stąd wynika:

II. *Gdy $(x, x_1, x_2 \ldots, x_p)$ jest jednem ze wspólnych miejsc zerowych niewspółmiernych funkcyj F, G, to w otoczeniu tego miejsca znajdują się zawsze takie miejsca, na których, gdy $F=0$, to G jest $\neq 0$, a gdy $G=0$, to F jest $\neq 0$.*

84. Funkcya ułamkowa wielu zmiennych. Jej wartości skończone i nieskończone. Jej zachowanie się w miejscach wspólnych zerowych licznika i mianownika. Gdy dane są dwie funkcye F, G całkowite wymierne tych samych zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to ułamek F/G zmieniający swą wartość z bieżącem miejscem $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazwaliśmy, [art. 71.], wymierną ułamkową funkcyą

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Jej własnościami — przyjmując odrazu, że F, G nie są współmierne — zajmiemy się tu systematycznie.

Na każdem miejscu, na którem mianownik G jest $\neq 0$, ma U skończoną oznaczoną i tylko jedną wartość; jest więc — jak mówimy — jednoznaczną funkcyą. Na miejscach, na których $G=0$, a licznik F jest $\neq 0$, jest $U=\infty$. Dowolną wartość c przybiera funkcya U na nieskończenie wielu miejscach; równanie bowiem $U=c$ można, w razie $c=0$ zamienić na $F=0$, a w razie $c\neq 0$, a więc i $G\neq 0$ zamienić na $F-Gc=0$, a tak równanie $F=0$, jak $F-Gc=0$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Funkcye F, G — choć nie są współmierne — mają przecież swoje wspólne miejsca zerowe, a zachowanie się funkcyi U na takich miejscach leżących w skończoności i w ich otoczeniu trzeba osobno zbadać.

Biorąc jedno wspólne miejsce zerowe $(a)=(a_1, a_2,\ldots, a_n)$ pod uwagę zajmijmy się jego otoczeniem, wydzielając początkowo samo to miejsce z naszych rozważań.

Podług tw. II. art. poprzedzającego znajdują się w otoczeniu miejsca (a) i takie, na których $F=0$, a $G\neq 0$ jest, i takie, na których $F\neq 0$, a $G=0$ jest. W tem otoczeniu przyjmuje więc funkcya U i wartość $=0$ i wartość $=\infty$. Gdy dalej c jest dowolną, skończoną i różną od zera wartością, a napiszemy:

$$U=\frac{F}{G}-c+c=\frac{F-Gc}{G}+c,$$

to (a) jest znowu miejscem na którem $F-Gc=0$, a w jego otoczeniu znajdą się znowu miejsca, na których jest $F-Gc=0$, a $G\neq 0$; na takich miejscach będzie widocznie $U=c$, a więc:

I. *W otoczeniu wspólnego miejsca zerowego licznika i mianownika przybiera funkcya U każdą dowolną wartość c bez wyłączenia wartości $c=0$ i $c=\infty$.*

Aby na samem miejscu (a) zbadać funkcyę U, przeprowadźmy — kładąc $x_s=a_s+h_s$, $s=1,2,\ldots,n$ — jej licznik i mianownik do otoczenia miejsca (a). Wtedy mieć będziemy, [por. (B) art. 73.], $U=(V_\mu+V_{\mu+1}+\ldots)/(W_\nu+W_{\nu+1}+\ldots)$ a V_α, W_α są-to jednorodne funkcye stopnia α dowolnych dodatków h_s. Połóżmy $h_s=\varrho t_s$, $s=1$ $2,\ldots,n$, to dostaniemy:

$$U=\frac{\varrho^\mu}{\varrho^\nu}\cdot\frac{V'_\mu+\varrho V'_{\mu+1}+\ldots}{W'_\nu+\varrho W'_{\nu+1}+\ldots},$$

gdzie teraz V'_α, W'_α są jednorodnemi funkcyami zmiennych $t_1, t_2,\ldots, t_n$. Dla $\varrho=0$ dostaniemy stąd wartość funkcyi na miejscu (a). Wyrazi się ona granicą:

$$U_{(a)} = \lim_{\varrho=0} \varrho^{\mu-\nu} \cdot \frac{V'_\mu}{W'_\nu}.$$

Gdy $\mu < \nu$, to $\lim\limits_{\varrho=0} \varrho^{\mu-\nu} = \infty$, ale równocześnie w skończonym obszarze $(t_1, t_2, ..., t_n)$ znajdziemy między innemi i miejsca dające $V_\mu'/W_\nu'=0$, a $U_{(a)}$ jest nieoznaczonością: $\infty . 0$. Gdy $\mu > \nu$, to $\lim\limits_{\varrho=0}$ $\varrho^{\mu-\nu}=0$; ale w obszarze skończonym $(t_1, t_2, ..., t_n)$ zawierają się miejsca dające $V_\mu'/W_\nu'=\infty$, a więc $U_{(a)}$ będzie i tu nieoznaczonością: $0 . \infty$. W razie $\mu=\nu$ mamy $U_{(a)}=V_\mu'/W_\mu'$. Tu — gdy napiszemy wyraźnie $V_\mu'=\Sigma A_{\lambda_1\lambda_2 ... \lambda_n} t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} ... t_n^{\lambda_n}$, $W'_\mu=\Sigma B_{\lambda_1\lambda_2 ... \lambda_n} t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} ... t_n^{\lambda_n}$ — może zajść przypadek, że:

$$(\alpha) \qquad A_{\lambda_1\lambda_2 ... \lambda_n} : B_{\lambda_1\lambda_2 ... \lambda_n} = k$$

przy wszelkich zestawieniach znaczków $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, a więc każde dwa odpowiednie spółczynniki licznika i mianownika zostają w tym samym stosunku. Gdy to zachodzi, to mamy $U_{(a)}=k$, co znaczy, że funkcya U ma na miejscu (a) oznaczoną wartość. Jeżeli przeciwnie równania (α) się nie sprawdzają, to $U_{(a)}$ przedstawia wszystkie wartości funkcyi V_μ'/W_μ' w skończonym obszarze $(t_1, t_2, ... t_n)$, a więc funkcya U na miejscu (a) jest nieoznaczoną. Z tych uwag wynika.

II. *Wyjąwszy jednego tylko bardzo szczególnego przypadku jest funkcya U i na samem miejscu (a) nieoznaczoną.*

Przyjmijmy, że funkcya F/G w jakiemkolwiek *continuum* swych zmiennych jest statecznie zerem. W tem *continuum* jest więc statecznie $F=0$, a tem samem jest $F=0$ identycznie t. j. w całym nieograniczonym obszarze swoich zmiennych [art. 74. tw. II.]. Z tego powodu i sama funkcya F/G będzie identycznie zerem.

Przyjmijmy teraz, że dwie dane, ułamkowe funkcye wykazują te same wartości na wszystkich miejscach pewnego *continuum*. W tem całem *continuum* mamy wtedy statecznie

$$\frac{F}{G} - \frac{F_1}{G_1} = \frac{FG_1 - F_1 G}{GG_1} = 0$$

a więc statecznie jest tam $FG_1 - F_1 G = 0$. Ta równość jest więc identycznością i pociąga za sobą identyczność $F/G = F_1/G_1$. To znaczy:

III. *Dwie funkcye ułamkowe wykazujące te same wartości na każdem miejscu pewnego continuum są identyczne. Lecz już i obszar opisany w tw. IIa. — art. 74. — wystarcza, aby taka identyczność istniała.*

85. Ciągłość i pochodne funkcyi U. Po wyłączeniu miejsc nieskończonościowych i miejsc nieoznaczoności funkcyi, weźmy z pozostałych jedno miejsce $(x_1, x_2, ..., x_n)$, leżące w skończoności. Na niem jest licznik i mianownik skończonym, a gdy $h_1, h_2, ..., h_n$ są — jak wyżej — dowolne dodatki, to

$$U(x_1+h_1, ..., x_n+h_n) - U(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$\frac{F+\Delta F+...}{G+\Delta G+...} - \frac{F}{G} = \frac{G[\Delta F+...]-F[\Delta G+...]}{G[G+\Delta G+...]}.$$ Lecz

$$(\alpha) \quad |G(\Delta F+...)-F(\Delta G+...)| < |G|.|\Delta F+...|+|F|.|\Delta G+...|$$

(art. 20). Obierzmy dowolnie małe dodatnie ilości δ_s i załóżmy:

$$(\beta) \qquad |h_s| < \delta_s, \quad s=1, 2, 3, ..., n$$

to — gdy δ będzie nową, dowolnie małą dodatnią ilością — możliwem będzie δ_s tak wybrać, że dla wszelkich h_s wybranych podług (β) spełni się nierówność:

$$\frac{|G(\Delta F+...)-F(\Delta G+...)|}{|G|.|G+\Delta G+...|} < \frac{|G|.|\Delta F+...|+|F|.|\Delta G+...|}{|G|.|G+\Delta G+...|} < \delta.$$

Lecz, że lewa strona tej nierówności jest $|U(x_1+h_1, ..., x_n+h_n) - U(x_1 x_2, ..., x_n)|$, więc mamy:

$$(\gamma) \qquad |U(x_1+h_2, ..., x_n+h_n) - U(x_1, x_2, ..., x_n)| < \delta.$$

Tę możliwość równoczesnego spełnienia się nierówności (β), (γ) określamy, mówiąc, że funkcya U jest ciągłą na wszystkich miejscach $(x_1, x_2, ..., x_n)$, na których jest skończoną i oznaczoną.

Funkcyę U uważając za funkcyę jednej tylko zmiennej, n. p. zmiennej x_ν, możemy — jak w dziedzinie funkcyj jednej zmiennej [art. 62.] — tworzyć jej pochodne dowolnego rzędu. Te pochodne nazywamy tu cząstkowemi. Pochodne licznika i mianownika, jakie przytem wejdą, będą oczywiście również cząstkowemi. Na wzór funkcyi ułamkowej jednej zmiennej mieć więc będziemy przedewszystkiem:

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x_\nu} U = \frac{G\dfrac{\partial F}{\partial x_\nu} - F\dfrac{\partial G}{\partial x_\nu}}{G^2},$$

a z tego wnosimy, że taka pochodna jest skończoną i oznaczoną (istnieje, jak się wyrażają krócej) na wszystkich miejscach, w których sama funkcya U jest skończoną i oznaczoną. Pochodna (1) jest znowu ułamkową; z niej możemy dalej tworzyć wyższe cząstkowe pochodne $\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} U$, $\frac{\partial^3}{\partial x_\nu^3} U$,... Z pochodnej $\frac{\partial^a}{\partial x_\nu^a} U$ tworzyć dalej możemy pochodne $\frac{\partial^b}{\partial x_\mu^b} \frac{\partial^a}{\partial x_\nu^a} U$, $\mu \gtrless \nu$, $b=1, 2, 3, ..,$ Istnieją zatem (jak łatwo już wywnioskować) pochodne:

(2) $$U_{\alpha,\beta,\ldots,\varrho} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha}\cdot\frac{\partial^\beta}{\partial x_2^\beta}\cdots\frac{\partial^\varrho}{\partial x_n^\varrho}\,U$$

dowolnego rzędu $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\rho)$.

W pochodną taką wchodzą równocześnie cząstkowe pochodne $F_{\alpha,\beta,\ldots,\varrho}$, $G_{\alpha,\beta,\ldots,\varrho}$ licznika i mianownika (F, G), a że w nich porządek tworzenia pochodnych jest dowolny [art. 72.] więc i do funkcyi U to samo odnieść trzeba.

Mianownikiem pochodnej (2) — jeżeli jej postać ułamkowa skrócić się nie daje — jest mianownik G z wykładnikiem $2^{(\alpha+\beta+\ldots+\varrho)}$ a stąd wnosimy, że pochodne cząstkowe wszelkich rzędów funkcyi U istnieją na tych miejscach, na których sama funkcya U jest skończoną i oznaczoną.

86. O średnich wartościach *modd.* $[m_1, m_2, \ldots]$. Niech funkcya $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ określa się sumą:

(1) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

w której $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ są stałymi spółczynnikami, a sumowanie odnosi się do całkowitych wartości $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zawartych między granicami:

$$-p_1 \leqq \alpha_1 \leqq q_1, \quad -p_2 \leqq \alpha_2 \leqq q_2, \ldots, \quad -p_n \leqq \alpha_n \leqq q_n;$$

p_s, q_s są całkowite (dodatnie) skończone liczby.

Gdy niektóre lub wszystkie $p_s > 0$ są, to funkcya f pozostaje skończoną na wszystkich miejscach $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ leżących w skończoności i o wszystkich spółrzędnych $x_s \neq 0$.

W razie $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$ jest f funkcyą całkowitą wymierną i jest również w tym obszarze niezawodnie skończona.

Obierzmy n liczb dodatnich, całkowitych

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$$

i oznaczmy pierwiastek $1_{\frac{2\pi}{m_s}}$ równania $z^{m_s} - 1 = 0$ przez ε_s, $s = 1, 2, \ldots, n$, to $\varepsilon_s^0, \varepsilon_s^1, \varepsilon_s^2, \ldots, \varepsilon_s^{m_s-1}$ będą już wszystkimi pierwiastkami tego równania. Obierzmy dalej miejsce $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o wszystkich spółrzędnych różnych od zera, to z niego utworzyć możemy $m_1 . m_2 \ldots m_n$ miejsc:

(2) $$(x_1\varepsilon_1^{k_1},\ x_2\varepsilon_2^{k_2}, \ldots, x_n\varepsilon_n^{k_n})$$

(3) $$k_1 = 0, 1, \ldots, m_1-1,\ k_2 = 0, 1, \ldots, m_2-1, \ldots, k_n = 0, 1, \ldots, m_n-1.$$

Na każdem z tych miejsc ma f skończoną i oznaczoną wartość, a naszem zadaniem jest obliczyć sumę:

(4) $$\sum_{(k_1,\ldots,k_n)} f(x_1\varepsilon_1^{k_1}, x_2\varepsilon_2^{k_2}, \ldots, x_n\varepsilon_n^{k_n}) = \sum \varphi_{k_1 k_2 \ldots k_n}$$

tych wartości Sumowanie odnosi się tu do wszystkich $[m_1 . m_2 \ldots m_n]$ zestawień wykładników $k_1, k_2, \ldots, k_n$ przybierających równe lub różne wartości wyjęte z szeregów (3). Aby tę sumę obliczyć, zauważmy jeden dodajnik $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} . x_1^{\alpha_1} . x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ zawarty w f. Da on początek sumie:

$$\sum_{(k_1, \ldots, k_n)} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n} (x_1 \varepsilon_2^{k_1})^{\alpha_1} (x_1 \varepsilon_2^{k_2})^{\alpha_2}, \ldots, (x_n \varepsilon_n^{k_n})^{\alpha_n} = \tag{5}$$

$$A_{\alpha_1 . \alpha_2, \ldots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} . \sum_{(k_1, \ldots k_n)} (\varepsilon_1^{k_1 \alpha_1} . \varepsilon_2^{k_2 \alpha_2} \ldots \varepsilon_n^{k_n \alpha_n}),$$

która jest niezawodnie częścią składową sumy (4). W sumie $\Sigma(\varepsilon_1^{k_1 \alpha_1} \varepsilon_2^{k_2 \alpha_2} \ldots, \varepsilon^{k_n \alpha_n})$ zawierają się wyrazy z czynnikiem $\varepsilon_1^{0\alpha_1}$, wyrazy z czynnikiem $\varepsilon_1^{1\alpha_1}, \ldots$, wyrazy z czynnikiem $\varepsilon_1^{(m_1-1)\alpha_1}$, a gdy to uwidocznimy, mieć będziemy:

$$\sum_{(k_1, \ldots, k_n)} (\varepsilon_1^{k_1 \alpha_1} . \varepsilon_2^{k_2 \alpha_2} \ldots\ldots \varepsilon_n^{k_n \alpha_n}) = (\varepsilon_1^{0\alpha_1} + \varepsilon_1^{1 . \alpha_1} + \ldots + \varepsilon_1^{(m_1-1)\alpha_1}) . \tag{6}$$

$$\sum_{(k_2, \ldots, k_n)} (\varepsilon_2^{k_2 \alpha_2} . \varepsilon_3^{k_3 \alpha_3} \ldots\ldots \varepsilon_n^{k_n \alpha_n}).$$

Po prawej stronie odnosi się sumowanie znowu do wszelkich $[m_2 . m_3 \ldots\ldots m_n]$ zestawień wykładników $k_2, k_3, \ldots, k_n$ wyjętych z szeregów (3). Lecz $\varepsilon_1^{0.\alpha_1} + \varepsilon_1^{1.\alpha_1} + \ldots + \varepsilon_1^{(m_1-1)\alpha_1} = s_{\alpha_1}$, jest $=0$, gdy α_1 nie jest podzielne przez m_1, a więc w tym razie jest cała suma (5) zerem. Gdy przeciwnie $\alpha_1 \equiv 0$ (*mod.* m_1), to s_{α_1} ma wartość m_1 [art. 25.] i wtedy suma (6) ma wartość $m_1 \sum_{(k_2, \ldots, k_n)} (\varepsilon_2^{k_2 \alpha_2} . \varepsilon_3^{k_3 \alpha_3} \ldots\ldots \varepsilon_n^{k_n \alpha_n})$.
Wyraz ten będzie, [podobnie jak suma (6)], zerem, gdy α_2 nie jest podzielne przez m_2, będzie zaś miał wartość

$$m_1 m_2 \sum_{(k_3, \ldots, k_n)} (\varepsilon_3^{k_3 \alpha_3} . \varepsilon_4^{k_4 \alpha_4} \ldots\ldots \varepsilon_n^{k_n \alpha_n}),$$

gdy $\alpha_2 \equiv 0$ (*mod.* m_2). Rozumując w ten sposób dalej, dojdziemy do wniosku, że suma (5)

1^0 jest zerem, gdy nie wszystkie z wykładników $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ wyjętego dodajnika były odpowiednio podzielne przez $m_1, m_2, \ldots, m_n$,

2^0 ma wartość $m_1 . m_2 \ldots m_n A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} . x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, gdy wszystkie wykładniki $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tego dodajnika były odpowiednio wielokrotnościami obranych liczb $m_1, m_2, \ldots, m_n$. [$\alpha_s = 0$ do tych liczb także się zaliczają].

Niech więc $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ przedstawia sumę takich dodajników funkcyi f, w których wykładniki $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ są odpowiednio podzielne przez $m_1, m_2, \ldots, m_n$ i niech iloczyn $m_1 m_2 \ldots m_n = M$, to mieć będziemy:

$$[\Sigma \varphi_{k_1, k_2, \ldots k_n}] / M = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; m_1, m_2, \ldots, m_n), \tag{7}$$

gdzie iloraz po lewej stronie jest tu, [por. art. 69.], średnio-arytmetyczną M wartości funkcyi f obliczonych na miejscach (2). Nazwiemy ją średnią arytmetyczną wartości funkcyi f (*modd.* $m_1, m_2, \ldots, m_n$); [czytaj: według modułów $m_1, m_2, \ldots, m_n$]. Nazwijmy dalej $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ funkcyą wydzieloną z funkcyi f według modułów $m_1, m_2, \ldots, m_n$, to relacyę (7) wysłowimy krótko w ten sposób:

I. *Średnia arytmetyczna funkcyi (modd.* $m_1, m_2, \ldots, m_n$) *równa się wydzielonej funkcyi według tych modułów.*

Gdy m_s obierzemy tak duże, że równocześnie jest $m_s > p_s$, $m_s > q_s$, $s=1, 2, \ldots, n$, a f ma wolny wyraz A, to z relacyi (7) otrzymamy:

(8) $$[\Sigma \varphi_{k_1, k_2, \ldots, k_n}] / M = A, \text{ a to znaczy:}$$

II. *Przy dostatecznie dużych modułach* m_s *jest średnia arytmetyczna funkcyi* f *stałą ilością* $=A$ *w całym nieograniczonym obszarze* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Z relacyi (8) dostajemy związek:

(9) $$\{\Sigma |\varphi_{k_1, k_2, \ldots, k_n}|\} / M \geq A.$$

Nieograniczony obszar n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ można — jak wiadomo — przedstawić za pomocą n nieograniczonych płaszczyzn $(x_1), (x_2), \ldots, (x_n)$, [art. 35]. Połóżmyż $|x_s| = r_s$ i na każdej z płaszczyzn (x_s) zakreślmy z punktu $x_s=0$, jako środka, koło (r_s), wpiszmy dalej w to koło foremny m_s-bok o jednym wierzchołku w dowolnym punkcie x_s na obwodzie tego koła, to każde miejsce (2) będzie takim zbiorem n wierzchołków tych wieloboków, że w nim żadne dwa wierzchołki do jednego wieloboku nie należą. Na wszystkich miejscach $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w których $|x_s| = r_s$, jest f skończoną, a na jednem przynajmniej z tych miejsc n. p. na miejscu $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ posiędzie $|f|$ największą wartość $|f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)| = G$*).

Zatrzymajmyż założenia: $m_s > p_s$, $m_s > q_s$, a w relacyę (9) wstawmy za każde $|\varphi_{k_1, k_2 \ldots, k_n}|$ największą wartość G, to dostaniemy związek:

(10) $$G \geq |A|, \text{ a to zn.}$$

III. *Gdy na miejscach* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *o spółrzędnych* x_s *leżących na kołach* (r_s) *ma funkcya* f *największą bezwzględną wartość* G, *to ta bezwzględna wartość nie jest nigdy mniejszą od bezwzględnej wartości wolnego wyrazu funkcyi.*

---

*) Funkcya $Ax_1^2 . x_2^3 x_3$ ma na miejscach $|x_1| = r_1$, $|x_2| = r_2$, $|x_3| = r_3$ statecznie tę samą bezwzględną wartość $|A| r_1^2 . r_2^3 . r_3$.

Przyjmijmy, że funkcya f ma między innymi dodajnik postaci $A_{\alpha,\beta,\ldots,\varrho} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \ldots x_n^{\varrho}$. Funkcya $x_1^{-\alpha} x_2^{-\beta} \ldots x_n^{-\varrho}.f$ ma wtedy wolny wyraz $A_{\alpha,\beta,\ldots,\varrho}$ i jest funkcyą o tej samej budowie, co f. Do niej relacya (10) również odnosić się będzie, a więc: n a j w. w a r t. $|x_1^{-\alpha} x_2^{-\beta} \ldots x_n^{-\varrho}| . |f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ będzie $\geqq |A_{\alpha,\beta,\ldots,\varrho}|$, gdy $|x_1| = r_1$, $|x_2| = r_2, \ldots, |x_n| = r_n$. Ta największa wartość będzie tu $r_1^{-\alpha} . r_2^{-\beta} \ldots r_n^{-\varrho} G$, a stąd wyniknie:

(11) $$|G| \geqq |A_{\alpha,\beta,\ldots,\varrho}| r_1^{\alpha} r_2^{\beta} \ldots r_n^{\varrho};$$ to znaczy:

IV. *Największa bezwzględna wartość funkcyi f na miejscach $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o spółrzędnych leżących na obwodach kół (r_s) nie jest nigdy mniejszą od bezwzględnej wartości któregokolwiek z jej dodajników dla $|x_s| = r_s$.*

Gdy Γ jest najmniejszą z wartości $|f|$ na tych miejscach, to równocześnie jest:

(12) $$\Gamma \leqq |A_{\alpha,\beta,\ldots,\varrho}| r_1^{\alpha} r_2^{\beta} \ldots r_n^{\varrho}.$$

CZĘŚĆ III.

O FUNKCYACH SYMETRYCZNYCH I WIELOPOSTACIOWYCH; O OBROTACH WIELOŚCIANÓW UMIAROWYCH I ICH FUNKCYACH.

ROZDZIAŁ VII.

O funkcyach symetrycznych, grupach i o funkcyach wielopostaciowych.

---

87. Określenie funkcyi symetrycznej i grupy symetrycznej. Elementarne funkcye symetryczne. Z funkcyj wymiernych całkowitych wielu zmiennych mają doniosłe, tak teoretyczne, jak praktyczne znaczenie f u n k c y e w y m i e r n e s y m e t r y c z n e. Są-to funkcye $R(x_1, x_2, ..., x_n)$, które postaci swej nie zmieniają, gdy w nich zmienne $x_1, x_2, ..., x_n$ dowolnie uporządkujemy. (Wliczając i porządek $x_1, x_2, ..., x_n$, mamy takich porządków (permutacyj) $n!$). Takiemi funkcyami są n. p. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1+x_2+x_3$, $(x_1+x_2)/x_1x_2$ i t. p. Lecz w teoryi ograniczymy się jedynie do funkcyj całkowitych.

Funkcya symetryczna (całkowita) pozostając tej samej formy za zmianą porządku $x_1, x_2, ..., x_n$ na porządek $x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n}$ przedstawia mimo tej zmiany na bieżącem miejscu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tę samą wartość. Stąd nasuwa się bezpośrednio pytanie, czy naodwrót funkcya wymierna całkowita nie zmieniająca swej wartości na d o w o l n e m miejscu za zmianą porządku $x_1, x_2, ..., x_n$ na d o w o l n y i n n y jest symetryczną? Aby na to odpowiedzieć, przyjmijmy, że funkcya całkowita wymierna $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ma właśnie własność:

$$(a) \qquad f(x_1, x_2, ..., x_n)=f(x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n}).$$

Połóżmy $f(x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n})=\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$, to funkcya

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)-\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$$

jest $=0$ na wszystkich miejscach nieograniczonego obszaru $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ i jest według tw. II. art. 74. identycznem zerem. Stąd wynika, że równanie (a) jest identycznością, a to znaczy:

I. *Funkcya wymierna całkowita n zmiennych* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *wykazująca na bieżącem miejscu tę samą wartość, choć się jej zmienne* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *zastąpi dowolną ich permutacyą, jest symetryczną.*

Zmienienie porządku $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots x_{k_n}$ nazywamy podstawieniem albo substytucyą i znaczymy ją przez:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ x_{k_1}, & x_{k_2}, & \ldots, & x_{k_n} \end{pmatrix}.$$

Taki symbol (substytucyę) naznaczamy jedną literą n. p. s. Litera s z różnemi znaczkami, jak s_α, s_β oznacza różne substytucye. Wszystkie substytucye w ilości $n!$ nazywamy symetryczną grupą substytucyj. Znaczyć ją będziemy przez:

$$(s) = (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{n!}).$$

W niej zawiera się i substytucya $\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} = s_1$, nie naruszająca wcale porządku zmiennych (subst. identyczna). Znaczą ją pisząc $s_1 = 1$.

Z tej definicyi wynika, że funkcyi symetrycznej nie zmienia, (nie alteruje) symetryczna grupa podstawień. W grupie takiej znajdują się podstawienia, które porządkują na wszystkie możliwe sposoby t którychkolwiek zmiennych n. p. zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_t$, a nie naruszają wcale pozostałych zmiennych $x_{t+1}, \ldots, x_n$. Z tego wynika:

II. *Funkcya symetryczna w n zmiennych jest symetryczną w t którychkolwiek swych zmiennych.*

Gdy dana funkcya symetryczna F posiada dodajnik:

$$C . x_1^\alpha . x_2^\beta \ldots x_n^\sigma,$$

to musi jeszcze posiadać dodajniki, które z niego powstają przez zmienienie porządku $x_1, x_2, \ldots, x_n$ według wszystkich $n!$ podstawień grupy (s). Zawiera więc funkcya F niezawodnie sumę:

$$C . \sum_{(s)} x_1^\alpha . x_2^\beta \ldots x_n^\sigma,$$

w której znaczek (s) wskazuje właśnie zastosowanie całej grupy symetrycznej, a która jest jednorodną funkcyą w swoich zmiennych. Gdy ta sama nie wyczerpuje jeszcze wszystkich dodajników funkcyi F, to znajdziemy w niej jeszcze inną funkcyę jednorodną

$C'\sum_{(s)} x_1^{\alpha'} . x_2^{\beta'} \ldots x_n^{\sigma'}$, i t. d. Z tego wynika, że dość w dalszym ciągu badać tylko funkcye symetryczne jednorodne.

Funkcye symetryczne:

$$S(x_1)=c_1,\quad S(x_1 . x_2)=c_2,\quad S(x_1 . x_2 . x_3)=c_3 \ldots,\ x_1 . x_1 \ldots x_n=c_n,$$

a więc: sumę n zmiennych, sumę wszystkich iloczynów co dwóch zmiennych, sumę wszystkich iloczynów co 3 zmiennych, ... i wreszcie iloczyn wszystkich zmiennych nazywamy elementarnemi funkcyami symetrycznemi.

Zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zwane tu zwykle elementami, są pierwiastkami równania:

$$(b) \qquad f(x)=x^n-c_1 x^{n-1}+c_2 x^{n-2}-\ldots \pm c_n=0,$$

którego spółczynniki są właśnie elementarnemi funkcyami symetrycznemi [art. 50.].

Pierwiastki pojmować trzeba, jako między sobą różne, a w szczególnych przypadkach powtarzające się pierwiastki poodróżniać od siebie różnymi znakami, a to dlatego, aby i w tym razie mieć n elementów i nie naruszyć symetryczności danych funkcyj, jak to n. p. daje się sprawdzić na funkcyi $(a^2+a^2+b^2+c^2)$. Jest ona — gdy pierwszy element a oznaczymy przez a_1, a drugi przez a_2 — symetryczną w 4 elementach a_1, a_2, b, c, ale przestaje być symetryczną w 3 elementach a, b, c.

88. Zasadnicze twierdzenie o funkcyach symetrycznych. Po tych uwagach i definicyach przejdźmy do dowodu zasadniczego twierdzenia w teoryi funkcyj symetrycznych, a mianowicie:

I. *Każda symetryczna funkcya n zmiennych jest wymierną całkowitą funkcyą n elementarnych, symetrycznych funkcyj $c_1, c_2, \ldots, c_n$.*

Tego twierdzenia ogólnego dowiedziemy stopniowo, okazując naprzód, że każda funkcya symetryczna postaci:

$$s_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu + x_3^\nu + \ldots + x_n^\nu = S(x_1^\nu), \quad \nu \text{ całkowite, dodatnie,}$$

jest całkowitą wymierną funkcyą elementarnych funkcyj symetrycznych.

Równanie $f(x)=0$, a tem samem i równanie $x^r . f(x)=0$, gdzie r całkowite dodatnie zakładamy, spełnia się dla $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$. To mając na względzie dostaniemy związki:

$$\begin{array}{l}
x_1^{n+r}-c_1 x_1^{n+r-1}+c_2 x_1^{n+r-2}-\ldots \pm c_n x_1^r=0 \\
x_2^{n+r}-c_1 x_2^{n+r-1}+c_2 x_2^{n+r-2}-\ldots \pm c_n x_2^r=0 \\
\vdots \\
x_n^{n+r}-c_1 x_n^{n+r-1}+c_2 x_n^{n+r-2}-\ldots \pm c_n x_n^r=0.
\end{array}$$

Po ich dodaniu otrzymamy relacye:

$$(A)\qquad s_{n+r}-c_1 s_{n+r-1}+c_2 s_{n+r-2}-\ldots\pm c_n s_r=0,\quad r=0,1,2,3,\ldots$$

Stąd, gdy $r=0$, możliwem jest przedewszystkiem s_n przedstawić wymiernie całkowicie przez $s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, s_0=n$ i przez $c_1, c_2, \ldots, c_n$, a na podstawie tego — gdy $r>0$ — można $s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, \ldots$ wyrazić w wymiernych całkowitych funkcyach ilości:

$$s_{n-1},\ s_{n-2},\ \ldots,\ s_1,\ s_0=n \text{ i } c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n.$$

Zbadajmyż, czy dalej możliwem będzie $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ wyrazić wymiernie całkowicie przez $c_1, c_2, \ldots, c_n$? W tym celu zauważmy, że: $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x-x_1}+\dfrac{f(x)}{x-x_2}+\ldots+\dfrac{f(x)}{x-x_n}$ i że:

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{x-x_\lambda}=x^{n-1}+(x_\lambda-c_1)x^{n-2}+(x_\lambda{}^2-c_1x_\lambda+c_2)x^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots+(x_\lambda{}^{n-1}-c_1x_\lambda{}^{n-2}+c_2x_\lambda{}^{n-3}-\ldots\mp c_{n-1}),$$

[art. 50., str. 130.], $\lambda=1, 2, \ldots, n$.

Po dodaniu tych ilorazów, dostaniemy identyczne równanie:

$$f'(x)=n.x^{n-1}-(n-1)c_1x^{n-2}+(n-2)c_2x^{n-3}-\ldots\mp c_{n-1}$$
$$=n.x^{n-1}+(s_1-nc_1)x^{n-2}+(s_2-c_1s_1+nc_2)x^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots+(s_{n-1}-c_1s_{n-2}+c_2s_{n-3}-\ldots\mp n.c_{n-1}),$$

z którego wynika:

$$(B)\qquad \begin{gathered} s_0-n=0,\ s_1-c_1=0,\ s_2-c_1s_1+2c_2=0,\ s_3-c_1s_2+c_2s_1-3c_3=0,\ \ldots,\\ s_{n-1}-c_1s_{n-2}+c_2s_{n-3}-c_3s_{n-4}+\ldots+(-1)^{n-1}(n-1)c_{n-1}=0. \end{gathered}$$

Z tych równań, a potem z równań (A) dostaniemy po porządku:

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{l} s_0=n,\ s_1=c_1,\ s_2=c_1{}^2-2c_2,\ s_3=c_1{}^3-3c_1c_2+3c_3,\\ s_4=c_1{}^4-c_1{}^2c_2+4c_1c_3+2c_2{}^2-4c_4,\\ s_5=c_1{}^5-5c_1{}^3c_2+5c_1{}^2c_3+5c_1c_2{}^2-5c_1c_4-5c_1{}^2c_3+5c_5\ {}^{*)}\\ \quad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots \end{array}\right.$$

Każde więc s_ν daje się wyrazić wymiernie przez elementarne funkcye symetryczne.

W wzór na s_ν, $\nu>n$, wejdą w (2) $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$, a że ich jest tylko n, t. j. $c_1, c_2, \ldots, c_n$, więc w wzorach na s_{n+r}, $r=1, 2, 3, \ldots$ trzeba $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ położyć $=0$.

---

*) Te formy nazywają formami Newtona; por. *„Arithmetica Universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber“* (w ustępie: *de transmutationibus aequationum*) str. 192. (1732), chociaż już Girard (1629) umiał formami (2) wyrażać s_1, s_2, s_3, s_4 — por. M. Cantor: *Vorlesungen ü. Geschichte d. Mathem.* T. 2. str. 719.

Połóżmy: $s_\nu = G_\nu(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \Sigma . A c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n}$, to — gdy tu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zastąpimy przez $\varrho x_1, \varrho x_2, \ldots, \varrho x_n$ z dowolnym czynnikiem $\varrho \neq 0$ — przejdzie s_ν na $\varrho^\nu s_\nu$. W funkcyi G_ν każdy jej dodajnik $A c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n}$ przejdzie na $\varrho^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n} . A c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n}$..

Stąd wynika, że musi być $\nu = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n$ w każdym dodajniku funkcyi G_ν. Tę własność funkcyi G_ν wyrażamy mówiąc: funkcya G_ν jest izobaryczną o wadze ν.

Z form (2) dadzą się naodwrót $c_1, c_2, \ldots, c_n$ wyrazić wymiernie całkowicie przez $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Używając bowiem do obliczenia c_ν, pierwszych ν równań dostajemy:*)

$$(3) \qquad c_\nu = \frac{1}{\nu!} \begin{vmatrix} s_1, & s_2, & s_3, & \ldots, & s_\nu \\ 1, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_{\nu-1} \\ 0, & 2, & s_1, & \ldots, & s_{\nu-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, (\nu-1), & s_1 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} . s_\nu + (s_{\nu+1}, s_{\nu-2}, \ldots, s_1),$$

gdzie $(s_{\nu-1}, s_{\nu-2}, \ldots, s_1)$ jest całkowitą wymierną funkcyą zakreślonych ilości

Za pośrednictwem s_ν będzie można teraz każdą całkowitą symetryczną funkcyę przedstawić wymiernie całkowicie przez c_1, $c_2, c_3, \ldots, c_n$. Przy tem dostatecznem będzie — na podstawie uwag w art. 87 — ograniczyć się do funkcyj symetrycznych jednorodnych. Zacznijmy od funkcyi: $S(x^\alpha_1 . x^\beta_2)$, $\alpha \gtreqless \beta$, [przy $\alpha=5$, $\beta=7$] mamy n. p. w trzech zmiennych x_1, x_2, x_3 funkcyę:

$$(x_1{}^5 x_2{}^7 + x_1{}^5 x_3{}^7 + x_2{}^5 x_1{}^7 + x_2{}^5 x_3{}^7 + x_3{}^5 x_1{}^7 + x_3{}^5 x_2{}^7) \text{ i t. p.}$$

Zauważmy:

$$s_\alpha = x_1{}^\alpha + x_2{}^\alpha + \ldots + x_n{}^\alpha, \quad s_\beta = x_1{}^\beta + x_2{}^\beta + \ldots + x_n{}^\beta, \quad \text{to}$$

$$s_\alpha s_\beta = S(x_1{}^{\alpha+\beta}) + S(x_1{}^\alpha . x_2{}^\beta) = s_{\alpha+\beta} + S(x_1{}^\alpha . x_2{}^\beta), \quad \text{stąd:}$$

$$\text{(I)} \qquad S(x_1{}^\alpha x_2{}^\beta) = s_\alpha s_\beta - s_{\alpha+\beta}.$$

W razie $\alpha = \beta$ mamy funkcyę: $S(x_1{}^\alpha . x_2{}^\alpha)$. Zauważmy:

$$s_\alpha{}^2 = S(x_1{}^{2\alpha}) + 2S(x_1{}^\alpha . x_2{}^\alpha) = s_{2\alpha} + 2S(x_1{}^\alpha . x_2{}^\alpha), \text{ to stąd wynika:}$$

$$\text{(II)} \qquad S(x_1{}^\alpha . x_2{}^\alpha) = \frac{1}{2} [s_\alpha{}^2 - s_{2\alpha}].$$

Aby funkcyę $S(x_1{}^\alpha . x_2{}^\beta . x_3{}^\gamma)$ o różnych między sobą α, β, γ wyrazić przez s_ν, zauważmy iloczyn:

$$s_\alpha . s_\beta . s_\gamma = S(x_1{}^{\alpha+\beta+\gamma}) + S(x_1{}^{\alpha+\beta} . x_2{}^\gamma) + S(x_1{}^{\alpha+\gamma} . x_2{}^\beta) + S(x_1{}^{\beta+\gamma} . x_2{}^\alpha) + S(x_1{}^\alpha . x_2{}^\beta . x_3{}^\gamma).$$

Pierwsza suma jest $= s_{\alpha+\beta+\gamma}$. Sumy: druga, trzecia, czwarta, wyrażone wzorem (I), dają:

$$s_{\alpha+\beta} . s_\gamma - s_{\alpha+\beta+\gamma}, \quad s_{\alpha+\gamma} . s_\beta - s_{\alpha+\beta+\gamma}, \quad s_{\beta+\gamma} . s_\alpha - s_{\alpha+\beta+\gamma};$$

---

*) Por. H. Hankel: *Darstellung symmetrischer Functionen durch die Potenzsummen.* Crelle J., T. 66., str. 90—94. (NB. Wyznacznik obliczony według ostatniego pionu).

a że piąta suma jest daną funkcyą: więc mamy:

(III) $S(x_1{}^\alpha x_2{}^\beta x_3{}^\gamma) = s_\alpha s_\beta s_\gamma - (s_{\alpha+\beta}.s_\gamma + s_{\beta+\gamma}.s_\alpha + s_{\alpha+\gamma}.s_\beta) - 2s_{\alpha+\beta+\gamma}$.

W razie dwóch wykładników równych, trzeba utworzyć iloczyn $s_\alpha{}^2.s_\beta$. Wtedy dostaniemy:

$$\text{(IV)} \qquad S(x_1{}^\alpha.x_2{}^\alpha.x_3{}^\beta) = \frac{1}{2}[s_\alpha{}^2.s_\beta - s_{2\alpha}s_\beta - 2s_{\alpha+\beta}.s_\alpha + 2s_{2\alpha+\beta}].$$

Gdy $\alpha=\beta=\gamma$, to tworzymy:

$$s_\alpha{}^3 = s_\alpha{}^2.s_\alpha = [S(x_1{}^{2\alpha}) + 2S(x_1{}^\alpha x_2{}^\alpha)](x_1{}^\alpha + x_2{}^\alpha + \ldots + x_n{}^\alpha)$$
$$= S(x_1{}^{3\alpha}) + S(x_1{}^{2\alpha}x_2{}^\alpha) + 2S(x_1{}^{2\alpha}.x_2{}^\alpha) + 6S(x_1{}^\alpha x_2{}^\alpha x_3{}^\alpha)$$
$$= s_{3\alpha} + 3S(x_1{}^{2\alpha}.x_2{}^\alpha) + 6S(x_1{}^\alpha x_2{}^\alpha x_3{}^\alpha) \text{ *)}$$

Stosując do sumy drugiej wzór (I), dostaniemy ostatecznie:

$$\text{(V)} \qquad S(x_1{}^\alpha.x_2{}^\alpha x_3{}^\alpha) = \frac{1}{6}[s_\alpha{}^3 - 3s_\alpha.s_{2\alpha} + 2s_{3\alpha}].$$

W ten sam sposób możemy postępować dalej, a więc każdą funkcyę postaci $\sum\limits_{(s)} x_1{}^\alpha.x_2{}^\beta \ldots x_n{}^\sigma$ wyrazić wymiernie całkowicie przez funkcye s_ν. Lecz s_ν są wymiernemi funkcyami elementarnych funkcyj $c_1, c_2, \ldots, c_n$, a więc zasadnicze twierdzenie I. mamy dowiedzione.

89. Metoda bezpośrednia wyrażania funkcyj symetrycznych przez elementarne. W funkcyach symetrycznych, wyrażonych już przez $c_1, c_2, \ldots, c_n$ znajdują się dodajniki postaci:

$$(a) \quad c_1{}^{\alpha_1} c_2{}^{\alpha_2} \ldots c_{n-1}{}^{\alpha_{n-1}} c_n{}^{\alpha_n}, \qquad (b) \quad c_1{}^{\beta_1} c_2{}^{\beta_2} \ldots c_{n-1}{}^{\beta_{n-1}} c_n{}^{\beta_n}, \ldots$$

[stałych spółczynników nie uwzględniamy].

Wyraziwszy (a) i (b) przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dostaniemy w nich na wyrazy najwyższego wymiaru:

$$(a') \quad x_1{}^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.x_2{}^{\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n} \ldots x_{n-1}{}^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}.x_n{}^{\alpha_n} \quad \text{w } (a) \quad \text{i}$$
$$(b') \quad x_1{}^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}.x_2{}^{\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_n} \ldots x_{n-1}{}^{\beta_{n-1}+\beta_n}.x_n{}^{\beta_n} \quad \text{w } (b).$$

Jeżeli (a), (b) po wyrażeniu ich przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mają być identyczne, to także (a'), (b') identyczne być muszą, a wtedy być musi $\alpha_n = \beta_n$, a w następstwie: $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}, \ldots, \alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_1 = \beta_1$. To znaczy:

I. *Gdy iloczyny (a), (b) po wyrażeniu ich przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mają być identyczne, to muszą być takimi już i w $c_1, c_2, \ldots, c_n$.*

Mając to, przyjmijmy, że symetryczną funkcyę F możemy w dwojaki sposób wyrazić przez $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

---

*) Spółczynnik 6 pochodzi stąd, że wszystkich porządków z elementów x_1, x_2, x_3 jest 6; wszystkie te porządki wskutek jednakowego wykładnika α dają 6 jednakowych dodajników.

$$F=G_1(c_1, c_2, ..., c_n), \quad F=G_2(c_1, c_2, ..., c_n).$$

Różnica $G_1 - G_2$ — po wyrażeniu jej przez $x_1, x_2, ..., x_n$ — jest identycznem zerem. G_1, G_2 są identyczne, jako funkcye zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$. Lecz to jest wskutek tw. I. tylko tym sposobem możliwe, jeżeli G_1, G_2 jako funkcye ilości $c_1, c_2, ..., c_n$ były już identyczne. Stąd twierdzenie:

II. *Symetryczną funkcyę można tylko w jeden sposób wyrazić przez elementarne funkcye symetryczne.*

Ten wzgląd, że iloczyn $c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} ... c_n^{\alpha_n}$ jest wymiaru:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + ... + n\alpha_n,$$

[por. (a')], w każdej zaś ze zmiennych x_s stopnia $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ — [bo w x_1 jest tego stopnia] — prowadzi do metody, która dozwala wyrażać bezpośrednio symetryczne jednorodne funkcye:

$$\varphi = \Sigma(x_1^{a_1} . x_2^{a_2} . x_3^{a_3} ... x_n^{a_n}),$$

przez elementarne; [niektóre z wykładników $a_1, a_2, ..., a_n$ mogą być zerami]. Wymiar $a_1 + a_2 + ... + a_n$ funkcyi φ niech będzie $=m$. Przyjmijmy, że największy z wykładników a_s jest μ, to φ jest w każdej ze zmiennych stopnia μ.

Jeżeli więc $m \geq n$ jest, a funkcyę φ chcemy wymiernie przedstawić przez c_s, t. j. przez sumę wyrazów $A . c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} c_n^{\alpha_n}$, to w nich tylko takich wykładników α_s używać możemy, które równocześnie spełniają dwa warunki:

$$(c) \qquad S = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \leq \mu, \quad W = \alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + n\alpha_n = m.$$

Gdy przeciwnie jest $m < n$, to z funkcyj c_s użyć tylko trzeba $c_1, c_2, ..., c_m$ (gdyż już $c_{m+1}, c_{m+2}, ...$ są same wyższego wymiaru, niż m), a z wykładników α_s tylko wykładników $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$. Warunki (c) będą tu więc miały postaci:

$$(c') \quad S' = \alpha_1 + \alpha_2 + ... \alpha_m \leq \mu, \quad W' = \alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + m\alpha_m = m.$$

W obydwu przypadkach będzie funkcya φ w $c_1, c_2, ...$ izobaryczną o wadze m, gdzie m wskazuje wymiar funkcyi w elementach.

Spółczynniki A w każdym z przypadków $m \gtreqless n$ obliczą się przy szczególnych wartościach wszystkich zmiennych x_s i przy odpowiadających im wartościach funkcyi φ.

Uwaga. Wyraziwszy funkcyę $\varphi = \varphi_n$ przez c_s przy n zmiennych, możemy z niej przejść odrazu do funkcyi φ_ν tak samo zbudowanej, a zawierającej już tylko ν zmiennych $(\nu < n)$, zakładając $c_n = c_{n-1} = ... = c_{\nu+1} = 0$. Wtedy $c_1, c_2, ..., c_\nu$ są już wszystkiemi elementarnemi funkcyami ν tylko elementów.

Pd. 1. Jeżeli w funkcyę $S(x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2x_4)_4$ mają wchodzić tylko 4 zmienne x_1, x_2, x_3, x_4, to mamy tu $n=4$, $m=7$, $\mu=2$, $(m>n)$, a więc: $S\leqq 2$, $W=7$. Pierwszy warunek spełniają wyrazy:

(α) $c_1, c_2, c_3, c_4, c_1{}^2, c_2{}^2, c_3{}^2, c_4{}^2, \quad c_1c_2, c_1c_3, c_1c_4, c_2c_3, c_2c_4, c_3c_4.$

Z nich jednak tylko ostatni wyraz spełnia warunek drugi, a stąd pochodzi, że $S(x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2x_4)_4 = c_3 . c_4$.

Pd. 2. Gdy funkcyę utworzoną w Pd. 1. odniesiemy do n zmiennych, gdzie $n\geqq 7$, to warunkami będą: $S'\leqq 2$, $W'=7$, a $c_1, c_2, \ldots$ ograniczyć trzeba do $c_1, c_2, \ldots, c_7$. Do wyrazów (α) w Pd. 1. dodamy tu jeszcze:

$$(\beta)\quad \begin{cases} c_5, c_6, c_7, c_5{}^2, c_6{}^2, c_7{}^2, \\ c_1c_5, c_1c_6, c_1c_7, c_2c_5, c_2c_6, c_2c_7, c_3c_5, c_3c_6, c_3c_7, \\ c_4c_5, c_4c_6, c_4c_7, c_5c_6, c_5c_7, c_6c_7. \end{cases}$$

Lecz z wyrazów (α), (β) tylko wyrazy: $c_3c_4, c_7, c_1c_6, c_2c_5$ spełniają warunek drugi, a stąd wynika, że funkcya będzie tu postaci:

$$S(x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2x_4)_n = Ac_3c_4 + Bc_7 + Cc_1c_6 + Dc_2c_5, \quad n\geqq 7.$$

Pd. 3. Przyjmując, że funkcya $S(x_1{}^3 . x_2{}^2 . x_3)_3$ zawiera 3 zmienne x_1, x_2, x_3, mamy $n=3$, $m=6$, $\mu=3$, a więc: $S\leq 3$, $W=6$. Wyrazy:

$$c_1, c_2, c_3, c_1{}^2, c_2{}^2, c_3{}^2, c_1{}^3, c_2{}^3, c_3{}^3, c_1c_2, c_1c_3, c_2c_3, c_1{}^2c_2, c_1{}^2c_3, c_2{}^2c_3,$$
$$c_1c_2{}^2, c_1c_3{}^2, c_2c_3{}^2, c_1c_2c_3$$

spełniają tu wszystkie warunek pierwszy. Drugi warunek spełniają z nich:

$$c_3{}^2, c_2{}^3, c_1c_2c_3, \text{ a więc:}$$
$$S(x_1{}^3 . x_2{}^2 . x_3)_3 = Ac_3{}^2 + Bc_2{}^3 + Cc_1c_2c_3.$$

Okazać, że B musi być $=0$.

Pd. 4. Uważając $S(x_1{}^3 . x_2{}^2 x_3)_n$ za funkcyę o n zmiennych $n>6$, okazać, że:

$$S(x_1{}^3 . x_2{}^2x_3)_n = Ac_3{}^2 + Bc_2{}^3 + Cc_1c_2c_3 + D . c_1{}^2c_4 + Ec_2c_4 + Fc_1c_5 + Gc_6, \quad n\geqq 6$$

i że $B=0$.

Pd. 5. Połóżmy: $\frac{1}{k}(x_1{}^k + x_2{}^k + \ldots + x_n{}^k) = \sigma_k = s_k/k$ i zauważmy wyznacznik:

$$\frac{\partial(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)}{\partial(x_1x_2\ldots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\sigma_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\sigma_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\sigma_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\sigma_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial\sigma_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \text{*)}$$

Z uwagi, że: $\frac{\partial\sigma_k}{\partial x_\lambda} = x_\lambda^{k-1}$, dostaniemy:

$$(\alpha)\quad \frac{\partial(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)}{\partial(x_1x_2\ldots x_n)} = \begin{vmatrix} 1, x_1, x_1{}^2, \ldots, x_1{}^{n-1} \\ 1, x_2, x_2{}^2, \ldots, x_2{}^{n-1} \\ \vdots \\ 1, x_n, x_n{}^2, \ldots, x_n{}^{n-1} \end{vmatrix} = P.$$

Wyrażając c_ν przez $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ [art. 88, (3)], dostaniemy:

$$c_\nu = (-1)^{\nu+1}\sigma_\nu + (\sigma_{\nu-1}, \sigma_{\nu-2}, \ldots, \sigma_1).$$

*) Jacobi: *De determinantibus functionalibus* — Crelle J. T. 22, str. 319.

*

Z tej definicyi wynika:

$$\frac{\partial c_\nu}{\partial \sigma_\nu}=(-1)^{\nu+1}, \quad \frac{\partial c_\nu}{\partial \sigma_\lambda}=0, \text{ gdy } \lambda>\nu, \quad \frac{\partial c_\nu}{\partial \sigma_\lambda}\neq 0, \text{ gdy } \lambda<\nu.$$

W wyznaczniku $\frac{\partial(c_1c_2\ldots c_n)}{\partial(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)}$ mieć więc będziemy w jego głównej przekątni wyrazy (-1), $(-1)^2$, $(-1)^3$, ..., $(-1)^\nu$, po jej jednej stronie same zera, a wskutek tego:

$$(\beta) \qquad \frac{\partial(c_1c_2\ldots c_n)}{\partial(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Zauważmy teraz wyznacznik: $\frac{\partial(c_1c_2\ldots c_n)}{\partial(x_1x_2\ldots x_n)}$. Jest on =

$$\frac{\partial(c_1c_2\ldots c_n)}{\partial(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)}\cdot\frac{\partial(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)}{\partial(x_1x_2\ldots x_n)} \text{ *)},$$

a uwzględniając (α) i (β) dostajemy:

$$\frac{\partial(c_1c_2\ldots c_n)}{\partial(x_1x_2\ldots x_n)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.P. \text{ **)}$$

90. Zastosowanie symetrycznych funkcyj do tworzenia rugowników i wyróżników. Gdy, jak przódy, $f(x)=x_n-c_1x^{n-1}+\ldots\pm c_n=0$, to naodwrót każda wymierna funkcya $R(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ da się zamienić na symetryczną funkcyę $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pierwiastków równania $f=0$. Funkcya S może być ułamkową, a jej licznik i mianownik nie potrzebują być jednorodnemi funkcyami symetrycznemi.

Z takiemi funkcyami już mieliśmy do czynienia.

Rugownik n. p. dwóch równań [art. 57.]:

$$f=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m, \quad g=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

można — po wyjęciu czynnika $a_0{}^n$ (czynnika a_0 z każdego z n pierwszych jego wierszy) i czynnika $b_0{}^m$ (czynnika b_0 z każdego z m ostatnich wierszy) przedstawić w formie:

$$R(f,g)=a_0{}^n.b_0{}^mR_1\left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_m}{a_0}, \frac{b_1}{b_0}, \ldots, \frac{b_n}{b_0}\right).$$ Stąd wynika:

I. *Rugownik jest jednorodną funkcyą wymiaru n w współczynnikach a_s równania stopnia m, a wymiaru m w współczynnikach b_s równania stopnia n [art. 75, tw. II.], i jest symetryczną funkcyą tak pierwiastków jednego, jak pierwiastków równania drugiego:*

$$(1) \qquad R(f,g)=S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \mid \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

---

*) Por. Żelewski: „Nauka o wyznacznikach z zastosowaniami". (Kraków 1877), str. 162. — M. Baraniecki: „Teorya wyznaczników". (Paryż 1879), str. 493.

**) R. F. Scott: *„On some alternating functions of n variables", The Messenger of mathematics. Vol. XI.* str. 98—103.

α_s są pierwiastkami równania $f=0$, a β_s pierwiastkami równania $g=0$. $[\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_m}{a_0}, \frac{b_1}{b_0}, \ldots, \frac{b_n}{b_0}$ mają tu znaczenie elementarnych funkcyj symetrycznych].

Rugownik równań $f=0$, $f'=0$, t. j. wyróżnik równania $f=0$:

$$R(f,f')=\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, \ldots & & \\ & a_0, & a_1, & a_2, \ldots & \\ \vdots & & & & \\ ma_0, & (m-1)a_1, & (m-2)a_2, \ldots & & \\ & ma_0, & (m-1)a, & (m-2)a_2, \ldots & \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}$$

da się zredukować do wyznacznika o $(2m-2)^2$ elementach, jeżeli w nim elementa wiersza pierwszego pomnożone przez m odejmiemy od elementów wiersza m^{go}. Otrzymamy wtedy:

$$R(f,f')=a_0 H(a_0, a_1, \ldots, a_m),$$

a gdy z wyznacznika H wyjmiemy czynnik a_0^{2m-2} (z każdego wiersza czynnik a_0), dostaniemy:

$$(2)\qquad R(f,f')=D(f)=a_0 \cdot a_0^{2m-2} R_1\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_m}{a_0}\right)=S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

a to znaczy:

II. *Wyróżnik równania $f=0$ jest jednorodną funkcyą $(2m-2)^{go}$ wymiaru w spółczynnikach równania, a symetryczną funkcyą pierwiastków równania.*

Zajmijmyż się przedstawieniem rugownika w symetrycznej formie (1). W tym celu weźmy naprzód dla uproszczenia — jak w art. 57. — równanie $f(x)=0$ stopnia 5^{go}, a $g(x)=0$ stopnia 3^{go}. Pierwsze z nich niech ma pierwiastki α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, a drugie: β_1, β_2, β_3. Rugownik $R(f,g)$ [art. 57. (B)], pomnóżmy przez wyznacznik:

$$Q=\begin{vmatrix} \beta_1^7, & \beta_1^6, & \ldots, & \beta_1, & 1 \\ \beta_2^7, & \beta_2^6, & \ldots, & \beta_2, & 1 \\ \beta_3^7, & \beta_3^6, & \ldots, & \beta_3, & 1 \\ \alpha_1^7, & \alpha_1^6, & \ldots, & \alpha_1, & 1 \\ \vdots & & & & \\ \alpha_5^7, & \alpha_5^6, & \ldots, & \alpha_5, & 1 \end{vmatrix}, \quad 7=m+n-1.$$

Gdy iloczyn $R.Q$ obliczać będziemy, składając po porządku pojedyńcze wiersze wyznacznika R z wszystkimi wierszami wyznacznika Q, to dostaniemy:

$$R.Q=\begin{vmatrix} \beta_1{}^2f(\beta_1), \beta_2{}^2f(\beta_2), \beta_3{}^2f(\beta_3), \alpha_1{}^2f(\alpha_1), ..., \alpha_5{}^2f(\alpha_5) \\ \beta_1\, f(\beta_1), \ldots\ldots \alpha_1\, f(\alpha_1), ..., \alpha_5\, f(\alpha_5) \\ f(\beta_1), \ldots\ldots f(\alpha_1), ..., f(\alpha_5) \\ \beta_1{}^4g(\beta_1), \beta_2{}^4g(\beta_2), \beta_3{}^4g(\beta_3), \alpha_1{}^4g(\alpha_1), ..., \alpha_5{}^4g(\alpha_5) \\ \beta_1{}^3g(\beta_1) \ldots\ldots \alpha_1{}^3g(\alpha_1), ..., \alpha_5{}^3g(\alpha_5) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ g(\beta_1) \ldots\ldots g(\alpha_1), ..., g(\alpha_5) \end{vmatrix}.$$

Lecz $f(\alpha_s)=0$, $g(\beta_s)=0$, a więc $R.Q=$

$$[f(\beta_1).f(\beta_2)).f(\beta_3)].[g(\alpha_1)g(\alpha_2)...g(\alpha_5)].\begin{vmatrix} \beta_1{}^2, & \beta_2{}^2, & \beta_3{}^2, & 0, & 0, & ..., & 0 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & 0, & 0, & ..., & 0 \\ 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & ..., & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \alpha_1{}^4, & \alpha_2{}^4, & ..., & \alpha_5{}^4 \\ 0, & 0, & 0, & \alpha_1{}^3, & \alpha_2{}^3, & ..., & \alpha_5{}^3 \\ 0, & 0, & 0, & \alpha_1{}^2, & \alpha_2{}^2, & ..., & \alpha_5{}^2 \\ 0, & 0, & 0, & \alpha_1, & \alpha_2, & ..., & \alpha_5 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & ..., & 1 \end{vmatrix}$$

$$=[f(\beta_1)f(\beta_2)f(\beta_3)].[g(\alpha_1)g(\alpha_2)...g(\alpha_5)](-1)^{\frac{3.2}{2}}(-1)^{\frac{5.4}{2}}.P_\alpha.P_\beta, \text{ gdzie:}$$

$$P_\alpha=\begin{vmatrix} 1, \alpha_1, ..., \alpha_5 \\ 1, \alpha_1{}^2, ..., \alpha_5{}^2 \\ \vdots \\ 1, \alpha_1{}^4, ..., \alpha_5{}^4 \end{vmatrix}, \quad P_\beta=\begin{vmatrix} 1, & \beta_1, & \beta_1{}^2 \\ 1, & \beta_2, & \beta_2{}^2 \\ 1, & \beta_3, & \beta_3{}^2 \end{vmatrix}.$$

W razie ogólnych stopni m, n mieć będziemy:

(3) $$R.Q=[f(\beta_1)...f(\beta_n)].[g(\alpha_1)...g(\alpha_m)](-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}.(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.P_\alpha.P_\beta,$$

gdzie w P_α, P_β najwyższe potęgi są α_s^{m-1}, β_s^{n-1}, a wyznacznik Q — po odwrotnem uporządkowaniu jego pionów — ma postać:

$$Q=(-1)^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}}.\begin{vmatrix} 1, & \beta_1, & \beta_1{}^2, & ..., & \beta_1{}^{m+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1, & \beta_n, & \beta_n{}^2, & ..., & \beta_n{}^{m+n-1} \\ 1, & \alpha_1, & \alpha_1{}^2, & ..., & \alpha_1{}^{m+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1, & \alpha_m, & \alpha_m{}^2 & ..., & \alpha_m{}^{m+n-1} \end{vmatrix}.$$

Po obliczeniu go otrzymamy:

$$Q=(-1)^{\frac{(m+n)\,(m+n-1)}{2}}.\left\{\begin{vmatrix} (\alpha_1-\beta_1).(\alpha_1-\beta_2)...(\alpha_1-\beta_n) \\ (\alpha_2-\beta_1).(\alpha_2-\beta_2)...(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (\alpha_m-\beta_1).(\alpha_m-\beta_2)...(\alpha_m-\beta_n) \end{vmatrix}\right\}.P_\alpha.Q_\beta$$

Iloczyn w nawiasy ujęty jest widocznie funkcyą symetryczną tak pierwiastków α_s, jak pierwiastków β_s, a można go wyrazić albo przez

$$(\alpha) \quad \frac{(-1)^{mn}}{a_0^n} f(\beta_1)\, f(\beta_2), \ldots, f(\beta_n) = (-1)^{mn} \frac{F}{a_0^n}, \text{ albo też przez}$$

$$(\beta) \quad \frac{1}{b_0^m} g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_m) = \frac{G}{b_0^m} \text{ *), tak, że mamy}$$

$$(4) \qquad G = (-1)^{mn} \frac{b_0^m}{a_0^n} . F, \text{ gdzie}$$

$$F = [f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_n)], \quad G = [g(\alpha_1) g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_m)].$$

Stąd wynika, że:

$$(a) \qquad Q = (-1)^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2} + mn} . \frac{F}{a_0^n} . P_\alpha . P_\beta, \text{ albo}$$

$$(b) \qquad Q = (-1)^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} . \frac{G}{b_0^m} P_\alpha . P_\beta .$$

Połóżmyż w równaniu (3) za Q wyrażenie (a), to po skróceniach i uwzględnieniu, że:

$$(-1)^{\frac{(m+n)(m+n-1) + 2mn - m(m-1) - n(n-1)}{2}} = +1,$$

otrzymąmy — po skróceniu przez F —:

$$(\text{I}.a) \qquad R(f, g) = a_0^n\, G.$$

Korzystając zaś z relacyi (4), mieć także będziemy:

$$(\text{I}.b) \qquad R(f, g) = (-1)^{mn} b_0^m\, F.$$

Relacyami (I.a), (I.b) spełniliśmy już żądane zadanie**). Z (I.a)— gdy wrócimy do iloczynu różnic pierwiastków — dostaniemy jeszcze

$$(\text{I}.c) \qquad R(f, g) = a_0^n\, b_0^m\, \Pi(\alpha_r - \beta_s)$$
$$r = 1, 2, \ldots, n, \; s = 1, 2, \ldots, m.$$

Widocznie iloczyny F, G, $\Pi(\alpha_r - \beta_s)$ są takie, że stają się zerami, gdy równania $f=0$, $g=0$ mają choć jeden wspólny pierwiastek.

Przejdźmy do wyróżnika $D(f) = R(f, f')$. Weźmy równanie $f'=0$ za $g=0$, to — zważywszy, że tu $n = m-1$ — dostaniemy z (I.a);

---

*) W (α) zbieramy po porządku w jeden iloczyn czynniki w jednym pionie zawarte, w (β) zaś czynniki zawierające się w jednym wierszu.

**) Rugownik w formach (I.a), (I.b) podał poraz pierwszy Euler w rozprawie: *„Demonstration sur le nombre de points, ou deux lignes des ordres quelconques peuveut se couper"*. *Histoire de l' Académie de Berlin* z r. 1748, str. 343.

Identyczność rugownika w formie wyznacznika lub w formie iloczynów (I.a), (I.b) wykazał C. W. Borchardt w rozprawie: *„Vergleichung zweier Formen der Eliminationsresultante"*. Crelle J. T. 57., str. 183—188.

(II.a) $D(f)=a_0^{m-1}\Gamma,\quad \Gamma=f'(\alpha_1)f'(\alpha_2),\dots f'(\alpha_m).$

Lecz $f'(\alpha_s)=a_0(\alpha_s-\alpha_1),\dots,(\alpha_s-\alpha_{s-1})(\alpha_s-\alpha_{s+1}),\dots,(\alpha_s-\alpha_m)$

$s=1,2,\dots,m$, a więc:

$$\begin{aligned}\Gamma=a_0^m&(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3),\dots,(\alpha_1-\alpha_m)\\&(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3),\dots,(\alpha_2-\alpha_m)\\&(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2),\dots,(\alpha_3-\alpha_m)\\&\quad\vdots\\&(\alpha_m-\alpha_1)(\alpha_m-\alpha_2),\dots,(\alpha_m-\alpha_{m-1}).\end{aligned}$$

W tym iloczynie znajdują się parami czynniki $(\alpha_h-\alpha_k)$, $(\alpha_k-\alpha_h)$. W wszystkich czynnikach $(\alpha_h-\alpha_k)$ w wierszu pierwszym mamy $h<k$. W 2^{gim}, 3^{cim}, $4^{\text{tym}},\dots,m^{\text{tym}}$ wierszu mamy odpowiednio: jeden czynnik, dwa czynniki, trzy czynniki,..., $(m-1)$ czynników o znaczku $h>k$. Zmieniając te czynniki na czynniki o pierwszym znaczku mniejszym od drugiego, dostaniemy:

$$\Gamma=(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}a_0^m\left.\begin{aligned}&(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2,\dots,(\alpha_1-\alpha_m)^2\\&\qquad(\alpha_2-\alpha_3)^2,\dots,(\alpha_2-\alpha_m)^2\\&\qquad\qquad\vdots\\&\qquad\qquad(\alpha_{m-1}-\alpha_m)^2\end{aligned}\right\}=$$

$$=(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}a_0^m.P_\alpha^2,\text{ a więc}$$

(II.b) $$D(f)=a_0^{2m-1}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}P_\alpha^2.$$

$P_\alpha^2=\Delta$ jest widocznie symetryczną funkcyą pierwiastków α_s i ma tę własność, że jest zerem, jeżeli dwa przynajmniej pierwiastki są sobie równe.

Δ jako symetryczną funkcyę pierwiastków α_s można także będzie przedstawić w wymiernej całkowitej funkcyi sum symetrycznych $s_\nu=\alpha_1^\nu+\alpha_2^\nu+\dots+\alpha_m^\nu$. Mnóżmy w tym celu wyznacznik P_α przez P_α w ten sposób, że każdy pion pierwszego czynnika składamy z wszystkimi pionami drugiego i z tak tworzących się wyrazów składajmy wiersze iloczynu, to dostaniemy:

$$\Delta=\begin{vmatrix}s_0 & s_1 & s_2 & \dots s_m\\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots s_{m+1}\\ \vdots & & & \\ s_m & s_{m+1} & s_{m+2} & \dots s_{2m}\end{vmatrix}$$

w żądanej już formie.

91. Wspólny jednokrotny, lub wielokrotny pierwiastek dwóch równań o jednej lub wielu zmiennych. Gdy równania $f(x)=0$, $g(x)=0$ mają jeden tylko pierwiastek wspólny, a więc funkcye f, g mają największy wspólny podzielnik stopnia pierwszego: $\Delta_1 x+\Delta'_1$ [art. 60.], to ten wspólny pierwiastek $=-\Delta'_1/\Delta_1$. Lecz Δ_1, Δ'_1 będą (podobnie jak R) wymiernemi jednorodnemi funkcyami spółczynników a_0, a_1, ..., b_0, b_1,... równań $f=0$, $g=0$, a stąd wynika:

I. *Gdy dwa równania mają jeden tylko pierwiastek wspólny, to ten pierwiastek jest wymierną funkcyą spółczynników obu równań i da się zatem przedstawić w funkcyi symetrycznej wszystkich pierwiastków tak jednego, jak drugiego równania.*

Gdy równania $f=0$, $g=0$ mają wspólny, k-krotnie się powtarzający pierwiastek α, a innych już wspólnych pierwiastków nie mają, to największy wspólny podzielnik:

$$t(x)=\Delta_k\,.\,x^k+\Delta'_k x_{k-1}+\ldots+\Delta_k^{(k)}=\Delta_k[x^k+\frac{\Delta'_k}{\Delta_k}x^{k-1}+\ldots]$$

funkcyj f, g ma się zredukować do $t(x)=\Delta_k(x-\alpha)^k=\Delta_k[x^k-k.\alpha.x^{k-1}+\ldots]$. Z tego wynika, że:

$$\frac{\Delta'_k}{\Delta_k}=-k\alpha \text{ i } \alpha=-\frac{1}{k}.\frac{\Delta'_k}{\Delta_k},$$

a że $\Delta_k^{(\mu)}$ [art. 60.] będą jednorodnemi całkowitemi funkcyami tak spółczynników równania $f=0$, jak równania $g=0$, więc mamy twierdzenie:

II. *Gdy dwa równania mają k-krotnie się powtarzający pierwiastek wspólny α, a innych wspólnych pierwiastków nie mają, to α wyraża się wymierną funkcyą spółczynników obydwu równań lub symetryczną funkcyą wszystkich pierwiastków tak jednego, jak drugiego równania.*

Weźmy teraz pod uwagę dwie funkcye całkowite wymierne wielu zmiennych: $F(x, x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $G(x, x_1, x_2, \ldots, x_p)$ i załóżmy, że są współmierne, posiadając największy wspólny podzielnik stopnia $k$go

$$t=\Delta_k x^k+\Delta'_k x^{k-1}+\ldots+\Delta_k^{(k)}.$$

Spółczynniki $\Delta_k, \Delta'_k, \ldots$ są tu wymiernemi całkowitemi funkcyami zmiennych pozostałych $x_1, x_2, \ldots, x_p$ [art. 81]. W razie $k=1$, jest $x=-\frac{\Delta'_1}{\Delta_1}$ jedynym wspólnym pierwiastkiem równań $F=0$, $G=0$ na dowolnem miejscu $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, a w razie $t=(Ax+B)^k$ mamy i tu $A=k\Delta_k$, $B=\Delta'_k$, a $x=-\frac{\Delta'_k}{k\Delta_k}$ jest k-krotnym wspólnym pierwiastkiem tych równań. Stąd twierdzenie:

III. *Gdy dwa równania $F=0$, $G=0$ $(p+1)$ zmiennych $x, x_1, x_2, \ldots, x_p$ posiadają k-krotny pierwiastek x, $(k=1, 2, 3\ldots)$, na bieżącem miejscu $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, a innych takich pierwiastków wspólnych nie posiadają, to taki pierwiastek jest zawsze wymierną funkcyą pozostałych zmiennych x_1, x_2, ..., x_p.*

92. Wyznaczanie funkcyi symetrycznej z danych warunków. Zastosowania. Mając n zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$ i $(n+\nu)$, $(\nu > 0)$, stałych wartości $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+\nu}$ wybierzmy ν którychkolwiek z tych stałych n. p. $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ..., \xi_{n+\nu}$ i utwórzmy iloczyn:

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l}(x_1-\xi_{n+1})...(x_1-\xi_{n+\nu})\\ (x_2-\xi_{n+1})...(x_2-\xi_{n+\nu})\\ \quad\vdots\\ (x_n-\xi_{n+1})...(x_n-\xi_{n+\nu})\end{array}\right\} = D(x_1, x_2, ..., x_n \mid \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ..., \xi_{\nu+\nu}).$$

Iloczyn ten jest symetryczną funkcyą wszystkich zmiennych i stopnia ν^{go} w każdej ze zmiennych. Iloraz

$$(2)\quad \frac{D(x_1, x_2, ..., x_n \mid \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ..., \xi_{n+\nu})}{D(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \mid \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ..., \xi_{n+\nu})}$$

jest $=1$, gdy $(x_1, x_2, ..., x_n) = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, a jest $=0$ dla każdej innej kombinacyi $(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, ..., \xi_{k_n})$, n-tej klasy utworzonej ze wszystkich $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_{n+\nu}$. W każdą bowiem taką kombinacyę wejdzie przynajmniej jedna z ilości $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ..., \xi_{n+\nu}$.

Mając to, spróbujmy wyznaczyć funkcyę całkowitą symetryczną $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ o takich własnościach: 1^0 funkcya S ma być stopnia ν^{go} w każdej ze swych zmiennych, 2^0 na $\binom{n+\nu}{n}$ miejscach:

$$(3)\quad (x_1, x_2, ..., x_n) = (\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, ..., \xi_{k_n})$$

tworzących wszystkie kombinacye n^{tej} klasy z danych wartości $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+\nu}$ ma odpowiednio przyjmować dane wartości: $S(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, ..., \xi_{k_n})$. Zauważmy sumę:

$$(4)\quad S' = \Sigma S(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \frac{D(x_1, x_2, ..., x_n \mid \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ..., \xi_{n+\nu})}{D(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \mid \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ..., \xi_{n+\nu})},$$

którą z wyrazu zamieszczonego po znaku Σ utworzyć trzeba, zmieniając $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ na wszystkie kombinacye (3), to taka suma: 1^0 jest symetryczną całkowitą funkcyą n zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$ stopnia ν^{go} w każdej z tych zmiennych, 2^0 ma na miejscach (3) wartości $S(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, ..., \xi_{k_n})$ (wskutek własności ilorazu (2)).

Różnica $S-S'$ jest zerem na wszystkich $\binom{n+\nu}{n}$ miejscach (3). Zauważmy dowolne z tych miejsc n. p. $(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, ..., \xi_{k_n})$ i ostatnią jego spółrzędną ξ_{k_n} zamieńmy na zmienną x_n. Wtedy dla $(x_1, x_2, ..., x_n) = (\xi_{k_1}, ..., \xi_{k_{n-1}}, x_n)$ ta różnica będzie funkcyą jednej zmiennej x_n stopnia ν^{go} i będzie zerem dla $(\nu+1)$ wartości $x_n = \xi_{k_n}, \xi_{k_{n+1}}, ..., \xi_{k_{n+\nu}}$; jest więc identycznie zerem [art. 52.]. Różnica $S-S'$ jako już funkcya wszystkich n zmiennych jest więc zerem w całem *continuum* $(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \ldots, \xi_{k_{n-1}}, x_n), |x_n| = (0\ldots+\infty)$ i jest wskutek tego — [art. 74., tw. II. a] — identycznem zerem. Identycznie zatem jest $S = S'$, a stąd twierdzenie:

I. *Funkcya symetryczna n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stopnia ν^{go} w każdej z nich, jest wyznaczoną, gdy znane są jej wartości na $\binom{n+\nu}{n}$ miejscach $(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \ldots, \xi_{k_n})$ tworzących wszystkie kombinacye z $(n+\nu)$ danych stałych wartości $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+\nu}$ i daje się przedstawić formą* (4) *analogiczną z interpolacyjnym wzorem Lagrange'a**).

(*A*). Rugownik $R = (-1)^{mn}.b_0{}^m F = \varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ [art. 90. (I.b)] jest symetryczną funkcyą n pierwiastków β_s i jest stopnia m^{go} w każdym z tych pierwiastków. Obierzmyż $(n+m)$ stałych ilości $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+m}$, to możemy do niego zastosować wzór (4) i położyć:

$$(5)\qquad \varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \sum \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) . \frac{D(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \mid \xi_{n+1} \ldots \xi_{n+m})}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \mid \xi_{n+1} \ldots \xi_{n+m})}.$$

Lecz $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (-1)^{mn} b_0{}^m f(\xi_1).f(\xi_2)\ldots f(\xi_n)$, a

$$D(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \mid \xi_{n+1} \ldots \xi_{n+m}) = \frac{(-1)^{mn}}{b_0{}^m} g(\xi_{n+1}) g(\xi_{n+2}) \ldots g(\xi_{n+m}).$$

Wstawiając te wyrażenia w (5) otrzymamy:

$$(6)\qquad \varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = R = \sum \frac{f(\xi_1)\ldots f(\xi_n) g(\xi_{n+1})\ldots g(\xi_{n+m})}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \mid \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots, \xi_{n+m})}\text{**)}$$

(*B*) Gdy $R = (-1)^{mn} b_0{}^m F$ jest rugownikiem równań $f = 0$, $g = 0$, to równania

$$(\alpha)\qquad f = 0,\ (x-z)g = 0 \text{ mają rugownik:}$$

$$R_\alpha = b_0{}^m (-1)^{m(n+1)} f(\beta_1)\ldots f(\beta_n) f(z) = (-1)^m R . f(z),$$

a rugownikiem równań:

$$(\beta)\qquad (x-z)f = 0,\ g = 0 \text{ będzie:}$$

$$R_\beta = b_0{}^{m+1} (-1)^{(m+1)n} f(\beta_1)\ldots f(\beta_n)(\beta_1 - z)\ldots(\beta_n - z)$$
$$= b_0{}^{m+1} (-1)^{(m+1)n+n} . f(\beta_1)\ldots f(\beta_n) g(z) = (-1)^{2n} R . g(z).$$

Ponieważ tak suma stopni równań (α), jak (β) wynosi $(m+n+1)$, więc obierając $(m+n+1)$ stałych ilości $\xi_0, \ldots, \xi_{n+m}$, możemy tak do R_α, jak do R_β zastosować wzór (6) i położyć:

$$(\alpha')\qquad (-1)^m . R . f(z) = \sum \frac{f(\xi_0)\ldots f(\xi_n) g(\xi_{n+1})(\xi_{n+1} - z)\ldots g(\xi_{n+m})(\xi_{n+m} - z)}{D(\xi_0, \ldots, \xi_n \mid \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m})}$$

$$(\beta')\qquad R . g(z) = \sum \frac{f(\xi_0)(\xi_0 - z)\ldots f(\xi_{n-1})(\xi_{n-1} - z) g(\xi_n)\ldots g(\xi_{n+m})}{D(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \mid \xi_n \ldots \xi_{n+m})}.$$

Gdy podzielimy (α') przez (β') i gdy dalej licznik i mianownik podzielimy przez $[g(\xi_0) . g(\xi_1) \ldots (g\xi_{n+m})]$, a za każde $f(\xi_\alpha)/g(\xi_\alpha)$ położymy krótko u_α, to dostaniemy $f(z)/g(z) =$

---

*) L. Kronecker. *Über einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrerer Variabeln.* — Miesięczne sprawozdania *(Monatsberichte)* Akad. berlińskiej z r. 1865, albo *„Werke"*. T. 1. str. 135. (1895). Por. także Baltzer. *Theorie u. Anwendung der Determinanten 1881.* (wyd. 5[te]) str. 108.

**) Rosenhein. *Neue Darstellung der Resultante der Elimination von z... Crelle J.* T. 30. str. 157. Baltzer l. c. str. 130.

$$u=(-1)^m.\frac{\sum\frac{u_0u_1\ldots u_n}{D(\xi_0,\ldots,\xi_n\mid\xi_{n+1},\ldots,\xi_{n+m})}(\xi_{n+1}-z)\ldots(\xi_{n+m}-z)}{\sum\frac{u_0u_1\ldots u_{n-1}}{D(\xi_0,\ldots,\xi_{n-1}\mid\xi_n,\ldots,\xi_{n+m})}(\xi_0-z)\ldots(\xi_{n-1}-z)}$$

Jestto interpolacyjny wzór Cauchy'ego, którym wyznacza się funkcyę ułamkową u o stopniach: m, n z danych jej wartości $u_0, u, \ldots$ na $(m+n+1)$ miejscach jej argumentu [art. 64., Rosenhein l. c].

93. Wymierna funkcya pierwiastka lub pierwiastków danego równania $f(x)=0$. Funkcye, któremi zajmowaliśmy się w ostatnich artykułach były wymiernemi spółczynników jednego, lub dwóch równań i dawały się przez to zawsze sprowadzać do symetrycznych funkcyj pierwiastków.

Rozważmy teraz funkcye wymierne, ułamkowe i niesymetryczne pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_n$ równania

$f(x)=x^n-c_1x^{n-1}+\ldots\pm c_n=0$. Niech:

(1) $$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

będzie właśnie taką funkcyą, a jej mianownik ψ za zastosowaniem do niego wszystkich podstawień symetrycznej grupy (s) niech przybiera μ i tylko μ różnych postaci $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{\mu-1}$, $\mu\leq n!$. Iloczyn $\psi\,\psi_1\,\psi_2\ldots\psi_{\mu-1}$ będzie już funkcyą symetryczną wszystkich pierwiastków x_s równania $f(x)=0$ i da się przedstawić w funkcyi całkowitej wymiernej $g(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ spółczynników $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Pomnóżmyż więc licznik i mianownik funkcyi R przez iloczyn $\psi_1.\psi_2\ldots\psi_{\mu-1}$, to dostaniemy:

(2) $$R=\varphi\,\psi_1\,\psi_2\ldots\psi_{\mu-1}/g(c_1, c_2, \ldots, c_n)=g'(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

gdzie g' jest już funkcyą całkowitą pierwiastków x_s. Stąd twierdzenie:

I. *Dowolną ułamkową funkcyę pierwiastków równania $f(x)=0$ można zawsze sprowadzić do całkowitej wymiernej funkcyi tych pierwiastków.*

Pd. 1. Przy $n=4$ mamy $x_1/x_2{}^2=x_1{}^3x_3{}^2x_4{}^2/c_4{}^2, (\mu=4)$. Gdy $n=2$, to $x_1/(x_1-x_2)=-x_1(x_2-x_1)/(x_1-x_2)^2=(x_1-x_2)/(c_1{}^2-4c_2), (\mu=2)$.

Pd. 2. Przy $n=3$ jest $1/(x_1+x_2)=(x_1+x_3)(x_2+x_3)/(c_3-c_1c_2)$.

Uwagi godnem jest to przekształcenie w przypadku, kiedy funkcya R zawiera jeden tylko pierwiastek x_1 równania $f(x)=0$, kiedy więc $R(x_1)=\varphi(x_1)/\psi(x_1)$. Iloczyn $[\psi(x_1)\ldots\psi(x_n)]$ jest w tym razie funkcyą symetryczną wszystkich pierwiastków x_s i będzie całkowitą wymierną funkcyą $g(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Mnożąc licznik i mianownik przez $[\psi(x_2)\ldots\psi(x_n)]$, dostaniemy:

$$R(x_1)=[\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\ldots\psi(x_n)]/g(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Lecz $\psi(x_2)\psi(x_3)...\psi(x_n)$ jest symetryczną funkcyą pierwiastków $x_2, x_3, ..., x_n$ równania: $f(x)/(x-x_1)=0$; a że to równanie posiada spółczynniki wymierne, całkowite w ilościach $x_1, c_1, c_2, ..., c_n$ [art. 88, (1)], więc i iloczyn $[\psi(x_2)...\psi(x_n)]$ będzie taką funkcyą. Stąd wynika, że $R(x_1)=G(x_1)$, gdzie G jest funkcyą całkowitą.

Przyjmijmy, że $G(x)$ jest stopnia $n' > n$ i podzielmy $G(x)$ przez $f(x)$, to mieć będziemy $G(x)=P(x).f(x)+Q(x)$, gdzie $Q(x)$, jako reszta dzielenia jest stopnia $< n$. Dla $x=x_1$ mamy stąd: $G(x_1)= =Q(x_1)$, gdyż $f(x_1)=0$, a stąd wynika:

II. *Wymierna (ułamkowa) funkcya jednego pierwiastka równania* $f(x)=0$, *daje się zawsze sprowadzić do całkowitej funkcyi tegoż pierwiastka o stopniu mniejszym, niż stopień równania.*

94. Złożenia i iteracye podstawień. Wymierna, niesymetryczna funkcya $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$, którą według tw. I. art. poprzedniego możemy założyć odrazu całkowitą, dozna kilkakrotnej zmiany swej postaci, za poddaniem jej wszystkim $n!$ podstawieniom symetrycznej grupy (s). Takie funkcye nazywają się wielopostaciowemi, albo (niewłaściwie) wielowartościowemi. Ilość jej różnych postaci będzie zawsze $\leqq n!$ [Funkcya n. p. $x_1{}^3+x_2{}^2+x_3$ jest 3!-postaciową; funkcya $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ jest 2-postaciową i t. p.]. Rozwinąć teoryę takich funkcyj będzie teraz najbliższem naszem zadaniem.

Gdy s_λ jest jednem podstawieniem grupy (s), a funkcyę φ poddamy tej substytucyi, to postać funkcyi stąd wynikającą nazwiemy φ_{s_λ}. Do φ_{s_λ} zastosujmy substytucyę s_μ, gdzie s_μ może być identyczne z s_λ, albo różne od s_λ; wynikającą stąd postać naznaczmy przez $(\varphi_{s_\lambda})_{s_\mu}=\varphi_{s_\lambda s_\mu}$ i t. d. Postać $\varphi_{s_\lambda s_\mu}$ będzie-to funkcya φ z takiem uporządkowaniem zmiennych, do jakiego zastosowanie naprzód substytucyi s_λ, a potem substytucyi s_μ doprowadziło; da się więc otrzymać z φ przez poddanie jej pewnej substytucyi σ, która się w grupie (s) niezawodnie zawiera, gdyż grupa (s) zawiera w sobie wszelkie możliwe substytucye. Podstawienie σ nazywamy złożone z podstawień s_λ, s_μ i to w porządku s_λ, s_μ i naznaczamy je krótko, pisząc $\sigma=s_\lambda . s_\mu$. Gdy przy pięciu n. p. elementach mamy:

$$(a) \qquad s_\lambda=\begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ x_2 x_4 x_5 x_3 x_1 \end{pmatrix}, \quad s_\mu=\begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ x_1 x_3 x_2 x_5 x_4 \end{pmatrix},$$

a w s_μ poukładamy górne elementa w porządku dolnych elementów substytucyi s_λ i z niemi równocześnie podpisane dolne elementa poprzekładamy, to otrzymamy:

$$s_\mu = \begin{pmatrix} x_2x_4x_5x_3x_1 \\ x_3x_5x_4x_2x_1 \end{pmatrix}, \text{ a dalej:}$$

$$\sigma = s_\lambda s_\mu = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3x_4x_5 \\ x_2x_4x_5x_3x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2x_4x_5x_3x_1 \\ x_3x_5x_4x_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3x_4x_5 \\ x_3x_5x_4x_2x_1 \end{pmatrix}.$$

W ten sam sposób postąpić trzeba dalej tworząc złożenia $s_\lambda s_\mu s_\nu, \ldots$ W razie $s_\lambda = s_\mu = s_\nu \ldots$ piszemy krótko: $\sigma = s_\lambda . s_\lambda . s_\lambda \ldots = s_\lambda{}^a$, co oznacza, że σ jest a-krotnem złożeniem, albo powtórzeniem substytucyi s_λ (iteracyą substytucyi s_λ). Liczbę a wskazującą ilość powtórzenia nazywamy wykładnikiem substytucyi $s_\lambda{}^a$.

Pd. 1. Gdy s_λ, s_μ mają znaczenie (a), utworzyć:

$$s_\mu . s_\lambda,\ s_\lambda{}^2,\ s_\lambda{}^3,\ s_\mu{}^2,\ s_\mu{}^3,\ s_\lambda{}^2 s_\mu,\ s_\lambda s_\mu s_\lambda.$$

Pd. 2. Gdy $s_\lambda = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3x_4 \\ x_1x_3x_2x_4 \end{pmatrix}$, $s_\mu = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3x_4 \\ x_2x_3x_4x_1 \end{pmatrix}$, $s_\nu = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3x_4 \\ x_4x_3x_2x_1 \end{pmatrix}$, utworzyć:

$$s_\lambda s_\mu s_\nu,\ s_\lambda s_\nu s_\mu,\ s_\lambda{}^2 s_\mu s_\nu,\ s_\lambda s_\mu s_\lambda s_\nu.$$

Pd. 3. Okazać, że gdy:

$$s_\lambda = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3 \\ x_1x_3x_2 \end{pmatrix},\ s_\mu = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3 \\ x_2x_1x_3 \end{pmatrix},\ s_\nu = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3 \\ x_3x_1x_2 \end{pmatrix},$$

to $s_\lambda . s_\mu . s_\nu$ jest identyczną substytucyą $= 1$ [art. 87.].

Dwie substytucye, których złożenie daje identyczną substytucyę nazywamy odwrotnemi. Gdy jedną z nich jest s_λ, to drugą naznaczamy przez $s_\lambda{}^{-1}$; ich złożenie $s_\lambda . s_\lambda{}^{-1}$ albo $s_\lambda{}^{-1} s^\lambda$ jest zawsze $=1$.

Złożenie $s_\mu . s_\lambda . s_\lambda{}^{-1}$ albo $s_\mu s_\lambda{}^{-1} s_\lambda$ jest zawsze $= s_\mu$, gdyż $s_\lambda s_\lambda{}^{-1} = s_\lambda{}^{-1} s_\lambda = 1$ nie narusza już porządku danego przez s_μ. Podobnie mamy $s_\lambda s_\lambda{}^{-1} s_\mu = s_\lambda{}^{-1} s_\lambda s_\mu = s_\mu$, bo $s_\lambda s_\lambda{}^{-1} = s_\lambda{}^{-1} s_\lambda$ nie narusza danego porządku elementów; $s_\mu s_\lambda s_\lambda{}^{-1} s_\nu = s_\mu s_\lambda{}^{-1} s_\lambda s_\nu = s_\mu s_\nu$, gdyż — po s_μ — poddanie elementów substytucyi $s_\lambda s_\lambda{}^{-1} = s_\lambda{}^{-1} s_\lambda$ pozostawia je w porządku wskazanym przez s_μ.

Symbol s^{-a} oznacza a-krotną iteracyę substytucyi s^{-1}; nazywają ją także ujemnem a-krotnem powtórzeniem substytucyi s; $s^a . s^{-a} = s^{-a} . s^a = 1$.

Zbadajmy substytucyę $(s_\lambda s_\mu)^{-1}$. Według przytoczonych dopieroco uwag mamy:

$$(s_\lambda s_\mu)^{-1} s_\lambda s_\mu = 1, \text{ dalej } (s_\lambda s_\mu)^{-1} s_\lambda s_\mu s_\mu{}^{-1} = s_\mu{}^{-1}, \text{ czyli}$$

$$(s_\lambda s_\mu)^{-1} s_\lambda = s_\mu{}^{-1}, \text{ stąd } (s_\lambda s_\mu)^{-1} s_\lambda s_\lambda{}^{-1} = s_\mu{}^{-1} s_\lambda{}^{-1} \text{ a więc:}$$

(1) $$(s_\lambda s_\mu)^{-1} = s_\mu{}^{-1} s_\lambda{}^{-1}.$$

Gdy $s_1^a . s_2^b = s_3$, to dalej mamy $s_1^{-a} . s_1^a s_2^b = s_1^{-a} . s_3$ czyli:

(2) $$s_2^b = s_1^{-a} . s_3.$$

Lecz także mamy $s_1^a s_2^b s_2^{-b} = s_3 . s_2^{-b}$ czyli:

(3) $$s_1^a = s_3 s_2^{-b}.$$

Przez dodatnie i ujemne iteracye danego podstawienia s nie mogą powstawać czemraz nowe i nowe podstawienia; inaczej bowiem w grupie symetrycznej (s) musiałoby się mieścić podstawień nieskończenie dużo; a tak nie jest. Z tej przyczyny musimy — powtarzając dodatnio substytucyę s — natrafić w szeregu $s^0, s^1, s^2, s^3, s^4, \ldots$ na powtarzające się substytucye. Niech więc $s^\lambda = s^\mu$, $\mu > \lambda$, to stąd wynika, że $s^\lambda . s^{-\lambda} = 1 = s^\mu s^{-\lambda}$, czyli $s^{\mu-\lambda} = 1$, a to znaczy, że istnieją wykładniki dające identyczną substytucyę. Najmniejszy z nich niech będzie k, to mamy: $s^k = 1$ a dalej jest niezawodnie $s^{2k} = s^{3k} = \ldots = 1$.

Przytem zauważyć trzeba, że w szeregu $s^0 = 1$, $s, s^2, \ldots, s^{k-1}$ wszystkie substytucye są różne między sobą. Przyjmując bowiem, że $s^\alpha = s^\beta$, $\alpha < \beta \leqq k-1$, mielibyśmy dalej $s^\alpha . s^{-\alpha} = s^\beta . s^{-\alpha} = s^{\beta-\alpha}$, czyli $s^{\beta-\alpha} = 1$. Lecz to jest niemożliwem, gdyż $\beta - \alpha < k$, a k przyjęliśmy jako najmniejszy wykładnik dający $s^k = 1$.

Zauważmy odjemną iteracyę s^{-a}. Z liczb $k, 2k, 3k, \ldots$, wybierzmy najmniejszą, $rk \geqq a$, to wskutek $s^{rk} = 1$, możemy położyć:

$$s^{-a} = s^{rk} . s^{-a} = s^{rk-a},$$

gdzie widocznie jest: $rk - a \geqq 0$, ale równocześnie: $(rk - a) < k$. To znaczy:

Badając dodatnie i ujemne iteracye danego podstawienia można się ograniczyć jedynie do jego dodatnich iteracyj.

Wykładnik k nazywa się stopniem, albo peryodem danego podstawienia; a ponieważ ze związku $s^k = 1$ wynika: $s^{k+1} = s$, $s^{k+2} = s^2, \ldots$ więc stąd wnosimy, że w $(s^0, s^1, s^2, \ldots, s^{k-1})$ mamy już wszystkie, różne między sobą substytucye, jakie z iteracyi substytucyi s powstają.

95. Przestawienia i cykle. Z uwagi, że grupa symetryczna (s) zawiera wszystkie możliwe podstawienia, wynika:

I. *Złożenia ilukolwiekbądź podstawień grupy (s) i ich powtórzenia dają znowu podstawienia mieszczące się w (s).*

W tem tkwi właściwe i ściśle określone pojęcie grupy — pojęcie , z którem się dziś spotykamy we wszystkich gałęziach tak analizy, jak geometryi. Grupą nazywamy pewien skończony lub nieskończony zbiór wskazanych, a różnych między sobą działań [działań arytmetycznych, algebraicznych, ruchów w przestrzeni, lub na płaszczyźnie i t. p.] o tej własności, że złożenie ich kilku lub iteracyę jednego znajdujemy znowu w tym zbiorze.

Jeżeli w porządku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tylko dwa elementa x_α, x_β ze sobą przestawiamy, a inne elementa pozostawiamy nienaruszone, to takie podstawienie:

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} \ldots x_\alpha \ldots x_\beta \ldots \\ \ldots x_\beta \ldots x_\alpha \ldots \end{pmatrix}$$

piszemy krótko $(x_\alpha x_\beta)$ lub $(x_\beta x_\alpha)$*) i nazywamy przestawieniem albo transpozycyą.

Złożenie:

$$(b) \qquad (x_\alpha x_\beta)(x_\alpha x_\beta) = (x_\alpha x_\beta)(x_\beta x_\alpha) = (x_\alpha x_\beta)^2 = (x_\beta x_\alpha)^2 = 1,$$

gdyż dwukrotne przestawienie tych samych elementów nie narusza ich z miejsc pierwotnych.

Po tem określeniu transpozycyi dowiedziemy ważnego twierdzenia:

II. *Każde podstawienie można otrzymać ze założenia pewnej skończonej ilości przestawień.*

Przy $n=2$ wypełniają całą symetryczną grupę (s) dwie substytucye:

$$s_1 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} = 1, \quad s_2 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_1 \end{pmatrix};$$

z nich s_1 nie zawiera ani jednej transpozycyi, albo — według (b) — jest $= (x_1 x_2)(x_2 x_1)$; druga substytucya s_2 jest transpozycyą $(x_1 x_2)$ Twierdzenie II. jest więc tu prawdziwe.

Przyjmijmyż, że podstawienie o $(n-1)$ elementach umiemy już złożyć z samych przestawień, a zauważmy podstawienie:

$$s = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x \\ x_{k_1} & x_{k_2} & \ldots & x_{k_n} \end{pmatrix}$$

o n elementach. Aby dostać porządek $(x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_n})$, trzeba w porządku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ przedewszystkiem przełożyć ze sobą elementa x_1, x_{k_1} **). Dostaniemy wtedy porządek:

$$x_{k_1}, x_2, x_3, \ldots, x_1, \ldots, x_n.$$

Pozostawiając x_{k_1} na pierwszem miejscu, mamy teraz z porządku $(x_2, x_3, \ldots, x_1, \ldots, x_n)$ dojść do porządku $(x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots, x_{k_n})$, czyli wykonać substytucyę:

---

*) $(x_\alpha x_\beta)$ lub $(x_\beta x_\alpha)$ ma to samo znaczenie, bo w przestawieniu 2 elementów ze sobą nie ma odgrywać żadnej roli następstwo elementów po sobie.

**) W razie gdy x_{k_1} jest identyczne z x_1, trzeba to przestawienie odnieść do najbliższego elementu, który z podpisanym nie jest identycznym.

$$\begin{pmatrix} x_2\, x_3 \ldots x_1 \ldots x_n \\ x_{k_2} x_{k_3} \ldots\ldots x_{k_n} \end{pmatrix}.$$

Tę — według założenia — umiemy już złożyć z samych przestawień, a gdy dla $n=2$, jak to wykazaliśmy, jest to możliwem, więc i daną substytucyę s można będzie złożyć w ten sposób, *c.b.d.d.*

Pod względem takiego tworzenia podstawień rozróżniamy w grupie symetrycznej substytucye parzyste czyli 1szej klasy (o parzystej liczbie przestawień) i substytucye nieparzyste, czyli 2ej klasy (o nieparzystej liczbie przestawień).

Pd. 4. Substytucye symetrycznej grupy o 3 elementach przedstawić przez złożenia przestawień. [Odp. 1, (x_2x_3), (x_1x_2), $(x_1x_2)(x_1x_3)$, $(x_1x_3)(x_1x_2)$, (x_1x_3)].

Z twierdzenia II. wyniką nowe określenie funkcyi symetrycznej, a mianowicie:

III. ***Funkcya wymierna n zmiennych jest symetryczną***, *gdy swej* ***postaci nie zmienia przy wszelkich możliwych przestawieniach*** *swoich* ***zmiennych.***

Weźmy pod uwagę podstawienie:

$$s = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7 \\ x_2x_4x_5x_1x_3x_7x_6 \end{pmatrix}.$$

Podług niej trzeba:

element x_1 zastąpić przez x_2

„ x_2 „ „ x_4

„ x_4 „ „ x_1.

Przez to, z elementu x_1 wychodząc, dochodzimy kolejnem podstawianiem znowu do x_1. Taką substytucyę częściową

$$\begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_4 \\ x_2\, x_4\, x_1 \end{pmatrix}$$

nazywamy cyklem, albo podstawieniem kołowem i znaczymy je krótko przez:

$$(c) \qquad (x_1\, x_2\, x_4).$$

Przytem zauważyć trzeba, że $(x_1x_2x_4)=(x_2x_4x_1)=(x_4x_1x_2)$, że więc w cyklu można elementa kołowo przesunąć, nie zmieniając jego znaczenia.

Cyklem (c) wyczerpaliśmy w s elementa x_1, x_2, x_4. Przechodząc teraz do nowego (najbliższego) elementu x_3 zawartego w s, mamy

x_3 zastąpić przez x_5

x_5 „ „ x_3, a to daje cykl:

$$(d) \qquad (x_3x_5)=(x_5x_3)$$

redukujący się widocznie do jednego przestawienia.

Dalej mamy w s zastąpić x_6 przez x_7, a x_7 przez x_6 co daje cykl:

$$(e) \qquad (x_6 x_7) = (x_7 x_6).$$

Substytucyę s można więc napisać $s = (x_1 x_2 x_4)(x_3 x_5)(x_6 x_7)$. Gdy substytucya dana nie narusza pewnych elementów, to każdy z tych elementów tworzy cykl, którego się jednak zwykle nie uwidacznia n. p.

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ x_3 x_2 x_4 x_1 x_5 \end{pmatrix} = (x_1 x_3 x_4)(x_2)(x_5) = (x_1 x_3 x_4).$$

Składanie substytucyi z cyklów wskazane wyżej na szczególnej substytucyi da się zastosować i w każdym ogólnym przypadku, a to znaczy:

IV. *Każdą substytucyę przedstawić można symbolicznie iloczynem cyklów. Cykl o 2 elementach jest przestawieniem tych elementów. Porządek cyklów w złożeniu jest dowolny, bo żadne dwa cykle nie zawierają wspólnych elementów.*

Do uporządkowania wskazanego substytucyą kołową $(x_1 x_2 x_3 \ldots x_k)$ możemy dojść w ten sposób. Naprzód x_1 przemieniamy z x_2, dalej element x_1 stojący już na drugiem miejscu przemieniamy z x_3, dalej ten sam element x_1 stojący już na trzeciem miejscu przemieniamy z x_4 i t. d. Według tego będzie więc:

$$(x_1 x_2 x_3 \ldots x_k) = (x_1 x_2)(x_1 x_3) \ldots (x_1 x_k), \text{ co znaczy:}$$

V. *Cykl złożony z k liter — k^{go} rzędu — jest równoważny z $(k-1)$ przestawieniami.*

W szczególności, gdy $k=3$, mamy $(x_1 x_2 x_3) = (x_1 x_2)(x_1 x_3)$ i naodwrót $(x_1 x_2)(x_1 x_3) = (x_1 x_2 x_3)$. Zauważmy substytucyę $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$, której przestawienia nie mają wspólnego elementu, to ją możemy w ten sposób napisać:

$$(x_1 x_2)(x_1 x_3)(x_3 x_1)(x_3 x_4), \text{ gdyż } (x_1 x_3)(x_3 x_1) = 1; \text{ a że}$$

$$(x_1 x_2)(x_1 x_3) = (x_1 x_2 x_3), \ (x_3 x_1)(x_3 x_4) = (x_3 x_1 x_4), \text{ więc}$$

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4) = (x_1 x_2 x_3)(x_3 x_1 x_4).$$

Zauważmy podstawienie kołowe piątego rzędu $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$, to odrazu sprawdzimy, że

$$(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = (x_1 x_2 x_3)(x_1 x_4 x_5), \text{ gdyż}$$

$$(x_1 x_2 x_3)(x_1 x_4 x_5) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ x_2 x_3 x_1 x_4 x_5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ x_4 x_2 x_3 x_5 x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ x_2 x_3 x_1 x_4 x_5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_2 x_3 x_1 x_4 x_5 \\ x_2 x_3 x_4 x_5 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ x_2 x_3 x_4 x_5 x_1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$$

co znaczy, że każdą substytucyę kołową rzędu 5^{go} przedstawić zawsze można złożeniem dwóch kołowych substytucyj rzędu 3^{go}.

Naodwrót da się pokazać, że $(x_1x_2x_3)=(x_1x_3x_2x_4x_5)(x_1x_5x_4x_3x_2)$, co znaczy znowu, że każda substytucya złożona z cyklów rzędu 3^{go} (parzysta) jest zarazem złożeniem cyklów rzędu piątego.

Z tych wszystkich uwag wynika:

VI. *Wszystkie substytucye złożone z samych cyklów 3^{go} lub 5^{go} rzędu można przedstawić przez złożenia parzystej liczby przestawień i naodwrót: Wszystkie substytucye parzyste dadzą się złożyć z samych cyklów 3^{go} lub 5^{go} rzędu.*

Pd. 1. Okazać, że gdy C_k jest substytucyą kołową k^{go} rzędu, to C_k^{α}, $\alpha \leq k$, jest również substytucyą kołową, gdy α jest pierwsze względem k, a składa się z α cyklów, gdy α jest podzielnikiem liczby k.

Pd. 2. Okazać, że substytucya kołowa C_k, k^{go} rzędu, jest zarazem substytucyą k^{go} stopnia, tak, że $C_k^k=1$.

96. Grupy i funkcye wielopostaciowe. Tworzenie funkcyi o danej grupie. Według określenia danego w poprzedzającym art. nazwiemy grupą każdy zbiór r podstawień — choć $r<n!$ — różnych między sobą, a dających powtórzeniami i złożeniami swemi znowu podstawienia zawarte w tym zbiorze. Liczba r nazywa się rzędem grupy. Przytem zauważyć trzeba, że z potęg substytucyi s stopnia k, zawartej w grupie tylko najwyżej jej $(k-1)^{sze}$ potęgi wchodzą w złożenia podstawień lub występują same jako podstawienia.

Pd. 1. Gdy s jest dowolną substytucyą stopnia k^{go}, to zbiór substytucyj

$$1,\ s,\ s^2,\ s^3, \ldots, s^{k-1}$$

jest grupą. Nazywają ją grupą kołową, albo cykliczną. Jej rząd $=k$. Wszystkie substytucye tego zbioru są widocznie między sobą różne, a dowolne złożenia $s^{\alpha}.s^{\beta}\ldots$, lub iteracya $(s^{\alpha})^{\mu}$ w tym zbiorze musi się mieścić.

Pd. 2. Zbiór wszystkich substytucyj parzystych [albo: składających się z samych cyklów 3^{go} lub z samych cyklów 5^{go} rzędu] będzie grupą, bo wszystkie ich złożenia i iteracye są znowu substytucyami parzystemi i mieszczą się w tym zbiorze. Rząd takiej grupy później wyznaczymy.

Lecz uwagi godnem jest, że pojęcie grupy ściśle się łączy także z teoryą wielopostaciowych funkcyj. Pod tym bowiem względem istnieje twierdzenie:

I. *Wszystkie podstawienia, które postaci danej funkcyi $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ nie zmieniają, tworzą grupę, którą się określa jako grupę tej funkcyi.*

Przyjmijmy, że φ nie zmienia swej postaci dla r, i tylko dla r podstawień

(1) $$1,\ s_2,\ s_3,\ ...,\ s_r,\quad r < n!$$

[Substytucya identyczna $s_1 = 1$ musi się do nich zawsze zaliczać].

Według przyjętego znakowania mamy więc $\varphi = \varphi_{s_2} = \varphi_{s_3} = ... = \varphi_{s_r}$. Niech s_α, s_β będą substytucyami wyjętemi z szeregu (1), to bez różnicy, czy s_α, s_β są różne od siebie, czy nie, mamy $(\varphi_{s_\alpha})_{s_\beta} = \varphi_{s_\alpha s_\beta}$. Lecz $\varphi_{s_\alpha} = \varphi$, a więc $(\varphi_{s_\alpha})_{s_\beta} = \varphi_{s_\beta}$, a że $\varphi_{s_\beta} = \varphi$, więc: $\varphi = \varphi_{s_\alpha s_\beta}$.

Stąd wynika, że substytucya $s_\alpha s_\beta$ i wszelkie wyższe złożenia (lub iteracye) substytucyj (1) zawierają się w (1), przezco — podług definicyi — szereg (1) jest grupą, a twierdzenie I. mamy dowiedzione.

Twierdzenie I. da się także odwrócić; możemy bowiem udowodnić:

II. *Do danej grupy $G = [s_1 = 1, s_2, s_3, ..., s_r]$ można zawsze znaleść funkcyę, (która jedynie dla substytucyj grupy nie zmienia postaci).*

Funkcya:

(2) $$\varphi = \varphi_1 = \varphi_{s_1} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$$

o spółczynnikach $a_1, a_2, ..., a_n$ wszystkich między sobą różnych jest oczywiście $n!$-wartościową. Jej różnemi wartościami w substytucyach danej grupy G niech będą $\varphi_{s_1}, \varphi_{s_2}, \varphi_{s_3}, ..., \varphi_{s_r}$. Utwórzmy iloczyn $\Phi = \varphi_{s_1} . \varphi_{s_2} ... \varphi_{s_r}$ i poddajmy go dowolnej substytucyi σ należącej znowu do grupy G. Iloczyn Φ przejdzie wtedy na $\Phi_\sigma = \varphi_{s_1\sigma} \varphi_{s_2\sigma} ... \varphi_{s_r\sigma}$. Każda z r substytucyj zbioru $G' = (s_1\sigma, s_2\sigma, ..., s_r\sigma)$ jest substytucyą danej grupy G; a że nie może być $s_\alpha\sigma = s_\beta\sigma$ przy $\alpha \gtrless \beta$, bo stądby wynikała identyczność $s_\alpha \sigma . \sigma^{-1} = s_\beta \sigma \sigma^{-1}$, czyli $s_\alpha = s_\beta$, więc G' jest wprost grupą G w pewnem uporządkowaniu jej substytucyj. Stąd wynika: $\Phi_\sigma = \Phi$, a to znaczy, że iloczyn Φ nie zmienia swej postaci za poddaniem go substytucyom grupy G. Trzeba teraz dowieść, że tylko dla tych substytucyj nie zmienia się Φ. W tym celu zauważmy substytucyę τ nie zawierającą się w G i zastosujmy tę substytucyę do Φ. Otrzymamy wtedy:

$$\Phi_\tau = \varphi_{s_1\tau} . \varphi_{s_2\tau} ... \varphi_{s_r\tau}.$$

Załóżmy $\Phi_\tau = \Phi$, czyli wyraźnie:

(3) $$\varphi_{s_1\tau} . \varphi_{s_2\tau} ... \varphi_{s_r\tau} = \varphi_{s_1} . \varphi_{s_2} ... \varphi_{s_r},$$

które-to równanie ma być identycznością, to podług tw. I. art. 82. da się funkcya wymierna całkowita wielu zmiennych tylko w jeden sposób rozłożyć na czynniki nieprzywiedlne. Takimi są tu właśnie z jednej strony czynniki $\varphi_{s_\alpha \tau}$, ..., a z drugiej strony czynniki φ_{s_α}, ..., jako liniowe funkcye (o wymiarze $=1$). Wskutek tego identyczność (3) tylko tym sposobem zachodzićby mogła, że n. p.:

$$\varphi_{s_\alpha \tau}=\varphi_{s_1}, \quad \varphi_{s_\beta \tau}=\varphi_{s_2}, \ldots$$

Lecz to jest niemożliwe, bo funkcya φ jest $n!$ wartościową. Funkcya Φ jest więc rzeczywiście funkcyą o grupie G.

Zamiast funkcyi φ o postaci (2) użyćby można $n!$-wartościowej funkcyi:

(4) $$\psi=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

o różnych między sobą wykładnikach α_1, α_2, ..., α_n i podobnie udowodnić, że suma $\Psi=\psi_{s_1}+\psi_{s_2}+\ldots+\psi_{s_r}$ jest funkcyą o grupie G.

Te sposoby tworzenia funkcyj należących do danej grupy nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwych funkcyj należących do tej grupy. Lecz bardzo ważnem jest, że za pomocą twierdzeń I., II. obie teorye: teorya grup i funkcyj wielopostaciowych w ścisłym ze sobą pozostają związku, a funkcya rozważana równocześnie z grupą pojaśnia, ożywia i rozszerza teoryę grup.

Nakoniec zanotować tu trzeba twierdzenie, jakie z opisanych sposobów tworzenia funkcyi wprost wynika. Jest ono takie:

III. *Gdy $G=(1, s_2, s_3, \ldots, s_r)$ jest daną grupą, a σ jedną z jej podstawień, to $G\sigma=(\sigma, s_2\sigma, s_3\sigma, \ldots, s_r\sigma)$ jest grupą G.*

Pd. 3. Grupą funkcyi $n!$-wartościowej jest jedyna substytucya identyczna $s=1$.

Pd. 4. Funkcya $\varphi=x_1x_2+x_3x_4$ jest 3-wartościowa i posiada grupę:

$$G=[1, (x_1x_2), (x_3x_4), (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3x_2x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3), (x_1x_4x_2x_3)].$$

Okazać, że złożenia $(x_1x_2).(x_1x_3x_2x_4)$, $(x_1x_2)(x_1x_4)(x_2x_3)$ i t. p. zawierają się w grupie.

Pd. 5. Okazać, że, gdy $s=(x_1x_2\ldots x_n)=C_n$, to do grupy: $[1, s, s^2, s^3, \ldots, s^{n-1}$ należy funkcya:

$$\varphi=x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_4^2+\ldots+x_{m-1}.x_m^2+x_mx_1^2, \quad m\leq n.$$

Pd. 6. W Pd. 4. mieliśmy funkcyę i grupę G do niej należącą o rzędzie $=8$. Połóżmy: $\varphi=x_1+ix_2-x_3-ix_4$, to tworząc $\Phi=\varphi_1.\varphi_2\ldots\varphi_8$ dostajemy w tym iloczynie funkcyę:

$$\Phi=[(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2]^2.[(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2]^2$$

należącą również do grupy G. Lecz widocznie i funkcya:

$$\sqrt{\Phi}=[(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2].[(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2],$$

zawierająca same kwadraty różnic co dwóch zmiennych, będzie miała grupę G.

Połóżmy — przechodząc do drugiego sposobu tworzenia —

$$\psi=x_1^0.x_2^1.x_3^2.x_4^3, \quad \text{to suma:}$$

$$\Psi=\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_8=[(x_1+x_2)(x_3+x_4)].[x_1^2x_2^2+x_3^2x_4^2]$$

będzie już funkcyą o grupie G. Lecz tu obydwa czynniki należą do tej samej grupy G, a stąd wynika, że także
$\Psi_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $\Psi_2 = x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2$, i wreszcie: $\Psi_\alpha = x_1^\alpha x_2^\alpha + x_3^\alpha x_4^\alpha$ — o dowolnym całkowitym dodatnim wykładniku α — będą funkcyami o grupie G.

97. Funkcye półsymetryczne i grupa półsymetryczna. Funkcye dwupostaciowe.

Rozważmy funkcyę:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \sqrt{\Delta} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)&\ldots(x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_3)&\ldots(x_2 - x_n) \\ &\vdots \\ &(x_{n-1} - x_n). \end{aligned}$$

Za poddaniem jej przestawieniu (x_α, x_β), $\alpha < \beta$ może się w niej zmienić jedynie częściowy iloczyn $K_{\alpha\beta} = (x_\alpha - x_\beta) \times$

$$\times \begin{Bmatrix} [(x_1 - x_\alpha)\ldots(x_{\alpha-1} - x_\alpha)].[(x_\alpha - x_{\alpha+1})\ldots(x_\alpha - x_{\beta-1})].[(x_\alpha - x_{\beta+1})\ldots(x_\alpha - x_n)]. \\ [(x_1 - x_\beta)\ldots(x_{\alpha-1} - x_\beta)].[(x_{\alpha+1} - x_\beta)\ldots(x_{\beta-1} - x_\beta)].[(x_\beta - x_{\beta+1})\ldots(x_\beta - x_n)] \end{Bmatrix}$$

Po przestawieniu x_α z x_β przejdzie $(x_\alpha - x_\beta)$ na

$$(x_\beta - x_\alpha) = -(x_\alpha - x_\beta).$$

Z sześciu dalszych iloczynów: zewnętrzne, nad sobą stojące, tylko się przemienią ze sobą; ze średnich zaś przejdzie: górny na dolny ze znakiem $(-1)^{\beta-1-\alpha}$, a dolny na górny również ze znakiem $(-1)^{\beta-1-\alpha}$. $K_{\alpha\beta}$ przejdzie więc na $(-1)^{1+2(\beta-1-\alpha)}.K_{\alpha\beta}$, czyli na $-K_{\alpha\beta}$. Za zastosowaniem przestawienia innych dwóch elementów dostaniemy $K_{\alpha\beta}$, trzecie przestawienie da $-K_{\alpha\beta}$ i t. d. Stąd wnosimy:

I. *Funkcya $\sqrt{\Delta}$ nie zmienia swej postaci, gdy do niej zastosujemy dowolną substytucyę złożoną z parzystej liczby przestawień. Grupą tej funkcyi jest więc zbiór wszystkich substytucyj złożonych z parzystej ilości przestawień albo z samych cyklów rzędu trzeciego lub z samych cyklów rzędu piątego.* *)

Pozostałe substytucye grupy symetrycznej, utworzone z nieparzystej liczby przestawień zmieniają $\sqrt{\Delta}$ na $-\sqrt{\Delta}$. Ponieważ innych substytucyj już nie ma w grupie (s) przeto:

II. *Funkcya $\sqrt{\Delta}$ jest dwupostaciową; jej drugą postacią jest $-\sqrt{\Delta}$.*

Funkcye o dwóch postaciach, różniących się tylko znakiem, nazywamy krótko półsymetrycznemi.

Zajmijmy się utworzeniem wszystkich półsymetrycznych funkcyj całkowitych wymiernych i wyznaczeniem ich grup.

*) W drugim przypadku musi być oczywiście $n \geqq 3$, a w trzecim $n \geqq 5$.

Gdy $P(x_1 x_2 ... x_n)$ jest taką funkcyą, to musi istnieć pewne przestawienie n. p. (x_α, x_β) zmieniające P na $-P$, inaczej bowiem byłaby funkcya P symetryczną. Za zastosowaniem przestawienia $(x_\alpha x_\beta)$ mamy:

$$P(x_1 ... x_\alpha ... x_\beta ... x_n) = -P(x_1 ... x_\beta ... x_\alpha ... x_n),$$

a stąd wynika, że:

(2) $$P_{x_\alpha = x_\beta} = 0.$$

Połóżmy w miejsce x_α dowolną zmienną z, to funkcya

$$P(x_1 ... z ... x_\beta ... x_n)$$

stanie się — według (2) — zerem dla $z = x_\beta$, czyli jest podzielną przez $(z - x_\beta)$. Przy $z = x_\alpha$ mamy funkcyę $P(x_1 ... x_\alpha ... x_\beta ... x_n)$ i mamy ją podzielną przez $(x_\alpha - x_\beta)$.

P^2 będzie już funkcyą podzielną przez $(x_\alpha - x_\beta)^2$, a że jest symetryczną, więc musi być podzielną przez cały iloczyn Δ. Dana funkcya P będzie podzielną przez $\sqrt{\Delta}$, a jeżeli zawiera w sobie $\sqrt{\Delta}$ w najwyższej m-tej potędze, to iloraz

(3) $$P / (\sqrt{\Delta})^m$$

jest całkowitą funkcyą, która może być tylko albo półsymetryczną albo symetryczną. [Licznik P zmienia tylko znak, mianownik zaś, albo jest już jednopostaciowym, albo tylko znak zmienia].

Półsymetryczność ilorazu odrzucić jednak trzeba, bo w takim razie funkcya P zawierałaby czynnik $\sqrt{\Delta}$ w wyższej potędze niż m^{tej}. Niechżeż (3) będzie funkcyą symetryczną S_1, to mamy $P = S_1 (\sqrt{\Delta})^m$. Lecz wykładnik m nie może być liczbą parzystą, bo wtedy P byłoby funkcyą symetryczną, a tak nie jest. Połóżmyż $m = 2\mu + 1$ i uwzględnijmy, że $S_1 (\sqrt{\Delta})^{2\mu} = S_1$ jest funkcyą symetryczną, to mamy ostatecznie:

(4) $$P = S\sqrt{\Delta}$$

To jest najogólniejsza postać całkowitej półsymetrycznej funkcyi; a że się ona widocznie nie zmienia tylko po tych podstawieniach, w których $\sqrt{\Delta}$ pozostaje niezmieniony, więc stąd wynika:

III. *Wszystkie funkcye półsymetryczne mają wspólną grupę: grupę funkcyi $\sqrt{\Delta}$. Taką ich grupę [określoną w tw. I.] nazywamy grupą półsymetryczną.*

Przejdźmy do funkcyi $\varphi(x_1 x_2 ... x_n)$ dwupostaciowej, ale niepółsymetrycznej. Jej dwie wartości oznaczmy przez:

$$\varphi_1 = \varphi \quad \text{i} \quad \varphi_2 \neq \varphi_1.$$

Gdy substytucya s_α nie zmienia postaci φ_1, to równocześnie nie zmienia i postaci φ_2; niemożliwem jest bowiem z nieidentycznych wyrażeń po zastosowaniu do nich identycznych zmian otrzymać wyrażenie to samo.

Podobnie, gdy s_β zmienia φ_1 na φ_2, to równocześnie musi zmienić φ_2 na φ_1 (z tej samej przyczyny). Z tego wynika, że:

(α) $\varphi_1+\varphi_2=2S_1$, jest funkcyą symetryczną,

(β) $\varphi_1-\varphi_2=2S_2\sqrt{\Delta}$ jest funkcyą półsymetryczną.

Stąd:

(5) $$\varphi_1=S_1+S_2\sqrt{\Delta}, \quad \varphi_2=S_1-S_2\sqrt{\Delta}.$$

Każda z tych wyrażeń daje najogólniejszą formę (jednej z postaci) funkcyi dwupostaciowej, (a półsymetrycznej w razie $S_1=0$). Widocznie i te funkcye nie zmieniają się jedynie w substytucyach nie zmieniających funkcyi $\sqrt{\Delta}$, a stąd twierdzenie:

IV. *Grupa półsymetryczna jest grupą wszystkich dwupostaciowych funkcyj, a naodwrót wszystkie funkcye dwupostaciowe należą do grupy półsymetrycznej.*

98. Rozdzielenie grupy symetrycznej na substytucye, sprowadzające różne wartości funkcyi ϱ-wartościowej. Rząd i wskaźnik grupy. Podgrupa i jej rząd. Niech $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)=\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ będzie ϱ-postaciową funkcyą, gdzie w ogólności jest $\varrho\geqq 2$. Jej grupą niech będzie:

$$G_1=(1, s_2, s_3, ..., s_r), \quad \text{tak, że:}$$
$$\varphi_1=\varphi_{s_1}=\varphi_{s_2}=...=\varphi_{s_r}.$$

Każda inna substytucya σ_2 niezawarta w grupie G_1 da już inną postać funkcyi φ, n. p. postać $\varphi_2\neq\varphi_1$. Utwórzmy szereg substytucyj:

(α) $$\sigma_2, s_2\sigma_2, s_3\sigma_2, ..., s_r\sigma_2. \text{———} G_1\sigma_2$$

to okażemy:

1°. *Wszystkie substytucye* (α) *są między sobą różne.* Przyjmijmy bowiem, że $s_\lambda\sigma_2=s_\mu\sigma_2$, $s_\lambda\neq s_\mu$, to stądby wynikała identyczność substytucyj s_λ, s_μ, a tak nie jest.

2°. *Każda substytucya* (α) *zmienia* $\varphi=\varphi_1$ *na* φ_2. Mamy bowiem $\varphi_{s_\lambda\sigma_2}=(\varphi_{s_\lambda})_{\sigma_2}=(\varphi_1)_{\sigma_2}$, a więc $=\varphi_2$, według założenia o substytucyi σ_2.

3°. *Tylko substytucye* (α) *zmieniają* φ_1 *na* φ_2. Przyjmijmy bowiem, że istnieje substytucya τ, niezawarta w (α), a zmieniająca również φ_1 na φ_2, to mamy: $(\varphi_1)_\tau=\varphi_2$, a że $\varphi_2=(\varphi_1)_{\sigma_2}$, więc

$$(\varphi_1)_\tau=(\varphi_1)_{\sigma_2}.$$

Poddając te identyczne funkcye podstawieniu σ_2^{-1}, dostaniemy identyczność:

$$(\varphi_1)_{\tau\sigma_2^{-1}}=(\varphi_1)_{\sigma_2\sigma_2^{-1}}=\varphi_1.$$

Z tego wynika, że $\tau\sigma_2^{-1}$ jest jednem z podstawień grupy G_1. Połóżmyż $\tau\sigma_2^{-1}=s_\lambda$, to stąd dalej mamy $\tau\sigma_2^{-1}\sigma_2=s_\lambda\sigma_2$, czyli $\tau=s_\lambda\sigma_2$. Substytucya τ należy więc do szeregu (α). Nasze założenie było fałszywe; a substytucye (α) są jedynemi zmieniającemi φ_1 na φ_2.

Gdy φ nie jest 2-wartościową funkcyą, to posiada jeszcze trzecią wartość, którą otrzymać można, stosując do φ_1 pewną nową substytucyę σ_3; $\varphi_3=(\varphi_1)_{\sigma_3}$. Szereg

$$(\beta) \qquad \sigma_3,\ s_2\sigma_3,\ s_3\sigma_3, \ldots, s_r\sigma_3. \text{———} G_1\sigma_3$$

będzie zbiorem wszystkich między sobą różnych podstawień, przerabiających φ_1 na φ_3. Żadna substytucya tego szeregu nie mieści się ani w G_1, ani w szeregu (α).

Przechodząc tak wszystkie wartości:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_\varrho$$

danej funkcyi, możemy utworzyć takie zestawienie:

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1; & 1,\ s_2,\ s_3, \ldots, s_r & . \text{———} & G_1 \\
\varphi_2; & \sigma_2, s_2\sigma_2, s_3\sigma_2, \ldots, s_r\sigma_2 & . \text{———} & G\sigma_2 \\
\varphi_3; & \sigma_3, s_2\sigma_3, s_3\sigma_3, \ldots, s_r\sigma_3 & . \text{———} & G_1\sigma_3 \\
\vdots & \vdots & & \\
\varphi_\varrho; & \sigma_\varrho, s_2\sigma_\varrho, s_3\sigma_\varrho, \ldots, s_r\sigma_\varrho & . \text{———} & G_1\sigma_\varrho.
\end{array}$$

Podstawienia wiersza pierwszego tworzą grupę G_1. Podstawienia poszczególnych wierszy dalszych nie będą grupami (w każdej grupie bowiem musi się zawierać substytucya identyczna). W zbiorze całkowitym

$$(\gamma) \qquad (G_1, G_1\sigma_2, G_1\sigma_3, \ldots, G_1\sigma_\varrho)$$

nie ma dwóch równych sobie podstawień; musi on przytem zawierać dokładnie $n!$ podstawień całej symetrycznej grupy (s). Inaczej bowiem musiałaby istnieć jeszcze nowa substytucya, dająca $(\varrho+1)^{\text{szą}}$ wartość $\varphi_{\varrho+1}$. Lecz takiej wartości — według założenia — już nie ma.

Z drugiej strony mamy w (γ) $r\varrho$ substytucyj, a więc:

$$(1) \qquad r.\varrho=n!$$

Ponieważ r jest rzędem grupy G_1, więc mamy twierdzenia:

I. *Gdy funkcya posiada grupę o rzędzie r, a jest ϱ-wartościową w symetrycznej grupie (s), to r, ϱ są takimi podzielnikami liczby $n!$, że $r\varrho=n!$ Liczbę $\varrho=n!/r$ nazywają wskaźnikiem grupy.*

II. *Rząd grupy półsymetrycznej o n elementach jest* $\frac{n!}{2}$, *gdyż ta grupa należy do każdej dwuwartościowej funkcyi.*

W nawiązaniu do tego dowiedziemy:

III. *Grupa o n elementach, a o rzędzie* $\frac{n!}{2}$, *jest półsymetryczną albo — innemi słowy — oprócz grupy półsymetrycznej, nie ma innej, którejby rząd był* $=\frac{n!}{2}$. *[Cała grupa symetryczna zawiera dokładnie* $\frac{n!}{2}$ *podstawień pierwszej i* $\frac{n!}{2}$ *podstawień drugiej klasy].*

Niech do grupy o rzędzie $\frac{n!}{2}$ należy funkcya φ, to ϱ, ilość wartości tej funkcyi musi — podług I. — być $=2$. Funkcya φ jest więc dwuwartościową, a stąd — według tw. IV. [art. poprzedzający] — wynika, że grupa dana jest półsymetryczną.

Niech $G_1=(1, s_2, s_3, ..., s_r)$ będzie, jak przódy, grupą funkcyi φ_1. W niej niech się mieści grupa $H_1=(1, s_2, s_3, ..., s_{r_1})$, która funkcyi $\psi=\psi_1$ nie zmienia, a której rząd jest $r_1 < r$. Gdy σ_2 wyjęte z G_1 zmienia ψ_1 na ψ_2, to szereg podstawień:

$$(\alpha_1) \qquad \sigma_2, s_2\sigma_2, s_3\sigma_2, ..., s_{r_1}\sigma_2 \text{———} H_1\sigma_2$$

zawiera — podobnie jak (α) wszystkie już (różne między sobą) podstawienia zawarte w G_1, a zmieniające ψ_1 na ψ_2. Podobnie, gdy $(\psi_1)_{\sigma_3}=\psi_3$, to szereg:

$$(\beta_1) \qquad \sigma_3, s_2\sigma_3, s_3\sigma_3, ..., s_{r_1}\sigma_3 \text{———} H_1\sigma_3$$

zawiera już wszystkie substytucye grupy G_1 przetwarzające ψ_1 na ψ_3.

Tak dalej postępujemy i kończymy na szeregu:

$$(\gamma_1) \qquad \sigma_\mu, s_2\sigma_\mu, s_3\sigma_\mu, ..., s_{r_1}\sigma_\mu \text{———} H_1\sigma_\mu$$

zmieniającym ψ_1 na ψ_μ i wyczerpujemy przez

$$(2) \qquad H_1, H_1\sigma_2, H_1\sigma_3, ..., H_1\sigma_\mu$$

wszystkie substytucye grupy G_1. W (1) jest podstawień $r_1\mu$, a że one grupę G_1 o rzędzie r wypełniają, więc mamy:

$$(3) \qquad \mu . r_1 = r.$$

Nazywając H_1 podzielnikiem, albo częściową grupą, albo wreszcie podgrupą grupy G_1, mamy twierdzenie:

IV. *Rząd podgrupy jest zawsze podzielnikiem rzędu grupy, albo: Rząd grupy jest wielokrotnością rzędu każdej grupy częściowej.*

Przyjmijmy, że funkcya φ_1 jest ρ-wartościową, a funkcya ψ_1 ρ_1-wartościową (z jej ρ_1 wartości objęła grupa G_1 szeregami (2) tylko wartości $\mu \leqq \rho_1$), wtedy według (1) mamy równocześnie:

(4) $$r.\rho = n!, \quad r_1\rho_1 = n!, \quad \text{a stąd:}$$
$$r : r_1 = \rho_1 : \rho.$$

Gdy dane są dwie różne funkcye φ, ψ tych samych zmiennych, a o różnych grupach G, G', rzędów r, r', to funkcya $a\varphi + b\psi$ nie zmienia swej postaci jedynie dla podstawień wspólnych grupom G, G'. Takie podstawienia tworzą — według zasadniczego twierdzenia I., art. 96. — grupę, a stąd wynika:

V. *Wszystkie wspólne podstawienia dwóch danych grup G, G' tworzą grupę H. Jest ona częściową grupą tak grupy G, jak grupy G', a jej rząd r_h jest podzielnikiem i rzędu r i rzędu r'.*

99. Grupy należące do poszczególnych ϱ wartości funkcyi (przetwarzanie grup). Spróbujmy teraz — mając daną ϱ-wartościową funkcyę o wartościach $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$ — utworzyć grupy $G_1, G_2, \ldots, G_\varrho$ należące odpowiednio do tych wartości. Pierwsza grupa G_1 jest już dana i ma postać:

(1) $$G_1 = (1, s_2, s_3, \ldots, s_r);$$

prócz tego przyjmijmy, że substytucya σ_λ zmienia φ_1 na φ_λ, $\lambda = 2, 3, \ldots, \varrho$, to σ_λ^{-1} zmieni naodwrót φ_λ na φ_1. Według tego mamy taki szereg identyczności:

$$(\varphi_\lambda)_{\sigma_\lambda^{-1}} = \varphi_1, \quad (\varphi_\lambda)_{\sigma_\lambda^{-1} s_\alpha} = (\varphi_1)_{s_\alpha} = \varphi_1, \quad (\varphi_\lambda)_{\sigma_\lambda^{-1} s_\alpha \sigma_\lambda} = (\varphi_1)_{\sigma_\lambda} = \varphi_\lambda.$$

Stąd wnosimy, że substytucye:

(2) $$\sigma_\lambda^{-1} s_\alpha \sigma_\lambda, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, r,$$

nie zmieniają wartości φ_λ, a rozstrzygnąć trzeba, czy wypełniają całkowicie grupę G_λ. Do tego potrzeba: 1⁰ aby prócz podstawień (2) nie istniało żadne inne podstawienie τ, pozostawiające φ_λ niezmienionem, 2⁰ aby w (2) nie było dwóch równych substytucyj, 3⁰ aby złożenia kilku podstawień (2) zawierały się w (2).

