



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000231321











50/39

WYDZIAŁ FIZYKI I MATEMATYKI  
TOWARZYSTWA DLA ROZWOJU NAUKI POLSKIEJ

WYDZIAŁ FIZYKI I MATEMATYKI  
TOWARZYSTWA DLA ROZWOJU NAUKI POLSKIEJ

WYDZIAŁ FIZYKI I MATEMATYKI  
TOWARZYSTWA DLA ROZWOJU NAUKI POLSKIEJ

FUKASZ J. BODASZEWSKI

TEORIA RUCHU WODY NA ZASADZIE  
RUCHU FAŁOWEGO

CZĘŚĆ PIERWSZA



WYDZIAŁ FIZYKI I MATEMATYKI

TOWARZYSTWA DLA ROZWOJU NAUKI POLSKIEJ

1933



# ARCHIWUM NAUKOWE

WYDAWNICTWO  
TOWARZYSTWA DLA POPIERANIA NAUKI POLSKIEJ.

DZIAŁ II. — TOM I. — ZESZYT I.

ŁUKASZ J. BODASZEWSKI.

TEORYA RUCHU WODY NA ZASADZIE  
RUCHU FALOWEGO.

CZĘŚĆ PIERWSZA.



WE LWOWIE.  
NAKŁADEM TOWARZYSTWA DLA POPIERANIA NAUKI POLSKIEJ.  
1902.



INŻ. I. STELLA-SAWICKI

# TEORYA RUCHU WODY

NA ZASADZIE RUCHU FALOWEGO

NAPISAL

ŁUKASZ J. BODASZEWSKI.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

Z 76 FIGURAMI W TEKŚCIE I 2 TABLICAMI.



*Stella-Sawicki*

WE LWOWIE.

NAKŁADEM TOWARZYSTWA DLA POPIERANIA NAUKI POLSKIEJ.

1902.

Główny skład w księgarni  
GUBRYNOWICZA I SCHMIDTA  
we Lwowie.





~~III. 28. 886~~

11-348364



---

Z drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie  
pod zarządem J. Filipowskiego.

3PU-2-571/2016  
Ak. Nr. ~~K-430/56~~



Stella - Sawicki.

# Teorya ruchu wody

na zasadzie ruchu falowego.

Napisał

Lukasz J. Bodaszewski.

## WSTĘP.

Zagadnienia z ruchu cieczy, rozwiązane dotychczas przez hydrodynamikę zapomocą równań różniczkowych ruchu, postawionych przez Lagrange'a i Eulera, odnoszą się przeważnie do wypadków, mających dla celów praktycznych małe znaczenie.

Prawa wypływu cieczy przez otwory w ścianach naczynia, prawa ruchu cieczy w rurach i łożyskach otwartych, nie zostały dotąd teoretycznie rozpoznane; a liczne usiłowania praktyków do ustawienia wzorów empirycznych, na podstawie bezpośrednich obserwacyj, nie doprowadziły również do celu.

Zasadniczem twierdzeniem hydrostatyki jest, że ciśnienie w cieczy idealnej jest we wszystkich kierunkach stałem. Odnosi się to oczywiście tylko do cieczy, znajdujących się w stanie spokoju. Gdy ciśnienie wewnątrz cieczy lub na granicy tejże zostanie zmienionem, następuje ruch cieczy w kierunku zmniejszonego ciśnienia. Ten ruch powstać może także przez zmianę gęstości cieczy.

Znane są prądy wody morskiej ciepłej i zimnej, a więc wody o różnej gęstości. Prądy wody ciepłej w morzu nazwano równikowymi; zaś prądy wody zimnej prądami podbiegunowymi. Każdemu prądowi równikowemu z zachodu na wschód, towarzyszą prądy równikowe ze wschodu na zachód. Krzywą chyżości ruchu wody w płaszczyźnie poziomej przedstawiałyby przy tych prądach w przy-



bliżeniu linia nakreślona na fig. 1. Prądy równikowe rozprawdają bardzo wielką ilość ciepła; tak np. prąd zatokowy (Golfstrom) prowadzi dziennie według obliczenia Crella:  $6 \times 10^{10}$  Kaloryi. Ta ilość

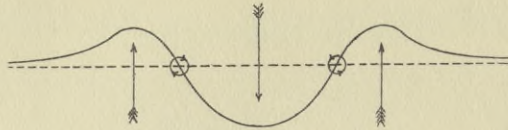


Fig. 1.

ciepła wystarczyłaby do wytworzenia strumienia roztopionego żelaza wielkości rzeki Mississipi.

Prąd zatokowy, wychodzący z zatoki meksykańskiej, zwraca się na północny wschód, gdzie styka się z prądami podbiegunowymi. Jeden z tych prądów, najsilniejszy, »prąd Labradoru«, spotyka prąd zatokowy koło Nowej Fundlandyi, odrzuca go od wschodnich wybrzeży amerykańskich aż do południowej Karoliny, gdzie zanurza się popod prąd zatokowy, płynąc w kierunku przeciwnym do górnego prądu ciepłego. Krzywą chyżości ruchu wody w płaszczyźnie pionowej przedstawiałyby w tym wypadku fig. 2.

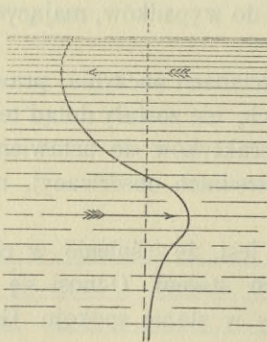


Fig. 2.

Te prądy morskie prowadzą olbrzymie masy wody przez tysiące kilometrów długości biegu, bez łożysk o stałych ścianach, bez dna, lecz w łożyskach utworzonych tylko z wody. Największe rzeki lądu stałego nie mogą iść w porównanie z temi rzekami morskimi.

Prócz różnej gęstości wody morskiej, sprowadzonej różnomiernem ogrzaniem, niepoślednią przyczyną powstania tych strumieni są także i wiatry. Wywołany w głębi cieczy impuls ruchu dochodzi do powierzchni bardzo szybko, lecz ruch wzbudzony na powierzchni, dostaje się do głębi bardzo powoli. Gdy na powierzchni morza przebiega burza, to w głębi około 100 mtr. wcale się to odczuwać nie daje. Na zasadzie przyczepności powietrza do wody obliczył A. Supan, że w morzu głębokim na 4000 mtr. wiatr wiejący stale w jednym kierunku, nadając górnej warstwie wody chyżość  $c$  wprowadzi w ruch w tym samym kierunku warstwę położoną w głębokości 100 mtr.



z chyżością  $\frac{c}{10}$  po upływie lat 41, a z chyżością  $\frac{c}{2}$  po upływie lat 239.

Po upływie 200.000 lat, według Supana, cały słup wody będzie w ruchu. Prędkość od powierzchni do dna zmieniać się będzie według prawa linii prostej, tak że gdy chyżość na powierzchni będzie  $c$ , to na dnie wynosić będzie zero. Obecne więc krążenie wody morskiej jest ruchem wypadkowym z ciągłego promieniowania słońca i ziemi, oraz działania wszystkich wiatrów, jakie dotychczas wiały.

Na ruch wody w łożyskach stałych oddziałują również ruch powietrza; Humphrey i Abbot stwierdzili to pomiarami na Mississipi.

Zagadnienia, rozwiązane obecnie przez hydrodynamikę, odnoszą się przeważnie do undulacyjnego ruchu falowego i do ruchu wirowego. Ruch postępowy cieczy został bardzo mało zbadanym, gdyż całkowanie odnośnych równań różniczkowych ruchu przedstawia znaczne trudności. Przez wprowadzenie w hydrodynamice w rachunek równania ciągłości cieczy, a raczej stałości masy cieczy w ruchu będącej, oraz przez wprowadzenie pojęcia potencjału prędkości, zostało umożliwionem rozwiązanie niektórych zagadnień z trwałości ruchu cieczy, a w szczególności ruchu równoległego do płaszczyzny; zarazem okazała się analogia równań elektrodynamicznych z hydrodynamicznymi. Zamieniwszy w odnośnych równaniach elektrodynamicznych wyraz potencjału elektrycznego na wyraz potencjału prędkości, przechodzi się bezpośrednio do równań hydrodynamicznych. Stosując naprzykład prawo Ohma do ruchu cieczy w łożysku, otrzymuje się bezpośrednio tak długo szukane hydrodynamiczne prawa tego ruchu, o czem w drugiej części niniejszej rozprawki będzie mowa

W tej części t. j. w pierwszej, przedstawionym jest mało znany ruch wody w głębszej (gruntowej) i ruch wody w łożysku, odnośnie do wyznaczenia tak zwanej paraboli chyżości, którą szczegółowo ta część się zajmuje.

Przez określenie ruchu cieczy, jako ruchu falowego nieundulacyjnego, i przez wprowadzenie pojęcia fali wypływowej, zamiast potencjału, udało mi się, mniemam, bez zawiłych równań różniczkowych, przedstawić rzecz przystępnie dla każdego.

## 1. Ruch falowy.

Gdy na powierzchni cieczy, znajdującej się w spokoju, zostanie jakaś część cieczy wyprowadzoną z położenia równowagi, to zau-



ważyc się dają kręgi, rozchodzące się z tego miejsca po całej powierzchni, w kształcie pierścieni współśrodkowych. Jeżeli impulsy, które spowodowały rozchodzenie się kręgów, trwale powtarzać się będą, to i rozchodzenie się kręgów będzie trwałem. Kręgi takie, uderzając o ścianę naczynia, odbijają się i powracają w przeciwnym kierunku, według znanych praw ruchu falowego. Że ruch tego rodzaju jest objawem ruchu falowego, udowodnili doświadczalnie bracia Weberowie.

Podobne kręgi na powierzchni wywołać też można, wyprowadzając ciecz z równowagi w głębi cieczy. Impuls ruchu, udzielony cząstkom cieczy w głębi położonym, rozchodzi się w przybliżeniu na powierzchni kuli, której przecięcie z powierzchnią cieczy daje kręgi powyższe. Doświadczenie to poucza, że: z miejsca zmienionej równowagi w głębi cieczy, impuls zmieniający równowagę, rozchodzi się równomiernie we wszystkich kierunkach.

Pomyślmy sobie wewnątrz cieczy kulę o promieniu  $r$ , którą możemy dowolnie powiększać lub zmniejszać (fig. 3). Powiększając kulę, wywieramy nacisk na otaczające elementy cieczy, które od powierzchni kuli w kierunkach promieni odpychane będą; w skutek czego nastąpi zgęszczenie cieczy w około kuli. Ciśnienie więc od wnętrza kuli będzie większem, niż ciśnienie wywierane przez otaczającą ciecz na elementy, przy kuli położone; nastąpi więc ruch cieczy w kierunku mniejszego ciśnienia, t. j. w kierunku od kuli na zewnątrz.

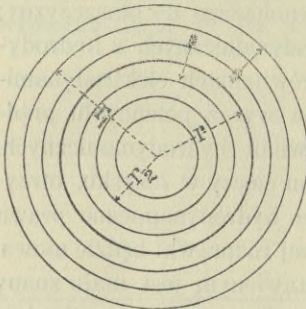


Fig. 3.

Gdy zaś powierzchnię kuli zmniejszamy, to przy kuli powstanie dla otaczającej cieczy powiększona przestrzeń do wypełnienia. Następuje tu przy kuli zmniejszenie ciśnienia, a więc i zmniejszenie gęstości, a pod ciśnieniem cieczy otaczającej zajmą elementy cięższe, najbliższe kuli położone, miejsce pierwotnie przez kulę zajmowane; i ruch taki udzielać się będzie stopniowo całej cieczy, równomiernie we wszystkich kierunkach.

Powiększając i zmniejszając na przemian objętość kuli, wprowadzimy ciecz w ruch falowy, którego prawa już są znane; a te prawa odnoszą się tak samo do ruchu okresowo zmiennego, jak i do ruchu



statecznego, spowodowanego stałym powiększaniem się lub stałym zmniejszaniem się powierzchni rzeczony kuli; czyli innymi słowy: powiększanie się powierzchni rzeczony kuli wywołuje odpływ cieczy od kuli w przestrzeń przez ciecz zajętą, zmniejszanie się powierzchni kuli wywołuje dopływ otaczającej cieczy do kuli. Prawa ruchu falowego odnoszą się zarówno do dopływu jak i odpływu; a każda z tych części ruchu falowego podlega tym samym prawom. Objaw więc płynięcia cieczy jest tylko częściowym objawem ruchu falowego, i na zasadach tego ruchu może być zbadanym.

Gdy promień wspomnianej kuli statecznie się zmniejsza, to trwałość ruchu cieczy wymaga, by w każdej chwili ta sama ilość cieczy z otoczenia do powierzchni kuli równomiernie dopływała. Jeżeli więc masa cieczy, zajmującej przestrzeń powstałą po usunięciu się powierzchni kuli, wynosi na sekundę  $M$  tonn, a gęstość cieczy przy kuli wynosi  $\sigma$ , zaś chyżość, z jaką ciecz do powierzchni kuli dopływa, wynosi  $v$ , to oczywiście będzie:

$$M = 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \cdot \sigma$$

Wskutek zmniejszania się powierzchni kuli i rozchodzącej się równomiernie zmiany ciśnienia będzie i zmiana gęstości cieczy równomiernie rozłożona w kulach spółrodkowych. Jeżeli więc zatochymy ze środka rzeczony zmiennej kuli, promieniem  $r_1$  kulę spółrodkową, to przez powierzchnię tej kuli, z powodu trwałości ruchu, dopływać musi do kuli o promieniu  $r_1$  na sekundę ta sama masa cieczy, jaka poprzednio odpłynęła; będzie więc:

$$M = 4 \pi r_1^2 v_1 \sigma_1 = 4 \pi r_2^2 v_2 \sigma_2 = \dots$$

Z czego wynika:

$$r^2 \cdot v \cdot \sigma = \text{Const.}$$

Jeżeli zmiana gęstości jest tak małą, że gęstość w całej cieczy za stałą uważać możemy, natenczas uzyskuje się związek:

$$\underline{r^2 v = C}$$

a stąd:

$$\underline{v = \frac{C}{r^2}}$$

czyli: chyżość, z jaką uważany element cieczy do kuli dopływa, jest odwrotnie proporcjonalną do kwadratu



odległości tego elementu od środka wspomnianej kuli. To samo odnosi się także do ruchu cieczy w kierunku od rzeczonyj kuli na zewnątrz.

Gdy ruch cieczy jest zwrócony ku środkowi wspomnianej zmiennej kuli, to objaw tego ruchu jest taki, jak gdyby ciecz do tej kuli, względnie do jej środka, przyciąganą, w drugim zaś wypadku, jak gdyby ciecz od powierzchni tej kuli, względnie od jej środka, odpychaną była. Z tego też względu środek tej kuli, a względnie samą tę kulę, nazwiemy w pierwszym wypadku centrem atrakcyjnym, w drugim: centrem repulsyjnym. Gdy promień tej kuli jest nieskończenie mały, przeto nazywać ją będziemy centrem elementarnym. Każdy element cieczy może być takim centrem. Działanie centrów atrakcyjnych lub repulsyjnych na ciecz otaczającą daniem jest przez równanie (1).

Założmy w tem równaniu  $v = \text{stała}$ , to w takim razie będzie  $r = \text{stała}$ ; co oznacza, że cząstki cieczy, podążające z jednakową chyżością do lub od centra, znajdują się na powierzchni kuli. Powierzchnię takiej kuli nazwiemy powierzchnią falową dla tego rodzaju ruchu. Powierzchnia falowa obejmuje elementy o jednakowej fazie. Faza określa stan ruchu uważanego elementu; ten stan jest danym przez wielkość wychylenia elementu od miejsca równowagi, i przez chyżość, z jaką element w uważanej chwili się wychyla. Na rzeczonyj powierzchni kuli mają wszystkie elementy jednakowe wychylenie i jednakową chyżość; znajdują się więc w tej samej fazie dopływu lub odpływu. Rzeczona więc powierzchnia kuli zawiera cechy powierzchni falowej. Gdy przy zwykłym ruchu undulacyjnym czas drgania i dalekość drgania (amplituda) mają wartości skończenie wielkie, to przy tym rodzaju ruchu dopływu lub odpływu, wyrażone powyżej wartości są nieskończenie wielkie. W hydrodynamice nazywa się ta powierzchnia powierzchnią potencjalną; jest ona kulą, gdy wewnątrz cieczy znajduje się tylko jedno centrum atrakcyjne lub repulsyjne.

Linie, wzdłuż której odbywa się ruch cząstek cieczy, podążających do lub od centra, nazwiemy linią ruchu cieczy lub też linią prądu; przy ruchu, spowodowanym jednym centrem, linie prądu są promieniami powierzchni falowych. Linie prądu przecinają powierzchnie falowe czyli powierzchnie potencjalne pod kątem prostym. Zakreśliwszy na powierzchni falowej około punktu przecięcia się linii prądu z tą powierzchnią, nieskończenie małą krzywą zamkniętą,

[4. rozdział]



odgraniczymy nieskończenie małe pole  $df$ , a obwiódłszy je liniami prądu, odgraniczymy w cieczy część nieskończenie małą, którą nazywamy strugą; jej przekrojem jest powyższe pole. Przekroje strugi są do powierzchni falowych proporcjonalne; z czego wynika, że w strudze wartość iloczynu z chyżości cieczy, przez przekrój strugi i gęstość cieczy w dotyczącym polu, jest ilością stałą:

$$\underline{df \cdot v \cdot \sigma = C.}$$

∞ Gdy jeden z rozmiarów przestrzeni, zajmowanej przez ciecz, jest w porównaniu z dwoma innymi rozmiarami mały, natenczas ciecz tworzy warstwę. Przypuśćmy, że w warstwie poziomej o grubości  $h$  znajduje się wewnątrz cieczy, dajmy na to na dnie, centrum atrakcyjne, dane przez:

$$M = 2g^2 \pi \sigma.$$

powodujące ciecz do ruchu ku temu centrum. (Przypuśćmy dla wyjaśnienia, że w dnie znajduje się otwór, przez który ciecz wycieka, fig. 4).

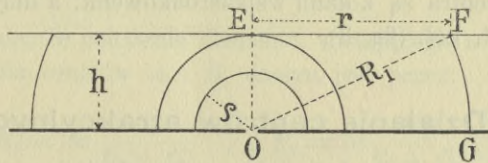


Fig. 4.

Z centra atrakcyjnego rozchodzić się więc będą fale półkuliste. Fala o promieniu  $h$  zetknie się z powierzchnią warstwy w prostopadłej, poprowadzonej z centra  $O$  do powierzchni warstwy, nadając elementowi cieczy  $E$ , w tym punkcie położonemu, chyżość  $v_0$  określoną przez związek:

$$M = 2h^2 \pi v_0.$$

Fala o promieniu  $R_1$  większym od  $h$ , przetnie się z powierzchnią cieczy w punkcie  $F$ , nadając wszystkim elementom cieczy, położonym na powierzchni kulistej krążka  $EFGO$ , chyżość  $v_1$ , wynikającą ze związku

$$M = 2h^2 \pi v_0 = 2\pi R_1 h v_1;$$

gdyż kulista powłoka krążka o grubości  $h$ , wyciętego z kuli o promieniu  $R_1$ , równa się  $2\pi R_1 h$ .



Z powyższych równań wynika:

$$h v_0 = R_1 v_1 = R_2 v_2 = \dots = C$$

Nadto z trójkąta  $EOF$  wypada:

$$R_1 = \sqrt{r^2 + h^2}$$

a jeżeli  $h$  jest stosunkowo bardzo małe, to można przyjąć, że  $R_1 = r$ , a wtedy:

$$v r = C$$

a stąd

$$v = \frac{C}{r}$$

co oznacza, że gdy centrum atrakcyjne położone jest w warstwie o małej grubości, to chyżości elementów cieczy, podążających ku środkowi, są do odległości tych elementów od centra odwrotnie proporcjonalne. Powierzchnie falowe są powierzchniami walcowymi. Przecięcia tych powierzchni walcowych z powierzchnią warstwy dają linie falowe czyli linie potencjalne, które dla jednego centra są kołami współśrodkowymi; a linijami prądu są promienie tych kół. (fig. 3).

## 2. Działanie centrów atrakcyjnych.

Poznawszy, że ruch, który nazywamy płynięciem cieczy, jest objawem ruchu falowego, możemy zasady Huyghensa, Dopplera, zasady interferencji i t. p. stosować bezpośrednio do objawów płynięcia cieczy.

Gdy na element cieczy działają dwa centra atrakcyjne, to każde z nich nadaje temu elementowi w kierunku do środka atrakcji odpowiednią chyżość, a element cieczy poruszać się będzie po wypadkowej z tych dwu działań. Niech fig. 5 przedstawia w warstwie cieczy dwa centra atrakcyjne  $A$  i  $B$ , których stałe są dane przez:

$$R_1 v_1 = C_1 \quad R_2 v_2 = C_2 .$$

Odciąwszy na promieniu  $AE$  wartość  $EF = v_2$ , a na promieniu  $BE$  wartość  $EG = v_1$ , i wykreśliwszy znany równoległobok chyżości  $EGHF$ , otrzymamy przez przekątnię  $EH$  tego równoległoboku kierunek i wielkość chyżości wypadkowej.

Jeżeli uważany element cieczy położony jest na prostej, łączącej







w górnym końcu lejkami półkulistymi. Gdy pompkę wprowadzimy w ruch, półkule zbliżają się do siebie, fig. 6.

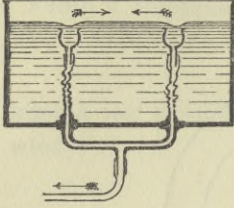


Fig. 6.

Dla uproszczenia badań nad działaniem dwóch centrów atrakcyjnych stałych w nieograniczonej warstwie cieczy, założmy, że natężenia tych centrów są równe, dane przez:

$$(2) \quad r_1 v_1 = r_2 v_2 = K$$

Na fig. 7 są te dwa centra oznaczone przez  $A$  i  $B$ ; znajdują się one w odległości  $2a = AB$ .

Centrum atrakcyjne  $A$  udziela elementowi  $E$ , odległemu od  $A$  o długość promienia  $AE = r_1$ , chyżości  $v_1$ ; zaś centrum atrakcyjne  $B$  udziela temuż elementowi na promieniu  $BE = r_2$ , chyżości  $v_2$ .

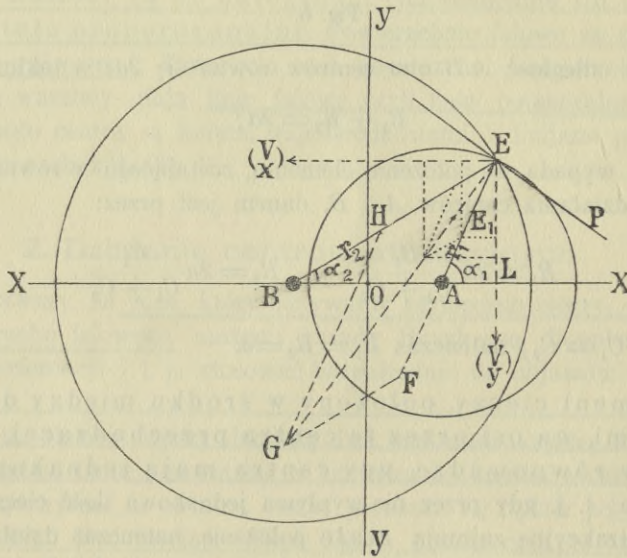


Fig. 7.

Z równania (2) wynika:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Chcąc więc wyznaczyć kierunek chyżości wypadkowej, trzeba na promieniu  $r_1$  odciąć długość promienia  $r_2 = EB = EF$ , zaś na promieniu  $r_2$  odciąć długość promienia  $r_1 = EA = EH$ , i utworzyć ró-



wnoległobok  $EF GH$ . Przekątnia tego równoległoboku  $EG$  daje kierunek chyżości wypadkowej; i będzie ona styczną do drogi, jaką przebiegnie element  $E$  wskutek działania chyżości wypadkowej. Poprowadziwszy z punktu  $E$  prostopadłą  $EP$  do  $EG$ , otrzymamy kierunek normalnej w tym punkcie do drogi elementu  $E$ . Ta normalna będzie styczną do linii fali wypadkowej, czyli skutecznej, powstałej w punkcie  $E$  z fal elementarnych, rozchodzących się z centrów falowania  $A$  i  $B$ . Linia fali skutecznej nazywa się w hydrodynamice linią potencjalną. Z elementu  $E$  możemy przejść do innych położeń tego elementu, przechodząc po każdorazowej stycznej do drogi tego elementu; albo też, wychodząc w kierunku normalnej, szukać ugrupowania elementów cieczy w linii falowej. Przejdźmy więc po drodze, jaką element  $E$  przebywać będzie wskutek działania fal, wychodzących z  $A$  i  $B$ , t. j. po linii, po której każdy element cieczy z położenia  $E$  kolejno w ruch wprowadzonym zostanie, czyli innymi słowy przejdźmy po linii prądu, w celu wyprowadzenia analitycznego wyrazu dla tej linii.

Rzędne elementu  $E$  niech będą dane przez  $OL = x$ ,  $EL = y$ ; przyczem prosta, łącząca środki centrów atrakcyjnych, jest osią  $X$ , zaś prostopadła, przechodząca w połowie odległości centrów, jest osią  $y$ . Odległość centrów od środka układu osi współrzędnych niech będzie  $AO = OB = a$ .

Oznaczywszy kąt, jaki zawiera promień  $r_1$  z dodatnią częścią osi  $OX$ , t. j. kąt  $EAL$  przez  $\alpha_1$ , zaś kąt między promieniem  $r_2$  i osią  $OX$ , t. j. kąt  $EBL$  przez  $\alpha_2$ , otrzymujemy na wyrażenie rzędnych elementu  $E$  związki:

$$x = r_1 \cos \alpha_1 + a = r_2 \cos \alpha_2 - a$$

$$y = r_1 \sin \alpha_1 = r_2 \sin \alpha_2$$

tudzież

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y}{x-a}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y}{x+a}$$

wreszcie :

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x+a)^2 + y^2$$

Wskutek działania centra atrakcyjnego  $A$  wszystkie elementy cieczy, znajdujące się na obwodzie koła, zatoczonego z punktu  $A$  promieniem  $r_1$ , zostają pobudzone do ruchu w kierunku do centra  $A$  z chyżością  $v_1$ ; zaś z centra  $B$  z chyżością  $v_2$ , które są dane przez:



$$v_1 = \frac{K}{r_1}, v_2 = \frac{K}{r_2}$$

Składowe tych chyżości, działających na odnośnych promieniach  $r_1$  i  $r_2$ , w kierunkach osi  $OX$  i  $OY$ , są dane przez:

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} (v_1) \\ (v_2) \end{aligned} \right|_x = K \frac{x-a}{r_1^2} \quad \left| \quad \begin{aligned} (v_1) \\ (v_2) \end{aligned} \right|_y = K \frac{y}{r_1^2} \quad \left| \quad \begin{aligned} (v_1) \\ (v_2) \end{aligned} \right|_y = K \frac{y}{r_2^2}$$

Oznaczywszy przez  $V$  chyżość wypadkową elementu  $E$ , a przez:  $\left(\frac{V}{x}\right)$ ,  $\left(\frac{V}{y}\right)$  składowe tej chyżości w kierunkach osi współrzędnych, i zważywszy, że wypadkowa z chyżości, udzielonych w jednym kierunku danemu punktowi, równa się algebraicznej sumie chyżości składowych, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{x}\right) &= K \left\{ \frac{x-a}{r_1^2} + \frac{x+a}{r_2^2} \right\} \\ \left(\frac{V}{y}\right) &= Ky \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right\} \end{aligned}$$

Z powyższych składowych obliczona chyżość wypadkowa daną jest przez:

$$(4) \quad V = \frac{2K}{r_1 r_2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Z tą chyżością przebiegnie element  $E$  po stycznej  $EG$ , w czasie nieskończenie małym  $dt$ , drogę:

$$ds = V \cdot dt$$

zajmując położenie  $E_1$ , gdzie z powodu zmienionych odległości od centrów atrakcyjnych, otrzymuje znowu chyżości  $v_1$ ,  $v_2$  i t. d.

Składowymi drogi  $ds$ , tworzącej element linii prądu, będą:

$$dy = \left(\frac{V}{y}\right) \cdot dt$$

$$dx = \left(\frac{V}{x}\right) \cdot dt$$



a ztąd otrzymujemy stosunek:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{V}{y}\right)}{\left(\frac{V}{x}\right)}$$

Wstawiwszy w to równanie wartości, otrzymujemy równanie różniczkowe linii prądu:

$$\frac{(x-a) \cdot dy - y dx}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{(x+a) dy - y dx}{(x+a)^2 + y^2} = 0 \quad (5)$$

a po zcałkowaniu:

$$\text{arc} \left( \text{tg} = \frac{y}{x-a} \right) + \text{arc} \left( \text{tg} = \frac{y}{x+a} \right) = C \quad (6)$$

albo też:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = C$$

Rozwijając sumę łuków w równaniu (6) otrzymujemy:

$$\text{arc} \left( \text{tg} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} \right) = \text{Const}$$

albo:

$$x^2 - y^2 - 2Axy - a^2 = 0 \quad (7)$$

gdzie  $A$  oznacza stałą dowolną.

Równanie to przedstawia układ hyperboli równobocznych, przechodzących przez centra atrakcyjne; przyjmując bowiem

$$y = 0$$

otrzymuje się:

$$x = \pm a.$$

Jedna tylko linia prądu nie przechodzi przez centra atrakcyjne; jest to linia prądu (prosta) położona w osi  $y$ ; nazwiemy ją obojętną linią prądu, a strugę, której oś tworzy obojętna linia prądu, nazwiemy strugą obojętną. [dziś wód]

Elementy cieczy, położone w strudze obojętnej, nie doznają zбочenia przez działanie centrów atrakcyjnych; lecz poruszają się ku środkowi układu wzdłuż osi  $y$ . W celu uzyskania wyrażenia na linię fali skutecznej, względnie linii potencjalnej, przejdźmy po normalnej, poprowadzonej z punktu  $E$  prostopadle do  $EG$ ; wtedy na wy-



rażenie stycznej kąta, zawartego między tą normalną a dodatnią osią  $OX$ , otrzymamy związek:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\frac{V}{x}\right)}{\left(\frac{V}{y}\right)};$$

a po wstawieniu wartości otrzymujemy równanie różniczkowe linii potencjalnej

$$\frac{(a-x)dx + y dy}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{(a+x)dx + y dy}{(a+x)^2 + y^2} = 0$$

Równanie to zcałkowane daje:

$$\log((a-x)^2 + y^2) + \log((a+x)^2 + y^2) = \text{Const}$$

albo też:

$$(8) \quad [(x-a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} \cdot [(a+x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} = B$$

lub wreszcie:

$$(9) \quad r_1 \cdot r_2 = B$$

gdzie  $B$  oznacza stałą dowolną.

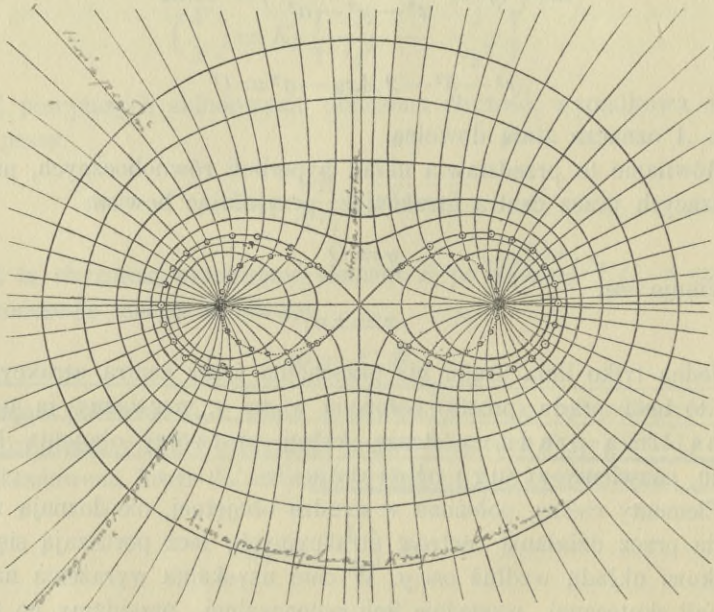


Fig. 8.



Równanie to jest wyrazem analitycznym linii potencjalnej tego układu centrów atrakcyjnych, i przedstawia lemniskaty krzywe Cassiniego. Centra atrakcyjne  $A$  i  $B$  są ogniskami tych krzywych.

Z linii potencjalnych tego układu charakterystyczną jest pętlica (ósemkowata); przechodzi ona bowiem obwodem swoim przez ogniska wszystkich hyperboli, będących liniami prądu w tym układzie; wierzchołek zaś tych hyperboli, leży również na pętlicy, która wszelako nie jest linią potencjalną. Pętlica ta przecina się z osią  $X$  w centrach atrakcyjnych. Na fig. 8 są przedstawione linie prądu i linie potencjalne dla dwu centrów atrakcyjnych równego natężenia.

Jeżeli dane są trzy centra atrakcyjne o równym natężeniu, ułożone w wierzchołkach trójkąta równobocznego, fig. 9, to w takim razie linie prądu będą liniami trzeciego stopnia; a tylko te linie prądu, które przechodzą normalnie do osi obojętnych, będą hyperbolami. Równanie linii prądu będzie:

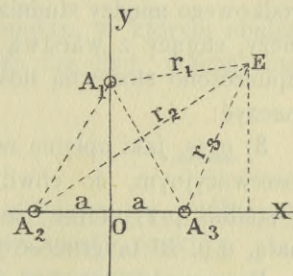


Fig. 9.

$$\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{y-a\sqrt{3}}{x}\right)+\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{y}{(x+a)}\right)+\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{y}{(x-a)}\right)=C$$

Na linie potencjalne otrzymamy wyrażenie:

$$[(y-a\sqrt{3})^2+x^2] \cdot [y^2+(x+a)^2] [y^2+(x-a)^2]=B$$

Trzy dane centra atrakcyjne będą ogniskami tych linii potencjalnych, mających kształt analogiczny z liniami Cassiniego.

### 3. Zastosowanie.

W głębi ziemi, w szutrowisku, znajduje się warstwa wody gruntowej, stojącej na poziomej warstwie nieprzepuszczalnej. Tę wodę pobiera się z dwóch studzien zapomocą oddzielnych pomp o wydajności po 648 m<sup>3</sup> na dobę z każdej studni. Odległość jednej studni od drugiej wynosi 20 m. W ciągu nieprzerwanego pompowania dniem i nocą osiągnięto stan trwałości wydatku wody, przy stałym obniżeniu się zwierciadła o 1.0 mtr., mierzonym w osi przechodzącej przez środki obu studzien, na wewnętrznej ścianie studni, przeciwległej środkowi obu studzien. Średnica studzien wynosi 2 m.

Ma się obliczyć i graficznie przedstawić:



1) kształt depressyi w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez środki obu studzien;

2) warstwicę tej depressyi, z których jedna ma przechodzić przez punkt zwrotny, jedna powyżej tego punktu, a jedna poniżej. Grubość warstwy wodonośnej, względnie grubość warstwy wody, jest w porównaniu z odległością studzien bardzo mała. Na osi, przechodzącej przez środki obu studzien w odległości 100 mtr. od punktu środkowego między studniami, znajduje się obserwacyjny otwór wiertniczy, stojący z warstwą wodonośną w połączeniu. Do tego otworu zapuszczono stosowną ilość barwnika, n. p. fluoryzyny. Należy wyznaczyć:

3) czas, jaki upłynie od chwili zapuszczenia barwnika w otworze obserwacyjnym, do chwili w której ukaże się zabarwienie wody w studni, przyjmując, że grubość warstwy wody nie jest bardzo małą, n. p. że ta grubość wynosi 2 mtr.

Do rysunku ma być użytą podziałka dla długości 1:500, dla wysokości 4:10. Odległość między studniami wynosi:  $2a = 20$  mtr. przeto  $a = 10$  mtr. Punkt, w którym mierzono obniżenie zwierciadła wody, leży na osi obu studzien, przeto  $y = 0$ . Jest on odległym od środka układu o długość  $x = 11$  mtr. przeto:

$$r_1 = x - a = 1 \text{ mtr.}$$

$$r_2 = x + a = 21 \text{ mtr.}$$

a więc stała dowolna dotyczącej linii potencjalnej wynosi:

$$C = r_1 r_2 = 21$$

Obniżenie zwierciadła wody wynosi dla tego punktu i na tej linii potencjalnej ilość:

$$s = 1.0 \text{ mtr.}$$

Ponieważ, według założenia, grubość warstwy wody jest bardzo małą, przeto można przyjąć w przybliżeniu, że  $s$  będzie do  $C^2$  odwrotnie proporcjonalne, albowiem:

$$v_1 = \frac{K}{r_1}, v_2 = \frac{K}{r_2}, r_1 r_2 = C,$$

a ponieważ  $y = 0$ , przeto:

$$V^2 = (v_1 + v_2)^2 = K^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_1^2 r_2^2} = 2gs$$

albo też:

$$s = \frac{K^2}{2g} \cdot \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_1^2 r_2^2}.$$



Przyjmując: 
$$\varphi \frac{K^2}{2g} = A$$

gdzie  $\varphi$  oznacza współczynnik, otrzymujemy:

$$s = \frac{A(r_1 + r_2)^2}{C^2} \quad \text{patrz poprzedz.$$

Ponieważ znaleziono powyżej, że dla punktu, w którym obniżenie zmierzone wynosi 1'0, wartość stałej dla linii potencyalnej wynosi 21, przeto uzyskujemy:

$$A = 0.911$$

Przyjmując w osi różne wartości na  $x$  oblicza się według powyższego depressyą dla wyznaczonych w ten sposób punktów.

Obliczenie jest w następującej tabliczce zestawione:

$x$	$r_1$	$r_2$	$C$	$s$
0	10	10	100	0.036
2	8	12	96	0.039
4	6	14	84	0.051
6	4	16	64	0.088
8	2	18	36	0.280
9	1	19	19	1.009
11	1	21	21	1.000
12	2	22	44	0.270
14	4	24	96	0.077
16	6	26	156	0.038
18	8	28	224	0.023
20	10	30	300	0.016

Z wartości na  $x$  i  $s$  jest depressya powierzchni wody wgłębnej wskutek działania tych dwu pomp na fig. 10 narysowana. Przyjęto trzy poziomy i oznaczono przez *I*, *II*, *III*, dla tych poziomów wyznaczono warstwice t. j. linie przecięcia płaszczyzny poziomej z powierzchnią depressyjną.



