

Skł. 98267

III 2

**O KONWERGENCJI POŁUDNIKOWEJ
W ODWZOROWANIU ROUSSILHE'OWSKIEM ELIPSOIDY**

NAPISAŁ

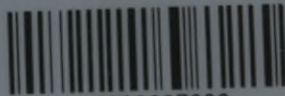
Dr. L. GRABOWSKI

PROF. POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

PRACA WYDANA NAKŁADEM AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH
W WARSZAWIE.

LWÓW 1929.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297933

O KONWERCENCJI POŁUDNIKOWEJ
W ODWZOROWANIU ROUSSILHE'OWSKIEM ELIPSOIDY

NAPISAŁ

Dr. L. GRABOWSKI

PROF. POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

PRACA WYDANA NAKŁADEM AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH
W WARSZAWIE.

LWÓW 1929.

D/942.



III 33962

Pierwsza Związkowa Drukarnia we Lwowie, ul. Lindego 1. 4.

Akc. Nr. 4453/51

Akc. Nr. 4277/47
B.

O konwergencji południkowej w odwzorowaniu Roussilhe'owskim elipsoidy.

1.

W paragrafach 1—3 niniejszej pracy rozważam zagadnienie następujące: Mając na elipsoidzie obrotowej punkt dany zapomocą długości geograficznej λ i szerokości geograficznej φ , obliczyć konwergencję południkową γ w tym punkcie w odwzorowaniu płaskim Roussilhe'owskim elipsoidy, z dokładnością około 1 sekundy. Z uwagi, że mam tu na myśli głównie odwzorowanie obszaru Polski z otaczającym ją wzdłuż granicy szerokim pasem, zakładam przytem, iż przyjęte centrum odwzorowania leży w szerokości geogr. około 52° (choćby w bardzo grubym tylko przybliżeniu), i że najdalsze od niego punkty odwzorowywanego obszaru są od niego oddalone nie więcej jak 600 Km., a rozmiary elipsoidy i jej ekscentryczność e są tego rzędu jak przyjmowane w geodezji i kartografji. W paragrafach dalszych rozważam to samo zadanie w przypadku, gdy punkt elipsoidy jest dany zapomocą współrzędnych prostokątnych płaskich x, y jego obrazu w odwzorowaniu.

Oczywiście, dokładność wartości konwergencji na sekundę nie byłaby wystarczającą, gdybyśmy chcieli wartości tej używać w rachunkach geodezyjnych, stosując w nich mianowicie odwzorowanie płaskie do rozwiązywania zadań dotyczących sieci triangulacyjnych pierwszorzędnych. Jest jednak zupełnie wystarczającą do różnych innych celów, w szczególności kartograficznych i wojskowych (artyleryjskich).

Ze względu na projektowane obecnie zastosowania odwzorowania Roussilhe'owskiego w Polsce na szeroką skalę, opracowanie wspomnianego wyżej zagadnienia, aczkolwiek temat ten nie daje pola do eleganckiego traktowania, lecz raczej do nieco uciążliwej dyskusji, wydało mi się aktualną potrzebą.

Punkt wybrany na centrum odwzorowania nazwijmy O ; jego szerokość geograficzna niech będzie φ_0 , promień krzywizny południka w tej szerokości oznaczmy przez M_0 , promień krzywizny przekroju normalnego poprzecznego przez N_0 , a średni promień krzywizny elipsoidy przez $R_0 = \sqrt{M_0 N_0}$. Położenie jakiegokolwiek innego punktu elipsoidy może być wyrażone albo przez podanie wartości jego współrzędnych geograficznych λ i φ (przyczem λ liczyć będziemy od „południka centralnego“ t. j. południka punktu O , a to jako dodatne na wschód), albo przez podanie wartości jego współrzędnych „łukowych“ s i u , przyczem s oznacza długość łuku południka od równoleżnika o szerokości

geogr. φ_0 do równoleżnika o szerokości φ (dodatną ku północy), zaś u długość łuku równoleżnika w szerokości φ od południka centralnego do uważanego punktu (dodatną na wschód). Spółrzędne prostokątne płaskie obrazu punktu (λ, φ) w odwzorowaniu Roussilhe'owskim oznaczmy x, y , przy czem osią x -ów jest obraz południka centralnego, i jej kierunek dodatny odpowiada jego kierunkowi północnemu.

Wprowadźmy dalej stosunki tych różnych długości $M_0, N_0, R_0, s, u, x, y$ do jednego metra (t. j. wielkości $\frac{M_0}{1 \text{ m.}}, \frac{N_0}{1 \text{ m.}}$ itd.) i oznaczmy je dla krótkości przez odpowiednio $\mu_0, \nu_0, \rho_0, \sigma, \nu, \xi, \eta$; te wielkości: $\mu_0, \nu_0, \rho_0, \dots$ są to więc liczby oderwane, w przeciwieństwie do tamtych (i dzięki tej swojej naturze mogą występować jako argumenty funkcyj przestępnych, np. logarytmów; dzięki niej też nie będą pozbawionymi sensu wielomiany lub szeregi zawierające w różnych swoich wyrazach potęgi ich o wykładnikach różnych).

W niniejszym i następnym paragrafie okażemy, że, w obrębie wspomnianego obszaru i przy określonym wyżej stopniu żądanej dokładności, można konwergencję jako funkcję λ i φ obliczać zupełnie tak, jakby się obliczało w rzucie stereograficznym kuli, dokonanym na płaszczyznę styczną do niej w punkcie o szerokości φ_0 , konwergencję południkową przy tychsamych λ i φ .

W każdym odwzorowaniu płaskim elipsoidy obrotowej, jeśli oznaczmy przez γ konwergencję (mianowicie odchylenie, w danym punkcie płaszczyzny odwzorowania, kierunku równoległego do osi x -ów od północnego ramienia obrazu południka, — rozumiane jako dodatne w sensie obrotu od dodatniego kierunku osi x -ów ku dodatniemu kierunkowi osi y -ów), wartość γ jest, jak łatwo zrozumieć, określona przez

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}.$$

Jeśli odwzorowanie jest wiernokątne, to*)

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{M}{P} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \quad (P \text{ promień równoleżnika, } M \text{ promień krzywizny południka);}$$

zatem

$$(1) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{-\frac{1}{M} \frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{1}{P} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}.$$

Wprowadzając zaś współrzędne łukowe s, u , mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = M \frac{\partial y}{\partial s} - M \lambda \sin \varphi \frac{\partial y}{\partial u} \quad (**) \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = P \frac{\partial y}{\partial u}; \end{aligned}$$

podstawiając w (1), otrzymujemy więc, jako formułę do obliczania γ , jeszcze zupełnie ściśłą,

$$(2) \quad \operatorname{tg} \gamma = \lambda \sin \varphi - \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\frac{\partial y}{\partial u}};$$

*) *Czasop. Techn.* (Lwów) 1928, Nr. 5, str. 69, równanie (4).

**) Jest bowiem $u = P\lambda$, więc $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \lambda \frac{\partial P}{\partial \varphi} = -M \lambda \sin \varphi$. Por. *loc. cit.*, równanie przed (4').

albo — co na jedno wychodzi —

$$(3) \quad \operatorname{tg} \gamma = \lambda \sin \varphi - \frac{\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}}{\frac{\partial \eta}{\partial v}}.$$

W odwzorowaniu Roussilhe'owskimi elipsoidy, związki między ξ i η z jednej, a σ i v z drugiej strony są następujące [por. Roussilhe, Rapport sur les procédés de calcul en coordonnées rectangulaires..., Paris 1924, str. 49]:

$$(4) \quad \begin{cases} \eta = v + (A_1 v \sigma^2 - A_2 v^3) - A_3 v^3 \sigma + (A_4 v \sigma^4 - A_5 v^3 \sigma^2 - A_6 v^5) - (A_7 v^3 \sigma^3 + A_8 v^5 \sigma) \\ \xi = \sigma + B_1 v^2 + (B_2 \sigma^3 + B_3 v^2 \sigma) + (B_4 v^2 \sigma^2 + B_5 v^4) + (B_6 \sigma^5 + B_7 v^2 \sigma^3 - B_8 v^4 \sigma) + \\ \quad + (B_9 v^2 \sigma^4 - B_{10} v^4 \sigma^2 - B_{11} v^6). \end{cases}$$

Spółczynniki $A_1, A_2 \dots, B_1, B_2 \dots$ w (4) są to liczby oderwane, zależne tylko od szerokości φ_0 punktu centralnego (i od stałych elipsoidy); wyrażenia współczynników A przez tę szerokość — współczynniki B nie będą nam teraz potrzebne — są, wedle Roussilhe'a (*l. cit.* str. 50), następujące *):

$$(5) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{4 \rho_0^2} & \log A_1 = \overline{15.787} \ 94 \\ A_2 = \frac{2 t_0^2 - 1 - 2 e^2 c_0^2 t_0^2}{12 \rho_0^2} & \log A_2 = \overline{15.672} \ 13 \end{cases}$$

$$(6) \quad A_3 = \frac{t_0 [1 + 4 t_0^2 - e^2 c_0^2 (8 t_0^2 - 7)]}{12 \rho_0^2} \cdot \frac{\rho_0}{\mu_0} = \frac{t_0 [1 + 4 t_0^2 - 3 e^2 c_0^2 (2 t_0^2 - \frac{5}{2})]}{12 \rho_0^2} \quad \log A_3 = \overline{21.496} \ 12$$

$$(7) \quad \begin{cases} A_4 = \frac{1}{24 \rho_0^4} & \log A_4 = \overline{29.399} \ 78 \\ A_5 = \frac{12 t_0^4 + 11 t_0^2 - 1}{24 \rho_0^4} & \log A_5 = \overline{27.098} \ 53 \\ A_6 = \frac{-2 t_0^4 + 11 t_0^2 - 2}{240 \rho_0^4} & \log A_6 = \overline{29.429} \ 91 \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} A_7 = \frac{t_0 (24 t_0^4 + 34 t_0^2 + 7)}{36 \rho_0^5} & \log A_7 = \overline{34.638} \ 25 \\ A_8 = \frac{t_0 (-8 t_0^4 + 29 t_0^2 + 7)}{240 \rho_0^5} & \log A_8 = \overline{35.224} \ 01, \end{cases}$$

gdzie dla krótkości wprowadziliśmy oznaczenia

$$t_0 = \operatorname{tg} \varphi_0, \quad c_0 = \cos \varphi_0.$$

Na prawych stronach (8) opuściliśmy czynnik $\frac{\rho_0}{\mu_0} = \sqrt{\frac{N_0}{M_0}} = \sqrt{1 + \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi_0}$, co nie zmienia rzędu przybliżenia tych dwu wyrażeń, ponieważ wyrazy zawierające czynnik e^2 są w tych wyrażeniach Roussilhe'a zaniechane. Dołączone obok (5)–(8) logarytmy (odnoszące się do przypadku elipsoidy Bessela) są zaczerpnięte z rozprawy kpt. Fr. Biernackiego (Odwzorowanie Roussilhe'a i próba zastosowania jego metody do obszaru Polski, Warsz. 1927), który je obliczył (na 8 miejsc dziesięt.) dla $\varphi_0 = 52^\circ 7' 5''$. Tu zmieniliśmy je jednak przez dodanie $n \cdot \log 0.9995$, gdzie n oznacza wykładnik przy ρ_0 w mianowniku odpowiedniego współczynnika A . Logarytmy podane przez kpt. Biernackiego nie są to

*) z lekką modyfikacją formalną; por. mianowniki i w (6) czynnik $\frac{\rho_0}{\mu_0}$. (Zarazem zwracamy uwagę, że u Roussilhe'a litera ρ_0 ma inne znaczenie, niż u nas.)

bowiem logarytmy wyrażeń powyższych (5)–(8), lecz tych, jakieby z nich powstały przez zastąpienie w mianownikach wszędzie ϱ_0 przez $0.9995 \varrho_0$.*)

Tworząc występujące w (3) pochodne cząstkowe, przez różniczkowanie pierwszego z równań (4), mamy

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial v} = 1 + (A_1 \sigma^2 - 3 A_2 v^2) - 3 A_3 v^2 \sigma + (A_4 \sigma^4 - 3 A_5 v^2 \sigma^2 - 5 A_6 v^4) - (3 A_7 v^2 \sigma^3 + 5 A_8 v^4 \sigma) \\ \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = 2 A_1 v \sigma - A_3 v^3 + (4 A_4 v \sigma^3 - 2 A_5 v^3 \sigma) - (3 A_7 v^3 \sigma^2 + A_8 v^5). \end{cases}$$

Dla każdego oddzielnego z iloczynów $v^p \sigma^q$ występujących na prawych stronach tych równań, maksymalną jego wartością bezwzględną w obrębie uważanego przez nas obszaru będzie największa (bezwzględnie) z wartości jakie on przyjmuje w punktach odległych od punktu O o 600 000 metrów. Możemy znaleźć tę wartość, w wystarczającym dla niniejszej dyskusji przybliżeniu, jeśli weźmiemy na uwagę w płaszczyźnie odwzorowania promień wychodzący z punktu O w azymucie α i długi na 600 000 metrów, wyszukamy tę wartość α przy której $|\sin^p \alpha \cos^q \alpha|$ staje się maximum, i dla tej wartości obliczymy wartość iloczynu $600\,000^{p+q} |\sin^p \alpha \cos^q \alpha|$. Znajdujemy

dla $v^2 \sigma$: $\operatorname{tg}^2 \alpha = 2$	$\sin^2 \alpha \cos \alpha = 0.385$	dla $v \sigma$: $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$	$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$
„ $v^2 \sigma^2$: $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$	$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$	„ $v \sigma^3$: $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{3}$	$\sin \alpha \cos^3 \alpha = 0.325$
„ $v^2 \sigma^3$: $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{2}{3}$	$\sin^2 \alpha \cos^3 \alpha = 0.186$	„ $v^3 \sigma$: $\operatorname{tg}^2 \alpha = 3$	$\sin^3 \alpha \cos \alpha = 0.325$
„ $v^4 \sigma$: $\operatorname{tg}^2 \alpha = 4$	$\sin^4 \alpha \cos \alpha = 0.286$	„ $v^3 \sigma^2$: $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{3}{2}$	$\sin^3 \alpha \cos^2 \alpha = 0.186$

Mamy przeto dla oddzielnych wyrazów prawych stron (9) następujące nierówności (co do wartości bezwzględnych):