Co do punktu pierwszego przyjmijmy, że:

$$(\varphi_\lambda)_\tau = \varphi_\lambda, \quad \text{a więc:} \quad (\varphi_\lambda)_{\tau\sigma_\lambda^{-1}} = \varphi_1.$$

Lecz za φ_λ możemy położyć $(\varphi_1)_{\sigma_\lambda}$, tak, że mieć będziemy $(\varphi_1)_{\sigma_\lambda \tau \sigma_\lambda^{-1}} = \varphi_1$. Z tego wynika, że $\sigma_\lambda \tau \sigma_\lambda^{-1}$ jest jednem z podstawień grupy G_1. Połóżmyż $\sigma_\lambda \tau \sigma_\lambda^{-1} = s_\alpha$, to stąd wynika:

$$\sigma_\lambda^{-1} \sigma_\lambda \tau \sigma_\lambda^{-1} \sigma_\lambda = \sigma_\lambda^{-1} s_\alpha \sigma_\lambda, \text{ czyli, [art. 94.], } \tau = \sigma_\lambda^{-1} s_\alpha \sigma_\lambda.$$

Ta równość wskazuje, że τ musi zawierać się w (2).

Przyjmijmy, aby na punkt drugi odpowiedzieć, że:

$$\sigma_\lambda^{-1} s_\alpha \sigma_\lambda = \sigma_\lambda^{-1} s_\beta \sigma_\lambda, \quad \alpha \gtreqless \beta,$$

to stądby wynikała równość $s_\alpha = s_\beta$. Lecz to jest niemożliwe przy $\alpha \gtreqless \beta$. W (2) nie ma więc dwóch równych sobie podstawień.

Aby na punkt trzeci odpowiedzieć, zauważmy złożenie: $\sigma_\lambda^{-1} s_\alpha \sigma_\lambda . \sigma_\lambda^{-1} s_\beta \sigma_\lambda$; daje ono $\sigma_\lambda^{-1} . s_\alpha s_\beta . \sigma_\lambda$, a więc substytucyę zawartą w (2).

Z tego wynika, że zbiór podstawień (2) jest rzeczywiście grupą, należącą do (wartości) φ_λ. Tę grupę naznaczymy symbolicznie przez $\sigma_\lambda^{-1} G_1 \sigma_\lambda$ i nazwiemy przetworzoną grupy G_1 przez σ_λ.

Z tych uwag wynika:

I. *Gdy do* φ_1 *należy grupa* G_1, *to*

$$
\begin{array}{llll}
\text{„} & \varphi_2 & \text{„} \quad \text{„} & \sigma_2^{-1} G_1 \sigma_2 = G_2 \\
\text{„} & \varphi_3 & \text{„} \quad \text{„} & \sigma_3^{-1} G_1 \sigma_3 = G_3 \\
 & \vdots & & \vdots \\
\text{„} & \varphi_\varrho & \text{„} \quad \text{„} & \sigma_\varrho^{-1} G_1 \sigma_\varrho = G_\varrho .
\end{array}
$$

Każde σ_λ *jest jednem z podstawień zmieniających* φ_1 *na* φ_λ.

Każda z grup G_λ zawiera substytucyę identyczną; powtarza się więc ona w zbiorze $(G_1 + G_2 + \ldots + G_\varrho)$ ϱ razy. Nie jest więc ten całkowity zbiór grupą symetryczną (s).

Pd. 1. W Pd. 4. [art. 96.] mieliśmy grupę G funkcyi $\varphi_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4$. Ta funkcya jest trzywartościową. Za zastosowaniem substytucyi $\sigma_2 = (x_2 x_3)$ dostajemy wartość $\varphi_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4$, a po substytucyi $\sigma_3 = (x_2 x_4)$ wartość $\varphi_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3$.

Grupami tych wartości φ_2, φ_3 będą więc tu:

$$
\begin{aligned}
\sigma_2^{-1} G \sigma_2 = [&1, (x_1 x_3), (x_2 x_4), (x_1 x_3)(x_2 x_4), (x_1 x_2 x_3 x_4), (x_1 x_2)(x_3 x_4), \\
&(x_1 x_4)(x_2 x_3), (x_1 x_4 x_3 x_2)], \\
\sigma_3^{-1} G \sigma_3 = [&1, (x_1 x_4), (x_2 x_3), (x_1 x_4)(x_2 x_3), (x_1 x_3 x_4 x_2), (x_1 x_3)(x_2 x_4), \\
&(x_1 x_2)(x_3 x_4), (x_1 x_2 x_4 x_3)].
\end{aligned}
$$

Pd. 2. Jaka substytucya przetwarza $\sigma_\lambda^{-1} G \sigma_\lambda$ na G?

Jasnem jest, że jeżeli s jest dowolną substytucyą danej grupy G, to $s^{-1} G . s$ będzie wprost grupą G, że więc przetwarzając daną grupę G przez dowolną jej substytucyę dostajemy znowu G.

Lecz prócz podstawień samej grupy G mogą jeszcze istnieć inne podstawienia τ tego rodzaju, że $\tau^{-1} G \tau = G$.

Pd. 3. Półsymetryczna grupa, nie zmieniająca wartości funkcyi $\sqrt{\Delta}$ [art. 97.] nie zmienia także i drugiej wartości $-\sqrt{\Delta}$ tej funkcyi, a stąd wynika, że półsymetryczna grupa przechodzi na siebie, gdy ją dowolną substytucyą tych samych elementów przetworzymy.

Pd. 4. Grupa: $H = [1, (x_1 x_2)(x_3 x_4), (x_1 x_3)(x_2 x_4), (x_1 x_4)(x_2 x_3)]$ przechodzi na siebie po przetworzeniu jej przez dowolną substytucyę czterech elementów x_1, x_2, x_3, x_4. Funkcya należąca do grupy H jest tu sześciowartościową, a z własności grupy H wynika, że grupy tych wszystkich 6 wartości będą identyczne.

Z symbolicznego równania:

$$(\alpha) \qquad \tau^{-1} G \tau = G$$

dostajemy $\tau\tau^{-1} G\tau = \tau G$ czyli:

$$(\beta) \qquad G\tau = \tau G,$$

co oznacza, że gdy s jest dowolną substytucyą grupy G, to $\tau^{-1} s \tau$ jest znowu pewną substytucyą s' grupy G. W szczególności może się zdarzyć, że $\tau^{-1} s \tau = s$, czyli $s\tau = \tau s$.

Takie dwie substytucye s, τ nazywamy przemiennemi a tę nazwę przenosząc na (α), (β), mówimy: substytucya τ jest przemienną z grupą G.

100. Wyróżniona częściowa grupa. Szereg złożenia. Złożenia grupy symetrycznej i półsymetrycznej. Wspomnieliśmy już, że każda substytucya samej grupy G przetwarza G na nią samą.

To samo dzieje się z jej najmniejszą częściową grupą: $s_1 = 1$, mamy bowiem $s^{-1}.1.s = 1$. Jeżeli prócz tych zawsze istniejących wypadków, posiada grupa G częściową grupę H różną od G i od $s_1 = 1$ o tej własności, że ją wszystkie substytucye s grupy G przetwarzają na H, co naznaczamy relacyą:

$$(a) \quad G^{-1} HG = G, \text{ albo } (b) \quad HG = GH,$$

to taką grupę nazywamy częściową wyróżnioną grupą. Według (b) można ją także określić jako częściową grupę przemienną z G.

Gdy grupa G oprócz G i $s_1 = 1$ nie posiada wcale wyróżnionej grupy częściowej, lub grup wyróżnionych, to nazywa się niezłożoną albo niepodzielną; w przeciwnym razie zwie się złożoną lub podzielną. Grupę złożoną G rozkładamy, gdy w niej poszukamy największej wyróżnionej częściowej grupy H; oznaczymy dalej największą wyróżnioną grupę H_1 w H i tak dalej postępujemy, aż wreszcie dojdziemy koniecznie do ostatniej grupy $s_1 = 1$. Szereg $G, H, H_1, H_2, \ldots, 1$ nazywa się szeregiem złożenia grupy G. (Nie rozstrzygamy tu, czy taki rozkład da się przeprowadzić tylko w jeden sposób).

Grupa symetryczna jest zawsze złożoną; zawiera bowiem grupę półsymetryczną jako wyróżnioną [por. art. 99. Pd. 3.]. Lecz jest-to zarazem jej największa wyróżniona grupa, gdyż po funkcyach jednowartościowych (symetrycznych) następują bezpośrednio dwuwartościowe, a stąd wynika, że między liczbami $< n!$ pierwszą mogącą określić rząd grupy jest $\frac{n!}{2}$.

Aby więc szereg złożenia grupy symetrycznej dokończyć, trzeba się teraz zająć złożeniem grupy półsymetrycznej.

Przy $n=2$ redukuje się taka grupa do $s_1=1$; jest więc niezłożoną.

Gdy $n=3$, to rzędem grupy jest liczba 3; jej podzielnikami są 3 i 1, grupa jest więc i tu niezłożoną.

W razie $n=4$ znajdziemy w grupie największą wyróżnioną grupę (por. art. 99. Pd. 4):

$$H_1=[1, (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3)],$$

a grupy $H_2=[1, (x_1x_2)(x_3x_4)]$, $[s_1=1]$ dokończą jej szeregu złożenia. Przy $n=4$ jest więc grupa półsymetryczna złożona.

Weźmy $n>4$ i przyjmijmy, że i w tym razie ma półsymetryczna grupa G' częściową największą wyróżnioną grupę H.

Wyjmijmy z H substytucyę $s\neq1$ zawierającą najmniej elementów. Przedstawmy ją złożeniem cyklów i przyjmijmy, że znajdujemy w niej cykl $A=(x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5...)$ o więcej, niż 3 elementach, tak, że n. p. $s=S.A$. (S i A nie zawierają wspólnych liter, można więc cykl A umieścić — jak to uczyniono — na samym końcu, [art. 95. tw. IV.]). Przetwarzając s substytucyą $\sigma=(x_1x_3x_4)$ zawierającą się w G, dostaniemy:

$$s'=\sigma^{-1}s\,\sigma=S\sigma^{-1}A\sigma,$$

σ^{-1} można położyć po S gdyż przetworzenie substytucyą σ nie zmienia S. Dalej okaże się $\sigma^{-1}A\sigma=A'=(x_1x_3x_4x_2x_5...)$, a

$$s^{-1}=(SA)^{-1}=A^{-1}S^{-1} \text{ [art. 94.(1)]}.$$

Substytucye s, s' mieszczą się w H, a więc i ich złożenie $s^{-1}.s'=A^{-1}S^{-1}SA'=A^{-1}A'=(x_2x_3x_5)$ mieści się w H i ma widocznie mniej liter, niż s.

Z tego okazuje się, że substytucya s nie należy do żądanych i że substytucye o najmniejszej liczbie elementów nigdy nie są tak złożone, aby się w nich cykle o więcej niż 3 literach zawierały. Trzeba więc przyjąć, że s jest złożeniem samych cyklów 2go lub 3go stopnia i położyć albo:

$$s=s_\alpha=S.(x_1x_2)(x_3x_4), \text{ albo:}$$

$$s=s_\beta=S.(x_1x_2x_3)(x_5x_4x_6), \text{ albo wreszcie:}$$

$$s=s_\gamma=S.(x_1x_2)(x_3x_4x_5),$$

gdzie S są substytucyami złożonemi również z samych cyklów o 2 lub 3 elementach.

Gdy położymy $\sigma=(x_1x_2x_5)$ i zauważymy substytucye $s_\alpha.\sigma^{-1}s_\alpha\sigma$, $s_\beta\sigma^{-1}s_\beta\sigma$ mieszczące się również w H, to sprawdzimy i tu, że one mniej już zawierają elementów, niż odpowiednio s_α, s_β*). Podobnie kładąc $\tau=(x_1x_2)(x_3x_4)$ sprawdzić można, że $s_\gamma\tau^{-1}s_\gamma\tau$ mniej zawiera elementów, niż s_γ.

Z tego wynika, że i złożone substytucye s_α, s_β, s_γ nie mogą być w H substytucyami s o najmniejszej liczbie elementów, i że więc wyłącznie być może $s=(x_\alpha, x_\beta)$, lub $s=(x_\alpha x_\beta x_\gamma)$. Lecz pierwszą możliwość odrzucić trzeba [art. 97. tw. I.]; druga wskazuje, że w H zawierają się wszystkie substytucye parzyste, i że więc H jest wprost grupą G'. To znaczy:

I. *Grupa półsymetryczna G' w razie $n=4$ jest złożoną i posiada szereg złożenia G', H_1, H_2, 1. Przy $n \gtreqless 4$ jest niezłożoną.*

II. *Grupa symetryczna w razie $n=4$ posiada szereg złożenia G, G', H_1, H_2, 1. Przy $n \gtreqless 4$ jest jej szeregiem złożenia G, G', 1.*

W ogólności dowolnej grupy częściowej H nie przetworzą wszystkie substytucye danej grupy G w nią samą. Mieć więc będziemy:

$$s_\lambda^{-1} H s_\lambda = H_\lambda, \quad \lambda=2, 3, ..., r, \quad H_\lambda \neq H$$

(r jest rzędem grupy G). Lecz każda grupa H_λ jest oczywiście także częściową grupą grupy G. Takie dwie grupy nazywa Klein**) równouprawnionemi. Z tej definicyi wynika, że wyróżniona grupa częściowa jest-to podgrupa częściowa sama z sobą równouprawniona.

101. O podstawieniach przemiennych z danem podstawieniem i z daną grupą. Izomorfizm. Po tych określeniach przejdźmy do dalszych twierdzeń z teoryi grup.

I. *Wszystkie substytucye t_1, t_2, ..., które z daną substytucyą s o tych samych elementach co t_1, t_2, ... są przemienne, tworzą grupę.*

Według definicyi podstawień t_1, t_2, ... mamy $t_1^{-1}st_1=s$, $t_2^{-1}st_2=s$, ... Przetwórzmy s złożoną substytucyą $t_1 . t_2$, to mamy:

$$(\alpha) \qquad (t_1t_2)^{-1}st_1t_2.$$

Lecz $(t_1t_2)^{-1}=t_2^{-1}t_1^{-1}$ według (1) art. 94., a stąd zamiast (α) położymy $t_2^{-1}(t_1^{-1}st_1)t_2=t_2^{-1}st_2=s$.

---

*) Tak n. p. mamy

1⁰) $s_\alpha\sigma^{-1}s_\alpha\sigma=S.(x_1x_2)(x_3x_4)(x_1x_5x_2).S.(x_1x_2)(x_3x_4)(x_1x_2x_5)$
$=S.(x_1x_2)(x_3x_4)(x_3x_4)(x_1x_5x_2).S.(x_1x_2)(x_1x_2x_5)$
$=S.(x_1x_2)(x_1x_5x_2).S.(x_1x_2)(x_1x_2x_5)$.

2⁰) Porządek $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ przez zastosowanie kolejno s_β, σ^{-1}, s_β, σ zmieni się na:
$x_5, x_2, x_4, x_1, x_6, x_3$, a stąd wynika, że $s_\beta\sigma^{-1}s_\beta\sigma=S^2(x_1x_5x_6x_3x_4)$, (nie zawiera elementu x_2).

**) *Vorlesungen über das Ikosaeder...* (1884) str. 7.

To wskazuje, że wszystkie złożenia substytucyj t_1, t_2, ... mieszczą się w nich i że więc zbiór $(t_1, t_2, ...)$ jest grupą, *c. b. d. d.*

II. *Wszystkie substytucye t_1, t_2, ..., które z daną grupą G są przemienne, tworzą grupę Γ o tej własności, że jej wyróżnioną grupą częściową jest G.*

Według określenia podstawień $t_1, t_2, ...$ mamy tu znowu:

$$(\alpha') \qquad t_1^{-1} G t_1 = G, \; t_2^{-1} G t_2 = G, ..., \text{ a dalej}$$
$$(t_1 t_2)^{-1} G t_1 t_2 = t_2^{-1} (t_1^{-1} G t_1) t_2 = t_2^{-1} G t_2 = G.$$

To wskazuje, że substytucye $(t_1, t_2, ...)$ tworzą grupę Γ. W niej zawierają się z pewnością wszystkie substytucye samej grupy G. Prócz niej może grupa Γ zawierać jeszcze inne substytucye, co symbolicznie naznaczyć można, pisząc $\Gamma \geqq G$. Lecz wszystkie równania (α') napisać można jednem symbolicznem równaniem $\Gamma^{-1} G \Gamma = G$ co znaczy, że G jest wyróżnioną częściową grupą grupy Γ.

Niech rząd grupy G będzie r, a druga grupa Γ, o tych samych, lub zupełnie odmiennych elementach (których może być nawet więcej lub mniej niż w G) niech zawiera $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_r$ podstawień ($\lambda_k \geqq 1$, $k = 1, 2, ..., r$). Podporządkujmy substytucye grupy Γ substytucyom grupy G w ten sposób:

$$(A) \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c} G & s_1 = 1 & s_2 & s_3 & ... \\ \hline \Gamma & \sigma_1', \sigma_2', ..., \sigma_{\lambda_1}' & \sigma_1'', \sigma_2'', ..., \sigma_{\lambda_2}'' & \sigma_1''' \sigma_2''', ..., \sigma_{\lambda_3}''' & ... \end{array}$$

i przyjmijmy, że z schematu tego dowiadujemy się o takim związku grup G, Γ ze sobą:

1. Gdy iteracya s_a^{α} leży w h^{tym} dziale, to iloczyn α którykolwiek (równych, różnych) σ wyjętych z a^{tego} działu uporządkowany dowolnie leży w h^{tym} dziale.

2. Gdy złożenie $s_a^{\alpha} . s_b^{\beta} . s_c^{\gamma} ...$ leży w h^{tym} dziale, to iloczyn podstawień σ utworzony w ten sposób i w tym porządku:

α dowolnych czynników (równych, różnych) σ z a^{go} działu;

β dowolnych czynników (równych, różnych) σ z b^{go} działu;

γ dowolnych czynników (równych, różnych) σ z c^{go} działu...

leży również w h^{tym} dziale.

O grupach G, Γ posiadających tę własność powiadamy, że pozostają z sobą w izomorfizmie, i to: w izomorfizmie wielostopniowym, gdy $\lambda_k > 1$, $k = 1, 2, ..., r$, a w izomorfizmie jednostopniowym gdy wszystkie $\lambda_k = 1$. W tym drugim przypadku schemat (A) ma prostszą formę:

$$(B) \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c} G & s_1 = 1 & s_2 & s_3 & ... \\ \hline \Gamma & \sigma_1 = 1 & \sigma_2 & \sigma_3 & ... \end{array}$$

Gdy $s_\lambda^a . s_\mu^b ... = s_h$ to także $\sigma_\lambda^a \sigma_\mu^b ... = \sigma_h$, a rząd grup jest tu ten sam.

Pd. 1. Grupy $G=[1, (x_1x_2)]$, $\Gamma=[1, (\xi_1\xi_2)(\xi_3\xi_4), (\xi_1\xi_3)(\xi_2\xi_4), (\xi_1\xi_4)(\xi_2\xi_3)]$ pozostają w wyższym, dwustopniowym izomorfizmie, a ich podporządkowanie przedstawia schemat:

$$\begin{array}{c|c|c} G & 1 & (x_1x_2) \\ \hline \Gamma & 1, (\xi_1\xi_2)(\xi_3\xi_4) & (\xi_1\xi_3)(\xi_2\xi_4), (\xi_1\xi_4)(\xi_2\xi_3) \end{array}.$$

Pd. 2. Grupy

$$G=[1, (x_1x_2)(x_3x_6)(x_4x_5), (x_1x_3)(x_2x_5)(x_4x_6),$$
$$(x_1x_4)(x_2x_6)(x_3x_5), (x_1x_5x_6)(x_2x_3x_4), (x_1x_6x_5)(x_2x_4x_3)]$$
$$\Gamma=[1, (\xi_1\xi_2), (\xi_1\xi_3), (\xi_2\xi_3), (\xi_1\xi_2\xi_3), (\xi_1\xi_3\xi_2)].$$

są w jednokrotnym izoformizmie; potrzeba tylko podporządkować substytucyę pierwszą pierwszej, drugą drugiej i t. d.

Bardzo łatwo okazać, że system podstawień $\Sigma=(\sigma'_1, \sigma'_2, ...\sigma'_{\lambda_1})$ który w wielostopniowym izoformizmie odpowiada substytucyi identycznej $s_1=1$, tworzy grupę. Z określenia bowiem izomorfizmu wynika, że i wszelkie złożenia i iteracye podstawień tego systemu odpowiadają substytucyi $s_1=1$, mieszczą się więc w Σ, a to jest dostatecznem znamieniem grupy.

Lecz dalej okazać można, że grupa Σ jest wyróżnioną częściową grupą grupy Γ. W tym celu wyjmijmy z Γ dowolną substytucyę σ; gdy w G odpowiada jej substytucya s [σ, s pozostają w tym samym dziale schematu (A)], a $\sigma^{-1}=\sigma^{k-1}$, jest więc σ stopnia k^{go}, to σ^{-1} odpowiada substytucyi s^{k-1}.

Lecz z drugiej strony $\sigma . \sigma^{k-1}=\sigma^k=1$ leży w pierwszym dziale. Musi więc także $s . s^{k-1}$ w pierwszym leżeć dziale, a to znaczy, że $s^k=s_1=1$ i że s jest również stopnia k.

Stąd dowiadujemy się przy tej sposobności, że w grupach izomorficznych substytucye odpowiadające sobie są zawsze tych samych stopni.

Ponieważ więc równocześnie $\sigma^{k-1}=\sigma^{-1}$ i $s^{k-1}=s^{-1}$, więc σ^{-1}, s^{-1} odpowiadają sobie znowu, a przetworzenia $\sigma^{-1}\sigma_\alpha'\sigma$, $s^{-1}.1.s=1$ są także odpowiadającemi sobie substytucyami [znajdują się w pierwszym dziale schematu (A)], to stąd wynika, że wszelkie substytucye $\sigma^{-1}\sigma_\alpha'\sigma$ należą znowu do Σ; a że σ może być dowolną substytucyą grupy G, więc mamy $\Gamma^{-1}\Sigma\Gamma=\Sigma$, *c. b. d. d.*

Z schematu (A) izomorfizmu wielostopniowego widać, że wszystkie substytucye:

$$(1) \qquad \sigma_1'\sigma_\alpha'', \sigma_2'\sigma_\alpha'', ..., \sigma_{\lambda_1}'\sigma_\alpha'',$$

gdzie α ma wartość jednej z liczb $1, 2, ..., \lambda_2$ odpowiadają substytucyi $1.s_2=s_2$. Są one wszystkie między sobą różne i różne od podstawień grupy Σ.

Przyjmijmy, że prócz podstawień (1) istnieje jeszcze inne τ_2 odpowiadające substytucyi s_2. Iloczyn $\tau_2(\sigma_\alpha'')^{-1}$ odpowie substytucyi $s_1=1$, gdyż τ_2 mieści się w dziale $[s_2]$, a $(\sigma_\alpha'')^{-1}$ w dziale $[s_2^{-1}]$. Będzie więc $\tau_2(\sigma_\alpha'')^{-1}=\sigma_\varrho'$, a stąd $\tau_2=\sigma_\varrho'.\sigma_\alpha''$, co oznacza, że τ_2 jest już zawarte w systemie (1). Naznaczmy ten system przez $\Sigma.\sigma_\alpha''$, to widocznie tylko on odpowiada substytucyi s_2, a $\lambda_2=\lambda_1$. Podobnie gdy σ_α''' jest jednem z podstawień działu $[s_3]$, to system $\Sigma.\sigma_\alpha'''$ obejmie już wszystkie substytucye tego działu, a λ_3 będzie znowu $=\lambda_1$ i t. d. Mamy więc twierdzenie:

III. *Gdy grupy G, Γ pozostają w wielostopniowym izomorfizmie a substytucyi $s_1=1$ z grupy G odpowiada λ substytucyj grupy Γ, to i każdej innej substytucyi z G odpowiada także λ substytucyj w Γ. Taki izomorfizm jest λ-stopniowym. Gdy rząd grupy G jest r, to Γ jest rzędu λr.*

Niech $(s_\alpha, s_\beta, ...)$ tworzą częściową grupę grupy G, a tym substytucyom niech odpowiadają w Γ po porządku systemy:

(2) $$(\sigma_\alpha, \sigma_\alpha', \sigma_\alpha''...),(\sigma_\beta, \sigma_\beta', \sigma_\beta''...), ...;$$

wtedy substytucye (2) są również grupą, a więc częściową grupą grupy Γ. Widocznie bowiem każde złożenie kilku podstawień (2) odpowiadać będzie takiemu podstawieniu w G, które się mieści w $(s_\alpha, s_\beta ...)$. To znaczy:

IV. *Substytucye grupy Γ odpowiadające substytucyom częściowej grupy grupy G tworzą częściową grupę w Γ. Izomorfizm tych grup częściowych jest również λ-stopniowy t. j. taki, jak grup G, Γ.*

Bez trudności dowiedzie się twierdzenia:

V. *Wyróżnionej grupie częściowej w G odpowie w Γ również wyróżniona jej grupa częściowa.*

Wreszcie dowiedziemy:

VI. *Gdy z G wyjmiemy wyróżnioną największą grupę jej częściową, to tej grupie odpowie w Γ grupa największa wyróżniona.*

Gdyby bowiem odpowiadająca wyróżniona grupa w Γ nie była największą, to i wyjęta grupa wyróżniona z G nie byłaby taką, co jednak sprzeciwia się założeniu.

102. Związek algebraiczny między ϱ wartościami danej funkcyi. Wiemy już w jakim stosunku pozostają wartości $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_\varrho$ ϱ-wartościowej funkcyi do symetrycznej grupy (s) swoich zmiennych. [art. 98.]. Zbadajmy teraz związek algebraiczny zachodzący między temi wartościami.

Jasnem jest, że każda symetryczna funkcya wszystkich wartości $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_\varrho$ będzie zarazem symetryczną funkcyą wszystkich zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$ wchodzących w φ_1. Stąd wynika, że gdy $c_1, c_2, ... c_n$ są elementarnemi funkcyami symetrycznemi zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$, to

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
S(\varphi_1) &= R_1(c_1, c_2, \ldots, c_n) = A_1 \\
S(\varphi_1 . \varphi_2) &= R_2(c_1, c_2, \ldots, c_n) = A_2 \\
&\vdots \\
\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n &= R_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = A_n,
\end{aligned}
$$

gdzie prawe strony tych równań są wymiernemi w $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Równanie

$$(2)\qquad \varphi^\varrho - A_1\varphi^{\varrho-1} + A_2\varphi^{\varrho-2} - \ldots \pm A_\varrho = 0$$

posiadać będzie pierwiastki $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$, a stąd twierdzenie:

I. *Wartości ϱ-wartościowej funkcyi są pierwiastkami równania stopnia ϱ^{go} o spółczynnikach wymiernych w funkcyach elementarnych symetrycznych o zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Pd. 1. Okazać, że 3 wartości funkcyi $\varphi_1 = x_1x_2 + x_3x_4$ związane są równaniem
$$\varphi^3 - c_2\varphi^2 + (c_1c_3 - 4c_4)\varphi - (c_1{}^2c_4 - 4c_2c_4 + c_3{}^2) = 0.$$

Pd. 2. Wyprowadzić równanie (2) funkcyi trzywartościowej $(x_2x_3 + x_1)$.

Spytajmy, czy i kiedy równanie (2) przejść może na równanie dwumienne. Gdy ten wypadek zachodzi, to mamy $\varphi^\varrho \pm A_\varrho = 0$, gdzie $\pm A_\varrho$ jest symetryczną funkcyą. Nazwijmy ją $-S$, to mamy związek:

$$(3)\qquad \varphi^\varrho = S.$$

a pytanie nasze możemy tak postawić: czy istnieją funkcye wielowartościowe, którychby potęgi były funkcyami symetrycznemi?

Niech ρ zawiera czynnik pierwszy p, tak, że $\rho = p.q$. Równanie (3) możemy wtedy napisać $(\varphi^p)^q = S$, a kładąc $\varphi^q = \psi$, mamy związek:

$$(4)\qquad \psi^p = S$$

z którego widzimy, że w wykładnikach prowadzących do funkcyj symetrycznych możemy się ograniczyć do liczb pierwszych. Ponieważ S już w całej symetrycznej grupie się nie zmienia, więc ψ ma wszystkich różnych wartości tylko p; są one:

$$(5)\qquad \psi,\ \psi\omega,\ \psi\omega^2, \ldots, \psi\omega^{p-1}$$

jeżeli ω jest jednym z p^{tych} pierwiastków jednostki, różnym od 1.

Funkcya ψ nie ma być funkcyą symetryczną; znajdzie się zatem zawsze jedno przestawienie n. p. (x_1x_2) zmieniające ψ na inną jej wartość (5). Połóżmyż wyraźnie $\psi = \psi(x_1x_2x_3\ldots)$ to mieć będziemy po zastosowaniu przestawienia (x_1x_2):

$$(6)\qquad \psi(x_2x_1x_3\ldots) = \omega^\mu \psi(x_1x_2x_3\ldots),$$

μ ma jednę z wartości $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Stosując do (6) znowu (x_1x_2), dostaniemy

$$\psi(x_2x_1x_3\ldots) = \omega^\mu \psi(x_2x_1x_3, \ldots) \text{ czyli } \psi(x_1x_2x_3\ldots) = \omega^{2\mu}\psi(x_1x_2x_3\ldots).$$

Z tego okazuje się, że $\omega^{2\mu} = 1$ być musi, a że równocześnie jest $\omega^p = 1$, i $\mu < p$, więc to się stać tylko tym sposobem może przy p pierwszem, że $\mu = 1$, a $p = 2$ położymy. Przy $p = 2$ wartości (5) redukują się do $\psi, -\psi$, a funkcya ψ jest widocznie półsymetryczną. Stąd wynika:

II. *Z wszystkich wielowartościowych funkcyj tylko półsymetryczne mają tę własność, że ich potęgi mogą być funkcyami symetrycznemi. Wykładniki potęg są tu parzyste.*

*

Po tym rezultacie najbliższem pytaniem, jakie się nasuwa, jest: **czy może zajść równanie** $\varphi^m = S_1 + \sqrt{\Delta} S_2$, $S_1 = 0$ lub $\neq 0$, albo **czy jest możliwa funkcya wielowartościowa** φ, **którejby potęga była funkcyą dwuwartościową**, a w szczególności półsymetryczną [art. 97. (5)]. I tu — jak w poprzednim przypadku — możemy się ograniczyć do wykładnika pierwszego, biorąc za punkt wyjścia równanie:

(6) $$\psi^p = S_1 + S_2\sqrt{\Delta}, \quad p \text{ liczba bezwzględnie pierwsza.}$$

Funkcya ψ nie może być widocznie funkcyą symetryczną.

Przyjmijmy, że jest dwuwartościową lub półsymetryczną, to w pierwszym razie — jak odrazu widać — każdy wykładnik pierwszy p, a w drugim każdy taki wykładnik z wyjątkiem $p = 2$ spełni już równanie (6).

Właśnie w przypadku dwóch tylko zmiennych x_1, x_2, $(n = 2)$, nie mamy innych funkcyj, jak symetryczne, dwuwartościowe i półsymetryczne. Dlatego — gdy $n = 2$ — to ψ i p do tych dwóch tylko przypadków odnieść trzeba.

Gdy $n \geqq 3$, to prawa strona równania (6) nie zmienia się w całej grupie półsymetrycznej t. j. w grupie, którą tu można określić jako zbiór **wszystkich** podstawień złożonych z cyklów 3^go^ rzędu [art. 95., tw. VI.]. Funkcya ψ przeciwnie nie będzie w tej grupie jednowartościową i w tych już substytucyach wykaże p wartości dających się przedstawić szeregiem (5). [Nie jest przez to wykluczone, że prócz tych wartości będzie funkcya ψ posiadać jeszcze i inne wartości, a to: dla substytucyj nie leżących już w grupie półsymetrycznej].

Z tego wynika, że już i między kołowemi substytucyami rzędu 3^go^ znajdą się takie, które ψ zmienią na inną wartość, zawartą w (5), inaczej bowiem byłaby funkcya ψ półsymetryczną, albo nawet symetryczną, co wykluczono.

Niech więc substytucya kołowa $(x_1 x_2 x_3)$ zmienia właśnie ψ na $\omega^\nu \psi$, to mamy:

(7) $$\psi(x_2 x_3 x_1 x_4 \ldots) = \omega^\nu \psi(x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots)$$

Po zastosowaniu tu znowu tej samej substytucyi dostaniemy:

$$\psi(x_3 x_1 x_2 x_4 \ldots) = \omega^\nu \psi(x_2 x_3 x_1 x_4 \ldots) = \omega^{2\nu} \psi(x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots).$$

Zastosujmy tu znowu tę samą substytucyę, to się okaże:

$$\psi(x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots) = \omega^{2\nu} \psi(x_2 x_3 x_1 x_4 \ldots), \text{ czyli podług (7): } \psi(x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots) = \omega^{3\nu} \psi(x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots)$$

Widocznie jest więc $\omega^{3\nu} = 1$; a że równocześnie także jest $\omega^p = 1$, a $\nu < p$, więc być musi $\nu = 1$ i $p = 3$. Funkcya ψ jest więc wielowartościową; jej wartości w grupie półsymetrycznej są: ψ, $\psi\omega$, $\psi\omega^2$, $\omega^3 = 1$, a

(8) $$\psi^3 = S_1 + S_2\sqrt{\Delta}.$$

W razie $n \geqq 5$ można będzie grupę półsymetryczną funkcyi ψ^p określić jako zbiór wszystkich substytucyj złożonych z cyklów 3^go^ albo 5^go^ rzędu Między cyklami 5^go^ rzędu znajdą się z pewnością takie, które ψ zmienią na inną wartość (5). Rozumując, jak wyżej, dostalibyśmy tu

$$\psi(x_1 x_2 \ldots) = \omega^{5\nu} \psi(x_1 x_2 \ldots),$$

skądby wynikło $\nu = 1$, $p = 5$ i $\psi^5 = S_1 + S_2\sqrt{\Delta}$.

Lecz to się sprzeciwia równaniu (8), które tu także ma istnieć, bo grupę półsymetryczną można było uważać także jako zbiór wszystkich substytucyj złożonych z cyklów 3^go^ rzędu. Stąd twierdzenie:

III. *Między funkcyami o 3 i 4 zmiennych istnieją funkcye wielowartościowe ψ o tej własności, że ψ^3 jest już funkcyą dwuwartościową, albo półsymetryczną. W pierwszym razie jest także ψ^q o **dowolnem** $q \equiv 0$ (mod. 3) dwuwartościową funkcyą, a w drugim jest ψ^q półsymetryczną tylko przy **nieparzystem** $q \equiv 0$ (mod. 3). Przy*

$n \geqq 5$ już takich funkcyj nie ma — chyba dwuwartościowe lub półsymetryczne. Z tych pierwsze podniesione do dowolnej potęgi, zostają dwuwartościowemi, drugie podniesione do nieparzystej potęgi, zostają półsymetrycznemi).

(Por. Pd. 4. i 5. w art. następnym).

103. Związek między funkcyami o tej samej grupie lub funkcyami, z których jedna należy do podgrupy drugiej. Zbadajmy teraz algebraiczny związek, jaki zachodzi między dwiema funkcyami φ_1, ψ_1, należącemi do tej samej grupy G o rzędzie r. Ich wielowartościowość ϱ jest ta sama $=\frac{n!}{r}$, a jeżeli substytucya $G\sigma_2$, $G\sigma_3$, ..., $G\sigma_\varrho$ [art. 98.] zmieniają φ_1 po porządku na φ_2, φ_3, ..., φ_ϱ, to te same substytucye dają po porządku także czem raz nowe wartości ψ_2, ψ_3, ... ψ_ϱ funkcyi ψ_1. Utwórzmy funkcyę:

$$\varphi_1{}^\lambda\psi_1+\varphi_2{}^\lambda\psi_2+...+\varphi_\varrho{}^\lambda\psi_\varrho=B_\lambda$$

gdzie $\lambda=0, 1, 2, ...$, to ta funkcya jest symetryczną we wszystkich zmiennych x_1, x_2, ..., x_n, a więc wymierną w c_1, c_2, ..., c_n, gdyż jakakolwiek substytucya zmieni w niej tylko porządek dodajników. Przy $\lambda=0, 1, 2, ..., \varrho-1$ mamy:

$$\begin{gathered}\psi_1+\psi_2+...+\psi_\varrho=B_0,\quad \varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+...+\varphi_\varrho\psi_\varrho=B_1,\\ \varphi_1{}^2\psi_1+\varphi_2{}^2\psi_2+...+\varphi_\varrho{}^2\psi_\varrho=B_2,\ ...,\ ....\\ ....\ \varphi_1{}^{\varrho-1}\psi_1+\varphi_2{}^{\varrho-1}\psi_2+...+\varphi_\varrho{}^{\varrho-1}\psi_\varrho=B_{\varrho-1}.\end{gathered}\tag{1}$$

Jest-to system ϱ liniowych równań w ϱ niewiadomych ψ_1, ψ_2, ..., ψ_ϱ. Z nich dostajemy:

$$\psi_1=\begin{vmatrix}B_0 & 1 & 1 & ...1\\ B_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & ...\varphi_\varrho\\ B_2 & \varphi_2{}^2 & \varphi_3{}^2 & ...\varphi_\varrho{}^2\\ \vdots & & & \\ B_{\varrho-1} & \varphi_2{}^{\varrho-1} & \varphi_3{}^{\varrho-1} & ...\varphi_\varrho{}^{\varrho-1}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & 1 & ...1\\ \varphi_1 & \varphi_2 & ...\varphi_\varrho\\ \varphi_1{}^2 & \varphi_2{}^2 & ...\varphi_\varrho{}^2\\ \vdots & & \\ \varphi_1{}^{\varrho-1} & \varphi_3{}^{\varrho-1} & ...\varphi_\varrho{}^{\varrho-1}\end{vmatrix}.$$

Mianownik $\sqrt{\Delta_\varphi}$ [art. 97.] różny jest od zera, gdyż φ_1, φ_2, ..., φ_ϱ są **w s z y s t k i e** różne między sobą. Mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{\Delta_\varphi}$, dostajemy:

$$\psi_1=\frac{\begin{vmatrix}B_0 & 1 & 1 & ...1\\ B_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & ...\varphi_\varrho\\ B_2 & \varphi_2{}^2 & \varphi_3{}^2 & ...\varphi_\varrho{}^2\\ \vdots & & & \\ B_{\varrho-1} & \varphi_2{}^{\varrho-1} & \varphi_3{}^{\varrho-1} & ...\varphi_\varrho{}^{\varrho-1}\end{vmatrix} . \begin{vmatrix}1 & 1 & ...1\\ \varphi_1 & \varphi_2 & ...\varphi_\varrho\\ \varphi_1{}^2 & \varphi_2{}^2 & ...\varphi_\varrho{}^2\\ \vdots & & \\ \varphi_1{}^{\varrho-1} & \varphi_2{}^{\varrho-1} & ...\varphi_\varrho{}^{\varrho-1}\end{vmatrix}}{\Delta_\varphi}$$

Licznik jest tutaj wymierną całkowitą funkcyą $(\varrho-1)^{go}$ stopnia w φ_1, a symetryczną funkcyą w φ_2, φ_3, ..., φ_ϱ, gdyż każde przestawienie $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$, $\alpha \lesseqgtr \beta = 2, 3, \ldots, \varrho$, wywołuje równoczesną zmianę znaku w obydwóch wyznacznikach. Mianownik Δ_φ jako symetryczną funkcyą w $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$ można będzie zmienić na wymierną funkcyę (całkowitą) w $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Dostaniemy więc:

$$(2) \qquad \psi_1 = \frac{C'_0 \varphi_1^{\varrho-1} + C'_1 \varphi_1^{\varrho-2} + \ldots + C'_{\varrho-1}}{\Delta_\varphi}.$$

Lecz $C'_0, C'_1, \ldots, C'_{\varrho-1}$ jako funkcye symetryczne (wymierne, całkowite) w $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\varrho$ wyrażą się wymiernie, całkowicie przez spółczynniki równania:

$$[\varphi^\varrho - A_1 \varphi^{\varrho-1} + A_2 \varphi^{\varrho-2} - \ldots \pm A_\varrho] / (\varphi - \varphi_1) = 0$$

i będą wymiernemi całkowitemi funkcyami w $\varphi_1, c_1, c_2, \ldots, c_n$ [art. 88., (1)].

Uwzględniając to, mieć będziemy z (2):

$$(3) \qquad \psi_1 = (C_0 \varphi_1^m + C_1 \varphi_1^{m-1} + \ldots + C_m) : \Delta_\varphi,$$

gdzie w ogólności $m \geq \varrho - 1$. Ten kształt jako wymierną funkcyę jednego tylko pierwiastka φ, równania $\varphi^\varrho - A_1 \varphi^{\varrho-1} + \ldots \pm A_\varrho = 0$ można dalej — w razie $m > \varrho - 1$ zredukować do funkcyi $\leqq (\varrho - 1)$ [art. 93., tw. II.]. Stąd, gdy zważymy, że w całem powyższem rozumowaniu φ_1 z ψ_1 pomieniać można — dostajemy twierdzenie:

I. *Gdy dwie funkcye należą do jednej grupy, to każda z nich jest wymierną (całkowitą) funkcyą drugiej.*

Gdy φ — jak przódy — ma grupę G, a utworzymy wymierną funkcyę $R(\varphi)$, to funkcya

$$(4) \qquad \psi = R(\varphi)$$

w całej grupie G z pewnością się nie zmienia. Lecz prócz grupy G może ψ mieć jeszcze inne substytucye, za których zastosowaniem pozostaje niezmienioną. Te wraz z G tworzą jej grupę Γ, a grupa G okazuje się wtedy podgrupą grupy Γ. Gdy jednak równocześnie jest $\psi = R(\varphi)$ i $\varphi = R_1(\psi)$, to widocznie G ma być podgrupą w Γ, a Γ ma być równocześnie podgrupą w G. To jest zaś tylko tak możliwe, że G, Γ są identycznemi grupami. Stąd twierdzenie:

II. *Gdy mamy dwie funkcye, a z nich każdą można wyrazić wymiernie przez drugą, to obie funkcye należą do tej samej grupy. Jestto odwrócenie twierdzenia I.*

Pd. 1. Funkcye $\varphi = S_1 + \sqrt{\Delta} \cdot S_2$, $\psi = S_1' + \sqrt{\Delta} S_2'$ należą obie do jednej, półsymetrycznej grupy, wyrazić ψ przez φ?

[Odp. $\psi = \frac{(S'_1 S_2 - S_1 S'_2) + S'_2 \varphi}{S_2}$].

Pd. 2. Funkcye: $\varphi = x_1 x_2 + x_3$, $\psi = x_1^2 x_2^2 + x_3^2$ należą obie do jednej grupy; wyrazić ψ przez φ?

[Odp. $\psi = \varphi^2 - 2c_3$, $c_3 = x_1 x_2 x_3$].

Pd. 3. Funkcya $\varphi = \sqrt{\Delta}$. S jest półsymetryczną, a utworzona z niej funkcya $\psi = \varphi^2$ ma już grupę symetryczną.

Pd. 4. Funkcya $\varphi = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$, $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$, ma grupę $G = s_1 = 1$; okazać, że $\psi = \varphi^3$ ma już grupę półsymetryczną.

Pd. 5. Funkcya $\varphi = (x_1x_2 + x_3x_4) + \omega(x_1x_3 + x_2x_4) + \omega^2(x_1x_4 + x_2x_3)$ ma grupę $G = [1, (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3)]$; okazać, że $\psi = \varphi^3$ jest już funkcyą półsymetryczną.

Z założenia związku (4) wynikło, że grupa funkcyi φ jest podgrupą grupy funkcyi ψ. Wyjdźmyż teraz z założenia odwrotnego: Niech Γ będzie grupą ϱ-wartościowej funkcyi $\psi = \psi_1$, a G będąc podgrupą grupy Γ, niech należy do $m\varrho$-wartościowej funkcyi $\varphi = \varphi_1$. Funkcya φ_1 niech ma w grupie Γ wartość $\varphi_1 = \varphi_{11}$, a dalej $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \ldots, \varphi_{1m}$, a za zastosowaniem podstawień $\Gamma\sigma_2, \Gamma\sigma_3, \ldots, \Gamma\sigma_\varrho$ [art. 98.] niech system wartości:

$$(a)\quad \left|\begin{array}{l} \psi_1;\ \varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{1,m} \\ \psi_2;\ \varphi_{21}, \varphi_{22}, \ldots, \varphi_{2,m} \\ \vdots \\ \psi_\varrho;\ \varphi_{\varrho 1}, \varphi_{\varrho 2}, \ldots, \varphi_{\varrho,m}. \end{array}\right.$$

przechodzi na takie systemy:

Za zastosowaniem dowolnej substytucyi s do wszystkich systemów (a) zmieni się tylko ich uporządkowanie, przyczem równocześnie i uporządkowanie wartości φ w poszczególnych systemach przejdzie na inne. Wskutek tego wyrażenie:

$$(5)\quad \begin{aligned} &(\varphi_{11}{}^\lambda + \varphi_{12}{}^\lambda + \ldots + \varphi_{1m})\psi_1 + (\varphi_{21}{}^\lambda + \varphi_{22}{}^\lambda + \ldots + \varphi_{2m}{}^\lambda)\psi_2 + \\ &\ldots + (\varphi_{\varrho 1}{}^\lambda + \varphi_{\varrho 2}{}^\lambda + \ldots + \varphi_{\varrho m}{}^\lambda)\psi_\varrho = B_\lambda \end{aligned}$$

będzie symetryczną funkcyą zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a więc wymierną funkcyą w $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Napiszmy związek (5) dla $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \varrho - 1$, nie ściągając wyrazów o wspólnym czynniku ψ_k, to dostaniemy równania:

$$\begin{aligned} \psi_1 + \psi_1 + \ldots + \psi_1 + \ldots + \psi_\varrho + \psi_\varrho + \ldots + \psi_\varrho &= B_0 \\ \varphi_{11}\psi_1 + \varphi_{12}\psi_1 + \ldots + \varphi_{1m}\psi_1 + \ldots + \varphi_{\varrho 1}\psi_\varrho + \varphi_{\varrho 2}\psi_\varrho + \ldots + \varphi_{\varrho m}\psi_\varrho &= B_1 \\ \varphi_{11}{}^2\psi_1 + \varphi_{12}{}^2\psi_1 + \ldots + \varphi_{1m}{}^2\psi_1 + \ldots + \varphi_{\varrho 1}{}^2\psi_\varrho + \varphi_{\varrho 2}{}^2\psi_\varrho + \ldots + \varphi_{\varrho m}{}^2\psi_\varrho &= B_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ \varphi_{11}{}^{\varrho-1}\psi_1 \varphi_{12}{}^{\varrho-1}\psi_1 + \ldots + \varphi_{1m}{}^{\varrho-1}\psi_2 + \ldots + \varphi_{\varrho 1}{}^{\varrho-1}\psi_\varrho + \varphi_{\varrho 2}{}^{\varrho-1}\psi_\varrho + & \\ \ldots + \varphi_{\varrho m}{}^{\varrho-1}\psi_\varrho &= B_{\varrho-1}. \end{aligned}$$

Wyznaczając z nich funkcyę ψ_1, stojącą w pierwszym wyrazie każdego z tych równań dojdziemy — na podstawie takiego samego rozumowania, jak w rozwiązywaniu systemu (1) do związku:

$$\psi_1 = \frac{C_0\varphi_1{}^\mu + C_2\varphi_1{}^{\mu-1} + \ldots + C_\mu}{\Delta} = R(\varphi_1)$$

w którym $\mu \leqq m\varrho - 1$, $\varphi_1 = \varphi_{11}$, a Δ_φ odnosi się do wszystkich $m\varrho$ wartości funkcyi φ. Stąd twierdzenie:

III. *Gdy grupa funkcyi φ jest podgrupą funkcyi ψ, to ψ można wymierne wyrazić przez φ.*

Gdy Γ — jak przódy — jest grupą funkcyi ψ_1, a w tej grupie φ_1 ma m wartości $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, to każda symetryczna funkcya $S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ należy już do grupy Γ i jest — według I. — wymierną funkcyą funkcyi ψ_1. W szczególności mieć będziemy:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_m = R_1(\psi_1),\ \varphi_1\varphi_2 + \ldots = R_2(\psi_1), \ldots, \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_m = R_m(\psi_1)$$

($R_1, R_2, \ldots$ są znakami wymiernych funkcyj), a stąd wynika, że równanie:

$$\varphi^m - R_1(\psi_1)\varphi^{m-1} + R_2(\psi_1)\varphi^{m-2} - \ldots \pm R_m(\psi) = 0 \tag{6}$$

ma pierwiastki $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$. To znaczy:

IV. *Gdy φ ma m wartości w grupie Γ należącej do funkcyi ψ_1, to te wartości są pierwiastkami równania o spółczynnikach wymiernych w ψ_1.*

Przyjmijmy, że grupa G jest wyróżnioną (częściową) grupą w Γ, a więc:

(7) $\Gamma^{-1} G \Gamma = G$. Do wartości $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ niech należą odpowiednio grupy $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_m$, albo wyraźnie:

$$G,\ \sigma_2^{-1} G \sigma_2,\ \sigma_3^{-1} G \sigma_3, \ldots, \sigma_m^{-1} G \sigma_m, \tag{8}$$

gdzie substytucye $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_m$ zmieniają po porządku φ_1 na $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m$.

Wskutek (7) będzie każda z grup (8) wprost grupą G, tak, że $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ będą wszystkie do jednej należeć grupy. To znaczy:

V. *Gdy ψ_1 posiada grupę Γ, a φ_1 w tej grupie jest m-wartościowe, gdy przytem grupa G jest wyróżnioną częściową w Γ, to wszystkie wartości $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ mają tę samą grupę G, a $(m-1)$ z nich można wyrazić wymiernie przez jedną n. p.*

$$\varphi_1 = \varphi_1,\ \varphi_2 = R_2(\varphi_1),\ \varphi_3 = R_3(\varphi_1), \ldots, \varphi_m = R_m(\varphi_1).$$

104. Gatunki funkcyj. Zawieranie się gatunku w gatunku. Gatunki sprzężone. Gatunek Galois. Wszystkie funkcye $f, g, h, \ldots$ należące do jednej grupy G określamy jako j e d e n g a t u n e k funkcyj i naznaczamy go przez $G(f, g, h, \ldots)$. Jedną funkcyą f należącą do takiego gatunku określony jest cały dany gatunek, do którego f należy (gatunek funkcyi f), gdyż

$$g = R_1(f),\ h = R_2(f), \ldots \text{ [art. poprzedz.].}$$

Lecz prócz tego określone są jeszcze i wszystkie funkcye $f', g', h', \ldots$ o dowolnej grupie Γ takiej, że się w niej G częściowo zawiera; określone więc są gatunki $\Gamma f'. g', h', \ldots)$, a to wskutek związków

$$f' = R'(f),\ g' = R'_1(f),\ h' = R'_2(f), \ldots$$

O takich gatunkach $\Gamma(f', g', h', \ldots)$ mówimy, że się one zawierają w gatunku $G(f, g, h, \ldots)$, tak, że z a w i e r a n i e s i ę g r u p y w g r u p i e j e s t w p r o s t p r z e c i w n e z z a w i e r a n i e m s i ę g a t u n k u w g a t u n k u.

Gatunki $G_1(\varphi_1,...)$, $G_2(\varphi_2,...)$, ..., $G_\varrho(\varphi_\varrho,...)$ do których po porządku należą wartości ϱ-wartościowej funkcyi nazywamy **sprzężonymi**.

Gdy danych jest kilka funkcyj f, g', h'',... należących do różnych gatunków (do różnych grup: F, G', H'',...), a utwórzymy funkcyę $\omega = af + bg' + ch'' + ...$, to ta funkcya posiada jako grupę: wspólną grupę częściową grup F, G', H'',... i należy wskutek tego do gatunku zawierającego się równocześnie i w gatunku $F(f,...)$, i w gatunku $G'(g',...)$ i w gatunku $H''(h'',...)$... Stąd wynika, że

$$f = R(\omega),\ g' = R'(\omega),\ h'' = R''(\omega), ...,$$ a to znaczy:

I. *Każdą z dowolnie danych funkcyj o różnych grupach można zawsze wyrazić wymiernie przez jedną, liniowo z nich utworzoną funkcyę która dane funkcye w swym gatunku zawiera.*

Funkcya $ax_1 + bx_2 + cx_3 + ... + sx_n = t$ jest — w razie różnych między sobą $a, b, c, ..., s$ — funkcyą $n!$-wartościową i posiada grupę $s_1 = 1$. Lecz ta grupa we wszystkich się zawiera, a stąd wynika:

II. *Gatunek funkcyi t zawiera się we wszystkich możliwych gatunkach, a każda dowolna funkcya o dowolnej grupie (dowolnego gatunku) da się wymiernie wyrazić przez t. Gatunek funkcyi t nazywamy gatunkiem Galois*).*

ROZDZIAŁ VIII.

O obrotach wielościanów umiarowych i ich funkcyach.

105. Grupa obrotów dwuścianu. Określając grupy wspomnieliśmy, że pewne prawidłowe ruchy geometrycznych regularnych figur (ich obroty) dadzą się ściśle sprządz z pewnemi szczególnemi grupami. Otóż właśnie przypadki zasadniczego znaczenia**) rozbierzmy tu bliżej.

---

*) Dalszy rozwój teoryi substytucyj i ich zastosowań znajdzie w dziele E. Netto'na *„Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra“*. (Lipsk 1882), podług którego w tym rozdziale teoryę opracowano.

Por. dalej. C. Jordan. *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paryż 1870). Nie tak obszernie jak w tych dwóch przytoczonych dziełach traktuje rzecz o substytucyach Jul. Petersen w *„Theorie der algebraischen Gleichungen“* (Kopenhaga 1878). Por. także: H. Weber. *Lehrbuch der Algebra* T. I., II. (Brunszwik 1895). É. Picard. *Traité d'Analyse.* T. 3. Ch. 16.

**) F. Klein. *Vorlesungen über das Ikosaëder* (1884) str. 5.

Gdy na danej płaszczyźnie leży regularny n-bok o wierzchołkach x_1, x_2. ..., x_n, wpadających odpowiednio w punkta A_1, A_2, ..., A_n tej płaszczyzny, to cały zbiór (pojedyńczych, lub złożonych) obrotów, zmieniających położenie n-boku tak, że wierzchołki jego we wszystkich możliwych sposobach wpadają znowu w punkta A_1, A_2, ..., A_n, — a każde położenie występuje raz tylko — tworzy grupę. Rząd takiej grupy jest równy ilości wszystkich różnych między sobą możliwych położeń rozważanego n-boku. Taki rząd musi tu być $< n!$ jeżeli $n > 2$, t. j. jeżeli n-bok nie redukuje się do pary punktów.

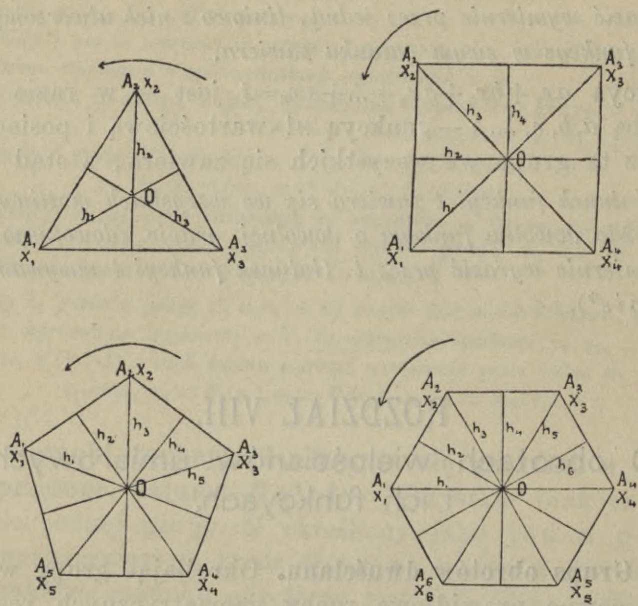


Fig. 16.

Przez środek 0 (fig. 16.) danego n-boku poprowadzimy oś d prostopadłą do jego płaszczyzny. Obracając n-bok około d o kąty

$$(\alpha) \qquad 0^0,\ \frac{2\pi}{n},\ 2.\frac{2\pi}{n},\ \ldots,\ (n-1)\,\frac{2\pi}{n}$$

w kierunku, wskazanym przez strzałki, dostaniemy po porządku położenia, w których punkta

$$\begin{array}{lllllll}
 & & A_1, & A_2, & A_3, & \ldots, & A_{n-1}, & A_n \\
\text{wpadają wierzchołki} & (1) & x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, & x_{n-1}, & x_n \\
 & (2) & x_2, & x_3, & x_4, & \ldots, & x_n, & x_1 \\
 & (3) & x_3, & x_4, & x_5, & \ldots, & x_1, & x_2 \\
 & \vdots & & & & & & \\
 & (n) & x_n, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-2}, & x_{n-1}.
\end{array}$$

Zauważmy kołową substytucyę $s=(x_1 x_2 ... x_n)$, to przejścia z położenia (porządku) (1) do położeń (porządków) (1), (2), (3), ..., (n) określą substytucye:

(a) $$s^0, s^1, s^2, ..., s^{n-1}.$$

Niemi będzie też można naznaczać obroty (a), które do żądanej grupy niezawodnie zaliczyć trzeba.

Lecz każdy regularny n-bok bez względu czy ma parzystą, czy nieparzystą liczbę boków posiada n osi symetryi $h_1, h_2, h_3, ..., h_n$ Obrót jego (h_α) o 180^0 około osi symetryi h_α da pewne uporządkowanie wierzchołków. To uporządkowanie, a równocześnie i obrót (h_α) można naznaczyć wypadającą stąd substytucyą t_α. Ponieważ $\alpha=1, 2, 3, ..., n$, więc mamy prócz (a) jeszcze obroty:

(b) $$t_1, t_2, t_3, ..., t_n,$$

które również do żądanej grupy zaliczyć trzeba, jako różne między sobą i różne od wszystkich substytucyj (a).

Po każdem t_α mamy takie uporządkowanie wierzchołków, że przechodząc przez $x_1, x_2, ..., x_n$ okrążamy obwód n-boku w przeciwnym kierunku do kierunku wskazanym przez porządek $A_1, A_2, ..., A_n$. Po każdem s^μ przeciwnie kierunki wskazane przez $x_1, x_2, ..., x_n$, i $A_1, A_2, ..., A_n$ są zgodne.

Każde $t_\alpha{}^2 = 1$, gdyż dwa półobroty około tej samej osi h_α wprowadzają n-bok do pierwotnego położenia: każda substytucya t_α jest więc 2go stopnia.

W (a), (b) mamy już wszystkie możliwe żądane obroty, albo substytucye określające te obroty.

Tworzą one już grupę:

(A) $$s^0, s^1, ... s^{n-1}; \ t_1, t_2, ..., t_n,$$

której rząd $=2n$. Taki n-bok nazywa Klein krótko dwuścianem, uważając go za bryłę nieskończenie płaską o dwóch ścianach (stronach).

Wybierzmy jedną substytucyę t_α i utwórzmy szereg substytucyj:

(c) $$t_\alpha, \ s t_\alpha, \ s^2 t_\alpha, ..., s^{n-1} t_\alpha$$

Są one wszystkie między sobą różne, gdyż przyjmując $s^\lambda t_\alpha = s^\mu t_\alpha$, $\lambda \gtreqless \mu$, mielibyśmy także $s^\lambda t_\alpha t_\alpha{}^{-1} = s^\mu t_\alpha t_\alpha{}^{-1}$ czyli $s^\lambda = s^\mu$ co przy $\lambda \gtreqless \mu$ jest niemożliwe.

Substytucye (c) określają dalej półobroty około osi symetryi, bo powodują, że po każdej z nich porządek $x_1, x_2, ..., x_n$ jest przeciwny porządkowi $A_1, A_2, ..., A_n$; a że są wszystkie między sobą różne, więc są wprost substytucyami $t_1, t_2, ..., t_n$ w pewnem uporządkowaniu. Stąd wynika:

Grupę obrotów dwuścianu przedstawić można substytucyami:

$$(A') \qquad 1, s, s^2, ..., s^{n-1};\ t_\alpha, st_\alpha, s^2t_\alpha, ..., s^{n-1}t_\alpha.$$

Pierwsze z tych substytucyj tworzą grupę cykliczną.

Pd. 1. Grupą równobocznego trójkąta będzie podług (A):

$$1,\ (x_1x_2x_3),\ (x_1x_3x_2),\ (x_1x_2),\ (x_2x_3),\ (x_3x_1).$$

Utworzyć tę samą grupę podług (A').

Pd. 2. Grupa kwadratu utworzona podług (A) ma postać:

$$1,\ (x_1x_2x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4x_3x_2),$$
$$(x_2x_4),\ (x_1x_3),\ (x_1x_4)(x_2x_3),\ (x_1x_2)(x_3x_4).$$

Pd. 3. Utworzyć grupę pięcioboku i sześcioboku regularnego.

106. Grupa czwórki. Szereg złożenia grupy czwórki i grupy dwuścianu. Wyobraźmy sobie kulę z kołem równikowem, w które wpisano regularny n-bok $(x_1, x_2, ..., x_n)$, a której bieguny naznaczymy przez P, P'. (fig. 17. $n=4$). Płaszczyzny $PP'h_\alpha$, $\alpha=1, 2, ..., n$, położone przez oś kuli PP' i przez każdą oś symetryi h_α, podzielą razem z płaszczyzną równikową całą powierzchnię kuli na $4n$ trójkątów sferycznych równoramiennych o kątach przy równiku wynoszących $\frac{\pi}{2}$, a o kątach $=\frac{\pi}{n}$ przy biegunach.

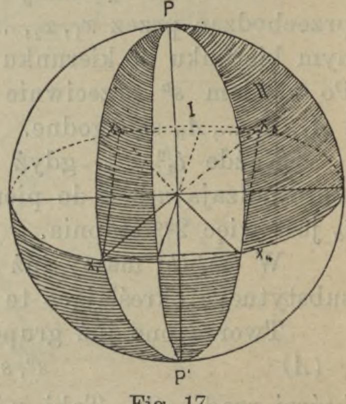


Fig. 17.

Dla łatwiejszego orientowania się zróbmy pola tych trójkątów naprzemian to jasne to ciemne. Pierwsze z nich naznaczmy przez $\mathrm{I}, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, ..., \mathrm{I}_{2n-1}$, drugie zaś przez $\mathrm{II}, \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, ..., \mathrm{II}_{2n-1}$ (na razie o dowolnym porządku). Zauważmy jeden trójkąt jasny (trójkąt I.), to gdy równocześnie z obrotami grupy n-boku obracamy i stale z nią połączoną kulę, miejsce trójkąta I zajmować będą po porządku wszystkie trójkąty jasne. Gdy substytucya σ $(=s^\mu$, albo $=s^\mu t_\alpha)$ wyjęta z grupy daje obrót sprowadzający trójkąt I_ϱ na miejsce trójkątu I, to I_ϱ nazwiemy I_σ, a trzymając się tego oznaczenia możemy wszystkie trójkąty jasne nazwać:

$$(1) \qquad \mathrm{I}_{\sigma^\mu},\ \mathrm{I}_{s^\mu t_\alpha},\ \mu=0, 1, 2, ..., n-1.$$

Podobnie i wszystkie trójkąty ciemne naznaczymy przez

(2) II_s^μ, $II_s^\mu t_\alpha$, $\mu=0, 1, 2, ..., n-1$.

Porządek trójkątów tak w (1) jak w (2) zależy tylko od pierwszego obranego trójkąta, jeżeli substytucyj grupy już zawsze w pewnym ustalonym porządku używamy.

Gdy dwa sąsiadujące bokiem trójkąty (I+II) weźmiemy pod uwagę, to za obrotem wskazanym przez substytucyę σ miejsce ich zajmie również para trójkątów przylegających do siebie bokiem. Gdy tę parę nazwiemy $(I+II)_\sigma$, to jasny trójkąt I_σ padnie zawsze na jasny trójkąt I, ciemny II_σ na ciemny trójkąt II a obszary naznaczone przez $(I+II)_s^\mu$, $(I+II)_s^\mu t_\alpha$, albo krócej przez

(3) (s^μ), $(s^\mu t_\alpha)$, $\mu=0, 1, 2, ..., \overline{n-1}$,

wypełniają całą powierzchnię kuli.

Taką obraną parę (I+II), która naodwrót położeniami swojemi podczas obrotów całej grupy wypełni całą powierzchnię kuli nazywamy zasadniczym obszarem, albo zasadniczym zakresem*).

To łączenie obrotów n-boku z równoczesnymi obrotami kuli stale z nim połączonej i dzielenie powierzchni tej kuli na trójkąty dozwoli teraz utworzyć także grupę złożoną z $2n=4$ obrotów i w przypadku $n=2$. Niech bowiem (fig. 18.) x_1, x_2 będą końcowymi punktami średnicy koła równikowego. Samą średnicę $x_1x_2=h_1$ uważać trzeba za jedyną przekątnię dwuboku $(x_1x_2x_1)$, a więc za jego jedną oś symetryi. Drugą jego osią symetryi będzie prosta $QR=h_2$, prostopadła do x_1x_2, a przechodząca przez środek koła. Płaszczyzny $PP'h_1$, $PP'h_2$ wraz z płaszczyzną równikową podzielą kulę na $4.2=8$ trójkątów.

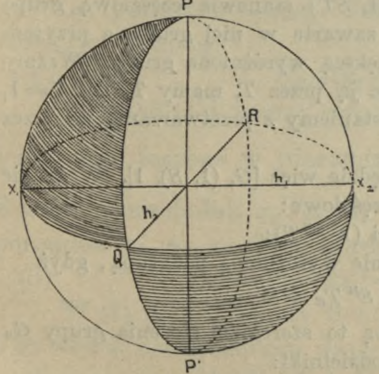


Fig. 18.

Naznaczmy obrót o kąt π około osi PP' przez S, a półobrót około h_1 (lub h_2) przez T to przez obroty

(B) $1, S, T, ST$

miejsce dowolnego obszaru (I+II) zajmą po porządku trzy inne

*) U Niemców „*Fundamentalbereich*, u Francuzów „*région générateur*“.

takie pary, które razem z obraną wypełniają całą powierzchnię kuli. Przytem — jeżeli T jest obrotem około h_1 (lub h_2) — to ST jest obrotem około h_2 (lub h_1); S, T, ST są o peryodzie 2.

Obroty (B) jako obroty regularnie podzielonej kuli są grupą obrotów, którą krótko czwórką, albo grupą czwórki nazwiemy. Określić jej jednak grupą podstawień dwóch elementów x_1, x_2 jest niemożliwem.

Przechodząc bowiem do takiej grupy trzeba:

1 brać w znaczeniu podstawień $\begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} = 1$

S „ „ „ „ $(x_1 x_2)$

T „ „ „ „ 1 lub $(x_1 x_2)$

według tego czy T jest obrotem około h_1 lub h_2. Wtedy odpowiednio trzeba ST określić jako $(x_1 x_2)$ lub 1. Taki jednak zbiór podstawień nie jest nigdy grupą. Przy $n > 2$ jest przeciwnie grupa obrotów zarazem grupą podstawień wierzchołków n-boku. Znacząc odtąd obroty dużemi literami dostajemy jako grupę n-boku, $(n \geqq 2)$:

$$(B') \qquad S^{\mu},\ S^{\mu}T,\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

gdzie S jest obrotem kuli około jej osi PP' o kąt $\frac{2\pi}{n}$, T jej półobrotem około którejkolwiek z osi symetryi n-boku (dwuścianu).

Łatwo spostrzedz, że wszystkie obroty w grupie czwórki są z sobą przemienne i że każde 2 obroty: $(1, S)$, $(1, T)$, $(1, ST)$ stanowią częściową grupę grupy czwórki G. Są-to zarazem największe zawarte w niej grupy, a przytem każda z nich jest wyróżnioną, a więc i największą wyróżnioną grupy. [Weźmy n. p. grupę $(1, S)$ pod uwagę, to przetwarzając ją przez T, mamy $T^{-1}.1.T = 1$, $T^{-1}ST = TST = STT = S$; ten sam rezultat dostaniemy z przetwarzania jej przez S lub ST].

Szeregiem złożenia grupy czwórki G będzie więc $[G, (1, S), 1]$. W grupie dwuścianu G_n, $(n > 2)$, znajdują się 2 grupy częściowe:

$$H_n = (1, S, S^2, \ldots, S^{-1}) \text{ i } (1, S^{\mu}T);$$

z nich pierwsza jest największą, a równocześnie wyróżnioną podgrupą, gdyż

$$S^{-\alpha} S^{\mu} S^{\alpha} = S^{\mu}, \text{ a } T_{\alpha}^{-1} S^{\mu} T_{\alpha} = S^{\mu}.$$

Gdy n jest bezwzględnie pierwszą liczbą to szeregiem złożenia grupy G_n będzie $[G_n, H_n, 1]$. W razie, gdy n posiada podzielniki:

$$1,\ d_1,\ d_1.d_2,\ d_1 d_2 d_3,\ \ldots \text{ tak, że}$$
$$n = 1.n,\ d_1 r_1,\ d_1 d_2 r_2,\ d_1 d_2 d_3 r_3, \ldots$$

to w H_n zawierać się będą podgrupy

$$H_{r_1} = (1, s^{d_1}, s^{2d_1}, \ldots, s^{d_1(r_1-1)})$$
$$H_{r_2} = (1, s^{d_1 d_2}, s^{2d_1 d_2}, \ldots, s^{d_1 d_2 (r_2-1)}),$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

a każda następna będzie największą wyróżnioną bezpośrednio ją poprzedzającej. Na szereg złożenia grupy G_n dostaniemy więc $[G_n, H_n, H_{r_1}, H_{r_2}, \ldots, 1.]$.

107. Grupa obrotów czworościanu umiarowego. Izomorfizm. Przejdźmy do regularnych wielościanów, które sobie wyobrażamy wpisane w kulę i z nią stale połączone.

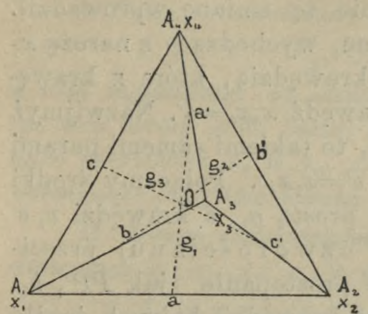


Fig. 19.

Czworościan o narożach x_1, x_2, x_3, x_4 (fig. 19.) wpadających w punkta A_1, A_2, A_3, A_4 zajmując za pomocą obrotów znowu tą samą, 4 ścianami zamkniętą przestrzeń $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ może przedewszystkiem takie mieć położenia:

I⁰) Wierzchołek x_α ma pozostać w A_α.

α) Nie dokonywamy żadnego obrotu; każde więc x, $\alpha=1$ 2, 3, 4, pozostaje na swojem miejscu, a to możemy naznaczyć identyczną substytucyą:

(1) $$\begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4 \\ x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4 \end{pmatrix} = 1.$$

β) około wysokości h_α czworościanu wychodzącej z naroża x_α dokonywamy obrotu o kąt $\frac{2\pi}{3}$. Każdy z pozostałych wierzchołków x_β, x_γ, x_δ ściany przeciwległej wierzchołkowi x_α przesunie się o jeden, tworząc porządek $x_\gamma x_\delta x_\beta$. Taki obrót można więc naznaczyć substytucyą kołową:

(2) $$U_\alpha = (x_\beta x_\gamma x_\delta), \ \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

γ) Około tej samej wysokości h_α dokonywamy — gdy czworościan jest jeszcze w pierwotnem położeniu — obrotu o kąt $2 . \frac{2\pi}{3}$. Każdy wierzchołek x_β, x_γ, x_δ przesunie się wtedy o dwa, tworząc porządek x_δ, x_β, x_γ. Taki obrót można będzie naznaczyć substytucyą

(3) $$U_\alpha^2 = (x_\beta x_\gamma x_\delta)^2 = (x_\delta x_\beta x_\gamma), \ \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

W (1), (2), (3), mamy 9 różnych między sobą żądanych obrotów czworościanu dających się określić substytucyami:

(4) $$1, U_1, U_1^2, U_2, U_2^2, U_3, U_3^2, U_4, U_4^2.$$

Te wszystkie substytucye — wyjąwszy identycznej — są o peryodzie 3, a oprócz położeń niemi osiągniętych nie znajdziemy już żadnego, w któremby przynajmniej jedno z naroży x_α zatrzymało pierwotne swe położenia A_α*).

*) Gdy bowiem mimo obrotów ma x_α pozostać w $A_\alpha = x_\alpha$, to te obroty mogą być wyłącznie około wysokości h_α. (Czworościan ma 4 wysokości $h_1 h_2 h_3 h_4$).

II⁰) Aby naroże x_β, $\beta=1, 2, 3, 4$ zajęło położenie punktu $A_\alpha=x_\alpha$, $\alpha \gtrless \beta$, $\alpha=1, 2, 3, 4$, musimy się przedewszystkiem postarać o jakikolwiek obrót, któryby właśnie tę zmianę wprowadził. Naznaczmyż krawędzie czworościanu, wychodzące z naroża x_1 przez $a=x_1x_2$, $b=x_1x_3$, $c=x_1x_4$. Jedyną krawędzią, która z krawędzią a wspólnego naroża nie ma, jest krawędź $x_3x_4=a'$. Nazwijmyż parę a, a' parą krawędzi przeciwległych, to takiemi samemi parami są jeszcze: ($b=x_1x_3$, $b'=x_2x_4$) i ($c=x_1x_4$, $c'=x_2x_3$). Połączmy środki krawędzi a, a' prostą g_1, krawędzi b, b' prostą g_2, a krawędzi c, c' prostą g_3, to te 3 proste (środkowe czworościanu) przecinają się w jego środku 0, są do siebie prostopadłe (jak PP', h_1, h_2 w grupie czwórki) i prostopadłe do krawędzi, których środki ze sobą łączą. Dalej: pary płaszczyzn (g_1a), (g_1a'), ... są do siebie prostopadłe.

Obrót o kąt π około g_1 wprowadzi równocześnie przestawienia (x_1x_2), (x_3x_4) [por. fig. 19.] i da się określić substytucyą:

(5) $$S=(x_1x_2)(x_3x_4).$$

Obrót o 2π daje już pierwotne położenie a więc $s^2=1$. Obrót o kąt π około g_2 wprowadzi przestawienia (x_1x_3), (x_2x_4) i da się określić substytucyą:

(6) $$T=(x_1x_3)(x_2x_4),\quad T^2=1.$$

Obrót wreszcie o kąt π około g_3 da równocześnie przestawienia (x_1x_4), (x_2x_3) i określi się substytucyą:

(7) $$Z=(x_1x_4)(x_2x_3),\quad Z^2=1.$$

Lecz obroty S, T, Z są tej samej natury, co nieidentyczne obroty czwórki, a wskutek tego mamy $Z=ST$, co zresztą i składaniem podstawień S, T sprawdzić można. Przy tem zauważyć trzeba że tu podstawienia (5), (6), (7) określające obroty S, T, ST będą wszystkie między sobą różne, a 1, S, T, ST jest tu grupą nie tylko obrotów ale i substytucyj, co przy dwóch elementach nie miało miejsca.

Po obrotach S, T, ST zajmuje miejsce naroża x_1, po porządku naroże x_2, x_3, x_4, co widać z przestawień wchodzących w (5), (6), (7).

Po obrocie S pozostanie x_2 w miejscu x_1, choć dokonamy jeszcze obrotów, U_2, $U_2{}^2$, a więc utworzymy złożone obroty SU, $SU_2{}^2$. Lecz podług zasad składania podstawień [art. 94.] dostaniemy $SU_2=U_4$, $SU_2{}^2=(x_1x_2x_4)=U_3$, a także i wszelkie złożenia WU_α, $WU_\alpha{}^2$, $\alpha=1, 2, 3, 4$, gdzie W oznacza S, T lub ST znajdziemy już między obrotami (4).

Stąd wnosimy, że obrotami (4), (5), (6), (7), wyczerpujemy **wszystkie możliwe** obroty i mamy twierdzenia:

I. *Grupa czworościanu składa się z 12 obrotów:*

(c) $1,\ U_1,\ U_1^2,\ U_2,\ U_2^2,\ U_3,\ U_3^2,\ U_4,\ U_4^2,\ S,\ T,\ ST;$

w nich znajdujemy: a) identyczny obrót, b) 8 obrotów około wysokości (po dwa obroty około każdej z nich), pozostawiających po porządku jeden tylko wierzchołek x_α w A_α, c) 3 obroty około 3 środkowych czworościanu, zmieniające wszystkie naroża dwoma przestawieniami.

II. *Grupę czworościanu można określać grupą 12 podstawień o 4 elementach x_1, x_2, x_3, x_4, a mianowicie:*

$$(c_1)\ \begin{cases} 1,\ (x_2x_3x_4),\ (x_2x_4x_3),\ (x_1x_3x_4),\ (x_1x_4x_3),\ (x_1x_2x_4),\ (x_1x_4x_2), \\ (x_1x_2x_3),\ (x_1x_3x_2),\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4)(x_2x_3). \end{cases}$$

Jestto widocznie grupa wszystkich parzystych podstawień, utworzonych z 4 elementów (grupa półsymetryczna).

Niech U, przedstawiając pewną obraną substytucyę U_α, wchodzi w złożone obroty:

$$(8)\qquad U,\ SU,\ TU,\ STU;\ U^2,\ SU^2,\ TU^2,\ STU^2.$$

O tych obrotach, które są niezawodnie obrotami około wysokości, dowiedziemy, że nie dają nigdy ani substytucyi identycznej, ani równych sobie substytucyj.

Położmy bowiem $WU^\lambda=1$, $(\lambda=1,2)$, gdzie W — jak przódy — oznacza którykolwiek z obrotów S, T, ST, to stądby wynikało: $WU^\lambda U^{-\lambda}=U^{-\lambda}$, czyli $W=U^{-\lambda}$. Lecz to jest niemożliwe, bo po obrocie W nie znajdujemy żadnego naroża x_α w A_α, a po $U^{-\lambda}$ przeciwnie jeden wierzchołek x_α koniecznie znajduje się w A_α.

Podobnie okazać można, że w (8) nie mogą się zawierać równe sobie substytucye.

Obroty zatem (8) przedstawiają wszystkie (nieidentyczne) obroty około wysokości czworościanu o kąty $\frac{2\pi}{3}$ i $2.\frac{2\pi}{3}$, a stąd wynika:

III. *Grupą czworościanu jest zbiór obrotów:*

$$(c')\quad [1,\ S,\ T,\ ST],\ \ [U,\ SU,\ TU,\ STU],\ \ [U^2,\ SU^2,\ TU^2,\ STU^2].$$

Gdy U ma znaczenie n. p. obrotu U_4, to (c') przedstawić można substytucyami 4 elementów (naroży), w ten sposób:

$$(c'_1)\quad \begin{matrix} 1,\ S=(x_1x_2)(x_3x_4),\ T=(x_1x_3)(x_2x_4),\ ST=(x_1x_4)(x_2x_3), \\ U=(x_1x_2x_3),\ SU=(x_1x_3x_4),\ TU=(x_2x_4x_3),\ STU=(x_1x_4x_2), \\ U^2=(x_1x_3x_2),\ SU^2=(x_2x_3x_4),\ TU^2=(x_1x_2x_4),\ STU^2=(x_1x_4x_3). \end{matrix}$$

Ponieważ przez każde z naroży x_α przechodzi jedna wysokość h_α czworościanu, więc stąd wynika, że w (c'_1) można x_1, x_2, x_3, x_4 zmienić na h_1, h_2, h_3, h_4 i powiedziec:

IV. *Grupę czworościanu określają wszystkie parzyste substytucye, utworzone z czterech jego wysokości; albo: Grupa czworościanu pozostaje w jednostopniowym izomorfizmie z półsymetryczną grupą przemian jego 4 wysokości.*

108. Podział kuli opisanej na czworościanie przez jego przekroje symetryi. Izomorfizm. Szereg złożenia. Płaszczyzny $PP'h_\alpha$, które podzieliły kulę stale połączoną z n-bokiem regularnym, były płaszczyznami symetryi rozważanego n-boku. Tu w czworościanie płaszczyznami symetryi są: $0a$, $0a'$, $0b$, $0b'$, $0c$, $0c'$. Jest ich 6; są-to dwójsieczne 6 kątów dwuściennych. W każdej z wysokości h_δ trzy takie płaszczyzny przecinają się z sobą i dzielą trójkąt $x_\alpha x_\beta x_\gamma$ [fig. 20.] na 6 przystających trójkątów. Każdy z nich ma kąty

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}.$$

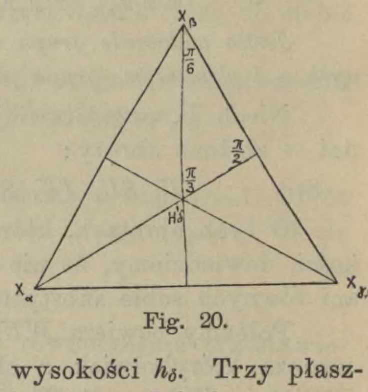


Fig. 20.

Wierzchołki ich o kątach $\frac{\pi}{3}$ wpadają wszystkie w punkt H'_δ, spodek wysokości h_δ. Trzy płaszczyzny dwójsieczne kątów dwuściennych o krawędziach $x_\alpha x_\beta$, $x_\beta x_\gamma$, $x_\gamma x_\alpha$ wytną na kuli czwartą jej część (równoboczny sferyczny trójkąt) $x_\alpha x_\beta x_\gamma$ (fig. 21.), a trzy płaszczyzny, przecinające się w h_δ, podzielą tę część na 6 trójkątów, każdy o kątach $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. Wspólny ich wierzchołek jest punkt H_δ, punkt przebicia kuli przez wysokość h_δ; w nim mają wszystkie trójkąty kąt $=\frac{\pi}{3}$.

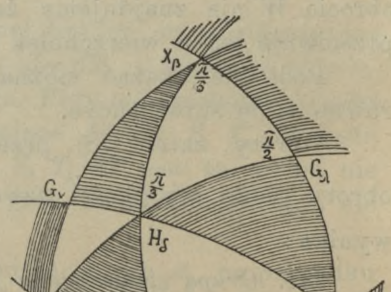


Fig. 21.

Z tych 6 trójkątów zaciemnijmy co drugi i w ten sposób odróżniajmy trójkąty sąsiadujące na powierzchni całej kuli.

Stosownie do obrotów o kąty $\frac{2\pi}{3}$, $2 . \frac{2\pi}{3}$ około wysokości h_α, h_β, h_γ h_δ obracać będziemy kulę o takież kąty około jej średnic kończących się w x_α, x_β, x_γ, H_δ, a że każde dwa sąsiadujące bokiem trójkąty mają w tych punktach sumę kątów $=\frac{2\pi}{3}$, więc przy obrotach około wszystkich 4 wysokości h_δ jasny trójkąt zajmie zawsze miejsce jasnego, a ciemny ciemnego.

Punkta G_λ, G_μ, G_ν, połowiące boki trójkąta $x_\alpha x_\beta x_\gamma$ są punktami, w których środkowe g_λ, g_μ, g_ν przebijają kulę. Około nich trzeba robić obroty o kąt π, a że właśnie tak każdy jasny, jak każdy ciemny trójkąt ma w tych punktaah kąt $\frac{\pi}{2}$, więc stąd wynika, że i przy obrotach około wszystkich 3 środkowych czworościanu padnie znowu jasny trójkąt na jasny, a ciemny na ciemny.

Podczas dokonywań obrotów całej grupy czworościanu połączonego już stale z kulą przekryje się trójkąt sferyczny $x_\alpha x_\beta x_\gamma$, który teraz krótko przez C_δ naznaczymy, 3 razy sam ze sobą (obroty około h_δ), z uwzględnieniem identycznego obrotu. Po trzy razy zaś nakryje się trójkątami pozostałymi C_α, C_β, C_γ, każdym razem z innym nakrywaniem się wierzchołków (obroty około g_λ, g_μ, g_ν i każde 2 obroty około x_α, x_β, x_γ). Naodwrót C_δ nakryje podczas tych ruchów 3-krotnie całą powierzchnię kuli.

Gdy jednak zauważymy w C_δ dwa sąsiadujące bokiem trójkąty: jasny I. i ciemny II., to taki obszar (I+II) podczas obrotów całej grupy przykrywać się będzie po porządku czemraz nowemi takiemi parami; a naodwrót położeniami swemi wypełni raz i tylko raz całą powierzchnię kuli.

Jestto dalszem następstwem tej okoliczności, że w H_δ (a także w x_α, x_β, x_γ, x_δ) ma taki obszar kąt $\frac{2\pi}{3}$, w G_λ kąt π, a właśnie tyleż wynoszą obroty około h_δ i g_λ.

Połóżmy (I+II)=(1), a taką inną parę, wstępującą po obrocie σ na miejsce (1) naznaczmy przez (σ), to obszarami

$$(A) \qquad \begin{array}{cccc} (1) & (S) & (T) & (ST) \\ (U) & (SU) & (TU) & (STU) \\ (U^2) & (SU^2) & (TU^2) & (STU^2) \end{array}$$

*

wypełnia się cała powierzchnia kuli. Obszar (1) nazywa się z tego powodu i tu obszarem zasadniczym, a grupę obrotów czworościanu można określić jako całkowity zbiór takich obrotów kuli, które na miejsce obszaru zasadniczego (1) wprowadzają wszystkie obszary (każdy raz tylko) regularnie podzielonej jej powierzchni przez wszystkie płaszczyzny symetryi regularnego czworościanu w nią wpisanego. Podczas tych obrotów naodwrót obszar (1) położeniami swojemi wypełnia całą powierzchnią kuli.

Co się tyczy częściowych grup w grupie czworościanu, to są one:

$$(1,\ S,\ T,\ ST),\quad (1,\ U_\alpha,\ U_\alpha^2),\ \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Z tych pierwsza ma rząd największy i jest przytem wyróżnioną. Obroty bowiem $\sigma^{-1}S\sigma$, $\sigma^{-1}T\sigma$, $\sigma^{-1}ST\sigma$, gdzie σ jest dowolnym obrotem wyjętym z całej grupy, są zawsze jeszcze obrotami około środkowych g_1, g_2, g_3; a że wszystkie są różne między sobą, więc muszą wraz z identycznym obrotem w pewnym uporządkowaniu dawać 1, S, T, ST.

Wskutek tego szeregiem złożenia grupy czworościanu będzie: sama grupa, grupa czwórki zawarta w niej i szereg złożenia tej ostatniej. Złożenie grupy możnaby wreszcie wywnioskować także z półsymetrycznej grupy 4 wysokości. Ta jest zawsze złożoną [art. 100, tw. I.] a więc i grupa czworościanu izomorficzna z nią musi być złożoną.

109. Grupa obrotów ośmiościanu umiarowego. Podział kuli opisanej na ośmiościanie przez jego przekroje symetryi. Izomorfizm. Szereg złożenia. Naroża ośmiościanu $\xi_1\xi_2\xi_3\eta_1\eta_2\eta_3$ (fig. 22.) niech mieszczą się w przestrzeni w punktach $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$.

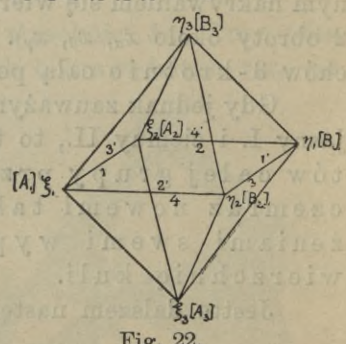


Fig. 22.

Do obrotów, które ten ośmiościan znowu do przestrzeni zamkniętej $(A_1A_2A_3B_1B_2B_3)$ sprowadzą, zaliczają się:

a) Obroty około 3 jego przekątni $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$, $\xi_3\eta_3$ o kąty: $\frac{\pi}{2}$, π i $\frac{3}{2}\pi$.

b) Obroty około 3 par prostych połowiących boki przeciwległe o kąt π.

c) Obroty około 4 prostych łączących środki ścian przeciwległych (środkowych przeciwległych ścian) o kąty $\frac{2\pi}{3}, 2.\frac{2\pi}{3}$;

d) Obrót identyczny.

Obroty o kąty $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ około przekątni $\xi_1\eta_1$ wyrażą się substytucyami:

$$a_1)\ (\xi_2\xi_3\eta_2\eta_3),\quad b_1)\ (\xi_2\eta_2\xi_3\eta_3),\quad c_1)\ (\xi_2\eta_3\eta_2\xi_3);$$

około przekątni $\xi_2\eta_2$ substytucyami:

$$a_2)\ (\xi_1\xi_3\eta_1\eta_3),\quad b_2)\ (\xi_1\eta_1)(\xi_3\eta_3),\quad c_2)\ (\xi_1\eta_3\eta_1\xi_3);$$

a wreszcie około przekątni $\xi_3\eta_3$ substytucyami:

$$a_3)\ (\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2),\quad b_3)\ (\xi_1\eta_1)(\xi_2\eta_2),\quad c_3)\ (\xi_1\eta_2\eta_1\xi_2).$$

Przechodząc do obrotów o kąt π około prostych łączących środki co dwóch boków przeciwległych, mamy: 1) obroty:

$$(1)\qquad (\xi_1\xi_2)(\eta_1\eta_2)(\xi_3\eta_3),\quad (\xi_1\eta_2)(\xi_2\eta_1)(\xi_3\eta_3)$$

około środkowych kwadratu $(\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2)$; 2) obroty:

$$(2)\qquad (\xi_2\xi_3)(\eta_2\eta_3)(\xi_1\eta_1),\quad (\xi_2\eta_3)(\xi_3\eta_2)(\xi_1\eta_1)$$

około środkowych kwadratu $(\xi_2\xi_3\eta_2\eta_3)$ i wreszcie 3) obroty:

$$(3)\qquad (\xi_1\xi_3)(\eta_1\eta_3)(\xi_2\eta_2),\quad (\xi_1\eta_3)(\xi_3\eta_1)(\xi_2\eta_2)$$

około środkowych kwadratu $(\xi_1\xi_3\eta_1\eta_3)$.

Pary przeciwległych ścian w ośmiościanie nazwijmy: (1, 1'), (2, 2'), (3, 3'), (4, 4') a proste łączące ich środki nazwijmy odpowiednio h_1, h_2, h_3, h_4. Po zsunięciu każdej takiej pary ścian po ich prostej środkowej do jednej płaszczyzny, mieć będziemy takie zestawienia:

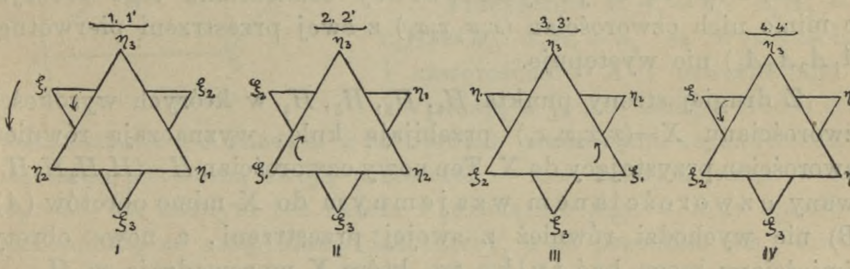


Fig. 23.

[Górne trójkąty w tych rysunkach są górnemi ścianami ośmiościanu (fig. 22.)].

Obroty ośmiościanu o kąty $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ około h_1, h_2, h_3, h_4 odpowiadać będą obrotom o takież kąty gwiazd I, II, III, IV około ich środków (fig. 23.); przytem obrotów dokonywa się w dowolnych kierunkach, a więc n. p. w kierunkach strzałkami wskazanych.

Obroty te takiemi podstawieniami dadzą się określić:

$$(4)\quad \left|\begin{array}{lll} U_1=(\xi_1\xi_2\xi_3)(\eta_1\eta_2\eta_3), & U_1{}^2=(\xi_1\xi_3\xi_2)(\eta_1\eta_3\eta_2) & \text{około } h_1 \\ U_2=(\xi_1\eta_2\eta_3)(\eta_1\xi_2\xi_3), & U_2{}^2=(\xi_1\eta_3\eta_2)(\eta_1\xi_3\xi_2) & \quad\text{„}\ \ h_2 \\ U_3=(\xi_1\xi_2\eta_3)(\eta_1\eta_2\xi_3), & U_3{}^2=(\xi_1\eta_3\xi_2)(\eta_1\xi_3\eta_2) & \quad\text{„}\ \ h_3 \\ U_4=(\xi_1\eta_2\xi_3)(\eta_1\xi_2\eta_3), & U_4{}^2=(\xi_1\xi_3\eta_2)(\eta_1\eta_3\xi_2) & \quad\text{„}\ \ h_4 \end{array}\right.$$

Możemy teraz łatwo geometrycznie wykazać, że tymi 24 obrotami wyczerpujemy już całą grupę ośmiościanu.

W tym celu wróćmy do czworościanu $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ wpisanego w kulę. Trzy jego środkowe g_1, g_2, g_3 przebijają kulę w 3 parach punktów (G_1, G'_1), (G_2, G'_2), (G_3, G'_3) (fig. 21. str. 274.). Nazwijmy je teraz $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3$, i weźmy je za naroża naszego ośmiościanu; g_1, g_2, g_3 będą jego przekątniami, a proste h_1, h_2, h_3, h_4 łączące środki jego ścian przeciwległych będą zarazem wysokościami czworościanu.

Wszystkie obroty czworościanu muszą się oczywiście zawierać w obrotach ośmiościanu. Są-to właśnie obroty (4) i obroty $b_1), b_2), b_3)$ o kąt π około g_1, g_2, g_3. Te ostatnie razem z identycznym utworzą grupę czwórki:

$$(A) \qquad 1,\ S,\ T,\ ST.$$

Obroty (4) można zastąpić obrotami:

$$(B) \qquad [U, SU, TU, STU],\ [U^2, SU^2, TU^2, STU^2]$$

przy obranem $U = U_\alpha$.

(A) i (B) są-to j e d y n e o b r o t y ośmiościanu tego rodzaju, że mimo nich czworościan $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ z swej przestrzeni pierwotnej $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ nie występuje.

Z drugiej strony punkta H_1, H_2, H_3, H_4 w których wysokości czworościanu $X = (x_1 x_2 x_3 x_4)$ przebijają kulę, wyznaczają również czworościan przystający do X. Ten nowy czworościan $H = (H_1 H_2 H_3 H_4)$ zwany c z w o r o ś c i a n e m w z a j e m n y m do X mimo obrotów (A), (B) nie wychodzi również z swojej przestrzeni, a nowe obroty ośmiościanu mogą być t y l k o t e, które X wprowadzają w H.

Niechżeż V oznacza obrót około jednej ze środkowych czworościanu X (przekątni ośmiościanu) o kąt $\frac{\pi}{2}$, lub obrót o $\frac{6\pi}{4}$ (równoważny z obrotem o $-\frac{\pi}{2}$), to obroty złożone

$$(C) \qquad \begin{matrix} V, & SV, & TV, & STV \\ UV, & SUV, & TUV, & STUV \\ U^2V, & SU^2V, & TU^2V, & STU^2V \end{matrix}$$

przeprowadzają każde położenie czworościanu X w przestrzeń H (por. fig. 21.). Obrotów (C) jest widocznie 12; są one wszystkie między sobą różne (z identyczności $SV = TU^2V$ i t. p. wynikłyby identyczności niemożliwe: $SVV^{-1} = TU^2V.V^{-1}$ czyli $S = TU^2$ i t. p.), a że w przestrzeni H czworościan X tylko na 12 różnych sposobów mieścić się może, więc (C) są już wszystkimi obrotami przeprowadzającymi X w H i dopełniają grupy ośmiościanu.

Właśnie w a_1), a_2), a_3), c_1), c_2), c_3) 1), 2), 3) mamy 12 obrotów ośmiościanu nieobjętych w (A), (B); muszą więc te obroty być w pewnym porządku obrotami (C). Stąd twierdzenie:

I. *Grupa ośmiościanu składa się z grupy czworościanu i ze złożeń obrotów tej ostatniej grupy z ćwierćobrotem około jednej z jego przekątni. Jej rząd* $=24$.

Zauważmy sześcian (fig. 24.) i w nim przekątnie nierównoległe w dwóch jego ścianach równoległych nazwijmy: x_1x_2, x_3x_4.

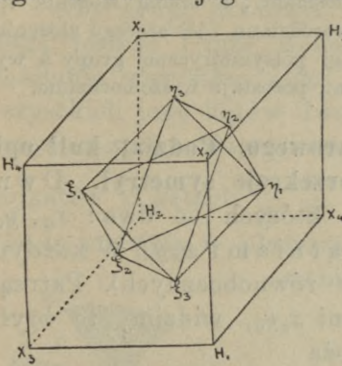


Fig. 24.

Naroża przeciwległe narożom x_1, x_2, x_3, x_4 oznaczmy przez H_1, H_2, H_3, H_4. Pierwsze tworzą czworościan X, drugie czworościan H. Względem nich ma ośmiościanu $\xi_1\xi_2\xi_3\eta_1\eta_2\eta_3$ o narożach w środkach ścian sześcianu właśnie położenie takie, jakiego potrzeba w tworzeniu grupy $[(A), (B), (C)]$.

Przekątnie $x_1H_1 = h_1$, $x_2H_2 = h_2$, $x_3H_3 = h_3$, $x_4H_4 = h_4$ są wysokościami i czworościanu X i czworościanu H, i wpadają w proste łączące środki ścian ośmiościanu. Po każdym z 24 obrotów ośmiościanu zajmuje sześcian tę samą pierwotną swoją przestrzeń — lecz każdym razem w inny sposób. Za każdym też razem i przekątnie jego w inny sposób się przemienią ze sobą. Mamy ich cztery, a że przemian ich, między sobą różnych, jest tu właśnie 24=4!, więc stąd wynika:

II. *Grupa ośmiościanu o narożach w środkach ścian sześcianu pozostaje w jednokrotnym izomorfizmie z symetryczną grupą czterech przekątni sześcianu.*

Trzema płaszczyznami połowiącemi kąty dwuścienne ośmiościanu podzieli się opisana na nim kula na 8 równych trójkątów

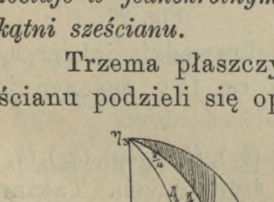


Fig. 25.

o kątach wszystkich $=\frac{\pi}{2}$. Każdy taki trójkąt podzielą dalsze płaszczyzny symetryi na 6 trójkątów do siebie przystających o kątach $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Na całej kuli będzie ich 48. (fig. 25). Dwa z nich, sąsiadujące bokiem, jasny i ciemny, utworzą —

jak w czworościanie — zasadniczy obszar o analogicznem, jak tam, znaczeniu.

W grupie ośmiościanu mieści się widocznie grupa czworościanu składająca się z obrotów (A) i (B).

Jestto zbiór wszystkich tych obrotów, które czworościanu X nie wprowadzają w położenie czworościanu H; zbiór ten jest przytem podgrupą największą. Nazwijmy ją: G_4. Jej obroty naznaczmy wspólną literą σ; pozostałe, które X przenoszą w położenie H nazwijmy τ, to jasnem jest, że $\sigma^{-1} G_4 \sigma = G_4$ bo grupa, G_4 i po przetworzeniu jej przez σ zawiera 12 obrotów różnych między sobą, a niezmieniających X w H. Lecz także $\tau^{-1} G_4 \tau = G_4$, bo obrót τ wykonany na końcu niweczy zmianę spowodowaną przoz τ^{-1} na początku. G_4 jest więc wyróżnioną największą grupą grupy ośmiościanu, a szereg złożenia tej ostatniej składa się: z samej grupy, z grupy czworościanu i jej szeregu złożenia.

To samo wywieśćby można także z złożonej półsymetrycznej grupy 4 wysokości sześcianu. Z tą ostatnią grupa ośmiościanu pozostaje w izomorfizmie.

110. Grupa dwudziestościanu umiarowego. Podział kuli opisanej na dwudziestościanie przez jego przekroje symetryi. Dwudziestościan posiada 12 naroży, z których co dwa: x_α, y_α, $\alpha=1, 2, 3, 4, 5, 6$, połączyć można przekątniami $x_\alpha y_\alpha$. W każdym narożu schodzi się pięć ścian (trójkątów równobocznych). Patrząc na dwudziestościan w kierunku przekątni $x_6 y_6$, widzimy tę bryłę tak, jak ją fig. 26. przedstawia. U naroża x_6 schodzi się 5 ścian objętych obwodem $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$; u naroża y_6 jest ich znowu 5 zamkniętych obwodem $(y_1 y_2 y_3 y_4 y_5)$. Te dwie części dwudziestościanu oddziela od siebie 10 trójkątów $(x_1 y_3 y_4)$, $(y_4 x_1 x_2)$, $(x_2 y_4 y_5)$, ...

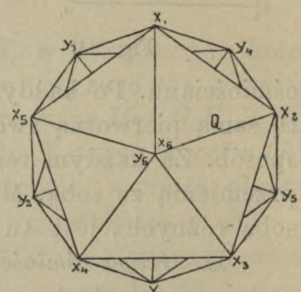


Fig. 26.

Osi symetryi są tu takie: 1) Przekątnie $x_1 y_1, \ldots, x_6 y_6$; jest ich 6; 2) Proste łączące środki dwóch przeciwległych ścian (naznaczać je będziemy literą p); jest ich tu 10); 3) Proste łączące środki 15 par równoległych krawędzi, jak $(x_1 x_2, y_1 y_2)$, $(x_2 x_3, y_2 y_3), \ldots, (x_1 y_4, y_1 x_4), \ldots$; mamy ich tu 15; znaczyć je będziemy krótko literą q.

Te środkowe q dzielą się na 5 systemów (k_1), (k_2), (k_3), (k_4), (k_5) zawierających po 3 do siebie prostopadłych środkowych. Takimi systemami będą n. p. proste q łączące środki par krawędzi:

$$[(x_1 x_2,\ y_1 y_2),\ (x_3 y_5,\ x_5 y_3),\ (x_4 x_6,\ y_4 y_6)] \text{ i t. p.}$$

Obroty około przekątni, około prostych p i prostych q o stosownie dobranej wielkości zaliczać się będą do grupy obrotów dwudziestościanu. Obroty te są:

a) Około każdej z przekątni o kąty $\frac{2\pi}{5}.s$, $s=1, 2, 3, 4$; razem obrotów 24.

b) Około każdej z 10 prostych p (środkowych ścian) o kąty $\frac{2\pi}{3}$, $2.\frac{2\pi}{3}$, razem obrotów 20.

c) Około każdej z 15 prostych q obrót o kąt π, razem obrotów 15.

d) Obrót identyczny.

Wszystkich tak wyliczonych obrotów mamy 60.

Aby grupę utworzyć i zbadać, czy w nią oprócz *a*), *b*) *c*), *d*) mogą jeszcze i inne wchodzić obroty, poprowadźmy w dwudziestościanie wszystkie jego płaszczyzny symetryi t. j. dwójsieczne wszystkich jego kątów dwuściennych. Podzielą one każdy z trójkątów $x_6x_1x_2, \ldots$ dwudziestościanu na 6 przystających do siebie trójkątów o kątach $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$. Całą kulę opisaną na dwudziestościanie podzielą te płaszczyzny na 120 sferycznych trójkątów do siebie przystających (fig. 27.) o kątach

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}.$$

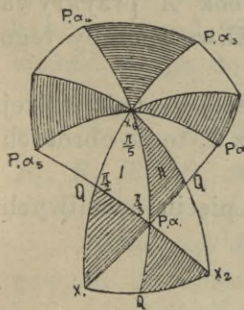


Fig. 27.

Z tych trójkątów zaciemnijmy co drugi, a dwa którekolwiek z nich sąsiadujące bokiem złączmy w jeden obszar (I+II). Każdy z dwóch trójkątów wchodzących w taki obszar ma kąt $\frac{\pi}{5}$ u naroża, kąt $\frac{\pi}{3}$ w P, punkcie przebicia kuli przez prostą p, a kąt $\frac{\pi}{2}$ w Q, punkcie przebicia kuli przez prostą q.

A że obroty odbywają się właśnie o kąt $\frac{2\pi}{5}$ około przekątni, o kąt $\frac{2\pi}{3}$ około każdej z prostych p, a o kąt π około każdej z prostych q, więc z tego wynika, że i tu po każdym z obrotów (*a*), (*b*), (*c*) (i wreszcie (*d*)) jasny trójkąt padnie zawsze na jasny, a ciemny na ciemny. Zauważmy 5 obszarów (I+II) ułożonych około jednego naroża n. p. x_6 (fig. 27.) i naznaczmy je po porządku przez 1, 2, 3, 4, 5. Utworzą one na kuli regularny pięciobok A o środku w x_6, a mający swe wierzchołki w samych punktach P, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$. Punkta Q połowią jego boki.

Do każdego jego boku przylega znowu pięciobok złożony z 5 obszarów (I+II). Tych nowych 5 pięcioboków nazwijmy po porządku A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. W ten sam sposób dadzą się na kuli dalsze takie pięcioboki odgraniczyć. Na całej kuli będzie ich 12, gdyż każdy z nich ma swój środek w jednem narożu dwudziestościanu. Przez 5 wierzchołków każdego takiego pięcioboku kładąc płaszczyzny dostaniemy regularny dwunastościan pięciokątny, wpisany w kulę. Z jego siatki zauważmy 6 pięciokątów, odpowiadających na kuli pięciokątom A, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 (nazywając je również temi samemi literami) (fig. 28.).

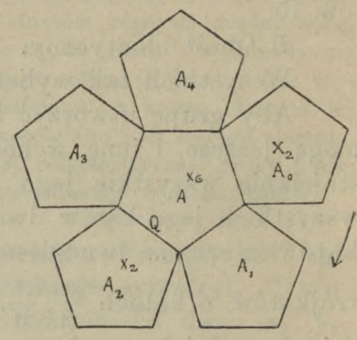


Fig. 28.

Gdy dokonamy obrotu około przekątni $x_6 y_6$ o kąt $\frac{2\pi}{5}$ i ten obrót naznaczymy literą S, to po obrotach

(α) S^0, S^1, S^2, S^3, S^4

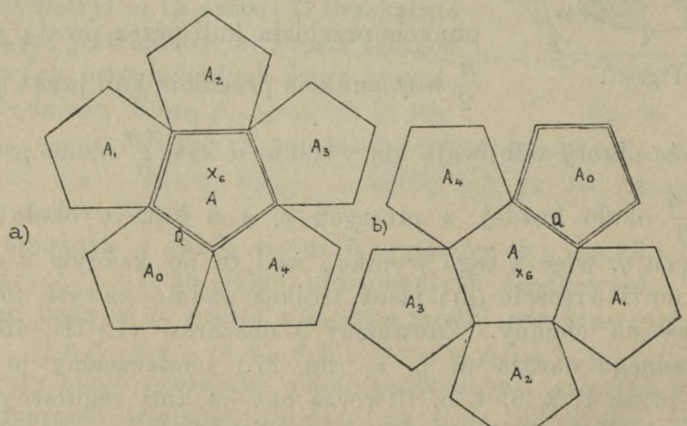
obszar 1 przykrywać będzie po porządku obszary: 1, 2, 3, 4, 5 (fig. 27.); (pięciobok A przykrywa sam siebie a obroty (α) wyczerpują wszystkie możliwe sposoby tego przykrywania się).

Naznaczmy obrót o kąt π około tej prostej $q=QQ'$, której punkt Q połowi $x_6 x_2$, (mamy go na fig. 28.), przez T, to po obrotach

(β) T, ST, S^2T, S^3T, S^4T

zajmie miejsce pięcioboku A pięciobok A_0 w pięciu możliwych sposobach ich nakrywania się.

Fig. 29.



Po obrocie n. p. S^2 mieć będziemy zamiast położenia wskazanego na fig. 28. położenie (a) — fig. 29. — a po obrocie S^2T położenie (b) — fig. 29.

Poddając dalej (b) obrotom S^0, S^1, S^2, S^3, S^4, około x_6y_6, a więc po złożonych obrotach: S^2T, S^2TS, S^2TS^2, S^2TS^3, S^2TS^4 wstępować będą na miejsce A po porządku pięcioboki A_0, A_1, A_2, A_3, A_4.

Po każdym obrocie (β) dokonajmy jeszcze obrotu S^ν, to po obrotach

(β') TS^ν, STS^ν, S^2TS^ν, S^3TS^ν, S^4TS^ν, $\nu=0, 1, 2, 3, 4$

zajmie miejsce pięcioboku A pięciobok A_ν w pięciu możliwych wypadkach ich nakrywania się. Że zaś $\nu=0, 1, 2, 3, 4$, a obroty (α) dają 5 wypadków nakrywania się pięcioboku A przez siebie, więc (α) i (β') razem, t. j. obroty

(γ) $1, S, S^2, S^3, S^4; S^\mu TS^\nu, \mu \gtreqless \nu=0, 1, 2, 3, 4$

— w liczbie 30 — wyczerpują już wszystkie możliwe obroty, po których miejsce pięciokąta A zająć może jeden z pięcioboków A, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, przykrywając go na wszystkie możliwe sposoby.

Właśnie w 6 pięciobokach A, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, wypełniających połowę kuli, mamy 30 obszarów (I+II)'. Z nich: obszar (1) mieszczący się w pięcioboku A przykryje się po każdym nowym obrocie (γ) nowym takim obszarem (I+II)' tak, że obrotami (γ) każdy z owych 30 obszarów, wypełniających p o ł o w ę k u l i wprowadzić można do położenia obszaru (1).

Drugą połowę kuli wypełnia znowu 6 regularnych pięcioboków B, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, z których B ma środek w y_6, a B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 otaczają B. W każdym z tych 6 pięcioboków mieści się 5 obszarów (I+II)".

Obroty (γ) dopełnimy więc do grupy, gdy jeszcze za pomocą nowych 30 obrotów wprowadzimy 30 obszarów drugiej połowy kuli w położenie obszaru (1).

W tym celu zauważmy, że oś q, około której obrotu T dokonano, należy do jednego z systemów (k_ν), $\nu=1, 2, 3, 4, 5$ i że w tym systemie mamy trzy osi q, q_1, q_2 takie, że $q \perp q_1$, $q \perp q_2$, $q_1 \perp q_2$.*) Około q_1 (lub q_2) wykonajmy obrót U o kąt π, to ten obrót wprowadzi w dwudziestościanie część jego ($y_1y_2y_3y_4y_5$) na miejsce ($x_1x_2x_3x_4x_5$), (fig. 26.), a miejsce pięciokąta A zajmie pięciokąt B i naodwrót.

Dokonajmyż po każdym obrocie (γ) jeszcze obrotu U, to po każdym z 30 obrotów

---

*) Oś q w tym systemie jest osią przechodzącą przez punkt Q; równocześnie więc jest $q_1 \perp q$ i $q_1 \perp x_6y_6$.

(γ') $S^\mu U,\quad S^\mu T S^\nu U,\quad \mu \gtreqless \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$

przykryje się obszar (1) czemraz innym obszarem (I+II)" drugiej półkuli (o biegunie y_6). Tych obszarów jest właśnie 30, a w (γ') mamy obrotów także 30, stąd pochodzi:

I. *Obroty:*

(A) $S^\mu,\ S^\mu T S^\nu,\ S^\mu T S^\nu U,\quad \mu \gtreqless \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$

wypełniają grupę obrotów dwudziestościanu. Jej rząd $=60$.

Podczas obrotów tej grupy zajmuje naodwrót obszar (1) położenie czemraz innego obszaru z 60 obszarów (I+II)', (I+II)", rozpoztartych na całej kuli. Obrany obszar (1) nazywa się i tu o b s z a r e m z a s a d n i c z y m.

Naznaczmy tę parę (I+II)' lub (I+II)", która po obrocie σ wstępuje w miejsce obszaru (1), przez (σ), to wszystkie obszary całej kuli naznaczymy przez

$$(S^\mu),\ (S^\mu T S^\nu),\ (S^\mu T S^\nu U),\quad \mu \gtreqless \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Gdy się okazało, że rzędem grupy jest 60, a w (a), (b), (c), (d) mamy właśnie 60 różnych między sobą obrotów, to stąd odrazu wnosimy, że te ostatnie są taką samą grupą dwudziestościanu, jak grupa (A).

111. Dwie zasadnicze substytucye grupy dwudziestościanu. Izomorfizm. Niepodzielność grupy. Gdy w drugiej połowie kuli pięcioboki B_ν, $\nu=0, 1, 2, 3, 4$, w takiem są uporządkowaniu, że patrząc na dwunastościan z bieguna x_6, widzimy między A_ν a $A_{\nu+1}$ u dołu B_ν, to dwunastościan można schematycznie przedstawić takiem zestawieniem liter:

$$(A)\quad \begin{matrix} & & A & & \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ & & B & & \end{matrix}$$

Widocznie pięciokąt A_2 otaczają pięciokąty A, A_1, B_1, B_2, A_3; pięciokąt A_3 pięciokąty A, A_2, B_2, B_3, A_4; pięciokąt B_2 pięciokąty A_2, B_1, B, B_3, A_3 i t. d. Gdy $\alpha_1\alpha_2$ jest bokiem pięciokąta A, odgraniczającym go od A_0, a $\beta_4\beta_5$ bokiem pięciokąta B, odgraniczającym go od pięciokąta B_0, to w dwunastościanie leżą pierwotnie A, B względem siebie tak, jak fig. 30 (α) [nast. str.] wskazuje, po obrocie zaś U o kąt π około q_1 dostaniemy ich względne położenia takie, jak fig. 30 (β) wskazuje.

Stąd widocznie wynika, że w dwunastościanie można U przedstawić taką substytucyą:

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \beta_5 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = (\alpha_1\beta_5)(\alpha_2\beta_4)(\alpha_3\beta_3)(\alpha_4\beta_2)(\alpha_5\beta_1).$$

Gdy zaś $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ w tym samym kierunku po sobie następują, jak x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 w dwudziestościanie, a także i

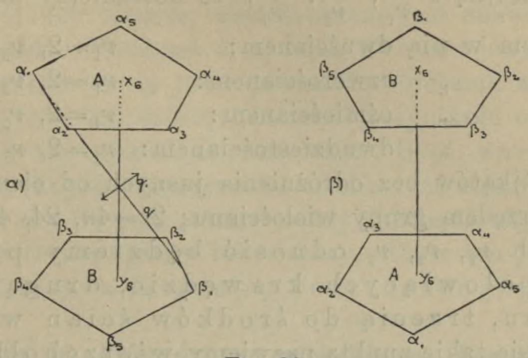


Fig. 30.

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\ \beta_5$ zgadzają się co do kierunku z y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 — to mamy odrazu: $U=(x_1y_5)(x_2y_4)(x_3y_3)(x_4y_2)(x_5y_1)$. Lecz uwagi godnem jest, że obrót (substytucyę) U złożyć można z samych obrotów S, T, które — jak z fig. 26. (str. 280.) wynika — substytucyami w ten sposób dadzą się określić:

$S=(x_1x_2x_3x_4x_5)(y_1y_2y_3y_4y_5)$, $T=(x_2x_6)(y_2y_6)(x_1x_3)(y_1y_3)(x_4y_4)(x_5y_5)$.

(Obrót T odbywa się około tej osi q, która punktem Q połowi krawędź x_6x_2). Mając S, T w tych formach, łatwo już sprawdzimy, że $S^2TS^3TS^2T=U$ i że więc:

I. *Grupę 60 obrotów dwudziestościanu złożyć można z dwóch jego obrotów S, T.*

Co się tyczy złożenia ST, to łatwo sprawdzić, że $ST.ST.ST=1$ że więc ST ma peryod 3.

Równocześnie z 60 obrotami grupy przemieniają się z sobą systemy (k_1), (k_2), (k_3), (k_4), (k_5) trójek środkowych linij dwudziestościanu na 60 rozmaitych sposobów. Że zaś $60=\frac{5!}{2}$, więc wszystkie przemiany tych systemów określi grupa półsymetryczna 5 elementów (k_α), $\alpha=1, 2, 3, 4, 5$ [art. 98., tw. III.]. Stąd twierdzenie:

II. *Grupa obrotów dwudziestościanu pozostaje w jednostopniowym izomorfizmie z półsymetryczną grupą pięciu elementów (systemów (k_α)).*

Taka grupa 5 elementów jest niezłożoną [art. 100., tw. I.]. Każda grupa pozostająca z nią w izomorfizmie jest także niezłożoną [art. 101., tw. IV., V., VI.] a stąd wynika, że g r u p a d w u d z i e s t o ś c i a n u j e s t g r u p ą n i e z ł o ż o n ą.

112. Liczby ν_1, ν_2, ν_3 charakteryzujące wielościany umiarowe. Grupa rozszerzona. Zauważmy na kuli trójkąt jasny lub ciemny, odnoszący się do jednego z rozważanych wielościanów i kąty tego trójkąta $\frac{\pi}{\nu_1}$, $\frac{\pi}{\nu_2}$, $\frac{\pi}{\nu_3}$, to dostaniemy na kuli

z wpisanym w nią dwuścianem: $\nu_1=2$, $\nu_2=2$, $\nu_3=n$
" " czworościanem: $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=3$
" " ośmiościanem: $\nu_1=2$, $\nu_2=4$, $\nu_3=3$
" " dwudziestościanem: $\nu_1=2$, $\nu_2=5$, $\nu_3=3$.

Ilość trójkątów bez odróżnienia jasnych od ciemnych jest $2r$, gdzie r jest rzędem grupy wielościanu; $2r=4n$, 24, 48, 120.

Z liczb ν_1, ν_2, ν_3 odnosić będziemy pierwszą do punktów połowiących krawędzie, drugą do naroży wielościanu, trzecią do środków ścian wielościanu. Wszystkie takie punkta nazwiemy wierzchołkami grupy. W wierzchołku, do którego należy ν_s schodzi się dokładnie ν_s obszarów (I+II).

Opuszczając warunek, aby się grupa jedynie tylko z obrotów składała, można dalej utworzyć grupę taką, że już sam trójkąt I. lub II. będzie jej zasadniczym obszarem. Zauważmy bowiem w każdym z wielościanów dowolną płaszczyznę symetryi A, dzielącą zarazem kulę na dwie półkule, to jedną półkulę można uważać za obraz drugiej w płaszczyźnie A i analogicznie w tej samej płaszczyźnie będzie jedna połowa wielościanu obrazem połowy jego drugiej.

Pomieniajmyż ze sobą dwie półkule, nie naruszając stałego ich połączenia wzdłuż wielkiego koła dzielącego je, to równocześnie i każda połowa wielościanu przejdzie w swój obraz.

Gdy w jednej takiej połowie mamy wierzchołki x_1, x_2, x_3, ..., a ich obrazami w A są wierzchołki y_1, y_2, y_3, ..., to substytucyą wskazującą tę zamianę jest:

$$\tau=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & y_1 & y_2 & y_3 & \dots \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \end{pmatrix}=(x_1y_1)(x_2y_2)(x_3y_3)\,\dots,\ \tau^2=1.$$

Samą taką zmianę położenia nazywamy odwróceniem, albo odbiciem w płaszczyźnie A. Wzdłuż wielkiego koła, będącego przecięciem się płaszczyzny A z kulą przytykają do niego symetrycznie: trójkąt ciemny i jasny; ale i pozostałe trójkąty są tak względem A ułożone, że każdy jasny jest obrazem ciemnego i naodwrót.

Mając to, naznaczmy przez G grupę któregokolwiek z wielościanów i utwórzmy zbiór substytucyj $G.\tau$, gdzie τ jest odbiciem w dowolnej płaszczyźnie symetryi A wielościanu.

G wprowadza na obrany trójkąt jasny (lub ciemny) wszystkie jasne (lub ciemne). Aby dalej miejsce obranego trójkąta jasnego zajęły trójkąty ciemne, dostatecznem jest znaleść r różnych między sobą odbić. Niechżeż σ, σ_1 będą dwoma różnymi obrotami grupy G, to $\sigma\tau$, $\sigma_1\tau$ nie są już z pewnością obrotami, ale odbiciami. Nie może być przy tem $\sigma\tau=\sigma_1\tau$, bo stądby wynikało $\sigma\tau\tau^{-1}=\sigma_1\tau.\tau^{-1}$, czyli $\sigma=\sigma_1$, co się sprzeciwia założeniu. Stąd wnosimy, że $G\tau$ przedstawia r różnych między sobą odbić, i że zbiór $2r$ substytucyj (przemian) $G+G\tau$ jest zdolny każdy jakibądź trójkąt zamienić na każdy inny trójkąt jasny lub ciemny. Zbiór ten jest przy tem grupą. Klein nazywa ją grupą rozszerzoną; jej rząd $=2r$.

113. Grupa punktów danego wielościanu. Rozszerzona grupa punktów. Szczególne grupy punktów. Gdy punkt P leży wewnątrz dowolnego obszaru (I+II) grupy G, albo na jego boku, ale nie w jego wierzchołku, to za obrotami grupy G zajmie jego miejsce r punktów:

$$(A)\qquad P,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{r-1}.$$

Żadne dwa z tych punktów nie leżą w jednym obszarze, a za obrotami grupy G punkty (A) przemieniają się z sobą na kuli na r sposobów. Taki zbiór punktów nazywamy: aggregentem punktów danej grupy G, albo krótko: grupą punktów danego wielościanu. Każdy punkt P_α nazywamy równoważnym z P. Gdy punkt P zajmuje położenie jednego z wierzchołków grupy, a w tym wierzchołku schodzi się v obszarów (I+II), to z uwagi, że taki punkt należy równocześnie do v obszarów, dostaniemy z niego przez obroty G już tylko $\frac{r}{v}$ punktów różnych:

$$(B)\qquad P,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{\frac{r}{v}-1}\quad \text{(każdy po } v \text{ razy)}.$$

Takie punkta tworzą grupę szczególną punktów rozważanego wielościanu i wszystkie są wierzchołkami kuli o v schodzących się w nich obszarach (I+II).

Z tego wynika, że — gdy do rozważanego wielościanu należą liczby v_1, v_2, v_3 — to na kuli według dowolnie obranego zasadniczego obszaru dostajemy $\left(\frac{r}{v_1}+\frac{r}{v_2}+\frac{r}{v_3}\right)$ wierzchołków.

Odróżniając trójkąty jasne i ciemne, mamy kulę podzieloną na $2r$ trójkątów według grupy danego wielościanu, a punkt P obrany wewnątrz jasnego (ciemnego) trójkąta daje:

1^0 r punktów $P, P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ przez obroty G; wszystkie te punkta leżą w jasnym (ciemnym) trójkącie;

2^0 r punktów $P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, \ldots, P_{2r-1}$ przez odbicie $G\tau$; wszystkie te punkta leżą w ciemnych (jasnych) trójkątach.

Taki zbiór punktów

$$(A') \qquad P, P_1, P_2, \ldots, P_{2r-1}$$

nazywamy rozszerzoną grupą punktów wielościanu.

Gdy P leży w wierzchołku obszaru (I) lub (II), to w tym wierzchołku mamy tam teraz takich obszarów 2ν, a wskutek zmian wskazanych przez $G+G\tau$ dostaniemy $\frac{2r}{2\nu}=\frac{r}{\nu}$ punktów

$$(B') \qquad P, P_1, P_2, \ldots, P_{\frac{r}{\nu}-1}.$$

Obierzmy wreszcie P na boku λ obszaru I (lub II). Obroty G dadzą początek r punktom:

$$(C') \qquad P, P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}.$$

Obraz każdego z nich w dowolnej płaszczyźnie symetryi znajdziemy znowu w grupie (C'), a stąd wynika, że za każdem z odbić $G\tau$ grupa punktów (C') na nowo się odtwarza, tak, że nowych punktów — mimo grupy rozszerzonej — już tu nie znajdziemy.

Zanotować tu wreszcie trzeba, że obrawszy dwa bokiem sąsiadujące obszary I, II, znajdziemy w rozszerzonej grupie zawsze jedną substytucyę (zawartą w $G\tau$), nie naruszającą ich wspólnego boku (i punktów na tym boku leżących).

114. Stereograficzny rzut kuli podzielonej podług wpisanego umiarowego wielościanu. Liniowe podstawienia jednorodne i niejednorodne. Sprzężmy teraz kulę o promieniu $=1$ stereograficznie z jej płaszczyzną równikową [art. 47.] i tę płaszczyznę weźmy za nieograniczony obszar zmiennej urojonej $z=x+yi$ z punktem $z=0$ w środku kuli.

Na takiej kuli o równaniu:

$$(1) \qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$$

obrany punkt P będzie podczas obrotów grupy G któregokolwiek z wielościanów poruszał się po kołach (dużych lub małych), zakreślonych na kuli.

Równocześnie z nim będzie odpowiadający mu punkt z poruszał się również po okręgach pewnych kół [art. 47., fig. 11.], a naszem zadaniem będzie ruchy tego punktu z należycie określić.

Jasnem jest, że jeżeli kula obróci się o kąt α około osi swej BB', prostopadłej do płaszczyzny (z), a po tym obrocie punkt P zajmie położenie P', to punkta z, z' odpowiadające punktom P, P' związane będą równaniem:

(2) $$z' = 1_\alpha \cdot z.$$

Obróćmy dalej kulę około jej środka tak, aby biegun B przebiegł łuk BR wielkiego koła (południka) i zajął położenie punktu $R=(\xi, \eta, \zeta)$. Biegun B' zajmie wtedy położenie punktu:

$$R'=(-\xi, \ -\eta, \ -\zeta),$$

a punktom R, R' — po stereograficznej projekcyi kuli — odpowiedzą na płaszczyźnie (z) punkta:

(3) $$Z_1 = \frac{\xi+\eta i}{1-\zeta}, \quad Z_2 = \frac{-\xi-\eta i}{1+\zeta}, \text{ [art. 47.].}$$

Wszystkie punkta z lub z' — [jakie mamy w (2)] — wyruszą na płaszczyźnie (z) ze swego pierwotnego położenia, zajmując nowe położenia z_1 lub z_1'. W szczególności punkt $z=z'=\infty$ zajmie położenie $z_1=z_1'=Z_1$, [bo B na kuli zajęło położenie (ξ, η, ζ)], a punkt $z=z'=0$ zajmie położenie $z_1=z_1'=Z_2$, [bo B' na kuli zajęło położenie $(-\xi, -\eta, -\zeta)$]. Połóżmyż:

(4) $$z = C.\frac{z_1-Z_2}{z_1-Z_1}, \ z' = C.\frac{z_1'-Z_2}{z_1'-Z_1},$$

to widocznie te związki, za oznaczeniem stałej C określają nowe położenia z_1, z_1' punktów z, z'.

Podstawmy w (2) za z, z' formy (4), to dostaniemy:

(5) $$\frac{z_1'-Z_2}{z_1'-Z_1} = 1_\alpha \frac{z_1-Z_2}{z_1-Z_1},$$

a z_1' wynikające z tego związku, będzie położeniem dowolnego punktu z_1 osiągniętem już i po obrocie kuli o kąt α około osi BB' i po przebiegnięciu punktu B po całym łuku BR. Przytem zauważyć potrzeba, że te ruchy można ze sobą pomieniać, bez naruszenia końcowego położenia kuli i że wykonywaniem tych dwóch ruchów w dowolnym porządku można dojść do dowolnego położenia kuli.

Pisząc w (5) za z_1, z_1' wprost z, z', i wstawiając formy (3) za Z_1, Z_2, mieć będziemy:

$$1_{-\frac{\alpha}{2}} \frac{z'(1+\zeta)+(\xi+\eta i)}{z'(1-\zeta)-(\xi+\eta i)} = 1_{\frac{\alpha}{2}} \frac{z(1+\zeta)+(\xi+\eta i)}{z(1-\zeta)-(\xi+\eta i)}.$$

Rozwiązując to równanie ze względu na z' i kładąc:

$$\xi \sin\frac{\alpha}{2}=a, \ \eta \sin\frac{\alpha}{2}=b, \ \zeta \sin\frac{\alpha}{2}=c, \ \cos\frac{\alpha}{2}=d,$$

otrzymamy:

(6) $$z'=\frac{(d+ci)z-(b-ai)}{(b+ai)z+(d-ci)}=f(z),$$ gdzie widocznie:

$$\Delta=\begin{vmatrix} d+ci, & -b+ai \\ b+ai, & d-ci \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2+d^2=1 \text{ wskutek (1).}$$

Równanie (6) piszą często w formie:

(7) $$S=\left(z,\ \frac{(d+ci)z-(b-ai)}{(b+ai)z+(d-ci)}\right),$$

co ma oznaczać, że po dokonanych obrotach kuli punkt z zastępuje się przez punkt $z'=f(z)$. S nazywać można podstawieniem albo substytucyą, a ze względu na obrót kuli — wprost obrotem. Sam punkt z' znaczyć często będziemy przez Sz.

Gdy naodwrót dany będzie związek postaci (6), ale o $\Delta \gtrless 1$, to kładąc $(a^2+b^2+c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}=\rho$, a w miejsce a, b, c, d, używając w (6):

$$\frac{a}{\rho},\ \frac{b}{\rho},\ \frac{c}{\rho},\ \frac{d}{\rho} \text{ (co jest dozwolone),}$$

mieć już będziemy:

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^2+\left(\frac{b}{\rho}\right)^2+\left(\frac{c}{\rho}\right)^2+\left(\frac{d}{\rho}\right)^2=1.$$

Dalej dostaniemy:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{\rho^2}=sin^2\frac{\alpha}{2},\quad \frac{d^2}{\rho^2}=cos^2\frac{\alpha}{2},$$

skąd już ξ, η, ζ obliczyć się dadzą, gdy według kąta α znaki funkcyi wstawy i dostawy oznaczymy.

Punkt z' możemy dalej poddać nowemu obrotowi:

$$T=(z',\ f'(z')),\ \text{gdzie}$$

$$f'(z')=\frac{(d'+c'i)z'-(b'-a'i)}{(b'+a'i)z'+(d'-c'i)}=z''=Tz'$$

wskazuje końcowe położenie punktu z' po dokonanym obrocie T. Lecz $z'=Sz$, a więc $z''=T(Sz)=TSz=$

$$=\frac{(d'+c'i)\dfrac{(d+ci)z-(b-ai)}{(b+ai)z+(d-ci)}-(b'-a'i)}{(b'+a'i)\dfrac{(d+ci)z-(b-ai)}{(b+ai)z+(d-ci)}-(d-ci)},\ \text{czyli}$$

(8) $$=\frac{(d''+c''i)z-(b''-a''i)}{(b''+a''i)z+(d''-c''i)},\ \text{gdzie}$$

(9) $$\begin{cases} a''=(ad'+a'd)-(bc'-b'c), & b''=(bd'+b'd)-(ca'-c'a), \\ c''=(cd'+c'd)-(ab'-a'b), & d''=-aa'-bb'-cc+dd'. \end{cases}$$

TSz daje formą (8) końcowe położenie punktu z po wyprowadzeniu go z jego pierwotnego położenia nasamprzód obrotem S, a potem obrotem T i dlatego mówimy, że TSz powstaje przez substytucyą złożoną:

$$S\,T = \left(z,\ \frac{(d''+c''i)z-(b''-a''i)}{(b''+a''i)z+(d''-c''i)} \right),$$

która widocznie również jest pewnym (wypadkowym) obrotem*). W ten sposób można dalej składać i więcej obrotów w jeden wypadkowy. W równaniu (6) połóżmy $z=z_1/z_2$, $z'=z_1'/z'_2$, to przybierze ono formę:

$$\frac{z_1'}{z_2'} = \frac{(d+ci)z_1-(b-ai)z_2}{(b+ai)z_1+(d-ci)z_2},$$

a z niej wynika, że położyć możemy:

(α) $z_1'=(d+ci)z_1-(b-ai)z_2$, $z_2'=(b+ai)z_1+(d-ci)z_2$,

albo (za zmianą znaków wszystkich spółczynników):

(β) $z_1'=-(d+ci)z_1+(b-ai)z_2$, $z_2'=-(b+ai)z_1-(d-ci)z_2$.

