



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000275632

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA TOM I.

22.5

PODREĆCZNIK  
TEORYI MOSTÓW

BELKI PROSTE STATYCZNIE NIWYZNACZALNE.

Dla

inżynierów i słuchaczy szkół politechnicznych

z 92 rysunkami w tekście i 4 tablicami

opracował

**MAKSYMILIAN THULLIE,**

dyplomowany inżynier, profesor szkoły politechnicznej we Lwowie.

Wydany staraniem

Komisji wydawniczej Biblioteki politechnicznej.

---

Cena 4 zlr.

---

**LWÓW.**

NAKŁADEM AUTORA.

GŁÓWNY SKŁAD W KSIĘGARNI HOSCHEKA I SPÓŁKI.

I. Związkowa drukarnia we Lwowie.

1892.



I 341277

~~II - 338576~~

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

Akc. Nr. 39 / 48

~~III 15004~~

5-47/2014

## PRZEDMOWA.

Tom niniejszy Podręcznika teorii mostów jest ciągłem dalszym wydanego przed dwoma laty tomu I. części I. tegoż podręcznika. Tom ten zamyka część I. Podręcznika, traktującą o belkach prostych i obejmuje teorią belek ciągłych, belek kratowych statycznie niewyznaczalnych i nateżeń drugorzędnych.

Jak w poprzednim tomie starałem się, aby praca niniejsza stała się podręcznikiem nietylko dla mych słuchaczy, ale także i dla inżynierów wykonywujących, dlatego też umieściłem w nim to, co może być w praktyce przy obliczeniu mostów potrzebnem, ale zarazem tylko o tyle, o ile to jest potrzebnem. Z wielu sposobów n. p. wyznaczania nateżeń drugorzędnych podałem tu tylko jeden według mego zdania najprzystępniejszy. Przy teorii belki ciągłej podałem oprócz dokładnej teorii dla przekroju stałego sposób przybliżony Lebera, a inne sposoby dla przekroju zmiennego opisałem jak najkrócej.

Rozumie się, że w pracy niniejszej przypuszczałem znajomość prawideł statyki budowli i części teorii mostów, wyłożonej w pierwszym tomie: niejednokrotnie też powoływałem się na dawniej wydane przezemnie podręczniki tych nauk.

W układzie mej pracy trzymałem się zwłaszcza co do teorii belki ciągłej głównie dzieł prof. Winklera i rozumie się, korzystałem także z prac innych uczonych w tym przedmiocie. Dla dokładnego wyznaczenia nateżeń belki ciągłej i belek kratowych statycznie niewyznaczalnych, użyłem prawa Maxwella i Mohra, a nie korzystałem z prawa Castigliana, które jest zawilszem i bez którego przy użyciu prawa Mohra można się było wygodnie obejść. Trzymałem się bowiem zasady, że w podręczniku należy podawać tylko sposoby najłatwiejsze i najprzy-

stępniejsze, które jedynie mogą znaleźć w praktyce szersze zastosowanie. W dodatku pomieściłem zresztą spis dzieł i ważniejszych artykułów, traktujących odnośnie działy nauki dla tych, którzyby chcieli obszerniej te działy studyować.

Jak w poprzednich podręcznikach użyłem zamiast drzeworytów rycin, litografowanych w zakładzie tutejszym Przyszłaka, co wpłynęło na względne obniżenie ceny dzieła, a nie zmniejszyło zdaniem mojem zewnętrznej wartości dzieła.

Oddając tę moją pracę pod pobłażliwy sąd inżynierów, pospieszam wywiązać z miłego obowiązku podziękowania komisji wydawniczej Biblioteki politechnicznej, która zajęła się rozpisaniem przedpłaty i poparciem moralnem, Towarzystwu politechnicznemu we Lwowie, krakowskiemu Towarzystwu technicznemu i Szanownej Redakcyi Przeglądu Technicznego za łaskawe poparcie wydawnictwa i bezinteresowne zbieranie przedpłaty i asystentowi memu p. Edmundowi Libańskiemu za pomoc w części rysunkowej wydawnictwa.

Maksymilian Thullie.

We Lwowie w lipcu 1892.



# SPIS RZECZY.

	Str.
§. 1. Wstęp . . . . .	1

## A. Belka ciągła bezprzegubowa.

### I. Ogólne analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych belki ciągłej o ścianie pełnej i przekroju stałym.

§. 2. Ogólne uwagi . . . . .	1
§. 3. Belka pochyło utwierdzona . . . . .	2
§. 4. Belka poziomo utwierdzona . . . . .	4
§. 5. Momenty podporowe belki ciągłej o równo wysokich podporach . . . . .	6
§. 6. Momenty, siły poprzeczne i oddziaływania . . . . .	8
§. 7. Obciążenie zupełne jednostajnie rozłożone . . . . .	8
§. 8. Momenty podporowe w przęsłach nieobciążonych . . . . .	9
§. 9. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nieobciążonych . . . . .	11
§. 10. Momenty podporowe przęsła obciążonego . . . . .	13
§. 11. Obciążenie najniekorzystniejsze dla sił poprzecznych . . . . .	14
§. 12. Największe siły poprzeczne . . . . .	16
§. 13. Bezwzględnie największe i najmniejsze siły poprzeczne . . . . .	16
§. 14. Najniekorzystniejsze obciążenie dla momentów . . . . .	17
§. 15. Wyznaczenie największych momentów dla obciążenia ciągłego . . . . .	22
§. 16. Wielkość ciężaru jednostajnego ciągłego . . . . .	23

## II. Belka ciągła dwu- i trzyprzęsłowa.

§. 17. Momenty podporowe belki dwuprzęsłowej . . . . .	24
§. 18. Ciężar własny . . . . .	25
§. 19. Ciężar ruchomy . . . . .	26
§. 20. Momenty podporowe belki trzyprzęsłowej . . . . .	31
§. 21. Ciężar własny . . . . .	32
§. 22. Największe siły poprzeczne . . . . .	34
§. 23. Największe oddziaływania . . . . .	36
§. 24. Największe momenty . . . . .	36
§. 25. Przykład . . . . .	40

## VI

### III. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

	Str.
§. 26. Zasada . . . . .	45
§. 27. Najniekorzystniejsze obciążenia . . . . .	47
§. 28. Belka trzyprzęsłowa . . . . .	47
§. 29. Przykład . . . . .	49

### IV. Belka o nieskończonej ilości przęseł.

§. 30. Ogólne uwagi . . . . .	52
§. 31. Obciążenie zupełne jednostajne ciągle . . . . .	52
§. 32. Momenty podporowe dla obciążenia układem ciężarów skupionych . . . . .	54
§. 33. Największe momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych . . . . .	56
§. 34. Największe siły poprzeczne . . . . .	57
§. 35. Największe oddziaływania . . . . .	57

### V. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla przekroju stałego.

§. 36. Pierwszy wielobok sznurowy . . . . .	58
§. 37. Linia ugięcia . . . . .	59
§. 38. Wielobok ugięcia . . . . .	60
§. 39. Wyznaczenie momentów podporowych . . . . .	62
§. 40. Porównanie z belką poziomą obu końcami utwierdzoną . . . . .	63
§. 41. Przęsło nieobciążone . . . . .	65
§. 42. Dwa przęsła sąsiednie nieobciążone . . . . .	66
§. 43. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nie-obciążonych . . . . .	67
§. 44. Przęsło obciążone . . . . .	68
§. 45. Dwa sąsiednie przęsła obciążone . . . . .	69
§. 46. Dowolne obciążenie przęseł . . . . .	70
§. 47. Obciążenie jednostajne zupełne . . . . .	72
§. 48. Obciążenie jednostajne częściowe . . . . .	72
§. 49. Obciążenie jednym ciężarem skupionym . . . . .	73
§. 50. Linie wpływowe . . . . .	75
§. 51. Najniekorzystniejsze obciążenie dla sił poprzecznych i momentów . . . . .	77
§. 52. Największe siły zewnętrzne . . . . .	77

### VI. Obliczenie analityczne belki ciągłej o przekroju zmiennym.

§. 53. Belka pochyło utwierdzona . . . . .	80
§. 54. Wyznaczenie ilości pomocniczych . . . . .	81
§. 55. Wyznaczenie ilości $\mathfrak{R}$ i $\mathfrak{R}''$ . . . . .	82
§. 56. Momenty podporowe belki ciągłej . . . . .	83
§. 57. Punkty stałe . . . . .	83
§. 58. Przykład . . . . .	84

### VII. Obliczenie dokładne belki kratowej ciągłej o przekroju zmiennym.

§. 59. Dokładność rozmaitych sposobów obliczenia . . . . .	85
§. 60. Zasada dokładnego obliczenia . . . . .	86

## VII

	Str.
§. 61. Prawo pracy przygotowanej . . . . .	88
§. 62. Prawo Maxwella . . . . .	89
§. 63. Linia wpływową ugięcia . . . . .	90
§. 64. Linia wpływową oddziaływania belki dwuprzęsłowej . . . . .	91
§. 65. Linie wyływowe sił poprzecznych i momentów . . . . .	91

### VIII. Wpływ podpór.

§. 66. Ogólne uwagi . . . . .	92
§. 67. Momenty podporowe przy nierówno wysokich podporach . . . . .	93
§. 68. Wpływ zmiany wysokości jednej podpory . . . . .	93
§. 69. Najkorzystniejsza wysokość podpór . . . . .	94
§. 70. Belka dwu- i trzyprzęsłowa . . . . .	94
§. 71. Podwójne łożyska . . . . .	96
§. 72. Wpływ przytwierdzenia belek do filaru . . . . .	96

## B. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne i natężenia drugorzędne.

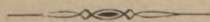
### IX. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

§. 73. Pręty nadliczbowe . . . . .	98
§. 74. Obliczenie sił wewnętrznych prętów nadliczbowych . . . . .	99
§. 75. Belka równoległa o kracie złożonej . . . . .	102
§. 76. Belka wieloboczna . . . . .	106
§. 77. Belka Howe'a . . . . .	106
§. 78. Belka ciągła . . . . .	107
§. 79. Wpływ zmiany ciepłoty . . . . .	107

### X. Natężenia drugorzędne.

§. 80. Określenie natężeń drugorzędnych . . . . .	107
§. 81. Zasada obliczenia natężeń drugorzędnych . . . . .	108
§. 82. Zmiana kątów w trójkącie . . . . .	109
§. 83. Kąt odchylenia osi prętów . . . . .	109
§. 84. Równanie momentów węzłowych . . . . .	110
§. 85. Wykreślne wyznaczenie momentów węzłowych . . . . .	111
§. 86. Wpływ mimośrodkowego utwierdzenia prętów . . . . .	114
§. 87. Wpływ przekroju prętów . . . . .	115
§. 88. Wpływ obciążenia . . . . .	115
§. 89. Wpływ ustroju belki . . . . .	116
§. 90. Połączenia przegibne . . . . .	116

Dodatek. Literatura . . . . .	118
-------------------------------	-----



## Sprostowanie omyłek drukarskich.

---

	zamiast	czytaj
Str. 4. wier. 2. z góry	$2 \varepsilon J$	$2 \varepsilon I$
„ 4. „ 3. „	$2 \varepsilon J$	$2 \varepsilon I$
„ 4. „ 6. „	$\frac{1}{6 \varepsilon \bar{J}}$	$\frac{1}{6 \varepsilon \bar{I}}$
„ 4. „ 7. „	$\frac{1}{6 \varepsilon \bar{J}}$	$\frac{1}{6 \varepsilon \bar{I}}$
„ 14. „ 9. „	$\nu_r M_r + M_{r-1} + \mathfrak{R}_r''$	$\nu_r M_r + M_{r-1} = \mathfrak{R}_r''$
„ 14. „ 12. „	$M_r = \frac{\mu \mathfrak{R}'' - \mathfrak{R}'}{\mu_r \nu_r - 1}$	$M_r = \frac{\mu_r \mathfrak{R}'' - \mathfrak{R}'}{\mu_r \nu_r - 1}$

---

## §. 1. Wstęp.

W pierwszym tomie Podręcznika teorii mostów podzieliśmy teorią belek prostych na siedm działów. Cztery pierwsze działy stanowiły tom pierwszy, w niniejszym tomie wyłożymy trzy ostatnie działy. Mówić będziemy mianowicie o belce ciąglej bezprzegubowej, o belkach kratowych statycznie niewyznaczalnych i o natężeniach drugorzędnych.

# A. Belka ciąгла bezprzegubowa.

## I. Ogólne analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych belki ciąglej o ściance pełnej i przekroju stałym.

### §. 2. Ogólne uwagi.

Mówiliśmy już w tomie I., że belkę prostą, spoczywającą na więcej niż dwu podporach, nazywamy belką ciąglą lub wieloprzęsłową (n. *continuirlicher Träger*, f. *poutre continue*, a. *continuous beam*). Mówiliśmy też, że oddziaływań podpór nie możemy tu wyznaczyć zapomocą prawideł statyki, lecz badamy odkształcenie belki, które zależne jest od obciążenia i stąd otrzymujemy równania, brakujące do wyznaczenia sił zewnętrznych.

Przy wyznaczeniu odkształcenia wchodzi jednak w rachubę przekrój, przed obliczeniem belki jeszcze nieznanym; stąd powstaje bardzo wielka trudność. Gdybyśmy chcieli wprowadzić w rachunek przekrój niewiadomy jako funkcją sił wewnętrznych, zadanie nie byłoby rozwiązalnem. Dlatego obliczamy belkę ciąglą najprzód w przybliżeniu, przyjmując przekrój stały. Na podstawie w ten sposób uzyskanych sił zewnętrznych obliczamy przekroje w poszczególnych punktach, a wtedy dopiero, znając w przybliżeniu przekroje, możemy przystąpić do dokładnego obliczenia belki.

W bieżącym rozdziale wyznaczmy więc siły zewnętrzne tylko dla przekroju stałego i to w sposób analityczny, odstępując w tym wypadku wyjątkowo od równoczesnego używania obu sposobów analitycznego i wykreslnego, gdyż w tym wypadku oba te sposoby znacznie się różnią.

W następnych rozdziałach uwzględnimy zmienność przekroju, w rozdziale tym trzymać się będziemy toku dowodzenia Winklera.

### §. 3. Belka pochyło utwierdzona.

Wiadomo ze statyki budowli\*), że równanie różniczkowe linii ugięcia, jest:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{\epsilon I}, \dots \dots \dots 1)$$

jeżeli  $M$  oznacza moment statyczny sił zewnętrznych,  $I$  moment bezwładności przekroju,  $\epsilon$  współczynnik sprężystości.

Jeżeli scałkujemy równanie 1), otrzymamy:

$$\epsilon I \frac{dy}{dx} = -\int_0^x M dx + C, \text{ więc}$$

dla  $x = 0$  (rys. 1.)  $\epsilon I \text{st } \alpha = \epsilon I \tau_1 = C$ , a dla

$$x = l \quad \epsilon I \text{st } \beta = \epsilon I \tau_2 = -\int_0^l M dx + C$$

jeżeli  $\tau_1 = \text{st } \alpha$  a  $\tau_2 = \text{st } \beta$ ,

$$\text{a stąd} \quad \epsilon I (\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l M dx \quad 2)$$

Scałkowawszy jeszcze raz, będziemy mieli

$$\epsilon I y = -\int \int M dx^2 + Cx + C_1.$$

Wyraz  $-\int \int M dx^2$  możemy częściowo scałkować i otrzymamy

$$\epsilon I y = -x \int M dx + \int Mx dx + Cx + C_1.$$

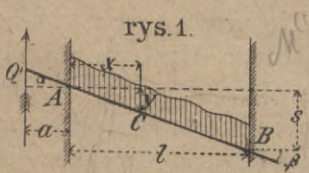
Jeżeli teraz za  $\int M dx$  wstawimy wartość, będziemy mieli

$$\epsilon I y = \epsilon I x \frac{dy}{dx} + \int Mx dx + C_1 \quad \dots \dots \dots 3)$$

Dla  $x=0$  jest  $y=0=C_1$ ,

dla  $x=l$  jest  $\epsilon I s = \epsilon I l \tau_2 + \int_0^l Mx dx$ ,

$$\text{więc} \quad \epsilon I (s - l \tau_2) = \int_0^l Mx dx \quad \dots \dots \dots 4)$$



\*) p. Podręcznik statyki budowli str. 137.