(10)	$\begin{cases} A_1 \sigma^2 < 0.002\,21 \\ 3 A_2 v^2 < 0.005\,08 \\ 3 A_3 v^2 \sigma < 0.000\,78 \\ A_4 \sigma^4 < 0.000\,00_4 \\ 3 A_5 v^2 \sigma^2 < 0.000\,12 \\ 5 A_6 v^4 < 0.000\,02 \\ 3 A_7 v^2 \sigma^3 < 0.000\,02 \\ 5 A_8 v^2 \sigma < 0.000\,00_3 \end{cases}$	$\begin{matrix} m^{**}) \\ \frac{1}{280} \\ \frac{1}{176} \\ \frac{1}{280} \frac{1}{241} \\ \frac{1}{140} \\ \frac{1}{280} \\ \frac{1}{176} \\ \frac{1}{545} \\ \frac{1}{74} \end{matrix}$	(11)	$\begin{cases} 2 A_1 v \sigma < 0.002\,21 \\ A_3 v^3 < 0.000\,68 \\ 4 A_4 v \sigma^3 < 0.000\,00_4 \\ 2 A_5 v^3 \sigma < 0.000\,11 \\ 3 A_7 v^3 \sigma^2 < 0.000\,02 \\ A_8 v^5 < 0.000\,00_2 \end{cases}$	$\begin{matrix} m \\ 1500 \\ \frac{1}{201} \frac{1}{194} \\ \frac{1}{280} \\ \frac{1}{280} \\ \frac{1}{61} \\ \frac{1}{188} \end{matrix}$
------	--	--	------	--	---

*) Podanie przezeń takich właśnie logarytmów tłumaczy się tem, że autor dążył tam do obliczania współrzędnych prostokątnych x, y w odwzorowaniu Roussilhe'owskiem skurczonem o 0.05% (przez co kompensuje się w pewnej mierze odkształcenia długościowe wynikające z odwzorowania płaskiego). Odwzorowanie skurczone można, oczywiście, istotnie osiągnąć przez wspomniane tylko-co zastąpienie, pod warunkiem wszakże, że przy obliczaniu następnie x, y według formuł (4) zastąpimy w nich również σ wszędzie przez 0.9995σ i v przez $0.9995 v$. — Prościej nieco można tensam cel osiągnąć, rachując według formuł pierwotnych odwzorowania, a dopiero na końcu mnożąc otrzymane x i y przez 0.9995 . [Psychologicznie, ten drugi tryb postępowania odpowiada pojmowaniu skurczenia jako wykonywanego dopiero na obrazie płaskim; poprzedni natomiast odpowiada pojmowaniu go jako skurczenia elipsoidy przed odwzorowaniem. Operacja skurczenia elipsoidy wymaga jednak nietylko zmniejszenia jej promieni krzywizny, lecz pociąga za sobą także konieczność zmniejszenia, w tym samym stosunku, współrzędnych łukowych s, u punktów na niej leżących (jakkolwiek współrzędne geograficzne pozostają bez zmiany)].

***) Znaczenie ułamków wypisanych pod m będzie objaśnione później.

Z nierówności tych wynika ostatecznie:

$$\left| \frac{\partial \eta}{\partial v} - 1 \right| < \frac{1}{100}, \quad \left| \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \right| < \frac{1}{330}.$$

Widzimy więc, że, w naszym obszarze, wyraz drugi prawej strony (3) pozostaje wszędzie mniejszy od $\frac{1}{330}$ (czyli od $10\frac{1}{2}'$). Wyraz zaś pierwszy, t. j. $\lambda \sin \varphi$, pozostaje w nim wszędzie mniejszy (bezwzględnie) od 0.121 (czyli od 7^0).

2.

Pomyślmy teraz kulę o promieniu $=R_0$, na niej obrany w szerokości φ_0 punkt O' (od południka jego liczyć na niej będziemy długości geograficzne), i ustanówmy, że każdemu punktowi elipsoidy odpowiadać ma na kuli punkt określony temisamemi wartościami współrzędnych geograficznych. Część kuli odpowiadającą w ten sposób uważanemu przez nas powyżej obszarowi elipsoidy wyobraźmy sobie następnie odwzorowaną przez zwykły rzut stereograficzny na płaszczyznę styczną do kuli w punkcie O' ; przyjmijmy ten punkt za początek układu współrzędnych prostokątnych w tej płaszczyźnie, a rzut jego południka za oś odciętych. Otóż, oznaczając współrzędne łukowe punktu (λ, φ) kuli przez s', u' , współrzędne prostokątne jego obrazu stereograficznego przez x', y' , konwergencję południkową w tym punkcie przez γ' , wreszcie stosunki długości x', y', s', u' do jednego metra przez ξ', η', σ', v' , będziemy widocznie mieli równanie

$$\operatorname{tg} \gamma' = \lambda \sin \varphi - \frac{\frac{\partial \eta'}{\partial \sigma'}}{\frac{\partial \eta'}{\partial v'}},$$

oraz *) równania — nazwijmy je równaniami (9') — jakie powstają przez dopisanie w równaniach (9) kresek przy literach η, σ, v i przy wszystkich literach A . Współczynniki A' tych równań będą się różniły od odpowiednich współczynników A jak następuje (nie wypisujemy tych, które się nie różnią):

$$(5') \quad A_2' - A_2 = \frac{e^2 e_0^2 t_0^2}{6 \rho_0^2} \quad \log (A_2' - A_2) = \overline{17.2308}^{**}$$

$$(6') \quad A_3' - A_3 = \frac{e^2 e_0^2 (2t_0^2 - \frac{5}{2}) t_0^2}{4 \rho_0^3} \quad \log (A_3' - A_3) = \overline{24.2918}^{**}$$

Stąd okazuje się, że przez zakreskowanie współczynników w równaniach (9) zmienią się, co do wartości bezwzględnej, w pierwszym równaniu

*) Odwzorowanie Roussilhe'owskie elipsoidy ma bowiem tę własność, że w przypadku granicznym $e=0$ przechodzi na rzut stereograficzny kuli o promieniu $=R_0$ na płaszczyznę styczną do elipsoidy w punkcie O . Wynika to odrazu z uwagi, że odwzorowanie Roussilhe'a jestto odwzorowanie wiernokątne, w którym obrazy punktów południka centralnego przypadają na osi x -ów (prostej stycznej do południka w punkcie O) w tych właśnie jej miejscach, w którychby przypadły, gdybyśmy ten południk najpierw odwinęli na kulę o promieniu R_0 styczną do elipsoidy w punkcie O , a następnie z kuli odrzutowali jego punkty stereograficznie na tę płaszczyznę.

**) Logarytmy te są tutaj, gwoli porównywalności z przytoczonymi na str. 3 wartościami logarytmów współczynników A , obliczone nie dla szerokości $\varphi_0 = 52^0$, lecz dla $\varphi_0 = 52^0 7' 5''$ (co zresztą jest dla wyników niniejszego paragrafu obojętne).

wielkości: $3 A_2 v^2$ $3 A_3 v^2 \sigma$
 o około $+\frac{1}{276}$ $+\frac{1}{1400}$
 wartości, w drugim zaś $+\frac{1}{1245}$

wielkość $A_3 v^3$ o około $\frac{+1}{1400}$ swej wartości, podczas gdy pozostałe wyrazy prawych stron równań (9) nie uległyby zmianie.

Pozostaje jeszcze zbadać zmiany stosunkowe oddzielnych wyrazów powstające przez zakreskowanie liter σ i v . Otóż, oznaczając $\varepsilon^2 \cos^2 \varphi_0$ przez ζ_0 ($\varepsilon^2 = \frac{e^2}{1-e^2}$), $\varphi - \varphi_0$ przez $\Delta\varphi$, mamy [por. Jordan, Handb. d. Verm., 3. Bd., 7. Aufl., str. 229, form. (38)]

$$s = M_0 \Delta\varphi + \frac{3}{2} \frac{M_0}{1+\zeta_0} \zeta_0 t_0 \Delta\varphi^2 + \frac{M_0}{2(1+\zeta_0)^2} \zeta_0 (1-t_0^2 + \zeta_0 + 4\zeta_0 t_0^2) \Delta\varphi^3 + \dots,$$

t. j., z pominięciem wyrazów zawierających czynnik $e^4 \Delta\varphi^2$ lub $e^2 \Delta\varphi^3$,

$$\frac{s}{M_0} = \Delta\varphi + \frac{3}{2} \zeta_0 t_0 \Delta\varphi^2 + \frac{1}{2} \zeta_0 (1-t_0^2) \Delta\varphi^3,$$

a stąd, ponieważ $\frac{M_0}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}} = 1 - \frac{1}{2} \zeta_0 + \frac{3}{8} \zeta_0^2 - \dots$, mamy, pomijając jeszcze wyrazy z czynnikiem $e^4 \Delta\varphi$ lub $e^2 \Delta\varphi^3$,

$$(12) \quad \frac{s}{R_0} = \Delta\varphi (1 - \frac{1}{2} \zeta_0) + \Delta\varphi^2 \cdot \frac{3}{2} \zeta_0 t_0.$$

Dla kuli natomiast będziemy mieli

$$(12') \quad \frac{s'}{R_0} = \Delta\varphi.$$

Z porównania (12) z (12') widzimy, że stosunek $\frac{s'}{s}$ jest większy od jednościi tylko o wielkość (z pominięciem wyrazów 4-go rzędu ekscentryczności)

$$(a) \quad \frac{1}{2} \zeta_0 (1 - 3 t_0 \Delta\varphi),$$

która, wobec tego, że ζ_0 jest około $\frac{1}{390}$, t_0 około $1 \cdot 3$, a $|\Delta\varphi|$ w naszym obszarze $< \frac{1}{10}$, wynosi w naszym obszarze conajwięcej około $\frac{1}{590}$.

Z drugiej strony, oznaczając promień równoleżnika naszej kuli w szerokości geogr. φ przez P' , promień krzywizny przekroju poprzecznego elipsoidy w tej szerokości przez N , mamy

$$\frac{u'}{u} = \frac{P'}{P} = \frac{R_0}{N} = \sqrt{\frac{M_0}{N_0} \cdot \frac{N_0}{N}},$$

a ponieważ

$$\sqrt{\frac{M_0}{N_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}, \quad N = \frac{a\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{1+\zeta}}, \quad N_0 = \frac{a\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{1+\zeta_0}} \quad (\zeta = \varepsilon^2 \cos^2 \varphi).$$

więc widzimy, że stosunek $\frac{u'}{u}$ jest (z pominięciem wyrazów 4-go rzędu ekscentryczności) $= (1 + \frac{1}{2} \zeta)(1 - \zeta_0) = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 \varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_0$, t. j. w przybliżeniu (z pominięciem wyrazów zawierających czynnik $e^2 \Delta\varphi^2$)

$$1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_0 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \Delta\varphi;$$

jest on więc mniejszy od jednościi tylko o wielkość

$$(b) \quad \frac{1}{2} \zeta_0 (1 + t_0 \Delta\varphi),$$

która w naszym obszarze wynosi conajwięcej około $\frac{1}{590}$.

Z (a) i (b) wynika, że przez zakreskowanie liter v i σ w równaniach (9) zmieniają się wartości bezwzględne występujących w nich iloczynów $v^p \sigma^q$ w przybliżeniu o następujące części w stosunku do tychże wartości:

σ^2 o $\frac{1}{280}$	$v\sigma$ o $2\zeta_0 t_0 \Delta\varphi$ t. j. mniej niż o $\frac{1}{1500}$
v^2 o $\frac{1}{340}$	v^3 o $\frac{1}{280}$ " " " "
$v^2\sigma$ o $\frac{1}{2}\zeta_0(1+5t_0\Delta\varphi)$ t. j. mniej niż o $\frac{1}{470}$	$v\sigma^3$ o $\zeta_0(1-5t_0\Delta\varphi)$ " " " "
σ^4 o $\frac{1}{140}$	$v^3\sigma$ o $\zeta_0(1+3t_0\Delta\varphi)$ " " " "
$v^2\sigma^2$ o $4\zeta_0 t_0 \Delta\varphi$ " " " "	$v^3\sigma^2$ o $\frac{1}{2}\zeta_0(1+9t_0\Delta\varphi)$ " " " "
v^4 o $\frac{1}{170}$	v^5 o $\frac{1}{185}$
$v^2\sigma^3$ o $\frac{1}{2}\zeta_0(1-11t_0\Delta\varphi)$ " " " "	
$v^4\sigma$ o $\frac{1}{2}\zeta_0(9+11t_0\Delta\varphi)$ " " " "	

Zbierając to razem z otrzymanymi wyżej wartościami zmian wywoływanych zakreskowaniem współczynników A , przekonywamy się, że przez zakreskowanie wszystkich liter w równaniach (9) zmieniają się wartości bezwzględne wyrazów na prawych stronach mniej niż o takie ich ułamki, jakie są wypisane obok (10) i (11) pod m .

Zestawiając na koniec te ułamki z nierównościami (10) i (11), otrzymanymi dla wartości oddzielnych wyrazów, przekonywamy się w rezultacie, że zmieniają się wartości bezwzględne wyrazów:

w pierwszym równaniu (9):		w drugim równaniu (9):	
$A_1\sigma^2$	mniej niż o 0.000 0080	$2A_1v\sigma$	mniej niż o 0.000 0015
$3A_2v^2$	" " " 0.000 0038	A_3v^3	" " " 0.000 0035
$3A_3v^2\sigma$	" " " 0.000 0022	$2A_5v^3\sigma$	" " " 0.000 0004
$3A_5v^2\sigma^2$	" " " 0.000 0002	$3A_7v^3\sigma^2$	" " " 0.000 0003
$5A_6v^4$	" " " 0.000 0001 ₂		

podczas gdy u pozostałych wyrazów zmiana maksymalna żadnego z nich nie dosięga nawet jednostki 7-go miejsca dziesiętnego. Zatem

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta'}{\partial v'} \text{ różni się od } \frac{\partial \eta}{\partial v} \text{ mniej niż o } 0.000 0143 \\ \frac{\partial \eta'}{\partial \sigma'} \text{ " " " } \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \text{ " " " } 0.000 005\overline{6}.*) \end{array} \right.$$

Ponieważ zaś w równaniu (3), jak widzieliśmy wyżej, mianownik $\frac{\partial \eta}{\partial v}$ jest mało (o mniej niż $\frac{1}{1000}$) różny od jedności, więc z (13) wynika zarazem, że zastępując w (3) $\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}$ przez $\frac{\partial \eta'}{\partial \sigma'}$, $\frac{\partial \eta}{\partial v}$ przez $\frac{\partial \eta'}{\partial v'}$, nie popełnimy w $\text{tg } \gamma$ błędu większego niż o 0.000 005 $\overline{6}$, a więc w γ błędu większego niż około 1''.

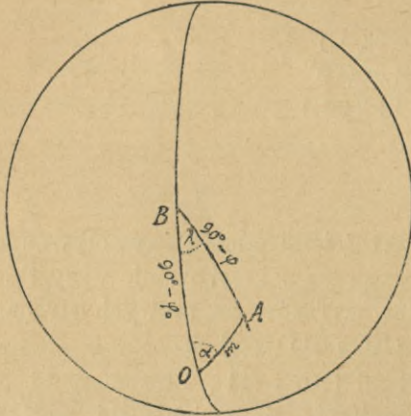
Z tą dokładnością, możemy więc obliczać dla danego punktu (λ, φ) konwergencję południkową w odwzorowaniu Roussilhe'owskim elipsoidy tak, jak w rzucie stereograficznym kuli dla tych samych λ i φ .**).