Przez to przedstawiliśmy obrót S jednorodną substytucyą (α) lub (β).

Lecz — nie tłómacząc rzeczy geometrycznie — musimy substytucye (α), (β) — jakkolwiek one jeden i tensam obrót określają — uważać (ze stanowiska analizy) za różne i obie zatrzymać, a to z tego powodu, że później z takich jednorodnych podstawień, tworzyć będziemy grupy. W grupie zaś znajdować się muszą wszystkie między sobą różne składniki (podstawienia, obroty i t. p.), pewnym wymogom zadość czyniące.

Podobnie obrót T dokonany na punkcie z' przedstawić będzie można dwoma współczesnemi podstawieniami:

(α') $z_1''=(d'+c'i)z_1'-(b'-a'i)z_2'$, $z_2''=(b'+a'i)z_1'+(d'-c'i)z_2'$;

(β') $z_1''=-(d'+c'i)z_1'+(b'-a'i)z'_2$, $z_2''=-(b'+a'i)z_1'-(d'-c'i)z_2'$.

Kombinując (α) z (α') lub (β) z (β') dostaniemy na oznaczenie obrotu ST przedewszystkiem substytucyę jednorodną:

(α'') $z_1''=(d''+c''i)z_1-(b''-a''i)z_2$, $z''_2=(b''+a''i)z_1+(d''-c''i)z_2$,

gdzie a'', b'', c'', d'' mają znaczenie (9). Druga substytucya, która ma dopełnić określenia tego obrotu powstanie z kombinacyi (α) z (β') lub (α') z (β) i wyniknie z (α'') przez zmianę znaków wszystkich spółczynników.

115. Grupy liniowych podstawień dwuścianu i jego zasadnicza funkcya Z. Przyjmijmy, że w kulę o promieniu $=1$ mamy wpisany wielościan umiarowy o grupie G, a podzieloną kulę według tego wielościanu mamy stereograficznie rzuconą na płaszczyznę (z).

---

*) Niektórzy autorowie poddając punkt z obrotom S, T, U w tym właśnie porządku, używają tego porządku liter nie tylko w złożonej substytucyi: STU, ale także i w naznaczaniu końcowego położenia punktu: $STUz$.

*

Wszystkim obszarom kuli (I+II) odpowiedzą na płaszczyźnie (z) obszary (I+II)' ograniczone łukami kół (niektóre z tych łuków mogą być odcinkami prostych). Na tak podzielonej płaszczyźnie (z) obierzmy dowolny punkt z i zastosujmy do niego wszystkie niejednorodne substytucye określające grupę G. Z takiego punktu z dostaniemy wtedy r lub r/ν punktów; będą one stereograficzną projekcyą grupy punktów (A) lub (B) [art. 113].

Kładąc $z=z_1/z_2$, będziemy już mogli stosować substytucye jednorodne powstające z grupy G i tworzące temsamem również grupę Γ (o rzędzie $2r$), każde bowiem złożenie kilku takich substytucyj określa znowu pewien obrót zawarty w G i wskutek tego znajdować się znowu musi w Γ.

W grupie dwuścianu o n krawędziach zawiera się grupa cykliczna obrotów:

$$S^\mu,\ \mu=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$$

a tę substytucyami niejednorodnemi lub jednorodnemi po obraniu punktu z odrazu bez stosowania relacyi (6) lub relacyj (α), (β) [art. poprzedzający] napisać możemy. Mamy tu bowiem:

$$z'=1_{\frac{2k\pi}{n}}\cdot z, \qquad k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Stąd — kładąc $1_{\frac{\pi}{n}}=\varepsilon$, $1_{-\frac{\pi}{n}}=\varepsilon_0$ — dostajemy:

$$(a)\ \begin{cases} z_1'=\varepsilon^k z_1 \\ z_2'=\varepsilon^k_0 z_2 \end{cases}, \qquad (b)\ \begin{cases} z_1'=-\varepsilon^k z_1 \\ z_2'=-\varepsilon^k_0 z_2 \end{cases}$$

$$k=0,1,2,\dots,n-1, \text{ albo}$$

$$(c) \qquad z_1'=\varepsilon^k z_1,\ z'_2=\varepsilon^k_0 z_2,\ k=0,1,2,\dots,2n-1.$$

Przyjmijmy, że jedna z osi symetryi dwuścianu (n-boku) wpada w oś pierwszorzędną $\xi\xi'$, a około niej dokonywamy obrotu T o kąt π. Uwzględniając, że tu $\xi=1$, $\eta=\zeta=0$, $\alpha=\pi$ dostaniemy z (6) [art. 114.] na określenie tego obrotu relacyę:

$$z'=\frac{0z+i}{iz+0}=\frac{1}{z}.$$

Stąd wynikną jednorodne substytucye:

$$(a')\ \begin{cases} z_1'=iz_2 \\ z_2'=iz_1 \end{cases}, \qquad (b')\ \begin{cases} z_1'=-iz_2 \\ z_2'=-iz_1 \end{cases}.$$

Kombinując (a) z (a'), a potem zmieniając znaki w tych złożeniach, dostaniemy na wyrażenie n obrotów $S^\mu T$, $2n$ jednorodnych substytucyj:

$$(a)''\ \begin{cases} z_1'=i.\varepsilon^k z_2 \\ z_2'=i.\varepsilon^k_0 z_1 \end{cases}, \quad (b'')\ \begin{cases} z_1'=-i.\varepsilon^k z_2 \\ z_2'=-i.\varepsilon^k_0 z_1 \end{cases}.\ k=0,1,2,\dots,n-1, \text{ albo:}$$

(c') $z_1'=i.\varepsilon^k z_2,\ z_2'=i.\varepsilon^k{}_0 z_1,\ k=0,1,2,\dots,2n-1.$

Cała grupa dwuścianu składać się będzie z $4n$ substytucyj (c'), (c'), a w substytucyach niejednorodnych określi się przez

(d) $$z'=\varepsilon^{2k}z,\ z'=\varepsilon^{2k}\frac{1}{z},\ k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Przejdźmy do 3 szczególnych grup punktów (B), [art. 113].

1. Punkty $z=\infty$, $z=0$ odpowiadające biegunom utworzą taką grupę o $\frac{2n}{n}=2$, $(\nu_3=n)$, punktach, a w zmiennych z_1, z_2 określa je równanie:

(A) $$z_1.z_2=0$$

(przy $z_1=0$ mamy $\frac{z_1}{z_2}=z=0$, a przy $z_2=0$ jest $\frac{z_1}{z_2}=z=\infty$).

2. Naroża dwuścianu t. j. punkty $1_{\frac{2k\pi}{n}}$, $k=0,1,2,\dots,n-1$, będą drugą taką szczególną grupą, $(\nu_2=2)$, a w zmiennych z_1, z_2 określa je równanie:

(B) $$\prod_{k=0}^{n-1}(z_1-\varepsilon^{2k}z_2)=z_1{}^n-z_2{}^n=0,$$

które **równaniem dwuścianu** nazywają.

3. Trzecią wreszcie szczególną grupę, $(\nu_1=2)$, utworzą punkta:

$$\eta_k=1_{\frac{2\pi k}{n}+\frac{2\pi}{2n}}=1_{\frac{2k+1}{n}\pi},\ k=0,1,2,\dots,n-1$$

odpowiadające środkom krawędzi dwuścianu. Są one n-tymi pierwiastkami odjemnej jednostki i są pierwiastkami równania:

(C) $$\prod_{k=0}^{n-1}(z_1-\eta^k z_2)=z^n{}_1+z^n{}_2=0.$$ Połóżmy:

(1) $F_1(z_1,z_2)=z^n{}_1+z^n{}_2$, $F_2(z_1,z_2)=z^n{}_1-z^n{}_2$, $F_3(z_1,z_2)=z_1z_2$,

to za podstawieniami (c) dostaniemy:

(e) $$\begin{cases} F_1(z'_1,z'_2)=(-1)^k(z^n{}_1+z^n{}_2)=(-1)^kF_1(z_1,z_2),\\ F_2(z'_1,z'_2)=(-1)^k(z^n{}_2-z^n{}_1)=(-1)^kF_2(z_1,z_2),\\ F_3(z'_1,z'_2)=z_1.z_2=F_3(z_1,z_2),\end{cases}$$

z podstawień zaś (c') mieć będziemy:

(e') $$\begin{cases} F_1(z_1',z_2')=i^n(-1)^k(z^n{}_2+z^n{}_1)=i^n(-1)^kF_1(z_1,z_2),\\ F_2(z_1',z_2')=i^n(-1)^k(z^n{}_2-z^n{}_1)=-i^n(-1)^kF_2(z_1,z_2),\\ F_3(z_1',z_2')=i^2z_1.z_2=i^2F_3(z_1,z_2).\end{cases}$$

Z (e) i (e') wynika, że funkcye

$$F^2{}_1,\ F^2{}_2,\ F_3{}^n$$

przez substytucye (c) wcale się nie zmienią, przez substytucye zaś (c') przechodzą na $i^{2n}.F_1{}^2$, $i^{2n}F_2{}^2$, $i^{2n}F_3{}^n$;

odtwarzają się więc z jednakim czynnikiem i^{2n}, a wszystkie są jednakiego wymiaru: $(2n)^{\text{tego}}$.

Z tego powodu będą już ilorazy F_α^2/F_β^n, $\alpha=1,2$, $\beta=3$ funkcyami niezmieniającemi się w całej grupie dwuścianu $[(c), (c')]$. Funkcya:

$$(2) \qquad Z=-\frac{1}{4}\frac{F_2^2}{F_3^n}=-\frac{(z_1^n-z_2^n)^2}{4(z_1z_2)^n}$$

mając tę własność, wykazuje w punktach $z=\infty$, $z=0$ wartość: $Z=\infty$, a w narożach dwuścianu wartość: $Z=0$ (gdyż tam $F_2=0$).

Aby i w punktach trzeciej grupy zbadać jej wartość, zauważmy, że między F_1, F_2, F_3 zachodzi identyczna relacya:

$$(3) \qquad F_1^2-F_2^2-4F_3^n=0. \text{ Stąd } \frac{F_1^2}{4F_3^n}-\frac{F_2^2}{4F_3^n}-1=0, \text{ czyli}$$

$$(4) \qquad Z-1=-\frac{F_1^2}{4F_3^n},$$

a ponieważ iloraz po prawej stronie jest zerem w punktach trzeciej grupy, więc w tych punktach jest $Z=1$. Ze związków (2) i (4) wynika:

$$(5) \qquad Z:Z-1:\,1=\left\{\frac{1}{2}(z_1^n-z_2^n)\right\}^2:\left\{\frac{1}{2}(z_1^n+z_2^n)\right\}^2:-(z_1z_2)^n.$$

W ilorazie Z mamy funkcyę niezmieniającą się w jednorodnej grupie dwuścianu. Dzieląc w nim licznik i mianownik przez z_2^{2n}, dostajemy funkcyę:

$$(6) \qquad Z(z)=-\frac{1}{4}\frac{(z^n-1)^2}{z^n}$$

niezmienną w niejednorodnej grupie (d).

Z, $Z(z)$ nazywamy zasadniczemi funkcyami dwuścianu; mają one tę własność, że w grupach punktów o charakteryzujących je liczbach ν_1, ν_2, ν_3 (takie grupy w następnych wielościanach nazywać będziemy krótko: $(\nu_1), (\nu_2), (\nu_3)$) ma odpowiednio wartości: $1, 0, \infty$.

Przy $n=2$ dostajemy grupę czwórki; określają ją albo: 8 substytucyj jednorodnych:

$$(f) \qquad \begin{cases} z'_1=\pm z_1 \\ z'_2=\pm z_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} z'_1=\mp z_2 \\ z'_2=\pm z_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} z'_1=\pm i\,z_1 \\ z'_2=\pm i\,z_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} z'_1=\mp i\,z_2 \\ z'_2=\pm i\,z_1 \end{cases}$$

albo: 4 niejednorodne substytucye:

$$(f') \qquad z'=\pm z,\ z'=\pm\frac{1}{z}.$$

116. Grupy liniowych podstawień czworościanu i ośmiościanu. W kulę o promieniu $=1$ wpisany sześcian niech ma względem układu osi takie położenie, że jego naroża wyrażają się spółrzędnemi:

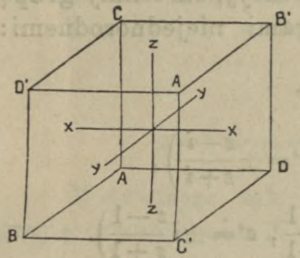


Fig. 31.

$$\xi, \eta, \zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \; A$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \; B$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \; C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \; D.$$

Pozostałe naroża A', B', C', D' mają spółrzędne o przeciwnych znakach (fig. 31).

Punkta A, B, C, D i A', B', C', D' tworzą czworościany (X, H, art. 109.), które są sobie wzajemne.

Każdy z nich ma środkowe g_1, g_2, g_3 [art. 107.] wpadające tu w osie spółrzędnych.

Obroty około nich tworzą grupę czwórki [f), f') art. poprzedz.] i wliczają się do grupy tak jednego, jak drugiego czworościanu.

Aby grupę czworościanu $X = ABCD$ dopełnić, trzeba utworzyć substytucye odpowiadające obrotom U, U^2 o kąty $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ około jednej z przekątni sześcianu (wysokości czworościanu) n. p. około AA'.

Przy wartościach ξ, η, ζ odpowiadających punktowi A i przy $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ dostajemy tu:

$$a = \xi . \sin\frac{\alpha}{2} = b = \eta \sin\frac{\alpha}{2} = c = \zeta \sin\frac{\alpha}{2} = d = \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2};$$

stąd więc obrót U określi niejednorodna substytucya:

$$z' = \frac{(1+i)z - (1-i)}{(1+i)z + (1-i)}, \text{ albo}$$

$$(U) \qquad z' = \frac{z+i}{z-i} \text{*)}.$$

Przy $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ dostaniemy $a = b = c = -d = \frac{1}{2}$, a więc:

---

*) gdyż $\frac{1-i}{1+i} = -i$.

$$z' = \frac{(-1+i)\,z-(1-i)}{(1+i)\,z+(-1-i)} = -\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{z+1}{z-1} \quad \text{czyli:}$$

$$(U^2) \qquad z' = i\,.\frac{z+1}{z-1}.$$

Stosując dalej prawidło składania substytucyj, określimy grupę obrotów czworościanu X takiemi substytucyami niejednorodnemi:

$$(a) \qquad (1,\ S,\ T,\ ST) = \left(z' = \pm z,\ z' = \pm\frac{1}{z}\right),$$

$$(b) \qquad (U,\ SU,\ TU,\ STU) = \left(z' = \pm\frac{z+i}{z-i},\ z' = \pm\frac{z-i}{z+i}\right),$$

$$(c) \qquad (U^2,\ SU^2,\ TU^2\ STU^2) = \left(z' = \pm i\frac{z+1}{z-1},\ z' = \pm i\frac{z-1}{z+1}\right).$$

W jednorodnych formach wyrażą ją:

substytucye (f) [art. poprzedz.], a więc:

$$(a') \quad \begin{cases} z'_1 = \pm z_1, \\ z'_2 = \pm z_2, \end{cases} \quad \begin{cases} z'_1 = \mp z_2, \\ z'_2 = \pm z_1, \end{cases} \quad \begin{cases} z'_1 = \pm i z_1, \\ z'_2 = \pm i z_2, \end{cases} \quad \begin{cases} z'_1 = \mp i z_2 \\ z'_2 = \pm i z_2 \end{cases}$$

i substytucye:

$$(b') \quad \left\{\begin{array}{ll} \begin{cases} z'_1 = \pm\frac{1}{2}[(1+i)z_1-(1-i)z_2] \\ z'_2 = \pm\frac{1}{2}[(1+i)z_1+(1-i)z_2] \end{cases} & \begin{cases} z'_1 = \pm\frac{1}{2}[(1+i)z_1-(1-i)z_2] \\ z'_2 = \mp\frac{1}{2}[(1+i)z_1+(1-i)z_2] \end{cases} \\ \begin{cases} z'_1 = \pm\frac{1}{2}[(1+i)z_1+(1-i)z_2] \\ z'_2 = \pm\frac{1}{2}[(1+i)z_1-(1-i)z_2] \end{cases} & \begin{cases} z'_1 = \pm\frac{1}{2}[(1+i)z_1+(1-i)z_2] \\ z'_2 = \mp\frac{1}{2}[(1+i)z_1-(1-i)z_2] \end{cases} \end{array}\right.$$

i wreszcie substytucye:

$$(c') \quad \left\{\begin{array}{ll} \begin{cases} z'_1 = \pm\frac{1-i}{2}(z_1+z_2) \\ z'_2 = \mp\frac{1+i}{2}(z_1-z_2) \end{cases} & \begin{cases} z'_1 = \pm\frac{1-i}{2}(z_1+z_2) \\ z'_2 = \pm\frac{1+i}{2}(z_1-z_2) \end{cases} \\ \begin{cases} z'_1 = \pm\frac{1-i}{2}(z_1-z_2) \\ z'_2 = \mp\frac{1+i}{2}(z_1+z_2) \end{cases} & \begin{cases} z'_1 = \pm\frac{1-i}{2}(z_1-z_2) \\ z'_2 = \pm\frac{1+i}{2}(z_1+z_2), \end{cases} \end{array}\right.$$

które z (b), (c) dostajemy, kładąc tam $i = -\frac{1-i}{1+i}$ i przywracając czynnik $\frac{1}{2}$ przedtem opuszczony.

Jasnem jest, że (*a*), (*b*), (*c*) lub (*a'*), (*b'*), (*c'*) będą zarazem grupami wzajemnego czworościanu *H*.

Obróćmy czworościan *X* około osi zz' o kąt 45^0. Zajmie on wtedy takie położenie, że jego krawędź zawierając się w płaszczyźnie $y0z$ będzie równoległą do osi yy'

Punkta z, z' po takim obrocie zajmą położenia:

$$z_1 = 1_{\frac{\pi}{4}} . z, \quad z'_1 = 1_{\frac{\pi}{4}} . z'. \qquad \text{Stąd:}$$

$$z = 1_{-\frac{\pi}{4}} . z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} . z_1, \quad z' = 1_{-\frac{\pi}{4}} . z'_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} . z'_1.$$

Wstawiając tak wyrażone z, z' w (*a*), (*b*), (*c*) dostaniemy na grupę czworościanu *X* w jego nowem położeniu *X'* substytucye $z'_1 =$

$$\text{(1)} \quad \begin{gathered} \pm z_1, \quad \pm\frac{i}{z_1}, \quad \pm i\frac{z_1\sqrt{2}-(1-i)}{(1+i)z_1+\sqrt{2}}, \quad \pm i\frac{z_1\sqrt{2}+(1-i)}{(1+i)z_1-\sqrt{2}} \\ \pm i\frac{z_1\sqrt{2}+(1+i)}{(1-i)z_1-\sqrt{2}}, \quad \pm i\frac{z_1\sqrt{2}-(1+i)}{(1-i)z_1+\sqrt{2}}. \end{gathered}$$

Z grupy czworościanu *X*, którą teraz według tego, czy ma być jednorodną lub nie — krótko przez:

$$(\alpha) \qquad G(..., f(z), ...), \text{ lub } G(..., f_1(z_1, z_2), f_2(z_1, z_2), ...)$$

naznaczmy, dojdziemy do grupy ośmiościanu o narożach leżących na osiach spółrzędnych, gdy utworzymy jeszcze substytucyę, odpowiadającą obrotowi *V* [art. 109.] o kąt $\frac{\pi}{2}$ około jednej z osi (przekątni ośmiościanu). Gdy oś zz' za oś takiego obrotu weźmiemy, to ten obrót określi się substytucyą $z' = iz$, a w jednorodnej formie substytucyami:

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} z'_1 = 1_{\frac{\pi}{4}} z_1 \\ z'_2 = 1_{-\frac{\pi}{4}} z_2 \end{cases}, \quad \text{albo:} \quad \begin{cases} z'_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} z_1 \\ z'_2 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}} z_2 \end{cases}$$

Grupą niejednorodnych substytucyj ośmiościanu będzie tedy:

$$\text{(3)} \quad \begin{gathered} G(..., f(z), ...) + G(..., f(zi), ...), \quad \text{czyli: } z' = \\ i^k z, \quad \frac{i^k}{z}, \quad i^k\frac{z+1}{z-1}, \quad i^k\frac{z-1}{z+1}, \quad i^k\frac{z+i}{z-i}, \quad i^k\frac{z-i}{z+i} \qquad k = 0, 1, 2, 3. \end{gathered}$$

W taki sam sposób dopełnimy grupę czworościanu *X'* do grupy ośmiościanu, obróconego o kąt $\frac{\pi}{4}$ około osi zz'.

Będzie ona: $z' =$

$$(4)\quad \begin{array}{l} i^k z,\ \dfrac{i^k}{z},\ i^k\dfrac{(1+i)z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}.z-(1-i)},\ i^k\dfrac{\sqrt{2}.z-(1-i)}{(1+i)z+\sqrt{2}}, \\ i^k.\dfrac{(1-i)z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}.z-(1+i)},\ i^k.\dfrac{\sqrt{2}.z-(1+i)}{(1-i)z+\sqrt{2}}, \end{array} \quad k=0,1,2,3.$$

Do grup jednorodnych dojdziemy, tworząc substytucye:

$$(5)\quad G(..f_1(z_1,z_2),f_2(z_1,z_2)...)+G\left(..f_1\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}z_1,\ \frac{1-i}{\sqrt{2}}z_2\right),f_2\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}z_1,\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)...\right),$$

gdzie G — [por. (α)] — jest grupą czworościanu X lub X', i gdzie widocznie $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\Big/\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=i$.

117. Zasadnicza funkcya Z czworościanu i ośmiościanu. Aby utworzyć zasadniczą funkcyę Z czworościanu X, zauważmy, że tu jako ilości punktów, zawartych w grupach (ν_1), (ν_2), (ν_3) mamy:

1. sześć punktów połowiących krawędzie (jako grupa (ν_1), $\nu_1=2$).

2. cztery naroża A, B, C, D (jako grupa (ν_2), $\nu_2=3$);

3. cztery środki ścian (jako grupa (ν_3), $\nu_3=3$); są-to naroża wzajemnego czworościanu H — art. 109).

Naroża mają rzuty stereograficzne:

$$(1)\quad (A)\ \alpha=\frac{1+i}{\sqrt{3}-1},\ (B)\ \beta=-\frac{1-i}{\sqrt{3}+1},\ (C)\ \gamma=-\frac{1+i}{\sqrt{3}-1},\ (D)\ \delta=\frac{1-i}{\sqrt{3}+1},$$

a równanie $(z_1-\alpha z_2)(z_1-\beta z_2)(z_1-\gamma z_2)(z_1-\delta z_2)=$

$$(2)\qquad z_1{}^4-2\sqrt{-3}.z_1{}^2.z_2{}^2+z_2{}^4=0$$

ma pierwiastki $\frac{z_1}{z_2}=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$. Punkty (ν_3) określą się równaniem:

$$(3)\qquad z_1{}^4+2\sqrt{-3}\,z_1{}^2.z_2{}^2+z_2{}^4=0.$$

Te równania określają odpowiednio czworościan X i H.

Co się tyczy sześciu środków krawędzi, to mają one spółrzędne $(\xi,\eta,\zeta)=(0,0,1),(0,0,-1),(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0)$; w stereograficznej projekcyi odpowiadają im punkta $z=z_1/z_2=\infty,0,1,-1,i,-i$, a równanie:

$$(4)\qquad z_1z_2(z_1{}^4-z_2{}^4)=0$$

ma właśnie takie wartości z_1/z_2 jako pierwiastki. Połóżmy:

$$(5)\qquad \begin{cases} F_1=z_1z_2(z_1{}^4-z_2{}^4)=t \\ F_2=z_1{}^4-2\sqrt{-3}\,z_1{}^2z_2{}^2+z_2{}^4=\Psi \\ F_3=z_1{}^4+2\sqrt{-3}\,z_1{}^2z_2{}^2+z_2{}^4=\Phi, \end{cases}$$

to wszystkie te 3 formy nie doznają wcale zmiany za temi substytucyami grupy, które do obrotów czwórki się odnoszą. W pozostałych substytucyach pozostaje t jeszcze ciągle niezmienione, podczas gdy Φ odtwarza się z czynnikiem $1_{\frac{2\pi}{3}}$, a Ψ z czynnikiem $1_{\frac{4\pi}{3}}$. Z tego wynika, że funkcye: Ψ^3, Φ^3, t^2, $\Phi.\Psi = W$ — trzy pierwsze 12^{go}, a czwarta 8^{go} wymiaru — nie zmieniają się wcale w całej jednorodnej grupie substytucyj.

Utwórzmy analogiczne funkcye:

$$(6) \quad \begin{cases} F'_1 = z_1 z_2 (z_1{}^4 + z_2{}^4) = t' \\ F'_2 = z_1{}^4 - 2\sqrt{3}\, z_1{}^2 z_2{}^2 + z_2{}^4 = \Psi' \\ F'_3 = z_1{}^4 + 2\sqrt{3}\, z_1{}^2 z_2{}^2 + z_2{}^4 = \Phi' \end{cases}$$

dla czworościanu X', to w jego grupie nie doznają wcale zmiany funkcye Ψ'^3 Φ'^3 t'^2, $\Phi'\Psi' = W'$.

Łatwo dalej sprawdzić można identyczne związki:

$$(7) \quad \begin{cases} 12\sqrt{-3}\, t^2 - \Phi^3 + \Psi^3 = 0 \\ 12\sqrt{3}\,.t'^2 - \Phi'^3 + \Psi'^3 = 0. \end{cases}$$ Połóżmy:

$$(8) \qquad \frac{\Psi^3}{\Phi^3} = Z, \quad \frac{\Psi'^3}{\Phi'^3} = Z',$$

to są-to funkcye, z których pierwsza niezmienną jest w grupie wielościanu X, druga w grupie wielościanu X', a każda z nich ma w punktach (ν_2) wartość $=0$, w punktach zaś (ν_3) wartość $=\infty$.

Co się tyczy punktów (ν_1), to zauważmy, że ze związków (7) wynika:

$$(9) \qquad Z - 1 = -12\sqrt{-3}\,\frac{t^2}{\Phi^3}, \quad Z' - 1 = -12\sqrt{3}.\frac{t'^2}{\Phi'^3},$$

a że ilorazy po prawej stronie mają w punktach (ν_1) wartość $=0$, więc widocznie funkcye Z, Z' mają w tych punktach wartość $=1$.

Z (8) i (9) wynikają definicye:

$$(10) \qquad Z : Z-1 : 1 = \Psi^3 : -12\sqrt{-3}\, t^2 : \Phi^3$$

$$(11) \qquad Z' : Z'-1 : 1 = \Psi'^3 : -12\sqrt{3}.t'^2 : \Phi'^3$$

a funkcye Z, Z' z analogicznemi własnościami jak funkcya Z dwuścianu, nazywają się i tu zasadniczemi. W zmiennej z mają one postać:

$$(12) \quad \begin{cases} Z(z) = \dfrac{(z^4 - 2\sqrt{-3}\,.z^2 + 1)^3}{(z^4 + 2\sqrt{-3}\,.z^2 + 1)^3} \\[2ex] Z'(z) = \dfrac{(z^4 - 2\sqrt{3}\,.z^2 + 1)^3}{(z^4 + 2\sqrt{3}\,.z^2 + 1)^3}. \end{cases}$$

W ośmiościanie mamy ν_1+2, $\nu_2=4$, $\nu_3=3$, $r=24$, a gdy jego naroża leżą na osiach spółrzędnych, to grupę (ν_2) jego naroży określi równanie:

$$F_2=t=z_1 z_2(z_1{}^4-z_2{}^4)=0.$$

Grupę (ν_3) środków jego ścian (naroży sześcianu) określi równanie: $F_3=W=\Psi\Phi=z_1{}^8+14z_1{}^4z_2{}^4+z_2{}^8=6.$

Co się tyczy grupy (ν_1) środków jego krawędzi, to spółrzędne tych punktów są: $(\xi,\ \eta,\ \zeta)=$

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),\quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),$$

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \left(0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ich stereograficznymi rzutami są na płaszczyźnie (z) punkta:

$$\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}},\ \pm(\sqrt{2}+1),\ \pm(\sqrt{2}-1),\ \pm i(\sqrt{2}+1),\ \pm i(\sqrt{2}-1)$$

a w zmiennych z_1, z_2 określi je równanie:

$$F_1=\chi=z_1{}^{12}-33\,z_1{}^8z_2{}^4-32\,z_1{}^4z_2{}^8+z_2{}^{12}=0.$$

Formy F_1, F_2, F_3 nie zmieniają się w grupie czworościanu, zawartej w grupie ośmiościanu. W dalszych jednorodnych substytucyach także i forma W wcale się nie zmieni, a formy t, χ przejdą na $-t$, $-\chi$.

Z tego wynika, że formy t^4, W^3, χ^2, wszystkie jednakowego, 24tego wymiaru są już niezmienne w całej jednorodnej grupie ośmiościanu. (W tej grupie już i t^2 nie zmienia się wcale). Między niemi zachodzi identyczny związek:

(13) $$\chi^2-W^3+108t^4=0.$$

Połóżmyż: $$Z_1=\frac{108\,t^4}{W^3},$$

to ze związku (13) mamy równocześnie:

$$Z_1-1=\frac{-\chi^2}{W^3},$$ a stąd:

(14) $$Z_1:Z_1-1:1=108t^4:-\chi^2:W^3$$

i to równanie określa zasadniczą funkcyę ośmiościanu w jego pierwszem położeniu. Ma ona wartości: 1, 0, ∞ odpowiednio w punktach: (ν_1), (ν_2), (ν_3).

Po obrocie ośmiościanu o kąt 45^0 około osi zz' dostaniemy:

$$F_1=\chi'=z_1^{12}+33z_1^8z_2^4-33z_1^4z_2^8-z_2^{12},$$
$$F_2=t'=z_1z_2(z_1^4+z_2^4),$$
$$F_3=W'=z_1^8-14z_1^4z_2^4+z_2^8 \quad \text{i odpowiednio:}$$
$$Z'_1:Z'_1-1:1=108t'^4:-\chi'^2:W'^3.$$

Jeżeli przez Z, Z' naznaczymy odwrotność funkcyj Z_1, Z', to w zmiennej z będą one miały postać:

$$(15) \qquad Z(z)=\frac{(z^8+14z^4+1)^3}{108z^4(z^4-1)^4}, \quad Z'(z)=\frac{(z^8-14z^4+1)^3}{108z^4(z^4+1)^4},$$

a w punktach: (ν_1), (ν_2), (ν_3) przybierają wartości 1, ∞, 0. Z określa proporcya:

$$(16) \qquad Z:Z-1:1=W^3:\chi^2:108t^4.$$

Analogicznie określa się Z'.

118. Grupy liniowych podstawień dwudziestościanu. Dwudziestościan wpisany w kulę o promieniu $=1$ niech ma takie położenie, że jego przekątnia x_6y_6 [fig. 32.] w oś zz' wpada, a jego środkowa q przez punkt Q przechodząca niech leży w płaszczyźnie $z0x$, przecinając w niej II^{ga} i IV^{ta} ćwiartkę.

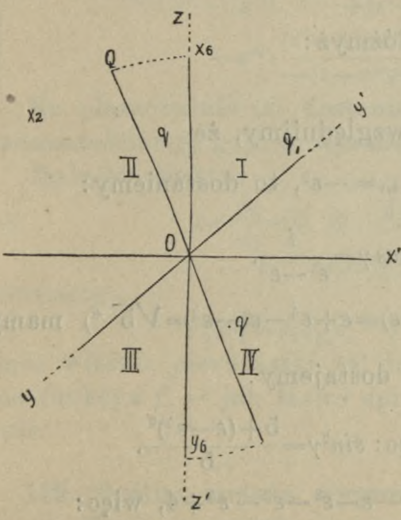


Fig. 32.

Przez to położenie dwudziestościanu jest już zupełnie dokładnie określone. Oś $q_1 \perp q$ [art. 110.] spada wtedy z osią yy'.

Około $zz'=x_6y_6$ odbywa się obrót S, około q_1 obrót U, a substytucye niejednorodne, określające obroty S^μ, U są:

(S^μ) $\quad z'=1_{\frac{2\mu\pi}{5}}.z$, $\mu=0,1,2,3,4.$

$$(U) \qquad z'=\frac{0.z-1}{z+0}=\frac{1}{z}.$$

W jednorodnych formach mieć będziemy:

$$(S^\mu) \qquad z'_1=\pm\varepsilon^{3\mu}z_1, \quad z'_2=\pm\varepsilon^{2\mu}z_1, \quad \varepsilon=1_{\frac{2\pi}{5}},$$

$$(U) \qquad z'_1=\pm z_2, \quad z'_2=\pm z_1.$$

Co się tyczy obrotu T o kąt π około osi q, to — znacząc $\sphericalangle(z,q)=\gamma$ — dostajemy przedewszystkiem na spółrzędne punktu Q (na kuli): $\xi=-\sin\gamma$, $\eta=0$, $\zeta=\cos\gamma$. Stąd wynika, że:

$$a=-\sin\gamma, \quad b=0, \quad c=\cos\gamma, \quad d=0, \qquad \text{i że więc:}$$

$$Tz = \frac{\cos\gamma . i . z - \sin\gamma . i}{-\sin\gamma . i . z - \cos\,\gamma . i},$$

(1)
$$TSz = \frac{\cos\gamma . i . 1_{\frac{\pi}{5}} z - \sin\gamma . i . 1_{-\frac{\pi}{5}}}{-\sin\gamma . i . 1_{\frac{\pi}{5}} . z - \cos\gamma . i . 1_{-\frac{\pi}{5}}}.$$

Ponieważ wyznacznik Δ tej substytucyi jest już $=1$, więc możemy położyć wprost: $-\cos\,\gamma . \sin\,\frac{\pi}{5} = \pm d$.

Lecz $d = \cos\,\frac{\alpha}{2}$, a że ST jest obrotem o peryodzie 3, [art. 111], a więc $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$. W ten sposób dostajemy:

$$-\cos\gamma . \sin\frac{\pi}{5} = \pm\cos\frac{\pi}{3} = \pm\frac{1}{2};$$

a że $\cos\gamma$ ma być dodatne, $\sin\,\frac{\pi}{5}$ jest > 0, więc ostatecznie położyć trzeba $\cos\,\gamma . \sin\,\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}$. Połóżmyż:

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1_{\frac{\pi}{5}} - 1_{\frac{\pi}{5}}}{2i} \text{ i uwzględnijmy, że}$$

$1_{\frac{\pi}{5}} = -1_{\frac{6\pi}{5}} = -\varepsilon^3$, $1_{-\frac{\pi}{5}} = -1_{\frac{4\pi}{5}} = -\varepsilon^2$, to dostaniemy:

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{2i},\quad \cos\gamma = \frac{i}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}.$$

Lecz ze związku $(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(\varepsilon^4 - \varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 = \sqrt{5}$ *) mamy: $\varepsilon^2 - \varepsilon^3 = \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon^4 - \varepsilon}$, a uwzględniając to, dostajemy:

(2)
$$\cos\,\gamma = \frac{\varepsilon - \varepsilon^4}{i\sqrt{5}}, \text{ a więc: } \sin^2\gamma = \frac{5 + (\varepsilon - \varepsilon^4)^2}{5}.$$

Lecz, że $5 = (\varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3)^2 = -\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 - \varepsilon^4 + 4$, więc:

$$\sin^2\gamma = -\frac{\varepsilon + \varepsilon^4 - 2}{5} = -\frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)^2}{5} \text{ i wreszcie:}$$

$$\sin\,\gamma = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{i\sqrt{5}}.$$

---

*) Według art. 25. tw. I. jest $-1 - \varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 - \varepsilon^4 = 0$, a więc $-\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 - \varepsilon^4 + 4 = 5$. Z drugiej znowu strony — uwzględniając: $\varepsilon^5 = 1$ — dostajemy: $[(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(\varepsilon^4 - \varepsilon)]^2 = (\varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3)^2$ właśnie $= -\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 - \varepsilon^4 + 4$, a więc $= 5$. Stąd już związek użyty w tekście wynika.

Wstawiając (2), (3) w (1) dostaniemy:

$$T: \left| \begin{array}{l} z' = \dfrac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}, \text{ albo} \\ \sqrt{5}\,.\,z_1 = \mp(\varepsilon-\varepsilon^4)z_1 \pm (\varepsilon^2-\varepsilon^3)z^2, \\ \sqrt{5}\,.\,z_2 = \pm(\varepsilon^2-\varepsilon^3)z_2 \pm \varepsilon-\varepsilon^4)z_2). \end{array} \right.$$

Z substytucyj S, T, U można już utworzyć całą grupę dwudziestościanu [art. 110, (A)]. Będzie ona w jednorodnej formie:

$$A: \left| \begin{array}{l} S^\mu: \begin{cases} z'_1 = \pm\,\varepsilon^{3\mu} z_1 \\ z'_2 = \pm\,\varepsilon^{2\mu} z_2 \end{cases}, \quad S^\mu U: \begin{cases} z'_1 = \mp\,\varepsilon^{2\mu} z_2 \\ z'_2 = \pm\,\varepsilon^{3\mu} z_1 \end{cases} \\ S^\mu T S^\nu: \begin{cases} \sqrt{5}\,.\,z'_1 = \pm\,\varepsilon^{3\nu}\{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{3\mu} z_1 + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{2\mu} z_2\} \\ \sqrt{5}\,.\,z'_2 = \pm\,\varepsilon^{2\nu}\{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{3\mu} z_1 + (\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{2\mu} z_2\} \end{cases} \\ S^\mu T S^\nu U: \begin{cases} \sqrt{5}\,.\,z'_1 = \mp\,\varepsilon^{2\nu}\{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{3\mu} z_1 + (\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{2\mu} z_2\} \\ \sqrt{5}\,.\,z'_2 = \pm\,\varepsilon^{3\nu}\{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{3\mu} z_1 + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{2\mu} z_2\} \end{cases} \\ \qquad\qquad \mu,\ \nu = 0, 1, 2, 3, 4,\ \mu \gtreqless \nu. \end{array} \right.$$

a w niejednorodnej $z' =$

$$B: \left| \begin{array}{l} \varepsilon^\mu . z, -\dfrac{\varepsilon^{4\mu}}{z}, \ \varepsilon^\nu . \dfrac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^\mu z + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^\mu z + (\varepsilon-\varepsilon^4)}, \\ -\varepsilon^{4\nu} . \dfrac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^\mu . z + (\varepsilon-\varepsilon^4)}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^\mu z + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)} \text{*)} \end{array} \right.$$

Na płaszczyźnie (z) dostaniemy grupę punktów (ν_2) [naroży dwudziestościanu], gdy w wyrażeniach (B) położymy $z=0$.

Będą-to punkta:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = 0,\ \infty,\ \varepsilon^\nu(\varepsilon+\varepsilon^4),\ \varepsilon^\nu(\varepsilon^2+\varepsilon^3), \qquad (4)$$
$$\nu = 0, 1, 2, 3, 4.$$

a równanie:

$$F_2 = f = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}) = 0, \qquad (5)$$

mające właśnie pierwiastki (4) jest równaniem dwudziestościanu. Sama funkcya f — jak łatwo sprawdzić — nie zmienia się w całej grupie.

119. Ogólna metoda wyprowadzania formy F_3. Formę F_3, a potem F_1 wyprowadzimy tu metodą, którą również i w teoryi czworościanu lub ośmiościanu zastosować można.

---

*) Oprócz przytoczonych wykładów o dwudziestościanie por. F. Klein. *Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Annalen* T. 9. str. 183—208. P. Gordan wyprowadza grupy wielościanów czysto algebraiczną drogą w rozprawie *„Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen“. Math. Annalen* T. 12. str. 23 — 46. Por. także A. Cayley. *„On finite Groups of linear Transformations of a Variable. Math. Annalen.* T. 16. str. 260 — 266.

Potęga $F_2^{\nu_2}$ ma w czworościanie znaczenie Ψ^3, a w ośmiościanie znaczenie t^2; bez różnicy więc, czy do czworościanu, czy ośmiościanu, czy wreszcie do dwudziestościanu należy, nie zmienia się już w całej odpowiedniej grupie jednorodnych substytucyj. Stąd wynika, że równanie:

$$F_2^{\nu_2}=\lambda \tag{1}$$

już o wymiarze r przy dowolnej wartości $\lambda \neq 0$ wyznaczy na płaszczyznie (z) r punktów tworzących grupę punktów wielościanu*).

Przy $\lambda=0$ mamy tych punktów w (1) również r, ale z nich po ν_2 wpada w jedno naroże.

Gdy w jednym z punktów (ν_3) — w jednym ze środków S ścian wielościanu — mamy $z_1=\zeta_1$, $z_2=\zeta_2$, i

$$F_2^{\nu_2}=\lambda_3, \tag{2}$$

to $F_2^{\nu_2}$ ma we wszystkich punktach (ν_3) wartość λ_3, a para (ζ_1, ζ_2) trzykrotnie zadość czyni równaniu.

Podobnie, gdy w jednym ze środków S' krawędzi wielościanu — w jednym z punktów grupy (ν_1) o określnikach (ζ'_1, ζ'_2) — mamy:

$$F_2^{\nu_2}=\lambda_1, \tag{3}$$

to $F_2^{\nu_2}$ ma tę samą wartość λ_1 we wszystkich punktach (ν_1), a para (ζ'_1, ζ'_2) dwukrotnie spełnia równanie (3). W pierwszym bowiem rązie punkt należy zawsze do trzech obszarów (I+II), w drugim do dwóch takich obszarów [art. 113.].

Niech $\sigma=\lambda_1$ lub λ_3, to równanie:

$$F_2^{\nu_2}-\sigma=0 \tag{4}$$

ma mieć takie własności: W pierwszym razie mamy przy obranem z_2 dostać po dwa razy powtarzające się z_1, a przy obranem z_1 po dwa razy powtarzające się z_2. W drugim razie mamy przy obranem z_2 dostać same z_1 po trzy razy się powtarzające a przy obranem z_1 same, po trzy razy się powtarzające z_2.

Aby dostać warunki, przy których to zachodzi, przyjmijmy, że (ζ_1, ζ_2) jest już parą zaliczającą się do pierwszego, lub drugiego przypadku. W miejsce równania (4) zauważmy związek:

$$\Phi_2(z_1, z_2)=F_2^{\nu_2}-\sigma.\left(\frac{\alpha z_1+\beta z_2}{\alpha\zeta_1+\beta\zeta_2}\right)^r=0. \tag{5}$$

*) Obrawszy pewną wartość z_2 będziemy mieli w (1) równanie r^{go} stopnia o niewiadomej z_1. Z niego dostaniemy r pierwiastków $z'_1, z''_1, \ldots$ takich, że (z'_1, z_2), $(z''_1, z_2), \ldots$ określać właśnie będą grupę tych r punktów wielościanu, w których $F_2^{\nu_2}$ ma wartość λ.

przy dowolnych stałych α, β. Równanie $\Phi_2(z_1, \zeta_2)=0$ ma między innymi także i pierwiastek ζ_1, gdyż przy $z_2=\zeta_2$ i $z_1=\zeta_1$ przechodzi $\Phi_2(\zeta_1, \zeta_2)$ na $F_2^{\nu_2}(\zeta_1, \zeta_2)-\sigma$. Dalej $z_1=\zeta_1$ będzie przy $z_2=\zeta_2$ dwukrotnym, lub trzykrotnym pierwiastkiem równania (4), jeżeli będzie takimże pierwiastkiem równania $\Phi_2(z_1, \zeta_2)=0$. To samo odnosi się do $z_2=\zeta_2$, kiedy z_1 ma mieć wartość ζ_1.

Przy dwukrotnych (ζ_1, ζ_2) muszą się (por. uwagę przy końcu art. 74$^{\text{go}}$) — na tem miejscu $(z_1, z_2)=(\zeta_1\zeta_2)$ spełnić takie związki:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1}\Phi_2 &= \nu_2 F_2^{\nu_2-1}\frac{\partial F_2}{\partial z_1} - \frac{\sigma r \alpha h^{r-1}}{\alpha\zeta_1+\beta\zeta_2}=0 \\ \frac{\partial}{\partial z_2}\Phi_2 &= \nu_2 F_2^{\nu_2-1}\frac{\partial F_2}{\partial z_2} - \frac{\sigma r \beta h^{r-1}}{\alpha\zeta_1+\beta\zeta_2}=0, \end{aligned}$$

gdzie dla krótkości położono $(\alpha z_1+\beta z_2)/(\alpha\zeta_1+\beta\zeta_2)=h$. Z nich wynika:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_2}{\partial z_1}, & \alpha \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z_2}, & \beta \end{vmatrix} = \frac{\partial F_2}{\partial z_1}\beta - \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\alpha=0,$$

a to wskazuje, że, gdy tylko położymy:

$$(8) \qquad \alpha=k.\frac{\partial F_2}{\partial z_1},\quad \beta=k.\frac{\partial F_2}{\partial z_2} \text{ dla } z_1=\zeta_1,\ z_2=\zeta_2,\ [k \text{ dowolne}]$$

to już równanie $\Phi_2=0$ posiadać będzie dwukrotne miejsce zerowe (ζ_1, ζ_2).

Gdy na miejscu zerowem (ζ_1, ζ_2) ma w równaniu $\Phi_2=0$ do ζ_1 należeć dwukrotny pierwiastek ζ_2 i odwrotnie, to muszą na tem miejcu — oprócz (6) — sprawdzić się jeszcze związki: $\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\Phi_2=0$, $\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\Phi_2=0$, które — uwzględniając (8) — w ten sposób napisać można:

$$(\alpha) \qquad \nu_2 F_2^{\nu_2-1}\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1^2}=\alpha^2\left[\frac{\sigma.r.(r-1).h^{r-2}}{(\alpha\zeta_1+\beta\zeta_2)^2}-\nu_2(\nu_2-1).\frac{F_2^{\nu_2-2}}{k^2}\right]$$

$$(\beta) \qquad \nu_2 F_2^{\nu_2-1}\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2^2}=\beta^2.\left[\frac{\sigma.r.(r-1).h^{r-2}}{(\alpha\zeta_1+\beta\zeta_2)^2}-\nu_2(\nu_2-1).\frac{F_2^{\nu_2-2}}{k^2}\right].$$

Lecz na miejscu (ζ_1, ζ_2) jest $\Phi_2=0$, a że Φ_2 — jako jednorodna funkcya — da się wyrazić liniowo jednorodnie, [art. 75., tw. I.], przez pochodne $\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z_1^2}, \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z_2^2}, \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z_1\partial z_2}$, a z nich na miejscu (ζ_1, ζ_2) dwie pierwsze są zerami, więc na tem miejscu być równocześnie musi $\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z_1 \partial z_2}=0$. Ten ostatni związek można znowu napisać w postaci:

$$(\gamma)\quad \nu_2 F_2^{\nu_2-1}\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1 \partial z_2}=\alpha\beta\left[\frac{\sigma . r . (r-1) . h^{r-2}}{(\alpha\zeta_1+\beta\zeta_2)^2}-\nu_2(\nu_2-1)\frac{F_2^{\nu_2-1}}{k^2}\right].$$

Z (α), (β), (γ) wynika odrazu związek:

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1^2}\cdot\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2^2}-\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1 \partial z_2}\right)^2=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1^2}, & \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1 \partial z_2}\\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2 \partial z_2}, & \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2}\end{vmatrix}=0$$

spełniający się zawsze na każdem trzykrotnem miejscu zerowem $(z_1, z_2)=(\zeta_1, \zeta_2)$ funkcyi Φ_2, czyli równania $F_2^{\nu_2}-\lambda_3=0$. Że zaś taka para (ζ_1, ζ_2) określa środek S dowolnej ściany, więc stąd wynika, że wszystkie pary spełniające związek:

$$(9)\qquad H(F_2)=\frac{1}{121}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 F_2(z_1 z_2)}{\partial z_1^2}, & \frac{\partial^2 F_2(z_1 z_2)}{\partial z_1 \partial z_2}\\ \frac{\partial^2 F_2(z_1 z_2)}{\partial z_2 \partial z_1}, & \frac{\partial^2 F_2(z_1 z_2)}{\partial z_2^2}\end{vmatrix}=0^{*)}$$

są parami określającemi środki ścian. Wymiar tego związku wyraża się liczbą $2\left(\frac{r}{\nu_2}-2\right)$, a że ta u wszystkich trzech rozważanych wielościanów $=\frac{r}{\nu_3}$, ilości środków S, więc stąd wynika, że równanie (9) zredukować się musi do:

$$c_3 F_3(z_1, z_2)=0.$$

Dla dwudziestościanu mieć będziemy:

$$(10)\qquad \frac{1}{121}H(F_2)=F_3=$$
$$-(z_1^{20}+z_2^{20})+228(z_1^{15}z_2^{5}-z_1^{5}z_2^{15})-494\,z_1^{10}z_2^{10}.$$

Aby zachowanie się tej formy w całej grupie zbadać, pójdziemy drogą, którą również do F_3 czworościanu i ośmiościanu zastosować można.

Pewną substytucyę:

$$S=\begin{pmatrix}z_1, \alpha_1 z_1+\beta_1 z_2\\ z_2, \alpha_2 z_1+\beta_2 z_2\end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}=+1$$

zawartą w grupie przedstawmy równaniami:

$$(11)\qquad z_1=\alpha_1 z'_1+\beta_1 z'_2,\quad z_2=\alpha_2 z'_1+\beta_2 z'_2,$$

to z nich mamy:

---

*) Spółczynnik $\frac{1}{121}$ przydano tu dla uproszczenia późniejszych form.

$$\frac{\partial z_1}{\partial z'_1}=\alpha_1,\ \frac{\partial z_1}{\partial z'_2}=\beta_1;\ \frac{\partial z_2}{\partial z'_1}=\alpha_2,\ \frac{\partial z_2}{\partial z'_2}=\beta_2.$$

Połóżmy dalej $F_2(\alpha_1 z'_1+\beta_1 z'_2,\ \alpha_2 z'_1-\beta_2 z'_2)=P_2(z'_1,\ z'_2)$, to P_2 będzie$=KF_2(z_1, z_2)$, gdzie (z_1, z_2) są z (z'_1, z'_2) połączone równaniami (11), a spółczynnik K jest w czworościanie $=1$, $1_{\frac{4\pi}{3}}$, w ośmiościanie $=+1$, -1, a w dwudziestościanie $=+1$.

Pochodne funkcyi P_2 można — za uwzględnieniem (11) — w ten sposób przedstawić:

$$(12)\quad \frac{\partial P_2}{\partial z'_1}=K\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\alpha_1+K\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\alpha_2,\quad \frac{\partial P_2}{\partial z'_2}=K\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\beta_1+K\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\beta_2.$$

$$(13)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P_2}{(\partial z'_1)^2}&=K\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1{}^2}\alpha_1+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1\partial z_2}\alpha_2\right)\alpha_1+K\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2\partial z_1}\alpha_1+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2{}^2}\alpha_2\right)\alpha_2\\
\frac{\partial^2 P_2}{(\partial z'_2)^2}&=K\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1{}^2}\beta_1+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1\partial z_2}\beta_2\right)\beta_1+K\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1\partial z_2}\beta_1+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2{}^2}\beta_2\right)\beta_2\\
\frac{\partial^2 P_2}{\partial z'_1\,\partial z'_2}&=K\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1{}^2}\beta_1+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1\partial z_2}\beta_2\right)\alpha_1+K\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2\partial z_1}\beta_1+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2{}^2}\beta_2\right)\alpha_2
\end{aligned}\right.$$

Stąd wyniknie:

$$H(P_2)=K^2\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2 H(F_2),$$

a że $(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)=1$ w każdej substytucyi grupy, więc:

$$(14)\qquad H(P_2)=K^2.H(F_2)=c_3K^2.F_3.$$

Z tego widzimy, że u czworościanu odtwarza się F_3 z czynnikiem 1, lub $1_{\frac{2\pi}{3}}$, w ośmiościanie zaś i dwudziestościanie nie zmienia się wcale ($K^2=1$).

Funkcya $F_3{}^{\nu_3}$ już wymiaru r^{tego}, nie będzie się wcale zmieniać w całej grupie rozważanego wielościanu, a przy obranej wartości μ i $z_2=\zeta'_2$ da równanie $F_3{}^{\nu_3}=\mu$ grupę r punktów.

120. Wyprowadzanie formy F_1. Zasadnicza funkcya Z dwudziestościanu. Gdy w punktach (ν_1) t. j. w środkach S' krawędzi ma $F_3{}^{\nu_3}$ wartość μ_1, to równanie $F_3{}^{\nu_3}=\mu_1$ spełnia się samemi dwukrotnemi parami $(\zeta'_1,\ \zeta'_2)$ i to temi samemi, dla jakich jest $F_2{}^{\nu_2}=\lambda_1$ [art. 119, (3)]. Z równań tych dostajemy dla pary (ζ'_1, ζ'_2):

$$\lambda_1 F_3{}^{\nu_3}-\mu_1 F_2{}^{\nu_2}=0,$$

a że ta para dwukrotnie ma spełniać to równanie, więc dla $z_1=\zeta'_1$ $z_2=\zeta'_2$ ma być równocześnie:

*

$$(1)\quad \begin{aligned} &\lambda_1 . \nu_3 F_3^{\nu_3-1}\frac{\partial F_3}{\partial z_1}-\mu_1\nu_2 F_2^{\nu_2-1}\frac{\partial F_2}{\partial z_1}=0 \\ &\lambda_1 \nu_3 F_3^{\nu_3-1}\frac{\partial F_3}{\partial z_2}-\mu_1\nu_2 F_2^{\nu_2-1}\frac{\partial F_2}{\partial z_2}=0, \end{aligned}$$

$$\text{dla } (z_1, z_2)=(\zeta'_1, \zeta'_2).$$

Współczesność równań (1) wyraża związek:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial z_1}, & \frac{\partial F_3}{\partial z_2} \end{vmatrix}=0$$

a że ζ'_1, ζ'_2 mają określać dowolny punkt z grupy (ν_1), więc stąd pochodzi, że równaniu:

$$(2)\qquad J(F_2, F_3)=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial z_1}, & \frac{\partial F_3}{\partial z_2} \end{vmatrix}=0$$

zadość czyniące (z_1, z_2) są zawsze określnikami grupy (ν_1). Równanie (2) jest wymiaru $\left(\frac{r}{\nu_2}+\frac{r}{\nu_3}-2\right)$, a że ta liczba$=\frac{r}{\nu_1}$, więc stąd wynika, że to równanie zredukuje się ostatecznie do związku:

$$c_1 F_1=0.$$

Dla dwudziestościanu dostaniemy:

$$-\frac{1}{20}J(F_2, F_3)=F_1=T=$$

$$(z_1^{30}+z_2^{30})+522(z_1^{25}z_2^{5}-z_1^{5}z_2^{25})-10005(z_1^{20}z_2^{10}+z_1^{10}z_2^{20}).$$

Aby zmienność formy F_1 w grupie całej zbadać, napiszmy znowu substytucyę S w formie (11) — art. poprzedz. — i naznaczmy przetworzoną funkcyę F_3 przez P_3, to wtedy $P_3=K^2F_3$, a że $P_2=KF_2$ więc dostaniemy:

$$(3)\qquad J(P_2, P_3)=K^3 J(F_2, F_3).$$

Z tego wynika, że F_1 czworościanu i dwudziestościanu nie zmienia się wcale, w ośmiościanie zaś już-to nie zmienia się, już-to przechodzi na $-F_1$.

Tak więc łatwą drogą, łatwiejszą niż przez uprzednie wyznaczenie grup (ν_1), (ν_3), utworzyliśmy F_1 i F_3 dla dwudziestościanu. Aby związki liniowe identyczne:

$$(4)\qquad a_1F_1^{\nu_1}+a_2F_2^{\nu_2}+a_3F_3^{\nu_3}=0,$$

jakie zachodzą między trzema formami u wszystkich trzech wielościanów, teoretycznie uzasadnić i stałe a_1, a_2, a_3 oznaczyć, zauważmy wyrażenie:

(5) $$a_1 F_1^{\nu_1} + a_3 F_3^{\nu_3}$$

z dowolnemi stałemi a_1, a_3.

Wyrażenie to jest oczywiście także niezmienne w całej grupie. Żądając, aby ono na pewnem obranem miejscu (ζ_1, ζ_2) znikało, dostajemy związek $a_1 F_1^{\nu_1}(\zeta_1 \zeta_2) + a_3 F_3^{\nu_3}(\zeta_1 \zeta_2) = 0$, z którego oznaczone a_1, a_2 (stosunek $a_1 : a_2$) wstawione w (5) dają funkcyę znikającą na miejscu (ζ_1, ζ_2) i na miejscach z niem równoważnych. Pomyślmy sobie $a_1 : a_2$ tak oznaczone, że (5) znika na jednem z miejsc grupy (ν_2). Wtedy trzeba położyć $a_1 F_1^{\nu_1} + a_3 F_3^{\nu_3} = -a_2 F_2^{\nu_2}$, gdzie a_2 jest jeszcze nieoznaczoną stałą. Lecz stosunek $a_1 : a_3$ musi być dla ośmiościanu i dwudziestościanu $= -1$, gdyż $F_1^{\nu_1}$, $F_3^{\nu_3}$ zawierają tam dodajniki z_1^r, z_2^r, a w $F_2^{\nu_2}$ takich dodajników nie ma. Położmyż $a_1 = 1$, $a_3 = -1$, to gdy z $F_1^{\nu_1}$, $F_2^{\nu_2}$, $F_3^{\nu_3}$ wybierzemy dowolnie równoimienne dodajniki $A_1 z_1^\alpha z_2^\beta$, $A_2 z_1^\alpha z_2^\beta$, $A_3 z_1^\alpha z_2^\beta$, dostaniemy związek $A_1 - A_3 + a_2 A_2 = 0$, z którego a_2 obliczymy.

Z 3 form czworościanu posiadają $F_2^{\nu_2}$, $F_3^{\nu_3}$ dodajniki z_1^{12}, z_2^{12}, a $F_1^{\nu_1}$ takich dodajników nie ma. Tu więc trzeba położyć $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, a ze związku $A_2 - A_3 + a_1 A_1 = 0$ obliczy się a_1. Dla dwudziestościanu dostaniemy jako związek (4):

(6) $$T^2 + H^3 - 1728 f^5 = 0$$

Położmyż: $Z_1 = \dfrac{1728 f^5}{H^3}$, a więc $Z_1 - 1 = \dfrac{T^2}{H^3}$,

to w funkcyi Z_1 mamy zasadniczą funkcyę dwudziestościanu o wartościach 1, 0, ∞ w punktach (ν_1), (ν_2), (ν_3).

Gdy znowu — jak w ośmiościanie — naznaczymy odwrotność funkcyi Z_1 przez Z, dostaniemy:

(7) $$Z = \frac{H^3}{1728 f^5}, \quad Z - 1 = \frac{-T^2}{1728 f^5}$$ i proporcyę:

(8) $$Z : Z-1 : 1 = H^3 : -T^2 : 1728 f^5.$$

W zmiennej z ma ta funkcya postać:

(9) $$Z(z) = \frac{-[(z^{20}+1) - 228(z^{15} - z^5) + 494 z^{10}]^3}{1728[z(z^{10} + 11 z^5 - 1)]^5}$$

i ma wartości: 1, ∞, 0 w punktach (ν_1), (ν_2), (ν_3).

Dla ośmiościanu i dwudziestościanu utworzyliśmy oprócz funkcyj Z_1 jeszcze funkcye Z, różniące się tem od Z_1, że w punktach (ν_1), (ν_2), (ν_3) mają odpowiednio wartość: 1, ∞, 0.

Pomieniajmyż w tych dwóch wielościanach znaczenia liczb ν_2, ν_3 ze sobą tak, że w nich ν_2 odnosi się do środków ścian, a ν_3 do naroży, to mamy teraz:

	ν_1	ν_2	ν_3
w dwuścianie	2	2	n
w czworościanie	2	3	3
w ośmiościanie	2	3	4
w dwudziestościanie	2	3	5

a funkcye zasadnicze Z wszystkich wielościanów przybierają w punktach (ν_1), (ν_2), (ν_3) odpowiednio wartości 1, 0, ∞. *)

121. Zachowanie się funkcyj Z w grupach rozszerzonych. Funkcye $Z(z)$ nie zmieniając się wcale w grupie niejednorodnych substytucyj odtwarzają się bez żadnej zmiany w obszarach (I+II),... w ten sposób, że w każdych dwóch równoważnych punktach są tej samej wartości.

Lecz ważnem jest zbadać zmianę funkcyi po dowolnem odbiciu punktu z, t. j. zbadać jej zachowanie się w grupie rozszerzonej. W tym celu zauważmy, że po wyłączeniu czworościanu X mają wszystkie rozważane wielościany płaszczyznę $x0z$ za płaszczyznę symetryi. Odbicie w niej określa substytucya $\tau=(z, z_0)$, gdzie $z_0=x-yi$, jeżeli $z=x+yi$. Gdy $G=[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_s, ...]$ jest grupą niejednorodnych substytucyj wielościanu, to wszystkie odbicia określają substytucye: $[\sigma_1\tau, \sigma_2\tau, \sigma_3\tau, ..., \sigma_s\tau, ...]$ Poddajmyż funkcyę $Z(z)$ odbiciu $\sigma_s\tau$, to otrzymamy: $Z(z)_{\sigma_s\tau}=[Z(z)_{\sigma_s}]_\tau$. Lecz $Z(z)_{\sigma_s}=Z(z)$, a stąd wynika, że $Z(z)_{\sigma_s\tau}=Z(z)_\tau=Z(z_0)$. To znaczy:

I. *Po każdem odbiciu wartość zasadniczej funkcyi punktu z przechodzi na wartość sprzężoną. [N. B. Wszystkie funkcye $Z(z)$ mają spółczynniki rzeczywiste].*

Gdy $x+yi$ leży na boku λ trójkąta I (a więc i II), to odbicie w tym boku nie narusza wcale tego punktu [art. 113]. A że w tym punkcie ma mieć funkcya zasadnicza równocześnie i wartość $Z(z)$ i wartość $Z(z_0)$, więc musi być $Z(z)=Z(z_0)$, co znaczy, że $Z(z)$ ma tam wartość rzeczywistą. Ponieważ to w innych punktach zajść już nie może, więc stąd wnosimy:

II. *Gdy $Z=U(x,y)+V(x,y)i$, to $V(x,y)=0$ daje wszystkie koła i proste, które płaszczyznę (z) dzielą na trójkąty* I, II *stereograficznie rzucone z kuli podzielonej podług wielościanu.*

---

*) Por. F. Klein. l. c. str. 21.

122. Przedstawienie dowolnej funkcyi wielościanu przez funkcyę Z. Przyjmijmy, że mamy wymierną funkcyę $F(z)$, różną od $Z(z)$, a niezmieniającą się w grupie G.

W punkcie dowolnym z niech ma $F(z)$ wartość v, a $Z(z)$ wartość w tak, że mamy równoczesne równania:

$$(a)\quad F(z)=v, \qquad (b)\quad Z(z)=w.$$

Eliminując z z tych równań, dostajemy algebraiczne równanie:

$$(c)\qquad G(v, w)=0.$$

[$G(v, w)$ jest rugownikiem równań (a), (b)].

Funkcya $F(z)$ może przybierać wartość v w ogólności na więcej miejscach z, między sobą nierównoważnych, n. p. na miejscach $z, z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}$. Do nich dołączają się zawsze miejsca równoważne wskutek założonej własności funkcyi $F(z)$.

Szukając przeciwnie punktów z, na których ma być:

$$(d)\qquad Z(z)=w,$$

gdzie w ma być różne od 1, ∞, 0, dostaniemy, po sprowadzeniu związku (d) do formy całkowitej, równanie stopnia r, posiadające niezawodnie jako pierwiastki r punktów równoważnych. Że zaś już więcej pierwiastków to równanie posiadać nie może, więc stąd wynika, że funkcya $Z(z)$ przybiera tylko w punkcie z i na miejscach z nim równoważnych wartość w.

Z togo wynika, że do jednej wartości $Z(z)=w$ należy jedna tylko wartość $v=F(z)=F(z_1)=\ldots=F(z_{p-1})$. Do jednej przeciwnie wartości v należy p wartości funkcyi $Z(z)$, a mianowicie $Z(z)$, $Z(z_1)$, $\ldots$, $Z(z_{p-1})$.

Równanie (c) musi więc być pierwszego stopnia według v, a p^{go} stopnia według w, co znaczy, że przy jakimkolwiek p zawsze mamy: $F(z)=R(Z)$, gdzie R jest znakiem funkcyi wymiernej. Gdy $p=1$, to równanie (c) jest pierwszego stopnia ze względu na v i w. Mamy zatem twierdzenia:

I. *Dowolna wymierna funkcya $F(z)$, nie zmieniająca się w grupie wielościanu, daje się zawsze wyrazić wymiernie przez zasadniczą funkcyę $Z(z)$.*

II. *Funkcya $F(z)$ będzie liniową funkcyą funkcyi zasadniczej, jeżeli z miejsc, na których $F(z)$ tę samą wartość przybiera, każde dwa są równoważne.*

Że naodwrót każda funkcya wymierna $R(Z)$ nie zmienia się w grupie, nie ulega wątpliwości.

CZĘŚĆ IV.

O ELIMINACYACH I TEORYI FORM DWOJKOWYCH.

ROZDZIAŁ IX.

O eliminacyach z dwóch równań.

123. Metoda Sylwestra tworzenia rugownika dwóch równań o jednej niewiadomej. W teoryi szukania największego wspólnego podzielnika dwóch danych funkcyj $f(x)$, $g(x)$ [art. 56.] wspomnieliśmy, że takie funkcye są współmierne, jeżeli równania $f(x)=0$, $g(x)=0$ posiadają jeden przynajmniej wspólny pierwiastek. Ta uwaga może posłużyć za punkt wyjścia teoryi szukania wspólnego podzielnika. Położmy:

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m,\quad g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n,$$

to dla wspólnego ich pierwiastka x, który różnym od zera zakładamy, spełnią się równocześnie równania:

$$(1)\qquad x^{n-1}f(x)=0,\ x^{n-2}f(x)=0,\ldots,\ xf(x)=0,\ f(x)=0;$$

$$(2)\qquad x^{m-1}g(x)=0,\ x^{m-2}g(x)=0,\ldots,\ xg(x)=0,\ g(x)=0.$$

Mamy tu równań $(m+n)$, a uważając je za liniowe jednorodne w niewiadomych:

$$(3)\qquad x^{m+n-1},\ x^{m+n-2},\ldots,x^2,\ x^1,\ x^0=1,$$

wyrazimy ich współczesność relacyą:

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1\ldots & a_m\ldots & \\ \vdots & & & \\ & b_0 & b_1\ldots & b_n \\ & \vdots & & \end{vmatrix}=$$ *) [por. art. 57.]. Gdy

*) Ten sposób tworzenia rugownika nazywają „dialityczną metodą“ Sylwestr'a: por. G. Salmon-Fiedler *Vorlesungen über die Algebra...* (Lipsk 1877), str. 95.

Wyczerpującą ogólną teoryę eliminacyi znajdzie w dziele Faà de Bruno *Théorie génerale de l'élimination,* (Paryż 1859).

(4) $$D_1,\ D_2, \ldots, D_{m+n}$$
są podwyznacznikami któregokolwiek wiersza w $R(f, g)$, to wtedy:
$x^{m+n-1} : x^{m+n-2} : \ldots : x : 1 = D_1 : D_2 : \ldots : D_{m+n-1} : D_{m+n}$, a więc:

(5) $$x = D_{\alpha-1} / D_\alpha,\quad \alpha = 2, 3, \ldots, m+n.$$

Przyjmując wszystkie podwyznaczniki (4) różne od zera, mamy w (5) szukany wspólny pierwiastek, a funkcya liniowa: $D_\alpha x - D_{\alpha-1} = t(x)$ jest podzielnikiem funkcyj: $f(x)$, $g(x)$.

Lecz możnaby także tak postąpić:

Z równań (1) i (2) opuściwszy ostatnie równania $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, możemy pozostałe skrócić przez x, które założyliśmy $\neq 0$.

Te równania przy $m=5$, $n=3$ — co przyjmujemy dla uproszczenia — mają postać:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned}
a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + (a_5x + 0) &= 0\\
0x^6 + a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + (a_4x + a_5) &= 0\\
b_0x^6 + b_1x^5 + b_2x^4 + b_3x^3 + 0x^2 + (0x + 0) &= 0\\
0x^6 + b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + (0x + 0) &= 0\\
0x^6 + 0x^5 + b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + (b_3x + 0) &= 0\\
0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + b_0x^3 + b_1x^2 + (b_2x + b_3) &= 0
\end{aligned}$$

Jest tu równań o jedno mniej, niż niewiadomych: Gdy jednak w nich dwa ostatnie dodajniki uważamy — jak to uwidoczniliśmy — za jeden wyraz, za spółczynnik przy $x^0=1$, to mamy już tylko 6 niewiadomych x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, 1 i tyleż równań.

Współczesność ich wyrazi relacya $R_1 = \Delta_1 x + \Delta'_1 = 0$, gdzie R_1 jest wyznacznikiem, jaki mieliśmy w art. 60 (I). Stąd wynika, że $x = -\Delta'_1 / \Delta_1$, $(= D_{\alpha-1} / D_\alpha)$ jest wspólnym pierwiastkiem.

W razie gdy w $R(f,g) = 0$ wszystkie podwyznaczniki pierwsze są $=0$, trzeba wspólnych pierwiastków równań $f(x)=0$, $g(x)=0$ szukać dalej podług wymogów teoryi jednorodnych równań liniowych. Teorya ta wymaga, aby — gdy nie wszystkie podwyznaczniki drugie równań (1), (2) znikają — 1⁰ z równań (1), (2) dwa którekolwiek odrzucić; 2⁰ dwie z niewiadomych uważać za wiadome i 3⁰ przenosząc je na stronę prawą, uważać pozostałe równania za liniowe, a niejednorodne.

Uważajmyż — gdy dwoma odrzuconemi równaniami nie są $f(x)=0$, $g(x)=0$, ale dwa inne — x^1 i x^0 za wiadome, to rozwiązaniami pozostałych równań będą:

(a) $$x^\alpha = A_\alpha x + B_\alpha,\quad \alpha > 2.$$

Dla $\alpha = 2$ mamy:

(6) $$x^2 = A_2 x + B_2,$$

a to równanie określa dwa wspólne pierwiastki równań: $f'(x)=0$, $g(x)=0$.

W razie $a>2$, trzeba uwzględnić, że prócz (a) mamy jeszcze

(b) $$x^{a-1}=A_{a-1}x+B_{a-1},$$

a dzieląc (a) przez (b) dojdziemy do relacyi (6).

Największym wspólnym podzielnikiem funkcyj f', g będzie w tym razie:

(7) $$x^2-A_2x-B_2=t(x).$$

Gdy odrzucone dwa równania są: $f(x)=0$, $g(x)=0$ to pozostałe równania skracając znowu przez x dostajemy system równań (I). Uważając w nich, jak przódy, x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, 1 za niewiadome i znacząc kolejno przez:

$$P_\alpha x+Q_\alpha,\ \alpha=6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ [P_1=0],$$

minory któregokolwiek wiersza równań (I) dostajemy:

$$x^6:x^5:x^4:x^3:x^2:1=$$

$$P_6x+Q_6:P_5x+Q_5:P_4x+Q_4:P_3x+Q_3:P_2x+Q_2:Q_1;\text{ stąd}$$

$$x=x^{\alpha+1}/x^\alpha=(P_{\alpha+1}x+Q_{\alpha+1})/(P_\alpha x+Q_\alpha),\ \alpha=5,\ 4,\ 3,\ 2,$$

i $x^2=(P_2x+Q_2)/Q_1$, a te relacye będą temsamem, co (6).

Można jednak także tak postąpić:

Z równań (1) opuszczamy dwa ostatnie: $x.f(x)=0$, $f'(x)=0$ i z równań (2) również dwa ostatnie: $xg(x)=0$, $g(x)=0$. Pozostałe— po ich skróceniu przez x^2 — tworzą system $(m+n-4)$ równań o $(m+n-3)$ niewiadomych:

$$x^{m+n-3},\ x^{m+n-4},\dots,\ x^1,\ 1.$$

Napiszmy je — przy $m=5$, $n=3$, co znowu dla uproszczenia przyjmijmy — w postaci:

$$\text{(II)}\quad\begin{aligned}&a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+(a_3x^2+a_4x+a_5)=0\\&b_0x^5+b_1x^4+b_2x^3+(b_3x^2+0\,x+0)=0\\&0x^5+b_0x^4+b_1x^3+(b_2x^2+b_3x+0)=0\\&0\,x^5+0\,x^4+b_0x^3+(b_1x^2+b_2x+b_3)=0,\end{aligned}$$

to uważając w nich za niewiadome x^5, x^4, x^3, 1 dostajemy na warunek ich współczesności:

$$R_2=\Delta_2x^2+\Delta'_2x+\Delta''=0\ \text{[por. art. 60, (II)]}$$

a R_2 będzie tem samem co (7) (po podzieleniu przez czynnik Δ_2).

Gdy i wszystkie drugie podwyznaczniki w $R(f, g)$ znikają, (wtedy $\Delta_2=\Delta'_2=\Delta''_2=0$ por. art. 59, tw. III), a trzecie już nie znikają, to można równań (II) użyć odrazu do wyszukania największego podzielnika stopnia trzeciego. Mamy bowiem z tych równań:

$$x^5:x^4:x^3:1=$$

$$P_5'x^2+Q_5'x+R_5':P_4'x^2+Q_4'x+R_4':P_3'x^2+Q_3'x+R_3':R_1'\ \text{ a stąd:}$$

$$x=x^{\alpha+1}/x^\alpha=(P'_{\alpha+1}x^2+Q'_{\alpha+1}x+R'_{\alpha+1})/(P'_\alpha x^2+Q'_\alpha x+R'_\alpha),\ \alpha=4,\ 3$$

$$\text{i}\ \ x^3=(P_3'x^2+Q_3'x+R_3')/R'_1.$$

W ten sam sposób i dalej w razie znikania dalszych jeszcze wszystkich podwyznaczników postępować należy.

124. Stopień rugownika wynikającego z dwóch równań o dwóch niewiadomych. W art. 83. powiedzieliśmy, że dwie niewspółmierne funkcye wielu zmiennych posiadają zawsze wspólne miejsca zerowe i że tych miejsc jest skończona ilość, jeżeli funkcye dane zawierają tylko dwie zmienne. Zajmijmyż się oznaczeniem tej ilości.

Niech $f(x, y)$ będzie funkcyą wymiaru m, a $g(x, y)$ wymiaru n; położywszy:

$$f(x, y) = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m, \quad g(x, y) = b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n$$

załóżmy, że $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ i że $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_n$, są wymiernemi całkowitemi funkcyami zmiennej x o stopniach równych ich znaczkom. Wartości x należące do wspólnych miejsc zerowych równań $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ są-to pierwiastki rugownika:

$$R_1(x) = \begin{vmatrix} a_0 \; a_1 \ldots & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ & b_0 \, b_1 \ldots \\ & \cdot \\ & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

Tworzenie równania $R_1(x) = 0$ nazywają eliminacyą zmiennej y z danych równań.

Przedewszystkiem trzeba zapytać: jakiego stopnia jest równanie $R_1(x) = 0$, a potem: ile wartości y należy do każdego pierwiastka x (tego równania).

Naznaczmy element wyznacznika $R_1(x)$ stojący w wierszu w^{tym} i kolumnie k^{tej} przez $c_{w,k}$, to gdy $w = 1, 2, 3, \ldots, m$ mamy:

$$c_{wk} = a_{k-w} \text{ dla } k - w = 0, 1, 2, \ldots, m, \text{ a zaś}$$

$$c_{wk} = 0, \text{ gdy } k - w < 0 \text{ lub } > m.$$

Gdy $w = m+1, m+2, \ldots, m+n$, a więc:

$$w = m + v, \quad v = 1, \ldots, n, \text{ to}$$

$$c_{wk} = b_{k-v} \text{ dla } k - v = 0, 1, 2, \ldots, n, \text{ a zaś}$$

$$c_{wk} = 0, \text{ gdy } k - v < 0, \text{ lub } > n.$$

Jakikolwiek dodajnik wyznacznika $R_1(x)$ po jego obliczeniu ma postać:

$$A = \pm c_{1,\alpha_1} c_{2,\alpha_2} \ldots c_{m,\alpha_m} c_{m+1,\beta_1} c_{m+2,\beta_2} \ldots c_{m+n,\beta_n},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ są dowolną permutacyą liczb $1, 2, \ldots, m$, a $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ dowolną permutacyą liczb $m+1, m+2, \ldots, m+n$.

Przywracając znaczenie czynników $c_{w,k}$ mieć będziemy:

$$A = \pm a_{\alpha_1 - 1} a_{\alpha_2 - 1} \ldots a_{\alpha_m - m} \cdot b_{\beta_1 - 1} b_{\beta_2 - 2} \ldots b_{\beta_n - n}.$$

Z takich wyrazów tylko te nie są zerami, w których

$(\alpha_1-1, ..., \alpha_m-m$ mieszczą się w granicach $(0...m)$,

a $\beta_1-1, ..., \beta_n-n$ „ „ „ $(0...n)$.

Są one wtedy w x stopnia

$$(\alpha_1-1+\alpha_2-2+...+\alpha_m-m)+(\beta_1-1+\beta_2-2+...+\beta_n-n)$$
$$=[1+2+...+(m+n)]-(1+2+...+m)-(1+2+...+n)=m.n.$$

Stąd jednak nie wynika jeszcze, że rugownik jest zawsze stopnia mn, gdyż najwyższe potęgi zmiennej x zawarte w poszczególnych wyrazach A mogą się poznosić. Lecz właśnie ta okoliczność, że poszczególne wyrazy A przygotowują równanie stopnia mn, a dopiero przypadkowe znoszenia się mogą obniżyć ten stopień, powoduje, że w takich przypadkach trzeba w równaniu $R_1(x)=0$ upatrywać tyle pierwiastków $x=\infty$, o ile jednostek obniża się jego stopień pod mn.

Niech teraz $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ będą takiemi równaniami, że w nich $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, a_m, b_n są jeszcze funkcyami stopni m, n, ale pośrednie spółczynniki a_α, b_α niekoniecznie dosięgają stopnia α. Te i poprzednie równania można krótko tem scharakteryzować, że w nich już same zmienne x, y występują zawsze w stopniu równym wymiarowi tych równań. Utworzywszy rugownik takich równań dostaniemy z niego na iloczyn elementów jej głównej i iloczyn elementów jej pobocznej przekątni wyrazy:

$$a_0{}^n b_n{}^m, \quad \pm b_0{}^m a_m{}^n.$$

Są to widocznie wyrazy stopni mn w zmiennej x, a ponieważ ta okoliczność, że a_α, b_α mogą nie dosięgać stopnia α, nie może wpłynąć na podwyższenie stopnia innych wyrazów ponad $m.n$, więc stąd wynika, że i tu $R_1(x)=0$ może być najwyżej stopnia mn, a w razie niższego jej stopnia $=mn-r$ trzeba jej przyznać r pierwiastków $x=\infty$. Mamy więc twierdzenie:

I. *Rugownik takich dwóch równań $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ o wymiarach m, n, w których już same zmienne x, y występują w tych stopniach, jest — bez względu na jakość innych wyrazów tych równań — najwyżej stopnia: $m.n$. W razie gdy jego stopień jest niższy $=m.n-r$, trzeba do jego skończonych pierwiastków doliczyć jeszcze r pierwiastków $x=\infty$.*

Oczywiście, że i eliminacya x z danych równań doprowadzi do rugownika $R_2(y)=0$ o najwyższym stopniu $m.n$, a w razie niższego jego stopnia trzeba w nim upatrywać jeszcze i pierwiastki $y=\infty$.

125. Ilość miejsc wspólnych zerowych danych równań o dwóch niewiadomych. Ograniczając się do równań wyżej określonych zajmijmy się teraz rozstrzygnięciem drugiego pytania, a to: ile do pewnego pierwiastka x rugownika $R_1(x)=0$ należy takich y, że (x, y) są już wspólnemi miejscami zerowemi danych równań.

W teoryi wyznaczników dowodzi się, że w wyznaczniku D o elementach c_{wk}, podwyznacznikiem elementu c_{wk} jest cząstkowa pochodna $\frac{\partial D}{\partial c_{wk}}$.

Podwyznacznik drugiego rzędu, który z D powstaje przez opuszczenie dwóch wierszy w, w' i dwóch kolumn k, k' wyraża się pochodną $\frac{\partial^2 D}{\partial c_{wk} \partial c_{w'k'}}$ i t. d.

Według tego, naznaczając znowu elementa rugownika R_1 przez c_{wk} i pisząc $R_1(x)=\Delta(c_{11}, c_{12}, ..., c_{m+n, m+n})$ dostajemy pochodnę $R'_1(x)$ w formie:

$$R'_1(x)=\sum_{w,k} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{wk}} \frac{\partial c_{wk}}{dx}, \quad w \gtreqless k \tag{1}$$
$$w=1, 2, ..., m+n, \quad k=1, 2, ..., m+n$$

w której $\frac{\partial \Delta}{\partial c_{wk}}$ są pierwszymi podwyznacznikami.

Mając to, przyjmijmy, że $x=x_1$ jest skończonym i jednokrotnym pierwiastkiem równania $R_1=0$. $R'_1(x)$ dla $x=x_1$ nie jest zerem, a zatem idzie, że w (1) nie mogą podwyznaczniki dla $x=x_1$ znikać. To oznacza, że funkcye $f(x_1, y)$, $g(x_1, y)$ mają największy wspólny podzielnik stopnia pierwszego $\delta_1 y+\delta'_1=t_1(y)$, a $t_1(y)=0$ daje jedyną wartość y_1 odpowiadającą wartości x_1. Miejsce (x_1, y_1) jest wtedy jednokrotnem miejscem zerowem danych równań.

Z tego wynika, że gdy $R_1=0$ ma same skończone i jednokrotne pierwiastki $x_1, x_2, ..., x_{mn}$, to dane równania mają mn wspólnych miejsc zerowych $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2), \ldots, (x_{mn}, y_{mn})$ leżących w skończoności.

Niech teraz $x=x_1$ będzie dwukrotnym (ale nie trzykrotnym) i skończonym pierwiastkiem równania $R_1=0$. Dla $x=x_1$ jest więc (1) zerem i to albo: 1^0 z równoczesnem znikaniem wszystkich pierwszych podwyznaczników, albo 2^0 bez ich równoczesnego znikania. Że zaś:

$$R_1''(x)=\sum_{\substack{w,k \\ w'k'}} \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial c_{wk} \partial c_{w'k'}} \frac{\partial c_{w'k'}}{\partial x} \cdot \frac{\partial c_{wk}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta}{\partial c_{wk}} \cdot \frac{\partial^2 c_{wk}}{\partial x^2}\right], \tag{2}$$

ma być dla $x=x_1$ różnem od zera [art. 51.], więc gdy wszystkie pierwsze podwyznaczniki znikają, nie mogą widocznie drugie podwyznaczniki równocześnie znikać. Z tego wynika, że $f(x_1, y)$, $g(x_1, y)$ nigdy nie mogą posiadać wspólnego podzielnika stopnia trzeciego; mogą zaś posiadać albo 1^0 wspólny podzielnik stopnia drugiego: $t_2(y)$, albo 2^0 wspólny podzielnik stopnia pierwszego: $t_1(y)$.

W pierwszym przypadku dadzą się obydwu równym wartościom x_1 podporządkować pierwiastki y_1, y_2 [równania $t_2(y)=0$], tak, że z owego dwukrotnego x_1 dostajemy tu dwa miejsca zerowe $(x_1 y_1)$, $(x_1 y_2)$, gdzie w szczególności może być $y_1=y_2$.

W drugim razie mając tylko jedną wartość $y=y_1$ wynikającą z $t_1(y)=0$, możemy ją jednemu tylko x_1 podporządkować. Czy do drugiej powtórzonej wartości x_1 ma należeć pewne y, nie mamy pewności. To tylko pewna, że jeżeli taka wartość y istnieje, to musi być ona $=y_1$.

Jeszcze gorzej wypaść może poszukiwanie, gdy przyjmiemy, że x_1 jest trzykrotnym pierwiastkiem skończonym równania $R_1=0$. Wtedy funkcye $f(x_1, y)$, $g(x_1, y)$ mogą mieć albo 1^0 największy wspólny podzielnik stopnia 3^{go}: $t_3(y)$, albo 2^0 stopnia 2^{go}: $t_2(y)$, albo wreszcie 3^0 stopnia 1^{go}: $t_1(y)$.

W pierwszym razie otrzymujemy trzy miejsca zerowe wspólne (x_1, y_1), $(x_1 y_2)$, $(x_1 y_3)$, gdzie y_1, y_2, y_3 są pierwiastkami równania $t_3(y)=0$. W drugim razie dwa pierwiastki y_1, y_2 równania $t_2(y)=0$ dają dwa miejsca zerowe $(x_1 y_1)$, $(x_1 y_2)$, a czy do trzeciego x_1 ma należeć pewne y nie da się rozstrzygnąć. W razie istnienia takiego y nie mogłoby być ono inne, jak chyba y_1 lub y_2.

W trzecim wypadku dwie wartości x_1 pozostają bez y, ale — jeżeliby im trzeba pewne y podporządkować — to muszą być one $=y_1$, gdzie y_1 jest pierwiastkiem równania $t_1(y)=0$.

Z tego wynika, że zliczanie wspólnych miejsc zerowych za pomocą wyznaczania największego wspólnego podzielnika funkcyj $f(x_1, y)$, $g(x_1, y)$ nie zawsze prowadzi do celu.

To tylko pewna, że miejsce zerowe ze skończonym pierwiastkiem x_1 równania $R_1=0$ posiadać także będzie i skończone $y=y_1$, gdyż równania $f(x_1, y)=0$, $g(x_1, y)=0$ posiadają same tylko skończone pierwiastki, są bowiem przy skończonej wartości x_1 zawsze stopni m, n w zmiennej y [wskutek $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$].

Inna metoda da nam całkiem dokładną odpowiedź o ilości wspólnych miejsc zerowych.

Zauważmy prócz danych równań:

$$(a)\quad f=0, \qquad (b)\quad g=0$$

jeszcze trzecie równanie

$$(c) \qquad x+\lambda y=\mu,$$

w którem λ, μ są dowolne parametry. Rugownikiem równań (a), (c) będzie:

$$(\alpha) \qquad f(\mu-\lambda y, y)=0,$$

a rugownikiem równań (b) (c):

$$(\beta) \qquad g(\mu-\lambda y, y)=0,$$

Równanie (α) daje te y, które do wspólnych miejsc zerowych równań (a), (c) należą; analogiczne znaczenie ma równanie (β) dla pary (b), (c).

Lecz parametry λ, μ można tak wybrać, aby równania (α), (β) posiadały koniecznie wspólny pierwiastek y. Dość jest w tym celu utworzyć rugownik $R(\mu, \lambda)$ tych równań i położyć:

$$(\gamma) \qquad R(\mu, \lambda)=0.$$

Przy $\lambda=0$ i $\mu=x$ przechodzą równania (α), (β) odpowiednio na (a), (b). Z tego wynika, że $R(\mu, 0)$ przy $\mu=x$ jest wprost rugownikiem $R_1(x)$ i że więc — gdy (γ) podług potęg λ rozwiniemy — dostaniemy: $R(\mu, \lambda)=R_1(\mu)+S_1(\mu)\lambda+T_1(\mu)\lambda^2+\ldots=0$.

Połóżmy tu za μ wyraźnie $x+\lambda y$ i zauważmy, że:

$$R_1(x+\lambda y)=R_1(x)+R'_1(x)\lambda y+\frac{R''_1(x)}{2!}\lambda^2y^2+\ldots,$$

$$S_1(x+\lambda y)=S_1(x)+S'_1(x)\lambda y+\frac{S''_1(x)}{2!}\lambda^2y^2+\ldots,$$

$$T_1(x+\lambda y)=T_1(x)+T'_1(x)\lambda y+\frac{T''_1(x)}{2!}\lambda^2y^2+\ldots,$$

. . . .

to otrzymamy związek:

$$(\delta) \quad R_1(x)+\lambda[R'_1(x)y+S_1(x)]+\lambda^2\left[\frac{R''_1(x)}{2!}y^2+S'_1(x)y+T_1(x)\right]+\ldots=0.$$

Dla jakichkolwiek $(x, y)=(x', y')$ są pierwiastki λ' tego równania takie, że przy nich i przy obliczonem $\mu=\mu'=x'+\lambda'y'$, równania (α), (β) mają y' jako wspólne miejsce zerowe.

Żądając, aby równanie (δ) przy pewnych wartościach (x_1, y) miało pierwiastek $\lambda=0$ przechodzimy z równań (α), (β) do równań: $f=0$, $g=0$. Wartość $x=x_1$ musi więc przedewszystkiem dać $R_1(x)=0$ bez względu na to, ile razy $\lambda=0$ powtarza się w (δ).

Przyjmijmyż, że $\lambda=0$ ma być dwukrotnym pierwiastkiem równania (δ). Wtedy mieć musimy równocześnie:

$$R_1(x_1)=0, \quad R'_1(x_1)\,y+S_1(x_1)=0.$$

Gdy nie jest równocześnie: $R'_1(x_1)=0$, $S_1(x_1)=0$, to drugie z tych równań daje $y=y_1$, należące do niepowtarzającego się x_1 w równaniu $R_1=0$, a (x_1, y_1) jest jedynem miejscem zerowem wspólnem o spółrzędnej x_1.

Gdy jednak oprócz $R_1(x_1)=0$ jest jeszcze $R'_1(x_1)=0$, to musi być i $S_1(x_1)=0$, gdyż do skończonych x_1 skończone wartości y należeć muszą. Równanie (δ) ma wtedy już odrazu dwukrotny pierwiastek $\lambda=0$, a gdy $R''_1(x_1)$, $S'_1(x_1)$, $T_1(x_1)$ są $\neq 0$, to kładąc:

$$\frac{R''_1(x_1)}{2!}y^2+\frac{S'_1(x_1)}{1!}y+T_1(x_1)=0,$$

(a więc żądając trzykrotnego pierwiastka $\lambda=0$), dostajemy z tego równania dwie wartości y_1, y_2, dające z dwukrotnie powtarzającem się x_1 — (gdyż $R_1(x_1)=R'_1(x_1)=0$, $R''_1(x_1)\neq 0$) — dwa wspólne miejsca zerowe o spółrzędnej x_1 i t. d. Stąd twierdzenie:

I. *Skończony pierwiastek x_1, powtarzający się v razy w równaniu $R_1(x)=0$, daje zawsze początek v miejscom zerowym wspólnym (x_1, y_1), (x_1, y_2), ..., (x_1, y_v) o skończonych y_1, y_2, ..., y_v. Owe y_1, y_2, ..., y_v są zawsze pierwiastkami pewnego równania algebraicznego (stopnia v), o spółczynnikach wymiernych w pierwiastku x_1 i w spółczynnikach samych danych równań, Gdy $v=1$, to y_1 jest wymierną funkcyą pierwiastka x_1 i spółczynników danych równań.*

Wyczerpawszy wszystkie skończone pierwiastki x równania $R_1(x)=0$ i podporządkowawszy im odpowiednie skończone y możemy być pewni, że przez to wyczerpaliśmy również **wszystkie** skończone pierwiastki równania $R_2(y)=0$. Przyjmijmy bowiem, że istnieje jeszcze skończony pierwiastek η równania $R_2=0$, to w takim razie do owego η należałaby już wartość $x=\infty$. Lecz to jest niemożliwe, gdyż na miejscu $y=\eta$ mają równania $f(x,\eta)=0$, $g(x,\eta)=0$, [wskutek $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$], tylko same skończone pierwiastki x. To znaczy:

II. *Rugowniki $R_1(x)$, $R_2(y)$ dwóch równań, których wymiary są równe stopniom w obydwóch zmiennych, są zawsze tego samego stopnia. Gdy ten stopień $=mn-r$, to równania $f=0$, $g=0$ mają dokładnie $mn-r$ miejsc zerowych wspólnych, leżących w skończoności, a r miejsc (∞, ∞) — o obydwu spółrzędnych nieskończonych — leżących w nieskończoności.*

Nie robiąc dalej różnicy między miejscami, leżącemi w skończoności i nieskończoności, mamy ostatecznie rezultat;

III. *Dwa równania o wymiarach m, n i takichże stopni w obydwóch zmiennych, mają zawsze $m.n$ miejsc zerowych wspólnych.*

126. Wprowadzenie podstawienia $x=\varrho t_1$, $y=\varrho t_2$. Wyznaczenie miejsc wspólnych zerowych, leżących w nieskończoności. Co się tyczy miejsc wspólnych, leżących w nieskończoności, to zauważyć potrzeba:

I. *Spółrzędne* $x=\infty$, $y=\infty$ *każdego z miejsc wspólnych* (∞, ∞) *zostają do siebie w stosunku skończonym.*

Niech bowiem

$$f=v_m(x,y)+v_{m-1}(x,y)+...=0, \quad g=w_n(x,y)+w_{n-1}(x,y)+...=0,$$

gdzie v_α, w_α są funkcyami jednorodnemi stopnia α, to kładąc $x=\varrho t_1$, $y=\varrho t_2$, [art. 71.], dostajemy t_1, t_2, powodujące $\varrho=\infty$ w równaniu $f=0$ ze związku: $v_m(t_1, t_2)=0$. Że zaś f zawiera w sobie i x^m i y^m, więc ze związku tego obliczone stosunki $t_2:t_1$ nie będą ani $=0$, ani $=\infty$. Niech więc $t_2:t_1=k_\nu$, $\nu=1, 2, ...$, to widocznie mamy:

$$(1) \qquad (y:x)_\infty=k_\nu,$$

a k_ν są skończone i $\neq 0$. Lecz to samo i miejsc zerowych, leżących w nieskończoności równania $g=0$ — a więc i wspólnych miejsc zerowych tam leżących — dotyczy. Stąd już prawdziwość twierdzenia I. wynika.

Zauważmy jedno z miejsc (1) n. p. o stosunku k_1. Będzie ono wspólnem miejscem zerowem, jeżeli $v_m(t_1, t_2)$, $w_n(t_1, t_2)$ mają wspólny czynnik $t_2-k_1t_1$. [Wtedy rugownik funkcyj $v_m\left(1, \frac{t_2}{t_1}\right)$, $w_n\left(1, \frac{t_2}{t_1}\right)$ jest identycznie zerem]. Rozstrzygnąć więc tylko jeszcze należy, ile razy takie miejsce policzyć trzeba.

W tym celu utwórzmy równania:

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(\varrho, t_1, t_2)&=\varrho^m v_m(t_1, t_2)+\varrho^{m-1}v_{m-1}(t_1, t_2)+...=0,\\ g(\varrho, t_1, t_2)&=\varrho^n w_n(t_1, t_2)+\varrho^{n-1}w_{n-1}(t_1, t_2)+...=0,\end{aligned}$$

to teraz spółrzędne x, y wszystkich miejsc zerowych wspólnych mają się przedstawić w postaci $x=\varrho t_1$, $y=\varrho t_2$. Przyjmijmyż, że po eliminacyi ϱ z równań (2) dostajemy związek $P(t_1, t_2)=0$, to do pewnej pary (t'_1, t'_2), spełniającej ten związek, należy jakiś wspólny pierwiastek ϱ równań (2).

Zastąpmy w tych równaniach t_1, t_2 przez σt_1, σt_2, gdzie σ jest dowolne, to teraz $P(t_1, t_2)$ przejdzie na $P(\sigma t_1, \sigma t_2)$. Lecz równania (2), gdy już w nich t_1, t_2 zastąpiono przez σt_1, σt_2, można napisać także w ten sposób:

$$(\varrho\sigma)^m v_m(t_1, t_2)+...=0, \quad (\varrho\sigma)^n w_n(t_1, t_2)+...=0,$$

a te równania dla wszystkich tych (t'_1, t'_2), dla których równania (2) miały wspólny pierwiastek ϱ, mają niezawodnie również wspólny pierwiastek $\varrho\sigma$.

Z tego wynika, że $P(\sigma t_1, \sigma t_2)$ musi się dać zredukować do $\sigma^h P(t_1, t_2)$, a to wskazuje, że $P(t_1, t_2)$ musi być funkcyą jednorodną.*) Wymiar h musi być dokładnie $= m.n$, bo tylko tym sposobem związek $P = 0$ spowoduje $m.n$ miejsc zerowych wspólnych. Niechże $P(t_1, t_2)$ zawiera — między innymi — liniowy czynnik $(t_2 - k_1 t_1)$ w potędze μ^{tej}. Kładąc wprost $t_2 = k_1$, $t_1 = 1$, przyjmijmy, że $v_m(1, k_1) \neq 0$, $w_n(1, k_1) \neq 0$ i że funkcye $f(\varrho, 1, k_1)$, $g(\varrho, 1, k_1)$ mają największy wspólny podzielnik:

$$T(\varrho) = k_0 \varrho^\mu + k_1 \varrho^{\mu-1} + \ldots + k_\mu, \quad k_0 \neq 0.$$

Gdy $T(\varrho) = 0$ ma pierwiastki $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\mu$, to czynnik $(t_2 - k_1 t_1)^\mu$ powoduje μ miejsc zerowych wspólnych $(x = \varrho_\alpha,\ y = \varrho_\alpha k_1)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \mu$, leżących w skończoności.

Gdy przeciwnie $v_m(1, k_1) = 0$, $w_n(1, k_1) = 0$, to równania $f(\varrho, 1, k_1) = 0$, $g(\varrho, 1, k_1) = 0$ nie są już stopni m i n, a jeżeli funkcye $f(\varrho, 1, k_1)$, $g(\varrho, 1, k_1)$ — już tych niższych stopni mają wspólny podzielnik:

$$T'(\varrho) = k'_0 \varrho^\nu + k'_1 \varrho^{\nu-1} + \ldots + k'_\nu, \quad k'_0 \neq 0, \quad \nu < \mu,$$

i jeżeli $T' = 0$ daje pierwiastki $\varrho'_1, \varrho'_2, \ldots, \varrho'_\nu$, to w takim razie czynnik $(t_2 - k_1 t_1)^\mu$ powoduje ν miejsc wspólnych zerowych:

$$(x = \varrho'_\alpha,\ y = \varrho'_\alpha k_1), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu,$$

leżących w skończoności i $(\mu - \nu)$ miejsc wspólnych zerowych, leżących w nieskończoności, a dających stosunek $(y:x)_\infty = k_1$. To jest droga, jaką iść trzeba, chcąc dokładnie oznaczyć powtarzanie się każdego z miejsc zerowych wspólnych w nieskończoności.

Uwaga. Jeżeli dane równania mają mieć r miejsc zerowych wspólnych w nieskończoności, a $v_m(t_1, t_2) = 0$, $w_n(t_1, t_2) = 0$ mają r różnych między sobą czynników pierwiastkowych wspólnych $t_2 - k_\nu t_1 = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, r$, lub jeden tylko wspólny czynnik $t_2 - k t_1 = 0$ w dowolnej potędze, to wtedy bez tworzenia związku (3) trzeba w pierwszym razie każde z wynikających miejsc policzyć jednokrotnie, w drugim zaś przypadku policzy się miejsce $(y:x)_\infty = k$ r-krotnie.

Pd. 1. Dla równań:

$$f = x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad g = x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

dostaniemy: $R_1(x) =$

$$[(a_2 - a_1)x + (c_2 - c_1)]^2 + (b_2 - b_1)[(b_2 - b_1)x^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)x + c_1 b_2 - c_2 b_1] = 0.$$

Gdy nie jest równocześnie $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, to $R_1 = 0$ jest stopnia drugiego. Dwa tylko miejsca zerowe wspólne leżą w skończoności, dwa są w nieskończoności. Co się tyczy tych ostatnich, to kładąc $x = \rho t_1$, $y = \rho t_2$ dostajemy z danych równań związki:

$$\rho^2(t_1^2 + t_2^2) + \rho(a_1 t_1 + b_1 t_2) + c_1 = 0, \quad \rho^2(t_1^2 + t_2^2) + \rho(a_2 t_1 + b_2 t_2) + c_2 = 0.$$

Przy $t_1^2 + t_2^2 = 0$ mamy $\rho = \infty$ i $(y:x)_\infty = \pm i$, co znaczy, że z dwóch miejsc w nieskończoności jedno charakteryzuje się stosunkiem $+i$, drugie stosunkiem $-i$.

*) Por. J. Załuski: „O pewnym sposobie przedstawienia wspólnych miejsc zerowych...“ Prace mat.-fiz. T. VIII., Str. 129—138.

W razie $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 \neq c_2$ obniży się stopień rugownika R_1 aż do zera; a wtedy trzeba przyjąć, że wszystkie 4 miejsca zerowe wspólne leżą w nieskończoności. $P(t_1, t_2)$ ma tu postać $(t_1^2 + t_2^2)^2(c_2 - c_1)$, a z czynnika $(t_1^2 + t_2)^2 = 0$ wnosimy, że z 4 wspomnianych miejsc dwa są o stosunku $+i$, a dwa o stosunku $-i$.

Pd. 2. Dla równań:

$$f = y^2 - x^2 + 1 = 0, \quad g = y^3 + x^3 + 1 = 0 \qquad \text{dostajemy:}$$

$$R_1(x) = (x^2 - 1)^3 - (1 - x^3)^2 = 0.$$

To równanie jest tylko 4go stopnia (a nie szóstego); dwa więc miejsca zerowe wspólne danych równań leżą w nieskończoności. Ze skończonych pierwiastków równania $R_1(x) = 0$ jest jeden $x = 1$, a jest on dwukrotnym, gdyż $R'(x)$ dla $x = 1$ jest również zerem. Wydalając z $R_1(x)$ czynnik $(x-1)^2$ dostaniemy równanie $3x^2 + 4x + 2 = 0$, a z niego wynikają dwa dalsze pierwiastki:

$$(a) \qquad x = \frac{2 \pm i\sqrt{2}}{3}.$$

Dla $x = 1$ przechodzą funkcye f, g na y^2, y^3 i mają największy wspólny podzielnik y^2. Z tego wynika, że dane równania mają dwukrotne, wspólne miejsce zerowe (1, 0).

Aby znaleść wartości y, odpowiadające wartościom (a), możemy w ten sposób postąpić. Tworząc $R_2(y) = 3y^4 + 2y^3 + 3y^2 = 0$, mamy tu dwukrotny pierwiastek $y = 0$, który jest już spółrzędną dwukrotnego miejsca zerowego (1, 0). Po wydzieleniu go dostajemy jako pozostałe dwa pierwiastki:

$$(b) \qquad y = \frac{-1 \pm 2i\sqrt{2}}{3}.$$

Sprzężmyż wartości (a), (b) w ten sposób:

$$(c) \qquad \left(\frac{2 + i\sqrt{2}}{3}, \frac{-1 - 2i\sqrt{2}}{3}\right), \left(\frac{2 - i\sqrt{2}}{3}, \frac{-1 + 2i\sqrt{2}}{3}\right),$$

to sprawdzić łatwo, że takie tylko pary wartości spełniają tak równanie $f = 0$, jak równanie $g = 0$.

Wszystkie zatem wspólne zerowe miejsca danych równań są: dwukrotne miejsce (1, 0), dwa miejsca (c) i dwa miejsca w nieskończoności. Aby te ostatnie scharakteryzować, zauważmy, że:

$$v_2(t_1, t_2) = t_2^2 - t_1^2, \quad w_3(t_1, t_2) = t_2^3 - t_1^3,$$

posiadają tylko jeden wspólny czynnik $t_2 - t_1$. Z tego — podług zrobionej uwagi — wynika, że obydwa miejsca wspólne, leżące w nieskończoności, są o stosunku $(y : x)_\infty = +1$.

127. Metoda dająca się stosować do miejsc wspólnych zerowych, leżących w skończoności i nieskończoności. W razie, gdy z równań $f=0$, $g=0$ jedno przynajmniej nie jest już takie, że jego wymiar jest zarazem stopniem w obydwóch zmiennych, możemy — kładąc:

$$(1) \qquad \begin{matrix} x = \alpha\xi + \beta\eta \\ y = \gamma\xi + \delta\eta \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = r \neq 0,$$

zamienić je — przy stosownem doborze stałych α, β, γ, δ — na takie równania:

*

(2) $$\varphi(\xi,\eta)=0, \quad \psi(\xi,\eta)=0,$$
że tak w jednem jak drugiem już same zmienne x, y odpowiednio w stopniach m, n wystąpią.

Równania (2) mają — według art. 125., tw. III. — zawsze $m.n$ miejsc zerowych wspólnych (ξ_ν, η_ν), a każdemu z takich miejsc odpowie — według (1) — jedna tylko para (x_ν, y_ν).

Przy tem jednak zauważyć trzeba: Z każdej skończonej wspólnej pary (ξ_ν, η_ν) dostaniemy zawsze skończoną parę (x_ν, y_ν).

Z jednej pary $\xi_\nu=\infty$, $\eta_\nu=\infty$ o stosunku $(\eta_\nu:\xi_\nu)_\infty=k$ otrzymamy, kładąc wprost $\eta_\nu=\varrho k]_{\varrho=\infty}$, $\xi_\nu=\varrho]_{\varrho=\infty}$

(3) $$(y_\nu:x_\nu)_\infty=\frac{\alpha+\beta k}{\gamma+\delta k},$$

a ten stosunek może tu już mieć także albo wartość $=\infty$ albo wartość $=0$. W pierwszym razie mamy $y_\nu=\infty$ przy skończonem x_ν, a w drugim odwrotnie.

W każdym jednak razie z jednoznacznego odpowiadania sobie par (ξ_ν, η_ν), (x_ν, y_ν) wynika twierdzenie:

I. *Każde dwa równania $f=0$, $g=0$ o wymiarach m, n mają $m.n$ miejsc zerowych wspólnych.*

Przyjmijmy, że dla równań (2) — po podstawieniu w nich

(4) $$\xi=\varrho\tau_1, \quad y=\varrho\tau_2$$

i po wyeliminowaniu ϱ — dostajemy związek $P_1(\tau_1,\tau_2)=0$. Jest on oczywiście jednorodny i posiada wymiar $m.n$. Równocześnie z pod stawieniem (4) można w (1) położyć $x=\varrho t_1$, $y=\varrho t_2$, tak, że mieć będziemy $t_1=\alpha\tau_1+\beta\tau_2$, $t_2=\gamma\tau_1+\delta\tau_2$.

Wskutek $r\neq 0$ można stąd naodwrót τ_1, τ_2 wyrazić liniowo, jednorodnie przez t_1, t_2. Przyjmijmyż, że $\tau_1=\alpha' t_1+\beta' t_2$, $\tau_2=\gamma' t_1+\delta' t_2$, to dokonując tych podstawień w $P_1(\tau_1,\tau_2)=0$, dostajemy równanie $P(t_1,t_2)=0$. Będzie ono także jednorodne i oczywiście także wymiaru $m.n$ i będzie wynikiem eliminacyi ϱ z danych równań $f=0$, $g=0$, przetworzonych na $f(\varrho,t_1,t_2)=0$, $g(\varrho,t_1,t_2)=0$. Stąd twierdzenie:

II. *Wyznacznik $P(t_1,t_2)$ dwóch równań $f=0, g=0$ — **bez względu na to**, czy f, g **są o wymiarach różnych stopniom w obydwóch zmiennych** x, y, **czy nie** — jest jednorodną funkcyą stopnia $m.n$, a **nie niższego**. $m.n$ par (t'_1, t'_2), spełniających związek $P=0$ daje zarazem $n.m$ miejsc zerowych wspólnych $(\zeta t'_1, \varrho t'_2)$ danych równań.*

W geometryi analitycznej określają — [por. art. 74.] — cały nieskończony zbiór punktów (x,y) spełniających algebraiczne równania $f(x,y)=0$ wymiaru m, jako krzywę algebraiczną stopnia m^{go}. A każdy punkt (x,y), dający $f=0$ zalicza się — bez różnicy, czy spółrzędne x, y są rzeczywiste lub nie — do punktów tej krzywej. Po takiem uogólnieniu przyjmuje się i w geometryi, że dwie krzywe algebraiczne stopni m, n przecinają się zawsze w $m.n$ punktach. Przy tem wielokrotność każdego z takich wspólnych punktów ważną tu bardzo odgrywa rolę (por. n. p. Baltzer: *Theorie und Anwendung der Determinanten.* 1881, str. 119.). Wspólne punkta o jednej przynajmniej spółrzędnej nieskończonej wskazują, że krzywe posiadają asymptoty równoległe.

128. Symetryczna funkcya wszystkich gałęzi algebraicznej funkcyi. Rugownik jako taka symetryczna funkcya. W art. 74. określiliśmy każdą zmienną x_s, przybierającą tylko takie wartości, które przy bieżących $x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n$ wynikają z równania algebraicznego $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, jako algebraiczną funkcyę wielowartościową zmiennych $x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n$. Weźmy pod uwagę równanie algebraiczne dwóch tylko zmiennych: $f(x,y)=0$. Jeżeli ono jest wymiaru m, a w zmiennej y jest stopnia $\mu \leqq m$, to przez to równanie określa się μ-wartościowa algebraiczna funkcya. Naznaczmyż wartości, które do dowolnego x należą, przez:

$$(\alpha) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_\mu,$$

to mówimy, że te wartości, zmieniające się równocześnie z bieżącem x, przedstawiają μ gałęzi funkcyi y. [W geometryi analitycznej są to μ gałęzie krzywej algebraicznej]. Połóżmy:

$$(1) \qquad f(xy)=a_0 y^\mu + a_1 y^{\mu-1} + \ldots + a_\mu = 0$$

i przyjmijmy, że oprócz równania $f=0$, mamy jeszcze drugie równanie $g(x,y)=0$ o wymiarze n, a o stopniu $\nu \leqq n$ w zmiennej y, to analogicznie dostaniemy tu ν gałęzi:

$$(\beta) \qquad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$$

funkcyi y, a samo równanie można napisać znowu w postaci:

$$(2) \qquad g(x,y)=b_0 y^\nu + b_1 y^{\nu-1} + \ldots + b_\nu = 0$$

Wartości (α), (β), uważać należy odpowiednio za pierwiastki równań $f=0$, $g=0$ przy wspólnej bieżącej wartości x.

Z tego według art. 90. [I a, I b] — wynika, że rugownik $R_1(x)$ danych równań — bez różnicy czy $m \geqq \mu$, $n \geqq \nu$ — można przedstawić jedną z form:

$$(A) \qquad R_1(x)=(-1)^{\mu\nu}.b_0{}^\mu [f(x,\eta_1).f(x,\eta_2)\ldots f(x,\eta_\nu)],$$

$$(B) \qquad R_1(x)=a_0{}^\nu.[g(x,y_1)g(x,y_2)\ldots g(x,y_\mu)].$$

Że każde z tych wyrażeń będzie wymierną funkcyą argumentu x — jak-to być powinno — sprawdzimy łatwo w ten sposób:

Elementarne symetryczne funkcye pierwiastków (α) mają — choć tych pierwiastków jeszcze przez x wyrazić nie umiemy — po porządku postacie $-a_1/a_0$, $+a_2/a_0$, $-a_3/a_0$, ...; są więc wymiernemi funkcyami argumentu x.

Podobnie przedstawiają się elementarne funkcye symetryczne pierwiastków (β), mają bowiem postacie $-b_1/b_0$, $+b_2/b_0$, $-b_3/b_0$, ... Otóż prawa strona w (A) jest symetryczną wymierną funkcyą pierwiastków $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_\nu$, a stąd wynika, że [art. 89., tw. I.]:

$$(A') \qquad R_1(x) = b_0^{\mu} R'_1\left(\frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, ...\right) \text{ i że podobnie:}$$

$$(B') \qquad R_1(x) = a_0^{\nu} R''_1\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, ...\right),$$

gdzie R'_1, R''_1 są znakami funkcyj wymiernych. Stąd twierdzenia:

I. *Wszystkie symetryczne wymierne funkcye wszystkich gałęzi algebraicznej funkcyi są wymiernemi funkcyami spółczynników równania $f(x,y)=0$, a więc wymiernemi funkcyami argumentu x.*

II. *Rugownik $R_1(x)$ dwóch danych równań $f=0$, $g=0$ daje się przedstawić albo jako wymierna symetryczna funkcya wszystkich gałęzi funkcyi y równania $f=0$, albo wszystkich gałęzi funkcyi y równania $g=0$.*

Pd. 1. Dla równań: $x^2+y^2=1$, $y^2+y^3=0$, obliczywszy z pierwszego z nich $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, dostaniemy:

$$R_1(x) = [x^2+(1-x^2)^{3/2}]\,[x^2-(1-x^2)^{3/2}] = x^4-(1-x^2)^3.$$

Pd. 2. Znaleść rugownik $R_1(x)$ równań: $x^5.y^7+1=0$, $x^4-y^3=0$, wyznaczając z drugiego równania gałęzie: $y = x^{4/3}.1_{\frac{2s\pi}{3}}$, $s=0, 1, 2$ [art. 74., (B)].

[Odp. $R_1 = x^{43}+1$].

129. Wyrożnik równania $f(x,y)=0$. Wielokrotne miejsca tego równania. Naznaczywszy w równaniu $f(x,y)=0$ gałęzie funkcyi y, jak przódy, przez:

$$(1) \qquad y_1, y_2, y_3, \cdots$$

możemy szukać takich poszczególnych wartości x, dla których kilka — lub po kilka — gałęzi (1) jednakową przybiera wartość.

Aby te miejsca znaleść, zestawmy równania:

$$(2) \qquad f(x,y) = v_m(x,y) + v_{m-1}(x,y) + ... = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = v'_{m-1}(x,y) + v'_{m-2}(x,y) + ... = 0$$

i wyrugujmy z nich y. Wyróżnik:

$$D_1(x) = b_0^{\mu}[f(x,\eta_1).f(x,\eta_2)...] = 0,$$

w którym przez $\eta_1, \eta_2, ...$ naznaczono gałęzie funkcyi y równania (3), może najwyżej być stopnia $m(m-1)$ i wskaże swymi pierwiastkami x', x'', ..., te miejsca x, na których właściwie kilka — lub po kilka — gałęzi (1) zrównywa swoje wartości.

Wysokość powtarzania się skończonych wartości (1) na danym skończonym pierwiastku x', można w ten sposób wyznaczyć: Gdy funkcye $f(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ mają na k-krotnym pierwiastku x' największy wspólny podzielnik:

$$t=(y-\beta_1)^{k_1-1}(y-\beta_2)^{k_2-1}\dots(y-\beta_s)^{k_s-1}$$

(o skończonych $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$), to na miejscu x' będziemy mieli między gałęziami (1):

$$\begin{array}{llll} k_1 & \text{gałęzi o wartości} & \beta_1 \\ k_2 & \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"} & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots \\ k_s & \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"} & \beta_s. \end{array}$$

Mówiąc językiem geometryi analitycznej wyrażamy się, że przez punkt (x', β_α), $\alpha=1, 2, \dots, s$ przechodzi równocześnie k_α gałęzi y.

Jeżeli analogicznie rozstrzygnąć chcemy, do ilu gałęzi funkcyi x należy miejsce (x', β_α), to to wywnioskować możemy z równania $f(x, \beta_\alpha)=0$, $\alpha=1, 2, \dots, s$, badając w niem wysokość powtarzania się pierwiastka x'. Jeżeli to równanie daje x' z powtórzeniem h_α, to miejsce (x', β_α) można dwojako pojmować, albo 1⁰) jako miejsce, przez które k_α gałęzi funkcyi alg. y przechodzi, albo 2⁰) jako miejsce, przez które h_α gałęzi funkcyi alg. x przechodzi.

Gdy $D_1=0$ jest stopnia $m(m-1)-r$. $(r>0)$, to jeszcze i w nieskończoności obszaru (x) znajdziemy przecinające się z sobą gałęzie y. Co się tyczy tych ostatnich i tych powtarzających się $y=\infty$, które do skończonych x należą, to kładąc w równaniach (2), (3) $x=\varrho t_1$, $y=\varrho t_2$ dostajemy związki:

$$\varrho^m v_m(t_1, t_2)+\dots=0, \quad \varrho^{m-1}v'_{m-1}(t_1, t_2)+\dots=0.$$

Gdy w nich $v_m(t_1, t_2)$, $v'_{m-1}(t_1, t_2)$ mają wspólny podzielnik $(\alpha t_2-\beta t_1)$, to to wskazuje, że miejsce:

$$(4) \qquad (y:x)_\infty=\beta:\alpha$$

należy do powtarzających się y. Prócz v_m i v'_{m-1} muszą się więc w $f(x_1, y)$ jeszcze i dalsze jednorodne funkcye v_{m-1}, v_{m-2}, ... okazać podzielne przez ten czynnik.

Przyjmijmyż, że ostatnią jednorodną funkcyą podzielną w f przez $(\alpha t_2-\beta t_1)$ jest $v_{m-(k-1)}$, to miejsce (4) do k (a nie do więcej), gałęzi y należy. Inaczej mówiąc: przez miejsce (4) przechodzi k gałęzi y.

Aby równocześnie zbadać ile gałęzi funkcyi x przez to miejsce przechodzi, trzeba wziąć pod rozwagę równania $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ a podstawiwszy w nich $x=\varrho t_1$, $y=\varrho t_2$ przeprowadzić analogiczne — jak ze względu na y — poszukiwania.

We wszystkich w powyższy sposób wyznaczonych miejscach (x', y') bez różnicy, czy leżą w skończoności, czy nieskończoności, powtarza się y' razy $k > 1$, podczas gdy powtórzenie h spółrzędnej x' może być także $=1$.

Miejsca, na których równocześnie $k > 1$, $h > 1$ nazywają się miejscami osobliwemi, albo wielokrotnemi równania (krzywej) $f=0$. Miejsca, na których mamy $k > 1$, $h=1$, (lub $k=1$, $h>1$) nazywają się miejscami osobliwemi (ramifikacyi) algebraicznej funkcyi y, (lub x).

Pd. 1. Dla równania: $f = x^2 + y^2 - 1 = 0$ mamy $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$, a więc $D_1 = = x^2 - 1 = 0$, a do każdego z pierwiastków $x = +1, = -1$ należy dwukrotnie $y = 0$. Same $x = +1, -1$ nie powtarzają się na tych miejscach, a więc $(+1, 0)$, $(-1, 0)$ są miejscami osobliwemi funkcyi y.

Pd. 2. Z równania:

$$(a) \qquad f = (x^2 + y^2)^2 + (y^2 - x^2) = 0 \quad \text{dostajemy:}$$

$$(b) \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)y + y = 0, \qquad (c) \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)x - x = 0.$$

Równanie (b) ma pierwiastki $y = 0, \pm i\sqrt{\frac{2x^2+1}{2}}$ co daje:

$$D_1 = f(x,0).f\left(x, i\sqrt{\frac{2x^2+1}{2}}\right).f\left(x, -i\sqrt{\frac{2x^2+1}{2}}\right) = 0, \text{ czyli } (x^4 - x^2)(8x^2+1)^2 = 0.$$

Ten wyróżnik jest stopnia $8 > 4.3$ i ma pierwiastki:

$$1)\ x = 0, \quad 2)\ x = \pm 1, \quad 3)\ x = \pm \frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

Dla $x = 0$ mają równanie (a), (b) największy wspólny podzielnik y, a więc do $x = 0$ należy dwukrotnie $y = 0$. Że zaś równaniu $f(x, 0) = 0$ zadość czyni $x = 0$ także dwukrotnie, więc stąd dostajemy miejsce:

$$(1) \qquad (x = 0,\ y = 0), \quad \text{o powtórzeniach: } 2,\ 2.$$

Co się tyczy pierwiastków (2) to dla nich mają równania (a), (b) znowu największy wspólny podzielnik y, a więc do $x = \pm 1$ należy $y = 0$ dwukrotnie.

Z równania $f(x, 0) = 0$ wynikają jednak $x = +1, -1$ tylko jednokrotnie. Stąd pochodzi, że z pierwiastków (2) dostajemy 2 miejsca:

$$(2) \qquad (x = \pm 1,\ y = 0) \quad \text{o powtórzeniach } 1,\ 2.$$

Dla każdego z pierwiastków (3) przechodzi równanie (a) na:

$$\left(y^2 + \frac{3}{8}\right)^2 = \left(y - \sqrt{\frac{3}{8}}\, i\right)\left(y + \sqrt{\frac{3}{8}}\, i\right) = 0.$$

Stąd wynika, że do obydwóch pierwiastków 3) należy dwukrotnie $y = +\sqrt{\frac{3}{8}}\, i$ $y = -\sqrt{\frac{3}{8}}\, i$. Wstawiając którąbądź z tych wartości w równanie $f = 0$, dostajemy związek: $x^4 - \frac{14}{8}x^2 - \frac{15}{64} = 0$, który tylko jednokrotnie zawiera każdy z pierwiastków 3). Stąd wypływają więc miejsca:

(3) $\left(x=+\frac{i}{2\sqrt{2}},\ y=\sqrt{\frac{3}{8}}\,i\right),\ \left(x=-\frac{i}{2\sqrt{2}},\ y=-\sqrt{\frac{3}{8}}\,i\right)$

o powtórzeniach 1, 2

i miejsca:

(4) $\left(x=+\frac{i}{2\sqrt{2}},\ y=\sqrt{\frac{3}{8}}\,i\right),\ \left(x=-\frac{i}{2\sqrt{2}},\ y=-\sqrt{\frac{3}{8}}\,i\right)$

również o powtórzeniach 1, 2.

Przechodząc do tych miejsc leżących w nieskończoności, przez które kilka gałęzi x, lub y przechodzi, zauważmy, że w równaniach (a), (b) posiadają v_4, v'_3 wspólny czynnik $y^2+x^2=(y-xi)(y+xi)$, a v_2 jest zerem. Zupełnie tak samo zawiera się ten czynnik w jednorodnych funkcyach v równań (a), (c). Stąd wynika że w nieskończoności dostaniemy miejsca:

(5) $(y:x)_\infty=+i,\ (y:x)_\infty=-i$ o powtórzeniach 2, 2.

Z miejsc (1)...(5) są tylko trzy, a mianowicie miejsce (1) i dwa miejsca (5) wielokrotnemi miejscami równania (a). Z miejsc pozostałych jest miejsce (2) miejscem osobliwem funkcyi alg. x, a miejsca (3), (4) miejscami osobliwemi funkcyi alg. y. Krzywa określona tem równaniem nazywa się lemniskatą.

Pd. 3. Okazać, że w równaniu:

(a) $$f=x^2y^2-(a+x)^2(b^2-x^2)=0$$

mamy:

(1) miejsca $(x=+b,\ y=0)$, $(x=-b,\ y=0)$ o powtórzeniach 1, 2.

(2) miejsce $(x=+a,\ y=0)$, o powtórzeniach 2, 2.

(3) miejsce $(y:x)_\infty=\infty$, o powtórzeniach 4, 4.

Miejsca (1) są tu miejscami osobliwemi funkcyi y, a miejsca (2) (3) miejscami wielokrotnemi samego równania.

Uwaga. Gdy na pewnem miejscu (α, β) mamy k wartości $y=\beta$ i h wartości $x=\alpha$, gdzie $h>1$, $k>1$, to po sprowadzeniu równania $f(x, y)=0$ do otoczenia tego miejsca przez podstawienia $x=\alpha+\xi$, $y=\beta+\eta$ dostaniemy równanie $f_1(\xi, \eta)=0$ w którem ξ samo zawierać się będzie z najniższym wykładnikiem h, a η samo z najniższym wykładnikiem k, [art. 74]. Przyjmijmy $k>h$, to przez podstawienia $\xi=ax_1+by_1$, $\eta=a'x_1+b'y_1$ zmienić można równanie tak, że w nowem równaniu $f_2(x_1, y_1)=0$ dostaniemy dla $x_1=0$, h wartości $y_1=0$ i odwrotnie dla $y_1=0$ także h wartości $x_1=0$. To wyrażamy, mówiąc, że punkt wielokrotny o powtórzeniach (h, k) można — gdy $h<k$ — zawsze sprowadzić do punktu o powtórzeniach (h, h). Taki punkt nazywa się h-krotnym.

130. Wyznaczenie równania $f(x, y)=0$ z danych miejsc zerowych funkcyi f. Punkta wyjątkowe. Pęki krzywych. Wiadomo z art. 70., tw. I., że zupełna funkcya dwóch zmiennych, a wymiaru m posiada $[(m+1)(m+2)]/2$ spółczynników $a, b, c, d, \ldots, s$. Jeżeli jednak chodzi o wyznaczenie krzywej algebraicznej określonej równaniem $f(x, y)=0$ stopnia m z dostatecznej ilości jej punktów, to dość jest tylko stosunki tych spółczynników wyznaczyć. Do ich wyznaczenia wystarczy $\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1=\frac{m}{2}(m+3)=k$ punktów.

Niechże tymi punktami będą:

$$(1)\qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_k, y_k),$$

to z k równań:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &a+bx_1+cy_1+dx_1y_1+...+sy_1^m=0\\ &a+bx_2+cy_2+dx_2y_2+...+sy_2^m=0\\ &\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ &a+bx_k+cy_k+dx_ky_k+...+sy_k^m=0,\end{aligned}$$

za obraniem a dowolnie, dojdziemy — z wyjątkiem wypadku, który poniżej omówimy — do całkiem oznaczonych wartości:

$$b=Ba,\ c=Ca,\ d=Da, ..., s=Sa.$$

Krzywa żądana będzie zupełnie oznaczona, określi ją równanie: $1+Bx+Cy+Dxy+...+Sy^m=0$. Stąd twierdzenie:

I. *Krzywa algebraiczna stopnia m^{go} jest w ogólności zupełnie wyznaczona zapomocą $\frac{m}{2}(m+3)$ punktów, przez które ma przechodzić.*

Uwaga. Analogicznie można udowodnić, że równanie $f(x_1, x_2, ..., x_n)=0$ m^{go} wymiaru o n zmiennych daje się w ogólności wyznaczyć zapomocą $\rho-1=k$ swoich miejsc zerowych; $\rho=\binom{m+n}{n}$, [art. 70].

Równaniu znalezionemu można nadać kształt:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 1, & x, & y, & xy, & ..., & y^m\\ 1, & x_1, & y_1, & x_1y_1, & ..., & y_1^m\\ \vdots\\ 1 & x_k, & y_k, & x_ky_k, & ..., & y_k^m \end{vmatrix}=0,$$

a to z tej uwagi, że równania $(f(x,y)=0,\ f(x_1,y_1)=0, ..., f(x_k,y_k)=0$ są liniowe, jednorodne i współczesne o $(k+1)$ niewiadomych $a, b, c, ..., s$.

Lecz może się zdarzyć, że wszystkie podwyznaczniki P_k, jakie z kombinacyj kolumn wydłużonego schematu:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \cdots & y_1^m\\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \cdots & y_2^m\\ \vdots\\ 1 & x_k & y_k & x_ky_k \cdots & y_k^m \end{vmatrix}$$

utworzyć można, są zerami. Wtedy — według teoryi równań liniowych — dwie niewiadome uznać trzeba za dowolne, a jedno z równań (2) odrzucić. Opuśćmyż pierwsze równanie, a pozostałe napiszmy w formach:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &cy_2+dx_2y_2+...+sy_2^m=a+bx_2\\ &cy_3+dx_3y_3+...+sy_3^m=a+bx_3\\ &\vdots\\ &cy_k+dx_ky_k+...+sy_k^m=a+bx_k,\end{aligned}$$

to, pozostawiając a, b dowolnemi, dostaniemy:

$$c=aC+bC', \ d=aD+bD', ..., s=aS+bS'$$
$$\text{i} \ f=a+bx+(aC+bC')y+(aD+bD')xy+...$$
$$...+(aS+bS')y^m=0.$$

Połóżmy $b/a=\lambda$ i

$$1+Cy+Dxy+...Sy^m=\varphi(x,y)$$
$$bx+C'y+D'xy+...+S'y^m=\varphi'(x,y),$$

to możemy żądaną krzywę określić równaniem:

(6) $$f=\varphi+\lambda\varphi'=0$$

z dowolnym parametrem λ.

Lecz przez punkta (1) dające wszystkie $P_k=0$ przechodzą także krzywe $\varphi=0$, $\varphi'=0$; gdyż f przechodzi na φ przy $\lambda=0$, a na φ' przy $\lambda=\infty$ (gdy zamiast $\varphi+\lambda\varphi'=0$ napiszemy $\varphi'+\frac{1}{\lambda}\varphi=0$).

Przy jakiemkolwiek zatem λ spełnia się równanie (6) dla m^2 wspólnych punktów krzywych $\varphi=0$, $\varphi'=0$. W tych m^2 punktach mieszczą się i dane punkta (1).

Doszliśmy więc tu nie do jednej krzywej ale — jak się wyrażają — do pęku krzywych (m^{go} stopnia) t. j. do nieskończenie wielu krzywych m^{go} stopnia, które wszystkie przechodzą przez m^2 punktów przecięcia się dwóch wyznaczonych krzywych $\varphi=0$, $\varphi'=0$. Z tego powodu nazywają się punkta (1) wyjątkowymi a punkta, przez które wszystkie krzywe pęku równocześnie przechodzą, a których jest m^2, nazywają się podstawowymi tego pęku.

Jedną oznaczoną krzywę wyjmujemy z pęku, żądając, aby przechodziła przez pewien punkt (ξ,η) nie liczący się do podstawowych. Mamy bowiem z tego warunku:

$$\varphi(\xi,\eta)+\lambda\varphi'(\xi,\eta)=0, \text{ a więc } \lambda=\lambda_1=-\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\varphi'(\xi,\eta)}$$

a żądaną krzywą jest $\varphi+\lambda_1\varphi'=0$.

Lecz jedną tu okoliczność trzeba omówić bliżej. Do równania (6) doszliśmy, biorąc spółczynniki a, b za dowolne i opuszczając równanie pierwsze z systemem (2). Przyjmijmy teraz, że opuszczając równanie pierwsze, bierzemy dwa inne spółczynniki za dowolne, lub opuszczając inne równanie, pozostawiamy dwa jakiekolwiek spółczynniki dowolnymi i że w tych przypadkach dochodzimy do równania:

(7) $$f=\psi+\lambda'\psi'=0$$

gdzie ψ, ψ' różne będą od φ, φ'.

Każde z nich określa znowu pęk krzywych o m^2 podstawowych punktach. Lecz co się tyczy tych punktów — to, o ile można mieć pewność, że się w nich punkta (1) zawierają*) — nie można stanowczo twierdzić, że dalsze punkta w ilości m^2-k spadają z dalszymi podstawowymi punktami pęku (6).

Aby to zbadać, obierzmy dowolny punkt (ξ, η) nie liczący się ani do podstawowych pęku (6), ani do podstawowych pęku (7) i wyjmijmy z pęku (6) i (7) krzywe przechodzące przez ten punkt. Muszą one być identyczne, gdyż do ich wyznaczenia można użyć $(k-1)$ punktów (1) i punktu (ξ, η), skoro te punkta w ilości k nie dają wszystkich $P_k=0$. Gdy więc równaniami tych krzywych są: $\varphi+\lambda\varphi'=0$, $\psi+\lambda'\psi'=0$, to musi tu zajść identyczność:

$$(8) \qquad \varphi+\lambda\varphi'=\psi+\lambda'\psi'.$$

Że zaś przez zmienianie położenia punktu (ξ, η) można objąć cały pęk $\varphi+\lambda\varphi'=0$, a dla każdego położenia zajdzie identyczność (8), więc stąd wynika, że pęki $\varphi+\lambda\varphi'=0$, $\psi+\lambda'\psi'=0$ są identyczne i mają wskutek tego tesame punkta podstawowe. Do pęku zaliczają się i krzywe $\psi=0$, $\psi'=0$; musi więc być $\psi=\varphi+\mu\varphi'$, $\psi'=\varphi+\mu'\varphi'$, a to wskazuje, że w razie wszystkich $P_k=0$ dochodzimy — mimo rozmaitych sposobów rozwiązywania równań (2) — zawsze do tegosamego pęku (6). Zmiana sposobu rozwiązywania na inny ma tylko ten wpływ, że w równaniu pęku w miejsce krzywych $\varphi=0$, $\varphi'=0$ występują dwie inne krzywe $\varphi+\mu\varphi'=0$, $\varphi+\mu'\varphi'=0$ liczące się do pęku**). Z tych wszystkich uwag wynika twierdzenie***).