Nazwijmy  $X_0$  moment wypadkowej wszystkich ciężarów (bez oddziaływania) na długości  $AC$ ,  $M$  moment wszystkich sił zewnętrznych (z oddziaływaniem), po lewej stronie będących, ze względu na punkt  $C$ ,  $Q'$  siłę poprzeczną w  $A$ , a  $M'$  i  $M''$  momenty w punktach  $A$  i  $B$  na podporach, które nazywamy momentami podporowymi (*Stützenmoment, Normalmoment*), to

$$M' = Q'a, \quad M = Q'(a+x) + X_0 = M' + Q'x + X_0 \quad \dots \quad 5)$$

Dla punktu  $B$  będzie

$$M'' = M' + Q'l + X'' \quad \dots \quad 6)$$

Stąd otrzymamy  $Q' = \frac{M'' - M'}{l} - \frac{X''}{l}$ , a wstawivszy to w równanie 5.)

$$M = M' + \frac{M'' - M'}{l} x - \frac{X'' x}{l} + X_0$$

Dla belki w dwu punktach podpartej jest  $M' = M'' = 0$ , więc  $M = X_0 - \frac{X'' x}{l} = X$ , gdy  $X$  oznacza moment sił zewnętrznych dla belki w dwu punktach podpartej.

A więc możemy napisać  $M = \frac{M'(l-x) + M''x}{l} + X \quad 6a)$

Podstawivszy tę wartość w równanie 2), otrzymamy

$$\varepsilon I(\tau_1 + \tau_2) = \int_0^l \frac{M'(l-x) + M''x}{l} dx + \int_0^l X dx,$$

albo  $2\varepsilon I(\tau_1 - \tau_2) = (M' + M'')l + 2 \int_0^l X dx.$

Podstawivszy zaś wartość za  $M$  w równ. 4), otrzymamy

$$\varepsilon I(s - l\tau_2) = \int_0^l \frac{M'(l-x)x + M''x^2}{l} dx + \int_0^l X x dx,$$

a stąd  $6\varepsilon I(s - l\tau_2) = (M' + 2M'')l^2 + 6 \int_0^l X x dx.$

Rozwiązavszy te dwa równania ze względu na  $M'$  i  $M''$ , będziemy mieli

$$\left. \begin{aligned} M'l^2 &= 2 \int_0^l X(3x - 2l) dx + 2\varepsilon I(2l\tau_1 + l\tau_2 - 3s) \\ M''l^2 &= 2 \int_0^l X(l - 3x) dx - 2\varepsilon I(l\tau_1 + 2l\tau_2 - 3s) \end{aligned} \right\} \dots \quad 7)$$

Nazwijmy  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$  momenty na podporach belki poziomo utwierdzonej o tej samej rozpiętości i tak samo obciążonej, to  $s=0$ ,  $\alpha=\beta=0$ , więc  $\tau_1=\tau_2=0$ , a zatem według równ. 7) będzie

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}'l^2 &= 2 \int_0^l X(3x - 2l) dx \\ \mathfrak{M}''l^2 &= 2 \int_0^l X(l - 3x) dx \end{aligned} \right\} \dots \quad 8)$$

Możemy więc napisać

$$\left. \begin{aligned} M' &= \mathfrak{M}' + 2 \varepsilon \int \frac{l(2\tau_1 + \tau_2) - 3s}{l^2} \\ M'' &= \mathfrak{M}'' - 2 \varepsilon \int \frac{l(\tau_1 + 2\tau_2) - 3s}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots 9)$$

Z tych dwóch równań możemy wyznaczyć  $\tau_1$  i  $\tau_2$ , mianowicie otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= + \frac{1}{6 \varepsilon \int} (2M' + M'' - \mathfrak{M}') + \frac{s}{l} \\ \tau_2 &= - \frac{1}{6 \varepsilon \int} (M' + 2M'' - \mathfrak{M}'') + \frac{s}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots 10)$$

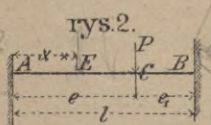
jeżeli dla skrócenia nazwiemy

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= 2 \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' \\ \mathfrak{M}'' &= \mathfrak{M}' + 2 \mathfrak{M}'' \end{aligned} \right\} \dots \dots 11)$$

#### §. 4. Belka poziomo utwierdzona.

Momenty  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$  dla belki poziomo utwierdzonej możemy dla danego obciążenia obliczyć według równan. 8). Zbadamy tu kilka przypadków.

a) Obciążenie jednym ciężarem skupionym. Tu musimy rozdzielić całkę naznaczoną w równ. 8), bo  $X=f(x)$  zmienia się, gdy  $E$  (rys. 2.) przekracza punkt  $C$ , a mianowicie



dla  $0 < x < e$  jest  $X = \frac{Pe_1 x}{l}$ ,

a dla  $e < x < l$  jest  $X = \frac{Pe_1 x}{l} - (x - e)^*$ ,

a więc pierwszy wyraz całkować będziemy od 0 do  $l$ , a drugi od  $e$  do  $l$ .

Zatem będzie na podstawie równania 8)

$$\mathfrak{M}' l^2 = 2P \int_0^l \frac{e_1 x}{l} (3x - 2l) dx - 2P \int_e^l (x - e) (3x - 2l) dx.$$

Pierwszy wyraz jest między granicami 0 i  $l$  równy zeru, drugi zaś upraszcza się bardzo i otrzymujemy:

$$\mathfrak{M}' l^2 = -Pe(l^2 + e^2 - 2el) = -Pe e_1^2.$$

Podobnie otrzymamy  $\mathfrak{M}'' l^2 = -Pe^2 e_1$  więc,

$$\left. \mathfrak{M}' = - \frac{Pe e_1^2}{l^2} \right\} \dots \dots 12a)$$

\*) p. Podr. t. m. tom I. str. 39.

$X = 6x$   
 $l = 9$



$$\mathfrak{M}'' = -\frac{Pe^2 e_1}{l^2} \} \dots \dots \dots 12b)$$

Teraz możemy obliczyć wyrazy  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$  z równania 11), a mianowicie będzie

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{Pe e_1 (2l - e)}{l^2} = -\frac{Pe_1 (l^2 - e_1^2)}{l^2} \\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{Pe e_1 (1 + e)}{l^2} = -\frac{Pe (l^2 - e^2)}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots 13)$$

Równanie 12) otrzymaliśmy w inny sposób w Podręczniku statyki budowli (str. 145). — Tam też rozważaliśmy wypadek, gdy belka jest ciężarem  $q$

b) całkowicie obciążona i otrzymaliśmy

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = -\frac{1}{2} ql^2, \text{ *)} \dots \dots \dots 14)$$

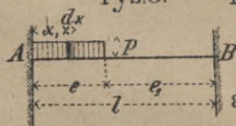
a na podstawie równania 11)

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = -\frac{1}{4} ql^2 \dots \dots \dots 15)$$

c) Częściowe obciążenie jednostajne.

α) Obciążenie z lewej strony.

W punkcie  $C$  działa na długości  $dx$  (rys. 3.) ciężar  $\frac{pdx}{l}$ . Możemy uważać go jako ciężar skupiony, otrzymamy więc moment, wywołany tym ciężarem, według 12)



$$d\mathfrak{M}' = -\frac{pdx x_1 (l - x_1)^2}{l^2},$$

a zatem moment w  $A$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\int_0^e d\mathfrak{M}' = -\frac{p}{l^2} \int_0^e x_1 (l - x_1)^2 dx = \\ &= -\frac{p}{l^2} \int_0^e (x_1 l^2 - 2lx_1^2 + x_1^3) dx = -\frac{pe^2}{12l^2} (6l^2 + 8el + 3e^2), \text{ wręście} \\ \mathfrak{M}' &= -\frac{pe^2}{12l^2} (l^2 + 2e_1 l + 3e_1^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Podobnie otrzymamy } \mathfrak{M}'' &= \int d\mathfrak{M}'' = -\frac{p}{l^2} \int_0^e x^2 (l - x_1) dx = \\ &= -\frac{pe^3}{12l^2} (4l - 3e) = -\frac{pe^3}{12l^2} (l + 3e_1) \dots \dots \dots 16) \end{aligned}$$

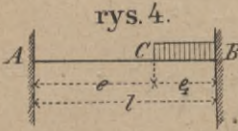
stąd

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{pe^2}{12l^2} (2l^2 + 4e_1 l + 6e_1^2 + le + 3e_1 e) = -\frac{pe^2}{4l^2} (1 + e_1)^2 \\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{pe}{12l^2} (2le + 6ee_1 + l^2 + 2le + 3e_1^2) = -\frac{pe}{4l^2} (2l^2 - e^2) \end{aligned} \right\} 17)$$

\*) Podręcznik statyki budowli str. 147. równ. 241).

β) Obciążenie z prawej strony.

Dla obciążenia jednostajnego z prawej strony punktu C (rys. 4.) aż do prawej podpory otrzymamy momenty podporowe, wstawiając w równanie 16)  $e_1$  zamiast  $e$  i na odwrót i  $\mathfrak{M}''$  zamiast  $\mathfrak{M}'$ . A więc



rys. 4.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{p e_1^3}{12 l^2} (l + 3 e) \\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{p e_1^2}{12 l^2} (l^2 + 2 e l + 3 e^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 18)$$

Stąd otrzymamy dalej:

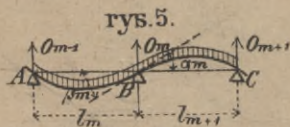
$$\mathfrak{M}' = -\frac{p e_1^2}{4 l^2} (2 l^2 - e_1^2), \quad \mathfrak{M}'' = -\frac{p}{4 l^2} (l^2 - e^2)^2 \quad . \quad 19)$$

Winkler podaje dla ułatwienia następują tabliczkę dla  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$ , obliczoną z równań 17) i 19) dla rozmaitych wartości  $e$ :

$e$	obciążenie z lewej strony (rys. 3.)		obciążenie z prawej strony (rys. 4.)	
	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
0	0	0	0.25000	0.25000
0.1	0.00903	0.00497	0.24097	0.24503
0.2	0.03240	0.01960	0.21760	0.23040
0.3	0.06503	0.04298	0.18497	0.20703
0.4	0.10240	0.07360	0.14760	0.17640
0.5	1.14063	0.10938	0.10938	0.14063
0.6	0.17640	0.14760	0.07360	0.10240
0.7	0.20703	0.18497	0.04298	0.06503
0.8	0.23040	0.21760	0.01960	0.03240
0.9	0.24503	0.24097	0.00497	0.00903
1.0	0.25000	0.25000	0	0
$l$	$p l^2$	$p l^2$	$p l^2$	$p l^2$

§. 5. Momenty podporowe belki ciągłej o równo wysokich podporach.

Jeżeli belkę ciągłą (rys. 5.) obciążymy, to ugnie się wskutek tego. Na podporach styczne do linii ugięcia będą, ogólnie biorąc, nachylone do poziomu.



rys. 5.

Każde przesło tej belki uważać tedy możemy jako belkę ukośnie utwierdzoną i zastosować doń równanie 10).

Przyjmemy przytem, że podpory wszystkie są w równej wysokości, to  $s=0$ , więc dla  $m$  go przesła będzie, jeśli  $\tau_m = \text{st } \beta_m = \text{st } \alpha_m$ ,

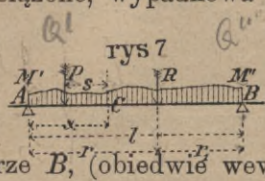


Otrzymujemy zatem jedno równanie więcej, wystarczające do wyznaczenia jeszcze jednej niewiadomej  $M_0$ .

Tak samo, jeżeli belka jest poziomo utwierdzona na  $n$  tej podporze, otrzymamy:  $M_{n-1}l_n + 2M_nl_n = \mathfrak{N}_n'' l_n$ ,  
czyli  $M_{n-1} + 2M_n = \mathfrak{N}_n'' \dots \dots \dots 23)$

### §. 6. Momenty, siły poprzeczne i oddziaływania.

Niech przeszło  $AB$  (rys. 7.) belki ciągłej będzie dowolnie obciążone, wypadkowa wszystkich ciężarów na długości  $AB$  działających niech będzie  $R$ , a  $r_1$  jej odstęp od  $B$ . — Nazwijmy dalej momenty podporowe w  $A$  i  $B$ ,  $M'$  i  $M''$ , siłę poprzeczną  $Q'$  przy podporze  $A$ ,  $Q''$  przy podporze  $B$ , (obidwie wewnątrz przeszła), to otrzymamy z równ. 5)



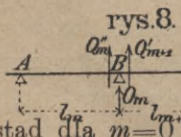
$$M'' = M' + Q'l - Rr_1, \text{ a}$$

$$Q'' = Q' - R, \text{ stąd wynika } \left. \begin{aligned} Q' &= \frac{M'' - M'}{l} + \frac{Rr_1}{l} \\ Q'' &= \frac{M'' - M'}{l} - \frac{Rr_1}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 24)$$

Chcąc wyznaczyć siłę poprzeczną  $Q$  w dowolnym punkcie  $C$ , nazwijmy  $P$  wypadkową ciężarów, działających na długości  $AC = x$ , a  $s$  jej odstęp od  $C$ , to  $Q = Q' - P \dots \dots \dots 25)$

$$M = M' + Q'x - Ps \dots \dots \dots 26)$$

Nazwijmy dalej  $O_m$  oddziaływanie w punkcie  $B$ , to siła poprzeczna przy  $B$  (rys. 8.) w  $m$  tem przeszle jest  $Q_m''$ , a w  $(m+1)$ em przeszle  $Q_{m+1}'$ ,



a więc  $Q_{m+1}' = Q_m'' + O_m$ ,  
czyli  $O_m = -Q_m'' + Q_{m+1}' \dots \dots \dots 27)$   
a stąd dla  $m=0$   $O_0 = Q_1'$ , a dla  $m=n$   $O_n = -Q_n''$ .

### §. 7. Obciążenie zupełne jednostajnie rozłożone.

Dla ciężaru stałego jednostajnie ciągłego  $g$  mamy według równania 15)  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'' = -\frac{1}{4}gl^2$ , więc

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1'' &= -\frac{1}{4}gl_1^2 \\ \mathfrak{N}_2' &= -\frac{1}{4}gl_2^2. \end{aligned}$$

Ustawmy teraz równania momentów podporowych według 21), a otrzymamy\*)

\*) porów. Podręcznik statyki budowl. str. 151.