*) W rzeczywistości sprawa ma się ^{znacznie} jeszcze korzystniej, gdyż np. w wyrazie A_3v^3 zmiana drugiego i zmiana pierwszego czynnika następują w przeciwnym sensie; a nadto, nie mogą też zmiany wszystkich wyrazów jednego równania dosięgać swych maksymalnych wartości jednocześnie.

**) Promień kuli jest przytem oczywiście dowolny; dla danych λ i φ konwergencja południkowa nie zależy od promienia.

3.

W rzucie stereograficznym (ukośnym) kuli łatwo jest wyprowadzić do obliczania konwergencji południkowej γ z danych λ i φ formułę zupełnie ścisłą. Oznaczając szerokość geogr. punktu O kuli obranego za punkt centralny odwzorowania przez φ_0 , jego południk przyjmując za południk $\lambda = 0$, i utworzywszy rzut stereograficzny punktów kuli na płaszczyznę do niej w tym punkcie styczną (w której przyjmujemy ten punkt za początek układu współrzędnych prostokątnych $x y$ a obraz jego południka za oś x -ów), będziemy mieli między współrzędnymi geograficznymi punktu bieżącego A kuli a współrzędnymi prostokątnymi jego obrazu następujące związki, w których R oznacza promień kuli, α odchylenie łuku OA od północnego ramienia południka OB (B biegun kuli) w sensie obrotu od północy ku wschodowi, a $m = \frac{OA}{R}$:



(Oznaczenia łuków odnoszą się do wartości odpowiadających kątów środkowych).

$$x = 2R \operatorname{tg} \frac{m}{2} \cos \alpha, \quad y = 2R \operatorname{tg} \frac{m}{2} \sin \alpha,$$

czyli

$$x = 2R \frac{\sin m \cos \alpha}{1 + \cos m} = 2R \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda}{1 + \cos m}$$

$$y = 2R \frac{\sin m \sin \alpha}{1 + \cos m} = 2R \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{1 + \cos m},$$

gdzie $\cos m = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda$.

Różniczkując x i y cząstkowo względem φ , i kładąc dla skrócenia czasowo

$$\begin{array}{l|l} \sin \varphi_0 = h & \sin \lambda = p \\ \cos \varphi_0 = k & \cos \lambda = q, \end{array}$$

otrzymujemy

$$(1 + \cos m)^2 \frac{1}{2R} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = (1 + h \sin \varphi + kq \cos \varphi)(k \cos \varphi + hq \sin \varphi) - (k \sin \varphi - hq \cos \varphi)(h \cos \varphi - kq \sin \varphi)$$

$$(1 + \cos m)^2 \frac{1}{2R} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -(1 + h \sin \varphi + kq \cos \varphi)p \sin \varphi - p \cos \varphi (h \cos \varphi - kq \sin \varphi),$$

czyli

$$(14) \quad \begin{cases} (1 + \cos m)^2 \frac{1}{2R} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = k \cos \varphi + k^2 q + hq \sin \varphi + h^2 q = k \cos \varphi + hq \sin \varphi + q \\ (1 + \cos m)^2 \frac{1}{2R} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -p \sin \varphi - hp = -p(h + \sin \varphi). \end{cases}$$

Stąd można natychmiast otrzymać formułę na konwergencję południkową γ w punkcie A' (obrazie punktu o współrzędnych λ, φ), t. j. odchylenie kierunku równoległego do osi x -ów od obrazu południka (w sensie obrotu od północy ku wschodowi): stosując wzór

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}},$$

otrzymujemy z (14)

$$(15) \quad \operatorname{tg} \gamma = \sin \lambda \cdot \frac{\sin \varphi_0 + \sin \varphi}{\cos \varphi_0 \cos \varphi + \cos \lambda \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \lambda}$$

Oznaczając $\varphi - \varphi_0$ przez δ , możemy jeszcze napisać tę formułę tak:

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin \lambda \frac{2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{\cos \delta - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2} \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \lambda} = \sin \lambda \frac{2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{2 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2} - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2} \sin \varphi_0 \sin \varphi}$$

t. j.

$$(15') \quad \operatorname{tg} \gamma = \sin \lambda \sin \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \sec \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{1 - \sin^2 \frac{\lambda}{2} (1 + \sin \varphi_0 \sin \varphi) \sec^2 \frac{\delta}{2}}$$

Formuły (15) i (15') są jeszcze zupełnie ścisłe; kształt (15') nadaje się jako wyjściowy do wyprowadzenia formuły przybliżonej, polegającej na założeniu że λ i δ są małe, a dogodniejszej do rachunku. Wyprowadzimy tu taką formułę dla zastosowań takich, w których błąd w γ o parę sekund jest jeszcze uważany jako nieszkodliwy.

Skoro λ i δ są małe, możemy, oznaczając czynnik po kropce w (15') przez J , rozwinąć w nim funkcje $\sin^2 \frac{\lambda}{2}$, $\sec^2 \frac{\delta}{2}$ na szeregi, i uwzględniając zarazem że jest

$$\sin \varphi_0 \sin \varphi = h^2 + hk \cdot \delta - \frac{1}{2} h^2 \delta^2 + \dots,$$

napisać

$$J = 1 + \left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^4}{48} \right) (1 + h^2 + hk \delta - \frac{1}{2} h^2 \delta^2) \left(1 + \frac{\delta^2}{4} \right) + \frac{\lambda^4}{16} (1 + h^2)^2,$$

w czym zaniebane są tylko wielkości małe rzędu piątego i wyższych. (Błąd w γ powstający przez to zaniebanie byłby więc rzędu 6-go.) Wykonywając wskazane działania, i porządkując według rzędów wielkości, otrzymamy

$$(16) \quad J = 1 + \frac{\lambda^2}{4} (1 + h^2) + \frac{\lambda^2 \delta}{4} hk + \frac{\lambda^2 \delta^2}{16} (1 - h^2) + \frac{\lambda^4}{48} (2 + 5h^2 + 3h^4).$$

W naszym obszarze, gdzie $|\lambda| < 0.15$, ostatni wyraz tego wyrażenia jest (przyjmując $\varphi_0 = 52^\circ$) wszędzie mniejszy od 0.000 065. Co się tyczy przedostatniego, to na kole około punktu O , ograniczającym nasz obszar, a więc kole o promieniu sferycznym $m = 5^{\circ} 4$ czyli 0.094, wynosi on, w punkcie o azymucie α , w przybliżeniu (podstawiając $\delta = m \cos \alpha$, $\lambda = m \sin \alpha \sec \varphi_0$)

$$\frac{0.000\ 209 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{16} (1 - h^2);$$

osięga więc maximum przy $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$ i wynosi wtedy 0.000 001₃. Zatem suma obu wyrazów 4-go rzędu w J jest w każdym razie mniejsza od 0.000 07. Z uwagi na małość czynnika przed kropką w (15') (jest on w przybliżeniu równy konwergencji, która w naszym obszarze nie wynosi nigdzie więcej jak kilka stopni) możemy więc te wyrazy w (16) opuścić. Co się tyczy wyrazu 3-go rzędu w (16), to na wspomnianem kole wynosi on w punkcie o azymucie α

$$\frac{0.002\ 22 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{4} hk;$$

największą wartość bezwzględną przyjmuje więc dla $\operatorname{tg}^2 \alpha = 2$ i wynosi wtedy (bezwzględnie) 0.000 103. Zatem i ten wyraz w (16) można również opuścić, gdy zadowolamy się w γ dokładnością na parę sekund. Wskutek tego formuła (15') redukuje się do

$$(17) \quad \operatorname{tg} \gamma = \sin \lambda \sin \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \sec \frac{\Delta \varphi}{2} \cdot J,$$

gdzie

$$\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0, \quad J = 1 + \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 (1 + \sin^2 \varphi_0).$$

Dla wygodniejszego rachunku logarytmicznego można wprowadzić kąt pomocniczy l określony przez

$$\operatorname{tg} l = \frac{\lambda}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \varphi_0},$$

albo, co jest tożsamo (ponieważ $1^\circ \equiv \frac{\pi}{180}$, $1' \equiv \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} \equiv 0.000\ 290\ 882 \dots$),

$$(18) \quad \operatorname{tg} l = \left(\frac{\lambda}{1'}\right) \cdot \frac{0.000\ 290\ 882}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \varphi_0} = \left(\frac{\lambda}{1'}\right) \cdot [4.16270] \sqrt{1 + \sin^2 \varphi_0},$$

gdzie $\frac{\lambda}{1'}$ naturalnie oznacza stosunek długości geograficznej do jednej minuty (czyli liczbę wyrażającą ile ona zawiera w sobie minut). Czynniki po kropce w (18) jest dla danego φ_0 stały, obliczy się go więc tylko raz dla całego odwzorowania; l zaś obliczać się będzie z (18) zależnie od długości geograficznych. Do obliczenia konwergencji będziemy wtedy mieli formułę

$$(19) \quad \operatorname{tg} \gamma = \sin \lambda \sin \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \sec \frac{\Delta \varphi}{2} \cdot \sec^2 l, *$$

dogodną do rachunku logarytmicznego.

Jeśli wypada obliczać γ dla wielu punktów w obrębie jednego odwzorowania (φ_0 stałe), pożytecznym będzie sporządzić tabelkę, która argumentem λ daje wprost $\log \sec^2 l$. Dla ilustracji podaję tu taką tabelkę, obliczoną w przyjęciu $\varphi_0 = 52^\circ$:

λ	$\log \sec^2 l$	λ	$\log \sec^2 l$	λ	$\log \sec^2 l$	λ	$\log \sec^2 l$	λ	$\log \sec^2 l$
0° 0'	0.000 00	1° 0'	0.000 05	2° 0'	0.000 21	3° 0'	0.000 48	4° 0'	0.000 86
10	00	10	07	10	25	10	54	10	0.000 93
20	01	20	10	20	29	20	60	20	0.001 00
30	01	30	12	30	33	30	66	30	0.001 08
40	02	40	15	40	38	40	72	40	0.001 16
50	04	50	18	50	43	50	79	50	0.001 25
1 0	0.000 05	2 0	0.000 21	3 0	0.000 48	4 0	0.000 86	5 0	0.001 34

λ	$\log \sec^2 l$	λ	$\log \sec^2 l$	λ	$\log \sec^2 l$	λ	$\log \sec^2 l$
5° 0'	0.001 34	6° 0'	0.001 92	7° 0'	0.002 62	8° 0'	0.003 41
10	0.001 43	10	0.002 08	10	0.002 74	10	0.003 55
20	0.001 52	20	0.002 15	20	0.002 87	20	0.003 70
30	0.001 62	30	0.002 26	30	0.003 00	30	0.003 85
40	0.001 72	40	0.002 37	40	0.003 13	40	0.004 00
50	0.001 82	50	0.002 49	50	0.003 27	50	0.004 15
6 0	0.001 92	7 0	0.002 62	8 0	0.003 41	9 0	0.004 31

Można także nadać formule (19) kształt

$$(20) \quad \gamma = \lambda \sin \varphi_0 + d,$$

gdzie d będzie małą poprawką, zależną od λ i φ , którą się stabiluje w stosownych odstępach tych argumentów. Mając obliczony z góry czynnik stały $\sin \varphi_0$ w formule (20), można będzie przy pomocy tej tabelki obliczać wygodnie γ dla danych λ i φ , nawet bez potrzeby sięgania do tablic logarytmicznych. Dla $\varphi_0 = 52^\circ$ tabelka taka przedstawia się tak:

*) Formuła ta jest dokładniejszą od formuły jaką podałem (bez wywodu) w r. 1927 w końcowym ustępie mojej odpowiedzi na ankietę Wojsk. Instytutu Geogr. w sprawie wyboru odwzorowania dla polskich map wojskowych (*Wiad. Służby Geograficznej*, roczn. 1, str. 276). Tam pominąłem mianowicie czynnik $\sec \frac{\Delta \varphi}{2}$, w granicach Polski niezbyt różny od jedności, aby formułę jeszcze bardziej uprościć. Przez pominięcie go może powstać w obliczanej konwergencji południkowej błąd o parę dziesiątych minut, co jednak dla artylerji jest jeszcze zupełnie bez praktycznego znaczenia.