Poziom *I* przecina linię depressyjną w odległościach od osi układu danych przez  $x = \pm 16$ , a tej wartości na  $x$  odpowiada z powyższej tabliczki stała  $C = r_1 r_2 = 156$ .

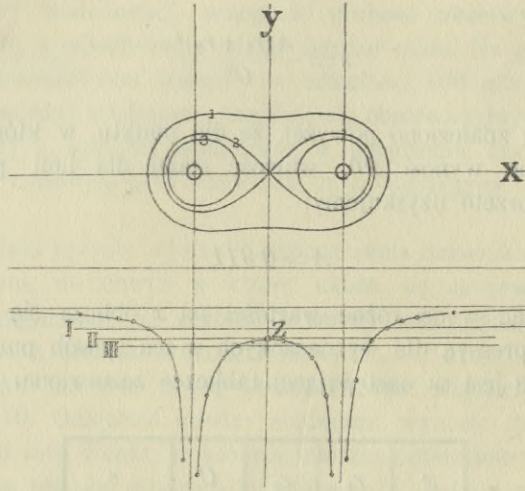


Fig. 10.

Dla poziomu *II* jest  $x_1 = 0, x_2 = \pm 14.14, C = 100$ .

Dla poziomu *III* jest  $x_1 = \pm 4, x_2 = \pm 13.56, C = 84$ .

Z równań  $C = r_1 r_2$  wyznacza się wartości na  $r_1$  i  $r_2$ , uzyskanymi promieniami zatacza się z centrów atrakcyjnych koła, a punkty przecięcia się tychże łączy się ze sobą w odpowiednim następstwie.

W następującej tabliczce zestawione są promienie wodzące dla tych trzech warstw.

$C = 156$		$C = 100$		$C = 84$	
$r_1$	$r_2$	$r_1$	$r_2$	$r_1$	$r_2$
6.00	26.00	4.14	24.14	6.00	14.00
7.00	22.28	5.00	20.00	5.50	15.27
8.00	19.50	5.50	18.18	5.00	16.80
9.00	17.33	6.00	16.66	4.50	18.22
10.00	15.60	7.00	14.28	4.00	21.00
12.00	13.00	8.00	12.50	3.56	23.55
12.00	12.50	10.00	10.00	—	—



Czas potrzebny, ażeby element wody z otworu obserwacyjnego położonego w osi  $X$  w odległości 100 mtr. od środka układu współrzędnych, doszedł do przyległej studni, oblicza się w następujący sposób:

W odległości  $x$  od środka układu, wynosi chyżość elementu cieczy na osi  $OX$ .

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{2Kx}{x^2 - a^2}$$

W nieskończenie małym czasie  $dt$  przesunie się uważany element z chyżością  $\left(\frac{V}{x}\right)$  przez drogę  $dx = \left(\frac{V}{x}\right) \cdot dt$ ; a ztąd wypada:

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx(x^2 - a^2)}{2Kx} = \frac{1}{2K} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{x^2}{2} - a^2 \log x \right)$$

Ilość wody, jaką studnia na dobę wydaje, wynosi  $M = 648 \text{ m}^3$ ; grubość warstwy wody wynosi  $h = 20 \text{ mtr.}$ , przeto:

$$2r_1 v_1 \pi \cdot h = 648;$$

a ztąd

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 = K = 51.58$$

$$x_1 = 11, x_2 = 100, a = 10.$$

Po wstawieniu wartości w równanie na  $t$  wypada:

$$t = 45.74 \text{ dni.}$$

#### 4. Linie prądu, powstające w poziomej cienkiej warstwie cieczy wskutek działania centra repulsyjnego i atrakcyjnego.

W wielkim naczyniu  $P_1$  z poziomym dnem (fig. 11), znajduje się cienka warstwa wody. Za pomocą przewodu  $i$  dostaje się woda do

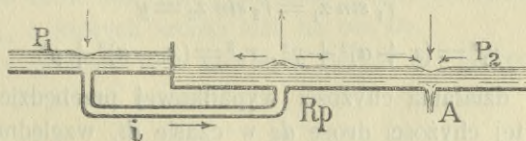


Fig. 11.



naczynia  $P_2$  przez otwór  $R_p$ . Z naczynia  $P_2$  wypływa woda otworem  $A$ . Otwór  $R_p$  będzie polem repulsyjnym, zaś otwór  $A$  polem atrakcyjnym dla cienkiej warstwy cieczy w poziomie  $P_2$ .

Natężenia tych centrów niech będą jednakowe i dane przez

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 = K.$$

Odległość między centrami niech wynosi:  $2a$ .

Prosta, łącząca środki centrów, niech będzie osią  $X$ , a prostopadła do niej, przechodząca w połowie odległości między centrami, niech będzie osią  $y$  (fig. 12).

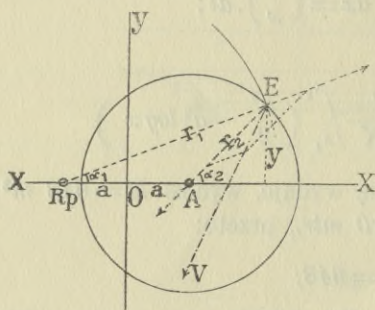


Fig. 12.

Na dowolnie obrany element  $E$  działać będzie fala wypływowa z centra  $R_p$  na powierzchni walca o promieniu  $r_1$ , nadając elementowi  $E$  chyżość  $v_1$  w kierunku promienia  $R_pE$ . Podobnie fala atrakcyjna, podążająca do centra  $A$ , natrafi na element  $E$  powierzchnią walca kołowego o promieniu  $r_2$ , udzielając temu elementowi chyżości  $v_2$  w kierunku  $EA$ .

Rozłóżmy te chyżości elementarne na składowe w kierunku osi  $Ox$  i  $Oy$ . Jeżeli promienie wodzące tworzą z dodatnią osią  $Ox$  kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , otrzymamy na składowe chyżości wypadkowej wyrażenia:

$$\left(\frac{V}{y}\right) = v_2 \sin \alpha_1 - v_1 \sin \alpha_1$$

$$\left(\frac{V}{x}\right) = v_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cos \alpha_1.$$

Związki między rzędnymi elementu  $E$  są następujące:

$$\cos \alpha_1 = \frac{a+x}{r_1}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{x-a}{r_2}$$

$$r_1 \sin \alpha_1 = r_2 \sin \alpha_2 = y$$

$$r_1^2 = (x+a)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x-a)^2 + y^2$$

Wskutek działania chyżości wypadkowej przebędzie element  $E$  w kierunku tej chyżości drogę  $ds$  w czasie  $dt$ , względnie przesunie się w kierunku  $X$  o długość



$$dx = \left( \frac{V}{x} \right) dt$$

wskutek działania składowej wypadkowej w kierunku  $X$ ; tudzież o długość

$$dy = \left( \frac{V}{y} \right) dt$$

wskutek działania składowej w kierunku  $y$ .

Z tego wypada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left( \frac{V}{y} \right)}{\left( \frac{V}{x} \right)} = \frac{v_2 \sin \alpha_2 - v_1 \sin \alpha_1}{v_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cos \alpha_1}$$

Po wstawieniu wartości odpowiednich będzie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{-a^2 + x^2 - y^2}$$

albo:

$$(a^2 + y^2 - x^2) dy + 2xy dx = 0. \quad (10)$$

W celu zcałkowania podzielmy to równanie przez  $y^2$ , a otrzymamy:

$$\frac{a^2}{y^2} dy + dy + \frac{2xy dx - x^2 dy}{y^2} = 0$$

a z tego całka:

$$-\frac{a^2}{y} + y + \frac{x^2}{y} = C$$

albo:

$$x^2 + y^2 - Cy - a^2 = 0 \quad (11)$$

jako równanie linii prądu, gdzie  $C$  jest stałą dowolną.

Dla  $y=0$  wypada  $x=\pm a$ , co oznacza, że wszystkie linie prądu przechodzą przez oba centra. Równanie powyższe przedstawia układ kół, które obwodem swoim przechodzą przez centra  $A$  i  $R_p$ , a których środki leżą na osi  $Oy$ .

Zmienny promień tych kół niech będzie  $R_1$ ; natenczas równanie linii prądu przybiera kształt:

$$x^2 + y^2 = a^2 + 2y \sqrt{R_1^2 - a^2}$$



gdzie  $\sqrt{R_1^2 - a^2} = \eta$  oznacza rzędną środka koła. W podobny sposób uzyskuje się równanie układu linii potencjalnych

$$(12) \quad x^2 + y^2 = 2x\sqrt{R_2^2 + a^2} - a^2$$

gdzie  $R_2$  jest zmiennym promieniem kół, których środki położone są w osi  $OX$  w odległości  $\xi = \sqrt{R_2^2 + a^2}$  od środka układu współrzędnych.

Linie prądu przecinają linie potencjalne pod kątem prostym, i są nakreślone na fig. 13 (tab. I).

☞ Dla szczegółowego wypadku, w którym odległość centrów wynosi 15 mtr.; a obniżenie lub podniesienie zwierciadła wody w od-

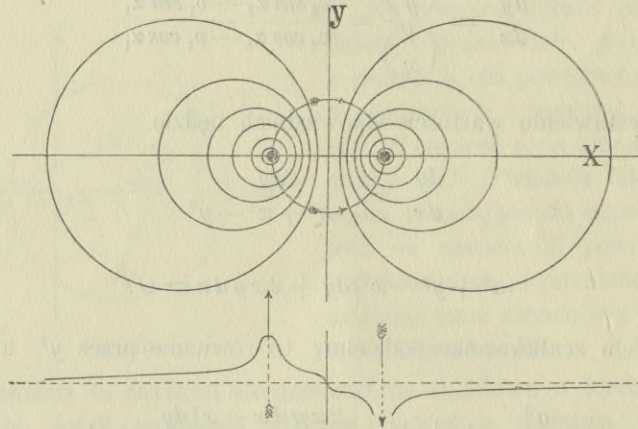


Fig. 14.

ległości 1 m. od centra na osi  $OX$ , wynosi 2 cm., przedstawione są na fig. 14 linie potencjalne i linie depressionjne w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez  $OX$ .

Linie wykreślone zostały za pomocą następującej tabliczki.

$X_1$	$X_2$	$R_2$	$\pm S$
0	$\infty$	$\infty$	0.0000
1.5	37.5	18	0.0052
2.5	22.5	10	0.0056
3.5	16.05	6.27	0.0062
4.5	12.50	4.00	0.0078
5.5	10.22	2.36	0.0108
6.5	8.55	1.02	0.0300



### 5. Ruch cieczy wskutek działania trzech centrów atrakcyjnych lub repulsyjnych, rozłożonych w linii prostej.

Dane są trzy centra o jednakowym natężeniu, rozłożone na prostej w równych od siebie odległościach. Natężenie centrów dane jest przez:

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 = r_3 v_3 = K$$

Przyjmując prostą łączącą środki centrów za oś  $y$ , a prostopadłą do niej, przechodzącą przez środkowe centrum za oś  $X$ , oraz zakładając, że odległości pomiędzy centrami są jednakowe i wynoszą  $b$ , otrzymamy na składowe chyżości wypadkowej dowolnego elementu  $E$ , którego położenie danem jest przez  $x, y$ , wyrażenia:

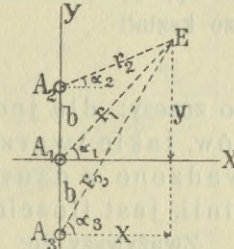


Fig. 15.

$$\left(\frac{V}{x}\right) = Kx \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} \right)$$

$$\left(\frac{V}{y}\right) = K \left( \frac{y}{r_1^2} + \frac{y-b}{r_2^2} + \frac{y+b}{r_3^2} \right)$$

Ponieważ zaś:

$$r_1^2 = x^2 + y^2, r_2^2 = x^2 + (y-b)^2, r_3^2 = x^2 + (y+b)^2$$

przeto wstawivszy te wartości w równania na  $\left(\frac{V}{x}\right)$  i  $\left(\frac{V}{y}\right)$  otrzymamy na wyrażenie kierunku chyżości wypadkowej wzór:

$$\left(\frac{V}{y}\right) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y-b}{x^2 + (y-b)^2} + \frac{y+b}{x^2 + (y+b)^2}}{x \left\{ \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + (y-b)^2} + \frac{1}{x^2 + (y+b)^2} \right\}}$$

a z tego:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy - (y-b)dx}{x^2 + (y-b)^2} + \frac{xdy - (y+b)dy}{x^2 + (y+b)^2} = 0 \quad (13)$$

jako równanie różniczkowe linii prądu. Podstawiając dla każdego wyrazu powyższego równania wartości:  $y = tx$  dla pierwszego,  $(y-b) = ux$  dla drugiego,  $y+b = wx$  dla trzeciego, wypadnie z łatwością całka:



$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y-b}{x}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{(y+b)}{x}\right) = \varphi \quad (14)$$

gdzie  $\varphi$  oznacza stałą dowolną.

Jeżeli nazwiemy przez  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  kąty, które dotyczące promienie  $r_1, r_2, r_3$  zawierają z osią  $X$ , to powyższe równanie przybierze kształt

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \varphi$$

co znaczy: dla jednej i tej samej linii prądu suma kątów, jakie tworzą z osią  $X$  promienie wodzące, poprowadzone z danych centrów do dowolnego punktu tej linii, jest ilością stałą.

Zważywszy że:

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y-b}{x}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y+b}{x}\right) = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 + b^2}\right)$$

tudzież że:

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 + b^2}\right) = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y(3x^2 - y^2 + b^2)}{x(x^2 - 3y^2 + b^2)}\right)$$

otrzymamy:

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y(3x^2 - y^2 + b^2)}{x(x^2 - 3y^2 + b^2)}\right) = \varphi$$

zakładając zaś

$$\operatorname{tg} \varphi = A$$

otrzymujemy:

$$(15) \quad \frac{y}{x} \cdot \frac{3x^2 - y^2 + b^2}{x^2 - 3y^2 + b^2} = A$$

jako równanie linii prądu, w którym  $A$  oznacza stałą dowolną.

Podstawiając

$$\frac{y}{x} = a$$

otrzymujemy z powyższego równania:

$$x^2 = \frac{b^2(A-a)}{a(3-a^2) - A(1-3a^2)}$$

Za pomocą tego wyrażenia na  $x$  jest wykreślenie, względnie obliczenie dowolnych punktów tej samej linii prądu bardzo ułatwione.

Po obliczeniu wartości na  $x$  otrzymuje się:

$$y = ax.$$

Linie prądu obliczone według tego uproszczonego równania są przedstawione na fig. 16.



Linie, oznaczone literami  $DzD$  tworzą dział pomiędzy centrami; przechodzą one przez punkty zwrotne  $z$  dla których:

$$x_0 = 0, y_0 = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}, \left(\frac{V}{y}\right) = 0, \left(\frac{V}{x}\right) = 0.$$

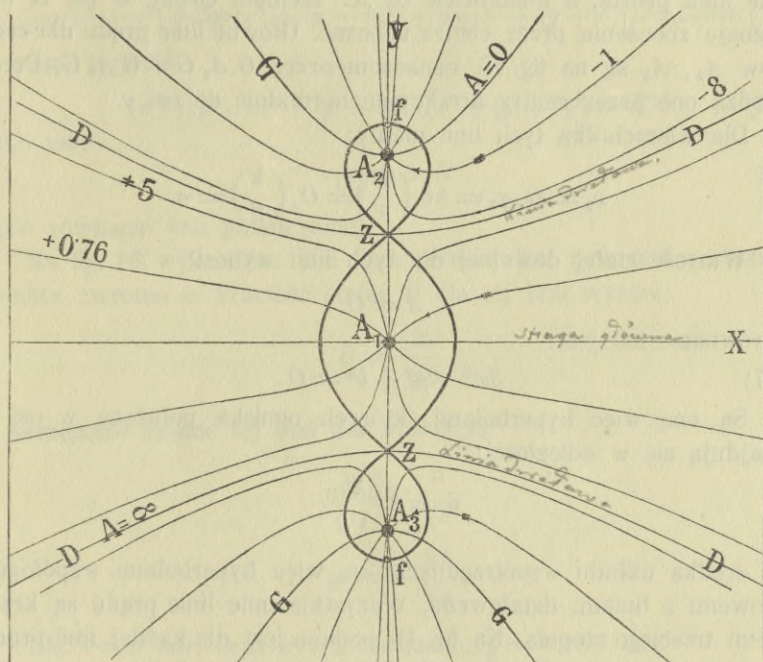


Fig. 16.

Wartość stałej dowolnej dla tych linii jest:

$$A = \infty;$$

a ich równanie danem jest przez

$$x^2 - 3y^2 + b^2 = 0 \quad (16)$$

Linie działowe  $DzD$  są więc hyperbolami, których ogniska, położone w osi  $y$ , odległe są od środka układu współrzędnych o

$$y_0 = \pm \frac{2b}{\sqrt{3}}$$

Wszystkie linie prądu, położone w polach na zewnątrz linii działowych, przechodzą przez centra atrakcyjne zewnętrzne  $A_2$   $A_3$ ; zaś linie prądu, położone w polu wewnętrznym pomiędzy liniami działo-



wemi  $DzD$ , przechodzą przez środkowe centrum atrakcyjne  $A_1$ . Jeżeli tę strugę cieczy, względnie linię prądu, która przechodzi prostopadle do prostej, łączącej środki centrów atrakcyjnych, nazwiemy strugą główną, to dla środkowego centra  $A_1$  strugą główną będzie linia prosta, a mianowicie oś  $X$ . Element cieczy w osi  $X$  nie doznaje zboczenia przez centra uboczne. Główne linie prądu dla centrów  $A_2, A_3$  są na fig. 16. oznaczone przez  $GA_2G$  i  $GA_3G$ . Przechodzą one przez centra atrakcyjne normalnie do osi  $y$ .

Dla wierzchołka tych linii mamy:

$$x_0 = 0, y_0 = \pm b, \left(\frac{V}{x}\right) = 0, \left(\frac{V}{y}\right) = \infty$$

Wartość stałej dowolnej dla tych linii wynosi:

$$A = 0$$

a równanie ich jest:

$$(17) \quad 3x^2 - y^2 + b^2 = 0.$$

Są one więc hyperbolami, których ogniska położone w osi  $y$  znajdują się w odległości:

$$y_f = \pm \frac{2b}{\sqrt{3}}$$

od środka układu współrzędnych; są więc hyperbolami współogniskowymi z liniami działowymi. Wszystkie inne linie prądu są krzywymi trzeciego stopnia. Na fig. 16 podana jest dla każdej linii prądu wartość stałej  $A$ , odniesiona do wartości na  $b = 5 \text{ mtr}$ .

Poprowadziwszy przez punkt  $E$  (fig. 15 str. 23), dla którego chyżość wypadkowa wyznaczoną została, prostopadłą do kierunku tej chyżości, otrzymujemy na wyrażenie kierunku tej prostopadłej równanie:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\frac{V}{x}\right)}{\left(\frac{V}{y}\right)} = - \frac{x \left\{ \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + (y-b)^2} + \frac{1}{x^2 + (y+b)^2} \right\}}{\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y-b}{x^2 + (y-b)^2} + \frac{y+b}{x^2 + (y+b)^2}}$$

a po uporządkowaniu tegoż równania:

$$\frac{ydy + xdx}{x^2 + y^2} + \frac{(y-b)dy + xdx}{x^2 + (y-b)^2} + \frac{(y+b)dy - xdx}{x^2 + (y+b)^2} = 0$$

Podstawiając w tem równaniu zamiast  $(x^2 + y^2)$  wartość  $2u$ , i wstawiając różniczki otrzymane w powyższe równanie, otrzymu-



jemy dla pierwszego wyrazu całkę  $\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ . Podstawiając zaś kolejno:

$x^2 + (y - b)^2 = 2w$ , i  $x^2 + (y + b)^2 = 2t$ ; i różniczkując te wartości, uzyskuje się całkę powyższego równania:

$$\frac{1}{2} (\log(x^2 + y^2) + \log(x^2 + (y - b)^2) + \log(x^2 + (y + b)^2)) = \text{Const} \quad (18)$$

z czego wypada:

$$(x^2 + y^2) \cdot (x^2 + (y - b)^2) \cdot (x^2 + (y + b)^2) = B^2 \quad (19)$$

albo też:

$$r_1 r_2 r_3 = B \quad (20)$$

jako równanie linii potencjalnej.

Na fig. 16 wykreślona jest linia potencjalna, przechodząca przez punkty zwrotne  $z$ . Wartość stałej  $B$  dla tej linii wynosi:

$$B = \frac{2b^3}{\sqrt{3}}$$

a szczególne rzędne tej linii dla  $x = 0$  są:

$$y_0 = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$y_f = \pm \frac{2b}{\sqrt{3}}$$

Dla  $b = 5$  mtr. oraz  $x = 1$  obliczono:  $y = \pm 1.85$  mtr.

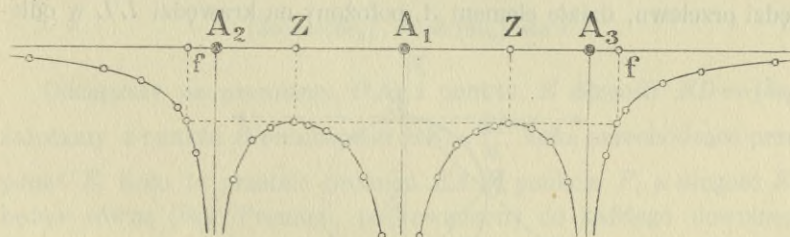


Fig. 17.

Przy założeniu, że grubość warstwy cieczy jest mała, tudzież że obniżenie powierzchni cieczy w osi  $y$  dla punktu  $y = 0.5$  mtr. wynosi  $s_0 = 0.1$  mtr., wyznaczono na fig. 17 odkształcenie powierzchni cieczy w osi  $y$  powstałe wskutek działania centrów atrakcyjnych  $A_1, A_2, A_3$ .



W następującej tabliczce podane są wartości obniżenia dla szeregu punktów w osi  $y$ .

$y$	$s$	$y$	$s$
0.5	$0^s$	4.0	0.049
1.0	0.064	4.5	0.070
1.5	0.051	5.5	0.056
2.0	0.044	6.0	0.032
2.5	0.041	7.0	0.017
3.0	0.040	8.0	0.011
3.5	0.042	10.0	0.006

## 6. Działanie prostoliniowego układu elementarnych centrów atrakcyjnych.

Niech fig 18 przedstawia warstwę cieczy rozpostartej w bardzo małej grubości  $\lambda$  na płaszczyźnie poziomej, ograniczonej tylko nieskończenie długą krawędzią  $LL$ , przez którą ciecz się przelewa; zaś  $c$  oznacza chyżość, z jaką ciecz na krawędzi  $LL$  do przelewu pobudzoną zostaje. Każdy element cieczy, na tej krawędzi położony, staje się centrum atrakcyjnym dla elementów cieczy w warstwie położonych.

Niech więc na element  $E$ , położony w odległości  $OE = y$  od krawędzi przelewu, działa element  $A$ , położony na krawędzi  $LL$  w odle-

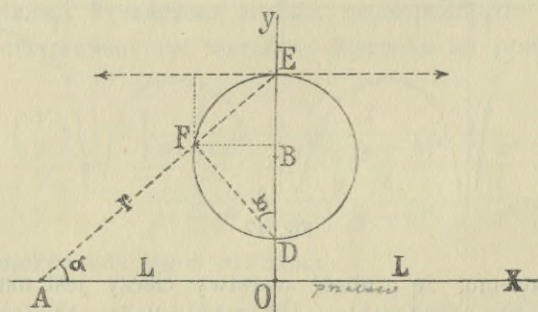


Fig. 18.

głości  $OA = x$  od prostopadłej do  $LL$ , przechodzącej przez  $E$ . Z centra atrakcyjnego  $A$  rozejdą się fale wypływu, z których fala



o promieniu  $EA = r$  dosięgnie elementu  $E$ . Niech szerokość elementów, na krawędzi położonych, daną będzie przez  $dx$ ; natenczas elementarna ilość cieczy, jakaby przez element  $A$  wypłynęła, daną będzie przez:

$$dM = c \cdot \lambda \cdot dx$$

Fale wypływowe, powstałe z każdego elementu na krawędzi  $LL$ , rozchodzić się będą w warstwie cieczy na powierzchni walca półkolistego, o wysokości  $\lambda$ , nadając elementowi  $E$  jakąś chyżość w kierunku do centra atrakcyjnego, o wielkości, odpowiadającej ilości wypływu przez centrum atrakcyjne.

Chyżość na powierzchni walca o promieniu  $EA = r$  daną będzie przez związek:

$$dM = r \pi \cdot \lambda \cdot (\delta v),$$

jeżeli tę chyżość oznaczymy przez  $(\delta v)$ . Z zestawienia tych dwu równań otrzymujemy chyżość, udzieloną elementowi  $E$  przez element  $A$ , daną równaniem:

$$(\delta v) = \frac{c}{\pi r} dx$$

Z elementu, położonego w punkcie  $O$  na krawędzi przelewu, wyjdzie fala wypływowa o promieniu  $OE = y$ , udzielająca elementowi  $E$  chyżości  $(\delta v_0)$ . Oznaczywszy kąt  $EAO$  przez  $\alpha$ , uzyskuje się równanie:

$$y = r \sin \alpha, \quad x = r \cos \alpha$$

$$(\delta v) = (\delta v_0) \cdot \frac{y}{r} = (\delta v_0) \cdot \sin \alpha$$

Odciąwszy na promieniu  $OE$  z punktu  $E$  długość  $ED = (\delta v_0)$ , zatoczmy z punktu  $B$  promieniem  $BE = \frac{ED}{2}$  koło, przechodzące przez punkt  $E$ . Koło to przetnie promień  $EA$  w punkcie  $F$ , a długość  $EF$  będzie równą  $(\delta v)$ . Promień, poprowadzony do każdego dowolnego elementu na krawędzi  $LL$  (z punktu  $E$ ), odetnie na obwodzie tego koła punkt, którego odległość od  $E$  przedstawiać będzie chyżość, udzieloną punktowi  $E$  przez dotyczący element.

Rozłożywszy chyżość  $(\delta v)$  na dwie składowe w kierunku osi  $Ox$  i  $Oy$ , otrzymamy:

$$\left(\frac{\delta v}{x}\right) = (\delta v) \cdot \cos \alpha, \quad \left(\frac{\delta v}{y}\right) = (\delta v) \sin \alpha$$



Ponieważ elementy cieczy są po obu stronach osi  $Oy$  symetrycznie rozłożone, przeto składowe chyżości w kierunku  $X$ , udzielone punktowi  $E$ , będą dla symetrycznych elementów równe, lecz co do kierunku przeciwnie, więc działanie ich wzajemnie zniósć się będzie, tak że:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\delta v}{x} \right) = 0$$

Pozostaje więc tylko składowa w kierunku  $y$ . Wyznaczywszy ją dla wszystkich elementów i sumując dotyczące wartości, uzyskamy chyżość wypadkową

$$\left( \frac{v}{y} \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\delta v}{y} \right).$$

Wstawiwszy wartości za  $(\delta v)$ , będzie:

$$(\delta v) = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{dx}{r} = -\frac{c}{\pi} \cdot \frac{d\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\left( \frac{\delta v}{y} \right) = -\frac{c}{\pi} \cdot d\alpha$$

a ztąd:

$$(21) \quad \left( \frac{v}{y} \right) = -\frac{2c}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\circ} d\alpha = c$$

Wynika więc, że wskutek działania fal elementarnych, powstałych z wypływu cieczy przez przelew na krawędzi prostej, z war-

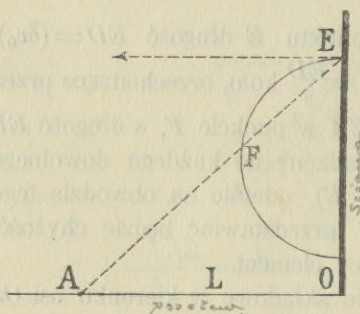


Fig. 19.

stwicy cieczy nieograniczonej o bardzo małej grubości, chyżość elementu cieczy będzie stałą; a kierunek ruchu będzie prostopadłym do krawędzi przelewu. Ponieważ w równaniu na chyżość wypadkową nie ma ani  $x$  ani  $y$ , przeto wszystkie elementy poruszać się będą z jednakową chyżością.

✗ Jeżeli uważana warstwa cieczy ograniczoną jest z jednej strony

ny krawędzią przelewu, a z drugiej ścianą do krawędzi prostopadłą (fig. 19), natenczas będzie:



$$\left(\frac{\delta v}{y}\right) = -\frac{c}{\pi} \cdot d\alpha$$

$$\left(\frac{\delta v}{x}\right) = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{dx}{y} \cos \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{c \sin \alpha}{\pi \cos \alpha} d\alpha$$

a ztąd:

$$\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{c}{2} \quad (22)$$

$$\left(\frac{v}{x}\right) = -\frac{c}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} d\alpha = -\infty$$

co oznacza, że ciecz oddala się od ściany z chyżością nieskończenie wielką.

Jest to najprostszy przykład kontrakcyi cieczy przy wypływie. Z przykładu tego widocznem jest, że kontrakcyja cieczy jest wynikiem atrakcyi hydrodynamicznej; wynikiem działania potencjalnego elementów cieczy, wynikiem interferencyi fal wypływowych.

Poznawszy ruch cieczy w cienkiej warstwie nieograniczonej oraz działanie centrów atrakcyjnych lub repulsyjnych, można wyznaczyć każdą strugę cieczy, będącej w ruchu skutkiem działania powyżej przytoczonych przyczyn.

Niech tą warstwą cieczy będzie woda wglębna, rozpostarta na płaskiej warstwie pochyłej, nieprzepuszczalnej. Za pomocą otworów

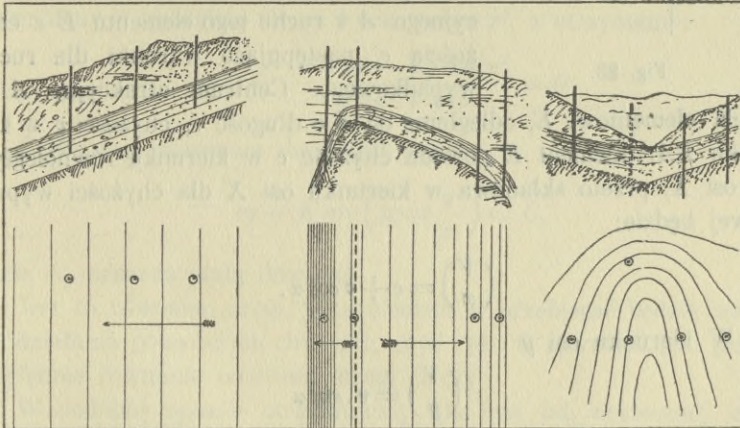


Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22.

wiertniczych wyznacza się wysokość zwierciadła wody w kilku punktach, oraz chyżość jej ruchu, w celu uzyskania dat do zamie-



rzonych rachunków, lub dla rozpoznania kształtu powierzchni wody, z którego wnioskować można o jej ruchu.

Kształt powierzchni wody jest danym przez warstwie. Jeżeli stok, na którym woda wglębna jest rozpostartą, jest płaski, natenczas i powierzchnia jest płaska, a warstwie tej powierzchni będą prostymi równoległymi. Jeżeli zaś stok jest płaskim, ale zmienia swe pochylenie, natenczas i warstwie będą miały różną odległość. (fig. 20, 21).

Gdy dwa stoki tworzą kosz, natenczas warstwie przybierają kształt fig. 22.

### 7. Linie prądu, powstałe skutkiem działania jednego centra atrakcyjnego w nieograniczonej warstwie płynącej cieczy.

Niech  $A$  będzie centrem atrakcyjnym, którego natężenie danem jest przez  $r \cdot v = K$ . Ciecz, rozpostarta na płaszczyźnie, porusza się równoległe do tej płaszczyzny z chyżością  $c$ .

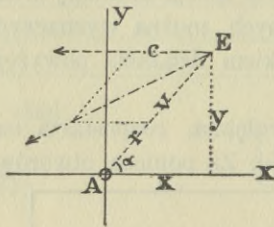


Fig. 23.

Przyjąwszy centrum atrakcyjne  $A$  za środek współrzędnych, a kierunek ruchu warstwy cieczy za kierunek osi  $X$ , otrzymujemy dla dowolnego elementu  $E$  cieczy w tej warstwie, wskutek działania centra atrakcyjnego  $A$  i ruchu tego elementu  $E$  z chyżością  $c$ , następujące warunki dla ruchu wypadkowego. Centrum atrakcyjne  $A$  udziela elementowi  $E$ , odległemu od  $A$  o długość  $r$ , chyżości  $v$  w kierunku  $EA$ . Element  $E$  posiada chyżość  $c$  w kierunku równoległym do osi  $X$ , przeto składowa w kierunku osi  $X$  dla chyżości wypadkowej będzie:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = c + v \cos \alpha.$$

W kierunku osi  $y$

$$\left(\frac{V}{y}\right) = v \cdot \sin \alpha$$

gdzie  $\alpha$  oznacza kąt, zawarty między promieniem  $r$  i osią  $X$ . Wskutek działania tych składowych przebiegnie element  $E$  w czasie  $dt$  drogę:



$$dx = \left( \frac{V}{x} \right) dt, dy = \left( \frac{V}{y} \right) dt$$

a ztąd stosunek:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left( \frac{V}{y} \right)}{\left( \frac{V}{x} \right)} = \frac{v \cdot \sin \alpha}{c + v \cdot \cos \alpha}$$

wyrażający kierunek ruchu elementu  $E$  wskutek działania powyższych chyżości.

Ze względu na to że:

$$v = \frac{K}{r}, y = r \sin \alpha, x = r \cos \alpha, r^2 = x^2 + y^2$$

otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K \cdot y}{c(x^2 + y^2) + Kx}$$

albo:

$$c(x^2 + y^2) dy + Kx dy - Ky dx = 0 \quad (24)$$

W celu zcałkowania tego równania różniczkowego podzielmy je przez:  $(x^2 + y^2)$ ; naówczas będzie

$$c dy + \frac{Kx dy - Ky dx}{x^2 + y^2} = 0$$

pomnóżmy i podzielmy drugi wyraz przez  $x^2$ , a otrzymamy:

$$c dy + \frac{(Kx dy - Ky dx) x^2}{x^2(x^2 + y^2)} = 0$$

Całka tego równania daną jest przez:

$$cy + K \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right) = C_1 \quad (25)$$

gdzie  $C_1$  oznacza stałą dowolną.

Jest to równanie drogi, jaką element  $E$  przebiegać będzie wskutek działania powyższych chyżości; czyli: jest to równanie linii prądu, względnie równanie odnośnej strugi cieczy.

W podobny sposób otrzymujemy dla linii fali skutecznej czyli dla linii potencjalnej równanie:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{c(x^2 + y^2) + Kx}{Ky}$$



$$Ky dy + c(x^2 + y^2) dx + Kx dx = 0$$

$$c dx + K \frac{y dy + x dx}{x^2 + y^2} = 0$$

$$cx + \frac{K}{2} \cdot \log(x^2 + y^2) = \text{Const}$$

$$(26) \quad K \cdot \log(x^2 + y^2) \pm 2cx = C_2$$

gdzie również  $C_2$  oznacza stałą dowolną.

**72** Niechaj tą warstwą cieczy będzie woda wgłębna, znajdująca się w warstwie wodonośnej, rozpostartej na pochylonej warstwie nieprzepuszczalnej. Chyżość wody, spływającej po tej warstwie, niech będzie  $c = 4$  mtr. na 24 godzin. Za pomocą wierceń znaleziono, że grubość warstwy wody wynosi  $h = 3$  m. Ma być założoną studnia, z której za pomocą pompy ma się pobierać 105 lit. na sekundę, czyli  $9072$  m<sup>3</sup> na dobę. Ta ilość wody dopływać będzie do studni z dowolnego okręgu o promieniu  $r$ , z chyżością  $v$ , będzie więc:

$$M = 9072 \text{ m}^3 = 2r\pi h \cdot v$$

a ztąd wypada:

$$rv = K = 481.3$$

Element wody, znajdujący się na prostej, przechodzącej przez środek studni, a równoległej do kierunku ruchu wody wgłębnej, nie dozna zboczenia, lecz tylko powiększenia lub zmniejszenia chyżości. Na tej prostej, a więc w osi  $x$  znajdzie się punkt taki, w którym chyżość ruchu wody wgłębnej zrówna się z chyżością, udzieloną dotyczącemu elementowi wody przez pompę, w kierunku przeciwnym. Niech odległość tego punktu od środka studni będzie  $a$ , to musi zachodzić związek

$$v = \frac{K}{a} = c$$

a ztąd wypada  $a = 120.34 = x$ .

Rzędna tego punktu jest  $y = 0$ .

Wstawiwszy te wartości w równanie dla linii prądu, otrzymamy

$$0 + K \cdot \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{0}{-x}\right) = C_1 = K\pi$$

czyli

$$C_1 = 1514.16.$$

Rzędna dowolnego punktu tej linii, położonego na promieniu wo-



dzącym z punktu  $A$ , zawierającym z osią  $Ax$  kąt  $\alpha$ , będzie dana według równania 25 przez:

$$y = \frac{1514.16 - 481.3 \cdot \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{y}{x}\right)}{4}$$

Niech kąt  $\alpha$  wynosi  $30^\circ$ , to łuk tego kąta będzie:

$$\text{arc } 30^\circ = \frac{\pi}{6} = 0.523$$

Wstawiając tę wartość w równanie na  $y$  otrzymamy:

$$y = 315.6$$

Poprowadziwszy więc z punktu  $A$  promień nachylony pod kątem  $30^\circ$  do osi  $Ax$ , odetnijmy na osi  $Ay$  długość  $y = 315.6$  *mt.* i poprowadźmy przez ten punkt równoległą do osi  $Ax$ ; gdzie równoległa przecnie promień wodzący, tam leży szukany punkt dotyczącej linii prądu.