### §. 9. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nieobciążonych.

Jeżeli przeszło jest nieobciążone, to  $R=0$ , więc dla  $m$  go przęsła otrzymamy z równ. 24)

$$Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} \dots \dots \dots 39)$$

Ponieważ tu  $M_m$  i  $M_{m-1}$  mają znaki przeciwne, więc  $Q_m$  będzie miało ten sam znak, co  $M_m$ , a więc naprzemian będzie raz dodatniem, drugi raz ujemnem. W  $(m+1)$  przęsle będzie

$$Q_{m+1} = \frac{M_{m+1} - M_m}{l_{m+1}}.$$

Podzielimy to równanie przez równ. 39), a otrzymamy

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{M_{m+1} - M_m}{M_m - M_{m-1}} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} = \frac{1 + \nu_{m+1}}{-\frac{1}{\nu_m} - 1} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} = \frac{-\nu_m(1 + \nu_{m+1})}{\nu_m + 1} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} \quad 40)$$

$\nu_m$  i  $\nu_{m+1}$  są dodatnie, więc cały wyraz jest ujemnym. Ponieważ  $1 + \nu_{m+1} > 3$ , a  $1 + \frac{1}{\nu} < \frac{3}{2}$ , więc

$$-\frac{Q_{m+1}}{Q_m} > 2 \frac{l_m}{l_{m+1}} \dots \dots \dots 41)$$

Z tego wynika, że siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu, jeżeli, jak zwykle,  $2l_m > l_{m+1}$ .

Według równ. 27) jest  $O_m = -Q_m'' + Q_{m+1}'$ ; ponieważ  $Q$  mają znaki przeciwne, więc z tego wynika, że  $O_m$  będzie miało ten sam znak, co  $Q_{m+1}'$ , a więc także będzie naprzemian dodatnie i ujemne. — Podobnie możemy napisać

$$O_{m+1} = -Q_{m+1}'' + Q_{m+2}'.$$

Podzieliwszy to drugie równanie przez pierwsze, otrzymamy

$$\frac{O_{m+1}}{O_m} = \frac{-Q_{m+1}'' + Q_{m+2}'}{-Q_m'' + Q_{m+1}'} = \frac{-\frac{Q_{m+2}}{Q_{m+1}} + 1}{\frac{Q_m}{Q_{m+1}} - 1},$$

przyczem opuściliśmy zna-

czki, bo w przęsle nieobciążonem  $Q' = Q'' = Q$ .

Licznik jest tu dodatni i większy, niż  $1 + 2 \frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}$ , zaś mianownik ujemny i mniejszy, niż  $1 + \frac{1}{2} \frac{l_{m+1}}{l_m}$ , więc

$$-\frac{O_{m+1}}{O_m} > \frac{1+2\frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}}{1+\frac{1}{2}\frac{l_{m+1}}{l_m}} \dots \dots \dots 42)$$

Z równania 42) widzimy, że oddziaływania są na przemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu (jeżeli  $4l_m$  nie jest  $< l_{m+2}$ ). Momenty obliczymy z równania 26), mianowicie będzie  $M = M_{m-1} + Q_m \cdot x$ .

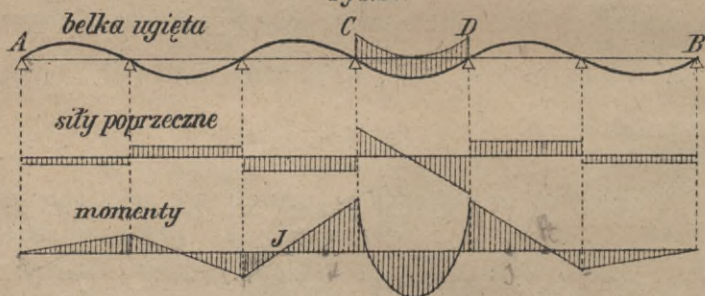
Wstawmy wartość za  $Q_m$ , to otrzymamy

$$M = M_{m-1} + \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} x, \text{ czyli}$$

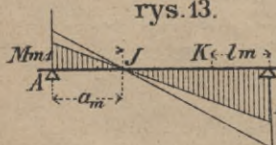
$$M = M_{m-1} \left(1 - \frac{x}{l_m}\right) + \frac{M_m x}{l_m} \dots \dots \dots 43)$$

Ze względu na  $x$  jest to równanie 1go stopnia, linia momentów będzie więc prostą. Wyniki te przedstawiliśmy na rys. 12.

rys.12.



rys.13.



Jeżeli w każdym przęsle są momenty dodatnie i ujemne, to musi być w każdym przęsle punkt, w którym  $M=0$ . Nazwijmy  $a$  odnośnie  $x$  (rys. 13.), to z równania 43) otrzymamy

$$0 = M_{m-1} \left(1 - \frac{a_m}{l_m}\right) + \frac{M_m a_m}{l_m}, \text{ a stąd } a_m = \frac{M_{m-1} l_m}{M_{m-1} - M_m}, \text{ czyli } a_m = \frac{l_m}{1 - \frac{M_m}{M_{m-1}}}. \text{ A gdy } \frac{M_m}{M_{m-1}} = -\mu_m, \text{ będzie } a_m = \frac{l_m}{1 + \mu_m} \dots \dots \dots 44)$$

Stąd widzimy, że ponieważ  $\mu_m$  zależy tylko od rozpiętości, a nie zależy od obciążenia,  $a_m$  pozostaje niezmiennem, którekolwiek przęsło z prawej strony danego przęsła dowolnie jest obciążonem. Zawsze wtedy linia momentów przechodzi przez  $I$ ,



zatem  $I$  jest punktem stałym (n. *Fixpunkt*, f. *foyer*, *point fixe*, a. *inflexion point*). Gdy jest obciążone przeszło z lewej strony danego przeszła, wtedy otrzymujemy punkt stały  $K$ , możemy wtedy podobnie napisać

$$b_m = \frac{l_m}{1 + \nu_m} \dots \dots \dots 45)$$

Moment w lewym punkcie stałym jest niezależnym od obciążenia z prawej strony, zaś moment w prawym punkcie stałym jest niezależny od obciążenia z lewej strony.

Jeżeli belka jest na zerowej podporze wmurowana, wtedy  $l_0 = 0$ ,

$$\mu_1 = \frac{2l_1}{l_1} = 2 \quad \text{więc}$$

$$a_1 = \frac{l_1}{1+2} = \frac{1}{3} l_1 \dots \dots \dots 46)$$

Tak samo otrzymamy, jeśli belka jest na  $n$ tej podporze utwierdzona,

$$b_n = \frac{l_n}{3} \dots \dots \dots 47)$$

Jeżeli belka ciągła jest na obu skrajnych podporach podparta, to na tych podporach  $M=0$ , więc  $a_1 = b_n = 0 \dots 48)$

Według równania 38) jest  $\mu > 2$ , więc

$$a_m < \frac{l_m}{1+2}, \quad \text{stad } a_m < \frac{l_m}{3}, \quad b_m < \frac{l_m}{3} \dots 49)$$

a zatem punkty stałe leżą w skrajnych trzecich częściach przeszła. W przeszłach skrajnych leżą one na skrajnych podporach, a w razie utwierdzenia poziomego tych przeszł w jednej trzeciej długości przeszła.

### §. 10. Momenty podporowe przeszła obciążonego.

Dla przeszła obciążonego mamy według równania 35)

$$M_{r-2} l_{r-1} + 2 M_{r-1} (l_{r-1} + l_r) + M_r l_r = \mathfrak{R}'_r l_r \dots 50)$$

i

$$M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = \mathfrak{R}''_r l_r$$

Przypuśćmy na chwilę, że nie  $r$ -te przeszło jest obciążone, lecz inne na prawo leżące, to byłoby

$$M_{r-2} l_{r-1} + 2 M_{r-1} (l_{r-1} + l_r) + M_r l_r = 0.$$

A ponieważ  $M_r = -\mu_r M_{r-1}$ , więc

$$M_{r-2} l_{r-1} + 2 M_{r-1} (l_{r-1} + l_r) - \mu_r M_{r-1} l_r = 0 \dots 51)$$

To równanie przedstawia związek między  $M_{r-1}$  i  $M_{r-2}$ , który, jak wiemy, jest niezależny od obciążenia  $r$ -tego przęsła, więc także prawdziwy, gdy  $r$ -te przęsło jest dowolnie obciążono.

Podobnie otrzymamy

$$M_{r+1} l_{r+1} + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) - \nu_r M_r l_r = 0 \quad \dots \quad 52)$$

Te dwa równania dają w połączeniu z równaniami 50) następujące:

$$\begin{aligned} \mu_r M_{r-1} + M_r &= \mathfrak{N}'_r \quad ( \\ \nu_r M_r + M_{r-1} &= \mathfrak{N}''_r \quad ) \quad \dots \quad 53) \end{aligned}$$

Z tych dwu równań otrzymamy

$$\begin{aligned} M_{r-1} &= \frac{\nu_r \mathfrak{N}'_r - \mathfrak{N}''_r}{\mu_r \nu_r - 1} \quad \left. \right\} \\ M_r &= \frac{\mu_r \mathfrak{N}''_r - \mathfrak{N}'_r}{\mu_r \nu_r - 1} \quad \left. \right\} \quad \dots \quad 54) \end{aligned}$$

Wiemy, że współczynniki  $\mu$  i  $\nu$  są większe, niż 2, więc mianowniki równania 54) są dodatnie.

Według równania 11) jest  $\mathfrak{N}'_r = 2 \mathfrak{M}'_r + \mathfrak{M}''_r$ ,

$$\mathfrak{N}''_r = 2 \mathfrak{M}''_r + \mathfrak{M}'_r,$$

więc 
$$\begin{aligned} \nu_r \mathfrak{N}'_r - \mathfrak{N}''_r &= 2 \nu_r \mathfrak{M}'_r + \nu_r \mathfrak{M}''_r - 2 \mathfrak{M}''_r - \mathfrak{M}'_r = \\ &= \mathfrak{M}'_r (2 \nu_r - 1) + \mathfrak{M}''_r (\nu_r - 2). \end{aligned}$$

Ponieważ momenty  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$  są zawsze ujemne (według rów. 12), a  $2 \nu_r - 1$  i  $\nu_r - 2$  zawsze dodatnie, więc licznik jest ujemny, a mianownik dodatni; a zatem  $M_{r-1}$  jest ujemnem. To samo możemy udowodnić dla  $M_r$ . A zatem momenty podporowe przęsła obciążonego są zawsze ujemne.

## §. II. Obciążenie najniekorzystniejsze dla sił poprzecznych.

a) Obciążenie odnośnego przęsła.

Niechaj będzie tylko jedno przęsło  $AB$  (rys. 14.) belki ciąglej obciążone, i to niech działa w punkcie  $E$  siła  $P$ , to siła poprzeczna  $Q$  w punkcie  $F$  będzie według 24) i 25), gdy  $x > e > 0$ ,

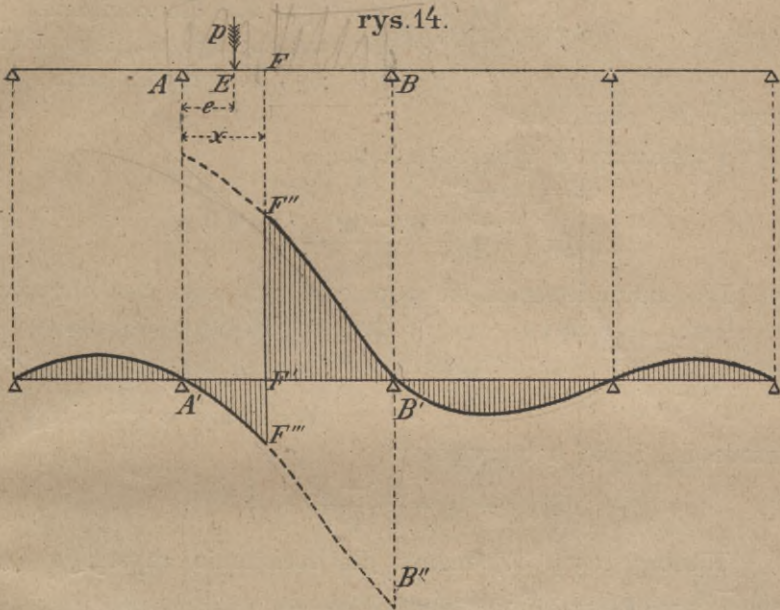
$$Q = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{P(l-e)}{l} - P, \quad \left\{ \right. \quad \dots \quad 55)$$

a gdy  $l > e > x$

$$Q = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{P(l-e)}{l}$$

Z równań powyższych widzimy, że linia wpływowa będzie funkcją  $e$  wyższego stopnia, niż pierwszego (bo  $M'$  i  $M''$  są  $f(e)$ , a więc będzie to linia krzywa. Wiemy jednak, że dla  $e=0$  i  $e=l$  jest  $Q=0$  i że różnica rzędnych w  $F$  wynosi  $P=$

$=F''F'''$ . Linie  $A'F'''$  i  $F''B'$  będą się mało co różniły od prostych, bo wyraz pierwszy jest stosunkowo mały. Z kształtu

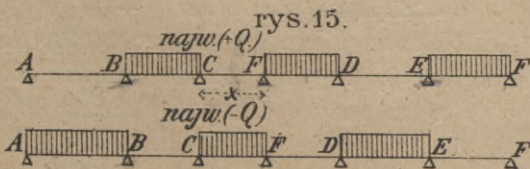


linii wpływowej widzimy, że dla *najw*  $Q$  musi być obciążona długość  $FB$ , a dla *najmn*  $Q$  długość  $AF$ , a więc tak samo, jak dla belki jednoprzęsłowej. Tak samo musi też dla ciężarów skupionych jeden ciężar stać w  $F$ , największe i najgęstsze ciężary blisko  $F$ .

b) Obciążenie reszty przęseł.

Przypuśćmy teraz, że odnośne przęsło nie jest obciążone, wtedy  $Q=Q'$ . Z rys. 12. widzimy, że, aby to  $Q$  było dodatniem, musi być lewe sąsiednie przęsło obciążone, a prawe nieobciążone, inne zaś przęsła naprzemian, gdyżśmy udowodnili, że siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne w przęsłach nieobciążonych. Stosownie do tego będzie linia wpływowa w innych przęsłach naprzemian pod lub nad osią (rys. 14). A więc dla

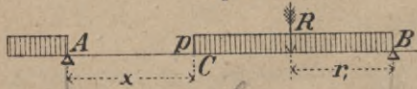
*najw*  $(+Q)$  i *najw*  $(-Q)$  w punkcie  $F$  przęsła  $CD$  musi być belka obciążona według rys. 15).



§. 12. Największe siły poprzeczne.

Według równania 24) i 25) można obliczyć najw. siły poprzeczne w danym punkcie  $C$

rys. 16.



przecznę w danym punkcie  $C$  (rys. 16.) dla obciążenia jednostajnego ciągłego. Wiemy, że przytem musi być

długość  $BC$  obciążona.

Podstawmy w tych równaniach

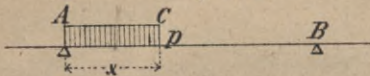
$$R = p(l - x), \quad r_1 = \frac{1}{2}(l - x), \quad P = 0,$$

to

$$\text{najw } (+Q) = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{1}{2} \frac{p(l - x)^2}{l} \quad \dots \quad 56)$$

Dla najmniejszości sił poprzecznych musi być obciążona długość  $AC$  (rys. 17), więc

rys. 17.



$$R = px, \quad r_1 = l - \frac{x}{2}, \quad P = px.$$

Wstawmy te wartości w równania 24) i 25), a otrzymamy

Wstawmy te wartości w równania 24) i 25), a otrzymamy

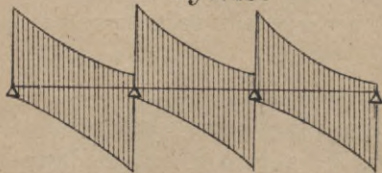
$$\text{najw } (-Q) = \frac{M'' - M'}{l} - \frac{1}{2} \frac{px^2}{l} \quad \dots \quad 57)$$

Według równ. 30) mamy dla obciążenia zupełnego  $Q_2 = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{1}{2} p(l - 2x)$ , widzimy więc, że

$$\text{najw } (-Q) = Q_2 - \text{najw } (+Q) \quad \dots \quad 58)$$

co zresztą jest oczywistem.

rys. 18.