II. *Gdy do wyznaczenia krzywej m^{go} stopnia danych jest $k=\frac{m}{2}(m+3)$ punktów w ten sposób, że one zadośćczynią wszystkim związkom $P_k=0$, to punkta te nie wyznaczają jednoznacznie krzywej, ale dają pęk krzywych o m^2 podstawowych punktach; w tych podstawowych punktach mieszczą się i dane.*

Lecz nie tylko system k danych punktów jest wyjątkowym; przez każdy bowiem dowolnie wybrany system k punktów miesz-

*) Teorya równań uczy, że się opuszczone równanie sprawdza już przez rozwiązania równań pozostałych.

**) Zauważyć tu przytem potrzeba, że co się tyczy wyboru parametrów μ, μ' mamy tu zupełną dowolność.

***) Por. Euler, *„Sur une contradiction apparente dans la doctrine de lignes courbes“ Histoire des l'Academié des sciences et belles lettres (Berlin) [Mémoires — Classe de philosophié experimentale]* r. 1748 str. 219.

czących się w podstawowych przechodzi cały pęk krzywych, a nie jedna oznaczona krzywa. Stąd wynika:

III. *Jakkolwiek wyjęte punkta w ilości k z punktów podstawowych danego pęku m^{go} stopnia tworzą system wyjątkowy dla każdej krzywej pęku.*

Uwaga. W danej krzywej m^{go} stopnia $f=0$ można na nieskończenie wiele sposobów znaleść jej punkta wyjątkowe; potrzeba tylko przyjąć, że one leżeć mają na pewnej, najdowolniejszej zresztą krzywej m^{go} stopnia $\varphi'=0$. Niech dalej φ będzie funkcyą m^{go} stopnia o jednym spółczynniku oznaczonym, a o innych spółczynnikach $A, B, C,\ldots$ nieoznaczonych, to żądając identyczności:

$$f=\varphi+\lambda\varphi', \tag{α}$$

mamy po lewej stronie $\frac{m}{2}(m+3)$ spółczynników, a po prawej stronie również $\frac{m}{2}(m+3)$ ilości do oznaczenia, a mianowicie $\frac{m}{2}(m+3)-1$ spółczynników $A, B, C,\ldots$ i dowolną λ. Zrównując ze sobą odpowiednie spółczynniki w (α) i wyznaczając stąd $A, B, C,\ldots,\lambda$, dostajemy w istocie identyczność (α). Gdy już φ mamy wyznaczone, to wyjmując z m^2 punktów przecięcia się krzywych $\varphi=0$, $\varphi'=0$ dowolnych k punktów dostajemy w nich żądany wyjątkowy system.

Do utworzenia pęku krzywych m^{go} stopnia można — wskutek dowolnego parametru λ, który wchodzi w równanie pęku — $(k-1)$ punktów wybrać całkiem dowolnie. Te punkta niech będą:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)\ldots,\ (x_{k-1}, y_{k-1}), \tag{9}$$

to teraz nasuwa się pytanie: j a k i n a i l e s p o s o b ó w d o d a n y c h d o w o l n i e p u n k t ó w (9) m o ż n a d o b r a ć p u n k t k^{ty}: $(x_k y_k)$, t a k, a b y o n r a z e m z p u n k t a m i (9) d a w a ł s y s t e m w y j ą t k o w y c h p u n k t ó w?

Dane punkta (9) dają pęk krzywych $\varphi+\lambda\varphi'=0$ o m^2 podstawowych punktach. Do tych zaliczają się punkta (9), dalsze zaś punkta w ilości:

$$m^2-\left(\frac{m}{2}(m+3)-1\right)=\frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

są już z a l e ż n e od obranych punktów (9), a każdy z nich razem z danymi utworzy system wyjątkowych punktów. Stąd twierdzenia:

IV. *Do $(k-1)$ dowolnie danych punktów można na $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ sposobów doszukać punktu k^{go}, tworzącego z danymi system wyjątkowy.*

V. *Wszystkie krzywe stopnia m^{go} mające $(k-1)$ wspólnych punktów przecinają się jeszcze w $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ stałych punktach.*

VI. *Gdy system m^2 punktów ma być zbiorem wszystkich przecięć się dwóch krzywych stopnia m^{go}, to w tym systemie tylko $(k-1)$ punktów można obrać dowolnie.*

Pd. 1. Dla $m=3$ jest $k=9$, a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}=1$, dla $m=4$ zaś mamy $k=14$ i $\frac{(m-1)(m-2)}{2}=3$. Stąd wynika:

Wszystkie krzywe 3^{go} stopnia przecinające się w 8 punktach przechodzą jeszcze przez 9^{ty} punkt stały.

Wszystkie krzywe 4^{go} stopnia przechodzące przez 13 danych punktów przechodzą jeszcze przez 3 stałe punkta

Pd. 2. Gdy w równaniu $f=0$ danej krzywej brakuje ν spółczynników, a chodzi o wyznaczenie na niej pewnego systemu wyjątkowych punktów, to można sobie zadanie ułatwić, przyjmując φ i φ' tego samego kształtu co f. Tak n. p. gdy

$f=x^4+y^4+x+y+1$, a obierzemy $\varphi'=2x^4-5y^4-x+y+3$ i

$\varphi=3x+ay^4+bx+cy+d$, (por. uwagę 2), to z relacyi:

$$x^4+y^4+x+y+1=(3x^4+ay^4+bx+cy+d)+\lambda(2x^4-5y^4-x+y+3),$$

dostajemy:

$3+2\lambda=1$, $a-5\lambda=1$, $b-\lambda=1$, $c+\lambda=1$, $d+3\lambda=1$. Stąd $\lambda=-1$, $a=-4$, $b=0$, $c=2$, $d=4$, a wyjątkowy system punktów danej krzywej utworzy 14 punktów wyjętych dowolnie z 16 punktów przecięcia się krzywych:

$$3x^4-4y^4+2y+4=0,\; 2x^4-5y-x+y+3=0.$$

131. Wyznaczenie takich punktów na danej krzywej, które mogą być wszystkiemi przecięciami się jej z drugą krzywą. Zajmijmy się teraz krzywemi różnych stopni m, n.

Niech $f=0$ będzie równaniem danej krzywej stopnia m^{go}, a $g=0$ niech przedstawia ogólną krzywą — (z ogólnymi spółczynnikami) — stopnia n^{go}. Naszem zadaniem będzie: na pierwszej z tych krzywych wyznaczyć $m.n$ punktów tak, aby one dawały przecięcia się krzywej $f=0$ z ogólną krzywą $g=0$*).

Przyjmijmy $m>n$. Na krzywej $f=0$ obierając $\frac{n}{2}(n+3)$ punktów dowolnie, mamy przez nie wyznaczoną pewną krzywę n^{go} stopnia $g=0$. Jej dalsze punkta przecięcia się z krzywą $f=0$ w liczbie $m.n-\frac{n}{2}(n+3)$ już nie będą dowolne, ale zależne od obranych pierwszych punktów.

*) Por. Jacobi: *„De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel...“* Crelle J. T. 15, (1836), str. 285.

Plücker: *„Théoremes généraux concernant les équations d'un dègré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues“*. Crelle J. T. 16, (1837), str. 17,

Salmon Fiedler: *„Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven* (Lipsk 1873), str. 15—25.

Przypadek $m<n$ wymaga poprzedniego przygotowania.

Gdy równanie $g=0$ nie jest ogólnem, ale określa pewną dobrze oznaczoną krzywę, przecinającą $f=0$ w $m.n$ punktach (f, g), to także i krzywa $g'=g+\psi.f$ o dowolnej całkowitej funkcyi $\psi(x, y)$ przetnie $f=0$ w pewnym systemie punktów (S), do którego się niezawodnie punkta (f, g) zaliczą, gdyż widocznie $g'=0$, przy równoczesnem $f=0$, $g=0$.

Lecz, aby system (S) nie był liczniejszym od (f, g), trzeba, aby funkcya g' była n^{go}, a nie wyższego wymiaru. Trzeba więc o ψ założyć, że jest funkcyą najwyżej $(n-m)^{go}$ wymiaru.

Przyjmijmyż jej wymiar $=(n-m)$, to ψ zawiera:

$$\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$$

spółczynników dowolnych. Za ich pomocą możemy w g' nadać tyluż spółczynnikom pewne oznaczone wartości. (Przytem unikać trzeba znikania wszystkich spółczynników w wyrazach najwyższego wymiaru, aby g' pozostało funkcyą n^{tego} wymiaru). Można więc — nie zmieniając systemu (f, g) — krzywę $g=0$ zastąpić krzywą $g'=0$.

Z tego wynika, że przechodząc do ogólnego równania $g=0$ możemy w niem zawsze $\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}$ spółczynników uważać za oznaczone, jeżeli nam chodzi o wzajemną zależność $n.m$ punktów, wypływających z przecinania się jakiejkolwiek krzywej stopnia n, z krzywą daną $f=0$ stopnia m; $(m<n)$.

Równanie $g=0$ ma teraz jeszcze:

$$\frac{n(n+3)}{2}-\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}=mn-\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

spółczynników nieoznaczonych. Tyleż więc także punktów potrzeba do jej wyznaczenia. Gdy te punkta na $f=0$ dowolnie wybierzemy, to pozostałe będą już od nich zależne. Stąd twierdzenie:

I. *Gdy na krzywej m^{go} stopnia mamy wybrać $m.n$ punktów, tworzących przecięcia się jej z krzywą n^{go} stopnia, to:*

1) w razie $m>n$ można $\frac{n}{2}(n+3)$ punktów wybrać dowolnie, a pozostałe w ilości: $t_1=mn-\frac{n}{2}(n+3)$ będą już od nich zależne;

2) w razie $m<n$ można $mn-\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ punktów wybrać dowolnie; pozostałe w ilości: $t_2=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ będą od pierwszych zależne.

Przytem zauważyć potrzeba, że w pierwszym razie dostajemy tylko jedną krzywę $g=0$ stopnia n., w drugim zaś razie po obraniu $\left[mn-\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]$ stałych punktów na $f=0$, a

$$\left[\frac{m}{2}(m+3)-mn+\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]$$

czemraz innych punktów poza $f=0$ dochodzimy do krzywych $g_1=0$, $g_2=0$, ..., które wszystkie, przecinając krzywę $f=0$ w

$$\left[mn-\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]$$

obranych punktach, przecinają ją jeszcze w dalszych $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ punktach stałych. Drugą zatem część twierdzenia I. można dokładniej tak wypowiedzieć:

II. *Gdy krzywe* $g_1=0$, $g_2=0$, ... *stopnia* n *przecinają się z sobą w* $\left[mn-\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]$ *tych samych punktach na krzywej* $f=0$ *stopnia* $n<m$, *to przechodzą jeszcze wszystkie przez* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ *tych samych punktów, leżących na* $f=0$.

III. *Z* $\frac{n}{2}(n+3)$ *punktów, potrzebnych do wyznaczenia krzywej* $g=0$ *stopnia* n, *może najwyżej znajdować się ich* $\left[mn-\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]$ *na pewnej krzywej* $f=0$ *stopnia* $m<n$, *jeżeli* $g=0$ *nie ma się składać z samej krzywej* $f=0$ *i krzywej stopnia* $(n-m)$.

Uwaga. Żadnego z dowolnych punktów nie należy umieszczać w wielokrotnym punkcie krzywej $f=0$; gdyż w twierdzeniu I. przypuszcza się, że każdy obrany punkt będzie jednokrotnym punktem przecięcia się krzywych $f=0$, $g=0$.

Pd. 1. Przy $m=4$, $n=3$ jest $\frac{n}{2}(n+3)=9$, $t_1=3$, a stąd: Z 12 punktów przecięcia się danej krzywej 4go stopnia z krzywą 3go stopnia 3 ich zależy od pozostałych 9.

Pd. 2. Przy $m=4$, $n=6$ mamy: $mn-\frac{(m-1)(m-2)}{2}=21$, $t_2=3$, a to znaczy: Z 24 punktów przecięcia się danej krzywej 4go stopnia z krzywą 6go stopnia 3 ich zależy od pozostałych 21, a wszystkie krzywe stopnia 6go przechodząc przez 21 punktów, leżących na krzywej 3go stopnia przecinają się z sobą jeszcze w 3 punktach stałych na tej krzywej.

ROZDZIAŁ X.

O eliminacyach z n równań ($n > 2$).

132. Symetryczna funkcya wszystkich miejsc zerowych wspólnych dwóch równań o dwóch niewiadomych. Dane równania $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$ o wymiarach m, n niech mają spółczynniki stałe, $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$, a zawarte w nich funkcye jednorodne najwyższych wymiarów niech będą postaci:

$$v_m = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \ldots + A_m y^m, \quad w_n = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} y + \ldots + B_n y^n.$$

Aby te funkcye posiadały wspólne czynniki liniowe $(\alpha x + \beta y), \ldots$ potrzeba, aby rugownik $\Delta(A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots)$ równań:

$$A_0 \left(\frac{x}{y}\right)^m + A_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{m-1} + \ldots = 0, \quad B_0 \left(\frac{x}{y}\right)^n + B_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \ldots = 0$$

był identycznie zerem.

Za wykluczeniem $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1 \ldots$ dających $\Delta = 0$ będą dane równania, o których zakładamy, że ich pierwsze strony są niewspółmierne, posiadały wspólne miejsca zerowe leżące wszystkie w skończoności. Niech one będą:

(1) $$(x_1 y_1), (x_2 y_2), \ldots, (x_\mu y_\mu), \quad \mu = m . n.$$

Wymierna funkcya $S(x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_\mu y_\mu)$ o tej własności, że swej postaci nie zmienia za przemianą między sobą dowolnych dwóch miejsc $(x_\alpha\, y_\alpha)$, $(x_\beta\, y_\beta)$ nazywa się symetryczną funkcyą miejsc (1).

W badaniach takich funkcyj można się oczywiście ograniczyć do całkowitych takich funkcyj. Lecz dalej jasnem jest, że jeżeli taka całkowita funkcya zawiera dodajnik:

(2) $$C . x_\alpha^p . y_\alpha^q . x_\beta^r . y_\beta^s \ldots \text{ o } k \text{ parach } (x_\alpha\, y_\alpha), \ldots$$

to musi także posiadać wszystkie dodajniki, jakie z (2) powstają, gdy się w nim $(\alpha, \beta, \ldots)$ zastąpi dowolną kombinacyą k^{tej} klasy szeregu $1, 2, 3, \ldots, \mu$. Musi więc zawierać jednorodną funkcyę symetryczną stopnia $(p+q+r+s+\ldots)$. Z tego powodu, można się ograniczyć do jednorodnych, całkowitych symetrycznych funkcyj wszystkich par (1). Takie funkcye nazywamy porządku pierwszego, jeżeli w każdym jej dodajniku (2) tylko się jedna z par (1) zawiera. Są-to więc funkcye postaci:

(3) $$x_1^p y_1^q + x_2^p y_2^q + \ldots + x_\mu^p y_\mu^q = \Sigma x_1^p . y_1^q.$$

Funkcyami drugiego porządku nazwiemy te, których dodajniki po dwie z par (1) zawierać będą, a więc funkcye postaci:

(4) $$x_1^p y_1^q x_2^r y_2^s + \ldots = \Sigma x_1^p y_1^q x_2^r y_2^s \text{ i t. d.}$$

Zajmijmy się naprzód funkcyą pierwszego porządku (3). W tym celu połóżmy $t = x + ay$, gdzie t jest zmienną, a a dowolnym parametrem. Stąd $x = t - ay$, a gdy to wyrażenie za x wstawimy w dane równania, dostaniemy:

$$f(t-ay,\ y) = 0,\quad g(t-ay,\ y) = 0.$$

Eliminując tu y, dojdziemy do równania:

(5) $$R(t, a) = C_0 t^\mu + C_1 t^{\mu-1} + \ldots + C_\mu = 0$$

o pierwiastkach $t =$

(6) $$x_1 + ay_1,\ x_2 + ay_2, \ldots, x_\mu + ay_\mu$$

[C_0, $C_1, \ldots$, są całkowitemi funkcyami w a].

Przy tem zauważyć potrzeba: Ponieważ jeden z tych pierwiastków n. p. t_λ przy skończonem a może być $= \infty$ tylko wtedy, gdy x_λ lub y_λ jest $= \infty$, a to może zajść tylko przy $\Delta = 0$, więc C_0 nie może zależeć od a i musi być $= \Delta^h$, gdzie h jest pewną liczbą całkowitą dodatnią*).

Suma ν^{tych} potęg (ν całkowite, dodatnie) pierwiastków (6) jest [art. 88.] wymierną całkowitą funkcyą ilorazów $\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_0}, \ldots$, a więc n. p.

$$(x_1 + ay_1)^\nu + (x_2 + ay_2)^\nu + \ldots = G\left(\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_0}, \ldots\right).$$

W spółczynnikach $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ przedstawi się już G jako wymierna ułamkowa funkcya $R(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots)$. Parametr a wejdzie w nią jednak całkowicie. Połóżmyż

$$G = R_0 + R_1 a + R_2 a^2 + \ldots,$$

to ze związku

$$(x_1 + ay_1)^\nu + (x_2 + ay_2)^\nu + \ldots = R_0 + R_1 a + R_2 a^2 + \ldots,$$

który zachodzi przy każdem a, dostajemy:

(7) $$\left\{\begin{aligned} x_1^\nu + x_2^\nu + \ldots &= R_0(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots) \\ \binom{\nu}{1}[x_1^{\nu-1} y_1 + x_2^{\nu-1} y_2 + \ldots] &= R_1(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots) \\ \binom{\nu}{2}[x_1^{\nu-2} y_1^2 + x_2^{\nu-2} y_2 + \ldots] &= R_2(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots) \\ &\vdots \\ y_1^\nu + y_2^\nu + \ldots &= R_\nu(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots) \end{aligned}\right.$$

Każda z funkcyj R_0, $R_1, \ldots$, ma za mianownik pewną potęgę dodatnią wyznacznika Δ.

---

*) Wartość wykładnika h jest dla teoryi obojętną. Przez spółczynnik różny od Δ, a zawarty w C_0 można równanie (5) skrócić.

Formy (7) wskazują, że każda symetryczna funkcya pierwszego porządku, dowolnego stopnia v daje się wyrazić wymiernie przez spółczynniki danych równań*).

Lecz i funkcya drugiego porządku (4) ma również tę własność, a aby to okazać, zauważmy iloczyn dwóch funkcyj porządku pierwszego:

$$\Sigma x_1^p . y_1^q . \Sigma x_1^r . y_1^s = \Sigma x_1^{p+r} . y_1^{q+s} + \Sigma x_1^p y_1^q x_2^r y_2^s .$$

Każdy z czynników po lewej stronie i pierwszy dodajnik po prawej stronie są już wymiernemi funkcyami w $a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...$ Drugi dodajnik po prawej stronie jest właśnie żądaną funkcyą. Stąd pochodzi, że i tu będzie:

$$\Sigma x_1^p . y^q . x_2^r y_2^s = R(a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...).$$

W razie $p=r$, $q=s$ dostaniemy:

$$\Sigma x_1^p . y_1^q . x_2^p . y_2^q = \frac{1}{2} R(a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...)$$

W obu tych ostatnich wzorach funkcya R posiada jako mianownik pewną potęgę wyznacznika Δ.

W ten sposób postępując dalej na wzór teoryi symetrycznych funkcyj pierwiastków jednego równania z jedną niewiadomą [art. 88.] dojdziemy ostatecznie do twierdzeń:

I. *Każda symetryczna funkcya wspólnych miejsc zerowych* (x_α, y_α), *dwóch danych równań* $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$, $(\Delta \neq 0)$, *jest wymierną funkcyą spółczynników obydwóch tych równań; a więc*:

$$S(x_1 y_1, x_2 y_2, ...) = R(a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...).$$

II. *Gdy w szczególności S jest całkowitą symetryczną funkcyą*, *to R ma za mianownik pewną potęgę wyznacznika Δ.*

133. Wprowadzenie do równań zmiennego parametru. Postać funkcyi symetrycznej w tym wypadku. Przyjmijmy, że S jest całkowitą i jednorodną funkcyą stopnia v i połóżmy w danych równaniach:

$$x = \frac{\xi}{\varrho}, \; y = \frac{\eta}{\varrho},$$

---

*) Sposób umieszczony w tekście wyprowadzenia tego wniosku podał Poisson w rozprawie *„Sur l'élimination dans les équations algébriques" Journal de l'École polytechnique Cahier 11* (w tomie 4.) (1810) str. 199....

Praktyczne wzory przedstawiające funkcye pierwszego porządku znajdują się w rozprawie E. Hess'a *„Über die Darstellung der einförmigen symmetrischen Functionen ... Zeitschrift für Math. u. Phys.* — Rocznik 15. (1870) str. 325—343.

gdzie ξ, η są nowemi zmiennemi, a ϱ^{-1} dowolnym czynnikiem. Tak przerobione równania: $f\left(\frac{\xi}{\varrho}, \frac{\eta}{\varrho}\right)=0$, $g\left(\frac{\xi}{\varrho}, \frac{\eta}{\varrho}\right)=0$ pomnóżmy odpowiednio przez ϱ^m, ϱ^n, to dostaniemy związki:

$$(1)\quad \begin{aligned} \varrho^m f\left(\frac{\xi}{\varrho}, \frac{\eta}{\varrho}\right) &= \ldots + A_{q,r}\,\varrho^{m-q-r}\,\xi^q \eta^r + \ldots = 0,\\ \varrho^n g\left(\frac{\xi}{\varrho}, \frac{\eta}{\varrho}\right) &= \ldots + B_{q,r}\,\varrho^{m-q-r}\,\xi^q \eta^r + \ldots = 0, \end{aligned}$$

$A_{q,r}$, $B_{q,r}$ są-to spółczynniki przy $\xi^q \eta^r$ w pierwotnych równaniach.

Przy dowolnej wartości ϱ mają równania (1) wspólne miejsca zerowe:

$$(2)\qquad (\xi_\alpha=\varrho x_\alpha,\ \eta_\alpha=\varrho y_\alpha),\ \alpha=1, 2, \ldots, \mu,$$

a gdy — tworząc symetryczną, całkowitą i jednorodną funkcyę $S(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \ldots)$ — zastosujemy tu twierdzenie I, art. poprzedz. dostaniemy:

$$\begin{aligned} S(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \ldots) &= R(\ldots A_{q,r}\,\varrho^{m-q-r}, \ldots, B_{q,r}\,\varrho^{n-q-r}, \ldots)\\ &= S(\varrho x_1, \varrho y_1, \varrho x_2, \varrho y_2, \ldots) \text{ na podstawie (2).} \end{aligned}$$

Z funkcyi $S(\varrho x_1, \varrho y_1, \ldots)$ da się wyłączyć czynnik ϱ^ν w ten sposób, że pozostały czynnik już od ϱ wcale nie zależy. Musi się więc z R dać ten czynnik w tensam sposób wyłączyć, a to znaczy, że musi być:

$$(3)\quad \begin{aligned} R(\ldots A_{q,r}\,\varrho^{m-q-r}, \ldots, B_{q,r}\,\varrho^{n-q-r} \ldots) &= \varrho^\nu R(\ldots A_{q,r}, \ldots, B_{q,r}, \ldots)\\ &= \varrho^\nu R(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1 \ldots). \end{aligned}$$

Tę własność funkcyi R określamy, mówiąc, że R jest wagi ν.

Podług twierdzenia II., art. poprzedz., mianownik funkcyi R jest pewną potęgą wyznacznika Δ. Δ jest znowu całkowitą wymierną funkcyą spółczynników $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$, w v_m, w_n. Wszystkie więc te spółczynniki pomnożyć trzeba będzie przez $\varrho^{m-m}=1$, $\varrho^{n-n}=1$, a to znaczy, że czynnik ϱ^ν w (3) pochodzi jedynie z licznika funkcyi R.

Definicya wagi nabiera niemałego znaczenia, gdy się przyjmie, że spółczynniki $A_{q,r}$, $B_{q,r}$ są wymiernemi całkowitemi funkcyami dowolnego parametru z stopni: $(m-q-r)$, $(n-q-r)$, a więc stopni, w jakich właśnie przystępuje czynnik ϱ do $A_{q,r}$, $B_{q,r}$. Spółczynniki $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$, pozostają i przy wprowadzeniu parametru z stałymi; Δ nie zależy więc od z.

Przy takich założeniach wskazuje wyłączony czynnik ϱ^ν w (3), że R jest wymierną całkowitą funkcyą parametru z o stopniu ν.

Stąd twierdzenie:

I. *Gdy równania $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ z wyznacznikiem $\Delta \neq 0$ są wymiarów m, n, a w ich spółczynniki wchodzi parametr z wymiernie, całkowicie w ten sposób, że funkcye $f(x,y;z)$, $g(x,y;z)$ są w trzech zmiennych x, y, z już jednorodnemi wymiarów m, n, to każda jednorodna symetryczna całkowita funkcya o stopniu v, a utworzona ze wspólnych miejsc zerowych danych równań jest wymierną całkowitą funkcyą parametru z o stopniu $=v$.* Z tego wynika, że taka funkcya najwyżej dla v skończonych z staje się zerem.

Gdy w A_{qr}, B_{qr} zmieniają się spółczynniki w ciągły sposób (przyczem i stopnie $m-q-r$, $n-q-r$ obniżyć się mogą), to i w R zmieniają się spółczynniki w ciągły sposób. Podczas tego i pierwiastki z równania $R=0$ w ciągły się sposób zmieniają, a gdy to równanie zniża swój stopień na $v-r$, to r jego pierwiastków staje się $=\infty$. Z tego powodu powiedzieć można:

II. *Funkcya symetryczna jednorodna S stopnia v miejsc wspólnych zerowych równań $f(x,y;z)=0$, $g(x,y;z)=0$ zawierających $v_m(x,y)$, $w_n(x,y)$ nieidentycznie znikające, a $\Delta \neq 0$ — staje się zerem dokładnie na v miejscach z. Lecz z tych miejsc z niektóre mogą leżeć w nieskończoności. Gdy f, g są zupełnemi funkcyami we wszystkich 3 zmiennych i posiadają $\Delta \neq 0$, to S jest w zmiennej z zawsze stopnia v, a nie mniejszego.*

Pd. 1. Z równań:

$$f=x^2+y^2+z(x-y)+z^2=0,\quad g=x^2-y^2+z(x+y)+1=0,\ \Delta=-2$$

dostajemy: 1⁰ za ich dodaniem:

$$a)\qquad x^2+zx+\frac{z^2+1}{2}=0,\ \text{a więc } x=\frac{-z\pm i\sqrt{z^2+2}}{2}=x_1,\ x_2,$$

a 2⁰) za ich odjęciem:

$$b)\qquad y^2-zy+\frac{z^2+1}{2}=0,\ \text{skąd } y=\frac{z\pm i\sqrt{z^2+2}}{2}=y_1,\ y_2.$$

Wspólne miejsca zerowe zależą wszystkie od z i są

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_1,y_2),\ (x_2,y_1).$$

Z równań $a)$, $b)$ dostajemy wprost:

$$(x_1 \cdot y_1)(x_2 \cdot y_2)(x_1 \cdot y_2)(x_2 \cdot y_1)=x_1^2x_2^2 \cdot y_1^2y_2^2=\left(\frac{z^2+1}{2}\right)^2\left(\frac{z^2-1}{2}\right)^2,$$

z pierwiastków zaś tych równań dostaniemy:

$$x_1y_1+x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1=-z^2.$$

Pd. 2. Wynaleść wspólne miejsca zerowe równań:

$$f=x^3+y^3+2z^3-1=0,\quad g=x^3-y^3+1=0,\ \Delta=2,$$

i obliczyć funkcye symetryczne:

$$(x_1y_1)(x_2y_2)\ldots(x_9y_9),\quad (x_1y_1)^2+(x_2y_2)^2+\ldots+(x_9y_9)^2.$$

Pd. 3. Wynaleść wspólne miejsca zerowe równań:

$$f=xy-(z^2+1)=0,\quad g=2x^2+3y^2-z^2=0,\ \Delta=2/3.$$

Uwaga I. Gdy $\Delta=0$, to równania $f(x,y;z)=0$, $g(x,y;z)=0$ posiadają nie μ, ale mniej miejsc zerowych wspólnych zależnych od z. Gdy tych miejsc jest σ

a utworzymy całkowitą i jednorodną funkcyę symetryczną tych miejsc, to ona w zmiennej z nie wypadnie już w funkcyi całkowitej ale ułamkowej.

Pd. 4. Dla równań:

$f=x^2y^2+(x^2+y^2)z+1=0$, $g=x^2y^2+(x^2-y^2)z+z^3=0$ jest $\mu=8$, a $\Delta=0$. Po ich odjęciu od siebie mamy $2y^2-z^3+1=0$, a stąd:

$$y^2=\frac{z^3-1}{2z},\ y=\pm\frac{\sqrt{z^3-1}}{2z}=y_1, y_2.$$

Za ich dodaniem dostajemy $2x^2y^2+2x^2z+z^3+1=0$. Po wstawieniu tu wartości za y^2 otrzymamy:

$$x=\pm i\sqrt{\frac{z^4+z}{z^3+2z^2-1}}=x_1,\ x_2.$$

Równania dane posiadają więc 4 miejsca zerowe wspólne, zależne od z, a to:

$$(x_1y_1),\ (x_2y_2),\ (x_1y_2),\ (x_2y_1),\ \sigma=4.$$

$$S=(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)+(x_1^2+y_2^2)+(x_2^2+y_1^2)=$$
$$=2.\frac{z^6-2z^3-4z^2+1}{z(z^3+2z^2-1)}.$$

Okazać, że $x_1^3y_1^3+x_2^3y_2^3+x_1^3y_2^3+x_2^3y_1^3=0$, a obliczyć:

$$x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2.$$

Pd. 5. Równania:

$f=x^3+y^3+zx^2-zy^2+1=0$, $g=x^3+y^3-zx^2-zy^2-1=0$ mają trzy wspólne miejsca zerowe w nieskończoności (niezależne od z). Wyznaczyć 6 miejsc wspólnych zerowych zależnych od z?. [Odp. Wszystkie kombinacye x, y utworzone z wartości

$$x=\pm i\sqrt{\frac{1}{z}},\ y=\pm i.\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}.1_{\frac{2s\pi}{3}},\ s=0,1,2].$$

Uwaga 2. W dalszych art. wyprowadzić mamy sposoby eliminowania $(k-1)$ zmiennych z k równań: $F_1=0$, $F_2=0,\ldots,F_k=0$, z których każde zawiera k zmiennych $x_1, x_2,\ldots,x_k$. Przytem uważać będziemy w tych równaniach funkcye F_α jako zupełne, niewspółmierne, nieprzywiedlne, a między spółczynnikami którychkolwiek 2, 3,... tych równań nie będziemy wprowadzać żadnych zależności.

Niech w F_1, $F_2,\ldots$ zawierają się funkcye jednorodne $(x_1, x_2,\ldots, x_k)_m$, $(x_1, x_2,\ldots,x_k)_n,\ldots$ najwyższych stopni m, n,... to przyjąć trzeba, że niema wcale takiego miejsca $(x_1, x_2,\ldots, x_k)$ na któremby równocześnie było:

(A) $$(x_1, x_2,\ldots, x_k)_m=0,\ (x_1, x_2,\ldots, x_k)_n=0,\ldots$$

W takim bowiem razie między spółczynnikami funkcyj (A), a więc i funkcyj F_α zachodzićby musiały pewne zależności, a to wykluczono. Że zaś związki (A) miałyby wskazywać, że wszystkie równania $F_\alpha=0$ mają wspólne miejsca zerowe w nieskończoności więc ostatnie, zrobione zastrzeżenie o funkcyach F_α wyklucza możliwość wspólnych miejsc zerowych w nieskończoności (o niektórych lub wszystkich spółrzędnych nieskończonych)

134. Rugownik trzech równań o 3 niewiadomych. Niech będą dane 3 równania:

(1) $$f(x, y, z)=0,\quad g(x, y, z)=0,\quad h(x, y, z)=0$$

odpowiednio wymiarów m, n, p.

Gdy w dwóch którychkolwiek równaniach n. p. w równaniu $f=0$ i $g=0$ zauważymy $v_m(x, y, z)$, $w_n(x, y, z)$, to wskutek zastrzeżeń zrobionych przy końcu art. poprzedz. musimy przyjąć $\Delta \neq 0$, gdyż $\Delta=0$ wprowadzałoby już zależność między spółczynnikami tych równań. Z tego powodu przyjąć musimy, że równania $f=0$, $g=0$, w których z jako parametr pojmujemy, posiadają dokładnie $\mu=mn$ miejsc zerowych:

(2) $$(x_1 y_1),\ (x_2 y_2), \ldots, (x_\mu\, y_\mu)$$

zależnych od z. Utwórzmy iloczyn:

$$P=h(x_1, y_1, z) \,.\, h(x_2, y_2, z) \ldots h(x_\mu, y_\mu, z)$$

i przyjmijmy, że $z=z'$ daje $P=0$ znikaniem czynnika $h(x_\alpha y_\alpha z)$ i że dla $z=z'$ jest $x_\alpha=x_\alpha'$, $y_\alpha=y_\alpha'$. Wtedy miejsce $(x_\alpha' \, y_\alpha' \, z')$ czyni widocznie zadość wszystkim 3 równaniom danym, jest więc wspólnem zerowem ich miejscem.

Z tego wynika, że — aby wszystkie wspólne miejsca zerowe wyznaczyć — trzeba przedewszystkiem iloczyn P przedstawić w funkcyi samego z, a potem rozstrzygnąć jakiego stopnia będzie on w tej zmiennej.

W tym celu uważamy w P każde x_α, y_α jako jeszcze niezależne od z. Uporządkowawszy P podług potęg z dostaniemy:

$$P=S_{p\mu}(x_1 y_1, \ldots)+S_{p\mu-1}(x_1 y_1, \ldots)\, z+S_{p\mu-2}(x_1 y_1, \ldots)\, z^2+\ldots$$
$$\ldots+S_0(x_1\, y_1, \ldots)\, z^{p\mu}.$$

S_α są tu symetrycznemi całkowitemi i jednorodnemi funkcyami miejsc (2).

Każde S_α będąc funkcyą w s z y s t k i c h μ miejsc zależnych od z, jest [art. 133.] całkowitą wymierną funkcyą zmiennej z stopnia α. Stąd pochodzi, że P będzie funkcyą z stopnia pmn.

Równanie $P=0$ ma więc pmn pierwiastków. Wszystkie te pierwiastki — i te tylko*) — mogą być spółrzędnemi z we wspólnych miejscach zerowych 3 danych równań, a stąd wynika:

I. *Gdy z trzech danych równań o 3 niewiadomych, a o wymiarach m, n, p, wyeliminujemy zmienne x, y, to ta eliminacya prowadzi do równania $P=R(z)=0$ o stopniu $\pi=mnp$. $R(z)$ nazywa się i tu r u g o w n i k i e m.*

Pd. 1. W art. 133. miały równania $f=0$, $g=0$ w Pd. 1. wspólne miejsca zerowe:

$$(x_1 y_1),\ (x_2 y_2),\ (x_1 y_2),\ (x_2 y_1),$$

---

*) Pierwiastki z' są jedynemi wartościami zmiennej z dającemi przy $f=0$, $g=0$ także i $h=0$. P jest bowiem iloczynem czynników $h(x_\alpha, y_\alpha, z)$.

gdzie $\frac{-z\pm i\sqrt{z^2+2}}{2}=x_1, x_2$, $\frac{z\pm i\sqrt{z^2+2}}{2}=y_1, y_2$

Prócz równań $f=0$, $g=0$ zauważmy jeszcze 3^{cie} równanie:

$$h(x,y,z)=2x^2+3y^2-2zx+3zy+1=0,$$

to się okaże $P=$

$$R(z)=h(x_1y_1z)\,h(x_2y_2z)\,h\,(x_1y_2z)\,h(x_2y_1z)=$$
$$=3625z^8-1540z^6+10702z^4-180z^2+81=0.$$

Pd. 2. Przy $h=z^2+x+y-1=0$ dostaniemy w Pd. 1:

$$R(z)=16z^8-48z^6+67z^4-48z^2+20=0.$$

135. Ilość wspólnych miejsc zerowych trzech równań o 3 niewiadomych. Mając równanie $R(z)=0$, można — podobnie, jak w art. 125. — zapytać się ilu miejscom zerowym wspólnym $(x'\,y'\,z')$ daje początek jeden pierwiastek z' równania $R=0$?

W tym celu oprócz równań danych:

$$(a)\ f=0,\quad (b)\ g=0,\quad (c)\ h=0,$$

zauważmy jeszcze równanie:

$$(d)\qquad z+\sigma(\lambda x+\mu y)=\nu,$$

w którem σ, λ, μ, ν są zupełnie dowolne ilości.

Eliminując z z par równań (d) (a), (d) (b), (d) (c) dostajemy:

$$(1)\qquad \begin{gathered} f(x,y,\nu-\sigma(\lambda x+\mu y))=0,\ g(x,y,\nu-\sigma(\lambda x+\mu y))=0,\\ h(x,y,\nu-\sigma(\lambda x+\mu y))=0.\end{gathered}$$

Z tych 3 równań rugując x, y dochodzimy do związku:

$$(2)\qquad R_1(\nu,\ \sigma\lambda,\ \sigma\mu)=0,$$

a wszelkie ν, $\sigma\lambda$, $\sigma\mu$ zadość mu czyniące powodują wspólne miejsce zerowe (x,y) równań (1).

Lecz przy $\sigma=0$ i $\nu=z$ przechodzą równania (1) na (a), (b), (c).

Stąd wynika, że $R_1(\nu,0,0)_{\nu=z}=R(z)$ i że więc związek (2) napisać można w takiej formie:

$$(3)\qquad \begin{gathered} R(\nu)+\sigma[M(\nu)\,\lambda+P(\nu)\,\mu]+\sigma^2[Q(\nu)\,\lambda^2+S(\nu)\lambda\mu+T(\nu)\mu^2]+\\ +\sigma^3[U(\nu)\lambda^3+W(\nu)\lambda^2\mu+V(\nu)\lambda\mu^2+Z(\nu)\mu^3]+\ldots=0.\end{gathered}$$

R, M, P,... są tu całkowitemi, wymiernemi funkcyami ilości ν. Połóżmy tu wyraźnie $\nu=z+\sigma(\lambda x+\mu y)$, to rozwijając R, M, P,... podług potęg σ, mieć będziemy:

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} R(\nu)=R(z)+R'(z)\,\sigma(\lambda x+\mu y)+\ldots\\ M(\nu)=M(z)+M'(z)\,\sigma(\lambda x+\mu y)+\ldots\\ \quad\vdots\qquad\quad \vdots\\ Z(\nu)=Z(z)+Z'(z)\,\sigma(\lambda x+\mu y)+\ldots\\ \quad\vdots\qquad\quad \vdots \end{array}\right.$$

($R'(z)$, $R''(z)$,..., $M'(z)$, $M''(z)$,... oznaczają pierwsze drugie,... pochodne).

Równanie (3) po uwzględnieniu rozwinięć (4) przybierze formę:

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
& R(z)+\sigma[\lambda(R'x+M)+\mu(R'.y+P)]+\\
& \sigma^2\Big[\lambda^2\Big(\frac{R''}{2!}x^2+M'x+Q\Big)+\mu^2\Big(\frac{R''}{2!}y^2+P'y+T\Big)\\
& \qquad +2\lambda.\mu\Big(\frac{R''}{2!}xy+\frac{M'}{2}y+\frac{P'}{2!}x+S\Big)\Big]+\\
& \sigma^3\Big[\lambda^3\Big(\frac{R'''}{3!}x^3+\frac{M''}{2!}x^2+Q'x+U\Big)\\
& \qquad +\mu^3\Big(\frac{R'''}{3!}y^3+\frac{P''}{2!}y^2+T'y+Z\Big)\\
& +\lambda^2\mu\Big(3\frac{R'''}{3!}x^2y+\frac{M''}{2!}2xy+\frac{P''}{2!}x^2+Q'y+S'x+W\Big)\\
& +\lambda\mu^2\Big(3\frac{R'''}{3!}xy^2+\frac{P''}{2!}2xy+\frac{M''}{2!}y^2+T'x+S'y+V\Big)\Big]\\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots=0, \text{ co krótko napiszemy:}\\
& \qquad R(z)+k_1\sigma+k_2\sigma^2+k_3\sigma^3+\ldots=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Z tego równania, gdy założymy, że jego pierwiastkiem ma być $\sigma=0$ — a więc z nim równocześnie $\sigma\lambda=\sigma\mu=0$ — dostajemy $R(z)=0$.

Przyjmijmyż, że $\sigma=0$ ma być dwukrotnym pierwiastkiem. Wtedy — ponieważ to ma zajść przy wszelkich skończonych λ, μ — musi być przy $R(z)=0$ — równocześnie:

$$(6)\qquad R'.x+M=0,\ R'.y+P=0.$$

Gdy dla pierwiastka z_ν równania $R=0$ okazuje się $R'(z_\nu)=$ $=R'_\nu \neq 0$*), to wtedy z (6) dostajemy:

$$(7)\qquad x=-M_\nu/R'_\nu,\ y=-P_\nu/R'_\nu.$$

Lecz $R'_\nu \neq 0$ zaznacza, że się pierwiastek z_ν równania $R=0$ nie powtarza, a z jedynej pary (7), jaką dla $z=z_\nu$ dały równania (6), wynika:

I. *Gdy $R(z)$ jest stopnia π, a niema powtarzających się pierwiastków, to trzy dane równania posiadają dokładnie π miejsc wspólnych zerowych.*

Gdy dla $z=z_\nu$ mamy $R_\nu=R'_\nu=R''_\nu=\ldots=R_\nu^{(\alpha-1)}=0$, $R_\nu^{(\alpha)}\neq 0$, to z_ν jest α-krotnym pierwiastkiem równania $R=0$, a wtedy — podobnie, jak w art. 125. z powodu skończonych x, y we wspólnych miejscach zerowych — wywnioskujemy i tu, że wszystkie spółczynniki przy $x, y, x^2, y^2, xy, \ldots, x^{\alpha-1}, y^{\alpha-1}, \ldots$ w $k_1, k_2, \ldots, k_{\alpha-1}$

*) W dalszym ciągu przydany znaczek ν literom oznaczającym funkcye zmiennej z wskazywać będzie wartość tych funkcyj na miejscu $z=z_\nu$.

będą dla $z=z_\nu$ zerami. Gdy dalej przyjmiemy, że $\sigma=0$ jest aż α-krotnym pierwiastkiem, to każde wspólne zerowe miejsce (x, y, z_ν) o spółrzędnej z_ν ma jeszcze zerem uczynić wszystkie funkcye mnożące λ^α, μ^α, $\lambda^{\alpha-1}\mu$, $\lambda^{\alpha-2}\mu^2, \ldots, \lambda\mu^{\alpha-1}$ w spółczynniku k_α. Gdy te funkcye po porządku nazwiemy:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(y),\ f_1, f_2, \ldots, f_{\alpha-1},$$

to φ_1, φ_2 — zależąc odpowiednio od samego x, y — są stopnia α; $f_1, f_2, \ldots, f_{\alpha-1}$ są zaś funkcyami obydwóch zmiennych, a o stopniach $1, 2, 3, \ldots, \alpha-1$ w zmiennej y. Są one przytem — jakto z (5) można wywnioskować — postaci:

$$(\alpha)\qquad f_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\, y + g_1(x) = 0,$$

$$(\beta)\qquad f_2 = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\, y^2 + g_2(x)\, y + \ldots = 0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(\gamma)\qquad f_r = \frac{\partial^r\varphi_1}{\partial x^r}\, y^r + g_{r-1}(x)\, y^{r-1} + \ldots = 0.$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Niechże $(\varphi_1)_\nu = 0$, $(\varphi_2)_\nu = 0$ dają odpowiednio pierwiastki:

$$(A)\quad x_1, x_2, \ldots, x_\alpha; \qquad (B)\quad y_1, y_2, \ldots, y_\alpha,$$

to x_ϱ z szeregu (A) wraz z z_ν da z pewną wartością y szeregu (B) wspólne miejsce zerowe danych równań. W jaki sposób do (x_ϱ, z_ν) dobrać y wskaże ta okoliczność że (x_ϱ, y, z_ν) będąc już miejscem zerowem wspólnem danych równań ma równocześnie zadość uczynić równaniu (α), $(\beta) \ldots (\gamma), \ldots$ Załóżmyż

$$(C)\qquad \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)_{\nu,\, x=x_\varrho} \neq 0,$$

to z równania (α) dostajemy $y = R_1(x_\varrho)_\nu$, gdzie R_1 jest wymierną, a więc jednoznaczną funkcyą. To wskazuje, że do jednej wartości x_ϱ szeregu (A) tylko jedna wartość $y = y_\varrho$ szeregu (B) należy. Przy założeniu (C) trzeba więc α-krotnemu z_ν podporządkować α tylko par:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_\alpha, y_\alpha);$$

co znaczy, że α-krotny pierwiastek z_ν rugownika $R(z)$ daje początek dokładnie α miejscom zerowym wspólnym:

$$(x_1, y_1, z_\nu),\ (x_2, y_2, z_\nu), \ldots, (x_\alpha, y_\alpha, z_\nu).$$

Niech teraz w szeregu (A) powtarza się wartość x_1 razy r. Wtedy mamy dla $x = x_1$

$$(\varphi_1)_\nu = 0,\ \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)_\nu = 0, \ldots, \left(\frac{\partial^{r-1}\varphi_1}{\partial x^{r-1}}\right)_\nu = 0,\ \left(\frac{\partial^r\varphi_1}{\partial x^r}\right)_\nu \neq 0,$$

a więc spółczynniki przy najwyższych potęgach y w równaniach:

(8) $(f_1)_\nu=0,\ (f_2)_\nu=0, \ldots, (f_{r-1})_\nu=0$ dla $x=x_1$

znikają. Lecz — że wartości y, które z parą (x_1, z_ν) tworzyć mają wspólne miejsca zerowe, mają być skończone, [por. uwagę 2. w art. 133.], — więc w równaniach (8) muszą wszystkie spółczynniki przy potęgach y i wolny wyraz znikać. Dopiero równanie $(f_r)_{\nu, x=x_1}=0$ da wartości y, które z szeregu (B) odpowiadają r-krotnemu x_1. Że zaś tych wartości jest r, więc i tu, przeszedłszy wszystkie wartości x w szeregu (A) i doszukując odpowiednich im y w szeregu (B), dojdziemy do wniosku, że z α-krotnego pierwiastka z_ν równania $R(z)=0$ dostajemy dokładnie α miejsc wspólnych zerowych. Stąd twierdzenie:

II. *Równanie $R(z)=0$ stopnia π bez względu na to, czy ma same jednokrotne pierwiastki, lub niektóre, albo wreszcie wszystkie powtarzające się pierwiastki daje początek π miejscom wspólnym zerowym 3 danych równań.*

136. Symetryczne funkcye wspólnych miejsc zerowych trzech równań o 3 niewiadomych. Przejdźmy do tworzenia symetrycznych funkcyj π wspólnych miejsc zerowych:

(1) $$(x_1 y_1 z_1), \ldots, (x_\pi y_\pi z_\pi)$$

3 danych równań:

(2) $$f(x, y, z)=(x, y, z)_m+\ldots 0,\quad g(x, y, z)=(x, y, z)_n+\ldots 0,$$
$$h(x, y, z)=(x, y, z)_p+\ldots=0.$$

Połóżmy $x=t-\alpha y-\beta z$,

to z równań:

$$f(t-\alpha y-\beta z, y, z)=0,\quad g(t-\alpha y-\beta z, y, z)=0\quad h(t-\alpha y-\beta z, y, z)=0,$$

rugując y, z, dostaniemy związek:

(3) $$R(t, \alpha, \beta)=C_0 t^\pi+C_1 t^{\pi-1}+\ldots+C_\pi=0,$$

dający pierwiastki:

$$t_\varrho=x_\varrho-\alpha y_\varrho-\beta z_\varrho,\quad \varrho=1, 2, \ldots, \pi.$$

Przy skończonych dowolnych α, β są te pierwiastki wszystkie skończone wskutek miejsc (1) leżących w skończoności.

Gdyby jeden z nich n. p. pierwiastek t_ϱ miał być $=\infty$ przy dowolnych skończonych α, β, to wtedy jedna ze spółrzędnych x_ϱ, y_ϱ, z_ϱ wchodzących w ten pierwiastek musiałaby być nieskończonością, a w równaniu (3) C_0 musiałoby znikać. Że zaś posunięcie się miejsca $(x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho)$ w nieskończoność zależy — od spółczynników $A'_0, A'_1, \ldots, B'_0, B'_1, \ldots, C'_0, C'_1, \ldots$ jakie znajdujemy w $(x, y, z)_m$,

$(x, y, z)_n$, $(x, y, z)_p$, więc C_0, nie zależąc od α, β, jest funkcyą jedynie spółczynników A'_0, A'_1, ..., B'_0, B'_1, ..., C'_0, C'_1, ... Dalsze spółczynniki są całkowitemi funkcyami dowolnych ilości α, β i wszystkich spółczynników wszystkich 3 danych równań, co wynika z tworzenia rugownika (3).

Mając ten rezultat, utwórzmy symetryczną sumę:

$$(4) \qquad \Sigma t_\varrho^\mu = \Sigma(x_\varrho - \alpha y_\varrho - \beta z_\varrho)^\mu = G\left(\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_0}, \ldots\right);$$

G jest funkcyą całkowitą ilorazów, wchodzących w nią.

Gdy w (4) obie strony uporządkujemy podług iloczynów $\alpha^a\beta^b$, dostajemy relacye: $S_1(x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho)_\mu = G_\mu\left(\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_0}, \ldots\right)$, które wskazują:

I. *Każda symetryczna funkcya pierwszego porządku, a dowolnego stopnia* μ, *wspólnych miejsc zerowych* (1) *jest wymierną funkcyą spółczynników wszystkich 3 równań. Jej mianownik jest pewną potęgą funkcyi* $C_0(A'_0, A'_1, \ldots, B'_0, B'_1, \ldots, C'_0, C'_1, \ldots)$.

[Porządki funkcyi określają się tu zupełnie analogicznie, jak w art. 132., w przypadku dwóch tylko równań].

Dalej przejdziemy tu z funkcyj porządku pierwszego do funkcyj porządków wyższych, z nich do całkowitych, jednorodnych i symetrycznych funkcyj dowolnego stopnia ν, a wprowadziwszy pojęcie wagi, mieć będziemy twierdzenie:

II. *Każda całkowita jednorodna i symetryczna funkcya miejsc* (1) *stopnia* ν *jest wymierną funkcyą spółczynników wszystkich 3 równań; jest wagi* ν, *a jej mianownik jest potęgą funkcyi* C_0 *i jest wagi = zero.*

W równaniach danych zawierają się wyrazy postaci $Ax^q.y^r.z^s$, ..., a gdy A, ... uznamy za funkcye całkowite nowej zmiennej u stopni: $m-(q+r+s)$ w f, $n-(q+r+s)$ w g, $p-(q+r+s)$ w h, to — ponieważ C_0 będzie zerowego stopnia w tej zmiennej — więc stąd wyniknie:

III. *Gdy dla 3 równań zupełnych* $f(x, y, z, u) = 0$, $g(x, y, z, u) = 0$, $h(x, y, z, u) = 0$ *o wymiarach* m, n, p, *utworzymy jednorodną całkowitą i symetryczną funkcyą* $m.n.p$ *miejsc wspólnych zerowych stopnia* ν, *to ta funkcya będzie zarazem w zmiennej* u *całkowitą funkcyą stopnia* ν.

137. Rugownik czterech, lub więcej danych równań. Osądzenie jego stopnia i oznaczenie wspólnych miejsc zerowych tych równań. Gdy do trzech równań:

$$(a) \qquad f(x,y,z,u) = 0, \quad g(x,y,z,u) = 0, \quad h(x,y,z,u) = 0$$

przydamy jeszcze czwarte:

(*b*) $k(x,y,z,u)=0,$

a ich wymiary po porządku nazwiemy m, n, p, q, to teraz — gdy $(x_\varrho y_\varrho z_\varrho)$, $\varrho=1,2,\ldots,\ \pi=mnp$ są wszystkiemi wspólnemi miejscami równań (*a*), wywnioskujemy łatwo, że $P=\prod\limits_{\varrho=1}^{\pi} k(x_\varrho y_\varrho z_\varrho u)=R(u)=0$ będzie rugownikiem czterech równań (*a*), (*b*) i będzie stopnia $=m.n.p.q$.

Przechodząc dalej do czemraz więcej równań o czemraz większej ilości niewiadomych, dojdziemy do twierdzenia:

I. *Gdy danych jest k równań $f_1=0$, $f_2=0, \ldots, f_k=0$, posiadających wymiary $n_1, n_2, \ldots, n_k$, a zawierających k niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_k$, to po eliminacyi niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, dojdziemy do równania $R(x_k)=0$, które będzie stopnia $n_1.n_2\ldots n_k$.* *)

Że $R(x_k)=0$ swoimi pierwiastkami prowadzi dokładnie do $(n_1.n_2\ldots n_k)$ miejsc zerowych wspólnych, pokażemy to na 4 równaniach (*a*), (*b*).

Oprócz danych równań zauważmy jeszcze równanie:

(1) $$u+\sigma(\lambda x+\mu y+\nu z)=\tau$$

o dowolnych τ, σ, λ, μ, ν. Kładąc w (*a*), (*b*):

(2) $$u=\tau-\sigma(\lambda x+\mu y+\nu z)$$

i eliminując z nich x, y, z, dojdziemy do związku:

(3) $$R_1(\tau, \sigma\lambda, \sigma\mu, \sigma\nu)=0;$$

a że $R_1(\tau, 0, 0, 0)=R(\tau)$, więc (4) napisać można w formie:

$$R(\tau)+(\lambda, \mu, \nu; \tau)_1\sigma+(\lambda, \mu, \nu; \tau)_2\sigma^2+\ldots=0.$$

$(\lambda, \mu, \nu; \tau)_\alpha$ są tu jednorodnemi funkcyami stopnia α ilości λ, μ, ν z całkowitymi spółczynnikami w zmiennej τ.

Gdy tu za τ położymy wyrażenie (1), to po uporządkowaniu według potęg σ, mieć będziemy:

(4) $$R(u)+[\lambda, \mu, \nu]_1\sigma+[\lambda, \mu, \nu]_2\sigma^2+\ldots=0.$$

Tu znowu $[\lambda, \mu, \nu]_\alpha$ są jednorodnemi funkcyami stopnia α trzech ilości λ, μ, ν o spółczynnikach całkowitych, zależnych od x, y, z, u.

Gdy spółczynniki przy λ^α, μ^α, ν^α nazwiemy:

(α) $$\varphi_1(x,u), \quad \varphi_2(y,u), \quad \varphi_3(z,u),$$

to będą one w $x, y. z$ stopnia α^{go}.

---

*) Twierdzenie o stopniu rugownika przypisują Bezout'owi, który w rozprawie swej p. t. „*Récherches sur les dégrés des équations résultantes de l'évanouissement des inconues*" (*Mémoires de l'Académie de Paris* z r. 1764, str. 288), gruntownie tem się zajął. — Por. także sprawozdanie z tej rozprawy w „*Histoire de l'Académie de Paris* z r. 1764, str. 88.

Co się tyczy dalszych spółczynników, mnożących $\lambda^a \mu^b \nu^c$, $a+b+c=\alpha$, to znajdziemy między nimi:

$$
(\beta) \quad \left| \begin{array}{llll}
f_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} y + \dots & \text{przy } \lambda^{\alpha-1}\mu; & g_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} z + \dots & \text{przy } \lambda^{\alpha-1}\nu; \\
f_2 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} y^2 + \dots & \quad " \quad \lambda^{\alpha-2}\mu^2; & g_2 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} z^2 + \dots & \quad " \quad \lambda^{\alpha-2}\nu^2; \\
f_3 = \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} y^3 + \dots & \quad " \quad \lambda^{\alpha-3}\mu^3; & g_3 = \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} z^3 + \dots & \quad " \quad \lambda^{\alpha-3}\nu^3; \\
\vdots & \quad \vdots & \quad \vdots & \quad \vdots
\end{array} \right.
$$

Do tych spółczynników ograniczając się na razie przyjmijmy, naprzód, że u_ν jest jednokrotnym tylko pierwiastkiem równania $R=0$.

Przyjmując, że wtedy σ ma być dwukrotnym pierwiastkiem równania (4), trzeba wskutek całkiem dowolnych λ, μ, ν — przyjąć dalej, że spółczynniki w $[\lambda, \mu, \nu]_1$ dla x, y, z, tworzących razem z u_ν wspólne miejsca zerowe, są zerami. Że zaś te spółczynniki mają po podstawieniu $u=u_\nu$ — postacie:

$$G_1(u_\nu)-G'_1(u_\nu)x, \quad G_2(u_\nu)-G'_2(u_\nu)y, \quad G_3(u_\nu)-G'_3(u_\nu)z,$$

[$G_1, G'_1, \dots$ są wymierne funkcye], więc stąd dostajemy:

$$x=G_1(u_\nu)/G'_1(u_\nu), \quad y=G_2(u_\nu)/G'_2(u_\nu), \quad z=G_3(u_\nu)/G'_3(u_\nu).$$

Przenosząc ten rezultat do k równań o k niewiadomych $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ mamy twierdzenie:

II. *Gdy x'_k jest jednokrotnym pierwiastkiem rugownika $R(x_k)=0$, to ten pierwiastek powoduje jedno tylko wspólne miejsce zerowe $(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)$, a w niem spółrzędne x'_1, x'_2, ..., x'_{k-1} wyrażają się wymiernie przez x'_k.*

Przyjmijmy teraz — wracając do $k=4$, że u_ν jest α-krotnym pierwiastkiem równania $R(u)=0$.

Funkcye $[\lambda, \mu, \nu]_1$, $[\lambda, \mu, \nu]_2$, ..., $[\lambda, \mu, \nu]_{\alpha-1}$ znikać wtedy muszą identycznie [por. art. 135.]. Przyjmując wtedy, że wysokość powtarzania się pierwiastka $\sigma=0$ jest $(\alpha+1)$, trzeba zarazem założyć, że x, y, z tworzące z u_ν wspólne miejsce zerowe danych równań (1) powodują znikanie wszystkich już spółczynników w funkcyi $[\lambda, \mu, \nu]_\alpha$.

Dla tych miejsc muszą więc także funkcye (α) i (β) być zerami. Połóżmyż:

$$\varphi_1(x, u_\nu)=0, \quad \varphi_2(y, u_\nu), \quad \varphi_3(z, u_\nu)=0,$$

to z tych równań dostajemy:

$$
\left.\begin{array}{ll}
(A) & x=x_1, x_2, \dots, x_\alpha \\
(B) & y=y_1, y_2, \dots, y_\alpha \\
(C) & z=z_1, z_2. \dots, z_\alpha
\end{array}\right\} \text{ są-to widocznie algebraiczne funkcye wartości } u_\nu.
$$

Chcąc z tych szeregów wybrać trójkę (x, y, z), dającą z u_ν miejsce zerowe wspólne, weźmy z szeregu (A) jedną wartość, n. p. wartość x_1 i — gdy $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right)_{\nu,\, x=x_1} \neq 0$, a więc x_1 nie powtarza się w szeregu (A) — połóżmy:

$$(f_1)_{\nu, x=x_1}=0, \quad (g_1)_{\nu, x=x_1}=0.$$

Z tych równań dostaniemy wartości:

$$y=R_2(x_1)_\nu, \quad z=R_3(x_1)_\nu,$$

(wyrażone wymiernie przez x_1), które właśnie do x_1 należeć będą, a z których pierwszą w szeregu (B), drugą zaś w szeregu (C) znajdziemy. Z (A), (B), (C) dostaniemy w tym razie α trójek (x, y, z), a te z u_ν utworzą α wspólnych miejsc zerowych.

Gdy $x=x_1$ powtarza się w szeregu (A) r razy, $r \leqq \alpha$, to — prócz $\varphi_1=0$ musi jeszcze być:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)_\nu=0, \; \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\right)_\nu=0, \ldots, \left(\frac{\partial^{r-1} \varphi_1}{\partial x^{r-1}}\right)_\nu=0, \; \left(\frac{\partial^r \varphi_1}{\partial x^r}\right)_\nu \neq 0 \text{ dla } x=x_1.$$

Wtedy funkcye: $f_1, g_1; f_2, g_2; \ldots; f_{r-1}, g_{r-1}$ muszą dla $x=x_1$ i $u=u_\nu$ w ten sposób być zerami, że w nich wszystkie spółczynniki przy potęgach zmiennych y, z znikają [por. art. 135.].

Dopiero równania: $(f_r)_{\nu, x=x_1}=0$, $(g_r)_{\nu, x=x_1}=0$ — pierwsze r^{go} stopnia w y, drugie takiegoż stopnia w z — dadzą wartości:

$$(A_1) \quad y_1, y_2, \ldots, y_r; \qquad (B_1) \quad z_1, z_2, \ldots, z_r,$$

z których trzeba tworzyć pary (y, z), dające razem z x_1, u_ν miejsca wspólne zerowe. Aby te pary rzeczywiście utworzyć, zauważmy, że w $[\lambda, \mu, \nu]_\alpha$ oprócz spółczynników (α), (β) znajdziemy jeszcze spółczynniki postaci:

$$(\gamma) \quad \left\{\begin{array}{lll} h_1=\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} z+\ldots & \text{przy} & \mu^{\alpha-1}\nu, \\ h_2=\dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} z^2+\ldots & \;\;\text{„} & \mu^{\alpha-2}\nu^2, \\ h_3=\dfrac{\partial^3 \varphi_2}{\partial y^3} z^3+\ldots & \;\;\text{„} & \mu^{\alpha-3}\nu^3, \\ \vdots \quad\; \vdots & & \vdots \end{array}\right.$$

Za ich pomocą podobnem rozumowaniem, jak w art. 135., będziemy mogli do s-krotnej $(s \geqq 1)$ wartości y_1 dobrać s wartości z szeregu (B_1), w ten sposób, że z tych r par (y, z) dostaniemy już za dołączeniem x_1 i u_ν dokładnie r miejsc zerowych wspólnych.

Przechodząc w szeregu (A) wszystkie x_s już-to powtarzające, się już-to niepowtarzające się i rozumując każdym razem podobnie jak wyżej, dojdziemy do wniosku:

III. *Gdy x'_k jest α-krotnym pierwiastkiem rugownika $R(x_1 x_2 ... x_k)=0$ k równań o k niewiadomych, to taki pierwiastek daje początek α miejscom zerowym wspólnym $(x_1^{(\sigma)}, x_2^{(\sigma)}, ..., x'_k)$, $\sigma=1, 2, ..., \alpha$. Spółrzędne ϱ^{te} tych miejsc $\varrho=1, 2, ..., k-1$, a więc $x'_\varrho, x''_\varrho, x'''_\varrho, ..., x_\varrho^{(\alpha)}$ są pierwiastkami jednego równania $\varphi_\varrho(x, x'_k)=0$ α^{go} stopnia, wyrażają się więc zawsze algebraicznie przez x'_k* — [por. szeregi (A), (B), (C)].

Z twierdzeń II. i III. wynika:

IV. *Rugownik $R(x_k)=0$, wskazuje swoim stopniem $[n_1 . n_2 ... n_k]$, że równania posiadają dokładnie $[n_1 . n_2 .. n_k]$ miejsc zerowych wspólnych.*

138. Równoważność dwóch funkcyj według danych modułów. Aby rugownik R utworzyć bez pomocy symetrycznego iloczynu P i nadać mu formę wyznacznika, jak to miało miejsce w przypadku dwóch równań o dwóch niewiadomych, musimy się naprzód zająć pewnemi własnościami funkcyj wielu zmiennych zasługującemi — nawet z pominięciem ich doniosłych zastosowań — na uwzględnienie.

Niech danych będzie k funkcyj całkowitych, wymiernych i niewspółmiernych:

(1) $$f_1, f_2, ..., f_k,$$

n zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$, a o wymiarach:

(2) $$m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \geqq ... \geqq m_k.$$

Podporządkujmy tym funkcyom odpowiednio k funkcyj całkowitych wymiernych i zupełnych:

(3) $$A_1, A_2, ..., A_k$$

tych samych zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$. Ich spółczynniki $a_1, a_2, ...$ uważajmy wszystkie za zupełnie dowolne, a ich wymiary μ_1, $\mu_2, ..., \mu_k$ niech będą takie, że:

(4) $$m_1 + \mu_1 = m_2 + \mu_2 = ... = m_k + \mu_k = g,$$

gdzie g jest jeszcze bliżej nieoznaczoną dodatnią całkowitą liczbą. Wszystkich spółczynników $a_1, a_2, ...$ mamy:

$$\sigma = \binom{\mu_1 + n}{n} + \binom{\mu_2 + n}{n} + ... + \binom{\mu_k + n}{n}$$

a z (2) i (4) wynika, że $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq ... \leqq \mu_k$.

Przyjmijmy dalej, że mamy jeszcze funkcyę $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ wymiaru m, a mającą tę własność, że staje się zerem równocześnie z $f_1 = f_2 = ... = f_k = 0$, t. j. na $m_1 . m_2 ... m_k = \mu$ miejscach zerowych wspólnych równań $f_s = 0$, $s=1, 2, ..., k$.

Przy tych założeniach zażądajmy identyczności:

(5) $$F = A_1 f_1 + A_2 f_2 + ... + A_k f_k.$$

(Widocznie do jej spełnienia potrzeba przedewszystkiem, aby z równoczesnem znikaniem funkcyj f_s, także i F było zerem, co już założono).

Prawa strona w (5) jest wymiaru g i posiada — po wykonaniu dodawań tam wskazanych — spółczynników $\binom{g+n}{n}$. Wszystkie te spółczynniki są jednorodne i liniowe w $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; nazwijmyż je:

(6) $$L_a(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \quad L_b(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \ldots$$

Po lewej stronie w (5) jest spółczynników $\binom{m+n}{n}$. Przyjmijmy $g \geqq m$, a spółczynniki funkcyi F, [którą za funkcyę wymiaru g uważamy, wskutek czego, gdy $g > m$, niektóre z jej spółczynników muszą być zerami], odpowiadające spółczynnikom (6) nazwijmy $a, b, \ldots$, to dostaniemy $\binom{g+n}{n}$ równań:

$$a = L_a(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \quad b = L_b(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \ldots$$

Z nich możliwem będzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ oznaczyć, jeżeli będzie: $\binom{g+n}{n} \leqq \sigma$. Podług tej nierówności wybrać trzeba g, zatrzymując zawsze $g \geqq m$. Zastąpmy w σ wszystkie dodajniki dodajnikiem najmniejszym: $\binom{\mu_1+n}{n}$ i zażądajmy, aby jeszcze i wtedy było:

(7) $$\binom{g+n}{n} \leqq k\binom{\mu_1+n}{n} = k\binom{g-m_1+n}{n},$$

to liczbą g, zawsze $\geqq m$, a spełniającą tę nierówność będzie można zadaniu tem bardziej zadość uczynić.

Napiszmyż (7), pozostawiając tylko znak nierówności, (co jest w tem zadaniu dozwolone), we formie:

$$\frac{\left(1+\frac{n}{g}\right)\left(1+\frac{n-1}{g}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{g}\right)}{\left(1-\frac{m_1-n}{g}\right)\left(1-\frac{m_1-n+1}{g}\right)\cdots\left(1-\frac{m_1-1}{g}\right)} < k,$$

to za obraniem dostatecznie dużego $g \geqq m$ mieć będziemy

$$\text{albo: } \frac{1+\nu}{1+\nu_1} < k, \quad \text{albo: } \frac{1+\nu}{1-\nu_1} < k,$$

gdzie ν, ν_1 są już dodatnimi właściwymi ułamkami, które się ze zwiększaniem g równocześnie zmniejszają.

Lecz $k \geqq 2$, a że $\frac{1+\nu}{1+\nu_1} < 1+\nu < 2$, więc dość duże $g > m$, spełniające tę nierówność, zadość uczyni i nierówności:

$$(1+\nu)/(1+\nu_1)<k,\ k\geqq 2.$$

Zażądajmy podobnie, aby było $(1+\nu)/(1-\nu_1)<2$, czyli aby $1+\nu+2\nu_1<2$, to widocznie dostatecznie dużem $g>m$ można spełnić i tę nierówność, a temsamem i nierówność $(1+\nu)/(1-\nu_1)<k$, $k\geqq 2$. Stąd twierdzenie:

I. *Do k niewspółmiernych całkowitych funkcyj $f_1, f_2, \ldots, f_k$ n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ można zawsze dobrać k funkcyj całkowitych $A_1, A_2, \ldots A_k$ tych samych zmiennych w ten sposób, że identycznie będzie $\Sigma A_s f_s = F$, gdzie F jest dowolną funkcyą całkowitą tych samych zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a znikającą na wszystkich wspólnych miejscach zerowych równań $f_s=0$, $s=1, 2, \ldots, k$. Funkcye A_s nazywają się* **mnożnikami**.

Już z przeprowadzonego tu rozumowania wynika, że systemów funkcyj (mnożników) A_1, $A_2, \ldots, A_k$ może być nieskończenie dużo. Lecz dalej okazać łatwo, że z każdego danego już systemu można dostać jeszcze nieskończenie ich dużo.

Zażądajmy bowiem identyczności:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} F=&(A_1+a_{12}f_2+a_{13}f_3+a_{14}f_4+\ldots+a_{1k}f_k)f_1\\ &+(A_2+a_{21}f_1+a_{23}f_3+a_{24}f_4+\ldots+a_{2k}f_k)f_2\\ &+(A_3+a_{31}f_1+a_{32}f_2+a_{34}f_4+\ldots+a_{3k}f_k)f_3\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(A_k+a_{k1}f_1+a_{k2}f_2+a_{k3}f_3+\ldots+a_{k,k-1}f_{k-1})f_k,\end{aligned}\right.$$

w której A_1, $A_2, \ldots, A_k$ mają być właśnie danym systemem mnożników, a a_{12}, $a_{13}, \ldots a_{2k}, \ldots, a_{k,k-1}$ mają być stałemi, lub nawet funkcyami całkowitemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to po prawej stronie w (8) mamy przedewszystkiem $A_1f_1+A_2f_2+\ldots+A_kf_k$, a ta suma — wskutek (5) — jest już $=F$. Gdy więc dalej zażądamy, aby **identycznie** spełniły się związki:

$$a_{12}+a_{21}=0,\ a_{13}+a_{31}=0, \ldots,\ a_{k-1,k}+a_{k,k-1}=0,$$

to przez to już się identyczności (8) w zupełności uczyniło zadość, a sumy w nawiasach po prawej stronie są nowymi mnożnikami.

Weźmy naodwrót dwa różne systemy mnożników: $(A_1, A_2, \ldots)$, $(A'_1, A'_2, \ldots)$, to mamy wtedy równocześnie:

$$F=A_1f_1+A_2f_2+\ldots,\quad F=A'_1f_1+A'_2f_2+\ldots$$

Stąd wynika identyczność:

$$(9)\quad A_s-A'_s=-\frac{1}{f_s}[(A_1-A'_1)f_1+\ldots+(A_{s-1}-A'_{s-1})f_{s-1}+ \\ +(A_{s+1}-A'_{s+1})f_{s+1}+\ldots].$$

Że zaś $(A_s - A'_s)$ jest funkcyą całkowitą, a $f_1, f_2, \dots, f_k$ są funkcyami niewspółmiernemi, więc po prawej stronie muszą być $(A_1 - A'_1), \dots, (A_{s-1} - A'_{s-1}), (A_{s+1} - A'_{s+1}), \dots$ podzielne przez f_s. Uzwględniwszy to, dostajemy zamiast (9) relacyę:

(10) $$A_s - A'_s = \alpha_{s1} f_1 + \dots + \alpha_{s,s-1} f_{s-1} + \alpha_{s,s+1} f_{s+1} + \dots$$

a to znaczy:

II. *Mnożniki* s^{te} *z dwóch różnych dowolnych systemów różnią się zawsze o pewne liniowe jednorodne wyrażenie funkcyj* $f_1, f_2, \dots, f_{s-1}, f_{s+1}, \dots, f_k$.

Ich różnica jest więc zerem na wszystkich wspólnych zerowych miejscach równań $f_1 = 0, \dots, f_{s-1} = 0, f_{s+1} = 0, \dots, f_k = 0$.

Lecz identyczność (5) piszą jeszcze w innej formie, a to:

(11) $$F \equiv 0 \ (modd.\ f_1, f_2, \dots, f_k)$$

i powiadają: Funkcya F jest równoważną z zerem podług modułów (podzielników) $f_1, f_2, \dots f_k$.

Według tego relacyą (10) można będzie także przedstawić równoważnością:

$$A_s - A'_s \equiv 0 \ (modd.\ f_1, \dots, f_{s-1}, f_{s+1}, \dots, f_k),$$

albo wreszcie równoważnością:

(12) $$A_s \equiv A'_s \ (modd.\ f_1, \dots f_{s-1}, f_{s+1}, \dots),$$

która się tem określa, że przechodzi na równanie, gdy się po jednej jej stronie doda pewną oznaczoną liniową jednorodną funkcyę modułów.

139. Wprowadzanie równoważności z funkcyą jednej tylko zmiennej. Dla uproszczenia dalszych dowodzeń zauważmy trzy tylko równania o trzech niewiadomych:

(1) $$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0$$

a o wspólnych $\mu = m.n.p$ miejscach zerowych:

(2) $$(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), \dots, (x_\mu y_\mu z_\mu).$$

Gdy prócz tego daną będzie dowolna funkcya $k(x, y, z)$, która na miejscach (2) nie jest zerem, to da się o niej udowodnić:

I. *Do funkcyi* $k(x, y, z)$ *możliwem jest zawsze — pod warunkiem, że* $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ *w miejscach* (2) *są wszystkie między sobą różne — dobrać funkcyę całkowitą* $\psi(z)$ *jednej tylko zmiennej* z, *a stopnia* $(\mu - 1)$ *w ten sposób, że na miejscach* (2) *będzie* $k(x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho) = \psi(z_\varrho)$, $\varrho = 1, 2, \dots, \mu$.

Połóżmy bowiem $\psi(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{\mu-1} z^{\mu-1}$, to z równań:

$$k(x_\varrho y_\varrho z_\varrho) = c_0 + c_1 z_\varrho + c_2 z_\varrho^2 + \dots + c_{\mu-1} z_\varrho^{\mu-1}$$
$$\varrho = 1, 2, \dots \mu$$

będzie możliwem, oznaczyć c_α:

$$c_\alpha = \frac{k(x_1 y_1 z_1)\Delta'_\alpha + k(x_2 y_2 z_2)\Delta''_\alpha + \ldots + k(x_\mu y_\mu z_\mu)\Delta^{(\mu)}_\alpha}{\Delta}$$

$$\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1,$$

$$\text{gdyż } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots z_1^{\mu-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots z_2^{\mu-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & z_\mu & z_\mu^2 \ldots z_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ wskutek założenia o } z_1, z_2, \ldots, z_\mu,$$

a przez to już dowiedziono istnienia funkcyi $\psi(z)$.

[Δ_α', Δ_α'', ..., $\Delta^{(\mu)}_\alpha$ są podwyznacznikami α^{go} pionu w Δ].

Łatwo sprawdzić, że każde c_α jest taką symetryczną funkcyą miejsc (2), że w niej licznik i mianownik zmieniają równocześnie znak, gdy się dwa miejsca (2) ze sobą przestawi. Pomnóżmy jednak licznik i mianownik przez Δ, to w mianowniku dostaniemy Δ^2, a więc już symetryczną funkcyę miejsc (2). Licznik

$$\Delta \cdot [k(x_1 y_1 z_1)\Delta_\alpha' + k(x_2 y_2 z_2)\Delta_\alpha'' + \ldots + k(x_\mu y_\mu z_\mu)\Delta_\alpha^{(\mu)}]$$

będzie również taką funkcyą.

Stąd wynika, że każde c_α wyrazi się wymiernie przez spółczynniki wszystkich 3 równań i spółczynniki funkcyi k.

Zauważmy różnicę $k(x, y, z) - \psi(z)$. Różnica ta znika na wszystkich miejscach (2), a wskutek tego da się według (11) — art. poprzedz. — przedstawić równoważnością:

$$k(x, y, z) - \psi(z) \equiv 0 \ (\mathit{modd.}\ f, g, h)$$

albo równoważnością:

$$k(x, y, z) \equiv \psi(z).\ (\mathit{modd.}\ f, g, h).$$

Stąd — przenosząc to rozumowanie do funkcyj i równań o dowolnej ilości zmiennych — dostajemy twierdzenie:

II. *Dowolna funkcya $j(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nieznikająca na μ wspólnych miejscach k danych równań $f_1=0$, $f_2=0, \ldots, f_k=0$ spełnia równoważność*

$$(3) \qquad j(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv \psi(x_s) \ (\mathit{modd.}\ f_1, f_2, \ldots, f_k),$$

w której ψ jest wymierną całkowitą funkcyą stopnia $(\mu-1)^{go}$ i zależy od tej zmiennej x_s, której wartości w wspólnych miejscach zerowych równań $f_1=0$, $f_2=0, \ldots, f_k=0$ są wszystkie między sobą różne. Spółczynniki funkcyi $\psi(x_s)$ są-to wymierne funkcye spółczynników funkcyj j, $f_1, f_2, \ldots, f_k$.]

Co się tyczy funkcyi $\psi(x_s)$, to można dowieść, że istnieje tylko jedna taka funkcya argumentu x_s spełniająca równoważność (3). Przyjmijmy bowiem, że mamy prócz (3) jeszcze

$$(4) \qquad j(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv \psi'(x_s) \ (\mathit{modd.}\ f_1, f_2, \ldots, f_k),$$

to z (3) i (4) wynika:

$$\psi(x_s) \equiv \psi'(x_s), \text{ albo } \psi(x_s) - \psi'(x_s) \equiv 0$$

według tych samych modułów $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Różnica ta znikać ma na μ miejscach $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, a że jest funkcyą stopnia $(\mu-1)^{go}$ więc musi być identycznie zerem [art. 52., tw. I.]; $\psi'(x_s)$ nie różni się więc od $\psi(x_s)$, *c. b. d. d.*

140. Rugownik ilukolwiek równań w postaci wyznacznika lub w postaci liniowej jednorodnej funkcyi pierwszych stron samych równań. Wprowadzone w poprzedzających art. równoważności dozwolą już nadać rugownikowi formę wyznacznika.

W czterech danych równaniach o 4 niewiadomych:

(1) $f(x,y,z,u)=0,\ g(x,y,z,u)=0,\ h(x,y,z,u)=0,\ k(x,y,z,u)=0$

a o wymiarach m, n, p, q uważajmy u tymczasowo za zmienny parametr i przyjmijmy, że trzy pierwsze równania posiadają $\mu = m.n.p$ wspólnych miejsc zerowych:

(2) $(x_1 y_1 z_1),\ (x_2 y_2 z_2), \ldots, (x_\mu\, y_\mu\, z_\mu)$

zależnych bez wyjątku od u. Przy takiem założeniu trzeba $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ uważać wszystkie za różne między sobą, a ta okoliczność daje możność utworzenia szeregu równoważności:

$$(3)\quad \left.\begin{aligned} k &\equiv c_{00} + c_{01} z + c_{02} z^2 + \ldots + c_{0\,\mu-1}\, z^{\mu-1} = \psi_0 \\ zk &\equiv c_{10} + c_{11} z + c_{12} z^2 + \ldots + c_{1\,\mu-1}\, z^{\mu-1} = \psi_1 \\ z^2 k &\equiv c_{20} + c_{21} z + c_{22} z^2 + \ldots + c_{2\,\mu-1}\, z^{\mu-1} = \psi_2 \\ &\vdots \\ z^{\mu-1} k &\equiv c_{\mu-1,0} + c_{\mu-1,1} z + \ldots + c_{\mu-1,\mu-1}\, z^{\mu-1} = \psi_{\mu-1} \end{aligned}\right\} (\textit{modd. } f, g, h).$$

$c_{00}, c_{01}, \ldots, c_{\mu-1,\,\mu-1}$ są wymiernemi, i do tego całkowitemi funkcyami parametru u, gdyż w ten sposób zawiera się ten parametr w pierwszych stronach tych równoważności.

Pomyślmy sobie za x, y, z, u podstawione w (3) spółrzędne któregokolwiek miejsca wspólnego zerowego wszystkich 4 równań (1). Dla takich wartości jest $f=g=h=k=0$, a równoważności (3) przechodzą na system współczesnych równań:

$$\begin{aligned} c_{00} + c_{01} z + c_{02} z^2 + \ldots + c_{0\,\mu-1}\, z^{\mu-1} &= 0 \\ c_{10} + c_{11} z + c_{12} z^2 + \ldots + c_{1\,\mu-1}\, z^{\mu-1} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \\ c_{\mu-1,0} + c_{\mu-1,1} z + c_{\mu-1,2} z^2 + \ldots + c_{\mu-1,\,\mu-1}\, z^{\mu-1} &= 0. \end{aligned}$$

Wyrazem tej współczesności jest związek:

$$H(u) = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} \cdots & c_{0\,\mu-1} \\ c_{10} & c_{11} \cdots & c_{1\,\mu-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{\mu-1,0} & c_{\mu-1,1} \cdots & c_{\mu-1,\mu-1} \end{vmatrix} = 0,$$

w którym u jest spółrzędną dowolnego wspólnego miejsca zerowego 4 danych równań, a przy u zmiennem spełnia się równanie $H(u)=0$ dla spółrzędnych u owych miejsc zerowych wspólnych.

Że $H(u)$ ze zmiennem u jest identyczne z rugownikiem $R(u)$ [art. 137.] możemy się tak przekonać:

Tworząc iloczyn

$$H.\Delta = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} \dots & c_{0\mu-1} \\ c_{10} & c_{11} \dots & c_{1\mu-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{\mu-1,0} & c_{\mu-1,1} \dots & c_{\mu-1,\mu-1} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & z_1 \dots & z_1^{\mu-1} \\ 1 & z_2 \dots & z_2^{\mu-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_\mu \dots & z_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}$$

i obliczając go składaniem wierszy z wierszami, dostajemy:

$$H.\Delta = \begin{vmatrix} \psi_0(z_1), & \varphi_0(z_2), \dots, & \psi_0(z_\mu) \\ \psi_1(z_1), & \psi_1(z_2), \dots, & \psi_1(z_\mu) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_{\mu-1}(z), & \psi_{\mu-1}(z_2) \dots, & \psi_{\mu-1}(z_\mu) \end{vmatrix}.$$

Lecz, że $\psi_\alpha(z_\beta)=z_\beta{}^\alpha k(x_\beta y_\beta z_\beta u)=z_\beta{}^\alpha k_\beta$, więc

$$H.\Delta = \begin{vmatrix} k_1, & k_2, \dots, & k_\mu \\ z_1 k_1, & z_2 k_2, \dots, & z_\mu k_\mu \\ z_1{}^2 k_1, & z_2 k_2, \dots, & z_\mu{}^2 k_\mu \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1{}^{\mu-1} k_1, & z_2{}^{\mu-1} k_2, \dots, & z_\mu{}^{\mu-1} k_\mu \end{vmatrix} = \Delta . k_1, k_2 \dots k_\mu.$$ Stąd

$H(u)=k(x_1 y_1 z_1 u).k(x_2 y_2 z_2 u)\dots k(x_\mu y_\mu z_\mu u)$, a ten iloczyn jest widocznie $=R(u)$.

W wyznaczniku $H(u)=R(u)$ pomnóżmy elementa pionu: 2go 3go, ..., μgo odpowiednio przez $z, z^2, \dots, z^{\mu-1}$ i dodajmy do odpowiednich elementów pionu pierwszego. W pionie pierwszym mieć wtedy będziemy elementa:

(4) $$\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_{\mu-1}(z),$$

a sam wyznacznik — po rozwinięciu go według elementów (4) — będzie postaci:

(5) $$R(u)=\alpha_0\psi_0+\alpha_1\psi_1+\dots+\alpha_{\mu-1}\psi_{\mu-1}.$$

Lecz z równoważności (3) mamy:

$$\psi_\lambda(z)=z^\lambda k-A_\lambda' f-A_\lambda'' g-A_\lambda''' h.$$
$$\lambda=0, 1, \dots, \mu-1.$$

Wstawiając to w (5) dostajemy:

(6) $$R(u)=F.f+G.g+H.h+K.k,$$

w której-to formie są F, G, H, K całkowitemi, wymiernemi funkcyami wszystkich zmiennych x, y, z, u.

Stąd — gdy i tu to rozumowanie zastosujemy do dowolnej liczby równań — mamy twierdzenie:

I. *Rugownik dowolnie wielu równań przedstawić zawsze można liniową jednorodną funkcyą pierwszych stron równań o spółczynnikach wymiernych, całkowitych we wszystkich zmiennych*).*

141. Wyznaczenie funkcyi wielu zmiennych, która na wspólnych miejscach zerowych danych równań ma przybierać dane wartości, (interpolacyjny wzór H. Laurent'a). W art. 138. nauczyliśmy się tworzyć najogólniejszą funkcyę o tej własności, że znika na wspólnych zerowych miejscach k danych równań $f_1=0$, $f_2=0,\dots,f_k=0$, zawierających ilekolwiek zmiennych.

Przyjmując $n=k$ zażądajmy teraz utworzenia najogólniejszej funkcyi $F(x_1,x_2,\dots,x_k)$ przybierającej na $\mu=m_1m_2\dots m_k$ wspólnych zerowych miejscach danych równań $f_1=0$, $f_2=0,\dots,f_k=0$ dane wartości $X_1,X_2,\dots,X_\mu$.

W tym celu naznaczmy wspólne miejsca zerowe przez:

$$(\lambda)=(x_{1\lambda},\ x_{2\lambda},\dots,x_{k\lambda}),\quad \lambda=1,\ 2,\dots,\mu \tag{1}$$

i załóżmy, że żadne z nich się nie powtarza.

Przeprowadzając każdą z funkcyj f_α do otoczenia obranego miejsca (λ), mieć będziemy:

$$f_\alpha(x_{1\lambda}+h_1,\ x_{2\lambda}+h_2,\dots,x_{k\lambda}+h_k)=$$
$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\right)_\lambda h_1+\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}\right)_\lambda h_2+\dots+\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\right)_\lambda h_k$$
$$+v_2^{(\alpha)}(h_1,h_2,\dots,h_s)_\lambda+v_3^{(\alpha)}(h_1,h_2,\dots,h_s)_\lambda+\dots$$

Lecz na podstawie własności jednorodnych funkcyj [art. 75.], możemy położyć:

$$v_2^{(\alpha)}(h_1,h_2,\dots,h_k)_\lambda=(v_{21}^{(\alpha)}h_1+v_{22}^{(\alpha)}h_2+\dots+v_{2k}^{(\alpha)}h_k)_\lambda,$$
$$v_3^{(\alpha)}(h_1,h_2,\dots,h_k)_\lambda=(v_{31}^{(\alpha)}h_1+v_{32}^{(\alpha)}h_2+\dots+v_{3k}^{(\alpha)}h_k)_\lambda,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

i wskutek tego napisać:

$$f(x_{1\lambda}+h_1,\ x_{2\lambda}+h_2,\dots,x_{k\lambda}+h_k)=$$
$$\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}+v_{21}^{(\alpha)}+v_{31}^{(\alpha)}+\dots\right]_\lambda h_1+\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}+v_{22}^{(\alpha)}+v_{32}^{(\alpha)}+\dots\right]_\lambda h_2+\dots$$
$$\dots+\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}+v_{2k}^{(\alpha)}+v_{3k}^{(\alpha)}+\dots\right]_\lambda h_k,=$$

*) Podany w tym art. sposób tworzenia rugownika znajduje się w rozprawie H. Laurent'a *„Mémoire sur les fonctions entières"*. *Journal de l'école polytechnique* — Cahier 60. 1890. str. 107—136. Por. także: J. Molk. *Sur notion, qui comprend celle de la divisibilité et sur la Theorie générale de l'élimination.* Chapitre III. str. 50—59. Acta mathematica T. 6. (1885).

$$=\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}+\Delta_{\alpha 1}\right]_\lambda h_1+\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}+\Delta_{\alpha 2}\right]_\lambda h_2+\ldots+\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}+\Delta_{\alpha k}\right]_\lambda h_k.$$

$\Delta_{\alpha 1}$, $\Delta_{\alpha k}$, ... jako sumy funkcyj v nie posiadają wyrazów wolnych od h_1, h_2, ...

Przyjmijmy $\nu \gtreqless \lambda$ i połóżmy:

$$x_{1\lambda}+h_1=x_{1\nu},\ x_{2\lambda}+h_2=x_{2\nu},\ \ldots, \text{ a więc}$$

$$h_1=x_{1\nu}-x_{1\lambda},\ h_2=x_{2\nu}-x_{2\lambda},\ \ldots,\ h_k=x_{k\nu}-x_{k\lambda}, \tag{2}$$

to dla takich $h_1, h_2, \ldots, h_k$ mieć będziemy:

$$\left[\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}+\Delta_{\alpha 1}\right)_\lambda h_1+\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}+\Delta_{\alpha 2}\right)_\lambda h_2+\ldots+\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}+\Delta_{\alpha k}\right)_\lambda h_k\right]_{(\nu)}=0,\text{*}) \tag{2'}$$
$$\alpha=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ k$$

bo te wyrażenia są $f_\alpha(x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{k\nu})$, są więc zerami.

W (2') mamy k współczesnych jednorodnych liniowych równań ze względu na $h_1, h_2, \ldots, h_k$, które wskutek założenia o miejscach (1) nie wszystkie mają być zerami.

Wyrazem tych współczesności jest:

$$\Theta_{\lambda,(\nu)}=\left|\begin{matrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\Delta_{11}\right)_\lambda, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\Delta_{12}\right)_\lambda, & \ldots, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\Delta_{1k}\right)_\lambda \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\Delta_{21}\right)_\lambda, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\Delta_{22}\right)_\lambda, & \ldots, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k}+\Delta_{2k}\right)_\lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}+\Delta_{k1}\right)_\lambda, & \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_2}+\Delta_{k2}\right)_\lambda, & \ldots, & \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_k}+\Delta_{kk}\right)_\lambda \end{matrix}\right|_{(\nu)}=0 \tag{3}$$

Gdy tu w $h_1, h_2, \ldots, h_k$, które w Δ_{11}, Δ_{12}, ... wchodzą, a są postaci (2), położymy za $x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{k\nu}$ wprost $x_1, x_2, \ldots, x_k$, to otrzymamy funkcyę całkowitą, wymierną Θ_λ tych k zmiennych o tej własności, że ona — jak to właśnie (3) wskazuje — staje się zerem na wszystkich miejscach zerowych $(\nu)=(x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{k\nu})$ różnych od miejsca (λ). Na samem miejscu (λ) jest $h_1=h_2=\ldots=h_k=0$, a więc:

$$\Theta_{\lambda(\lambda)}=\left|\begin{matrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_\lambda, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_\lambda, & \ldots, & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\right)_\lambda \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_\lambda, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_\lambda, & \ldots, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k}\right)_\lambda \\ \vdots & & & \\ \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\right)_\lambda, & \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\right)_\lambda, & \ldots, & \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_k}\right)_\lambda \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{\partial(f_1, f_2 \ldots f_k)}{\partial(x_1, x_2 \ldots x_k)}\Bigg]_{(\lambda)}=D_\lambda.$$

*) Znaczek (ν) ma wskazywać, że wszystkie $h_s=x_{s\nu}-x_{s\lambda}$.

Przytem D_λ, jako wyznacznik jednorodnych równań (2') posiadających w tym wypadku rozwiązanie: $h_1=h_2=...=h_k=0$, przyjąć trzeba różnem od zera. Pąr $(\Theta_\lambda, D_\lambda)$, gdzie Θ_λ jest funkcyą, a D_λ już stałą ilością, mieć możemy μ. Utwórzmy wyrażenie:

$$L(x_1, x_2, ..., x_k) = X_1\frac{\Theta_1}{D_1} + X_2\frac{\Theta_2}{D_2} + ... + X_\mu\frac{\Theta_\mu}{D_\mu},$$

które jest funkcyą całkowitą wymierną zmiennych $x_1, x_2, ..., x_k$, to w niem na miejscu (λ) jest:

$$\Theta_1 = \Theta_2 = ... = \Theta_{\lambda-1} = ... = \Theta_\mu = 0, \text{ a}$$

$$\Theta_\lambda = D_\lambda \neq 0.$$

L na miejscu (λ) ma więc wartość X_λ, $\lambda=1, 2, ..., \mu$*).

Funkcya L jest więc jedną funkcyą zadość czyniącą postawionym warunkom.

Niech dalej $F(x_1, x_2, ..., x_k)$ będzie inną funkcyą przybierającą również na miejscach (λ) wartości X_λ, to wtedy [art. 138].
$F-L=0$ (*modd.* $f_1, f_2, ..., f_k$), czyli $F=L$ (*modd.* $f_1, f_2, ..., f_k$), a stąd twierdzenie:

I. *Każda funkcya F całkowita, wymierna przybierająca na μ miejscach wspólnych zerowych danych równań $f_1=0$, $f_2=0, ..., f_k=0$ jest równoważną według modułów $f_1, f_2, ..., f_k$ z funkcyą L.*

Pisząc wyraźnie $F=L+A_1f_1+A_2f_2+...+A_kf_k$, będziemy mogli funkcyę F z dalszych warunków, a mianowicie dających jej wartości na pewnych miejscach różnych od (λ) w zupełności już wyznaczyć.

Wzór Lagrange'a [art. 52. (L)] służył do utworzenia funkcyi n^{go} stopnia jednej zmiennej x przybierającej dane wartości $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$ na $(n+1)$ danych miejscach $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$. Miejsca te określa równanie:

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n+1}) = 0.$$

Θ_λ, D_λ wypadną tu w postaciach:

$$\Theta_\lambda = \left.\frac{f(x_\lambda+h)}{h}\right]_{h=x-x_\lambda} = (x-x_1)...(x-x_{\lambda-1})(x-x_{\lambda+1})...(x-x_{n+1}),$$

$$D_\lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\lambda = (x_\lambda-x_1)...(x_\lambda-x_{\lambda-1})(x_\lambda-x_{\lambda+1})...(x_\lambda-x_{n+1}),$$

a iloraz $\frac{\Theta_\lambda}{D_\lambda}$ jest w istocie λ^{tym} spółczynnikiem formy Lagrange'a $L(x)$, która określa żądaną funkcyę n^{go} stopnia. Jeżeli jednak najwyższy stopień n w zadaniu nie jest oznaczony, to każda funkcya $F(x) = L(x) + \varphi(x).f(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest dowolną całkowitą funkcyą argumentu x zadość uczyni zadaniu.

Pd. 1. Równania:

$$f_1 = x^2 + y^2 + 1 = 0, \quad f_2 = x^2 - 2y^2 - 1 = 0$$

mają wspólne miejsca zerowe:

---

*) H. Laurent. l. c. str. 131.

$$(\lambda)\quad \begin{cases} (x_1y_1)=\left(+i\sqrt{\frac{1}{3}},\ +i\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ (x_2y_2)=\left(-i\sqrt{\frac{1}{3}},\ -i\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\ (x_3y_3)=\left(+i\sqrt{\frac{1}{3}},\ -i\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ (x_4y_4)=\left(-i\sqrt{\frac{1}{3}},\ +i\sqrt{\frac{2}{3}}\right). \end{cases}$$

$$(a)\quad \begin{aligned} &f_1(x_\lambda+h_1,\ y_\lambda+h_2)=(x_\lambda+h_1)^2+(y_\lambda+h_2)^2+1= \\ &=2x_\lambda h_1+2y_\lambda h_2+h_1{}^2+h_2{}^2=(2x_\lambda+h_1)h_1+(2y_\lambda+h_2)h_2\ ; \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} &f_2(x_\lambda+h_1,\ y_\lambda+h_2)=(x_\lambda+h_1)^2-2(y_\lambda+h_2)^2-1= \\ &=2x_\lambda h_1-4y_\lambda h_2+h_1{}^2-2h_2{}^2=(2x_\lambda+h_1)h_1-2(2y_\lambda+h_2)h_2. \end{aligned}$$

Połóżmy: $h_1=x-x_\lambda$, $h_2=y-y_\lambda$, to spółczynniki mnożące h_1, h_2 w końcowych postaciach (a), (b), będą:

$$x_\lambda+x,\quad y_\lambda+y,$$
$$x_\lambda+x,\quad -2(y_\lambda+y).\ \text{Stąd:}$$

$$\Theta_\lambda=\begin{vmatrix} x_\lambda+x, & y_\lambda+y \\ x_\lambda+x, & -2(y_\lambda+y) \end{vmatrix}=-3(x_\lambda+x)(y_\lambda+y),$$

$$D_\lambda=\begin{vmatrix} 2x_\lambda, & 2y_\lambda \\ 2x_\lambda, & -4y_\lambda \end{vmatrix}=-12x_\lambda y_\lambda,\quad \text{i wreszcie:}$$

$$\frac{\Theta_\lambda}{D_\lambda}=\frac{1}{4}\frac{(x_\lambda+x)(y_\lambda+y)}{x_\lambda y_\lambda},\ \text{a więc w szczególności:}$$

$$\frac{\Theta_1}{D_1}=-\frac{(\sqrt{3}.x+i)(\sqrt{3}.y+\sqrt{2}.i)}{4.\sqrt{2}},\quad \frac{\Theta_2}{D_2}=-\frac{(\sqrt{3}.x-i)(\sqrt{3}.y-\sqrt{2}.i)}{4.\sqrt{2}}$$

$$\frac{\Theta_3}{D_3}=+\frac{(\sqrt{3}.x+i)(\sqrt{3}.y-\sqrt{2}.i)}{4.\sqrt{2}},\quad \frac{\Theta_4}{D_4}=+\frac{(\sqrt{3}.x-i)(\sqrt{3}.y+\sqrt{2}.i)}{4\sqrt{2}}$$

Z tak obliczonych elementów utworzyć funkcyę, która: α) na wszystkich miejscach (λ) ma tę samą wartość $4\sqrt{2}$; β) na miejscach (λ) przybiera odpowiednio wartości:

$$4\sqrt{2}.a,\ 4.\sqrt{2}.a,\ 4.\sqrt{2}.b,\ 4.\sqrt{2}.b,\ a+b.$$

Pd. 2. Gdy dane są równania: $f_1=0$, $f_2=0$, ..., $f_k=0$, to funkcya:

$$D=\frac{\partial(f_1f_2\dots f_k)}{\partial(x_1x_2\dots x_k)}$$

ma na miejscach (λ) wartości D_λ. Okazać, że:

$$D\equiv\Theta_1+\Theta_2+\dots+\Theta_k\quad (modd.\ f_1, f_2, \dots, f_k).$$

ROZDZIAŁ XI.

Z teoryi form.

142. Własności wyznaczników Hessego i Jacobiego. Funkcyę jednorodną $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n zmiennych, a wymiaru (stopnia) m nazywają krócej formą m^{go} stopnia o n zmiennych. Formę o 2, 3, 4 zmiennych nazywają dwójkową, trójkową, czwórkową.

Podług stopnia $m=1, 2, 3, 4$ dzielą formy na: liniowe, kwadratowe, kubiczne i dwukwadratowe.

Zauważmy formę $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dowolnego stopnia $m>1$, i połóżmy:

$$
(1) \qquad \left. \begin{array}{l} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n \end{array} \right\}
$$

z warunkiem: $r = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, to dostaniemy z f przerobioną formę $F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ tego samego stopnia, a na miejscach $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, związanych równaniami (1), mamy zawsze:

$$
(2) \qquad F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).
$$

Z powodu (1) i (2) dostajemy:

$$
\frac{\partial F}{\partial x'_r} = F_r = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_r} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_r} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x'_r}\frac{\partial x_n}{\partial x'_r}.
$$

Połóżmy dla krótkości $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = f_\alpha$ i zauważmy, że z (1) mamy zawsze $\frac{\partial x_1}{\partial x'_r} = a_{1,r}$, $\frac{\partial x_2}{\partial x'_r} = a_{2,r}$, ... to mieć teraz będziemy:

$$
F_r = f_1 a_{1r} + f_2 a_{2r} + \ldots + f_n a_{nr}, \quad r = 1, 2, \ldots, n.
$$

Biorąc tu po obydwóch stronach pochodną według x'_s, $s \gtreqless r$, dostaniemy:

$$
(3) \qquad \begin{array}{l} F_{rs} = (f_{11} a_{1s} + f_{12} a_{2s} + \ldots + f_{1n} a_{ns}) a_{r1} + (f_{21} a_{1s} + f_{22} a_{2s} + \ldots \\ \ldots + f_{2n} a_{ns}) a_{r2} + \ldots + (f_{n1} a_{1s} + f_{n2} a_{2s} + \ldots + f_{nn} a_{ns}) a_{rn}, \end{array}
$$

gdzie drugi znaczek s przy F_r oznacza pochodnę funkcyi F_r według x'_s, a przy f_r oznacza pochodną funkcyi f_r według x_s.

Naznaczmy wyrazy ujęte w nawiasy w (3) krótko przez φ_{1s}, φ_{2s}, ..., φ_{ns}, to mamy teraz:

$$
(4) \qquad F_{rs} = \varphi_{1s} a_{r1} + \varphi_{2s} a_{r2} + \ldots + \varphi_{ns} a_{rn}, \quad r \gtreqless s = 1, 2, \ldots, n.
$$

Utwórzmyż wyznacznik:

$$
H(F) = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \ldots & F_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix}, \quad (F_{rs} = F_{sr}) \text{ —}
$$

to on — wskutek (4) — będzie:

$$=\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & & & \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}.r.$$

Gdy tu za φ_{rs} wyraźnie napiszemy $f_{r1}\alpha_{1s}+f_{r2}\alpha_{2s}+\ldots+f_{rn}\alpha_{ns}$, otrzymamy:

$$(5)\qquad H(F)=r^2\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}, \text{ albo:}$$

$$(6)\qquad H(F)=r^2H(f),$$

jeżeli wyznacznik po prawej stronie w (5) przez analogię także $H(f)$ nazwiemy:

Wyznacznik $H(f)$ nazywają: Hesse'anem albo wyznacznikiem Hessego.*) Ma on tę charakterystyczną własność, że, gdy go utworzymy także i dla przerobionej formy (F), to dostajemy $H(f)$ ze stałym czynnikiem r^2. [$r\neq 0$ nazywają modułem podstawienia (1)].

Gdy w szczególności f jest formą kwadratową postaci:

$$(a_{11}x_1{}^2+\ldots+2a_{12}x_1x_2+\ldots),$$

a po podstawieniach (5) przerabia się na:

$$F=(a'_{11}x'_1{}^2+\ldots+2a'_{12}x'_1x'_2+\ldots),$$

to mamy: $f_{rs}/2=a_{rs}$, $F_{rs}/2=a'_{rs}$ i

$$(7)\qquad H(F)=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ \vdots & & & \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{vmatrix}=r^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=r^2Hf),$$

(po odrzuceniu czynnika 2^n).

$H(f)$ nazywa się tu wyznacznikiem formy f.

Gdy mamy n form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ o tych samych n zmiennych, a położymy dla krótkości: $\frac{\partial f_r}{\partial x_s}=f_{rs}$, gdy dalej formy te przerobimy przez podstawienia (1) na $F_1, F_2, \ldots, F_n$, to z nich dostaniemy:

$$\frac{\partial F_r}{\partial x'_s}=\frac{\partial f_r}{\partial x_1}\alpha_{1s}+\frac{\partial f_r}{\partial x_2}\alpha_{2s}+\ldots+\frac{\partial f_r}{\partial x_n}\alpha_{ns}=f_{r1}\alpha_{1s}+f_{r2}\alpha_{2s}+\ldots+f_{rn}\alpha_{ns},$$

$$r \gtreqless s,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Utwórzmy funkcyjny wyznacznik:

---

*) Ror. Hesse: *„Über die Elimination der Variablen zwischen drei Gleichungen zweiten Grades"*. — Crelle J., T. 28, p. 68. i nast.

$$J(F_1, F_2, \dots F_n) = \frac{\partial(F_1 F_2 \dots F_n)}{\partial(x_1 x_2 \dots x_n)}$$

to się okaże:

$$(8) \qquad \frac{\partial(F_1 F_2 \dots)}{\partial x_1 x_2 \dots)} = r \frac{\partial(f_1 f_2 \dots)}{\partial(x_1 x_2 \dots)}.$$

Wyznacznik $J(f_1 f_2 \dots)$ nazywa się wyznacznikiem Jacobi'ego jakobianem) funkcyj (form) $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Ma on według (8) tę charakterystyczną własność, że utworzony z form przerobionych odtwarza się ze stałym czynnikiem który jest wprost modułem podstawienia.

143. Własności rugowników i wyróżników form jednorodnych. Zauważmy formę dwójkową:

$$f(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \dots + a_m y^m = f(x, y, a).$$

Dzieląc ją przez y^m i kładąc $\frac{x}{y} = z$ dostajemy funkcyę całkowitą wymierną: $\varphi(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$.

Naodwrót funkcyę $\varphi(z)$ — kładąc w niej $z = \frac{x}{y}$ i mnożąc przez y^m — zamienić można na formę f.

Gdy równanie $\varphi(z) = 0$ ma pierwiastki $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, to w takim razie mamy: $f(x, y, a) = a_0(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \dots (x - \alpha_m y)$, gdzie prawa strona wskazuje, że się forma dwójkowa m^{go} stopnia daje zawsze rozłożyć na m liniowych jednorodnych czynników; $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ nazywać będziemy pierwiastkami formy.

Gdy dane są dwie formy: $f(x, y, a)$, $f_1(x, y, b)$ o stopniach m, n, o spółczynnikach $(a_0, \dots, a_m)$, $(b_0, \dots, b_n)$, a o pierwiastkach $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $(\beta_1 . \dots, \beta_n)$, a zmienimy je na funkcye $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, to rugownik funkcyj φ, φ_1 określamy zarazem jako rugownik form f, f_1. Gdy φ, φ_1 mają wspólny podzielnik $\tau(z) = \delta_0 z^\mu + \delta_1 z^{\mu-1} + \dots + \delta_\mu$, to podzielnikiem form f, f_1 jest $t(x, y) = \delta_0 x^\mu + \delta_1 x^{\mu-1} y + \dots + \delta_\mu y^\mu$.

Gdy (x, y) jest miejscem dającem $t = 0$, to mamy równocześnie $f = f_1 = 0$. Połóżmyż:

$$mf = \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = 0, \qquad \text{[art. 75.]},$$
$$nf_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} x + \frac{\partial f_1}{\partial y} y = 0,$$

to stąd wynika, że dla takich (x, y) jest:

$$\frac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\end{vmatrix}=0,$$

a to znaczy, że *wspólny podzielnik dwóch form dwójkowych jest równocześnie podzielnikiem ich jakobianu.*

Rugownik funkcyj φ, φ_1, a więc i form f, f_1 ma — jak wiadomo — postać:

$$R(f,f_1)=a_0{}^n b_0{}^m \Pi(\alpha_r-\beta_s),\ [\text{art. } 90.],$$
$$r \gtreqless s,\quad r=1.\ 2,\ldots,m,\quad s=1,\ 2,\ldots,n.$$

Przerabiając f substytucyą:

(1) $\begin{matrix}x=p\,u+q\,v\\ y=p'u+q'v\end{matrix}$, dostaniemy formę F, w której spółczynnikiem przy u^m będzie $f(p,p')$, a spółczynnikiem przy v^m będzie $f(q,q')$. Uwzględniając pierwiastki, mamy:

$$F=a_0[(p-\alpha_1 p')u-(q'\alpha_1-q)v]\ldots$$
$$=a_0\left[(p-\alpha_1 p')\left(u-\frac{q'\alpha_1-q}{p-\alpha_1 p'}\right)\ldots\right]$$
$$=f(p,p')\prod_{r=1}^{m}(u-\frac{q'\alpha_r-q}{p-\alpha_r p'}).$$

Analogicznie z formy f_1 dostaniemy:

$$F_1=f_1(p,p')\prod_{s=1}^{m}\left(u-\frac{q'\beta_s-q}{p-\beta_s p'}\right).$$

Różnice $(\alpha_r-\beta_s)$ przejdą po podstawieniu (1) na:

$$\frac{q'\alpha_r-q}{p-\alpha_r p'}-\frac{q'\beta_s-q}{p-\beta_s p'}=\frac{pq'-q'p}{(p-\alpha_r p_r')(p-\beta_s p')}(\alpha_r-\beta_s),$$

a stąd — gdy zauważymy, że:

$$\Pi(p-\alpha_r p'_r)=f(p,p')/a_0,\quad \Pi(p-\beta_s p')=f_1(p,p')/b_0\ -$$

dostaniemy:

(4) $$R(F,F_1)=(pq'-qp')^{mn}R(f,f_1).$$

To znaczy: *Rugownik dwóch form dwójkowych — po ich przerobieniu przez podstawienia liniowe, jednorodne — odtwarza się z czynnikiem, który jest modułem podstawienia z wykładnikiem mn.*

W formie f kładąc $y=1$ dostajemy funkcyę: $f(x,1)=\varphi(x)$, a równanie $\varphi(x)=0$ ma pierwiastki α_1, α_2, ... Badając powtarzanie się tych pierwiastków, trzeba według art. 75. zmienić $\varphi(x)$ znowu na formę f, a uwzględniając związek: $m.f=x.\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$, utworzyć rugownik równań: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{y=1}=0$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{y=1}=0$, czyli [według dopieroco danego określenia] form $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Taki rugownik, który jest wyróżnikiem równania $\varphi(x)=0$, nazywać będziemy wyróżnikiem $D(f)$ formy f. Ma on dla formy f takie znaczenie:

Wiadomo z art. 74., że gdy na pewnem miejscu (x, y) mamy równocześnie: $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, to w tem miejscu zerowem powtarzają się spółrzędne x, y przynajmniej 2 razy. Lecz, że tu $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ dają już i $f=0$, więc rugownik $D(f)=0$ wskazywać będzie, że forma f posiada miejsca zerowe w obydwu powtarzających się spółrzędnych.

Wyróżnik $D(f)$ można — jak wiadomo z art. 90. przedstawić także formą:

$$D(f)=a_0^{2m-1}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\Pi(\alpha_r-\alpha_s)^2.$$

Wyróżnik formy przerobionej F będzie postaci:

$$D(F)=f(pp')^{2m-1}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\Pi(\alpha'_r-\alpha'_s)^2.$$ Lecz:

$$(\alpha'_r-\alpha'_s)=\frac{(pq'-p'q)}{(p-\alpha_r p')(p-\alpha_s p')}(\alpha_r-\alpha_s),$$ a stąd wyniknie:

$$\Pi(\alpha'_r-\alpha'_s)^2=(pq'-p'q)^{m(m-1)}.\frac{\Pi(\alpha_r-\alpha_s)^2}{\Pi(p-\alpha_r p')^2(p-\alpha_s p')^2}.$$ Że zaś:

$$\Pi(p-\alpha_r p')^2(p-\alpha_s p')^2=f(pp')^{2m-1}/a_0^{2m-1},$$

więc mieć będziemy:

$$D(F)=a_0^{2m-1}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}(pq'-p'q)^{m(m-1)}\Pi(\alpha_r-\alpha_s),$$ czyli:

(3) $$D(F)=(pq'-p'q)^{m(m-1)}D(f).$$

To znaczy: ***Wyróżnik danej formy dwójkowej odtwarza się po przerobieniu formy przez liniowe, jednorodne podstawienia z czynnikiem, który jest modułem podstawienia o wykładniku*** $m(m-1)$.

Weźmy pod uwagę formę $f(a_0, a_1. ..., x_1, x_2, ..., x_n)$ o spółczynnikach $a_0, a_1, ...$ a o zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$. gdzie $n>2$ przyjmujemy. Takie miejsce zerowe tej formy, które obok $f=0$ daje jeszcze:

(α) $$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}=0, \quad \alpha=1, 2, ..., n$$

ma każdą spółrzędną x_α powtarzającą się przynajmniej dwa razy. Lecz i tu równania (α) już pociągają za sobą $f=0$, a gdy je zmienimy na:

$$\frac{1}{x_n^{m-1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \varphi_\alpha(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) = 0\,,$$

$$(b) \qquad z_s = \frac{x_s}{x_n}\,, \quad s = 1.\,2, \ldots, n-1\,,$$

to rugownik $D_1(a_0, a_1, \ldots)$ równań (b) nazywamy wyróżnikiem $D(f)$ formy f. Warunek $D(f) = 0$ jest wystarczającym, aby forma f posiadała miejsca zerowe o wszystkich powtarzających się spółrzędnych.

Gdy n form $f_1, f_2, \ldots, f_n$ o n zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, a dowolnych wymiarów $\mu_1, \mu_2, \ldots$ będzie danych i gdy równania $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$ zmienimy na równania:

$$\frac{f_1}{x_n^{\mu_1}} = \varphi_1 = 0\,, \quad \frac{f_2}{x_n^{\mu_2}} = \varphi_2 = 0\,, \ldots, \quad \frac{f_n}{x_n^{\mu_n}} = \varphi_n = 0$$

o zmiennych $(x_\alpha : x_n) = z_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$, to rugownik równań φ_α nazwiemy rugownikiem $R(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ danych form.

144. Niezmienniki i współzmienniki form dowolnego stopnia.

Podstawę do dalszych badań w teoryi form utworzą takie definicye:

a) Gdy dana jest jedna forma f n zmiennych, a $J(a)$ oznacza pewną funkcyę wymierną całkowitą jej spółczynników, gdy dalej przez liniowe jednorodne podstawienie dokonane na zmiennych przechodzi f na formę F o spółczynnikach a', ..., a utworzywszy $J(a')$ mamy związek:

$$(1) \qquad J(a') = r^\lambda J(a)\,,$$

— gdzie λ jest całkowitą dodatnią liczbą, a $r \neq 0$ jest modułem podstawienia — to $J(a)$ nazywamy niezmiennikiem (inwaryantem) formy f.

Wykładnik λ nazywa się wskaźnikiem niezmiennika. W razie $\lambda = 0$ jest $J(a)$ bezwzględnym niezmiennikiem.

Według art. 142. jest $H(f)$ należący do formy kwadratowej zarazem jej niezmiennikiem i posiada wskaźnik $= 2$. Każda forma dwójkowa stopnia m ma wyróżnik jako niezmiennik o wskaźniku $= m(m-1)$.

b) Jeżeli J, prócz spółczynników a, jeszcze i zmienne zawiera — co naznaczamy, pisząc $J(x, a)$ — a po jednorodnych liniowych podstawieniach, dostajemy dla formy przerobionej:

$$(2) \qquad J(x', a') = r^\lambda J(x, a)\,,$$

to $J(x, a')$ nazywamy współzmiennikiem (kowaryantem) formy f.

Według tej definicyi będzie $H(f)$, gdy $m > 2$, współzmiennikiem formy f o wskaźniku $= 2$.

c) Jeżeli funkcya J utworzona ze samych spółczynników, albo ze spółczynników i zmiennych więcej, niż jednej formy, spełnia równanie (1), a odpowiednio (2), to ją nazywamy **wspólnym niezmiennikiem**, lub **wspólnym współzmiennikiem** danych form.

Według tego będzie jakobian kilku form liniowych ich niezmiennikiem o wskaźniku $=1$. Rugownik dwóch form dwójkowych o stopniach m, n jest ich wspólnym niezmiennikiem o wskaźniku $= mn$. Jakobian kilku form, z których jedna przynajmniej jest stopnia >1, będzie wspólnym współzmiennikiem tych form o wskaźniku $=1$.

Formy J zadość czyniąc tym definicyom i związkom (1) lub (2) będą musiały spełnić pewne warunki, a te określą bliżej ich własności. Tem się teraz zajmiemy, udowadniając przedewszystkiem:

I. *Niezmiennik $J(a)$ danej formy f jest zawsze jednorodną funkcyą spółczynników a.*

Mając niezmiennik:

(3) $$J(a)=...+Aa_0^{e_0}a_1^{e_1}... \quad \text{formy}$$

(4) $$f=...+ax_1^{s_1}x_2^{s_2}...$$

stopnia m, a więc $s_1+s_2+...=m$, wykonajmy podstawienia:

$$x_1=cy_1,\ x_2=cy_2,\ ...,\ x_n=cy_n$$

o module $r=c^n$, to dostaniemy przerobioną formę $F=...+a'y_1^{s_1}y_2^{s_2}...$ o spółczynnikach $a'=c^m a$, a dalej będzie:

(5) $$J(a')=...+A.c^{m(e_0+e_1+...)}a_0^{e_0}a_1^{e_1}...$$

To — według równania (1) — wskazuje, że musi być **we wszystkich** dodajnikach w (5) $m(e_0+e_1+...)=n\lambda$, czem już twierdzenia I. dowiedziono. Połóżmy $(e_0+e_1...)=e$, to mamy:

(6) $$me=n\lambda.$$

Taka relacya zachodzić zawsze musi między stopniem formy (m), a stopniem niezmiennika (e), ilością zmiennych (n), a wskaźnikiem (λ).

W razie formy dwójkowej mamy $n=2$ i

(7) $$\lambda=me/2,$$

co wskazuje, że przy nieparzystem m musi być e zawsze parzyste; to znaczy:

II. *Forma dwójkowa nieparzystego stopnia ma niezmienniki wyłącznie stopnia parzystego.*

Opierając się na twierdzeniu I. udowodnimy:

III. *Forma liniowa dwójkowa nie posiada wcale niezmienników — chyba że taki niezmiennik ma być dowolną stałą ilością.*

Przyjmijmyż, że forma $f=a_1x+a_2y$ posiada niezmiennik $J(a_1, a_2)$ o charakterystycznem równaniu:

(8) $$J(a'_1a'_2)=r^\lambda J(a_1a_2),$$

istniejącem oczywiście przy każdem podstawieniu. Połóżmyż:

$$x=a_2u+b_2v,\quad y=-a_1u-b_1v,\quad r=a_1b_2-a_2b_1 \neq 0,$$

gdzie b_1, b_2 dowolnemi są ilościami, to mamy po skróceniach:

$$F=(a_1b_2-b_1a_2)v=r.v,$$

a więc $a'_1=0$, $a'_2=r$. Zamiast równania (8) mieć będziemy:

$$J(0,r)=r^\lambda J(a_1a_2).$$

Lecz $J(0,r)$ jest funkcyą jednorodną. Połóżmyż $J(0,r)=Cr^\mu$, to mamy $J(a_1a_2)=C.r^{\mu-\lambda}$. Że zaś $J(a_1a_2)$ nie ma być zależne od dowolnych ilości b_1, b_2, więc być musi $\mu-\lambda=0$, i $J(a_1a_2)=C$. c. b. d. d. [Clebsch].

Niech $J(a,x)$ będzie współzmiennikiem formy f i niech

$$J(a',x')=r^\lambda J(a,x).$$

Zauważmy w $J(a,x)$ sumę wszystkich wyrazów: $(h_1+h_2+\ldots)$, tworzących jednorodną funkcyę pewnego stopnia: τ. Z tych wyrazów — i tylko z tych — dostaniemy w $J(a',x')$ jednorodną funkcyę $(h'_1+h'_2+\ldots)$ stopnia τ, przyczem muszą już sumy:

$$(h_1+h_2+\ldots),\quad (h'_1+h'_2+\ldots)$$

zadość uczynić związkowi $(h'_1+h'_2+\ldots)=r^\lambda(h_1+h_2+\ldots)$.

To mając na uwadze, możemy się odtąd ograniczyć do współzmienników, przedstawiających się jako jednorodne funkcye zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Zauważmy współzmiennik:

$$J(x,a)=\ldots+Aa_0^{e_0}a_1^{e_1}\ldots x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots+\ldots$$

o wskaźniku λ formy (4).

Po podstawieniach $x_\alpha=cy_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,n$, dających moduł $r=c^n$, dostajemy w przerobionej formie F spółczynniki $a'=c^m a$.

Utwórzmyż:

$$J(y,a')=\ldots+Ac^{m(e_0+e_1+\ldots)}a_0^{e_0}a_1^{e_1}\ldots y_1^{\sigma_1}y_2^{\sigma_2}\ldots$$

to — ponieważ $y_1=c^{-1}x_1$, $y_2=c^{-1}x_2, \ldots$, więc mieć będziemy:

$$(9)\qquad J(x,a')=\ldots+Ac^{m(e_0+e_1+\ldots)-(\sigma_1+\sigma_2+\ldots)}a_0^{e_0}.a_1^{e_1}\ldots x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots$$

Lecz, że $J(x,a')$ ma być $=r^\lambda J(x,a)$, a $r=c^n$, więc być musi we wszystkich dodajnikach w (9):

$$(10)\qquad m(e_0+e_1+\ldots)-(\sigma_1+\sigma_2+\ldots)=n\lambda.$$

Jednorodność współzmiennika J we wszystkich zmiennych daje $(\sigma_1+\sigma_2+\ldots)=\sigma$ o tejsamej wartości we wszystkich dodajnikach. Wskutek tego musi być — według 10. — także $(e_0+e_1+\ldots)=e$ jednakiej wartości we wszystkich dodajnikach, a i suma $(e+\sigma)$ będzie statecznie tasama w każdym dodajniku. To znaczy:

IV. *Każdy współzmiennik $J(x,a)$, jednorodny w zmiennych x, jest zarazem jednorodną funkcyą w spółczynnikach a, a więc jednorodną we wszystkich swoich argumentach (a, x).*

Z (10) dostajemy:

(a) $$\lambda=(me-\sigma)/n.$$

Połóżmy $(e+\sigma)=\varrho$, to związek (a) możemy tak napisać:

(b) $$\lambda=[(m+1)e-\varrho]/n.$$

Dla formy dwójkowej mamy $n=2$, a więc:

(c) $$\lambda=(me-\sigma)/2=(m+1)e/2-\varrho/2.$$

Przyjmijmy m nieparzyste. Wtedy w (c) muszą być e, σ koniecznie równocześnie parzyste, lub równocześnie nieparzyste, a stąd twierdzenie:

V. *Forma dwójkowa nieparzystego stopnia posiada współzmienniki o stopniach e, σ równocześnie parzystych lub równocześnie nieparzystych; ϱ jest więc zawsze parzyste.*

Gdy m jest parzyste, to musi być koniecznie i σ parzyste, a stąd wynika:

VI. *Forma dwójkowa parzystego stopnia posiada współzmienniki wyłącznie parzystego stopnia w zmiennych (x); ϱ i e muszą być zatem równocześnie parzyste lub nieparzyste.*

145. Kształt i własności niezmiennika formy dwójkowej. Po tych ogólnych twierdzeniach przejdźmy do dokładniejszego obznajomienia się z kształtami niezmienników, a później współzmienników form dwójkowych.

Niech forma dwójkowa:

$$f(x,y)=a_0x^m+m_1a_1x^{m-1}y+m_2x^{m-2}y^2+\ldots+y^m,$$

w której $m_k=\binom{m}{k}$ i w której same stałe ilości $a_0, a_1, \ldots$ nazywać będziemy jej spółczynnikami, posiada niezmiennik:

$$J(a)=\ldots+Aa_0^{e_0}a_1^{e_1}\ldots{}^{*})$$

o wskaźniku λ. Połóżmy $x=u$, $y=cv$, a więc $r=c$, to w przerobionej formie F mieć będziemy $a'_\mu=c^\mu a_\mu$, $\mu=0,1,\ldots,m$, a

$$J(a')=\ldots+Ac^{0e_0+1.e_1+\ldots}a_0^{e_0}a_1^{e_1}\ldots$$

Stąd wynika, że:

(1) $$0.e_0+1.e_1+2.e_2+\ldots+me_m=\lambda,$$

a to znaczy:

I. *Niezmiennik formy dwójkowej jest jednorodną, izobaryczną funkcyą a jego waga = wskaźnikowi.*

Za pomocą tego twierdzenia możliwem już będzie z form jednorodnych $\varphi(a_0, a_1\ldots)$ danego stopnia e wybrać te, których

*) Widocznie stałe czynniki $m_0^{e_0}m_1^{e_1}\ldots$ włączono do $A,\ldots$

*

kształt — oczywiście z nieoznaczonymi jeszcze spółczynnikami A — nadawać się będzie do tego, aby przedstawić wszystkie niezmienniki danego stopnia e.

Pd. 1. Wynaleźć kształt niezmienników o stopniu $e=2$ formy kwadratowej dwójkowej $f=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2$.

Mamy tu $m=2$, $e=2$, a więc wskaźnik $\lambda=2$, art. 144, (7). Połóżmyż:

$$J(a)=\ldots+Aa_0^{e_0}a_1^{e_1}a_2^{e_2}+\ldots$$

to w każdym wyrazie ma tu być równocześnie:

$$(\alpha)\quad e_0+e_1+e_2=2,\ \text{i}\quad (\beta)\ 0.e_0+1.e_1+2e_2=2.$$

Według warunku (α) mamy utworzyć zupełną jednorodną funkcyę argumentów a_0, a_1, a_2 stopnia 2$^{\text{go}}$. W jej wyrazach będą miały e_0, e_1, e_2 po porządku takie wartości:

$$1)\ [2,0,0],\quad 2)\ [0,2,0],\quad 3)\ [0,0,2],$$
$$4)\ [1,1,0],\quad 5)\ [1,0,1],\quad 6)\ [0,1,1].$$

Z tych jednak systemów wartości tylko 2$^{\text{gi}}$ i 5$^{\text{ty}}$ zadość uczyni warunkowi (β), a stąd wynika, że wszystkie żądane niezmienniki mają postać:

$$(\mathrm{I})\qquad J(a)=Aa_1^2+Ba_0a_2.$$

Pd. 2. Wyznaczyć kształt niezmienników stopnia $e=4$ formy kubicznej:

$$f=a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3?$$

Mamy tu $m=3$, $e=4$, a więc $\lambda=6$; w każdym wyrazie $Aa_0^{e_0}a_1^{e_1}a_2^{e_2}a_3^{e_3}$ żądanego niezmiennika ma być równocześnie:

$$e_0+e_1+e_2+e_3=4,\qquad 0.e_0+1.e_1+2.e_2+3.e_3=6.$$

Tym warunkom zadość uczyni 5 systemów wartości, a mianowicie:

	e_0	e_1	e_2	e_3
1)	2	0	0	2
2)	1	0	3	0
3)	1	1	1	1
4)	0	2	2	0
5)	0	3	0	1.

Stąd wynika, że tu:

$$(\mathrm{II})\qquad J(a)=Aa_0^2a_3^2+Ba_0a_2^3+Ca_0a_1a_2a_3+Da_1^2a_2^2+Ea_1^3a_3.$$

Pd. 3. Okazać, że forma dwukwadratowa $f=a_0x^4+4a_1x^3y+\ldots+a_4y^4$, ma niezmiennik stopnia $e=2$ postaci:

$$(\mathrm{III})\qquad J(a)=Aa_0a_4+Ba_1a_3+Ca_2^2,\ \lambda=4,$$

a niezmiennik stopnia $e=3$ zawsze postaci:

$$(\mathrm{IV})\qquad J(a)=Aa_0a_2a_4+Ba_1a_2a_3+Ca_2^3+Da_0a_3^2+Ea_1^2a_4,\ \lambda=6.$$

Za użyciem szczególnego podstawienia:

$$\left.\begin{aligned}x&=0u+1.v\\ y&=1.u+0.v\end{aligned}\right\}\ \text{o module}\ r=-1$$

dostajemy z formy $f=a_0x^m+m_1a_1x^{m-1}y+\ldots+a_my^m$ przerobioną formę

$$F=a_0v^m+m_1a_1v^{m-1}u+\ldots+a_mu^m,$$

której spółczynniki $a'_k=a_{m-k}$, $k=0,1,\ldots,m$.

Mamy więc tu:

$$(2)\qquad J(a')=J(a_m,a_{m-1},\ldots,a_0)=(-1)^\lambda J(a_0a_1\ldots a_m),$$

a to znaczy:

II. *Każdy niezmiennik formy dwójkowej — gdy się w nim za każde a_k położy a_{m-k} — odtwarza się z czynnikiem* $(-1)^\lambda$.

Z tego wynika, że jeżeli J zawiera dodajnik:

$$(\alpha) \qquad A\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots$$

to się w nim znajduje niezawodnie dodajnik postaci:

$$(b) \qquad (-1)^\lambda A\, a_m^{e_0} a_{m-1}^{e_1} a_{m-2}^{e_2} \ldots$$

Jeżeli w (α) mamy $e_0 = e_m$, $e_1 = e_{m-1}$. $e_2 = e_{m-2}, \ldots$ to, suma tych dwóch dodajników jest $= 0$, gdy λ jest nieparzyste, a jest $= 2A\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots$ przy λ parzystem.

Przestawienie a_k z a_{m-k} nazwiemy symetryczną przemianą spółczynników, a to z powodu, że a_k, a_{m-k} leżą symetrycznie w f. Równanie (2) — według tego, czy λ jest parzyste, czy nieparzyste — wskazuje na symetryczność lub półsymetryczność niezmiennika (charakter parzysty, lub nieparzysty — według Clebscha).

Jeżeli forma f dana jest w postaci:

$$(a') \qquad b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + b_2 x^{m-2} y^2 \ldots$$

a więc bez m_k to jej niezmiennik:

$$J(b) = \ldots + B\, b_0^{e_0} b_1^{e_1} \ldots$$

jako funkcya ilości b_k będzie oczywiście także jednorodnym i o wadze = wskaźnikowi. Ale także i ostatnie twierdzenie utrzyma się, bo kładąc $b_k = m_k a_k$, mamy

$$J(b) = \ldots + (B m_0^{e_0} m_1^{e_1} \ldots)\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} \ldots, \text{ a więc:}$$

$$(b') \qquad A = B\, m_0^{e_0} m_1^{e_1} \ldots$$

Mieniając b_k z b_{m-k} mieniamy równocześnie a_k z a_{m-k} i m_k z m_{m-k}; lecz $m_k = m_{m-k}$, a więc spółczynników A przez to się nie narusza.

W formie $f = a_0 x^m + m_1 a_1 x^{m-1} y + \ldots$ podstawmy:

$$(\beta) \qquad \left.\begin{aligned} x &= u + i v \\ y &= i u + v \end{aligned}\right\}, \; r = 2,$$

to spółczynniki a'_k formy przerobionej:

$$(4) \qquad F = a'_0 u^m + m_1 a'_1 u^{m-1} v + m_2 a'_2 u^{m-2} v^2 + \ldots$$

możemy w ten sposób obliczyć:

Zauważmy formę:

$$(5) \qquad f' = (x + a y)^m$$

o spółczynnikach $a_k = a^k$, to widocznie a_k przechodzi na a_k, gdy się w niem a^k zastąpi przez a_k. Po przerobieniu formy f' podstawieniem (3) dostaniemy:

$$(6) \qquad F' = [(1 + ai)\, u + (i + a)\, v]^m = (1 + a i)^m \left[u + \frac{i + a}{1 + a i}\, v \right]^m$$

o spółczynnikach:

$$(7) \qquad a'_k = (1 + a i)^m \left(\frac{i + a}{1 + a i} \right)^k.$$

Gdy tu wykonamy naznaczone potęgowania i mnożenia, a potem każde a^s przez a_s zastąpimy, dostaniemy już spółczynniki a'_k formy F.