Na fig. 24 są linie prądu i linie potencjalne przedstawione. W celu wykreślenia linii prądu, obwód koła zatoczonego z punktu  $A$  dowolnym promieniem, podzielony został na 48 części. Kąt zawarty między dwoma promieniami podziałkowymi wynosi  $\frac{360}{48} = 7.5^\circ$ .

Biorąc kolejno łuki, odpowiadające tym kątom między promieniami, oblicza się według powyższego wzoru dotyczące rzędne uważanej linii prądu, które są w następującej tabliczce zestawione:

Kąt $\alpha$	Łuk $\alpha$	$K \cdot \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{y}{x}\right)$	$y$
30	0.523	251.72	315.6
37.5	0.654	314.77	300.0
45	0.785	377.80	284.6
52.5	0.915	440.86	268.4
60	1.047	502.81	252.6
67.5	1.180	566.97	236.9
75	1.309	630.00	221.0
90	1.570	755.60	189.2
105	1.932	881.70	158.1
120	2.094	1007.80	126.1
150	2.618	1260.00	63.1
180	3.141	1514.16	0



Fig. 25.

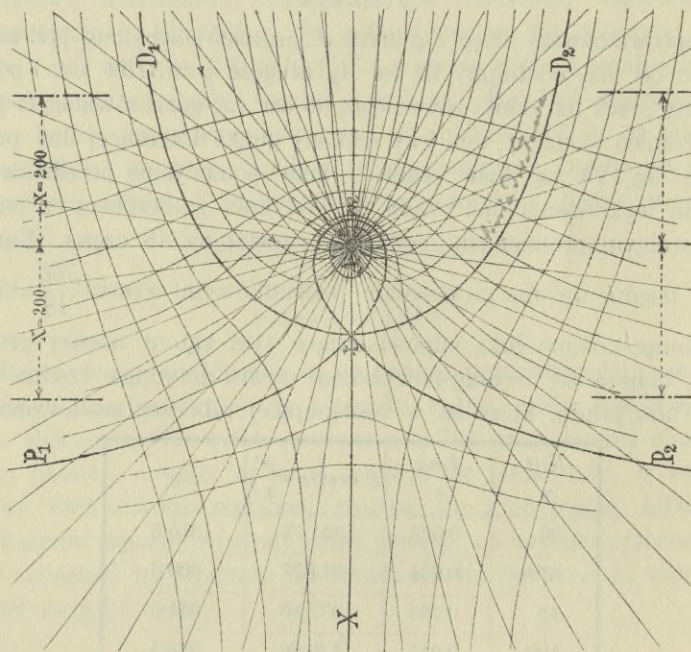
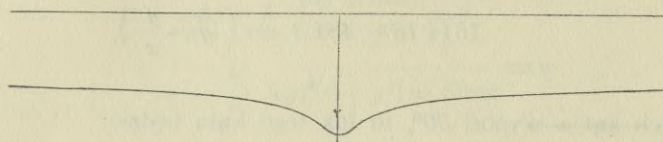
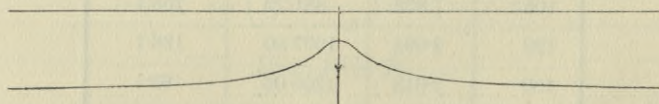


Fig. 24.

Fig. 26.





Otrzymana w ten sposób linia dzieli warstwę cieczy odnośnie do centra atrakcyjnego na dwie części, a mianowicie: w części, objętej ramionami tej linii dążą wszystkie linie prądu, względnie strugi, do centra atrakcyjnego, natomiast strugi, położone po za obrębem tej linii do centra atrakcyjnego nie dochodzą. Linia ta nazywa się linią działową i jest na fig. 24 oznaczoną literami  $D_1 Z D_2$ .

W celu wykreślenia linii potencjalnych przyjmujemy dowolne  $x$  i  $y$  i szukamy odpowiedniej stałej  $C_2$ . Tak na przykład dla punktu zwrotnego  $Z$ , dla którego  $y=0$ ,  $x=-a=-120\cdot34$ .

będzie

$$C_2 = K \log x^2 - 2cx,$$

$$C_2 = 481\cdot3 \log (120\cdot34)^2 - 8\cdot 120\cdot34 = 3645\cdot4.$$

Według tej stałej obliczone są wszystkie inne punkty odnośnej krzywej potencjalnej i zestawione w następującej tabliczce:

$C_2 = 3645\cdot4$		$C_2 = 3645\cdot4$	
$x$	$y$	$x$	$y$
+ 33·5	0	-120·34	0
+ 20·0	31·6	-150·0	32·2
0	44·0	-175·0	70·7
- 25·0	48·2	-200·0	118·8
- 50·0	44·4	-250·0	248·4
- 75·0	33·8	-300·0	442·0
-100·0	18·4	—	—

Krzywa w ten sposób znaleziona, przechodząca przez punkt zwrotny  $Z$ , jest wykreślona na fig. 24 i oznaczona literami  $P_1 Z m Z P_2$ ; przedstawia ona pętlę z dwoma ramionami. Wszystkie strugi, wchodzące do studni, przecinają pętlę pod kątem prostym, natomiast strugi, do studni nie dochodzące, nie przecinają się z pętlą, lecz tylko z ramionami jej i także pod kątem prostym. W podobny sposób można więc wykreślić dowolną strugę i dowolną linię potencjalną. Krzywe potencjalne przedstawiają tutaj tak zwane warstwice. Jeżeli zapomocą wiercenia stwierdzono wysokość powierzchni wody w jednym punkcie, to wykreśliwszy przechodzącą przez ten punkt krzywą potencjalną, otrzymujemy wszystkie punkty położone w tej samej wysokości powierzchni wody.



Gdy pierwotnie, przed ustawieniem pompy, wszystkie strugi wodne były dane przez proste równoległe do kierunku ruchu, i każdy element poruszał się z chyżością  $c$ , a więc elementy wody, które w danej chwili znajdowały się na prostopadłej do kierunku ruchu, znalazły się po uływie jednostki czasu znowu na linii prostej, przechodzącej prostopadle do kierunku ruchu; to wskutek działania pompy elementy wody, znajdujące się w uważanej chwili na prostopadłej do osi  $Ax$ , znajdować się będą po upływie jednostki czasu na obwodzie linii krzywej, która tu zastępuje miejsce tak zwanej »poziomej paraboli« chyżości, a dana jest przez równania

$$\left(\frac{V}{x}\right) = c + \frac{Kx}{x^2 + y^2}$$

$$\left(\frac{V}{y}\right) = \frac{Ky}{x^2 + y^2}$$

które są zarazem równaniami składowych chyżości wypadkowej w kierunku  $x$  i  $y$ .

Na fig. 25, 26 są przedstawione poziome krzywe prędkości dla profilu o 200 m. powyżej studni, i dla profilu, o 200 m. poniżej studni położonego. Profile wzięte są prostopadle do osi  $x$ .

### 8. Rozwiązanie ogólne.

Cienka warstwa wody, rozpostarta na stoku płaskim, płynie w danym kierunku z chyżością  $c$ .

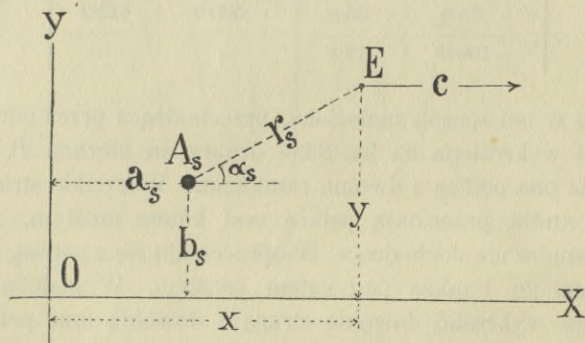


Fig. 27.

Na dnie znajduje się  $n$  otworów, przez które ciecz dopływa lub odpływa; otwory te tworzą więc centra atrakcyjne lub repulsyjne o różnym natężeniu.



Przyjmując dowolny układ prostokątnych osi współrzędnych, w którym oś  $x$  przyjmujemy równoległe do kierunku naturalnego ruchu cieczy, oznaczmy przez  $xy$  położenie dowolnego jej elementu, a przez  $a_1 b_1 \dots a_2 b_2 \dots a_s b_s \dots$  położenie centrów atrakcyjnych, których natężenie niech będzie danem przez:

$$r_1 v_1 = K_1, r_2 v_2 = K_2 \dots r_s v_s = K_s \dots$$

Na wyrażenie składowych chyżości wypadkowej w kierunku osi  $ox, oy$  otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{V}{x} \right) &= c \pm \sum_{s=1}^{s=n} K_s \frac{x-a_s}{r_s^2} \\ \left( \frac{V}{y} \right) &= \pm \sum_{s=1}^{s=n} K_s \frac{y-b_s}{r_s^2} \end{aligned} \right\} (27)$$

Na wyrażenie analityczne warstwie i trajektorii (linii potencjalnych i linii prądu), otrzymamy:

a) dla linii prądu:

$$cy \pm \sum_{s=1}^{s=n} K_s \arcc\left( \operatorname{tg} \frac{y-b_s}{x-a_s} \right) = \operatorname{Const}$$

b) dla linii potencjalnych

$$cx \pm \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{2} K_s \log [(x-a_s)^2 + (y-b_s)^2] = \operatorname{Const}$$

Jeżeli  $c=0$ , to powyższe równania przechodzą w następujące:

a) dla linii prądu:

$$K_1 \alpha_1 + K_2 \alpha_2 + \dots \pm \dots \pm K_s \alpha_s \pm \dots = \operatorname{Const}$$

b) dla linii potencjalnych

$$r_1^{K_1} \cdot r_2^{K_2} \cdot r_s^{K_s} \dots = B$$

$\Psi$  N. p.:

W cienkiej warstwie cieczy znajdują się dwa centra atrakcyjne:  $A_1$  i  $A_2$ , których położenie danem jest przez:

$$a_1 = a_2 = a, b_1 = b_2 = 0$$

Natężenie tych centrów jest danem przez:

$$r_1 v_1 = K, r_2 v_2 = 2K$$

Równanie linii prądu będzie danem przez:



$$\arcsin\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x+a}\right) + 2 \arcsin\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x-a}\right) = \text{Const}$$

Po rozwinięciu tego równania otrzymujemy

$$\frac{y[3x^2 - y^2 - 2ax - a^2]}{x[x^2 - 3y^2 - a^2] - a[x^2 - y^2 - a^2]} = A.$$

Linie prądu będą więc liniami trzeciego stopnia, a trzy linie szczególne będą hyperbolami.

Zakładając w powyższem równaniu  $y=0$ , otrzymujemy:  $x = \pm a$ ; wszystkie strugi przechodzą przez centra atrakcyjne. Dla  $y=0$ , otrzymujemy również:  $-x = \frac{a}{3}$ ; jedna struga szczególna nie przechodzi przez centra atrakcyjne; jej równanie danem jest przez:

$$3x^2 - y^2 - 2ax - a^2 = 0;$$

jest to hyperbola, której oś wielka równa się  $\frac{a}{3}$ , a oś mała równa się  $a$ . Ta linia prądu rozgranicza warstwę cieczy na dwa obszary, należące do odnośnych centrów atrakcyjnych; elementy cieczy, położone w jednym obszarze, nie dochodzą do drugiego.

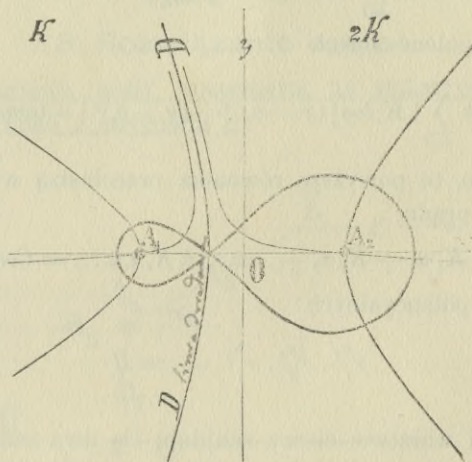


Fig. 28.

Równanie:

$$x^2 - 3y^2 - a^2 = 0$$

przedstawia główną linię prądu, przechodzącą przez środek  $A_1$  normalnie do osi  $x$ ; a równanie



$$x^2 - y^2 - a^2 = 0$$

taką samą linię prądu dla środka  $A_2$ .

Dla linii potencjalnych otrzymamy równanie:

$$r_1 r_2^2 = B,$$

albo też:  $[(x+a)^2 + y^2]^{1/2} \cdot [(x-a)^2 + y^2] = B$

Podstawiając w powyższym równaniu  $y=0$ ,  $x = -\frac{a}{3}$ , otrzymujemy wartość dowolnej stałej potencjalnej dla pętlicy:

$$B = r_1 r_2^2 = \frac{32}{27} a^3$$

Na powyższej fig. 28, są przedstawione rzeczony główne strugi i pętlica, oraz dwie strugi dowolne.

## 9. Dwa centra atrakcyjne w warstwie płynącej wody wgłębnej.

Zakładając, że woda wgłębna w warstwie wodonośnej porusza się z chyżością  $c$ , w kierunku prostopadłym do osi, łączącej środki obu studzien, przyjmujemy zarazem, że natężenia tych studzien są jednakowe, t. j. że:

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 = K.$$

Przyjmując dalej, że wzajemna odległość studzien wynosi  $200 \text{ m}$ , którą celem zmniejszenia wielkości liczb w rachunku przyjęto jako:

$$2a = 2$$

tudzież, że stosunek chyżości ruchu wody w warstwie, do natężenia studzien wynosi:

$$\frac{c}{K} = 0.8.$$

wykreślono na fig. 29 odpowiadające temu przypadkowi linie prądu i linie potencjalne, których równania, wynikające bezpośrednio z równań l. (28) dane są przez:

$$\frac{1}{2} \log [(x+a)^2 + y^2] \cdot [(x-a)^2 + y^2] + \frac{c}{K} y = \log B \quad (29)$$

$$\arcsin \left( \frac{y}{x+a} \right) + \arcsin \left( \frac{y}{x-a} \right) - \frac{c}{K} x = A_1$$

Z porównania fig. 29. i fig. 8. poznajemy różnice w ukształtowaniu się warstwie i strug powstałych w ruchomej i w stojącej



warstwie wody w głębszej, podczas działania dwu studzien jednokowego natężenia.

Poniżej podaję kilka obliczeń, zapomocą których linie na fig. 29 wykreślone zostały. N. p. mam wykreślić linię potencjalną, przecinającą oś  $y$  w punkcie danym przez  $x=0$ ,  $y=300$  m. Ponieważ już powyżej zamiast  $2a=200$  m. przyjąłem  $2a=2$ , przeto i tu przyjmuję na  $y$  zamiast  $300$  m. wartość stosunkową 3. Mam więc dane następujące wartości:

$$a=1, \frac{c}{K}=0.8, x=0, y=3,$$

wstawiam je w równanie (29) i otrzymuję:

$$\frac{1}{2} \log(1+9)(1+9) + 0.8 \cdot 3 = \log 10 + 2.4 = \log B$$

ponieważ  $\log 10 = 2.30258509$ , przeto po wstawieniu wartości i zaniechaniu dalszych miejsc dziesiętnych otrzymuję:

$$\log B = 4.70$$

W celu wyznaczenia następných punktów tej samej linii potencjalnej, przyjmuję n. p.  $y=2.80$ , lecz  $x$  muszę z równania na  $\log B$ , obliczyć. Otrzymuję przeto:

$$\frac{1}{2} \log[(x+1)^2 + 7.84][(x-1)^2 + 7.84] + 0.8 \cdot 2.80 = 4.70$$

$$\text{albo: } \log[(x+1)^2 + 7.84][(x-1)^2 + 7.84] = 2(4.70 - 2.24)$$

Po uwolnieniu od logarytmu, przy użyciu tablic logarytmów naturalnych będzie:

$$[(x+1)^2 + 7.84][(x-1)^2 + 7.84] = e^{4.92} = 137$$

Rozwinąwszy to równanie otrzymuje się po skróceniu:

$$x^4 + 13.68x^2 - 58.8544 = 0$$

z czego wypada:

$$x^2 = -6.84 \pm 10.27, \pm x = \sqrt{3.43} = 1.85.$$

Tak otrzymane rzędne zestawia się w tabliczkę dla każdej linii z osobna. (str. 43).

W celu obliczenia strugi dowolnej przyjmuje się dowolny punkt, którego rzędne są określone według powyższych założeń, a przez który struga ma przechodzić. N. p.  $x=4.50$ ,  $y=3.50$ , te wartości wstawia się w równanie na strugę (29), któremu nadaje się kształt:

$$\frac{2xy}{x^2 - a^2 - y^2} = \operatorname{tg}\left(A_1 + \frac{c}{K}x\right)$$



Po wstawieniu wartości będzie:

$$\operatorname{tg}(A_1 + 0.8 \cdot 4.50) = 4.5$$

$\log B = 4.70$	
$y$	$x$
3.00	0
2.80	1.85
2.50	2.97
2.00	4.34
1.00	7.02
0	10.53

przeto  $\operatorname{Log} \operatorname{tg}(A_1 + 3.60) = 10.6532125$ ,  
ten logarytm na styczną odpowiada kątowi:

$$77^\circ 28' 15''$$

temu zaś kątowi przynależny łuk wynosi:

$$A_1 + 3.60 = 1.352121,$$

z czego wypada:  $A_1 = -2.247879$

W celu wyznaczenia dalszych punktów tej strugi przyjmuję n.p.  $x = 4$ , a  $y$  muszę obliczyć; wstawiam tedy wartość na  $x$  w powyższe równanie i otrzymuję:

$$\frac{8y}{15 - y^2} = \operatorname{tg}(-2.247879 + 0.84) = \operatorname{tg}(54^\circ 33' 9'') = 1.4046$$

z czego się otrzymuje:

$$y^2 + 5.69y - 15 = 0,$$

a z tego wypada  $y = +1.95$

Dla tej samej strugi mamy więc już dane punkty przez:

$$x = 4.50, y = 3.50, x = 4.00, y = 1.95.$$

W podobny sposób wyszukuje się resztę punktów, których rzędne zestawia się w tabliczkę dla każdej strugi, w celu jej wykreślenia. Przy obliczaniu strug trzeba zawsze zwracać uwagę na każdorazowe przejście łuku:  $(A_1 + \frac{c}{K}x)$  przez wielokrotność wartości  $\frac{\pi}{2}$ , powodującą zmianę znaku.

Na fig. 29. oznaczoną jest główna struga literami  $GG$ , punkt zwrotny literą  $z$ , a dział wód literami  $DzD$ , przyczem na każdej linii potencjalnej wypisane są logarytmy dotyczącej stałej potencjalnej  $B$ .



Z równania (29), po uwolnieniu od logarytmu, otrzymujemy wyrażenie:

$$[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} \cdot [(x-a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{c}{K}y} = B$$

gdzie podstawiając  $x=0$ , będzie:

$$(30) \quad (a^2 + y^2) e^{\frac{c}{K}y} = B$$

równaniem zmiany potencjału w osi  $y$ .

Uważając stałą dowolną  $B$  jako zmienną, zależną od  $y$ , i różniczkując równanie (30) otrzymamy:

$$(31) \quad \frac{dB}{dy} = e^{\frac{c}{K}y} \left\{ 2y + \frac{c}{K} (a^2 + y^2) \right\}.$$

Równanie (31) przybiera wartość zera, dla:

$$(32) \quad y^2 + \frac{2}{c} y + a^2 = 0$$

Po rozwiązaniu powyższego równania otrzymujemy:

$$y_g = -\frac{1}{c} + \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{c}{K}\right)^2} - a^2}$$

jako rzędne punktu, w którym główna struga przechodzi przez oś  $y$ , tudzież

$$y_a = -\frac{1}{c} - \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{c}{K}\right)^2} - a^2}$$

na rzędne przecięcia się działu wód z osią  $y$ .

Dla wypadku przedstawionego na fig. 29 jest:  $y_g = -0.50$ ,  
 $y_a = -2$ .

## 10. Kształt typowy tak zwanej paraboli chyżości.

W zbiorniku bardzo wielkim, nieograniczonym, jest rozpostarta warstwa cieczy o bardzo małej grubości  $\lambda$ ; na poziomym dnie zbiornika znajduje się mały otwór, przez który ciecz wypływa. Otwór ten będzie centrem atrakcyjnym dla warstwy cieczy w zbiorniku zawartej. Wypływ niech będzie trwały, to znaczy, że w każdej jednostce czasu wypływa przez otwór ta sama ilość cieczy.

Wszystkie elementy cieczy, znajdujące się w danej chwili na



obwodzie walca prostokątnego, którego wysokością jest grubość warstwy, a podstawą koło, zatoczone ze środka otworu dowolnym promieniem  $r$ , będą płynęły do otworu z jednakową chyżością  $v$ , gdyż gęstość cieczy w warstwie o małej grubości jest w każdym kierunku jednokowa. Masa cieczy przepływającej na jednostkę czasu przez obwód rzeczonoego walca będzie, ze względu na trwałość ruchu, taką samą, jaka w jednostce czasu przez otwór wypływa; za podstawieniem  $\sigma = I_1$  będzie:

$$M = 2 r \pi \lambda v$$

Przez obwód walca o promieniu  $r_1$  będzie przepływać ta sama ilość cieczy z chyżością  $v_1$ , przeto:

$$M = 2 r_1 \pi \lambda v_1$$

a z powyższych równań otrzymuje się:

$$r v = K$$

gdzie  $K$  oznacza ilość stałą.

Poprowadźmy w dowolnej odległości od centra atrakcyjnego płaszczyznę pionową w dowolnym kierunku; płaszczyzna ta przetnie się z warstwą cieczy w pasku pionowym, który w rzucie poziomym jest przedstawiony jako prosta  $MN$  na fig. 30.

Prostopadłą do  $MN$ , poprowadzoną z centra atrakcyjnego, przyjmijmy za oś  $x$ , a równoległą do  $MN$ , przechodzącą przez centrum, za oś  $y$ . Ponieważ skuteczne fale, rozchodzące się z centra atrakcyjnego, są powierzchniami obwodowymi współśrodkowych walców kołowych, więc w rzucie poziomym będą się te fale przedstawiały jako koła współśrodkowe, przecinające się z prostą  $MN$  w punktach rozłożonych symetrycznie po obu stronach osi  $ox$ .

Oznaczmy odległość centra od prostej  $MN$  przez  $OA = a$ . Linie falowe o promieniu mniejszym od  $a$  nie przetną się z prostą  $MN$ .

Każdy element cieczy, położony w pasku  $MN$ , należy do innej linii falowej, oznaczonej odległością dotyczącego elementu od centra atrakcyjnego; będzie więc płynął ku temu centru z chyżością, odpowiadającą dotyczącej fali. Kierunek ruchu każdego z tych elementów jest w tym wypadku danym przez prostą, łączącą dotyczący element z centrem atrakcyjnym. Dowolny zatem element  $E$ , leżący na prostej  $MN$ , którego odległość od centra wynosi:  $OE = r$ , poruszać się będzie wzdłuż tego promienia z chyżością:  $v = \frac{K}{r}$ .



Niech  $\left(\frac{v}{x}\right)$  oznacza chyżość  $r$  elementu cieczy, położonego na linii  $MN$  w najmniejszej odległości od centra; t. j. w punkcie  $A_1$  dla tego elementu będzie:

$$\left(\frac{v}{x}\right)_0 \cdot a = K.$$

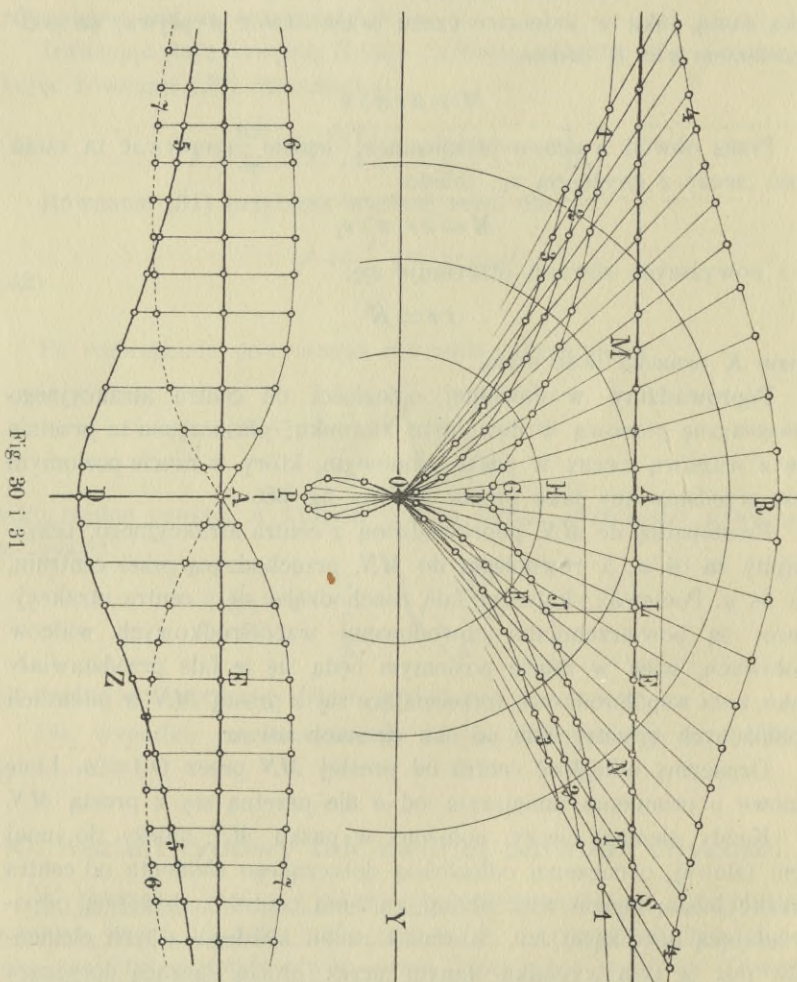


Fig. 30 i 31

Dla dowolnego elementu  $E$  jest

$$v \cdot r^2 = K$$

a ztąd wynika:

$$v = \frac{a}{r} \left(\frac{v}{x}\right)_0$$



Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt, zawarty między promieniem  $OE$  i osią  $Ox$ , w takim razie wynika z trójkąta  $OAE$ , że:

$$OA = OE \cos \alpha$$

czyli:

$$a = r \cos \alpha$$

co wstawione w równanie na chyżość elementu  $E$ , daje:

$$v = \left( \frac{v}{x} \right)_0 \cdot \cos \alpha.$$

To oznacza dla uważanego wypadku: że chyżość dowolnego elementu cieczy, położonego na prostej  $MN$ , jest iloczynem z chyżości elementu, położonego w osi  $Ox$ , przez dostawę kąta, jaki promień wodzący uważanego punktu tworzy z osią  $Ox$ .

Przyjąwszy na przedstawienie chyżości  $\left( \frac{v}{x} \right)_0$  długość  $AD = \left( \frac{v}{x} \right)_0$  zatoczmy koło z punktu  $O$  promieniem  $OH = AD$  i połączmy punkt  $E$  z punktem  $O$ ; wtedy kąt  $EOA$  będzie równy  $\alpha$ . Z punktu, w którym promień  $OE$  przecina się z kołem, zatoczonym promieniem  $OH$ , t. j. z punktu  $F$ , poprowadźmy prostopadłą do osi  $Ox$ , aż do przecięcia z tą osią w punkcie  $G$ ; wtedy długość  $OG$  będzie daną przez

$$OG = OF \cos \alpha = OH \cos \alpha = AD \cos \alpha = \left( \frac{v}{x} \right)_0 \cos \alpha$$

Długość  $OG$  będzie więc przedstawiała chyżość  $v$  elementu  $E$  wzdłuż prostej  $EO$ , czyli w kierunku linii prądu w punkcie  $E$ .

Odnaczywszy więc na promieniu  $EO$  z punktu  $E$ ,  $EI = OG = v$ , otrzymamy punkt  $I$ , przedstawiający położenie elementu  $E$  po upływie jednostki czasu od owej chwili, w której dotyczący element cieczy znajdował się w położeniu  $E$  na prostej  $MN$ . Dowolny inny element cieczy, znajdujący się w uważanej chwili na prostej  $MN$  w punkcie  $S$ , znajdzie się po upływie jednostki czasu na promieniu  $SO$  w położeniu  $T$  i t. d. Wyznaczywszy w podany sposób położenia dowolnych punktów prostej  $MN$  po upływie jednostki czasu na dotyczących promieniach, połączmy kolejno uzyskane punkty ze sobą; wtedy otrzymamy linię krzywą, oznaczoną na fig. 30 przez  $I.D.I.T.$  albo przez  $I.D.I.$

Linia ta przedstawiać będzie położenia wszystkich elementów cieczy, które w danej chwili znajdowały się na prostej  $MN$ , po upływie jednostki czasu od owej chwili; będzie więc tak zwaną parabolą chyżości. Nazwijmy tę linię tachoidą. Niech rzędne



dowolnego elementu cieczy, położonego na prostej  $MN$  w punkcie  $E$ , dane będą przez:  $OA = x = a, \dots AE = y$ ; a rzędne punktu tachoidy, odnoszącego się do elementu  $E$ , a więc punktu  $I$ , przez  $\xi = OA - IL, \dots \eta = AE - EL$ .

Natenczas zachodzić będzie związek

$$IL = EI \cdot \cos \alpha, \dots EL = EI \sin \alpha$$

a ponieważ

$$EI = OG = v$$

przeto będzie:  $\xi = a - v \cos \alpha, \dots \eta = y - v \sin \alpha$ .

Zostawiwszy w obu równaniach wyrazy kątomiernicze po jednej stronie, utworzymy kwadraty tych równań i dodajmy do siebie, natenczas otrzymamy:

$$(a - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = v^2$$

Ponieważ  $r^2 = a^2 + y^2$ , a  $v^2 = \frac{a^2}{r^2} \cdot \left(\frac{v}{x}\right)_0^2$

przeto powyższe równanie przekształca się na:

$$(a^2 + y^2) \{ (a - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \} = a^2 \left(\frac{v}{x}\right)_0^2$$

Ponieważ dalej:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{a} = \frac{\eta}{\xi}$

czyli  $y = a \frac{\eta}{\xi}$

więc podstawivszy zamiast  $y$  wartość  $a \frac{\eta}{\xi}$  w powyższe równanie, otrzymamy po uproszczeniu:

$$(33) \quad (\xi^2 + \eta^2)(a - \xi) = \xi \left(\frac{v}{x}\right)_0$$

jako równanie rzeczonyj tachoidy; z czego się okazuje, że tachoida, powstała w cienkiej warstwie cieczy wskutek działania jednego centra atrakcyjnego, jest linią trzeciego stopnia.

Tworząc z tego równania iloraz różniczek zmiennych  $\xi$  i  $\eta$ , otrzymamy:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{(\xi^2 + \eta^2) - 2\xi(a - \xi) + \left(\frac{v}{x}\right)_0}{2\eta(a - \xi)}$$



Dla  $\eta = 0$  jest  $tg(\varphi) = \infty$ . Styczna, poprowadzona przez punkt:  $\eta = 0$ ,  $\xi = a - \left(\frac{v}{x}\right)_0$  do tachoidy, jest równoległą do osi  $Oy$ .

Dla  $\xi = a$  jest  $\eta = y = \infty$ ,  $tg\varphi = \infty$

Prosta  $MN$  jest ledwo niestyczną tachoidy. Jeżeli chyżość w głównej strudze, t. j. w kierunku prostopadłej, poprowadzonej z centra atrakcyjnego do prostolinijnego układu elementów  $MN$ , jest co do wielkości równą odległości centra atrakcyjnego od prostej  $MN$ , t. j. dla  $\left(\frac{v}{x}\right)_0 = a$ , natenczas tachoida będzie miała szczyt położony w punkcie środkowym układu współrzędnych i przybierze kształt, przedstawiony na fig. 30, a oznaczony  $2O2$ .

Jeżeli chyżość w strudze głównej jest większą od odległości centra atrakcyjnego od prostej  $MN$ , t. j. jeżeli  $\left(\frac{v}{x}\right)_0 > a$ , natenczas tachoida przejdzie po za centrum atrakcyjne, tworząc z niem pętlę; a kształt tej tachoidy przedstawia na fig. 30. linia, oznaczona przez  $3OP3$ .

Gdyby centrum  $O$  było centrem repulsyjnym, t. j. gdyby przez centrum  $O$  ciecz dopływała do warstwy, natenczas tachoida przedstawiałaby się według kształtu linii  $4R4$  na fig. 30.

Rozłożywszy chyżość  $v$  elementu  $E$  na składowe w kierunku osi  $Ox$  i  $Oy$ , otrzymamy dla składowej w kierunku  $Ox$ :

$$\left(\frac{v}{x}\right) = v \cos \alpha,$$

a w kierunku  $Oy =$

$$\left(\frac{v}{y}\right) = v \sin \alpha.$$

Wyprowadziwszy z punktu  $E$  prostopadłą do  $MN$ , czyli równoległą do osi  $Ox$ , odetnijmy na tej prostopadłej długość  $EZ = v \cos \alpha$  w kierunku składowej  $\left(\frac{v}{x}\right)$ . Uczyniwszy to dla każdego elementu, położonego w prostej  $MN$ , otrzymamy szereg punktów, które połączone ze sobą, dadzą linię krzywą, przedstawiającą zmianę wielkości składowej  $\left(\frac{v}{x}\right)$ , z rosnącą rzędną  $y$  dotyczącego elementu cieczy w prostej  $MN$ . Linia ta będzie tachoidą dla chyżości składowej w kierunku  $x$ . Linia ta jest na fig. 31 oznaczona przez  $5D5$ .

Związek, zachodzący między wartością  $\left(\frac{v}{x}\right)$  a rzędną  $y$  uważanego elementu cieczy, położonego w prostej  $MN$ , będzie:



$$\left(\frac{v}{x}\right) = v \cdot \cos \alpha, \quad v = \frac{a}{r} \left(\frac{v}{x}\right)_0, \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}, \quad r^2 = a^2 + y^2$$

z czego wypada:

$$(34) \quad (a^2 + y^2) \left(\frac{v}{x}\right) = a^2 \left(\frac{v}{x}\right)_0$$

Jeżeli więc daną jest chyżość elementu w strudze głównej, t. j. w osi  $Ox$ , odległość centra od układu prostoliniowego  $MN$  i rzędna  $y$  tego elementu, którego składowa  $\left(\frac{v}{x}\right)$  ma być wyznaczoną, to powyższe równanie da nam wielkość tej składowej.

Jest to również linia trzeciego stopnia, dla której lewonośstyczną jest linia  $MN$ . W równaniu tachoidy dla  $\left(\frac{v}{x}\right)$  jest linia  $MN$  przyjętą za oś  $y$ , a środkiem układu współrzędnych jest punkt przecięcia się głównej strugi z prostą  $MN$ . Równaniu temu można nadać kształt inny, przyjmując inne położenie dla środka układu współrzędnych. Przyjmijmy więc wierzchołek tej tachoidy, jako środek układu osi sprzężonych, zatrzymując jednakowoż ich kierunki. W tym celu podstawmy

$$x = \left(\frac{v}{x}\right)_0 = \left(\frac{v}{x}\right)$$

i wstawmy wartość na  $\left(\frac{v}{x}\right)$  w powyższe równanie tachoidy, a otrzymamy:

$$\left(\left(\frac{v}{x}\right)_0 - x\right)(a^2 + y^2) = a^2 \left(\frac{v}{x}\right)_0$$

Po uproszczeniu będzie:

$$(35) \quad \left(\frac{v}{x}\right)_0 \cdot y^2 - a^2 x - xy^2 = 0$$

Dla punktów tachoidy, położonych w pobliżu strugi głównej, będą rzędne  $x$  i  $y$  bardzo małe; a tem bardziej iloczyn  $xy^2$  małym będzie; więc można go z równania opuścić dla punktów położonych w pobliżu środka układu osi. W takim razie otrzymamy:

$$(36) \quad \left(\frac{v}{x}\right)_0 y^2 - a^2 x = 0;$$

a zakładając

$$\frac{a^2}{\left(\frac{v}{x}\right)_0} = 2p$$



uzyskamy dla tachoidy uproszczone równanie dla rzędnych małych:

$$y^2 = 2px \quad (37)$$

Jest to równanie paraboli, a różne pomiary chyżości wody płynącej wykazały, że w łożyskach bardzo regularnych, linia, według której zmienia się chyżość na powierzchni wody płynącej, lub wogóle w płaszczyźnie poziomej lub pionowej, jest w przybliżeniu parabolą.

Przyjmując układ prostoliniowy elementów cieczy, założmy, że centrum atrakcyjne znajduje się w odległości:

$$a = 1.5 \text{ mtr.}$$

od tego układu, a chyżość w strudze głównej ma wartość:

$$\left(\frac{v}{x}\right)_0 = 1.00 \text{ mtr.}$$

W takim razie otrzymamy dla paraboli:

$$2p = 2.25$$

z czego na położenie ogniska i punktu, przez który przechodzi kierownica paraboli, otrzymamy

$$\pm x_v = \frac{p}{2} = 0.5625$$

z tego wykreślić można parabolę.

Dla dowolnej małej rzędnej  $y$  wyrachujmy odpowiednią odciętą paraboli, n. p. dla  $y = 0.20$ ; wypada z równania paraboli  $x = 0.01777$ .

Wstawivszy zaś wartość  $y = 0.20$  w równanie tachoidy, odniesionej do tego samego układu współrzędnych, t. j. w równanie (35)

$$\left(\frac{v}{x}\right)_0 y^2 = x(a^2 + y^2)$$

uzyskuje się wartość:  $x = 0.01751$

Na fig. 32 jest wykreślona tachoida i parabola dla  $a = 1.5$ ,  $\left(\frac{v}{x}\right)_0 = 1.00$ , parabola jest zaznaczona linią pełną, punkty zaś tachoidy są oznaczone kółkami.