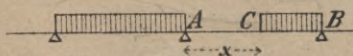


Linie największych i najmniejszych sił poprzecznych, będą prawie paraboliczne, wyraz pierwszy bowiem jest wprawdzie funkcją  $x$ , ale jest zazwyczaj bardzo małym (rys. 18).

§. 13. Bezwzględnie największe i najmniejsze siły poprzeczne.

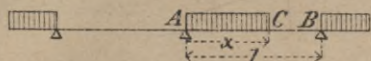
Z rys. 18. i z poprzednich równań widzimy, że największe siły poprzeczne są na podporach i to na lewych każdego przęsła dodatnie, na prawych ujemne. W rys. 19. oznaczyliśmy obciążenie dla  $\text{najw } (+Q)$  w  $C$ .

rys. 19.



Bezwzględna największość jest dla  $x=0$ , więc oba przęsła, między którymi leży punkt  $A$ , muszą być

rys.20.



obciążone. W rys. 20) oznaczyliśmy znów obciążenie dla *najmn*  $Q$  w  $C$ . Bezwzględna *najmniejszość* jest dla  $x=l$ , więc znów

oba przęsła, między którymi leży podpora  $B$ , muszą być obciążone; reszta przęsła ma być naprzemian obciążoną. Z równ. 56) i 57) otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{dla } x=0 \text{ bezwzględnie } \textit{najw} \quad Q &= \frac{M'' - M'}{l} + \frac{1}{2} pl \\ \textit{„ } x=l \quad \textit{„} \quad \textit{najm} \quad Q &= \frac{M'' - M'}{l} - \frac{1}{2} pl \end{aligned} \quad \dots \quad 59)$$

Ponieważ oddziaływanie równa się różnicy sił poprzecznych po obu stronach podpory, a obie siły poprzeczne są największe dla tego samego obciążenia, więc oddziaływanie będzie największe także dla tego samego obciążenia, t. j. gdy oba przęsła sąsiednie są obciążone.

Najmniejsze oddziaływanie, powstające z powodu ciężaru ruchomego, jest ujemnem. Jeżeli oddziaływanie dodatnie, wywołane ciężarem własnym, jest większe od oddziaływania ujemnego z powodu ciężaru ruchomego, to oddziaływanie dla ciężaru własnego i ruchomego jest ostatecznie dodatnie; w przeciwnym razie ujemne.

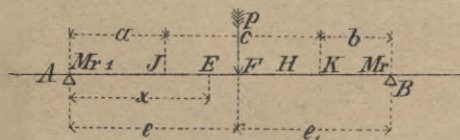
W tym ostatnim wypadku belka musi być przytwierdzoną do podpory, gdyż inaczej podniosłaby się w tem miejscu, czego dopuścić nie możemy ze względów ustrojowych. Największe oddziaływanie ujemne powstaje, gdy dwa sąsiednie przęsła są nieobciążone, a dalsze naprzemian obciążone i nieobciążone.

#### §. 14. Najniekorzystniejsze obciążenie dla momentów.

a) Obciążenie przęsła badanego.

Niechaj w punkcie  $F$  *r*-tego przęsła belki ciągłej działa siła  $P$  (rys. 21.), to wiemy, że według równań 12 a) i 12 b) będzie

rys.21.



$$\mathfrak{M}' = -\frac{Pe_1^2}{l^2}, \quad \mathfrak{M}'' = -\frac{Pe^2 e_1}{l^2}.$$

Dalej według równań 54) mamy po opuszczeniu zna-

czka  $r$   $M_{r-1} = \frac{\nu \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''}{\mu \nu - 1}, \quad M_r = \frac{\mu \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}'}{\mu \nu - 1}.$

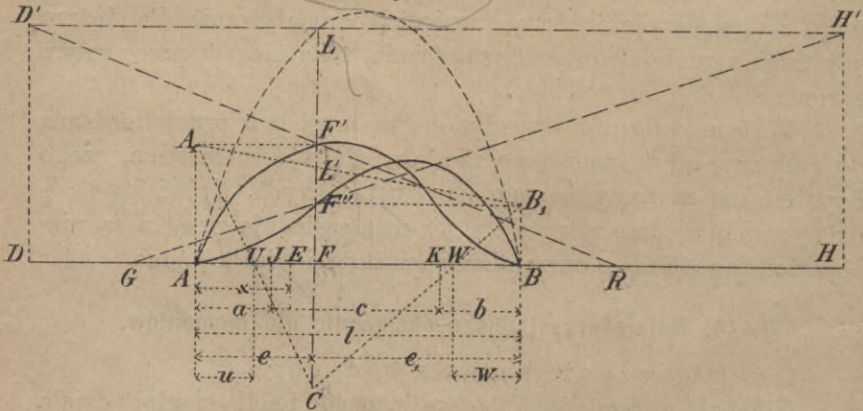
Podstawmy w tych równaniach wartości z równań 44) i 45)  $\mu = \frac{l}{a} - 1$  i  $\nu = \frac{l}{b} - 1$ , z rys. 21.  $c = l - a - b$  i wartości za  $\mathfrak{N}'$  i  $\mathfrak{N}''$  z równ. 11), to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_{r-1} &= -\frac{Pae_1}{cl^2} (2l - 3b - e) \\ M_r &= -\frac{Pbe_1}{cl^2} (l - 3a + e) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 60)$$

Na podstawie równan. 60) dadzą się linie wpływowe dla momentów podporowych  $M_{r-1}$  i  $M_r$  według Šolina w następnym sposobie wykreślić (rys. 22.). Zróbmy  $BR = l - 3b = AB - 3BK$ ,  $RD = l \frac{c}{a} = AB \frac{IK}{AI}$ ,  $FL$  momentowi dla belki w dwu punktach podpartej  $= \frac{Pe_1}{l}$ ,  $DD' = FL$  i wykreślmy  $D'R$ , to

$$FF' = \frac{DD' \cdot RF}{RD} = \frac{Pe_1}{l} \cdot \frac{(l - 3b + e_1)}{l \frac{c}{a}} = \frac{Pae_1 e}{cl^2} (2l - 3b - e) = M_{r-1}.$$

rys.22.



Podobnie otrzymamy  $FF'' = M_r$ . W ten sam sposób możemy otrzymać momenty  $M_{r-1}$  i  $M_r$  dla innego położenia siły  $P$ , a połączywszy końce rzędnych, przedstawiających momenty, otrzymamy linie wpływowe  $AF'B$  i  $AF''B$ . Zróbmy teraz  $AA_1 = FF'$ , i  $BB_1 = FF''$ , połączmy  $A_1$  z  $B_1$  i zróbmy  $L'C = FL$ , to  $A_1CB_1$  będzie przedstawiać linię momentów w przęśle  $AB$ , jeżeli siła  $P$  działa w  $F$ . Ponieważ  $L'$  leży zawsze niżej  $L$ , więc  $C$  będzie zawsze poniżej  $AB$ , a zatem moment w punkcie zaczepienia siły

jest zawsze dodatni. Z rysunku widzimy, że, jeżeli siła  $P$  leży w  $F$ , w punktach  $U$  i  $W$  jest moment równy zero. Wyznamy położenie tych punktów obojętnych.

Z rysunku wynika, że  $AA_1U \sim UFC$ , więc  $u : (e - u) = (-M_{r-1}) : M_1$ , gdy  $M_1 = FC$ , zatem

$$u : e = (-M_{r-1}) : (M_1 - M_{r-1}), \text{ więc}$$

$$u = \frac{M_{r-1} e}{M_{r-1} - M_1}.$$

Z rys. dalej wynika:

$$M_1 = CL' - FL' = \frac{Pe e_1}{l} + \left\{ M_r + (M_{r-1} - M_r) \frac{e_1}{l} \right\}.$$

W równaniu tem dajemy znak (+). bo  $M_r$  i  $M_{r-1}$  są ujemne.

Wstawiwszy wartość za  $M_1$  w poprzednie równanie, otrzymamy po skróceniu

$$\text{podobnie będzie } \left. \begin{aligned} u &= \frac{M_{r-1} l}{M_{r-1} - M_r - Pe_1} \\ w &= \frac{M_r l}{M_r - M_{r-1} Pe} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 61)$$

Wstawmy teraz wartości z rów. 60) za  $M_{r-1}$  i  $M_r$ , to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a(2l - 3b - e)el}{cl^2 + (2a - b)el - (a + b)e^2} \\ w &= \frac{b(2l - 3a - e_1)e_1l}{cl^2 + (2b - a)e_1l - (a + b)e_1^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 62)$$

W przęsłach skrajnych jest w pierwszym  $a=0$ , w ostatniem  $b=0$ , więc dla przęsła pierwszego  $u=0$ ,  $c=l$   $b$ ,

$$w = \frac{b(2l - e_1)e_1l}{cl^2 + 2be_1l - be_1^2} = \frac{b(2l - e_1)e_1l}{l^3 - b(l^2 - 2e_1l + e_1^2)} = \frac{b(l^2 - e^2)l}{l^3 - be^2} \dots 63)$$

W ostatniem przęsle jest  $b=0$ ,  $c=l - a$ ,  $w=0$ ,

$$u = \frac{a(2l - e)el}{(l - a)l^2 + 2ael - ae^2} = \frac{a(l^2 - e_1^2)l}{l^3 - ae_1^2} \dots \dots 64)$$

Z rysunku 22. widzimy więc, że, jeżeli siła  $P$  stoi w  $F$ , momenty na długościach  $u$  i  $w$  są ujemne, zaś na długości  $UW$  dodatnie.

Zbadajmy najprzód, jak wielkie może być  $u$  i  $w$ .

Z rów. 62) wynika, że dla  $e=0$  jest  $u=0$ ,

zaś dla  $e=l$  jest  $u=a$ .

Podobnie dla  $e_1=0$  jest  $w=0$ ,

dla  $e_1=l$  jest  $w=b$ .

A zatem widzimy, że gdy  $u$  może być najwięcej  $=a$ , a najw  $w=b$ , a zatem na długości  $IK$  między punktami stałymi moment jest zawsze dodatni, zaś na długościach  $AI$  i  $KB$  może być moment ujemnym lub dodatnim. Rozróżniamy z tego powodu trzy części w każdym przęśle, część pierwszą  $AI$ , część drugą, średnią  $IK$  i trzecią  $KB$ . Rozumie się, że w przęśle pierwszym część pierwsza  $AI=0$ , a w przęśle ostatniem  $KB=0$ .

A zatem możemy powiedzieć: W części średniej przęśla belki ciągłej każdy ciężar, gdziekolwiek na tem przęśle działający, sprawia moment dodatni, a więc dla największego  $M$  musi być to całe przęsło obciążone, dla najmniejszości wcale nieobciążone.

Dla punktu  $U$ , leżącego w części pierwszej, jest moment równy zeru, jeżeli  $P$  stoi w punkcie  $F$ . Jeżeli siła  $P$  posunie się na lewo, moment w punkcie  $U$  jest dodatnim, jeżeli na prawo, ujemnym. A zatem dla najw  $M$  w punkcie  $U$  w części pierwszej przęśla musi być to przęsło obciążone od  $A$  aż do  $F$ , dla najm  $M$  od  $F$  do  $B$ .

To samo da się zastosować do punktu  $W$  w trzeciej części przęśla. Dla najw  $M$  w punkcie  $W$  musi być obciążone przęsło od  $F$  do  $B$ , dla najmn  $M$  od  $A$  do  $F$ . A zatem badany przekrój jest zawsze dla największości obciążony, a dla najmniejszości nieobciążony.

#### b) Obciążenie reszty przęseł.

Z rys. 12. widzimy, że obciążenie przęśla  $CD$  sprawia w części I i II przęśla sąsiedniego na prawo momenty ujemne, a w części III dodatnie, dla przęśla sąsiedniego lewego zaś w części I dodatnie, w II i III ujemne.

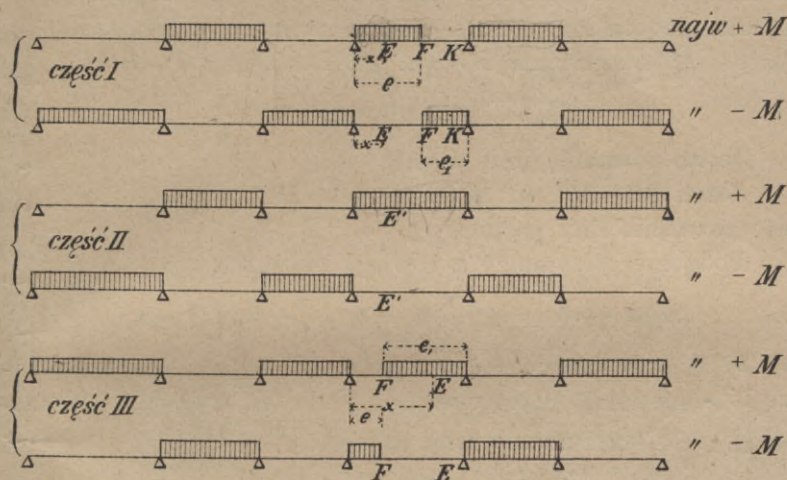
A zatem dla części I dla największości musi być sąsiednie prawe przęsło obciążone, sąsiednie lewe nieobciążone, a reszta przęseł naprzemian (rys. 23.). Dla części średniej muszą być sąsiednie oba przęśla nieobciążone, a inne naprzemian, dla części III zaś musi być sąsiednie prawe przęsło nieobciążone, a lewe obciążone, inne zaś naprzemian.

Ogólnie więc możemy powiedzieć dla wszystkich trzech części: Do części obciążonej danego przęśla przytyka przęsło nieobciążone, do części nieobciążonej obciążone przęsło. Inne przęśla mają być naprzemian obciążone.



W rys. 23. wykreśliłiśmy schemat najniekorzystniejszych obciążeń ciężarem jednostajnie rozłożonym. Jeżeli mamy belkę obciążać układem ciężarów skupionych, to ponieważ tu otrzymamy linie wpływowe krzywe, nie uzyskujemy tak prostych

rys. 23.



prawideł dla najniekorzystniejszego położenia, jak dla belki jednoprzęsłowej. Linia wpływowa będzie miała jednak w danym przęśle także kształt trójkąta, lecz o bokach krzywych, z wierzchołkiem w punkcie badanym tak, że w przybliżeniu możemy zastosować dla najniekorzystniejszego obciążenia reguła dla momentów belki w dwu punktach podparytej.

Co do obciążenia reszty przęseł kształt linii wpływowych, które otrzymamy później wykreślić, da nam pewne wskazówki co do ustawienia ciężarów skupionych w rozmaitych przęśłach. Zwrócić jednak musimy uwagę, że obciążenie tego rodzaju, jak na rys. 23., jest w praktyce nieprawdopodobnem, a przy mostach kolejowych wprost niemożliwym. Przy mostach drogowych, gdzie obciążenie takie jest możliwe, przypuszczamy przy obliczeniu rzeczywiście ciężar ruchomy podzielony na kilka części, przy kolejowych możnaby albo przypuszczając jeden pociąg przyjąć na długości, któraby nie powinna być obciążoną, wozy próżne (ważące 6 t), a zresztą parowozy i wozy ładowne\*), albo też

\*) porów. Podr. t. m. tom I. str. 68.

przyjmujemy tylko dane przeszło obciążone. Przyjmowanie niemożliwych obciążeń dla obliczenia belki wydaje nam się nieusprawiedliwionem.