d

φ λ	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°
	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''
0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
10	-0 19	-0 16	-0 13	-0 10	-0 6	-0 3	+0 0	+0 3	+0 6	+0 10	+0 13	+0 16	+0 19
20	-0 39	-0 32	-0 26	-0 19	-0 13	-0 6	+0 0	+0 6	+0 13	+0 19	+0 26	+0 32	+0 39
30	-0 58	-0 48	-0 39	-0 29	-0 19	-0 10	+0 0	+0 10	+0 19	+0 29	+0 39	+0 48	+0 58
40	-1 17	-1 4	-0 52	-0 39	-0 26	-0 13	+0 0	+0 13	+0 26	+0 39	+0 52	+1 5	+1 17
50	-1 37	-1 21	-1 4	-0 48	-0 32	-0 16	+0 0	+0 16	+0 32	+0 48	+1 4	+1 21	+1 37
1 0	-1 56	-1 37	-1 17	-0 58	-0 39	-0 19	+0 0	+0 19	+0 39	+0 58	+1 17	+1 37	+1 56
10	-2 15	-1 53	-1 30	-1 8	-0 45	-0 23	+0 0	+0 23	+0 45	+1 8	+1 30	+1 53	+2 16
20	-2 35	-2 9	-1 43	-1 17	-0 51	-0 26	+0 0	+0 26	+0 52	+1 17	+1 43	+2 9	+2 35
30	-2 54	-2 25	-1 56	-1 27	-0 58	-0 29	+0 0	+0 29	+0 58	+1 27	+1 56	+2 25	+2 54
40	-3 13	-2 41	-2 9	-1 37	-1 4	-0 32	+0 0	+0 32	+1 4	+1 37	+2 9	+2 41	+3 14
50	-3 33	-2 57	-2 22	-1 46	-1 11	-0 35	+0 0	+0 36	+1 11	+1 46	+2 22	+2 57	+3 33
2 0	-3 52	-3 13	-2 34	-1 56	-1 17	-0 38	+0 0	+0 39	+1 17	+1 56	+2 35	+3 14	+3 52
10	-4 11	-3 29	-2 47	-2 5	-1 23	-0 42	+0 0	+0 42	+1 24	+2 6	+2 48	+3 30	+4 12
20	-4 30	-3 45	-3 0	-2 15	-1 30	-0 45	+0 0	+0 45	+1 30	+2 16	+3 1	+3 46	+4 31
30	-4 50	-4 1	-3 13	-2 25	-1 36	-0 48	+0 0	+0 49	+1 37	+2 25	+3 14	+4 2	+4 51
40	-5 9	-4 17	-3 26	-2 34	-1 42	-0 51	+0 0	+0 52	+1 44	+2 35	+3 27	+4 18	+5 10
50	-5 28	-4 33	-3 38	-2 44	-1 49	-0 54	+0 1	+0 55	+1 50	+2 45	+3 40	+4 34	+5 29
3 0	-5 47	-4 49	-3 51	-2 53	-1 55	-0 57	+0 1	+0 59	+1 57	+2 55	+3 53	+4 51	+5 49
10	-6 7	-5 5	-4 4	-3 3	-2 1	-1 0	+0 1	+1 2	+2 3	+3 5	+4 6	+5 7	+6 8
20	-6 26	-5 21	-4 17	-3 12	-2 8	-1 3	+0 1	+1 5	+2 10	+3 14	+4 19	+5 23	+6 28
30	-6 45	-5 37	-4 29	-3 22	-2 14	-1 6	+0 1	+1 9	+2 16	+3 24	+4 32	+5 39	+6 47
40	-7 4	-5 53	-4 42	-3 31	-2 20	-1 9	+0 1	+1 12	+2 23	+3 34	+4 45	+5 56	+7 7
50	-7 23	-6 9	-4 55	-3 41	-2 27	-1 13	+0 2	+1 16	+2 30	+3 44	+4 58	+6 12	+7 26
4 0	-7 42	-6 25	-5 7	-3 50	-2 33	-1 16	+0 2	+1 19	+2 36	+3 53	+5 11	+6 23	+7 45
10	-8 1	-6 40	-5 20	-3 59	-2 39	-1 19	+0 2	+1 22	+2 43	+4 3	+5 24	+6 44	+8 5
20	-8 20	-6 56	-5 33	-4 9	-2 45	-1 21	+0 2	+1 26	+2 49	+4 13	+5 37	+7 0	+8 24
30	-8 39	-7 12	-5 45	-4 18	-2 51	-1 24	+0 2	+1 29	+2 56	+4 23	+5 50	+7 17	+8 44
40	-8 58	-7 28	-5 58	-4 28	-2 57	-1 27	+0 3	+1 33	+3 3	+4 33	+6 3	+7 33	+9 3
50	-9 17	-7 43	-6 10	-4 37	-3 3	-1 30	+0 3	+1 36	+3 9	+4 43	+6 16	+7 49	+9 23
5 0	-9 36	-7 59	-6 23	-4 46	-3 10	-1 33	+0 3	+1 40	+3 16	+4 53	+6 29	+8 6	+9 42
10	-9 55	-8 15	-6 35	-4 55	-3 16	-1 36	+0 4	+1 43	+3 23	+5 3	+6 42	+8 22	+10 2
20	-10 14	-8 30	-6 47	-5 5	-3 22	-1 39	+0 4	+1 47	+3 30	+5 12	+6 55	+8 38	+10 21
30	-10 32	-8 46	-7 0	-5 14	-3 28	-1 42	+0 4	+1 50	+3 36	+5 22	+7 8	+8 55	+10 41
40	-10 51	-9 2	-7 12	-5 23	-3 34	-1 44	+0 5	+1 54	+3 43	+5 32	+7 22	+9 11	+11 0
50	-11 10	-9 17	-7 25	-5 32	-3 40	-1 47	+0 5	+1 57	+3 50	+5 42	+7 35	+9 27	+11 20
6 0	-11 29	-9 33	-7 37	-5 41	-3 46	-1 50	+0 6	+2 1	+3 57	+5 52	+7 48	+9 44	+11 39
10	-11 47	-9 48	-7 49	-5 50	-3 51	-1 53	+0 6	+2 5	+4 4	+6 2	+8 1	+10 0	+11 59
20	-12 6	-10 4	-8 1	-5 59	-3 57	-1 55	+0 6	+2 8	+4 10	+6 12	+8 14	+10 16	+12 18
30	-12 24	-10 19	-8 14	-6 8	-4 3	-1 58	+0 7	+2 12	+4 17	+6 22	+8 27	+10 33	+12 38
40	-12 43	-10 34	-8 26	-6 17	-4 9	-2 1	+0 7	+2 16	+4 24	+6 32	+8 41	+10 49	+12 58
50	-13 2	-10 50	-8 38	-6 26	-4 15	-2 3	+0 8	+2 19	+4 31	+6 42	+8 54	+11 5	+13 17
7 0	-13 20	-11 5	-8 50	-6 35	-4 21	-2 6	+0 9	+2 23	+4 38	+6 53	+9 7	+11 22	+13 37
10	-13 39	-11 20	-9 2	-6 44	-4 26	-2 9	+0 9	+2 27	+4 45	+7 3	+9 20	+11 38	+13 56
20	-13 57	-11 35	-9 14	-6 53	-4 32	-2 11	+0 10	+2 31	+4 52	+7 13	+9 34	+11 55	+14 16
30	-14 15	-11 51	-9 26	-7 2	-4 38	-2 14	+0 10	+2 35	+4 59	+7 23	+9 47	+12 11	+14 36
40	-14 34	-12 6	-9 38	-7 11	-4 43	-2 16	+0 11	+2 38	+5 6	+7 33	+10 0	+12 28	+14 55
50	-14 52	-12 21	-9 50	-7 20	-4 49	-2 19	+0 12	+2 42	+5 13	+7 43	+10 14	+12 44	+15 15
8 0	-15 10	-12 36	-10 2	-7 28	-4 55	-2 21	+0 13	+2 46	+5 20	+7 53	+10 27	+13 1	+15 34
10	-15 28	-12 51	-10 14	-7 37	-5 0	-2 23	+0 13	+2 50	+5 27	+8 3	+10 40	+13 17	+15 54
20	-15 47	-13 6	-10 26	-7 46	-5 6	-2 26	+0 14	+2 54	+5 34	+8 14	+10 54	+13 34	+16 14
30	-16 5	-13 21	-10 38	-7 54	-5 11	-2 28	+0 15	+2 58	+5 41	+8 24	+11 7	+13 50	+16 33
40	-16 23	-13 36	-10 49	-8 3	-5 17	-2 30	+0 16	+3 2	+5 48	+8 34	+11 20	+14 7	+16 53
50	-16 41	-13 51	-11 1	-8 12	-5 22	-2 33	+0 17	+3 6	+5 55	+8 44	+11 34	+14 23	+17 13
9 0	-16 59	-14 6	-11 13	-8 20	-5 28	-2 35	+0 17	+3 10	+6 2	+8 55	+11 47	+14 40	+17 32

(Ponieważ przy obliczaniu tej tabelki obliczano γ według formuły przybliżonej (19), wartości d w tej tabelce mogą częściowo być o parę sekund niedokładne. Obliczono d z formuł (19) i (20) tylko dla całkowitych stopni długości geograficznej; dla pośrednich wartości λ uzyskano następnie wartości d przez interpolację.)

Oczywiście, przy λ ujemnych (gdzie zatem i γ jest ujemne), należy także d z tej tabelki brać ze znakiem przeciwnym.

O ile chodzi o obliczanie konwergencji w rzucie stereograficznym kuli z przybliżeniem na parę sekund, rachunek według formuły (20), z użyciem tablicy poprawek d , jest zapewne najwygodniejszy (o ile, naturalnie, mamy już obliczoną tablicę d dla przyjętego φ_0). Jeżeliby jednak chodziło o obliczenie tej konwergencji ściśle, to, wygodniej niż zapomocą formuły (15), można ją obliczyć według formuły

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi)}{\cos \frac{1}{2}\delta}.$$

[Związek ten jest wyprowadzonym z trójkąta kulistego OAB formułą na $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$, gdzie α' jest azymutem koła wielkiego \overline{OA} w punkcie A . Różnica $\alpha' - \alpha$ jest mianowicie równa konwergencji południkowej, jak łatwo zrozumieć przez uważanie obrazu tego koła w płaszczyźnie odwzorowania i wzgląd, że azymuty zostają w odwzorowaniu zachowane. — Można by było, naturalnie, także tablicę poprawek d obliczyć na podstawie tej formuły ściśle; lecz, aby tablica taka służyć mogła do obliczania konwergencji ściśłego, musiałaby podawać d na drobne ułamki sekundy, i wskutek tego też tabulowanie musiałoby być o wiele gęstsze.

Co się dotyczy rachunku konwergencji według formuły przybliżonej (19), z użyciem tabelki $\log \sec^2 l$, to jest on tylko niewiele krótszy niż rachunek według podanej ostatnio formuły ściśłej; krótszy o tyle, iż odpada połowienie kąta λ i podwajanie kąta $\frac{\gamma}{2}$.

4.

Zajmijmy się teraz sprawą obliczania, z dokładnością na $1''$, konwergencji południkowej w odwzorowaniu Roussilhe'owskim w przypadku, gdy punkt, dla którego mamy obliczyć konwergencję, jest dany nie przez spólrzędne geograficzne λ, φ na elipsoidzie (jak w paragrafach 1. i 2.), lecz przez spólrzędne prostokątne płaskie x, y w odwzorowaniu. Przyjmuję przytem, jak i poprzednio, że punkt obrany na centrum odwzorowania leży w szerokości geogr. około 52° . Zakładam także, że poddana odwzorowaniu część elipsoidy (Bessela) jest tak ograniczoną, iż w płaszczyźnie odwzorowania obraz jej mieści się całkowicie wewnątrz koła zatoczonego dokoła tego punktu promieniem 600 Km.

Weźmiemy najpierw na uwagę równania służące do zamiany spólrzędnych łukowych s, u punktu elipsoidy na spólrzędne prostokątne x, y jego obrazu w płaszczyźnie, i równania do zamiany odwrotnej.

Do pierwszego celu służą przytoczone już wyżej pod (4) związki między ξ, η z jednej, a σ i v z drugiej strony, przyczem spólczynnikami A i B ze wskaźnikami oznaczają wielkości zależne jedynie od szerokości geogr. φ_0 punktu centralnego (i od stałych elipsoidy) i wyrażają się przez tę szerokość jak następuje [por., dla $A_1 \dots A_8$, równania (5)—(8)]*):

*) Przekształcając nieco wyrażenia Roussilhe'a spólczynników A i B (por. mianowniki oraz czynniki $\frac{\rho_0}{\mu_0}, \frac{\rho_0}{\nu_0}$), opuściliśmy zarazem w $A_7, A_8, B_9, B_{10}, B_{11}$ pojawiający się przytem czynnik $\frac{\rho_0}{\mu_0}$, co nie zmienia rzędu przybliżenia tych wyrażeń, ponieważ składniki zawierające czynnik e^2 są w wyrażeniach Roussilhe'a tych pięciu spólczynników zaniedbane.

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{4\rho_0^2} \\ A_2 = \frac{2t_0^2 - 1 - 2e^2 c_0^2 t_0^2}{12\rho_0^2} \\ A_3 = \frac{t_0 [1 + 4t_0^2 - 3e^2 c_0^2 (2t_0^2 - \frac{1}{2})]}{12\rho_0^3} \\ A_4 = \frac{1}{24\rho_0^4} \\ A_5 = \frac{12t_0^4 + 11t_0^2 - 1}{24\rho_0^4} \\ A_6 = \frac{-2t_0^4 + 11t_0^2 - 2}{240\rho_0^4} \\ A_7 = \frac{t_0 (24t_0^4 + 34t_0^2 + 7)}{36\rho_0^5} \\ A_8 = \frac{t_0 (-8t_0^4 + 29t_0^2 + 7)}{240\rho_0^5} \end{array} \right. \quad (22) \left\{ \begin{array}{l} B_1 = \frac{t_0}{2\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\nu_0} = \frac{t_0 (2 - \zeta_0 + \frac{3}{4}\zeta_0^2)}{4\rho_0} \\ B_2 = \frac{1}{12\rho_0^2} \\ B_3 = \frac{1 + 2t_0^2 - 2e^2 c_0^2 t_0^2}{4\rho_0^2} \\ B_4 = \frac{t_0 [5 + 4t_0^2 - e^2 c_0^2 (13 + 8t_0^2)]}{8\rho_0^3} \cdot \frac{\rho_0}{\mu_0} = \frac{t_0 [5 + 4t_0^2 - e^2 c_0^2 (\frac{21}{2} + 6t_0^2)]}{8\rho_0^3} \\ B_5 = \frac{t_0 (2 - t_0^2 + 2e^2)}{24\rho_0^3} \cdot \frac{\rho_0}{\mu_0} = \frac{t_0 [2 - t_0^2 + e^2 c_0^2 (3 + \frac{3}{2}t_0^2)]}{24\rho_0^3} \\ B_6 = \frac{1}{120\rho_0^4} \\ B_7 = \frac{12t_0^4 + 19t_0^2 + 5}{24\rho_0^4} \\ B_8 = \frac{6t_0^4 - 5t_0^2 - 2}{48\rho_0^4} \\ B_9 = \frac{t_0 (24t_0^4 + 46t_0^2 + 23)}{48\rho_0^5} \\ B_{10} = \frac{t_0 (24t_0^4 + t_0^2 - 17)}{96\rho_0^5} \\ B_{11} = \frac{t_0 (-2t_0^4 + 26t_0^2 - 17)}{1440\rho_0^5} \end{array} \right.$$

Do zamiany zaś odwrotnej t. j. spólrzędnych prostokątnych w odwzorowaniu płaskim na spólrzędne łukowe na elipsoidzie służyą formuły następujące (por. Roussilhe, Cours d'Astronomie appliquée et Géodésie, Paris 1924, str. 337/338; zwracamy uwagę, że w książce tej osie x i y są z sobą przestawione w porównaniu z naszymi):

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} v = \eta + (-C_1 \eta \xi^2 + C_2 \eta^3) + C_3 \eta^3 \xi + (C_4 \eta \xi^4 + C_5 \eta^3 \xi^2 - C_6 \eta^5) \\ \sigma = \xi - D_1 \eta^2 - (D_2 \xi^3 + D_3 \eta^2 \xi) - (D_4 \eta^2 \xi^2 - D_5 \eta^4) + (D_6 \xi^5 - D_7 \eta^2 \xi^3 + D_8 \eta^4 \xi). \end{array} \right. *$$

Spólczynniki C i D (funkcje stałych elipsoidy i szerokości punktu centralnego) mają wyrażenia następujące:

$$(24) \left\{ \begin{array}{l} C_1 = A_1 \\ C_2 = A_2 \\ C_3 = 2A_1 B_1 + A_3 \\ C_4 = A_1^2 \\ C_5 = 2A_1 B_3 - 4A_1 A_2 + A_5 \\ C_6 = A_1 B_1^2 + A_3 B_1 - 3A_2^2 - A_6 \end{array} \right. \quad (25) \left\{ \begin{array}{l} D_1 = B_1 \\ D_2 = B_2 \\ D_3 = B_3 \\ D_4 = B_4 - 2A_1 B_1 - 3B_1 B_2 \\ D_5 = B_1 B_3 - 2A_2 B_1 - B_5 \\ D_6 = 3B_2^2 - B_6 \\ D_7 = B_7 - 2A_1 B_3 - 4B_2 B_3 \\ D_8 = -2B_1 B_4 - B_3^2 - B_8 + 2A_3 B_1 + 3B_1^2 B_2 + \\ + 4A_1 B_1^2 + 2A_2 B_3. \end{array} \right.$$

*) Opuściliśmy wyrazy rzędu 6-go i 7-go (u Roussilhe'a są jeszcze podane); według rachunków p. Szpunara, asystenta Obserwatorium Politechniki Lwowskiej, wartość bezwzględna sumy wyrazów 6-go rzędu w u nie przekracza, w obrębie uważanego tu obszaru, $2\frac{1}{2}$ metrów, a wyrazów rzędu 6-go w s $1\frac{1}{2}$ metra. Przesunięcie zaś punktu o $2\frac{1}{2}$ m. po równoleżniku zmienia konwergencję co najwięcej o około 0.1. Powiększanie spólrzędnej s wpływa na konwergencję jeszcze o wiele słabiej, niż powiększanie spólrzędnej u .