Dla składowej chyżości w kierunku osi  $y$  mieliśmy powyżej wartość:

$$\left(\frac{v}{y}\right) = v \cdot \sin \alpha \quad (38)$$



a. z tego wypada:

$$(28) \quad \left(\frac{v}{y}\right) = \frac{a \cdot y}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{v}{x}\right)_0$$

jako równanie chyżości składowej w kierunku  $y$ , wyrażonej przez chyżość w strudze głównej i przez rzędną dotyczącego elementu cieczy, w uważanym układzie prostoliniowym  $MN$ .

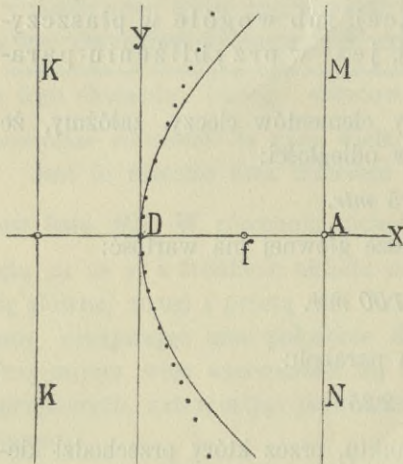


Fig. 32.

Wystawiając w dowolnych punktach linii  $MN$  prostopadłe i odcinając na nich wartości odnośnych  $\left(\frac{v}{y}\right)$ ; tudzież łącząc kolejno otrzymane punkty, otrzymamy linię krzywą, według której zmienia się  $\left(\frac{v}{y}\right)$  ze zmieniającym się  $y$ . Linia ta jest przedstawiona na fig. 31 i oznaczoną przez  $6A6$ , tudzież przez  $7A7$ , zależnie od tego, jaki kierunek dla  $\left(\frac{v}{y}\right)$  przyjęty zosta-

nie za dodatni lub ujemny. Wszystkie powyższe wywody odnoszą się także i do repulsyi.

## 11. Tachoida wskutek działania dwóch centrów.

W cienkiej warstwie cieczy dane są dwa centra atrakcyjne  $A_1$  i  $A_2$ , o natężeniu  $r_1 v_1 = r_2 v_2 = K$ . Prosta, łącząca środki centrów atrakcyjnych, niech będzie osią  $x$ , a prostopadła do niej w połowie odległości między centrami niech będzie osią  $y$ . Na prostej  $MN$ , równoległej do osi  $x$ , uważanym jest element  $E$ , na który działają centra atrakcyjne  $A_1$  i  $A_2$ . Odległość między centrami oznaczmy przez  $2a$ , a odległość prostej  $MN$  od osi  $x$  przez  $b$ . Rzędne punktu  $E$  będą  $x, b$ .

Pod tem założeniem uzyskuje się na składowe chyżości wypadkowej następujące równania:

$$(39) \quad \left(\frac{V}{y}\right) = Kb \left\{ \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{1}{(x+a)^2 + b^2} \right\}$$

$$\left(\frac{V}{x}\right) = K \left\{ \frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2 + b^2} \right\}$$



Pochodna z  $\left(\frac{V}{y}\right)$  względem  $x$  przybiera wartość zera

$$\frac{d\left(\frac{V}{y}\right)}{dx} = 0, \text{ dla } x = \infty.$$

Uważana prosta  $MN$  jest ledwonistyczną do tachoidy.

Dla  $x=0$ , jest styczna równoległą do  $MN$ , zaś wartość  $\left(\frac{V}{y}\right)$  jest *minimum* z wartości dla punktów, położonych między centrami. W punkcie  $x=0$  jest tachoida wklęsłą i przybiera wartość

$$\left(\frac{V}{y}\right) = \frac{2 \cdot Kb}{a^2 + b^2}$$

W punktach danych przez:

$$x = \pm \sqrt{a\sqrt{4a^2 + 5b^2} - a^2 - b^2}$$

jest wartość na  $\left(\frac{V}{y}\right)$  maksymalną. Prosta, równoległa do  $MN$ , styka się w dwóch punktach z tachoidą, jest ona tu wypukłą. Kierunek i wartość chyżości wypadkowej  $V$ , dla dowolnego punktu układu  $MN$ , są dane przez  $\left(\frac{V}{x}\right), \left(\frac{V}{y}\right)$ .

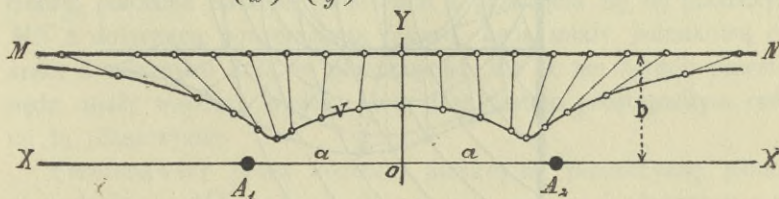


Fig. 33.

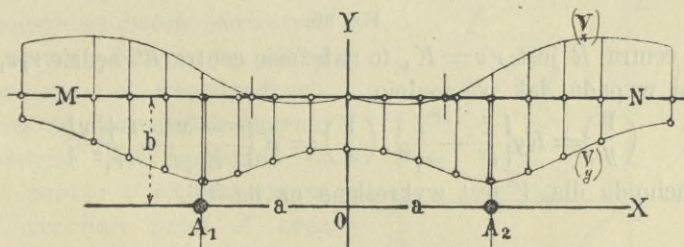


Fig. 34.

Tachoida  $V$  dla dwu centrów jest przedstawiona na fig. 33, a tachoidy  $\left(\frac{V}{y}\right)$  i  $\left(\frac{V}{x}\right)$  na fig. 34.



## 12. Fale odbite.

Niech płaska pozioma warstwa cieczy będzie ograniczoną z jednej strony płaszczyzną pionową, jakoby brzegiem. Fale wychodzące z centra atrakcyjnego lub repulsyjnego, uderzające o brzeg, rozejdą

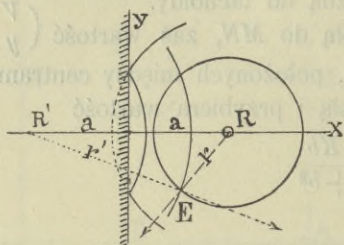


Fig. 35.

się według prawa odbijania fal, tak jak gdyby centrum dla fal odbitych znajdowało się po przeciwnej stronie płaszczyzny odbijającej, w tej samej odległości od brzegu, jak centrum wysyłające fale pierwotne. Gdy ruch cieczy, który powstał wskutek działania centra  $R$ , jest trwałym, natenczas dowolny element  $E$ , pobudzony do ruchu przez pierwotną falę o promieniu  $r_1$  pod

działaniu fali odbitej z centra  $R'$  o promieniu  $r_1$ . Jeżeli natę

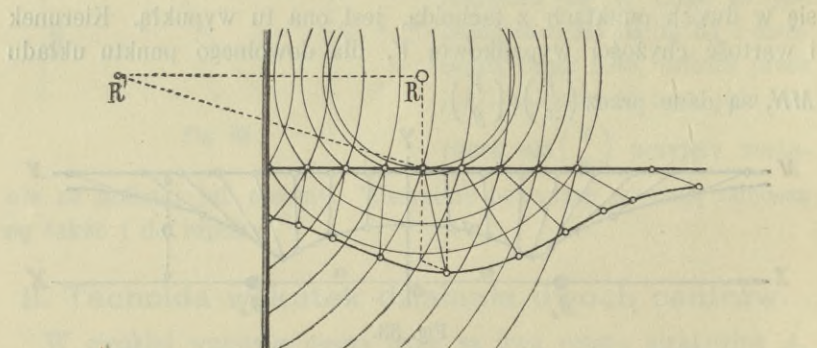


Fig. 36.

żenie centra  $R$  jest  $rv = K$ , to natężenie centra  $R'$  będzie  $r_1 v_1 = K$ , a ztąd wypada, jak poprzednio:

$$\left(\frac{V}{y}\right) = Ky \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} \right\}, \quad \left(\frac{V}{x}\right) = K \left\{ \frac{a-x}{r^2} - \frac{a+x}{r_1^2} \right\}$$

Tachoida dla  $V$  jest wykreślona na fig. 36.

## 13. Izotachy i powierzchnia tachoidalna.

Niech wewnątrz cieczy nieograniczonej, której gęstość jest w każdym kierunku stałą, znajduje się centrum atrakcyjne lub repulsyjne, przez które, na jednostkę czasu, odpływa lub dopływa stała ilość cie-



czy  $M$ . Fale wypływowe lub dopływowe, niosące na swej powierzchni zgodne fazy falowania, t. j. w tym wypadku, niosące na swej powierzchni elementy cieczy o równej chyżości, będą kulami współśrodkowemi. Przez powierzchnię takiej kuli o promieniu  $r$  przepływają elementy cieczy, mające chyżość  $v$ ; a ilość cieczy, przepływającej przez powierzchnie tej kuli na jednostkę czasu, będzie:

$$M = 4 r^2 \pi v \cdot \sigma$$

Jeżeli ruch jest trwały, to  $M$  będzie dla każdego czasu ilością stałą, więc przez kulę o promieniu  $r_1$  z chyżością  $v_1$  przepływa także

$$M = 4 r_1^2 \pi v_1 \sigma$$

a ztąd

$$r_1^2 v_1 = r^2 v = \text{Const.} = K$$

Poprowadźmy w odległości  $x = a$  od centra dowolną płaszczyznę  $MN$ , dajmy na to pionową; to ta płaszczyzna przetnie wszystkie fale, dla których promień  $r$  jest  $\geq a$ .

Ponieważ każda z tych powierzchni falowych niesie elementy cieczy z inną chyżością, przeto płaszczyzna  $MN$  zawierać będzie płaski układ elementów cieczy z różnemi chyżościami. Przecięcie kuli z płaszczyzną jest kołem, więc w płaszczyźnie  $MN$  wszystkie elementy cieczy, położone na kole, powstałym z przecięcia się tej płaszczyzny  $MN$  z dotychczasową powierzchnią falową, będą miały jednakową chyżość; a wszystkie koła w płaszczyźnie  $MN$  w ten sposób powstałe, będą miały wspólny środek, który jest rzutem prostopadłym centra na tą płaszczyznę.

Przesunąwszy przez centrum atrakcyjne płaszczyznę pionową równoległą do  $MN$ , tudzież płaszczyznę poziomą i płaszczyznę pionową prostopadłą do krawędzi przecięcia się dwóch pierwszych płaszczyzn, otrzymamy układ płaszczyzn i osi współrzędnych, którego środkiem będzie centrum atrakcyjne lub repulsyjne  $O$ . Rzut punktu  $O$  na płaszczyznę  $MN$  nazwijmy przez  $A$ , oraz długość  $OA = a$ . (fig. 37).

Dowolny element cieczy  $E$ , położony w płaszczyźnie  $MN$ , niech będzie dany przez rzędne  $x = a$ ,  $y$ ,  $z$ . Prosta, łącząca punkt  $E$  z centrem  $O$ , niech będzie  $r$ ; będzie to promień odnośnej fali ku-

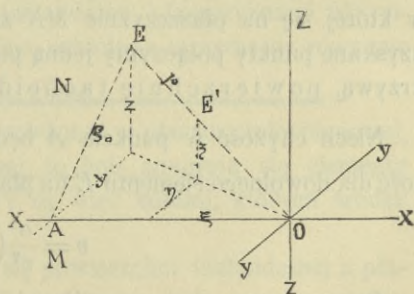


Fig. 37.



listej. Połączywszy punkt  $E$  z rzutem centra na płaszczyznę  $MN$  t. j. z punktem  $A$ , otrzymamy  $AE = \rho_0$ , jako promień koła, w którym płaszczyzna  $MN$  przecina kulę o promieniu  $r$ .

W obec tego będzie więc:

$$\rho_0^2 = r^2 - a^2 = y^2 + z^2.$$

Połączywszy każdy punkt koła o promieniu  $\rho_0$  z centrem atrakcyjnym, otrzymamy wszystkie linie prądu dla elementów cieczy, położonych na kole o promieniu  $\rho_0$ . Dla łatwiejszego zrozumienia możemy sobie pomyśleć, że koło o promieniu  $\rho_0$  jest geometrycznym miejscem położenia wszystkich środków nieskończenie małych elementów ( $dydz$ ); środkiem paska nieskończenie wąskiego o szerokości  $d\rho_0$ .

Wszystkie uzyskane w ten sposób linie prądu będą leżały na powierzchni stożka obrotowego, którego podstawą jest koło o promieniu  $\rho_0$ , a wysokością  $a$ . Każdy element cieczy, przechodzący przez ten pasek kołisty o promieniu  $\rho_0$ , a szerokości  $d\rho_0$  posiada jednakową chyżość wzdłuż linii prądu w kierunku do lub od centra. Jeżeli więc na każdej linii prądu odetniemy wartość chyżości  $v$ , od punktów koła o promieniu  $\rho_0$ , i punkty tak uzyskane połączymy ze sobą, to otrzymamy geometryczne miejsce położenia elementów cieczy wyszłych z układu koła o promieniu  $\rho_0$ , po upływie jednostki czasu od chwili wyjścia z płaszczyzny  $MN$ . Linia, powstała przez połączenie odmierzonych punktów na dotychczasowych liniach prądu będzie kołem, którego płaszczyzna będzie równoległą do  $MN$ . Uczyniwszy to dla wszystkich elementów cieczy, położonych w płaszczyźnie  $MN$ , otrzymamy położenie tych elementów po upływie jednostki czasu od chwili, w której się na płaszczyźnie  $MN$  znajdowały. Jeżeli wszystkie tak uzyskane punkty połączymy jedną powłoką, otrzymamy powierzchnię krzywą, powierzchnię tachoidalną.

Niech chyżość w punkcie  $A$  będzie daną przez  $\left(\frac{v}{x}\right)$ ; wtedy chyżość dla dowolnego elementu  $E$  na płaszczyźnie  $MN$  będzie daną przez:

$$v = \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{v}{x}\right)_0$$

Oznaczywszy przez współrzędne  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , położenie elementu  $E$  po upływie jednostki czasu od chwili wyjścia z płaszczyzny  $MN$ , otrzymamy:

$$v^2 = (a - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$



a ponieważ:

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + y^2 + z^2 \\ z &= a \frac{\zeta}{\xi} \\ y &= a \frac{\eta}{\xi} \end{aligned}$$

przeło ze względu na to, że:

$$(a - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = \frac{a^4}{r^4} \left( \frac{v}{x} \right)^2$$

otrzymamy na analityczne wyrażenie powierzchni tachoidalnej równanie:

$$(a - \xi)^2 \cdot [\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2]^3 = \xi^6 \left( \frac{v}{x} \right)^2 \quad (40)$$

Zważywszy że:  $\eta^2 + \zeta^2 = \rho^2$

jako promieniowi koła, na którym znajdują się po upływie jednostki czasu wszystkie elementy cieczy, położone w danej chwili na obwodzie koła o promieniu  $\rho_0$  w płaszczyźnie  $MN$ , widzimy, że powierzchnia tachoidalna będzie powierzchnią obrotową.

Zakładając w równaniu tej powierzchni  $\zeta = Const.$  otrzymamy linię przecięcia tej powierzchni z płaszczyzną poziomą. Dla linii przecięcia się tej powierzchni z poziomą płaszczyzną układu współrzędnych, t. j. z płaszczyzną  $xy$  otrzymamy:

$$(a - \xi)^2 [\xi^2 + \eta^2]^3 = \xi^6 \left( \frac{v}{x} \right)^2$$

Linia przedstawiona tem równaniem będzie odmienna od linii, przedstawionej w poprzednim rozdziale (fig. 36).

Zakładając kolejno  $\xi = Const$  tudzież  $v = const$  o różnych wartościach, przetniemy powierzchnię tachoidalną płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny  $yz$ , a na linii przecięcia otrzymamy równanie

$$\eta^2 + \zeta^2 = Const.$$

jako równanie izotachy, t. j. linii, położonej w płaszczyźnie pionowej, prostopadłej do osi  $ox$ , na której to linii znajdują się elementy o jednakowej chyżości. Izotachy są więc kołami, których środek leży w głównej linii prądu.

W celu wykreślenia przecięcia się powierzchni tachoidalnej z płaszczyzną  $xy$  zauważmy, że: jeżeli  $\alpha$  oznacza kąt zawarty między osią  $ox$  a promieniem wiodącym do dotyczącego elementu, natenczas:

$$\frac{a}{r} = \cos \alpha;$$



więc

$$a = \left( \frac{v}{x} \right)_0 \frac{a^2}{r^2} = \left( \frac{v}{x} \right)_0 \cos^2 \alpha,$$

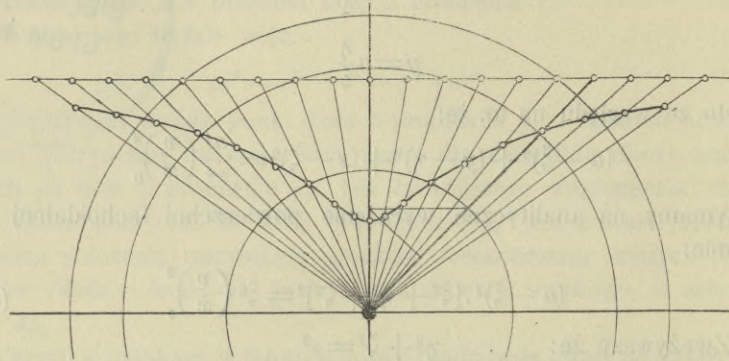


Fig. 38.

a to pozwala nam bezpośrednio wykreślić linię, przedstawioną na fig. 38.

#### 14. Ruch elementu cieczy w grubej warstwie, wskutek działania dwóch centrów atrakcyjnych.

Nieograniczona warstwa cieczy, o grubości  $h$ , rozpostartą jest na dnie poziomym, w którym znajdują się dwa otwory równej wielkości. Przez te otwory wypływa jednakowa ilość cieczy. Ruch jest trwały. Dno poziome niech tworzy poziomą płaszczyznę układu współrzędnych; płaszczyzna zaś przechodząca przez środki centrów atrakcyjnych, prostopadła do poziomej płaszczyzny rzutu, niech będzie drugą, wreszcie płaszczyzna pionowa, prostopadła do prostej, łączącej oba

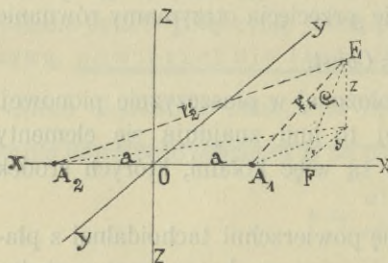


Fig. 39.

środki atrakcyjne, przechodząca przez punkt w połowie ich odległości, niech będzie trzecią płaszczyzną układu współrzędnych (fig. 39).

Odległość pomiędzy centrami niech wynosi  $2a$ . Fale wypływowe, rozchodzące się z centrów atrakcyjnych  $A_1$  i  $A_2$  (przy założeniu że  $\sigma = \text{const}$ ), będą dla promieni mniejszych od  $h$  półkulami, a dla promieni większych od  $h$ , powierzchniami krążków kulistych.



Jeżeli ilość wypływającej cieczy przez jeden otwór atrakcyjny wynosi  $M$ , to ta ilość dopływa do tego otworu stale przez dowolną powierzchnię fali wypływowej o promieniu  $r_1$  z przynależną chyżością  $v_1$ , będzie więc:

$$M = (2\pi r_1^2 - 2\pi r_1(r_1 - h)) v_1 \sigma$$

dla powierzchni falowej o promieniu  $r_2$  będzie:

$$M = (2\pi r_2^2 - 2\pi r_2(r_2 - h)) v_2 \sigma$$

a ztąd:

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 = K$$

Dowolny element cieczy  $E$  niech będzie danym przez  $x, y, z$ ; odległości tegoż od centrów atrakcyjnych przez:  $EA_1 = r_1$ ,  $EA_2 = r_2$ . Element  $E$  zostanie przez centrum atrakcyjne  $A_1$  pobudzony do ruchu w kierunku  $EA_1$  z chyżością  $v_1$ , a przez drugie z chyżością  $v_2$  w kierunku  $EA_2$ . Przesunąwszy przez punkt  $E$  i oś  $ax$  płaszczyznę, łatwo wyrozumieć, że w tej płaszczyźnie odbywać się będzie ruch elementu.

Na wyrażenie promieni  $r_1$  i  $r_2$  przez współrzędne, otrzymujemy:

$$r_1^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2$$

$$r_2^2 = (x + a)^2 + y^2 + z^2$$

Przesunąwszy przez punkt  $E$  płaszczyznę równoległą do płaszczyzny  $yz$ , przetniemy oś  $x$  w punkcie  $F$ . Prosta  $EF = \rho$  będzie rzutem promienia  $r_1$  i  $r_2$  na tę płaszczyznę, będzie więc:

$$r_1^2 = (x - a)^2 + \rho^2$$

$$r_2^2 = (x + a)^2 + \rho^2$$

Rozłożywszy chyżości  $v_1$  i  $v_2$  na składowe w kierunku osi  $x, y$  i  $z$ , otrzymamy

$$\left(\frac{v_1}{x}\right) = K \frac{x - a}{r_1^2}, \quad \left(\frac{v_1}{y}\right) = K \frac{y}{r_1^2}, \quad \left(\frac{v_1}{z}\right) = K \frac{z}{r_1^2},$$

$$\left(\frac{v_2}{x}\right) = K \frac{x + a}{r_2^2}, \quad \left(\frac{v_2}{y}\right) = K \frac{y}{r_2^2}, \quad \left(\frac{v_2}{z}\right) = K \frac{z}{r_2^2},$$

a składowe chyżości wypadkowej będą:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = K \left( \frac{x - a}{r_1^2} + \frac{x + a}{r_2^2} \right)$$

$$\left(\frac{V}{y}\right) = Ky \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)$$

$$\left(\frac{V}{z}\right) = Kz \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)$$

Składowe chyżości wypadkowej w płaszczyźnie  $Ex$  będą:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = K \left( \frac{x-a}{r_1^2} + \frac{x+a}{r_2^2} \right)$$

$$\left(\frac{V}{\rho}\right) = K\rho \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)$$

Ponieważ ruch elementu  $E$  wskutek działania centrów  $A_1$  i  $A_2$  odbywać się będzie w płaszczyźnie  $Ex$ , przeto na wyrażenie drogi tego elementu  $E$  w tej płaszczyźnie otrzymamy:

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{\left(\frac{V}{\rho}\right)}{\left(\frac{V}{x}\right)} = \frac{\rho \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)}{\frac{(x-a)}{r_1^2} + \frac{(x+a)}{r_2^2}}$$

a z tego:

$$\frac{(x-a) \cdot d\rho - \rho dx}{(x-a)^2 + \rho^2} + \frac{(x+a) d\rho - \rho dx}{(x+a)^2 + \rho^2} = 0.$$

Po zcałkowaniu otrzymujemy na wyrażenie linii prądu w płaszczyźnie  $Ex$

$$x^2 - \rho^2 - 2A_1 x\rho - a^2 = 0;$$

jest to układ hyperboli równobocznych, gdzie  $A_1$  oznacza stałą dowolną.

Wstawiając w powyższe równanie wartość

$$\rho^2 = y^2 + z^2$$

otrzymamy:

$$(41) \quad x^2 - y^2 - z^2 - a^2 - 2Ax\sqrt{y^2 + z^2} = 0,$$

gdzie  $A$  oznacza stałą dowolną.

Jest to układ powierzchni obrotowych, powstałych z układu równobocznych hyperboli, obróconych około osi  $x$ .

Dla  $y=0$ ,  $z=0$  jest  $x=\pm a$ ; wszystkie te powierzchnie mają po obu stronach osi  $x$  jeden punkt wspólny.

Zakładając  $z=0$ , otrzymujemy znane już poprzednio równanie linii prądu dla dwóch centrów atrakcyjnych w płaszczyźnie poziomej.

Przesuwając przez punkt  $E$  płaszczyznę normalną do kierunku chyżości wypadkowej, otrzymamy na wyrażenie nachylenia krawędzi tej płaszczyzny z płaszczyzną  $Ex$ , do osi  $x$ ,

$$\frac{d\rho}{dx} = - \frac{\frac{(x-a)}{r_1^2} + \frac{x+a}{r_2^2}}{\rho \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)}$$



a z tego:

$$\frac{\rho d\rho + (x-a)dx}{(x-a)^2 + \rho^2} + \frac{\rho d\rho + (x+a)dx}{(x+a)^2 + \rho^2} = 0;$$

co zcałkowane, daje:

$$((x-a)^2 + \rho^2)((x+a)^2 + \rho^2) = B^2,$$

Albo po podstawieniu wartości na  $\rho$

$$((x-a)^2 + y^2 + z^2)((x+a)^2 + y^2 + z^2) = B^2 \quad (42)$$

gdzie  $B^2$  oznacza stałą dowolną. Jest to równanie fali skutecznej czyli powierzchni potencjalnej; której elementy stoją normalnie do każdorazowego kierunku chyżości wypadkowej. Równanie to przybiera kształt uproszczony:

$$r_1 r_2 = B. \quad (43)$$

Zakładając w równaniu na powierzchni prądu, t. j. w równaniu (41)

$$z = h$$

otrzymujemy:

$$x^2 - y^2 - h^2 - a^2 - 2Ax\sqrt{h^2 + y^2} = 0.$$

jako równanie linii przecięcia dotyczących powierzchni prądu z poziomem zwierciadłem cieczy.

Wstawiając w równaniu układu powierzchni potencjalnych na  $z$  bardzo małą wartość, zbliżającą się do zera, otrzymamy znane już poprzednio równanie układu linii potencjalnych, które w tym wypadku będą lemniskatami.

Przez podstawienie wartości  $z = h$ , otrzymamy równanie układu linii, w których powierzchnie potencjalne przecinają się z poziomą powierzchnią cieczy, a mianowicie:

$$((x-a)^2 + y^2 + h^2)((x+a)^2 + y^2 + h^2) = B^2;$$

linie te są podobne do lemniskat Cassiniego.

Na wyrażenie chyżości wypadkowej otrzymujemy:

$$V^2 = K^2 \left\{ \left( \frac{x-a}{r_1^2} + \frac{x+a}{r_2^2} \right)^2 + (y^2 + z^2) \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)^2 \right\}$$

Przyjmując w tem równaniu  $V = Const$  i zakładając kolejno wartości:  $x, y, z = Const$ , otrzymuje się równania izotachy w odnośnych płaszczyznach. Będą to linie czwartego stopnia.

Podstawiając w powyższem równaniu,  $y = 0, z = h$ , otrzymujemy na przybliżoną wartość depresyi w płaszczyźnie  $xz$  wyrażenie:

$$s = \varphi \frac{K^2}{2g} \left\{ \left( \frac{x-a}{r_1^2} + \frac{x+a}{r_2^2} \right)^2 + h^2 \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)^2 \right\} + Const;$$





czyli

$$r_0 \pi c = 2 x v_0 \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} \right).$$

Dla dowolnego punktu  $E$ , położonego w przekroju  $MN$ , będzie:

$$2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{b}{2\sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}} \right)$$

Zważywszy, że składowe chyżości dane są przez:

$$\left(\frac{v}{y}\right) = v \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \left(\frac{v}{x}\right) = v \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{v}{y}\right)}{\left(\frac{v}{x}\right)} = \frac{y}{x}$$

a z tego:

$$y = C_1 x$$

jako równanie linii prądu; tudzież

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{v}{x}\right)}{\left(\frac{v}{y}\right)} = -\frac{x}{y}$$

a z tego:

$$x^2 + y^2 = C_2$$

jako równanie linii potencjalnej.

Taki więc byłby ruch cieczy w łożysku, wskutek działania jednego centra atrakcyjnego lub repulsyjnego, gdyby nie następowało odbicie fal wypływowych od brzegów.

Na dowolny element  $E$  cieczy w łożysku uważanem, prócz fal pierwotnych, wychodzących z danego centra  $A$ , działają także fale od obu brzegów odbite; tak jak gdyby wychodziły z centrów, położonych po za brzegami w odległości, równej połowie szerokości łożyska; przeto następuje tutaj ruch złożony, analizowany w poprzednim rozdziale dla prostolinijnego układu trzech centrów. Linie prądu, względnie strugi, będą więc liniami trzeciego stopnia. Na chyżość

wypadkową dane były wyrażenia przez  $\left(\frac{V}{x}\right)$ ,  $\left(\frac{V}{y}\right)$ , z czego można obliczyć i wykreślić wszystkie trzy tachoidy.

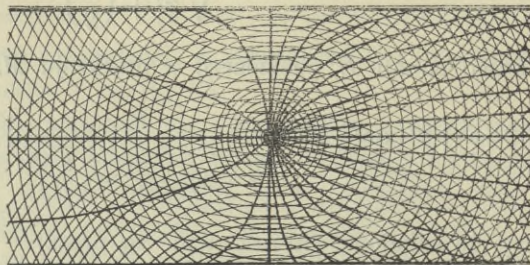


Fig. 41.

Na fig. 41. są przedstawione linie prądu dla tego wypadku.

## 16. Ruch cieczy w łożysku, wskutek działania prostoliniowego układu centrów atrakcyjnych.

Danem jest poziome lub bardzo mało nachylone prostokątne łożysko, o brzegach równoległych, rozciągające się w nieskończoność, wypełnione cienką, płaską warstwą cieczy. W jednym końcu jest łożysko otwarte, a ciecz zasilana stale w nieskończoności, wypływa trwale przez krawędź przelewową na dnie, stojącą prostopadle do brzegów.

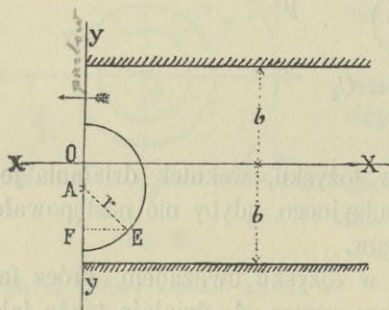


Fig. 42.

Szerokość łożyska niech będzie daną przez  $2b$ , grubość cienkiej warstwy cieczy przez  $\lambda$ , a chyżość wypływu na krawędzi przez  $c$ . Gęstość cieczy niech będzie stałą i daną przez  $\sigma=1$ .

Oś łożyska niech będzie osią  $x$ , krawędź przelewu osią  $y$ . (f. 42).

W warstwie cieczy płynącej łożyskiem badajmy ruch dowolnego elementu  $E$ , danego przez współrzędne  $x, y$ .

Oznaczmy  $OF=y$ ,  $EF=x$ ,  $AE=r$ ,  $AF=\gamma$ .

Poprowadźmy przez punkt  $E$  równoległą do osi  $xx$  aż do przecięcia się z krawędzią przelewu w punkcie  $F$ , a w dowolnej odle-



ległości  $\eta$  od tego punktu, na krawędzi przelewu, przyjmijmy dowolny element  $A$ , przez który ciecz pobudzoną zostaje do wypływu. Szerokość przelewowego elementu  $A$  niech będzie  $d\eta$ , a wysokość jego  $\lambda$ .

Element  $A$  tworzy centrum atrakcyjne »elementarne« dla wypływającej cieczy. Objętość cieczy, wypływającej przez centrum elementarne  $A$ , jest daną przez:

$$dM = \lambda \cdot d\eta \cdot c$$

Do tej ilości wypływu zostaje ciecz pobudzoną na krawędzi przelewu w punkcie  $A$ . Ten elementarny impuls wypływu rozejdzie się w otaczającej cieczy na powierzchniach falowych, półkolistych, o wysokości  $\lambda$ , i dosięgnie elementu  $E$  na powierzchni walca kołowego o promieniu  $r$ , pobudzając element  $E$  do ruchu w kierunku  $EA$  z chyżością  $(\delta v)$ , daną przez relację:

$$dM = \pi \cdot r \cdot \lambda \cdot (\delta v)$$

z czego wypada:

$$(\delta v) = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{d\eta}{r}$$

Z każdego elementu na krawędzi przelewu rozchodzić się będą fale, udzielające elementowi  $E$  odpowiednich chyżości w dotyczących kierunkach, wskutek czego element  $E$  poruszać się będzie w kierunku wypadkowym z chyżością wypadkową. Wszystkie więc fale wypływowe, wychodzące z centrów elementarnych, na krawędzi przelewu położonych, interferować będą w punkcie  $E$ . Rozłóżmy chyżości, udzielane temu elementowi, na składowe w kierunku osi  $x$  i  $y$ , wtedy składowe chyżości wypadkowej dane będą przez algebraiczną sumę równoimiennych składowych chyżości elementarnych.

Oznaczmy składową chyżości  $(\delta v)$  w kierunku osi  $y$  przez  $\left(\frac{\delta v}{y}\right)$ , a w kierunku osi  $x$  przez  $\left(\frac{\delta v}{x}\right)$ , naówczas na wyrażenie ich wartości otrzymamy:

$$\left(\frac{\delta v}{x}\right) = (\delta v) \frac{x}{r}$$

$$\left(\frac{\delta v}{y}\right) = (\delta v) \cdot \frac{\eta}{r}$$

Ze względu że:

$$r^2 = x^2 + \eta^2$$

będzie:

$$\left(\frac{\delta v}{y}\right) = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{\eta \cdot d\eta}{x^2 + \eta^2} \quad (44)$$

$$(44) \quad \left(\frac{\delta v}{x}\right) = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{x d\eta}{x^2 + \eta^2}$$

Oznaczmy dla chyżości wypadkowej składową w kierunku  $y$  przez  $\left(\frac{V}{y}\right)$ , a składową w kierunku  $x$  przez  $\left(\frac{V}{x}\right)$ , naówczas tworząc z powyższych wyrazów algebraiczne sumy, otrzymamy:

$$\left(\frac{V}{y}\right) = \frac{c}{\pi} \int_{b-y}^{b+y} \frac{\eta \cdot d\eta}{x^2 + \eta^2}$$

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{c}{\pi} \int_0^{b+y} \frac{x \cdot d\eta}{x^2 + \eta^2} + \frac{c}{\pi} \int_0^{b-y} \frac{x d\eta}{x^2 + \eta^2}$$

Zważywszy, że wobec  $\eta$  rzędne  $x$  i  $y$  są niezależne, otrzymamy po zcałkowaniu powyższych wyrazów:

$$(45) \quad \left(\frac{V}{y}\right) = \frac{c}{2\pi} \log \frac{1 + \left(\frac{b+y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{b-y}{x}\right)^2}$$

$$(46) \quad \left(\frac{V}{x}\right) = \frac{c}{\pi} \left\{ \arctan \left( \operatorname{tg} = \frac{b+y}{x} \right) + \arctan \left( \operatorname{tg} = \frac{b-y}{x} \right) \right\}$$

Podstawiając w równaniu na  $\left(\frac{V}{y}\right)$ , dla dowolnego  $x$ , wartość  $y=0$ , otrzymujemy:  $\left(\frac{V}{y}\right) = 0$ ; co oznacza: elementy cieczy, położone w osi łożyska, nie doznają zboczenia przy przepływie. Dla  $y=b$ , jest  $\left(\frac{V}{y}\right) = \max. = \left(\frac{V}{y}\right)_b = \frac{c}{2\pi} \log \left(1 + \frac{4b^2}{x^2}\right)$ .

Przyjmując  $x=0$ , otrzymujemy chyżość poprzeczną w centrach atrakcyjnych, powstałą przez atrakcją tych centrów na siebie. Chyżość poprzeczna w centrach atrakcyjnych daną jest przez:

$$\left(\frac{V}{y}\right) = \frac{c}{\pi} \log \frac{b+y}{b-y}$$

Dla  $y=0$ , będzie  $\left(\frac{V}{y}\right) = 0$ ; dla  $y=b$ , staje się:  $\left(\frac{V}{y}\right) = \infty$ , co oznacza: element cieczy, położony na krawędzi przelewu przy brzegu, zostaje odchylonym ku osi łożyska z chyżością nieskończenie wielką.



Przy założeniu:  $b=1$ ,  $c=1$ , obliczone zostały składowe  $\left(\frac{V}{y}\right)$  dla profilów:  $x=0$ , oraz  $x=1$ , a odnośne ich wartości dla szczególnych punktów w następującej tabelce zestawione. Te dwie tachoidy  $\left(\frac{V}{y}\right)$  oraz  $\left(\frac{V}{x}\right)$  są na fig. 43 i 44 wykreślone.

$y$	$x=0$	$x=1_0$
	$\left(\frac{V}{y}\right)$	$\left(\frac{V}{y}\right)$
$b$	$\infty$	0.256
0.99	1.685	0.250
0.90	0.937	0.241
0.80	0.700	0.223
0.70	0.552	0.202
0.60	0.441	0.178
0.50	0.350	0.152
0.40	0.270	0.123
0.30	0.197	0.094
0.20	0.129	0.063
0.10	0.063	0.031
0	0	0

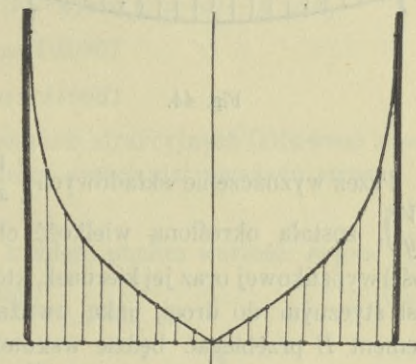


Fig. 43.

Różniczkując względem  $y$  równanie na składową chyżości wypadkowej w kierunku ruchu cieczy (46), otrzymamy:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{x}\right) = \frac{4bx y}{[x^2 + (b+y)^2][x^2 + (b-y)^2]}$$

Druga różniczka jest ujemna; a więc  $\left(\frac{V}{x}\right)$  *maximum* dla  $y=0$ . Ta wartość jest:

$$\left(\frac{V}{x}\right)_0 = \left(\frac{V}{x}\right)_{max.} = \frac{2c}{\pi} \arcc\left(\operatorname{tg} \frac{b}{x}\right)$$

Chyżość w kierunku podłużnym łożyska jest największa w nurcie (w tym wypadku w osi łożyska).

Zakładając  $x = \text{Const}$ , otrzymamy równanie tachoidy  $\left(\frac{V}{x}\right)$  dla profilu, odległego o długość  $x$  od środka współrzędnych. Dla wartości  $b=1$ ,  $c=1$ ,  $x=1$  są wartości  $\left(\frac{V}{x}\right)$  obliczone w następującej tabelce, a dotycząca tachoida  $\left(\frac{V}{x}\right)$  wykreślona na fig. 44.