**§. 15. Wyznaczenie największych momentów dla obciążenia ciągłego.**

a) Średnia część przęsła. Dla największych momentów musi być dane przeszło całe obciążone, dla najmniejszości zaś całe nieobciążone, reszta przęsł naprzemian (rys. 23.). Dla *najw* ( $-M$ ) otrzymamy z równ. 24) i 26), gdy  $P=R=0$ ,

$$\text{najw } (-M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} \dots \dots \dots 65)$$

Jestto równanie linii prostej.

Jeżeli  $M' = M''$ , to *najw* ( $-M$ ) =  $M'$ ; . . . . . 66)

jestto równanie linii poziomej.

Podobnie otrzymamy z równań 24) i 26)

$$\text{najw } (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{1}{2} px (1-x) \dots \dots 67)$$

b) Pierwsza część przęsła. Dla *najw* ( $-M$ ) musi być przeszło dane  $AB$  obciążone od  $F$  do  $B$  (rys. 22.) Według równania 24) otrzymamy więc  $Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{pe_1'}{2l}$ .

Wedle rów. 26)  $M = M' + Q'x$ , więc

$$\text{najw } (-M) = M' - \frac{M' - M''}{l} x + \frac{pe_1'^2 x}{2l} \dots \dots \dots 68)$$

Dla *najw* ( $+M$ ) musi być przeszło  $AB$  obciążone od  $A$  do  $F$ . Tu jest  $Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{pe(2l-e)}{2l}$ , a  $M = M' + Q'x - \frac{1}{2} px^2$ ,

więc  $\text{najw } (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{px}{2l} (2el - e^2 - lx) \dots \dots 69)$

c) Trzecia część belki. Podobnie otrzymamy dla trzeciej części

$$\text{najw } (-M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{pe^2(1-x)}{2l} \dots \dots 70)$$

$$\text{najw } (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{p(1-x)(lx - e^2)}{2l} \dots \dots 71)$$

We wszystkich częściach przęsła jest

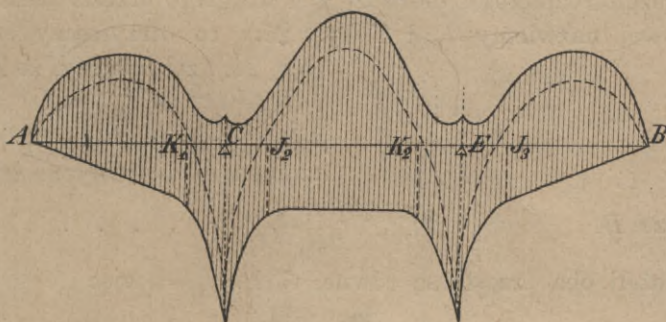
$$\text{najw } (+M) + \text{najw } (-M) = M_2, \dots \dots \dots 72)$$

jeżeli  $M_2$  oznacza moment dla obciążenia zupełnego.

Jeżeli wykreślnie przedstawimy linie największych i najmniejszych momentów, to otrzymamy rysunek 24. Dla ujem-

nych największych momentów otrzymujemy w średniej części każdego przęsła linie proste.

rys. 24.



### §. 16. Wielkość ciężaru jednostajnego ciągłego.

W poprzednich paragrafach przypuszczaliśmy, że ciężar jednostkowy  $p$  jest w danym przęśle jednostajny. Dla mostów drogowych jest ciężar ruchomy  $p$  dla wszystkich przęseł jednostajny, jeśli liczymy na podstawie obciążenia tłumem ludzi, co zwykle jest wskazaniem dla belek głównych większej rozpiętości. Jeżeli rozpiętości są nierówne, może się wszelako ciężar własny  $g$  poszczególnych przęseł różnić. Przy mostach kolejowych jednak, jeżeli rozpiętość przęseł jest nierówna, przyjęc należy dla rozmaitych przęseł różne wartości nie tylko dla ciężaru własnego  $g$ , ale też i dla ciężaru zastępczego  $p$ . Dla ciężaru zastępczego dla sił poprzecznych należy przyjmować zmienne  $p$  nie według długości przęseł, lecz według długości obciążonej.

Rozporządzenie austr. min. z r. 1887. Mosty kolejowe (§. 3 c). Dla belek ciągłych należy przy obliczeniu pasów przyjmować obciążenia wedle skali  $a$ , odpowiadające rozpiętościom obciążonych przęseł i uwzględniać ten rozkład obciążenia, który wywołuje największe momenty.

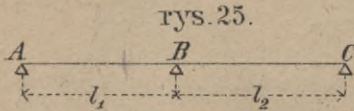
Dla obliczenia kraty lub ścianki tych belek należy jednak przyjmować w danym przęśle obciążenia według skali  $b$ , zaś obciążenia równoczesne innych przęseł według skali  $a$ .\*

\*) patrz Podr. t. m. tom I. str. 55.

## II. Belka ciągła dwu- i trzyprzęsłowa.

### §. 17. Momenty podporowe belki dwuprzęsłowej.

Jeżeli rozpiętości pierwszego i drugiego przęsła belki dwuprzęsłowej nazwiemy  $l_1$  i  $l_2$  (rys. 25.), to otrzymamy według



rów. 21.), zważywszy, że  $M_0=0$  i  $M_3=0$ ,  
 $2M_1(l_1+l_2) = \mathfrak{R}_1'l_1 + \mathfrak{R}_2'l_2$ , więc moment podporowy na średniej

podporze B 
$$M_1 = -\frac{\mathfrak{R}_1'l_1 + \mathfrak{R}_2'l_2}{2(l_1+l_2)} \dots \dots \dots 73)$$

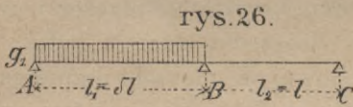
Jeżeli oba przęsła są równe, to  $l_1=l_2=l$  więc

$$M_1 = -\frac{\mathfrak{R}_1' + \mathfrak{R}_2'}{4} \dots \dots \dots 74)$$

Przypuśćmy, że ciężar jednostkowy w pierwszym przęsle jest  $p_1$ , w drugim  $p_2$ .

Jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone (rys. 26.), to

$$\mathfrak{R}_1'' = -\frac{1}{2}p_1l_1^2, \quad \mathfrak{R}_2'' = 0.$$



Wstawimy to w równ. 73),

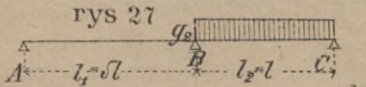
otrzymamy

$$M_1 = -\frac{p_1l_1^3}{8(l_1+l_2)} \dots \dots \dots 75)$$

Załóżmy  $l_1 = \vartheta l$ ,  $l_2 = l$ , to

$$M_1 = -\frac{\vartheta^3}{1+\vartheta} \frac{p_1l^2}{8} = -\frac{\vartheta^3}{1+\vartheta} \frac{p_1l^2}{8} \dots \dots \dots 76)$$

Jeżeli drugie przęsło jest obciążone (rys. 27.), to otrzymamy



odnośne wzory, jeżeli zamienimy  $p_1$  na  $p_2$ ,  $l_1$  na  $l_2$  i  $l_2$  na  $l_1$ , zatem

$$M_1 = -\frac{p_2l_2^3}{8(l_1+l_2)} = -\frac{1}{1+\vartheta} \frac{p_2l^2}{8} \dots \dots \dots 77)$$

Jeżeli teraz oba przęsła są obciążone, to otrzymamy

$$M_1 = -\frac{p_1l_1^3 + p_2l_2^3}{8(l_1+l_2)} = -\frac{(\vartheta^3p_1 + p_2)l^2}{8(1+\vartheta)} \dots \dots \dots 78)$$

Wyrazy  $\frac{\vartheta^3}{1+\vartheta}$  i  $\frac{1}{1+\vartheta}$  obliczył Leber dla rozmaitych używanych stosunków  $\vartheta$ .

Podajemy tu niektóre wartości:

$\xi=0.5$	0.6	0.7	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
$\frac{\xi^3}{1+\xi}$	0.0833	0.1350	0.2018	0.2411	0.2844	0.3320	0.3837	0.4397
$\frac{1}{1+\xi}$	0.6667	0.6250	0.5882	0.5714	0.5555	0.5405	0.5263	0.5128

### §. 18. Ciężar własny.

Dla ciężaru własnego otrzymamy  $M_1$ , moment podporowy w B, z wzoru 78), jeśli tylko  $p_1$  i  $p_2$  zamienimy na  $g_1$  i  $g_2$ , więc

$$M_1 = -\frac{g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)} = -\frac{(\xi^3 g_1 + g_2) l^3}{8(1 + \xi)} \quad . . . \quad 79)$$

Jeżeli jak zwykle,  $l_1 = l_2 = l$ , więc  $\xi = 1$ , a  $g_1 = g_2 = g$ , to

$$M_1 = -\frac{g l^2}{8} \quad . . . . . \quad 80)$$

Chcąc teraz wyznaczyć siły poprzeczne w pierwszym przęśle, zastosujemy równ. 29), zważywszy, że tu jest  $M' = 0$ ,  $M'' = M_1$ ,

$$Q' = \frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2) l_1} = \frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{(\xi^3 g_1 + g_2) l^3}{8(1 + \xi) \xi} \quad . . \quad 81)$$

a dla  $\xi = 1$  i  $g_1 = g_2 = g$ ,

$$Q' = \frac{1}{2} g l - \frac{1}{8} g l^2 = \frac{3}{8} g l = +0.375 g l; \quad . . . . \quad 82)$$

zaś 
$$Q'' = -\frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{\xi^3 g_1 + g_2}{8(1 + \xi) \xi} l, \quad . . . . \quad 83)$$

a dla przęseł równych

$$Q'' = -\frac{1}{2} g l - \frac{1}{8} g l = -\frac{5}{8} g l = -0.625 g l \quad . . . \quad 84)$$

Według równ. 30) mamy dalej ogólnie  $Q = Q' - g x$ , a dla przęseł równych  $Q = \frac{3}{8} g l - g x = \frac{1}{8} g (31 - 8 x) \quad . . . . \quad 85)$

Jestto równanie linii prostej.

Moment otrzymamy według 32)

$$M = \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x) + \frac{M_1 x}{l_1}, \quad . . . . \quad 86)$$

a dla przęseł równych będzie

$$M = \frac{1}{2} g x (l - x) - \frac{1}{8} g l^2 \frac{x}{l} = \frac{1}{8} g x (31 - 4 x) \quad . . \quad 87)$$

Jestto równanie paraboli.

Niech będzie dla najw  $M$   $x = x_1$ , to znajdziemy  $x_1$ , różniczkując równanie 86), więc  $\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2} g_1 (l_1 - 2x_1) + \frac{M_1}{l_1} = 0$ , zatem  $x_1 = \frac{1}{2} l_1 + \frac{M_1}{g_1 l_1}$ . Dla przęseł równych  $M_1 = -\frac{1}{8} g l^2$ , więc  $x_1 = \frac{3}{8} l = 0.375 l$ .

Wstawmy tę wartość w równanie 87), to będziemy mieli

$$\begin{aligned} \text{najw } M &= \frac{1}{8} g \cdot \frac{3}{8} l (3l + \\ &- \frac{3}{8} l) = \frac{9}{128} g l^2 = \\ &= 0.07036 g l^2 . \quad 88) \end{aligned}$$

Z równ. 87) widzimy, że  $M=0$  dla  $3l=4x'$ , więc dla  $x' = \frac{3}{4} l = 0.75 l$ .

Wyniki te zestawiliśmy na rys 28), z którego jeszcze widzimy, że oddziaływanie w B jest

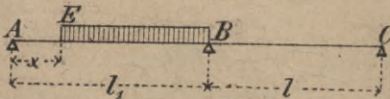
$$\begin{aligned} O_1 &= \frac{5}{8} g l + \frac{5}{8} g l = \\ &= \frac{10}{8} g l = \frac{5}{4} g l . \quad 89) \end{aligned}$$

$$\text{Ogólnie jest } O_1 = \frac{1}{8 l_1 l_2} [g_1 l_1^2 (4 l_2 + l_1) + g_2 l_2^2 (4 l_1 + l_2)] . \quad 90)$$

### §. 19. Ciężar ruchomy.

Teraz obliczymy siły zewnętrzne, wywołane ciężarem ruchomym.

rys. 29.



a) Siły poprzeczne.  
Dla najw (+Q) w p.E (rys. 29.) musi być obciążona długość EB, a drugie przeszło nieobciążone.

Otrzymamy więc z rów. 19)

$$\mathfrak{R}_1'' = -\frac{p_1 (l_1^2 - x^2)^2}{4 l_1^2}, \quad \mathfrak{R}_2' = 0.$$

Moment w B będzie według równ. 73)

$$M_1 = \frac{\mathfrak{R}_1'' l_1}{2 (l_1 + l_2)} = -\frac{p_1 (l_1^2 - x^2)^2}{8 l_1 (l_1 + l_2)} . \quad 91)$$

Dalej otrzymamy wedle równania 56), wstawivszy  $M'=0$ ,  $M''=M_1$ ,

$$\text{najw } (+Q) = -\frac{p_1 (l_1^2 - x^2)^2}{8 l_1^2 (l_1 + l_2)} + \frac{1}{2} \frac{p_1 (l_1 - x)^2}{l_1}$$

$$\text{czyli } \text{najw } (+Q) = \frac{p_1 (l_1 - x)^2}{8 l_1^2 (l_1 + l_2)} \{3 l_1^2 + 4 l_1 l_2 - 2 l_1 x - x^2\} . \quad 92)$$

Ponieważ dla obciążenia zupełnego według równ. 81) i 85)

$Q_z = \frac{1}{2} p_1 l_1 - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1} - p_1 x$ , więc otrzymamy najw. ujemną siłę poprzeczną, odciągawszy *najw* (+*Q*) od  $Q_z$ , zatem

$$\begin{aligned} \text{najw} (-Q) &= \frac{1}{2} p_1 (l_1 - 2x) - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1} - \frac{p_1 (l_1 - x)^2}{8l_1^2 (l_1 + l_2)} (3l_1^2 + \\ &\quad + 4l_1 l_2 - 2l_1 x - x^2) = \\ &= \frac{1}{2} p_1 (l_1 - 2x) - \frac{1}{8l_1^2 (l_1 + l_2)} \{ p_1 l_1^4 + p_2 l_1 l_2^3 + p_1 (l_1 - x)^2 (3l_1^2 + \\ &\quad + 4l_1 l_2 - 2l_1 x - x^2) \} \dots \dots \dots 93) \end{aligned}$$

Jeżeli  $l_1 = l_2 = l$ , zatem  $\vartheta = 1$ , a  $p_1 = p_2 = p$ , to z równ. 92) otrzymamy

$$\text{najw} (+Q) = \frac{p(l-x)^2}{16l^3} \{ 7l^2 - 2lx - x^2 \}, \dots \dots 94)$$

a z równ. 93)

$$\begin{aligned} \text{najw} (-Q) &= \frac{1}{2} p (l - 2x) - \frac{p}{16l^3} (2l^4 - (l-x)^2 (7l^2 - 2lx - x^2)) = \\ &= - \frac{p}{16l^3} (l^4 + 10l^2 x^2 - x^4) \dots \dots \dots 95) \end{aligned}$$

b) Ciśnienia na podpory.  $O_0$ , ciśnienie na podporę *A*, jest największe, gdy pierwsze przęsło jest obciążone, a drugie nie. Otrzymamy więc z równ. 92)

$$\begin{aligned} \text{dla } x=0 \quad \text{najw } O_0 &= \frac{p_1 l_1 (3l_1 + 4l_2)}{8(l_1 + l_2)} \left\{ \dots \dots \dots 96) \right. \\ \text{a dla } l_1 = l_2 = l \quad \text{najw } O_0 &= \frac{5}{8} pl \end{aligned}$$