Weźmy teraz znów na uwagę kulę o promieniu $= R_0$ i obrany na niej w szerokości geograficznej $= \varphi_0$ punkt Ω , i wyobraźmy sobie, że utworzono rzut jej stereograficzny na płaszczyznę styczną w punkcie Ω . Ustanówmy teraz (inaczej niż w paragrafie 2-im), że każdemu punktowi elipsoidy ma odpowiadać ten punkt kuli, którego obraz w tym rzucie miałby takie same wartości współrzędnych prostokątnych x, y [oś x -ów kładziemy wzdłuż stycznej do południka w punkcie Ω , a za początek współrzędnych prostokątnych przyjmujemy ten punkt], jakie ma obraz uważanego punktu elipsoidy w odwzorowaniu Roussilhe'owskim mającym za punkt centralny punkt O . Oznaczmy współrzędne geograficzne tego punktu kuli przez λ^*, φ^* (długości geograficzne liczymy znów od południka punktu Ω), a jego współrzędne łukowe na kuli przez u^*, s^* , stosunki zaś długości tych odcinków do metra przez v^*, σ^* . Wreszcie konwergencję południkową w obrazie Roussilhe'owskim punktu elipsoidy nazwijmy γ , a konwergencję południkową w obrazie stereograficznym odpowiadającego mu punktu kuli nazwijmy γ^* .

Jeśli dla jakiegoś punktu elipsoidy mamy dane współrzędne x, y jego obrazu w płaszczyźnie, to współrzędne łukowe u^*, s^* punktu kuli odpowiadającego owemu punktowi elipsoidy możnaby widocznie obliczyć z tych danych x, y zapomocą równań — nazwijmy je równaniami (23*), (24*), (25*) — jakie powstają z równań (23), (24), (25) przez opatrzenie w nich gwiazdkami liter v i σ oraz (jak w paragr. 2) kreskami liter A, B, C, D , i ustanowienie, że wyrażenia współczynników oznaczonych literami A', B' ze wskaźnikami powstają z wyrażań (21) i (22) współczynników A i B przez podstawienie w nich $e = 0$.

Będziemy więc mieli, kładąc dla skrótienia $A_n' - A_n = \delta A_n$, $B_n' - B_n = \delta B_n$,

$A_1' = \frac{1}{4\rho_0^2}$	$\delta A_1 = 0$	$B_1' = \frac{t_0}{2\rho_0}$	$\delta B_1 = \frac{\zeta_0(1 - \frac{3}{2}\zeta_0)t_0}{4\rho_0}$
$A_2' = \frac{2t_0^2 - 1}{12\rho_0^2}$	$\delta A_2 = \frac{\tau}{6\rho_0^2}$	$B_2' = \frac{1}{12\rho_0^2}$	$\delta B_2 = 0$
$A_3' = \frac{t_0(1 + 4t_0^2)}{12\rho_0^2}$	$\delta A_3 = \frac{\vartheta(4t_0^2 - 5)}{8\rho_0^2}$	$B_3' = \frac{1 + 2t_0^2}{4\rho_0^2}$	$\delta B_3 = \frac{\tau}{2\rho_0^2}$
$A_4' = \frac{1}{24\rho_0^4}$	$\delta A_4 = 0$	$B_4' = \frac{t_0(5 + 4t_0^2)}{8\rho_0^2}$	$\delta B_4 = \frac{\vartheta(21 + 12t_0^2)}{16\rho_0^2}$
$A_5' = \frac{12t_0^4 + 11t_0^2 - 1}{24\rho_0^4}$	$\delta A_5 = 0$	$B_5' = \frac{t_0(2 - t_0^2)}{24\rho_0^2}$	$\delta B_5 = -\frac{\vartheta(2 + t_0^2)}{16\rho_0^2}$
$A_6' = \frac{-2t_0^4 + 11t_0^2 - 2}{240\rho_0^4}$	$\delta A_6 = 0$	$B_6' = \frac{1}{120\rho_0^4}$	$\delta B_6 = 0$
		$B_7' = \frac{12t_0^4 + 19t_0^2 + 5}{24\rho_0^4}$	$\delta B_7 = 0$
		$B_8' = \frac{6t_0^4 - 5t_0^2 - 2}{48\rho_0^4}$	$\delta B_8 = 0$,

gdzie przez ϑ i τ oznaczyliśmy

$$\vartheta = e^2 c_0^2 t_0, \quad \tau = e^2 c_0^2 t_0^2 \quad (c_0 = \cos \varphi_0, \quad t_0 = \operatorname{tg} \varphi_0).$$

Jest (w przyjęciu $\varphi_0 = 52^\circ$) $\vartheta = \text{ok. } \frac{1}{308}$, $\tau = \text{ok. } \frac{1}{241}$.

Z równań (24*) i (25*) wynika, oznaczając $C_n' - C_n$ przez δC_n , $D_n' - D_n$ przez δD_n , i traktując przyrosty δA_n , δB_n , δC_n , δD_n jakoby różniczki (mianowicie zaniedbując w δC_6 , δD_6 , δD_8 kwadraty i iloczyny przyrostów δA , δB),

$$\begin{array}{l}
 \delta C_1 = 0 \\
 \delta C_2 = \delta A_2 \\
 \delta C_3 = 2 A'_1 \delta B_1 + \delta A_3 \\
 \delta C_4 = 0 \\
 \delta C_5 = 2 A'_1 \delta B_3 - 4 A'_1 \delta A_2 \\
 \delta C_6 = 2 A'_1 B'_1 \delta B_1 + A'_3 \delta B_1 - 6 A'_2 \delta A_2
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \delta D_1 = \delta B_1 \\
 \delta D_2 = 0 \\
 \delta D_3 = \delta B_3 \\
 \delta D_4 = \delta B_4 - 2 A'_1 \delta B_1 - 3 B'_2 \delta B_1 \\
 \delta D_5 = B'_3 \delta B_1 + B'_1 \delta B_3 - 2 B'_1 \delta A_2 - 2 A'_2 \delta B_1 - \delta B_5 \\
 \delta D_6 = 0 \\
 \delta D_7 = -2 A'_1 \delta B_3 - 4 B'_2 \delta B_3 \\
 \delta D_8 = -2 B'_1 \delta B_1 - 2 B'_1 \delta B_4 - 2 B'_3 \delta B_3 + 2 B'_1 \delta A_3 + \\
 + 2 A'_2 \delta B_1 + 6 B'_1 B'_2 \delta B_1 + 8 A'_1 B'_1 \delta B_1 + \\
 + 2 B'_3 \delta A_2 + 2 A'_2 \delta B_3 ;
 \end{array} \right.$$

a wstawiając za δA i δB wyrażenia wyżej wypisane, przyczem wszędzie z wyjątkiem w δD_1 wyrażenie na δB_1 zastępujemy przez $\frac{\tau}{4\rho_0}$, otrzymujemy (przy uwzględnieniu że $\vartheta t_0 = \tau$)

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \delta C_2 = \frac{\tau}{6} \cdot \frac{1}{\rho_0^2} \\
 \delta C_3 = \frac{-\vartheta(2-t_0^2)}{4} \cdot \frac{1}{\rho_0^3} \\
 \delta C_5 = \frac{\tau}{12} \cdot \frac{1}{\rho_0^4} \\
 \delta C_6 = \frac{\tau(2-t_0^2)}{12} \cdot \frac{1}{\rho_0^4}
 \end{array} \right. \left\| \begin{array}{l}
 \frac{1}{1448} \\
 -\frac{1}{3430} \\
 \frac{1}{2895} \\
 \frac{1}{8043}
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 1.70 \cdot 10^{-17} \\
 -1.12 \cdot 10^{-24} \\
 2.08 \cdot 10^{-31} \\
 7.49 \cdot 10^{-32}
 \end{array}$$

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \delta D_1 = \frac{\zeta_0(1-\frac{3}{4}\zeta_0)t_0}{4} \cdot \frac{1}{\rho_0} \\
 \delta D_3 = \frac{\tau}{2} \cdot \frac{1}{\rho_0^2} \\
 \delta D_4 = \frac{\vartheta(7+5t_0^2)}{4} \cdot \frac{1}{\rho_0^3} \\
 \delta D_5 = \frac{\vartheta(11+9t_0^2)}{48} \cdot \frac{1}{\rho_0^3} \\
 \delta D_7 = \frac{-5\tau}{12} \cdot \frac{1}{\rho_0^4} \\
 \delta D_8 = \frac{-\tau(103+24t_0^2)}{48} \cdot \frac{1}{\rho_0^4}
 \end{array} \right. \left\| \begin{array}{l}
 \frac{1}{1229} \\
 \frac{1}{481} \\
 \frac{1}{81.3} \\
 \frac{1}{575} \\
 -\frac{1}{579} \\
 -\frac{1}{81.3}
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 1.27 \cdot 10^{-10} \\
 5.09 \cdot 10^{-17} \\
 4.73 \cdot 10^{-23} \\
 6.68 \cdot 10^{-24} \\
 -1.04 \cdot 10^{-30} \\
 -7.41 \cdot 10^{-30}
 \end{array}$$

Obok każdego z równań (26) i (27) wypisana jest, dla orientacji, przybliżona wartość liczebna czynnika występującego przed kropką (wypisana w formie ułamka o liczniku 1), jakoteż przybliżona wartość liczebna prawej strony równania.

Jeżelibyśmy utworzyli równania (23*), to odjąwszy od nich (23), otrzymamy na $v^* - v = \delta v$ i $\sigma^* - \sigma = \delta \sigma$ wyrażenia następujące:

$$(28) \quad \begin{cases}
 \delta v = \delta C_2 \cdot \eta^3 + \delta C_3 \cdot \eta^3 \xi + \delta C_5 \cdot \eta^3 \xi^2 - \delta C_6 \cdot \eta^5 \\
 \delta \sigma = -\delta D_1 \cdot \eta^2 - \delta D_3 \cdot \eta^2 \xi - \delta D_4 \cdot \eta^2 \xi^2 + \delta D_5 \cdot \eta^4 - \delta D_7 \cdot \eta^2 \xi^3 + \delta D_8 \cdot \eta^4 \xi
 \end{cases}$$

Stosunek promienia wspomnianego wyżej koła w płaszczyźnie xy do metra (a więc liczbę 600 000) oznaczmy dla krótkości przez κ ; wówczas możemy powiedzieć, że w równaniach (28) każdy z wyrazów prawych stron jest, wewnątrz tego koła, mniejszy co do wartości bezwzględnej od liczby, jakąbyśmy otrzymali podstawiając w nim $\xi = \eta = \kappa$. Kolejne wyrazy prawej strony pierwszego równania (28) są więc bezwzględnie mniejsze niż odpowiednio

$$\frac{1}{1448} \omega^2 \kappa \quad \frac{1}{3430} \omega^3 \kappa \quad \frac{1}{2895} \omega^4 \kappa \quad \frac{1}{8043} \omega^4 \kappa$$

a wyrazy prawej strony drugiego są bezwzględnie mniejsze niż

$$\frac{1}{1295} \omega \kappa \quad \frac{1}{481} \omega^2 \kappa \quad \frac{1}{81} \omega^3 \kappa \quad \frac{1}{575} \omega^3 \kappa \quad \frac{1}{579} \omega^4 \kappa \quad \frac{1}{81} \omega^4 \kappa,$$

gdzie $\omega = \frac{\pi}{\varrho_0}$. Ponieważ zaś jest w przybliżeniu

$$\omega = \frac{1}{10.6} \quad \omega^2 = \frac{1}{113} \quad \omega^3 = \frac{1}{1204} \quad \omega^4 = \frac{1}{12800},$$

więc widzimy, że na prawej stronie pierwszego równania (28) dwa ostatnie wyrazy wynosić mogą zaledwie parę setnych; są więc dla naszego celu t. j. obliczania konwergencji z dokładnością na 1'' zupełnie zanedbywalne, gdyż błąd o parę centymetrów w położeniu punktu praktycznie nie wpływa wcale na konwergencję (w obrębie naszego obszaru przesunięcie punktu nawet o 1 metr zmienia konwergencję co najwyżej o około $\frac{1}{5}$ "). Wyraz pierwszy prawej strony tego równania jest (bezwzględnie) mniejszy niż 3.8; drugi przy podstawieniu $\eta = \xi = 600\,000$ miałby wartość bezwzględną 0.145, lecz w rzeczywistości wyraz ten na obwodzie koła ograniczającego nasz obszar osiąga największą swą wartość bezwzględną w punktach, w których $\operatorname{tg}^2 \alpha = 3$, skąd $|\sin^3 \alpha \cos \alpha| =$ niespełna $\frac{1}{3}$, skutkiem czego wartość maksymalna tego wyrazu wynosi więc tylko około 0.05. Zważywszy jeszcze, że nie mogą oba wyrazy przyjmować swych największych wartości jednocześnie, możemy więc powiedzieć, że suma algebraiczna tych obu wyrazów nie przekracza, co do wartości bezwzględnej, liczby wynoszącej około 3.8. Jest więc, dla nas, też zanedbywalna.

W drugim równaniu trzy ostatnie wyrazy są również zanedbywalne, gdyż nawet przy podstawieniu $\eta = \xi = 600\,000$ czwarty wynosi mniej niż 0.9, piąty mniej niż 0.08₁, szósty mniej niż 0.58. Wartość bezwzględna wyrazu trzeciego przy podstawieniu $\xi = \eta = 600\,000$ wypada = 6.12; ale w rzeczywistości, na obwodzie wspomnianego koła, wyraz ten osiąga swą maksymalną wartość bezwzględną przy $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$ ($\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$), i przeto maksymalna wartość tego wyrazu wynosi tylko około 1.5. Możemy więc i ten wyraz opuścić.