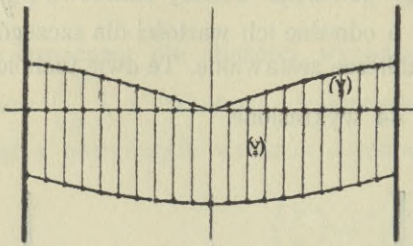


Fig. 44.

Przez wyznaczenie składowych  $\left(\frac{V}{x}\right)$ ,  $\left(\frac{V}{y}\right)$ , została określona wielkość chyżości wypadkowej oraz jej kierunek, który jest stycznym do drogi, jaką uważany element  $E$  przebiegać będzie wskutek działania krawędzi przelewu.

Kierunek stycznej do drogi elementu  $E$ , czyli do linii prądu, jest danym przez:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\left(\frac{V}{x}\right)}{\left(\frac{V}{y}\right)}$$

Po wstawieniu wartości otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + \left(\frac{b+y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{b-y}{x}\right)^2} dx + \left\{ \arctan\left(\frac{b+y}{x}\right) + \arctan\left(\frac{b-y}{x}\right) \right\} dy = 0.$$

To równanie różniczkowe jest różniczką zupełną; przeto całka tego równania będzie:

$$(47) \quad (b+y) \arctan\left(\frac{b+y}{x}\right) - (b-y) \arctan\left(\frac{b-y}{x}\right) - \frac{x}{2} \log \frac{x^2 + (b+y)^2}{x^2 + (b-y)^2} = C_1$$

Jest to równanie linii prądu, gdzie  $C_1$  oznacza stałą dowolną.

Na fig. 45 wykreślona jest struga, przechodząca przez punkt:  $x=1$ ,  $y=1$  dla  $b=1$ . Wstawiwszy te wartości w równania linii prądu otrzymujemy

$x=1.0$	
$y$	$\left(\frac{V}{x}\right)$
1.0	0.352
0.9	0.377
0.8	0.401
0.7	0.424
0.6	0.443
0.5	0.460
0.4	0.474
0.3	0.485
0.2	0.493
0.1	0.497
0	0.500



$$2 \operatorname{arc}(tg=2) - \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+4}{1} \right) = C_1$$

wypadnie z tego  $C_1 = 1.40957$

Dla tej samej strugi stała  $C_1$  będzie mieć tę samą wartość. Podstawiając w równaniu linii prądu (47)  $x=0$ , otrzymamy:

$$(b+y) \operatorname{arc}(tg=\infty) - (b-y) \operatorname{arc}(tg=\infty) - 0 = C_1$$

albo:  $\pi y = 1.40957$

a z tego:  $y = 0.448681$

jest rzędną, znamionującą w centrach atrakcyjnych (albowiem  $x=0$ ) położenie tego punktu, przez który przechodzi uważana struga.

Wyznaczając następnie dla każdego punktu wartość:  $tg \varphi = \frac{\left(\frac{V}{x}\right)}{\left(\frac{V}{y}\right)}$  można wykreślić uważaną strugę.

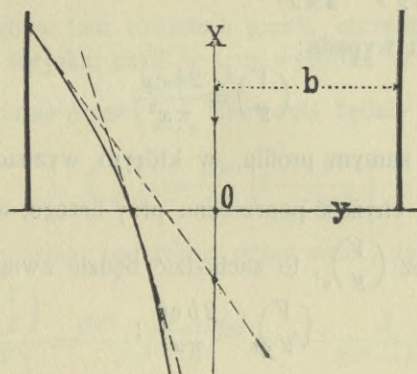


Fig. 45.

Z ilorazu:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\left(\frac{V}{y}\right)}{\left(\frac{V}{x}\right)} = tg \psi$$

przez podstawienie wartości i całkowanie powstałego równania różniczkowego otrzymuje się równanie linii potencjalnej.

Jeżeli uważane elementy cieczy w łożysku znajdują się w znacznej odległości od krawędzi przelewu, natenczas wszystkie powyższe równania przybierają kształt prostszy.

Jeżeli bowiem w równaniu na  $\left(\frac{V}{y}\right)$  (45) rozwiniemy logarytmy w szeregi, otrzymamy:

$$\left(\frac{V}{y}\right) = \frac{c}{2\pi} \left\{ \left(\frac{b+y}{x}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b+y}{x}\right)^4 + \& - \left[ \left(\frac{b-y}{x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{b-y}{x}\right)^4 + \& \right] \right\}$$

Zważywszy, że wartość  $x$  jest wielka, widzimy że  $\frac{(b+y)^4}{x^4}$  ma wartość bardzo małą; więc można go wraz z następnymi zaniechać.

Niech będzie  $n$ . p. szerokość łóżyska daną przez:  $2b = 10$  mtr. a profil uważany niech się znajduje w odległości  $x = 100$  mtr. to wartość ułamka:  $\frac{(2b)^4}{x^4} = 0.0001$  mtr., daje ilość bardzo małą.

Po zaniechaniu wyższych potęg ułamków, otrzymujemy:

$$\left(\frac{V}{y}\right) = \frac{c}{2\pi x^2} \{ (b+y)^2 - (b-y)^2 \}$$

a po uproszczeniu wypada:

$$(48) \quad \left(\frac{V}{y}\right) = \frac{2bcy}{\pi x^2}$$

Niech w tym samym profilu, w którym wyznaczono powyższą wartość na  $\left(\frac{V}{y}\right)$ , chyżość poprzeczna przy brzegu, a więc dla:  $y=b$ , daną będzie przez  $\left(\frac{V}{y}\right)_b$ , to zachodzić będzie związek

$$\left(\frac{V}{y}\right)_b = \frac{2bc b}{\pi x^2};$$

podzieliwszy oba ostatnie równania przez siebie otrzymamy:

$$(49) \quad \left(\frac{V}{y}\right) = \left(\frac{V}{y}\right)_b \cdot \frac{y}{b}$$

co oznacza: w profilach, odległych od krawędzi przelewu, chyżość poprzeczna zmienia się w tym samym profilu według prawa linii prostej.

Dla  $y=0$  jest  $\left(\frac{V}{y}\right) = 0$ , dla  $y=b$  jest  $\left(\frac{V}{y}\right) = \max. = \left(\frac{V}{y}\right)_b$  :

Chyżość poprzeczna w uważanym profilu maleje od brzegów ku środkowi, i dla dowolnego punktu uważanego profilu daną jest przez chyżość poprzeczną



przy brzegu, pomnożoną przez iloraz z odległości tego punktu od nurtu (osi), i z połowy szerokości łożyska.

Kierunek chyżości poprzecznej przy odpływie (centra atrakcyjne) jest zwrócony do osi łożyska; przy dopływie zaś (centra repulsyjne) jest chyżość poprzeczna odwróconą od osi łożyska. Dla obudwu wypadków służą te same wzory.

Rozwijając wyrażenie na  $\left(\frac{V}{x}\right)$  w szeregi (46), otrzymamy:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{c}{\pi} \left\{ \frac{b+y}{x} - \frac{1}{3} \left(\frac{b+y}{x}\right)^3 + \& + \frac{b-y}{x} - \frac{1}{3} \left(\frac{b-y}{x}\right)^3 + \& \right\}.$$

Zważywszy, że  $x$  w porównaniu z  $b$  jest wielkie, możemy zaniedbać ułamków:  $\frac{(b+y)^5}{5x^5} + \&$  jako bardzo małych; a w takim razie otrzymamy:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{2bc}{\pi x} \left\{ 1 - \frac{1}{3x^2} [b^2 + 3y^2] \right\} \quad (50)$$

Podstawiając w tem równaniu  $y=0$ , otrzymamy wyrażenie na chyżość w osi łożyska, czyli w tym wypadku w nurcie. Oznaczmy tę chyżość w nurcie przez  $\left(\frac{V}{x}\right)_0$  naówczas będzie

$$\left(\frac{V}{x}\right)_0 = \frac{2bc}{\pi x} \left\{ 1 - \frac{b^2}{3x^2} \right\}$$

Te dwa równania, podzielone przez siebie, dają

$$\frac{\left(\frac{V}{x}\right)}{\left(\frac{V}{x}\right)_0} = \frac{3x^2 - b^2 - 3y^2}{3x^2 - b^2} = 1 - \frac{3}{3x^2 - b^2} \cdot y^2$$

a oznaczając  $\frac{3x^2 - b^2}{3} = p$

otrzymujemy:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \left(\frac{V}{x}\right)_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{y^2}{p} \right\} \quad (51)$$

Jest to równanie paraboli, w którym  $p$  oznacza parametr zmienny, zależny od odległości uważanego profilu od krawędzi przelewu, albo od krawędzi dopływu. Zapomocą tego równania można niezależnie od  $x$  wyznaczyć tachoidę chyżości podłużnej, jeżeli tylko zmierzone lub wyznaczone zostały

chyżości w dwu punktach tego samego profilu, i jeżeli zmierzona została szerokość łożyska.

Niech pomierzone rzędne dane będą przez:  $y_1, y_2$ , pomierzone chyżości w tych punktach przez  $(\frac{V}{x})_1, (\frac{V}{x})_2$ , to parametr będzie:

$$p = \frac{(\frac{V}{x})_1 y_2^2 - (\frac{V}{x})_2 y_1^2}{(\frac{V}{x})_1 - (\frac{V}{x})_2}$$

a chyżość w osi

$$(\frac{V}{x})_0 = \frac{p (\frac{V}{x})_1}{p - y_1^2} = \frac{p (\frac{V}{x})_2}{p - y_2^2}$$

Na przykład: Zmierzona szerokość łożyska wynosi  $2b = 10$  mtr. W odległości od osi

łożyska, wynoszącej  $y_1 = 2$  mtr., zmierzona chyżość wynosi  $(\frac{V}{x})_1 = 0.84$  mtr. Dla  $y_2 = 3$  mtr. wynosi chyżość:  $(\frac{V}{x})_2 = 0.64$  mtr. Z tych danych jest

$$p = \frac{9 \cdot 0.84 - 4 \cdot 0.64}{0.84 - 0.64} = 25$$

$$(\frac{V}{x})_0 = \frac{25 + 0.84}{25 - 4} = 1.00$$

Odpowiadająca temu przypadkowi tachoida  $(\frac{V}{x})$  jest przedstawiona na fig. 46.

Pomyślmy sobie całe łożysko wraz z cienką warstwą cieczy obrócone około osi  $x$ , tak, ażeby każdy punkt opisał pełne koło, natenczas otrzymamy rurę zamkniętą walcową o przekroju kolistym, wypełnioną przepływającą cieczą. W równaniu

$$(\frac{V}{x}) = (\frac{V}{x})_0 \left\{ 1 - \frac{y^2}{p} \right\}$$

podstawmy

$$(\frac{V}{x}) = u, (\frac{V}{x})_0 = u_0, y = r, p = R^2,$$

a otrzymamy:

$$u = u_0 - u_0 \frac{r^2}{R^2}.$$



To równanie wyprowadzonym jest w hydrodynamice dla ruchu cieczy w rurkach Poiseuilla.

Ciecz w tych rurkach porusza się cokolwiek inaczej aniżeli to tam przedstawiono.

Przez całą długość rury od naczynia ku wylotowi rury, porusza się każda cząstka cieczy ruchem przyspieszonym. Gęstość cieczy w naczyniu, z którego ciecz wypływa pod znacznem ciśnieniem, jest większą od gęstości cieczy u wylotu rury; gęstość cieczy w rurze maleje od profilu do profilu w stosunku do malejącego ciśnienia, a odnośne chyżości wzrastają. Ciśnienie w jednym i tym samym przekroju rury jest zmienne, w osi najmniejsze a wzrasta ku ścianom rury. Przez każdy przekrój rury przepływa w jednostce czasu inna (zmienna) objętość cieczy, wszelakoż ta sama masa cieczy, według związku:

$$u_0 \sigma_0 = u_1 \sigma_1 = \dots = \text{Const.}$$

a tu się sprawdza twierdzenie o stałości masy cieczy, będącej w ruchu.

## 17. Strugi i fale.

Jeżeli uważane profile łożyska leżą w wielkiej odległości od krawędzi przelewu, to zmiany chyżości  $\left(\frac{V}{x}\right)$  i  $\left(\frac{V}{y}\right)$  w profilach sąsiednich są bardzo małe. W takim razie można przyjąć, że parametry w równaniach na  $\left(\frac{V}{x}\right)$  i  $\left(\frac{V}{y}\right)$  dla jakiejś małej przestrzeni łożyska tak mało między sobą różnić się będą, że je za stałe uważać można.

Przy tem założeniu można w jakiejś części łożyska, niezależnie od  $x$ , wyznaczyć linie prądu czyli kształt strugi i linię potencjalną czyli falową, jeżeli tylko w uważanym profilu wyznaczone zostały parametry dla  $\left(\frac{V}{x}\right)$  i  $\left(\frac{V}{y}\right)$ .

Niech przecięcie uważanego profilu z osią łożyska będzie początkiem współrzędnych. Oś łożyska niech będzie osią  $x$ , jej kierunek dodatni w kierunku ruchu cieczy, a linia profilu niech będzie osią  $y$ .

Na składowe chyżości wypadkowej dowolnego elementu cieczy w tym profilu dane są równania:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \left(\frac{V}{x}\right)_0 \left\{ 1 - \frac{y^2}{p} \right\}$$

przyczem zakładamy, że dla sąsiednich profilów ilości  $\left(\frac{V}{x}\right)_0$  i  $p$  są stałe; tudzież

$$\left(\frac{V}{y}\right) = \frac{y}{b} \left(\frac{V}{y}\right)_b,$$

gdzie również  $\left(\frac{V}{y}\right)_b$  uważamy jako stałe dla sąsiednich profilów.

W takim razie na wyznaczenie kształtu strugi otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\frac{V}{y}\right)}{\left(\frac{V}{x}\right)},$$

a dla kształtu fali skutecznej:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{V}{x}\right)}{\left(\frac{V}{y}\right)}.$$

Po wstawieniu wartości na  $\left(\frac{V}{x}\right)$  i  $\left(\frac{V}{y}\right)$  uzyskuje się po zcałkowaniu:

dla linii prądu:

$$(52) \quad x_1 = \frac{y^2}{2Ap} - \frac{1}{A} \log y - C_1$$

$$A = \frac{\left(\frac{V}{y}\right)_b}{b \cdot \left(\frac{V}{x}\right)_0}$$

a dla linii potencjalnej:

$$(53) \quad x_2 = C_2 - \frac{1}{2} B \log(p - y^2),$$

przyczem:

$$B = \frac{p}{b} \cdot \frac{\left(\frac{V}{y}\right)_b}{\left(\frac{V}{x}\right)_0} = Ap.$$

Ilości:  $C_1$  i  $C_2$  są stałe dowolne, wszelako tylko w pobliżu sąsiednich profilów.

Dla uważanego profilu  $pp$  wyznaczono

$$\left(\frac{V}{x}\right)_0 = 1, \left(\frac{V}{y}\right)_b = 0.20, b = 1, p = 2.5$$

Z tych danych wyznacza się:

$$A = 0.20, B = 0.5.$$



Dla punktu zaś (elementu) danego przez  $x=0$ ,  $y=1$ , wypada:  
 $C_1=1$ ,  $C_2=0.1014$ .

W celu wykreślenia strugi i fali skutecznej, przechodzącej przez element, dany rzędniemi:  $x=0$ ,  $y=1$ , obliczono następującą tabliczkę.

$y$	Struga $x_1$	Fala $x_2$
1.60	- 0.790	-
$\sqrt{p}$	-	+ $\infty$
1.577	-	+ 1.256
1.500	- 0.777	+ 0.449
1.4	- 0.722	+ 0.255
1.3	- 0.622	+ 0.154
1.2	- 0.469	+ 0.087
1.1	- 0.266	+ 0.037
1.0	+ 0	0
0.9	+ 0.336	- 0.030
0.8	+ 0.755	- 0.054
0.7	+ 1.273	- 0.073
0.6	+ 1.914	- 0.088
0.5	+ 2.715	- 0.101
0.4	+ 3.714	- 0.113
0.3	+ 5.109	- 0.118
0.2	+ 7.087	- 0.124
0.1	+ 10.522	- 0.127
0	+ $\infty$	- 0.128

Według wartości rzędnych, podanych w powyższej tabliczce, wykreślono na fig. 47 linię prądu i linię potencjalną.

Linie prądu i linie potencjalne tworzą układ linii logarytmicznych. Ponieważ, według założenia, rzędne linii, tą tabliczką oznaczonych, mają się odnosić tylko do sąsiednich profilów, położonych przy  $x=0$ , przeto zauważyć muszę, że wartości na  $x_1$  i  $x_2$  większe od szerokości łożyska, zostały podane tylko dla wykazania kształtu linii.

Chcąc uzyskać na  $x_1$  i  $x_2$  wartości większe, trzeba wprowadzić w dotyczących równaniach zmienne parametry.

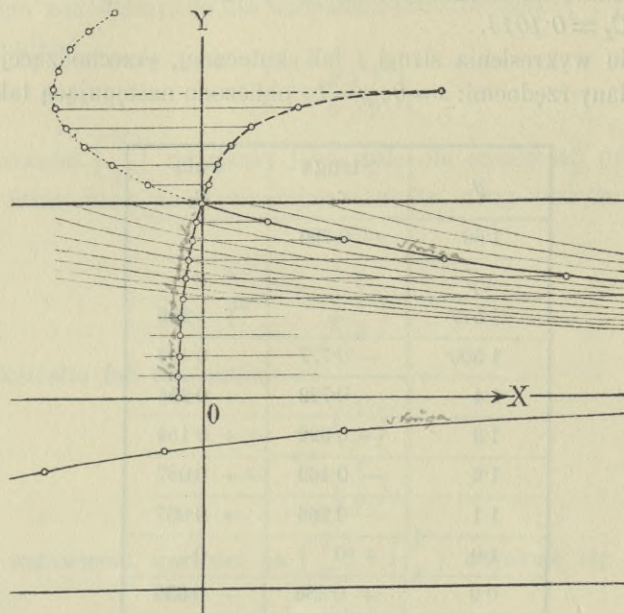


Fig. 47.

Jeżeli u brzegu łożyska znajduje się jakaś nierówność, o małej powierzchni, to będzie ona działać odkształcająco na przebieg strug płynącej cieczy. Przez tę nierówność zostanie część cieczy w ruchu wstrzymana; wskutek czego w tym miejscu powstaje nowe centrum falowania.

Dla uproszczenia rachunku założymy, że przeszkodę ruchu tworzy mała, płaska powierzchnia ( $\Delta f$ ), stojąca prostopadle do brzegu. Wskutek tego zostanie wstrzymana w ruchu struga o przekroju ( $\Delta f$ ). Ponieważ, według założenia, płaszczyzna przeszkody stoi prostopadle do brzegu, więc też dla strugi ( $\Delta f$ ), położonej przy brzegu, zniszonym zostanie tylko składowa  $\left(\frac{V}{x}\right)$ . Następstwem tego będzie podniesienie się cieczy w miejscu przeszkody, i powstawanie fal, rozchodzących się w łożysku. Założymy, że powierzchnia ( $\Delta f$ ) jest mała, a fala przez nią wzbudzona niech będzie płaska. W takim razie ruch, rozchodzący się z centra oporu, przejdzie niezmienny od strugi do strugi. Wynikiem tej nowej interferencji będzie struga, przechodząca przez łożysko, a wychodząca z miejsca oporu.



Jeżeli chyżość w kierunku ruchu przy brzegu wynosiła  $\left(\frac{V}{x}\right)_b$ , to chyżość fali płaskiej będzie także  $\left(\frac{V}{x}\right)_b$ ; a na wyrażenie kształtu strugi oporowej, przy założeniu stałych parametrów chyżości  $\left(\frac{V}{x}\right)$  i  $\left(\frac{V}{y}\right)$  w sąsiednich profilach, otrzymamy równania:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\frac{V}{y}\right) + \left(\frac{V}{x}\right)_b}{\left(\frac{V}{x}\right)}$$

Zważywszy że:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \left(\frac{V}{x}\right)_0 \left\{ 1 - \frac{y^2}{p} \right\}$$

$$\left(\frac{V}{x}\right)_b = \left(\frac{V}{x}\right)_0 \left\{ 1 - \frac{b^2}{p} \right\}$$

$$\left(\frac{V}{y}\right) = \left(\frac{V}{y}\right)_b \cdot \frac{y}{b}$$

otrzymamy po wstawieniu powyższych wartości w równanie różniczkowe:

$$\left\{ 1 - \frac{y^2}{p} \right\} dy = - \{ Ay + a \} dx$$

gdzie:

$$A = \frac{\left(\frac{V}{y}\right)_b}{b \cdot \left(\frac{V}{x}\right)_0}, \quad a = 1 - \frac{b^2}{p}.$$

Po zcałkowaniu otrzymuje się równanie strugi powstałej z oporu:

$$x_3 = \frac{(Ay+a)^2}{2A^3p} + \left[ \frac{a^2}{A^3p} - \frac{1}{A} \right] \log(Ay+a) - \frac{2a}{pA^3} (Ay+a) + C_3 \quad (54)$$

gdzie  $C_3$  oznacza stałą dla  $x_3=0$ ,  $y=b$ .

Zakładając:  $\left(\frac{V}{x}\right)_0 = 1$ ,  $\left(\frac{V}{y}\right)_b = 0.20$ ,  $p = 2.5$ ,  $b = 1$ , otrzymuje się:

$$C_3 = 34.90, \quad A = 0.20, \quad a = 0.60$$

Wartości  $x_3$  obliczone dla kolejnych  $y$ , są zestawione w następującej tabliczce: (str. 78).

Według tej tabliczki wykreśloną została struga oporowa na fig. 48. (str. 78).

Kąt, pod jakim struga oporowa wychodzi z miejsca oporu, jest dany przez:

$$\underline{tg \varphi} = \frac{\left(\frac{V}{y}\right) + \left(\frac{V}{x}\right)_b}{\left(\frac{V}{x}\right)_b} = 1 + \frac{\left(\frac{V}{y}\right)_b}{\left(\frac{V}{x}\right)_b}$$

W pobliżu centrów atrakcyjnych wartość chyżości poprzecznej  $\left(\frac{V}{y}\right)_b$  zbliża się do  $\infty$ , a tem samem i  $tg \varphi$  zbliża się do  $\infty$ , czyli  $\varphi$  do  $\frac{\pi}{2}$ .

$y$	$x_3$	$y$	$x_3$
1.0	0	-0.1	1.429
0.9	0.080	-0.2	1.603
0.8	0.173	-0.3	1.780
0.7	0.276	-0.4	1.949
0.6	0.390	-0.5	2.140
0.5	0.513	-0.6	2.319
0.4	0.647	-0.7	2.496
0.3	0.789	-0.8	2.668
0.2	0.938	-0.9	2.833
0.1	1.096	-1.0	2.988
0	1.260	-	-

Jeżeli zaś strugi są równoległe, natenczas jest:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = const, \left(\frac{V}{y}\right) = 0, tg \varphi = 1, \varphi = \frac{\pi}{4};$$

struga oporowa tworzy linię prostą, nachyloną ku brzegom pod kątem  $45^\circ$ .

Jeżeli po obu brzegach znajdują się małe przeszkody ruchu, natenczas z dwu punktów na brzegach przeciwległych wyjdą strugi oporowe. Te dwie strugi przetną się w łożysku w jakimś miejscu, zależnem od położenia punktów wyjścia tych strug. W punkcie zetknięcia się tych strug oporowych zostanie składowa

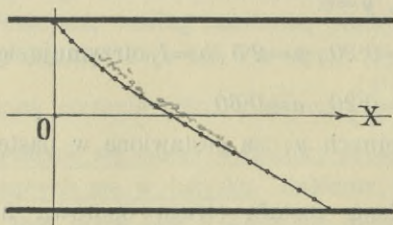


Fig. 48.

zniesioną z powodu kierunków przeciwnych, wskutek czego podnosi się ciecz w tem miejscu

$\left(\frac{V}{x}\right)_b$  zniesioną z powodu kierunków przeciwnych, wskutek czego podnosi się ciecz w tem miejscu



i powstaje fala stojąca  $f$ , jako centrum repulsyjne dla dalszego przebiegu strug (fig. 49).

Powstaje tu więc podobne zjawisko, jak przy przejściu dwu ciągów fal undulacyjnych z jednakową fazą w punkcie przecięcia się tych fal.



Fig. 49.

Jeżeli przeszkody ruchu są po obu brzegach symetrycznie rozłożone, natenczas strugi oporowe przecinają się w osi łożyska, gdzie, wynikiem interferencji fal płaskich, niesionych przez strugi oporowe, będzie szereg fal stojących, rozłożonych w osi łożyska. (fig. 50, 51, 52).

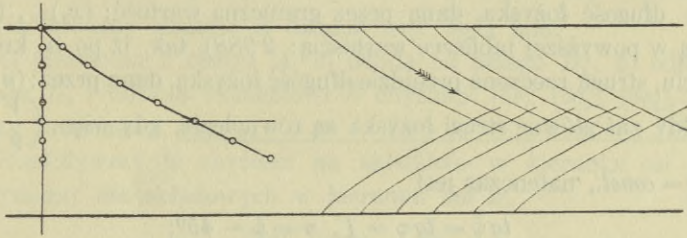


Fig. 50.

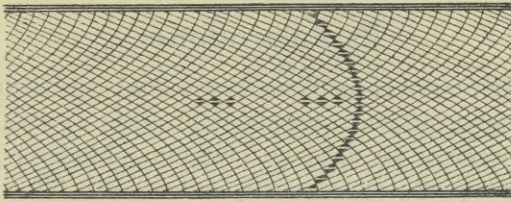


Fig. 51.

Jeżeli brzegi łożyska są równoległe, to struga oporowa przedstawiona na fig. 48 uderza o brzeg przeciwniegi pod kątem danym przez:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\left(\frac{V}{x}\right)_b - \left(\frac{V}{y}\right)_b}{\left(\frac{V}{x}\right)_b} = 1 - \frac{\left(\frac{V}{y}\right)_b}{\left(\frac{V}{x}\right)_b},$$

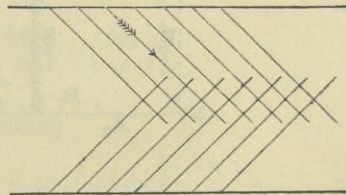


Fig. 52.

odbija się od tego brzegu pod kątem określonym powyżej przez  $\varphi$ , t. j. pod kątem, którego styczna dana jest przez:

$$\operatorname{tg} \varphi = 1 + \frac{\left(\frac{V}{y}\right)_b}{\left(\frac{V}{x}\right)_b},$$

przechodzi ponownie przez łożysko i uderza pod kątem  $\psi$  o brzeg pierwotny, z którego wyszła, odbija się od tego brzegu ponownie pod kątem  $\varphi$ , przechodzi przez łożysko na drugą stronę, gdzie następuje znowu uderzenie i odbicie pod kątami wyżej podanymi i t. d. (powstawanie serpentyn). Za każdorazowym odbiciem przebiega struga oporowa długość łożyska, daną przez graniczną wartość:  $(x_3)_{-b}$ , (oznaczoną w powyższej tabliczce wartością: 2,988), tak, iż po  $n$  krotnym odbiciu, struga rzeczona przejdzie długość łożyska, daną przez:  $(nx_3)_{-b}$ .

Gdy zaś główne strugi łożyska są równoległe, gdy więc:  $\left(\frac{V}{y}\right) = 0$ ,  $\left(\frac{V}{x}\right) = \text{const.}$ , natenczas jest

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi = 1, \quad \varphi = \psi = 45^\circ;$$

w tym wypadku jest kąt padania równy kątowi odbicia.

## 18. Fale odbite.

Fala wypływu, rozchodząca się z dowolnego elementu  $A$ , położonego na krawędzi przelewu, po przejściu przez uważany element  $E$  w łożysku, rozszerza się dalej ku brzegom, od których według znanego prawa odbijania się fal odbita zostanie (fig. 53).

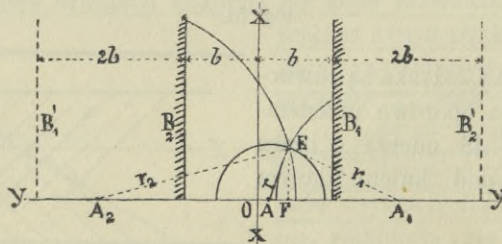


Fig. 53.

Fala od brzegów odbita rozchodzi się na powrót w warstwie ciecicy w łożysku, tak jak gdyby wychodziła z centra atrakcyj-



nego (lub repulsyjnego), położonego na tej samej krawędzi przelewu, po drugiej stronie brzegu, w odległości od tegoż, równej odległości centra pierwotnego od tego samego brzegu i oddziaływa ponownie na uważany element  $E$ .

$A$  jest dowolnym centrem atrakcyjnym na krawędzi przelewu  $yy$ ,  $A_1$  jest obrazem centra  $A$  dla brzegu  $B_1$ , czyli urojonem centrem atrakcyjnym dla fal odbitych od brzegu  $B_1$ , wreszcie  $A_2$  jest centrem dla fal odbitych od brzegu  $B_2$ .

Dalej niech oznacza:

$$AE=r, A_1E=r_1, A_2E=r_2, OF=y$$

$$EF=x, AF=\eta, A_1F=2(b-y)+\eta, A_2F=2(b+y)-\eta.$$

Na dowolny element  $E$  działać więc będą fale:

1) pierwotna z centra  $A$ , 2) odbita od brzegu  $B_1$ , 3) odbita od brzegu  $B_2$  i udzielią elementowi  $E$  chyżości:  $(\delta v)$ ,  $(\delta v_1)$ ,  $(\delta v_2)$ , w kierunku promieni  $r$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ .

Rozłożywszy te chyżości na składowe w kierunku osi  $x$  i  $y$ , otrzymamy dla składowych w kierunku osi  $x$ :

$$\left(\frac{\delta v}{x}\right) = \frac{cx}{\pi} \cdot \frac{d\eta}{x^2 + \eta^2}$$

$$\left(\frac{\delta v_1}{x}\right) = \frac{cx}{\pi} \frac{d\eta}{x^2 + [2(b-y) + \eta]^2}$$

$$\left(\frac{\delta v_2}{x}\right) = \frac{cx}{\pi} \frac{d\eta}{x^2 + [2(b+y) - \eta]^2}$$

Składowa chyżości wypadkowej w kierunku osi  $x$  będzie daną przez algebraiczną sumę chyżości elementarnych pierwotnych i odbitych, wyznaczonych dla każdego centra na krawędzi przelewu. Będzie więc:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \sum_{\eta=0}^{\eta=b+y} \left[ \left(\frac{\delta v}{x}\right) + \left(\frac{\delta v_1}{x}\right) + \left(\frac{\delta v_2}{x}\right) \right] +$$

$$+ \sum_{\eta=0}^{\eta=b-y} \left[ \left(\frac{\delta v}{x}\right) + \left(\frac{\delta v_1}{x}\right) + \left(\frac{\delta v_2}{x}\right) \right]$$

Po wykonaniu całkowania otrzymamy:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{c}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{b+y}{x} \right) + \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{b-y}{x} \right) - \right. \quad (55)$$

$$\left. - 2 \left[ \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{2(b+y)}{x} \right) + \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{2(b-y)}{x} \right) \right] \right\} +$$

$$+ \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{3(b+y)}{x}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{3(b-y)}{x}\right) + \\ + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{3b+y}{x}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{3b-y}{x}\right) \}.$$

Przechodząc do przekrojów, znajdujących się w znacznej odległości od krawędzi przelewu, rozwijając w równaniu na  $\left(\frac{V}{x}\right)$  funkcje łukowe w szeregi i opuszczając wyższe potęgi ułamków, otrzymamy:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{6bc}{\pi x} \left\{ 1 - \frac{1}{3x^2} [13b^2 + 15y^2] \right\}$$

a dla chyżości w nurcie:

$$\left(\frac{V}{x}\right)_0 = \frac{6bc}{\pi x} \left\{ 1 - \frac{1}{3x^2} \cdot 13b^2 \right\}$$

Podstawiając:

$$p = \frac{3x^2 - 13b^2}{15}$$

i dzieląc powyższe równania przez siebie, otrzymamy podobnie jak poprzednio:

$$(56) \quad \frac{\left(\frac{V}{x}\right)}{\left(\frac{V}{x}\right)_0} = \left\{ 1 - \frac{y^2}{p} \right\}$$

jako wyraz paraboli o zmiennym parametrze, ze zmieniającą się odległością uważanego przekroju łożyska od krawędzi przelewu.

Przyjmując:  $b=1$ ,  $c=1$ ,  $x=10$ , otrzymamy:  $\left(\frac{V}{x}\right)_0 = 0.0634$ , bez fal odbitych,  $\left(\frac{V}{x}\right) = 0.1743$  z falami jednorazowo odbitemi; z czego już widocznym jest, że przy współdziałaniu fal odbitych chyżość cieczy w łożysku wzrasta.

Zauważyć tu jednak należy, że przy uderzeniu fal o brzegi następuje częściowa strata siły żywej, przez zniesienie składowej  $\left(\frac{\delta v}{y}\right)$ , wskutek czego działanie fal odbitych znacznie się zmniejsza.

Im więcej razy fala pierwotna elementarna odbita zostanie, tem większą będzie chyżość elementów cieczy w łożysku, przy tem samem natężeniu centrów w układzie elementarnym.

Skoro odbijanie się fal elementarnych jednej i tej samej cieczy w danem łożysku zależy tylko od brzegów, więc w łożyskach o brzegach miękkich, podatnych, odbicie fal elementarnych będzie słabem, ciecz będzie płynąć powoli; w łożyskach o brzegach twardej, opornych, nastąpi silniejsze odbicie, ciecz będzie płynąć szybciej



W łożyskach o brzegach szorstkich, z nierównościami sterzącymi w łożysko, powstają strugi oporowe, przy których składowa  $\left(\frac{v}{x}\right)_b$  w kierunku ruchu zniesioną zostaje, a ciecz w łożysku się podnosi; będzie więc ruch cieczy powolniejszym, niż w łożyskach o równych i gładkich brzegach.

## 19. Zapory.

Przeszkody, znajdujące się na dnie łożyska, wstrzymują również bieg cieczy, bądź to przez zniesienie jednej, bądź też obu składowych chyżości.

Załóżmy, że na dnie uważanego łożyska stoi stawidło jako zapora ruchu.

Dla uproszczenia rachunku załóżmy, że strugi są równoległe; że zatem  $\left(\frac{v}{y}\right)=0$ ,  $\left(\frac{v}{x}\right)=Const=c$ .

Szerokość stawidła niech będzie  $2b$ , a płaszczyzna oporowa stawidła niech stoi prostopadłe do kierunku ruchu. Układ osi współrzędnych przesuniemy przez środek stawidła.

Oznaczmy przez:  $EF=x$ ,  $OF=y$   
 $RF=\eta$ ,  $RE=r$  odnośne rzędne dowolnego elementu  $E$  cieczy w łożysku i dowolnego elementu  $R$  zwilżonej powierzchni stawidła.

Jeżeli szerokość elementu  $R$  oznaczymy przez  $d\eta$ , a grubość warstwy cieczy przez  $\lambda$ , to wstrzymana w ruchu elementarna ilość cieczy, dopływająca na jednostkę czasu do powierzchni elementu  $R$ , wynosić będzie:

$$dM = c \lambda d\eta.$$

Ciecz ta rozejdzie się z elementu  $R$  jako z centrum repulsyjnego na powierzchniach falowych kolistych o wysokości  $\lambda$ . Fala o promieniu  $r$  uderzy na dowolny element  $E$  cieczy w łożysku, udzielając temu elementowi chyżości elementarnej  $(\delta v)$  w kierunku  $RE$ . Gdy zaś element  $E$  postępuje na powierzchni fali płaskiej z chyżością  $c$ , przeto skutek zetknięcia się tych fal nastąpi interferencja w punkcie  $E$ . W celu wyszukania wypadkowych z tej interferencji, otrzymujemy z powyższego:

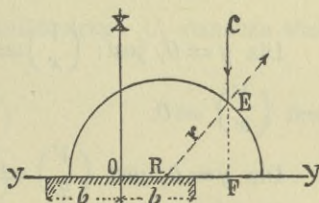


Fig. 54.

$$c \lambda d\eta = r \pi \lambda \cdot (\delta v)$$

z czego wypada:

$$\left(\frac{\delta v}{x}\right) = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{x \cdot d\eta}{x^2 + \eta^2}$$

$$\left(\frac{\delta v}{y}\right) = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{\eta d\eta}{x^2 + \eta^2}$$

Ponieważ z każdego elementu zwilżonej powierzchni stawidła, rozchodzą się fale repulsyjne, działające na element  $L$ , przeto tworząc algebraiczne sumy wszystkich chyżości jednoimiennych, otrzymamy chyżości wypadkowe w kierunkach osi  $x$  i  $y$ . Będzie przeto:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = c - \frac{c}{\pi} \int_{\eta=y-b}^{y+b} \frac{x \cdot d\eta}{x^2 + \eta^2}, \quad \left(\frac{V}{y}\right) = \frac{c}{\pi} \int_{\eta=y-b}^{\eta=y+b} \frac{\eta \cdot d\eta}{x^2 + \eta^2}$$

a po zcałkowaniu otrzymamy:

$$(57) \quad \left(\frac{V}{x}\right) = c - \frac{c}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{y+b}{x} \right) - \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{y-b}{x} \right) \right\}$$

$$(58) \quad \left(\frac{V}{y}\right) = \frac{c}{2\pi} \log \left( \frac{1 + \left(\frac{y+b}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y-b}{x}\right)^2} \right)$$

Dla  $y=0$ , jest:  $\left(\frac{V}{x}\right) = c - \frac{2c}{\pi} \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{b}{x} \right)$ , a dla  $y=0, x=0$ , jest  $\left(\frac{V}{x}\right) = 0$ .

Dla  $y=0$ , jest  $\left(\frac{V}{y}\right) = 0$ , to znaczy: przypadająca struga na środek stawidła nie doznaje zboczenia od pierwotnego kierunku ruchu.

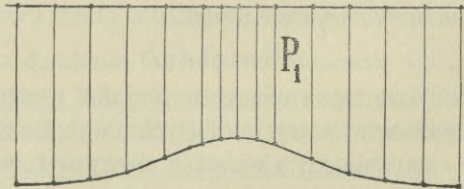


Fig. 55.