Największe  $O_1$  w punkcie *B* otrzymamy, gdy oba przęsła będą obciążone, a więc jak dla ciężaru własnego według 90)

$$\begin{aligned} \text{najw } O_1 &= \frac{1}{8l_1 l_2} [p_1 l_1^2 (4l_2 + l_1) + p_2 l_2^2 (4l_1 + l_2)] \left\{ \dots \dots \dots 97) \right. \\ \text{a dla równych przęseł} \quad \text{najw } O_1 &= \frac{5}{4} pl \end{aligned}$$

$\text{Najw} (-O_0)$  powstaje, gdy drugie przęsło jest obciążone, a pierwsze nie. Wtedy otrzymamy z równ. 81) i 96)

$$\begin{aligned} \text{najw} (-O_0)_p &= \frac{1}{2} p_1 l_1 - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1} - \frac{p_1 l_1 (3l_1 + 4l_2)}{8(l_1 + l_2)} = \\ &= - \frac{p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1} \left\{ \dots \dots \dots 98) \right. \end{aligned}$$

Dla przęseł równych jest  $\text{najw} (-O_0)_p = -\frac{1}{8} pl$   
Równocześnie działa jednak ciężar własny, więc

$$\begin{aligned} najw (-O_0) &= \frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2) l_1} - \frac{p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2) l_1}, \\ najw (-O_0) &= \frac{4g_1(l_1 + l_2) l_1^2 - (g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3 + p_2 l_2^3)}{8(l_1 + l_2) l_1} \quad . \quad 99) \end{aligned}$$

A więc  $najw (-O_0)$  jest ujemnem, jeżeli  
 $g_1 l_1^3 + (g_2 + p_2) l_2^3 > 4g_1(l_1 + l_2) l_1^2,$

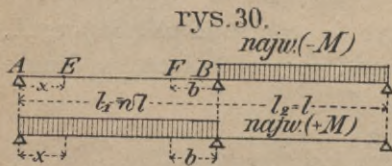
czyli jeżeli 
$$p_2 > \left( 3 \frac{l_1^3}{l_2^3} + 4 \frac{l_2}{l_1} \right) g_1 - g_2 \quad . \quad . \quad . \quad 100)$$

Jeżeli rozpiętości są równe, oddziaływanie  $O_0$  jest ujemne, jeśli  $p > 6g$ .

Możliwem zatem jest oddziaływanie ujemne tylko, jeśli  $l_2$ , a zatem i  $g_2$  jest znacznie większe niż  $l_1$ , względnie  $g_1$ . Przy równych długościach przęseł mogłoby to nastąpić tylko przy bardzo małych rozpiętościach około  $l=10^m$ .  $O_1$  nie może być wcale ujemnem.

c) Momenty. Przęsło pierwsze, część druga.

W przęśle skrajnem, jak wiemy, nie ma części pierwszej, tu punkt stały wpada na punkt A (rys. 30). Według równania 37) mamy



$$v_1 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_1}, \quad \mu_1 = 0,$$

więc według 45)

$$b_1 = \frac{l_1}{1 + v_1} = \frac{l_1^2}{3l_1 + 2l_2} \quad . \quad . \quad . \quad 101)$$

a dla  $l_1 = l_2 = l$

$$b = \frac{1}{5} l = 0.2 l \quad . \quad . \quad . \quad 102)$$

Dla  $najw (-M)$  musi być pierwsze przęsło nieobciążone, a drugie obciążone, więc według 77)  $M_1 = -\frac{p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}$ .

Wstawiwszy w rów. 65)  $M' = 0, M'' = M_1$ , otrzymamy

$$najw (-M) = M_1 \frac{x}{l_1} = -\frac{p_2 l_2^3 x}{8 l_1 (l_1 + l_2)} \quad . \quad . \quad . \quad 103)$$

$Najw (+M)$  jest dla obciążenia uzupełniającego, więc uwzględniając rów. 86)

$$najw (+M) = \frac{1}{2} p_1 x (l_1 - x) - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)} \frac{x}{l_1} + \frac{p_2 l_2^3 x}{8 l_1 (l_1 + l_2)},$$

$$najw (+M) = \frac{p_1 x}{8(l_1 + l_2)} [3 l_1 + 4 l_2] l_1 - 4(l_1 + l_2) x] \quad . \quad 104)$$



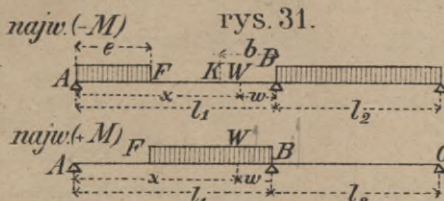
Dla pręseł równych otrzymamy z równ. 103)

$$\text{najw } M = -\frac{1}{16} p l x \quad , \quad \dots \quad 105)$$

$$\text{a z równ. 104) } \text{najw } (+M) = \frac{1}{16} p x (7l - 8x) \quad \dots \quad 106)$$

Pręseło pierwsze, część trzecia.

*Najw* (+*M*) (rys. 31) będzie w punkcie *W* części trzeciej, jeśli obciążymy długość *FB*, a drugiego pręseła nie będziemy wcale obciążać.



$$\text{Wtedy } \mathcal{N}_1'' = -\frac{p_1(l_1^2 - e^2)^2}{4l_1^2},$$

$$\mathcal{N}_2' = 0, \text{ a zatem}$$

$$\text{według równ. 73) } M_1 = -\frac{p_1(l_1^2 - e^2)^2}{8l_1(l_1 + l_2)},$$

a według równ. 71), wstawivszy  $M' = 0, M'' = M_1,$

$$\begin{aligned} \text{najw } (+M) &= M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{p_1(l_1 - x)(l_1 x - e^2)}{2l_1} = \\ &= -\frac{p_1(l_1^2 - e^2)^2 x}{8l_1^2(l_1 + l_2)} + \frac{p_1(l_1 - x)(l_1 x - e^2)}{2l_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{najw } (+M) &= \frac{p_1}{8l_1^2(l_1 + l_2)} [(4l_1 l_2 (l_1^2 + e^2) + 3l_1^2 (l_1^2 + 2e^2) - e^4)x + \\ &\quad - 4l_1^2 (l_1 + l_2) (x^2 + e^2)] \quad \dots \quad 107) \end{aligned}$$

Długość zaś *e* znajdziemy z równ. 63)

$$w = \frac{b(l^2 - e^2)l}{l^3 - b e^2} \quad \text{dla } b = \frac{l_1^2}{3l_1 + 2l_2}$$

$$e = l \sqrt{\frac{(b-w)l}{b(l-w)}} \quad , \quad \dots \quad 108)$$

$$\text{przyczem} \quad w = l - x \quad \dots \quad 109)$$

Możnaby teraz wartość tę dla *e* wstawić w równanie 107) i otrzymalibyśmy *najw* (+*M*) jako funkcję *x*. Odciągnąwszy tę wartość od wartości dla obciążenia zupełnego, otrzymalibyśmy *najw* (-*M*). Ale ponieważ wzory te byłyby za zawile, więc zaniechamy ich wyprowadzenia. Wskazaniem jednak powyższym sposobem możemy w każdym danym przypadku wyznaczyć *najw* (+*M*) i *najw* (-*M*).

Jeśli  $l_1 = l_2 = l$  a  $p_1 = p_2 = p$ , to otrzymamy z równ. 107)

$$\text{najw } (+M) = \frac{p}{16l^3} (7l^4 x + 10l^2 e x - e^4 x - 8l^3 e^2 - 8l^3 x^2) \quad . \quad 110)$$

Z równ. 108) otrzymamy dla  $b = \frac{1}{3} l$

$$e = l \sqrt{\frac{l(\frac{1}{3}l - l + x)}{\frac{1}{3}lx}} = l \sqrt{5 - 4 \frac{l}{x}} \quad \dots \quad 111)$$

Wstawivszy tę wartość za  $e$  w 110), otrzymamy

$$\text{najw } (+M) = \frac{1}{2} p \left( 4lx - x^2 - 5l^2 + 2 \frac{l^3}{x} \right) \quad \dots \quad 112)$$

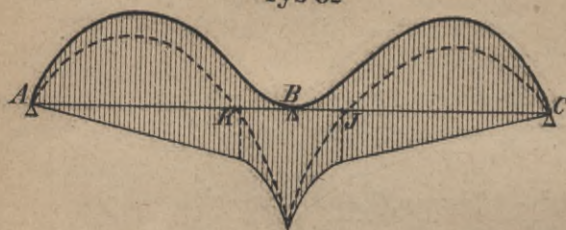
$M_z$  dla obciążenia zupełnego jest według równ. 87)

$$M_z = -\frac{1}{8} px(4x - 3l), \text{ więc}$$

$\text{najw } (-M) = -\frac{1}{8} px(4x - 3l) = \text{najw } (+M)$ , zatem

$$\text{najw } (-M) = -\frac{1}{8} pl^2 \left( 13 \frac{x}{l} - 20 + 8 \frac{l^2}{x^2} \right) \quad \dots \quad 113)$$

rys 32



Na podstawie tych równań wykreśliłiśmy linie najw. momentów dla belki dwuprzęsłowej o równych przęsłach (rys. 32.) Dla takiejże belki obliczył Winkler tablice

według poprzednich wzorów, które tu podajemy.

Ciśnienie na podpory.

$$\text{najw } (+O_0) = 0.3750 gl + 0.4375 pl$$

$$\text{najw } (-O_0) = 0.3750 gl - 0.0625 pl$$

$$\text{najw } (+O_1) = 1.25 (g + p) l$$

$$\text{najmn } (+O_1) = 1.25 gl.$$

Sily poprzeczne.

$x$	Sily poprzeczne		
	ciężar własny $q$	ciężar ruchomy	
		$\text{najw } (+q)$	$\text{najw } (-q)$
0	+ 0.375	+	-
0.1	+ 0.275	0.4375	0.0687
0.2	+ 0.175	0.2624	0.0874
0.3	+ 0.075	0.1932	0.1182
0.375	0	<b>0.1491</b>	<b>0.1491</b>
0.4	- 0.025	0.1359	0.1609
0.5	- 0.125	0.0898	0.2148
0.6	- 0.225	0.0544	0.2794
0.7	- 0.325	0.0287	0.3537
0.8	- 0.425	0.0119	0.4369
0.9	- 0.525	0.0027	0.5277
1.0	- 0.625	0	<b>0.6250</b>
$l$	$gl$	$pl$	$pl$

M o m e n t y.

9  
13  
9  
4  
4  
3  
2

x	e	m o m e n t		
		ciążar własny M	ciążar ruchomy	
			najw (+M)	najw (-M)
0	—	0	+	0
0.1	—	+ 0.0325	0.03875	0.00625
0.2	—	0.0550	0.06750	0.01250
0.3	—	0.0675	0.08625	0.01875
0.4	—	0.0700	0.09500	0.02500
0.5	—	0.0625	0.09375	0.03125
0.6	—	0.0450	0.08250	0.03750
0.7	—	0.0175	0.06125	0.04375
0.75	—	0	<b>0.04688</b>	<b>0.04688</b>
0.8	0	- 0.0200	0.03000	0.05000
0.85	0.5423	- 0.0425	0.01523	0.05773
0.9	0.7454	- 0.0675	0.00611	0.07361
0.95	0.8885	- 0.0950	0.00138	0.09638
1.00	1.00	- <b>0.1250</b>	0	<b>0.12500</b>
l	l	gl <sup>2</sup>	pl <sup>2</sup>	pl <sup>2</sup>

najw (+M<sub>g</sub>) = +0.07031 gl<sup>2</sup>, dla x=0.3750 l.  
 „ (+M<sub>p</sub>) = +0.09566 pl<sup>2</sup>, „ x=0.4374 l.

§. 20. Momenty podporowe belki trzyprzęsłowej.

Tu przypuścimy, że przęsła skrajne są równe i że ich rozpiętość l<sub>1</sub>=S l, zaś rozpiętość przęsła średniego l.

Otrzymamy wtedy według 21)

$$2 M_1 (l_1 + l) + M_2 l = \mathfrak{N}_1'' l_1 + \mathfrak{N}_2' l$$

$$M_1 l + 2 M_2 (l + l_1) = \mathfrak{N}_2'' l + \mathfrak{N}_3' l_1,$$

albo

$$2 M_1 (1 + S) + M_2 = \mathfrak{N}_1'' S + \mathfrak{N}_2'$$

$$M_1 + 2 M_2 (1 + S) = \mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3' S,$$

a stąd otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{2(1+S)(\mathfrak{N}_1'' S + \mathfrak{N}_2') - (\mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3' S)}{4(1+S)^2 - 1} \\ M_2 &= \frac{2(1+S)(\mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3' S) - (\mathfrak{N}_1'' S + \mathfrak{N}_2')}{4(1+S)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \dots 114)$$

Jeżeli obciążone jest tylko całe pierwsze przęsło ciężarem jednostkowym p<sub>1</sub>, to

$$\mathfrak{N}_1'' = \frac{1}{4} p_1 l_1^2 \quad \mathfrak{N}_3' = \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = 0, \text{ więc}$$

$$M_1 = - \left. \begin{aligned} &\frac{4S(1+S)}{4(1+S)^2 - 1} \frac{p_1 l_1^2}{8} = - \frac{4S^3(1+S)}{4(1+S)^2 - 1} \frac{p_1 l^2}{8} \end{aligned} \right\} 115 a)$$

$$M_2 = \frac{2\vartheta}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{p_1 l_1^2}{8} = \frac{2\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{p_1 l^2}{8} \quad . \quad 115b)$$

Jeżeli obciążone jest tylko całe drugie przeszło ciężarem jednostkowym  $p$ , to

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1'' = \mathfrak{N}_3' = 0, \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = -\frac{1}{4} p l^2, \quad \text{więc} \\ M_1 = M_2 = -\frac{2(1+\vartheta)\frac{1}{4} p l^2 - \frac{1}{4} p l^2}{4(1+\vartheta)^2-1} = \frac{2(1+2\vartheta)}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{p l^2}{8}, \quad \text{albo} \\ M_1 = M_2 = -\frac{2}{3+2\vartheta} \frac{p l^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 116) \end{aligned}$$

Jeśli wszystkie przeszła są całkowicie obciążone, otrzymamy  $M_1 = M_2 = -\frac{[4\vartheta^3(1+\vartheta) - 2\vartheta^3] p_1 + 2(1+2\vartheta)p l^2}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{1}{8}$ ,

$$M_1 = M_2 = -\frac{(1+2\vartheta)2\vartheta^3 p_1 + 2(1+2\vartheta)p l^2}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{1}{8} = -\frac{2(\vartheta^3 p_1 + p) l^2}{3+2\vartheta} \frac{1}{8} \quad 117)$$

$$\text{Jeżeli } p_1 = p, \text{ to } M_1 = M_2 = -\frac{2(1+\vartheta^3) p l^2}{3+2\vartheta} \frac{1}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 118)$$

Leber obliczył dla rozmaitych wartości  $\vartheta$  współczynniki rów. 115), 116), 118). Podajemy tu z nich niektóre:

	dla $\vartheta=0,5,$	$0,6,$	$0,7,$	$0,8,$	$0,85,$	$0,9,$	$0,95,$	$1,00$
$\frac{4\vartheta(1+\vartheta)}{4(1+\vartheta)^2-1}$	=0,375	0,416	0,451	0,482	0,496	0,509	0,521	0,533
$\frac{4\vartheta^3(1+\vartheta)}{4(1+\vartheta)^2-1}$	=0,094	0,150	0,221	0,308	0,358	0,412	0,471	0,533
$\frac{2}{3+2\vartheta}$	=0,500	0,476	0,455	0,435	0,426	0,417	0,408	0,400
$\frac{2(1+\vartheta^3)}{3+2\vartheta}$	=0,563	0,579	0,610	0,657	0,687	0,720	0,758	0,800
$\frac{2\vartheta}{4(1+\vartheta)^2-1}$	=0,125	0,130	0,133	0,134	0,134	0,134	0,134	0,133
$\frac{2\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1}$	=0,031	0,047	0,065	0,086	0,097	0,108	0,121	0,133

### §. 21. Ciężar własny.

a) Momenty podporowe otrzymamy według 117)

$$M_1 = M_2 = -\frac{2(\vartheta^3 g_1 + g) l^2}{3+2\vartheta} \frac{1}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 119)$$

a dla  $g=g_1$   $M_1 = M_2 = -\frac{2(1+\vartheta^3) g l^2}{3+2\vartheta} \frac{1}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 120)$

b) Siły poprzeczne.