Pozostaje tedy

$$(29) \quad \begin{cases} \delta v = 0 \\ \delta \sigma = -\delta D_1 \cdot \eta^2 - \delta D_3 \cdot \eta^2 \xi = -\frac{\zeta_0 - \frac{3}{4} \zeta_0^2}{4 \varrho_0} \eta^2 - \frac{\tau}{2 \varrho_0^2} \eta^2 \xi. \end{cases}$$

W drugim z tych równań wyraz $-\delta D_1 \cdot \eta^2$ przy podstawieniu maksymalnego η wypada co do wartości bezwzględnej = 45.9; wyraz $-\delta D_3 \cdot \eta^2 \xi$ przy podstawieniu $\xi = \eta = 600\,000$ miałby wartość bezwzględną blisko 11, lecz na obwodzie wspomnianego wyżej koła osiąga swą największą wartość przy $\operatorname{tg}^2 \alpha = 2$ (zatem $\sin^2 \alpha \cos \alpha = 0.385$) i maksymalna jego wartość bezwzględna wynosi więc tylko około 4. Suma obu wyrazów jest więc w naszym obszarze wszędzie mniejsza niż około 50; to znaczy: różnica między spólrzędzonymi łukowymi s i s^* jest mniejsza niż 50 metrów. Ten wynik przyda nam się wkrótce.

5.

Konwergencja południkowa γ w odwzorowaniu Roussilhe'owskimi elipsoidy, w punkcie będącym obrazem punktu o spólrzędnych geograficznych λ, φ (łukowych: u, s) jest — jak widzieliśmy w paragr. 1-szym — związana ze spólrzędzonymi tego punktu elipsoidy związkiem

$$(30) \quad \operatorname{tg} \gamma = \lambda \sin \varphi - \frac{\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}}{\frac{\partial \eta}{\partial v}},$$

przyczem

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial v} = 1 + (A_1 \sigma^2 - 3 A_2 v^2) - 3 A_3 v^2 \sigma + (A_4 \sigma^4 - 3 A_5 v^2 \sigma^2 - 5 A_6 v^4) - (3 A_7 v^2 \sigma^3 + 5 A_8 v^4 \sigma) \\ \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = 2 A_1 v \sigma - A_3 v^3 + (4 A_4 v \sigma^3 - 2 A_5 v^3 \sigma) - (3 A_7 v^3 \sigma^2 + A_8 v^5). \end{cases}$$

Zatem konwergencja południkowa γ^* w rzucie stereograficznym naszej kuli, w punkcie o tych samych wartościach współrzędnych prostokątnych płaskich x, y , jest związana ze współrzędnymi geograficznymi λ^*, φ^* punktu kuli, tam się odwzorowującego, związkiem

$$(32) \quad \operatorname{tg} \gamma^* = \lambda^* \sin \varphi^* - \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}\right)^*}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^*},$$

w czem

$$(33) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^* = 1 + (A_1 \sigma^{*2} - 3 A_2' v^2) - 3 A_3' v^2 \sigma^* + (A_4 \sigma^{*4} - 3 A_5 v^2 \sigma^{*2} - 5 A_6 v^4) - \\ - (3 A_7 v^2 \sigma^{*3} + 5 A_8 v^4 \sigma^*) \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}\right)^* = 2 A_1 v \sigma^* - A_3' v^3 + (4 A_4 v \sigma^{*3} - 2 A_5 v^3 \sigma^*) - (3 A_7 v^3 \sigma^{*2} + A_8 v^5). \end{cases}$$

Ponieważ mianowniki drugich wyrazów prawych stron w równaniach (30) i (32) nie są wielkościami małymi [są bowiem, jak widzieliśmy w paragr. 1-szym, mało (o mniej niż $\frac{1}{1000}$) różne od jedności], można w ostatnich dwu nawiasach drugiego z równań (33) zastąpić σ^* przez σ . Odejmując następnie drugie równanie (31) od drugiego równania (33), znajdujemy

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}\right)^* - \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = 2 A_1 v \cdot \delta \sigma - \delta A_3 \cdot v^3.$$

Lecz, ponieważ v i σ są mniejsze od κ , jest

$$2 A_1 v \delta \sigma < 2 A_1 \kappa^2 \cdot \frac{\delta \sigma}{\kappa} \quad v^3 \delta A_3 < A_3 \kappa^3 \cdot \frac{\delta A_3}{A_3};$$

a zatem, z uwagi że $\frac{\delta \sigma}{\kappa} < \frac{50}{600000}$ t. j. $\frac{1}{12000}$, $\frac{\delta A_3}{A_3} = \frac{3}{2} \frac{3(4t_0^2 - 5)}{t_0(1 + 4t_0^2)} = \text{ok. } \frac{1}{1280}$, i że [por. pierwszą z formuł (10) i drugą z formuł (11)]

$$2 A_1 \kappa^2 = 0.00443 \quad A_3 \kappa^3 = 0.00068,$$

widzimy, że

$$2 A_1 v \delta \sigma < 0.0000004 \quad v^3 \delta A_3 < 0.0000005,$$

t. j. oba wyrazy razem wynoszą mniej niż 0.0000019. Różnica między $\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}$ a $\left(\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}\right)^*$ jest więc dla nas zaniedbywalna.

Prawą stronę pierwszego zaś równania (33) możemy również zidentyfikować z prawą stroną pierwszego równania (31); jakoż, $A_1 \sigma^2$ różni się od $A_1 \sigma^{*2}$ mniej niż o 0.0000004, $3 A_2 v^2$ od $3 A_2' v^2$ mniej niż o 0.000018, $3 A_3 v^2 \sigma$ od $3 A_3' v^2 \sigma^*$ mniej niż o 0.000002, a różnice w pozostałych wyrazach nie dochodzą do $\frac{1}{10000000}$; tymczasem nawet różnica o $\frac{1}{10000}$ w mianowniku (30) lub (32) nie wytworzyłaby jeszcze w γ zmiany o więcej niż około 0.00011.

Tym sposobem otrzymujemy ostatecznie, jako wystarczające przybliżenie, związek

$$\underline{\operatorname{tg} \gamma^* - \operatorname{tg} \gamma = \lambda^* \sin \varphi^* - \lambda \sin \varphi},$$

czyli inaczej

$$(34) \quad \operatorname{tg} \gamma^* - \operatorname{tg} \gamma = u^* \frac{\sin \varphi^*}{P^*} - u \frac{\sin \varphi}{P},$$

gdzie P oznacza promień równoleżnika elipsoidy w szerokości φ , a P^* promień równoleżnika kuli w szerokości φ^* .

Wyraźmy teraz $\frac{\sin \varphi}{P}$ przez s , i $\frac{\sin \varphi^*}{P^*}$ przez s^* . Jest *)

$$(35) \quad \lambda \sin \varphi = u \frac{\sin \varphi}{P} = \frac{u}{N_0} t_0 + \frac{us}{N_0^2} (1 + t_0^2 + \zeta_0) + \frac{us^2}{N_0^3} t_0 (1 + t_0^2 - \zeta_0 - 2\zeta_0^2) + \dots,$$

gdzie $\zeta_0 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi_0$ (=ok. $\frac{1}{390}$); przytem, jak wiadomo, $N_0 = R_0 (1 + \zeta_0)^{\frac{1}{2}}$, tak iż

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{1}{N_0} = \frac{1}{R_0} (1 - \frac{1}{2} \zeta_0 + \frac{3}{8} \zeta_0^2 - \frac{5}{16} \zeta_0^3 + \dots) \\ \frac{1}{N_0^2} = \frac{1}{R_0^2} (1 - \zeta_0 + \zeta_0^2 - \zeta_0^3 + \dots) \\ \frac{1}{N_0^3} = \frac{1}{R_0^3} (1 - \frac{3}{2} \zeta_0 + \frac{15}{8} \zeta_0^2 - \frac{35}{16} \zeta_0^3 + \dots) \end{cases}$$

W (35) ostatni wyraz jest w przybliżeniu $= \frac{\eta \zeta_0^2}{\rho_0^3} t_0 (1 + t_0^2)$; a ponieważ $t_0 (1 + t_0^2) =$ ok. 3.4 (w przyjęciu $\varphi_0 = 52^\circ$), czynnik zaś $\frac{\eta \zeta_0^2}{\rho_0^3}$ osiąga na wspomnianem wyżej kole największą swą wartość bezwzględną przy $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}$ ($\alpha = 35^\circ 16'$, $\sin \alpha \cos^2 \alpha = 0.385$), przeto wyraz ten jest w naszym obszarze mniejszy co do wartości bezwzględnej od liczby wynoszącej około $0.385 \left(\frac{x}{\rho_0}\right)^3 \cdot 3.4$ t. j. 0.001 088, czyli około 224". Wobec tego możemy w nawiasie tego wyrazu opuścić składnik $-2\zeta_0^2$ wobec $1 + t_0^2$. Podstawiając (36) w (35) otrzymujemy

$$\lambda \sin \varphi = \frac{u}{R_0} t_0 (1 - \frac{1}{2} \zeta_0 + \frac{3}{8} \zeta_0^2 - \frac{5}{16} \zeta_0^3) + \frac{us}{R_0^2} (1 + t_0^2 + \zeta_0) (1 - \zeta_0 + \zeta_0^2) + \frac{us^2}{R_0^3} t_0 (1 + t_0^2 - \zeta_0) (1 - \frac{3}{2} \zeta_0)$$

czyli

$$(37) \quad \lambda \sin \varphi = \frac{u}{R_0} t_0 (1 - \frac{1}{2} \zeta_0 + \frac{3}{8} \zeta_0^2) + \frac{us}{R_0^2} (1 + t_0^2 - \zeta_0 t_0^2) + \frac{us^2}{R_0^3} t_0 (1 + t_0^2 - \frac{5}{2} \zeta_0 - \frac{3}{2} \zeta_0 t_0^2).$$

Opuściliśmy w pierwszym wyrazie składnik jego $-\frac{5}{16} \zeta_0^3 t_0 \frac{u}{R_0}$, gdyż nie sprawia to w $\lambda \sin \varphi$ błędu większego niż 0.000 13, a w drugim wyrazie składnik $\zeta_0 t_0^2 \frac{us}{R_0^2}$, co nie sprawia błędu większego niż 0.01. Ponieważ w ostatnim nawiasie suma dwu ostatnich składników wynosi $-4.96 \zeta_0$, można zamiast ostatniego wyrazu prawej strony napisać prościej: $\frac{us^2}{R_0^3} t_0 (1 + t_0^2 - 5 \zeta_0)$. **)

*) Por. artykuł mój „O odwzorowaniach płaskich wiernokątnych...“ (komunikat pierwszy) *Czasop. Techn.*, Lwów, 1928, formuły (5) i (22).

**) To zastąpienie, jakkolwiek tu wyprowadzone z założenia $\varphi_0 = 52^\circ$, nie wytworzy, zresztą, żadnego dla nas w rachubę wchodzącego błędu w konwergencji nawet i w razie, gdyby szerokość punktu centralnego różniła się od 52° o kilka stopni.

Mamy więc

$$\lambda \sin \varphi = \frac{u}{R_0} t_0 F + \frac{us}{R_0^2} G + \frac{us^2}{R_0^3} t_0 H,$$

i analogicznie

$$\lambda^* \sin \varphi^* = \frac{u^*}{R_0} t_0 F^* + \frac{u^* s^*}{R_0^2} G^* + \frac{u^* s^{*2}}{R_0^3} t_0 H^*,$$

oznaczając przez F, G, H wyrażenia w trzech kolejnych nawiasach w (37), a przez F^*, G^*, H^* wyrażenia jakie z nich powstają przez zastąpienie ζ_0 przez ζ_0^* (t. j. przez 0). Zapamiętajmy, że F jest bliskie jedności, $F^* = 1$; G i H są bliskie $1 + t_0^2$ t. j. około 2·64, G^* i H^* są $= 1 + t_0^2$.

Tworząc różnicę obu pierwszych wyrazów stron prawych, mamy

$$(38) \quad t_0 \left(\frac{u^*}{R_0} - \frac{u}{R_0} F \right) = t_0 \left[\frac{u^*}{R_0} (1 - F) + F \frac{\delta u}{R_0} \right];$$

lecz, jak widzieliśmy [równ. (29)], $\frac{\delta u}{R_0}$ jest dla konwergencji zaniedbywalne; zatem pozostaje tylko wyraz $t_0 \frac{u^*}{R_0} (1 - F)$. Jest $1 - F = \frac{1}{2} \zeta_0 - \frac{3}{8} \zeta_0^2$; więc mamy

$$(39) \quad t_0 \left(\frac{u^*}{R_0} - \frac{u}{R_0} F \right) = \frac{u^*}{R_0} \cdot \frac{t_0}{2} (\zeta_0 - \frac{3}{4} \zeta_0^2).$$

Różnicę drugich wyrazów utworzymy na wzór tożsamości

$$a'b' - ab = b'\delta a + a'\delta b - \delta a \delta b. \quad (\delta a = a' - a, \delta b = b' - b)$$

Będziemy mieli, przy uwzględnieniu że $\frac{\delta u}{R_0}$ jest zaniedbywalne,

$$\frac{u^*}{R_0} \cdot \frac{s^*}{R_0} G^* - \frac{u}{R_0} \cdot \frac{s}{R_0} G = \frac{u^*}{R_0} \delta \left(\frac{s}{R_0} G \right)$$

t. j.

$$\frac{u^* s^*}{R_0^2} G^* - \frac{us}{R_0^2} G = \frac{u^*}{R_0} \left(G^* \frac{\delta s}{R_0} + \frac{s^*}{R_0} \delta G - \frac{\delta s}{R_0} \delta G \right);$$

ponieważ $\frac{u^*}{R_0} < \frac{1}{10 \cdot 6}$ t. j. około 19460'', a $\frac{\delta s}{R_0} < \frac{1}{127 \cdot 600}$, można w nawiasie pierwszy i (tembardziej) ostatni składnik opuścić, i napisać

$$\frac{u^* s^*}{R_0^2} G^* - \frac{us}{R_0^2} G = \frac{u^* s^*}{R_0^2} \delta G$$

czyli

$$(40) \quad \frac{u^* s^*}{R_0^2} G^* - \frac{us}{R_0^2} G = \frac{u^* s^*}{R_0^2} \zeta_0 t_0^2.$$

Nakoniec

$$t_0 \left(\frac{u^*}{R_0} \frac{s^{*2}}{R_0^2} H^* - \frac{u}{R_0} \frac{s^2}{R_0^2} H \right) = t_0 \cdot \frac{u^*}{R_0} \delta \left(\frac{s^2}{R_0^2} H \right) = t_0 \frac{u^*}{R_0} \left[H^* \delta \left(\frac{s^2}{R_0^2} \right) + \left(\frac{s^*}{R_0} \right)^2 \delta H - \delta \left(\frac{s^2}{R_0^2} \right) \delta H \right];$$

ponieważ $\delta \left(\frac{s^2}{R_0^2} \right) =$ w przybliżeniu $2 \frac{s}{R_0} \frac{\delta s}{R_0}$ t. j. maksymalnie około $\frac{1}{678 \cdot 600}$, odpadają znów dla naszego celu składniki w nawiasie pierwszy i ostatni, i mamy

$$(41) \quad t_0 \left(\frac{u^* s^{*2}}{R_0^3} H^* - \frac{us^2}{R_0^3} H \right) = \frac{u^*}{R_0} \left(\frac{s^*}{R_0} \right)^2 \cdot 5 \zeta_0 t_0.$$

Zbierając wreszcie razem (39), (40), i (41), otrzymujemy

$$(42) \quad \operatorname{tg} \gamma^* - \operatorname{tg} \gamma = \frac{u^*}{2R_0} \zeta_0 t_0 \left[\left(1 - \frac{3}{4} \zeta_0 \right) + 2 \frac{s^*}{R_0} t_0 + 10 \left(\frac{s^*}{R_0} \right)^2 \right].$$

Pozostaje teraz wprowadzić tu, zamiast spólrzędnych łukowych s^* , u^* , spólrzędne prostokątne płaskie x , y .