Gdy f posiada niezmiennik $J(a)$, to po podstawieniach (3) mamy tu:

(8) $$J(a')=2^\lambda J(a);$$

a że spółczynniki A w $J(a)$ nie zależą od a_k lub a'_k więc możemy w (8) za a_k położyć a^k, a a'_k zastąpić przez a'_k dane w postaci (7). Dostaniemy więc:

$$\Sigma A(1+ai)^{me}\left(\frac{i+a}{1+ai}\right)^{0e_0+1.e_1+\dots}=2^\lambda \Sigma A a^{0e_0+1e_1\dots}$$

Lecz ponieważ $0e_0+1.e_1+\dots=\lambda$, $me=2\lambda$, więc mieć będziemy:

$$(1+ai)^\lambda(i+a)^\lambda \Sigma A=(2a)^\lambda \Sigma A, \text{ albo}$$
$$[i^\lambda(1+a^2)^\lambda-2^\lambda a^\lambda]\Sigma A=0.$$

Ponieważ to wyrażenie ma być zerem przy wszelkiej wartości a, więc stąd wynika, że:

(9) $$\Sigma A=0, \text{ a to znaczy:}$$

III. *Gdy formę f napiszemy ze spółczynnikami o postaci $m_k a_k$, to w niezmienniku, jako funkcyi samych a_k jest suma spółczynników A zawsze zerem.*

Wskutek związku (b'), gdy f dane będzie w postaci (a'), a jej niezmiennik w funkcyi b_k, mieć będziemy:

(c) $$\Sigma B m_0^{e_0} m_1^{e_1}\dots=0.$$

146. Równania różniczkowe, którym zadość czyni niezmiennik formy dwójkowej. W formę $f=a_0x^m+m_1a_1x^{m-1}y+\dots$ wstawmy:

(1) $$\left.\begin{aligned}x&=u+\beta v\\ y&=0.u+v\end{aligned}\right\},\ r=1,$$

to aby dostać spółczynniki a'_k formy przerobionej

$$F=a'_0u^m+m_1a'_1u^{m-1}v+\dots$$

zauważmy znowu $f'=(x+ay)^m$. Z niej po podstawieniach (1) dostaniemy formę $F'=[u+(\beta+a)v]^m=u^m+m_1(\beta+a)u^{m-1}v+\dots$ o spółczynnikach:

$$a'_k=(\beta+a)^k=[a^k+k_1a^{k-1}\beta+\dots],\ k_r=\binom{k}{r}$$

$a'_k=a^k+k_1a^{k-1}\beta+\dots$ przejdzie na a'_k, gdy się w niem wszystkie a^s zastąpi przez a_s. Mieć więc będziemy:

(2) $$a'_k=a_k+k_1a_{k-1}\beta^1+\dots$$

Połóżmy $J(a)=\varphi(a)$ to— ponieważ tu $r=1$—więc:

(3) $$\varphi(a')=\varphi(a).$$

Z drugiej zaś strony — uwzględniając (2) — dostaniemy:

(4) $$\varphi(a'_0, a'_1, \dots)=\varphi(a_0, a_1, \dots)+C_1\beta+C_2\beta^2+\dots$$

gdzie C_1, C_2,... zależą wyłącznie od a. Uwzględniając tu (3), mamy $C_1\beta+C_2\beta^2+\dots=0$, a że β jest całkiem dowolne, więc być musi:

$$C_1=C_2=\dots=0.$$

Chcąc C_1 wyznaczyć dość jest widocznie w $\varphi(a'_0, a'_1, \dots)$ za a'_k położyć tylko $a_k+k_1 a_{k-1}\beta$, a potem w

$$\varphi(a_0, a_1+a_0\beta, a_2+2a_1\beta, \dots, a_m+m\, a_{m-1}\beta),$$

wyszukać spółczynnik przy β^1. Będzie on właśnie $C_1=$

(A) $$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+\dots+m\, a_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_m}=0,$$

a to znaczy:

I. *Każdy niezmiennik zadość czyni cząstkowemu równaniu różniczkowemu* (A), *albo: Spółczynniki* A, ... *i elementa* a_0, a_1, a_2, ... *każdego niezmiennika spełniają zawsze* *i d e n t y c z n y* *związek* (A).

Wskutek własności: $\varphi(a_0\, a_1 \dots a_m)=(-1)^\lambda\varphi(a_m, a_{m-1}, \dots, a_0)$ mieć także będziemy:

(B) $$m\, a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}+(m-1)\, a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+\dots+2a_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-2}}+a_m\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-1}}=0.$$

Gdy $f=b_0x^m+b_1x^{m-1}y+\dots$, to w miejsce ($A$), ($B$) mieć będziemy:

(A') $$m\, b_0\frac{\partial\varphi}{\partial b_1}+(m-1)b_1\frac{\partial\varphi}{\partial b_2}+\dots+b_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial b_m}=0,$$

(B') $$b_1\frac{\partial\varphi}{\partial b_0}+2\, b_2\frac{\partial\varphi}{\partial b_1}+\dots+m\, b_m\frac{\partial\varphi}{\partial b_{m-1}}=0,$$

gdyż $a_k=b_k/m_k$.

Połóżmy symbolicznie:

(5) $$\begin{aligned} a_0\frac{\partial}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial}{\partial a_2}+\dots+m\, a_{m-1}\frac{\partial}{\partial a_m}&=D,\\ a_m\frac{\partial}{\partial a_{m-1}}+2a_{m-1}\frac{\partial}{\partial a_{m-2}}+\dots+m\, a_1\frac{\partial}{\partial a_0}&=D_1,\end{aligned}$$

to równania (A), (B) krótko się teraz tak napiszą:

(C) $$D\varphi=0, \quad D_1\varphi=0.$$

Aby w rozwinięciu (4) także i znikające spółczynniki C_2, C_3,... co do ich formy wyznaczyć, zauważmy, że funkcyę $\varphi(a'_0, a'_1, \dots)=$ $=\varphi_1(\beta)$ można także w taki zwykły sposób rozwinąć:

$$\varphi(a'_0, a'_1, \dots)=\varphi(a)+\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\right]_{\beta=0}\cdot\beta+\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\beta^2}\right]_{\beta=0}\cdot\beta^2+\dots$$

Porównując to z (4) mamy:

$$\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\right]_{\beta=0}=D\varphi=C_1,$$

$$\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\beta^2}\Big]_{\beta=0}=\frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\right]_{\beta=0}=\frac{1}{2!}D\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\right]_{\beta=0}$$
$$=\frac{1}{2!}D.D\varphi=\frac{1}{2!}D^2\varphi=C_2.$$

Analogicznie dostaniemy:

$$C_3=\frac{1}{3!}D^3\varphi,\ \text{i t. d.}$$

Z tych form wynika, że jeżeli już $C_1=0$ położono, to w następstwie tego musi być $C_2=0$, $C_3=0$,..., gdyż działanie D wykonane na identycznie znikającem $C_1=D\varphi$, musi dać także identycznie: $D^2\varphi=0$, $D^3\varphi=0$,... To znaczy:

II. *Niezmiennik czyniąc zadość równaniu różniczkowemu $D\varphi=0$ spełnia temsamem równania $D^2\varphi=0$, $D^3\varphi=0$,... Analogiczne równanie $D_1\varphi=0$ pociąga za sobą równania $D^2{}_1\varphi=0$, $D^3{}_1\varphi=0$,...*

147. Równania liniowe (jednorodne) spółczynników niezmiennika. Zupełne wyznaczenie niezmiennika ze znanej już jego formy. Przyjmijmy, że mamy pewną funkcyę całkowitą wymierną $\psi(a_0 a_1 ...)$, która, nie będąc niezmiennikiem, czyni zadość równaniu $D\psi=0$. Czyni ona temsamem zadość związkom $D^2\psi=0$,..., a więc nie zmienia się wcale, gdy się w niej za a_0, a_1, a_2,..., położy spółczynniki przerobionej formy przez podstawienie $x=u+\beta v$, $y=v$. Stąd twierdzenie:

I. *Dostatecznym warunkiem, aby się pewna funkcya $\psi(a_0, a_1...)$ nie zmieniała, gdy a_0, a_1,... zastąpimy przez spółczynniki przerobionej formy podstawieniem $x=u+\beta v$, $y=v$,* jest: $D\psi=0$.

Z równania (A), [art. poprzedz.] dostaniemy liniowe jednorodne związki, jakim zadość czynić muszą spółczynniki A danego niezmiennika $J=\varphi$.

Połóżmy bowiem jak zawsze:

$$\varphi=A_0^{e_0}a_1^{e_1}a_2^{e_2},...+...$$

to mamy po porządku:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}=e_1Aa_0^{e_0}a_1^{e_1-1}a_2^{e_2}...+...$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}=e_2Aa_0^{e_0}a_1^{e_1}a_2^{e_2-1}...+...$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Po wstawieniu tych pochodnych w równanie (A), mieć będziemy:

$$\Sigma A[e_1a_0^{e_0-1}a_1^{e_1-1}a_2^{e_2}...+2e_2a_0^{e_0}a_1^{e_1+1}a_2^{e_2-1}...+...]=0.$$

Łącząc w tej całej sumie jednoimienne wyrazy ze sobą, dojdziemy do związku postaci:

(1) $(hA + 'A' + ...)a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} ... + (kA + k'A' + ...) a_0^{\varepsilon_0'} a_1^{\varepsilon_1'} ... + ... = 0$;

a że się on ma utrzymać przy wszelkich wartościach a_0, a_1, ..., więc stąd wynikają jednorodne liniowe równania:

$$hA + h'A' + ... = 0$$
(2) $$kA + k'A' + ... = 0$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

którym zawsze zadość uczynić muszą spółczynniki A, A', A'', ... danego niezmiennika J.

Przyjmijmy, że tych równań mamy s, a spółczynników A, A', ..., jest t, to bez względu, czy $s=t$, lub $s<t$, muszą A, A',... spełnić wszystkie te równania. Nierówność $s>t$ jest niemożliwa, bo t jest ilością spółczynników w formie J stopnia e, a wagi λ, podczas, gdy s jest ilością spółczynników formy (1) o stopniu wprawdzie jeszcze $=e$, ale już o wadze $\lambda-1$.

W przypadku: $s=t$ wypadną A, A', ... albo proporcyonalne do podwyznaczników któregobądź wiersza wyznacznika:

$$D = \begin{vmatrix} h, & h', & ... \\ k, & k', & ... \\ \vdots & \vdots & \end{vmatrix} = 0^{*)}$$

albo też — gdy w D znikają wszystkie pierwsze, drugie, ... podwyznaczniki — będzie można pewną ilość tych spółczynników wyrazić liniowo jednorodnie przez pozostałe.

W drugim wypadku $s<t$ można zawsze s spółczynników wyrazić liniowo jednorodnie przez pozostałe.

W razie, kiedy — czy-to w pierwszym, czy drugim przypadku — wyraża się pewna liczba spółczynników przez pozostałe n. p. przez A, A', A'', spróbujmy te ostatnie, nie nadając im wartości, jakie one rzeczywiście mają w J, uważać za dowolne.

Niezmiennik J będzie miał w tych razach postać:

(3) $$J = AJ_0 + A'J_1 + A''J_2$$

o dowolnych A, A', A''.

Za podstawieniem: $\begin{Bmatrix} x = pu + qv \\ y = p'u + q'v \end{Bmatrix}$, $r = (pq' - p'q) \neq 0$,

trzeba a_0, a_1,... zastąpić przez a'_0, a'_1,... Lecz przez to A, A', A'' pozostają nienaruszone, a tylko J_0, J_1, J_2 przejdą na $r^\lambda J_0$, $r^\lambda J_1$, $r^\lambda J_2$ — J_0, J_1, J_2 są więc niezmiennikami.

---

*) D musi być $=0$, bo gdy — jak-tośmy przyjęli — istnieje niezmiennik J, to jego spółczynniki nie są wszystkie $=0$.

Niezmiennik J daje więc w takich razach początek nieskończenie wielu niezmiennikom; ale one wszystkie są liniowemi, jednorodnemi funkcyami kilku zupełnie oznaczonych niezmienników.

Przyjmijmy teraz, że mamy funkcyę:

$$\psi = Ba_0^{e_0} a_1^{e_1} \ldots + B' a_0^{e_0'} a_1^{e_1'} \ldots + \ldots$$

jednorodną i izobaryczną o stopniu $e_0 + e_1 + \ldots = e$, a o wadze $0 e_0 + 1 . e_1 + \ldots = \lambda = \frac{me}{2}$, a wiemy, że ona zadość czyni równaniu różniczkowemu (A). Jeżeli także ma istnieć niezmiennik $J = \varphi(a)$ stopnia e i wagi λ to i różnica;

$$\psi - \varphi = (B - A)\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} \ldots + (B' - A')\, a_0^{e_0'} a_1^{e_1'} \ldots + \ldots$$

musi również zadość uczynić równaniu (A). Z tego równania dojdziemy do związków liniowych jednorodnych (2) z tą różnicą, że tam teraz w miejsce A, A', A'',... mieć będziemy: $(B-A)$, $(B'-A')$, $(B''-A'')$,...

Na rozwiązania systemu równań (2) dostaniemy tu:

$$B - A = A,\ B' - A' = A',\ B'' - A'' = A'', \ldots$$

a więc:

$$B = 2A,\ B' = 2B',\ B'' = 2A'', \ldots$$

Gdy tu czynnik 2 opuścimy, mieć będziemy $B = A$, $B' = A'$, $B'' = A''$,... a stąd wynika, że identycznie jest: $\psi = \varphi$.

Jeżeli równania (2) nie posiadają rozwiązań skończonych, to widocznie nie istnieje funkcya jednorodna i izobaryczna stopnia e i wagi λ zadość czyniąca równaniu (A), a wtedy i niezmiennik o tym stopniu i o tej wadze nie istnieje. Z tych uwag wynika:

II. *Każda funkcya jednorodna i izobaryczna o stopniu* $e_0 + e_1 + \ldots = e$, *o wadze* $0e_0 + 1 . e_1 + \ldots = \lambda = \frac{me}{2}$, *a czyniąca zadość równaniu różniczkowemu* (A) *jest niezmiennikiem o wskaźniku* λ.

Na podstawie tego twierdzenia możliwem już będzie każdy niezmiennik żądanego stopnia e, wagi λ dowolnej formy f — w przypuszczeniu, że taki niezmiennik istnieje — albo zupełnie dokładnie oznaczyć, albo dojść do niezmienników, z których on ma być liniowo jednorodnie [podług (3)] złożony.

Pd. 1. W art. 145., Pd. 2, oznaczyliśmy już formę, jaką mieć powinien niezmiennik $J(a)$ o stopniu $=4$, a o wskaźniku $=6$ formy kubicznej f. Wstawiając $J(a)$ w równanie różniczkowe (A) dostajemy:

$$a_0(Ca_0a_2a_3 + 2Da_1a_2{}^2 + 3Ea_1{}^2a_3) + 2a_1(3Ba_0a_2{}^2 + Ca_0a_1a_3 + 2Da_1{}^2a_2) +$$
$$3a_2(2Aa_0{}^2a_3 + Ca_0a_1a_2 + Ea_1{}^3) = (C + 6A)a_0{}^2a_2a_3 + (2D + 6B + 3C)a_0a_1a_2{}^2 +$$
$$+ (3E + 2C)a_0{}^2a_2a_3 + (4D + 3E)a_1{}^3a_2 = 0,$$

a stąd związki:

$$C + 6A = 0,\quad 2D + 6B + 3C = 0,\quad 3E + 2C = 0,\quad 4D + 3E = 0.$$

Gdy tu $A=1$ założymy, otrzymamy:

$$J(a)=a_0{}^2a_3{}^2+4a_0a_2{}^3-6a_0a_1a_2a_3-3a_1{}^2a_2{}^2+4a_1{}^3a_3.$$

Gdy forma daną była bez spółczynników dwumiennych m_k, to z uwagi, że $b_k=m_k a_k$, a więc $a_h=b_k/m_k$ mielibyśmy:

$$-27\,J(b)=18\,b_0b_1b_2b_3-4\,b_0b_2{}^3-4\,b_1{}^3b_3+b_1{}^2b_2{}^2-27\,b_0{}^2b_3{}^2.$$

Pd. 2. Obliczyć w ten sam sposób niezmienniki III, IV, których formy dane są w Pd. 3, art. 145.

[Odp. (III) $J(a)=a_0a_4-4\,a_1a_3+3\,a_2{}^2$,

(IV.) $J(a)=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_2{}^3-a_0a_3{}^2-a_1{}^2a_4$.].

148. Kształt i własności współzmiennika formy dwójkowej.

Wiemy już, że współzmiennik $J(x,a)$ formy dowolnego stopnia i o dowolnej liczbie zmiennych jest jednorodną funkcyą tak we współczynnikach a, jak we wszystkich zmiennych x. Gdy $n=2$, mamy formę dwójkową:

$$f=a_0x^m+m_1a_1x^{m-1}y+\ldots \tag{1}$$

a jej każdy współzmiennik $J(x,y,a)$ ma pod względem swych stopni e, σ, ϱ własności, o których już była mowa w art. 144. Szukajmy dalszych własności takiego niezmiennika. Połóżmy:

$$J(x,y,a)=C_0x^\sigma+C_1x^{\sigma-1}y+\ldots+C_\sigma y^\sigma, \text{ to} \tag{2}$$

$$C_\alpha=C_\alpha(a_0a_1\ldots)=\Sigma(A^{(\alpha)}a_0{}^{e_0}a_1{}^{e_1}\ldots), \tag{3}$$
$$\alpha=0,1,2,\ldots,\sigma,$$

są funkcyami jednorodnemi spółczynników $a_0, a_1, \ldots$ i to jednakowego stopnia e. Połóżmy:

$$\left.\begin{aligned} x&=1.u+0.v\\ y&=0\,u+\varepsilon\, v\end{aligned}\right\},\quad r=\varepsilon \mp 0, \tag{4}$$

to w przerobionej formie F mieć będziemy: $a'_k=\varepsilon^k a_k$, a

$$J(u,v,a')=\Sigma(A.^{(0)}a_0{}^{e_0}a_1{}^{e_1}\ldots\varepsilon^{0e_0+1e_1+\cdot\cdot})u^\sigma$$
$$+\Sigma(A.^{(1)}a_0{}^{e_0'}a_1{}^{e_1'}\ldots\varepsilon^{0e_0'+1\,.\,e_1'+\ldots})u^{\sigma-1}v+\ldots$$

Lecz, że $u=x$, $v=\varepsilon^{-1}y$, więc:

$$J(u,v,a')=$$
$$\Sigma(A^{(0)}a_0{}^{e_0}a_1{}^{e_1}\ldots\varepsilon^{0e_0+1e_1+\ldots})x^\sigma+\Sigma(A^{(1)}a_0{}^{e_0'}a_1{}^{e_1'}\ldots\varepsilon^{0e_0'+1e_1'+\ldots-1})x^{\sigma-1}y+ \tag{5}$$
$$\ldots+\Sigma A^{(\alpha)}a_0{}^{e_0^{(\alpha)}}a_1{}^{e_1^{(\alpha)}}\ldots\varepsilon^{0e_0^{(\alpha)}+1e_1^{(\alpha)}+\ldots-\alpha})x^{\sigma-\alpha}y^\alpha+\ldots$$

Z drugiej strony — jeżeli λ jest wskaźnikiem rozważanego współzmiennika — mamy dla podstawienia (4):

$$J(u,v,a')=\varepsilon^\lambda J(x,y,a), \tag{6}$$

Stąd i z (5) wynika, że we wszystkich wyrazach spółczynnika C_α mieć musimy: $0.e_0{}^{(\alpha)}+1.e_1{}^{(\alpha)}+\ldots-\alpha=\lambda$ czyli:

$$0.e^{(\alpha)}+1.e_1{}^{(\alpha)}+\ldots=\lambda+\alpha \tag{7}$$
$$\alpha=0,1,2,\ldots\sigma$$

a to znaczy:

I. *W współzmienniku są spółczynniki przy zmiennych jednorodnemi, izobarycznemi funkcyami. Spółczynnik przy* $x^{\sigma-\alpha}y^{\alpha}$ *ma wagę* $\lambda-\alpha$. *Wagi więc po sobie następujących spółczynników* C_0, C_1, ... *tworzą postęp arytmetyczny:* $[\lambda, \lambda+1, \lambda+2, ..., \lambda+\sigma]$.

Połóżmy:

$$(8) \qquad \left.\begin{matrix} x=0.u+1.v \\ y=1.u+0.v \end{matrix}\right\}, \quad r=-1,$$

to w F dostaniemy spółczynniki $a'_k=a_{m-k}$ a gdy w $J(u, v, a')$ za u pisać będziemy wprost y, a za v wprost x, dostaniemy:

$$J(y, x, a_m, a_{m-1}, ..., a_0)=$$

$$(9) \qquad C_0(a_m a_{m-1}..)y^{\sigma}+C_1(a_m a_{m-1}...)y^{\sigma-1}x+...+C_{\sigma}(a_m a_{m-1}...)x^{\sigma}$$

$$=(-1)^{\lambda}[C_0(a_0 a_1...)x^{\sigma}+C_1(a_0 a_1...)x^{\sigma-1}y+...+C_{\sigma}(a_0 a_1...)y^{\sigma}],$$

a to znaczy:

II. *Gdy w współzmienniku* $J(x, y, a_0, a_1, ...)$ *zmienimy* x, y *na* y, x, *a* $(a_0, a_1, ..., a_m)$ *na* $(a_m, a_{m-1}, ..., a_0)$, *to się niezmiennik odtwarza z czynnikiem* $(-1)^{\lambda}$.

Zrównując z sobą w (9) równomienne wyrazy, dostajemy:

$$C_{\alpha}(a_m a_{m-1}...)=(-1)^{\lambda}C_{\sigma-\alpha}(a_0 a_1...) \quad \text{albo:}$$

$$(10) \qquad C_{\sigma-\alpha}(a_0 a_1...)=(-1)^{\lambda}C_{\alpha}(a_m a_{m-1}...), \quad \text{a to znaczy:}$$

III. *Gdy w współzmienniku przy* $(x^{\sigma-\alpha}y^{\alpha})$ *mamy spółczynnik:* $C_{\alpha}(a_0 a_1...)$, *to przy* $(x^{\alpha}y^{\sigma-\alpha})$ *jest spółczynnikiem* $(-1)^{\lambda}C_{\alpha}(a_m a_{m-1}...)$.

Zastąpmy formę f przez $f'=(x+ay)^m$ o spółczynnikach $a_k=a^k$, a przerobioną formę F przez podstawienie:

$$\left.\begin{matrix} x=1.u+v \\ y=0.u+v \end{matrix}\right\}, \quad r=1, \quad \text{zastąpmy formą:}$$

$$F'=[u+(1+a)v]^m,$$

o spółczynnikach $a'_k=(1+a)^k$. Takie zastępstwo jest i tu w badaniu spółczynników $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, ... dozwolone, bo one od a_0, a_1, ... nie zależąc, nie zmieniają się, gdy a_k przez a^k, a a'_k przez $(1+a)^k$ zastąpimy. Z równania: $J(u, v, a')=r^{\lambda}J(x, y, a)$ — ponieważ tu $r=1$, a wszystkie spółczynniki $A^{(\alpha)}$, ... w C_{α} są jednej wagi $g_{\alpha}=\lambda+\alpha$ — dostaniemy:

$$...+(\Sigma A^{(\alpha)})(1+a)^{\lambda+\alpha}u^{\sigma-\alpha}v^{\alpha}+...=...+(\Sigma A^{(\alpha)})a^{\lambda+\alpha}x^{\sigma-\alpha}y^{\alpha}+...$$

Połóżmy $\Sigma A^{(\alpha)}=C'_{\alpha}$, to mieć będziemy:

$$\sum_{\alpha=0}^{\sigma} C'_{\alpha}(1+a)^{\lambda+\alpha}u^{\sigma-\alpha}v^{\alpha}=\sum_{\alpha=0}^{\sigma} C'_{\alpha}a^{\lambda+\alpha}x^{\sigma-\alpha}y^{\alpha}.$$

Lecz, że $u=x-y$, $v=y$, więc także będzie:

$$\Sigma C'_{\alpha}(1+a)^{\lambda+\alpha}(x-y)^{\sigma-\alpha}y^{\alpha}=\Sigma C'_{\alpha}a^{\lambda+\alpha}x^{\sigma-\alpha}y^{\alpha}.$$

Stąd — gdy $x=y$ — wynika (po skróceniu przez y^{σ}).

$$C'_\sigma(1+a)^{\lambda+\sigma}=\Sigma C'_\alpha a^{\lambda+\alpha}, \text{ albo:}$$

$$C'_\sigma[(1+a)^{\lambda+\sigma}-a^{\lambda+\sigma}]-\sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} C'_\alpha . a^{\lambda+\alpha}=0,$$

a to przy dowolnej wartości a okaże się tylko tym sposobem, że $C'_0=C'_1=...=C'_\sigma=0$, co znaczy;

IV. *W każdym spółczynniku* C_α *współzmiennika jest suma spółczynników zerem.*

149. Równania różniczkowe, którym zadość czyni współzmiennik. Zupełne wyznaczenia współzmiennika o danych jego stopniach (*e*, σ). Połóżmy:

$$\left.\begin{aligned} x&=u+\beta v \\ y&=0+1.v \end{aligned}\right\}, \; r=1,$$

to dostaniemy z formy f formę przerobioną F o spółczynnikach $a_k'=a_k+k_1 a_{k-1}\beta+...$ i relacyą $J(u, v, a')=$

(1) $$J(x-\beta y, y, a_k+k_1 a_{k-1}\beta+...)=J(x, y, a)$$

Rozwijając lewą stronę podług potęg β dostajemy:

$$J(x, y, a)+C_1\beta+C_2\beta^2+...$$

Lecz podług (1) musi tu być $C_1=0$, $C_2=0$,... Z tych równań pierwsze: $C_1=0$ daje związek:

(A_1) $$y\frac{\partial J}{\partial x}=a_0\frac{\partial J}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial J}{\partial a_2}+...+m\,a_{m-1}\frac{\partial J}{\partial a_m}.$$

Wskutek zaś własności (9) — art. poprzedz. — mieć także będziemy:

(B_1) $$x\frac{\partial J}{\partial y}=a_m\frac{\partial J}{\partial a_{m-1}}+2a_{m-1}\frac{\partial J}{\partial a_{m-2}}+...+m\,a_1\frac{\partial J}{\partial a_0}$$

a to znaczy:

I. *Każdy współzmiennik formy dwójkowej czyni zadość równaniu różniczkowemu cząstkowemu* (A_1), *lub* (B_1).

Takiem samem rozumowaniem, jak w teoryi niezmiennika będzie można i tu dojść do zupełnego wyznaczenia współzmiennika o żądanych stopniach e, σ.

Mając e, σ wyznaczamy nasamprzód $\lambda=(me-\sigma)/2$ a potem tworzymy:

$$\varphi=C_0 x^\sigma+C_1 x^{\sigma-1}y+...+C_\sigma y^\sigma,$$

gdzie $C_0(a_0...)$, $C_1(a_0...)$... mają wszystkie jednaki stopień e są po porządku o wagach λ, $\lambda+1$, $\lambda+2$,...; spółczynniki $A^{(\alpha)}$,... są jeszcze nieoznaczone, ale:

(2) $$C_{\sigma-\alpha}(a_0 a_1...)=(-1)^\lambda C_\alpha(a_m a_{m-1}...).$$

Wstawiając dalej φ w równanie (A_1) dojdziemy do jednorodnych liniowych równań, z których już spółczynniki $A^{(\alpha)}$ dadzą się oznaczyć (jeżeli współzmiennik żądanej postaci rzeczywiście istnieje).

Pd. 1. Oznaczzyć współzmiennik o stopniach $e=2$, $\sigma=2$ formy 5^{go} stopnia

$$f=a_0x^5+5a_1x^4y+10a_2x^3y^2+10a_3x^2y^3+5a_4xy^4+a_5y^5$$

Mamy tu $\lambda=\frac{5.2-2}{2}=4$. Spółczynniki więc C_0, C_1, C_2 będąc drugiego stopnia mają być wag: 4, 5, 6. Przytem postać spółczynnika C_2 już się wywnioskuje z C_0 (podług związku (2). Trzeba więc położyć:

$$C_0=A_0a_0a_4+B_0a_1a_3+C_0a_2^2,\quad C_2=A_0a_5a_1+B_0a_4a_2+C_0a_3^2$$

$$C_1=A_1a_0a_5+B_1a_1a_2+C_1a_2a_3$$

$$\varphi=(A_0a_0a_4+B_0a_1a_3+C_0a_2^2)x^2+(A_1a_0a_5+B_1a_1a_4+C_1a_2a_3)xy$$
$$+(A_0a_5a_1+B_0a_4a_2+C_0a_3^2)y^2.$$

Utworzywszy

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial a_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial a_2},\ \frac{\partial\varphi}{\partial a_3},\ \frac{\partial\varphi}{\partial a_4},\ \frac{\partial\varphi}{\partial a_5}$$

i wstawiwszy w równanie (A_1), dostaniemy zrównując do zera spółczynniki przy x^2, $x.y$, y^2, związki:

$$0=B_0a_0a_3+4C_0a_1a_2+3B_0a_1a_2+4A_0a_0a_3,$$
$$2A_0a_0a_4+2B_0a_1a_3+2C_0a_2^2=$$
$$=B_1a_0a_4+2C_1a_1a_3+3C_1a_2^2+4B_1a_1a_3+5A_1a_0a_4,$$
$$A_1a_0a_5+B_1a_1a_4+C_1a_2a_3=$$
$$=A_0a_1a_5+2B_0a_1a_4+6C_0a_2a_3+4B_0a_2a_3+5A_0a_1a_3$$

Te związki mając się ostawać przy wszelkich wartościach $a_0, a_1, \ldots$ prowadzą do równań:

$$1)\ B_0+4A_0=0,\quad 2)\ 4C_0+3B_0=0,$$
$$3)\ 2A_0-B_1-5A_1=0,\quad 4)\ 2B_0-2C_1-4B_1=0,\quad 5)\ 2C_0-3C_1=0$$
$$6)\ A_1-A_0=0,\quad 7)\ B_1-2B_0-5A_0=0,\quad 8)\ C_1-6C_0-4B_0=0.$$

Połóżmy według 6)

$$A_0=A_1=1,$$

to dalej mamy:

$$\text{z 3)}: B_1=-3,\ \text{z 7)}: B_0=-4,\ \text{z 4)}: C_1=2,\ \text{z 5)}\ C_0=3,$$

a te wartości sprawdzają pozostałe równania: 1) 2), 8). Żądanym więc współzmiennikiem będzie:

$$J=(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)x^2+(a_0a_5-3a_1a_4+2a_2a_3)xy$$
$$+(a_1a_3-4a_2a_4+3a_3^2)y^2.$$

Pd. 2. Oznaczyć współzmiennik o stopniach $e=2$, $\sigma=2$ formy kubicznej:

$$f=a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3.$$

[Odp. $J=(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)xy+(a_1a_3-a_2^2)y^2$].

150. Półzmiennik. Niezmiennik jako funkcya pierwiastków formy. Z funkcyj wymiernych całkowitych $\psi(a_0, a_1, \ldots)$ czyniących zadość równaniu różniczkowemu $D\psi=0$ nazywamy półzmiennikami *(seminvariants)* te, które nie licząc się do niezmienników są jednorodne i izobaryczne.

Gdy stopień takiego półzmiennika ψ jest e, a waga w, to nie może być $w=\frac{me}{2}$, bo w takim razie funkcya ψ byłaby już niezmiennikiem. Z danych jednak e, w będzie można półzmiennik już zupełnie wyznaczyć, a to drogą taką, jakiej już do niezmiennika [art. 147.] stosowano. Napiszemy naprzód jego kształt możliwy (z danych e, w) z nieoznaczonymi spółczynnikami, a potem te spółczynniki z równań liniowych jednorodnych wynikających z $D\psi=0$ obliczymy.

Połóżmy $\psi=a^e\varphi\left(1,\frac{a_1}{a_0},\frac{a_2}{a_0},...\right)$, to widocznie ψ jako wymierna funkcya spółczynników równania:

$$z^m+m_1\frac{a_1}{a_0}z^{m-1}+m_2\frac{a_2}{a_0}z^{m-2}+...=0$$

jest symetryczną funkcyą:

$$a_0{}^e S(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$$

pierwiastków tego równania, albo formy:

$$f=a_0(x-\alpha_1 y)(x-\alpha_2 y)...(x-\alpha_m y).$$

Zbadajmy bliżej budowę tej funkcyi symetrycznej.

Równanie $D\psi=0$ jest — jak wiemy — dostatecznym warunkiem, aby się funkcya ψ nie zmieniała wcale przy podstawieniach $x=u+\beta v$, $y=v$. Po nich przechodzi f na

$$F=a_0(u-(\alpha_1-\beta)v)(u-(\alpha_2-\beta)v)...$$

o pierwiastkach $\alpha_1-\beta$, $\alpha_2-\beta$, ..., a że:

$$\psi(a'_0,a'_1,...)=a_0{}^e S(\alpha_1-\beta,\ \alpha_2-\beta,...)$$

i ma być $=\psi(a_0 a_1...)$, więc mamy:

$$S(\alpha_1-\beta,\ \alpha_2-\beta,...)=S(\alpha_1,\alpha_2,...)$$

przy dowolnem β. To jest tylko tym sposobem możliwe, że $\psi=a_0{}^e S$, będąc symetryczną funkcyą w pierwiastkach α_1, α_2, ..., jest funkcyą s a m y c h r ó ż n i c p i e r w i a s t k ó w, a więc:

$$\psi=a_0{}^e.\Sigma C[\alpha_a-\alpha_b)^h(\alpha_c-\alpha_d)^k...].$$ To znaczy:

I. *Półzmiennik jestto funkcya symetryczna pierwiastków formy utworzona z samych różnic tych pierwiastków z warunkiem, że po wyrażeniu przez spółczynniki formy będzie w nich jednorodną i izobaryczną.*

Pomieniajmy w f zmienne x, y ze sobą. Dostaniemy wtedy formę:

$$a_0(y-\alpha_1 x)(y-\alpha_2 x)...=(-1)^m a_0\alpha_1\alpha_2...\alpha_m\left[x-\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)y\right]...$$

$$=a_m\left(x-\frac{1}{\alpha_1}y\right)\left(x-\frac{1}{\alpha_2}y\right)...$$

Dla niej funkcya:

$$\psi(a_m a_{m-1}\ldots)=a^e_m\,\psi\left(1,\ \frac{a_{m-1}}{a_m},\ldots\right)$$

będzie oczywiście także półzmiennikiem i spełni równanie różniczkowe:

$$(1)\qquad D_1\psi(a_m a_{m-1}\ldots a_0)=0.$$

Takie dwa półzmienniki, z których jeden powstaje z drugiego przez zmienienie wszystkich a_k na a_{m-k} nazywać będziemy symetrycznymi albo sprzężonymi.

Na podstawie tw. I. będzie można i niezmiennik φ przedstawić w funkcyi pierwiastków. Musi on — spełniając równanie $D\varphi=0$ — zawierać również tylko różnice pierwiastków. Ale tu przybędą jeszcze nowe warunki.

Napiszmyż φ w postaci:

$$(2)\qquad \varphi(a_0 a_1\ldots)=a_0{}^e\,\Sigma\, C[(\alpha_a-\alpha_b)^h(\alpha_c-\alpha_d)^k\ldots]$$

i połóżmy:

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned}x&=p\,u+q\,v\\ y&=p'u+q'v\end{aligned}\right\},\quad r=(pq'-p'q)\neq 0,$$

to w przerobionej formie F mieć będziemy $a'_0=f(pp')$, a gdy jej pierwiastki są α'_1, α'_2, ..., to ich różnice:

$$(4)\qquad \alpha'_a-\alpha'_b=\frac{(pq'-p'q)(\alpha_a-\alpha_b)}{(p-\alpha_a p')(p-\alpha_b p')}\quad \text{[art. 143.]}.$$

Mamy zatem:

$$(5)\quad \varphi(a'_0 a'_1\ldots)=f(pp')^e\sum C\,\frac{(pq'-p'q)^{h+k+\ldots}[(\alpha_a-\alpha_b)^h(\alpha_c-\alpha_d)^k\ldots]}{(p-\alpha_a p')^h(p-\alpha_b p')^h(p-\alpha_c p')^k(p-\alpha_d p')^k\ldots}$$

Gdy przyjmiemy, że $\varphi(a_0 a_1\ldots)$ będąc symetryczną funkcyą pierwiastków, jest w nich i jednorodną, a więc $h+k+\ldots=\lambda$, gdy dalej w każdym z dodajników sumy wszystkie się mieszczą pierwiastki, a każdy z tych pierwiastków dokładnie e razy się znachodzi, to wtedy z (5) dostajemy:

$$\varphi(a'_0 a'_1\ldots)=(pq'-p'q)^\lambda\,\varphi(a_0 a_1\ldots),$$

gdyż:

$$(p-\alpha_a p')^h(p-\alpha_b p')^h(p-\alpha_c p')^k(p-\alpha_d p')^k\ldots=f(p,p')/a_0]^e$$

Funkcya $\varphi(a_0 a_1\ldots)$ jest więc wistocie niezmiennikiem i mamy twierdzenie:

II. *Każdy niezmiennik (stopnia e) jest symetryczną i jednorodną funkcyą pierwiastków, złożoną z samych różnic tych pierwiastków. Jest więc sumą iloczynów* $C[(\alpha_a-\alpha_b)^h(\alpha_c-\alpha_d)^k\ldots]$ *o tej własności że: 1⁰ w każdym z nich zawierają się wszystkie pierwiastki, 2⁰ każdy pierwiastek znachodzi się w każdym z nich tęsamą ilość razy, (razy e).*

Naodwrót każda funkcya symetryczna jednorodna pierwiastków o wyrażonych tu własnościach jest niezmiennikiem. Stopień $\lambda=h+k+\ldots$ takiej funkcyi w pierwiastkach jest wskaźnikiem niezmiennika.

Z tego-to powodu wyróżnik formy f był [art. 143.] jej niezmiennikiem.

Zauważmy formę kwadratową:

$$f=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2.$$

Gdy jej pierwiastki są α_1, α_2, to wszystkie jej niezmienniki mają postać:

$$\varphi_e=a_0{}^e(\alpha_1-\alpha_2)^e$$

o e koniecznie parzystem. Dla $e=2$ dostajemy:

$$\varphi_2=4(a_1{}^2-a_0a_2),$$

a to jest wyróżnik formy f. Z tego wynika:

III. *Forma dwójkowa kwadratowa ma jeden tylko niezmiennik. Jest nim jej wyróżnik, a każdy inny niezmiennik o stopniu $e>2$ będzie potęgą wyróżnika.*

151. Źródło (półzmiennik) współzmiennika. Wyprowadzenie współzmiennika z jego źródła. Zastosujmy teraz definicyę i własności półzmiennika do teoryi kowaryantów. Połóżmy:

$$J(x,y,a)=C_0x^\sigma+\sigma_1C_1x^{\sigma-1}y+\sigma_2C_2x^{\sigma-2}y^2+\ldots+C_\sigma y^\sigma$$

$$\sigma_k=\binom{\sigma}{k}$$

i wstawmy J w równanie różniczkowe (A_1) — art. 149. — to kładąc tam $y=0$, $x=1$, a więc $J(1,0,a)=C_0$, dostajemy:

$$a_0\frac{\partial C_0}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_0}{\partial a_2}+\ldots+ma_{m-1}\frac{\partial C_0}{\partial a_m}=DC_0=0.$$

Podobnie, gdy położymy $x=0$, $y=1$, a więc $J(0,1,a)=C_\sigma$, mieć będziemy:

$$a_m\frac{\partial C_\sigma}{\partial a_{m-1}}+2a_{m-1}\frac{\partial C_\sigma}{\partial a_{m-2}}+\ldots=D_1C_\sigma=0.$$

Wiemy przytem, że C_0 przechodzi na C_σ, gdy się każde a_k zmieni na a_{m-k}, że C_0 jest stopnia e, a wagi $\lambda=\frac{me-\sigma}{2}$; C_σ jest stopnia e, a wagi $\lambda+\sigma=\frac{me+\sigma}{2}$. Nie są więc C_0, C_σ niezmiennikami, ale półzmiennikami i to: symetrycznymi (sprzężonymi).

Gdy teraz, nie nadając szczególnych wartości zmiennym x, y, wstawimy $J(x,y,a)$ w równanie (A_1), dostaniemy związek:

$$\begin{aligned}&C_0.x^{\sigma-1}y+\ldots+C_k\sigma_k(\sigma-k)x^{\sigma-k-1}y^{k+1}+\ldots\\&=a_0\left[\frac{\partial C_0}{\partial a_1}x^\sigma+\ldots+\sigma_{k+1}\frac{\partial C_{k+1}}{\partial a_1}x^{\sigma-k-1}y_{k+1}+\ldots\right]\\&+2a_1\left[\frac{\partial C_0}{\partial a_2}x^\sigma+\ldots+\sigma_{k+1}\frac{\partial C_{k+1}}{\partial a_2}x^{\sigma-k-1}y^{k+1}+\ldots\right]\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots=0,\end{aligned}$$

który, będąc identycznym, daje relacye:

$$(k+1)\,C_k = a_0 \frac{\partial C_{k+1}}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_{k+1}}{\partial a_2} + \ldots, \text{ czyli}$$

$$(k+1)\,C_k = DC_{k+1}\,,\ k=\sigma-1,\ \sigma-2, \ldots, 0.$$

a stąd:

$$(a)\qquad \sigma C_{\sigma-1} = DC_\sigma\,,\ \sigma(\sigma-1)\,C_{\sigma-2} = D^2 C_\sigma\,, \ldots, \sigma!\ C_0 = D^\sigma\, C_\sigma.$$

Analogicznie postępując, dostaniemy z równania (B_1) — art. 149. — związki:

$$(b)\qquad C_1 = \frac{D_1 C_0}{\sigma}\,,\ C_2 = \frac{D_1{}^2 C_0}{\sigma(\sigma-1)}\,, \ldots, C_\sigma = \frac{D_1{}^\sigma C_0}{\sigma!}$$

Zapomocą form (a) można obliczyć wszystkie spółczynniki C_k ze spółczynnika ostatniego C_σ; formy (b) służą przeciwnie do wyznaczenia tych spółczynników z pierwszego spółczynnika C_0.

Uwzględniając (b) możemy współzmiennik napisać w postaci:

$$(b_1)\qquad J(x,y,a) = C_0 x^\sigma + \frac{D_1 C_0}{1!} x^{\sigma-1} y + \frac{D_1{}^2 C_0}{2!} x^{\sigma-2} y^2 + \ldots + \frac{D_1{}^\sigma C_0}{\sigma!} y^\sigma.$$

Uwzględniając zaś (a) mieć będziemy:

$$(a_1)\qquad J(x,y,a) = C_\sigma y^\sigma + \frac{DC_\sigma}{1!} y^{\sigma-1} x + \frac{D^2 C_\sigma}{2!} y^{\sigma-2} x^2 + \ldots + \frac{D^\sigma C_\sigma}{\sigma!} x^\sigma.$$

Mamy zatem twierdzenie:

I. *Pierwszy i ostatni spółczynnik w współzmienniku są-to półzmienniki o wagach λ, $\lambda+\sigma$. Z pierwszego dostaje się wszystkie przez powtarzanie operacyi D_1, z ostatniego zaś wszystkie stosując z powtórzeniami operacyę D.*

Z tego powodu nazywają C_0 — lub C_σ — źródłem współzmiennika (podług Robertsa).

Przyjmijmy, że istnieje współzmiennik $J(x,y,a)$ o stopniach e, σ, a o źródle C_0 zawierającem spółczynniki A, A', A'', ... C_0 czyni zatem zadość równaniu różniczkowemu:

$$(1)\qquad D\,C_0 = 0.$$

Porządkując tu podług wyrazów jednomiennych dojdziemy, jak w art. 147. do liniowych jednorodnych równań:

$$(2)\qquad hA + h'A' + \ldots = 0,\quad kA + k'A' + \ldots = 0, \ldots$$

którym A, A', A'', ... zadość muszą uczynić.

W razie gdy przez kilka (n. p. przez trzy) A będzie można pozostałe A wyrazić (liniowo jednorodnie), dostaniemy:

$$(3)\qquad C_0 = AC_0{}' + A'C_0{}'' + A''C_0{}'''$$

a $C_0{}'$, $C_0{}''$, $C_0{}'''$ będą znowu półzmiennikami. Pozostawiając A, A', A'' dowolnemi — co nie narusza półzmienności C_0 — mamy oprócz danego C_0 jeszcze nieskończenie ich wiele, a wszystkie są równaniem (3) określone.

Zauważmy — mając to — funkcyę jednorodną $\overline{C}_0$ ilości $a_0, a_1, \ldots, a_m$ stopnia e, a wagi $\lambda=(me-\sigma)/2$ z nieoznaczonymi spółczynnikami $B, B', B'', \ldots$ Taki kształt funkcyi $\overline{C}_0$ nadaje się, aby być źródłem współzmiennika o stopniach e, σ, a wskaźniku λ, a jeżeli ma być półzmiennikiem, to spełni równanie różniczkowe:

(4) $$D\,\overline{C}_0=0.$$

Z (2) i (4) wynika, że i różnica $\overline{C}_0-C_0$ spełni równanie

$$D(\overline{C}_0-C_0)=0.$$

Z niego dojdziemy do liniowych jednorodnych równań (2) o niewiadomych $B-A$, $B'-A'$,... a z nich wywnioskujemy, że identycznie jest $\overline{C}_0=C_0$, a to znaczy:

II. *Każdy półzmiennik o stopniu* e, *a wadze* $\lambda=\dfrac{me-\sigma}{2}$ *będzie źródłem kowaryantu o stopniach* e, σ *i wskaźniku* λ, *jeżeli tylko taki współzmiennik danej formy* f *istnieć może.*

Obliczywszy $\overline{C}_0=C_0$ będziemy mogli dalej, stosując operacye D_1, $D_1{}^2$,... wyznaczyć żądany współzmiennik w postaci (b_1).

Pd. 1. Wyznaczyć współzmiennik o stopniach $e=2$, $\sigma=6$ formy 5^{go} stopnia. Wskaźnikiem żądanego współzmiennika będzie tu $\lambda=2$; trzeba zatem utworzyć półzmiennik o stopniu i wadze $=2$. Ma on formę $C_0=Aa_0a_2+Ba_1{}^2$, z której dostajemy $DC_0=2a_0a_1(A+B)=0$. Stąd — gdy $A=1$ położymy — wynika $B=-1$, a więc: $C_0=a_0a_2-a_1{}^2$.

$$\frac{D_1C_0}{1!}=3a_0a_3-3a_1a_2=\binom{6}{1}C_1,$$

$$\frac{D_1{}^2C_0}{2!}=3a_0a_4+3a_1a_3-6a_2{}^2=\binom{6}{2}C_2,$$

$$\frac{D_1{}^3C_0}{3!}=a_0a_5+7a_1a_4+8a_2a_3=\binom{6}{3}C_3,$$

Zmieniając dalej każde a_k na a_{m-k}, dostaniemy:

$$C_6=a_3a_5-a_4{}^2,\ \binom{6}{5}C_5=3a_2a_5-3a_3a_4,$$

$$\binom{6}{4}C_4=3a_1a_5+3a_2a_4-6a_3{}^2,$$

przez co już żądany współzmiennik mamy wyznaczony.

Pd. 2. Tym samym sposobem wyznaczyć niezmiennik:

$$C_0x^2+2C_1xy+C_2y^2$$

o stopniu $e=2$ formy kubicznej. [Por. Pd. 2. art. 149].

152. Inna metoda wyprowadzania współzmiennika z danego źródła. Współzmienniki formy kwadratowej dwójkowej. Współzmiennik jako funkcya pierwiastków formy. Dany półzmiennik s t o p n i a e wyrażony już-to przez pierwiastki formy, już-to przez jej spółczynniki, niech ma postać:

(1) $$a_0^e\varphi(\alpha_1, \alpha_2, ...)=g(a_0, a_1, ...).$$

Uważając (1) za źródło C_0, możemy z niego dojść do współzmiennika jeszcze w inny, a mianowicie taki sposób: Z formy:

$$f=a_0x^m+m_1a_1x^{m-1}y+...$$

utwórzmy funkcyę:

(2) $$U_m=a_0z^m+m_1a_1z^{m-1}+...,$$

a z niej — zastępując m po porządku przez $m-1$, $m-2$, ..., 1, 0 — funkcye:

(3) $$\begin{aligned} U_{m-1}&=a_0z^{m-1}+(m-1)_1a_1z^{m-2}+...+a_{m-1}\\ U_{m-2}&=a_0z^{m-2}+(m-2)_1a_1z^{m-3}+...+a_{m-2}\\ &\vdots\\ U_1&=a_0z+a_1\\ U_0&=a_0. \end{aligned}$$

Zmieniając (1) na symetryczny (sprzężony) półzmiennik dostaniemy:

(4) $$a_m^e\varphi\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, ...\right)=g(a_m, a_{m-1}, ..., a_0).$$

Po sprowadzeniu lewej strony do wspólnego mianownika, dostaniemy:

$$a_m^e\frac{\psi(\alpha_1\,\alpha_2...)}{(\alpha_1.\alpha_2...)^e}=g(a_m, a_{m-1}, ...),$$

że zaś $a_m^e=(-1)^{me}a_0^e(\alpha_1\alpha_2...)^e$, więc mieć będziemy:

$$(-1)^{me}a_0^e\psi(\alpha_1\alpha_2...)=g(a_m\,a_{m-1}, ...),$$

gdzie ψ jest już całkowitą funkcyą pierwiastków.

Połóżmy tu za α_k wszędzie α_k-z, to równocześnie każde a_k przejdzie na:

$$a'_k=a_k+k_1a_{k-1}z+k_2a_{k-2}z^2+...=U_k$$

(por. (2), art. 146.; zachodzi tu tylko ta różnica, że w miejsce β mamy tu z) i dostaniemy:

(5) $$\begin{aligned} &(-1)^{me}a_0^e\psi(\alpha_1-z, \alpha_2-z, ...)=g(U_m, U_{m-1}, ... U_0)=\\ &g(a_m\,a_{m-1}...\,a_0)+\frac{D_1g}{1!}z+\frac{D_1^2g}{2!}z^2+...+\frac{D_1^\sigma g}{\sigma!}z^\sigma, \end{aligned}$$

gdyż $g(U_m, U_{m-1}, ...)$ trzeba tu tak rozwijać jak $\varphi(a'_0, a'_1, ...)$ w art. 146. — z tą uwagą, że tu k zastąpiło się przez $m-k$, a to prowadzi do działania D_1, a nie do D.

Sprowadzając (5) do jednorodności, dochodzimy do formy:

(6) $$\frac{D_1^\sigma g}{\sigma!}x^\sigma+\frac{D_1^{\sigma-1}g}{(\sigma-1)!}x^{\sigma-1}y+...+g(a_m\,a_{m-1}...\,a_0)\,y^\sigma,$$

która widocznie jest współzmiennikiem o źródle $C_\sigma=g(a_m, a_{m-1}, ..., a_0)$. Stąd twierdzenie:

I. *Gdy w danym półzmienniku $g(a_0, a_1, ..., a_m)$ zmienimy każde a_k na U_{m-k} i utworzymy $g(U_m, U_{m-1}, ..., U_0)y^\sigma$, to tak otrzymana funkcya jednorodna jest współzmiennikiem formy, jeżeli zawiera x, y, a będzie jej niezmiennikiem, jeżeli zmiennych nie zawiera.*

Zastosujmy to twierdzenie do formy kwadratowej:

$$f = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2.$$

Jej najogólniejszym półzmiennikiem jest:

$a_0^{2p}(\alpha_1 - \alpha_2)^{2p} = (a^2_1 - a_0 a_2)^p = g(a_0 a_1 a_2) = [D(f)]^p$ gdzie $D(f)$ jest wyróżnikiem formy.

Z samej formy f dostaniemy:

$$U_2 = a_0 z^2 + 2a_1 z + a_2, \quad U_1 = a_0 z + a_1, \quad U_0 = a_0,$$

a jej współzmiennikiem będzie:

$$g(U_2 U_1 U_0) = (U_1^2 - U_2 U_0)^p = D^p.$$ Stąd wynika:

III. *Forma kwadratowa f nie posiada żadnego współzmiennika oprócz samej formy f. Każdy jej współzmiennik różny od f jest postaci $[D(f)]^\mu . f$. Jest on stopni: $e = 2\mu + \nu$, $\sigma = 2\nu$. Gdy $\nu = 0$ dostajemy jej niezmienniki.*

Pd. 1. Z półzmiennika:

$$a_0^2[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2] = 18(a_1^2 - a_0 a_2),$$

formy kubicznej utworzyć jej kowaryant podług tw. I,

[Odp. $-(U_2^2 - U_1 U_3) = (a_0 a_2 - a_1^2) z^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) z + (a_1 a_3 - a^2_2)$].

Pd. 2. Okazać, że półzmiennik:

$$a_0^2 \Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 = 24(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)$$

jest już sam niezmiennikiem formy dwukwadratowej.

Z łatwością można także utworzyć funkcyę, która zawierając różnice pierwiastków danej formy f i zmienne x, y będzie współzmiennikiem formy. Dowiedziemy bowiem:

III. *Suma*:

$$\varphi(a_0, ... x, y) = a_0^\varrho \, \Sigma (\alpha_a - \alpha_b)^h (\alpha_c - \alpha_d)^k ... (x - \alpha_1 y)^{\lambda_1} (x - \alpha_2 y)^{\lambda_2} ...,$$

gdzie w każdym dodajniku mamy w s z y s t k i e pierwiastki $\alpha_1, \alpha_2, ..., a$ w każdym z nich każdy pierwiastek znachodzi się ϱ razy — jest współzmiennikiem formy.

Przez podstawienia $x = pu + qv$, $y = p'u + q'v$, z których naodwrót wynika:

(7) $$u = (xq' - yq)/r, \quad v = (-p'x + py)/r$$

przejdzie forma f na F. Ta nowa forma będzie miała wolny wyraz $a_0' = f(pp')$, a pierwiastki:

(8) $$\alpha_r = \frac{q'\alpha_r - q}{p - \alpha_r p'}, \quad r = 1, 2, ..., m.$$

Obliczywszy $(\alpha'_a - \alpha'_b)$ podług art. 143. dostaniemy $\varphi(a_0', ..., u, v) =$

$$f(pp')^\varrho \sum (pq' - p'q)^{h+k+...} \frac{(\alpha_a - \alpha_b)^h}{(p\alpha_a - p')^h (p - \alpha_b p')^h} ... (u - \alpha_1' v)^{\lambda_1} ...$$

Gdy zaś w $(u - \alpha_r' v)$ wstawimy (7) i (8), dostaniemy $(x - \alpha_r y)/(p - a_r p')$. Uwzględniając to mieć będziemy teraz $\varphi(a'_0, ..., u, v) =$

$$f(pp')^{\varrho}\sum(pq'-p'q)^{h+k+\cdots}\frac{(\alpha_a-\alpha_b)^h}{(p-\alpha_a p')^{h+\lambda_a}(p-\alpha_b p')^{h+\lambda_b}}(x-\alpha_1 y)^{\lambda_1}\ldots;$$

że zaś według założenia każdy czynnik $(p-\alpha_a p')$ mamy w mianownikach w potędze ρ, więc ich iloczyn da $f(pp')^{\varrho}/a_0^{\varrho}$ i mieć będziemy:

$$\varphi(a_0', \ldots, u. v)=(pq'-p'q)^{h+k+\cdots}\varphi(a_0, \ldots, x, y),$$

c. b. d. d.

153. Niezmienniki współzmienników. Niezmienniki wspólne. Niech forma $f(a_0 a_1, \ldots, x, y)$ posiada współzmiennik:

(1) $$c_0 x^{\sigma}+\sigma_1 c_1 x^{\sigma-1} y+\ldots=\varphi(c_0, c_1, \ldots, x, y),$$

w którym

(2) $$c_k=g_k(a_0, a_1, \ldots),\ k=0, 1, \ldots, \sigma$$

i niech ten współzmiennik przerobiony podstawieniami:

(3) $$x=pu+qv,\ y=p'u+q'v$$

przechodzi na:

$$c_0' u^{\sigma}+\sigma_1 c_1' u^{\sigma-1} v+\ldots=\varphi(c_0', c_1', \ldots, u, v).$$

Gdy przerobioną formą jest $f(a_0' a_1', \ldots, u, v)$*), a utworzymy funkcye:

(4) $$C_k=g_k(a_0', a_1', \ldots),\quad k=0, 1, \ldots, \sigma,$$

to $\varphi(C_0, C_1, \ldots, u, v)$ będzie jej współzmiennikiem związanym z (1) relacyą:

$$\varphi(C_0, C_1, \ldots, u, v)=r^{\mu}\varphi(c_0, c_1, \ldots, x, y).$$

Połóżmy tu po prawej stronie za x, y wyrażenia liniowe (3), to dostaniemy:

$$\varphi(C_0, C_1, \ldots, u, v)=r^{\mu}\varphi(c_0', c_1', \ldots, u, v).$$

Z tego okazuje się, że:

(5) $$C_k=r^{\mu} c_k',\quad k=0, 1, \ldots, \sigma.$$

Zauważmy teraz dowolny niezmiennik $J(c_0, c_1 \ldots)$ formy (współzmiennika) φ prowadzący do:

(6) $$J(c_0', c_1' \ldots)=r^{\lambda} J(c_0, c_1 \ldots),$$

a oprócz tego utworzymy $J(C_0, C_1, \ldots)$.

Wskutek (5) możemy położyć:

$$J(C_0, C_1, \ldots)=r^{\mu\nu} J(c_0' c_1' \ldots),$$

jeżeli J jest stopnia ν w $C_0, C_1, \ldots$, a uwzględniając (6) dostaniemy:

$$J(C_0, C_1 \ldots)=r^{\lambda+\mu\nu} J(c_0, c_1, \ldots).$$

---

*) Naznaczaliśmy dotąd przez $f(x, y)$, $F(u, v)$ formę daną i przerobioną. Gdy jednak formą daną, uwzględniając zawarte w niej spółczynniki $a_0, a_1, \ldots$ piszemy w formie $f(a_0, a_1, \ldots, x, y)$, to przerobioną formę — gdy jej spółczynnikami mają być $a_0', a_1', \ldots$ — nazwać trzeba $f(a_1', a_1', \ldots, u, v)$.

Wstawiając tu za c_k, C_k wyrażenia (2), (4) otrzymamy ostatecznie $J_1(a_0', a_1' \ldots) = r^{\lambda+\mu\nu} J_1(a_0, a_1 \ldots)$, a to znaczy:

I. *Dowolny niezmiennik każdego współzmiennika formy jest niezmiennikiem formy.*

Analogicznie można dowieść twierdzenia:

II. *Współzmiennik współzmiennika jest znowu współzmiennikiem formy.*

Przyjmijmy, że mamy dwa współzmienniki, charakteryzujące się równaniami:

$$\Phi(u, v) = r^{\lambda}\varphi(x, y), \quad \Psi(u, v) = r^{\mu}\psi(x, y).$$

Z tych równań — uwzględniając związki $x = pu + qv$, $y = p'u + q'v$, dostajemy:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = r^{\lambda}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} p + \frac{\partial \varphi}{\partial y} p'\right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = r^{\mu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} p + \frac{\partial \psi}{\partial x} p'\right),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = r^{\lambda}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} q + \frac{\partial \varphi}{\partial y} q'\right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = r^{\mu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} q + \frac{\partial \psi}{\partial y} q'\right),$$

a stąd wynika:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial u}, & \dfrac{\partial \Psi}{\partial v} \end{vmatrix} = r^{\lambda+\mu} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x}, & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

To znaczy:

III. *Z dwóch znanych współzmienników φ, ψ danej formy utworzony jakobian $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$ jest znowu współzmiennikiem formy. (Jednym ze wzpółzmienników φ, ψ może być sama forma f).*

Aby wreszcie jeszcze i o wspólnych współzmiennikach dwóch dowolnych form φ, ψ wspomnieć, zauważmy przedewszystkiem, że już w art. 142. określiliśmy jakobian $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$ jako taki współzmiennik. Lecz weźmy teraz dwie formy:

$$\varphi(a_0, a_1, \ldots, x, y), \quad \psi(b_0, b_1, \ldots, x, y)$$

jednakowego stopnia m pod uwagę.

Gdy $J(a_0, a_1, \ldots, x, y)$ jest współzmiennikiem formy φ, a utworzymy formę $\varphi + k\psi$ gdzie k jest dowolnym parametrem, to

$$J(a_0 + kb_0, \; a_1 + kb_1, \ldots, x, y)$$

jest oczywiście współzmiennikiem dla $\varphi + k\psi$. W jego rozwinięciu

$$J(a_0, a_1 \dots x, y) + \frac{k}{1!}\left(b_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots\right) J + \dots$$

będzie każdy ze spółczynników:

$$\left(b_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots\right)^k J(a_0, a_1 \dots x, y)$$

również współzmiennikiem formy $\varphi + k\psi$, a nie zawierając dowolnego parametru k będzie wspólnym współzmiennikiem form φ, ψ.

154. Niezmienniki i współzmienniki danej formy dwójkowej niezależne od siebie algebraicznie. Określenie systemu podstawowych form niezmienniczych. Forma f, m^{go} stopnia posiada $(m+1)$ spółczynników $a_0, a_1, \dots, a_m$, a gdy ją przez podstawienie $x = pu + qv$, $y = p'u + q'v$, w którem $r = (pq' - p'q) \neq 0$, przerobimy na formę F o spółczynnikach $a_0', a_1', \dots, a_m'$ dostaniemy $(m+1)$ związków:

(1) $$a_0' = \psi_0(a_0, \dots, p, q, p', q'), \dots, a_m' = \psi_m(a_0, \dots, p, q, p', q').$$

W razie $m > 3$ mamy zawsze $m+1 > 4$, a z równań (1) dostaniemy $(m+1) - 4 = m - 3$ relacyj:

(2) $$G_\alpha(a_0, \dots, a_m, a_0', \dots, a'_m) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, m-3,$$

które nie zawierają już p, q, p', q', a są od siebie (w najogólniejszym wypadku) niezależne.

Przyjmijmy, że forma f posiada n i e s k o ń c z e n i e d u ż o od siebie n i e z a l e ż n y c h niezmienników (nie dających się w kilka związać równaniami algebraicznemi). W nich uwzględnijmy 2, a mianowicie:

(3) $$J_1' = r^{\lambda_1} J_1, \quad J_2' = r^{\lambda_2} J_2,$$

— (J_1', J_2' położono zamiast $J_1(u, v, a')$, $J_2(u, v, a')$) —

Eliminując tu r dostaniemy związek:

(4) $$J_1'^{\lambda_2} J_2^{\lambda_1} - J_2'^{\lambda_1} J_1^{\lambda_2} = 0,$$

a ten musi być identycznym z jednem z równań (2).

Takich relacyj (4) niezależnych od siebie nie podobna dostać więcej, niż $(m-3)$. Gdyby ich bowiem było w istocie więcej, niż $(m-3)$, to i związków (2) od siebie niezależnych moglibyśmy mieć więcej, niż $(m-3)$, a to jest niemożliwe. Niezależnych związków (4) w liczbie $(m-3)$ można dostać z $(m-2)$ równań $J_1' = r^{\lambda_1} J_1, \dots$ od siebie niezależnych, a stąd wynika:

I. *Forma dwójkowa stopnia m nie posiada niezmienników niezależnych od siebie nieskończenie dużo; jest ich najwyżej* $(m-2)$.

Dla formy kubicznej mamy $m - 3 = 0$. Nie ma więc tu ani jednej relacyi (2) zawierającej tylko $a_0, \dots, a'_0, \dots$, a wskutek tego taka forma nie może posiadać dwóch niezmienników od siebie niezależnych. Jej jedynym niezmiennikiem jest niezmiennik $J(a)$ podany w Pd. 1. art. 147., a wszelkie inne — wyższych stopni będą jego potęgami całkowitemi.

Niech w relacyach:

(5) $$J'_k = r^{\lambda_k} J_k, \quad k=1, 2, \dots$$

przedstawia J_k już-to samą formą f — [równanie $F(u, v) = f(x, y)$ wskazuje, że $f(x, y)$ uważać trzeba za współzmiennik o wskaźniku $\lambda=0$, o stopniach $e=1$, $\sigma=m$] — już-to niezmiennik, już-to wreszcie współzmiennik formy.

Każde równanie (5) jest jednorodne w u, v, x, y; dzieląc je przez v^{σ_k}, gdzie σ_k jest stopniem formy J_k w zmiennych x, y, dostaniemy z (5) szereg równań o 4 niewiadomych:

(6) $$\frac{x}{v}, \ \frac{y}{v}, \ \frac{u}{v}, \ r,$$

aby zaś z tych równań dotrzeć do $(m-3)$, a nie więcej związków (2) trzeba, aby tych od siebie niezależnych równań nie było więcej, niż $(m+1)$. Z tego wnosimy:

II. *Każda forma f ma niezależnych od siebie współzmienników i niezmienników zawsze skończoną tylko liczbę. Górną granicą tej liczby jest* $(m+1)$.

W dziełach zajmujących się szczegółowo teoryą form, [por. zapiski literatury przy końcu tego rozdziału], znajdują się badania prowadzone dalej w takich kierunkach:

1^0) Bierze się pod uwagę wszystkie niezmienniki tego samego stopnia e danej formy dwójkowej i poszukuje się, ile między tymi niezmiennikami znajduje się liniowo od siebie niezależnych*);

2^0) To samo pytanie stosuje się do wszystkich współzmienników tej samej formy, a tych samych stopni: e, σ.

3^0) Podaje się najrozmaitsze sposoby zapomocą których można dla danej formy utworzyć rozmaite niezmienniki i współzmienniki.

4^0. Podaje się sposoby, zapomocą których można dostać różne niezmienniki i współzmienniki kilku danych form.

5^0) Porusza się wreszcie jeszcze jedno bardzo ważne pytanie: Oto, gdy mamy pewną ilość niezmienników J_1, J_2 ... i współzmienników $K_1, K_2, \dots$ danej formy f, to iloczyn $[J_1^{\alpha_1} J_2^{\alpha_2} \dots K_1^{\beta_1} K_2^{\beta_2} \dots]$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ są dodatniemi i całkowitemi liczbami, jest niezawodnie także niezmiennikiem lub współzmiennikiem formy. Pytanie zatem zachodzi, czy możliwem będzie dla danej formy wyznaczyć pewne niezmienniki J_1, J_2, ..., i współzmienniki

*) spełniających równanie $C_1 J_1 + C_2 J_2 + \dots = 0$ tylko wtedy, gdy $C_1 = C_2 = \dots = 0$.

K_1, K_2,... w skończonej ilości, a o tej własności, że każdy nowy niezmiennik lub współzmiennik tej samej formy da się wyrazić całkowitą, wymierną funkcyą $G(J_1, J_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots)$. Takie niezmienniki i współzmienniki nazywają się podstawowemi formami (niezmienniczemi) albo pierwotnymi niezmiennikami i współzmiennikami. Tych podstawowych form trzeba oczywiście szukać między niezmiennikami i współzmiennikami najmniejszych stopni.

Badanie poruszonych tu pytań wypełniające teoryę form nie leży w zakresie tej książki. Ale pytaniem 5tem — odnosząc je wyłącznie do form kubicznych i dwukwadratowych — zajmiemy się w dwóch najbliższych artykułach.

155. System form podstawowych kubicznej formy dwójkowej.

Dla formy kubicznej:

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$$

możemy z łatwością takie formy utworzyć.

I⁰. Współzmiennik Hessego (z opuszczeniem czynnika 36):

$$H = \begin{vmatrix} a_0x + a_1y, & a_1x + a_2y \\ a_1x + a_2y, & a_2x + a_3y \end{vmatrix} =$$

$$= (a_0a_2 - a_1{}^2)\,x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)\,xy + (a_1a_3 - a_2{}^2)\,y^2,$$

$$[e=2,\ \sigma=2,\ \lambda=2].$$

Jego źródłem C_0 jest $(a_0, a_2 - a_1{}^2)$ o wadze $=2$.

II⁰. Wyróżnik (ze znakiem odjemnym) współzmiennika H [art. 153., tw. I.].

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 2(a_0a_2 - a_1{}^2), & (a_0a_3 - a_1a_2) \\ (a_0a_3 - a_1a_2), & 2(a_1a_3 - a_2{}^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_0a_3 - a_1a_2)^2 - 4(a_0a_2 - a_1{}^2)(a_1a_3 - a_2{}^2),$$

$$[e=4,\ \lambda=6].$$

Jest on wyróżnikiem samej formy, a przez jej pierwiastki α_1, α_2, α_3 wyraża się w postaci:

$$a_0{}^6(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2 = -27\,\Delta . a_0{}^2.$$

III⁰. Jakobian form f, H — art. 153., tw. III. — z opuszczeniem czynnika 3 —:

$$G = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3a_0x^2 + 6a_1xy + 3a_2y^2, & 3a_1x^2 + 6a_2xy + 3a_3y^2 \\ 2(a_0a_2 - a_1{}^2)x + (a_0a_3 - a_1a_2)y, & (a_0a_3 - a_1a_2)x + 2(a_1a_3 - a_2{}^2)y \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &(a_0{}^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1{}^3)\,x^3 + \\ = 3\,&(a_0a_1a_3 - 2a_0a_2{}^2 + a_1{}^2a_2)\,x^2y - 3\,(a_0a_2a_3 - 2a_1{}^2a_3 + a_1a_2{}^2)\,xy^2 \\ &- (a_0a_3{}^2 - 3a_1a_2a_3 + 2a_2{}^3)\,y^3, \end{aligned}$$

$$[e=3,\ \sigma=3,\ \lambda=3].$$

Jego źródłem C_0 jest $(a_0{}^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1{}^3)$ o wadze $=3$.

IV⁰. Do tych form niezmienniczych dołącza się jeszcze sama forma f.

Z formy f przejdźmy do równania:

(1) $$U_3=a_0z^3+3a_1z^2+3a_2z+a_3=0$$

i połóżmy w niem: $z=\zeta-\frac{a_1}{a_0}$, to otrzymamy równanie:

$$V_3=\zeta^3+3.\frac{a_0a_2-a_1{}^2}{a_0{}^2}\zeta+\frac{a_0{}^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1{}^3}{a_0{}^3}=0,$$

którego pierwiastki są:

(2) $$\alpha_1+\frac{a_1}{a_0},\ \alpha_2+\frac{a_1}{a_0},\ \alpha_3+\frac{a_1}{a_0}.$$

Kładąc:

$$a_0a_2-a_1{}^2=h(a_0, a_1, a_2, a_3)$$
$$a_0{}^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1{}^3=g(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

mamy

$$V_3=\zeta^3+\frac{3h}{a_0{}^2}\zeta+\frac{g}{a_0{}^3}=0,$$

gdzie h, g są źródłami $[C_0]$ współzmienników H, G.

W wyróżniku:

$$\Delta=a_0{}^4\left[\left(\frac{a_3}{a_0}-\frac{a_1}{a_0}.\frac{a_2}{a_0}\right)^2-4\left(\frac{a_2}{a_0}-\frac{a_1{}^2}{a_0{}^2}\right)\left(\frac{a_1}{a_0}.\frac{a_3}{a_0}-\frac{a_2{}^2}{a_0{}^2}\right)\right]$$

można $\frac{a_1}{a_0}$ zastąpić przez zero, $\frac{a_2}{a_0}$ przez $\frac{h}{a_0{}^2}$, a $\frac{a_3}{a_0}$ przez $\frac{g}{a_0{}^3}$, gdyż w Δ wyrażonem przez różnice pierwiastków można za α_1, α_2, α_3, wstawić pierwiastki (2) równania $V_3=0$.

Po takiej przemianie dostaniemy:

(3) $$a_0{}^2\Delta=g^2+4h^3,$$

a ten związek, jak się to zaraz okaże, będzie bardzo ważny w swoich następstwach. Uważajmy:

$$a_0{}^6(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2=-27\Delta.a_0{}^2$$

za źródło pewnego współzmiennika, który mamy utworzyć według sposobu podanego w tw. I. art. 152. W takim razie mamy to źródło przedewszystkiem przerobić na:

$$a_3{}^6\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_3}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha_3}-\frac{1}{\alpha_1}\right)^2=$$
$$=-27\left[\overline{g(a_3, a_2, a_1, a_0)}^2+4\,\overline{h(a_3, a_2, a_1, a_0)}^3\right]$$

Gdy tu lewą stronę sprowadzimy do wspólnego mianownika i uwzględnimy, że:

$$\frac{a_3^{\,6}}{(a_1 a_2 a_3)^4} = \frac{a_3^{\,6} a_1^{\,2} a_2^{\,2} a_3^{\,2}}{(a_1 a_2 a_3)^6} = a_0^{\,6}.\, a_1^{\,2}.\, a_2^{\,2}.\, a_3^{\,2},$$

dostaniemy:

$$a_0^{\,6}(a_1 - a_2)^2 (a_2 - a_3)^2 (a_3 - a_1)^2 .\, a_1^{\,2}.\, a_2^{\,2}.\, a_3^{\,2} =$$
$$= -27\left[\overline{g(a_3 a_2 a_1 a_0)}^{\,2} + 4\overline{h(a_3, a_2, a_1, a_0)}^{\,3}\right].$$

W tym związku trzeba dalej za a_1, a_2, a_3 położyć odpowiednio $a_1 - z$, $a_2 - z$, $a_3 - z$. Wtedy po lewej stronie dostaniemy tu iloczyn czynników:

$$a_0^{\,4}(a_1 - a_2)^2 (a_2 - a_3)^2 (a_3 - a_1)^2 = -27\Delta$$
$$a_0^{\,2}(z - a_1)^2 (z - a_2)^2 (z - a_3)^2 = U_3^{\,2};$$

po prawej stronie trzeba $g(a_3, ..., a_0)$, $h(a_3, ..., a_0)$ zamienić na:

$$g(U_3, U_2, U_1, U_0) = G_z,\ h(U_3, U_2, U_1, U_0) = H_z,$$

gdzie:

$$G_z = \frac{G}{y^3},\quad H_z = \frac{H}{y^2},\quad z = \frac{x}{y}.$$

Mieć więc będziemy:

$$\Delta . U_3^{\,2} = G_z^{\,2} + 4H_z^{\,3},$$

a gdy ten związek do jednorodności sprowadzimy, dostaniemy ostatecznie:

(4) $$\Delta . f^2 = G^2 + 4H^3.$$

Taki identyczny związek zachodzi tu między formami Δ, f, G, H.

Mając to, zauważmy dowolną symetryczną funkcyę $\varphi(a_1, a_2, a_3)$ s a m y c h r ó ż n i c pierwiastków a_1, a_2, a_3.

Te pierwiastki można — bez naruszenia jej — zastąpić przez (2), a wskutek tego będzie można φ wyrazić przez spółczynniki równania $V_3 = 0$.

Niechże:

(5) $$\varphi(a_1\, a_2\, a_3) = F_1\left(1, \frac{h}{a_0^{\,2}}, \frac{g}{a_0^{\,3}}\right),$$

gdzie F_1 jest wymierną całkowitą funkcyą. Gdy ta funkcya F_1 będzie w argumentach swoich: $\frac{h}{a_0^{\,2}}$, $\frac{g}{a_0^{\,3}}$ stopnia ε, to mnożąc obie strony w (5) przez $a_0^{\,3\varepsilon}$ dostaniemy:

(6) $$a_0^{\,3\varepsilon}.\, \varphi(a_1, a_2, a_3) = F(a_0, h, g),$$

gdzie znowu F jest całkowitą i wymierną funkcyą argumentów a_0, h, g.

Przyjmijmy teraz, że w (6) mamy p ó ł z m i e n n i k f o r m y. W takim razie F jest już jednorodną i izobaryczną funkcyą w argumentach a_0, a_1, a_2, a_3, a jej waga w wskazuje, że φ jest w pierwiastkach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ stopnia w, [art. 89.].

Ponieważ h jest wagi 2, a g jest wagi 3, więc w przypadku, kiedy F ma wagę parzystą, mogą się w F zawierać tylko same parzyste potęgi źródła g. W tym razie połóżmy za każde g^2 wyrażenie $a_0{}^2\varDelta - 4h^3$ wynikające z (3), a dostaniemy:

$$(A) \qquad a_0{}^{3\varepsilon}\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = F_0(a_0, \varDelta, h),$$

gdzie F_0 jest znowu funkcyą całkowitą.

Gdy przeciwnie przyjmiemy, że funkcya F jest wagi nieparzystej, to nie ma w niej ani jednego wyrazu bez g, a każdy z nich musi w sobie zawierać czynnik $g^{2\nu+1}$. Wyłączając g, a g^2 wyrażając znowu przez $\varDelta$ i h dostaniemy tu:

$$(B) \qquad a_0{}^{3\varepsilon}\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = g.F_0{}'(a_0, \varDelta, h),$$

a to znaczy:

I. *Każdy półzmiennik formy kubicznej wyraża się wymiernie całkowicie przez a_0, $\varDelta$, h bez czynnika g, lub z tym czynnikiem, według tego, czy jest stopnia parzystego lub nieparzystego w pierwiastkach formy.*

Uważając (A) za dane źródło, dostajemy z niego półzmiennik $F_0(f, \varDelta, H)$, ze źródła zaś (B) mieć będziemy $G.F_0{}'(f, \varDelta, H)$. Każdy więc współzmiennik formy jest całkowitą wymierną funkcyą trzech form f, $\varDelta$, H z czynnikiem G lub bez niego, a stąd wynika:

II. *Forma kubiczna ma 4 podstawowe formy niezmiennicze: I) jej wyróżnik $\varDelta$; II) samą formą f; III) jej hessean H; IV) jakobian G funkcyj f, H.*

Te formy nie są od siebie niezależne, bo między niemi zachodzi identyczna relacya $\varDelta . f^2 = G^2 + 4H^3$.

156. System form podstawowych dwukwadratowej formy dwójkowej. Zajmijmy się teraz formą dwukwadratową:

$$f = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4.$$

Posiada ona niezmienniki:

I⁰. $\quad J_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2{}^2$ [art. 147. Pd. 2].

[$e=2$, a $\lambda=4$ jest tu zarazem wagą].

II⁰. $\quad J_3 = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2{}^3 - a_0a_3{}^2 - a_1{}^2a_4$ [art. 147. Pd. 2].

[$e=3$, $\lambda=6$ jest tu znowu wagą].

Z jej współzmienników utwórzmy:

III⁰. jej hessean (z opuszczeniem czynnika 12^2)

$$H = \frac{1}{12^2}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2)(a_2x^2+2a_1xy+a_0y^2) -$$
$$-(a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2)^2=$$
$$=(a_0a_2-a_1{}^2)x^4+2(a_0a_3-a_1a_2)x^3y+$$
$$+(a_0a_4+2a_1a_3-3a_2{}^2)x^2y^2+2(a_1a_4-a_2a_3)xy^3+$$
$$+(a_2a_4-a_3{}^2)y^4.$$
$$[e=2,\ \sigma=4,\ \lambda=2].$$

Jego źródłem C_0 jest $h=a_0a_2-a_1{}^2$ o wadze $=2$.

IV^0. Dalej utwórzmy jakobian funkcyj f, H — art. 153., tw. III. — z opuszczeniem czynnika 8):

$$G=\frac{1}{8}(f_1H_2-f_2H_1)=$$
$$=(a_0{}^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1{}^3)x^6+(a_0{}^2a_4+2a_0a_1a_3-9a_0a_2{}^2+6a_1{}^2a_2)x^5y$$
$$+(5a_0a_1a_4-15a_0a_2a_3+10a_1{}^2a_3)x^4y^2-10(a_0a_3{}^2-a_1{}^2a_4)x^3y^3-$$

....

$$[e=3,\ \sigma=6,\ \lambda=3].$$

Jego źródłem C_0 jest $g=a_0{}^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1{}^3$ i ma wagę $=3$.

V^0. Do tych form dołączyć trzeba jeszcze i samą formę f.

Dowód, że dane tu formy I—V. są podstawowemi poprowadzimy podobnie jak dla formy kubicznej.

Z samej formy f przejdziemy więc przedewszystkiem do równania:

$$U_4=a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4=0,$$

nazywając jego pierwiastki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Połóżmy $z=\zeta-\frac{a_1}{a_0}$, to dostaniemy równanie:

$$V_4=\zeta^4+\frac{6h}{a_0{}^2}\zeta^2+\frac{4g}{a_0{}^3}\zeta+\frac{a_0{}^2J_2-3h^2}{a_0{}^4}=0.$$

Zauważmy niezmiennik:

$$J_3=a_0{}^3\left[\frac{a_2}{a_0}\frac{a_4}{a_0}+2\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0}\frac{a_3}{a_0}-\frac{a_2{}^3}{a_0{}^3}-\frac{a_3{}^2}{a_0{}^2}-\frac{a_1{}^2}{a_0{}^2}\frac{a_4}{a_0}\right].$$

Ponieważ on jest symetryczną funkcyą pierwiastków, zawierającą s a m e t y l k o różnice pierwiastków [art. 150.], więc się nie zmieni, gdy w nim za $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}, \frac{a_4}{a_0}$ położymy po porządku odpowiednie spółczynniki równania $V_4=0$, t. j.

$$0,\ \frac{6h}{a_0{}^2},\ \frac{4g}{a_0{}^3},\ \frac{a_0{}^2J_2-3h^2}{a_0{}^4}.$$

Dostaniemy zatem:

(1) $$a_0{}^3J_3=a_0{}^2h.J_2-4h^3-g^2,\quad \text{albo}$$

(2) $$g^2+4h^3=a_0{}^2(hJ_2-a_0J_3).$$

Zauważmy teraz dowolną symetryczną funkcyę $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ zawierającą same tylko różnice pierwiastków. Będzie ją można wyrazić przez spółczynniki równania $V_4=0$, tak, że dostaniemy:

$$\varphi = F_1\left(1, \frac{h}{a_0^{\,2}}, \frac{g}{a_0^{\,3}}, \frac{a_0^{\,2}J_2 - 3h^2}{a_0^{\,4}}\right).$$

Gdy F_1 (wymierna całkowita funkcya) jest w swych argumentach: $\frac{h}{a_0^{\,2}}, \ldots$ wymiaru ε, to mieć będziemy dalej:

$$a_0^{\,4\varepsilon}\varphi = F(a_0, h, g, J_2).$$

Przyjmijmy, że φ jest dowolnym półzmiennikiem formy. W takim razie F jest jednorodną funkcyą w $a_0, a_1, \ldots$ i jest izobaryczną w tych samych spółczynnikach $a_0, a_1, \ldots$, a jej waga w jest stopniem półzmiennika w pierwiastkach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Gdy jej waga ma być parzysta, to — z uwagi, że h, J_2 są parzystych wag, a g posiada wagę nieparzystą $=3$ — zawierać się będzie w F źródło g tylko w parzystych potęgach. Korzystając w tym razie ze związku (2) dostaniemy:

(*A*) $$a_0^{\,4\varepsilon}\varphi = F_0(a_0, h, J_2, J_3).$$

Gdy przeciwnie waga funkcyi F będzie nieparzystą, to w F nie znajdziemy ani jednego wyrazu bez g, a we wszystkich wyrazach zawierać się będzie g z wykładnikiem nieparzystym. Wyłączmyż g, a pozostałe $g^2, g^4, \ldots$ wyraźmy przez h, J_2, J_3 za pomocą związku (2), to dostaniemy:

(*B*) $$a_0^{\,4\varepsilon}\varphi = g\,.\,F_0'(a_0, h, J_2, J_3).$$

Stąd widzimy:

I. *Każdy dowolny półzmiennik formy dwukwadratowej wyraża się wymiernie całkowicie przez a_0, h, J_2, J_3 z czynnikiem g, lub bez niego, według tego czy półzmiennik był nieparzystego lub parzystego stopnia w pierwiastkach formy.*

Gdy taki półzmiennik ma być źródłem pewnego kowaryantu, który utworzymy podług tw. I., — art. 152. — to dostaniemy ten współzmiennik albo w postaci:

$$F_0(f, H, J_2, J_3),$$

albo w postaci:

$$G\,.\,F_0'(f, H, J_2, J_3).$$

To dowodzi, że formy J_2, J_3, f, H, G są podstawowemi dla f i mamy twierdzenie:

II. *Forma dwukwadratowa posiada 5 niezmienniczych form podstawowych, a mianowicie: I) niezmiennik J_2, II) niezmiennik J_3, III) samą formę f, IV) h e s s e a n H formy, V) jakobian funkcyj f, H.*

Te formy i tu od siebie nie są niezależne. Uważajmy bowiem (2) *za źródło kowaryantu, który mamy utworzyć, to dostaniemy identyczną relacyę:*

$$G^2+4H^3=f^2(HJ_2-fJ_3)\text{*)} \tag{3}$$

---

*) Literatura tego Rozdziału:

Faà de Bruno (tłóm. na niem. przez T. Waltera). *Einleitung in die Theorie der binären Formen.* (Lipsk 1881).

W. S. Burnside and W. Panton. *The Theory of equations* [3. ed. 1892].

Alf. Clebsch. *Theorie d. binären algebr. Formen.* (Lipsk 1872).

P. Gordan. *Vorlesungen über Invariantentheorie bearb. v. Dr. Kerschensteiner* T. II. (Lipsk 1887).

Aronhold. *Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie.* Crelle J. T. 62. str. 281—245.

D. Hilbert. *Über die vollen Invariantensysteme. Math. Annalen.* T. 42. (1893) str. 313—373.

A. Cayley. Sześć rozpraw o formach *[upon quantics]*. Dzieła. T. II. str. 221, 250, 310, 513. 527, 561.

G. Salmon. *Vorlesungen über d. Algebra der linearen Transformationen* [przeł. na niem. W. Fiedler]. Lipsk 1887.

Por. wreszcie: F. Meyer (przeł. na polskie S. Dickstein). O stanie obecnym teoryi niezmienników [Warszawa 1896].

Zastosowania teoryi do geometryi analitycznej znajdują się w dziełach:

Vorlesungen ü. Geometrie von Alf. Clebsch bearb. von F. Lindemann. (Lipsk 1876).

Grundlagen für die geom. Anwendung der Invariantentheorie von P. Muth [Lipsk 1895]. *Vorlesungen aus der analyt. Geometrie der Kegelschnitte von S. Gundelfinger herausgeg. von Fr. Dingeldey.* (Lipsk 1895).

CZĘŚĆ V.

O SZEREGACH POTĘGOWYCH.

ROZDZIAŁ XII.

O szeregach potęgowych; o ich zbieżności.

157. Określenia. Zakres zbieżności szeregu $\mathfrak{P}(x)$. Jako formalne uogólnienie funkcyi całkowitej wymiernej $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ mamy kształt:

$$(1) \qquad a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots \textit{ in inft.} =\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda \text{ *)}$$

który szeregiem potęgowym jednej (urojonej) zmiennej x nazywamy, a który krótko przez $\mathfrak{P}(x)$ znaczymy; spółczynniki $a_0, a_1, \ldots$ są stałe.

W badaniu szeregu potęgowego $\mathfrak{P}(x)$ pierwszem będzie zadaniem wyznaczyć wartości x, dla których ten szereg jest absolutnie, a więc i bezwarunkowo zbieżnym. Takie wartości zadość mają uczynić warunkowi, aby suma $\Sigma|a_\lambda x^\lambda|$ było zbieżną, a pod tym względem zauważyć przedewszystkiem trzeba: każdy szereg jest zbieżny dla $x=0$, gdyż dla tej wartości redukuje się on do skończonej wartości a_0. Jeżeli jednak taki szereg jedynie tylko dla $x=0$ jest zbieżnym, a dla $x\neq 0$ jest już rozbieżnym, to go nazywamy rozbieżnym.

Szereg n. p. $\quad \mathfrak{P}(x)=1+x+2!\,x^2+3!\,x^3+\ldots$
daje $\mathfrak{P}(0)=1$, a że z szeregu:

$$1+|x|+|2!\,x^2|+|3!\,x^3|+\ldots=u_0+u_1+u_2+\ldots \text{ mamy: }$$

$$\lim_{n=\infty} (u_{n+1}/u_n)=(n+1)\,|x|_{n=\infty}=\infty$$

*) Co do historycznego rozwoju teoryi szeregów por. R. Reiff. *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tybinga 1889).

przy wszelkich skończonych $|x|$ różnych od zera, więc szereg dany jest rozbieżny.

Przyjmijmy przeciwnie, że istnieje pewna skończona wartość $|x|=\xi>0$ dająca zbieżność szeregu $|a_0|+|a_1|\xi+\ldots$ Szereg (1) jest wtedy widocznie absolutnie zbieżny na wszystkich punktach okręgu koła (ξ) o środku $x=0$, a o promieniu $|x|=\xi$. Lecz jeżeli ξ_0 jest dowolną dodatnią liczbą $<\xi$ — lub jest zerem — to i szereg

$$|a_0|+|a_1|\xi_0+\ldots$$

jest także zbieżnym wskutek $|a_\lambda|\xi_0{}^\lambda<|a_\lambda|\xi^\lambda$, $\lambda=1, 2, 3,\ldots$, a stąd wynika, że szereg (1) jest absolutnie zbieżny także i we wszystkich punktach x wewnątrz koła (ξ). To znaczy:

I. *Gdy szereg $\mathfrak{P}(x)$ jest zbieżny na wszystkich punktach obwodu koła (ξ), [$|x|=\xi$], to jest temsamem zbieżny i wewnątrz tego koła*).*

Mając to, zapytać dalej trzeba, aż do jakiej granicy zwiększać można promień ξ z zachowaniem tej własności koła (ξ), że w jego wnętrzu szereg $\mathfrak{P}(x)$ pozostaje zbieżnym? Na to odpowiemy w ten sposób:

I⁰. Gdy szereg $\mathfrak{P}(x)$ jest dla wszelkich skończonych x zbieżny, to widocznie promień ξ można dowolnie zwiększyć aż do nieskończoności. Szereg taki jest zbieżnym na całej, nieograniczonej płaszczyźnie argumentu x — dla wszelkich skończonych jego wartości — i nazywa się bezustannie zbieżnym. Analiza daje liczne przykłady takich szeregów. Tak n. p. szereg:

$$\varepsilon(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \tag{2}$$

jest bezustannie zbieżnym, bo dla wszelkich skończonych, choć dowolnie dużych $|x|$ daje suma:

$$1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\frac{|x|^3}{3!}+\ldots$$

$$\lim_{n=\infty}(u_{n+1}/u_n)=\lim_{n=\infty}[|x|/(n+1)]=0.$$

Podobnie szeregi:

$$(3)\ K(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \qquad (4)\ S(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

są również bezustannie zbieżnymi, o czem analogicznie przekonać się można.

---

*) W dalszym ciągu mówić będziemy krótko „szereg zbieżny“ zamiast „szereg absolutnie zbieżny“.

II⁰. Gdy $\mathfrak{P}(x)$ jest takim szeregiem, że dla pewnych $|x|=\xi>0$ jest suma $\Sigma|a_\lambda x^\lambda|$ zbieżną, a dla pewnych $|x|=\xi_1>\xi$ okazuje się ta suma rozbieżną, to granicę $|x|=r$, odgraniczającą wartości ξ od wartości ξ_1, możemy znaleźć, dowodząc takiego twierdzenia:

II. *Gdy dla $|x|=\xi$ wszystkie dodajniki $|a_\lambda|\xi^\lambda$ są skończone, a więc posiadają pewną skończoną granicę g [art. 46.], to szereg $\mathfrak{P}(x)$ dla wszelkich x o bezwzględnej wartości $|x|=\xi_0<\xi$ jest zbieżny.*

Z założenia mamy:

$$|a_\lambda|\xi^\lambda \leqq g, \text{ czyli } |a_\lambda|\xi^\lambda.\frac{\xi_0{}^\lambda}{\xi_0{}^\lambda}\leqq g, \text{ albo}$$

$$(5)\qquad |a_\lambda|\xi_0{}^\lambda \leqq g\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\lambda, \text{ gdzie } 0<\frac{\xi_0}{\xi}<1.$$

Sumując obie strony od $\lambda=0$, aż do ∞, dostajemy nierówność:

$$(6)\qquad \Sigma|a_\lambda|\xi_0{}^\lambda \leqq g\sum\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\lambda = g\,.\,\frac{1}{1-\frac{\xi_0}{\xi}}.$$

Z niej wynika skończoność sumy $\Sigma|a_\lambda|\xi_0{}^\lambda$, a tem samem zbieżność szeregu $\mathfrak{P}(x)$ dla wszelkich $|x|<\xi$, c. b. d. d.

Obierzmyż dowolną całkowitą dodatnią liczbę $\tau>1$, to w szeregu liczb 0, 1, 2,... znajdziemy zawsze jedną liczbę μ_s taką, że dla $|x|=\mu_s/\tau^s$ będą jeszcze wszystkie dodajniki $|a_\lambda x^\lambda|$ skończone, a dla $|x|=(\mu_s+1)/\tau^s$ niewszystkie już te dodajniki będą skończone. Z tego wnosimy, że:

$$\mu_s/\tau^s<r<(\mu_s+1)/\tau^s,\quad s=0,\ 1,\ 2,\dots$$

a stąd wyniknie [art. 2, 3]:

$$r=\mu_0+\frac{h_1}{\tau}+\dots+\frac{h_n}{\tau^n}, \text{ lub } r=\mu_0+\frac{h_1}{\tau}+\frac{h_2}{\tau^2}+\dots \textit{ in inft.}$$

Granica r jest więc w każdym razie zupełnie oznaczoną wielkością. Nazywamy ją promieniem zbieżności danego szeregu i mamy twierdzenie:

III. *Gdy szereg zbieżny $\mathfrak{P}(x)$ nie jest bezustannie zbieżny, to jest zbieżny na wszystkich punktach w wnętrzu pewnego koła (r) o środku w punkcie $x=0$, a o promieniu r. Zewnątrz tego koła szereg nawet warunkowo zbieżnym być nie może, (bo tam już niewszystkie dodajniki $|a_\lambda x^\lambda|$ są skończone).*

Takie koło (r) nazywamy prawdziwym zakresem albo prawdziwem kołem zbieżności danego szeregu. Obwód koła (r) jest obwodem zbieżności.

*

158. Sposoby zachowania się szeregu na jego obwodzie zbieżności. Wspólny zakres zbieżności dwóch szeregów. Według uwag art. poprzedzającego ma promień zbieżności r tę własność, że wszystkie dodajniki:

$$(\alpha) \qquad |a_\lambda|(r-\varepsilon)^\lambda,\ \lambda=0,\ 1,\ 2.\dots$$

przy dowolnie małem dodatnem ε będą skończone, dodajniki zaś

$$(\beta) \qquad |a_\lambda|(r+\varepsilon)^\lambda,\ \lambda=0,\ 1,\ 2,\dots$$

przy takiem samem ε nie wszystkie już będą skończone. Co się tyczy dodajników

$$(\gamma) \qquad |a_\lambda|r^\lambda,\ \lambda=0,\ 1,\ 2,\dots$$

to te mogą się albo do (α), albo do (β) zaliczać, gdyż granica sama nie potrzebuje należeć do określonych wartości [art. 46.].

Pd. 1. Okazać, że szeregi:

$$(a)\ 1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\dots \quad (b)\ 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\dots \quad (c)\ 1+x+x^2+\dots$$

są zbieżne w kole o promieniu $|x|=1$.

Pd. 2. Szereg: $1+\binom{m+1}{1}x+\binom{m+2}{2}x^2+\binom{m+3}{3}x^3+\dots$

gdzie $m>0$, i całkowite, zbieżnym jest dla $|x|<1$, gdyż granica

$$\lim_{n=\infty}(u_{n+1}/u_n)=\left[\frac{m+n+1}{n+1}\right]_{n=\infty}.|x|=|x| \text{ i jest } <1 \text{ dla } |x|<1.$$

Pd. 3. W szeregach (a), (b), (c) [Pd. 1.] mają na obwodzie koła wszystkie dodajniki skończone bezwzględne wartości. Zauważmy jednak szereg:

$$(d) \qquad 1+\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)x+\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)x^2+\dots$$

w którym α jest dodatnią, skończoną ilością. Jest on również zbieżnym dla $|x|<1$; na samym okręgu jego koła zbieżności ($|x|=1$) dążą jego dodajniki swemi bezwzględnemi wartościami do granicy:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\dots\left(1+\frac{\alpha}{n}\right),$$

a ta jest nieskończoną [art. 14.].

Pd. 4. Okazać na podstawie tw. III. — art. 7. — że gdy w szeregu $\Sigma a_\lambda x^\lambda$ wartości $\sqrt[\lambda]{|a_\lambda|}$ dążą do skończonej granicy:

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$$

to szereg ma promień zbieżności: $r=1/l$.

W razie $l=0$ szereg jest bezustannie zbieżnym.

Już z samej natury rzeczy wynika, że jeżeli na obwodzie (r) mamy bezwarunkową zbieżność, — koniecznym, ale nie dostatecznym warunkiem tego jest skończoność wszystkich $|a_\lambda|r^\lambda$ — to ona na całym obwodzie bez wyjątku objawiać się musi. Przeciwnie jeżeli dla $|x_\lambda|=r$ jest $\Sigma|a_\lambda|r^\lambda$ rozbieżną — co może zajść nawet przy wszystkich skończonych $|a_\lambda|r^\lambda$ —, to na obwodzie (r) nie znajdziemy ani jednego punktu x', dla któregoby szereg $\mathfrak{P}(x')$ okazał się bezwarunkowo zbieżnym. Z tego wynika:

I. *Pod względem zachowania się szeregów na obwodzie* (r) *można je podzielić na dwa rodzaje: 1) szeregi bezwarunkowo zbieżne na całym obwodzie zbieżności, 2) szeregi nie dające w żadnym punkcie tego obwodu bezwarunkowej zbieżności.*

W szeregu (a) mamy na całym obwodzie bezwarunkową zbieżność. Szereg (b) jest w punkcie $+1$ rozbieżny, a w punkcie $x=-1$ warunkowo zbieżny. Szereg (c) jest w punkcie $x=-1$ wahająco zbieżny [art. 11]. W szeregu (d) dostajemy w punkcie $x=+1$ rozbieżność. W punkcie $x=-1$ dążą nieskończenie dalekie dodajniki i do granicy $+\infty$ i do granicy $-\infty$ [szereg $s=P+Qi$ o dodajnikach w ten sposób się zachowujących i w pierwszorzędnej jego części P i w drugorzędnej jego części Q można nazwać nieprzydatnym. Jego wartość nie jest oznaczona].

Zauważmy wreszcie dwa zbieżne szeregi, to o nich odrazu wywnioskujemy:

II. *Dwa zbieżne szeregi* $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ *o zakresach zbieżności* (r_1), (r_2) *posiadają zawsze wspólny zakres zbieżności a jest nim mniejsze (nie większe) z kół* (r_1), (r_2).

159. O szeregach $P(x)$. Oprócz zwykłego szeregu potęgowego $\mathfrak{P}(x)$ rozważa się często w analizie szeregi potęgowe o argumencie $1/x$:

$$(A) \qquad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{-\lambda}$$

albo wreszcie nieskończone szeregi:

$$(B) \quad \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_\lambda . x^\lambda, \qquad (C) \quad \sum_{-m}^{\infty} a_\lambda x^\lambda.$$

Co się tyczy (A), to kładąc $\frac{1}{x}=z$, dostajemy zwykły szereg potęgowy $\mathfrak{P}(z)$, a gdy jego zakres zbieżności określa nierówność $|z|<r'$, to szereg (A) jest zbieżny w obszarze $|x|>\frac{1}{r'}=r$, t. j. zewnątrz pewnego koła (r).

Gdy w szczególności (A) jest bezustannie zbieżnym szeregiem argumentu $\frac{1}{x}=z$, to $r'=\infty$, a więc $r=0$, a taki szereg (A) będzie zbieżny w obszarze $|x|>0$ t. j. na całej płaszczyźnie argumentu x z wyjątkiem punktu $x=0$. Stąd twierdzenie:

I. *Jeżeli szereg* $\mathfrak{P}(x^{-1})$ *jest zbieżny — to jego zakres zbieżności tworzą wszystkie punkta leżące zewnątrz pewnego koła* (r) *[o środku* $x=0$*], które także do punktu* $x=0$ *zmaleć może.*

Szeregi (B), (C) naznaczamy krótko przez $P(x)$.

Pierwszy z nich jest sumą dwóch szeregów potęgowych, a to: $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{-\lambda}.x^{-\lambda}=\mathfrak{P}_1(x^{-1})$ i $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda=\mathfrak{P}_2(x)$. Gdy pierwszy z nich jest zbieżny dla $|x|>r_1$ (podług tw. I.), a drugi zbieżny dla $|x|<r_2$, to trzeba tu rozróżnić następujące wypadki:

1^0. W razie $r_1<r_2$, szereg (B) jest zbieżny w pierścieniu:

$$(\alpha)\qquad r_1<|x|<r_2.$$

W szczególności, gdy $r_1=0$, a więc szereg $\mathfrak{P}_1(x^{-1})$ jest szeregiem bezustannie zbieżnym argumentu $\frac{1}{x}$, to zakres zbieżności (α) przechodzi na:

$$(\beta)\qquad 0<|x|<r_2.$$

Gdy przy $r_1>0$, okazuje się $r_2=\infty$, a więc $\mathfrak{P}_2(x)$ jest szeregiem bezustannie zbieżnym, to zamiast (α) mamy wtedy:

$$(\gamma)\qquad |x|>r_1.$$

Gdy równocześnie mamy $r_1=0$, $r_2=\infty$, a więc $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, są bezustannie zbieżnymi szeregami swoich argumentów (x^{-1}, x), to zakres zbieżności szeregu (B) określi nierówność:

$$(\delta)\qquad |x|>0.$$

2^0 W razie $r_1=r_2=r$ reduje się zakres zbieżności szeregu (B) do koła (r).

3^0 Gdy wreszcie $r_1>r_2$, to szereg (B) nie ma żadnego zakresu zbieżności.

Szereg (C) uważać należy za szczególny przypadek szeregu (B); szereg (B) bowiem przechodzi na (C), gdy się w nim $\mathfrak{P}_1(x^{-1})$ redukuje do całkowitej wymiernej funkcyi argumentu $\frac{1}{x}$. Ta jest skończoną na wszystkich miejscach $x\neq 0$, czyli dla takich x, których $|x|>0$. Gdy więc szereg $\mathfrak{P}_2(x)$ zawarty w (C) ma zakres zbieżności $|x|<r_2$, to obszarem zbieżności szeregu (C) będzie: $0<|x|<r_2$. W razie $r_2=\infty$, mamy obszar $|x|>0$.

Zbierając te uwagi, dochodzimy do twierdzenia:

II. *Gdy szereg $P(x)$ będący sumą szeregu potęgowego argumentu x i szeregu potęgowego argumentu x^{-1} ma zakres zbieżności, to jest zbieżny w pierścieniu o środku $x=0$. W szczególności może się ten pierścień zredukować do okręgu koła; jego wewnętrzne koło może zmaleć do punktu $x=0$, a zewnętrzne zwiększyć się do nieskończoności.*

Łatwo wreszcie możemy wyrozumować:

III. *Gdy szereg $P(x)$ ma być zbieżny w najbliższem otoczeniu punktu $x=0$, to zawarty w nim szereg $\mathfrak{P}_1(x^{-1})$ musi być albo bezustannie zbieżnym szeregiem argumentu x^{-1}, albo całkowitą, wymierną funkcyą tego argumentu.*

Wspomnieliśmy już, że dwa zbieżne szeregi $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$ zawsze mają wspólny zakres zbieżności. Inaczej już pod tym względem zachowują się dwa zbieżne szeregi $P(x)$, $P_1(x)$. One bowiem mogą, ale nie muszą mieć wspólny zakres zbieżności.

Pd. 1. Okazać, że $P(x)=$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{(2x)^\lambda}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}x^\lambda$$

jest zbieżny w pierścieniu $\frac{1}{2}<|x|<1$, a $P(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda!x^\lambda}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{x^\lambda}{\lambda}$ w zakresie

$$0<|x|<1.$$

Pd. 3. Jaki jest zakres zbieżności szeregu $S(x^{-1})+K(x)$, gdzie S, K są szeregami określonymi w art. 157?

160. Zbieżność szeregu potęgowego wielu zmiennych. O szeregach $P(x, y, z, ...)$. Nieskończoną sumę:

$$(1)\qquad \sum_{(\lambda=0,\ \mu=0,\ \nu=0,...)}^{+\infty} a_{\lambda\mu\nu...}\, x^\lambda y^\mu z^\nu ...$$

w której $a_{\lambda\mu\nu...}$ są stałemi, x, y, z,... są m nieograniczonemi zmiennemi, nazywamy szeregiem potęgowym m zmiennych x, y, z,... a naznaczamy go krótko przez $\mathfrak{P}(x, y, z, ...)$.

Dla $x=y=z...=0$ ma taki szereg zawsze skończoną wartość, $a_{000}...$, a gdy on tylko na tem jedynem miejscu jest skończonym nazywamy go rozbieżnym. W razie, kiedy szereg wykazuje skończoną wartość choć przynajmniej na jednem miejscu różnem od $(x=0, y=0, z=0, ...)$, to go trzeba pod względem zbieżności dobrze określić.

Podług art. 35. przedstawiamy nieograniczony obszar m zmiennych x, y, z,... zapomocą m nieograniczonych płaszczyzn. Na tych płaszczyznach zakreślamy okręgi kół:

$$(2)\qquad (|x|=\xi),\ (|y|=\eta),\ (|z|=\zeta),...$$

i ten system okręgów naznaczmy krótko przez:

$$(3)\qquad [(\xi), (\eta), (\zeta), ...],$$

nazywając go obwodem. Każde miejsce $(x, y, z, ...)$ o spółrzędnych $|x|<\xi$, $|y|<\eta$,... nazwiemy miejscem wewnątrz obwodu (3), a miejsce $(x, y, z, \ldots)$ o spółrzędnych $|x| > \xi$, $|y| > \eta, \ldots$ nazwiemy miejscem zewnątrz tego obwodu.

Przyjmijmy, że dla wartości (2) czyli na obwodzie (3) okazuje się suma:

(4) $$\Sigma |a_{\lambda\mu\nu\ldots}| \xi^\lambda \eta^\mu \zeta^\nu \ldots$$

zbieżną. Wskazuje to, że dany szereg jest na obwodzie (3) absolutnie zbieżny, a że pomniejszenie wartości $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ w sumie (4) nie narusza jej zbieżności, więc stąd odrazu wnosimy:

I. *Szereg absolutnie zbieżny na pewnym obwodzie jest w ten sam sposób zbieżnym także na każdem miejscu wewnątrz tego obwodu.*

Jeżeli suma (4) okaże się zbieżną przy wszelkich skończonych $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ to szereg jest zbieżny w całym nieograniczonym obszarze $(x, y, z, \ldots)$ i nazywa się bezustanie zbieżnym. Takimi są n. p. szeregi:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} [(x^\lambda + y^\lambda)/\lambda!], \quad \sum_{\lambda=0}^{\infty} [x^\lambda y^\lambda / \lambda!] \text{ i t. p.}$$

Jeżeli przeciwnie szereg nie ma być bezustannie zbieżnym i nie ma być rozbieżnym, to musi się znaleźć pewne miejsce $(x, y, z, \ldots)$ o bezwzględnych wartościach (2) różnych od zera dających sumę (4) zbieżną, a zewnątrz obwodu (3) można będzie zawsze wybrać pewne miejsce o dostatecznie dużych spółrzędnych a więc i ich bezwzględnych wartościach $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots$, powodujących $\Sigma |a_{\lambda\mu\nu\ldots}| \xi_1^\lambda \eta_1^\mu \zeta_1^\nu \ldots = \infty$. (Inaczej bowiem szereg dany byłby bezustannie zbieżnym, co wykluczono). Aby w tym razie określić zbieżność szeregu, dowiedziemy takiego twierdzenia:

II. *Gdy dla $x, y, z, \ldots$ o bezwzględnych wartościach $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ wszystkie dodajniki $|a_{\lambda\mu\nu\ldots}| \xi^\lambda \eta^\mu \zeta^\nu \ldots$ okazują się skończone, a więc nie przechodzą pewnej skończonej granicy g, to szereg na wszystkich miejscach $(x, y, z, \ldots)$ o bezwzględnych wartościach $|x| = \xi_0 < \xi$, $|y| = \eta_0 < \eta$, $|z| = \zeta_0 < \zeta, \ldots$ jest zbieżny.*

Z założenia mamy:

$$|a_{\lambda\mu\nu\ldots}| \xi^\lambda \eta^\mu \zeta^\nu \ldots \leqq g, \text{ albo}$$

$$|a_{\lambda\mu\nu\ldots}| \xi^\lambda \cdot \frac{\xi_0{}^\lambda}{\xi_0{}^\lambda} \cdot \eta^\mu \cdot \frac{\eta_0{}^\mu}{\eta_0{}^\mu} \cdot \zeta^\nu \cdot \frac{\zeta_0{}^\nu}{\zeta_0{}^\nu} \ldots \leqq g, \text{ albo wreszcie:}$$

(5) $$|a_{\lambda\mu\nu\ldots}| \xi_0{}^\lambda \eta_0{}^\mu \zeta_0{}^\nu \ldots \leqq g \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\lambda \cdot \left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^\mu \left(\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^\nu \ldots$$

Sumując po obu stronach od $\lambda, \mu, \nu, \ldots = 0$ do ∞ dostajemy nierówność:

$$(6)\quad \begin{aligned}\Sigma|a_{\lambda\mu\nu\dots}|\,\xi_0{}^\lambda\eta_0{}^\mu\zeta_0{}^\nu\dots &\leq g\sum\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\lambda\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^\mu\left(\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^\nu\dots\\ &= g\,\frac{1}{\left(1-\frac{\xi_0}{\xi}\right)\left(1-\frac{\eta_0}{\eta}\right)\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)\dots},\end{aligned}$$

która wskazuje, że szereg po pierwszej stronie ma wartość skończoną, a co dowodzi prawdziwości twierdzenia II.

Położmyż w (4): $\xi=\eta=\zeta=\dots=r$, to dostaniemy:

$$\Sigma|a^{\lambda\mu\nu\dots}|\,r^{\lambda+\mu+\nu+\dots},$$

a tu można będzie znaleść — jak w art. 157. — taką wartość $r=R$, że dla miejsc $(x,y,z,\dots)$ leżących wewnątrz obwodu $[(R),(R),\dots]$ będą wszystkie dodajniki $|a_{\lambda\mu\nu\dots}|\xi^\lambda\eta^\mu\zeta^\nu\dots$ skończone, a dla miejsc zewnątrz tego obwodu okażą się te dodajniki już niewszystkie skończone. Szereg sam będzie wewnątrz obwodu tego zbieżnym, a zewnątrz tego obwodu rozbieżnym.

Położmy $\xi=R_1$, $\eta=R_2$, $\zeta=R_3$, ..., to możemy — dając wielkościom R_2, R_3, ... dowolne wartości — oznaczyć R_1 tak, aby wszystkie dodajniki $|a_{\lambda\mu\nu\dots}|R_1{}^\lambda R_2{}^\mu R_3{}^\nu\dots$ były wewnątrz obwodu $(R_1, R_2,\dots)$ skończone, a zewnątrz tego obwodu przynajmniej jeden z tych dodajników nie był już skończonym. Sam szereg jest wtedy zbieżny wewnątrz $(R_1, R_2, \dots)$, a rozbieżny zewnątrz $(R_1, R_2, \dots)$.

Przy tem z $R_1, R_2, R_3, \dots$ muszą być niektóre $>R$, a niektóre $<R$, a obwodów $(R_1, R_2,\dots)$ o opisanej dopieroco własności jest nieskończenie dużo. Z tych uwag wynika:

III. *Jeżeli szereg potęgowy* $\mathfrak{P}(x,y,z,\dots)$ *nie jest bezustannie zbieżny, i nie jest rozbieżny, to możliwem jest zawsze w obszarze jego m zmiennych wyznaczyć m kół równych lub różnych:* $(R_1, R_2,\dots)$ *w ten sposób, że na każdem miejscu wewnątrz tych kół szereg jest zbieżny, a na każdem miejscu zewnątrz nich — choćby niektóre ze spółrzędnych określały się punktami na obwodzie* $(R_1, R_2,\dots)$ *— jest rozbieżny.*

Obszar wszystkich miejsc wewnątrz każdego obwodu $(R_1, R_2, \dots)$ *tworzy continuum otaczające punkt* $(0,0,\dots,0)$ *i nazywa się ścieśnionym zakresem zbieżności. Obwody kół* $R_1, R_2, \dots$ *razem wzięte są jego obwodem.*

Na zupełny zakres zbieżności składa się nieskończona mnogość zakresów ścieśnionych, a na jego obwód składają się obwody wszystkich zakresów ścieśnionych.

Uwaga. Gdy o szeregu $\Sigma a_{\lambda,\mu,\nu,\dots}x^\lambda y^\mu z^\nu\dots$ wiemy, że bezwzględne wartości jego wszystkich dodajników są skończone w obszarze: $r_1<|x|<r'_1$, $r_2<|y|<r'_2$, $r_3<|z|<r'_3$, ..., to taki szereg niezawodnie jest zbieżny wewnątrz obwodu:

$$(r'_1, r'_2, r'_3, \dots).$$

Pd. 1. Szereg $1+\frac{xy}{4}+\frac{x^2y^2}{4^2}+\frac{x^3y^3}{4^3}+\ldots$ zbieżnym jest dla $|x.y|<4$, a rozbieżnym dla $|x.y|>4$. Pierwsza z tych nierówności wyznacza wszystkie miejsca zupełnego zakresu zbieżności. Połóżmy $|x|=r_1$, $|y|=r_2$ to równanie $r_1.r_2=4$ daje okręgami kół $\left((r_1), \left(\frac{4}{r_1}\right)\right)$, $0<r_1<\infty$, obwód zupełnego zakresu zbieżności. Wnętrze każdego takiego obwodu jest ścieśnionym zakresem zbieżności, a ten przy $r_1=r_2$ określi się przez: $|x|<2$, $|y|<2$.

Pd. 2. Aby szereg:

$$1+\frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{5^2}+\frac{z^2}{7^2}+\frac{xyz}{3^3}$$
$$+\frac{x^4}{2^4}+\frac{y^4}{5^4}+\frac{z^4}{7^4}+\frac{x^5}{2^5}+\frac{y^5}{5^5}+\frac{z^5}{7^5}+\frac{x^2y^2z^2}{3^6}$$
$$+\ldots=\mathfrak{P}_1(x)+\mathfrak{P}_2(y)+\mathfrak{P}_3(z)+\mathfrak{P}_4(x.y.z)$$

był zbieżnym trzeba, aby równocześnie spełniały się nierówności:

$$|x|<2,\ |y|<5,\ |z|<7,\ |x.y.z|<3^3$$

Połóżmy $|x|=r_1$, $|y|=r_2$, $|z|=r_3$, to $r_1=r_2=r_3=2$ dają ścieśniony zakres zbieżności (2, 2, 2). [$|x|=2$ jest prawdziwym zakresem zbieżności szeregu $\mathfrak{P}_1$].

Połóżmy $r_1=2$, $y=5$, to warunek $r_1r_2r_3=2.5.r_3<3^3$ daje: $r_3<\frac{27}{10}$, a więc zbiór kół (2, 5, 27/10) będzie również ścieśnionym zakresem zbieżności i t. d.

Zauważmy wreszcie dwa zbieżne szeregi:

$$\mathfrak{P}(x, y, z, \ldots),\quad \mathfrak{P}_1(x, y, z, \ldots).$$

Ponieważ każdy z nich jest przedewszystkiem zbieżny w pewnem *continuum* otaczającem punkt (0, 0, ..., 0), więc stąd wynika:

IV. *Dwa zbieżne szeregi wielu zmiennych posiadają zawsze wspólny zakres zbieżności, będący pewnem continuum, otaczającem punkt* (0, 0, ...).

Gdy szereg $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \ldots\right)$ ma w argumentach $1/x$, $1/y$, $1/z$, ... ścieśniony zakres zbieżności $1/|x|<R'_1$, $1/|y|<R'_2$, ..., to w argumentach $x, y, z, \ldots$ jego ścieśniony zakres określi się przez:

(a) $\qquad |x|>r'_1,\ |y|>r'_2,\ \ldots$

gdzie $r'_\alpha=1/R'_\alpha$, $\alpha=1, 2, 3, \ldots$

Zauważmy sumę:

$$P(x, y, z, \ldots)=\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \ldots\right)+\mathfrak{P}_2(x, y, z, \ldots),$$

w której szereg $\mathfrak{P}_1$ ma zakres zbieżności (a), a szereg $\mathfrak{P}_2$ zakres zbieżności:

(b) $\qquad |x|<r_1,\ |y|<r_2,\ \ldots$

Jeżeli okazuje się $r'_1<r_1$, $r'_2<r_2$, ... — to szereg P będzie miał (ścieśniony) zakres zbieżności:

(c) $\qquad r'_1<|x|<r_1,\ r'_2<|y|<r_2,\ \ldots$

W przeciwnym razie szereg P nie ma zakresu zbieżności — jest rozbieżnym.

Jeżeli szereg P ma być zbieżnym w bezpośredniem otoczeniu miejsca $(0, 0, ..., 0)$, to i tu $\mathfrak{P}_1(x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}, ...)$ zredukować się musi do szeregu bezustannie zbieżnego argumentów $1/x, 1/y, 1/z, ...$ lub do wymiernej funkcyi całkowitej tych argumentów.

161. Jednostajna zbieżność i ciągłość szeregów jednej zmiennej. Zajmijmy się teraz własnościami szeregów w ich zakresach zbieżności.

Gdy α jest dowolnym punktem, leżącym wewnątrz zakresu zbieżności (r) szeregu $\mathfrak{P}(x)$, ale nie zbliża się dowolnie do obwodu (r), to taki punkt α okrążać tu możemy tylko po takich zamkniętych drogach, które całkowicie w (r) się zawierają. Zatrzymując ten konieczny warunek połóżmy:

raz $x=\alpha+\varrho.1_\varphi$, a drugi raz $x=\alpha+\varrho.1_{\varphi+2\pi}$:

to z tych samych powodów, jakie mieliśmy w art. 48., każde takie dowolne okrążenie poczynające się w punkcie x nie zmieni wartości szeregu po powrocie do punktu x.

Ponieważ równanie $(\alpha+\varrho 1_\varphi)^p=(\alpha+\varrho 1_{\varphi+2\pi})^p$ utrzymuje się przy całkowitem p dodatniem lub ujemnem, więc to samo da się powiedzieć i o szeregu $P(x)$.

Lecz takie same wnioskowania dadzą się zastosować do szeregów $\mathfrak{P}(x, y, z, ...)$, $P(x, y, z, ...)$, a stąd twierdzenie:

I. *Szeregi* $\mathfrak{P}(x)$, $P(x)$, $\mathfrak{P}(x, y, z, ...)$, $P(x, y, z, ...)$ *są wewnątrz zakresów zbieżności jednoznacznemi funkcyami swoich argumentów.*

W zakresie zbieżności (r) szeregu $\mathfrak{P}(x)$ zakreślmy koła (ξ), (ξ_0) o promieniach $\xi_0<\xi<r$ i zauważmy nierówność:

$$|a_\lambda|\,\xi_0{}^\lambda \leqq g\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\lambda \qquad [(5), \text{ art. } 157.].$$

Sumując po obu stronach od pewnego $n>0$ aż do ∞, dostajemy:

$$(1) \qquad \sum_{\lambda=n}^{\infty} |a_\lambda|\,\xi_0{}^\lambda \leqq g\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^n \frac{1}{1-\frac{\xi_0}{\xi}},$$

a że $\frac{\xi_0}{\xi}<1$, więc n można będzie zawsze obrać tak duże, że prawa strona ostatniej nierówności okaże się mniejszą od pewnej dowolnie małej, dodatniej ilości ε. Wtedy mamy także $\sum\limits_{\lambda=n}^{\infty} |a_\lambda|\,\xi_0{}^\lambda < \varepsilon$, a że $\left|\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_\lambda x^\lambda\right| < \sum_{\lambda=n}^{\infty} |a_\lambda| \xi_0{}^\lambda$, więc mieć będziemy:

$$R_n = \left|\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_\lambda x^\lambda\right| < \varepsilon, \tag{2}$$

[por. art. 28., tw. III.].

Połóżmy: $\xi = r - \delta$, $\xi_0 = r - 2\delta$, gdzie $\delta > 0$ jest pewną obraną, dowolnie małą ilością, to $\xi_0/\xi = (r-2\delta)/(r-\delta) = \varepsilon_1$ będzie ułamkiem właściwym (dodatnim), a dla wszelkich $|x| \leqq r - 2\delta$ będzie statecznie $|x|/\xi = |x|/(r-\delta) \leqq \varepsilon_1$. Ponieważ dalej przy $|x| \leqq r - 2\delta$ mamy statecznie $|a_\lambda| |x|^\lambda \leqq |a_\lambda| \xi^\lambda$, więc tu na wzór nierówności (1) dostaniemy:

$$\sum_{\lambda=n}^{\infty} |a_\lambda x^\lambda| \leqq g\, \varepsilon_1{}^n . \frac{1}{1-\varepsilon_1} = \varepsilon,$$

gdzie ε przy dostatecznie dużem n jest dowolnie małą dodatnią ilością. Znaczy to, że przy takiem n mamy $R_n < \varepsilon$, a że zwiększenie n tej nierówności nie naruszy, więc także jest:

$$R_{n+s} = \left|\sum_{\lambda=n+s}^{\infty} a_\lambda x^\lambda\right| < \varepsilon, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

na wszystkich miejscach wewnątrz koła $(r-2\delta)$, a te — ponieważ $\delta > 0$ jest dowolnie małe — wypełniają wnętrze zakresu zbieżności (r). To znaczy:

II. *Gdy ε jest dowolnie małą dodatnią ilością, to możliwem jest zawsze obrać dostatecznie duże, całkowite, dodatnie n w ten sposób, że bezwzględne wartości reszt szeregu poczynających się od $a_n x^n$, $a_{n+1} x^{n+1}$, ... okażą się w całym zakresie zbieżności szeregu mniejsze od ε. Tę własność nazywamy jednostajną zbieżnością szeregu i mówimy: szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżnym (w swojem kole zbieżności).*

Gdy $(n+s)$ wybierzemy tak duże, że już będzie $R_{n+s} < \frac{\varepsilon}{2}$, to równocześnie zakładając $\sigma > s$ mamy także $R_{n+\sigma} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Stąd wynika $R_{n+s} + R_{n+\sigma} < \varepsilon$. Lecz

$$R_{n+s} + R_{n+\sigma} > \left|\sum_{\lambda=n+s}^{\infty} a_\lambda x^\lambda - \sum_{\lambda=n+\sigma}^{\infty} a_\lambda x^\lambda\right| = \left|\sum_{\lambda=n+s}^{n+\sigma} a_\lambda x^\lambda\right|,$$

a więc równocześnie z (3) mamy także:

$$\left|\sum_{\lambda=n+s}^{n+\sigma} a_\lambda x^\lambda\right| < \varepsilon, \quad s = 0, 1, 2, \ldots; \ \sigma > s. \tag{3'}$$

Ta nierówność charakteryzuje jednostajną zbieżność szeregu, a dla $\sigma=\infty$ przechodzi na (3).

Z tej nowej cechy zbieżności da się odrazu wykazać, że szereg $\mathfrak{P}(x)$ jest wewnątrz (r) ciągłą funkcyą swego argumentu.

Niech bowiem x, $x+h$ będą dwa miejsca leżące wewnątrz (r), to mamy:

$$\mathfrak{P}(x+h)=\sum_{0}^{n-1} a_\lambda (x+h)^\lambda + \sum_{n}^{\infty} a_\lambda (x+h)^\lambda, \quad \mathfrak{P}(x)=\sum_{0}^{n-1} a_\lambda x^\lambda + \sum_{n}^{\infty} a_\lambda x^\lambda.$$

Stąd — po odjęciu drugiej relacyi od pierwszej — dostajemy:

$$(4)\qquad \left|\mathfrak{P}(x+h)-\mathfrak{P}(x)\right| \leqq \left|\sum_{0}^{n-1} a_\lambda (x+h)^\lambda - \sum_{0}^{n-1} a_\lambda x^\lambda\right| + \left|\sum_{n}^{\infty} a_\lambda (x+h)^\lambda - \sum_{n}^{\infty} a_\lambda x^\lambda\right|.$$

Przyjmijmy $|h|<\varepsilon$, gdzie ε dowolnie małą dodatnią jest ilością i zauważmy, że drugi dodajnik po prawej stronie w (4) mniejszym jest od:

$$(5)\qquad \left|\sum_{n}^{\infty} a_\lambda (x+h)^\lambda\right| + \left|\sum_{n}^{\infty} a_\lambda x^\lambda\right|. \qquad (\text{VI}^0, \text{ art. } 20.).$$

Każdą z sum w (5) można — gdy już n podług warunku (3) obrano — w całym zakresie (r) uczynić mniejszą od dowolnie małych dodatnich ilości δ_1, δ_2.

Położmyż w (4) za drugą sumę po prawej stronie: $(\delta_1+\delta_2)=\varepsilon_2$, to dostaniemy:

$$(6)\qquad \left|\mathfrak{P}(x+h)-\mathfrak{P}(x)\right| < \left|\sum_{0}^{\infty} a_\lambda (x+h)^\lambda - \sum_{0}^{n-1} a_\lambda x^\lambda\right| + \varepsilon_2.$$

Lecz $\sum_{0}^{n-1} a_\lambda x^\lambda$ jako funkcya wymierna całkowita jest ciągłą dla wszelkich skończonych x, a więc i wewnątrz (r). Wskutek tego przy $|h|<\varepsilon$ dostaniemy równocześnie:

$$\left|\sum_{0}^{n-1} a_\lambda (x+h)^\lambda - \sum_{0}^{n-1} a_\lambda x^\lambda\right| < \varepsilon_1,$$

gdzie ε_1 jest również pewną dowolnie małą dodatnią ilością.

Uwzględniwszy to w (6), mamy: $|\mathfrak{P}(x+h)-\mathfrak{P}(x)|<\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Lecz dalej $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ można uczynić mniejszą od pewnej dowolnie małej ε', a stąd wynika, że równocześnie z nierównością $|h|<\varepsilon$ okazuje się:

(7) $$|\mathfrak{P}(x+h)-\mathfrak{P}(x)|<\varepsilon'.$$

Takie zachowanie się szeregu $\mathfrak{P}(x)$ nazywamy — jak w teoryi funkcyj wymiernych — jego ciągłością. Mamy więc twierdzenie:

III. *Szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x)$ jest bezwarunkowo i jednostajnie zbieżny w zakresie zbieżności (r) i jest ciągłą funkcyą swego argumentu.*

Każdy szereg $P(x)=\mathfrak{P}_1(x^{-1})+\mathfrak{P}_2(x)$ będzie w swoim zakresie zbieżności $r_1<|x|<r_2$ również jednostajnie zbieżnym, gdyż tak z $\mathfrak{P}_1(x^{-1})$ jak z $\mathfrak{P}_2(x)$ możliwem będzie przy jednem i tem samem dostatecznie dużem n wydzielić reszty, których bezwzględne wartości $R_{1,n+s}$, $R_{2,n+s}$ dowolnie małe być mogą odpowiednio w zakresach $r_1<|x|$ i $r_2>|x|$ a więc i w zakresie $r_1<|x|<r_2$.

Lecz na podstawie tej własności udowodnić będzie można — analogicznie jak o $\mathfrak{P}(x)$ — że $P(x)$ jest ciągłą funkcyą argumentu x w swoim zakresie zbieżności. Mamy więc twierdzenie:

IV. *Szereg $P(x)$ — w szczególności $\mathfrak{P}_1(x^{-1})$ — jest w swym zakresie zbieżności jednostajnie zbieżnym i jest funkcyą ciągłą swego argumentu x.*

162. Jednostajna zbieżność i ciągłość szeregów wielu zmiennych. Analogiczne twierdzenia dadzą się udowodnić o szeregach $\mathfrak{P}(x,y,z,...)$, $P(x,y,z,...)$ m zmiennych $x,y,z,...$

Napiszmy szereg potęgowy $\mathfrak{P}$ w postaci:

$$\mathfrak{P}(x,y,z,...)=v_0+v_1+v_2+v_3+...,$$

gdzie v_α jest jednorodną funkcyą α^{tego} stopnia zmiennych $x,y,z,...$, a nierówności (5) [art. 160.] sumujmy poczynając od

$$\lambda+\mu+\nu+...=\alpha=n$$

aż do ∞, to dostaniemy:

(1) $$\sum_{\alpha=n}^{\infty}|a_{\lambda\mu\nu...}|\xi_0{}^\lambda\eta_0{}^\mu\zeta_0{}^\nu...<g\sum_{\alpha=n}^{\infty}\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\lambda\cdot\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^\mu\cdot\left(\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^\nu...$$

Lecz w v_α mamy wyrazów $c_\alpha=\binom{m+\alpha}{\alpha}$, [art. 70.], a stąd wynika, że gdy po prawej stronie ostatniej nierówności za ułamki ξ_0/ξ, η_0/η, ζ_0/ζ,... wstawimy największy z nich $=t$, to dostaniemy sumę:

$$g\sum_{\alpha=n}^{\infty}c_\alpha t^\alpha>g\sum_{\alpha=n}^{\infty}\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\lambda\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^\mu\left(\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^\nu...\quad\text{Że zaś}$$

$$R_n=\left|\sum_{\alpha=n}^{\infty}v_\alpha\right|<\sum_{\alpha=n}^{\infty}|a_{\lambda\mu\nu...}|\xi_0{}^\lambda\eta_0{}^\mu\zeta_0{}^\nu...,$$

więc mamy nierówność:

$$(2) \qquad R_n < g \sum_{\alpha=n}^{\infty} c_\alpha t^\alpha ,$$

która się spełnia na każdem miejscu $(x, y, z, ...)$ o bezwzględnych wartościach $|x| = \xi_0$, $|y| = \eta_0$, $|z| = \zeta_0, ...$, leżącem wewnątrz zakresu zbieżności danego szeregu. Lecz wiemy [Pd. 2., art. 158.], że szereg $\sum_0^\infty c_\alpha t^\alpha$ jest zbieżnym dla ułamkowych t, a t jest tu właśnie takie.

Stąd pochodzi, że przy dostatecznie dużem n będzie można $g . \sum_{\alpha=n}^{\infty} c_\alpha t^\alpha$ uczynić mniejszem od dowolnie małej dodatniej ilości $g . \varepsilon' < \varepsilon$. Wtedy — podług (2) — mamy równocześnie:

$$(3) \qquad R_n < \varepsilon.$$

Rzecz się nie zmieni, gdy w reszcie $R_n = |v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots|$ z pierwszej funkcyi v_n odrzucimy kilka (początkowych) zawartych tam dodajników, a przez to i tu reszta poczynająca się od dostatecznie dalekiego dodajnika może co do swej bezwzględnej wartości być mniejszą od dowolnie obranej dodatniej ilości.