Dla profilu  $P_1$  powyżej stawidła i dla profilu  $P_2$  poniżej stawidła, są przedstawione tachoidy  $\left(\frac{V}{x}\right)$  na fig. 55, 56.



Kierunek chyżości wypadkowej danym jest przez:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{V}{y}\right)}{\left(\frac{V}{x}\right)}$$

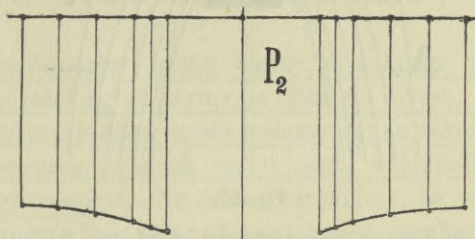


Fig. 56.

a to równanie zcałkowane daje:

$$\begin{aligned} \pi y - (y+b) \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{y+b}{x} \right) + (y-b) \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{y-b}{x} \right) + \\ + \frac{x}{2} \log \frac{x^2 + (y+b)^2}{x^2 + (y-b)^2} = C_1 \end{aligned} \quad (59)$$

jako równanie linii prądu, względnie kształtu strugi.  $C_1$  oznacza stałą dowolną.

Z równania:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\frac{V}{x}\right)}{\left(\frac{V}{y}\right)}$$

otrzymuje się równanie linii potencjalnej:

$$\begin{aligned} x \left[ \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{y+b}{x} \right) - \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{y-b}{x} \right) - \pi \right] + \\ + \frac{y+b}{2} \log \frac{x^2 + (y+b)^2}{(y+b)^2} - \frac{y-b}{2} \log \frac{x^2 + (y-b)^2}{(y-b)^2} = C_2 \end{aligned} \quad (60)$$

Zakładając, że ciecz przepłynąwszy poza płaszczyznę stawidła, spływa dalej dnem łożyska, wykreślono strugi odkształcone przez stawidło, czyli linie prądu, tudzież linie potencjalne odnośnie do powyższych równań (fig. 57).

Gdyby w płaszczyźnie stawidła, t. j. w osi  $oy$  znajdowała się krawędź przelewu, przez którąby ciecz spływając, dalej wolno opadała,

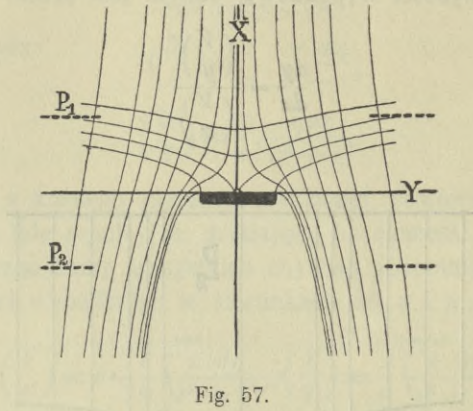


Fig. 57.

natenczas kształt strugi przelewowej zostałby wskutek grawitacji zmienionym, a łatwo znaleźć kształt zmieniony według znanych zasad ciężenia.

## 20. Pionowa parabola chyżości.

Liczne pomiary, wykonane w łożyskach różnych rzek i kanałów, wykazały, że chyżość przepływu wody jest w każdym elemencie uważanego przekroju łożyska inną, że zmienia się ona tak w kierunku poziomym jak i pionowym. Linie, według których ta zmiana chyżości następuje, nazwano parabolami chyżości, pionową i poziomą, a linie te zostały w niniejszej rozprawce nazwane »tachoidami«.

Dla tych dwu kategorii tachoid  $\left(\frac{V}{x}\right)$ , t. j. linii, przedstawiających zmianę chyżości w kierunku podłużnym łożyska, uzyskano z pomiarów najrozmaitsze typy, na podstawie których usiłowali liczni hydrotechnicy znaleźć prawo, według którego odbywa się zmiana chyżości przepływu w różnych elementach uważanego przekroju łożyska.

Gerstner twierdził, że tachoida  $\left(\frac{V}{x}\right)$  jest elipsą.

Voltmann mniemał, że jest parabolą o pionowej osi, i że wierzchołek tej paraboli położony jest w jakiejś odległości pod dnem łożyska.

Prony przyjął, że dno i brzegi łożyska są wysłane przylegającą do nich warstwą wody.



Funk obliczył na tej podstawie, że prawo zmiany chyżości danem jest przez »logarytmikę«.

Dupuit udowodnił, że taka warstwa wody, wyścielająca łożysko, jak gdyby nieruchoma poduszka, jest niedopuszczalną.

Dopiero pomiary na Mississipi, których z wszelką ścisłością dokonali Humphrey i Abbot, położyły koniec różnym błędnym poglądom co do kształtu tachoidy w kierunku podłużnego ruchu wody.

Rozpatrywanie praw ruchu cieczy w łożysku będzie znacznie uproszczonem, jeżeli ograniczymy je tylko do łożysk, których kształt w przekroju poprzecznym da się matematycznie określić. Rozpatrujemy więc najprostszypadek ruchu cieczy w łożysku prostokątnem o brzegach równoległych. Na razie przyjmijmy, że poziome łożysko o długości  $l$  i małej szerokości  $\lambda$  jest zamknięte na jednym końcu zastawą pionową, którą możemy dowolnie usunąć, a na drugim końcu połączone jest ze zbiornikiem nieskończenie wielkim, z którego ciecz trwale wypływać może. Założmy nadto, że brzegi i krawędzie łożyska przy połączeniu ze zbiornikiem nie wywierają żadnego opornego działania na ruch cieczy w łożysku, której głębokość niech będzie daną przez  $a$ .

Przyjąwszy poziomą powierzchnię cieczy w zbiorniku jako płaszczyznę  $xy$ , płaszczyznę pionową, przechodzącą przez środek łożyska jako płaszczyznę  $xz$ , a płaszczyznę zastawy prostopadłej do osi łożyska, jako płaszczyznę  $yz$ , otrzymamy prostokątny układ współrzędnych.

Ciecz, znajdującą się w zamkniętem łożysku, wywierać będzie ciśnienie na płaszczyznę zastawki, wskutek którego każdemu elementowi cieczy w tej płaszczyźnie położonemu, odpowiadać będzie według zasady Torricellego przygotowana chyżość wypływu o wielkości:

$$v = \sqrt{2g\zeta}$$

jeżeli przez  $\zeta$  oznaczymy głębokość, w jakiej uważany element pod powierzchnią cieczy się znajduje.

Jeżeli zastawkę usuniemy, to nastąpi w płaszczyźnie pionowej, zajmowanej poprzednio przez zastawkę, wypływ cieczy z chyżością przygotowaną dla każdego elementu.

Położenie elementów wypływających zajmą wskutek atrakcyi następujące po nich elementa; a ruch udzielać się będzie stopniowo elementom, leżącym coraz dalej od płaszczyzny wypływu.



Elementy cieczy, położone w pionowej płaszczyźnie przelewu (tj. w płaszczyźnie, zajmowanej poprzednio przez zastawkę), tworzyć więc będą płaski układ centrów atrakcyjnych, w których prawo ruchu cieczy zostało powyżej określone.

Dowolne centrum atrakcyjne, oznaczone przez  $A$ , którego rzędne dane są przez:  $(\zeta = 0)$ ,  $(\zeta)$ , oddziaływać będzie na dowolny element  $E$  cieczy w łożysku, dany przez rzędne:  $(x, z)$ . (fig. 58).

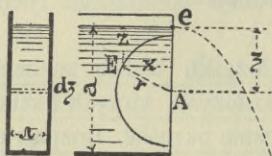


Fig. 58.

Odległość elementu  $E$  od centra  $A$  niech wynosi  $AE = r$ . Z elementu  $A$ , jako z centra atrakcyjnego, rozchodzić się będą elementarne fale wypływu na powierzchniach półkolistych walcowych, z których fala o promieniu  $r$  dosięgnie elementu  $E$ , pobudzając go do ruchu w kierunku promienia  $EA$  z chyżością elementarną  $(\delta v)$ .

Powierzchnia elementu atrakcyjnego  $A$  daną jest przez:  $\lambda d\zeta$ , więc elementarna ilość cieczy, jaka w płaszczyźnie  $(yz)$  przez ten element wypłynie, będzie daną przez:

$$dM = \lambda \cdot d\zeta \cdot \sqrt{2g\zeta}$$

Gęstość cieczy przyjęto:  $\sigma = 1$ .

Ta sama ilość cieczy dopływa z otoczenia w łożysku przez powierzchnię fal półkolistych walcowych, więc przez powierzchnię fali o promieniu  $r$  dopłynie do centra atrakcyjnego  $A$  ilość:

$$dM = r\pi\lambda(\delta v)$$

z czego wypada:

$$(61) \quad (\delta v) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi r} \cdot \zeta^{\frac{1}{2}} \cdot d\zeta$$

Z każdego centra atrakcyjnego, położonego w płaszczyźnie przelewu, rozchodzić się będą fale wypływowe interferujące w elemencie  $E$ . Wynikiem interferencji będzie ruch elementu  $E$  z chyżością wypadkową w odpowiednim kierunku wypadkowym. Składowe tej chyżości wypadkowej dane są przez algebraiczne sumy równoimiennych składowych chyżości elementarnych.

Rozłożywszy więc elementarną chyżość  $(\delta v)$  na składowe w kierunku osi  $x, z$ , otrzymamy:

$$(62) \quad \left(\frac{\delta v}{x}\right) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \cdot \frac{x \cdot \zeta^{\frac{1}{2}}}{x^2 + (\zeta - z)^2} \cdot d\zeta$$



$$\left(\frac{\delta v}{z}\right) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \cdot \frac{(\zeta - z)\zeta^{\frac{1}{2}}}{x^2 + (\zeta - z)^2} \cdot d\zeta \quad (63)$$

Po zcałkowaniu i wstawieniu granicznych wartości wypadają:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{2ag}}{\pi \cdot x} \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{2}{7} a^2 - \frac{4}{5} az + \frac{2}{3} z^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2x^4} \left[ \frac{2}{11} a^4 - \frac{8}{9} a^3 z + \frac{12}{7} a^2 z^2 - \frac{8}{5} a z^3 + \frac{2}{3} z^4 \right] - + \& \right\}, \quad (64)$$

jako wyrażenie chyżości w kierunku podłużnym; tudzież:

$$\left(\frac{V}{z}\right) = \frac{a\sqrt{2ag}}{\pi x^2} \left\{ \left( \frac{2}{5} a - \frac{2}{3} z \right) - \frac{1}{x^2} \left[ \frac{2}{9} a^3 - \frac{6}{7} a^2 z + \frac{6}{5} a z^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{3} z^3 \right] + - \& \right\} \quad (65)$$

jako chyżość składowa w kierunku  $z$ .

Jeżeli założymy, że w równaniu (64)  $x$  ma dla dowolnego profilu wartość stałą, natenczas to równanie będzie równaniem pionowej tachoidy  $\left(\frac{V}{x}\right)$ ; czyli równaniem pionowej paraboli chyżości, dla ruchu cieczy przedstawionego w tym wypadku.

Z równania tego widzimy, że tachoida jest w ogólności linią krzywą  $n$ -tego stopnia.

Przechodząc do profilów, położonych w znacznej odległości od centrów atrakcyjnych, można w równaniach 64 i 65 opuścić dalsze wyrazy, zawierające wyższe potęgi  $x$  w mianowniku, jako wartości bardzo małe; a w takim razie te równania przybierają kształt prostszy, mianowicie:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{2ag}}{\pi x} \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{2}{7} a^2 - \frac{4}{5} az + \frac{2}{3} z^2 \right] \right\} \quad (66)$$

$$\left(\frac{V}{z}\right) = \frac{a\sqrt{2ag}}{\pi x^2} \left[ \frac{2}{5} a - \frac{2}{3} z \right] \quad (67)$$

Dla  $x = Const$  jest równanie (66) równaniem paraboli; a więc pionowa tachoida  $\left(\frac{V}{x}\right)$  będzie parabolą. Różniczkując równanie (66) względem  $z$  otrzymujemy:

$$\frac{\partial \left(\frac{V}{x}\right)}{\partial z} = \left( \frac{4}{5} a - \frac{4}{3} z \right) \cdot Const = 0$$

Druga pochodna będzie ujemna:

Z tego wypada:  $z = 0.6 a$ ,

czyli przy ruchu wyżej opisanym, największa chyżość  $\left(\frac{V}{x}\right)$  znajduje się w głębokości  $0.6 a$  pod powierzchnią; gdzie zarazem położonym jest wierzchołek paraboli.

Równanie (67) wskazuje, że tachoida  $\left(\frac{V}{z}\right)$ , tj. linia chyżości w kierunku pionowym, jest linią (dla  $x = Const$ ) prostą. Wartość na  $\left(\frac{V}{z}\right)$  staje się zerem, jeżeli:  $\frac{2}{5} a = \frac{2}{3} z$ , czyli,  $z = 0.6 a$ ; co znaczy: że w głównej strudze nie ma działania poprzecznego (pionowego).

Zakładając w równaniu (66) na  $z$  wartość zero, otrzymamy wyrażenie chyżości na powierzchni:

$$(68) \quad \left(\frac{V}{x}\right)_0 = \frac{2 a \sqrt{2 ag}}{3 \pi x} \left\{ 1 - \frac{3 a^2}{7 x^2} \right\}$$

a przyjmując  $p = x^2 - \frac{3}{7} a^2$ , i dzieląc równanie (66) przez (68), otrzymamy

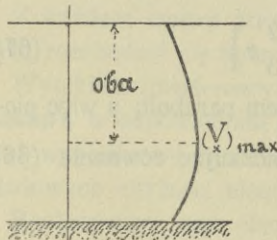
$$(69) \quad \left(\frac{V}{x}\right) = \left(\frac{V}{x}\right)_0 \left\{ 1 - \frac{z^2 - \frac{6}{5} az}{p} \right\}$$

na wyrażenie chyżości w dowolnej głębokości  $z$ , przez chyżość na powierzchni w uważanym profilu.

Na chyżość w kierunku pionowym otrzymuje się w podobny sposób:

$$(70) \quad \left(\frac{V}{z}\right) = \left(\frac{V}{z}\right)_0 \left\{ 1 - \frac{5z}{3a} \right\}$$

Przyjmując dla przykładu dowolne wartości:  $\left(\frac{V}{x}\right)_0 = 1.0 \text{ mt.}$ ,  $a = 2.0 \text{ mt.}$   $p = 5$ , otrzymamy:



$z$	$\left(\frac{V}{x}\right)$
0	1.000
0.4	1.160
0.8	1.256
1.2	1.288
1.6	1.256
2.0	1.080

Fig. 59.

Dotycząca tachoida  $\left(\frac{V}{x}\right)$  jest wykreślona na fig. 59.



## 21. Obniżenie powierzchni cieczy w układzie centrów atrakcyjnych.

Z paska elementarnego  $A$ , o szerokości  $d\zeta$  a długości  $\lambda$ , położonego w głębokości  $\zeta$  pod poziomą powierzchnią cieczy (fig. 58) rozjedzie się fala wypływu o promieniu  $Ae = \zeta$  i pobudzi element  $e$  do ruchu w kierunku  $eA$ .

Ilość cieczy, wypływającej na jednostkę czasu przez elementarny pasek  $A$ , wynosi

$$dM = \lambda d\zeta \sqrt{2g\zeta};$$

ta sama ilość dopływa przez powierzchnię fali o promieniu  $\zeta$ , przeto

$$dM = \lambda \pi \zeta (\delta v)$$

a z tego wypada

$$(\delta v) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \quad (71)$$

Wszystkie fale wypływu, wychodzące z płaszczyzny układu centrów, interferują w punkcie  $e$ , nadając temuż chyżość wypadkową, wskutek której działania nastąpi obniżenie powierzchni cieczy w punkcie  $e$ . Niech wielkość tego obniżenia będzie  $s_0$ , to całkując równanie (71) otrzymamy

$$V = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_{s_0}^a \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = \frac{2\sqrt{2g}}{\pi} (a^{\frac{1}{2}} - s_0^{\frac{1}{2}}),$$

jako wyrażenie tej chyżości, którą element  $e$  nabędzie wskutek atrakcji przy wypływie; tej zaś chyżości odpowiada obniżenie  $s_0$ , przeto

$$V = \sqrt{2gs_0} = \frac{2\sqrt{2g}}{\pi} (a^{\frac{1}{2}} - s_0^{\frac{1}{2}})$$

a z tego wypada

$$s_0 = \frac{4a}{(\pi + 2)^2} \quad (72)$$

Przyjmując małą wartość na  $a$ , możemy na podstawie równania 72 wyznaczyć ilość wypływu (odnośnie do łożyska, fig. 58) przez centra atrakcyjne; w tym wypadku jest:

$$M = \int_0^a \lambda d\zeta \sqrt{2g\zeta} = \frac{2}{3} \lambda \sqrt{2g} [a^{3/2} - s_0^{3/2}]$$

Po wstawieniu wartości na  $s_0$  będzie

$$M = \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{8}{(\pi + 2)^3} \right] a \lambda \cdot \sqrt{2ag}.$$

Za pomocą powyższego wzoru można łatwo obliczyć ilość wy-

pływu z otworu w dnie naczynia o wielkiej rozciągłości, jeżeli rozmiary otworu znacznie przewyższają małą wysokość warstwy cieczy.

Otwór w dnie naczynia niech będzie kołowy, o promieniu  $r$ , wysokość cieczy nad dnem niech będzie  $a$ . Poprowadziwszy przez środek otworu dwie płaszczyzny pionowe, odchylone od siebie o kąt  $d\alpha$ , otrzymuje się w tem naczyniu idealne łożysko (fig. 58.) Elementarna ilość wypływu będzie zatem:

$$dM = \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{8}{(\pi+2)^3} \right] \cdot \sqrt{2ag} \cdot r d\alpha$$

Po zcałkowaniu między granicami 0 i  $2\pi$  wypadnie

$$M = 0.6273923 \cdot [2r\pi a] \cdot \sqrt{2ag};$$

odnosi się to do wypadku, w którym jest  $r > a$ ; w takim razie wypływ cieczy jest tylko przelewem przez krawędź otworu.

## 22. Przelew.

Jeżeli w bocznej pionowej ścianie zbiornika znajduje się otwór (zazwyczaj prostokątny z pionową krawędzią), przez który ciecz przepływa, a powierzchnia cieczy nie zakrywa całego otworu, natenczas powstaje tak zwany przelew.

Powierzchnia cieczy w bliskości otworu przelewowego obniża się podczas wypływu; elementy zaś cieczy, położone wewnątrz w pobliżu krawędzi przelewu, zostają przy wypływie ponad tę krawędź wzniesione.

Zjawisko to obniżenia powierzchni i podniesienia się strug ponad krawędź przelewu, jest objawem atrakcyi wypływu; wielkość obniżenia powierzchni w pionowej płaszczyźnie przelewu jest równą wielkości podniesienia się strug ponad krawędź przelewową, gdyż atrakcyja od powierzchni do krawędzi jest tak wielką, jak atrakcyja w kierunku przeciwnym; jeżeli tylko dno zbiornika znajduje się w głębokości znacznie większej od wysokości powierzchni cieczy nad krawędzią przelewu.

Jeżeli wielkość obniżenia powierzchni cieczy w płaszczyźnie przelewu oznaczymy przez  $s$ , to wzniesienie elementów cieczy ponad krawędź będzie także  $s$ .

Do wyznaczenia wielkości całkowitego obniżenia służy równanie (72):

$$s_0 = \frac{4a}{(\pi+2)^2} = 2s$$



przeto obniżenie powierzchni cieczy w pionowej płaszczyźnie otworu i podniesienie granicznej strugi dolnej ponad krawędź przelewu dane będą przez połowę wartości z równania (72), a mianowicie przez:

$$s = \frac{2a}{(\pi + 2)^2} \quad (73)$$

Wzór powyższy został sprawdzony przy sposobności pomiarów wydatności źródeł »Jaryny« dla wodociągów miasta Lwowa. Woda pompowana ze źródeł wprowadzoną była do obszernego zbiornika, z którego po przejściu kilku przegród, wypływała przez brązową ramę o szerokości 0.60 m.; krawędzie ramy były prostolinijnie zaostrome, a ściany wygładzone.

Krawędź przelewu była dokładnie poziomo ustawiona.

Wysokość pionowej powierzchni wody w zbiorniku ponad krawędzią przelewu wynosiła ściśle:

$$h = 0.26 \text{ mtr.}$$

Wielkość obniżenia powierzchni wody poniżej poziomu zbiornika, wynosiła 2 cm. Wysokość podniesienia się granicznej dolnej strugi ponad krawędź przelewu, wynosiła również 2 cm. (fig. 60).

Wielkość obniżenia i podniesienia obliczona z równania (73) wypada:

$$s = \frac{2h}{(\pi + 2)^2} = \frac{20.26}{26.436} = 0.01975 \text{ mtr.}$$

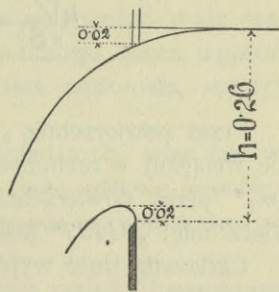


Fig. 60.

Ponieważ współczynniki kontrakcyi na przelewie, wyznaczone przez pp. Lebros et Poncelet odnoszą się do niewielu wypadków, między którymi przelew o wysokości ciśnienia  $h = 0.26 \text{ mtr.}$  się nie znajduje, więc zachodziła tutaj pewna trudność w wyborze odpowiedniego współczynnika kontrakcyi; a tem samym i w możności dokładnego obliczenia ilości, wypływającej przez przelew, względnie ilości pompowanej wody.

Ustawioną nad źródłem lokomobilą nie było można uzyskać większej wysokości ciśnienia nad krawędzią przelewu. Wysokość 0.26 mtr. była maksymalną.

Korzystając z możności obliczenia depresyi wyrazem (73), ustawiłem wzór empiryczny na obliczenie ilości przepływu, zakładając że:

1) Powierzchnie, ograniczające całkowitą strugę wypływową, są w przybliżeniu powłokami parabolicznymi (fig. 61).

2) Przeciętna wartość składowej  $\left(\frac{V}{x}\right)$  dla dowolnego elementu w płaszczyźnie przelewu wynosi w przybliżeniu

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \sqrt{2gz} \cdot \cos \frac{\pi}{4}.$$

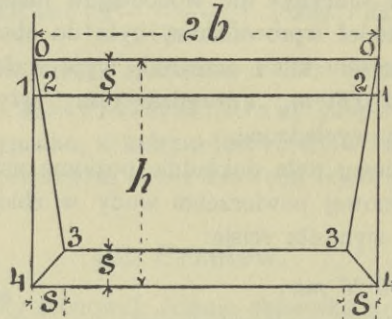


Fig. 61.

Przez powierzchnię „012” wypływa bardzo mała ilość wody i tej nie wciągamy w rachunek, przez powierzchnię „23322” wypływa ilość „ $m_1$ ” przez powierzchnię: „12341” wypływa ilość  $m_2$  przez powierzchnię: „34433” ilość  $m_3$ .

Całkowita ilość wypływu jest

$$M = m_1 + 2m_2 + m_3$$

przyczem:

$$(74) \left\{ \begin{array}{l} \underline{m_1} = \frac{2}{3} \left[ 2b - s - \frac{s^2}{h} \right] \cdot \left[ (h-s)^{3/2} - s^{3/2} \right] \cdot \sqrt{g} \\ \underline{2m_2} = \frac{1}{9} \left[ s + \frac{s^2}{h} \right] \left[ (h-s)^{3/2} - s^{3/2} \right] \cdot \sqrt{g} \\ \underline{m_3} = \frac{1}{9} \left[ 2b - s \right] \left[ h^{3/2} - (h-s)^{3/2} \right] \cdot \sqrt{g} \end{array} \right.$$

$$\underline{\frac{s}{h}} = \frac{2h}{(\pi+2)^2}$$

Dla omawianego powyżej wypadku wynosi:

$$2b = 0.60$$

$$h = 0.26$$

a ilość wypływu oblicza się na:

$$M = 0.1431 \text{ m}^3.$$



W następującej tabliczce zestawilem kilka przykładów obliczeń ilości przelewu dla porównania.

$2b$	$h$	Według Lebros		Według wzoru $M$
		$\frac{2}{3}\mu$	$M$	
0.60	0.60	0.390	0.48171	0.48240
0.20	0.20	0.390	0.03088	0.03078
0.60	0.20	0.395	0.09400	0.09600
0.20	0.01	0.424	0.00367	0.00368

Powyższy empiryczny wzór na ilość wypływu przez przelew mógłby być użytym w tych wypadkach, dla których współczynnik kontrakcyi nie jest wiadomy.

### 23. Wypływ cieczy przez otwór w dnie naczynia.

Na dnie obszernego naczynia znajduje się bardzo mały otwór kolisty o promieniu  $r$ , wymiaru skończenie małego. Ciecz, wypełniająca naczynie do wysokości  $h$  ponad dnem poziomem, wypływa trwale. Krawędzie otworu są ostre.

Ponieważ zakładamy, że otwór jest bardzo mały, więc fale wypływowe możemy w przybliżeniu uważać jako półkule współśrodkowe, z których jedna przejdzie przez krawędź otworu, a więc promieniem jej będzie także  $r$ .

Elementy cieczy, znajdującej się w naczyniu, podążać będą do środka otworu wzdłuż promieni prostopadłych do powierzchni kulistych.

Wysokość ciśnienia  $h$  niech będzie większą od  $2r$ , lecz stosunkowo niewielką.

Pole otworu odgraniczamy wewnątrz cieczy powierzchnią półkuli, poprowadzoną przez kołową krawędź otworu, jako powierzchnią potencjalną i możemy obliczyć ilość cieczy, jaka przez to pole wypłynie w kierunku prostopadłym do płaszczyzny otworu.

Figura 62 przedstawia przecięcie warstwy cieczy, otworu i powierzchni potencjalnej płaszczyzną pionową, przechodzącą przez środek otworu. Dowolny element  $E$ , podążający z otoczenia wewnątrz, ku środkowi

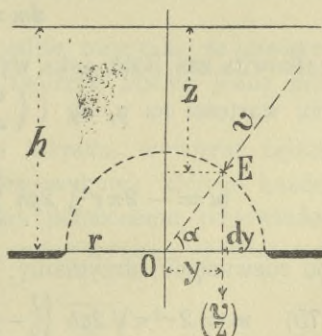


Fig. 62.

otworu  $O$ , uzyska w punkcie  $E$  według zasady Torricellego chyżość  $v$ , daną przez:

$$v = \sqrt{2gz}$$

i podążałby dalej ku środkowi otworu, gdyby nie było równoczesnego dopływu innych elementów cieczy ku środkowi, wskutek czego powstaje opór przeciw ruchowi dośrodkowemu. Przez równoczesny dopływ symetrycznie rozłożonych elementów, znieioną zostaje składowa pozioma chyżości dośrodkowej, a centralny kierunek ruchu uważanego elementu cieczy, zostaje zmienionym w pionowy.

Kąt, zawarty między osią  $y$  a pierwotnym kierunkiem ruchu, oznaczmy przez  $\alpha$ ; natenczas składowa chyżości  $v$  w kierunku pionowym będzie

$$\left(\frac{v}{z}\right) = v \cdot \sin \alpha$$

a odległość  $y$ , w której dotyczący element cieczy przechodzi obok środka  $O$  z chyżością  $\left(\frac{v}{x}\right)$ , będzie:

$$y = r \cdot \cos \alpha$$

Zatoczywszy promieniem  $y$ , tudzież promieniem  $y + dy$ , koła w płaszczyźnie otworu, odgraniczymy w tym otworze pole, przez które przepływać będą elementy cieczy z chyżością

$$\left(\frac{v}{z}\right) = v \cdot \sin \alpha = \sqrt{2gz} \cdot \sin \alpha = \sqrt{2g(h - r \sin \alpha)} \cdot \sin \alpha$$

Elementarna ilość cieczy, jaka tym paskiem kolistym o szerokości:  $dy$  przepłynie, będzie:

$$dm = 2\pi \cdot y \cdot dy \left(\frac{v}{z}\right)$$

całkowita zaś ilość, jaka wypłynie uważanym otworem (po wstawieniu wartości na  $y$ ,  $dy$  i  $\left(\frac{v}{z}\right)$ ), będzie daną przez:

$$m = -2\pi r^2 \sqrt{2gh} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \frac{r}{h} \sin \alpha\right)^{1/2} \cdot \sin^2 \alpha \cos \alpha \, d\alpha$$

po rozwinięciu otrzymamy:

$$(75) \quad m = 2r^2 \pi \sqrt{2gh} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \cdot \frac{r}{h} - \frac{1}{40} \frac{r^3}{h^3} - \frac{1}{96} \frac{r^3}{h^3} - \frac{5}{896} \frac{r^4}{h^4} - \right. \\ \left. - \frac{7}{2048} \frac{r^5}{h^5} - \frac{7}{3072} \frac{r^6}{h^6} - \frac{33}{20480} \frac{r^7}{h^7} - \& \right\} = r^2 \pi \cdot \sqrt{2gh} \cdot \mu$$

jako przybliżone wyrażenie na ilość wypływu.



Podstawiając dla  $r$  i  $h$  różne wartości, otrzymujemy współczynnik wypływu dla odpowiednich przypadków; a mianowicie:

$\frac{r}{h} =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
$\mu =$	0.57697	0.60072	0.61448	0.62350	0.64114

Według pomiarów wypływu, dokonanych przez Weissbacha dla stosunku  $\frac{r}{h} = \frac{1}{5}$  wynika:  $\mu = 0.614$ .

## 24. Ruch cieczy w łożysku.

Rozpatrując dalej ten sam wypadek, załóżmy, że to poziome łożysko o długości  $l$ , o brzegach równoległych prostokątnych, pozostające w połączeniu z nieskończenie wielkim zbiornikiem, ma szerokość  $2b$ , a głębokość wody wynosi  $a$ . Ze zbiornika wypływa ciecz trwale bez oporu na połączeniu z łożyskiem.

Łożysko jest u wylotu zamknięte zastawą pionową, którą w danej chwili dowolnie usunąć można.

Przyjąwszy poziomą powierzchnię cieczy w zbiorniku jako płaszczyznę  $xy$ , płaszczyznę pionową, przechodzącą przez środek łożyska jako płaszczyznę  $xz$ , a płaszczyznę zastawy prostopadłej do osi łożyska jako płaszczyznę  $yz$ , otrzymamy prostokątny układ współrzędnych.

Początkowy stan cieczy w łożysku będzie więc taki, że powierzchnia cieczy w łożysku i w zbiorniku tworzyć będzie jedną płaszczyznę poziomą.

Ciecz, znajdująca się w zamkniętym łożysku, wywierać będzie ciśnienie na płaszczyznę zapory (zastawki), wskutek którego każdemu elementowi cieczy, w tej płaszczyźnie położonemu, odpowiadać będzie, według zasady Torricellego, przygotowana chyżość wypływu:

$$v = \sqrt{2g\zeta};$$

jeżeli przez  $\zeta$  oznaczymy głębokość, w jakiej uważany element znajduje się pod powierzchnią cieczy.

Jeżeli zastawkę usuniemy, to nastąpi w płaszczyźnie pionowej,

zajmowanej poprzednio przez zastawkę, wypływ cieczy z chyżością dla każdego elementu przygotowaną. Położenie elementów wypływających zajmują wskutek atrakcyi następujące po nich elementy; a ruch udziela się stopniowo elementom, położonym dalej od płaszczyzny wypływu.

Elementy cieczy, położone w pionowej płaszczyźnie przelewu (tj. w płaszczyźnie zajmowanej poprzednio przez zastawkę), tworzyć więc będą płaski układ centrów atrakcyjnych, w których prawo ruchu cieczy powyżej określono.

Dowolne centrum atrakcyjne, oznaczone przez  $A$ , którego rzędne są: ( $\zeta = 0$ ), ( $y - \eta$ ),  $\zeta$ , oddziaływać będzie na dowolny element  $E$  cieczy w łożysku, dany przez  $x, y, z$ .

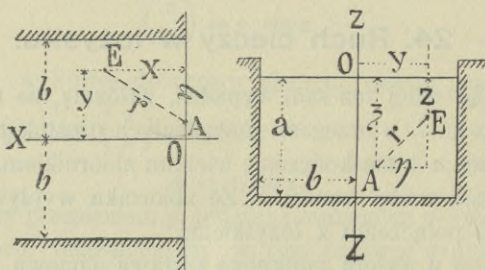


Fig. 63.

Odległość elementu  $E$  od elementu  $A$  niech wynosi  $EA = r$ .

Z elementu  $A$ , jako z centra atrakcyjnego, rozchodzić się będą elementarne fale wypływu, na powierzchniach półkulistych, z których fala o promieniu  $r$  dosięgnie elementu  $E$ , pobudzając go do ruchu w kierunku promienia  $EA$ , z chyżością elementarną:  $(\delta^2 v)$ .

Niech powierzchnia elementu atrakcyjnego  $A$  daną będzie przez iloczyn  $d\eta \cdot d\zeta$ ; wtedy elementarna ilość cieczy, jaka wypłynie przez ten element w płaszczyźnie  $yz$ , daną będzie przez:

$$d^2 m = d\eta \cdot d\zeta \cdot \sqrt{2g\zeta};$$

gdzie gęstość cieczy przyjęto  $\sigma = 1$ .

Ta sama ilość cieczy dopływa z otoczenia w łożysku przez powierzchnię fal półkulistych, więc przez powierzchnię fali o promieniu  $r$  dopłynie do centra atrakcyjnego ilość:

$$d^2 m = 2r^2 \pi (\delta^2 v)$$

z czego wypada:

$$(76) \quad (\delta^2 v) = \frac{\sqrt{2g}}{2\pi} d\eta \cdot d\zeta \frac{\zeta^{\frac{1}{2}}}{r^2}.$$



Z każdego centra atrakcyjnego, położonego w płaszczyźnie przelewu, rozchodzą się będą fale wypływu i będą interferować w punkcie  $E$ .

Wynikiem interferencji będzie ruch elementu  $E$  z chyżością wypadkową w odpowiednim kierunku wypadkowym. Składowe tej chyżości wypadkowej dane są przez algebraiczne sumy równoimiennych składowych chyżości elementarnych.

Rozłożywszy więc elementarną chyżość ( $\delta^2 v$ ) na składowe w kierunkach osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\delta^2 v}{x}\right) &= \frac{\sqrt{2g}}{2\pi} \cdot d\eta \cdot d\zeta \frac{x \cdot \zeta^{\frac{1}{2}}}{r^3} \\ \left(\frac{\delta^2 v}{y}\right) &= \frac{\sqrt{2g}}{2\pi} d\eta \cdot d\zeta \frac{\eta \cdot \zeta^{\frac{1}{2}}}{r^3} \\ \left(\frac{\delta^2 v}{z}\right) &= \frac{\sqrt{2g}}{2\pi} d\eta \cdot d\zeta \frac{(\zeta - z) \cdot \zeta^{\frac{1}{2}}}{r^3} \end{aligned} \right\} (77)$$

Zważywszy że:

$$r^2 = x^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2$$

otrzymujemy na składową chyżość wypadkowej w kierunku  $x$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{x}\right) &= \frac{\sqrt{2g}}{2\pi x^2} \iint d\eta \cdot d\zeta \zeta^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} [\eta^2 + (\zeta - z)^2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8x^4} [\eta^2 + (\zeta - z)^2] - + \& \right\} \end{aligned}$$

Po zcałkowaniu względem  $\eta$  i po wstawieniu na  $\eta$  wartości granicznych, mianowicie:

$$(\text{od } \eta = 0 \text{ do } \eta = b + y) + (\text{od } \eta = 0 \text{ do } \eta = (b - y)),$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{x}\right) &= \frac{b\sqrt{2g}}{\pi x^2} \int \zeta^{\frac{1}{2}} \cdot d\zeta \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{b^2}{3} + y^2 + (\zeta - z)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8x^4} \left[ \frac{b^2}{5} + 2b^2 y^2 + y^4 + 2 \left( \frac{b^2}{3} + y^2 \right) (\zeta - z)^2 + (\zeta - z)^4 \right] - + \& \right\} \end{aligned}$$

Całkując powyższe równanie względem  $\zeta$  i wstawiając wartości graniczne od  $\zeta = 0$ , do  $\zeta = a$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{x}\right) &= \frac{2ab\sqrt{2ag}}{3\pi x^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \left( \frac{b^2}{3} + y^2 \right) + \frac{3}{2} \left[ \frac{2}{7} a^2 - \frac{4}{5} az + \frac{2}{3} z^2 \right] \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8x^4} \left[ \left( \frac{b^4}{5} + 2b^2 y^2 + y^4 \right) + 3 \left( \frac{b^2}{3} + y^2 \right) \left( \frac{2}{7} a^2 - \frac{4}{5} az + \frac{2}{3} z^2 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} \left( \frac{2}{11} a^4 - \frac{8}{9} a^3 z + \frac{12}{7} a^2 z^2 - \frac{8}{5} a z^3 + \frac{2}{3} z^4 \right) \right] - + \& \right\} \quad (78) \end{aligned}$$

jako wyrażenie chyżości w kierunku podłużnym dla dowolnego elementu cieczy w łożysku.

Zakładając w tem równaniu  $x = Const$ , otrzymamy wyrażenie chyżości dla wszystkich elementów, położonych w płaszczyźnie jednego profilu, odległego o  $x$  od początku współrzędnych. Podobnie zakładając  $y = Const$ ,  $x = Const$ , otrzymamy z powyższego równania wyrażenie chyżości wszystkich elementów cieczy, położonych na krawędzi pionowej, powstałej z przecięcia płaszczyzny powyższego profilu z płaszczyzną pionową odległą o  $y = Const$  od osi łożyska. Otrzymamy więc równanie dowolnej tachoidy pionowej, czyli równanie »pionowej paraboli« chyżości dla dowolnej pionowej krawędzi w danym profilu łożyska.

Jak widzimy z równania (78), będzie to w ogólności krzywa  $n$ -tego stopnia.

Analizując równanie (78) spostrzegamy w pierwszym rzędzie, że chyżość dowolnego elementu cieczy w łożysku zależną jest od ilości  $a$  i  $b$ ; t. j. od rozmiarów i kształtu łożyska i od rzędnych, znamionujących położenie uważanego elementu cieczy w łożysku.