Otóż, możemy przedewszystkiem zamiast u^* wprost wstawić y . Albowiem, jest [na mocy pierwszego z równań (23*)] w przybliżeniu

$$v^* - \eta = -C_1 \eta \xi^2 + C_2 \eta^3;$$

największa na wspomnianem wyżej kole wartość bezwzględna tego wyrażenia występuje przy $\cos^2 \alpha = 0$ i wynosi około 1000; zatem błąd powstający na prawej stronie (42) przez podstawienie y zamiast u^* wyniesie co najwięcej około $\frac{1000}{2\rho_0} \zeta_0 t_0$ t. j. około $\frac{1}{3882000}$ cz. 0'05. Równanie (42) przechodzi więc na

$$\operatorname{tg} \gamma^* - \operatorname{tg} \gamma = \frac{\eta}{2\rho_0} \zeta_0 t_0 \left[\left(1 - \frac{3}{4} \zeta_0\right) + 2 \frac{\sigma^*}{\rho_0} t_0 + 10 \left(\frac{\sigma^*}{\rho_0}\right)^2 \right].$$

Zastąpienie w tem ostatniem równaniu wyrazu $\frac{\eta}{2\rho_0} \zeta_0 t_0 \cdot 2 \frac{\sigma^*}{\rho_0} t_0$ przez $\frac{\eta \xi}{\rho_0^2} \zeta_0 t_0^2$ zmieniloby wartość prawej strony równania [według drugiego z równań (23*)] w przybliżeniu o $\frac{D_1 \eta^3}{\rho_0^3} \zeta_0 t_0^2$, co wynosi w najgorszym razie około $2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}$; ponieważ jestto już wielkość porównywalna z 1'' (jest bowiem = 0'45), nie wykonywamy tu tego podstawienia ($\sigma^* = \xi$), lecz podstawiamy dokładniej $\sigma^* = \xi - D_1 \eta^2$ czyli $\sigma^* = \xi - \frac{t_0}{2\rho_0} \eta^2$, przez co błąd zredukuje się do zaledwie kilku setnych sekundy. Wreszcie, co do ostatniego wyrazu: $\frac{\eta}{\rho_0} \zeta_0 t_0 \cdot 5 \left(\frac{\sigma^*}{\rho_0}\right)^2$, to podstawienie w nim $\sigma^* = \xi$ zmienia jego wartość w przybliżeniu o $10 \frac{\eta \xi}{\rho_0^3} \zeta_0 t_0 \cdot D_1 \eta^2$, co na wspomnianem wyżej kole osiąga swą największą wartość przy $\operatorname{tg}^2 \alpha = 3$ ($\sin^3 \alpha \cos \alpha = 0.325$) i wynosi wtedy $5 \cdot 26 \cdot 10^{-7}$ czyli niespełna 0'11; podstawienie to jest więc dopuszczalne.

Otrzymujemy tedy ostatecznie

$$(43) \quad \operatorname{tg} \gamma^* - \operatorname{tg} \gamma = \frac{\eta}{2\rho_0} \zeta_0 t_0 \left[\left(1 - \frac{3}{4} \zeta_0\right) + 2 \frac{\xi}{\rho_0} t_0 + 10 \left(\frac{\xi}{\rho_0}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\rho_0}\right)^2 t_0^2 \right].$$

Z równania tego widać, że $\operatorname{tg} \gamma^* - \operatorname{tg} \gamma$, a więc także i $\gamma^* - \gamma$, w uważanym przez nas obszarze nie przekracza około $\frac{1}{6500}$ (około 32'').

Z formuły tej wyprowadzimy nakoniec jeszcze formułę na $\gamma - \gamma^*$. Mamy, przez rozwinięcie $\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma^*$ według wzoru Taylora

$$(\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma^*) \cos^2 \gamma^* = (\gamma - \gamma^*) + (\gamma - \gamma^*)^2 \operatorname{tg} \gamma^* + \dots;$$

ostatni wypisany wyraz jest dla nas już bez znaczenia, wobec tego że $(\gamma - \gamma^*)^2$ wynosi co najwięcej około $\frac{1}{42000000}$ t. j. około 0'005 a $\operatorname{tg} \gamma^* < \frac{1}{8}$: na lewej stronie zaś można czynnik $\cos^2 \gamma^*$ zastąpić przez $1 - \frac{1}{2} \gamma^{*2}$ (γ^* wynosi co najwięcej około 7'4 t. j. niespełna $\frac{1}{8}$), czyli, z dostateczną ścisłością, przez $1 - \frac{1}{2} (\lambda \sin \varphi_0)^2 = 1 - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\rho_0^2} t_0^2$; i otrzymamy tedy ostatecznie

$$(44) \quad \gamma - \gamma^* = -\frac{\eta}{2\rho_0} \zeta_0 t_0 \left[\left(1 - \frac{3}{4} \zeta_0\right) + 2 \frac{\xi}{\rho_0} t_0 + 10 \left(\frac{\xi}{\rho_0}\right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta}{\rho_0}\right)^2 t_0^2 \right].$$

W szczególności dla elipsoidy Bessela i przyjęcia $\varphi_0 = 52^\circ$ będzie

$$(44') \quad \frac{\gamma - \gamma^*}{1''} = -\eta \left([5.7208] + [11.325] \xi + [17.11] \xi^2 - [18.50] \eta^2 \right),$$

gdzie $\frac{\gamma - \gamma^*}{1''}$ oznacza oczywiście stosunek kąta $\gamma - \gamma^*$ do jednej sekundy; η i ξ oznaczają, jak wyżej powiedzieliśmy, stosunki rzędnej y i odciętej x do metra (t. j. są skróceniami zamiast $\frac{y}{1 \text{ m.}}$, $\frac{x}{1 \text{ m.}}$).

[Jeśli błąd o kilka sekund nie szkodzi, można oba ostatnie składniki wyrażenia w nawiasie pominąć.]

Uwaga. Jeśli chodzi o obliczenie konwergencji południkowej w odwzorowaniu Roussilhe'owskim z danych λ i φ punktu, wartość jej jest oczywiście niezależna od tego, czy mamy na myśli odwzorowanie skurczone, czy też nieskurczone. Gdy jednak, jak w niniejszym paragrafie założyliśmy, mamy obliczyć konwergencję z danych spólrzędnych prostokątnych punktu w odwzorowaniu, to oczywiście należałoby podane nam wartości ξ i η , jeśli odnoszą się one do odwzorowania skurczonego, przed podstawieniem ich do powyższej formuły napowrót odpowiednio powiększyć. Jeśli więc skurczenie było np. o 0.05%, to należałoby je podzielić przez 0.9995 (w praktyce: dodać do nich jedną 2-tysięczną część ich wartości). Wszelako zmiana taka nie zmieniałaby wartości $\gamma - \gamma^*$ o więcej jak 0.02, jest więc co do $\gamma - \gamma^*$ bez praktycznego dla nas znaczenia. — Natomiast gdy chodzi o obliczanie samego γ^* (o czym będzie mowa w następnym paragrafie), powinna być dokonana.

Następująca tabelka, obliczona przez p. W. Szpunara według formuły (44'), podaje wartości różnicy $\gamma - \gamma^*$ dla różnych wartości x i y . Wartości $\gamma - \gamma^*$ są podane do dziesiątych części sekundy, które jednak, jak wynika z wprowadzonych przy wywodzie owej formuły przybliżeń, nie mają realnego znaczenia; są one zachowane tylko dlatego, aby przez zaokrąglanie do całkowitych sekund nie powiększać jeszcze tkwiących w owych wartościach niedokładności. Liczby ujęte w nawiasy należą do punktów leżących już poza przyjętem przez nas kołem.

$$\gamma - \gamma^*$$

$x \backslash y$	-600 Km.	-500 Km.	-400 Km.	-300 Km.	-200 Km.	-100 Km.	0	+100 Km.	+200 Km.	+300 Km.	+400 Km.	+500 Km.	+600 Km.
0 Km.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
+100 „	(-4.4)	-4.5	-4.6	-4.7	-4.9	-5.1	-5.3	-5.5	-5.7	-6.0	-6.3	-6.6	(-7.0)
+200 „	(-8.8)	-9.0	-9.2	-9.5	-9.8	-10.1	-10.5	-10.9	-11.4	-12.0	-12.6	-13.2	(-13.9)
+300 „	(-13.2)	-13.5	-13.8	-14.1	-14.6	-15.1	-15.7	-16.4	-17.1	-17.9	-18.8	-19.8	(-20.8)
+400 „	—	(-17.9)	-18.3	-18.8	-19.4	-20.0	-20.8	-21.7	-22.7	-23.8	-25.0	(-26.3)	—
+500 „	—	—	(-22.7)	-23.3	-24.1	-24.9	-25.9	-27.0	-28.3	-29.6	(-31.1)	—	—
+600 „	—	—	—	(-27.8)	(-28.7)	(-29.7)	-30.9	(-32.2)	(-33.7)	(-35.3)	—	—	—

W przypadku ujemnych y należy wchodzić do tej tablicy argumentem $|y|$, i u wartości $\gamma - \gamma^*$ powyższej z tablicy zmienić znak na przeciwny. Zawsze γ jest co do bezwzględnej wartości mniejsze od γ^* .

6.

Sprowadziwszy w ten sposób zadanie do analogicznego zadania w przypadku kuli, zajmiemy się teraz tem ostatniem zadaniem.

Dla rzutu stereograficznego (ukośnego) kuli łatwo jest wyprowadzić, do obliczenia konwergencji południkowej γ z danych spólrzędnych prostokątnych płaskich x i y , formułę zupełnie ścisłą. Oznaczajmy promień kuli przez R , szerokość geograficzną punktu O kuli obranego na punkt centralny odwzorowania przez φ_0 , dopełnienie jej przez ν_0 , i południk tego punktu przyjmijmy za południk $\lambda=0$. Wyobraźmy sobie iż utworzono rzut stereograficzny punktów kuli na styczną do niej w punkcie O płaszczyznę, — w której też przyjmijmy ten punkt za początek układu spólrzędnych prostokątnych xy a obraz jego południka za oś x -ów.

Jeśli B' i C' są obrazami biegunów północnego B i południowego C kuli, A' obrazem punktu A , obraz południka punktu A będzie kołem $C'A'B'$. Środek tego koła nazwijmy Q , środek cięciwy $C'B'$ nazwijmy M , a rzut punktu A' na oś x -ów oznaczmy przez F ; i położmy

$$\operatorname{tg} \frac{\nu_0}{2} = T,$$

$$QM = a, \quad MF = b, \quad MB' = c.$$

Promień koła oznaczmy przez r .

Z prawa geometrycznego tworzenia rzutu stereograficznego wynika, że jest

$$OB' = 2R \operatorname{tg} \frac{\nu_0}{2}, \quad OC' = 2R \operatorname{ctg} \frac{\nu_0}{2};$$

a zatem mamy

$$c = R \left(T + \frac{1}{T} \right).$$

Dalej

$$(45) \quad b = c - FB' = c - (2RT - x) = \\ = R \left(\frac{1}{T} - T \right) + x.$$

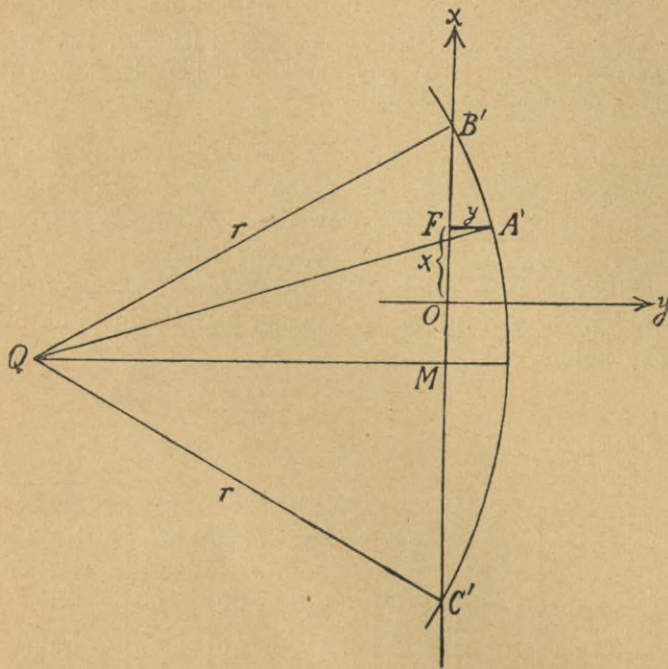
Wreszcie, z trójkąta QMB' i z trójkąta między wierzchołkami Q , A' i rzutem punktu A' na prostą QM , mamy dwa równania

$$a^2 + c^2 = r^2$$

$$a^2 + 2ay + y^2 + b^2 = r^2,$$

z których rugując r , otrzymujemy równanie

$$2ay = (c^2 - b^2) - y^2,$$



czyli, wstawiając za c i b wartości powyższe, równanie

$$(46) \quad 2ay = 4R^2 - 2R\left(\frac{1}{T} - T\right)x - x^2 - y^2 = 4R^2 - 4Rx \operatorname{tg} \varphi_0 - x^2 - y^2,$$

które wyznacza a .

Konwergencja południkowa γ w punkcie A' jest równa kątowi MQA' ; mamy więc, z trójkąta między wierzchołkami Q , A' i rzutem punktu A' na prostą QM ,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{a + y}.$$

Mnożąc licznik i mianownik przez y i wstawiając następnie w mianowniku za ay wartość z (46), a w liczniku za b wartość (45) t. j. $2R \operatorname{tg} \varphi_0 + x$, otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \gamma = y \frac{2R \operatorname{tg} \varphi_0 + x}{2R^2 - 2Rx \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}.$$

Oznaczając

$$\frac{x}{R} \text{ przez } X, \quad \frac{y}{R} \text{ przez } Y,$$

możemy to napisać ostatecznie tak:

$$(47) \quad \operatorname{tg} \gamma = Y \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}X \operatorname{ctg} \varphi_0}{1 - X \operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{1}{4}(Y^2 - X^2)}.$$

Formuła ta wydaje się napozór nieporęczną do rachunku logarytmicznego. Jednak, gdy obliczymy sobie logarytmy trzech wielkości

$$X \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{2}, \quad X \operatorname{tg} \varphi_0, \quad \frac{1}{4}(Y^2 - X^2) = \frac{1}{4}(X + Y)(Y - X),$$

można dla czynnika po kropce w (47) obliczać dość wygodnie logarytm licznika i logarytm mianownika przy użyciu tablic logarytmów addycyjnych i subtrakcyjnych.