Niech $(s) = ((r_1), (r_2), (r_3), \ldots)$ będzie jednym ze ścieśnionych zakresów zbieżności danego szeregu. Połóżmy:

$$\xi = r_1 - \delta_1, \quad \eta = r_2 - \delta_2, \quad \zeta = r_3 - \delta_3, \ldots,$$
$$\xi_0 = r_1 - 2\delta_1, \quad \eta_0 = r_2 - 2\delta_2, \quad \zeta_0 = r_3 - 2\delta_3, \ldots,$$

gdzie $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ są-to pewne obrane dowolnie małe dodatnie ilości. Największy z ułamków właściwych:

$$\frac{\xi_0}{\xi} = \frac{r_1 - 2\delta_1}{r_1 - \delta_1}, \quad \frac{\eta_0}{\eta} = \frac{r_2 - 2\delta_2}{r_2 - \delta_2}, \quad \frac{\zeta_0}{\zeta} = \frac{r_3 - 2\delta_3}{r_3 - \delta_3}, \ldots$$

naznaczmy przez τ. Wtedy — gdy tylko n dostatecznie duże obierzemy — dostaniemy:

$$R_n = \left| \sum_{\alpha=n}^{\infty} a_{\lambda\mu\nu\ldots} x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots \right| < g \sum_{\alpha=n}^{\infty} c_\alpha \tau^\alpha < \varepsilon$$

na wszystkich miejscach wewnątrz obwodu $((r_1 - 2\delta_1), (r_2 - 2\delta_2), \ldots)$ t. j. na wszystkich miejscach $(x, y, z, \ldots)$ o $|x| < r_1 - 2\delta_1$, $|y| < r_2 - 2\delta_2, \ldots$ Lecz wtedy także będzie:

$$(4) \qquad R_{n+s} = |v_{n+s} + v_{n+s+1} + \ldots| < \varepsilon,$$

i w całym zakresie $((r_1 - 2\delta_1), (r_2 - 2\delta_2), \ldots)$, a ten — ponieważ $\delta_1, \delta_2, \ldots$ są dowolnie małe — wypełnia wnętrze zakresu zbieżności (s).

Liczby n określone dla poszczególnych ścieśnionych zakresów zbieżności nierównościami (4) będą wszystkie skończone. Wybierzmyż ich górną granicę: ν, to dostaniemy:

$$R_{\nu+s}=|v_{\nu+s}+v_{\nu+s+1}+\ldots|<\varepsilon,$$

i analogicznie:

$$|v_{\nu+s}+v_{\nu+s+1}+\ldots+v_{\nu+\sigma}|<\varepsilon, \quad s=0,1,2,\ldots$$

we wszystkich ścieśnionych zakresach zbieżności, a więc i w zupełnym zakresie zbieżności. To wskazuje, że szereg $\mathfrak{P}(x,y,z,\ldots)$ jest jednostajnie zbieżnym w zupełnym swym zakresie zbieżności.

Niech $(x,y,z,\ldots)$, $(x+h,\ y+k,\ z+l,\ldots)$ będą dwa miejsca leżące wewnątrz zupełnego zakresu zbieżności, a

(5) $$|h|<\varepsilon_1,\quad |k|<\varepsilon_2,\quad |l|<\varepsilon_3,\ldots$$

gdzie ε_s są dowolnie małe dodatnie ilości. Połóżmy:

$$\mathfrak{P}(x+h,\ y+k,\ z+l,\ldots)=\sum_0^{n-1} w_\alpha+\sum_n^{\infty} w_\alpha,\quad \mathfrak{P}(x,y,z,\ldots)=\sum_0^{n-1} v_\alpha+\sum_n^{\infty} v_\alpha,$$

gdzie v_α są — jak przódy — funkcyami jednorodnemi α^{tego} stopnia zmiennych $x,y,z,\ldots$ a w_α takiemiż funkcyami zmiennych $(x+h)$, $(y+k)$, $(z+l),\ldots$ i utwórzmy różnicę $\mathfrak{P}(x+h,\ y+k,\ z+l,\ldots)-\mathfrak{P}(x,y,z,\ldots)$

$$=\left(\sum_0^{n-1} w_\alpha-\sum_0^{n-1} v_\alpha\right)\left(\sum_n^{\infty} w_\alpha-\sum_n^{\infty} v_\alpha\right).$$

Z tego równania wychodząc, dojdziemy analogiczną drogą, jak w teoryi szeregu $\mathfrak{P}(x)$, do wniosku, że równocześnie z nierównościami (5) spełnia się zawsze nierówność:

(6) $$|\mathfrak{P}(x+h,\ y+k,\ z+l,\ldots)-\mathfrak{P}(x,y,z,\ldots)|<\varepsilon,$$

o dowolnie małej, dodatniej ilości ε — a to dowodzi, że szereg jest funkcyą ciągłą swoich argumentów na każdem miejscu wewnątrz zupełnego zakresu zbieżności.

Nie ulega wątpliwości, że to samo da się wywnioskować o szeregach $\mathfrak{P}(x^{-1},\ y^{-1},\ z^{-1},\ldots)$, $P(x,y,z,\ldots)$, a stąd wynika:

I. *Szeregi* $\mathfrak{P}(x,\ y,\ z,\ldots)$, $\mathfrak{P}(x^{-1},y^{-1},\ z^{-1},\ldots)$, $P(x,\ y,\ z,\ldots)$ *są jednostajnie zbieżne w swych prawdziwych zakresach zbieżności.*

II. *Takie szeregi są ciągłemi funkcyami swoich argumentów.*

163. O wydzielonych szeregach podług danego modułu lub danych modułów. Twierdzenia o spółczynnikach. Gdy z szeregu $P(x)$ — lub $\mathfrak{P}(x)$, lub wreszcio $\mathfrak{P}(x^{-1})$ — zatrzymamy te tylko jego dodajniki, których wykładniki są $\equiv 0\,(mod.\ m)$ to sumę wszystkich tych dodajników nazywamy wydzielonym szeregiem (*mod. m*) i naznaczamy przez $P(x,m)$ [por. art. 69. i literaturę tam podaną]. Każdy szereg $P(x,m)$ jest niezawodnie zbieżny w zakresie zbieżności pierwotnego szeregu $P(x)$, a gdy napiszemy $P(x)=a_0+P'(x)$, gdzie a_0 jest wolnym wyrazem szeregu $P(x)$, to w zakresie zbieżności jest zawsze:

(1) $$\lim_{m=\infty} P(x,m)=a_0,$$
$$\text{gdyż} \lim_{m=\infty} P'(x,m)=0.$$

Podobnie w szeregu $P(x, y, z, ...)$, [lub $\mathfrak{P}(x, y, z, ...)$, lub wreszcie $\mathfrak{P}(x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}, ...)$] sumę wszystkich tych jego dodajników, w których równocześnie: wykładnik zmiennej x jest $\equiv 0$ (*mod.* m_1), wykładnik zmiennej y jest $\equiv 0$ (*mod.* m_2),... nazywamy wydzielonym szeregiem według modułów $m_1, m_2, m_3, ...$ [*modd.* $m_1, m_2, m_3, ...$] i naznaczamy przez $P(x, y, z, ...; m_1, m_2, m_3, ...)$. Szereg ten jest i tu zbieżny w zakresie zbieżności danego szeregu, a jeżeli $a_{000}...$ jest wolnym wyrazem szeregu danego, to w zakresie zbieżności będzie i tu:

(2) $$\lim_{\substack{m_1=\infty \\ m_2=\infty \\ \vdots}} P(x, y, z, ...; m_1, m_2, m_3, ...)=a_{000}...$$

Po tych definicyach zakreślmy w zakresie zbieżności $(r_1 < |x| < r_2)$ szeregu $P(x)=\Sigma a_\lambda x^\lambda$ koło (r) o takim promieniu, że $r_1 < r < r_2$. Na okręgu tego koła naznaczmy punkta:

(a) $$x,\ x\varepsilon,\ x\varepsilon^2,\ x\varepsilon^3, ..., x\varepsilon^{m-1},$$

gdzie x dowolnie leży na tem kole, a $\varepsilon=1_{\frac{2\pi}{m}}$, $m>0$, całkowite. Punkta te (wierzchołki) wyznaczają regularny m-bok wpisany w koło (r). W tych wierzchołkach ma $P(x)$ wartości $P(x\varepsilon^\mu)$, $\mu=0, 1, 2, ..., m-1$, a ich średnia arytmetyczna: $\sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{P(x\varepsilon^\mu)}{m}$, jako suma m bezwarunkowo zbieżnych szeregów ma tę własność, że w niej można dodajniki dowolnie w grupę łączyć [art. 28. tw. VII]. Łącząc więc jednomienne jej dodajniki w sumy, dostaniemy:

(3) $$\frac{1}{m}\sum_{\mu=0}^{m-1} P(x\varepsilon^\mu)=P(x,m),$$

o czem w ten sam sposób, jak w art. 69. przekonać się można.

Nazywając (3) średnio arytmetyczną *mod.* m szeregu $P(x)$ na okręgu (r), mamy twierdzenie:

I. *Średnia arytmetyczna mod.* m *szeregu* $P(x)$ *na okręgu koła* (r) *w jego zakresie zbieżności równa się wydzielonemu szeregowi* $P(x,m)$ *dla* x *wpadającego w jeden z* m *wierzchołków.*

Z równania (3) dostajemy:

(4) $$\frac{1}{m}\sum_{\mu=0}^{m-1} |P(x\varepsilon^\mu)| \geqq |P(x,m)|,$$

a gdy x jest punktem, na którym $|P(x)|$ ma na okręgu (r) największą wartość g, to kładąc w (4) za każde $|P(x.\varepsilon^{\mu})|$ największą tę wartość g, mamy:

(5) $$g \geqq |P(x, m)|$$

przy $|x| = r$ i przy każdem dowolnem, ale skończonem m.

Obierzmy dowolnie małą, dodatnią ilość δ, to wtedy dostatecznie dużem m możemy zawsze spełnić nierówność $|P'(x, m)| < \delta$. W takim jednak razie mamy:

$$|P(x, m)| = |a_0 + P'(x, m)| > |a_0| - |P'(x, m)|$$
$$> |a_0| - \delta.$$

Uwzględniając to w (5) dostaniemy: $g \geqq |a_0| - \delta$, czyli:

(5') $$g + \delta \geqq |a_0|.$$

To wskazuje, że $|a_0|$ jest mniejsze od każdej wielkości nieskończenie mało większej od g, a gdy tak, to już musi być i

(6) $$g \geqq |a_0|.$$

Ponieważ według (1) jest $a_0 = \lim\limits_{m=\infty} |P(x, m)|$, więc nierówność (6) można także napisać w postaci: $g \geqq \lim\limits_{m=\infty} |P(x, m)|$*).

Iloraz $P(x)/x^{\lambda} = P_{\lambda}(x)$ będzie znowu szeregiem, ale o wolnym wyrazie a_{λ}, $\lambda \lesseqgtr 0$. Według określenia (1) dostajemy tu $\lim\limits_{m=\infty} P_{\lambda}(x, m) = a_{\lambda}$. a że $|P_{\lambda}(x)|$ posiada na kole (r) największą wartość g/r^{λ}, więc stosując tu (6) dostajemy:

(7) $$g \geqq |a_{\lambda}| r^{\lambda}, \ \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

a stąd twierdzenie:

II. *Gdy w zakresie zbieżności szeregu $P(x)$ zakreślimy koło (r), a z wartości $|P(x)|$ na okręgu tego koła największą jest g, to bezwzględna wartość dowolnego dodajnika tego szeregu na tym okręgu nie jest nigdy większą od g.*

Gdy na okręgu (r) ma $|P(x)|$ najmniejszą wartość γ, to w podobny sposób dowieść łatwo, że:

(7') $$\gamma \leqq |a_{\lambda}| r^{\lambda}.$$

Analogiczne twierdzenia dadzą się wyprowadzić dla szeregu $P(x, y, z, \ldots)$.

Zakreślmy na płaszczyznach (x), (y), (z), ... odpowiednio okręgi kół (r_1), (r_2), (r_3), ... leżące wewnątrz zakresu zbieżności i nazwijmy je obwodem:

---

*) $\lim\limits_{m=\infty} P(x, m) = a_0$ uważać trzeba jako średnio arytmetyczną (3) nieskończenie wielu $(m = \infty)$ szeregów.

(8) $((r_1), (r_2), (r_3), \ldots)$.

Na okręgu (r_1) wybierzmy m_1 punktów:

$$x,\ x\varepsilon_1,\ x\varepsilon_1^{\,2}, \ldots,\ x\varepsilon_1^{\,m_1-1},\quad \varepsilon_1 = 1_{\frac{2\pi}{m_1}}$$

na okręgu (r_2) m_2 punktów:

$$y,\ y\varepsilon_2,\ y\varepsilon_2^{\,2}, \ldots,\ y\varepsilon_2^{\,m_2-1},\quad \varepsilon_1 = 1_{\frac{2\pi}{m_2}}$$

i t. d. i zauważmy $[m_1 . m_2 . m_3 \ldots] = M$ miejsc:

(9) $$(x\varepsilon_1^{\,\alpha},\ y\varepsilon_2^{\,\beta},\ z\varepsilon_3^{\,\gamma}, \ldots)$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, m_1-1,\quad \beta = 0, 1, \ldots, m_2-1,\quad \gamma = 0, 1, \ldots, m_3-1, \ldots$$

Miejsca (9) nazywać będziemy krótko w i e r z c h o ł k a m i. Tworząc średnią arytmetyczną z wartości szeregu na tych wierzchołkach, mieć będziemy:

(10) $$\frac{1}{M} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \ldots} P(x\varepsilon_1^{\,\alpha}, y\varepsilon_2^{\,\beta}, z\varepsilon_3^{\,\gamma}, \ldots) = P(x, y, z, \ldots ; m_1, m_2, m_3, \ldots),$$

(por. art. 86.), a to znaczy:

III. *Średnia arytmetyczna szeregu P modd. m_1, m_2, m_3, ... na obwodzie leżącym wewnątrz zakresu zbieżności równa jest wartości wydzielonego szeregu według tych modułów na jednym z obranych wierzchołków.*

Z równania (10) wynika:

(11) $$\frac{1}{M} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \ldots} |P(x\varepsilon_1^{\,\alpha}, y\varepsilon_2^{\,\beta}, z\varepsilon_3^{\,\gamma}, \ldots)| \geqq |P(x, y, z, \ldots ; m_1, m_2, m_3, \ldots)|$$

a gdy $(x, y, z, \ldots)$ będzie miejscem, na którem $|P|$ ma największą wartość g na obwodzie (8), to kładąc w (11) za każde $|P(x\varepsilon_1^{\,\alpha}, y\varepsilon_2^{\,\beta}, \ldots)|$ największą tę wartość g, dostaniemy:

(12) $$g \geqq |P(x, y, z, \ldots ; m_1, m_2, m_3, \ldots)|$$

przy dowolnie obranych, skończonych $m_1, m_2, m_3, \ldots$ Dalej takiem samem rozumowaniem, jak o szeregu $P(x)$, dojdziemy do nierówności:

(13) $$g \geqq |a_{000}\ldots|.$$

Iloraz $P/(x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots) = P_{\lambda\mu\nu\ldots}$ jest znowu szeregiem, ale o wolnym wyrazie $a_{\lambda\mu\nu\ldots}$ $|P_{\lambda\mu\nu\ldots}|$ posiada na obwodzie (8) największą wartość $g/(r_1^{\,\lambda} r_2^{\,\mu} r_3^{\,\nu} \ldots)$. Stosując do tego nowego szeregu nierówność (13) mieć będziemy:

(14) $$g \leqq |a_{\lambda\mu\nu\ldots}|\, r_1^{\,\lambda} r_2^{\,\mu} r_3^{\,\nu} \ldots$$ To znaczy:

IV. *Gdy w zakresie zbieżności szeregu P zakreślimy obwód $((r_1), (r_2), (r_3), \ldots)$, a z wartości $|P|$ na tym obwodzie największa jest g, to bezwzględna wartość dowolnego dodajnika tego szeregu na tym obwodzie nie jest nigdy większą od g.*

Uwaga I. Z rozważań tego artykułu wynika, że dodatnia ilość g określona w tw. II. art. 157. i w tw. II. art. 160. jest tą samą, jaką tu mamy w nierównościach (7) i (14).

*

Uwaga 2. Powiedzieliśmy, że szeregi wydzielone są zawsze zbieżne w zakresie zbieżności danego szeregu. Lecz ten zakres nie potrzebuje być z reguły prawdziwym ich zakresem zbieżności, tak, że raczej powiedzieć trzeba: Zakres zbieżności wydzielonego szeregu nie jest nigdy mniejszy od zakresu zbieżności szeregu danego.

Pd. 1. Z szeregu:

$$1+2x+x^2+(2x)^3+x^4+(2x)^5+\dots$$

zbieżnego dla $|x|<\frac{1}{2}$ wydzielić szereg *mod.* 2. i oznaczyć jego zakres zbieżności.

Pd. 2. Z szeregu:

$$1+x+x^2+x^4+x^5+x^6+\sum_{\lambda=3}^{\infty} x^{2\lambda+1}$$

zbieżnego dla $|x|<1$ wydzielić szereg *mod.* 2. i oznaczyć jego zakres zbieżności.

164. Punkta zerowe (pierwiastki) szeregu potęgowego jednej zmiennej w zakresie zbieżności. Zauważmy zwykły szereg potęgowy:

$$\mathfrak{P}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

o zakresie zbieżności (r), a o wolnym wyrazie $a_0 \neq 0$.

W zakresie jego zbieżności zakreślmy skończone (nie dowolnie małe) koło $(r_1)<(r)$ i przyjmijmy, że na okręgu tego koła posiada $|\mathfrak{P}(x)|$ największą wartość g. Wtedy mamy $g \geqq |a_\lambda| r_1^{\lambda}$, albo

$$|a_\lambda| \leqq g / r_1^{\lambda}.$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez ϱ^λ, gdzie $0<\varrho<r_1$, dostajemy:

$$|a_\lambda|\varrho^\lambda \leqq g.(\varrho^\lambda / r_1^{\lambda}).$$

Sumując tu po obu stronach od $\lambda=1$ do ∞ i uwzględniając, że:

$$|a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots|_{|x|=\varrho} \leqq |a_1|\varrho+|a_2|\varrho^2+|a_3|\varrho^3+\dots$$

otrzymamy na całym okręgu koła (ϱ):

$$|a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots| \leqq g\frac{\varrho}{r_1}.\frac{r_1}{r_1-\varrho}.$$

Lecz ϱ, które już $<r_1$ przyjęto, można dalej ograniczyć do takich wartości, że dla nich statecznie będzie:

$$g.\frac{\varrho}{r_1}\frac{r_1}{r_1-\varrho}<|a_0|.$$

Takie wartości ϱ posiadać będą pewną górną granicę: $R<r_1$, i wtedy będzie:

$$(1) \qquad |a_1x+a_2x^2+\dots|<|a_0|$$

dla wszelkich $|x|<R$ t. j. w wnętrzu nie nieskończenie małego koła (R) otaczającego punkt $x=0$ (o środku $x=0$).

W tem kole ostająca się nierówność (1) wskazuje, że się tam szereg nigdy zerem nie staje, a stąd twierdzenie:

I. *Szereg potęgowy* $\mathfrak{P}(x)$ *o wolnym wyrazie* $a_0 \neq 0$ *nie jest nigdy zerem w pewnem skończonem otoczeniu swego środka zbieżności (punktu* $x=0$).

Gdy w szeregu jest $a_0=a_1=...=a_{m-1}=0$, $a_m \neq 0$, to i w takim szeregu =

$$x^m[a_m+a_{m+1}x+a_{m+2}x^2+...]=x^m.\mathfrak{P}_1(x)$$

nie znajdziemy — oprócz m-krotnego punktu zerowego $x=0$ — żadnego więcej pierwiastka w pewnem skończonem otoczeniu $|x|<R$. W przeciwnym bowiem razie szereg $\mathfrak{P}_1(x)$ o wolnym wyrazie $a_m \neq 0$ nie mógłby mieć własności wyrażonej w twierdzeniu I.

Z tych uwag wynika, że szereg — bez względu na to czy jego wolny wyraz $=0$, czy też jest $\neq 0$ — nie może w swym zakresie zbieżności stawać się zerem na nieskończonej mnogości miejsc z punktem skupienia $x=0$, albo w pewnem, choćby bardzo małem *continuum* otaczającem $x=0$. Z żądaniem takiem musi się więc równocześnie łączyć identyczne znikanie szeregu, to zn. $a_0=a_1=$ $=a_2=a_3=...=0$, a stąd twierdzenie:

II. *Szereg, który w swoim zakresie zbieżności ma się stawać zerem na nieskończenie wielu miejscach z punktem skupienia* $x=0$, *lub w całem — choćby dowolnie małem continuum otaczającem punkt* $x=0$, *nie istnieje — chyba, że jest identycznie zerem.*

Lecz łatwo udowodnić twierdzenia:

III. *Szereg* $\mathfrak{P}(x)$, *który na nieskończenie wielu miejscach o skupieniu* $x=0$, *lub w bardzo małem continuum otaczającem ten punkt ma tę samą wartość* $c \neq 0$, *jest identycznie* $=c$.

Zauważmy bowiem różnicę $c-\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}_1(x)$, to $\mathfrak{P}_1(x)$ jest identycznie zerem, a więc $\mathfrak{P}(x)$ identycznie $=c$.

165. Punkta zerowe (pierwiastki) szeregu potęgowego wielu zmiennych w zakresie zbieżności. Analogiczne własności posiada szereg $\mathfrak{P}(x, y, z, ...)$. Przyjmując jego wyraz wolny $a_{000}... \neq 0$, zakreślmy w wnętrzu jednego ze ścieśnionych jego zakresów obwód $((r_1), (r_2), ...)$ i naznaczmy największą z wartości $|\mathfrak{P}|$ na tym obwodzie przez g. Wtedy mamy:

$$|a_{\lambda\mu\nu...}| \leq g \,/\, (r_1{}^\lambda . r_2{}^\mu r_3{}^\nu ...).$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez dodatnie ilości $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, ...$ takie, że $\varrho_1 < r_1$, $\varrho_2 < r_2$, $\varrho_3 < r_3, ...$ dostajemy:

$$|a_{\lambda\mu\nu..}|\, \varrho_1{}^\lambda \varrho_2{}^\mu \varrho_3{}^\nu ... \leq g . \left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^\lambda \left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^\mu \left(\frac{\varrho_3}{r_3}\right)^\nu ...$$

Sumując tu po obydwu stronach od $\lambda+\mu+\nu+...=\alpha=1$ do ∞ i uwzględniając, że na wszystkich miejscach obwodu $((\varrho_1), (\varrho_2), (\varrho_3),...)$ jest:

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\lambda\mu\nu..} x^\lambda y^\mu z^\nu ...\right| \leq \sum_{\alpha=1}^{\infty} |a_{\lambda\mu\nu...}| \varrho_1{}^\lambda \varrho_2{}^\mu \varrho_3{}^\nu ..., \text{ i że:}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^\lambda\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^\mu\left(\frac{\varrho_3}{r_3}\right)^\nu ... = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^\lambda\left(\frac{\varrho_2}{r_2}\right)^\mu\left(\frac{\varrho_3}{r_3}\right)^\nu ... -1$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{\varrho_1}{r_1}\right)\left(1-\frac{\varrho_2}{r_2}\right)\left(1-\frac{\varrho_3}{r_3}\right)...} - 1 = \frac{r_1 . r_2 . r_3 ...}{(r_1-\varrho_1)(r_2-\varrho_2)(r_3-\varrho_3)...} - 1,$$

mieć będziemy:

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\lambda\mu\nu...} x^\lambda y^\mu z^\nu ...\right| \leq g\left[\frac{r_1 r_2 r_3 ...}{(r_1-\varrho_1)(r_2-\varrho_2)(r_3-\varrho_3)...} - 1\right].$$

Lecz $\varrho_1, \varrho_2, ...$ — zatrzymując warunek: $\varrho_1 < r_1$, $\varrho_2 < r_2, ...$ — możemy ograniczyć do takich dostatecznie małych wartości, że dla nich będzie statecznie:

$$g\left[\frac{r_1 . r_2 . r_3 ...}{(r_1-\varrho_1)(r_2-\varrho_2)...} - 1\right] < |a_{000}...|,$$

a dalej:

(1) $$\left|\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\lambda\mu\nu...} x^\lambda y^\mu z^\nu ...\right| < |a_{000}...|.$$

Te wartości ϱ_α będą miały pewne skończone, górne granice $R_1, R_2, ...$ Wtedy widocznie na wszystkich miejscach $(x, y, z, ...)$, gdzie $|x| < R_1$, $|y| < R_2$, $|z| < R_3, ...$, spełnia się nierówność (1), a stąd twierdzenia:

I. *Szereg* $\mathfrak{P}(x, y, z, ...)$ *o wolnym wyrazie* $a_{000} ... \neq 0$ *nie jest nigdy zerem w pewnem skończonem otoczeniu miejsca* $(0, 0, ..., 0)$.

II. *Szereg* $\mathfrak{P}(x, y, z, ...)$ *o wolnym wyrazie* $a_{000} ... \neq 0$, *znikający na nieskończenie wielu miejscach z punktem skupienia* $(0, 0, ..., 0)$, *lub w pewnem, choćby bardzo małem continuum otaczającem punkt* $(0, 0, ..., 0)$, *nie istnieje, chyba, że jest identycznie zerem.*

Wreszcie dojdziemy i tu do twierdzenia:

III. *Gdy szereg na mnogościach miejsc określonych w tw. II. przybiera wartość* $c \neq 0$, *to jest identycznie* $= c$.

ROZDZIAŁ XIII.

Arytmetyczne łączenie szeregów potęgowych.

166. Sumowanie skończonej liczby szeregów jednej lub wielu zmiennych. Po zbadaniu własności szeregów $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}(x, y, z, ...)$ w ich zakresach zbieżności, zajmijmy się teraz łączeniem ich zapomocą działań arytmetycznych biorąc pod uwagę odrazu ogólniejsze szeregi $P(x)$, $P(x, y, z, ...)$*),

Przedewszystkiem zauważyć tu potrzeba, że o takiem łączeniu szeregów tylko wtedy może być mowa, gdy te szeregi posiadają wspólny zakres zbieżności.

Gdy jest danych m szeregów:

$$P_1(x),\quad P_2(x), \ldots\quad P_m(x),$$

$$P_k(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{k\lambda} x^\lambda, \quad k = 1, 2, .., m$$

o wspólnym zakresie $(r_1 ... r_2)$**), to każdy z nich jest wewnątrz $(r_1 ... r_2)$ absolutnie zbieżny. W ich sumie można więc dodajniki $a_{k\lambda} x^\lambda$, $k = 1, 2, ..., m$, $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ dowolnie porządkować [art. 28., tw. VII]. Łącząc więc dodajniki jednomienne w sumy, dostaniemy:

$$\sum_{k=1}^{m} P_k(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_\lambda x^\lambda, \quad a_\lambda = a_{1\lambda} + a_{2\lambda} + \ldots + a_{m\lambda}.$$

Stąd mamy taką regułę sumowania skończonej liczby szeregów $P_k(x)$ lub $\mathfrak{P}_k(x)$.

I. *Sumę skończonej liczby szeregów $P_k(x)$ (lub różnicę dwóch ich) tworzymy — pod warunkiem, że posiadają wspólny zakres zbieżności — łącząc dodawaniem (lub odejmowaniem) jednomienne ich wyrazy. Suma (różnica ich) będzie szeregiem $P(x)$ zbieżnym niezawodnie w wspólnym zakresie szeregów $P_k(x)$, ale ten zakres nie potrzebuje być prawdziwym jej zakresem zbieżności.*

Tak samo sumuje się szeregi $P_k(x, y, z, ...)$, $k = 1, 2, ..., m$ w razie, gdy posiadają wspólny zakres zbieżności $((r_1 ... r_1'), (r_2 ... r_2'), ...)$.

---

*) Pod tym względem por. O. Biermann. *Elemente der höheren Mathemathik* (Lipsk 1895) str. 282—290, 314—320. Tegoż *Theorie der analytischen Functionen* (Lipsk 1887), str. 145—150. Por. także: *Éléments de la theorie des fonctions elliptiques per* Jules Tannery *et* Jules Molk (Paryż 1893) str. 51—57. Znajdują się tam rezultaty rozprawy Weierstrassa, którą później przytoczymy.

**) Przez $(r_1 ... r_2)$ znaczyć będziemy zawsze pierścień ograniczony kołami $(r_1) \leqq (r_2)$.

Pd. 1. Szeregi:

$$\mathfrak{P}(x) = 1 - 2x + x^2 - (2x)^3 + x^4 - (2x)^5 + \ldots$$
$$\mathfrak{P}_1(x) = 2x + (2x)^3 + (2x)^5 + \ldots$$

mają wspólny zakres zbieżności $|x| < 1/2$. Ich suma $1 + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ zbieżną jest dla $|x| < 1$.

Pd. 2. Szeregi:

$$\mathfrak{P}(x) = 2 + 3x + 4x^2 - x^5 - x^6 - x^7 - \ldots$$
$$\mathfrak{P}_1(x) = x^5 + x^6 + x^7 + \ldots$$

mają wspólny zakres zbieżności: $|x| < 1$, a ich suma $= 2 + 3x + 4x^2$, jako wymierna całkowita funkcya, zbieżną jest w całym nieograniczonym obszarze (x).

Przyjmijmy, że dwa zwykłe szeregi $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$ lub $\mathfrak{P}(x, y, z, \ldots)$ $\mathfrak{P}_1(x, y, z, \ldots)$ wykazują we wspólnym zakresie zbieżności te same wartości na nieskończenie wielu miejscach z punktem skupienia $x=0$ lub $(0, 0, \ldots)$ albo wreszcie w dowolnie małem *continuum*, otaczającem ten punkt. Różnice $\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1$ są na wszystkich miejscach mnogości zerami, są więc identycznie zerami [art. 164, 165.], a stąd wynika, że identycznie $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$. To znaczy:

II. *Dwa szeregi potęgowe jednej lub wielu zmiennych, wykazujące we wspólnym zakresie zbieżności równe wartości na nieskończonej mnogości miejsc z punktem skupienia* $x=0$ *lub* $(0, 0, \ldots, 0)$, *albo wreszcie w dowolnie małem continuum, otaczającem ten punkt, są identyczne.*

167. Zakresy jednostajnej zbieżności sumy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(x)$ i jej ciągłość w tych zakresach. Reguły sumowania skończonej liczby szeregów $P_k(x)$ nie można zastosować do nieskończonej liczby szeregów, posiadających wspólny zakres zbieżności $(r_1 \ldots r_2)$, jeżeli się poprzód nie zrobi pewnego zastrzeżenia wielkiej doniosłości.

Przyjmijmy mianowicie, że $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(x)$ jako szereg o dodajnikach $P_k(x)$ jest w pewnym zakresie $(R_1 \ldots R_2)$ zawartym w $(r_1 \ldots r_2)$ jednostajnie zbieżnym. Ma to i tu to znaczenie, że za obraniem pewnej dowolnie małej dodatniej ilości ε można dostatecznie dużem n spełnić nierówności $\left|\sum\limits_{k=n+s}^{\infty} P_k(x)\right| < \varepsilon$ i wynikającą stąd nierówność $\left|\sum\limits_{k=n}^{n_1} P_k(x)\right| < \varepsilon$ na wszystkich miejscach zakresu $(R_1 \ldots R_2)$. W zakresie tym jednak nie potrzebuje być suma $S(x)$ równocześnie i bezwarunkowo zbieżną.

Przy takiem założeniu udowodnimy naprzód, że $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(x)$

jest ciągłą funkcyą swego argumentu w zakresie jednostajnej zbieżności $(R_1 \dots R_2)$.

W tym celu obierzmy w tym zakresie miejsce x, a w jego otoczeniu mieszczącem się całkowicie w $(R_1 \dots R_2)$ drugie miejsce $x+h$ i utwórzmy różnicę:

$$S(x+h)-S(x)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x+h)-\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(P_k(x+h)-P_k(x))+\sum_{k=n}^{\infty}(P_k(x+h)-P_k(x)).$$

Z tego równania wychodząc, dojdziemy — rozumując dalej tak, jak w art. 161. — do wniosku, że $S(x)$ jest ciągłe w $(R_1 \dots R_2)$.

W razie gdy dla $S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathfrak{P}_k(x)$ jest wspólnym zakresem zbieżności dodajników $\mathfrak{P}_k(x)$ pewne koło (r), a gdy przyjmiemy, że ta suma jest jednostajnie zbieżną w kole $(R)<(r)$, to w (R) będzie $S(x)$ zarazem i ciągłą funkcyą swego argumentu.

Lecz często sumy $\Sigma P_k(x)$, $\Sigma \mathfrak{P}_k(x)$ nie będą jednostajnie zbieżne w pierścieniu $(R_1 \dots R_2)$ lub kole (R), ale w jednym lub kilku obszarach (A), (B), (C), ..., zawartych w $(r, \dots, r_2)$ lub w kole (r), a nie mających formy kół, lub kołowych pierścieni. $S(x)$ będzie wtedy ciągłą funkcyą w (A), (B), (C), ..., bo widocznie w dowodzie ciągłości obojętnem jest jakiego kształtu jest zakres jednostajnej zbieżności; byle tylko miejsca x, $x+h$ równocześnie zawierały się w takim jednym obszarze. Stąd twierdzenie:

I. *Suma $S(x)$ jest ciągłą funkcyą w obszarze, lub w obszarach swojej jednostajnej zbieżności.*

Pd. 1. Gdy na płaszczyźnie (x) mamy dwa punkty: $+\alpha$, $-\alpha$ o oddaleniu $2d=2|\alpha|$, to punkta x spełniające nierówność:

$$|x-\alpha|\,|x+\alpha|=|x^2-\alpha^2|<r$$

(r dodatnia skończona ilość) określają wnętrze krzywej Cassini'ego, która

(α) gdy $r>d^2$ jest jednym owalem,

(β) „ $r=d^2$ „ lemniskatą,

(γ) „ $r<d^2$ „ parą owalów [art. 32. Pd. 4.].

Wszystkie te 3 krzywe mają środek w punkcie $x=0$, a punkta $+\alpha$, $-\alpha$ są ich ogniskami.

Mając to, zauważmy nieskończoną sumę wymiernych funkcyj:

$$S(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(x-\alpha)^{\lambda}(x+\alpha)^{\lambda}}{r^{\lambda}}.$$

Wspólnym zakresem zbieżności wszystkich funkcyj $(x^2-\alpha^2)^{\lambda}/r^{\lambda}$ jest cały nieograniczony obszar (x). Ale w tym obszarze jest suma $S(x)$ zbieżną tylko dla

$$|x-\alpha|\,|x+\alpha|<r,$$

a więc w wnętrzu krzywej (α), (β) lub (γ). Ta zbieżność jest tam zarazem jednostajną. Połóżmy bowiem $(x-\alpha)(x+\alpha)=z$, to szereg potęgowy $\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{z^\lambda}{r^\lambda}$ jest w zakresie $|z|<r$ jednostajnie zbieżnym.

W pierwszym razie $(r>d^2)$ przedstawia się obszar jednostajnej zbieżności sumy $S(x)$ jako jedno *continuum* (α) otaczające punkt $x=0$; a ponieważ

$$|x^2-\alpha^2|<|x|^2+|\alpha^2|,$$

to dla takich x, które spełnią nierówność: $|x|^2+|\alpha|^2=|x^2|^2+d^2<r$, suma $S(x)$ będzie tem bardziej jednostajnie zbieżną. Są-to punkta x o bezwzględnych wartościach $|x|<\sqrt{r-d^2}$, a więc leżące w wnętrzu koła, (które tu obszar (R) zastępuje).

W drugim razie $(r=d^2)$ obszar jednostajnej zbieżności tworzą dwie oddzielne pętlice (A), (B) lemniskaty.

W trzecim wypadku $(r<d^2)$ mamy również dwa oddzielne obszary (A'), (B') jednostajnej zbieżności. Są-to dwa oddzielne owale krzywej (γ).

W przypadkach (β), (γ) nie istnieje tu zatem kołowy zakres jednostajnej zbieżności.*)

Pd. 2. Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tworzą nieskończoną, przeliczalną mnogość liczb urojonych o punkcie skupienia $\lim a_\nu=0$. Zauważmy sumę:

$$S(x)=B_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}B_\nu(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\nu)$$

i przyjmijmy, że ona jest absolutnie zbieżną dla takich $x=x_1$, których bezwzględne wartości $|x_1|=r_1$. Obierając dowolne miejsce x_0 o bezwzględnej wartości $|x_0|<r_1$, napiszmy:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|B_\nu(x_0-a_1)\ldots(x_0-a_\nu)|=\sum_{\nu=1}^{\infty}|B_\nu(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)|\,\frac{|(x_0-a_1)(x_0-a_2)\ldots(x_0-a_\nu)|}{|(x_1-a_1)(x_1-a_2)\ldots(x_1-a_\nu)|}.$$

Od pewnego dostatecznie dużego m począwszy będą ilorazy

$$|x_0-a_{m+s}|/|x_1-a_{m+s}| \quad s=0,1,2,\ldots,$$

statecznie ułamkami właściwymi, gdyż przy dostatecznie dużem m punkty a_{m+s} znajdują się już w nieskończenie małem otoczeniu punktu $x=0$.

Gdy te ułamki mają górną granicę ε, to mamy:

$$(a) \qquad \left|\frac{x_0-a_{m+s}}{x_1-a_{m+s}}\right|\leq\varepsilon, \text{ dla } s=0,1,\ldots$$

Z drugiej strony będą wyrazy $|B_\nu(x_1-a_1)(x_1-a_2)\ldots(x_1-a_\nu)|$ jako dodajniki absolutnie zbieżnej sumy $S(x)$ na kole $|x_1|=r_1$ posiadały pewną górną skończoną granicę G.

Uwzględniając to, mieć będziemy:

---

*) Por. J. Puzyna: O rozwinięciach zbieżnych wewnątrz krzywych Cassini'ego. Prace matematyczno-fizyczne. Tom V. (Warszawa 1894), str. 21—46. — Por. także Pincherle: *I sistemi ricorrenti di prim' ordine et di secondo grado. Atti della Reale Academia... (Roma),* T. V., str. 8.

$$\sum_{\nu=m}^{\infty}\left|B_\nu(x_0-a_1)\dots(x_0-a_\nu)\right| < G\sum_{\nu=m}^{\infty}\left|\frac{(x_0-a_1)\dots(x_0-a_\nu)}{(x_1-a_1)\dots(x_1-a_\nu)}\right|$$

$$=G\left|\frac{(x_0-a_1)\dots(x_0-a_{m-1})}{(x_1-a_1)\dots(x_1-a_{m-1})}\right|\sum_{s=0}^{\infty}\left|\frac{x_0-a_m}{x_1-a_m}\right|.\left|\frac{x_0-a_{m+1}}{x_1-a_{m+1}}\right|\dots\left|\frac{x_0-a_{m+s}}{x_0-a_{m+s}}\right|$$

$$< G\left|\frac{(x_0-a_1)\dots(x_0-a_{m-1})}{(x_1-a_1)\dots(x_1-a_{m-1})}\right|\sum_{t=1}^{\infty}\varepsilon^t \text{ (wskutek } (a)).$$

Lecz $\sum_{t=1}^{\infty}\varepsilon^t$ jest sumą zbieżną, a stąd wnosimy: *A) Gdy suma $S(x)$ zbieżną jest absolutnie na okręgu koła $|x|=r_1$, to jest także absolutnie zbieżną na wszystkich miejscach wewnątrz tego koła*; *albo:*

Gdy na okręgu koła $|x|=r_1$, wyrazy: $|B_\nu(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\nu)|$ mają skończoną górną granicę G, to suma $S(x)$ jest zbieżną wewnątrz tego koła.

Stąd — podobnie jak w teoryi szeregu potęgowego — wywnioskujemy: *B) Zakresem zbieżności sumy $S(x)$ jest zawsze koło (r).*

Obierzmy dowolnie małą dodatnią ilość δ i połóżmy: $x_1=r-\delta$, $x_0=r-\mu\delta$, gdzie μ jest całkowite, dodatnie i >1. Zauważmy dalej:

$$(b)\qquad \left|\frac{x_0-a_{m+s}}{x_1-a_{m+s}}\right|,\quad s=0,1,2,\dots$$

o tak dużem m, że już $|a_{m+s}|<\delta$.

Przy takich założeniach mamy:

$$|x_0-a_{m+s}|<|x_0|+|a_{m+s}|<r-\mu\delta+\delta=r-(\mu-1)\delta$$

$$|x_1-a_{m+s}|>|x_1|-|a_{m+s}|>r-\delta-\delta=r-2\delta.$$

Stąd — gdy $\mu=4$ położymy — mieć będziemy:

$$(c)\qquad \left|\frac{x_0-a_{m+s}}{x_1-a_{m+s}}\right|<\frac{r-3\delta}{r-2\delta}=\varepsilon, \text{ ułamek właściwy.}$$

Lecz zmniejszenie bezwzględnej wartości $|x_0|$ tej nierówności nie naruszy, a stąd wynika, że ilości (b) są w wnętrzu całego koła $(r-4\delta)$ mniejsze od ε. Mając to zauważmy:

$$(d)\qquad \sum_{\nu=m+\sigma}^{\infty}\left|B_\nu(x_0-a_1)\dots(x_0-a_\nu)\right|<G\sum_{\nu=m+\sigma}^{\infty}\left|\frac{x_0-a_1}{x_1-a_1}\right|\dots\left|\frac{x_0-a_\nu}{x_1-a_\nu}\right|$$

$$<G.\left|\frac{x_0-a_1}{x_1-a_1}\right|\dots\left|\frac{x_0-a_m}{x_1-a_m}\right|.\sum_{\lambda=\sigma}^{\infty}\varepsilon^\lambda,$$

to widocznie za obraniem pewnej dowolnie malej dodatniej ilości η można będzie — przyjmując dostatecznie duże $m+\sigma=m_1$ — ostatni wyraz w szeregu nierówności (d) uczynić $<\eta$ w wnętrzu całego koła $(r-4\delta)$, a więc także — bo δ jest dowolnie małe — w wnętrzu koła (r). Stąd twierdzenie: *C) Zakres (r) absolutnej zbieżności sumy $S(x)$ jest zarazem zakresem jej jednostajnej zbieżności.* *)

---

*) Por. J. Bendixson: *„Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss."* *Acta mathematica*, T. 9. [1887], str. 1—34. — Por. także tego autora rozprawy w *Comptes Rendus* T. 101, str. 1050 i 1129.

168. Sumowanie nieskończenie wielu szeregów jednej zmiennej w razie jednostajnej zbieżności. Wypadek, kiedy suma $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(x)$ posiada zakres jednostajnej zbieżności $(R_1 ... R_2)$, lub suma $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathfrak{P}_k(x)$ zakres jednostajnej zbieżności (R), jest bardzo ważny. Gdy bowiem ten warunek się spełnia, to istnieje twierdzenie:

I. *Sumę $S(x)$ można dla każdego x, leżącego w jej pierścieniu, lub kole jednostajnej zbieżności wykonać, porządkując ją według potęg x, t. j. dodając do siebie jednomienne wyrazy jej dodajników $P_k(x)$, lub $\mathfrak{P}_k(x)$.*

Dowód przeprowadzimy dla $\sum P_k(x)$, $P_k(x) = \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{k\lambda} x^\lambda$.

Gdy δ jest obraną dowolnie małą dodatnią ilością, to — wskutek założenia jednostajnej zbieżności w $(R_1 ... R_2)$ — dostajemy dla wszelkich takich x, że $R_1 < |x| = r < R_2$:

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} P_k(x)\right| < \delta, \quad \left|\sum_{k=n_1}^{\infty} P_k(x)\right| < \delta, \tag{1}$$

$$\left|\sum_{k=n}^{n_1} P_k(x)\right| < \delta, \tag{2}$$

gdzie $n_1 > n$, a n dostatecznie duże obrano. Dalej mamy:

$$\sum_{k=n}^{n_1} P_k(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{n_1} a_{k\lambda}\right) x^\lambda$$

jako sumę skończonej liczby szeregów. Podług (2) jest więc także na całym okręgu koła (r):

$$\left|\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{n_1} a_{k\lambda}\right) x^\lambda\right| < \delta.$$

Lecz wtedy — podług art. 163. (7) — mamy:

$$\left|\sum_{k=n}^{n_1} a_{k\lambda}\right| < \delta r^{-\lambda} < \varepsilon, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{3}$$

gdzie ε dowolnie małą dodatnią może być ilością. Z tego widzimy, że każda suma:

$$a_\lambda = a_{0\lambda} + a_{1\lambda} + a_{2\lambda} + a_{3\lambda} + ... \tag{4}$$

jest taką, że w niej przy dostatecznie dużem n i dowolnie wzrastającem $n_1 > n$ mamy statecznie: $|a_{n\lambda} + a_{n+1,\lambda} + a_{n+2,\lambda} + ... + a_{n_1,\lambda}| < \varepsilon$, a to jest dowodem, że [art. 28, tw. IV.]:

a) Wszystkie a_λ będą skończone.

Wskutek tego w miejsce (3) możemy położyć:

(5) $$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_{k\lambda}\right| \leqq \delta r^{-\lambda},$$

a jeżeli obrane n, δ nie tylko do $|x|=r$ się odnoszą, ale do wszystkich miejsc w $(R_1 \ldots R_2)$ to w (5) można przez r rozumieć dowolne $|x|=r$ zamknięte w granicach: $R_1 < r < R_2$. Napiszmyż (5) w formie

(6) $$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_{k\lambda}\right| r^{\lambda} < \delta,$$

to ta nierówność — gdy $\lambda=0, 1, 2, 3, \ldots$ — wskazuje (art. 157., tw. II.), że szereg $\sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k\lambda}\right). x^{\lambda}$ będzie zbieżny dla wszelkich $|x|<r$, a więc dla wszelkich $|x|<R_2$. Przyjmijmy w (6) λ odjemne, $\lambda=-\mu$, to mamy: $\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_{k-\mu}\right| r^{-\mu} < \delta$, a ta nierówność gdy $\mu=1, 2, 3, \ldots$ — wskazuje znowu, że szereg:

(7) $$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,-\mu}\right)\frac{1}{x^{\mu}} = \sum_{\lambda=-1}^{\infty}\left(\sum a_{k\lambda}\right) x^{\lambda}$$

zbieżny jest dla wszelkich $1/|x| < 1/r$, czyli dla wszelkich $|x|>r$, czyli wreszcie dla wszelkich $|x|>R_1$.

Z tego wynika, że suma szeregów (6), (7)=

(8) $$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k\lambda}\right) x^{\lambda}$$

będzie zbieżną w $(R_1 \ldots R_2)$; jest ona uporządkowaniem sumy $\sum_{k=n}^{\infty} P_k(x)$ podług potęg x.

Dodajmy do (8) sumę $\sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k\lambda}\right) x^{\lambda}$, (bo ją można — art. 166. — uporządkować podług potęg x) to dostaniemy ostatecznie zbieżną sumę:

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k\lambda}\right) x^{\lambda} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda} x^{\lambda} = P(x)$$

będącą uporządkowaniem całej sumy $S(x)$ podług potęg x. Dowiedliśmy zatem:

b) Suma $S(x)$ uporządkowana podług potęg x jest zbieżnym szeregiem w $(R_1 \ldots R_2)$.

Utwórzmy różnicę:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) - \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_\lambda x^\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) + \sum_{k=n}^{\infty} P_k(x)$$

$$- \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k\lambda} \right) x^\lambda - \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k\lambda} \right) x^\lambda,$$

to ponieważ:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k\lambda} \right) x^\lambda,$$

więc będziemy mieli:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(x) - \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_\lambda x^\lambda = \sum_{k=n}^{\infty} P_k(x) - \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a'_\lambda x^\lambda,$$

gdzie dla krótkości $\sum_{k=n}^{\infty} a_{k\lambda} = a'_\lambda$ położono.

Stąd wynika:

$$(9) \qquad \left| S(x) - P(x) \right| \leqq \left| \sum_{k=n}^{\infty} P_k(x) \right| + \left| \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a'_\lambda x^\lambda \right|.$$

Lecz

$$(10) \qquad \left| \sum_{k=n}^{\infty} P_k(x) \right| < \delta,$$

a gdy w relacyi (6) za r położymy $r_2 > r$, $(R_2 > r_2)$, i napiszemy ją w formie $|a'_\lambda| r_2{}^\lambda \frac{r^\lambda}{r^\lambda} < \delta$, albo

$$|a'_\lambda| r^\lambda < \delta \left(\frac{r}{r_2} \right)^\lambda, \quad 0 < \frac{r}{r_2} < 1,$$

to — sumując tu od $\lambda = 0$ do ∞ — dostaniemy:

$$(11) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a'_\lambda| r^\lambda < \delta \frac{r_2}{r_2 - r}.$$

Podstawmy podobnie za r w relacyi (6): $r_1 < r$, $(R_1 < r_1)$, i napiszmy ją w formie $|a'_\lambda| r_1{}^\lambda \frac{r^\lambda}{r^\lambda} < \delta$, albo

$$|a'_\lambda| r^\lambda < \delta \left(\frac{r}{r_1} \right)^\lambda,$$

to sumując tu od $\lambda = -1$ do $-\infty$ mieć będziemy:

$$(12) \qquad \sum_{\lambda=-1}^{\infty} |a'_\lambda| r^\lambda < \delta \frac{r_1}{r - r_1}.$$

Z nierówności (11) i (12) wynika, że w zakresie $(R_1 \dots R_2)$ mamy zawsze:

$$(13) \qquad \left| \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a'_\lambda x^\lambda \right| < \delta \left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r} \right),$$

a uwzględniając (10) i (13) w (9) dostaniemy:

$$|S(x)-P(x)| < \delta \left[1 + \frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r} \right].$$

Prawa strona tej nierówności jest dowolnie małą (dodatnią) ilością, a gdy $|S(x)-P(x)|$ ma być w $(R_1 \dots R_2)$ zawsze od niej mniejszą i zawsze dodatnią, to może być tylko zerem. Mamy więc $|S(x)-P(x)|=0$, a to znaczy:

c) Suma $S(x)=P(x)$ w całym zakresie $(R_1 \dots R_2)$.

Dowiódłszy *a)*, *b)*, *c)* mamy tem samem twierdzenie I. dowiedzione*).

Pd. 1. Z sum $S(x)$ podanych w art. 167. Pd. 1. tylko te, w których $|\alpha|^2=d^2<r$ założono, mają zakres jednostajnej zbieżności w formie koła: $|x|<\sqrt{r-d^2}$. Tylko więc takie sumy możliwem będzie uporządkować podług potęg x i położyć:

$$S(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{r^\lambda} \alpha^{2\lambda} - x \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{r^\lambda} \binom{\lambda}{1} \alpha^{2\lambda-2} + x^2 \sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{r^\lambda} \binom{\lambda}{2} \alpha^{2\lambda-4} + \dots$$

Pd. 2. Zauważmy sumę:

$$S(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} (x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right) \dots \left(x-\frac{1}{\nu}\right),$$

która zalicza się do sum rozważanych w Pd. 2. — art. 167. — a która zbieżną jest jednostajnie w kole $|x|<1$, to ją również możliwem będzie uporządkować podług potęg x. Połóżmyż:

$$(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right) \dots \left(x-\frac{1}{\nu}\right) = (-1)^\nu [c_{0\nu} - c_{1\nu} x + c_{2\nu} x^2 - \dots],$$

to mieć będziemy:

$$S(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu c_{0\nu} - x \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu c_{1\nu} + x^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu c_{2\nu} - \dots$$

W art. 167. powiedzieliśmy, że suma $S(x)$ nie potrzebuje być w dodajnikach P_k absolutnie zbieżną w $(R_1 \dots R_2)$. Połóżmy:

$$|a_{k0}| + |a_{k1} x| + |a_{k2} x^2| + \dots = Q_k(|x|)$$

i przyjmijmy, że $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k(|x|)$ jest zbieżną w pewnym zakresie

---

*) Weierstrass. *Abhandlungen aus der Functionenlehre.* (Berlin 1886) str. 73.

$(R'_1 \dots R'_2)$ zawartym w wspólnym zakresie zbieżności szeregów $P_k(x)$.

Ponieważ w $(R'_1 \dots R'_2)$ mamy:

$$(14) \qquad Q_k(|x|) \geqq |P_k(x)| \quad \text{i}$$

$$(15) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(|x|) \geqq \sum_{k=0}^{\infty} |P_k(x)| \geqq \left| \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) \right|,$$

to stąd wynika przedewszystkiem, że przy zrobionem założeniu suma $S(x)$ w dodajnikach P_k jest w $(R'_1 \dots R'_2)$ absolutnie zbieżną. Lecz dalej pierwsza suma w (15) jest — jak zaraz pokażemy — jednostajnie zbieżną w $(R'_1 \dots R'_2)$. Obierzmy bowiem dowolnie małą dodatnią ilość ε, to na każdem miejscu x leżącem w $(R'_1 \dots R'_2)$ da się oznaczyć pewne dostatecznie duże i skończone ν takie, że będzie $\sum\limits_{k=\nu+s}^{\infty} Q_k < \varepsilon$. Lecz w całem wnętrzu pierścienia $(R'_1 \dots R'_2)$ będą te skończone liczby ν posiadały pewną skończoną górną granicę n. Stąd wnosimy, że na wszystkich miejscach w $(R'_1 \dots R'_2)$ spełni się nierówność: $\sum\limits_{k=n+s}^{\infty} Q_k(|x|) < \varepsilon$, $s = 0, 1, 2, \dots$, a to jest dowodem jednostajnej zbieżności sumy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k$ w $(R'_1 \dots R'_2)$.

Lecz wtedy na tych samych miejscach będzie podług (14):

$$\varepsilon > \sum_{k=n+s}^{\infty} |P_k(x)| \geqq \left| \sum_{k=n+s}^{\infty} P_k(x) \right|, \text{ a w następstwie tego}$$

$$\left| \sum_{k=n}^{n_1} P_k(x) \right| < \varepsilon, \quad n_1 > n.$$

To wskazuje, że suma $S(x)$ jest w dodajnikach P_k jednostajnie zbieżną w zakresie $(R'_1 \dots R'_2)$, a stąd twierdzenie:

II. *Gdy suma $S(x)$ o dodajnikach P_k jest w pewnym zakresie $(R'_1 \dots R'_2)$ zawartym w wspólnym zakresie zbieżności szeregów $P_k(x)$ w ten sposób absolutnie zbieżną, że $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k(|x|)$ jest zbieżną, to jest w tym zakresie zarazem jednostajnie zbieżną i daje się sumować uporządkowaniem podług potęg x.*

169. Ciągłość sumy nieskończenie wielu szeregów wielu zmiennych w razie jej jednostajnej zbieżności. Sumowanie nieskończenie wielu szeregów kilku zmiennych. Przejdźmy do sumowania nieskończenie wielu szeregów:

$$(1) \qquad P_k(x, y, z, ...) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_{k,\lambda\mu\nu...} x^\lambda y^\mu z^\nu ...$$

$$\alpha = \lambda + \mu + \nu + ...; \; k = 0, 1, 2, 3, ... \text{ in inf.}$$

Przyjmijmy, że szeregi P_k mają wspólny zakres zbieżności i że w tym zakresie suma:

$$(2) \qquad S(x, y, z, ...) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x, y, z, ...)$$

w dodajnikach P_k jest jednostajnie zbieżną, albo w obszarze (pierścieniu):

$$(3) \qquad ((R_1 ... R'_1), (R_2 ... R'_2), (R_3 ... R'_3) ...)$$

albo w jednym obszarze (A) nie mającym formy (3), albo wreszcie w kilku obszarach (A), (B), (C), ...

Przy takich założeniach da się tu łatwo — rozumując podobnie, jak w art. 167. — wywnioskować:

I. *Suma $S(x, y, z, ...)$ jest ciągłą funkcyą swoich argumentów w zakresie lub zakresach jednostajnej zbieżności.*

Gdy obszarem jednostajnej zbieżności jest pierścień (3) — lub system kół $((R_1), (R_2), ...)$ w razie gdy S jest sumą zwykłych szeregów potęgowych $\mathfrak{P}_k$ — to da się udowodnić:

II. *Gdy suma $S(x, y, z, ...)$ jest jednostajnie zbieżną w pierścieniu lub systemie kół, to można ją dla każdego miejsca $(x, y, z, ...)$ leżącego w takim obszarze jednostajnej zbieżności wykonać, sumując w niej jednomienne wyrazy, a więc zamienić na szereg $P(x, y, z, ...)$.*

Dowód podamy dla ogólniejszej sumy o dodajnikach P_k.

Z założenia jednostajnej zbieżności w (3), wynika, że na każdem miejscu tego obszaru mamy:

$$(4) \qquad \left| \sum_{k=n+s}^{\infty} P_k \right| < \delta, \; s = 0, 1, 2, ...$$

przy dostatecznem dużem — według dowolnie małej dodatnej wielkości δ — obranem n. Następstwem tej nierówności jest dalej:

$$(5) \qquad \left| \sum_{k=n}^{n_1} P_k \right| < \delta,$$

a że tu po lewej stronie mamy sumę skończonej tylko liczby szeregów P_k, więc można ją zamienić na szereg. Po takiej zamianie dostaniemy w miejsce (5) nierówność:

$$(6) \qquad \left| \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{n_1} a_{k,\lambda\mu\nu...} \right) x^\lambda y^\mu z^\nu ... \right| < \delta.$$

Przyjmijmy:

$$|x|=r_1,\ |y|=r_2,\ |z|=r_3,\ldots \quad \text{gdzie}$$

$$R_1<r_1<R'_1,\ R_2<r_2<R'_2,\ R_3<r_3<R'_3,\ldots$$

to z (6) [podług (14), art. 163.] wynika:

$$(7) \qquad \left|\sum_{k=n}^{n_1} a_{k,\lambda\mu\nu\ldots}\right| \leqq \delta\, r_1^{-\lambda} r_2^{-\mu} r_3^{-\nu}\ldots$$

To wskazuje, ponieważ $n_1>n$ dowolnie wzrastać może, że: *a) szeregi*

$$a_{\lambda\mu\nu\ldots}=\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,\lambda\mu\nu\ldots},\quad \lambda+\mu+\nu+\ldots=\alpha=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$$

są zbieżne.

Wskutek tego można w (7) n_1 zwiększyć do ∞, a wtedy mieć będziemy:

$$(8) \qquad \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\lambda\mu\nu\ldots}\right| r_1^{\lambda}.r_2^{\mu}.r_3^{\nu}\ldots<\delta.$$

Przyjmijmy, że n i δ tak wybrano, że ta nierówność nie tylko dla $|x|=r_1$, $|y|=r_2$, $|z|=r_3,\ldots$, ale na wszystkich miejscach $(x,y,z,\ldots)$ zawartych w (3) się spełnia, to z (8) wnosimy, że — [por. uwagę w art. 160.] —

$$(9) \qquad \sum_{\alpha=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\lambda\mu\nu\ldots}\right) x^{\lambda}.y^{\mu}.z^{\nu}\ldots$$

jest zbieżną dla $|x|<R'_1$, $|y|<R'_2$, $|z|<R'_3,\ldots$ i

$$(10) \qquad \sum_{\alpha=-1}^{-\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\lambda\mu\nu\ldots}\right) x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu}\ldots$$

jest zbieżną dla $|x|>R_1$, $|y|>R_2$, $|z|>R_3,\ldots$

Suma szeregów (9), (10) będzie więc zbieżną w obszarze (3), a gdy do niej dodamy sumę $\sum_{k=0}^{n-1} P_k$, którą wykonać zawsze można sumując jednomienne wyrazy i którą także zbieżną jest w (3), to stąd wyniknie: *b) szereg* $\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda\mu\nu\ldots} x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu}\ldots=P(x,y,z,\ldots)$ *będący uporządkowaniem sumy* $S(x,y,z,\ldots)$ *podług jednomiennych wyrazów* $a_{k,\lambda\mu\nu\ldots} x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu}\ldots$ *jest zbieżny w* (3).

Utwórzmy różnicę:

$$S(x,y,z,\ldots)-P(x,y,z\ldots)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} P_k + \sum_{k=n}^{\infty} P_k \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\lambda\mu\nu\ldots}\right) x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots - \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\lambda\mu\nu\ldots}\right) x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots,$$

to — ponieważ

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\lambda\mu\nu\ldots}\right) x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots -$$

więc mieć będziemy:

$$S(x, y, z, \ldots) - P(x, y, z, \ldots) = \sum_{k=n}^{\infty} P_k - \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a'_{\lambda\mu\nu\ldots} x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots, \tag{11}$$

gdzie dla krótkości $\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\lambda\mu\nu\ldots} = a'_{\lambda\mu\nu\ldots}$ położono.

Z (11) wynika:

$$|S(x, y, z, \ldots) - P(x, y, z. \ldots)| \leqq \left|\sum_{k=n}^{\infty} P_k\right| + \left|\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a'_{\lambda\mu\nu\ldots} x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots\right|. \tag{12}$$

Lecz

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} P_k(x, y, z, \ldots)\right| < \delta, \tag{13}$$

a nierówność (8) — za wprowadzeniem $a'_{\lambda\mu\nu\ldots}$ — możemy napisać w formie:

$$|a'_{\lambda\mu\nu\ldots}|\, r_1^\lambda r_2^\mu r_3^\nu \ldots < \delta. \tag{14}$$

Obierzmy $|x| = \varrho_1 > r_1$, $|y| = \varrho_2 > r_2$, $|z| = \varrho_3 > r_3, \ldots$ a leżące w (3) i połóżmy w (14): $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ za $r_1, r_2, r_3, \ldots$ to dostaniemy:

$$|a'_{\lambda\mu\nu\ldots}|\, \varrho_1^\lambda \left(\frac{r_1}{r_1}\right)^\lambda \cdot \varrho_2^\mu \left(\frac{r_2}{r_2}\right)^\mu \varrho_3^\nu \left(\frac{r_3}{r_3}\right)^\nu \ldots < \delta, \text{ albo:}$$

$$|a'_{\lambda\mu\nu\ldots}|\, r_1^\lambda r_2^\mu r_3^\nu \ldots < \delta \left(\frac{r_1}{\varrho_1}\right)^\lambda \cdot \left(\frac{r_2}{\varrho_2}\right)^\mu \cdot \left(\frac{r_3}{\varrho_3}\right)^\nu \ldots \tag{15}$$

Sumując tu od $\alpha = 0$, do $\alpha = +\infty$ dostaniemy:

$$\sum_{\alpha=0}^{+\infty} |a'_{\lambda\mu\nu\ldots}|\, r_1^\lambda r_2^\mu r_3^\nu \ldots < \delta \frac{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \ldots}{(\varrho_1 - r_1)(\varrho_2 - r_2)(\varrho_3 - r_3)\ldots} \tag{16}$$

Obierzmy dalej w obszarze (3):

$$|x| = \sigma_1 < r_1,\ |y| = \sigma_2 < r_2,\ |z| = \sigma_3 < r_3, \ldots$$

to analogicznie do (15) dostaniemy:

$$|a'_{\lambda\mu\nu\ldots}|\, r_1^\lambda r_2^\mu r_3^\nu \ldots < \delta \left(\frac{r_1}{\sigma_1}\right)^\lambda \left(\frac{r_2}{\sigma_2}\right)^\mu \left(\frac{r_3}{\sigma_3}\right)^\nu \ldots,$$

a sumując to od $\alpha = -1$ do $\alpha = -\infty$ mieć będziemy:

$$\sum_{\alpha=-1}^{-\infty} |a'_{\lambda\mu\nu\ldots}|\, r_1^\lambda r_2^\mu r_3^\nu \ldots < \delta \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots}{(r_1 - \sigma_1)(r_2 - \sigma_2)(r_3 - \sigma_3)\ldots} \tag{17}$$

*

Uwzględniając (13), (16) i (17) w nierówności (12) otrzymamy:

$$|S(x,y,z,...)-P(x,y,z,...)|<$$

$$<\delta.\left[1+\frac{\varrho_1.\varrho_2...}{(\varrho_1-r_1)(\varrho_2-r_2)...}+\frac{\sigma_1.\sigma_2...}{(r_1-\sigma_1)(r_2-\sigma_2)...}\right].$$

Prawa strona tej nierówności jest dowolnie małą dodatnią ilością, a gdy $|S-P|$ ma być w zakresie (3) zawsze od niej mniejszą i zawsze dodatnią, to może być tylko zerem. Mamy więc $|S-P|=0$ w całym zakresie (3), a to znaczy:

c) Suma $S=P$ w całym zakresie (3) *swej jednostajnej zbieżności.*

Dowiódłszy *a), b), c)* mamy tem samem twierdzenie II. dowiedzione.

Pd. 1. Zauważmy sumę:

$$S(x,y)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(x^2-\alpha^2)^\lambda(y^2-\beta^2)^\lambda}{r^\lambda}$$

gdzie r jest rzeczywistą i dodatnią ilością. Suma ta będzie absolutnie zbieżną w obszarze, w którym szereg:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{|x^2-\alpha^2|^\lambda|y^2-\beta^2|^\lambda}{r^\lambda}$$

jest zbieżnym.

Położmy $|\alpha|=d_1$, $|\beta|=d_2$ i przyjmijmy, że $r>d_1^2.d_2^2$, a więc da się przedstawić iloczynem $\rho_1.\rho_2$ takim, że $\rho_1>d_1^2$, $\rho_2>d_2^2$. Suma $S(x,y)$ jest wtedy absolutnie zbieżną w obszarze:

(α) $\qquad |x^2-\alpha^2|<\rho_1,\quad |y^2-\beta^2|<\rho_2,$

albo w szczuplejszym obszarze:

(β) $\qquad |x|<\sqrt{\rho_1-d_1^2},\quad |y|<\sqrt{\rho_2-d_2^2}$ [art. 167. Pd. 1].

Lecz w tym obszarze będzie S zarazem jednostajnie zbieżną sumą. Połóżmy bowiem $(x^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)=z$ to dostaniemy $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(z^\lambda/r^\lambda)$, a ten szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżny dla $|z|<r$; temu zaś zadość czynią nierówności (α), (β). Obszar (β) przedstawia system kół, a za tem idzie że $S(x,y)$ można sumować zamieniając je na szereg potęgowy.

Pd. 2. Okazać, że w razie $r=d_1^2d_2^2$ można obszar jednostajnej zbieżności sumy S przedstawić albo: przez dwie lemniskaty, albo: przez owal i dwa owale, a w razie $r<d_1^2d_2^2$ przez owal i dwa owale, albo przez lemniskatę i dwa owale, albo wreszcie: przez dwa owale i dwa owale.

W tych przypadkach nie da się więc $S(x,y)$ zamienić na szereg potęgowy; to tylko pewna, że w wyliczonych obszarach jest ta suma ciągłą funkcyą swoich argumentów.

Położmy:

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty}|a_{k,\lambda\mu\nu...}|\,|x|^\lambda.|y|^\mu|z|^\nu...=Q_k(|x|,|y|,|z|,...),$$

to w wspólnym zakresie zbieżności szeregów P_k mamy:

$$Q_k(|x|, |y|, |z|, ...) \geqq |P_k(x, y, z, ...)|.$$

Przyjmijmy, że suma $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k$ zbieżną jest w pewnym zakresie:

(18) $$((r_1...r'_1), (r_2...r'_2), ...),$$

to w tym zakresie jest ona niezawodnie jednostajnie zbieżną*), a że

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k \geqq \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k(x, y, z, ...) \right| \geqq \left| \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x, y, z, ...) \right|,$$

więc i suma $S(x, y, z, ...)$ o dodajnikach P_k będzie w (18) absolutnie i jednostajnie zbieżną. Stąd twierdzenie:

III. *Gdy suma $S(x, y, z, ...)$ o dodajnikach P_k jest w pewnym pierścieniu w ten sposób absolutnie zbieżną, że w nim jest $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k$ zbieżną, to ta suma jest tam jednostajnie zbieżną i da się zmienić na szereg $P(x, y, z, ...)$.*

170. Mnożenie i dzielenie szeregów o jednej i wielu zmiennych. Twierdzeń o sumowaniu nieskończenie wielu szeregów użyjemy do wyprowadzenia reguł mnożenia i dzielenia dwóch szeregów potęgowych przez siebie. Gdy szeregi:

(1) $$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ..., \quad \mathfrak{P}_1(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...$$

mają wspólny zakres zbieżności (r), a położymy:

(2) $$\mathfrak{P}(x) . \mathfrak{P}_1(x) = \mathfrak{P}(x) . b_0 + \mathfrak{P}(x) . b_1 x + \mathfrak{P}(x) . b_2 x^2 + ...,$$

to mamy tu po prawej stronie sumę nieskończenie wielu szeregów, która w (r) jest absolutnie zbieżną, gdyż szereg:

(3) $$|\mathfrak{P}(x)| |b_0| + |\mathfrak{P}(x)| |b_1 x| + ... = |\mathfrak{P}(x)| (|b_0| + |b_1 x| + ...)$$

jest w (r) zbieżny. Zastępując w (3) $|\mathfrak{P}(x)|$ przez szereg:

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + ...$$

który w (r) jest także zbieżny, dostaniemy sumę:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + ...) |b_k x^k| = \Sigma Q_k(|x|),$$

która również w (r) będzie zbieżną. Stąd — według tw. II., art. 168. — wynika, że nieskończona suma szeregów w (2) jest w (r) jednostajnie zbieżną i da się wykonać, zmieniając ją na szereg potęgowy. Mamy więc twierdzenie:

I. *Iloczyn $\mathfrak{P}(x) . \mathfrak{P}_1(x)$ jest szeregiem potęgowym:*

$$a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + ... + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + ... + a_0 b_n) x^n + ...$$

---

*) Dochodzimy tu do tego wniosku tem samem rozumowaniem, co o sumie $\Sigma Q_k(x)$ w art. 168.

zbieżnym niezawodnie w wspólnym zakresie zbieżności (r) *mnożonych szeregów. Lecz* (r) *nie zawsze będzie prawdziwym zakresem zbieżności iloczynu.*

Analogicznie rozumując i stosując twierdzenie III., art. poprz., dojdziemy do wniosku:

II. *Iloczyn dwóch szeregów potęgowych:*

$$\mathfrak{P}(x, y, z, ...) = u_0 + u_1 + u_2 + ..., \quad \mathfrak{P}_1(x, y, z, ...) = v_0 + v_1 + v_2 + ...,$$

gdzie u_α, v_α *są-to jednorodne funkcye stopnia* α, *zawarte w szeregach, będzie szeregiem potęgowym:*

$$u_0 v_0 + (u_1 v_0 + u_0 v_1) + (u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2) + ...$$

zbieżnym niezawodnie w wspólnym zakresie zbieżności szeregów $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$. *Lecz ten wspólny zakres nie potrzebuje być z reguły prawdziwym zakresem zbieżności.*

Przejdźmy do dzielenia dwóch szeregów przez siebie.

Gdy $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ są szeregami jednej lub wielu zmiennych o wspólnym zakresie (s), a $\mathfrak{P}_1$ ma wolny wyraz $b \neq 0$, tak, że $\mathfrak{P}_1 = b - \mathfrak{P}'_1$, to iloraz:

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}_1} = \frac{\mathfrak{P}}{b - \mathfrak{P}'_1} = \frac{\mathfrak{P}}{b\left[1 - \frac{\mathfrak{P}'_1}{b}\right]}$$

możliwem będzie zawsze określić szeregiem potęgowym, a to na podstawie takich uwag:

Według art. 164., 165. istnieje zawsze pewne skończone otoczenie (σ) miejsca $x=0$ lub miejsca $(x, y, z, ...) = (0, 0, 0, ...)$ takie, że się w niem $\mathfrak{P}_1$ zerem nigdzie nie staje. W tem otoczeniu jest $|\mathfrak{P}'_1/b| < 1$. Wskutek tego będzie rozwinięcie:

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}_1} = \frac{\mathfrak{P}}{b}\left[1 + \frac{\mathfrak{P}'_1}{b} + \left(\frac{\mathfrak{P}'_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{P}'_1}{b}\right)^3 + ...\right] \tag{4}$$

zbieżnem na wszystkich miejscach wewnątrz (σ). Lecz szereg w nawiasy ujęty jest tam jednostajnie zbieżnym. Kładąc bowiem $\mathfrak{P}'_1 = z$ dostajemy szereg potęgowy $1 + \frac{z}{b} + \frac{z_2}{b^2} + ...$, który jednostajnie jest zbieżnym dla $|z| < |b|$, a temu warunkowi zadość czyni każde miejsce w (σ).

Skutkiem tego całą prawą stronę w (4) zamienić będzie można na szereg potęgowy, a ten będzie:

a) zbieżny w (s), gdy (s) zawiera się w (σ);

b) zbieżny w (σ), gdy (σ) zawiera się w (s).

Lecz ta metoda tworzenia ilorazu — jakkolwiek teoretycznie korzystna, gdyż rozstrzyga zarazem o jego zakresie zbieżności — nastręcza dużo długich rachowań. Z tego powodu trzeba ją w praktyce zastąpić inną, łatwiejszą.

A. Przyjmijmyż, że — w razie jednej zmiennej x — jest $\mathfrak{P}(x)=\Sigma a_\lambda x^\lambda$, $\mathfrak{P}_1(x)=\Sigma b_\lambda x^\lambda$, $b_0 \neq 0$, a iloraz o spółczynnikach jeszcze nieoznaczonych ma postać: $c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+...$, to z równania:

$$\mathfrak{P}(x)/\mathfrak{P}_1(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...$$

dostajemy związek:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+...)=(b_0+b_1x+b_2x^2+...)(c_0+c_1x+c_2x^2+...),$$

który w (s) lub (σ) jest identycznym. Stąd wynika, że:

$$a_0=b_0c_0,\ a_1=b_1c_0+b_0c_1,\ a_2=b_2c_0+b_1c_1+b_0c_2,\ ...,$$

a z tych równań po porządku obliczymy c_0, c_1, c_2, ...

B. Gdy $\mathfrak{P}=u_0+u_1+...$, $\mathfrak{P}_1=v_0+v_1+...$, $v_0 \neq 0$, a położymy: $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_1=w_0+w_1+w_2+...$, gdzie w_α są jednorodnemi funkcyami o nieoznaczonych jeszcze spółczynnikach, to stąd dostajemy związek:

$$u_0+u_1+u_2+...=(v_0+v_1+v_2+...)(w_0+w_1+w_2+...),$$

który ma być identyczny. Z niego wynika szereg równań:

$$u_0=v_0w_0,\ u_1=v_1w_0+v_0w_1,\ u_2=v_2w_0+v_1w_1+v_0w_2,\ ...,$$

a z nich w_0, w_1, w_2, ... dadzą się obliczyć. Mamy więc twierdzenie:

III. *Iloraz* $(\mathfrak{P}:\mathfrak{P}_1)$ *dwóch szeregów potęgowych jednej lub wielu zmiennych, a o dzielniku* $\mathfrak{P}_1$ *z wolnym wyrazem różnym od zera jest szeregiem potęgowym* $\mathfrak{P}_2$, *spełniającym identycznie związek* $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_1\cdot\mathfrak{P}_2$ *i jest zbieżnym: albo w wspólnym zakresie zbieżności* (s) *danych szeregów* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, *gdy w tym zakresie* $\mathfrak{P}_1$ *nigdzie nie jest zerem, albo w zakresie* (σ), *sięgającym do najbliższego miejsca zerowego dzielnika* $\mathfrak{P}_1$ *(gdy się ten dzielnik w zakresie* (s) *staje zerem).*

Jeżeli dzielnik $\mathfrak{P}_1(x)$ nie ma wolnego wyrazu i jest $=x^m(\beta_0+\beta_1x+...)$, to iloraz:
$$\frac{\mathfrak{P}(x)}{\mathfrak{P}_1(x)}=\frac{1}{x^m}\cdot\frac{\mathfrak{P}(x)}{\beta_0+\beta_1x+...}=\frac{1}{x^m}(c_0+c_1x+...)$$
i jest widocznie szeregiem $P(x)$ zawierającym wyrazy z odjemnymi wykładnikami sięgającymi aż do $-m$. Jego zakres zbieżności utworzą wszystkie punkta wewnątrz pewnego koła po wyjęciu punktu $x=0$.

Z reguły dzielenia szeregów wyniknie nowy dowód zasadniczego twierdzenia algebry [art. 50., tw. II.].

Zauważmy całkowitą wymierną funkcyę:

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n,\ c_0 \neq 0$$

i przyjmijmy, że ona na całej płaszczyźnie (x) żadnych miejsc zerowych nie posiada. W takim razie odwrotność:

$$\frac{1}{f(x)}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...,\ \text{gdzie}$$

$$(5) \qquad a_0=\frac{1}{c_0},\ a_1=-\frac{c_1}{c_0^{\,2}},\ a_2=\frac{c_1^{\,2}-c_0c_2}{c_0^{\,3}},\ \dots$$

musiałaby być bezustannie zbieżnym szeregiem, (skończonym dla wszystkich skończonych x).

Funkcya $f(x)$ ma tę własność, że przy obranej dowolnie małej dodatniej ilości ε można zawsze wyznaczyć dostatecznie dużą dodatnią ilość ϱ w ten sposób, że dla wszelkich $|x|=r>\varrho$ będzie:

$$|f(x)\,|\geqq |c_n|\,r^n(1-\varepsilon). \quad \text{[art. 49. } (e)\text{]}.$$

A więc:

$$\frac{1}{|f(x)|}=|a_0+a_1x+\dots|\leqq\frac{1}{|c_n|r^n(1-\varepsilon)},\ \text{gdy } |x|=r>\varrho.$$

Stąd wynika, że, gdy g_r jest największą wartością $|a_0+a_1x+\dots|$ na kole (r), to widocznie:

$$\frac{1}{|c_n|\,r^n(1-\varepsilon)}\geqq g_r.$$

Lecz wtedy — według twierdzenia o spółczynnikach szeregu potęgowego mamy:

$$|a_\lambda|\,r^\lambda\leqq\frac{1}{|c_n|r^n(1-\varepsilon)},\quad \lambda=0,1,2,\dots,\ \text{czyli:}$$

$$|a_\lambda|\leqq\frac{1}{|c_n|\,r^{\lambda+n}(1-\varepsilon)},\quad \lambda=0,1,2,\dots$$

przy dowolnie rosnącem r. To wskazywałoby, że wszystkie współczynniki a_λ, $\lambda=0,1,\dots$ są zerami. Tak jednak nie jest, gdyż to się sprzeciwia określeniom (5), a stąd wynika, że $f(x)$ ma koniecznie punkta pierwiastkowe na płaszczyźnie swego argumentu.

171. Szereg dwumienny (Newtona). Arytmetyczne obliczanie pierwiastka danej liczby. W tym i następnych artykułach użyjemy reguł mnożenia i dzielenia dwóch szeregów potęgowych jednej zmiennej do wyprowadzenia pewnych form, określeń i związków, które w analizie ważną odgrywają rolę.

Wiadomo, że — przy całkowitem, dodatniem i skończonem μ — jest:

$$(1) \qquad (1+x)^\mu=1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\dots+x^\mu,\quad \text{gdzie}$$

$$(2) \qquad \binom{\mu}{r}=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-r+1)}{1.2.3\dots r},\quad r=0,1,\dots,\mu,$$

a x jest zmienną nieograniczoną.

Niech teraz (τ) przedstawia zakres wszelkich rzeczywistych skończonych liczb dodatnich i ujemnych z wyjątkiem wartości: 0, +1, +2, +3, +4, ..., to przyjmując, że μ właśnie do tego zakresu (τ) należy, możemy wyrazy (2) tworzyć dla $r=0, 1, 2, 3, \ldots$ *in inft.*, a formą uogólniającą rozwinięcie (1) będzie szereg potęgowy:

$$N(x,\mu)=1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\ldots \tag{3}$$

zwany szeregiem dwumiennym, albo szeregiem Newton'a.*) Zawarty w nim parametr μ nazywa się wykładnikiem.

Zakresem zbieżności szeregu (3) jest: $|x|<1$, gdyż tu

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n=\infty}\left|\frac{\mu-n}{n+1}\right|.|x|=|x|.$$

Mając to, weźmy z zakresu (τ) dwie dowolne liczby p, q i utwórzmy szeregi $N(x,p)$, $N(x,q)$. Ich iloczyn przedstawi się rozwinięciem:

$$N(x,p).N(x,q)=1+\left[\binom{p}{1}+\binom{q}{1}\right]x+\left[\binom{p}{2}+\binom{p}{1}\binom{q}{1}+\binom{q}{2}\right]x^2+\ldots$$
$$=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots,$$

które niezawodnie będzie również zbieżne w zakresie $|x|<1$. Co się tyczy spółczynników a_n, to mamy:

$$a_n=\binom{p}{n}+\binom{p}{n-1}\binom{q}{1}+\binom{p}{n-2}\binom{q}{2}+\ldots+\binom{q}{n}=$$

$$(\alpha)\quad \binom{p}{n}+\frac{n-1}{n}\binom{p}{n-1}\binom{q}{1}+\frac{n-2}{n}\binom{p}{n-2}\binom{q}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\binom{p}{1}\binom{q}{n-1}+\binom{q}{n}$$

$$(\beta)\quad +\frac{1}{n}\binom{p}{n-1}\binom{q}{1}+\frac{2}{n}\binom{p}{n-2}\binom{q}{2}+\ldots+\frac{n-1}{n}\binom{p}{1}\binom{q}{n-1}.$$

Lecz

$$(\alpha')\quad \binom{p}{r}=\binom{p}{r-1}\frac{p-r+1}{r},\qquad (\beta')\quad \binom{q}{r}=\binom{q}{r-1}\frac{q-r+1}{r}.$$

Uwzględniwszy więc (α') w (α), a (β') w (β), dostaniemy: $a_n=$

$$\binom{p}{n-1}\frac{p-n+1}{n}+\binom{p}{n-2}\binom{q}{1}\frac{p-n+2}{n-1}.\frac{n-1}{n}+$$
$$+\binom{p}{n-3}\binom{q}{2}\frac{p-n+3}{n-2}.\frac{n-2}{n}+\ldots$$
$$+\binom{p}{n-1}\frac{q}{n}+\binom{p}{n-2}\binom{q}{1}\frac{q-1}{2}.\frac{2}{n}+\binom{p}{n-3}\binom{q}{2}\frac{q-2}{3}.\frac{3}{n}+\ldots,$$

czyli:

---

*) Por. Isaaci Newtoni Opuscula (1744) T. I. *„Analysis per aequationes numero terminorum infinitas"* (1711) w ustępie *„Exempla radicem extrahenda"*.

$$a_n=\frac{p+q-n+1}{n}\left[\binom{p}{n-1}+\binom{p}{n-2}\binom{q}{1}+\binom{p}{n-3}\binom{q}{2}+\ldots+\binom{q}{n-1}\right],$$

czyli wreszcie:

$$a_n=a_{n-1}\cdot\frac{p+q-n+1}{n},\quad n=2,3,\ldots$$

Stąd — ponieważ:

$$a_1=\binom{p}{1}+\binom{q}{1}=\binom{p+q}{1}\ -$$

dostaniemy po porządku:

$$a_2=\binom{p+q}{2},\quad a_3=\binom{p+q}{3},\ \ldots,\ a_n=\binom{p+q}{n},\ \ldots$$

w następstwie czego mamy:

(4) $$N(x,p).N(x,q)=N(x,p+q),$$

a to znaczy:

I. *Dwa szeregi dwumienne o wykładnikach p, q dają na iloczyn znowu szereg dwumienny o wykładniku $(p+q)$.*

Z równania (4) wynika dalej:

(5) $$N(x,p)\,N(x,q).N(x,s).N(x,t)\ldots=N(x,p+q+s+t+\ldots)$$

i wreszcie:

(6) $$[N(x,p)]^k=N(x,kp)$$

jeżeli k jest całkowitą dodatnią liczbą.

Lecz — choć p, q w (4) należą do zakresu (τ) — suma ich $p+q=c$ może być dodatnią całkowitą liczbą (albo zerem). W tym razie jest $N(x,p+q)=N(x,c)=(1+x)^c$, a więc:

(7) $$N(x,p).N(x,q)=(1+x)^c.$$

Iloczyn takich dwóch szeregów jest zatem całkowitą wymierną funkcyą, (zbieżną w całej nieograniczonej płaszczyźnie argumentu x), należy więc do tych iloczynów, których zakres zbieżności większym jest od wspólnego zakresu zbieżności mnożonych ze sobą szeregów.

Przyjmijmy w szczególności $p+q=0$, a więc $q=-p$, to dostaniemy $N(x,p).N(x,-p)=1$ [podług (7)], a więc stąd:

(8) $$\frac{1}{N(x,p)}=N(x,-p),$$

to znaczy:

II. *Odwrotność szeregu $N(x,p)$ równa się szeregowi $N(x,-p)$.*

Przy p całkowitem dodatniem dostajemy z (8):

(9) $$N(x,-p)=(1+x)^{-p},$$

co wskazuje, że szereg N z całkowitym ujemnym wykładnikiem $-p$ określa w zakresie $|x|<1$ wymierną ułamkową funkcyę $(1+x)^{-p}$.

Przyjmijmy, że wykładnik μ szeregu $N(x,\mu)$ należąc do zakresu (τ) jest wymiernym i niecałkowitym, ma więc postać $\frac{\pm\lambda}{\nu}$, gdzie λ, ν są niewspółmiernemi całkowitemi i dodatniemi już liczbami. Wtedy — wskutek (6), (1) i (8) — mamy:

$$\left[N\left(x, \frac{\pm\lambda}{\nu}\right)\right]^{\nu} = N(x, \pm\lambda) = (1+x)^{\pm\lambda}$$

a stąd:

$$N\left(x, \frac{\pm\lambda}{\nu}\right) = (1+x)^{\pm\frac{\lambda}{\nu}} \text{*)}. \tag{10}$$

Przytem po prawej stronie należy wziąć główną wartość ν^{go} pierwiastka funkcyi $(1+x)^{\pm\lambda}$ [art. 22.], gdyż po lewej stronie przy $x=0$ dostajemy 1, a w razie innej wartości tego pierwiastka mieć byśmy tam powinni dla $x=0$ jedną z wartości $1_{\frac{2\pi s}{\nu}}$, $s=1,2,3,\ldots,\nu-1$.

Gdy wreszcie wykładnik μ nie będzie wymiernym i jest granicą liczb wymiernych h_1, h_2, h_3, ...; to i tu położymy:

$$N(x, \mu) = (1+x)^{\mu} \tag{11}$$

ograniczając x do zakresu: $|x|<1$ i rozumiejąc przez μ granicę $\lim\limits_{\lambda=\infty} h_\lambda$.

Z relacyj (1), (9), (10), (11) wynika:

III. *Szereg dwumienny $N(x,\mu)$ o jakiemkolwiek rzeczywistem μ nie mającem wartości liczb: $0, +1, +2, +3, \ldots$ określa — gdy $|x|<1$ — potęgę $(1+x)^{\mu}$; przytem w razie ułamkowego μ wymiernego lub niewymiernego ma $(1+x)^{\mu}$ znaczenie głównej swej wartości.*

Gdy $\mu=0, +1, +2, \ldots$, to ograniczenie $|x|<1$ nie jest potrzebne, a $N(x,\mu)$ jest skończoną formą.

Uwaga 1. Spółczynniki $\binom{\mu}{r}$ — w razie gdy w nich μ jest odjemne całkowite albo ujemnym lub dodatnim ułamkiem, trzeba zawsze sprowadzić do form $\pm\frac{a}{b}$, gdzie a i b są już iloczynami samych liczb dodatnich i całkowitych.

Uwaga 2. Rozwinięć $N(x,\mu)$, w których $\mu=\frac{1}{m}$, $m=2, 3, 4, \ldots$ używa się w arytmetyce do przybliżonego obliczenia m^{go} pierwiastka danej liczby dodatniej.

Pd. 1. $\sqrt[7]{\frac{4}{5}} = \left(1-\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{7}} = N\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right)$. Lecz — gdy zważymy, że

---

*) Co do wyprowadzenia relacyj (4)—(10) por. J. Dienger. *Die allgemeinen unendlichen Reihen in der Analysis...* Crelle J. T. 34., str. 209.

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}},$$

to także będzie;

$$\sqrt[7]{\frac{4}{5}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{7}}}=N\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{7}\right).$$

Pd. 2. Ponieważ $11=2^3+3=2^3\left(1+\frac{3}{8}\right)$, więc

$$\sqrt[3]{11}=2\left(1+\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=2.N\left(\frac{3}{8},\frac{1}{3}\right).$$ Podobnie

$$7=3^2-2=3^2\left(1-\frac{2}{9}\right),$$ a więc:

$$\sqrt{7}=3\left(1-\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=3.N\left(-\frac{2}{9},\frac{1}{2}\right).$$

Pd. 3. $\sqrt[8]{250}$ obliczymy, kładąc $250=2^8.\left(\frac{250}{2^8}\right)=2^8.\frac{250}{256}=2^8\left(1-\frac{3}{128}\right)$. Stąd

$$\sqrt[8]{250}=2\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{8}}=2.N\left(-\frac{3}{128},\frac{1}{8}\right).$$

Lecz także mamy:

$$250=2^8.\frac{1}{\frac{256}{250}}=2^8.\frac{1}{1+\frac{6}{250}}=2^8.\frac{1}{1+\frac{3}{125}},$$

a więc:

$$\sqrt[8]{250}=2\left(1+\frac{3}{125}\right)^{-\frac{1}{8}}=2.N\left(\frac{3}{128},-\frac{1}{8}\right).$$

Pd. 4. Obliczyć $\sqrt[3]{3}$, kładąc $3=\frac{3^3}{2^3}.\frac{2^3.3}{3^3}$ i kładąc $3=\frac{13^3}{9^3}\frac{9^3.3}{13^3}$.

172. Badanie zbieżności szeregu $N(x,\mu)$ w punktach $x=\pm 1$. Na samym okręgu koła $|x|=1$ zbadajmy zbieżność szeregu N w punktach $x=\pm 1$*).

Połóżmy:

$$\frac{\mu-k}{k+1}=\frac{\mu+1-(k+1)}{k+1}=-\left(1-\frac{\mu+1}{k+1}\right),$$

to mieć będziemy:

(1) $\binom{\mu}{r}=(-1)^r\left(1-\frac{\mu+1}{1}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{2}\right)\dots\left(1-\frac{\mu+1}{r}\right)=(-1)^r q_r$, a dalej

$$N(\pm 1,\mu)=1\mp q_1+q_2\mp q_3+q_4\mp q_5+\dots \tag{2}$$

Z (1) wnosimy, że — gdy $\mu+1>0$, a więc $\mu>-1$ — to q_r, od dostatecznie dużego r począwszy, są już jednakowego znaku,

*) J. Dienger l. c. str. 226. — por. także: E. Heine. *Über die binomische Reihe.* Crelle J. T. 55. str. 279.

a malejąc (co do bezwzględnych swych wartości) dążą do granicy zero [art. 14.]. Stąd wynika, że $N(+1,\mu)_{\mu>-1}$ będzie szeregiem zbieżnym (w porządku dodajników wskazanym przez (2) — [art. 10., tw. II.].

Gdy $\mu+1<0$, a więc $\mu<-1$, to q_r dążą do granicy ∞, a w razie $\mu+1=0$ t. j. $\mu=-1$ są wszystkie $q_r=1$. Z tego powodu będą szeregi $N(\pm 1,\mu)_{\mu\leqq -1}$ nieprzydatne, rozbieżne.

Niech $\mu=-s$ zawiera się w obszarze $(-1...0)$. Wtedy mamy

$$(3)\qquad N(-1,-s)=1+\frac{s}{1!}+\frac{s(s+1)}{2!}+\frac{s(s+1)(s+2)}{3!}+...>0.$$

W jego dodajnikach:

$$\frac{s(s+1)(s+2)...(s+k)}{1.\ 2.\ 3...\ \ k+1},\ k=1,2,3,...,$$

połóżmy w czynnikach $(s+1), (s+2),..., (s+k)$ za s zero, to dostaniemy $s/(k+1)$, $k=1,2,...$ a szereg sam przejdzie na szereg:

$$(4)\qquad 1+\frac{s}{1}+\frac{s}{2}+\frac{s}{3}+\frac{s}{4}+...$$

którego wartość ma być mniejsza od wartości szeregu (3). Lecz (4) jest szeregiem rozbieżnym (art. 5.), a więc i $N(-1,-s)=\infty$.

Pozostaje zatem jeszcze do zbadania:

$$N(-1,\mu)=1+q_1+q_2+q_3+...\ \text{dla}\ \mu>0.$$

W tym szeregu mamy przy dostatecznie dużem n:

$$(5)\qquad \left|\frac{q_{n+1}}{q_n}\right|=1-\frac{\mu+1}{n+1},\ \text{a}\ lim\left|\frac{q_{n+1}}{q_n}\right|=1.$$

Jestto więc szereg wątpliwej zbieżności, a chcąc go badać metodą opisaną w art. 7. nie dojdziemy do pożądanego celu.

Zauważmy jednak szereg:

$$\frac{1}{1^{\mu+1}}+\frac{1}{2^{\mu+1}}+\frac{1}{3^{\mu+1}}+...=v_0+v_1+v_2+...,$$

który przy $\mu>0$ jest zbieżny, to mamy tu:

$$(6)\qquad \begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n}&=\left[\frac{n+1}{n+2}\right]^{\mu+1}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\mu+1}}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-(\mu+1)}\\&=1-\frac{\mu+1}{n+1}+\varepsilon_{n+1}\end{aligned}$$

gdzie ε_{n+1} (reszta rozwinięcia) jest >0.

Z (5) i (6) wnosimy, że, od dostatecznie dużego n poczynając, mamy statecznie:

$$\left|\frac{q_{n+k+1}}{q_{n+k}}\right| < \frac{v_{n+k+1}}{v_{n+k}},\quad k=0, 1, 2, \ldots$$

czyli
$$\frac{|q_{n+k+1}|}{v_{n+k+1}} < \frac{|q_{n+k}|}{v_{n+k}}.$$

Dostajemy więc nieskończony szereg nierówności:

$$\ldots < \frac{|q_{n+k+1}|}{v_{n+k+1}} < \frac{|q_{n+k}|}{v_{n+k}} < \ldots < \frac{|q_{n+1}|}{v_{n+1}} < \frac{|q_n|}{v_n}.$$

Połóżmy $\frac{|q_n|}{v_n} = \varrho$, to mamy:

$$|q_{n+1}| < \varrho \cdot v_{n+1},\quad |q_{n+2}| < \varrho \cdot v_{n+2},\quad |q_{n+3}| < \varrho \cdot v_{n+3},\ \ldots$$

Stąd wynika, że:

$$|q_{n+1}| + |q_{n+2}| + |q_{n+3}| + \ldots < \varrho\,(v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \ldots)$$

a to wskazuje, że szereg $N(-1, \mu)$ dla $\mu > 0$ jest bezwarunkowo zbieżnym. Lecz tem się zarazem stwierdza, że i $N(+1, \mu)$ jest tak samo zbieżne, gdy $\mu > 0$, [art. 158., tw. I.].

Z przeprowadzonych wyżej poszukiwań dochodzimy do twierdzeń:

I. *Szereg $N(\pm 1, \mu)$ jest bezwarunkowo zbieżny dla $\mu > 0$. Szereg $N(\pm 1, \mu)$ jest rozbieżny dla $\mu \leqq -1$. Szereg $N(+1, \mu)$ jest warunkowo zbieżny, a $N(-1, \mu)$ rozbieżny dla $-1 < \mu < 0$.*

II. *Szereg $N(x, \mu)$ jest bezwarunkowo zbieżnym na całym okręgu $|x| = 1$ gdy $\mu > 0$.*

173. Znamiona zbieżności szeregu $u_0 + u_1 + \ldots$ obmyślone przez Gaussa i Raabe'go. Przykłady. Opierając się na rozwijaniu potęgi, możemy dojść do nowego znamienia zbieżności szeregu:

(1) $$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

o rzeczywistych lub urojonych dodajnikach u_n dających:

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1.$$

Równocześnie z (1) zauważmy szereg:

(2) $$\frac{1}{1^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \ldots = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

który zakładamy zbieżnym, przyjmując $m > 0$.

Utwórzmy wyraz:

$$n \cdot \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = n\left(1 - \frac{n^{m+1}}{(n+1)^{m+1}}\right) = n\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1}}\right)$$

$$=n\,.\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m+1}-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m+1}}.$$

Zakładając $n \geqq 2$, możemy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m+1}$ rozwinąć na szereg N, a wtedy dostaniemy:

$$n\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=n\,.\,\frac{(m+1)\frac{1}{n}+\frac{(m+1)m}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots}{1+(m+1)\frac{1}{n}+\ldots}=\frac{(m+1)+\frac{(m+1)m}{2}\cdot\frac{1}{n}+\ldots}{1+(m+1)\frac{1}{n}+\ldots}.$$

Stąd wyniknie:

$$\lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=m+1, \text{ a więc } >1.$$

Przyjmijmy, że w danym szeregu (1) mamy:

$$\lim_{n=\infty} n\left(1-\left|\frac{u_{n+1}}{u_u}\right|\right)=\alpha>1,$$

to wybierając $m>0$ tak, aby $\alpha>m+1$ było, mieć musimy — począwszy od pewnego dostatecznie dużego n — nierówności:

$$(n+k)\left(1-\left|\frac{u_{n+k+1}}{u_{n+k}}\right|\right)>(n+k)\left(1-\frac{v_{n+k+1}}{v_{n+k}}\right),$$

$$\text{albo } \left|\frac{u_{n+k+1}}{u_{n+k}}\right|<\frac{v_{n+k+1}}{v_{n+k}}, \text{ albo wreszcie:}$$

$$\frac{|u_{n+k+1}|}{v_{n+k+1}}<\frac{|u_{n+k}|}{v_{n+k}},\ k=0, 1, 2, 3, \ldots$$

Stąd — gdy położymy $|u_n|/v_n=\varrho$ — dostaniemy, jak w art. poprzedzającym:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+|u_{n+3}|+\ldots<\varrho\,(v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots).$$

To wskazuje, że szereg dany jest (absolutnie) zbieżny.

Przyjmijmy przeciwnie, że:

$$\lim n\left(1-\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)=\beta<1.$$

Biorąc wtedy m odjemne $=-m_1$, dostajemy szereg (2) rozbieżny, a jego:

$$\lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=1-m_1.$$

Gdy m_1 wyznaczymy tu tak, że będzie $\beta<1-m_1$, to wtedy — poczynając od dostatecznie dużego n — mieć będziemy:

$$(n+k)\left(1-\left|\frac{u_{n+k+1}}{u_{n+k}}\right|\right)<(n+k)\left(1-\frac{v_{n+k+1}}{v_{n+k}}\right)$$
$$k=0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

a kładąc $|u_n|/v_n=\varrho$ i postępując dalej analogicznie, jak w przypadku pierwszym, dojdziemy do nierówności:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots>\varrho\,(v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots),$$

z której widocznie wynika rozbieżność danego szeregu. Mamy więc twierdzenie:

I. *Gdy w szeregu* Σu_λ *jest* $q=lim\ |u_{n+1}/u_n|=1$, *ale*

$$q'=lim\ n\,(1-|u_{n+1}/u_n|),$$

okazuje się >1, *lub* <1, *to w pierwszym razie jest szereg (absolutnie) zbieżny, w drugim rozbieżny* *).

Pd. 1. W szeregu:

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$$

mamy $q=|x|^2$, a więc szereg jest zbieżny w kole: $|x|<1$. Dla $|x|=1$ mamy $q=1$, ale:

$$q'=n\left(1-\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right)_{n=\infty}=\left[\frac{2n^2(2n+1)-n(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right]_{n=\infty}$$
$$=\left[\frac{2n(2n+1)-(2n-1)^2}{2(2n+1}\right]_{n=\infty}=\frac{6}{4}>1.$$

Szereg jest zatem jeszcze zbieżny na całym okręgu koła $|x|=1$.

Pd. 2. Szereg

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.\,2.\,\gamma.\,(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.\,2.\,3.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

gdzie α, β, γ są stałe rzeczywiste, lub urojone, nazywa się szeregiem Gauss'a, albo szeregiem hypergeometrycznym **).

Co się tyczy parametrów α, β, γ wchodzących w spółczynniki jego, to zauważyć trzeba:

1) γ nie może być odjemną całkowitą liczbą $-\mu$: bo w takim razie, od $(\mu+1)^{go}$ wyrazu począwszy, wszystkie spółczynniki byłyby nieskończone, chyba że równocześnie α (lub β) ma wartość $-\mu$ (por. niżej punkt 3).

2) α lub β nie może być całkowitą odjemną liczbą $-\mu$, bo w takim razie szereg zawierałby tylko $(\mu+1)$ wyrazów i byłby całkowitą funkcyą wymierną μ^{go} stopnia, (chyba, że równocześnie $\gamma=-\mu$).

3) w przypadku $\gamma=\alpha$ (lub $=\beta$) — bez różnicy, czy te parametry mają wartość $-\mu$, czy nie — szereg będzie zależny jedynie od jednego parametru β (lub α) i będzie miał postać:

) Por. J. Raabe („Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Reihen“) Zeitschrift für Physik und Mathematik von A. Baumgärtner und Ettingshausen.* T. X. str. 65. (Wiedeń 1832.).

**) *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\ldots$ Gauss. Werke. T. 3. str. 125.

$$1+\frac{\beta}{1}x+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}x^2+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3}x^3+\dots$$

Wykluczywszy wartości parametrów wyszczególnione w 1) i 2) utwórzmy iloraz:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x\right|=\left|\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}x\right|;$$

dąży on do granicy $q=|x|$, a stąd wynika, że szereg — przy dozwolonych wartościach α, β, γ — będzie zbieżny dla $|x|<1$.

Na samym okręgu $|x|=1$ mamy $q=1$, a więc zbieżność wątpliwą. Gdy się tu do rzeczywistych α, β, γ ograniczymy i zauważymy, że w takim razie spółczynniki szeregu — począwszy od dostatecznie dużego n — będą statecznie dodatne, to q'— przy takiem dostatecznie już dużem n — będziemy mogli napisać w ten sposób:

$$q'=n\left(1-\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}\right)_{n=\infty}=\left|\frac{1+\gamma-\alpha-\beta+\frac{\gamma-\alpha\beta}{n}}{1+\frac{1+\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}}\right|_{n=\infty}$$
$$=1+\gamma-\alpha-\beta.$$

Stąd wynika: Gdy parametry α, β, γ w szeregu Gaussa są rzeczywiste, to szereg ten jest na okręgu $|x|=1$ zbieżnym, gdy $\gamma>\alpha+\beta$, a rozbieżnym, gdy $\gamma<\alpha+\beta$.

Przyjmijmy, że szereg $\Sigma|u_\lambda|$, daje — od pewnego n począwszy — ilorazy $|u_{n+1}/u_n|$ w postaci:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n^k+A_1n^{k-1}+A_2n^{k-2}+\dots}{n^k+B_1n^{k-1}+B_2n^{k-2}+\dots},\tag{3}$$

gdzie k całkowitą dodatnią jest liczbą, a A_1, A_2,..., B_1, B_2, ... są stałe od n niezależne. Z (3) widzimy, że tu $q=1$. Utwórzmyż:

$$n\left(1-\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)=\frac{(B_1-A_1)+(B_2-A_2)\frac{1}{n}+\dots}{1+B_1\frac{1}{n}+B_2\frac{1}{n^2}+\dots},$$

to widocznie mamy tu: $q'=B_1-A_1$, a stąd na podstawie twierdzenia I. wnosimy:

II. *Gdy w szeregu* $\Sigma|u_\lambda|$ *mamy* $q=1$, *a ilorazy* $|u_{n+1}/u_n|$ *mają — od pewnego n począwszy — postać* (3), *to szereg jest zbieżny, gdy* $B_1-A_1>1$, *a rozbieżny, gdy* $B_1-A_1<1$.*)

*) Gauss l. c. str. 139. — Raabe l. c. str. 65. Ze względu na treść bieżącego art. por. także: J. Petersen *„Vorlesungen über Functionstheorie“* (Kopenhaga 1898.), str. 121... Są tam podane inne jeszcze znamiona zbieżności (Bertrand, de Morgan, Kummer, Jensen).

Pd. 3. Szereg:

$$x+\frac{2}{5}x^2+\frac{2.3}{5.6}.x^3+\frac{2.3.4}{5.6.7}x^4+\ldots$$

zbieżny jest w kole $|x|<1$. Przy $|x|=1$ mamy $q=1$, ale $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n+1}{n+4}$, a więc $B_1=4$, $A_1=1$, $B_1-A_1=3>1$; szereg jest więc zbieżny i na całym okręgu $|x|=1$.

Pd. 4. Szereg:

$$x+\frac{1.2}{3.5}x^2+\frac{1.2.2.3}{3.5.4.6}x^3+\frac{1.2.2.3.3.4}{3.5.4.6.5.7}x^4+\ldots$$

będzie zbieżny dla $|x|<1$. Gdy $|x|=1$ mamy wątpliwą zbieżność; ale tu jest:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+4)}=\frac{n^2+n}{n^2+6n+8}$$

$A_1=1$, $B_1=6$, $B_1-A_1=5>1$, a więc szereg jest jeszcze zbieżny i na okręgu $|x|=1$.

Pd. 5. Zbadać zakres zbieżności szeregu:

$$1+\binom{m}{2}\binom{p}{1}x+\binom{m}{2}\binom{p}{2}x^2+\binom{m}{3}\binom{p}{3}x^3+\ldots,$$

gdzie m, p nie są dodatnie całkowite liczby, ale są rzeczywiste i podać warunki, przy których ten szereg także i na okręgu swego koła zbieżności pozostaje zbieżnym. [Odp. $m+p+2>1$].

Pd. 6. Zastosować twierdzenie II. do zbadania zbieżności szeregu Gauss'a na okręgu: $|x|=1$.

ROZDZIAŁ XIV.

Rozwijania ułamkowych funkcyj wymiernych.

174. Rozwijanie funkcyi wymiernej ułamkowej na szereg zwrotny ***(serie récourrante).*** Regułę dzielenia dwóch szeregów zastosujemy tu do rozwijania na szereg funkcyi wymiernej ułamkowej:

$$(1)\qquad u(x)=\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}{c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n},\quad c_0\neq 0,$$

kładąc:

$$(2)\qquad u(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots \textit{ in inft.}$$

i zajmując się dokładnie formami spółczynników a_α.

I⁰. Przyjmijmy $m<n$. Obliczywszy wtedy $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ z n równań:

$$(3)\quad b_0=c_0a_0,\ b_1=c_0a_1+c_1a_0,\ \ldots,\ b_{n-1}=c_0a_{n-1}+c_1a_{n-2}+\ldots+c_{n-1}a_0,$$

dostaniemy już potem statecznie:

$$(3')\qquad c_0a_k+c_1a_{k-1}+c_2a_{k-2}+\ldots+c_na_{k-n}=0,\ \text{czyli:}$$

$$a_k = -\frac{c_1}{c_0} a_{k-1} - \frac{c_2}{c_0} a_{k-2} - \dots - \frac{c_n}{c_0} a_{k-n},$$
$$k = n,\ n+1,\ n+2, \dots$$

II⁰. W razie, gdy $m \geqq n$, obliczymy $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ z pierwszych $(m+1)$ równań:

(4) $b_0 = c_0 a_0,\ b_1 = c_0 a_1 + c_1 a_0, \dots, b_m = c_0 a_m + c_1 a_{m-1} + \dots + c_n a_{m-n},$

a potem dostaniemy statecznie:

(4') $$c_0 a_k + c_1 a_{k-1} + \dots + c_n a_{k-n} = 0, \text{ czyli:}$$

$$a_k = -\frac{c_1}{c_0} a_{k-1} - \frac{c_2}{c_0} a_{k-2} - \dots - \frac{c_n}{c_0} a_{k-n}$$
$$k = m+1,\ m+2,\ m+3, \dots$$

W pierwszym więc wypadku szereg liczb:

(*A*) $$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

a w drugim szereg liczb:

(*B*) $$a_{m-n+1}, a_{m-n+2}, a_{m-n+3}, \dots$$

jest tego rodzaju, że $(n+1)^{\text{sza}}$, $(n+2)^{\text{ga}}$, ... liczba jest zawsze taką samą jednorodną funkcyą n liczb bezpośrednio ją poprzedzających.

Z tego powodu nazywamy szeregi (*A*), (*B*) szeregami liczb zwrotnych, a tę samą nazwę dajemy rozwinięciu (2) nazywając je szeregiem zwrotnym.

Gdy naodwrót dany będzie szereg zwrotny:

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

poczynający swoją zwrotność od a_0, lub a_{m-n+1}, to iloczyn:

$$(c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n) \mathfrak{P}(x)$$

będzie — wskutek związków (3), (3'), albo (4), (4), — funkcyą całkowitą wymierną $f(x)$ stopnia m^{go}, tak, że

$$\mathfrak{P}(x) = f(x) / [c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n].$$

Stąd twierdzenie:

I. *Każdą wymierną ułamkową funkcyę można rozwinąć według rosnących potęg jej argumentu na szereg zwrotny. Naodwrót każdy taki szereg jest rozwinięciem pewnej takiej funkcyi.*

Gdy z pierwiastków równania $c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = 0$ *ma pierwiastek* ξ_1, *najmniejszą bezwzględną wartość, to rozwinięcie* $\mathfrak{P}(x)$ *zbieżne jest w kole* $|x| < |\xi_1|$.

Napiszmy:

$$u(x) = x^{m-n} . \frac{b_m + b_{m-1} x^{-1} + \dots + b_0 x^{-m}}{c_n + c_{n-1} x^{-1} + \dots + c_0 x^{-n}}$$

i połóżmy $x^{-1} = z$, to mieć będziemy:

$$u(x) = x^{m-n} . \frac{b_m + b_{m-1} z + \dots + b_0 z^m}{c_n + c_{n-1} z + \dots + c_0 z^n}.$$

*

Drugi czynnik po prawej stronie można — podług tw. I. — rozwinąć na szereg zwrotny:

$$\mathfrak{P}'(z)=a'_0+a'_1z+a'_2z^2+a'_3z^3+\dots,$$

zbieżny dla $|z|<\frac{1}{|\xi_n|}$, jeżeli ξ_n jest pierwiastkiem równania:

$$c_0+c_1x+\dots+c_nx^n=0$$

o największej bezwzględnej wartości. Wracając teraz do zmiennej x, dostaniemy szereg:

$$(5) \qquad u(x)=x^{m-n}(a'_0+a'_1\frac{1}{x}+a'_2\frac{1}{x^2}+\dots)$$

zbieżny dla $|x|>|\xi_n|$. To znaczy:

II. *Każdą funkcyę wymierną ułamkową rozwinąć można na szereg zwrotny uporządkowany podług spadających potęg jej argumentu, a zbieżny zewnątrz koła o środku w $x=0$, a o obwodzie przechodzącym przez najdalszy punkt pierwiastkowy jej mianownika.*

175. Zastosowanie do funkcyi $f'(x):f(x)$. Zajmijmy się rozwinięciem $f'(x)/f(x)$, w którym $f'(x)$ jest pochodną funkcyi:

$$f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\dots+c_n.$$

Gdy równanie $f(x)=0$ ma pierwiastki:

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \dots,\ \xi_n$$

o bezwzględnych wartościach:

$$|\xi_1|\leqq|\xi_2|\leqq|\xi_3|\leqq\dots\leqq|\xi_n|,$$

to bez różnicy, czy między tymi pierwiastkami są powtarzające się, czy nie, mamy:

$$(a) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\xi_1}+\frac{1}{x-\xi_2}+\dots+\frac{1}{x-\xi_n}.$$

Z drugiej zaś strony jest:

$$(b) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{nc_0x^{n-1}+(n-1)c_1x^{n-2}+\dots}{c_0x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\dots+c_n}.$$

Rozwijając kształt (b) na szereg:

$$(1) \qquad \frac{a'_0}{x}+\frac{a'_1}{x^2}+\frac{a'_2}{x_3}+\dots$$

zbieżny dla $|x|>|\xi_n|$, dostaniemy na wyznaczenie spółczynników a'_0, a'_1, a'_2, ... związki:

$$a'_0=n$$
$$c_0a'_1+c_1a'_0=(n-1)c_1,$$
$$c_0a'_2+c_1a'_1+c_2a'_0=(n-2)c_2$$
$$:\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ :\ ;$$

a z nich a'_1, a'_2, ... wynikną w całkowitych wymiernych funkcyach spółczynników: c_1/c_0, c_2/c_0, ..., c_n/c_0.

Wychodząc z kształtu (a) mamy:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{1-\frac{\xi_1}{x}}+\frac{1}{1-\frac{\xi_2}{x}}+...+\frac{1}{1-\frac{\xi_n}{x}}\right],$$

a stąd — ponieważ dla $|x|>|\xi_n|$, będą $|\xi_1/x|$, $|\xi_2/x|$, ..., $|\xi_n/x|$ ułamkami zwyczajnymi — dostaniemy szereg (1) w postaci:

$$(2)\quad \begin{aligned}&\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{1}{x}\left(1+\frac{\xi_\lambda}{x}+\frac{\xi_\lambda^2}{x^2}+...\right)=\\ &=\frac{n}{x}+\frac{s_1}{x^2}+\frac{s_2}{x^3}+\frac{s_3}{x^4}+..., \quad [s_r=\xi_1^r+\xi_2^r+...+\xi_n^r].\end{aligned}$$

Stąd wynika, że:

(A) $\quad a'_0=n$, $a'_1=s_1$, $a'_2=s_2$, $a'_3,=s_3$ ..., a to znaczy:

I. *Iloraz $f':f$ rozwinięty podług ujemnych potęg argumentu x daje w swych spółczynnikach po porządku symetryczne funkcye* s_0, s_1, s_2, ...

Rozwińmy teraz:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{c_{n-1}+2c_{n-2}x+3_{n-3}x^2+...+nc_0x^{n-1}}{c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+...+c_0x^n}$$

na szereg:

$$(3)\quad a_0+a_1x+a_2x^2+...$$

zbieżny dla $|x|<|\xi_1|$.

Na wyznaczenie spółczynników dostaniemy tu związki:

$$\begin{aligned}c_{n-1}&=a_0c_n\\ 2c_{n-2}&=a_1c_n+a_0c_{n-1}\\ 3c_{n-3}&=a_2c_n+a_1c_{n-1}+a_0c_n\\ \vdots\quad&\quad\vdots\quad\quad\vdots\end{aligned}$$

z których a_0, a_1, a_2, ... wyrażą się wymiernie, całkowicie przez c_0/c_n, c_1/c_n, ...

Z drugiej strony z kształtu (a) dostaniemy:

$$(4)\quad \begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=-\frac{1}{\xi_1\left(1-\frac{x}{\xi_1}\right)}-\frac{1}{\xi_2\left(1-\frac{x}{\xi_2}\right)}-...-\frac{1}{\xi_n\left(1-\frac{x}{\xi_n}\right)}\\ &=-\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{1}{\xi_\lambda}\left(1+\frac{x}{\xi_\lambda}+\frac{x^2}{\xi_\lambda^2}+...\right),\end{aligned}$$

a każdy z szeregów mieszczący się w tej sumie jest zbieżny dla $x|<|\xi_1|$, gdyż dla takich x są wszystkie $|x/\xi_\lambda|$, $\lambda=1, 2, ..., n$, ułamkami właściwymi. Z sumy (4) dostajemy:

(5) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-s_{-1}-s_{-2}x-s_{-3}x^2, ..., \quad [s_{-r}=\xi_1^{-r}+\xi_2^{-r}+...+\xi_n^{-r}].$

Porównując to rozwinięcie z (3), mamy:

(B) $s_{-1}=-a_0, \; s_{-2}=-a_1, \; s_{-3}=-a_2, ...,$ co znaczy:

II. *Iloraz $f':f$ rozwinięty podług dodatnich potęg argumentu x daje w swych spółczynnikach wziętych z przeciwnym znakiem po porządku funkcye symetryczne $s_{-1}, s_{-2}, ...,$ gdzie s_{-r} jest sumą $(-r)^{tych}$ potęg wszystkich pierwiastków równania $f=0$.*

Uwaga. Gdy $f=x^n-1$, to tu rozwinięcia ilorazu $f':f$ prowadzą do twierdzenia I., udowodnionego w art. 25.

176. Szeregi liczb zwrotnych. Niech $S=(a_0, a_1, a_2, a_3, ...)$ będzie szeregiem liczb zwrotnych, poczynającym się odrazu od a_0, a jego czemraz nowe elementa niech określają się związkami:

(1) $$a_k=c_1a_{k-1}+c_2a_{k-2}+...+c_na_{k-n},$$
$$k=n, n+1, n+2, ...$$

Ponieważ związki te przedstawiają każdy nowy element przez n bezpośrednio go poprzedzających, więc z tego powodu nazwiemy szereg S szeregiem r z ę d u n^{go}, a same związki: związkami rzędu n.

Utwórzmy:

(a) $$\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_2}{x^3}+..., \text{ albo:}$$

(b) $$a_0+a_1x+a_2x^2+...,$$

to każdy z tych szeregów będzie wskutek (1) rozwinięciem pewnej wymiernej ułamkowej funkcyi o liczniku stopnia niższego od stopnia mianownika. Połóżmyż:

(2) $$u(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-1}}{x^n-c_1x^{n-1}-...-c_n}=\frac{1}{x}\cdot\frac{b_0+b_1\dfrac{1}{x}+...}{1-c_1\dfrac{1}{x}-...}$$
$$=\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_2}{x^3}+...,$$

to stąd wyznaczymy:

(3) $$b_0=a_0, \; b_1=a_1-c_1a_0, ..., \; b_{n-1}=a_{n-1}-c_1a_{n-2}-...-c_{n-1}a_0,$$

a szereg (a) będzie rozwinięciem funkcyi $u(x)$ z wyznaczonymi spółczynnikami (3) w jej liczniku. Połóżmy podobnie:

$$u_1(x)=\frac{b'_0+b'_1x+...+b'_{n-1}x^{n-1}}{1-c_1x-c_2x^2-...-c_nx^n}=a_0+a_1x+a_2x^2+...,$$

to stąd dostaniemy:

$$b'_0=a_0=b_0, \; b'_1=a_1-c_1a_0=b_1, ..., \; b'_{n-1}=a_{n-1}-e_1a_{n-2}-...-c_{n-1}a_0=b_{n-1}.$$

a szereg (b) będzie rozwinięciem funkcyi:

$$(4) \qquad u_1(x)=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}}{1-c_1x-c_2x^2-\ldots-c_nx^n}.$$

Funkcye $u(x)$, $u_1(x)$ nazywają się funkcyami rodzącemi szeregu S. Mianowniki ich są już dane równocześnie ze związkami (1) i są stopni n = rzędowi szeregu S Z tego powodu równanie $g(x)=0$ (lub $g_1(x)=0$) nazywają charakterystycznem szeregu S, a funkcyę $g(x)$ (albo $g_1(x)$) funkcyą charakterystyczną tego szeregu.*)

Po tych uwagach zapytajmy, czy rząd n, jakim się szereg S dał scharakteryzować, jest jego najmniejszym rzędem?

W tym celu przyjmijmy, że rodząca funkcya $u(x)$ nie wypadła w swej najprostszej formie i że daje się przywieść do prostszej formy:

$$(5) \qquad u'(x)=\frac{\beta_0x^{\nu-1}+\beta_1x^{\nu-2}+\ldots+\beta_{\nu-1}}{x^\nu-c'_1x^{\nu-1}-\ldots-c'_\nu},\quad \nu<n,$$

która nie potrzebuje jednak być już najprostszą formą funkcyi $u(x)$. Lecz $u'(x)=u(x)$ identycznie. Stąd wynika, że $u'(x)$ rozwija się również na szereg (a), a nie inny, i że więc S — będąc szeregiem rzędu n — jest jeszcze szeregiem rzędu $\nu<n$ o związkach:

$$(6) \qquad a_k=c'_1a_{k-1}+c'_2a_{k-2}+\ldots+c'_\nu a_{k-\nu},\quad \nu<n,$$
$$k=\nu,\ \nu+1,\ \nu+2,\ldots,$$

a o charakterystycznej funkcyi:

$$(7) \qquad g'(x)=x^\nu-c'_1x^{\nu-1}-c'_2x^{\nu-2}-\ldots-c'_\nu,$$

będącej podzielnikiem funkcyi $g(x)$.

Przyjmijmy naodwrót, że — prócz równań (1) rzędu n — mamy jeszcze równania (6) rzędu $\nu<n$. W takim razie szereg (a) określa prócz funkcyi $u(x)$ jeszcze funkcyę rodzącą $u'(x)$ o postaci (5). A że te obie funkcye na nieskończenie wielu miejcach x, bo w całym zakresie zbieżności szeregu (a), te same mają wartości, więc są identyczne. Tego następstwem musi być to, że $u'(x)$ jest skróconą funkcyą $u(x)$, a przeto $g'(x)$ jest znowu podzielnikiem funkcyi $g(x)$.

Stąd mamy twierdzenia:

---

*) Co się tyczy treści tego i następnego art. por. E. Study: *Recurrierende Reihen und bilineare Formen. Monatshefte f. Math. u. Ph.* T. II., str. 23... (1891) — Por. także: M. Dietrich: *Über den Zusammenhang gewisser Determinanten mit Bruchfunctionen* — Crelle J. T. 69, (1868), str. 190. i nast.

I. *Gdy n nie jest najniższym rzędem szeregu S, a jego charakterystyczną funkcyą w tym rzędzie jest $g(x)$, w rzędzie zaś niższym jest $g'(x)$, to $g'(x)$ jest podzielnikiem funkcyi $g(x)$.*

II. *Gdy S jest rzędu n, a jego funkcya rodząca $u(x)$ nie wypada w najprostszej formie, to n nie jest najniższym rzędem szeregu S.*

III. *Najniższy rząd szeregu S osiąga się, przywodząc jego rodzącą funkcyę do jej najprostszej formy. Stopień mianownika tej ostatniej będzie najmniejszym rzędem szeregu S.*

Ponieważ funkcya $u(x)$ nie posiada dwóch różnych form najprostszych, więc stąd dalej wynika:

IV. *Do najmniejszego rzędu m należą zawsze jedne tylko równania rzędu m:*

$$a_k=\gamma_1 a_{k-1}+\gamma_2 a_{k-2}+\ldots+\gamma_m a_{k-m} \tag{8}$$
$$k=m,\ m+1,\ m+2,\ldots$$

t. j. o spółczynnikach $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ nie dających się zastąpić innymi.

Gdy $\gamma(x)$ jest charakterystyczną funkcyą najniższego rzędu m, $v(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\gamma(x)}$ rodzącą funkcyą, a położymy:

$$v(x)=\frac{\varphi(x)\,.\,h(x)}{\gamma(x)\,.\,h(x)} \tag{9}$$

gdzie $h(x)$ jest najdowolniejszą funkcyą wymierną całkowitą stopnia 1^{go}, 2^{go},... to kształt (9) prowadzi do szeregu S, jako do szeregu $(m+1)^{go}$, $(m+2)^{go}$,... rzędu i to na nieskończenie wiele sposobów. Stąd wynika:

V. *Szereg najniższego rzędu m jest zarazem szeregiem każdego wyższego rzędu m', a równań należących do jednego takiego rzędu m' może być nieskończenie dużo. Każda funkcya stopnia m', podzielna przez $\gamma(x)$ może być charakterystyczną szeregu S jako szeregu rzędu m'.*

Pd. 1. Szereg:

$$a_0=1,\ a_1=4,\ a_2=14,\ a_3,\ a_4,\ldots$$

określony przez

$$a_k=9a_{k-1}-26a_{k-2}+24a_{k-3},\ k=3,\ 4,\ldots$$

jest rzędu 3. Jego charakterystyczną funkcyą jest $x^3-9x^2+26x-24$. Kładąc

$$\frac{b_0x^2+b_1x+b_2}{x^3-9x^2+26x-24}=\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{14}{x^3}+\ldots,$$

dostajemy $b_0=1$, $b_1=5$, $b_2=4$, a więc rodzącą funkcyą szeregu będzie:

$$u(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^3-9x^2+26x-24}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)}.$$

Nie wypada ona tu w najprostszej formie. Jej najprostszą formą jest:

$$v(x)=\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-1}{x^2-5x+6},$$

a stąd wynika, że dany szereg określają także równania:

$$a_k=5a_{k-1}-6a_{k-2},\ k=2,\ 3,\ 4,\dots$$

najniższego rzędu 2. Szereg dany jest więc także najniższego rzędu: 2.

Pd. 2. Okazać, że $n=4$ nie jest najniższym rzędem szeregu:

$$a_0=1,\ a_1=-4,\ a_2=14,\ a_3=-48,\ a_4,\ a_5,\dots$$

o równaniach:

$$a_k=-3a_{k-1}+3a_{k-2}+7a_{k-3}-6a_{k-4},\ k=4,\ 5,\ 6,\dots$$

i że jego najniższym rzędem jest 2.

Pd. 3. Jaką jest rodząca funkcya szeregu:

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\dots?$$

Uwaga. Twierdzeń I—V można także dowieść na podstawie rodzącej funkcyi $u_1(x)$. Tej drugiej funkcyi możnaby więc także użyć w Pd. 1, 2, 3.

177. Przedstawienie liczb szeregu zwrotnego przez stałe parametry. Przyjmijmy, że mamy danych kilka szeregów liczb zwrotnych:

(1) $$(a'_0,\ a'_1,\ a'_2,\dots),\ (b'_0,\ b'_1,\ b'_2,\dots),\ (c'_0,\ c'_1,\ c'_2,\dots),\dots$$

o charakterystycznych funkcyach:

(2) $$g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x),\dots$$

które nie są w ogólności tych samych stopni i nie potrzebują koniecznie wskazywać najniższych rzędów szeregów (1). Funkcye (2) niech posiadają najmniejszą wspólną wielokrotność $G(x)$ i niech będzie:

$$G(x)=g_1(x).h_1(x)=g_2(x)\,h_2(x)=g_3(x)\,h_3(x),\dots$$

$G(x)$ jest więc funkcyą podzielną przez wszystkie funkcye (2), a stąd wynika, że wszystkie szeregi (1) mają wspólną charakterystyczną funkcyą:

$$G(x)=x^\mu-C_1x^{\mu-1}-C_2x^{\mu-2}-\dots-C_\mu$$

n a j n i ż s z e g o s t o p n i a μ. Połóżmyż:

$$\left.\begin{aligned} a'_k&=C_1a'_{k-1}+C_2a'_{k-2}+\dots+C_\mu a'_{k-\mu}\\ b'_k&=C_1b'_{k-1}+C_2b'_{k-2}+\dots+C_\mu b'_{k-\mu}\\ c'_k&=C_1c'_{k-1}+C_2c'_{k-2}+\dots+C_\mu c'_{k-\mu}\\ &\vdots\qquad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots \end{aligned}\right\},\ k=\mu,\ \mu+1,\dots,$$

to, gdy A, B, C,... są dowolnymi liczbami, mamy.

(3) $$Aa'_k+Bb'_k+Cc'_k+\dots=$$
$$C_1(Aa'_{k-1}+Bb'_{k-1}+\dots)+\dots+C_\mu(Aa'_{k-\mu}+Bb'_{k-\mu}+\dots).$$

Z tego wynika, że szereg liczb:

(4) $$[Aa'_k+Bb'_k+Cc'_k+\dots],\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots$$

jest szeregiem liczb zwrotnych o charakterystycznem równaniu $G(x)=0$. Stopień μ tego równania jest najniższym rzędem tego szeregu. Stąd twierdzenie:

I. *Gdy danych jest kilka szeregów* $(a'_0, a'_1\dots)$, $(b'_0, b'_1,\dots)$,... *liczb zwrotnych o różnych charakterystycznych równaniach, to zawsze można* *znaleść wspólne ich charakterystyczne równanie* $G(x)=0$ *najniższego stopnia* μ; *a każde liniowe połączenie* $(A_k a'_k + B_k b'_k + \ldots)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ *elementów danych szeregów jest szeregiem zwrotnych liczb o charakterystycznem równaniu* $G(x)=0$, *a o najmniejszym rzędzie* μ.

Mając to przyjmijmy, że szereg:

$$S=(a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

jest najniższego rzędu n i że jego charakterystyczne równanie stopnia n^{go} posiada same niepowtarzające się pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, a więc:

$$g(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n);$$

$g(x)$ można uważać za najmniejszą wspólną wielokrotność czynników $(x-\lambda_1), (x-\lambda_2), \ldots, (x-\lambda_n)$, a do nich, jako do charakterystycznych funkcyj należą szeregi:

$$\begin{array}{ll} & 1, \lambda_1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \ldots \\ & 1, \lambda_2, \lambda_2^2, \lambda_2^3, \ldots \\ (5) & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \text{[art. 176. Pd. 3].} \\ & 1, \lambda_n, \lambda_n^2, \lambda_n^3, \ldots \end{array}$$

Podług twierdzenia I. powinny się zatem elementa szeregu S dać złożyć liniowo jednorodnie z elementów szeregów (2). Aby tego dokonać zauważmy rodzącą funkcyę $u(x)$ szeregu S w jej najprostszej formie: $\frac{f(x)}{g(x)}$ i połóżmy:

$$u(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-\lambda_1}+\frac{A_2}{x-\lambda_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-\lambda_n}$$

$$=\frac{\Sigma A_\alpha}{x}+\frac{\Sigma A_\alpha\lambda_\alpha}{x^2}+\frac{\Sigma A_\alpha\lambda_\alpha^2}{x^3}+\ldots$$

Stąd wynika, że:

$$(6) \qquad a_k=A_1\lambda_1^k+A_2\lambda_2^k+\ldots+A_n\lambda_n^k, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

czem już zadanie jest spełnione. To znaczy:

II. *Każda z liczb* a_k *szeregu* S *o najniższym rzędzie* n, *a o charakterystycznem równaniu* n^{go} *stopnia bez powtarzających się pierwiastków daje się przedstawić liniowo jednorodnie przez* k^{te} *potęgi pierwiastków tego równania ze spółczynnikami, które są licznikami częściowych ułamków funkcyi rodzącej.*

Takie przedstawienie liczb szeregu S jest z tego powodu bardzo dogodne, że za pomocą niego można dowolnie daleki element a_k odrazu obliczyć bez znajomości elementów poprzedzających.

Pd. 1. Utworzyć szereg S, którego rodząca funkcya:

$$u(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-2}.$$

Pd. 2. Szereg S ma 4 pierwsze liczby:

$$a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=-1,\ a_3=3,$$

a jego charakterystyczne równanie ma postać:

$$g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0;$$

obliczyć liczniki A_1, A_2, A_3, A_4 funkcyi rodzącej:

$$\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-3}+\frac{A_4}{x-4}.$$

(Z n pierwszych równań (6) można zawsze wyrazić $A_1, A_2, \ldots, A_n$ przez $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$).

178. Funkcye Aleph ($\aleph$) Wrońskiego. Bardzo ważnem jest tworzenie szeregu S o rodzącej funkcyi $\frac{1}{g(x)}=[(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)]^{-1}$ bez różnicy, czy pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ są wszystkie między sobą różne, czy też są między nimi i powtarzające się.

Załóżmy $|\lambda_1|\leqq|\lambda_2|\leqq\ldots\leqq|\lambda_n|$ i połóżmy:

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{x-\lambda_1}\cdot\frac{1}{x-\lambda_2}\cdots\frac{1}{x-\lambda_n},$$

to dla wszelkich $|x|>|\lambda_n|$ wynika stąd:

$$\frac{1}{g(x)}=\left[\frac{1}{x}+\frac{\lambda_1}{x^2}+\ldots\right]\cdot\left[\frac{1}{x}+\frac{\lambda_2}{x^2}+\ldots\right]\cdots\left[\frac{1}{x}+\frac{\lambda_n}{x^2}+\ldots\right],\ \text{czyli}$$

(1) $$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{x^n}+\frac{[\lambda]_1}{x^{n+1}}+\frac{[\lambda]_2}{x^{n+2}}+\frac{[\lambda]_3}{x^{n+3}}+\ldots$$

gdzie $[\lambda]_k$ jest funkcyą powstającą z wykonania potęgi:

$$(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)^k=\ldots+A\lambda_1^{s_1}\lambda_2^{s_2}\ldots\lambda_n^{s_n}+\ldots$$

gdy się w niej za wszystkie spółczynniki A położy jednostkę. $[\lambda]_k$ są-to tak zwane funkcye Aleph Wrońskiego, które także wyraźnie symbolem $[\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n]_k$ naznaczają; $[\lambda]_0$ kładziemy $=1$.

Żądany szereg jest zatem postaci:

(2) $$S=(0, 0, \ldots, 0, 1, [\lambda]_1, [\lambda]_2, \ldots);$$

ma on $(n-1)$ wyrazów $=0$ z samego początku; n^{ty} wyraz $=1$, a potem następują funkcye Aleph $[\lambda]_1, [\lambda]_2, \ldots$ Jego równania są

(3) $$a_{n+k-1}=[\lambda]_k=c_1[\lambda]_{k-1}+c_2[\lambda]_{k-2}+\ldots+c_n[\lambda]_{k-n},$$
$$k=n,\ n+1,\ n+2, \ldots,$$

jeżeli:

$$g(x)=x^n-c_1x^{n-1}-c_2x^{n-2}-\ldots-c_n$$

jest jego charakterystyczną funkcyą stopnia n.