Przyjmując, że uważane łożysko ma tylko w układzie danych centrów atrakcyjnych i w pobliżu tychże podane rozmiary  $a$  i  $b$ , że natomiast powyżej tego układu rozmiary łożyska dowolnie się zmieniają, można dla dowolnych profilów, obieranych w tem zmiennem łożysku,

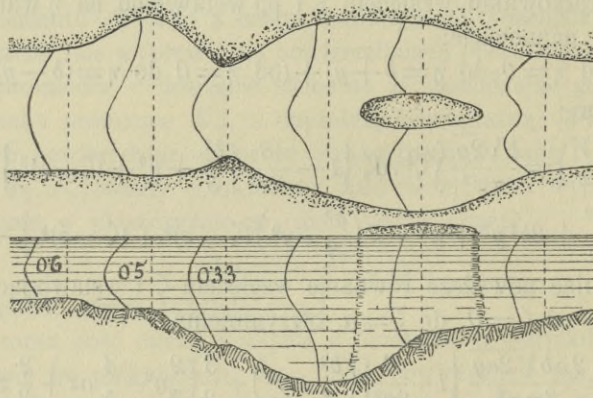


Fig. 64.

otrzymać z równania (78) rozmaite typy tachoid poziomych i pionowych, jakie już uzyskane zostały przez bezpośrednie pomiary (fig. 64).



Przyjmując zaś łożysko o stałych wymiarach  $a$  i  $b$ , oraz profile, położone w większej odległości od układu centrów atrakcyjnych, będziemy mogli w równaniu na chyżość zaniechać dalszych wyrazów, zawierających wyższe potęgi  $z$  w mianowniku, jako bardzo małe; w takim razie równanie (78) znacznie się uprości i otrzymamy:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{2ab\sqrt{2ag}}{3\pi x^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \left(\frac{b^2}{3} + \frac{3}{7}a^2\right) + y^2 - \frac{6}{5}az + z^2 \right] \right\} \quad (79)$$

Podstawiając w tem równaniu:  $y=0$ , otrzymamy wyrażenie chyżości w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś łożyska; a różniczkując następnie względem  $z$ , otrzymamy  $\left(\frac{V}{x}\right)_{max}$  dla  $z=0.6a$

Dla rozważanego zatem wypadku największa chyżość w płaszczyźnie pionowej nurtu znajduje się w  $\frac{3}{5}$  głębokości łożyska pod powierzchnią.

Podstawiając w równaniu (79)  $x=0$ , otrzymamy wyrażenie chyżości na powierzchni; a po zróżniczkowaniu względem  $y$ , okazuje się, że dla  $y=0$  największa chyżość ma miejsce na powierzchni; t. j. w osi łożyska (w nurcie).

Po wstawieniu wartości:  $z=0$ ,  $y=0$  w równanie (79) otrzymujemy wyrażenie chyżości na powierzchni w nurcie; oznaczmy tę chyżość przez  $\left(\frac{V}{x}\right)_0$  naówczas będzie:

$$\left(\frac{V}{x}\right)_0 = \frac{2ab\sqrt{2ag}}{3\pi x^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{b^2}{3} + \frac{3}{7}a^2 \right] \right\} \quad (80)$$

a dzieląc następnie równanie (79) przez (80) i porządkując wyrazy, otrzymamy:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \left(\frac{V}{x}\right)_0 \left\{ 1 - \frac{1}{p} \left[ y^2 - \frac{6}{5}az + z^2 \right] \right\} \quad (81)$$

przyczem:

$$p = \frac{2}{3}x^2 - \left[ \frac{b^2}{3} + \frac{3}{7}a^2 \right];$$

$p$  oznacza parametr zmienny, zależny od  $x$ , a równanie (81) jest wyrażeniem chyżości w kierunku podłużnym, dowolnego elementu cieczy w łożysku, przez chyżość na powierzchni w nurcie.

Podstawiając w równaniu (79) albo (81)

$$\left(\frac{V}{x}\right) = Const, \quad x = const,$$

otrzymamy wyrażenie:

$$(82) \quad y^2 - \frac{6}{5}az + z^2 = Const$$

jako równanie izotachy.

W tym wypadku izotachy są kołami, których środek leży w głębokości

$$z = \frac{3}{5}a$$

pod powierzchnią cieczy w łożysku.

Z uzyskanych wzorów (79) i (81) na chyżość w kierunku podłużnym wynika: elementy cieczy, w łożysku znajdujące się w uważanej chwili w płaszczyźnie pionowej, prostopadłej do osi łożyska, znajdują się po upływie jednostki czasu na powierzchni paraboloidy obrotowej.

Całkując dalsze dwa równania z układu (77), otrzymujemy wyrażenia na składowe chyżości wypadkowej:

w kierunku  $y$ :

$$(83) \quad \left(\frac{V}{y}\right) = \\ = \frac{2}{3} \frac{ab\sqrt{2ag}}{\pi x^3} y \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \left( b^2 - \frac{3}{7}a^2 \right) + y^2 - \frac{6}{5}az + z^2 \right] \pm \& \right\}$$

tudzież w kierunku  $z$ :

$$(84) \quad \left(\frac{V}{z}\right) = \\ = \frac{2}{3} ab \frac{\sqrt{2ag}}{\pi x^2} \left\{ \left( \frac{3}{5}a - z \right) \left[ 1 - \frac{b^2 + 3y^2}{2x^2} \right] - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{a^3}{3} - \frac{9}{7}a^2z + \frac{4}{5}az^2 - z^3 \right] \pm \& \right\}$$

Dla profilów więcej odległych od układu centrów atrakcyjnych, można w powyższych równaniach zaniechać wyrazów, zawierających wyższe potęgi  $z$  w mianowniku; w takim razie równania te znacznie się uproszczą, a mianowicie:

$$(85) \quad \left(\frac{V}{y}\right) = \frac{2}{3} \frac{ab\sqrt{2ag}}{\pi x^3} y$$

$$(86) \quad \left(\frac{V}{z}\right) = \frac{2}{3} \frac{ab\sqrt{2ag}}{\pi x^3} \left( \frac{3}{5}a - z \right).$$

Dla  $x = const$  znaczy to, że w profilach łożyska, bardziej odległych od układu centrów atrakcyjnych, zmieniają się chyżości poprzeczne w kierunkach  $y$  i  $z$  według prawa linii prostej.



Chyżość poprzeczna w kierunku  $y$  jest przy brzegach największą i maleje ku środkowi łóżyska; a w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś łóżyska (względnie nurt) staje się zerem. Wskutek tej chyżości mogą być przedmioty, znajdujące się w wodzie przy brzegu, uniesione na środek łóżyska. Chyżość poprzeczna w kierunku  $z$  jest na powierzchni i na dnie największą; maleje zaś ku środkowi, względnie ku płaszczyźnie poziomej, przechodzącej przez strugę obojętną, względnie przez oś paraboloidy chyżości podłużnej. Wskutek tej chyżości w kierunku pionowym mogą być przedmioty, znajdujące się na powierzchni wody w rzece, wciągnięte w środek nurtu pod powierzchnię, a przedmioty, znajdujące się na dnie rzeki, mogą być podniesione i uniesione.

Podkładając w równaniu (85)  $y = b$ , i oznaczając dla tej wartości na  $y$  chyżość poprzeczną w kierunku  $y$  przez  $\left(\frac{V}{y}\right)_b$ , otrzymujemy:

$$\left(\frac{V}{y}\right)_b = \frac{2 ab \sqrt{2 ag}}{3 \pi x^3} b \quad (87)$$

Wstawiając zaś w równaniu (81)  $z = 0$ , otrzymujemy analogicznie:

$$\left(\frac{V}{z}\right)_0 = \frac{2 ab \sqrt{2 ag}}{3 \pi x^3} \cdot \frac{3}{5} a, \quad (88)$$

a podzieliwszy równania (85) przez (87), tudzież (86) przez (88), otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{V}{y}\right) &= \left(\frac{V}{y}\right)_b \frac{y}{b} \\ \left(\frac{V}{z}\right) &= \left(\frac{V}{z}\right)_0 \left\{ 1 - \frac{5z}{3a} \right\} \end{aligned} \right\} (89)$$

jako wyrażenie chyżości poprzecznych niezależnie od  $x$ .

Mając więc wyrażenia na te trzy składowe chyżości wypadkowej dla dowolnego elementu cieczy w łóżysku, jesteśmy w możności wyznaczyć wielkość i kierunek chyżości wypadkowej, jako też i drogę, którą dowolny element podczas przepływu przejdzie, t. j. linii prądu, dalej powłokę całej grupy linii prądu, wreszcie linie i powierzchnie potencjalne.

Ponieważ fale dopływu lub wypływu, rozchodzące się z układu centrów działających, odbijając się od dna i brzegów z pewną utratą żywej siły ruchu, jako odbite z mniejszem już natężeniem, niż fale pierwotne, ponownie w uważanym elemencie interferują, więc skutkiem tego zostanie uważany element pobudzony do szybszego ruchu.



W łożyskach o dnie i brzegach twardych i gładkich fale będą skuteczniej odbijane, ruch będzie szybszym niż w łożyskach szorstkich, miękkich, podatnych. W wygładzonym łożysku betonowym płynie woda szybciej, niż w łożysku sporządzonym z desek hyblowanych przy tych samych warunkach; w łożyskach, wykopanych w glinie, płynie woda szybciej niż w łożyskach wykopanych w torfie, przy tych samych rozmiarach łożyska, przy jednakowym jego wygładzeniu w obu wypadkach i przy jednakowym spadzie.

Przy wprowadzeniu wzorów, przedstawiających ruch cieczy w łożysku, przyjęliśmy w założeniu, że wszystkie fale wypływu (lub dopływu) dosięgają uważanego elementu na powierzchniach półkulistych, co rzeczywiście się dzieje przy elementach położonych bardzo blisko układu centrów działających; to założenie umożliwiło i ułatwiło przeprowadzenie rachunku dla uzyskania praw uważanego ruchu. W rzeczywistości jednak fale, wychodzące z centrów działających, dosięgają uważanego elementu na powierzchniach kulistych, ograniczonych przecięciami się dotyczącej kuli, z geometrycznym pryzmatem zwilżonego łożyska.

Na prawa ruchu to nie wpływa, lecz tylko na liczebną wielkość szukanej chyżości dotyczącego elementu. Chyżości uzyskane z rachunku zapomocą fal półkulistych są o tyle mniejsze od rzeczywistej chyżości uważanego elementu, o ile mniejszą jest od powierzchni przynależnej półkuli ograniczona na niej powierzchnia wieloboku, powstałego z przecięcia się rzeczonyj półkuli z pryzmatem łożyska.

Dla elementów cieczy w łożysku, położonych w znacznej odległości od układu centrów działających, otrzymuje się z bardzo małym błędem wielkość chyżości  $\left(\frac{V}{x}\right)$  uważanego elementu, przez pomnożenie dotyczącego wyrazu na  $\left(\frac{V}{x}\right)$ , ilorazem  $2\pi R^2$ , gdzie  $R$  jest odległością uważanego elementu od środka centrów działających, t. j. od punktu, w którym oś nurtu przecina się z płaszczyzną układu centrów, a  $f$  powierzchnią wieloboku, odgraniczonyj pryzmatem zwilżonyj łożyska na powierzchni półkuli o promieniu  $R$ . Przy obliczaniu chyżości dla elementów położonych, bliżej układu centrów działających, a więc dla malejących  $x$ , trzeba uwzględnić dalsze wyrazy w równaniu na  $\left(\frac{V}{x}\right)$ , zawierające wyższe potęgi z  $x$  w mianowniku.

Z wywodów przeprowadzonych powyżej widocznem jest, że ele-



mentarne fale wypływu, powstałe z dowolnego centra atrakcyjnego  $A$  (fig. 63), rozchodzą się w łożysku na powierzchniach kulistych, ograniczonych przecięciem się powierzchni odnośnych półkuli ze zwilżonym pryzmatem łożyska, czyli przecięciem się tychże z dnem, brzegami i powierzchnią cieczy.

Wielkość tych powierzchni kulistych, a w uważanym wypadku czworoboków, maleje ze wzrastającą odległością od centra i coraz bardziej zbliża się do wielkości powierzchni przekroju łożyska. Możemy tedy z małym błędem przyjąć, że elementarna fala wypływu, wychodząca z centra  $A$ , dosięgnie elementu  $E$ , położonego w znacznej odległości od układu, na powierzchni płaskiej, co do wielkości równej przekrojowi łożyska, czyli wprost: na powierzchni przekroju łożyska i według tego założenia obliczenie przeprowadzić.

Ilość wypływu z centra  $A$ , danego przez rzędne  $\xi=0$ ,  $y-\eta$ ,  $\zeta$ , wynosi według poprzedniego wywodu (str. 98)

$$d^2m = d\eta d\zeta \sqrt{2g\zeta};$$

ta ilość dopływa zaś do elementu  $A$  (centra) przez powierzchnię płaskiej fali elementarnej o wielkości przekroju łożyska równej  $2ab$ , na której znajduje się uważany element  $E$ , pobudzony przez tę falę do ruchu z chyżością elementarną ( $\delta^2v$ ), w kierunku  $EA$ , z czego wypada w przybliżeniu:

$$d^2m = 2ab(\delta^2v),$$

co zestawione z powyższem równaniem, daje:

$$(\delta^2v) = \frac{\sqrt{2g}}{2ab} \cdot \sqrt{\zeta} \cdot d\eta d\zeta. \quad (90)$$

Rzędne elementu  $E$  są dane przez  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , wobec czego promień  $EA$ , równy  $r$ , danym jest przez

$$r^2 = x^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2,$$

co uwzględniając, otrzymujemy na składowe chyżości elementarnej ( $\delta^2v$ ) następujące wyrażenia:

$$\left. \begin{aligned} (\delta^2v)_x &= \frac{\sqrt{2g}}{2ab} \left[ 1 + \frac{\eta^2 + (\zeta - z)^2}{x^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} \cdot d\eta \cdot d\zeta \\ (\delta^2v)_y &= \frac{\sqrt{2g}}{2ab} \left[ 1 + \frac{\eta^2 + (\zeta - z)^2}{x^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \eta \cdot \zeta^{\frac{1}{2}} \cdot d\eta \cdot d\zeta \\ (\delta^2v)_z &= \frac{\sqrt{2g}}{2ab} \left[ 1 + \frac{\eta^2 + (\zeta - z)^2}{x^2} \right]^{-\frac{1}{2}} (\zeta - z) \cdot \zeta^{\frac{1}{2}} \cdot d\eta \cdot d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Rozwijając pierwsze z powyższych równań, otrzymujemy:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{\sqrt{2g}}{2ab} \iint d\eta \cdot d\zeta \zeta^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2x^2} [\eta^2 + (\zeta - z)^2] + \frac{3}{8x^4} [\eta^2 + (\zeta - z)^2]^2 - + \& \right\}$$

a po zcałkowaniu i wstawieniu granic dla równania pierwszego i następnych będzie:

$$(92) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{V}{x}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{2ag} \left\{ 1 - \frac{1}{2x^2} \left[ \frac{3}{7} a^2 + \frac{b^2}{3} + y^2 - \frac{6}{5} az + z^2 \right] + - \& \right\} \\ \left(\frac{V}{y}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{2ag} \cdot \frac{y}{x} \\ \left(\frac{V}{z}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{2ag} \left[ \frac{3}{5} a - z \right] \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

Dalsza analiza tych równań przeprowadza się jak poprzednio.

## 25. Profile poprzeczne.

Wskutek wypływu cieczy przez układ centrów następuje obniżenie powierzchni cieczy tak w układzie samym jak i w łożysku.

Zakładając w równaniu (78) albo (92) lub też w innych t. p. dla  $y$  wartość zero, przesuńmy przez oś łożyska (nurt) dwie pionowe płaszczyzny, odległe od siebie o elementarną ilość  $\lambda$ ; odgraniczmy w ten sposób wzdłuż osi łożysko elementarne. Oznaczmy przez  $\Delta m$  ilość cieczy, jaka tem łożyskiem przepływa, a przez  $S_0$  wielkość obniżenia powierzchni w osi przy tym przepływie, dla dowolnego  $x$ , naówczas otrzymamy na wyrażenie ilości przepływu:

$$(93) \quad \Delta m = \lambda \int_{S_0}^a \left(\frac{V}{x}\right) dz = Const,$$

jeżeli ruch jest trwały. Rozwijając powyższą całkę, otrzymuje się równanie linii, znamionującej obniżenie się powierzchni cieczy w nurcie (w osi łożyska). Będzie to równanie trzeciego stopnia pomiędzy zmiennymi  $x$  i  $S_0$ .

Przyjmując, że gęstość cieczy podczas ruchu jest taką samą, jaka była w początkowym stanie równowagi, t. j. przy poziomej powierzchni cieczy w łożysku, oraz że ciśnienie zewnętrzne pozostało to samo, możemy ilość  $S_0$  uzyskaną z równania (93), uważać jako wy-



sokość ciężenia uważanego elementu na powierzchni w osi łożyska, a w takim razie ilość  $S_0$  da się przedstawić jako suma z dwu wysokości:


$$S_0 = h + \frac{(V(x))^2}{2g} = h + s_0$$

Dla wszystkich elementów cieczy, położonych na powierzchni w tym samym profilu poprzecznym, jest  $h$  ilością stałą, a wobec tego kształt powierzchni w tym profilu zależnym będzie tylko od  $y$  i wyrazu  $\frac{V^2}{2g}$ , który oznaczamy przez  $s$  dla dowolnego  $y$ .

Z uwagi na to, że w profilach, bardziej odległych od układu centrów, są chyżości poprzeczne bardzo małe, możemy przyjąć, że  $s$  zależnym będzie tylko od  $y$  i  $(\frac{V}{x})$ ; otrzymujemy zatem:

$$s_0 = \frac{(V(x)_0)^2}{2g}, \quad s = \frac{(V(x))^2}{2g} = \frac{(V(x)_0)^2}{2g} \left\{ 1 - \frac{y^2}{p} \right\}^2 \quad (94)$$

a z tego wypada:



$$s = s_0 \left\{ 1 - \frac{y^2}{p} \right\}^2 \quad (95)$$

jako wyrażenie na obniżenie powierzchni w dowolnym profilu poprzecznym, gdzie  $p$  oznacza parametr zmienny, zależny od  $x$ .

Zakładając  $x = Const$ , a tem samym i  $p = Const$ , będzie powyższe równanie przedstawiało kształt powierzchni w danym profilu poprzecznym.

Różniczkując równanie (95) względem  $y$  przy stałym  $p$  otrzymujemy:

$$\frac{ds}{dy} = -\frac{4s_0}{p} \cdot y \left\{ 1 - \frac{y^2}{p} \right\}, \quad (96)$$

z czego widoczna, że przy ruchu cieczy, spowodowanym przez odpływ (centra atrakcyjne), maximum obniżenia leży w osi łożyska, w nurcie; tudzież, że krzywa, przedstawiona równaniem (95), ma dwie poziome styczne, albowiem:

$$\frac{ds}{dy} = 0, \text{ dla } y = 0, \text{ i dla } y^2 = p$$

Przyjąwszy wartości:  $b = 5$  mtr.,  $p = 64$ ,  $s_0 = 100$  milimetrów, wykreślono krzywą kształtu powierzchni profilu poprzecznego na fig. 65.

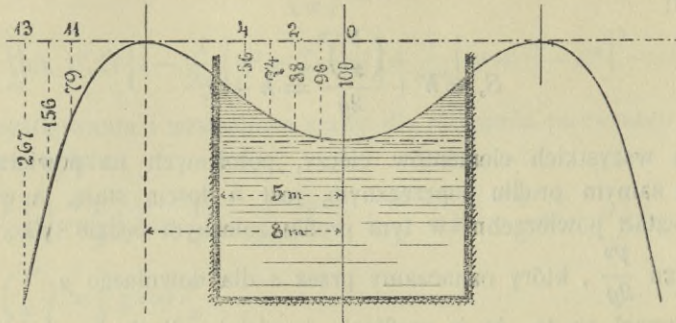


Fig. 65.

Figura powyższa przedstawia zakłębienie cieczy w profilu poprzecznym przy zwykłym odpływie w rzekach; widocznym jest z przebiegu tej krzywej, że ciśnienie hydrostatyczne jest przy brzegach największe, w środku zaś łożyska, w nurcie, najmniejsze.

Jeżeli ruch cieczy w łożysku spowodowany został działaniem centrów repulsyjnych (napływ cieczy), natenczas ciecz rozlewa się od środka ku brzegom (fig. 66).

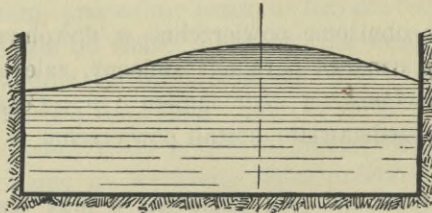


Fig. 66.

Największe podniesienie powierzchni znajduje się w nurcie.

## 26. Ruch cieczy w łożysku skutkiem działania układu centrów repulsyjnych.

Z wielkiego zbiornika wpływa woda pod ciśnieniem do łożyska prostokątnego o szerokości  $2b$  i głębokości  $a$ . Wysokość zwierciadła wody w zbiorniku nad poziomą powierzchnią wody w łożysku niech



będzie  $h$ . Elementy cieczy, położone w łożysku a zarazem i w zbiorniku w pionowej płaszczyźnie zasowy  $Z$ , odgraniczającej zbiornik od łożyska, tworzyć będą dla elementów cieczy, położonych w łożysku, układ centrów repulsyjnych, działających według prawa

$$c = \sqrt{2gh} = \text{Const},$$

a dla elementów cieczy położonych w zbiorniku tworzyć będą układ centrów atrakcyjnych, działających również według powyższego prawa.

Niech rzędne  $y - \eta, \zeta$ , określają położenie dowolnego działającego centra  $A$ , którego pole o wielkości elementarnej dane jest przez  $d\eta \cdot d\zeta$ . (fig. 67).

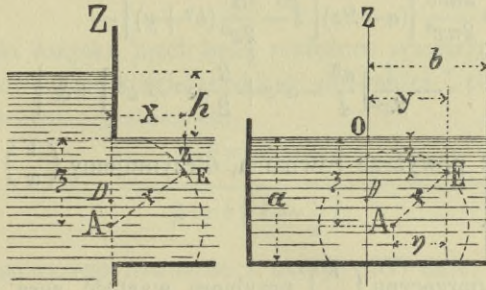


Fig. 67.

Ilość cieczy, jaka wypłynie na jednostkę czasu przez to pole, wynosi:

$$d^2m = c \cdot d\eta \cdot d\zeta.$$

Ta ilość dopływu rozejdzie się w otaczającej cieczy w łożysku, na powierzchniach fal półkulistych (względnie na powierzchniach czworoboków kulistych, powstałych z przecięcia się odnośnych półkulistych powierzchni ze zwilżonym pryzmatem łożyska).

Fala o promieniu  $AE$  dosięgnie elementu  $E$ , danego przez rzędne  $x, y, z$ , pobudzając go do ruchu w kierunku  $AE$  z elementarną chyżością ( $\delta^2v$ ), której wielkość określa równanie:

$$d^2m = 2r^2\pi(\delta^2v)$$

Składowe tej chyżości elementarnej w kierunkach osi współrzędnych są następujące:

$$(97) \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\delta^2 v}{x} \right) = \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{x \cdot d\eta \cdot d\zeta}{r^3}, \\ \left( \frac{\delta^2 v}{y} \right) = \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{\eta \cdot d\eta \cdot d\zeta}{r^3}, \\ \left( \frac{\delta^2 v}{z} \right) = \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{(z-\zeta) \cdot d\eta \cdot d\zeta}{r^3}. \end{array} \right.$$

przyczem  $r^2 = x^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2$

Całkując powyższe równania, otrzymujemy po wstawieniu granic:

$$(98) \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{V}{x} \right) = \frac{2abc}{2\pi x^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{a^2+b^2}{3} + y^2 - az + z^2 \right] + \dots \right\} \\ \left( \frac{V}{y} \right) = \frac{2abc}{2\pi x^3} y \left\{ 1 - \frac{3}{2a^2} \left[ \frac{a^2}{3} + b^2 + y^2 - az + z^2 \right] + \dots \right\} \\ \left( \frac{V}{z} \right) = \frac{2abc}{2\pi x^2} \left\{ (a-2z) \left[ 1 - \frac{3}{2x^2} (b^2+y) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2x^2} \left[ \frac{a^3}{4} - a^2z + \frac{3}{2} az^2 - z^3 \right] \pm \dots \right\} \end{array} \right.$$

Analizując powyższe równania, otrzymujemy  $\left( \frac{V}{x} \right)$  maximum dla  $y=0$ ,  $z=\frac{a}{2}$ .

Chyżość poprzeczna  $\left( \frac{V}{y} \right)$  przybiera wartość zera dla  $y=0$ , a chyżość  $\left( \frac{V}{z} \right)$  staje się zerem dla  $y=0$ ,  $z=\frac{a}{2}$ .

W celu otrzymania prawdziwych wielkości składowych w układzie równań (98), trzeba każdą z tych chyżości pomnożyć ilorazem:

$$I = \frac{2\pi(x^2 + y^2 + (\frac{a}{2} - z)^2)}{f}$$

gdzie  $f$  oznacza kulistą powierzchnię czworoboku, odgraniczoną zwilżonym pryzmatem łożyska na powierzchni półkuli o promieniu  $DE$ , której środek  $D$  położony jest w środku układu centrów repulsyjnych; to odnosi się do profilów, położonych bardzo blisko układu centrów działających. Dla profilów więcej odległych, gdzie  $x$  jest znacznie większe od rozmiarów łożyska, wystarcza w zupełności pomnożenie ilorazem:

$$I' = \frac{2\pi x^2}{f}$$



✧ Biorąc pod uwagę zamiast powyższego łożyska prostokątnego, łożysko trójkątne, przedstawione na fig. 68, wyznaczmy w niem dla dowolnego elementu chyżość w kierunku podłużnym. Największa głębokość cieczy w łożysku niech będzie  $a$ , szerokość na powierz-

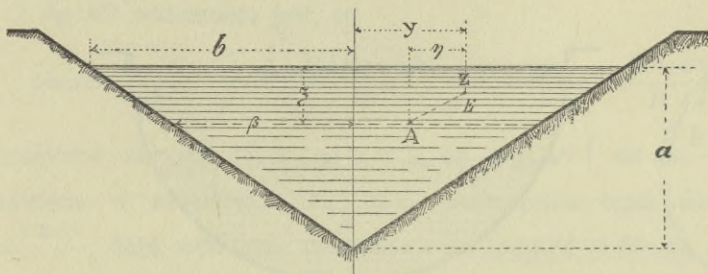


Fig. 68.

chni  $2b$ . Boki łożyska niech będą rozłożone symetrycznie. Oznaczmy przez  $\beta$  połowę szerokości łożyska w głębokości  $\zeta$  pod powierzchnią, naówczas otrzymamy stosunek:

$$\beta : b = a - \zeta : a$$

$$\beta = b \left( 1 - \frac{\zeta}{a} \right).$$

Całka pierwszego równania z układu (97) daje:

$$\left( \frac{V}{x} \right) = \frac{c}{2\pi x^2} \iint d\eta d\zeta \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} [\eta^2 + (\zeta - z)^2] + - \& \right\}$$

Granice całkowania są następujące:

$$(\text{od } \eta = 0 \text{ do } \eta = b \left( 1 - \frac{\zeta}{a} \right) - y) + (\text{od } \eta = 0 \text{ do } \eta = b \left( 1 - \frac{\zeta}{a} \right) + y)$$

tudzież

$$\text{od } \zeta = 0 \text{ do } \zeta = a$$

Po zcałkowaniu i wstawieniu granic otrzymujemy:

$$\left( \frac{V}{x} \right) = \frac{abc}{2\pi x^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{a^2 + b^2}{6} + y^2 - \frac{2}{3} az + z^2 \right] + - \& \right\} \quad (99)$$

Rzędne, określające położenie największej chyżości, są:  $y = 0$ ,  $z = \frac{a}{3}$ ; największa chyżość znajduje się w nurcie pod powierzchnią w jednej trzeciej głębokości.

✧ Przyjmując dla tego samego wypadku działania centrów repulsyjnych, że uważane łożysko jest półkolem o promieniu  $R$ , wyznaczmy również chyżość w kierunku podłużnym.

Całkując pierwsze równanie z układu (97) otrzymujemy:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{c}{2\pi x^2} \int d\zeta \left/ \left[ \eta - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{\eta^3}{3} + \eta(\zeta - z)^2 \right] \right] + - \& \right\}$$

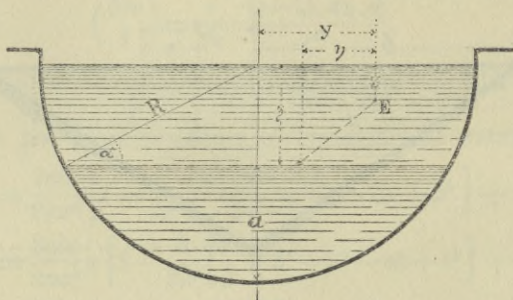


Fig. 69.

Z fig. 69 widocznem jest, że granice dla  $\eta$  są:

$$(\text{od } \eta = 0 \text{ do } \eta = R \cos \alpha - y) + (\text{od } \eta = 0 \text{ do } \eta = R \cos \alpha + y)$$

tudzież że:  $\zeta = R \sin \alpha$ ,  $d\zeta = R \cos \alpha \cdot d\alpha$

Po wstawieniu granic dla  $\eta$  otrzymamy:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \frac{cR}{\pi x^2} \int d\zeta \left\{ \cos \alpha - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{R^2}{3} \cos^3 \alpha + y^2 \cos \alpha + (\zeta - z)^2 \cos \alpha \right] + - \& \right\}$$

a za podstawieniem wartości na  $\zeta$  i  $d\zeta$  wyżej podanych, wypadnie po zcałkowaniu

$$(100) \quad \left(\frac{V}{x}\right) = \frac{cR^2}{\pi x^2} \left/ \left\{ \frac{1}{2} (\cos \alpha \sin \alpha + \alpha) \left[ 1 - \frac{3}{2x^2} \left( \frac{R^2}{2} + y^2 + z^2 \right) - \frac{3 \cos^3 \alpha}{2x^2} \left[ \frac{2}{3} Rz - \frac{1}{6} R^2 \sin \alpha \right] \right] + - \& \right\} \right.$$

Wstawiając dla  $\alpha$  wartości graniczne od 0 do  $\frac{\pi}{2}$ , oraz mnożąc powyższe równanie ilorazem

$$I' = \frac{2\pi x^2}{f}$$

otrzymujemy przybliżone wyrażenie chyżości podłużnej w łożysku półkolistem

$$(101) \quad \left(\frac{V}{x}\right) = \frac{R^2 \pi}{f} \cdot \frac{c}{2} \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{R^2}{2} + y^2 - \frac{8}{3\pi} Rz + z^2 \right] \right\} + - \& \left. \right\}$$



Położenie chyżości maksymalnej znamionują rzędne

$$y = 0, \quad z = \frac{4R}{3\pi} = 0.42462 R.$$

Z fig. 69 widocznem jest, że

$$\sin \alpha = \frac{R-a}{R}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2Ra-a^2}}{R}, \quad \alpha = \arcsin \left( \frac{R-a}{R} \right)$$

a graniczne wartości dla  $\alpha$ , od  $\alpha = 0$ , do  $\alpha = \arcsin \left( \frac{R-a}{R} \right)$ , wstawione w równanie (100), przy pomnożeniu tegoż ilorazem  $I = \frac{2\pi x^2}{f}$ , dają wyrażenie przybliżone na chyżość podłużną w łózysku łukowem, o promieniu  $R$  i głębokości  $a$ .

Największa chyżość znajduje się w osi łózyska, określona przez rzędne

$$y = 0, \quad z = \frac{R^3 - (2aR - a^2)^{3/2}}{R^2 \arcsin \left( \frac{R-a}{R} \right) + (R-a) \sqrt{2aR - a^2}} \quad (102)$$

Dla łózyska łukowego o promieniu  $R = 10$  m., i o głębokości  $a = 2$  m. wypada  $z = 0.15295$  m.

Wstawiając w równaniu (100) graniczne wartości  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 2\pi$ , oraz mnożąc je ilorazem  $I = \frac{2\pi x^2}{f}$ , otrzymujemy chyżość podłużną w rurze

$$\left( \frac{V}{x} \right) = \frac{R^2 \pi}{f} \cdot c \left\{ 1 - \frac{3}{2x^2} \left[ \frac{R^2}{2} + y^2 + z^2 \right] + \dots \right\} \quad (103)$$

Przy stałym  $x$  przedstawia równanie (103) paraboloidę obrotową, której wierzchołek położony jest w osi rury, gdzie zarazem maximum chyżości się znajduje.

## 27. Obniżenie powierzchni cieczy w zbiorniku, nad otworem wypływu.

Wyrażenia na składowe chyżości wypadkowej, uzyskane z oddzielnych równań na chyżości elementarne, dadzą się przedstawić przez funkcje określone bez rozwijania całek w szeregi.

Z fig. 70 widocznem jest, że chyżości elementarne, powstałe przy

wpływie przez elementarne centrum atrakcyjne  $A$ , przy działaniu na element  $E$ , są następujące:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta^2 v}{x}\right) &= \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \cdot \frac{x d\eta d\zeta}{r^3}, & \left(\frac{\delta^2 v}{y}\right) &= \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \frac{d\eta \cdot d\zeta \cdot \eta}{r^3}, \\ \left(\frac{\delta^2 v}{z}\right) &= \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \cdot \frac{d\eta \cdot d\zeta (\zeta - z)}{r^3} \\ r^2 &= x^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2 \end{aligned}$$

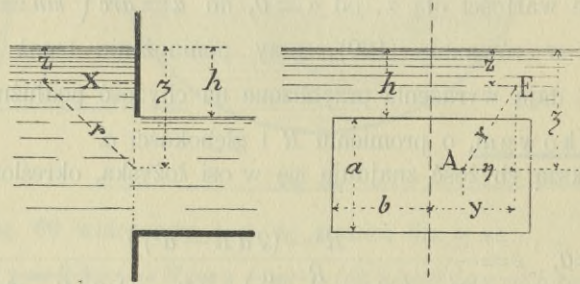


Fig. 70.

Podstawiając dla składowej chyżości wypadkowej w kierunku  $z$  wartości:

$$\begin{aligned} (\zeta - z)^2 &= (x^2 + \eta^2) \operatorname{tg}^2 \varphi, & x^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2 &= (x^2 + \eta^2) \operatorname{sec}^2 \varphi, \\ \cos^2 \varphi &= \frac{x^2 + \eta^2}{x^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2} \end{aligned}$$

oraz:  $(\zeta - z) d\zeta = (x^2 + \eta^2) \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{d\eta}{\cos^2 \varphi}$  i uwzględniając, że  $\eta$  i  $\zeta$  są zmienne niezależne, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{z}\right) &= \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \iint \frac{d\eta d\zeta (\zeta - z)}{x^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \iint \frac{d\eta \cdot (x^2 + \eta^2) \operatorname{tg} \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi (x^2 + \eta^2)^{3/2} \operatorname{sec}^3 \varphi} = \\ &= \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \int d\eta \int \frac{\sin \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{x^2 + \eta^2}} = -\frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \int d\eta \left/ \frac{\cos \varphi}{\sqrt{x^2 + \eta^2}} \right. \end{aligned}$$

Po wstawieniu wartości granicznych  $\zeta = h$ , do  $\zeta = a + h$ , będzie:

$$\left(\frac{V}{z}\right) = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \int \left\{ \frac{d\eta}{\sqrt{x^2 + \eta^2 + (h - z)^2}} - \frac{d\eta}{\sqrt{x^2 + \eta^2 + (h + a - z)^2}} \right\} \quad (1) \quad (2)$$

Podstawiając dla wyrazu

$$(1), \dots \eta^2 = [x^2 + (h - z)^2] \operatorname{tg}^2 \psi_1 \quad (2), \dots \eta^2 = [x^2 + (h + a - z)^2] \operatorname{tg}^2 \psi_2$$



wypadnie całka:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{z}\right) &= \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \int \left\{ \frac{d\psi_1}{\cos\psi_1} - \frac{d\psi_2}{\cos\psi_2} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \left\{ \log \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \psi_1 \right) \right) - \log \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \psi_2 \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Zważywszy że:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \psi_1 \right) \right) = \sec \psi_1 + \operatorname{tg} \psi_1$$

po podstawieniu wartości otrzymamy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{z}\right) &= \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \left\{ \log \frac{(b+y) + \sqrt{x^2 + (b+y)^2 + (h-z)^2}}{(b+y) + \sqrt{x^2 + (b+y)^2 + (a+h-z)^2}} + \right. \\ &+ \log \frac{(b-y) + \sqrt{x^2 + (b-y)^2 + (h-z)^2}}{(b-y) + \sqrt{x^2 + (b-y)^2 + (a+h-z)^2}} + \left. 2 \log \frac{\sqrt{x^2 + (a+h-z)^2}}{\sqrt{x^2 + (h-z)^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (104)$$

dla  $y$  mniejszych od  $b$ ; tudzież:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{z}\right) &= \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \left\{ \log \frac{(y+b) + \sqrt{x^2 + (y+b)^2 + (h-z)^2}}{(y-b) + \sqrt{x^2 + (y-b)^2 + (h-z)^2}} - \right. \\ &+ \log \frac{(y+b) + \sqrt{x^2 + (y+b)^2 + (a+h-z)^2}}{(y-b) + \sqrt{x^2 + (y-b)^2 + (a+h-z)^2}} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (105)$$

dla  $y$  większych od  $b$ .

W podobny sposób jak powyżej, wyznacza się składową chyżości wypadkowej w kierunku  $y$  i  $x$ .