7.

Następująca tabela podaje, dla różnych wartości x i y , różnicę

$$\gamma - (\gamma)$$

(zaokrągloną do całkowitych sekund), gdzie (γ) oznacza kąt obliczany według formuły

$$(\gamma) = Y \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Jako szerokość geograficzną punktu centralnego dla odwzorowania kuli przyjęto przytem $\varphi_0 = 52^\circ$, a jako promień kuli przyjęto wartość średniego promienia krzywizny elipsoidy Bessela w tejże szerokości. Kąt (γ) obliczano więc według formuły

$$(48) \quad \frac{(\gamma)}{1''} = [2.61662] \frac{y}{1 \text{ mtr.}}$$

Rachunek tej tablicy wykonał również p. W. Szpunar. Obliczano γ i (γ) bezpośrednio według formuł (47) i (48) dla x i y będących wielokrotnościami stu kilometrów, a to do dwóch miejsc dziesiętnych sekundy; otrzymaną tabelkę wartości $\gamma - (\gamma)$ zagęszczono następnie w kierunku y -ów przez interpolację z uwzględnieniem różnic tablicowych wyższych rzędów, rachując i tu również na dwa miejsca dziesiętne sekundy. Nakoniec dopiero zaokrąglono wyniki do całkowitych sekund.

$$\gamma - (\gamma')$$

$y \backslash x$	-600 Km.	-500 Km.	-400 Km.	-300 Km.	-200 Km.	-100 Km.	0
0 Km.	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''
10	- 0 57	- 0 49	- 0 40	- 0 30	- 0 21	- 0 11	-0 0
20	- 1 55	- 1 37	- 1 20	- 1 1	- 0 41	- 0 21	-0 0
30	- 2 52	- 2 26	- 1 59	- 1 31	- 1 2	- 0 32	-0 0
40	- 3 49	- 3 15	- 2 39	- 2 2	- 1 23	- 0 42	-0 0
50	- 4 46	- 4 4	- 3 19	- 2 32	- 1 44	- 0 53	-0 0
60	- 5 44	- 4 52	- 3 59	- 3 3	- 2 5	- 1 4	-0 0
70	- 6 41	- 5 41	- 4 38	- 3 33	- 2 25	- 1 14	-0 0
80	- 7 39	- 6 30	- 5 18	- 4 4	- 2 46	- 1 25	-0 0
90	- 8 36	- 7 19	- 5 58	- 4 34	- 3 7	- 1 36	-0 1
100	- 9 33	- 8 8	- 6 38	- 5 5	- 3 28	- 1 47	-0 1
110	-10 31	- 8 56	- 7 18	- 5 36	- 3 49	- 1 57	-0 1
120	-11 28	- 9 45	- 7 58	- 6 6	- 4 10	- 2 8	-0 1
130	-12 26	-10 34	- 8 38	- 6 37	- 4 31	- 2 19	-0 2
140	-13 23	-11 23	- 9 18	- 7 8	- 4 52	- 2 30	-0 2
150	-14 21	-12 12	- 9 58	- 7 39	- 5 13	- 2 41	-0 3
160	-15 19	-13 1	-10 39	- 8 10	- 5 35	- 2 53	-0 3
170	-16 16	-13 51	-11 19	- 8 41	- 5 56	- 3 4	-0 4
180	-17 14	-14 40	-11 59	- 9 12	- 6 17	- 3 15	-0 5
190	-18 12	-15 29	-12 40	- 9 43	- 6 39	- 3 26	-0 5
200	-19 10	-16 19	-13 20	-10 14	- 7 0	- 3 38	-0 6
210	-20 8	-17 8	-14 1	-10 45	- 7 22	- 3 49	-0 7
220	-21 6	-17 57	-14 41	-11 17	- 7 43	- 4 1	-0 9
230	-22 4	-18 47	-15 22	-11 48	- 8 5	- 4 13	-0 10
240	-23 2	-19 37	-16 3	-12 20	- 8 27	- 4 25	-0 11
250	-24 1	-20 26	-16 43	-12 51	- 8 49	- 4 37	-0 13
260	-24 59	-21 16	-17 24	-13 23	- 9 11	- 4 49	-0 14
270	-25 57	-22 6	-18 6	-13 55	- 9 33	- 5 1	-0 16
280	-26 56	-22 56	-18 47	-14 27	- 9 56	- 5 13	-0 18
290	-27 54	-23 46	-19 28	-14 59	-10 18	- 5 25	-0 20
300	-28 53	-24 36	-20 9	-15 31	-10 41	- 5 38	-0 22
310	-29 52	-25 27	-20 51	-16 3	-11 4	- 5 51	-0 24
320	-30 51	-26 17	-21 33	-16 36	-11 26	- 6 4	-0 26
330	-31 50	-27 8	-22 14	-17 8	-11 49	- 6 17	-0 29
340	-32 49	-27 58	-22 56	-17 41	-12 12	- 6 30	-0 32
350	-33 48	-28 49	-23 38	-18 14	-12 36	- 6 43	-0 35
360	-34 48	-29 40	-24 20	-18 47	-12 59	- 6 56	-0 38
370	-35 47	-30 31	-25 2	-19 20	-13 23	- 7 10	-0 41
380	-36 47	-31 22	-25 45	-19 53	-13 46	- 7 24	-0 44
390	-37 46	-32 14	-26 27	-20 26	-14 10	- 7 38	-0 48
400	-38 46	-33 5	-27 10	-21 0	-14 34	- 7 52	-0 51
410	-39 46	-33 56	-27 52	-21 33	-14 58	- 8 6	-0 55
420	-40 46	-34 48	-28 35	-22 7	-15 23	- 8 20	-1 0
430	-41 47	-35 40	-29 19	-22 41	-15 47	- 8 35	-1 4
440	-42 47	-36 32	-30 2	-23 15	-16 12	- 8 50	-1 8
450	-43 48	-37 24	-30 45	-23 50	-16 37	- 9 5	-1 13
460	-44 48	-38 16	-31 29	-24 24	-17 2	- 9 20	-1 18
470	-45 49	-39 9	-32 13	-24 59	-17 27	- 9 36	-1 23
480	-46 50	-40 1	-32 56	-25 34	-17 53	- 9 51	-1 29
490	-47 51	-40 54	-33 41	-26 9	-18 18	-10 7	-1 34
500	-48 52	-41 47	-34 25	-26 44	-18 44	-10 23	-1 40
510	-49 54	-42 40	-35 9	-27 20	-19 10	-10 40	-1 46
520	-50 55	-43 34	-35 54	-27 55	-19 36	-10 56	-1 53
530	-51 57	-44 27	-36 39	-28 31	-20 3	-11 13	-1 59
540	-52 59	-45 21	-37 24	-29 7	-20 30	-11 30	-2 6
550	-54 1	-46 15	-38 9	-29 43	-20 57	-11 47	-2 13
560	-55 4	-47 9	-38 54	-30 20	-21 24	-12 4	-2 21
570	-56 6	-48 3	-39 40	-30 57	-21 51	-12 22	-2 28
580	-57 9	-48 57	-40 26	-31 34	-22 19	-12 40	-2 36
590	-58 12	-49 52	-41 12	-32 11	-22 47	-12 58	-2 44
600	-59 15	-50 47	-41 58	-32 48	-23 15	-13 17	-2 53


$$\gamma - (\gamma)$$

$y \backslash x$	0	+100 Km.	+200 Km.	+300 Km.	+400 Km.	+500 Km.	+600 Km.
0 Km.	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''
10	-0 0	+0 11	+ 0 23	+ 0 35	+ 0 48	+ 1 1	+ 1 15
20	-0 0	+0 22	+ 0 45	+ 1 10	+ 1 35	+ 2 2	+ 2 30
30	-0 0	+0 33	+ 1 8	+ 1 44	+ 2 23	+ 3 3	+ 3 45
40	-0 0	+0 44	+ 1 31	+ 2 19	+ 3 10	+ 4 4	+ 5 0
50	-0 0	+0 55	+ 1 53	+ 2 54	+ 3 58	+ 5 5	+ 6 15
60	-0 0	+1 6	+ 2 16	+ 3 29	+ 4 45	+ 6 6	+ 7 30
70	-0 0	+1 17	+ 2 38	+ 4 3	+ 5 33	+ 7 6	+ 8 45
80	-0 0	+1 28	+ 3 1	+ 4 38	+ 6 20	+ 8 7	+10 0
90	-0 1	+1 39	+ 3 23	+ 5 13	+ 7 7	+ 9 8	+11 15
100	-0 1	+1 50	+ 3 46	+ 5 47	+ 7 55	+10 9	+12 29
110	-0 1	+2 1	+ 4 8	+ 6 22	+ 8 42	+11 9	+13 44
120	-0 1	+2 11	+ 4 30	+ 6 56	+ 9 29	+12 10	+14 59
130	-0 2	+2 22	+ 4 53	+ 7 31	+10 16	+13 10	+16 13
140	-0 2	+2 33	+ 5 15	+ 8 5	+11 3	+14 10	+17 28
150	-0 3	+2 43	+ 5 37	+ 8 39	+11 50	+15 11	+18 42
160	-0 3	+2 54	+ 5 59	+ 9 13	+12 37	+16 11	+19 56
170	-0 4	+3 4	+ 6 21	+ 9 47	+13 24	+17 11	+21 10
180	-0 5	+3 14	+ 6 43	+10 21	+14 10	+18 11	+22 24
190	-0 5	+3 24	+ 7 4	+10 55	+14 57	+19 11	+23 38
200	-0 6	+3 35	+ 7 26	+11 28	+15 43	+20 10	+24 51
210	-0 7	+3 45	+ 7 47	+12 2	+16 29	+21 10	+26 5
220	-0 9	+3 54	+ 8 9	+12 35	+17 15	+22 9	+27 18
230	-0 10	+4 4	+ 8 30	+13 9	+18 1	+23 8	+28 31
240	-0 11	+4 14	+ 8 51	+13 42	+18 47	+24 7	+29 44
250	-0 13	+4 23	+ 9 12	+14 15	+19 33	+25 6	+30 57
260	-0 14	+4 33	+ 9 33	+14 48	+20 18	+26 5	+32 10
270	-0 16	+4 42	+ 9 54	+15 21	+21 3	+27 4	+33 22
280	-0 18	+4 51	+10 14	+15 53	+21 49	+28 2	+34 35
290	-0 20	+5 0	+10 35	+16 26	+22 34	+29 0	+35 47
300	-0 22	+5 9	+10 55	+16 58	+23 18	+29 58	+36 58
310	-0 24	+5 18	+11 15	+17 30	+24 3	+30 56	+38 10
320	-0 26	+5 26	+11 35	+18 2	+24 47	+31 53	+39 21
330	-0 29	+5 34	+11 55	+18 33	+25 31	+32 51	+40 32
340	-0 32	+5 43	+12 14	+19 5	+26 15	+33 48	+41 43
350	-0 35	+5 51	+12 34	+19 36	+26 59	+34 45	+42 54
360	-0 38	+5 58	+12 53	+20 7	+27 43	+35 41	+44 4
370	-0 41	+6 6	+13 12	+20 38	+28 26	+36 38	+45 14
380	-0 44	+6 14	+13 31	+21 9	+29 9	+37 34	+46 24
390	-0 48	+6 21	+13 49	+21 39	+29 52	+38 30	+47 34
400	-0 51	+6 28	+14 8	+22 9	+30 35	+39 25	+48 43
410	-0 55	+6 35	+14 26	+22 39	+31 17	+40 20	+49 52
420	-1 0	+6 41	+14 44	+23 9	+31 59	+41 15	+51 1
430	-1 4	+6 48	+15 1	+23 38	+32 41	+42 10	+52 9
440	-1 8	+6 54	+15 19	+24 8	+33 22	+43 5	+53 17
450	-1 13	+7 0	+15 36	+24 37	+34 4	+43 59	+54 25
460	-1 18	+7 6	+15 53	+25 5	+34 45	+44 53	+55 32
470	-1 23	+7 11	+16 10	+25 34	+35 25	+45 46	+56 39
480	-1 29	+7 17	+16 26	+26 2	+36 6	+46 40	+57 46
490	-1 34	+7 22	+16 42	+26 30	+36 46	+47 32	+58 52
500	-1 40	+7 26	+16 58	+26 57	+37 25	+48 25	+59 58
510	-1 46	+7 31	+17 14	+27 25	+38 5	+49 17	+61 4
520	-1 53	+7 35	+17 29	+27 52	+38 44	+50 9	+62 9
530	-1 59	+7 39	+17 44	+28 18	+39 23	+51 1	+63 14
540	-2 6	+7 43	+17 59	+28 45	+40 1	+51 52	+64 19
550	-2 13	+7 46	+18 14	+29 11	+40 40	+52 43	+65 23
560	-2 21	+7 50	+18 28	+29 36	+41 17	+53 33	+66 26
570	-2 28	+7 53	+18 42	+30 2	+41 55	+54 23	+67 30
580	-2 36	+7 55	+18 55	+30 27	+42 32	+55 13	+68 33
590	-2 44	+7 58	+19 9	+30 52	+43 9	+56 2	+69 35
600	-2 53	+8 0	+19 22	+31 16	+43 45	+56 51	+70 37

Gdy dla danej pary wartości współrzędnych x, y chcemy znaleźć konwergencję południkową, można obliczyć najpierw dla danego y kąt pomocniczy (γ), za pomocą prostej formuły (48), a następnie do znalezienia kąta γ użyć powyższej tablicy. Interpolacja w niej w kierunku y -ów jest nader prosta i wygodna, dzięki bowiem gęstemu tabulowaniu wystarcza interpolacja linjowa. Interpolacja względem x wymaga uwzględnienia różnic tablicowych drugiego rzędu. Przez zaniedbanie ich mógłby powstać w $\gamma - (\gamma)$ (a przeto i w γ) błąd dochodzący w obrębie uważanego wyżej obszaru do niespełna 4'' (w obrębie ogarnionym tablicą do 5'').



POLITECHNIKA KRAKOWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA

 33962
L. Inw.

Kdn. 524. 13. IX. 54

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297933

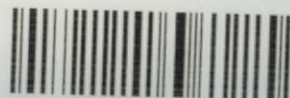
Z

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-33962

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297933