Pd. 1. Zakładając pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ wszystkie między sobą różne, dostajemy z rozkładu funkcyi $1/g(x)$ na ułamki częściowe:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g'(\lambda_1)} \cdot \frac{1}{x-\lambda_1} + \frac{1}{g'(\lambda_2)} \cdot \frac{1}{x-\lambda_2} + \dots + \frac{1}{g'(\lambda_n)} \cdot \frac{1}{x-\lambda_n}.$$

Stąd dla wszelkich $|x| > |\lambda_n|$ dochodzimy do rozwinięcia:

$$(a) \qquad \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x}\sum \frac{1}{g'(\lambda_1)} + \frac{1}{x^2}\sum \frac{\lambda_1}{g'(\lambda_1)} + \frac{1}{x^3}\sum \frac{\lambda_1^2}{g'(\lambda_2)} + \dots$$

Szeregi (1), (a) muszą być oczywiście identyczne, a wskutek tego dostajemy:

$$\sum \frac{\lambda_1^k}{g'(\lambda_1)} = 0, \text{ gdy } k \leqq n-2, \qquad \sum \frac{\lambda_1^{n-1}}{g'(\lambda_1)} = 1$$

[są-to formy E u l e r a art. art. 52. Pd. 4.] i wreszcie:

$$(b) \qquad [\lambda]_k = \sum \frac{\lambda_1^{n-1+k}}{g'(\lambda_1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

które-to równania uważać trzeba za nowe definicye funkcyj A l e p h w razie wszystkich między sobą różnych, wchodzących w nie elementów*).

Pd. 2. Dla szeregu: $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-2} = 0$, $a_{n-1} = 1$, $a_n, \dots$ o równaniach

$$a_k = na_{k-1} - \binom{n}{2}a_{k-2} + \binom{n}{3}a_{k-3} - \dots \pm a_{k-n}, \quad k \geqq n$$

mamy charakterystyczne równanie:

$$x^n - nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} - \dots \pm 1 = (x-1)^n = 0,$$

o n-krotnym pierwiastku $= 1$. Tu więc dostaniemy:

$$a_{n+\tau} = [11\dots1]_{\tau+1} = \binom{n+\tau}{n-1}, \quad \text{[art. 70.]},$$

a więc szereg:

$$S = \left((0, 0, \dots, 1, \binom{n+2}{n+1}, \binom{n+3}{n+1}, \dots\right)^{**)}$$

---

*) Por. S. D i c k s t e i n. Pojęcia i metody str. 213. i nast. albo tegoż rozprawy w Pamiętniku Akad. krak. T. XII. Porównaj dalej *M a u r i c e O c a g n e Sur un algorithme algébrique — Nouvelles Annales de mathématiques.* T. 2. (Serya 2.) str. 220—226.

**) Te i t. p. przykłady znajdują się w rozprawie *„Théorie élementaire des séries recourrentes"*. M. O c a g n e. *Nouv. Ann. de math.* T. 3. (serya 3.) str. 65.

O innych związkach i zastosowaniach funkcyi A l e p h. czyt. R. F. S c o t t. *„On some alternating functions of n variables. The Messenger of Mathematics". Vol. XI. (1882) str. 98—103. A n g l i n „Zur Th. der symmetrischen Functionen Crelle J.* T. 98. str. 175. C a y l e y. *„On Mr. Anglins formula... Quárterly Journal Vol. XIX.* str. 223. R. L a c h l a n *Proof. of a generalization of Newtons formula... The Messenger of Mathem.* Vol. XIII. str. 155.

Na wzór rozwinięcia funkcyi $1/g(x)$ prowadzącego do funkcyj A l e p h rozważa B o r c h a r d t [Crelle J. T. 53. str. 193...] rozwinięcia funkcyi:

$$T = \sum \frac{1}{(t_1 - \alpha_1) \dots (t_n - \alpha_n)},$$

w której $t_1, t_2, \dots, t_n$ są zmienne, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ są stałe, a sumowanie odnosi się do wszystkich permutacyj n stałych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Funkcya T rozwinięta podług sa-

Pd. 3. Gdy $f(x)/g(x)$ jest rodzącą funkcyą danego szeregu $S=(a_0, a_1, ...)$ a położymy:

$$f(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-1},$$

to mieć będziemy:

$$(a)\qquad f(x).\frac{1}{g(x)}=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-1})\left(\frac{1}{x^n}+\frac{[\lambda]_1}{x^{n+1}}+...\right)$$

$$=\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_2}{x^3}+...$$

a z tej identyczności wynikają przedewszystkiem równania:

$$\begin{aligned} b_0&=a_0\\ b_0[\lambda]_1\quad+b_1&=a_1\\ &\vdots\\ b_0[\lambda]_{n-1}+b_1[\lambda]_{n-2}+...+b_{n-1}&=a_{n-1}. \end{aligned}$$

Z nich dostaniemy:

$$(b)\qquad b_\mu=A_{\mu 0}\,a_0+A_{\mu 1}\,a_1+...+A_{\mu, n-1}\,a_{n-1}\,;$$
$$\mu=0, 1, ..., (n-1).$$

[$A_{\mu 0}$, $A_{\mu 1}$, ..., są całkowitemi w $[\lambda]_1$, $[\lambda]_2$, ..., $[\lambda]_{n-1}$].

Dalej z identyczności (a) dostaniemy:

$$a_k=b_0\,[\lambda]_k+b_1\,[\lambda]_{k-1}+...+b_{n-1}\,[\lambda]_{k-(n-1)},$$
$$k=n,\ n+1.\ n+2, ...,$$

a gdy tu za b_μ wartości (b) wstawimy, dojdziemy do określeń:

$$a_k=P_{k0}\,a_0+P_{k1}\,a_1+...+P_{k, n-1}\,a_{n-1},\ k=n,\ n+1, ...$$

W ten sposób dowolnie daleki wyraz szeregu S da się obliczyć ze znanych jego n początkowych wyrazów. W spółczynniki P_{k0}, P_{k1}, ... wchodzą funkcye Aleph, a ich tworzenie umożliwiają związki (3)*).

179. Rozwijania funkcyi ułamkowej wymiernej w różnych zakresach jej argumentu. Rozważaliśmy dotąd dwa tylko rozwinięcia funkcyi ułamkowej, a to: 1°) rozwinięcie w otoczeniu punktu $x=0$ zbieżne w kole, o środku $x=0$, a niezawierającem żadnego z pierwiastków ξ_1, ξ_2, ... mianownika, i 2°) rozwinięcie w otoczeniu punktu $x=\infty$ [art. 33. tw. II.] zbieżne poza kołem, które w swem wnętrzu zawiera wszystkie pierwiastki ξ_1, ξ_2, ... Połóżmy wyraźnie:

$$u(x)=G(x)+Z_1+Z_2+...+Z_\nu+Z_{\nu+1}+...+Z_n,$$

---

mych odjemnych potęg zmiennych daje w spółczynniku przy

$$[t_1^{-(p_1+1)}\,t_2^{-(p_2+1)}\,t_n^{-(p_n+1)}]$$

symetryczną jednorodną funkcyę $\Sigma(\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}...\alpha_n^{p_n})$. Bliższych szczegółów o tem rozwinięciu zasięgnąć można w dziele *„Einleitung in die Theorie der binären Formen“ Faà de Bruno*. Por. także Betti, Crelle J. T. 54., str. 98.

*) Wyraźne formy spółczynników P_{k0}, P_{k1}, ... podał E. Netto w rozprawie *„Über recurrierende Reihen. Monatshefte f. Math. u. Phys.* T. 6. (1895) str. 285.

gdzie $u(x)$ jest daną funkcyą, $G(x)$ jest zawartą w niej funkcyą całkowitą, a Z_ν, $\nu=1, 2, \dots, n$, oznacza zawartą w niej sumę częściowych ułamków o mianownikach $(x-\xi_\nu)$, $(x-\xi_\nu)^2$, $(x-\xi_\nu)^3, \dots$

Zakładając $|\xi_1| < |\xi_2| < \dots < |\xi_n|$, można będzie sumę:

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_\nu$$

rozwinąć na szereg $\mathfrak{P}'_\nu\left(\frac{1}{x}\right)$ zbieżny dla wszelkich $|x| > |\xi_\nu|$, sumę zaś:

$$G(x) + Z_{\nu+1} + Z_{\nu+2} + \dots + Z_n$$

można będzie znowu rozwinąć na szereg $\mathfrak{P}_\nu(x)$ zbieżny dla wszelkich $|x| < |\xi_{\nu+1}|$.

Z tego wynika, że w obszarze:

$$|\xi_\nu| < |x| < |\xi_{\nu+1}|$$

mieć będziemy:

$$u(x) = \mathfrak{P}_\nu(x) + \mathfrak{P}'_\nu\left(\frac{1}{x}\right) = P_\nu(x).$$

$$\nu = 1, 2, \dots, n-1.$$

Do tych rozwinięć dołączają się jeszcze: rozwinięcie $G(x) + \mathfrak{P}_0(x)$ dla otoczenia $x=0$, $[|x| < |\xi_1|]$ i rozwinięcie $G(x) + \mathfrak{P}'_n\left(\frac{1}{x}\right) = P_n(x)$ dla otoczenia $x=\infty$, $[|x| > |\xi_n|]$.

Gdy $G(x)$ nie istnieje, to to ostatnie rozwinięcie zawiera same tylko odjemne potęgi argumentu.

CZĘŚĆ VI.

PRZEPROWADZANIE SZEREGÓW. OKREŚLENIE I NAJOGÓLNIEJSZY PODZIAŁ FUNKCYJ ANALITYCZNYCH.

ROZDZIAŁ XV.

Przeprowadzanie szeregów potęgowych.

180. Przeprowadzania szeregu $\mathfrak{P}(x)$ w wnętrzu jego zakresu zbieżności. Niech szereg $\mathfrak{P}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$ nie będzie bezustannie zbieżnym i niech ma koło zbieżności (r). W tem kole obierzmy punkt a i połóżmy:

(1) $$x=a+h.$$

Ponieważ $|x|$ ma być $<r$, trzeba h tak wybrać, aby także

(2) $$|a+h|<r \quad \text{było},$$

gdyż tylko wtedy punkt $a+h$ leży znowu w kole (r).

Lecz $|a|+|h|\geqq|a+h|$; gdy więc h spełni warunek $|a|+|h|<r$, czyli:

(3) $$|h|<r-|a|,$$

to tembardziej spełni się (2), a szereg:

(4) $$\mathfrak{P}(x)=c_0+c_1(a+h)+c_2(a+h)^2+\ldots$$

jako szereg argumentu $(a+h)$ będzie zbieżnym. Jest on nieskończoną sumą wymiernych całkowitych funkcyj:

$$c_\nu(a+h)^\nu=c_\nu[a^\nu+\binom{\nu}{1}a^{\nu-1}h+\binom{\nu}{2}a^{\nu-2}h^2+\ldots+h^\nu],$$
$$\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

argumentu h i jest jako taki jednostajnie zbieżny w zakresie (2), a tem bardziej w zakresie (3); $(a+h)$ zastępuje bowiem x, a x leżąc w (r) leży w zakresie jednostajnej zbieżności szeregu $\mathfrak{P}(x)$.

Wskutek tego można będzie szereg (4) uporządkować podług potęg h [art. 168.]. Niech więc:

$$\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(a+h)=C_0+C_1h+C_2h^2+\ldots,$$

to spółczynniki C_0, C_1, C_2, ... będą tu miały takie znaczenie:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
C_0&=c_0+c_1a+c_2a^2+c_3a^3+\ldots=\mathfrak{P}(a)\\
1!\,C_1&=c_1+2c_2a+3c_3a^2+4c_4a^3+\ldots=\mathfrak{P}'(a)\\
2!\,C_2&=2c_2+3.2.c_3a+4.3c_4a^2+\ldots=\mathfrak{P}''(a)\\
3!\,C_3&=3.2.c_3+4.3.2.c_4a+5.4.3.c_5a^2+\ldots=\mathfrak{P}'''(a)\\
&\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

Tworzą się one zupełnie w ten sam sposób, jak spółczynniki funkcyi wymiernej całkowitej $f(a+h)$, rozwiniętej podług potęg h [art. 48.].

Połóżmy jeszcze $h=x-a$, co z równania (1) wynika, to mamy identycznie:

$$\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(a)+\frac{\mathfrak{P}'(a)}{1!}(x-a)+\frac{\mathfrak{P}''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots=\mathfrak{P}_1(x-a)$$

w zakresie $|x-a|<r-|a|=\varrho$, a nie mniejszym.

Zakres ten przedstawia koło $(\varrho)=(a)_r$, które ma środek w punkcie a, a obwodem swoim dotyka koła (r) [fig. 33.]. Jest ono zarazem otoczeniem punktu a, a z tego powodu nazywamy $\mathfrak{P}_1(x-a)$ przeprowadzeniem szeregu $\mathfrak{P}(x)$ do otoczenia punktu a i znaczymy krótko przez $\mathfrak{P}(x|a)$.*) Mamy więc:

(6) $\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(x|a)=\mathfrak{P}_1(x-a)$

identycznie w kole $(a)_r=(\varrho)$.

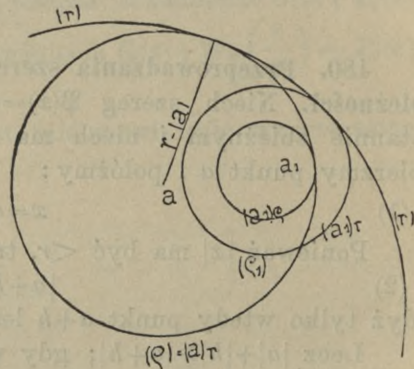


Fig. 33.

W kole $(a)_r=(\varrho)$ obierzmy nowy punkt $a_1 \neq a$, to do jego otoczenia przeprowadziwszy $\mathfrak{P}(x)$ dostaniemy — podobnie jak w (6)

(7) $\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(x|a_1)=\mathfrak{P}_2(x-a_1)$ identycznie w kole $(a_1)_r=(\varrho_1)$,

gdzie koło $(a_1)_r=(\varrho_1)$ ma znowu środek w punkcie a_1, a dotyka obwodem koła (r).

Lecz i szereg $\mathfrak{P}(x|a)=\mathfrak{P}_1(x-a)$ w (6) jako szereg argumentu $x-a$ możemy do otoczenia punktu a_1 przeprowadzić. Kładąc:

(8) $$x-a=(a_1-a)+k,$$

dostajemy:

*) Dla krótkości wyrażać się także będziemy: „szereg $\mathfrak{P}(x|a)$ otacza punkt a“.

$$\mathfrak{P}_1(a_1-a)+\frac{\mathfrak{P}'_1(a_1-a)}{1!}k+\frac{\mathfrak{P}''_1(a_1-a)}{2!}k^2+\ldots,$$

a gdy potem z (8) położymy $k=x-a_1$, dostaniemy rozwinięcie:

$$\mathfrak{P}_1(a_1-a)+\frac{\mathfrak{P}'_1(a_1-a)}{1!}(x-a_1)+\frac{\mathfrak{P}''_1(a_1-a)}{2!}(x-a_1)^2+\ldots=\mathfrak{P}'_2(x-a_1),$$

jako żądane przeprowadzenie. Będzie ono zbieżne w kole $(a_1)_\varrho$ o środku a_1, a o obwodzie dotykającym koła (ϱ). Gdy to przeprowadzenie krótko przez $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ naznaczymy, a równocześnie w (6) i szereg $\mathfrak{P}(x)$ do otoczenia punktu a_1 przeprowadzimy, dostaniemy

$$\mathfrak{P}(x|a_1)=\mathfrak{P}(x|a, a_1) \text{ identycznie w kole } (a_1)_\varrho,$$

a więc i w kole $(a_1)_r=(\varrho_1)$ [art. 166., tw. II.]. Z tej identyczności i z (7) mamy więc:

(9) $\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(x|a_1)=\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ identycznie w kole $(a_1)_r=(\varrho_1)$.

W tem kole wybierzmy punkt $a_2 \neq a_1$. Przeprowadzając $\mathfrak{P}(x)$ do otoczenia tego punktu, dostaniemy:

(10) $\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(x|a_2)=\mathfrak{P}_3(x-a_2)$ identycznie w kole $(a_2)_r$.

Lecz równocześnie i $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ do otoczenia tego punktu a_2 przeprowadzić możemy. To przeprowadzenie, które krótko przez $\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2)=\mathfrak{P}'_3(x-a_2)$ naznaczymy, zbieżne będzie niezawodnie w kole $(a_2)_{\varrho_1}$ o środku w a_2, a o obwodzie dotykającym koła (ϱ_1).

Gdy więc z (9) wyjmiemy identyczność $\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ i jej obie strony do otoczenia punktu a_2 przeprowadzimy, dostaniemy:

$$\mathfrak{P}(x|a_2)=\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2) \text{ identycznie w kole } (a_2)_{\varrho_1},$$

a więc [art. 166., tw. II.] i w kole $(a_2)_r$.

Z tej identyczności i z (10) mamy:

(11) $\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(x|a_2)=\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2)$ identycznie w kole $(a_2)_r=(\varrho_2)$.

Obierając dalej a_3 w kole $(a_2)_r, \ldots, a_t$ w kole $(a_{t-1})_r, \ldots, a_n$ w kole $(a_{n-1})_r$ i tworząc każdym razem identyczności takie, jak (11), dojdziemy wreszcie do identyczności:

$$\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(x|a_n)=\mathfrak{P}(x|a, a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ w kole } (a_n)_r.$$

Stąd twierdzenie:

I. *Gdy a_n jest dowolnym punktem wewnątrz zakresu zbieżności (r) szeregu $\mathfrak{P}(x)$, to $\mathfrak{P}(x)$ da się bez zmiany swej wartości uporządkować podług potęg $(x-a_n)$, gdy tylko punkta x ograniczymy nierównością $|x-a_n|<r-|a_n|$; da się więc zamienić na szereg $\mathfrak{P}(x|a_n)$ zbieżny dla $|x-a_n|<r-|a_n|$. Przy tem obojętnem jest, czy $\mathfrak{P}(x)$ odrazu podług potęg $(x-a_n)$ porządkujemy, czy też do tego uporządkowania dochodzimy za pośrednictwem dowolnie wielu punktów. Inaczej: Szereg $\mathfrak{P}(x)$ posiada dla otoczenia dowolnego punktu x_0 wewnątrz (r) jedno tylko przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x|x_0)$.*

Przeprowadziwszy szereg $\mathfrak{P}(x)$, który także jako $\mathfrak{P}(x|0)$ określić można do otoczenia punktu a, dostajemy identyczność:

(a) $\mathfrak{P}(x|0)=\mathfrak{P}(x|0,a)$ w kole (ϱ) [fig. 34.].

Gdy punkt a leży bliżej punktu 0 niż obwodu (r), to w kole (ϱ) zawiera się punkt 0, a wtedy bez obierania punktów pośrednich można naodwrót $\mathfrak{P}(x|0,a)$ przeprowadzić odrazu do otoczenia punktu 0. Dostaniemy więc:

(b) $\mathfrak{P}(x|0,a)=\mathfrak{P}(x|0,a,0)$ w kole (ϱ').

Z (a) i (b) wynika identyczność:

$\mathfrak{P}(x|0)=\mathfrak{P}(x|0,a,0)$ w kole (ϱ'),

a więc i w kole (r).

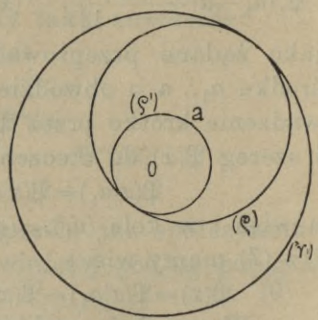


Fig. 34.

Przyjmijmy teraz, że punkt a leży bliżej obwodu (r), niż punktu 0 [fig. 35.]. Wtedy mamy i tu przedewszystkiem:

(a') $\mathfrak{P}(x|0)=\mathfrak{P}(x|0,a)$ w kole (ϱ);

ale w tem kole nie zawiera się punkt 0. Obierzmy w (ϱ) dowolny punkt a_1, leżący bliżej środka 0, niż a i przeprowadźmy $\mathfrak{P}(x|0,a)$ do otoczenia tego punktu, to dostaniemy identycznie:

(b') $\mathfrak{P}(x|0)=\mathfrak{P}(x|0,a,a_1)$ w kole (ϱ_1).

W kole (ϱ_1) wybierzmy znowu punkt a_2, leżący bliżej punktu 0, niż punkt a_1, to przeprowadzając $\mathfrak{P}(x|0,a,a_1)$ do tego punktu, dostaniemy identycznie:

(c') $\mathfrak{P}(x|0)=\mathfrak{P}(x|0,a,a_1,a_2)$ w kole (ϱ_2).

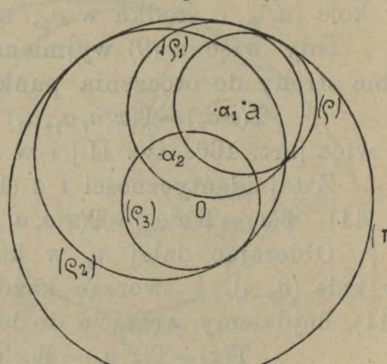


Fig. 35.

W tem kole zawiera się już punkt 0. Przeprowadźmyż $\mathfrak{P}(x|0,a,a_1,a_2)$ do jego otoczenia, to dostaniemy identycznie:

(d') $\mathfrak{P}(x|0,a,a_1,a_2)=\mathfrak{P}(x|0,a,a_1,a_2,0)$ w kole (ϱ_3).

Że zaś to koło całkowicie zawiera się w (ϱ_2), więc z (c') i (d') wynika identycznie:

$$\mathfrak{P}(x|0)=\mathfrak{P}(x|0,a,a_1,a_2,0) \text{ w kole } (\varrho_3),$$

a tem samem w kole (r).

Z tych uwag wynika:

II. *Sam szereg* $\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(x|0)$ *jest przeprowadzeniem każdego szeregu* $\mathfrak{P}(x|0,\alpha)$ *z niego wyprowadzonego.*

Jestto zarazem nowy dowód, że szereg $\mathfrak{P}(x)$ jest w swoim zakresie zbieżności jednoznaczną funkcyą swego argumentu. Mając bowiem $\mathfrak{P}(x\,|\,x_0)$ gdzie $x_0=0$, lub $\neq 0$, możemy dalej za pośrednictwem dowolnie wielu punktów $x_1, x_2, \ldots$ leżących w (r) wrócić znowu do x_0, a i wtedy będzie identycznie:

$$\mathfrak{P}(x\,|\,x_0)=\mathfrak{P}(x\,|\,x_0, x_1, x_2, \ldots, x_0).$$

181. Pochodne i pierwotne szeregi i ich zakresy zbieżności. Naznaczmy teraz dowolny punkt zawarty w (r) przez x, to w otoczeniu każdego takiego punktu mamy:

$$(1)\qquad \mathfrak{P}(x+h)=\mathfrak{P}(x)+\frac{\mathfrak{P}'(x)}{1!}h+\frac{\mathfrak{P}''(x)}{2!}h^2+\ldots,$$

ograniczając punkty $x+h$ do koła $(x)_r$. Spółczynniki:

$$(2)\qquad \frac{\mathfrak{P}'(x)}{1!},\ \frac{\mathfrak{P}''(x)}{2!},\ \frac{\mathfrak{P}'''(x)}{3!},\ldots,$$

których liczniki nazywamy pochodnemi ($1^{szą}$, $2^{gą}$, $3^{cią}$, ... $\nu^{tą}$...) szeregu $\mathfrak{P}(x)$ będą niezawodnie dla skończonych ν zbieżnymi szeregami w kole (r), inaczej bowiem niemożliwemby było tworzyć przeprowadzenia szeregu w otoczeniu dowolnego punktu w (r). Trzeba jednak rozstrzygnąć, czy koło (r) jest prawdziwym zakresem zbieżności szeregów (2)? W tym celu porównajmy:

$$(\alpha)\qquad x\,.\,\mathfrak{P}'(x)=c_1x+2c_2x^2+3c_3x^3+\ldots$$

z szeregiem:

$$(\beta)\qquad \mathfrak{P}(x)-c_0=c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$$

Szereg (α) począwszy od $2c_2x^2$ ma wszystkie wyrazy co do bezwzględnej wartości większe od odpowiednich wyrazów szeregu (β). Jeżeli więc szereg (β) rozbieżnym jest dla $|x|>r$, to tem bardziej szereg $x.\mathfrak{P}'(x)$, a z nim i szereg pochodny $\mathfrak{P}'(x)$ rozbieżnym już będzie poza kołem (r).

Ponieważ $\mathfrak{P}''(x)$ tworzy się tak z $\mathfrak{P}'(x)$, jak $\mathfrak{P}'(x)$ z $\mathfrak{P}(x)$ i t. d. więc to samo odnosi się do wszystkich szeregów pochodnych o skończonych wskaźnikach ν. A więc:

I. *Szereg* $\mathfrak{P}(x)$ *posiada pochodne wszelkich skończonych rzędów. Są-to szeregi potęgowe mające — wszystkie — koło* (r) *jako prawdziwy zakres zbieżności.*

Z (1) wynika, że i tu — podobnie jak w obszarze funkcyj wymiernych — mamy określenie:

$$\mathfrak{P}'(x)=\lim_{h=0}\frac{\mathfrak{P}(x+h)-\mathfrak{P}(x)}{h}=\frac{d\,\mathfrak{P}(x)}{dx}.$$

*

Uwaga. W samym szeregu $c_0+c_1x+\dots$ trzeba c_ν uznać za $\frac{\mathfrak{P}^{(\nu)}(0)}{\nu!}$. Przyjmijmyż, że szereg posiada promień zbieżności $r>1$ a więc jest zbieżny także dla $1<|x|<r$. W takim razie musi być koniecznie $\lim c_\nu=0$, a więc $\lim\frac{\mathfrak{P}^{(\nu)}(0)}{\nu!}=0$. Wskutek tego w szeregu bezustannie zbieżnym będzie $\lim\frac{\mathfrak{P}^{(\nu)}(x)}{\nu!}=0$ dla wszelkich skończonych x. Gdy przeciwnie $r<1$, to $\lim|c_\nu|$ może być albo skończone (nie wykluczając z e r a) albo nieskończone.

Szereg:

$$(\alpha_1)\qquad \mathfrak{P}_1(x)=C+c_0x+c_1\frac{x^2}{2}+c_2\frac{x^3}{3}+\dots$$

z dowolną stałą C ma jako pochodnę: szereg $\mathfrak{P}(x)$; nazywa się pierwotnym szeregu $\mathfrak{P}(x)$ i określa się przez

$$\mathfrak{P}_1(x)=C+\int\mathfrak{P}(x)\,dx.$$

Porównując (α_1) z szeregiem:

$$(\beta_1)\qquad x\,.\,\mathfrak{P}(x)=c_0x+c_1x^2+c_2x^3+\dots$$

widzimy, że $\mathfrak{P}_1(x)$ będzie niezawodnie zbieżnym w kole (r), gdyż w nim — poczynając od $\frac{c_1}{2}x^2$ — są wszystkie spółczynniki co do bezwzględnej wartości mniejsze od spółczynników odpowiednich wyrazów w (β_1).

Lecz (r) musi być zarazem prawdziwym jego zakresem zbieżności, w przeciwnym bowiem razie musiałby i szereg (β_1) — podług tw. II. — mieć większy zakres zbieżności, niż jak to założono.

Mamy więc twierdzenie:

II. *Koło zbieżności (r) szeregu $\mathfrak{P}(x)$ jest także prawdziwym zakresem zbieżności szeregu pierwotnego $C+\int\mathfrak{P}(x)dx$.*

Pd. 1. Ze związku:

$$u(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\dots$$

wyznaczyć rozwinięcia pochodnych

$$u'(x)=(1-x)^{-2},\ u''(x)=2.1(1-x)^{-3},\ u'''(x)=3.2.1(1-x)^{-4},\dots$$

(utworzyć pochodne szeregi).

Pd. 2. Okazać, że szereg $E(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots$ posiada takie pochodne, że

$$E(x)=E'(x)=E''(x)=\dots$$

Pd. 3. Okazać, że gdy $\mathfrak{P}(x)=a_0+a_1x+\dots$ jest szeregiem zwrotnym o relacyach rzędu n^{go}:

$$a_k = c_1 a_{k-1} + c_2 a_{k-2} + \dots + + c_n a_{k-n}$$
$$k = n,\ n+1, \dots$$

to szereg pochodny $\mathfrak{P}'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots$ jest również szeregiem zwrotnym o relacyach rzędu $(2n)^{\text{go}}$. Jakiego kształtu są te relacye?

182. Charakterystyka szeregu potęgowego w jego kole zbieżności. O przeprowadzeniu $\mathfrak{P}(x|a)$ powiedzieliśmy, że ono jest niezawodnie zbieżne w kole $(a)_r$ i że dla punktów w tem kole istnieje identyczność:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x|a).$$

Lecz przez to $(a)_r$ nie potrzebuje być zawsze prawdziwym zakresem zbieżności szeregu $\mathfrak{P}(x|a)$. Owszem — szereg ten może się czasem okazać zbieżnym w pewnem kole (r') większym od $(a)_r$ [fig. 36.].

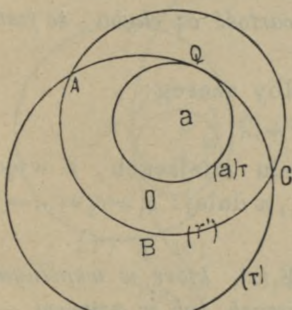


Fig. 36.

W takim wypadku trzeba będzie w dalszem następstwie zbadać, **czy wtedy identyczność (1) zachodzi w całym wspólnym zakresie** *ABCQA* **kół** (r), (r')?

Gdy $\mathfrak{P}(x)$ jest bezustannie zbieżnym szeregiem, to jasnem jest, że takie pytanie wcale się tu nasuwać nie potrzebuje, a o zakresach zbieżności jego przeprowadzeń nie potrzeba robić żadnych zastrzeżeń, gdyż *każde przeprowadzenie bezustannie zbieżnego szeregu $\mathfrak{P}(x)$ do otoczenia dowolnego punktu a leżącego w skończoności, będzie znowu bezustannie zbieżnym szeregiem argumentu $(x-a)$ i będzie dla wszelkich skończonych x identycznem z samym $\mathfrak{P}(x)$. Podobnie każda pochodna takiego szeregu będzie również bezustannie zbieżnym szeregiem (argumentu x).*

Takich bezustannie zbieżnych szeregów poznaliśmy trzy, a mianowicie: $E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$, $S(x)$, $K(x)$ [art. 157.]. Z ich przeprowadzeń wynikną — jak później zobaczymy — ciekawe ich własności.

Bez różnicy, czy zakres zbieżności (r) danego szeregu jest skończony, czy nie, dadzą się z dowiedzionych dotąd twierdzeń o jego przeprowadzeniach wywieść nowe twierdzenia charakteryzujące $\mathfrak{P}(x)$ w kole (r). Za ich pośrednictwem będziemy mogli potem odpowiedzieć na pytania postawione tu na wstępie.

I. *Szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x)$ nie może na nieskończenie wielu miejscach w swym zakresie zbieżności (r) stawać się zerem; chyba, że jest identycznie zerem.*

Przyjmijmy, że to jest możliwe, to te miejsca zerowe muszą posiadać w (r) jeden przynajmniej punkt skupienia a. Po przeprowadzeniu szeregu do otoczenia tego punktu dostajemy identycznie:

$$\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}(x|a) \text{ w kole } (a)_r. \tag{1}$$

Szereg $\mathfrak{P}(x|a)$ miałby więc w swym zakresie zbieżności nieskończenie wiele miejsc zerowych skupiających się w środku jego koła zbieżności. Taki jednak szereg jest identycznie zerem [art. 164. tw. II.]. W następstwie tego musiałby — na podstawie (1) — i sam szereg $\mathfrak{P}(x)$ być identycznie zerem, c. b. d. d.

II. *Szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x)$ nie może na nieskończenie wielu miejscach w swem kole zbieżności (r) przybierać tę samą wartość c; chyba, że jest identycznie $=c$.*

Za przyjęciem takiej możliwości musiałby szereg:

$$c-\mathfrak{P}(x)=(c-c_0)+c_1x+c_2x^2+\ldots$$

stawać się w (r) zerem na nieskończenie wielu miejscach, a więc być identycznie zerem. Stąd wynikłoby $c_0=c_1$, a dalej: $c_1=c_2=\ldots=0$ czyli $\mathfrak{P}(x)=c$.

III. *Dwa zbieżne szeregi potęgowe $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$, które w wspólnym zakresie zbieżności na nieskończenie wielu miejscach lub w pewnem — choćby bardzo małem — continuum te same przyjmują wartości, są identyczne.*

Wtedy bowiem szereg $\mathfrak{P}(x)-\mathfrak{P}_1(x)$ będzie podług tw. I. identycznie zerem. Stąd już wynika identyczność $\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}_1(x)$*).

Uwaga. Twierdzeniami I, II uzupełniliśmy własności szeregu potęgowego w jego zakresie zbieżności, a aby je krótko scharakteryzować, zauważmy naprzód skończony lub nieskończony obszar argumentu x jakiejkolwiek funkcyi wymiernej całkowitej.

W tym zakresie jest ta funkcya skończoną, jednoznaczną i ciągłą, posiada w każdym punkcie skończone i jednoznaczne pochodne (można powiedzieć: wszystkich rzędów), staje się w tym zakresie zerem tylko na skończonej ilości miejsc i daje się przeprowadzić do otoczenia każdego dowolnego punktu tego zakresu. Wszystkie te własności posiada i każdy szereg potęgowy wewnątrz swego zakresu zbieżności (r). Stąd pochodzi, że zachowanie się szeregu potęgowego w jego zakresie zbieżności można krótko tak

---

*) Twierdzenia I., II., III. są ogólniejsze od twierdzeń II., III., art. 164. i tw. II. art. 166. W tamtych bowiem mnogości rozważane musiały mieć zawsze punkt skupienia $x=0$.

określić: *Każdy szereg potęgowy ma charakter funkcyi wymiernej całkowitej wewnątrz swego zakresu zbieżności.*

183. Znaczenie wspólnego zakresu zbieżności szeregu i jego przeprowadzenia. Zauważmy teraz dwa zbieżne szeregi $\mathfrak{P}(x \mid a)$, $\mathfrak{P}'(x \mid b)$ o kołach zbieżności częściowo się przykrywających. O nich udowodnimy:

I. *Dwa zbieżne szeregi potęgowe $\mathfrak{P}(x \mid a)$, $\mathfrak{P}'(x \mid b)$, których koła zbieżności (r), (r') mają wspólną część $(ABCDA)$ — [fig. 37.] a które w otoczeniu dowolnego punktu α leżącego w $(ABCDA)$ na nieskończenie wielu miejscach skupiających się w α, lub w continuum otaczającem α, te same przybierają wartości, są przeprowadzeniami jednego szeregu i są identyczne w całej wspólnej części $(ABCDA)$.*

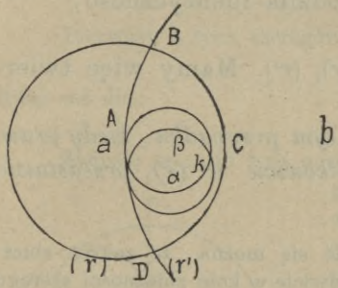


Fig. 37.

Ponieważ punkt α leży równocześnie i w (r) i w (r') więc obydwa szeregi można do otoczenia tego punktu przeprowadzić.

Przeprowadzenia te $\mathfrak{P}(x \mid a, \alpha)$, $\mathfrak{P}'(x \mid b, \alpha)$ będą równocześnie zbieżne w kole $(\alpha)_r$ [lub $(\alpha)_{r'}$, według tego, które z tych kół jest mniejsze].

W tem kole według założenia oba szeregi przybierają te same wartości na nieskończenie wielu miejscach, a więc w niem — według tw. II. — art. poprzedz. — mamy:

$$\mathfrak{P}(x \mid a, \alpha) = \mathfrak{P}'(x \mid b, \alpha] \text{ identycznie,}$$

a szeregi dane (art. 180., tw. II.) są przeprowadzeniami tych identycznych szeregów.

Pierwszą część twierdzenia mamy więc już dowiedzioną.

Obierzmy dowolny punkt β w kole $(\alpha)_r$; przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x \mid a, \alpha, \beta)$, $\mathfrak{P}'(x \mid b, \alpha, \beta)$ zbieżne równocześnie w kole $(\beta)_r$ (lub $(\beta)_{r'}$ znowu według tego, które z tych kół jest mniejsze) są identyczne w części (k) t. j. w wspólnej części kół $(\alpha)_r$, $(\beta)_r$, a więc (tw. III. art. poprzedz.) mamy:

$$\mathfrak{P}(x \mid a, \alpha, \beta) = \mathfrak{P}'(x \mid b, \alpha, \beta) \text{ identycznie w kole } (\beta)_r.$$

W ten sposób dalej postępując, możemy dojść do dowolnego punktu μ leżącego w $(ABCDA)$, a w jego otoczeniu będzie także identycznie:

$$\mathfrak{P}(x \mid a, \alpha, \beta, \ldots, \mu) = \mathfrak{P}'(x \mid b, \alpha, \beta, \ldots, \mu).$$

Że zaś takie przeprowadzenia są w otoczeniu $(\mu)_r$ [lub $(\mu)_{r'}$] identyczne z $\mathfrak{P}(x \mid a)$, $\mathfrak{P}'(x \mid b)$, więc w tem samem kole $(\mu)_r$ mamy identycznie $\mathfrak{P}(x \mid a) = \mathfrak{P}'(x \mid b)$. Tym sposobem i druga część twierdzenia jest już dowiedziona.

Teraz możemy już całkiem dokładnie rozebrać przypadek, w którym przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x \mid a)$ szeregu $\mathfrak{P}(x)$ okazuje się zbieżnem w kole (r') niezawierającem się całkowicie w (r) [fig. 36. str. 469]. $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}(x \mid a)$ są tu w każdym razie identyczne w *continuum* $(a)_r$ otaczającem punkt a. To zaś według dopiero dowiedzionego twierdzenia jest dostatecznem, aby zachodziła identyczność:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x \mid a)$$

w całej wspólnej części $(ABCQA)$ kół (r), (r'). Mamy więc twierdzenie:

II. *Przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x \mid a)$ także i w tym przypadku, kiedy prawdziwe jego koło zbieżności nie mieści się całkowicie w (r), przedstawia w wspólnej części kół (r), (r') szereg $\mathfrak{P}(x)$.*

Pd. 1. Na bardzo prostym szeregu przekonać się można, że zakres zbieżności przeprowadzenia nie zawsze mieści się całkowicie w kole zbieżności szeregu danego. Zauważmy n. p.

$$(\alpha) \qquad u(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \mathfrak{P}(x).$$

które-to równanie jest identycznością dla $|x| < 1$, [w kole $(r) = (1)$]. Gdy w tem kole obierzemy pewne x, to także identycznie mamy:

$$(\beta) \qquad u(x+h) = \mathfrak{P}(x+h).$$

jeżeli h dostatecznie jest małe. Z (α) i (β) wyniknie identyczność:

$$\mathfrak{P}'(x) = \lim_{h=0} \frac{\mathfrak{P}(x+h) - \mathfrak{P}(x)}{h} = \lim_{h=0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$$

a stąd wnosimy, że:

$$\mathfrak{P}'(x) = \frac{1!}{(1-x)^2}, \quad \mathfrak{P}''(x) = \frac{2!}{(1-x)^3}, \quad \mathfrak{P}'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}, \ldots$$

i że:

$$(\gamma) \qquad \mathfrak{P}(x \mid a) = \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-a)^3} + \ldots,$$

gdzie a jest dowolnym punktem wewnątrz koła $|x| = 1$. Szereg (γ) jest zbieżny dla:

$$|x-a| < |1-a|,$$

a więc widocznie zawsze w takiem kole, które ma środek w punkcie $A, (= a)$, a obwodem przechodzi przez punkt $B, (= 1)$ [fig. 38.].

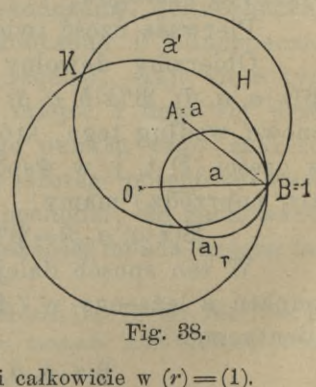


Fig. 38.

Z tego widać, że tylko w tym wypadku, kiedy a umieścimy na odcinku $0B$, będzie $(a)_r$ prawdziwym zakresem zbieżności przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x \mid a)$. Dla każdego innego położenia punktu a zakres zbieżności przeprowadzenia już się nie mieści całkowicie w $(r) = (1)$.

Pd. 2. Szereg:

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$$

jest rozwinięciem funkcyi:

$$u(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$$

w kole $(r) = (1)$. Pochodna ν^{ta} tego szeregu będzie funkcyą wymierną $=$

$$\frac{\nu!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{\nu+1}} + (-1)^{\nu}\frac{1}{(1+x)^{\nu+1}}\right],$$

a gdy a jest dowolnym punktem wewnątrz (r), to mamy:

$$\mathfrak{P}(x \mid a) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-a)^3} + \ldots\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+a} - \frac{x-a}{(1+a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1+a)^3} - \ldots\right]$$

Pierwszy z tych szeregów zbieżny jest dla:

$$|x-a| < |1-a|,$$

drugi zaś dla:

$$|x-a| < |1+a.$$

Zakresy te są-to koła o wspólnym środku a; pierwsze z nich przechodzi przez punkt $+1$, drugie przez punkt -1. Z tego wynika, że samo przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x \mid a)$ będzie— gdy punkt a leży w połowie I. koła (r), [fig. 39.]— zbieżne w kole (r') o środku w a, a o obwodzie przechodzącym przez $+1$, a będzie zbieżne w kole (r') o środku w a, a o obwodzie przechodzącym przez punkt -1, gdy punkt a leży w połowie II.

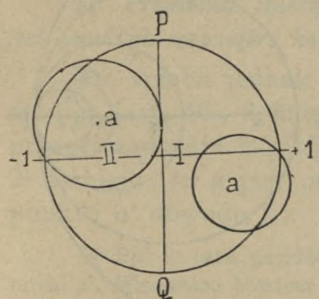


Fig. 39.

Gdy a leży na średnicy PQ, a więc $a = \pm \mu i$ gdzie μ jest ułamkiem właściwym dodatnim, to wtedy:

$$|1-a| = |1+a| = \sqrt{1+\mu^2},$$

a koło (r') przechodzi równocześnie i przez punkt $+1$ i przez punkt -1.

Gdy a na średnicy $(-1 \ldots +1)$ umieścimy, to (r') mieścić się będzie całkowicie w (r), [będzie kołem $(a)_r$]. Dla wszelkich innych położeń punktu a nie będzie nigdy (r') kołem mieszczącem się całkowicie w (r).

184. Górna i dolna granica kół zbieżności szeregów przeprowadzonych. Punkta osobliwe. Postarajmy się teraz zakres zbieżności (r') przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x \mid a)$ o tyle bliżej określić, że poszukamy dwóch kół A_a, B_a $(A_a > B_a)$ o środkach w punkcie a, a o tej własności, że (r') nigdy nie będzie większe od A_a, a mniejsze od B_a.

Niechże danym szeregiem będzie teraz $\mathfrak{P}(x \mid \alpha)$ o kole zbieżności (r), a punkt a niech leży wewnątrz (r). W jego otoczeniu przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x \mid \alpha, a)$ będzie zbieżne w takiem kole (r'), że:

$$(\alpha) \qquad r' \geqq r - |a - \alpha|.$$

Przyjmując, że a leży bliżej punktu α, aniżeli obwodu (r), możemy naodwrót — bez obierania pośrednich punktów — przyjść do szeregu:

$$\mathfrak{P}(x \mid \alpha)=\mathfrak{P}(x \mid \alpha, a, \alpha).$$

Jego promień zbieżności przyjęliśmy r; będzie on — analogicznie, jak r' — ograniczony nierównością:

$r \geqq r'-|a-\alpha|$. Stąd wynika:

$$(b) \qquad r' \leqq r+|a-\alpha|,$$

a z (a) i (b) mamy:

$$(c) \qquad r+|a-\alpha| \geqq r' \geqq r-|a-\alpha|.$$

Gdy a leży bliżej obwodu (r) niż punktu α, to dolna granica (a) promienia r' pozostaje oczywiście i tu ta sama. Aby jego górną granicę znaleść, wybierzmy na prostokreślnym odcinku $a\alpha$— (fig. 40.) — punkta a_1, a_2, a_3 czemraz bliższe punktu α podług takich prawideł. Szeregi:

$$\mathfrak{P}(x \mid \alpha),\ \mathfrak{P}(x \mid a_1),\ \mathfrak{P}(x \mid a_2),\ \mathfrak{P}(x \mid a_3)$$

są niezawodnie zbieżne w kołach: (r'), (r_1), (r_2), (r_3) które wszystkie dotykają koła (r) w punkcie P. Otóż a_1, a_2, a_3 wybierzmy tak, aby:

a było bliższe punktu a_1, niż punktu P,
a_1 " " " a_2, " " P,
a_2 " " " a_3, " " P,

a dla uproszczenia przyjmijmy, że punkt a_3 leży już bliżej punktu α, niż punktu P.

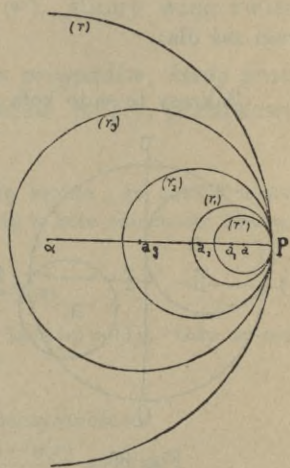


Fig. 40.

Mając to, zauważmy szeregi $\mathfrak{P}(x|a_1)$, $\mathfrak{P}(x|a)$. Uważając drugi za przeprowadzenie szeregu pierwszego mamy podług (b):

$$(\alpha) \qquad r' \leqq r_1+|a-a_1|.$$

Lecz dalej analogicznie uznać trzeba:

$$(\beta) \qquad r_1 \leqq r_2+|a_1-a_2|,$$

$$(\gamma) \qquad r_2 \leqq r_3+|a_2-a_3|,$$

$$(\delta) \qquad r_3 \leqq r+|\alpha-a_3|.$$

Uwzględniając (β) w (α) dostajemy:

$$r' \leqq r_2+|a-a_1|+|a_1-a_2|=r_2+|a-a_2|.$$

Uwzględniając tu (γ), mamy:

$$r' \leqq r_3+|a-a_2|+|a_2-a_3|=r_3+|a-a_3|.$$

Uwzględnijmy tu (δ), to dostaniemy:

$$r' \leqq r + |a - a_3| + |a_3 - \alpha| = r + |a - \alpha|.$$

Z tego wynika, że i tu mamy granice (c) i że więc:

$$A_a = (r + |a - \alpha|),\ B_a = (r - |a - \alpha|).$$

Pierwsze z tych kół dotyka obwodu (r) zewnętrznie, drugie zaś wewnętrznie. To znaczy:

I. *Koło zbieżności* (r') *jakiegokolwiek przeprowadzenia* $\mathfrak{P}(x|a)$ *nie jest nigdy większe od koła opisanego z punktu a na kole* (r), *a nie jest nigdy mniejsze od koła wpisanego z punktu a w to koło.*

Gdy a zajmie położenie dowolnego punktu a' na obwodzie (r), to suma $r + |a - \alpha|$ w nierówności (γ) przejdzie na $r + |a' - \alpha| = 2r$, która-to wielkość jest zarazem górną, a nigdy niedosięgnioną granicą tej sumy. Mając na to wzgląd dostaniemy dla wszelkich a leżących wewnątrz (r) nierówność $2r > r'$, a stąd twierdzenie:

II. *Promienie zbieżności wszystkich przeprowadzeń* $\mathfrak{P}(x|a)$, *gdzie a jest punktem wewnątrz koła* (r), *nie mogą być nigdy większe od* $2r$.

Nie trzeba jednak przez to rozumieć, że $2r$ jest zawsze górną granicą [art. 46., definicya] promieni r'. To tylko pewna, że jeżeli przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x|a)$ o promieniu dowolnie mało mniejszym od $2r$ istnieje, to a jest punktem dowolnie blisko leżącym pewnego punktu a' obwodu (r).

W Pd. 1., (art. poprzedzający) jest $2r = 2$ rzeczywiście górną granicą promieni r'. Wszystkie bowiem przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x|a)$ z punktem a dowolnie się zbliżającym do $x = -1$ mają promienie r' dowolnie mało mniejsze od 2.

W Pd. 2. przeciwnie górną granicą nie jest $2r = 2$ ale $\sqrt{2}$. Przeprowadzenia bowiem $\mathfrak{P}(x|a)$ o punktach a dowolnie się zbliżających do $x = \pm i$ mają promienie r' dowolnie mało mniejsze od $\sqrt{2}$, a przeprowadzeń z promieniami $> \sqrt{2}$ nie znajdziemy.

Gdy w nierówności (c) zajmie a znowu położenie dowolnego punktu a' na obwodzie (r), to $r - |a' - \alpha| =$ zero jest znowu dolną, a nigdy niedosięgnioną granicą różnic $r - |a - \alpha|$ dla wszelkich punktów a. Mamy więc tu $r' > 0$, a bardzo ważnem jest rozstrzygnąć, czy też to zero występuje tutaj jako istotna, dolna granica promieni r'?. Pod tym względem udowodnimy:

III. *Gdy szereg* $\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ *jest zbieżny w kole* (r), *a promienie zbieżności* r' *jego przeprowadzeń* $\mathfrak{P}(x|a)$ *nie mają dolnej granicy zero, ale granicę* $\varrho > 0$, *to* (r) *nie jest prawdziwym zakresem zbieżności danego szeregu.*

Z punktu $x=0$ zatoczmy koło (r_1) o promieniu $r_1 < r$ (fig. 41.) Obierzmy na niem dowolny punkt ξ i utwórzmy:

(1) $$\mathfrak{P}(x|\xi)=\mathfrak{P}(\xi)+\frac{\mathfrak{P}'(\xi)}{1!}(x-\xi)+\dots$$

To przeprowadzenie będzie — jak założono — zbieżne niezawodnie dla:

(2) $$|x-\xi| \leqq \varrho' < \varrho.$$

Na okręgu koła (ϱ') niech $|\mathfrak{P}(x|\xi)|$ ma największą wartość g_ξ. Wtedy [art. 163., tw. II.] mamy:

(3) $$\left|\frac{\mathfrak{P}^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}\right| \varrho'^{\nu} \leqq g_\xi.$$

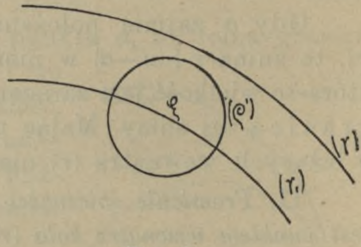


Fig. 41.

Gdy punkt ξ wraz z kołem (ϱ') poruszać się teraz będzie po okręgu koła (r_1), przebiegając go całkowicie, a dla każdego położenia jego utworzymy nierówność (3), to wielkości g_ξ odpowiadające wszystkim położeniom punktu ξ będą skończone. Wybierzmyż największą z nich: g i połóżmy ją w (3) za g_ξ, to dostaniemy nierówność:

(4) $$\left|\frac{\mathfrak{P}^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}\right| \varrho'^{\nu} \leqq g,$$

która już się spełnia na wszystkich punktach ξ okręgu (r_1). Lecz:

$$\frac{\mathfrak{P}^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}=\sum_{\lambda=\nu}^{\infty}\binom{\lambda}{\nu} c_\lambda \xi^{\lambda-\nu};$$

uwzględniając to w (4), dostaniemy:

$$\left|\sum_{\lambda=\nu}^{\infty}\binom{\lambda}{\nu} c_\lambda \xi^{\lambda-\nu}\right| \leqq g \cdot \varrho'^{-\nu},$$

przy czem $|\xi|=r_1$. Stąd wynika:

$$\binom{\lambda}{\nu}|c_\lambda| r_1^{\lambda-\nu} \leqq g\varrho'^{-\nu},\quad \lambda=\nu,\ \nu+1,\ \nu+2, \dots \text{ albo:}$$

$$\binom{\lambda}{\nu}|c_\lambda| r_1^{\lambda}.\varrho'^{\nu} \leqq g \cdot r_1^{\nu}.$$

Dzieląc obustronnie przez r^ν mamy:

$$\binom{\lambda}{\nu}|c_\lambda| r_1^{\lambda}.\left(\frac{\varrho'}{r}\right)^{\nu} \leqq g\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\nu}.$$

Obie strony sumowane tu od $\nu=0$, do $\nu=\lambda$ dają nierówność:

$$|c_\lambda| r_1^\lambda \left(1+\frac{\varrho'}{r}\right)^\lambda \leqq g . \frac{1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\lambda+1}}{1-\frac{r_1}{r}} < g . \frac{1}{1-\frac{r_1}{r}}.$$

Stąd okazuje się, że wyrazy:

$$|c_\lambda| r_1^\lambda \left(1+\frac{\varrho'}{r}\right)^\lambda = |c_\lambda| \left(r_1+\frac{r_1\varrho'}{r}\right)^\lambda,$$

gdzie $\lambda=\nu$, $\nu+1$, ...; $\nu=0, 1, 2, ...$; a więc $\lambda=0, 1, 2, ...$ nie przechodzą pewnej skończonej górnej granicy. Wyrazy te są to bezwzględne wartości $|c_\lambda x^\lambda|$ dodajników danego szeregu $\mathfrak{P}(x)$ dla:

$$|x| = r_1 + \frac{r_1\varrho'}{r};$$

według więc tw. II., art. 157. wnosić trzeba, że szereg $\mathfrak{P}(x)$ jest zbieżnym dla $|x| < r_1 + \frac{r_1\varrho'}{r}$.

Lecz r_1 można — zwiększając — dowolnie zbliżyć do r; podobnie ϱ' — rosnąc — dowolnie może się przybliżyć do ϱ. Stąd wynika, że $r_1 + \frac{r_1\varrho'}{r}$ ma granicę górną $(r+\varrho)$. To koło będzie zarazem prawdziwym zakresem zbieżności danego szeregu.

Z tego potrzeba wnosić, że, gdy (r) jest prawdziwym zakresem zbieżności szeregu, to jego przeprowadzenia mają promienie zbieżności r' koniecznie z dolną granicą: zero. Że zaś ową granicę dostajemy z różnicy $r-|a-\alpha|$, gdy a znajduje się na obwodzie (r) [a przeszło na a'], więc stąd wnosimy:

IV. *Na obwodzie prawdziwego koła zbieżności* (r) *znajdować się musi jeden przynajmniej punkt c o tej własności, że, gdy a nieskończenie zbliża się do c (wewnątrz* (r)*), to promień zbieżności przeprowadzenia* $\mathfrak{P}(x|a)$ *dowolnie się zbliża do zera.**)

Taki każdy punkt c nazywamy osobliwym, albo szczególnym punktem szeregu.

Szereg $1+x+x^2+...$ ma taki punkt jeden, a jest nim $c=+1$; szereg $1+x^2+x^4+...$ ma punktów osobliwych dwa, a mianowicie $c=\pm 1$ (por. Pd. 1. i Pd. 2., art. poprzedz.).

Z twierdzenia IV. wynika odrazu:

V. *Każdy punkt szczególny c szeregu* $\mathfrak{P}(x)$ *jest zarazem takim samym punktem dla każdego przeprowadzenia* $\mathfrak{P}(x|a)$, *którego obwód zbieżności przechodzi przez c.*

---

*) Por. pod tym względem także M. Krause: „*Theorie der doppelperiodischen Functionen*“... (Lipsk 1895), str. 12—16.

Uwaga 1. Z tego powodu chcąc zbadać, czy punkt a' jest osobliwym, można tak postąpić: Na promieniu $0a'$ (fig. 42.) wybieramy dowolny punkt b i tworzymy przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x|b)$. Jeżeli prawdziwy zakres zbieżności takiego przeprowadzenia jest kołem $(b)_r$, a nie większem, to punkt a' jest szczególnym.

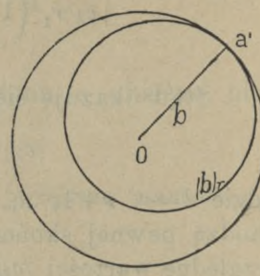


Fig. 42.

Uwaga 2. Co się tyczy ilości punktów osobliwych na obwodzie (r), to ta może być skończona lub nieskończona. W tym drugim wypadku mogą one utworzyć nawet *continuum*, stanowiące cały obwód (r). Wszelkie możliwe przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x|a)$ takiego szeregu mają koła $(a)_r$, (a nie większe) za prawdziwe zakresy zbieżności.

185. Znamiona zachowania się szeregu na całym jego obwodzie zbieżności.*) Powiedzieliśmy [art. 158.], że szeregi potęgowe pod względem zachowania się na samym obwodzie zbieżności (r) dzielą się na dwa rodzaje, a to: 1) na takie, które w każdym punkcie a' tego obwodu są zbieżne bezwarunkowo i 2) na takie, które w żadnym punkcie a' nie są w ten sposób zbieżne.

Bliższem rozpoznaniem tego zachowania się zajmiemy się teraz. Niech szereg: $\mathfrak{P}_1(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$ ma zakres zbieżności (r). Położmy, gdy $r \gtreqless 1$, $x=r.z$, to otrzymamy szereg:

$$\mathfrak{P}_2(z)=c_0+(c_1r)z+(c_2r^2)z^2+\ldots$$

zbieżny już w kole $(|z|=1)$, a stąd wynika: że możemy się w dalszym ciągu ograniczyć do szeregów:

$$(A)\qquad \mathfrak{P}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

zbieżnych dla $|x|<1$, t. j. w kole [1].

Przyjmijmy — co istotnie często w analizie się zdarza — że poczynając od $n=\nu$, mamy statecznie:

$$(1)\qquad \frac{a_n}{a_{n-1}}=1+\frac{g+hi}{n}+\frac{g_1+h_1i}{n^2}+\ldots,\quad i=\sqrt{-1},$$

$$(2)\qquad n=\nu,\ \nu+1,\ \nu+2,\ \ldots$$

Stałe $g, h, g_1, h_1, \ldots$ nie zależą od n, a samo rozwinięcie (1) jest skończone, lub bez końca, ale w tym drugim wypadku jest przy każdem n wyjętem z (2) zbieżnym szeregiem.

Z (1) — kładąc $|a_\lambda|=\alpha_\lambda$ — dostajemy:

$$\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\right)^2=\left(1+\frac{g}{n}+\frac{g_1}{n^2}+\ldots\right)^2+\left(\frac{h}{n}+\frac{h_1}{n^2}+\ldots\right)^2=1+\frac{2g}{n}+\frac{g^2+h^2+2g}{n^2}+\ldots,$$

a stąd:

*) Ten i następny artykuł można w pierwszej lekturze opuścić.

(3) $$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\left(1+\frac{2g}{n}+\ldots\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{g}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\ldots$$

Stosunek ten dąży do granicy:

$$lim\,\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$$

i nie rozstrzyga o zbieżności szeregu:

(*B*) $$a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots$$

Lecz, że tu:

$$\lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=-g\,,$$

więc — podług art. 173., tw. I. — będzie szereg (*B*) [absolutnie] zbieżny, gdy $g<-1$, a rozbieżny, gdy $g>-1$, a dalej wnosimy:

I. *Szereg* $\mathfrak{P}(x)$ — *w razie* $g<-1$ — *jest w każdym punkcie* a' *koła* [1] *absolutnie zbieżnym, a w razie* $g>-1$ *nie jest absolutnie zbieżny.*

Gdy $g>-1$, to trzeba rozstrzygnąć, czy rozbieżność szeregu (*B*) ma za sobą pociągnąć rozbieżność, nieprzydatność, lub wreszcie warunkową lub wahającą zbieżność szeregu (*A*) w punktach a'. W tym celu napiszmy (3) w postaci:

(4) $$\frac{a_n}{a_{n-1}}=1+\frac{1}{n}\left(g+\frac{c_2}{n}+\ldots\right)=1+\frac{\omega_n}{n}$$

$$\omega_n=g+\frac{c_2}{n}+\ldots$$

Liczniki ω_n są widocznie wszystkie skończone, różne od zera i dążą dla $n=\infty$ do skończonej granicy g. Będą więc dla dostatecznie dużych n — przyjmijmy i tu że dla wszelkich $n>\nu$ — wyłącznie dodatnie, gdy $g>0$, a wyłącznie ujemne, gdy $g<0$.

Połóżmyż:

(5) $$a_s=a_\nu\,.\,\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\,.\,\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}}\ldots\frac{a_s}{a_{s-1}}\,,\quad s>\nu\,,$$

co jest identycznością, to teraz — stosując (4) — mieć będziemy:

$$a_s=a_\nu\prod_{n=\nu+1}^{s}\left(1\pm\frac{|\omega_n|}{n}\right),\quad \text{i}$$

$$lim\,a_s=a_\nu\prod_{n=\nu+1}^{\infty}\left(1\pm\frac{|\omega_\nu|}{n}\right);$$

znaku + użyć trzeba, gdy $g>0$, a znaku — gdy $g<0$.

Szereg $\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{\nu+3}+\ldots$ jest rozbieżnym, że zaś

$$|\omega_{\nu+1}|,\quad |\omega_{\nu+2}|,\quad |\omega_{\nu+3}|,\quad \ldots$$

są wszystkie skończone, jednakowego znaku i różne od zera, więc i szereg:

$$\frac{|\omega_{\nu+1}|}{\nu+1}+\frac{|\omega_{\nu+2}|}{\nu+2}+\frac{|\omega_{\nu+3}|}{\nu+3}+\ldots$$

będzie [art. 11., tw. III.] rozbieżnym.

Z tego i z twierdzeń o iloczynach nieskończonych [art. 12.] mamy:

$$(\alpha)\qquad lim\, a_n=+\infty,\ \text{gdy}\ g>0,$$

$$(\beta)\qquad lim\, a_n=0,\ \text{gdy}\ g<0.$$ Z (α) wynika:

II. $\mathfrak{P}(x)$ — *gdy* $g>0$ — *jest szeregiem rozbieżnym, albo nieprzydatnym w punktach* a' *okręgu* [1].

I⁰. Przyjmijmy: $g=0$, to:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=1+\frac{c_2}{n^2}+\frac{c_3}{n^3}+\ldots=1+\frac{\tilde{\omega}_n}{n^2},\ \text{a ilości:}$$

$$\tilde{\omega}_n=c_2+\frac{c_3}{n}+\ldots$$

zachowują się i tu przy dostatecznie dużych n — $(>\nu)$ — analogicznie, jak ω_n; są więc skończone, jednakowego znaku, różne od zera i dążą do skończonej granicy c_2. Tu mamy dalej:

$$(6)\qquad lim\, a_s=a_\nu \prod_{n=\nu+1}^{\infty}\left(1+\frac{\tilde{\omega}_n}{n^2}\right),$$

a że szereg:

$$\frac{\tilde{\omega}_{\nu+1}}{(\nu+1)^2}+\frac{\tilde{\omega}_{\nu+2}}{(\nu+2)^2}+\ldots$$

jest absolutnie zbieżnym, [por. u w a g ę w art. 11.], więc iloczyn (6) jest zbieżny bezwarunkowo, daje wartość >0, a to znaczy, że tu:

$$(\gamma)\qquad lim\, a_s=\text{ ilość skończona } >0,$$ i że:

III. *Szereg* $\mathfrak{P}(a')$ *jest* — *gdy* $g=0$ — *albo rozbieżnym szeregiem (z dodajnikami zdążającymi do granic skończonych i różnych od zera), albo szeregiem wahającym.*

II⁰. Gdy $g=-1$, mamy podług (β): $lim\, a_n=0$. Połóżmy:

$$p_n=\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{m+n}\right),$$

gdzie m dowolną całkowitą dodatnią jest liczbą $<\nu$; $n=\nu$, $\nu+1$, $\nu+2$, ...; i zauważmy iloraz:

$$\frac{a_n}{p_n}:\frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}=\frac{a_n}{a_{n-1}}.\frac{p_{n-1}}{p_n}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\ldots\right).\frac{1}{1-\dfrac{1}{m+n}}.$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1-\frac{1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{m+n}\right)^{-1} = \left(1-\frac{1}{n}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{m+n}+\ldots\right) \\
(7)\qquad &= \left(1-\frac{1}{n}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-1}+\ldots\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{c'_2}{n^2}+\ldots\right) \\
&= 1+\frac{d_2}{n^2}+\frac{d_3}{n^3}+\ldots = 1+\frac{k_n}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Ilości $k_n = d_2 + \frac{d_3}{n} + \ldots$ będą znowu dla $n > \nu$ wszystkie skończone, jednakowego znaku i różne od zera (dążąc do granicy d_2). Z (7) dostajemy:

$$
(8)\qquad \frac{a_n}{p_n} = \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}\left(1+\frac{k_n}{n^2}\right),
$$

a to — podobnie jak w I⁰ — wskazuje, że granica $\lim a_n/p_n = t$ jest skończoną, różną od zera i że więc ilorazy a_n/p_n od pewnego $n=\nu$ począwszy, są skończone, jednakowego znaku i różne od zera.

Z (8) dostajemy dalej:

$$
\frac{a_{n-1}}{p_{n-1}} - \frac{a_n}{p_n} = -\frac{a_{n-1}}{p_n}\frac{k_n}{n^2} = -\frac{h_n}{n^2},
$$

a poczynając od $n=\nu+1$, mamy:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{p_n} - \frac{a_{n+1}}{p_{n+1}} &= -\frac{h_{n+1}}{(n+1)^2} \\
\frac{a_{n+1}}{p_{n+1}} - \frac{a_{n+2}}{p_{n+2}} &= -\frac{h_{n+2}}{(n+2)^2} \\
\frac{a_{n+2}}{p_{n+2}} - \frac{a_{n+3}}{p_{n+3}} &= -\frac{h_{n+3}}{(n+3)^2} \\
\vdots \qquad \vdots \quad &\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Po zsumowaniu tych relacyj *in infinitum*, okaże się:

$$
(9)\qquad \frac{a_n}{p_n} = t - \left[\frac{h_{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{h_{n+2}}{(n+2)^2} + \ldots\right].
$$

Jestto szereg zbieżny, gdyż $\sigma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots$ jest szeregiem zbieżnym, a $h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots$ są wszystkie skończone. Połóżmy:

$$
(10)\qquad \frac{h_{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{h_{n+2}}{(n+2)^2} + \ldots = h'_n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right) = h'_n \sigma_n
$$

gdzie h'_n jest średnią wartości $h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots$ spełniającą właśnie równanie (10), to mamy teraz:

$$
(11)\qquad a_n/p_n = t - h'_n \sigma_n. \quad \text{Lecz:}
$$

$$\sigma_n < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots = \frac{1}{n}.$$

Wskutek tego można położyć: $\sigma_n = \varepsilon_n/n$, gdzie ε_n jest dodatnim właściwym ułamkiem, a wtedy — kładąc $h'_n\varepsilon_n = -t_n$ — dostaniemy z (11):

$$a_n = \left(t + \frac{t_n}{n}\right)p_n, \quad n = \nu,\ \nu+1, \dots$$

Wskutek tego jest:

$$a_\nu + a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \dots = t(p_\nu + p_{\nu+1} + p_{\nu+2} + \dots)$$
$$+ \frac{t_\nu}{\nu}p_\nu + \frac{t_{\nu+1}}{\nu+1}p_{\nu+1} + \frac{t_{\nu+2}}{\nu+2}p_{\nu+2} + \dots$$

Lecz: $p_n = \dfrac{m-1}{m} \cdot \dfrac{m}{m+1} \dots \dfrac{m+n-1}{m+n} = \dfrac{m-1}{m+n}$, a więc szereg:

$$p_\nu + p_{\nu+1} + \dots = (m-1)\left(\frac{1}{m+\nu} + \frac{1}{m+\nu+1} + \dots\right)$$

jest rozbieżny.

Co się tyczy szeregu:

$$(\delta) \qquad \frac{t_\nu}{\nu}p_\nu + \frac{t_{\nu+1}}{\nu+1}p_{\nu+1} + \dots,$$

to — choć $p_\nu + p_{\nu+1} + \dots$ jest rozbieżnym szeregiem, nie można tego samego powiedzieć o (δ), gdyż mnożniki $\dfrac{t_\nu}{\nu}, \dfrac{t_{\nu+1}}{\nu+1}, \dots$ dążą do granicy zero. Zauważmy jednak przódy szereg:

$$(\varepsilon) \qquad \frac{p_\nu}{\nu} + \frac{p_{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{p_{\nu+2}}{\nu+2} + \dots$$

Mamy tu:

$$\frac{p_n}{n} : \frac{p_{n-1}}{n-1} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots;$$

a więc jest $g = -2 < 0$, a stąd wynika, że szereg (ε), a z nim — ponieważ $t_\nu, t_{\nu+1}, \dots$ są wszystkie skończone — i szereg (δ) jest zbieżnym.

Z tego wnosimy, że tu szereg (B) jest rozbieżny [podług (β) posiada $\lim a_s = 0$], i że:

IV. *Szereg* $\mathfrak{P}(a')$ *nie jest — gdy* $g = -1$ *— nigdy absolutnie zbieżnym.*

186. Warunkowa zbieżność. Punkt $x=+1$. Zakresy wartości g, dla których umiemy wywnioskować nietylko zachowanie się szeregu $(a_0+a_1+a_2+\ldots)$, ale także i samego szeregu $\mathfrak{P}(a')$ są:

$$g<-1 \text{ i } g\geqq 0.$$

Pozostaje więc zbadać jeszcze obszar $-1\leqq g<0$. W tym celu zauważmy iloczyn:

$$(1-x).\mathfrak{P}(x)=\mathfrak{P}_1(x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+\ldots$$

Dla niego mamy:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{(a_{n+1}/a_n)-1}{(a_n/a_{n-1})-1}=$$

$$=\left(1+\frac{g+hi}{n}+\ldots\right)\frac{n}{n+1}\cdot\frac{g+hi+c_2/(n+1)+\ldots}{g+hi+c_2/n+\ldots}=$$

$$=\left(1+\frac{g+hi}{n}+\ldots\right).\left(1-\frac{1}{n}+\ldots\right).\frac{1+c'_2\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\ldots\right)}{1+c'_2\frac{1}{n}-\ldots}=$$

$$=\left(1+\frac{g+hi}{n}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{n}+\ldots\right)\left(1+\frac{a}{n^2}+\ldots\right)=$$

$$=1+\frac{(g-1)+hi}{n}+\ldots$$

Według twierdzenia I. [art. poprzedz.] będzie szereg $\mathfrak{P}_1$ absolutnie zbieżny w punktach a', gdy będzie $g-1<-1$, a więc: gdy $g<0$.

$\mathfrak{P}(a')$ jest dla $g<-1$ także zbieżny, a więc w zakresie tym nie mamy żadnej sprzeczności. Lecz, gdy $-1\leqq g<0$, to $\mathfrak{P}(a')$ nie jest już absolutnie zbieżny [tw. I., IV., art. poprzedz.], ale iloczyn $(1-x).\mathfrak{P}(x)$ ma tu być absolutnie zbieżny. Że zaś dla $g<0$ jest $\lim a_s=0$, więc $\mathfrak{P}(x)$ trzeba w punktach $a'\neq 1$ uznać za szereg warunkowo zbieżny. Wyjątkiem może być punkt $x=1$, dla którego mamy:

$$\mathfrak{P}(1)=\left.\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{1-x}\right]_{x=1}=\left.\frac{\lim a_s}{1-x}\right]_{x=1},$$

a że tu podług (β) art. poprzedz. jest: $\lim a_s=0$, więc $\mathfrak{P}(1)$ okazuje się nieoznaczonej wartości i może być także rozbieżny.

Pokażemy, że w punkcie $x=1$ wykluczona jest warunkowa zbieżność. Niech

$$P_n=\left(1-\frac{g+hi}{m}\right)\left(1+\frac{g+hi}{m+1}\right)\ldots\left(1+\frac{g+hi}{m+n}\right),$$

to łatwo sprawdzimy, że:

$$\frac{a_n}{P_n}:\frac{a_{n-1}}{P_{n-1}}=1+\frac{a'_2}{n^2}.$$

*

Wskutek tego — podobnie postępując, jak w II⁰ [art. poprz.]— dojdziemy do form:

$$(a) \qquad a_n = P_n\left(v + \frac{w_n}{n}\right),$$

gdzie v nie zależy od n, a w_n są wszystkie skończone.

Uwzględniając (a) mamy:

$$\mathfrak{P}_1(1) - a_0 = a_1 + a_2 + \ldots = v(P_1 + P_2 + \ldots) + \left(\frac{P_1 w_1}{1} + \frac{P_2 w_2}{2} + \ldots\right)$$
$$= v.S + S_1.$$

Ponieważ iloraz:

$$\frac{P_n}{n} : \frac{P_{n-1}}{n-1} = 1 + \frac{(g-1)+hi}{n} + \ldots,$$

więc szereg $(P_1/1 + P_2/2 + P_3/3 + \ldots)$ będzie absolutnie zbieżny, gdy $g-1<0$, a równocześnie i szereg S_1 — gdyż w_n są wszystkie skończone — taksamo zachowywać się będzie. Z tego wynika, że w razie $g-1<0$, będzie się szereg $\mathfrak{P}(1)$ tak samo zachowywał, jak szereg S. Zajmijmyż się szeregiem S. Połóżmy: $P_1 + P_2 + \ldots + P_n = S_n$, to mamy: $S_n + P_0 = P_0 + P_1 + \ldots + P_n$. Lecz

$$P_\nu - P_{\nu-1} = \frac{g+hi}{m+\nu} . P_{\nu-1}, \quad \text{czyli:}$$
$$(m+\nu)P_\nu - (m+\nu-1)P_{\nu-1} = (g+hi+1)P_{\nu-1}.$$

Sumując obie strony tych związków od $\nu=1$ do $\nu=n+1$, mamy:

$$S_n + P_0 = P_0 + P_1 + \ldots + P_n = \frac{(m+n+1)P_{n+1} - mP_0}{g+hi+1}.$$

Z tego wynika, że wartość szeregu S zależeć będzie od tego, do jakiej granicy dążą:

$$(m+n+1)P_{n+1}, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \textit{ in inft.}$$

Zauważmyż, że:

$$\frac{(m+n+1)P_{n+1}}{(m+n)P_n} = \left(1+\frac{g+hi}{n}\right)\left(1+\frac{m+1}{n}\right)\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-1} =$$
$$= 1 + \frac{(g+1)+hi}{n} + \ldots,$$

to teraz wywnioskujemy:

1) Gdy $g+1=0$, a więc $g=-1$, to $(m+n+1)|P_{n+1}|$ dążą do skończonej granicy $\neq 0$ [por. (γ) art. poprzedz.], a szereg S, a z nim i *szereg* $a_0 + a_1 + \ldots$ *jest albo rozbieżnym, albo wahającym — [dla* $h=0$ *jest rozbieżnym].*

2) Gdy $(g+1)>0$, to $(m+n+1)P_n$ dążą do granicy nieskończonej, a wtedy szereg S, a z nim i *szereg* $\mathfrak{P}(1)$ *jest rozbiczny albo nieprzydatny.*

Z wszystkich tych uwag dochodzimy do twierdzenia*):

I. *Gdy* $\mathfrak{P}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ *ma koło zbieżności [1], a od pewnego n począwszy, jest statecznie:*

$$(b)\qquad \frac{a_n}{a_{n-1}}=1+\frac{g+hi}{n}+\ldots$$

to na samym okręgu [1] jest $\mathfrak{P}(x)$*:*

1⁰ bezwarunkowo zbieżny, gdy $g<-1$.

2⁰ rozbieżny, albo nieprzydatny (w jednych punktach rozbieżny, w drugich nieprzydatny (lub wszędzie o jednakowem zachowaniu się), gdy $g>0$.

3⁰ rozbieżny albo wahający, gdy $g=0$.

4⁰ warunkowo zbieżny — z wyjątkiem punktu $x=+1$ *— gdy* $0>g\geqq-1$.

Uwaga 1. Napiszmy (b) w ten sposób:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=1+\frac{g+hi}{1+(n-1)}+\frac{g_1+h_1i}{[1+(n-1)]^2}+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}(g+hi)+\frac{1}{(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-2}(g_1+h_1i)+\ldots,$$

to otrzymamy rozwinięcie:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=1+\frac{g+hi}{n-1}+\frac{g'_1+h'_1i}{(n-1)^2}+\ldots,$$

w którem widocznie spółczynnik przy $(n-1)^{-1}$ jest taki sam, jak w (b) przy n^{-1}. Zamieńmyż tu n na $n+1$, to mieć będziemy:

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{g+hi}{n}+\ldots$$

z takiem g, jak przódy.

Uwaga 2. W razie, gdy w szeregu danym $\mathfrak{P}(x)$ okaże się $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ lub $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ postaci:

$$q=-1+\frac{\gamma+\delta i}{n}+\ldots$$

to pisząc $\mathfrak{P}(x)$ w postaci:

$$a_0-a_1(-x)+a_2(-x)^2-a_3(-x)^3+\ldots=\mathfrak{P}_1(-x),$$

a więc uznając go za szereg argumentu $(-x)$, dostaniemy już dla tej jego drugiej postaci:

$$q=1-\frac{\gamma+\delta i}{n}+\ldots;$$

$g=-\gamma$ decydować tu będzie o zachowaniu się szeregu $\mathfrak{P}_1(-x)$ w punkcie $(-x)=a'$, a szeregu danego w punkcie $x=-a'$.

---

*) Weierstrass *Abhandlungen aus der Functionenlehre* w rozprawie *„Über Theorie der analytischen Facultäten"* str. 212—225. Por. także Stolz *Vorlesungen über allg. Arithmetik.* T. 2. str. 144.

Pd. 1. Dla szeregu dwumiennego:

$$(1+x)^{\mu}=N(x,\mu)=1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\dots$$

mamy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\mu-n}{n+1}=n\left(-1+\dfrac{\mu}{n}\right)\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}=$

$$=q=-1+\frac{\mu+1}{n}+\dots$$

Pisząc $N(x,\mu)$ w postaci: $1-\binom{\mu}{1}(-x)+\binom{\mu}{2}(-x)^2-\binom{\mu}{3}(-x)^3+\dots$ dostajemy już:

$$q=1-\frac{\mu+1}{n}+\dots$$

Z tego wnioskujemy, że szereg dwumienny $N(x,\mu)$ będzie:

1. na całem kole [1] bezwarunkowo zbieżny, gdy $\mu>0$;
2. rozbieżny, lub nieprzydatny, gdy $\mu<-1$;
3. rozbieżny, lub wahający, gdy $\mu=-1$;
4. na całem kole — z wyjątkiem punktu $x=-1$ — warunkowo zbieżnym, gdy $0>\mu>-1$.

W razie $\mu=-1$ mamy szereg:

$$1-x+x^2-x^3+\dots$$

Jest on rozbieżny w punkcie $a'=-1$, w każdym zaś innym punkcie $a=\cos\varphi+i\sin\varphi$ $(\varphi\lesseqgtr\pi)$ będzie wahającym.

Pd. 2. W szeregu Gaussa [art. 173. Pd. 2.] jest:

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}=$$

$$=\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\dots\right)\left(1-\frac{\gamma}{n}+\dots\right)=$$

$$=1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+\dots$$

Połóżmy, przyjmując, że α, β, γ są urojone —

$$\alpha=a_1+a_2 i,\quad \beta=b_1+b_2 i,\quad \gamma=c_1+c_2 i,$$

to mieć będziemy:

$$q=1+\frac{(a_1+b_1-c_1-1)+(a_2+b_2-c_2)i}{n}+\dots,\ \text{a więc tu:}$$

$$g=a_1+b_1-c_1-1,$$

a szereg tak się zachowywać będzie:

1. gdy $c_1-a_1-b_1>0$, jest bezwarunkowo zbieżnym;
2. gdy $a_1+b_1-c_1>1$, jest rozbieżny, albo nieprzydatny;
3. gdy $a_1+b_1-c_1=1$, jest rozbieżny, albo wahający;
4. gdy $1>a_1+b_1-c_1\geqq 0$, jest — z wyjątkiem punktu $x=+1$ — warunkowo zbieżny.

Pd. 3. Zbadajmy szereg:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots=x\left[1+\frac{(-x^2)}{3}+\frac{(-x^2)^2}{5}+\frac{(-x^2)^3}{7}+\dots\right]$$

Szereg argumentu $(-x^2)$ ujęty w nawiasy, posiada iloraz:

$$q=\frac{2n-1}{2n+1}=1-\frac{1}{n}+\dots$$

a w nim jest $g=-1$. Szereg dany będzie więc na całym okręgu warunkowo zbieżnym z wyjątkiem punktów $-x^2=+1$, t. j. punktów $+i$, $-i$, na których jest widocznie rozbieżny.

Pd. 4. Zbadać zachowanie się szeregu:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\dots$$

na okręgu koła [1]? (Jest warunkowo zbieżny z wyjątkiem punktu $x=-1$, na którym jest rozbieżny)*).

187. Określenie wartości szeregu w punktach okręgu zbieżności. Możemy przyjść teraz do określenia wartości szeregu w punktach a' na jego okręgu zbieżności (r).

I^0. Jeżeli $\mathfrak{P}(a')$ jest warunkowo, albo wahająco zbieżnym, albo wreszcie nieprzydatnym szeregiem, to niewiadomo, jaką mu wartość nadać. Lecz, gdy przyjmiemy, że ten punkt a' nie jest osobliwym, to znaleźć można bardzo dużo przeprowadzeń $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ takich, że w ich zakresach zbieżności (r') ten punkt a' zawierać się będzie. Jedno z tych przeprowadzeń weźmy pod uwagę.

We wspólnej części kół (r), (r') można $\mathfrak{P}(x)$ także przez $\mathfrak{P}(x|a)$ zdefiniować. Zatrzymując więc tę definicyę i w punkcie a', dostajemy jako określenie wartości szeregu w punkcie a':

(1) $$\mathfrak{P}(a')=\mathfrak{P}(a'\,|\,a).$$ To znaczy:

I. *Gdy punkt a' jest punktem nieszczególnym, a $\mathfrak{P}(a')$ jest szeregiem warunkowo, wahająco, lub nieprzydatnie zbieżnym, to $\mathfrak{P}(a')$ określamy przez $\mathfrak{P}(a'\,|\,a)$, gdzie $\mathfrak{P}(x|a)$ jest dowolnem przeprowadzeniem o kole zbieżności (r') mieszczącem w sobie punkt a'.*

Pd. 1. Szereg $\mathfrak{P}(x)=1+x+x^2+\dots$ jest w punkcie $x=-1$ wahająco zbieżnym. Jego przeprowadzenie:

$$\mathfrak{P}\left(x\,\middle|\,-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{x+\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}+\dots$$

zbieżne jest dla $\left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$, a w tym zakresie punkt -1 leży. Z tego powodu położymy:

$$\mathfrak{P}(-1)=\mathfrak{P}\left(-1\,\middle|\,-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\left[\text{Rzeczywiście jest } \left.\frac{1}{1-x}\right)_{x=-1}=\frac{1}{2}\right].$$

*) Szeregi użyte w Pd. 1, 3, 4, podaje Biermann *„Elemente der höheren Mathematik"*. (1895), str. 371.

Pd. 2. Równanie:

$$(1+x)^{\mu}=1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\ldots=\mathfrak{P}(x).$$

jest dla $|x|<1$ właściwie identycznością. W tym samym więc zakresie jest:

$$\mu(1+x)^{\mu-1}=\mathfrak{P}'(x),\ \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}=\mathfrak{P}''(x),\ldots$$

a stąd wynika, że przeprowadzenie:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(x\,|\,a)&=(1+a)^{\mu}+\binom{\mu}{1}(1+a)^{\mu-1}(x-a)+\ldots\\&=(1+a)^{\mu}\left[1+\binom{\mu}{1}\frac{x-a}{1+a}+\binom{\mu}{2}\frac{(x-a)^2}{(1+a)^2}+\ldots\right]\\&=(1+a)^{\mu}\left(1+\frac{x-a}{1+a}\right)^{\mu}.\end{aligned}$$

Jest ono zawsze zbieżne w zakresie $|x-a|<|1+a|$ t. j. w kole o środku w punkcie a, a o obwodzie przechodzącym przez punkt $x=-1$.

Gdy założymy $\mu<-1$, to $\mathfrak{P}(x)$ jest w punkcie $x=+1$ nieprzydatnym szeregiem. Punkt ten mieści się w kole zbieżności przeprowadzenia $\mathfrak{P}\left(x\,\middle|\,+\frac{1}{2}\right)$.

Połóżmyż $a=\frac{1}{2}$, to dostajemy (podług (1)):

$$\mathfrak{P}(1)=\mathfrak{P}\left[1\,\middle|+\frac{1}{2}\right]=\left[1+\frac{1}{2}\right]^{\mu}\left\{1+\frac{x-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right\}^{\mu}_{x=1}=2^{\mu}.$$

II^0. Niech $\mathfrak{P}(a')$ będzie bezwarunkowo zbieżnym szeregiem, a punkt a' niech nie będzie osobliwym. Obierzmy punkt x' leżący wewnątrz (r) dowolnie blisko punktu a', to dostaniemy:

$$(\alpha)\qquad \mathfrak{P}(a')-\mathfrak{P}(x')=\varepsilon+\varepsilon' i,$$

gdzie ε, ε' są rzeczywiste ilości o bezwzględnych wartościach nieskończenie małych.

Gdy dalej utworzymy takie przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x|a)$, że w jego kole zbieżności mieści się punkt a', to otrzymamy znowu:

$$(\beta)\qquad \mathfrak{P}(a\,|\,a')-\mathfrak{P}(x'\,|\,a)=\varepsilon_1+\varepsilon'_1 i$$

o ε_1, ε'_1 określających się tak samo, jak ε, ε'. Z (α) i (β) — ponieważ $\mathfrak{P}(x')=\mathfrak{P}(x'\,|\,a)$ — wynika: $|\mathfrak{P}(a')-\mathfrak{P}(a'\,|\,a)|<\delta$, gdzie δ dowolnie małą dodatnią jest ilością. Lecz, że lewa strona tej nierówności jest stałą, więc musi być:

$$\mathfrak{P}(a')=\mathfrak{P}(a'\,|\,a)\quad \text{a to zn.}$$

II. *Gdy a' jest na kole (r) punktem nieosobliwym, a $\mathfrak{P}(a')$ jest absolutnie zbieżne, to identycznie jest $\mathfrak{P}(a')=\mathfrak{P}(a'|a)$, a przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x\,|\,a')$ ma znaczenie, choć tu a' już na kole (r) leży.*

III^0. Przyjmijmy, że $\mathfrak{P}(a')$ jest szeregiem rozbieżnym bez różnicy, czy dodajniki $|c_{\lambda}\,a'^{\lambda}|$ są wszystkie skończone, czy dążą do granicy nieskończonej, przyczem nie wchodzimy, czy punkt a' jest szczególny czy nieszczególny. Połóżmy:

$$c_\lambda = a_\lambda + b_\lambda i\,,\quad x = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

to dostaniemy:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_1(\varrho) + \mathfrak{P}_2(\varrho)\,i,$$

gdzie $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ są-to szeregi potęgowe rzeczywistego argumentu ϱ, o rzeczywistych spółczynnikach zależnych od parametru φ. Niech

$$\mathfrak{P}_1(\varrho) = U_1(\varrho) - V_1(\varrho),\ \mathfrak{P}_2(\varrho) = U_2(\varrho) - V_2(\varrho),$$

gdzie U_1, U_2 są sumami dodatnich, a V_1, V_2 sumami odjemnych wyrazów w $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, to dalej mamy:

$$|\mathfrak{P}(x)| = \sqrt{[U_1(\varrho) - V_1(\varrho)]^2 + [U_2(\varrho) - V_2(\varrho)]^2}$$

Z rozbieżności szeregu $\mathfrak{P}(a')$ wynika:

$|\mathfrak{P}(a')| = \infty$. Przyjmijmy:

$$a' = r\,(\cos\psi + i\sin\psi),$$

to jasnem jest, że dla $\varrho = r$, $\varphi = \psi$ w jednej przynajmniej z par:

$$(a)\quad (U_1,\ V_1), \qquad (b)\quad (U_2,\ V_2)$$

jeden (tylko jeden) z szeregów staje się nieskończonością.

Lecz te szeregi są o wyrazach jednakowego znaku $+$. Stąd wynika, że gdy się ϱ dowolnie przybliża do r (pozostając $< r$), a $\varphi = \psi$, to z szeregów (a), (b) te, które się dla $\varrho = r$, i $\varphi = \psi$ stają nieskończonościami, mogą być większe od dowolnie dużej danej dodatniej ilości G'.

Ze zbliżaniem się ϱ do r, przy $\varphi = \psi$, dostajemy w (r) punkt x' nieskończenie bliski punktu a', a $|\mathfrak{P}(x')|$ będzie również mogło być większe od dowolnie dużej dodatniej ilości G. Mamy więc twierdzenie:

III. *W otoczeniu takiego punktu a', w którym $\mathfrak{P}(a')$ jest rozbieżnym szeregiem, znajdują się punkta x' o tej własności, że w nich $|\mathfrak{P}(x')|$ przybiera wartości większe od każdej dowolnie dużej skończonej dodatniej ilości G.*

Przyjmijmy, że punkt a' (dający $|\mathfrak{P}(a')| = \infty$) jest punktem nieszczególnym. Istnieje wtedy przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x|a)$, które w swojem kole zbieżności (r') zawiera punkt a', a gdy x' jest punktem zawartym równocześnie w (r) i (r'), to ma być identycznie:

$$(2)\qquad \mathfrak{P}(x') = \mathfrak{P}(x'|a).$$

Lecz — gdy x' będzie punktem określonym w tw. II. — to identyczność (2) stanie się niemożliwą, bo $\mathfrak{P}(x'|a)$ dowolnie mało różni się od $\mathfrak{P}(a'|a)$, a $|\mathfrak{P}(x')|$ jest dowolnie duże. Z tego wynika, że założenie, iż punkt a' nie jest szczególnym punktem jest fałszywe i mamy twierdzenie:

IV. *Każdy punkt a' na okręgu (r) taki, że w nim $\mathfrak{P}(a')$ jest rozbieżnym szeregiem, jest osobliwym szeregu $\mathfrak{P}(x)$.*

188. Punkt szczególny szeregu w jego pierwotnych i pochodnych szeregach. Gdy a' jest punktem osobliwym szeregu $\mathfrak{P}(x)$, a punkt b leży na promieniu $0a'$ wewnątrz (r), to wtedy — jak wiadomo — przeprowadzenie:

$$(1)\qquad \mathfrak{P}(x\,|\,b)=\mathfrak{P}(b)+\frac{\mathfrak{P}'(b)}{1!}(x-b)+\frac{\mathfrak{P}''(b)}{2!}(x-b)^2+\dots$$

jest zbieżne w kole $(b)_r$.

Pochodna tego przeprowadzenia:

$$(2)\qquad \frac{d\mathfrak{P}(x\,|\,b)}{d(x-b)}=\mathfrak{P}'(b)+\frac{\mathfrak{P}''(b)}{1!}(x-b)+\dots$$

jest rozwinięciem zbieżnem również w kole $(b)_r$ [art. 181.].

Utwórzmy pochodny szereg $\mathfrak{P}'(x)$ i przeprowadźmy go również do otoczenia punktu b, to dostaniemy:

$$(3)\qquad \mathfrak{P}'(x\,|\,b)=\mathfrak{P}'(b)+\frac{\mathfrak{P}''(b)}{1!}(x-b)+\dots$$

a to jest widocznie rozwinięcie identyczne z (2) i ma tem samem koło zbieżności $(b)_r$, a nie większe. To wskazuje, że $\mathfrak{P}'(x)$ ma punkt szczególny a', a stąd twierdzenie:

I. *Punkt osobliwy szeregu danego $\mathfrak{P}(x)$ jest punktem osobliwym także i w szeregu pochodnym $\mathfrak{P}'(x)$.*

Dany szereg $\mathfrak{P}(x)$ o zakresie zbieżności (r) niech ma znowu punkt szczególny a', a jego szereg pierwotny naznaczmy przez $\mathfrak{P}_1(x)$.

Przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x\,|\,b)$ będzie znowu zbieżne w kole $(b)_r$, a pierwotny szereg (tego przeprowadzenia):

$$(4)\qquad C+\mathfrak{P}(b)(x-b)+\frac{\mathfrak{P}'(b)}{2!}(x-b)^2+\dots$$

będzie miał (art. 181.) również za zakres zbieżności koło $(b)_r$ — a nie większe.

Przeprowadzając sam pierwotny szereg $\mathfrak{P}_1(x)$ do punktu b, dostaniemy:

$$\mathfrak{P}_1(x\,|\,b)=\mathfrak{P}_1(b)+\frac{\mathfrak{P}(b)}{1!}(x-b)+\frac{\mathfrak{P}'(b)}{2!}(x-b)^2+\dots,$$

a porównując to rozwinięcie z (4) widzimy, że i $\mathfrak{P}_1(x\,|\,b)$ jest zbieżne w kole $(b)_r$, a nie większem. To wskazuje, że a' jest również szczególnym punktem szeregu $\mathfrak{P}_1(x)$, a to znaczy:

II. *Punkt osobliwy szeregu danego* $\mathfrak{P}(x)$ *jest punktem osobliwym także i w pierwotnym szeregu* $\mathfrak{P}_1(x)$.

Z dwóch ostatnich twierdzeń wnosimy:

III. *Gdy szereg dany ma punkt osobliwy* a', *to w każdym pierwotnym szeregu dowolnego rzędu i w każdym pochodnym dowolnego rzędu jest ten punkt osobliwym.*

Z identycznych rozwinięć (2), (3) i ze względu na to, że $\frac{d\mathfrak{P}(x|b)}{d(x-b)}=\frac{d\mathfrak{P}(x|b)}{dx}$, mamy:

$$\mathfrak{P}'(x|b)=\frac{d\mathfrak{P}(x|b)}{dx} \text{ identycznie}, \tag{5}$$

a to wskazuje, że: *utworzyć pochodną szeregu i ją przeprowadzić, jest to samo, co przeprowadzić szereg i z tego przeprowadzenia wziąć pochodną.*

189. Szeregi o samych punktach osobliwych na okręgu zbieżności. W tym ustępie zajmiemy się tworzeniem takich szeregów, w których każdy punkt ich okręgu zbieżności będzie osobliwym. W tym celu zauważmy szereg:

$$\mathfrak{P}(x)=c_0+c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}+c_3x^{m_3}+\dots$$

o zakresie zbieżności $|x|<1$. Wykładniki:

$$m_0=0<m_1<m_2<m_3<\dots$$

niech będą takie, że każdy z nich jest podzielnikiem wszystkich następujących. Połóżmy:

$$\begin{aligned} m_s&=m_s\\ m_{s+1}&=m_s t_{s+1}=m_s\tau_{s+1}, \quad (t_{s+1}=\tau_{s+1})\\ m_{s+2}&=m_{s+1}.t_{s+2}=m_s\tau_{s+1}t_{s+2}=m_s\tau_{s+2}\\ m_{s+3}&=m_{s+2}.t_{s+3}=m_s\tau_{s+1}.t_{s+2}.t_{s+3}=m_s\tau_{s+3}\\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

to widocznie każde τ_{s+k}, $k=0,1,2,\dots$ jest podzielnikiem wszystkich następujących τ_{s+k+1}, τ_{s+k+2}, ..., a liczby:

$$\tau_s,\ \tau_{s+1},\ \tau_{s+2},\ \dots$$

będą — albo wszystkie nieparzyste, albo, gdy jedna z nich będzie parzystą, to w s z y s t k i e od niej począwszy, będą już parzyste. W każdym więc razie — od pewnego τ_σ, $\sigma\geq s$ poczynając — mieć będziemy w liczbach:

$$\tau_\sigma,\ \tau_{\sigma+1},\ \tau_{\sigma+2},\ \dots$$

same parzyste, albo same nieparzyste bez wyjątku.

Po tych uwagach zauważmy na okręgu zbieżności ($|x|=1$) nieskończoną mnogość punktów!

$$(M) \qquad x_{k,s} = 1_{\frac{k\pi}{m_s}}, \quad \begin{matrix} k=0,1,2,\dots \\ s=0,1,2,\dots \end{matrix}$$

Jestto mnogość wszędzie gęsta na całym tym okręgu. (W każdym dowolnie małym łuku znajdziemy punktów mnogości (M) nieskończenie dużo).

Nadając zmiennej x wartość $x_{k,s}$, dostaniemy:

$$\mathfrak{P}(x_{k\,s}) = \sum_{\lambda=0}^{\sigma-1} c_\lambda . x_{k\,s}{}^{m_\lambda} + \sum_{\lambda=\sigma}^{\infty} c_\lambda . 1_{\frac{k\pi m_\lambda}{m_s}}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\sigma-1} c_\lambda . x_{k\,s}{}^{m_\lambda} + \sum_{\lambda=\sigma}^{\infty} c_\lambda\, 1_{k\pi\tau_\lambda}.$$

Lecz $1_{k\pi} = +1$, albo -1, a τ_σ, $\tau_{\sigma+1}$, ... są wszystkie albo nieparzyste, albo parzyste. Wskutek tego

$$1_{k\pi\tau_\sigma}, \quad 1_{k\pi\tau_{\sigma+1}}, \quad 1_{k\pi\tau_{\sigma+2}}, \dots$$

są wszystkie albo $=+1$, albo $=-1$. Niechże ε ma znaczenie $+1$, lub -1 według potrzeby, to dostaniemy:

$$\mathfrak{P}(x_{k,s}) = \sum_{\lambda=0}^{\sigma-1} c_\lambda x_{k\,s}{}^{m_\lambda} + \varepsilon\,[c_\sigma + c_{\sigma+1} + c_{\sigma+2} + \dots].$$

Z tego wnosimy, że dany szereg w mnogości (M) zachowuje się j e d n a k o w o i to tak, jak $(c_\sigma + c_{\sigma+1} + c_{\sigma+2} + \dots)$, albo jak:

$$(1) \qquad (c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \dots).$$

Przyjmijmy, że szereg (1) jest rozbieżnym. W takim razie — podług III^0, art. 187. — każdy punkt mnogości (M) jest osobliwym szeregu $\mathfrak{P}(x)$. Lecz zauważmy dalej dowolny punkt $\xi = 1_\varphi$ nie należący do tej mnogości. Gdy a będzie punktem zawartym w kole $(|x|=1)$, a nieskończenie bliski punktu ξ, to wskutek wszędzie gęstej mnogości (M) także i koło zbieżności przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x|a)$ nie weźmie w siebie punktu ξ, a to jest znakiem, że ξ będzie również punktem osobliwym. W szeregu takim $\mathfrak{P}(x)$ będzie zatem każdy dowolny punkt okręgu zbieżności punktem osobliwym.*)

Szeregami tego rodzaju są n. p.:

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{1} x^2 + \frac{1}{2} x^{2^2} + \frac{1}{3} x^{2^3} + \dots \\ 1 + x^1 + x^{1.2} + x^{1.2.3} + x^{1.2.3.4} + \dots \quad \text{i t. p.} \end{array} \right.$$

Weźmy pod uwagę szereg:

$$\mathfrak{P}_1(x) = b.x^a + b^2 x^{a^2} + b^3 x^{a^3} + \dots$$

---

*) M. L e r c h: *Acta mathematica,* T. 10., str. 87. „*Un théoréme de la théorie des series*„.

który — gdy $|b|<1$, a a całkowite i >1 założymy — zbieżny będzie nie tylko wewnątrz koła ($|x|=1$), ale także w każdym punkcie obwodu tego koła.

Tworząc pochodnę tego szeregu, dostaniemy:

$$\mathfrak{P}'_1(x)=(ab)\,x^{a-1}+(ab)^2\,x^{a^2-1}+(ab)^3\,x^{a^3-1}+\dots$$
$$=x^{-1}[(ab)\,x^a+(ab)^2\,x^{a^2}+(ab)^3\,x^{a^3}+\dots].$$

Zakładając $|a.b|\geqq 1$ mamy w tej pochodnej szereg należący do kategoryi A; każdy punkt okręgu ($|x|=1$) jest jego punktem osobliwym. Lecz wtedy — podług tw. III., art. poprzedzającego — wszystkie te punkta są osobliwymi i w danym szeregu $\mathfrak{P}_1(x)$.*)

Takim szeregiem będzie n. p.:

$$(B)\qquad \frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2^2}x^{4^2}+\frac{1}{2^3}x^{4^3}+\dots$$

Na tem kończymy badanie własności szeregu potęgowego jednej zmiennej w wnętrzu i na obwodzie jego zakresu zbieżności, a przejdziemy do przeprowadzenia szeregu potęgowego wielu zmiennych.

190. Przeprowadzenia szeregu $\mathfrak{P}(x, y, z, \dots)$ wielu zmiennych.

Niech;

$$(1)\qquad \mathfrak{P}(xyz)=\Sigma A_{\lambda\mu\nu}x^\lambda y^\mu z^\nu$$

(dla uproszczenia ograniczamy się do 3 zmiennych) ma ścieśniony zakres zbieżności:

$$(2)\qquad ((r_1), (r_2), (r_3))\quad \text{[art. 160.]}.$$

W tym zakresie, który tworzy *continuum*, otaczające punkt $(0, 0, 0)$ obierzmy dowolne miejsce (a, b, c) i połóżmy;

$$(3)\qquad x=a+h,\quad y=b+k,\quad z=c+l.$$

Zakładając:

$$(4)\qquad |h|<r_1-|a|,\quad |k|<r_2-|b|,\quad |l|<r_3-|c|$$

i wstawiając (3) w (1), dostajemy sumę:

$$\Sigma A_{\lambda\mu\nu}(a+h)^\lambda(b+k)^\mu(c+l)^\nu$$

wymiernych funkcyj całkowitych o argumentach h, k, l. Suma ta będzie jednostajnie zbieżną w zakresie (4), który całkowicie w (2) się zawiera. Skutkiem tego można ją podług potęg dodatków h, k, l

---

*) Por. Weierstrass: „*Abhandlungen aus der Functionenlehre*“, str. 92., gdzie a, b (rzeczywiste) spełniają warunek $ab>1+\frac{3}{2}\pi$. Por. także: Wiener: „*Geom. u. analyt. Untersuchungen*“... Crelle J., T. 90., str. 221...; Fredholm: *Acta math.* T. 15., str. 279.

uporządkować [art. 169.] postępując tak, jak z funkcyą wymierną całkowitą [art. 73.]. Mieć więc będziemy:

(5) $$\mathfrak{P}(a+h, b+k, c+l)=\mathfrak{P}(a,b,c)+\frac{\Delta\mathfrak{P}}{1!}+\frac{\Delta^2\mathfrak{P}}{2!}+\ldots$$

gdzie symbolicznie:

$$\Delta=\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+\frac{\partial}{\partial z}l$$

i gdzie po różniczkowaniach wskazanych przez $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ trzeba za x, y, z położyć a, b, c.

Rozwinięcie (5) — gdy $h=x-a$, $k=y-b$, $l=z-c$ położymy — przedstawia się jako szereg argumentów $x-a$, $y-b$, $z-c$. Pisać go będziemy w formie $\mathfrak{P}(x, y, z|a, b, c)$, a nazywać przeprowadzeniem szeregu (1) do otoczenia miejsca (a, b, c). Zakresem zbieżności (nie zawsze prawdziwym) tego przeprowadzenia jest:

(6) $$|x-a|<r_1-|a|, \quad |y-b|<r_2-|b|, \quad |z-c|<r_3-|c|.$$

W tym zakresie, który całkowicie leży w (2) mamy identycznie:

(7) $$\mathfrak{P}(x, y, z)=\mathfrak{P}(x, y, z|a, b, c).$$

W zakresie (6) obierzmy nowe miejsce (a', b', c'). Ponieważ ono leży równocześnie i w zakresie (2), więc szereg $\mathfrak{P}(x, y, z)$ da się również odrazu przeprowadzić do jego otoczenia. Z tego dostaniemy identyczność:

(8) $$\mathfrak{P}(x, y, z)=\mathfrak{P}(x, y, z|a', b', c)$$

w zakresie:

(9) $$|x-a'|<r_1-|a'|, \quad |y-b'|<r_2-|b'|, \quad |z-c'|<r_3-|c'|.$$

Lecz do otoczenia miejsca (a', b', c') można także i szereg $\mathfrak{P}(x, y, z|a, b, c)$ przeprowadzić. Gdy to przeprowadzenie nazwiemy $\mathfrak{P}(x, y, z|a, b, c|a', b' c')$, to w dostatecznie małem otoczeniu $[a' b' c']$ tego miejsca — (to otoczenie przedstawia się jako zbiór 3 kół o środkach a', b', c', a tak małych, że się one całkowicie w zakresie (9) mieszczą) — mieć będziemy identycznie:

(10) $$\mathfrak{P}(xyz|abc)=\mathfrak{P}(xyz|a, b, c|a', b', c').$$

Z identyczności (7), (8), (10) dostajemy w $[a', b', c']$ identycznie:

$$\mathfrak{P}(x, y, z)=\mathfrak{P}(x, y, z|a', b', c')=\mathfrak{P}(x, y, z|a, b, c|a', b', c').$$

Z tego wnosimy, że [art. 166., tw. II.] $\mathfrak{P}(x, y, z|a, b, c|a', b', c')$ jest szeregiem zbieżnym nietylko w $[a', b', c']$, ale w zakresie (9). Mamy więc twierdzenie:

I. *Szereg potęgowy można albo wprost, albo za pośrednictwem różnych punktów przeprowadzić do dowolnego punktu jego ścieśnionego zakresu. Pośredniczące punkta leżeć jednak muszą wszystkie w obranym ścieśnionym zakresie zbieżności danego szeregu. Bez względu na to, czy między miejscami* (0, 0, 0), (a', b', c') *mieszczą się miejsca pośrednie, czy nie, jest przeprowadzenie* $\mathfrak{P}(x, y, z | ... | a' b' c')$ *zbieżne niezawodnie w zakresie* (9).

Ten zakres przedstawia się zbiorem 3 kół $(a')_{r_1}$, $(b')_{r_2}$, $(c')_{r_3}$, które leżą odpowiednio na płaszczyznach argumentów x, y, z, mają środki w punktach a', b', c', a dotykają wewnętrznie kół (r_1), (r_2), (r_3), [fig. 43.].

Lecz nie zawsze taki zakres będzie prawdziwym ścieśnionym zakresem zbieżności przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x, y, z|...|a'b'c')$. I tu bowiem

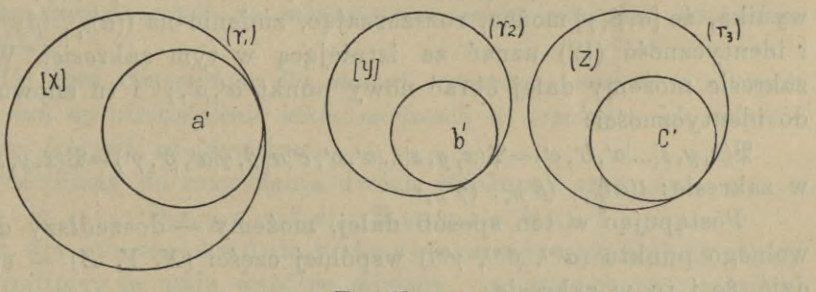


Fig. 43.

możliwem jest, że się to przeprowadzenie zbieżnem okaże w ścieśnionym zakresie:

(11) $$((r'_1), (r'_2), (r'_3)),$$

którego koła (r'_1), (r'_2), (r'_3) już częściowo leżą poza kołami (r_1), (r_2), (r_3) — [fig. 44.].

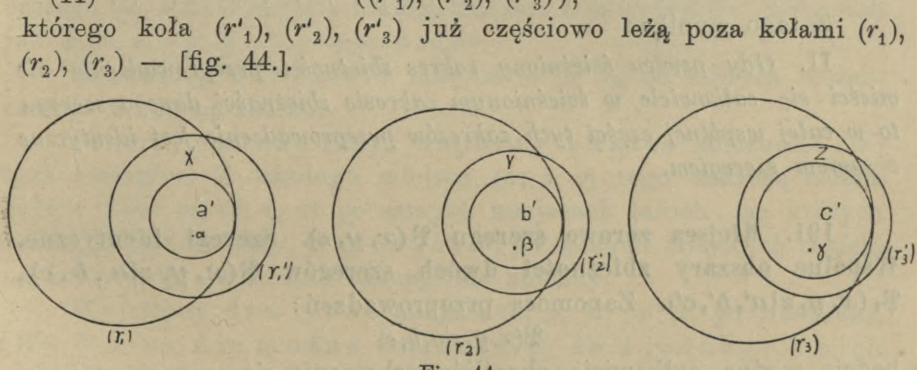


Fig. 44.

W takim wypadku rozstrzygnąć trzeba, czy we wszystkich wspólnych punktach kół (r_α), (r'_α), $\alpha = 1, 2, 3$ w (X, Y, Z) jest

$$\mathfrak{P}(x, y, z|...|a', b', c')$$

tem samem, co $\mathfrak{P}(x, y, z)$? W zakresie $Q' = ((a')_{r_1}, (b')_{r_2}, (c')_{r_3})$, który się w (X, Y, Z) całkowicie mieści, jest niezawodnie:

$$\mathfrak{P}(x, y, z) = \mathfrak{P}(x, y, z|...|a', b'\, c') \text{ identycznie.}$$

Obierzmy dowolny punkt (α, β, γ), leżący w Q', to możemy do otoczenia tego punktu przeprowadzić $\mathfrak{P}(x, y, z|...|a'\, b'\, c')$, przez co w pewnem otoczeniu $[\alpha, \beta, \gamma]$ tego punktu, które tu znowu składa się z 3 kół o środkach α, β, γ, a mieszczących się całkowicie w Q' mieć będziemy identycznie:

$$(12) \qquad \mathfrak{P}(x, y, z|...|a', b', c') = \mathfrak{P}(x, y, z|...|a', b', c'|\, \alpha, \beta, \gamma),$$

a więc identycznie $= \mathfrak{P}(x, y, z)$.

Lecz z drugiej strony mamy identycznie:

$$\mathfrak{P}(x, y, z|...|\alpha, \beta, \gamma) = \mathfrak{P}(x, y, z)$$

w zakresie $((\alpha)_{r_1}, (\beta)_{r_2}, (\gamma)_{r_3})$, mieszczącym w sobie $[\alpha, \beta, \gamma]$. Z tego wynika, że $[\alpha, \beta, \gamma]$ można, rozszerzając, zmienić na $((\alpha)_{r_1}, (\beta)_{r_2}, (\gamma)_{r_3})$ i identyczność (12) uznać za istniejącą w tym zakresie. W tym zakresie możemy dalej obrać nowy punkt α', β', γ' i tu znowu dojść do identyczności:

$$\mathfrak{P}(x, y, z|...|a', b', c') = \mathfrak{P}(x, y, z|...|a', b', c'|\alpha, \beta, \gamma|\alpha', \beta', \gamma') = \mathfrak{P}(x, y, z)$$

w zakresie: $((\alpha')_{r_1}, (\beta')_{r_2}, (\gamma')_{r_3})$.

Postępując w ten sposób dalej, możemy — doszedłszy do dowolnego punktu $(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(n)})$ wspólnej części (X, Y, Z) — sprawdzić, że i tu w zakresie:

$$((\alpha^{(n)})_{r_1}, (\beta^{(n)})_{r_2}, (\gamma^{(n)})_{r_3})$$

sprawdza się identyczność:

$$\mathfrak{P}(x, y, z) = \mathfrak{P}(x, y, z|...|a', b'\, c') = \mathfrak{P}(x, y, z|...|a', b', c'|...|\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(n)}).$$

Z tego wynika:

II. *Gdy pewien ścieśniony zakres zbieżności przeprowadzenia nie mieści się całkowicie w ścieśnionym zakresie zbieżności danego szeregu to w całej wspólnej części tych zakresów przeprowadzenie jest identyczne z samym szeregiem.*

191. Miejsca zerowe szeregu $\mathfrak{P}(x, y, z)$. Szeregi identyczne. Wspólne obszary zbieżności dwóch szeregów $\mathfrak{P}(x, y, z|a, b, c)$, $\mathfrak{P}_1(x, y, z|a', b', c')$. Zapomocą przeprowadzeń:

$$\mathfrak{P}(x, y, z|a, b, c)$$

będzie można całkowicie określić zachowanie się szeregu potęgowego w jego każdym ścieśnionym zakresie zbieżności, a więc i w zupełnym zakresie.

Przyjmijmyż, że szereg $\mathfrak{P}(x, y, z) = 0$ na nieskończenie wielu miejscach, leżących w zupełnym zakresie zbieżności, a skupiających się w miejscu (a, b, c).

Przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x, y, z|a, b, c)$ będzie szeregiem, który miałby w swym zakresie zbieżności znikać na nieskończenie wielu miejscach z punktem skupienia (a, b, c). Lecz to [art. 165., tw. II.] jest niemożliwie — chyba, że identycznie $\mathfrak{P}(x, y, z \mid a, b, c)=0$ a więc $\mathfrak{P}(x, y, z)=0$. Mamy więc twierdzenie:

I. *Szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x, y, z)$ nie może na nieskończenie wielu miejscach leżących w jego zupełnym zakresie zbieżności stawać się zerem — chyba, że jest identycznie zerem.*

Rozumując dalej zupełnie tak samo jak o szeregu jednej zmiennej dojdziemy do wniosków:

II. *Szereg, który w swym zupełnym zakresie zbieżności przybiera tę samą wartość $c \neq 0$ na nieskończenie wielu miejscach jest identycznie $=c$.*

III. *Dwa szeregi dane dla otoczeń tegosamego miejsca o równych wartościach na nieskończenie wielu miejscach w wspólnym ich zakresie zbieżności leżących są identyczne.*

Przejdźmy do rozważania dwóch zbieżnych szeregów:

$$\mathfrak{P}(x, y, z \mid a, b, c), \quad \mathfrak{P}_1(x, y, z \mid a' \, b' \, c')$$

danych dla otoczeń dwóch różnych miejsc (a, b, c), (a', b', c') i przyjmijmy, że mają wspólne miejsca, na których równocześnie okazują się (bezwarunkowo) zbieżnymi. Gdy jedno z tych miejsc jest (α, β, γ), to ono zalicza się równocześnie i do pewnego ścieśnionego zakresu zbieżności szeregu $\mathfrak{P}$ i do pewnego takiegoż zakresu szeregu $\mathfrak{P}_1$, a do otoczenia takiego miejsca można tak $\mathfrak{P}(x, y, z \mid a, b, c)$ jak $\mathfrak{P}_1(x, y, z \mid a', b', c')$ przeprowadzić.

Zauważmy wszystkie miejsca (α, β, γ), na których równocześnie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ są zbieżne.

Utworzą one zupełny, wspólny zakres zbieżności (W) tych szeregów. Z każdego miejsca (α, β, γ) tego zakresu można będzie dojść do (a, b, c) po samych miejscach takich, na których szereg $\mathfrak{P}$ jest zbieżny, a do (a', b', c') po samych miejscach takich, na których $\mathfrak{P}_1$ statecznie okazuje się zbieżny.

Wyjmijmy dwa różne miejsca (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ z zakresu, (W). O nich nie można twierdzić, że z jednego z nich można zawsze przejść do drugiego po samych miejscach o tej własności, że na nich równocześnie szeregi $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ są zbieżne. Pochodzi to stąd, że obwód zupełnego zakresu zbieżności każdego szeregu składa się z nieskończonej mnogości obwodów ścieśnionych [art. 160, tw. III]. (W) rozpadnie się więc na pojedyńcze od siebie oddzielone obszary zwarte:

(1) $(X_0, Y_0, Z_0), \; (X_1, Y_1, Z_1), \; (X_2, Y_2, Z_2), \ldots$

charakteryzujące się tem, że gdy dwa miejsca (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ mieszczą się w jednym z nich, to z jednego z tych miejsc przejść można do drugiego po samych miejscach takich, na których równocześnie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ są zbieżne.

Gdy przeciwnie te miejsca leżą w dwóch różnych obszarach zwartych, to takie przejście jest niemożliwe.

Continua (1) są albo w skończonej ilości, albo ich jest nieskończenie dużo*).

Przyjmijmy teraz, że szeregi $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ w spólnym zakresie zbieżności (W) przyjmują równe wartości na nieskończenie wielu miejscach. Miejsca te posiadać muszą jeden, lub więcej punktów skupienia. Jeden z nich — nazwijmy go (α, β, γ) — niech mieści się w *continuum* (X_0, Y_0, Z_0).

Przeprowadziwszy szeregi do otoczenia tego miejsca, dostaniemy równość:

(2) $\mathfrak{P}(x, y, z \,|\, a, b, c \,|\, \alpha, \beta, \gamma) = \mathfrak{P}_1(x, y, z \,|\, a', b', c' \,|\, \alpha, \beta, \gamma)$

na nieskończenie wielu miejscoch w otoczeniu punktu (α, β, γ), a stąd wynika, że szeregi (2) są [art. 166., tw. II.] identyczne.

Same szeregi $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ są przeprowadzeniami szeregu (2), a stąd twierdzenie:

IV. *Gdy dwa szeregi dane dla otoczeń dwóch różnych miejsc wykazują identyczne wartości na nieskończenie wielu miejscach leżących w wspólnym ich zakresie zbieżności, to są przeprowadzeniami jednego szeregu.*

Gdy te miejsca mają punkt skupienia — jak założono — w zwartym obszarze (*continuum*) (X_0, Y_0, Z_0), to można dalej — taką drogą, jaką dowiedliśmy twierdzenia II. art. 183. i tu okazać, że takie szeregi są identyczne w całem tem *continuum*. (Gdy punkta skupienia mieszczą się w n zwartych obszarach, to ta identyczność zachodzi we wszystkich tych n obszarach).

---

*) Por. Konr. Zindler. *Über getrennte gemeinsame Convergenzgebiete zweier Potenzreihen zweier Veränderlichen. Monatshefte für Math. u. Physik.* T. 4. str. 115.

Tegoż *„Bemerkung über Potenzreihen zweier Veränderlichen“* — tamże, T. 5. str. 287.

G. Vivanti.“ *„Über Potenzreihen zweier Veränderlichen“* — tamże. T. 5. str 99.

192. Punkta osobliwe. Powracając do jednego szeregu potęgowego $\mathfrak{P}(x, y, z)$, zauważmy obwód jego zupełnego zakresu zbieżności. Na taki obwód składa się — jak wiadomo — nieskończona mnogość obwodów:

$$(1) \qquad ((r_1), (r_2), (r_3)), \; ((r'_1), (r'_2), (r'_3)), \ldots$$

ograniczających jego ścieśnione zakresy zbieżności.

Niech $x=\xi$, $y=\eta$ naznaczają punkty leżące na okręgach (r_1), (r_2) pierwszego z obwodów (1). Zauważmy szereg potęgowy:

$$(2) \qquad \mathfrak{P}(\xi, \eta, z),$$

jednej już tylko zmiennej z. Jego prawdziwym zakresem zbieżności jest $|z|<r_3$, a na kole (r_3) musi istnieć jeden albo więcej punktów szczególnych. Niechże te punnta będą: ζ, ζ', ζ'',..., to w takim razie miejsca:

$$(\xi, \eta, \zeta), \; (\xi, \eta, \zeta'), \; (\xi, \eta, \zeta''), \ldots$$

trzeba już uznać za osobliwe punkta szeregu $\mathfrak{P}(x, y, z)$ na obwodzie (r_1), (r_2), (r_3)).

Ze zmianą punktów ξ, η na inne leżące na kołach (r_1), (r_2) dostaniemy inne punkta szczególne tego szeregu, i t. d.

Ponieważ to samo odnieść trzeba do wszystkich obwodów (1) więc stąd wynika:

I. *Każdy szereg potęgowy wielu zmiennych posiada na obwodzie swego zupełnego zakresu zbieżności nieskończenie wiele punktów osobliwych.*

ROZDZIAŁ XVI.

Określenie i ogólne własności funkcyi analitycznej, albo sum takich funkcyj.

193. Przeprowadzenie szeregu $y=\mathfrak{P}(x)$ poza zakres jego zbieżności. Gdy dany jest szereg potęgowy $y=\mathfrak{P}(x|a)$ z zakresem zbieżności (r) o środku a, który także z punktem $x=0$ spadać może, to przez to określamy pewną wielkość y, która zależąc od x, a więc będąc funkcyą tego argumentu, ma w wnętrzu (r) charakter funkcyi wymiernej całkowitej [art. 182.] albo — inaczej jeszcze to wyrażając — zachowuje się regularnie wewnątrz (r).

Przyjmijmy, że $\mathfrak{P}(x|a)$ nie należy do kategoryi takich szeregów, jak (A) lub (B) [art. 189.]. W takim razie posiada on przeprowadzenia, których zakresy zbieżności (r') nie mieszczą się całkowicie w (r). Jedno z nich n p. $\mathfrak{P}(x\,|\,a, \alpha)$ o zakresie zbieżności (r_α), [fig. 45.], weźmy pod uwagę. Określa ono wartości szeregu — a więc i wielkość y — na łuku st. Lecz, że $\mathfrak{P}(x|a, \alpha)$ istnieje jeszcze i poza kołem (r) t. j. w części X', ma tam charakter funkcyi wymiernej całkowitej, a z wartościami szeregu $\mathfrak{P}(x|a)$ w części X jest wzdłuż łuku st w ciągły sposób złączony, więc z tych powodów przyjmujemy, że to przeprowadzenie rozszerza zakres istnienia wielkości y przez dołączenie do (r) jeszcze obszaru X'. $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$, $\mathfrak{P}(x\,|\,a, \alpha)$ określają razem wielkość y już w zakresie $(r)+X'$.

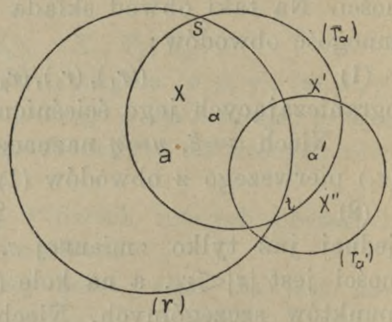


Fig. 45.

Lecz w kole (r_α) — czy-to w jego części X, czy X' — możemy nowy punkt α' wybrać i utworzyć nowe przeprowadzenie $\mathfrak{P}(x\,|\,a, \alpha, \alpha')$.

Gdy to nowe przeprowadzenie ma koło zbieżności $(r_{\alpha'})$ którego część X'' leży poza $(r)+X'$, to znowu powiadamy, że $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$, $\mathfrak{P}(x\,|\,a, \alpha)$, $\mathfrak{P}(x\,|\,a, \alpha, \alpha')$ określają razem wielkość y już w zakresie $(r)+X'+X''$.

W ten sposób dalej postępując, możemy czemraz nowe uzyskiwać zakresy: $X^{(3)}$, $X^{(4)}$,... w których jeszcze y jako funkcya argumentu x, o charakterze funkcyi wymiernej całkowitej, istnieje albo — inaczej — zachowuje się regularnie w każdym punkcie wewnątrz tych zakresów leżącym.

Pytanie zachodzi, jaki obszar płaszczyzny (x) będzie można całkowicie przykryć zakresami (r), X', X'', $X^{(3)}$, ...?

Na to odpowiemy w ten sposób:

Ponieważ każdy szereg potęgowy posiadać musi przynajmniej jeden punkt osobliwy, więc na płaszczyźnie (x) znajdą się pewne punkta c, c', c'',... leżące już-to na obwodzie (r), już-to zewnątrz niego o tej własności, że żaden z szeregów $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$, $\mathfrak{P}(x\,|\,a, \alpha)$, $\mathfrak{P}(x\,|\,a, \alpha, \alpha')$,... w swem kole zbieżności nie zawrze tych punktów.

Rozłożenie i ilość tych punktów dana jest już z pierwszym szeregiem $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$. Od spółczynników bowiem tego szeregu zależeć będzie nietylko wielkość jego koła zbieżności (r) i zachowanie się jego na obwodzie (r), ale także postać każdego — choćby już bardzo odległego — przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x|a, \alpha, \alpha', \ldots \alpha^{(n)})$ wraz z kołem zbieżności tego przeprowadzenia i własnościami jego na okręgu zbieżności*).

194. Zakres istnienia funkcyi y. Jej punkta osobliwe i linie punktów osobliwych. Próżnie. Punktów osobliwych $c, c', c'', \ldots$ może być albo skończona, albo nieskończona ilość.

W pierwszym wypadku istnieć będzie wielkość y, jako funkcya argumentu x w całej nieograniczonej płaszczyźnie (x) z wyjątkiem punktów $c, c', \ldots$ z których jeden i w nieskończoności leżeć może.

Co się tyczy drugiego przypadku, to przedewszystkiem jasnem jest, że punkty $c, c', c'', \ldots$ nie mogą nigdy utworzyć mnogości wszędzie gęstej, rozpostartej na całej płaszczyźnie (x), bo wtedy już sam zbieżny szereg $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ i zbieżne szeregi $\mathfrak{P}(x\,|\,a, a)$, $\mathfrak{P}(x\,|\,a, a, a')$, ... wcale nie mogłyby istnieć, a więc i wielkość y jako funkcya argumentu x byłaby niemożliwą.

Nieskończona mnogość punktów $c, c', c'', \ldots$ może więc mieć jednę z następujących własności:

a) Posiada oddzielne punkta skupienia w skończonej lub nieskończonej ilości;

b) W mnogości zawierają się punkta tworzące albo niezamknięte linie AB, CD [fig. 46.] przedstawiające się jako skończone odcinki albo linie — jak $EF\infty$ — poczynające się w pewnym punkcie E leżącym w skończoności a ciągnące się w nieskończoność. Takie linie nie potrzebują być koniecznie skupieniami punktów $c, c', c'', \ldots$ leżących poza niemi, jak-to n. p. mieliśmy w Pd. 3., art. 43. Wykluczamy przytem wypadek, w którymby kilka takich linij tworzyć miało zamknięte pasmo.

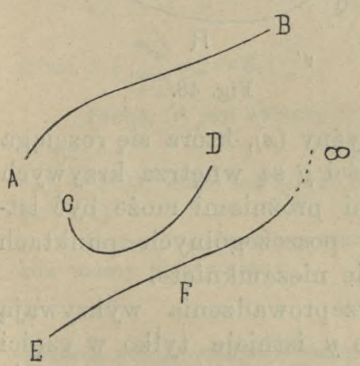


Fig. 46.

W obydwu wypadkach *a*), *b*) istnieć będzie y w całej płaszczyźnie (x) z wyjątkiem punktów $c, c', c'', \ldots$ i dołączających się do nich punktów na liniach AB, CD,— (por. Pd. 5. str. 513. w art. 197.)—, $EF\infty$, ...

*) Pod tym względem por. J. Hademar *„Essai sur l'étude des fonctions données por leur développement de Taylor"* *Journal de mathématiques pures et appliquées.* 1892. str. 101. E. Fabry. *Sur les points singuliers d'une série de Taylor*, tamże T. 4. (S. 5.) 1898. str. 317...

c) W nieskończonej mnogości zawierają się takie punkta, które tworzą linie zamknięte ABC, DEF,... (fig. 47.) lub linie takie, jak $\infty PQR\infty$ (fig. 48.) rozpościerające się na płaszczyżnie (x) od nieskończoności do nieskończoności (uważać je więc trzeba także za zamknięte).

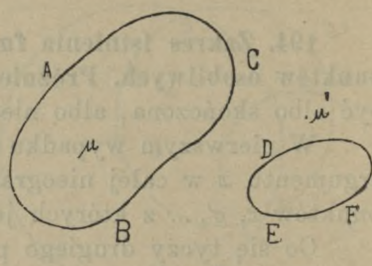


Fig. 47.

W tym wypadku *c*) zależy zakres istnienia funkcyi y od tego, jakie położenie miał punkt a.

Gdy a miało położenie μ, a szereg przeprowadzeniami wykrył linię ABC(fig. 47.) to y istnieć może tylko wewnątrz krzywej ABC z wyjątkiem oddzielnych punktów c, c', c'',... które możliwie mieszczą się w jej wnętrzu.

W szczególności może zamknięta krzywa ABC być wprost kołem zbieżności (r) danego szeregu, jak to mieliśmy w szeregach (A), (B) [art. 189.]. Wtedy szereg $\mathfrak{P}(x|a)$ określa funkcyę y istniejącą wyłącznie wewnątrz koła (r).

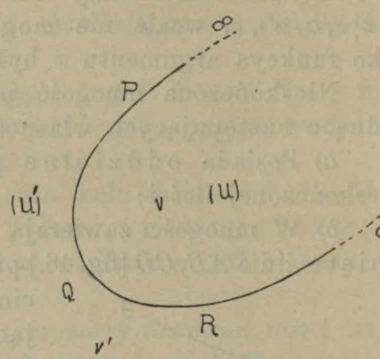


Fig. 48.

Gdy a miało położenie punktu μ' (fig. 47.) a szereg przeprowadzeniami wykrył krzywe ABC, DEF,..., to y istnieje tylko w tej części płaszczyzny (x), która się rozciąga zewnątrz tych krzywych. Dla wielkości y są wnętrza krzywych ABC, DEF,..., próżniami. Poza temi próżniami może być istnienie funkcyi y wykluczone jeszcze w poszczególnych punktach c, c',... lub w punktach tworzacych linie niezamknięte.

W razie gdy szereg i jego przeprowadzenia wykrywają zamkniętą linię $\infty PQR\infty$ (fig. 48.), to y istnieje tylko w części (U) płaszczyzny (x), jeżeli a miało położenie punktu v, a istnieje w części (U') tej płaszczyzny, jeżeli a miało położenie punktu v'.

Pd. 1. W art. 189. poznaliśmy szereg:

$$\mathfrak{P}_1(x)=1+\frac{1}{1}x^2+\frac{1}{2}x^{2^2}+\frac{1}{3}x^{2^3}+\dots$$

posiadający okręg zbieżności ($|x|=1$) o samych punktach osobliwych. Połóżmy w nim $\frac{1}{x}$ za x, to dostaniemy:

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{1}\,x^{-2} + \frac{1}{2}\,x^{-2^2} + \frac{1}{3}\,x^{-2^3} + \dots$$

Tak otrzymany szereg zbieżnym jest dla $|x| > 1$, a koło $(|x| = 1)$ mieści i tu same jego punkta szczególne. Obierzmy d o w o l n y punkt a w obszarze $|x| > 1$ i połóżmy:

$$(\beta) \qquad x = a + h,$$

to dostaniemy z (α):

$$\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{a+h}\right) = 1 + \frac{1}{1}\,(a+h)^{-2} + \frac{1}{2}\,(a+h)^{-2^2} + \dots$$

Zakładając:

$$(\gamma) \qquad |a| - |h| > 1,$$

a więc widocznie $\left|\frac{h}{a}\right| < 1$, będziemy mogli każdy dodajnik:

$$(\delta) \qquad \frac{1}{\nu}(a+h)^{-2^\nu} = \frac{a^{-2^\nu}}{\nu}\left(1 + \frac{h}{a}\right)^{-2^\nu}$$

podług potęg h rozwinąć. Niech więc $a_{0\nu} + a_{1\nu}h + a_{2\nu}h^2 + \dots$, będzie rozwinięciem dodajnika (δ), to otrzymamy:

$$\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{a+h}\right) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_{0\nu} + a_{1\nu}h + a_{2\nu}h^2 + \dots)$$

Ta nieskończona suma szeregów o argumencie h jest jednak w obszarze (γ) jednostajnie zbieżną. Można ją zatem podług potęg argumentu h uporządkować, a że według (β) jest $h = x - a$, więc dostaniemy:

$$(\varepsilon) \qquad \mathfrak{P}(x|a) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{0\nu} + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{1\nu}\right)(x-a) + \dots,$$

gdzie $1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{0\nu} = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{a}\right)$.