W pierwszym przeszle jest  $M' = 0$ ,  $M'' = M_1$ , więc według 29)

$$Q_1' = \frac{1}{2}gl_1 + \frac{M_1}{l_1} = \frac{1}{2}gl_1 - \frac{2(\vartheta^3 g_1 + g)}{3+2\vartheta} \frac{l_1}{8\vartheta^2},$$

$$Q' = \{3g_1\vartheta^2(\vartheta+2) - g\} \frac{l_1}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)}, \quad \dots \quad 121)$$

a  $Q_1'' = Q_1' - g_1 l_1 = -\{g_1\vartheta^2(5\vartheta+6) + g\} \frac{l_1}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)}, \quad 122)$

a dla dowolnego punktu  $Q = Q' - g_1 x: \dots \dots \dots 123)$

W drugim przęśle otrzymamy  $M' = M'' = M_1$ , więc

$$Q_2' = \frac{1}{2}gl, \quad Q_2'' = -\frac{1}{2}gl, \quad \dots \dots \dots 124)$$

a dla dowolnego punktu  $Q = Q_2' - gx = \frac{1}{2}g(1-2x) \dots \dots \dots 125)$

jak dla belki jednoprzęsłowej.

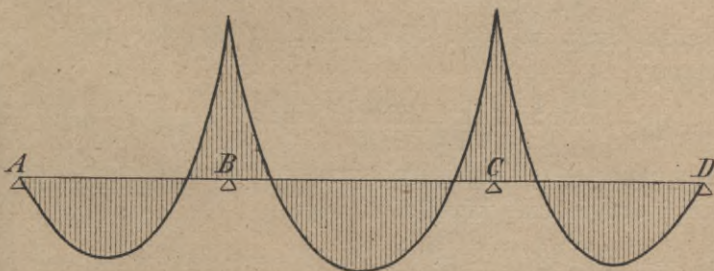
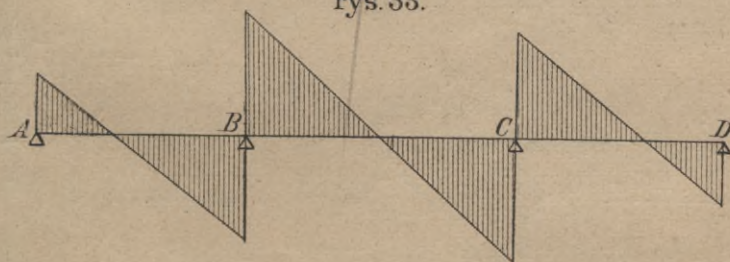
c) Oddziaływanie  $O_0$  na podporze skrajnej równe jest  $Q_1'$ , na drugiej według 27)

$$O_1 = Q_2' - Q_1'' = \frac{1}{2}gl + \frac{g_1\vartheta^2(5\vartheta+6) + g}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} l_1,$$

$$Q = \frac{g(6\vartheta+4\vartheta^2+1) + g_1(5\vartheta^3+6\vartheta^2)}{4\vartheta(3+2\vartheta)} l_1 \dots \dots \dots 126)$$

d) Moment otrzymamy w dowolnym punkcie na podstawie rów. 32)

rys. 33.



W pierwszym przęśle jest  $M'=0$ ,  $M''=M$ , więc

$$M = M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x) \dots \dots \dots 127$$

W drugim przęśle jest  $M'=M''=M$ , więc

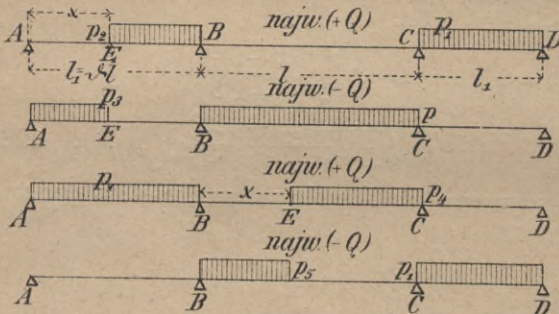
$$M = M_1 + \frac{1}{2} g x (l - x) \dots \dots \dots 128$$

Wykreślnie przedstawiliśmy siły poprzeczne i momenty na rys. 33,

$$\text{dla } \vartheta = 0.77, \quad g_1 = 0.891 g.$$

### §. 22. Największe siły poprzeczne.

rys. 34.



W pierwszym przęśle otrzymamy *najw* (+Q), obciążając pierwsze przęśło od E do B i całe trzecie przęśło (rys. 34).

Wtedy otrzymamy

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{p_2(l_1^2 - x^2)^2}{4l_1^2},$$

$$\mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = 0,$$

$\mathfrak{N}_3' = -\frac{1}{4} p_1 l_1^2$ , więc według 114)

$$M_1 = -\frac{2(1+\vartheta)p_2(l_1^2 - x^2)^2 \vartheta - p_1 l_1^4 \vartheta}{4l_1^2 [4(1+\vartheta)^2 - 1]}, \text{ a nazwawszy } \frac{x}{l_1} = m,$$

$$M_1 = -\frac{2(1+\vartheta)p_2(1-m^2)^2 - p_1 l_1^2 \vartheta}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \frac{\vartheta}{4},$$

$$M_1 = \left[ -\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} p_2 (1-m^2)^2 + \frac{2p_1 \vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \right] \frac{l^2}{8} \quad 129$$

Jeżeli teraz w rów. 56) wstawimy  $M'=0$ ,  $M''=M_1$ , to otrzymamy

$$\text{najw (+Q)} = \frac{-2(1+\vartheta)p_2(1-m^2)^2 + p_1 l_1 \vartheta}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \frac{l_1 \vartheta}{4} + \frac{1}{2} p_2 (1-m)^2 l_1 \quad 130$$

Dla *najw* (-Q) musi być przęśło pierwsze obciążone od A do E i drugie całe przęśło. A więc

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{p_3 x^2}{4l_1^2} (2l_1^2 - x^2), \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = -\frac{1}{4} p l^2, \quad \mathfrak{N}_3' = 0,$$

więc według 114)

$$M_1 = - \frac{2(1+\vartheta) \left[ \frac{p_3 x^2 (2l_1^2 - x^2) \vartheta}{4l_1^2} \right] - \frac{1}{4} p l^2}{4(1+\vartheta)^2 - 1}, \text{ a dla } \frac{x}{l_1} = m,$$

$$M_1 = - \left[ \frac{4(1+\vartheta) \vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} p_3 m^2 (2 - m^2) + \frac{2}{3+2\vartheta} p \right] \frac{l^2}{8}. \quad 131)$$

Jeżeli teraz w równ. 57) wstawimy  $M' = 0$ ,  $M'' = M_1$ , otrzymamy

$$\text{najw } (-Q) = \frac{M_1}{I_1} - \frac{1}{2} \frac{p_3 x}{I_1} \dots \dots \dots 132)$$

Dla najw. sił poprzecznych w punkcie  $E$  drugiego przęsła musimy obciążyć całe pierwsze przęsło, a drugie od  $E$  do  $C$ . A więc będzie:

$$\mathfrak{R}_1'' = -\frac{1}{4} p_1 l_1^2, \quad \mathfrak{R}_2'' = -p_4 \frac{(l^2 - x^2)^2}{4l^2}$$

$$\mathfrak{R}_2' = -\frac{p_4 (l-x)^2}{4l^2} [2l^2 - (l-x)^2] = -\frac{p_4 (l-x)^2}{4l^2} (l^2 + 2lx - x^2).$$

Według 114) jest

$$M_1 - M_2 = \frac{\mathfrak{R}_1'' \vartheta + \mathfrak{R}_2' - \mathfrak{R}_2'' - \mathfrak{R}_3' \vartheta}{1+2\vartheta},$$

a wstawiwszy otrzymane wartości, otrzymamy po skróceniu

$$M_1 - M_2 = \frac{2p_4 (l-x)^2 x^2 - p_1 l^4 \vartheta^3}{4l^2 (1+2\vartheta)},$$

a więc według 56) i zważywszy, że  $M' = M_1$ ,  $M'' = M_2$ ,

$$\text{najw } (+Q) = \frac{p_1 l^4 \vartheta^3 - 2p_4 (l-x)^2 x^2}{4l^3 (1+2\vartheta)} + \frac{1}{2} p_4 \frac{(l-x)^2}{l}, \text{ albo}$$

$$\text{najw } (+Q) = \frac{p_1 l^4 \vartheta^3 + 2p_4 (l-x)^2 (l^2 + 2\vartheta l^2 - x^2)}{4l^3 (1+2\vartheta)},$$

a wstawiwszy  $\frac{x}{l} = n$ , otrzymamy

$$\text{najw } (+Q) = \frac{p_1 \vartheta^3 + 2p_4 (1-n)^2 (1+2\vartheta - n^2)}{4(1+2\vartheta)} \cdot l \quad . \quad 133)$$

$\text{Najw } (-Q)$  otrzymamy z równania 133), zmieniawszy znak i  $x$  na  $(l-x)$ , lub  $n$  na  $(1-n)$ , więc

$$\text{najw } (-Q) = -\frac{p_1 l^4 \vartheta^3 + 2p_4 x^2 (2\vartheta l^2 + 2lx - x^2)}{4l^3 (1+2\vartheta)}, \text{ lub}$$

$$\text{najw } (-Q) = -\frac{p_1 \vartheta^3 + 2p_4 n^2 (2\vartheta + 2n - n^2)}{4(1+2\vartheta)} l \quad . \quad 134)$$

### §. 23. Największe oddziaływania.

Największe oddziaływanie ujemne w  $A$  otrzymamy, wstawiając w rów. 131) i 132)  $x=0$  i  $m=0$ . Otrzymamy więc z rów. 131)  $M_1 = \frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)}$ ,

zatem 
$$\text{najw}(-O_0) = -\frac{pl}{4\vartheta(3+2\vartheta)} : \dots \dots 135)$$

$\text{Najw}(+O_0)$  otrzymamy, odciągając w rów. 135) od rów. 121) dla obciążenia zupełnego, zmieniając w niem  $g_1$  i  $g$  na  $p_1$  i  $p$ . Więc

$$\text{najw}(+O_0) = \frac{3p_1\vartheta^2(\vartheta+2) - p}{4\vartheta(3+2\vartheta)} l_1 + \frac{pl}{4\vartheta(3+2\vartheta)} = \frac{3\vartheta(\vartheta+2)}{4(3+2\vartheta)} p_1 l \quad 136)$$

$\text{Najw}(-O_1)$  otrzymamy, wstawiając w rów. 134)  $x=0$  i  $n=0$ , a mianowicie  $\text{najw}(-O_1) = -\frac{p_1 l \vartheta^3}{4(1+2\vartheta)} \dots \dots 137)$

$\text{Najw}(+O_1)$  otrzymamy, odciągając w rów. 137) od rów. 126) dla obciążenia zupełnego i zmieniając  $g_1$  i  $g$  na  $p_1$  i  $p$ ,

$$\text{najw}(+O_1) = \frac{p(6\vartheta+4\vartheta^2+1) + p_1(5\vartheta^3+6\vartheta^2)}{4\vartheta(3+2\vartheta)} l_1 + \frac{p_1 l \vartheta^3}{4(1+2\vartheta)},$$

$$\text{najw}(+O_1) = \frac{p(6\vartheta+4\vartheta^2+1)(1+2\vartheta) + 2p_1\vartheta^2(6\vartheta^2+10\vartheta+3)}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \frac{l}{4} \quad 138)$$

### §. 24. Największe momenty.

I. przeszło, część średnia. Największy ujemny moment w części średniej otrzymamy przy obciążeniu średniego przęsła, największy dodatni przy obciążeniu obu skrajnych przęseł. Dla  $\text{najw}(-M)$  otrzymamy więc  $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_3 = 0$ ,  $\mathfrak{N}_2 = -\frac{1}{4}pl^2$ , więc według 114)

$$M_1 = -\frac{(1+2\vartheta)pl^2}{4(4(1+\vartheta)^2-1)} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)}.$$

A więc według 65), wstawiając  $M'=0$  i  $M''=M_1$ , otrzymamy

$$\text{najw}(-M) = -\frac{pl_1^2}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} \frac{x}{l_1} = -\frac{pl_1 x}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)} \frac{x}{l_1} \quad 139)$$

$\text{Najw}(+M)$  otrzymamy, jeśli pierwsze i trzecie przęsło są obciążone, więc  $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_3 = -\frac{1}{4}p_1 l_1^2$ ,  $\mathfrak{N}_2 = 0$ .

A zatem według 114)



$$M_1 = -\frac{(1+2\vartheta)\vartheta p_1 l_1^2}{4(4(1+\vartheta)^2 - 1)} = -\frac{\vartheta p_1 l_1^2}{4(3+2\vartheta)} = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{p_1 l^2}{8},$$

a więc według 67)

$$\text{najw (+M)} = -\frac{\vartheta p_1 l_1 x}{4(3+2\vartheta)} + \frac{1}{2} p_1 x (l_1 - x) =$$

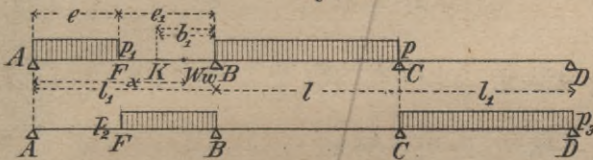
$$\text{najw (+M)} = \frac{3(2+\vartheta)l_1 - 2(3+2\vartheta)x}{4(3+2\vartheta)} p_1 x =$$

$$= \frac{3(2+\vartheta) - 2(3+2\vartheta)m}{4(3+2\vartheta)} p_1 l_1^2 m, \dots 140)$$

jeśli  $m = \frac{x}{l_1}$ .

Trzecia część. Najw (-M) otrzymamy w punkcie W,

rys. 35.



gdz pierwsze  
przesło obciążone  
jest od A do F i  
całe drugie przę-  
sło (rys. 35.).