Składowa w kierunku  $y$  będzie:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{y}\right) &= \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \left\{ \log \frac{(a+h-z) + \sqrt{x^2 + (b-y)^2 + (a+h-z)^2}}{(h-z) + \sqrt{x^2 + (b-y)^2 + (h-z)^2}} - \right. \\ &- \log \frac{(a+h-z) + \sqrt{x^2 + (b+y)^2 + (a+h-z)^2}}{(h-z) + \sqrt{x^2 + (b+y)^2 + (h-z)^2}} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (106)$$

Dla elementów, położonych na powierzchni, jest  $z=0$ , a dla elementów znajdujących się w pionowej płaszczyźnie układu centrów działających, jest  $x=0$ , przeto dla krawędzi przecięcia się powierzchni wody w zbiorniku z pionową płaszczyzną układu, wypada:

$$\left(\frac{V}{z}\right) = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \left\{ \log \frac{(b+y) + \sqrt{(b+y)^2 + h^2}}{(b+y) + \sqrt{(b+y)^2 + (a+h)^2}} + \right.$$

$$(107) \quad + \log \frac{(b-y) + \sqrt{(b-y)^2 + h^2}}{(b+y) - \sqrt{(b-y)^2 + (a+h)^2}} + 2 \log \frac{(a+h)}{h} \Bigg\},$$

dla  $y$  mniejszych od  $b$ , tudzież:

$$(108) \quad \left( \frac{V}{z} \right) = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \left\{ \log \frac{(y+b) + \sqrt{(y+b)^2 + h^2}}{(y-b) + \sqrt{(y-b)^2 + h^2}} - \right. \\ \left. - \log \frac{(y+b) + \sqrt{(y+b)^2 + (a+h)^2}}{(y-b) + \sqrt{(y-b)^2 + (a+h)^2}} \right\},$$

dla  $y$  większych od  $b$ ; oraz składowa w kierunku  $y$ :

$$(109) \quad \left( \frac{V}{y} \right) = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi} \left\{ \log \frac{(a+h) + \sqrt{(b-y)^2 + (a+h)^2}}{h + \sqrt{(b-y)^2 + h^2}} - \right. \\ \left. - \log \frac{(a+h) + \sqrt{(b+y)^2 + (a+h)^2}}{h + \sqrt{(b+y)^2 + h^2}} \right\}.$$

Oznaczywszy przez:  $\left( \frac{L}{z} \right)$  sumę logarytmów, zawartych w równaniu (107) względnie (108), tudzież przez:  $\left( \frac{L}{y} \right)$  sumę logarytmów, zawartych w równaniu (109), otrzymamy na chyżość wypadkową elementów, położonych w rzeczonyj krawędzi, wyrażenie:

$$V^2 = \left( \frac{V}{y} \right)^2 + \left( \frac{V}{z} \right)^2 = \frac{2gh}{4\pi^2} \left[ \left( \frac{L}{y} \right)^2 + \left( \frac{L}{z} \right)^2 \right] = 2gs$$

a z tego na równanie linii depresyjnej w pionowej płaszczyźnie układu (nad otworem) wypada:

$$(110) \quad s = \frac{h}{4\pi^2} \left[ \left( \frac{L}{y} \right)^2 + \left( \frac{L}{z} \right)^2 \right]$$

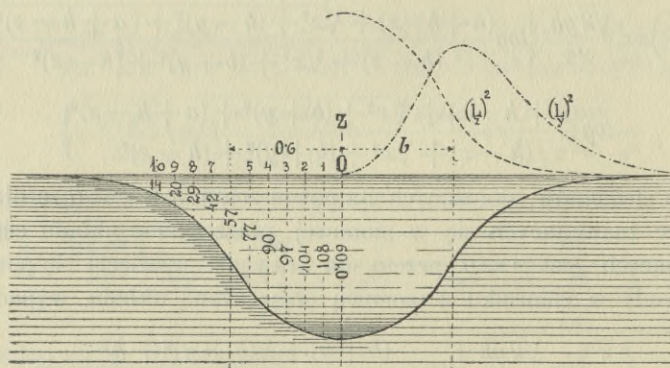


Fig. 71.



Przyjmując:  $b = 0.60$ ,  $h = 0.25$ ,  $a = 0.75$ , otrzymujemy na wyznaczenie depresji następującą tabliczkę:

$y$	$\left(\frac{L}{y}\right)^2$	$\left(\frac{L}{z}\right)^2$	$s$
0	0	4.334	0.109
0.1	0.0249	4.252	0.108
0.2	0.1017	4.016	0.104
0.3	0.2285	3.618	0.097
0.4	0.4857	3.192	0.090
0.5	0.5792	2.477	0.077
0.6	0.6973	1.575	0.057
0.7	0.6956	0.9565	0.042
0.8	0.6053	0.5671	0.029
0.9	1.4928	0.3329	0.020
1.0	1.3894	0.2016	0.014

Odnośna linia depresyjna jest na fig. 71 przedstawiona.

## 28. Odkształcenie danej tachoidy.

Rozmaite nierówności brzegów i dna powodują zmiany w danym ruchu wody w łożysku. Ścisłe wyznaczenie tych zmian wymaga długich obliczeń, jakie przekraczałyby rozmiary zakreślone niniejszej pracy, dla tego też ograniczymy się tylko do szematycznego przedstawienia zmian, zachodzących w ruchu elementu wody wskutek przeszkód ruchu, znajdujących się w łożysku prostokątnem o szerokości  $2B$  i głębokości  $a$ , w którym płynie dowolny element z chyżością, daną n. p. przez:

$$\left(\frac{V}{x}\right) = \left(\frac{V}{x}\right)_0 \left\{ 1 - \frac{1}{p} (y^2 - az + z^2) \right\}. \quad (111)$$

W dowolnem miejscu łożyska, w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do osi znajduje się jakaś zapora o szerokości  $2b$ , wysokości  $a$  (dajmy na to, odsypisko lub wyspa), przez którą zostaje wstrzymana w ruchu ilość wody, dana w przybliżeniu wyrazem:

$$m = 2ab \left(\frac{V}{x}\right)_0$$



Z każdego elementu powierzchni tej zapory rozchodzić się będą fale repulsyjne z odpowiednią chyżością interferujące w uważanym elemencie wody, płynącej łożyskiem, i nadające temu elementowi chyżości w kierunku przeciwnym.

Dla uproszczenia rachunku zakładamy, że skuteczne (wypadkowe) powierzchnie fal repulsyjnych będą powierzchniami walców kołistych, których oś tworzy krawędź, powstałą z przecięcia się pionowej płaszczyzny wspomnianej zapory z płaszczyzną pionową, przechodzącą przez oś łożyska; które to płaszczyzny przyjmujemy zarazem za układ współrzędnych.

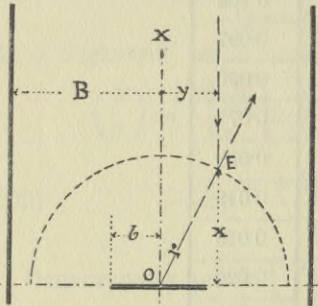


Fig. 72.

Na dowolny element wody  $E$ , dany przez  $x, y, z$ , płynący z chyżością  $\left(\frac{v}{x}\right)$ , oddziaływać będzie wypadkowa fala repulsyjna na powierzchni walca kołistego o promieniu  $r$  (fig. 72), nadająca temu

elementowi w kierunku promienia  $r$ ; chyżość  $u$ , której wielkość wyznacza się przez związek:

$$m = r\pi \cdot a u = 2ab \left(\frac{v}{x}\right)_0$$

Zważywszy, że  $r^2 = x^2 + y^2$ , otrzymamy na wyrażenie chyżości, udzielonej uważanemu elementowi w kierunku  $x$ , relacją:

$$\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{2bx}{\pi(x^2 + y^2)} \cdot \left(\frac{v}{x}\right)_0$$

Ponieważ uważany element porusza się z chyżością  $\left(\frac{v}{x}\right)$ , a w kierunku przeciwnym doznaje impulsu chyżości  $\left(\frac{u}{x}\right)$ , przeto będzie się poruszał w kierunku podłużnym z chyżością wypadkową:  $\left(\frac{V}{x}\right) = \left(\frac{v}{x}\right) - \left(\frac{u}{x}\right)$

Po wstawieniu przynależnych wartości otrzymujemy:

$$(112) \quad \left(\frac{V}{x}\right) = \left(\frac{v}{x}\right) \cdot \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{p} (y^2 - az + z^2) \right] - \frac{2bx}{\pi(x^2 + y^2)} \right\}$$

jako wyrażenie chyżości wypadkowej z tych dwu ruchów.



Zakładając w pobliżu wspomnianej zapory  $x = Const$ , otrzymujemy równanie powierzchni tachoidalnej dla tego rodzaju ruchu; podstawiając przy tem  $z = \frac{a}{2}$  otrzymamy równanie tachoidy w połowie głębokości łożyska.

Dla przyjętych wartości:

$$B = 3.0, a = 2, b = 1, \left(\frac{v}{x}\right)_0 = 1, p = 12, z = 1, x = 1.2$$

wykreślono powyższą tachoidę na fig. 73.

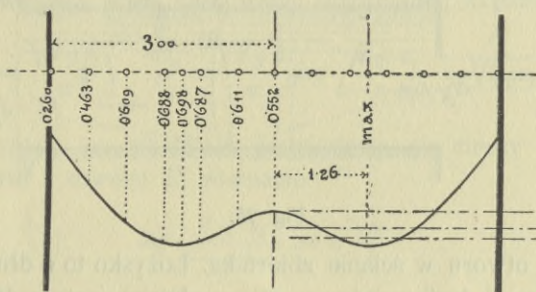


Fig. 73.

Przy założeniu  $x = const$ ,  $\left(\frac{V}{x}\right) = Const$ , otrzymuje się równanie izotachy dla tego rodzaju ruchu.

Krzywe jednakowej prędkości są w tym wypadku liniami czwartego stopnia.

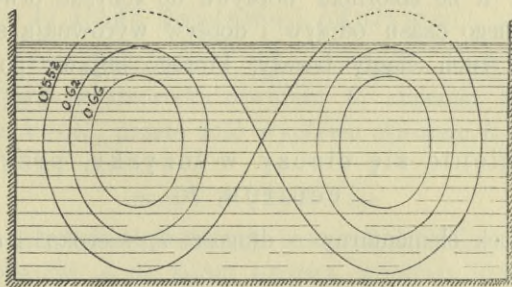


Fig. 74.

Dla powyższych rozmiarów łożyska i wartości tam podanych wykreślono izotachy na fig. 74.

## 29. Ruch elementu cieczy wskutek działania dwu układów centrów.

W bocznej ścianie nieskończenie wielkiego zbiornika znajduje się prostokątny otwór o bardzo małej szerokości  $\lambda$ , i wysokości  $a$  (fig. 75) zamykany zasuwą  $R$ . Otwór łączy się z łożyskiem prostokątnym o tej samej szerokości  $\lambda$ ; oś łożyska stoi prostopadłe do pionowej

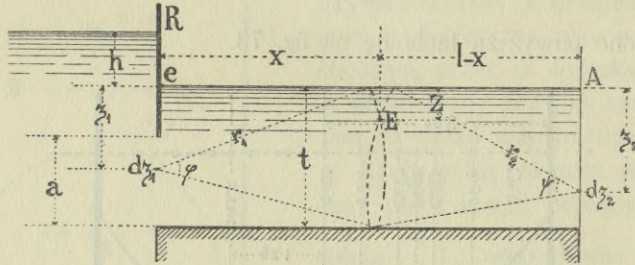


Fig. 75.

płaszczyzny otworu w ścianie zbiornika. Łożysko to o długości  $l$ , zamykające się na końcu zasuwą  $A$ , wypełnione jest wodą do wysokości  $t$  ponad dnem, ewentualnie ponad krawędzią dolną rzeczonoego otworu w ścianie. Poziom wody w zbiorniku znajduje się w wysokości  $h + t$  ponad rzeczoną krawędzią.

Przy nadmienionych zasuwach  $R$  i  $A$  znajdują się więc układy centrów repulsyjnych i atrakcyjnych.

Po usunięciu jednej i drugiej zasuwę wypływa ciecz z łożyska otworem  $A$ , a ze zbiornika dopływa do łożyska otworem  $R$ . Po upływie pewnego czasu odpływ i dopływ wyrównają się i utrwalą; nastąpi więc ruch ciągły trwały, którego objawy po kolei przejdziemy.

### a) Podniesienie się cieczy w łożysku, przy układzie centrów $R$ .

Przez pasek elementarny o długości  $\lambda$ , szerokości  $d\zeta$ , wypłynie ilość cieczy

$$dm = \lambda d\zeta_1 \cdot \sqrt{2gh},$$

a fala wypływowa, wychodząca z tego paska, rozejdzie się na powierzchni walca półkolistego o promieniu  $\zeta$ , i o wysokości  $\lambda$ ; pobudzi element  $e$  i temuż przyległe elementy do ruchu w kierunku  $d\zeta_1 e$ .



Chyżość, udzielona elementowi  $e$ , będzie:

$$(\delta w) = \frac{\sqrt{2gh}}{\pi} \cdot \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \quad (113)$$

Ponieważ na element  $e$  działają impulsy z każdego paska elementarnego, położonego w otworze repulsyjnym, przeto nabędzie on pewnej chyżości w kierunku pionowym i wzniesie się ponad poziom cieczy w łożysku do takiej wysokości, jaka według prawa Torricellego odpowiada uzyskanej przez ten element chyżości w kierunku pionowym. Oznaczmy tę wysokość przez  $s_1$  a przynależną chyżość przez  $w$ , natenczas przez całkowanie otrzymamy z równania (113)

$$w = \frac{\sqrt{2gh}}{\pi} \int_{t-a+s_1}^{t+s_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} = \frac{\sqrt{2gh}}{\pi} \log \frac{t+s_1}{t-a+s_1} = \sqrt{2gs_1}$$

a z tego wypada na wysokość podniesienia się cieczy w łożysku, przy napływie z otworu  $R$ , równanie:

$$\log \frac{t+s_1}{t-a+s_1} = \pi \frac{\sqrt{s_1}}{h} \quad (114)$$

za pomocą którego podniesienie  $s_1$  łatwo obliczyć się daje. N. p. niech będzie  $t=1.50$ ,  $h=1.00$ ,  $a=1.00$ , to wypada:  $s_1=0.097$ , a dla  $t=0.50$ ,  $h=0.20$ ,  $a=0.40$ , wypadnie  $s_1=0.037$ .

Jeżeli powierzchnia cieczy w łożysku bardzo mało zakrywa górną krawędź otworu  $R$ , albo się z nią równa ( $t=a$ ), to w takim razie rzeczone podniesienie się cieczy w łożysku oddala się podczas odpływu łożyskiem od otworu  $R$  i występuje dopiero opodal.

#### b) Ilość dopływu i odpływu.

Ponieważ przez podniesienie się zwierciadła wody w łożysku, wskutek dopływu ze zbiornika otworem  $R$ , zmieniła się wysokość ciśnienia  $h$  na  $h-s_1$ , przeto ilość wypływu otworem  $R$  daną będzie przez:

$$m = \lambda \cdot a \cdot \sqrt{2g(h-s_1)}.$$

Przez każdy pasek elementarny o szerokości  $d\zeta_2$  i długości  $\lambda$ , położony w otworze  $A$  na końcu łożyska, wypływa ilość:

$$dm = \lambda \cdot d\zeta_2 \cdot \sqrt{2g\zeta_2}.$$

Wskutek sumowania się działań tych elementarnych odpływów, powierzchnia cieczy w płaszczyźnie wypływu  $A$  obniża się o  $s_2$ . Otrzymujemy więc na całkowity odpływ wyrażenie:



$$m = \lambda \cdot \sqrt{2g} \int_{s_2}^t \zeta_2^{\frac{1}{2}} \cdot d\zeta_2 = \frac{2}{3} \pi \sqrt{2g} (t^{3/2} - s_2^{3/2}).$$

Gdy ruch ma być ciągłym i trwałym, to ilości dopływu i odpływu muszą być sobie równe, a więc:

$$(115) \quad a(h - s_1)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (t^{3/2} - s_2^{3/2}).$$

Ponieważ  $s_1$  jest bezpośrednio dane przez równanie (114), przeto uwzględniając równanie (115) okazuje się, że  $s_2$  jest funkcją tych samych ilości, które tworzą  $s_1$ .

Jeżeli przy wypływie w opisanym przypadku ilości  $s_1$  i  $s_2$  zostaną bezpośrednio pomierzone i okażą się zgodne ze wzorami (114) i (115), to w takim razie dane łożysko, w którym się ruch odbywa, nie stawia oporu ruchowi cieczy. Jeżeli pomiar okaże różnice względem obliczenia, natenczas łożysko stawia opór, który jest tem większy, im większe te różnice wypadają.

Niech wskutek oporu łożyska wzrośnie podniesienie się zwierciadła przy  $R$  do  $s'_1$  tak że  $s'_1 > s_1$  to ilość wypływu  $m'$  będzie mniejszą od  $m$ .

Jeżeli przy tej ilości  $m'$  ruch się ustalił, to ta sama ilość  $m'$  musi stale odpływać, musi więc być:

$$m' = \frac{2}{3} \pi \sqrt{2g} (t^{3/2} - s'^{3/2}_2)$$

z czego wypada

$$s'_2 > s_2$$

Nazwijmy sumę  $s_1 + s_2$  spadkiem bezwzględnym dla ilości  $m$ ; wtedy  $s'_1 + s'_2$  będzie spadkiem bezwzględny)m dla ilości  $m'$ , dla której jest:  $s'_1 + s'_2 > s_1 + s_2$ .

Im znaczniejszy opór stawia łożysko ruchowi cieczy, tem mniejsza ilość cieczy w uważanym powyżej wypadku łożyskiem przepływa, i tem większym musi być spadek bezwzględny. Ponieważ w wypadku niniejszym mówimy tylko o łożysku szerokości elementarnej  $\lambda$ , a opór oblicza się dla łożyska o skończonych wymiarach, przeto obliczenie oporu zostawiamy do drugiej części tej rozprawki.

c) Chyżość dowolnego elementu cieczy w łożysku.

Fala wypływowa, wychodząca po usunięciu zasuwę  $R$  (fig. 75) z paska elementarnego  $d\zeta_1$  dosięgnie elementu  $E$  powierzchnią walca łukowego o promieniu  $r_1$ , pobudzając ten element do ruchu z chy-



żością  $(\delta v_1)$  w kierunku tegoż promienia. Niech wielkość rzeczzonego łuku dana będzie przez  $r_1 \varphi$ , w takim razie będzie:

$$dm = \lambda d\zeta_1 \sqrt{2g\bar{h}} = \lambda(r_1 \varphi)(\delta v_1).$$

Jeżeli długość łożyska  $l$  jest wielka w porównaniu z głębokością  $t$ , to możemy, z bardzo małym błędem, w celu ułatwienia rachunku, przyjąć że:  $r_1 \varphi = t$ , wskutek czego otrzymujemy:

$$(\delta v_1) = \frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{t} \cdot d\zeta_1$$

Niech położenie elementu  $E$  określają rzędne  $x$  i  $z$ , naówczas promień  $r_1$  wyraża się przez:

$$r_1^2 = x^2 + (\zeta_1 - z)^2.$$

Na wyrażenie składowej poziomej chyżości  $(\delta v_1)$  otrzymujemy:

$$\left(\frac{\delta v_1}{x}\right) = \frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{t} \left(1 + \frac{(\zeta_1 - z)^2}{x^2}\right)^{-1/2} \cdot d\zeta_1. \quad (116)$$

Z paska elementarnego  $d\zeta_2$  położonego w pionowej płaszczyźnie odpływu  $A$ , rozchodzi się w łożysku fala atrakcyjna, która dosięgnie elementu  $E$  powierzchnią  $\lambda r_2 \psi$  walca łukowego o promieniu  $r_2$ ; i udzieli temuż elementowi elementarnej chyżości  $(\delta v_2)$ , danej równaniem:

$$dm = \lambda d\zeta_2 \sqrt{2g\bar{\zeta}_2} = (r_2 \psi) \lambda \cdot (\delta v_2).$$

A ponieważ

$$r_2^2 = (l - x)^2 + (\zeta_2 - z)^2,$$

a w przybliżeniu:

$$r_2 \psi = t,$$

przeto składowa pozioma elementarnej chyżości  $(\delta v_2)$  będzie:

$$\left(\frac{\delta v_2}{x}\right) = \frac{\sqrt{2g}}{t} \cdot \zeta_2^{1/2} \left(1 - \frac{(\zeta_2 - z)^2}{(l - x)^2}\right)^{-1/2} \cdot d\zeta_2. \quad (117)$$

Na poziomą składową chyżości wypadkowej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{x}\right) &= \left(\frac{V_1}{x}\right) + \left(\frac{V_2}{x}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2g}}{t} \left\{ \sqrt{\bar{h}} \int_{l-a}^t \left[1 + \left(\frac{\zeta_1 - z}{x}\right)^2\right]^{-1/2} \cdot d\zeta_1 + \int_0^t \zeta_2^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\zeta_2 - z}{l - x}\right)^2\right]^{-1/2} \cdot d\zeta_2 \right\} \end{aligned}$$

Przyjmując, że głębokości łożyska nie są tak wielkie, ażeby zachodziła potrzeba użycia dalszych wyrazów, zawierających wyższe potęgi  $z$  i  $(l - x)$  w mianowniku; tudzież, że uważane profile łoż-

żyska znajdują się w odległości  $x > t$  i  $(l-x) > t$ , otrzymujemy w przybliżeniu po zcałkowaniu:

$$(118) \quad \left(\frac{V}{x}\right) = \frac{a\sqrt{2gh}}{t} \left\{ 1 - \frac{1}{2x^2} \left[ (t^2 - at + \frac{a^2}{3}) - (2t-a)z + z^2 \right] + \dots \right\} + \sqrt{2gt} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{2(l-x)^2} \left[ \frac{2}{7}t^2 - \frac{4}{5}tz + \frac{2}{3}z^2 \right] + \dots \right\}$$

jako wyrażenie chyżości poziomej dowolnego elementu  $E$ , powstałej wskutek działania powyższych układów centrów repulsyi i atrakcyi.

Pierwotny poziom cieczy w łożysku obniża się podczas ruchu. Przyjmując, że wielkość tego obniżenia w uważanym profilu dla  $x = const$ , wynosi  $s$ , wykreślono na fig. 76 tachoidy składowe  $\left(\frac{V_1}{x}\right)$ ,  $\left(\frac{V_2}{x}\right)$ , oraz tachoidę wypadkową  $\left(\frac{V}{x}\right)$ , przy uwzględnieniu rzeczzonego obniżenia powierzchni cieczy w łożysku.

Z powyższego wywodu łatwo zrozumieć, że w razie działania całego szeregu różnych układów centrów atrakcyjnych i repulsyjnych, składowe chyżości wypadkowej dowolnego elementu cieczy w łożysku dane będą przez algebraiczne sumy odnośnych składowych, udzielanych uważanemu elementowi przez dotyczące układy centrów dzia-

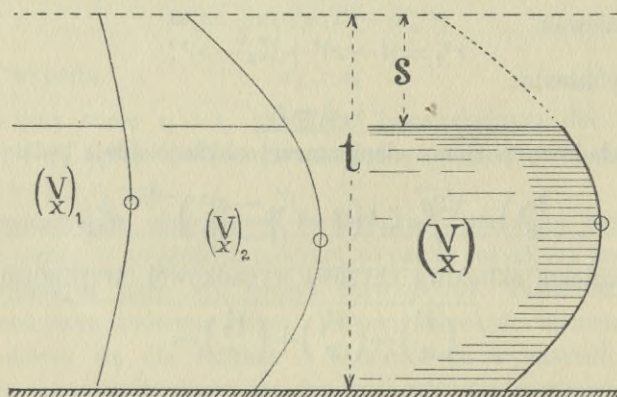


Fig. 76.

łających; wskutek czego tachoidy wypadkowe dla uważanego profilu jaknajrozmaiciej ukształtować się mogą, o czym nas bezpośrednio pomiary chyżości w rzekach pouczają.



Rzeczono powyżej obniżenie powierzchni cieczy w łożysku w czasie ruchu wyznacza się z wielkości stałego przepływu:

$$m = \lambda \int_s^t \left( \frac{V}{x} \right) dz$$

Wstawivszy w to równanie wartość na  $\left( \frac{V}{x} \right)$  z równania (118), otrzymamy po zcałkowaniu:

$$c_1 s + c_2 s^2 - c_3 s^3 - (c_1 t + c_2 t^2 - c_3 t^3) + \frac{m}{\lambda} = 0 \quad (119)$$

jako równanie powierzchni cieczy w profilu podłużnym. Współczynniki  $c_1, c_2, c_3$  są funkcjami zmiennej  $x$  i są dane przez równania:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{a}{t} \sqrt{2gh} \left[ 1 - \frac{1}{2x^2} \left( t^2 - at + \frac{a^2}{3} \right) \right] + \sqrt{2gt} \left[ \frac{2}{3} - \frac{t^2}{7(l-x)^2} \right] \\ c_2 &= \frac{a}{t} \sqrt{2gh} \frac{2t-a}{2x^2} + \sqrt{2gt} \frac{t}{5(l-x)^2} \\ c_3 &= \frac{a}{t} \sqrt{2gh} \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{2x^2} + \sqrt{2gt} \frac{1}{9(l-x)^2} \end{aligned} \right\} (120)$$

Równanie (119) na  $s$ , jak również równanie (118) na wyrażenie  $\left( \frac{V}{x} \right)$  mają wartość tylko przybliżoną; gdyby zaś dla danego wypadku zachodziła potrzeba ścisłego obliczenia, natenczas  $\left( \frac{V}{x} \right)$  trzeba wyrazić przez funkcyę określone, jak to uczyniono w równaniach (45, 46, 105, 106), a w takim razie i na  $s$  otrzyma się wyrazy łukowe i logarytmiczne.

#### d) Spadek względny.

Różniczkując równanie (119) względem  $x$ , otrzymujemy na styczną do linii profilu podłużnego w dowolnym punkcie:

$$\frac{ds}{dx} = tg \alpha,$$

gdy przez  $\alpha$  nazwiemy kąt, jaki styczna z poziomem zawiera.

Jeżeli dla sąsiednich profilów  $tg \alpha$  bardzo mało się zmienia, a liczebna jej wartość jest małą, natenczas można wprost postawić:

$$\frac{ds}{dx} = \alpha. \quad (121)$$

Iloraz ten nazywamy spadkiem względnym na uważanej długości.

Gdy  $\alpha$  w całym łożysku ma mieć wartość stałą, natenczas współczynniki  $c_2$  i  $c_3$  w równaniu (119) muszą przybrać wartość zera. Według równań (120) jest to w takim razie możliwem, jeżeli  $x$ , oraz  $t - x$ , przybierają wartości nieskończenie wielkie; natenczas jest:

$$c_2 = c_3 = 0$$

$$c_1 = \text{stałej},$$

wobec czego równanie (119) przybiera kształt:

$$(122) \quad c_1(t-s)\lambda = m.$$

Ponieważ zaś:  $m$ ,  $\lambda$ , i  $c_1$  są ilościami stałymi, przeto i różnica:  $(t-s)$  musi być ilością stałą; przedstawia ona głębokość płynącej cieczy w łożysku; oznaczmy ją przez  $t_1$ , naówczas będzie:

$$(123) \quad t_1 = t - s = \text{stałej}.$$

Ilość  $t$  oznacza położenie uważanego punktu dna łożyska poniżej poziomu, przechodzącego przez punkt  $e$ , czyli przedstawia pionową rzędną dna w uważanym punkcie.

Na fig. 75 przyjętem było dno poziome; dlatego  $t$  miało wartość stałą. Dla dna pochylonego przybiera  $t$  wartość zmienną.

Wstawivszy więc z równania (121) wartość na  $s$  w równanie (123), otrzymamy:

$$t_1 = t - xz = \text{stałej},$$

co po zróżniczkowaniu daje:

$$(124) \quad \frac{dt}{dx} = z.$$

To znaczy, że dno łożyska musi mieć takie same nachylenie do poziomu, jak powierzchnia cieczy w łożysku przy stałej głębokości, jeżeli chyżość ruchu cieczy  $c_1$  ma być na długiej przestrzeni łożyska ilością stałą, czyli innymi słowy: jeżeli ruch cieczy w łożysku ma być jednostajny.





## BIBLIOGRAFIA.

- Anerbach Felix Dr., Die theoretische Hydrodynamik.  
 Exner Franz Dr., Vorlesungen über Electricität.  
 Franke Jan Nep. prof. S. P., Mechanika teoretyczna.  
 Gerhardt P., Kreislauf des Wassers.  
 Hagen G., Wasserbaukunst.  
 Heinemann Hugo, Rationaltheorie der Wasserbewegung.  
 Meissner G., Die Hydraulik.  
 Rychter J. prof. S. P., Roboty wodne.  
 Schlichting I. Prof., Binnengewässer.  
 Umlauft F. Dr. Prof., Das Luftmeer.  
 Müllner Adolph Dr., Experimental-Physik.

## Wykaz omyłek.

- Strona 7 wiersz 13 z góry ma być  $2\rho^2\pi c$ .  
 » 17 » 3 » w równaniu na  $s$  opuszczoną jest grubość  $h$ .  
 » 23 » 7 » ma być  $r_2 v_2$ .  
 » 23 » 10 z dołu » »  $r^2 = x^2 + (y - b)^2$ .  
 » 49 » 4 z góry » » ledwoniestyczną.  
 » 50 » 8 » » »  
 » 74 » 9 dołu brakuje index (53).

## SPIS RZECZY.

	Strona.
Wstęp . . . . .	1
1. Ruch falowy. . . . .	3
2. Działanie centrów atrakcyjnych. . . . .	8
3. Zastosowanie. . . . .	15
4. Linie prądu, powstające w poziomej cienkiej warstwie cieczy wskutek działania centra repulsyjnego i atrakcyjnego. . . . .	19
5. Ruch cieczy wskutek działania trzech centrów atrakcyjnych lub repulsyjnych, rozłożonych w linii prostej. . . . .	23
6. Działanie prostolinijnego układu elementarnych centrów atrakcyjnych. . . . .	28
7. Linie prądu, powstałe skutkiem działania jednego centra atrakcyjnego w nieograniczonej warstwie płynącej cieczy. . . . .	32
8. Rozwiązanie ogólne. . . . .	38
9. Dwa centra atrakcyjne w warstwie płynącej wody wgłębnej. . . . .	41
10. Kształt typowy tak zwanej paraboli chyżości. . . . .	44
11. Tachoida wskutek działania dwóch centrów. . . . .	52
12. Fale odbite. . . . .	54
13. Izotachy i powierzchnia tachoidalna. . . . .	54
14. Ruch elementu cieczy w grubej warstwie, wskutek działania dwóch centrów atrakcyjnych. . . . .	58
15. Ruch cieczy w łożysku, wskutek działania jednego centra atrakcyjnego lub repulsyjnego. . . . .	62
16. Ruch cieczy w łożysku, wskutek działania prostolinijnego układu centrów atrakcyjnych. . . . .	64
17. Strugi i fale. . . . .	73
18. Fale odbite. . . . .	80
19. Zapory . . . . .	83
20. Pionowa parabola chyżości . . . . .	86
21. Obniżenie powierzchni cieczy w układzie centrów atrakcyjnych. . . . .	91
22. Przelew. . . . .	92
23. Wypływ cieczy przez otwór w dnie naczynia. . . . .	95
24. Ruch cieczy w łożysku. . . . .	97
25. Profile poprzeczne. . . . .	106
26. Ruch cieczy w łożysku, skutkiem działania układu centrów repulsyjnych. . . . .	108
27. Obniżenie powierzchni cieczy w zbiorniku nad otworem wypływu . . . . .	113
28. Odkształcenie danej tachoidy. . . . .	117
29. Ruch elementu cieczy, wskutek działania dwu układów centrów. . . . .	120





TABLICA I.

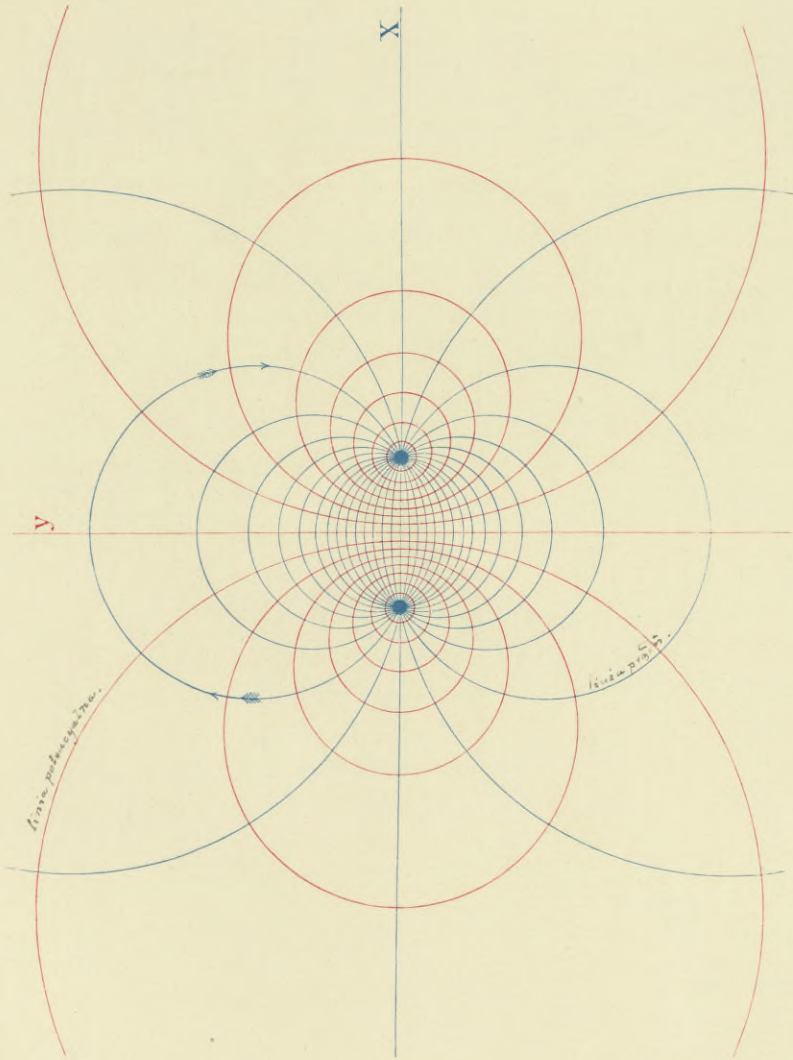


Fig. 13.





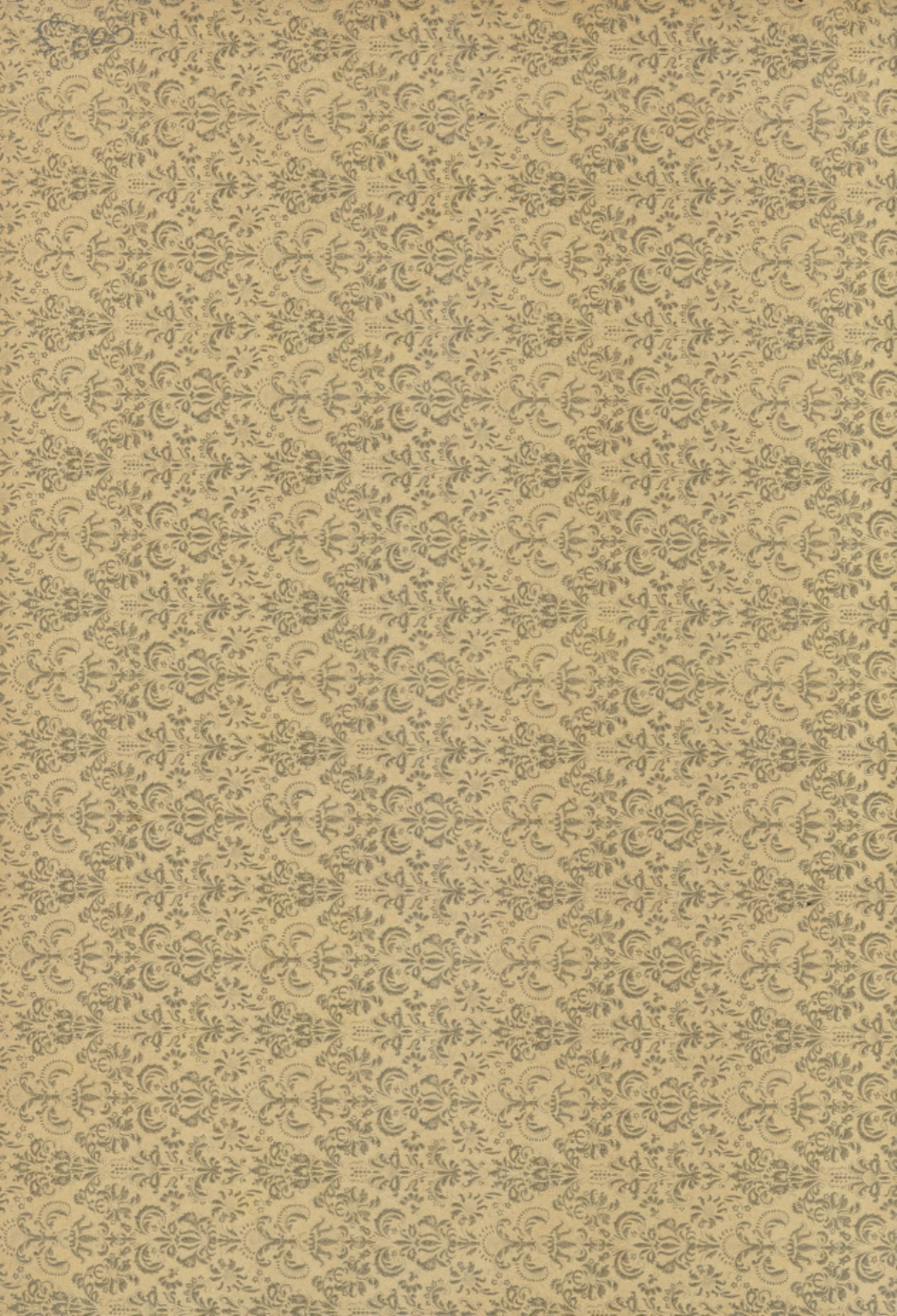


5. 21















POLITECHNIKA KRAKOWSKA

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-348364

Kdn. Zem. 480/55 20.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000231321