Szereg (ε) jest zbieżny w zakresie:

$$(\zeta) \qquad |x-a| < |a| - 1$$

t. j. w kole, które ma środek w punkcie a, a obwodem dotyka zewnętrznie koła $(|x| = 1)$.

Szereg ten określa w tem kole funkcyę y daną równaniem (α). W tem więc kole mamy identycznie:

$$\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{P}(x|a),$$

a każde przeprowadzenie szeregu $\mathfrak{P}(x|a)$ do dowolnego innego punktu a' obszaru $|x| > 1$ dostaniemy zmieniając w rozwinięciu (ε) a na a'.

Przyjmijmy, że przeprowadzenia szeregu $\mathfrak{P}(x|a)$ istnieć jeszcze mogą i poza obszarem $|x| > 1$ t. j. w punktach α wewnątrz, lub na obwodzie koła $(|x| = 1)$, to i tu, aby takie przeprowadzenia dostać, dostatecznem będzie w $\mathfrak{P}(x|a)$ za a podstawić α.

Przyjmijmyż, że α leży na obwodzie tego koła, a więc $|\alpha| = 1$. W takim punkcie mamy (kładąc w (ε): $a = \alpha$, $x = \alpha$):

$$\mathfrak{P}(\alpha|\alpha) = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1 + \frac{1}{1.\alpha^2} + \frac{1}{2.\alpha^4} + \frac{1}{3.\alpha^8} + \dots$$

Że zaś $|\alpha| = 1$, wskutek czego ten szereg jest rozbieżny, więc przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x|\alpha)$ już nie mają znaczenia, a sam punkt α nie może się mieścić w kole zbieżności żadnego przeprowadzenia szeregu $\mathfrak{P}(x|a)$.

Z tego wynika, że $\mathfrak{P}(x|a)$ określa funkcyę $y = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ wyłącznie w obszarze $|x| > 1$, bez żadnych punktów $c, c', c'', \ldots$ wewnątrz tego obszaru. Wnętrze koła ($|x| = 1$) jest próżnią tej funkcyi.

Pd. 2. Z szeregu $\mathfrak{P}_1(x)$, jaki mielibyśmy w Pd. 1. utwórzmy $\mathfrak{P}_1\left(\frac{r_1}{x-b_1}\right)$, $\mathfrak{P}_1\left(\frac{r_2}{x-b_2}\right)$, gdzie r_1, r_2 są dodatnie rzeczywiste wielkości. Pierwszy z tak utworzonych szeregów zbieżny będzie dla $|x-b_1| > r_1$ t. j. poza kołem (r_1) o środku b_1, drugi dla $|x-b_2| > r_2$ t. j. poza kołem (r_2) o środku b_2. Początkowo zakładamy, że jedno z kół (r_1), (r_2) leży całkowicie zewnątrz drugiego (fig. 49. α)).

Gdy a jest punktem zewnątrz kół (r_1), (r_2), a położymy:

$$x - b_1 = a - b_1 + h$$
$$x - b_2 = a - b_2 + h$$

z założeniem, że h tak wybrano, aby równocześnie:

$$|a-b_1| - |h| > r_1,$$
$$|a-b_2| - |h| > r_2,$$

a więc aby równocześnie okazało się:

$$\left|\frac{h}{a-b_1}\right| < 1, \quad \left|\frac{h}{a-b_2}\right| < 1,$$

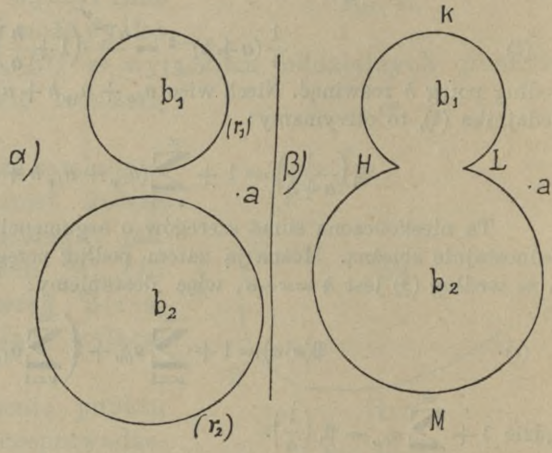


Fig. 49.

to wtedy — z tych samych powodów, co w Pd. 1. — możliwem będzie tak $\mathfrak{P}_1\left(\frac{r_2}{x-b_1}\right)$, jak $\mathfrak{P}_1\left(\frac{r_2}{x-b_2}\right)$ rozwinąć podług potęg argumentu $h = (x-a)$. Przyjmijmyż, że w ten sposób dostajemy w otoczeniu punktu a rozwinięcia:

$$\mathfrak{P}_1\left(\frac{r_1}{x-b_1}\right) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$$

$$\mathfrak{P}_1\left(\frac{r_2}{x-b_2}\right) = c'_0 + c'_1(x-a) + c'_2(x-a)^2 + \ldots,$$

to suma tych rozwinięć:

$$(c_0 + c'_0) + (c_1 + c'_1)(x-a) + (c_2 + c'_2)(x-a)^2 + \ldots = \mathfrak{P}(x|a)$$

określi funkcyę y, która w części płaszczyzny (x) rozciągającej się zewnątrz kół (r_1), (r_2) wszędzie bez wyjątku istnieje, a wnętrza kół (r_1), (r_2) ma jako p r ó ż n i ę. Gdy te koła — jak w fig. 49. β) — częściowo się przykryją, to $\mathfrak{P}(x|a)$ określi funkcyę y z jedną próżnią *HKLM* ograniczoną dwoma łukami kołowymi.

W analogiczny sposób można będzie utworzyć funkcyę y z próżnią ograniczoną więcej, niż dwoma łukami kołowymi.

195. Analityczne, monogeniczne funkcye jednej zmiennej lub wielu zmiennych. Jej elementa i granice. Z zupełną definicyą funkcyi y, jaka z uwag zestawionych w ostatnich art. wyniknąćby już mogła, wstrzymać się jeszcze musimy, a to z powodu, że przedtem jeszcze zbadać trzeba, jaki wpływ na ową definicyę może mieć powrót do tego samego punktu a za pośrednictwem pewnego szeregu punktów:

$$a, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots \alpha^{(s)}.$$

[fig. 50.].

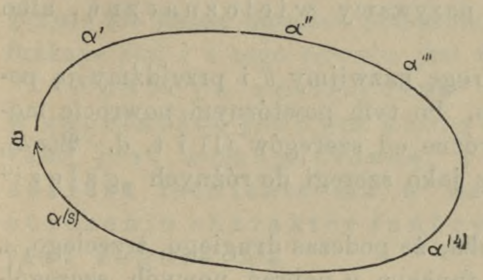


Fig. 50.

Aby na to odpowiedzieć, zauważmy szereg kół zbieżności (r), (r_α), $(r_{\alpha'})$, ... (fig. 51.) należących do przeprowadzeń bezpośrednio po sobie następujących. Z $\mathfrak{P}(x|a)$ możemy do $\mathfrak{P}(x|a\,\alpha)$ przejść odrazu albo także za pośrednictwem dowolnie wielu punktów pośrednich, byleby te punkta wszystkie w (r) leżały. Obojętnem jest, czy takich pośrednich punktów wcale nie używamy, czy je bierzemy na prostolinijnym odcinku $a\alpha$, lub na odcinku krzywym $a\,q\,\alpha$ mieszczącym się całkowicie w (r). Lecz zwyczajnie, aby na płaszczyźnie (x) dać poznać, że punkty a, α w jednem kole (r) leżą, łączymy je prostym odcinkiem $a\alpha$. To samo odniesie się do punktów α, α', które obydwa w kole (r_α) leżą i t. d.

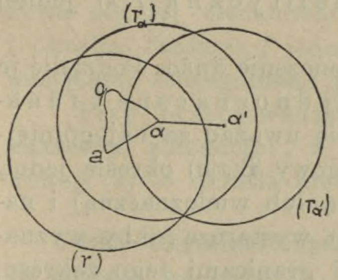


Fig. 51.

Z tego przedstawienia rzeczy wynika, że wszystkie drogi, jakiemi — wychodząc z szeregu $\mathfrak{P}(x|a)$ — wracamy znowu do punktu a napowrót, przedstawią się jako wieloboki:

$$a\ \alpha\ \alpha'\ \alpha''\ \alpha'''\ \alpha^{(4)}\,a$$
$$a\ \alpha_1\,\alpha_1{}'\,\alpha_1{}''\alpha_1{}'''\,a$$
$$a\ \alpha_2\,\alpha_2{}'\,\alpha_2{}''\,a$$

i t. p. (fig. 52.).

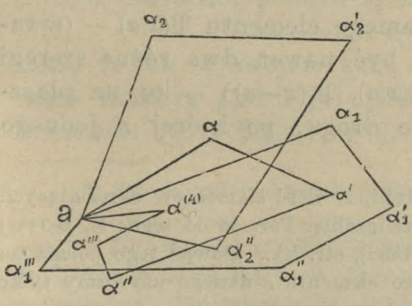


Fig. 52.

Gdy takie wszystkie drogi — całą ich nieskończoną mnogość — uwzględnimy, a do punktu a powróciwszy, dostaniemy znowu $\mathfrak{P}(x|a)$, to funkcyę y nazywamy jednoznaczną, albo jednowartościową w jej zakresie istnienia.

Gdy przeciwnie między temi drogami znachodzą się i takie, które po powrocie do punktu a — dają:

(1) $$\mathfrak{P}_1(x-a) \neq \mathfrak{P}(x|a),$$

to w takim razie funkcyę y nazywamy wieloznaczną, albo wielowartościową.

Taką jedną zamkniętą drogę nazwijmy s i przejdźmy ją powtórnie, wracając znowu do a. Po tym powtórnym powrocie możemy znowu dostać $\mathfrak{P}_2(x-a)$ różne od szeregów (1) i t. d. $\mathfrak{P}(x|a)$, $\mathfrak{P}_1(x-a)$, $\mathfrak{P}_2(x-a)$,... określamy jako szeregi do różnych „gałęzi" funkcyi należące.

Przytem zauważyć potrzeba, że podczas drugiego, trzeciego,... kroczenia po drodze s może funkcya y nabrać nowych szczególnych punktów c, c', c'', ... (a nawet linij), na których jej istnienie jest wykluczone.

Wielkość y określoną uwagami zamieszczonemi w tym i poprzednim art. nazywamy funkcyą analityczną $f(x)$ jednej zmiennej x.*)

Takich funkcyj jest oczywiście nieskończenie dużo. Podzielić je trzeba przedewszystkiem na funkcye jednoznaczne i funkcye wieloznaczne i takie odróżnienie uważać za najogólniejszy ich podział. Jeden dany szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x|a)$ określa jedną tylko funkcyę analityczną (jednoznaczną lub wieloznaczną) i nazywa się jej elementem. Taki element wystarcza, aby wyznaczyć funkcyę z jej zakresem istnienia i granicami tego zakresu, t. j. punktami i liniami szczególnemi, które granicznemi albo osobliwemi miejscami funkcyi $f(x)$ nazywają.

Weźmy pod uwagę dwa którekolwiek różne przeprowadzenia $\mathfrak{P}(x|a, \alpha, ..., \alpha^{(s)})$, $\mathfrak{P}(x|a, \beta, ..., \beta^{(t)})$ tego samego elementu $\mathfrak{P}(x|a)$ — (w razie funkcyi wieloznacznej mogą-to być nawet dwa różne szeregi otaczające ten sam punkt n. p. $\mathfrak{P}(x|a)$, $\mathfrak{P}_1(x-a)$) — to na płaszczyźnie (x) znajdzie się niezawodnie droga, po której z jednego

*) Poincaré i Volterra udowodnili, że ilość elementów określających już całą funkcyę, jest zawsze mnogością przeliczalną. Por. co do tego: E. Borel *„Leçons sur la théorie de fonctions"*, (Paryż 1898), str. 53... Dowód tego polega na tem, że do wyprowadzenia każdego nowego elementu z danego używamy tylko punktów o spółrzędnych, będących liczbami wymiernemi. Przez to dostajemy przeliczalną mnogość przeliczalnych mnogości elementów, a taka mnogość, [art. 141.], jest przeliczalną.

z nich dojść będzie można do drugiego i naodwrót. Tę własność funkcyi $f(x)$ określają mówiąc, że $f(x)$ jest monogeniczną funkcyą.

Z każdego dowolnego przeprowadzenia dojść wreszcie będzie można do elementu danego $\mathfrak{P}(x|a)$, a z tego wynika, że nie tylko $\mathfrak{P}(x|a)$, ale każde dowolne przeprowadzenie określa tę samą znowu funkcyę $f(x)$ i z tego powodu jest także jej elementem.

Funkcya analityczna*) jest zatem określoną w zupełności jednym którymkolwiek swym elementem, jest monogeniczną, a wewnątrz całego swego zakresu istnienia ma w każdym punkcie i w jego otoczeniu charakter funkcyi wymiernej całkowitej; jest regularną.

W analogiczny sposób określimy dany szereg potęgowy:

$$\mathfrak{P}(x, y, z, \ldots | a, b, c, \ldots) \tag{2}$$

wraz z jego wszystkiemi przeprowadzeniami, jako analityczną funkcyę $f(x, y, z, \ldots)$ wielu zmiennych. Szereg (2) nazywa się jej elementem, danym dla otoczenia miejsca $(a, b, c, \ldots)$ i określa funkcyę f jednoznacznie wraz z jej zakresem istnienia, miejscami szczególnemi i możliwemi prózniami.

Przy przeprowadzaniu można się ograniczać do ścieśnionych zakresów zbieżności, a każde przeprowadzenie — zarówno, jak szereg (2) — określa nie inną funkcyę analityczną, ale $f(x, y, z, \ldots)$.

196. Określenie spółczynników w przeprowadzeniach funkcyi za pomocą pochodnych, albo średnich wartości. Niech ξ będzie punktem na płaszczyźnie (x), leżącym poza kołem zbieżności danego elementu $\mathfrak{P}(x|a)$. Wtedy — gdy x_0 obierzemy blisko punktu ξ, a w otoczeniu punktu x_0 mamy element:

$$\mathfrak{P}(x|x_0) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots \tag{1}$$

taki, że on w swojem kole zbieżności (R) zawiera punkt ξ — to sama funkcya $f(x)$ i jej pochodne w punkcie ξ określają takie równości: $f(\xi) = \mathfrak{P}(\xi|x_0)$, $f'(\xi) = \mathfrak{P}'(\xi|x_0)$, $f''(\xi) = \mathfrak{P}''(\xi|x_0)$, ...

---

*) Jak dawniej określali funkcyę: Leibnitz, Bernoulli Jan, Euler Lagrange, i jak do nowych funkcyj torowali drogę Legendre i Abel; por. P. Dziwiński: „Krótki rys teoryi funkcyj peryodycznych jednej zmiennej“, (Lwów 1885), str. 5—9. Por. także: W. Láska: *„Einführung in die Functionentheorie“*, (Stuttgart 1894). O obecnym stanie teoryi funkcyj analit. czytaj: Hurwitz: *„Über die Entwickelung der allg. Th. der anal. Functionen in neuerer Zeit.“ Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich*, str. 91. i nast. (Lipsk 1898).

W szczególności w samym punkcie x_0, który jest środkiem zbieżnego elementu (1), mamy:

$$(2) \qquad f(x_0)=c_0,\quad \frac{f'(x_0)}{1!}=c_1,\quad \frac{f''(x_0)}{2!}=c_2,\ \ldots,$$

a więc:

$$(3) \qquad f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

dla $|x-x_0|<R$.

Uwaga 1. Połóżmy w (3), jak zwykle, $x-x_0=h$, to pod warunkiem, że $|h|<R$, dostajemy:

$$(A) \qquad f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\ldots$$

Zatrzymując ciągle $|h|<R$ i w tym obszarze obierając pewną oznaczoną wartość h, zauważmy identyczność:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f\left[\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{2}\right]-f\left[\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-\frac{h}{2}\right],$$

Gdy prawą stronę rozwiniemy w otoczeniu miejsca $\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$, dostaniemy stąd:

$$(B) \qquad \begin{aligned} f(x_0+h)=f(x_0)+2\Bigg[f'\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\frac{\frac{h}{2}}{1!}+f'''\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3!}+ \\ f^{(5)}\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^5}{5!}+\ldots\Bigg], \end{aligned}$$

a to rozwinięcie przy dostatecznie małem h zbieżniejszem się okaże od rozwinięcia (A), [Por. Jourjon: *„Sur une transformation de la formule de Taylor"*. C. R. T. 78., str. 493].

Uwaga 2. Przyjmijmy, że dana funkcya analityczna $f(x)$ posiada punkta osobliwe c_1, c_2, c_3, ...; otoczmy każdy ten punkt c_α kołem (c_α), mającem środek w c_α, a promień $=1$ i przyjmijmy, że na płaszczyźnie (x) są jeszcze punkta x_1, nie zawierające się we wnętrzu żadnego z kół (c_α). W otoczeniu każdego takiego punktu mamy:

$$f(x)=f(x_1)+\frac{f'(x_1)}{1!}(x-x_1)+\ldots,$$

a promień zbieżności tego rozwinięcia jest niezawodnie >1. Stąd — podług uwagi w art. 181. mamy tu:

$$\lim \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!}=0,$$

a to znaczy: *Gdy wszystkie punkta osobliwe c_α funkcyi analitycznej $f(x)$, otoczymy kołami (c_α) o środku w c_α, a o promieniu $=1$, a na płaszczyźnie (x) istnieją jeszcze punkta x_1, zewnątrz tych kół leżące, to w całym obszarze tych punktów posiada $f(x)$ własność:*

$$\lim_{\nu=\infty}\left[f^{(\nu)}(x_1)/\nu!\right]=0.$$

Lecz spółczynniki c_λ można tu jeszcze w inny sposób zdefiniować. Oto w art. 163. wywnioskowaliśmy, że spółczynnik a_λ szeregu $P(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\lambda x^\lambda$ jest $=\lim_{m=\infty} P_\lambda(x,m)$, gdzie $P_\lambda=P/x^\lambda$, a $P_\lambda(x,m)$ jest wydzielonym *mod. m* szeregu P_λ. Stosując to do szeregu, (3), który teraz nazwijmy: $\varphi(x-x_0)$, to mieć będziemy:

$$(4)\qquad c_\lambda=\lim_{m=\infty}\frac{1}{m}\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{\varphi((x-x_0)\varepsilon^\mu)}{(x-x_0)^\lambda.\varepsilon^{\lambda\mu}}$$

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}.$$

Przytem $|x-x_0|=\varrho$ może być dowolne, byleby tylko było $\varrho<R$. W (4) mamy średnią arytmetyczną z wartości funkcyi $\frac{\varphi(x-x_0)}{(x-x_0)^\lambda}$ na wszystkich punktach okręgu (ϱ). Nazwijmy ją ś r e d n i ą (tej funkcyi) na okręgu (ϱ) i naznaczmy przez:

$$(5)\qquad \mathfrak{M}\left(\varrho,\frac{\varphi(x-x_0)}{(x-x_0)^\lambda}\right)=\mathfrak{M}(\varrho,\varphi_\lambda),$$

gdzie $\varphi_\lambda=\frac{\varphi}{(x-x_0)^\lambda}$, to mamy teraz:

$$(6)\qquad c_\lambda=\mathfrak{M}(\varrho,\varphi_\lambda),\quad \lambda=0,1,2,...$$

jako drugą definicyę spółczynników c_λ.

W szczególności, gdy $x_0=0$, dostajemy:

$$c_\lambda=\mathfrak{M}(\varrho,f_\lambda),$$

gdzie $f_\lambda=f/x^\lambda$, a ϱ jest mniejsze od promienia zbieżności elementu $\mathfrak{P}(x|...|0)$

Gdy funkcya analityczna $f(x,y,z)$, określona elementem:

$$\mathfrak{P}(x,y,z|a,b,c)$$

posiada przeprowadzenie:

$$\mathfrak{P}(x,y,z|a,b,c|...|x_0,y_0,z_0)=\mathfrak{P}_0(x-x_0,y-y_0,z-z_0),$$

które w swym zakresie zbieżności zawiera miejsce (ξ,η,ζ), to mamy:

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\mathfrak{P}_0(\xi-x_0,\eta-y_0,\zeta-z_0).$$

Naznaczmy wartość cząstkowej pochodnej:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}f,$$

na miejscu (ξ,η,ζ) przez $f(\xi,\eta,\zeta)_{\alpha\beta\gamma}$, a analogicznie niech $\mathfrak{P}_0(\xi,\eta,\zeta)_{\alpha\beta\gamma}$ oznacza taką samą cząstkową pochodną szeregu $\mathfrak{P}_0$ na tem miejscu, to mieć będziemy:

$$f(\xi,\eta,\zeta)_{\alpha\beta\gamma}=\mathfrak{P}_0(\xi,\eta,\zeta)_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

Przyjmijmy, że:

$$\mathfrak{P}_0(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=\Sigma c_{\alpha\beta\gamma}(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta(z-z_0)^\gamma, \quad \text{to:}$$

$$c_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}\frac{1}{\gamma!}f(x_0, y_0, z_0)_{\alpha\beta\gamma}.$$

Takie znaczenie mają spółczynniki w elemencie funkcyi danym dla otoczenia miejsca (x_0, y_0, z_0).

Lecz także i tu gdy położymy:

$$\mathfrak{P}_0(x-x_0, ...)=\varphi(x-x_0, y-y_0, z-z_0),$$

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\varphi}{(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta(z-z_0)^\gamma},$$

$$\varepsilon_s=\cos\frac{2\pi}{m_s}+i\sin\frac{2\pi}{m_s}, \quad s=1, 2, 3,$$

można będzie $c_{\alpha\beta\gamma}$ w ten sposób przedstawić:

$$c_{\alpha\beta\gamma}=\lim\frac{1}{m_1m_2m_3}\sum_{\lambda=0}^{m_1-1}\sum_{\mu=0}^{m_2-1}\sum_{\nu=0}^{m_3-1}\frac{\varphi[(x-x_0)\varepsilon_1{}^\lambda, (y-y_0)\varepsilon_2{}^\mu, (z-z_0)\varepsilon_3{}^\nu]}{(x-x_0)\varepsilon_1{}^{\lambda\alpha}.(y-y_0)\varepsilon_2{}^{\mu\beta}.(z-z_0)\varepsilon_3{}^{\nu\gamma}}=$$

$$=\mathfrak{M}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varphi_{\alpha\beta\gamma}),$$

gdzie dla

$$|x-x_0|=\varrho_1, \quad |y-y_0|=\varrho_2, \quad |z-z_0|=\varrho_3$$

szereg φ jest zbieżny.

197. Znaczenie nieskończonej sumy $S(x)=\Sigma P_k(x)$ w różnych zakresach jej jednostajnej zbieżności. Niech szereg:

$$(1) \qquad P(x)=\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha.x^{-\alpha}+\sum_{\beta=0}^{\infty}B_\beta x^\beta$$

zbieżnym będzie w pierścieniu $(R_1...R_2)$, gdzie $R_1<R_2$. Obierzmy wewnątrz tego pierścienia dowolny punkt a i z punktu tego, jako środka zatoczmy dwa koła, jedno o promieniu $|a|-R_1$, a drugie o promieniu $R_2-|a|$. Jedno z tych kół zawierać się będzie całkowicie w $(R_1...R_2)$. To koło nazwijmy (ϱ).

Położmy $x=a+h$ i ograniczmy h tak, aby punkta $a+h$ leżały bez wyjątku wewnątrz koła (ϱ), to z (1) dostaniemy:

$$(2) \qquad P(x)=\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha.a^{-\alpha}\left(1+\frac{h}{a}\right)^{-\alpha}+\sum_{\beta=0}^{\infty}B_\beta a^\beta\left(1+\frac{h}{a}\right)^\beta,$$

a w kole (ϱ) będzie ta nieskończona suma funkcyj zależnych od h nie tylko zbieżną, ale także — podobnie jak (1) w wnętrzu całego pierścienia $(R_1...R_2)$ — jednostajnie zbieżną. Że zaś w kole (ϱ) jest $|h|<|a|$, więc w (2) można będzie każdy dodajnik pierwszej sumy rozwinąć na szereg $\mathfrak{P}_\alpha(h)$, a każdy dodajnik drugiej sumy także na szereg $\mathfrak{P}_\beta(h)$.*) Po wykonaniu tego dostaniemy z (2) nieskończoną sumę:

$$(3) \qquad P(x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\alpha(h) + \sum_{\beta=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\beta(h),$$

która dla $|h| < \varrho$ jest jednostajnie zbieżną. Sumę (3) można zatem będzie podług potęg h uporządkować, a to — gdy uwzględnimy, że $h=(x-a)$ — daje: $P(x)=\mathfrak{P}(x-a)$ dla $|x-a|<\varrho$. Stąd wynika:

I. *Każdy szereg $P(x)$ lub $P(x-c)$, $c \neq 0$, zawierający i ujemne potęgi argumentu x do skończonego lub nieskończonego stopnia, a zbieżny w pierścieniu $(R_1 ... R_2)$, o środku $x=0$ lub $x=c$, określa w tym pierścieniu pewną analityczną funkcyę. Funkcya taka zachowuje się regularnie w tym pierścieniu $(R_1 ... R_2)$.*

Ważnem pytaniem czy naodwrót, analityczna funkcya regularna w pewnym pierścieniu $(R_1 ... R_2)$ o środku w punkcie $x=0$, lub w punkcie $x=c \neq 0$ da się przedstawić zawsze szeregiem $P(x)$, a względnie $P(x-c)$ będziemy mogli zająć się dopiero później.

Mając już twierdzenie I., zauważmy:

$$(4) \qquad S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x),$$

która w jednym, lub kilku obszarach (A), (B), (C), ... [por. Pd. 1., art. 167.] jest jednostajnie zbieżną. Gdy a jest punktem wewnątrz jednego z tych obszarów, n. p. obszaru (A), a h wybierzemy tak małe, że punkta $a+h$ wypełnią kołowe otoczenie punktu a, leżące całkowicie w (A), to każde $P_k(a+h)$ da się rozwinąć na szereg potęgowy $\mathfrak{P}_k(h)$. W obranem tem otoczeniu punktu a mieć będziemy:

$$S(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{P}_k(h),$$

a ostatnia z tych sum o argumencie h jest jednostajnie zbieżną w tem otoczeniu. Porządkując ją podług potęg h, dostajemy:

$$S(x) = S(a+h) = \mathfrak{P}(h) = \mathfrak{P}(x-a), \quad \text{a to znaczy:}$$

II. *Suma $S(x)$ jednostajnie zbieżna w obszarach (A), (B), (C), ... swego argumentu określa w każdym z tych obszarów — częściowo lub całkowicie — pewną analityczną funkcyę, zachowującą się tam regularnie.***) *Funkcye z różnych obszarów mogą być zupełnie między sobą różne; ale może się zdarzyć, że $S(x)$ przedstawia w (A), (B), (C), ... części jednej*

---

*) Są to właściwie wymierne funkcye, które dopiero przy $\alpha = \beta = \infty$ przestają być wymierne.

**) C. Runge wykazał, że suma nie przestanie być funkcyą analityczną, choć w rozważanym obszarze ustaje na pewnych liniach jednostajna zbieżność. (*Zur Th. d. anal. Functionen. Acta math.*, T. 6. [1885], str. 245).

i tej samej funkcyi, t. j. jej części, przypadające na wnętrza tych obszarów. *)

Podług twierdzenia I. można $S(x)$ określić jako nieskończoną sumę funkcyj analitycznych, danych w otoczeniu punktu $x=0$, lub punktu $x=c\neq 0$, gdzie przez to otoczenie rozumiemy — ogólniej — już-to pewien pierścień, już-to pewne koło o środku $x=0$, lub $x=c$.

Pd. 1. Na płaszczyźnie argumentu x niech dane będą punkta $a_1, a_2, \ldots, a_p$ tworzące wierzchołki zamkniętego wieloboku (M).

Gdy $m_1, m_2, \ldots m_p$ są całkowite dodatnie liczby, z których niektóre — ale nie wszystkie — mogą być nawet zerami, to punkt:

$$(a) \qquad \xi_{(m)}=\frac{m_1 a_1+m_2 a_2+\ldots+m_p a_p}{m_1+m_2+\ldots+m_p}$$

zawiera się zawsze wewnątrz wieloboku (A), albo na jego obwodzie.

Gdy dalej $u_1, u_2, \ldots, u_p$ są ilości stałe dodatnie i wszystkie <1, to suma nieskończona:

$$(b) \qquad \Sigma u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p},$$

w której $m_1, m_2, \ldots, m_p$ przybierają różne lub równe wartości z szeregu $0, 1, 2, \ldots$ — ale nigdy nie są wszystkie równocześnie zerami — jest niezawodnie absolutnie zbieżną.

Zauważmyż sumę:

$$(c) \qquad S(x)=\sum\left\{\frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p}}{x-\dfrac{m_1 a_1+\ldots+m_p a_p}{m_1+m_2+\ldots+m_p}}\right\},$$

w której $m_1, m_2, \ldots, m_p$ przybierają te same wartości co w (b). Przy takich $m_1, m_2, \ldots, m_p$ utworzą punkta $\xi_{(m)}$ wszędzie gęstą mnogość zapełniającą wnętrze wieloboku (M) i jego obwód. Gdy x jest dowolnym punktem leżącym w (M), lub na jego obwodzie, to dla nieskończenie dużo systemów $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ okaże się różnica $|x-\xi_{(m)}|<\delta$, gdzie δ dowolnie małą dodatnią jest ilością. Wskutek tego suma (c) nie będzie zbieżną ani w (M), ani na obwodzie.

Przyjmijmy przeciwnie, że x leży zewnątrz (M). Dla takich x będą bezwzględne wartości:

$$\left|\frac{1}{x-\dfrac{m_1 a_1+\ldots+m_p a_p}{m_1+\ldots+m_p}}\right| = \Delta_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$$

wszystkie skończone, a suma:

$$\Sigma\left[\Delta_{m_1, m_2, \ldots, m_p} \cdot u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p}\right]$$

będzie [art. 11., tw. II.] zbieżną.

Suma $S(x)$ będzie więc na wszystkich punktach x zewnątrz (M) nie tylko absolutnie — ale prócz tego jeszcze i jednostajnie zbieżną i da się zamienić na szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x'-x)$, który będzie elementem pewnej funkcyi analitycznej istniejącej jedynie zewnątrz (M), a więc mającej (M) jako próżnię**).

---

*) Weierstrass: „*Abhandlungen aus der Functionenlehre*“, str. 79. i nast.

**) Funkcyę $S(x')$ utworzoną w Pd. 4. tak elementarnym sposobem zawdzię-

Pd. 5. W razie dwóch tylko punktów: $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$ dostajemy:

$$S(x) = \sum \left\{ \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2}}{x - \frac{m_1 \alpha + m_2 \beta}{m_1 + m_2}} \right\},$$

a punkta $\xi_{(m)} = \frac{m_1 \alpha + m_2 \beta}{m_1 + m_2}$ zapełniają tu wszędzie gęsto prostolinijny odcinek $\alpha\beta$. Stąd wynika, że w tym razie określa $S(x)$ analityczną funkcyę z prostolinijnym odcinkiem $\alpha\beta$ punktów osobliwych.

Pd. 6. Zauważmy funkcyę:

$$R(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Jej elementem w obszarze $|x| < 1$ jest:

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

a w obszarze $|x| > 1$ przedstawia ją rozwinięcie:

$$P(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \ldots$$

W pierwszym z tych obszarów dostajemy:

$$(A) \qquad \lim_{m=\infty} \mathfrak{P}(x, m) = 1 \quad \text{[art. 163., (1).]}$$

w drugim zaś:

$$(B) \qquad \lim_{m=\infty} P(x, m) = 0.$$

Z drugiej strony mamy przy s k o ń c z o n e m m:

$$\mathfrak{P}(x, m) = 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \ldots = \frac{1}{1-x^m} = R(x, m),$$

która-to funkcya $R(x, m)$ przedstawia średnią arytmetyczną *mod.* m funkcyi $R(x)$ tak w obszarze $|x| < 1$, jak i w obszarze $|x| > 1$.

Przy $m = \infty$ daje $\lim\limits_{m=\infty} R(x, m)$ w pierwszym z tych obszarów wartość (A) a w drugim wartość (B).

Ponieważ m, dążąc do ∞, przebiegać może dowolne liczby, więc zakładając:

$$m = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, \infty$$

i kładąc:

$$\lim_{n=\infty} R(x, 2^n) = R(x, 2^0) + [R(x, 2^1) - R(x, 2^0)] +$$
$$+ [R(x, 2^2) - R(x, 2^1)] + [R(x, 2^3) - R(x, 2^2)] + \ldots$$

dostajemy — obliczywszy

$$R(x, 2^s) - R(x, 2^{s-1}) = \frac{1}{1-x^{2^s}} - \frac{1}{1-x^{2^{s-1}}} = -\frac{x^{2^{s-1}}}{1-x^{2^s}} \text{ — wyraz:}$$

$$A(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^4} - \frac{x^4}{1-x^8} - \frac{x^8}{1-x^{16}} - \ldots$$

---

czamy P o i n c a r é m u. Por. A. R. F o r s y t h *„Theory of Functions of a complex variable“* (1893) str. 142—143.

Por. także H. L a u r e n t *„Traité d'Analyse“* T. III. str. 375—6. Z. K r y g o w s k i. Przyczynek do teoryi funkcyj o obszarach osobliwych. *„Prace mat. fiz.“* T. 9. (1898) str. 213—221.

$$\text{który}\begin{cases}=1 \text{ w obszarze } |x|<1\\ =0 \quad ,, \quad ,, \quad |x|>1.\end{cases}$$

W tych obszarach jest $A(x)$ jednostajnie zbieżną sumą, a na wszystkich punktach $|x|=1$ jest bez znaczenia.

Gdy $f_1(x)$, $f_2(x)$ są dowolnemi analitycznemi funkcyami, to wyraz:

$$W(x)=f_1(x)+A(x).f_2(x)$$

przedstawi $f_1(x)+f_2(x)$ w obszarze $|x|<1$, a funkcyę $f_1(x)$ w obszarze $|x|>1$.

W razie $f_1(x)=-f_2(x)$ jest $W(x)$ z e r e m w obszarze $|x|<1$, a jest $=f_1(x)$ w obszarze $|x|>1$.

Pd. 7. Przejdźmy do ogólniejszego przypadku. Gdy dana będzie funkcya:

$$R(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3-x}+\ldots+\frac{1}{n-x}$$
$$=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}+\ldots+\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{x}{n}},$$

to każdy z jej dodajników da początek — podług Pd. 6. — nieskończonej sumie:

$$A_\nu(x)=\frac{1}{\nu}\left\{\frac{1}{1-\frac{x}{\nu}}-\frac{\frac{x}{\nu}}{1-\left(\frac{x}{\nu}\right)^2}-\frac{\left(\frac{x}{\nu}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\nu}\right)^4}-\ldots\right\}$$
$$=\begin{cases}1, \text{ gdy } |x|<\nu,\\ 0, \text{ gdy } |x|>\nu,\end{cases}$$
$$\nu=1, 2, 3, \ldots, n$$

Z całej funkcyi $R(x)$ dostaniemy wyraz:

$$A(x)=A_1(x)+A_2(x)+\ldots+A_n(x), \text{ który}$$

$$\text{będzie}\begin{cases}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} & \text{dla } |x|<1,\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} & ,, \quad 1<|x|<2,\\ =\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} & ,, \quad 2<|x|<3,\\ \vdots \qquad \vdots & \vdots\\ =\frac{1}{n} & ,, \quad n-1<|x|<n,\\ =0 & ,, \quad |x|>n.\end{cases}$$

Utwórzmy — mając danych n analitycznych funkcyj $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sumę:

$$f_1(x)A_1(x)+f_2(x)A_2(x)+\ldots+f_n(x)A_n(x),$$

to ona

w obszarze $\|x\|<1$	określa $f_1+\frac{1}{2}f_2+\frac{1}{3}f_3+\ldots+\frac{1}{n}f_n$,
,, ,, $1<\|x\|<2$	,, $\frac{1}{2}f_2+\frac{1}{3}f_3+\ldots+\frac{1}{n}f_n$,
,, ,, $2<\|x\|<3$	,, $\frac{1}{3}f_3+\ldots+\frac{1}{n}f_n$,
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	
,, ,, $(n-1)<\|x\|<n$	,, $\frac{1}{n}f_n$,
,, ,, $\|x\|>n$	,, 0.

Jakie funkcye w tych obszarach określa

$$\varphi_1(x)+A(x)\varphi_2(x),$$

gdzie φ_1, φ_2 są-to dwie dane analityczne funkcye?

Pd. 8. Zauważmy jeszcze funkcyę:

$$R(x)=\frac{1+x}{1-x}.$$

Jej rozwinięciem w obszarze $|x|<1$ jest:

$$\mathfrak{P}(x)=1+2[x+x^2+x^3+...] \text{ i daje:}$$

$$\mathfrak{P}(x,m)=1+2[x^m+x^{2m}+x^{3m}+...]$$

$$=\frac{1+x^m}{1-x^m}=R(x,m).$$

$R(x,m)$ przedstawia i tu średnią arytmetyczną z wartości funkcyi $R(x)$, $mod. m$, tak w obszarze $|x|<1$, jak i w obszarze $|x|>1$ i zdąża do granicy $\lim_{m=\infty} R(x,m)=+1$, gdy $|x|<1$, a do granicy -1, gdy $|x|>1$. Gdy i tu założymy:

$$m=2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...$$

i obliczymy:

$$R(x,2^s)-R(x,2^{s-1})=\frac{2.x^{2^{s-1}}}{x^{2^s}-1},$$

to kładąc:

$$\lim_{n=\infty} R(x,2^n)=R(x,2^0)+(R(x,2^1)-R(x,2^0))+...,$$

dostaniemy stąd wyraz:

$$A(x)=\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x^2}{x^4-1}+\frac{2x^4}{x^8-1}+...$$

$$\text{który}\begin{cases}=+1, & \text{gdy } |x|<1\\ =-1, & \text{gdy } |x|>1.\end{cases}$$

W tych obszarach jest on zarazem jednostajnie zbieżny, a dla $|x|=1$ nie ma żadnego znaczenia*).

Gdy $f_1(x)$, $f_2(x)$ są dowolnemi analitycznemi funkcyami, to

$$f_1(x)+A(x)f_2(x)$$

określa w obszarze $|x|<1$ funkcyę $f_1(x)+f_2(x)$, a w obszarze $|x|>1$ funkcyę $f_1(x)-f_2(x)$.

Połóżmy $x=\frac{z-1}{z+1}$, $z=\xi+\eta i$, to łatwo przekonamy się, że:

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1, \text{ gdy } \xi>0, \text{ a } \left|\frac{z-1}{z+1}\right|>1, \text{ gdy } \xi<0.$$

Stąd wynika, że wyraz:

---

*) Rozwinięcie $A(x)$ podane w Pd. 8. utworzył pierwszy J. Tannery. Por. Weierstrass l. c. str. 102.

Pod względem metody, jakiej użyto w Pd. 6, Pd. 7, Pd. 8. por. J. Puzyna *„Über eine methodische Bildung der analytischen Ausdrücke $\Sigma f_\nu(x)$, $\Sigma f_\nu(x,y)$ von constanten Werthen“. Monatshefte für Math. und Phys.* T. V. str. 67.

W *„Zeitschrift für Math. und Phys.“* — Rocznik 22. (1877). str. 183. podaje także E. Schröder pewne wyrażenie $A(x)$ o rozważanej tu własności.

*

$$A\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\mathfrak{A}(z)$$

będzie $=+1$ w tej połowie płaszczyzny (z), w której $\xi>0$, a będzie $=-1$ w drugiej pozostałej połowie.

Pd. 9. Nie trudno utworzyć nieskończone rozwinięcie, które w dwóch oddzielnych obszarach swej jednostajnej zbieżności określa tę samą funkcyę. W tym celu zauważmy wymierną funkcyę:

$$R(x)=\frac{1}{A-x^2}$$

w której A jest dodatnią, rzeczywistą liczbą. Gdy r będzie również taką liczbą, a położymy $A+r=\alpha^2$, i

$$R(x)=\frac{1}{A+r-x^2-r}=\frac{1}{-r-(x^2-\alpha^2)}=\frac{-1}{r\left[1+\frac{x^2-\alpha^2}{r}\right]}$$

$$=-\frac{1}{r}\left[1-\frac{x^2-\alpha^2}{r}+\frac{(x^2-\alpha^2)^2}{r^2}-\dots\right]=A(x),$$

to wskutek $|\alpha|^2>r$ jest to rozwinięcie zbieżne w dwóch oddzielnych owalach tworzących krzywę Cassini'ego [art. 167., Pd. 1]. Rozwinięcie $A(x)$ przedstawia więc tu jedną tylko funkcyę $R(x)$ w dwóch oddzielnych obszarach swej jednostajnej zbieżności; przedstawia ją tylko częściowo, gdyż $R(x)$ z wyjątkiem punktów $\pm\sqrt{A}$ jest zresztą wszędzie regularną*).

198. Różniczkowanie i całkowanie sumy $S(x)$. Połóżmy:

$$S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathfrak{P}_k(x)=\mathfrak{P}(x),$$

to stąd mamy:

$$\frac{d}{dx}S(x)=\frac{d}{dx}\mathfrak{P}(x).$$

Lecz jasnem jest, że $\frac{d}{dx}\mathfrak{P}(x)$ składa się z dodajników $\frac{d}{dx}\mathfrak{P}_k(x)$, a wskutek tego mamy:

$$\frac{d}{dx}S(x)=\frac{d}{dx}\mathfrak{P}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\mathfrak{P}_k(x),$$

Stąd twierdzenie:

I. *Pochodnę nieskończonej sumy $S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathfrak{P}_k(x)$ dostajemy w jej zakresie jednostajnej zbieżności tworząc pochodnę albo wykonanej już sumy $\mathfrak{P}(x)$, albo sumując pochodne wszystkich jej dodajników. To samo dotyczy i sumy $\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)$.*

---

*) Metod, jakiemi się posługiwali Hermite, Appel, Goursat, Frobenius i inni celem tworzenia wyrażeń $A(x)$ nie możemy tu uwzględnić.

Por. „*Cours de M^r Hermite professé pendant le 2^de semestre 1881—82 (Faculté des sciences de Paris) par* M. Andoyer str. 57., 58.

Podobnie wywnioskujemy:

II. *Całkową funkcyę sumy* $S(x)=\Sigma\mathfrak{P}_k(x)$ *przedstawić można w jej zakresie jednostajnej zbieżności albo przez:*

$$C+\int\mathfrak{P}(x)\,dx,$$

albo też przez:

$$C+\sum_{k=0}^{\infty}\int\mathfrak{P}_k(x)\,dx.$$

199. Ogólniejsze szeregi zwrotne. (Metoda André-go). Rozważymy tu jeszcze takie analityczne funkcye, których dany element da się rozwinąć na skończoną sumę pewnych innych analitycznych funkcyj za wprowadzeniem takich założeń*):

Równanie $g(x)=x^m-c_1x^{m-1}+...\pm c_m=0$ niech ma pierwiastki $r, r',...$ powtarzające się odpowiednio razy $\lambda, \lambda',...$ Utwórzmy wymierne całkowite funkcye o stałych spółczynnikach:

$$\xi_r(z),\ \xi_{r'}(z),...$$

odpowiednio stopni: $\lambda-1,\ \lambda'-1,...$ i weźmy pod uwagę wyrażenia:

(1) $$v_n=\Sigma\xi_r(n)r^n,\quad n=0,1,2,...$$

w których suma odnosi się do wszystkich pierwiastków równania $g(x)=0$.

Podług Pd. 4., art. 53., gdy tam $x=n$, a $n=\lambda-1$ założymy, możemy położyć:

(2) $$\xi_r(n)=\xi_r(0)+\frac{\Delta\xi_r(0)}{1!}n+\frac{\Delta^2\xi_r(0)}{2!}n(n-1)+...$$
$$...+\frac{\Delta^{\lambda-1}\xi_r(0)}{(\lambda-1)!}.n(n-1)...(n-\lambda+1)=$$
$$=Q_{r0}+Q_{r1}n+Q_{r2}n(n-1)+...+Q_{r,\lambda-1}n(n-1)...(n-\lambda+1),$$

i analogicznie przedstawić $\xi_{r'}(n),\ \xi_{r''}(n),...$ Elementem danej analitycznej funkcyi $F(x)$ niech będzie szereg (zbieżny):

(3) $$F(x)=u_0v_0+u_1v_1x+u_2v_2x^2+...,$$

w którym $u_0,\ u_1,\ u_2,...$ są ilości stałe (zależne tylko od n), a $v_0,\ v_1,...,v_n,...$ mają znaczenia (1). Zakładamy przy tem, że szereg:

(4) $$u_0+u_1x+u_2x^2+...=f(x)$$

jest zbieżny, określa zatem w otoczeniu punktu $x=0$ analityczną funkcyę $f(x)$.

Wyraz n^{ty} szeregu (3), gdy w tym wyrazie położymy za v_n sumę (1), a w niej $\xi_r(n)$ przedstawimy formą (2), będzie miał postać:

---

*) D. André. „*Sur la sommation des séries*“ *Annales scientifiques de l'école normal supérieure* T. 12. (2^{ga} ser.) str. 191—198. — *Sur les séries ordonnées suivent puissances croissantes d'une variable* — tamże str. 287—300.

$$u_n v_n x^n = u_n x^n \sum_r [Q_{r0} + Q_{r1} n + \ldots + Q_{r,\lambda-1} n(n-1)\ldots(n-\lambda+1)] r^n =$$

$$(5) \qquad = \sum_r [Q_{r0}\, u_n (rx)^n + rx Q_{r1}\, u_n\, n\, (rx)^{n-1} +$$

$$+ (rx)^2 Q_{r2} u_n n(n-1)(rx)^{n-2} + \ldots + (rx)^{\lambda-1} Q_{r,\lambda-1} u_n n(n-1)\ldots(n-\lambda+1)].$$

Sumując te wyrazy od $n=0$ do $n=\infty$, otrzymamy:

$$F(x) = \sum_r [Q_{r0} \sum_n u_n (rx)^n + rx . Q_{r1} \sum_n u_n n (rx)^{n-1} +$$

$$+ (rx)^2 Q_{r2} \sum_n u_n n(n-1)(rx)^{n-2} + \ldots + (rx)^{\lambda-1} Q_{r,\lambda-1} \sum_n u_n [n \ldots (n-\lambda+1)]].$$

Lecz tu sumy $\sum_n$ są widocznie po porządku:

$$f(rx),\ f'(rx),\ f''(rx),\ \ldots,\ f^{(\lambda-1)}(rx),$$

[gdzie f', f'', ... są pochodnemi funkcyi f na miejscach rx, $r'x$, ...]. Z tego powodu mamy:

$$(6) \quad F(x) = \sum_r [Q_{r0} f(rx) + Q_{r1} (rx) f'(rx) + \ldots + Q_{r,\lambda-1} (rx)^{\lambda-1} f^{(\lambda-1)}(rx)].$$

Lecz przytem założyć trzeba, że $f(x)$ istnieje jeszcze i na miejscach rx, $r'x$, ... Forma (6) jest widocznie skończona i określa $F(x)$ w wymiernej całkowitej postaci, zawierającej funkcye:

$$f(rx),\ f'(rx),\ \ldots,\ f(r'x),\ f'(r'x),\ \ldots$$

Szereg $F(x)$ o podanej tu własności, nazywa się ogólniejszym szeregiem zwrotnym; $g(x)=0$ jest charakterystycznem równaniem wyrazów v_n (albo szeregu F).

Pd. 1. Gdy:

$$F(x) = 1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \ldots,$$

gdzie p jest całkowite >0, a położymy:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots = f(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\left[f'(x) = \frac{1!}{(1-x)^2},\ f''(x) = \frac{2!}{(1-x)^3},\ \ldots\right], \text{ to}$$

$$v_n = n^p = n^p . 1^p = \xi_1(n) . 1^p$$

i ma charakterystyczne równanie: $(x-1)^{p+1}=0$ o $(p+1)$-krotnym pierwiastku $x=1$. Mieć więc tu będziemy:

$$Q_{10}=0,\quad Q_{11} = \frac{1^p - 0^p}{1!},\quad Q_{12} = \frac{2^p - 2.1^p + 0^p}{2!},\ \ldots$$

$$Q_{10}=0,\quad 1!\,Q_{11} = \Delta\xi_1(0) = 1^p - 0^p,\quad 2!\,Q_{12} = \Delta^2\xi_1(0) = 2^p - 2.1^p + 0^p,$$

$$3!\,Q_{13} = \Delta^3\xi_1(0) = 3^p - 3.2^p + 3.1^p - 0^p,\ \ldots,$$

a $F(x)$ wyrazi się formą:

$$F(x) = \Delta . \frac{x}{(1-x)^2} + \Delta^2 . \frac{x^2}{(1-x)^3} + \ldots + \Delta^p . \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}},$$

w której dla krótkości Δ^s zamiast $\Delta^s \xi_1(0)$ położono.

W szczególności, gdy $p=2$ dostaniemy:

$$F(x)=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}=\frac{(1+x)x}{(1-x)^3}.$$

Pd. 2. Dla szeregu:

$$F(x)=\frac{1}{3}1^3x+\frac{1.4}{3.6}2^3x^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}3^3.x^3+\dots$$

połóżmy:

$$\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.6}x^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}x^3+\frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4+\dots$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1!}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)}{2!}x^2+\dots=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}-1=f(x)$$

$$\left[f'(x)=\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{1-x}},\ f''(x)=\frac{4}{9(1-x)^2\sqrt[3]{1-x}},\ f'''(x)=\frac{28}{27(1-x)^3\sqrt[3]{1-x}}\right],$$

to dalej mamy:

$$v_n=n^3=n^3.1^3=\xi_1(n)$$

o charakterystycznem równaniu: $(x-1)^4=0$. Gdy dalej obliczymy:

$$Q_{10}=0,\quad Q_{11}=\frac{1^3-0^3}{1!}=1,\quad Q_{12}=\frac{2^3-2.1^3}{2!}=3,\quad Q_{13}=\frac{3^3-3.2^3+3.1^3}{3!}=1,$$

to otrzymamy:

$$F(x)=\frac{x}{3(1-x)\sqrt[3]{1-x}}+\frac{12x^2}{9(1-x)^2\sqrt[3]{1-x}}+\frac{28x^3}{27(1-x)^3\sqrt[3]{1-x}}=\frac{x(9+18x-x^2)}{27(1-x)^2\sqrt[3]{1-x}}.$$

Pd. 3. Zauważmy funkcyę:

$$F(x)=\xi(0)+\frac{\xi(1)}{1!}x+\frac{\xi(2)}{2!}x^2+\dots,$$

w której $\xi(n)$ jest wymierną całkowitą funkcyą stopnia $(\lambda-1)^{go}$ i połóżmy:

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots=E(x)=E'(x)=\dots,$$

to mamy tu:

$$v_n=\xi(n).1^\lambda$$

z charakterystycznem równaniem $(x-1)^\lambda=0$ o λ-krotnym pierwiastku $x=1$.

Niechże:

$$\xi(n)=P_0+P_1\xi+\dots+P_{\lambda-1}\xi^{\lambda-1},$$

to obliczywszy stąd: Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}, ..., dostaniemy:

$$F(x)=E(x).[Q_{10}+Q_{11}x+\dots+Q_{1,\lambda-1}x^{\lambda-1}].$$

Przyjmując n. p. $\xi(n)=1+n+n^2$ mieć będziemy:

$$Q_{10}=1,\quad Q_{11}=\frac{3-1}{1!}=2,\quad Q_{12}=\frac{7-2.3+1}{2!}=1,\ \text{a więc:}$$

$$F(x)=(1+x)^2E(x).$$

Pd. 4. Za pomocą tej metody można będzie dojść do wzoru, jakim w art. 163. przedstawiono wydzielony szereg *mod. m* z danego szeregu:

$$\mathfrak{P}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

Kładąc wydzielony szereg:

$$a_0+a_mx^m+a_{2m}x^{2m}+\dots=F(x)$$

i biorąc $\mathfrak{P}(x)$ za $f(x)$ mamy:

$$v_n=1,\ \text{gdy}\ n\equiv 0\ (mod.\ m),$$

a $v_n = 0$ w każdym innym razie. Gdy więc:

$$r = \varepsilon_0,\ r' = \varepsilon_1,\ \ldots,\ r^{(m-1)} = \varepsilon_{m-1}$$

są wszystkimi pierwiastkami równania $x^m - 1 = 0$, to możemy położyć:

$$v_n = \frac{1}{m}\sum_s \varepsilon_s^n = \frac{1}{m}\sum \xi_r(n) r^n.$$

Mamy tu więc: $\xi_r(n) = \frac{1}{m}$, a obliczywszy spółczynniki Q, dostaniemy:

$$Q_{\varepsilon_0 0} = Q_{\varepsilon_1 0} = \ldots = Q_{\varepsilon_{m-1}, 0} = 1;$$

wszelkie inne Q będą zerami. Mieć więc będziemy:

$$F(x) = \frac{1}{m}\sum_s f(\varepsilon_s x), \quad c.\ b.\ d.\ d.$$

[O bardzo śmiałej metodzie Wrońskiego, rozwijania funkcyi na nieskończony szereg, postępujący podług danych innych funkcyj, pisał E. West: *„Digression sur les séries Journal de math. pures et appliquees.* T. 7. (Ser. 3.) — 1881 — str. 111—128].

200. O nieskończonych sumach $S(x, y, z, \ldots) = \Sigma P_k(x, y, z, \ldots)$. Rozumując zupełnie tak samo, jak w art. 197., dojdziemy do wniosku, że także i nieskończona suma $S(x, y, z, \ldots) = \Sigma P_k(x, y, z, \ldots)$ określa najogólniej w różnych swych zakresach jednostajnej zbieżności różne analityczne funkcye, a między określonemi w ten sposób funkcyami nie potrzebuje zachodzić żaden związek.

Przykładów takiej sumy dostarczy metoda, jakiej używaliśmy już w przytoczonym artykule, mówiąc o funkcyach jednej zmiennej.

Pd. 1. Rozważmy wymierną funkcyę:

$$R(x.y) = \frac{1}{1 - x.y} = 1 + (x.y) + (x.y)^2 + \ldots,$$

gdy $|x.y| < 1$.

Wydzielony stąd szereg *modd. m* daje funkcyę:

$$R(x.y, m) = \frac{1}{1 - (xy)^m},$$

a z niej dostajemy:

$$\lim_{m=\infty} R(x.y, m) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } |xy| < 1 \\ 0, & \text{,, } |xy| > 1. \end{cases}$$

Dążąc do $m = \infty$ po liczbach $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ i postępując tak, jak w Pd. 6. — art. 197. — mieć będziemy:

$$A(x, y) = \frac{1}{1 - xy} - \frac{xy}{1 - (xy)^2} - \frac{(xy)^2}{1 - (xy)^4} - \ldots = \begin{cases} 1, & \text{gdy } |xy| < 1 \\ 0, & \text{,, } |xy| > 1. \end{cases}$$

Pd. 2. Funkcya:

$$R(x.y) = \frac{1 + xy}{1 - xy},$$

gdy z nią analogicznie, jak w Pd. 8. — art. 197. — postępować będziemy, da początek wyrażeniu:

$$A_1(x.y)=\frac{1+xy}{1-xy}+\frac{2xy}{(xy)^2-1}+\frac{2(xy)^2}{(xy)^4-1}+\ldots,\ \text{które}=\begin{cases}+1, & \text{gdy } |xy|<1\\ -1. & \text{,, } |xy|>1.\end{cases}$$

Gdy $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ są dwiema dowolnemi analitycznemi funkcyami, to wyrażenie:

$$f_1(x,y)+A_1(x,y)f_2(x,y)$$

określa w obszarze $|xy|<1$ funkcyę f_1+f_2, a w obszarze $|xy|>1$ funkcyę f_1-f_2.

Gdy się ograniczymy do zmiennych rzeczywistych, a x, y określimy jako spółrzędne prostokątne układu osi, to wspomniane obszary oddzielać będzie od siebie hyperbola: $xy=1$.

ROZDZIAŁ XVII.

Twierdzenie Laurent'a. Najogólniejszy podział jednoznacznych funkcyj analitycznych.

---

201. **Średnie wartości funkcyi $f(x)$ regularnej w pierścieniu $(r_1 \ldots r_2)$. Zasadnicze własności takich średnich wartości.** W art. 178. okazaliśmy, że — gdy się funkcya analityczna $f(x)$ zachowuje regularnie w obszarze $|x|<R$, a więc dla takich x wyraża się szeregiem potęgowym $c_0+c_1x+\ldots$, to:

$$\lim_{m=\infty} f(x,m)=c_0. \tag{1}$$

Średnia arytmetyczna *mod. m* z wartości tej funkcyi (w obszarze $|x|<R$) dąży tu zatem do granicy skończonej i oznaczonej c_0. Granica ta nie zależąc od x pozostaje tą samą — jaktośmy już i tam wspomnieli — na każdym okręgu (r), byleby tylko $r<R$ było. Coś analogicznego znajdziemy i dla funkcyi analitycznej $f(x)$, zakładając o niej, że się w pierścieniu $R_1<|x|<R_2$ zachowuje regularnie, a więc w otoczeniu dowolnego punktu x_0, leżącego wewnątrz tego pierścienia, daje się rozwinąć na szereg potęgowy:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots \tag{2}$$

Przyjmijmy $R_1<|x|=r<R_2$, a obierając dowolny punkt:

$$x=r.k,\quad |k|=1.$$

(na okręgu (r)), utwórzmy średnią arytmetyczną według modułu $m=2^p$, ($p>0$, całkowite) z wartości tej funkcyi, a więc:

$$f(x,2^p)=\frac{f(rk)+f(rk\varepsilon)+\ldots+f(rk\varepsilon^{m-1})}{2^p}, \tag{3}$$

gdzie $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{2^p}+i\sin\frac{2\pi}{2^p}$.

Gdy q będzie znowu dodatnią, całkowitą liczbą, a położymy $2^q=m_1$, a więc $2^{p+q}=m.m_1$, to średnia arytmetyczna funkcyi $f(x)$ o module $m.m_1$ będzie postaci:

$$(4)\qquad f(x, 2^{p+q})=\frac{f(rk)+f(rk\varepsilon_1)+\ldots+f(rk\varepsilon_1^{m\,m_1-1})}{2^{p+q}},$$

jeżeli:

$$(5)\qquad \varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{2^{p+q}}+i\sin\frac{2\pi}{2^{p+q}}.$$

Połóżmy:

$$\varepsilon=\cos\frac{2^q 2\pi}{2^{p+q}}+i\sin\frac{2^q 2\pi}{2^{p+q}},\ \text{a więc } =\varepsilon_1^{\,2^q}=\varepsilon_1^{\,m_1}$$

i napiszmy (3) w ten sposób:

$$(6)\qquad f(x, 2^p)=\frac{1}{2^{p+q}}\sum_{\mu=0}^{m-1} 2^q f(rk\varepsilon_1^{\,m_1\mu}).$$

Zważywszy, że liczby:

$$2^q.\mu+\nu=m_1\mu+\nu,$$

dają — gdy $\mu \gtreqless \nu$ przybierają wartości:

$$\mu=0, 1, 2, \ldots,\ 2^p-1=m-1,$$
$$\nu=0, 1, 2, \ldots,\ 2^q-1=m_1-1,\ —$$

szereg liczb $0, 1, 2, \ldots, 2^{p+q}-1=m\,m_1-1$ bez powtarzania się, można będzie (4) znowu w ten sposób napisać:

$$(7)\qquad f(x, 2^{p+q})=\frac{1}{2^{p+q}}\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{m_1-1} f(rk\varepsilon_1^{\,m_1\mu+\nu}).$$

Jestto suma o $m.m_1=2^{p+q}$ dodajnikach.

Lecz w ten sam sposób można pojmować sumę (6), bo wskutek czynnika 2^q każdy z m dodajników $f(rk\varepsilon_1^{\,m_1\mu})$ powtarza się m_1 razy.

Podporządkujmyż m_1 dodajnikom $f(rk\varepsilon_1^{\,m_1\mu+\nu})$, $\nu=0, 1, \ldots, m_1-1$ sumy (7), m_1 dodajników $f(rk\varepsilon_1^{\,m_1\mu})$ sumy (6), to tworząc różnicę:

$$f(x, 2^{p+q})-f(x, 2^p),$$

mieć będziemy:

$$\frac{1}{2^{p+q}}\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{m_1-1}[f(rk\varepsilon_1^{\,m_1\mu+\nu})-f(rk\varepsilon_1^{\,m_1\mu})].$$

Stąd wynika:

$$(8)\qquad \begin{aligned}&|f(x, 2^{p+q})-f(x, 2^p)|\leq\\ &\leq\frac{1}{2^{p+q}}\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{m_1-1}|f(rk\varepsilon_1^{\,m_1\mu+\nu})-f(rk\varepsilon_1^{\,m_1\mu})|.\end{aligned}$$

Gdy δ jest dowolnie małą dodatnią ilością, to różnicę:

$$|rk\varepsilon_1^{m_1\mu+\nu}-rk\varepsilon_1^{m_1\mu}|=r.|\varepsilon_1^{\nu}-1|$$

można przy dostatecznie dużem p, uczynić $<\delta$, gdyż — podług (5) — ε_1 będzie się wtedy tylko nieskończenie mało różnić od 1.

Że zaś $f(x)$ jest funkcyą ciągłą w rozważanym pierścieniu, więc δ można będzie obrać tak małe, że się

$$|f(rk\varepsilon_1^{m_1\mu+\nu})-f(rk\varepsilon_1^{m_1\mu})|$$

okaże mniejsze od dowolnie małej dodatniej innej ilości δ_1 przy każdem $\nu=0, 1, ..., 2^q-1$.

Z tych powodów dostaniemy z (8) nierówność:

$$|f(x, 2^{p+q})-f(x, 2^p)|<\delta_1$$

gdy tylko p dostatecznie duże założymy.

Ta nierówność wkazuje, że granica:

$$\lim_{p=\infty} f(x, 2^p)=M(rk, f)$$

będzie skończoną i oznaczoną [art. 46., Pd. 3.], a miałaby zależeć jedynie od obranego początkowego punktu $x=rk$.

Lecz wracając do definicyi (3), mamy:

$$f(x, 2^p)=f(rk, 2^p)=f(rk\varepsilon, 2^p)=...=f(rk\varepsilon^{m-1}, 2^p)$$

wskutek własności pierwotnego pierwiastka ε i symetryczności formy (3) ze względu na $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{m-1}$, co znaczy, że średnia arytmetyczna $f(x, 2^p)$ nie zmieni się, gdy w niej x oznacza którykolwiek z punktów:

$$(\alpha) \qquad rk,\ rk\varepsilon,\ rk\varepsilon^2, ..., rk\varepsilon^{m-1}.$$

Utwórzmy średnią arytmetyczną $f(x', 2^p)$ znowu według modułu $m=2^p$, ale o początkowym punkcie $x'=rk'$ różnym od x, $|k'|=1$, to w tej średniej arytmetycznej może mieć x' znowu znaczenie któregokolwiek z punktów:

$$(\beta) \qquad rk',\ rk'\varepsilon,\ rk'\varepsilon^2, ..., rk'\varepsilon^{m-1}.$$

Lecz m możemy tak duże obrać, że między punktami (β) znaleźć będzie można pewien punkt n. p. punkt $rk'\varepsilon^s$ taki, że — gdy δ jest dowolnie małą dodatnią ilością — to się okaże:

$$|rk-rk'\varepsilon^s|<\delta.$$

W następstwie tego będzie dalej:

$$|rk\varepsilon-rk'\varepsilon^{s+1}|<\delta,\ |rk\varepsilon^2-rk'\varepsilon^{s+2}|<\delta, ..., |rk\varepsilon^{m-1}-rk'\varepsilon^{s-1}|<\delta.$$

Utwórzmy różnicę:

$$f(x, 2^p)-f(x', 2^p)=\frac{1}{2^p}\sum_{\mu=0}^{m-1}[f(rk\varepsilon^{\mu})-f(rk'\varepsilon^{\mu+s})],$$

(w której przez $\mu+s$, gdy już $\mu+s>m-1$ jest, rozumiemy dodatnią resztę liczby $\mu+s$ wynikającą z dzielenia przez m), to z niej wynika:

$$|f(x, 2^p)-f(x', 2^p)| \leq \frac{1}{2^p} \sum_{\mu=0}^{m-1} |f(rk\varepsilon^\mu)-f(rk'\varepsilon^{\mu+s})|.$$

Zakładając $|f(rk\varepsilon^\mu)-f(rk'\varepsilon^{\mu+s})| < \delta_1$, $\mu=0, 1, \dots, m-1$, dostaniemy ostatecznie:

$$|f(x, 2^p)-f(x', 2^p)| < \delta_1.$$

Lecz δ_1 ze wzrostem p dowolnie maleje, a stąd wynika, że:

$$\lim_{p=\infty} f(x, 2^p) = \lim_{p=\infty} f(x', 2^p),$$

czyli, że:

$$\lim_{p=\infty} f(x, 2^p) = \mathfrak{M}(r, f)$$

zależy tylko od r.

Pisząc $\mathfrak{M}(r, f)$ wyraźnie, mamy:

(9)
$$\mathfrak{M}(r, f) = \lim_{p=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m-1} f(rk\varepsilon^\mu)}{2^p}.$$

Stąd:

(10)
$$\frac{d\mathfrak{M}(r, f)}{dr} = k . \lim_{p=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m-1} f'(rk\varepsilon^\mu)\,\varepsilon^\mu}{2^p}.$$

Gdy jednak $\mathfrak{M}(r, f)$ nie zależy od k, nie może i $\frac{d\mathfrak{M}(r_1 f)}{dr}$ zależeć od k. Otóż drugi czynnik w (10) uważać trzeba za granicę średniej arytmetycznej z wartości funkcyi:

$$f'(r . z) . z$$

na miejscach $z=k, k\varepsilon, k\varepsilon^2, \dots, k\varepsilon^{m-1}$. Jako taki nie zależy on od k i ma wartość skończoną i oznaczoną. Że zaś cały iloczyn (10) nie ma zależeć od k, to ten drugi czynnik musi być $=0$, a temsamem i cały iloczyn:

$$\frac{d\mathfrak{M}(r, f)}{dr} = 0, \quad R_1 < r < R_2.$$

Z tych wszystkich uwag wynika:

I. *Średnia na okręgu* (r) *z wartości funkcyi regularnej w pierścieniu* $(R_1 \dots R_2)$ *jest skończoną i oznaczoną wielkością i nie zależy od wielkości* (r), *byleby tylko* $R_1 < r < R_2$ *było.*

Z definicyi (9) wynika dalej:

II. *Gdy* $f(x) = c . \varphi(x)$, *a* $\varphi(x)$ *jest wewnątrz pierścienia* $(R_1 \dots R_2)$ *funkcyą zachowującą się regularnie, to*

$$\mathfrak{M}(r, c . \varphi(x)) = c . \mathfrak{M}(r, \varphi(x)), \quad R_1 < r < R_2.$$

Niech:

$$f(x)=\varphi_1+\varphi_2+\ldots=\sum_\lambda \varphi_\lambda,$$

to w takim razie:

$$\mathfrak{M}(r, f(x))=\mathfrak{M}(r, \Sigma\varphi_\lambda)=\Sigma\mathfrak{M}(r, \varphi_\lambda)$$

co znowu jest bezpośredniem następstwem definicyi (9), a co znaczy:

III. *Średnia na okręgu* (r) *z funkcyi przedstawiającej się jako suma skończonej lub nawet nieskończonej liczby funkcyj* φ_λ *regularnych w pierścieniu* $(R_1 \ldots R_2)$ *jest równa sumie średnich z wszystkich swych dodajników* φ_λ.

202. Twierdzenie Laurent'a. Po tem określeniu i zestawieniu własności średniej: $\mathfrak{M}(r, f)$, przejdźmy do utworzenia arytmetycznego wyrażenia, któreby właśnie funkcyę $f(x)$ regularną we wszystkich punktach wewnątrz pierścienia $(R_1 \ldots R_2)$ przedstawiać miało.

W tym celu zauważmy dwie dodatnie, rzeczywiste ilości $r_1 < r_2$ takie, że:

(1) $$R_1 < r_1 < r_2 < R_2$$

i wybierzmy pewien oznaczony punkt x_0 o bezwzględnej wartości $|x_0|$ spełniającej nierówność:

(2) $$r_1 < |x_0| < r_2.$$

Dana funkcya $f(x)$ będzie się oczywiście także i w obszarze:

(3) $$r_1 \leqq |x| \leqq r_2$$

zachowywać regularnie. Lecz takiego samego zachowania się będzie w tym obszarze (3) także i funkcya:

(4) $$\varphi(x)=x.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Że się tak rzecz ma w każdym punkcie $x' \neq x_0$ obszaru (3) nie ulega wątpliwości. W otoczeniu zaś samego punktu x_0 mamy:

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu, \quad \text{a więc}$$

$$\varphi(x)=x.\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^{\nu-1},$$

co również na regularność funkcyi $\varphi(x)$ w punkcie x_0 wskazuje.

Obszar (3) jest pierścieniem $(r_1 \ldots r_2)$ wraz z ograniczającymi go okręgami (r_1), (r_2), a że na nich $\varphi(x)$ jest również regularną, więc mieć będziemy:

$$\mathfrak{M}(r_2, \varphi(x))=\mathfrak{M}(r_1, \varphi(x)),$$

czyli:

$$\mathfrak{M}\left(r_2, x.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=\mathfrak{M}\left(r_1, x.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right),$$

czyli wreszcie:

$$(5)\quad \begin{aligned}&\mathfrak{M}\left(r_2, \frac{xf(x)}{x-x_0}\right)-f(x_0)\,\mathfrak{M}\left(r_2, \frac{x}{x-x_0}\right)=\\ &=\mathfrak{M}\left(r_1, \frac{xf(x)}{x-x_0}\right)-f(x_0)\,\mathfrak{M}\left(r_1, \frac{x}{x-x_0}\right).\end{aligned}$$

Lecz — gdy $|x|=r_2>|x_0|$, a takie x mamy po pierwszej stronie w (5) — to:

$$\frac{x}{x-x_0}=\frac{x}{x\left(1-\frac{x_0}{x}\right)}=1+\frac{x_0}{x}+\frac{x_0{}^2}{x^2}+\ldots=\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

a stąd wynika, że:

$$(a)\quad \mathfrak{M}\left(r_2, \frac{x}{x-x_0}\right)=\lim_{p=\infty}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}, 2^p\right)=1.$$

Po drugiej stronie w (5) mamy $|x|=r_1<|x_0|$, a więc:

$$\frac{x}{x-x_0}=-\frac{x}{x_0\left(1-\frac{x}{x_0}\right)}=-\frac{x}{x_0}-\frac{x^2}{x^2_0}-\ldots=\mathfrak{P}_1(x).$$

Stąd:

$$(b)\quad \mathfrak{M}\left(r_1, \frac{x}{x-x_0}\right)=\lim_{p=\infty}\mathfrak{P}_1(x, 2^p)=0.$$

Wskutek wartości (a), (b) przybierze relacya (5) teraz taką postać:

$$(6)\quad f(x_0)=\left(r_2, \frac{xf(x)}{x-x_0}\right)-\mathfrak{M}\left(r_1, \frac{xf(x)}{x-x_0}\right).$$

W pierwszem $\mathfrak{M}$ mamy $|x|=r_2>|x_0|$, a więc:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\left(r_2, \frac{xf(x)}{x-x_0}\right)&=\mathfrak{M}\left(r, f(x)+\frac{f(x)}{x}x_0+\frac{f(x)}{x^2}x_0{}^2+\ldots\right)\\ &=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\mathfrak{M}(r, f(x).x^{-\lambda})\,x_0{}^{\lambda}\quad \text{[tw. II., III. art. poprz.]}\end{aligned}$$

W drugiem $\mathfrak{M}$ jest przeciwnie $|x|=r_1<|x_0|$, a więc:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\left(r_1, \frac{xf(x)}{x-x_0}\right)&=\mathfrak{M}\left(r_1, -f(x)\,x.\frac{1}{x_0}-f(x)\,x^2.\frac{1}{x^2_0}-\ldots\right)=\\ &=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\mathfrak{M}(r_1, f(x).x^{\lambda}).x_0{}^{-\lambda}.\end{aligned}$$

W miejsce więc (6) mieć teraz będziemy:

$$(7)\quad f(x_0)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\mathfrak{M}(r_2, f(x).x^{-\lambda})\,x^{\lambda}{}_0+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\mathfrak{M}(r_1, f(x).x^{\lambda})\,x_0{}^{-\lambda}.$$

Lecz r_1 możemy dowolnie zbliżyć do R_1, *a* r_2 dowolnie do R_2; x_0 wtedy będzie dowolnym punktem x w pierścieniu $(R_1 \ldots R_2)$.

Dalej — wskutek niezależności średnich $\mathfrak{M}$ od r_1, r_2 — można w (7) zamiast kół (r_1), (r_2) użyć w obydwu $\mathfrak{M}$ jednego wspólnego koła (r). Wskutek tego dostaniemy (7) w postaci:

$$f(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{M}(r, f(x) \,.\, x^{-\lambda})\, x^{\lambda} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda}\, x^{\lambda} \tag{8}$$

jeżeli $\mathfrak{M}(r, f(x) \,.\, x^{-\lambda}) = a_{\lambda}$, a

$$R_1 < |x| < R_2$$

w którym-to obszarze jest szereg $\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\lambda} x^{\lambda}$ zbieżnym. W (8) mamy już żądane arytmetyczne wyrażenie przedstawiające funkcyę $f(x)$ w pierścieniu $(R_1 \ldots R_2)$, a stąd twierdzenie Laurent'a*).

I. *Funkcya analityczna $f(x)$ zachowująca się regularnie wewnątrz pierścienia $(R_1 \ldots R_2)$ rozwija się na szereg potęgowy $P(x)$ zbieżny wewnątrz tego pierścienia.*

Gdy pierścień $(R_1 \ldots R_2)$ będzie miał punkt $c \neq 0$ za środek, to formę (8) zastąpi:

$$f(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} c^{\lambda} (x-c)^{\lambda}. \tag{9}$$

Połóżmy:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda} (x-c)^{-\lambda} = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x-c}\right), \quad \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} (x-c)^{\lambda} = \mathfrak{P}_2(x-c)$$

to mieć będziemy:

$$f(x) = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x-c}\right) + \mathfrak{P}_2(x-c), \tag{10}$$

---

*) Por. sprawozdanie Cauchy'ego o pracy Laurent'a p. t. *„Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable x"*. *Comptes Rendus* T. 17. str. 938. (1843).

Por. także. Mittag-Leffler *„Demonstration nouvelle du théorème de Laurent"* *Acta math.* T. 4. str. 80.

Schaeffer *„Beweis des Laurent'schen Satzes"* *Acta mathematica*. T. 4. str. 375. (1887).

W tekście obrano najprostszy elementarny dowód, jaki dotychczas istnieje, a który zawdzięczamy A. Pringsheim'owi. Podał go w rozprawie *„Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen"* — *Mathematische Annalen* T. 47. str. 121. (1896).

gdzie przytem dla $|x-c|>R_1$ jest szereg $\mathfrak{P}_1$ a dla $|x-c)<R_2$ jest szereg $\mathfrak{P}_2$ zbieżnym, jakkolwiek te zakresy nie potrzebują być ich prawdziwymi zakresami zbieżności, a więc $f(x)$ może się jeszcze zachowywać regularnie i na punktach koła (R_1) i na punktach koła (R_2).

Przyjmijmy w szczególności $R_1=0$ i załóżmy, że się $f(x)$ jeszcze i w punkcie c regularnie zachowuje. W takim razie musi być identycznie $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x-c}\right)=0$ a funkcya $f(x)$ wyraża się wprost szeregiem potęgowym $\mathfrak{P}_2(x-c)$, który wewnątrz (R_2) jest niezawodnie zbieżny.

Gdy naodwrót przy tworzeniu sumy (10) wypadnie identycznie $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x-c}\right)=0$, to $f(x)$ jest regularnego zachowania się nietylko w otoczeniu punktu c, ale i w samym punkcie c.

203. Punkta nieskończonościowe i istotnie osobliwe. Przypadek, w którym $R_1=0$, a w punkcie $x=c$ funkcya $f(x)$ nie zachowuje się już regularnie jest bardzo doniosłego znaczenia. Dla otoczenia punktu c nie istnieje szereg potęgowy, a więc $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x-c}\right)$ nie ma być identycznie zerem. Lecz $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x-c}\right)$ ma być zbieżnym szeregiem dla $|x-c|>0$, a to wskazuje, że $\mathfrak{P}_1$ jest bezustannie zbieżnym szeregiem argumentu $\frac{1}{x-c}$, albo (w szczególności) funkcyą całkowitą wymierną tego argumentu.

Połóżmyż w tym razie $\mathfrak{P}_1=G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ to mamy tu:

$$f(x)=G\left(\frac{1}{x-c}\right)+\mathfrak{P}_2(x-c), \tag{1}$$

gdzie $\mathfrak{P}_2(x-c)$ ma promień zbieżności R_2, który — tak naprzód zakładamy — nie ma być nieskończenie mały.

Taki punkt c jest oczywiście osobliwym funkcyi $f(x)$, a poza nim w pewnem skończonem otoczeniu (R_2) zachowuje się $f(x)$ już regularnie.

Punkt c, jeżeli G jest całkowitą wymierną funkcyą argumentu $\frac{1}{x-c}$, nazywa się nieistotnie szczególnym, albo nieskończonościowym punktem (we Francyi zwą go biegunem *(pôle)*.

W razie gdy G jest bezustannie zbieżnym szeregiem argumentu $\frac{1}{x-c}$, punkt c nazywamy istotnie osobliwym.

Gdy w pierwszym razie jest:

$$G = c'_m(x-c)^{-m} + c'_{m+1}(x-c)^{-m+1} + \ldots + c'_1(x-c)^{-1}, \tag{2}$$

to widocznie $(x-c)^m f(x)$ wyrazi się zwykłym już szeregiem potęgowym o wolnym wyrazie $c'_m \neq 0$. Znajdujemy więc tu w szeregu liczb 1, 2, 3,... taką liczbę skończoną m, że iloczyn $(x-c)^m f(x)$ dla $x=c$ ma wartość skończoną i różną od zera. Taki punkt c nazywamy dokładniej nieskończonościowym m-krotnym, albo stopnia m. O samej funkcyi $f(x)$ mówimy, że się ona w punkcie c staje nieskończonością m-krotnie (albo w $m$tym stopniu).

W drugim razie, kiedy G jest bezustannie zbieżnym szeregiem argumentu $\frac{1}{x-c}$, liczby m o wyrażonej wyżej własności nie znajdziemy.

Gdy $f(x)$ jest funkcyą jednoznaczną, to i w otoczeniu punktu c jest taką, a temu już zadość czyni forma (1). Dlatego-to w razie jednoznaczności funkcyi $f(x)$ innych punktów c o jej nieregularnem w nich — a regularnem w ich otoczeniu — zachowaniu się, jak te, któreśmy wyżej określili, z pewnością nie znajdziemy.

Z tych uwag wynika:

I. *Dla jednoznacznej funkcyi $f(x)$, która się w skończonem najbliższem otoczeniu punktu c zachowuje regularnie, ale w samym punkcie c już jest nieregularną, jest punkt c albo punktem nieistotnie osobliwym, albo istotnie osobliwym [tertium non datur].*

Gdy $f(x)$ posiada punkt c, jako nieskończonościowy $m$go stopnia, to odwrotność: $\frac{1}{(x-c)^m f(x)}$, jako odwrotność szeregu potęgowego o wolnym wyrazie $\neq 0$, da się rozwinąć na szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x-c)$, który również posiadać będzie wolny wyraz $\neq 0$.

Z równania:

$$\frac{1}{(x-c)^m f(x)} = \mathfrak{P}(x-c),$$

dostajemy:

$$\frac{1}{f(x)} = (x-c)^m \mathfrak{P}(x-c),$$

a stąd wynika:

II. *Każdy punkt nieskończonościowy* m^{go} *stopnia funkcyi* $f(x)$ *jest zerowym tegoż stopnia* m *dla odwrotności* $\frac{1}{f(x)}$.

To twierdzenie daje się oczywiście także odwrócić, tak, że punkt nieskończonościowy m^{go} stopnia w ten sposób można zdefiniować:

III. *Gdy* $[f(x)]^{-1}$ *staje się w punkcie* c *zerem* m*-krotnie, to* c *jest punktem nieskończonościowym stopnia* m *funkcyi* $f(x)$.

204. Zachowanie się funkcyi w otoczeniu punktu istotnie osobliwego. Punkt istotnie osobliwy mamy dotąd tylko formalnie określony, jako taki, w otoczeniu którego:

$$(1) \qquad f(x)=G\left(\frac{1}{x-c}\right)+\mathfrak{P}_2(x-c)=\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} c_\lambda(x-c)^\lambda$$

z bezustannie zbieżnym szeregiem G. Promień zbieżności R_2 szeregu $\mathfrak{P}_2(x-c)$ nie ma być dowolnie mały. Aby zachowanie się funkcyi w takim punkcie poznać, okażemy naprzód:

I. *W pewnem dowolnie małem otoczeniu punktu* c *przyjmuje* $f(x)$ *— między innemi — także i wartości dowolnie wielkie.*

Niech $|x-c|=\varrho<R_2$, a $|f(x)|$ na kole (ϱ) niech posiada największą wartość g. Wtedy [art. 163.]:

$$g\geqq|c_\lambda|\varrho^\lambda, \quad \lambda=-\infty\ldots+\infty.$$

Zauważmy ujemne $\lambda=-l$, to zmniejszając dowolnie ϱ, możemy

$$|c_{-l}|\varrho^{-l}$$

uczynić w i ę k s z e m od dowolnie dużej dodatniej ilości g_1.

Mamy więc:

$$g\geqq|c_{-l}|\varrho^{-l}>g_1,$$

przez co już twierdzenie I. udowodniono.

Gdy γ jest znowu najmniejszą wartością $|f(x)|$ na kole (ϱ), to mamy:

$$\gamma\leqq|c_\lambda|\varrho^\lambda, \quad \lambda=-\infty\ldots+\infty.$$

Gdy $\mathfrak{P}_2(x-c)$ nie jest identycznie zerem, to przy każdem skończonem $\lambda>0$ możemy $\varrho=|x-c|$ obrać tak małe, że $|c_\lambda|\varrho^\lambda$ okaże się mniejsze od obranej, dowolnie małej, dodatniej ilości γ_1.

Mamy więc:

$$\gamma<|c_\lambda|\varrho^\lambda<\gamma_1.$$

Przyjmijmy, że $\mathfrak{P}_2(x-c)$ jest identycznie $=0$. Wiemy [por. uwagę w art. 181.], że w szeregu G dążą spółczynniki jego do granicy $lim\,|c_\lambda|=0$.

Niechżeż ϱ będzie dowolnie małą ilością >0, to można będzie zawsze obrać ujemne $\lambda = -l$, o tak wielkiej bezwzględnej wartości, że iloczyn $|c_{-l}|\varrho^{-l}$ okaże się mniejszem od dowolnie małej obranej dodatniej ilości γ_1. Mamy więc i tu:

$$\gamma < |c_{-l}|\varrho^{-l} < \gamma_1,$$

a stąd wynika:

II. *Funkcya $f(x)$ w dowolnie małem otoczeniu punktu c przyjmuje między innemi także i wartości dowolnie zbliżające się do zera.*

Funkcya $f(x) - A$, gdzie A jest dowolną, skończoną wielkością,*) będzie w otoczeniu punktu c miała również własność, określoną w tw. II., a stąd znowu wynika:

III. *Funkcya $f(x)$ w pewnem dostatecznie małem otoczeniu punktu c przybliża się dowolnie także do każdej dowolnie obranej skończonej wartości.*

Własności określone w tw. I., II., III. nazwiemy charakterystycznemi dla punktu istotnie osobliwego.

Lecz w szczególnych wypadkach dołącza się do tych trzech własności jeszcze własność nowa.

I^0. Przyjmijmy, że jednoznaczna funkcya $f(x)$ przybiera na nieskończonej — ale nie wszędzie gęstej — mnogości miejsc tę samą skończoną wartość A', $|A'| \geqq 0$.

Punkta skupienia $c, c', c'', \ldots$ tych miejsc nie mogą należeć do punktów regularnego zachowania się funkcyi, gdyż (według art. 182., tw. II.) żaden szereg potęgowy nie może przybierać tej samej wartości na nieskończenie wielu miejscach we wnętrzu swego zakresu zbieżności. Jeden taki punkt weźmy pod uwagę. Nie może on być ani miejscem regularnego zachowania się funkcyi, ani jej miejscem nieskończonościowem. Musi więc być — według właściwości funkcyi jednoznacznej — jej punktem istotnie osobliwym. Funkcya $f(x)$, posiadając tu trzy charakterystyczne własności — przybiera jeszcze w nieskończenie małem otoczeniu punktu c wartość A' nieskończenie wiele razy.

II^0. Może się zdarzyć, że punkt c jest miejscem skupienia kilku różnych mnogości miejsc $M, M', M'', \ldots$ (nie mających miejsc wspólnych), a na nich $f(x)$ przybiera odpowiednio wartości skończone: $A, A', A'', \ldots$ Punkt c jest oczywiście i tu istotnie osobliwym, a funkcya w nieskończenie małem jego otoczeniu przybiera na nieskończenie wielu punktach już-to tęsamą wartość A, już-to tę samą wartość A' i t. d.

---

*) A łączymy z wolnym wyrazem funkcyi $f(x)$.

Rozbierzemy teraz taki wypadek, w którym forma (1), art. 203., już nie istnieje, jakkolwiek punkt c do istotnie osobliwych zaliczyć trzeba.

Oto przyjmijmy, że $f(x)$ będąc jednoznaczną funkcyą posiada nieskończenie wiele (ale znowu nie wszędzie gęsto rozłożonych) punktów osobliwych ξ_ν. Jeden z ich punktów skupienia — nazywając go c — weźmy pod uwagę. Z punktu c jako środka można będzie zatoczyć nieskończenie dużo, ciągle się zmniejszających i zwężających pierścieni α, β, γ, ..., (fig. 53.), o tej własności, że we wnętrzach ich można będzie $f(x)$ wyrażać formami:

$$\mathfrak{P}_\alpha\left(\frac{1}{x-c}\right)+\mathfrak{P}'_\alpha(x-c)$$

$$\mathfrak{P}_\beta\left(\frac{1}{x-c}\right)+\mathfrak{P}'_\beta(x-c)$$

$$\mathfrak{P}_\gamma\left(\frac{1}{x-c}\right)+\mathfrak{P}'_\gamma(x-c)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

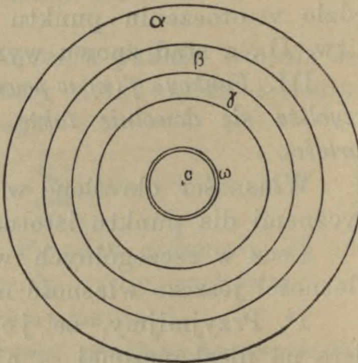


Fig. 53.

W nieskończenie już małem i wąskim pierścieniu ω przedstawia się funkcya formą:

$$\mathfrak{P}_\omega\left(\frac{1}{x-c}\right)+\mathfrak{P}'_\omega(x-c), \tag{2}$$

w której szereg $\mathfrak{P}_\omega\left(\frac{1}{x-c}\right)$ jest już bardzo mało różny od szeregu bezustannie zbieżnego o argumencie $(x-c)^{-1}$, a szereg $\mathfrak{P}'_\omega(x-c)$ ma nieskończenie mały zakres zbieżności. Do funkcyi przedstawionej formą (2) można zastosować wszystkie uwagi, na podstawie których doszliśmy do twierdzeń I., II., a potem do tw. III., a więc funkcya $f(x)$ posiada tu własności charakteryzujące jej punkt istotnie osobliwy i dlatego punkt c i tu do takich zaliczyć trzeba, jakkolwiek ta funkcya nie posiada w bezpośedniem otoczeniu punktu c formy (1), art. 203., [W (2) dochodzimy do pierścienia, okalającego bezpośrednio punkt c, gdy $\omega=\infty$, ale wtedy $\mathfrak{P}'_\infty(x-c)$ jest rozbieżnym szeregiem.

Gdy miejsca ξ_ν są bez wyjątku nieskończonościowemi, to $f(x)$ — posiadając własności charakterystyczne — staje się jeszcze w otoczeniu punktu c nieskończenie wiele razy nieskończonością.

Z tych wszystkich uwag wynika:

IV. *Czemkolwiekbądź spowodowany punkt istotnie osobliwy c — [czy-to formą funkcyi w jego otoczeniu, czy skupieniem nieskończonej mnogości miejsc, dających tę samą wartość funkcyi* $=0$ *lub* $\neq 0$, *jej miejsc nieskończonościowych, lub wreszcie, bez różnicy, jej miejsc osobliwych] — posiada dwie, nigdy niezawodzące definicye a to: 1) W szeregu liczb* 1, 2, 3, ... *niema liczby skończonej* m, *którąby dała* $[(x-c)^m f(x)]_{x=c}$ *o wartości skończonej i różnej od zera. 2) W otoczeniu punktu c funkcya swojemi wartościami do każdej najdowolniejszej wartości dowolnie przybliżyć się może.*

Z tej drugiej definicyi możemy odrazu wywnioskować:

V. *Punkt istotnie osobliwy funkcyi* $f(x)$ *będzie również takim punktem i dla funkcyj* $\frac{1}{f(x)}$, $\frac{1}{f(x)-A}$, *gdzie A jest ilością skończoną i różną od zera* *)

Uwaga. Gdy $R_1>0$, $R_1<R_2$, a funkcya w pierścieniu $(R_1 ... R_2)$ ma postać:

$$f(x)=\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x-c}\right)+\mathfrak{P}_2(x-c), \tag{3}$$

ale już dla wszystkich x, leżących w kole (R_1), nie można funkcyi przedstawić żadną taką formą, jak (3), to wtedy funkcya $f(x)$ posiada w kole (R_1) takie właściwości: albo 1^0 ma próżnię PQ, w której punkt c (choćby na jej ograniczeniu) leży, a która ograniczeniem swem przynajmniej w jednym punkcie dotyka obwodu (R_1) [fig. 54.], albo 2^0) przez punkt c przechodzi linia pq o wszędzie gęstej mnogości punktów szczególnych, zawarta całkowicie w (R_1), a opierająca się przynajmniej jednym swym końcem o okrąg (R_1).

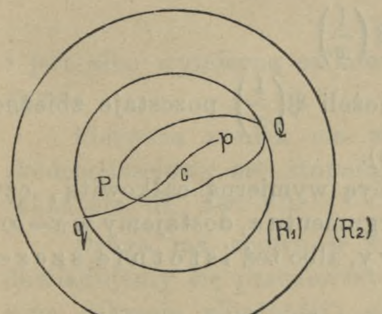


Fig. 54.

Gdy taka linia, przechodząca przez punkt c, albo próżnia mieszcząca w sobie ten punkt, rozciąga się aż w nieskończoność, to funkcyi $f(x)$ w żaden sposób żadną taką formą, jak (3), nie można będzie przedstawić.

Gdy w wszystkich tych powyższych wypadkach punkt c nie leży wewnątrz próżni, ale: albo na jej ograniczeniu, albo na linii pq, to jest istotnie szczególnym.

205. Punkt osobliwy: $x=\infty$. Z art. 33., tw. I. wiadomo, że gdy $c=\infty$, to za $(x-c)_{c=\infty}=(x-\infty)$ położyć trzeba $\frac{1}{x}$. Gdy więc $f(x)$

*) Weierstrass był pierwszym, który istotę punktu istotnie osobliwego poznał i należycie określił. Por. także rozprawę O. Höldera: *„Beweis des Satzes..."* *Math. Annalen*, T. 20, str. 138—143.

ma być funkcyą regularną w otoczeniu punktu w nieskończoności i w samym punkcie $x=\infty$, to jej formą dla tego otoczenia będzie:

(1) $$f(x)=c_0+c_1\frac{1}{x}+c_2\frac{1}{x^2}+\ldots=\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

a w obszarze zbieżności $|x|>r$ tego szeregu jest $f(x)$ regularną. Obszar $|x|>r$ przedstawia tu otoczenie punktu $x=\infty$, co zgodne jest z tem, co się o tem w art. 38., tw. II. powiedziało, że na otoczenie takie składają się wszystkie punkta, leżące poza pewnem, dostatecznie dużem kołem, mającem środek w $x=0$. Wielkość tego koła jest tu tem określona, że — jeżeli funkcya w jego wnętrzu jeszcze istnieje — to w tem wnętrzu mają się mieścić wszystkie jej punkta szczególne.

Jeżeli $f(x)$ ma mieć punkt szczególny w nieskończoności, ale w bezpośredniem jego otoczeniu zachowuje się regularnie, to w tem otoczeniu przedstawimy funkcyę, gdy w formie:

$$G\left(\frac{1}{x-c}\right)+\mathfrak{P}(x-c)$$

za $(x-c)$ położymy $(x-\infty)=\frac{1}{x}$. Mieć więc będziemy:

(2) $$f(x)=G(x)+\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

z obszarem zbieżności: $r<|x|<\infty$, jeżeli $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ pozostaje zbieżne dla $|x|>r$ (G zaś zawsze dla $|x|<\infty$).

Według tego, czy G jest funkcyą wymierną całkowitą, czy też bezustannie zbieżnym szeregiem argumentu x, dostajemy w $x=\infty$, albo punkt nieskończonościowy, albo też istotnie szczególny.

Połóżmy w pierwszym razie wyraźnie:

$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1 x+c_0+c_1\frac{1}{x}+c_2\frac{1}{x^2}+\ldots,$$

to stąd dostajemy:

(3) $$\frac{1}{x^m}f(x)=a_m+a_{m-1}\frac{1}{x}+\ldots+a_1\frac{1}{x^{m-1}}+c_0\frac{1}{x^m}+c_1\frac{1}{x^{m+1}}+\ldots,$$

a to wskazuje — podług (1) — że już ten iloczyn zachowuje się regularnie w nieskończoności (i jest skończonej wartości, różnej od zera w $x=\infty$). Taki punkt nieskończonościowy nazywamy i tu m^{go} stopnia.

Gdy przeciwnie G będzie bezustannie zbieżnym szeregiem, to liczby m, określonej równaniem (3), nie znajdziemy.

Punkt $x=\infty$ jest wtedy istotnie szczególnym; może on być przytem punktem skupienia jednej lub kilku mnogości miejsc, na której się ta sama wartość funkcyi powtarza.

Takiem samem wreszcie rozumowaniem, co o punkcie c wywnioskujemy i tu, że punkt $x=\infty$ będąc punktem skupienia nieskończenie wielu punktów szczególnych, jest istotnie szczególnym, a i tu liczba m, dająca regularne rozwinięcie (3), nie istnieje. Z tych uwag wynika:

I. *Gdy $x=\infty$ nie jest regularnym punktem funkcyi jednoznacznej $f(x)$, ani nie leży w jej próżni, to jest: albo jej punktem nieskończonościowym, albo istotnie szczególnym. Pierwszym jest wtedy, gdy istnieje liczba całkowita $m>0$, dająca w iloczynie $x^{-m}f(x)$ wartość skończoną i różną od zera — punktem zaś drugim, gdy taka liczba m nie istnieje. Co się tyczy zachowania się funkcyi w dowolnej bliskości punktu istotnie szczególnego $x=\infty$, to jest ono takie same, jak w otoczeniu takiegoż punktu, leżącego w skończoności.*

Uwagi godnym jest wypadek, kiedy w (1) mamy $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ identycznie $=0$. Wtedy widocznie funkcya:

$$f(x)=G(x)$$

i jest albo wymierną całkowitą, albo szeregiem bezustannie zbieżnym.

Pierwsza z nich ma według (3) i według tw. I. punkt nieskończonościowy m^{go} stopnia, jeżeli $G=C_0x^m+C_1x^{m-1}+\ldots+C_m$ (por. także art. 51., tw. V.).

Druga ma znowu w $x=\infty$ punkt istotnie osobliwy. Z tego dowiadujemy się przedewszystkiem, że nietylko szeregi o skończonym zakresie zbieżności, ale także szeregi bezustannie zbieżne posiadają (na okręgu zbieżności) punkt osobliwy.

Punkta szczególne są więc tak konieczną właściwością funkcyj analitycznych (jednoznacznych i wieloznacznych), że możemy wypowiedzieć bardzo ważne w następstwie twierdzenie:

II. *Funkcya analityczna nie posiadająca ani jednego punktu osobliwego musi się zredukować do stałej ilości.*

Wiadomo dalej, że żaden szereg potęgowy nie może posiadać w swym zakresie zbieżności stałej wartości c na wszystkich punktach pewnego — choćby bardzo małego *continuum*. Z tego powodu wnioskujemy:

III. *Taka analityczna funkcya, która przybiera statecznie tę samą wartość c w dowolnie małym zwartym obszarze (choćby na wszystkich punktach bardzo małego odcinka) swego argumentu x redukuje się do stałej c.*

206. Charakterystyczne własności funkcyi wymiernej. Funkcya przestępna. Wróćmy do bezustannie zbieżnego szeregu. Jest on dla wszelkich skończonych x regularnym, ma więc w punktach leżących w skończoności wszystkie własności funkcyi wymiernej całkowitej. Jedynie w nieskończoności zachodzi między nim a funkcyą wymierną całkowitą różnica. Ma on tam bowiem punkt istotnie szczególny, podczas gdy funkcya wymierna całkowita ma tam tylko punkt nieskończonościowy. Z tego powodu nazywać będziemy każdą funkcyę analityczną określoną szeregiem bezustannie zbieżnym (a więc jednoznaczną) całkowitą przestępną funkcyą.

Przy tej sposobności wspomnieć trzeba, że funkcyę określoną sumą:

$$G_1(x)+G_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

w której G_1, G_2 są szeregami bezustannie zbieżnymi nazywają całkowitą przestępną funkcyą w szerszem znaczeniu*). Jest ona wszędzie regularną z wyjątkiem punktów $x=0$, $x=\infty$, które są jej miejscami istotnie szczególnemi.

Istnienie tylko jednego punktu szczególnego i to nieskończonościowego w $x=\infty$ jest tak charakterystyczną własnością funkcyi wymiernej całkowitej, że da się udowodnić:

I. *Funkcya posiadająca tylko jeden punkt osobliwy i to nieskończonościowy w $x=\infty$ jest wymierną całkowitą funkcyą.*

Wskutek bowiem regularności funkcyi dla wszelkich skończonych x można ją w otoczeniu punktu $x=0$ przedstawić szeregiem zbieżnym dla wszelkich skończonych x. Lecz ten szereg nie może być bezustannie zbieżnym, bo wtedy funkcya posiadałaby w $x=\infty$ punkt istotnie osobliwy. Musi się więc ten szereg redukować do funkcyi wymiernej całkowitej, bo ta jedna pozostaje tu możliwość.

Analogicznie łatwo udowodnić:

II. *Funkcya posiadająca jedyny tylko punkt szczególny i to istotnie osobliwy w $x=\infty$ jest funkcyą przestępną całkowitą.*

---

*) O. Rausenberger. *„Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabelen“.* [Lipsk. 1884]. str. 133.

Nie tylko funkcye wymierne całkowite, ale także i funkcye wymierne ułamkowe pozbawione są — jak nam to dobrze wiadomo [art. 61.] — punktów istotnie osobliwych, a posiadają skończoną tylko ilość punktów nieskończonościowych.

Przyjmijmy naodwrót, że dana jest funkcya jednoznaczna $f(x)$ bez punktów istotnie szczególnych, a z miejscami nieskończonościowemi:

$$(\alpha) \qquad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

leżącemi w skończoności, a o stopniach:

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n.$$

[Ta okoliczność, że $f(x)$ nie ma posiadać punktów istotnie szczególnych wyklucza możliwość, aby miejsc (α) było nieskończenie dużo].

Zauważmy iloczyn:

$$f(x)(x-b_1)^{\nu_1}(x-b_2)^{\nu_2}\ldots(x-b_n)^{\nu_n}.$$

Jest on widocznie już regularnym i w punktach $b_1, b_2, \ldots, b_n$; a że dla skończonych x, różnych od $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachowuje się także regularnie, więc przedstawia funkcyę regularną w całym obszarze skończonych x, a bez punktu istotnie osobliwego (wskutek założenia) nawet w nieskończoności. Taka funkcya może być tylko wymierną całkowitą $g(x)$, [w szczególności może być ilością stałą], a stąd wynika:

$$f(x)=\frac{g(x)}{(x-b_1)^{\nu_1}(x-b_2)^{\nu_2}\ldots(x-b_n)^{\nu_n}}.$$

Mamy więc twierdzenie:

III. *Każda jednoznaczna analityczna funkcya $f(x)$ nie posiadająca wcale punktów istotnie osobliwych jest wymierną funkcyą (całkowitą, lub ułamkową).*

To twierdzenie wysłowiają jeszcze inaczej, a mianowicie:

IV. *Funkcya analityczna posiadająca charakter funkcyi wymiernej, jest wymierną.*

Ta okoliczność jest niesłychanie ważna.

Z niej bowiem wynika, że *wszystkie jednoznaczne analityczne funkcye podzielić można na: 1) funkcye wymierne i 2) funkcye nieposiadające charakteru funkcyj wymiernych, mające zatem przynajmniej jeden punkt istotnie osobliwy, zwane powszechnie funkcyami przestępnemi.*

207. Charakterystyka funkcyi podług jej wartości. Każda funkcya wymierna przybiera — jak wiadomo i wartość zero i wartość nieskończoną. Co się tyczy funkcyi przestępnej jednoznacznej $f(x)$, to — nie wdając się w rozbiór jej zachowania się w regularnym zakresie i nie badając, czy posiada punkta nieskończonościowe, lub nie — znajdziemy w otoczeniu każdego jej punktu istotnie szczególnego i wartość $|f(x)|=\infty$ i wartość $|f(x)|=0$. Z tego wynika:

I. *Każda jednoznaczna analityczna funkcya musi w skończoności lub nieskończoności stawać się zerem.*

II. *Każda jednoznaczna analityczna funkcya musi w skończoności, lub nieskończoności stawać się nieskończonością**).

III. *Funkcya analityczna jednoznaczna nie posiadająca wartości zero, albo wartości ∞ w punkcie x leżącym w skończoności lub nieskończoności, nie istnieje.*

Zauważmy funkcyę $\varphi(x)=f(x)-c$, gdzie c dowolną skończoną jest wielkością $\neq 0$. Do $\varphi(x)$ odnosi się również twierdzenie I., a z tego wynika:

IV. *Każda jednoznaczna analityczna funkcya musi przynajmniej raz, czy to dla skończonego x, czy też dla $x=\infty$, przybierać dowolnie daną wartość.*

208. Punkta istotnie i nieistotnie osobliwe analitycznych funkcyj wielu zmiennych. Definicye i twierdzenia art. poprzedzających dadzą się w ten sposób przenieść do teoryi funkcyj analitycznych wielu zmiennych**).

Gdy $(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n)$, jest miejscem o wszystkich spółrzędnych skończonych w obszarze n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a w jego otoczeniu pewna analityczna funkcya $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ daje się rozwinąć na szereg potęgowy:

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n)$$

zbieżny w obszarze:

$$(2) \qquad |x_1-a_1|<r_1,\ |x_2-a_2|<r_2, \ldots, |x_n-a_n|<r_n,$$

to mówimy, że miejsce $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ wraz z swem otoczeniem (2) należy do regularnego zakresu funkcyi.

---

*) To twierdzenie przypisują Liouville'owi por. *Théorie des fonctions elliptiques"* por. Briot *et* Bouquet. (Paryż 1875.) str. 205. Por. także *„Theory of functions of a complex variable" by* A. R. Forsyth (Cambridge 1893) str. 63—64.

**) S. Dautheville. *„Etude sur les séries entières per rapport à plusieurs variables imaginaires indepéndentes — Annales (scient.) de lécole normale superieure.* T. II. (Supplement) str. 3.

Gdy niektóre, lub wszystkie ze spółrzędnych $a_1, a_2, ..., a_n$ są nieskończonościami a więc n. p. $a_1 = a_2 = ... = a_s = \infty$, $s \leqq n$, to regularne zachowanie się funkcyi na takiem miejscu określi rozwinięcie:

$$(3) \qquad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_s}, x_{s+1} - a_{s+1}, ..., x_n - a_n\right)$$

o pewnym zakresie zbieżności:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &|x_1| > \varrho_1, \ |x_2| > \varrho_2, ..., |x_s| > \varrho_s, \\ &|x_{s+1} - a_{s+1}| < r_{s+1}, ..., |x_n - a_n| < r_n. \end{aligned}$$

Jeżeli przeciwnie rozwinięciem (1) lub (3) niemożna określić funkcyi, to miejsce:

$$(a) \qquad (a_1, a_2, ..., a_n),$$

a względnie:

$$(b) \qquad (\infty, \infty, ..., \infty, a_{s+1}, a_n), \quad s \leqq n,$$

nazywamy osobliwem.

A. Miejsce szczególne (*a*) nazywamy nieistotnie szczególnem, jeżeli można znaleść pewien szereg potęgowy:

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$$

o tej własności, że $\mathfrak{P}_1(0, 0, ..., 0) = 0$ i że iloczyn:

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) . f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

okazuje się szeregiem potęgowym o samych dodatnich wykładnikach argumentów $(x_1 - a_1)$, ..., $(x_n - a_n)$.

B. Analogicznie miejsce (*b*) uznajemy za nieistotnie szczególne, jeżeli można znaleść szereg potęgowy:

$$\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_s}, x_{s+1} - a_{s+1}, ..., x_n - a_n\right)$$

o tej własności, że $\mathfrak{P}_1(0, 0, ..., 0) = 0$ i że iloczyn:

$$\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_s}, x_{s+1} - a_{s+1}, ..., x_n - a_n\right) f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

okazuje się szeregiem potęgowym o samych wykładnikach dodatnich w argumentach:

$$\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_s}, (x_{s+1} - a_{s+1}), ..., (x_n - a_n), \quad s \leqq n.$$

W szczególności mogą już szeregi $\mathfrak{P}_1$ o skończonej formie, a więc całkowite wymierne funkcye dopełnić żądanego warunku.

Gdy przeciwnie nie można w otoczeniu miejsca (*a*) lub (*b*) znaleść szeregu $\mathfrak{P}_1$ o określonej własności, to takie miejsca (*a*), (*b*) nazywamy istotnie szczególnemi, albo istotnie osobliwemi.

209. Punkta osobliwe funkcyi wymiernej całkowitej lub ułamkowej wielu zmiennych. Po tych definicyach zauważmy przedewszystkiem wymierną całkowitą funkcyę $G(x_1, x_2, ..., x_n)$. Każdy punkt $(a_1, a_2, ..., a_n)$, leżący w skończoności, jest niezawodnie jej punktem regularnym [art. 71.]. Weźmyż pod uwagę miejsce (b). Przeprowadziwszy G do otoczenia miejsca $x_1=0$, $x_2=0$, ..., $x_s=0$, $x_{s+1}=a_{s+1}$, ..., $x_n=a_n$, dostaniemy:

$$G(x_1, x_2, ..., x_n)=G_1(x_1, ..., x_s, x_{s+1}-a_{s+1}, ..., x_n-a_n)),$$

gdzie G_1 oznacza znowu funkcyę wymierną.

Przyjmijmy, że G, a więc i G_1 jest w zmiennych $x_1, x_2, ..., x_s$, odpowiednio stopni $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_s$ i zauważmy iloczyn:

$$\frac{1}{x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} ... x_s^{\mu_s}} . G = \frac{1}{x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} ... x_s^{\mu_s}} G_1, \quad s \leqq n,$$

to widocznie będzie on postaci:

$$G_2\left(\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_s}, x_{s+1}-a_{s+1}, ..., x_n-a_n\right),$$

a więc funkcyą całkowitą wymierną argumentów:

$$\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_s}, x_{s+1}-a_{s+1}, ..., x_n-a_n.$$

Stąd wynika — podług (B), art. poprz. — że miejsce (b) jest miejscem nieistotnie szczególnem funkcyi G i mamy twierdzenie:

I. *Każda funkcya wymierna całkowita* $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ *posiada jedynie miejsca nieistotnie szczególne. Są-to miejsca o niektórych lub wszystkich spółrzędnych nieskończonych. Skończone spółrzędne w takich miejscach mogą mieć dowolne wartości.*

Funkcya ułamkowa wymierna:

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{F(x_1, x_2, ..., x_n)}{G(x_1, x_2, ..., x_n)},$$

w której F, G przyjmujemy, niewspółmiernemi, będzie w skończoności na każdem miejscu (a), dającem $G \neq 0$ regularną [art. 84.] Każdy punkt (a), [art. poprzedz.], na którym $G=0$ będzie jej punktem nieistotnie szczególnym, gdyż iloczyn:

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) u(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

jest już w tym punkcie regularnego zachowania się.

Zbadajmy punkt (b). Przyjmijmy, że w zmiennych $x_1, x_2, ..., x_s$ jest licznik F odpowiednio stopni:

$$m_1, m_2, ..., m_s,$$

a mianownik G odpowiednio stopni:

$$n_1, n_2, ... n_s.$$

Większy — (nie mniejszy) — ze stopni m_α, n_α, $\alpha=1, 2$, ., s, nazwijmy μ_α i połóżmy:

$$(1) \qquad u = \frac{\dfrac{1}{x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_s^{\mu_s}} . F_1}{\dfrac{1}{x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_s^{\mu_s}} . G_1}$$

gdzie F_1, G_1 są przeprowadzeniami funkcyj F, G do miejsca:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0, \; x_{s+1} = a_{s+1}, \dots, \; x_n = a_n,$$

to teraz z formy (1) możemy dojść do takich wniosków:

I⁰. Gdy $n_\alpha \geqq m_\alpha$ dla $\alpha = 1, 2, \dots, s$ i gdy mianownik G zawierał dodajnik:

$$(2) \qquad A x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_s^{\mu_s}, \qquad \text{to}$$

$$\frac{G_1}{x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_s^{\mu_s}} = A + G_2\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_s}, x_{s+1} - a_{s+1}, x_n - a_n\right).$$

Połóżmy $\dfrac{1}{x_1} = u_1$, $\dfrac{1}{x_2} = u_2, \dots, \dfrac{1}{x_s} = u_s$, to z (1) dostaniemy:

$$(3) \qquad u = \frac{F_2(u_1, u_2, \dots, u_s, x_{s+1} - a_{s+1}, x_n - a_n)}{A + G_2(u_1, u_2, \dots, u_s, x_{s+1} - a_{s+1}, \dots, x_n - a_n)},$$

gdzie F_2 i G_2 są całkowitemi wymiernemi funkcyami.

Ponieważ $A \neq 0$, więc z (3) wyniknie:

$$u = \mathfrak{P}(u_1, u_2, \dots, u_s, x_{s+1} - a_{s+1}, \dots, x_n - a_n)$$
$$= \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_s}, x_{s+1} - a_{s+1}, \dots, x_n - a_n\right),$$

a to wskazuje — że miejsce (b) jest w tym razie r e g u l a r n e m.

Przyjmijmy przeciwnie, że G nie zawiera dodajnika (2). W takim razie miejsce (b) będzie już miejscem szczególnem i to: nieistotnie szczególnem. Mamy więc twierdzenie:

II. *Funkcya wymierna ułamkowa wielu zmiennych posiada z miejsc osobliwych tylko nieistotnie osobliwe.*

Spis autorów przytoczonych.*)

Abel 32, 35, 507.
d'Alembert 59.
Andoyer 516.
André 517.
Anglin 460.
Appel 516.
Argand 59.
Aronhold 400.

Bachmann 68.
Baltzer 59, 155, 235, 325.
Baraniecki 228.
Baumgärtner 448.
Bendixson 116. 427.
Bernoulli Jan 507.
Bertrand 449.
Betti 461.
Bézout 349.
Biermann 423, 487.
du Bois-Raymond 96, 116.
Borchardt 231, 460.
Borel 506.
Bouquet 538.
Briot 538.
Burnside 400.

Cantor 12, 95, 96, 116, 223.
Cassini 83, 426, 516.
Cauchy 21, 23, 24, 59, 129, 135, 236, 527.
Cayley 303, 400, 460.
Chrystal 46.
Clebsch 370, 373, 400.

Dautheville 538.
Descartes 80, 81, 82.
Dickstein 1, 400, 460.
Dienger 443, 444.
Dietrich 455.
Dini 89.
Dingeldey 400.
Dirichlet 32, 35.
Dirksen 166, 167.
Dziwiński 22, 507.

Eisenstein 132.
Ettingshausen 448.
Euler 56, 59, 138, 191, 231, 332, 507.

Faà de Bruno 312, 400, 461.
Fabry 501.
Fermat 7.
Fiedler 312, 334, 400.
Folkierski 141.
Forsyth 513, 538.
Fredholm 493.
Frobenius 516.

Galois 265.
Gauss 59, 60, 62, 68, 121, 129, 140, 141, 446, 448, 486.
Girard 223.

*) Tu i w alfabetycznym rejestrze rzeczy — str. 546 — odnoszą się liczby do stron.

Gordan 129, 303, 400.
Goursat 516.
Gundelfinger 400.
Gutzmer 177.

Hademar 501.
Hankel 224.
Heine 444.
Hermite 516.
Herschel 141.
Herz 121.
Hess 339.
Hesse 362, 364, 394.
Hilbert 114, 400.
Hölder 533.
Holst 129.
Holzmüller 121.
Hurwitz 42, 507.

Illigens 12.

Jacobi 227, 334, 362.
Jensen 449.
Jordan 265.
Jourjon 508.

Klein 118, 255, 265, 267, 303, 310,
Krause 477.
Kretkowski 155.
Kronecker 25, 235.
Krygowski 513.
Kummer 449.

Lachlan 460.
Lagrange 134, 138, 165, 166, 235, 507.
Láska 507.
Laurent 359, 361, 513, 521, 527.
Legendre 507.
Leibnitz 507.
Lemonnier 155.
Lerch 492.
Lewicki 177.
Lie 35.
Lieblein 17.
Lindemann 400.
Liouville 538.
Lipschitz 13.
Lucas 131.
Lüroth 89.

Mansion 155.
Mertens 129.
Meyer 169 400.
Mittag-Leffler 94, 98, 99, 113, 116, 527.
Moivre 56, 58, 59.
Molk 359, 423.
de Morgan 449.
Muth 400.

Netto 265, 461.
Neumann 118.
Newton 223, 440, 441, 460.

Ocagne 460.
Oltramare 32.

Panton 400.
Peano 11, 114.
Petersen 265, 449.
Picard 265.
Pincherle 426.
Plücker 334.
Poincaré 506, 513.
Poisson 339.
Pringsheim 41, 58, 77, 527.
Puzyna 177, 426, 515.

Raabe 446, 448, 449.
Raüsenberger 536.
Reiff 401.
Riemann 29.
Roberts 386.
Rosenhein 235, 236.
Rouché 177.
Runge 511.

Salmon 312, 334, 400.
Schaeffer 527.
Schepp 89.
Schröder 515.
Schwarz 52.
Scott 228, 460.
Serret 164, 179.

Stolz 46, 485.
Strauss 41, 48.
Study 455.
Sylow 35.

Tannery J. 423, 516.
Taylor 501, 508.
Thomae 13.

Ventéjols 155.
Vivanti 498.
Volterra 506.

Walter 400.
Weber 13, 265.
Weierstrass 12, 25, 37, 52, 423, 431, 485, 493, 512, 515, 533.
West 520.
Wertheim 7, 164, 179.
Wiener 493.
Witkowski 21.
Wroński 459, 520.

Zajączkowski 71.
Załuski 322.
Zindler 498.

Żelewski 228.
Żmurko 57, 178.

Alfabetyczny rejestr rzeczy.

Absolutna zbieżność [*absolute Convergenz, convergence absolue*] 26, 72, 407.
Aleph (funkcya) 459.
Algebraiczne funkcye 189.
— krzywe 189, 325.
— równania 180, 189.
Analityczne funkcye [*analytische Functionen, fonctions analytiques*] 506, 507.
— wyrażenia [*anal. Ausdrücke, Expressions*] 513.
Asymptoty 325.

Bezustanna zbieżność [*beständige C.*] 402, 407.
Bezwarunkowa zbieżność [*absolute, unbedingte C., convergence absolue*] 25, 72.
Bezwzględna wartość [*absoluter Werth, valeur absolu, modul*] 24, 52, 219.
Bezwzględny niezmiennik [*absolut. Invariante*] 368.
Biegun funkcyi [*ausserwesentlicher Punct, Unendlichkeitsp., pôle*] 529.
— na kuli 118, 282.
Bieżące miejsce 79.

Całkowa funkcya [*Integralfunction, integrale*] 124, 467, 490.
Całkowanie [*Integrieren, integration*] 517.
Całkowita funkcya [*ganze Function, fonction entière*] 178.
Całkowity system reszt [*vollständiges Restsystem*] 62, 66, 70.
Charakterystyka 57, 77, 538.
Ciągłość [*Stetigkeit, continuité*] funkcyj 124, 159, 187, 215.
— szeregów 414, 415.
Ciągłe obszary [*continua*] 113, 190.
— ułamki [*Kettenbrüche, fractions continues*] 41.
Continuum 113, 214, 409, 410.
— zwarte [*zusammenhängendes, connexe*] 113, 115, 190.
Cykl 241.
Cykliczna grupa [*cyklische Gruppe, groupe cyclique, circulair*] 243, 268.
Cząstkowe pochodne [*partielle Derivirten, dérivées partielles*] 183, 215.
Częściowa grupa [*Theilgruppe, Untergr., Sousgroupe*] 250, 258.
— wyróżniona [*ausgezeichnete Gr.*] 255, 257, 280.
Częściowe ułamki [*Partialbrüche, élements, fractions simples*] 165, 160.
Czworościany wzajemne [*Gegentetraëder*] 278, 295.

Dowód Weierstrassa o pierwiastkach f. wym. 440.
Dwudziestościan [*Ikosaëder*] 280.
Dwumienny szereg [*Binomialreihe*] 440, 486.
Dwupostaciowe funkcye [*zweiwerthige F., fonct. à deux valeurs*] 246.
Dwuścian [*Dieder*] 267.
Dyskryminant 148, 193.
Działania arytm. liczbami 14, 51.
— szeregami 20, 27, 423.

Element liczby 14, 16.
— funkcyi 506.
Elementarne f. symetryczne 222.
Eliminacya 312.

Formy jednorodne 362.
Funkcya analityczna 506, 507.
— dwupostaciowa 246.
— izobaryczna 224, 226, 371, 378, 380, 383.
— jednorodna [*homogene F., fonct. homogène*] 178, 191.
— pierwotna = całkowa.
— półsymetryczna [*alternirende F., fonct. alternée*] 246, 259.
— przestępna [*transcendente F., fonct. transcendente*] 537

Funkcya symetryczna 220, 241, 326, 337, 341, 348, 383.
— elementarna 222.
— ułamkowa 157, 213, 461.
— ułamkowa właściwa [*echtgebrochene F.*] 165.
— wymierna [*rationale F., fonct. rationelle*] 122, 178, 236, 311, 339, 361, 533, 536, 540, 541.
— wydzielona 175, 180, 218.
— zupełna 178, 194.

Gałęzie [*Zweige, branches*] funkcyj 325.
— krzywych 325.
Gatunki funkcyj 264, 265.
— sprzężone [*conjugirte, conjugées*] 265.
Geometryczne przedstawienie liczb 13, 54, 71.
— obszarów 80, 81.
— wykonywanie działań 55.
Granica (górna, dolna) 117, 473.
— funkcyi 506.
Główna wartość pierwiastka 63.
Graniczny punkt [*Grenzpunct, point limite*] 89.
Grupy cykliczne (kołowe) 243, 268, 292.
— częściowe 250, 258.
— cykliczne wyróżnione 253, 257, 280,
— czwórki [*Vierergruppe*] 270, 294, 295.
— niepodzielne (niezłożone) [*einfache Gr., groupes simples*] 253, 285.
— obrotów wielościanów 266, 287, 292, 295.
— podstawień 239, 243.
— półsymetryczne [*alternierende Gr., groupes alternés*] 247, 252, 255, 273, 285.
— równouprawnione [*gleichberechtigte*] 255.
— rozszerzone [*erweiterte*] 287, 310.
— symetryczne 221, 255.

Harmoniczny szereg 16, 29.
Hesse'an (wyznacznik Hessego) 364, 368, 397, 399.
Hypergeometryczny szereg 448, 486.

Iloczyny nieskończone 35, 74.
— cyklów 242.
Iloraz funkcyj 143, 201.
Interpolacyjne wzory [*Interpolationsformeln, formules d'interpolation*] 134, 140, 164, 235, 236, 359.
Inwaryant 368.
Iteracya 238.
Izobaryczna funkcya 224, 226.
Izolowana mnogość 95.
Izomorfizm 156, 271, 276, 279, 285.

Jakobian (wyznacznik Jacobi'ego) 365, 369, 391, 394, 397, 399.

Jednorodne funkcye [*homogene F., fonct. homogénes*] 168. 191, 368.
Jednostajnie zbieżne rozwinięcia [*gleichmässig convergente Entwickelungen, developpements convergentes uniformément*] 412, 415, 510, 511.
Jednostki ułamkowe 49.
— urojone 48, 49.
— główne 52.
Jednoznaczne funkcye [*eindeutige F., fonct. uniformes*] 122, 157, 179, 213, 411, 506, 529.

Koło zbieżności [*Convergenzkreis, Cercle de convergence*] 403, 469.
Kołowe grupy 243, 268.
— podstawienia 241.
Kongruencya 61.
Kowaryant 368.

Lemniskata 329.
Liczby czysto urojone 49.
— niewymierne 12, 46.
— pozaskończone [*transfinitae*] 97.
— przystające [*congruente*] 60.
— sprzężone [*conjugierte, conjugués*] 51.
— urojone (złożone) [*imaginäre, imaginairs*] 50.
Linie osobliwe [*singuläre L., lignes singulieres*] 501, 533.

Metoda André'go 517.
— nieoznaczonych współczynników 438.
— Sylwestra (dialytyczna) 312.
Miejsca = punkta 79.
Mnogość [*Mengen, ensembles*] 89.
— odosobniona (izolowana) [*isolirte M., ensemble isolé*] 95.
— pantachiczna [*überall dichte M., ens. condensé*] 96, 112, 113.
— przeliczalna (pierwszej mocy) [*abzählbare M., ens. denombrable*] 101.
— drugiej mocy [*2-ter Mächtigkeit, de la 2-de puissance*] 108.
— punktów osobliwych 531.
— rodzaju pierwszego i drugiego 93.
— pochodna [*abgeleitete M., ens. dérivé*] 93.
— wszędzie gęsta = pantachiczna.
Mnożenie szeregów 437.
Mnożniki [*multiplicateurs*] 354.
Moduł 355.
— podstawienia 364, 366, 367, 368.
Monogeniczność [*Monogenität, monogénité*] 505, 507.

Niepodzielność grup 253, 284.
Nieprzywiedlność funkcyj [*Irreductibilität, irréductibilité*] 210.

Niewspólmierność funkcyj [*incommensurable F. (zu einander prim), fonct. incommensurables*] 148, 210.
Niewymierne liczby [*irrationale Zahlen, nombres irrationels*] 12, 46.
Niezłożone grupy 253, 285.
Niezmienniki [*Invariants*] 368, 369.
— niezależne [*unabhängige, indépendants*] 392.
— pierwotne [*irreducieble Inv., Grundformen*] 394.
Norma 52.

Obszar [*Bereich, Gebiet, domaine*] 79, 81, 84, 87, 88, 113, 190, 269, 276, 280. 284, 287.
Obwód zbieżności 403, 405, 478, 487, 491.
Odosobniona mnogość 95.
Odwrotne [*inverse*] substytucye 238.
Określone miejsca [*definierte Stellen, points définies*] 80,
Okrążanie [*Umkreisung, révolution*] 80.
Osobliwe miejsca [*singuläre Stellen, points singuliers*] 326, 473, 490, 491, 499, 501, 528, 538, 539.
Otoczenie [*Umgebung, voisinage*] 213.
— punktu istotnie osobliwego 530.

Parzyste substytucye 241.
Pęk krzywych 331.
Peryod podstawienia 239.
Peryodyczne rozwinięcie systematyczne 5.
Pierścień [*Ring, couronne*] zbieżności 406.
Pierwiastki form 365.
— n^{te} jednostki 65.
— pierwotne [*primitive Einheitswurzeln*] 65.
— powtarzające się, wielokrotne 131, 133, 160, 232, 233.
— równania 129, 440.
— sprzężone 65.
— wspólne 319, 321, 343.
Pierwotna funkcya = całkowa f.
Płaszczyzna liczbowa 55.
Pochodne cząstkowe 183, 215.
— funkcye 123, 160.
— jako współczynniki 507.
— mnogości [*abgeleitete Mengen, ensembles dérivés*] 93.
— szeregi 467, 490.
Podgrupa 250, 280,
— wyróżniona 270.
Podstawienia [*Substitutionen, substitutions*] 221, 237, 290.
Podstawowe formy niezmiennicze [*Grundformen*] 394.
Podwyznaczniki rugownika 151, 313, 317.
Podzielnik [*Theiler, diviseur*] funkcyj 143. 203.
— grup 253.
Pokrewieństwo cząsteczkowe [*conforme Abbildung, réprésentation conforme*] 121.
— izogonalne 121.
— kołowe [*Kreisverwandtschaft*] 120.
Półsymetryczne funkcye 246, 259.
— grupy 247, 252, 255, 273, 285.
Półzmienniki [*Semivariants*] 382, 385, 397, 399.
Potęga ogólna 71.
Powtórzenie [*Iterieren, itération*] substytucyj 238, 239.
Pozaskończone liczby 97.
Prawdziwy zakres zbieżności [*der wahre Convergenzbereich*] 403.
Projekcya stereograficzna [*stereographische Projection*] 119.
Promień zbieżności [*Convergenzradius, rayon de convergence*] 403.
Próżnia [*éspace lacunaire*] 501, 504, 533.
Przeliczalna mnogość 101.
Przemienne substytucye [*vertauschbare S., s. échangeables*] 253, 255.
Przeprowadzanie szeregów [*Fortsetzung der Reihen, prolongement des séries*] 463, 471, 493, 497, 499.
Przestawienie [*Transposition*] 240.
Przetworzone grupy [*transformierte G., gr. transformés*] 252.
Przybliżone wartości [*Näherungswerthe, valeurs approximatives*] 43, 44.
Przystające liczby 60.
Punkt w nieskończoności ($x = \infty$) 85.
Punkta istotnie osobliwe [*wesentlich singuläre, P., p. essentiels*] 530, 534.
— nieskończonościowe [*Unendlichkeitsstellen, pôles*] 134, 158, 528, 534.
— osobliwe [*singuläre P., points singuliers*] 326, 473, 490, 491, 499, 501, 528, 538, 539.
— podstawowe [*Grundpuncte*] 331.
— przecięcia krzywych alg. 325.
— skupienia [*Häufungspunct, point limite*] 89, 91, 110, 501.
— wyjątkowe [*Ausnahmepuncte* 331.
— zerowe [*Nullstellen, les zéros, les racines*] funkcyj wym. 180, 194, 212. 213.
— równań 129, 158.
— szeregów 420, 421, 496.

Ramifikacya 326.
Reszta szeregu 3, 14, 18, 26, 73, 412, 415.
Rezultant funkcyj 147.
Równania algebraiczne 182.
— wielościanów umiar. 293, 303
Równoważność funkcyj [*Aequivalenz, équivalence*] 355, 356, 361.
— mnogości 106.
— punktów 287.

Rozbieżność [*Divergenz, divergence*] iloczynów 39.
— szeregów 16, 401.
Rozwijanie [*Entwickelung, développement*] funkcyj 104, 123.
Rozwinięcie systematyczne 1, 11.
Różniczkowanie [*Differenzieren*, *differentiation*] 516.
Rugownik [*Resultante*] 147, 193, 208, 228, 236, 312, 325, 343, 349, 359, 366, 369.
Rząd [*Ordnung, l'ordre*] grupy 243, 250.
Rzut stereograficzny 119, 288.

Ścieśniony zakres zbieżności [*verengter Convergenzbereich*] 409.
Semivariant 382.
Spółczynniki niezmienników 378.
— szeregów 418.
Sprzężone gatunki funkcyj 265.
— liczby 51, 55.
— pierwiastki 65.
Średnie arytm. f. 175, 218, 521.
— szeregu 416.
Srednie wartości jako współczynniki 509.
Stopień 178, 239, 257, 316, 349, 369, 370.
Substytucye 221, 290, 291, 294, 295.
— kołowe 241.
— nieparzyste (II-ej klasy) 241.
— odwrotne 238.
— parzyste (I-ej klasy) 241.
— przemienne 253, 255.
Sumowanie szeregów 423, 428.
Symbol: 1_{φ} 57.
— Δ 186.
Symetryczność niezmiennika 373.
Symetryczne funkcye 220, 241, 452.
— f. elementarne 222.
— grupy 221, 255.
System całkowity reszt 62, 66, 70.
— form podstawowych 397, 399.
Szeregi potęgowe [*Potenzreihen*, *séries entières*] 401, 405, 407.
— zwrotne [*recurrierende Reihen, séries recourrantes*] 450, 454, 517.

Transpozycya 240.
Twierdzenie Abla i Dirichleta 32.
— Eulera o f. jednorodnych 192.
— Fermata 7.
— Laurenta 525.
— o współczynnikach szeregów 416.
— Weierstrassa o sumowaniu szeregów 428, 433.
— Weierstrassa o szeregu na okręgu zbieżności 478—487.

Ułamki ciągłe 41.
— częściowe 165, 169.
Ułamkowe funkcye 157, 165, 213, 461.

Waga [*Gewicht*] 226, 340, 348, 371, 380.
Wahające szeregi [*oscilierende Reihen*] 23. 74.
Warunkowa zbieżność [*bedingte Convergenz*] 29, 32, 483.
Wielopostaciowość funkcyj 237, 243.
Wielowartościowość f. 189, 237, 259, 325.
Wieloznaczność f. 189, 506.
Wskaźnik [*index*] grupy 249.
— niezmiennika 368, 385.
Wspólny podzielnik 143, 145, 153, 204, 313, 366.
— niezmiennik 369.
— współzmiennik 369.
— zakres zbieżności 405, 407, 410.
Współmierne f. [*commensurable F., fonct. commensurables*] 143, 208, 312.
Współzmienniki 368, 370, 380, 391, 394.
Wydzielone funkcye 175, 180, 218.
— szeregi 416, 519.
Wymiar 178, 194.
Wymierne funkcye 122, 236, 311, 361.
Wyrażenia analityczne 512, 520.
Wyróżnik [*dyskryminant*] 148, 193, 229, 326, 367, 394, 397.
Wyznaczanie funkcyj 160, 178, 194, 234.
— niezmiennika 378, 381.
— krzywych alg. 330.
Wzór Moivre'a 58.
— Eulera 59.
— interpolacyjny Cauchy'ego 236.
Gaussa 141.
Lagrange'a 134, 198.
Laurent'a 361.

Zakres 79, 81, 269, 276, 280, 284, 287, 409.
— istnienia funkcyi 501.
Zamknięta mnogość [*abgeschlossene M.*] 95.
Zasadnicze funkcye [*fundamentale F.*] 294, 299, 300, 309, 311.
Zbieżność 16, 21, 36, 44, 75, 401, 405, 444, 446.
— absolutna = bezwarunkowa 26, 37, 38, 72, 78.
— wahająca 33, 74.
— warunkowa 29, 32, 41.
Zwrotne szeregi 450, 454, 517.
Żródło współzmiennika [*Quelle, source*] 385, 387.

0,01 IV/II 700 —

25/7

twy