Według 63)

jest  $w = \frac{b_1(2l_1 - e_1)e_1 l_1}{l_1^3 - b_1(l_1^2 - 2e_1 l_1 + e_1^2)}$ , a stąd

$$e_1 = l_1 \left( 1 - \sqrt{\frac{(b_1 - w)l_1}{b_1(l_1 - w)}} \right), \dots 141)$$

czyli  $e = l_1 \sqrt{\frac{l_1 b_1 - w}{b_1 l_1 - w}}, \dots 142)$

Odstęp  $b_2$  punktu stałego  $K_1$  od C w drugim przęśle jest według 45)  $b_2 = \frac{l}{1+\nu_2}$ , zaś według 37)  $\nu_2 = \frac{2(l_1+l)}{l} = 2(1+\vartheta)$ , więc

$$b_2 = \frac{l}{3+2\vartheta} = a_2, \dots 143)$$

Dalej  $\nu_1 = \frac{2(l+l_1) - \frac{l}{\nu_2}}{l_1} = \frac{2(1+\vartheta)}{\vartheta} - \frac{1}{2\vartheta(1+\vartheta)}$ ,

$\nu_1 = \frac{(3+2\vartheta)(1+2\vartheta)}{2\vartheta(1+\vartheta)}$ , więc, ponieważ  $b_1 = \frac{l_1}{1+\nu_1}$ ,

$$b_1 = \frac{2\vartheta(1+\vartheta)}{3+10\vartheta+6\vartheta^2} l_1, \dots 144)$$

Dla obciążenia pierwszego przęsła od A do F i całego drugiego przęsła jest

$$\mathfrak{R}_1'' = -\frac{p_3 e^2}{4l^2} (2l^2 - e^2), \quad \mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'' = -\frac{1}{4} p l^2, \quad \mathfrak{R}_3' = 0,$$

więc według rów. 131), wstawivszy  $e$  zamiast  $x$ , gdy  $\frac{e}{l_1} = m_1$ ,

$$M_1 = \frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3 p_1 m_1^2 (2 - m_1^2) + 2(1+2\vartheta)p l^2}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \cdot \frac{l^2}{8}$$

$$= \left[ \frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} p_1 m_1^2 (2 - m_1^2) - \frac{2}{3+2\vartheta} p \right] \frac{l^2}{8}.$$

Teraz otrzymamy wedle 70)

$$\text{najw } (-M) = \frac{M_1 x}{l_1} + \frac{p_1 e^2 (l_1 - x)}{2l_1} \quad \dots \quad 145)$$

*Najw* (+ $M$ ) obliczymy, obciążając długość  $FB$  i trzecie przęsło. Otrzymamy wtedy analogicznie do 129)

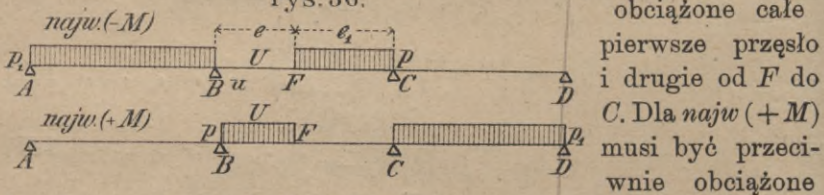
$$M_1 = \frac{-2(1+\vartheta)p_2(1 - m_1^2)^2 + p_3 l_1^2 \vartheta}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \cdot \frac{l_1^2 \vartheta}{4}, \quad \dots \quad 146)$$

a według równ. 71)

$$\text{najw } (+M) = M_1 \frac{x}{l} + \frac{p_2(1 - m)(m - m_1^2)}{2} l_1^2 \quad \dots \quad 147)$$

II. przęsło, część pierwsza.

Tu dla *najw* ( $-M$ ) w punkcie  $U$  (rys. 36.) musi być



drugie przęsło od  $B$  do  $F$  i trzecie przęsło.

Według 62) 
$$u = \frac{a(2l - 3b - e)el}{cl^2 + (2a - b)el - (a + b)e^2},$$

a ponieważ  $a_2 = b_2$ , więc  $c = l - 2b_2$ ,

$$u = \frac{b_2(2l - 3b_2 - e)cl}{l^3 - 2b_2 l^2 + b_2 el - 2b_2 e^2}, \text{ a ze względu na 143)}$$

$$u = \frac{(3+4\vartheta)l - (3+2\vartheta)e}{(1+2\vartheta)l^2 + el - 2e^2} \frac{el}{3+2\vartheta} \quad \dots \quad 148)$$

albo rozwiązawszy to równanie ze względu na  $e$

$$e^2 - el \frac{l(3+4\vartheta) - u(3+2\vartheta)}{(3+2\vartheta)(l-2u)} + \frac{(1+2\vartheta)ul^2}{l-2u} = 0 \quad \dots \quad 148a)$$

Przy obciążeniu, dla którego otrzymamy *najw* ( $-M$ ) jest

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{1}{4} p_1 l_1^2, \quad \mathfrak{R}_2'' = -p \frac{(l^2 - e^2)^2}{4l^2},$$

$$\mathfrak{N}_2' = -\frac{p(l-e)^2}{4l^2} (l^2 + 2le - e^2),$$

a więc według 114)

$$M_1 = -\frac{2(1+\mathfrak{S}) \left[ \frac{1}{4} p l_1^2 \mathfrak{S} + \frac{p(l-e)^2}{4l^2} (l^2 - 2le - e^2) \right] - p \frac{(l^2 - e^2)^2}{4l^2}}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1},$$

$$M_1 = -\frac{2(1+\mathfrak{S}) [p l_1^2 \mathfrak{S} + p(l-e)^2 (l^2 + 2le - e^2)] - p(l^2 - e^2)^2}{4l^2 [4(1+\mathfrak{S})^2 - 1]},$$

a wstawivszy  $\frac{e}{l} = n_1$ ,

$$M_1 = \left[ -\frac{4(1+\mathfrak{S}) \mathfrak{S}^3 p_1}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1} - \frac{4(1+\mathfrak{S}) (1-n_1)^2 (1+2n_1-n_1^2) p}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1} + \frac{2p(1-n_1^2)^2}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1} \right] \frac{l^2}{8},$$

$$M_1 - M_2 = \frac{2p(l-e)^2 e^2 - p_1 l^4 \mathfrak{S}^3}{4l^2 (1+2\mathfrak{S})} = \left( \frac{4p}{1+2\mathfrak{S}^2} (1-n_1)^2 n_1^2 - \frac{2p_1 \mathfrak{S}^3}{1+2\mathfrak{S}} \right) \frac{l^2}{8} \quad \left. \vphantom{M_1} \right\} 149)$$

a

Teraz otrzymamy według rów. 68)

$$\text{najw } (-M) = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{1} x + \frac{pe_1^2 x}{2l} \dots 150)$$

Najw (+M) otrzymamy, obciążyvwszy drugie przęsło od B do F,

i całe trzecie przęsło, a zatem  $\mathfrak{N}_1 = 0$ ,  $\mathfrak{N}_2' = -\frac{pe^2}{4l^2} (2l - e)^2$ ,

$$\mathfrak{N}_2'' = -\frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2), \quad \mathfrak{N}_3 = -\frac{1}{4} p_1 l_1^2,$$

$$M_1 = -\frac{2(1+\mathfrak{S}) \frac{pe^2}{4l^2} (2l-e)^2 - \frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2) - \frac{1}{4} p_1 l_1^2 \mathfrak{S}}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1},$$

$$M_1 = -\left[ \frac{2p n_1^2}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1} (2(1+\mathfrak{S})(2-n_1)^2 - (2-n_1^2)) + \frac{2\mathfrak{S}^3 p_1}{4(1+\mathfrak{S})^2 - 1} \right] \frac{l^2}{8} \dots 151)$$

$$M_1 - M_2 = \frac{-\frac{pe^2}{4l^2} (2l - e)^2 + \frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2) + \frac{1}{4} p_1 l_1^2 \mathfrak{S}}{1+2\mathfrak{S}},$$

$$M_1 - M_2 = \left( -\frac{4}{1+2\mathfrak{S}} p n_1^2 (1-n_1)^2 + \frac{2\mathfrak{S}^3}{1+2\mathfrak{S}} p_1 \right) \frac{l^2}{8} \quad 152)$$

$$\text{najw (+M)} = M_1 - (M_1 - M_2)n + \frac{pn}{2} (2n_1 - n_1^2 - n)l^2 \quad 153)$$

jeśli  $n = \frac{x}{l}$ .

Średnia część.

Dla średniej części otrzymamy *najw* ( $-M$ ), obciążwszy pierwsze i trzecie przęsło, zaś *najw* ( $+M$ ), obciążwszy drugie przęsło. Jeśli pierwsze i trzecie przęsło jest obciążone, otrzymamy z rów. 129, robiąc  $m=0$  a  $p_2=p_1$ ,

$$M_1 = M_2 = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{p_1 l^2}{8} \dots \dots \dots 154)$$

Wstawiliśmy w rów. 65)  $M' = M_1 = M_2 = M''$ , otrzymamy

$$\text{najw } (-M) = M' = M_1 = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{p_1 l^2}{8} \dots \dots \dots 155)$$

Jestto równanie linii poziomej.

Dla *najw* ( $+M$ ) należy obciążyć drugie przęsło, więc

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_3 = 0, \quad \mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'' = -\frac{1}{4}pl^2,$$

zatem 
$$M_1 = M_2 = \frac{2(1+\vartheta)\mathfrak{R}_2' - \mathfrak{R}_2''}{4(1+\vartheta)^2 - 1} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)},$$

a według 67)

$$\text{najw (+M)} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)} + \frac{1}{2}px(1-x) \dots \dots \dots 156)$$

### §. 25. Przykład.

Dane. Most kolejowy ma dwie belki główne ciągle trzyprzęsłowe. Rozpiętość przęseł skrajnych wynosi  $l_1 = 27.87m$ , średniego  $l = 36.2m$ . Obliczyć należy największe siły poprzeczne i momenty, przypuszczając ciężar zastępczy wedle rozporządzenia austriackiego. Jako ciężar stały przyjmujemy dla przęseł skrajnych wedle wzoru  $g = 30l + 800^*)$ ,  $g_1 = 30 \cdot 27.87 + 800 = 1636kg/m = 1.64t/m$ ;  $g = 30 \cdot 36.2 + 800 = 1886kg/m = 1.89t/m$ .

Na jedną belkę wypada więc

$$g_1 = 0.82t/m, \quad g = 0.94t/m.$$

Obliczenie. Wedle rozporządzenia ministeryalnego austriackiego jest dla obu belek ciężar zastępczy dla momentów dla obciążenia całkowitego przęsła skrajnego  $6145kg/m$ , zaś dla średniego  $5771$ , więc  $p_1 = 3.073t/m$ ,  $p = 2.8855t/m$ .

a) Ciężar stały.

Spółczynnik  $\vartheta = \frac{l}{l_1} = \frac{27.87}{36.2} = 0.77$ , więc według 119)

$$M_1 = M_2 = -\frac{2(0.77^3 \cdot 0.82 + 0.94)}{3 + 2 \cdot 0.77} \cdot \frac{36.2^2}{8} = -94.84tm.$$

\*) patrz Podr. t, m. tom I. str. 6.

α) Siły poprzeczne. Według 121)

$$Q_1' = (3 \cdot 0 \cdot 82 \cdot 0 \cdot 77' (2 + 0 \cdot 77) - 0 \cdot 77) \frac{27 \cdot 87}{4 \cdot 0 \cdot 77^2 (3 + 2 \cdot 0 \cdot 77)} = 8 \cdot 29 \text{ t}$$

$$Q_1'' = 8,29 - 0 \cdot 82 \cdot 27 \cdot 87 = -14 \cdot 57 \text{ t.}$$

W drugim przęśle  $Q_2' = \frac{1}{2} 0 \cdot 94 \times 36 \cdot 2 = +17 \cdot 01 \text{ t}$

$$Q_2'' = -\frac{1}{2} 0 \cdot 94 \times 36 \cdot 2 = -17 \cdot 01 \text{ t.}$$

β) Oddziaływania.  $O_1 = Q_1' = 8 \cdot 29 \text{ t,}$

$$Q_2 = 14 \cdot 57 + 17 \cdot 01 = 3 \cdot 58 \text{ t.}$$

γ) Momenty.

W pierwszym przęśle otrzymamy według 127)

$$M = -94 \cdot 84 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} 0 \cdot 82 \frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) l_1^2,$$

$$M = -94 \cdot 84 \frac{x}{l_1} + 318 \cdot 47 \frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right).$$

Dla  $\frac{x}{l_1} = 0 \quad 0 \cdot 1 \quad 0 \cdot 2 \quad 0 \cdot 3 \quad 0 \cdot 4 \quad 0 \cdot 5$

$$M = 0 + 19 \cdot 18 + 31 \cdot 98 + 38 \cdot 42 + 38 \cdot 90 + 32 \cdot 20 \text{ tm.}$$

$$\frac{x}{l_1} = 0 \cdot 6 \quad 0 \cdot 7 \quad 0 \cdot 8 \quad 0 \cdot 9 \quad 1 \cdot 00$$

$$M = +19 \cdot 58 + 0 \cdot 48 - 24 \cdot 84 - 56 \cdot 70 - 94 \cdot 84 \text{ tm.}$$

W drugim przęśle otrzymamy według 128)

$$M = -94 \cdot 84 + \frac{1}{2} 0 \cdot 94 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) = -94 \cdot 84 + 0 \cdot 47 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) l^2,$$

$$M = -94 \cdot 84 + 615 \cdot 91 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Zatem dla  $\frac{x}{l} = 0 \quad 0 \cdot 1 \quad 0 \cdot 2 \quad 0 \cdot 3 \quad 0 \cdot 4 \quad 0 \cdot 5$

$$M = -94 \cdot 84 - 39 \cdot 41 + 3 \cdot 70 + 34 \cdot 50 + 52 \cdot 98 + 59 \cdot 14 \text{ tm.}$$

b) Ciężar ruchomy.

α) Siły poprzeczne.

W pierwszym przęśle otrzymamy największe dodatnie siły poprzeczne, obciążając pierwsze przęśło od *E* do *B* (rys. 34.) i całe trzecie przęśło. Otrzymamy wtedy według 130)

$$\text{najw (+} Q) = \frac{-2(1 + 0 \cdot 77) p_2 (1 - m^2)^2 + 3 \cdot 073}{4(1 + 0 \cdot 77)^2 - 1} \frac{27 \cdot 87 \cdot 0 \cdot 77}{4} +$$

$$+ \frac{1}{2} p_2 (1 - m^2)^2 \cdot 27 \cdot 87$$

$$\text{najw (+} Q) = -1 \cdot 647 p_2 (1 - m^2)^2 + 1 \cdot 429 + 13 \cdot 935 p_2 (1 - m^2),$$

Dla  $m = 0$  jest  $p_2 = \frac{7 \cdot 049}{2}$ , więc  $\text{najw (+} Q) = 44 \cdot 732 \text{ t.}$

Wstawiając dla innych  $m$  wartości  $m$  i  $p_2$ , otrzymamy

$$\frac{x}{l_1} = 0 \quad 0 \cdot 1 \quad 0 \cdot 2 \quad 0 \cdot 3 \quad 0 \cdot 4 \quad 0 \cdot 5 \quad 0 \cdot 6 \quad 0 \cdot 7 \quad 0 \cdot 8 \quad 0 \cdot 9 \quad 1 \cdot 0$$

$$\text{najw (+} Q) = 44 \cdot 732 \quad 36 \cdot 465 \quad 28 \cdot 955 \quad 22 \cdot 440 \quad 17 \cdot 325 \quad 12 \cdot 801 \quad 8 \cdot 928 \quad 6 \cdot 101 \quad 3 \cdot 763 \quad 2 \cdot 132 \quad 1 \cdot 429 \text{ t.}$$

*Najw* (− *Q*) otrzymamy z rów. 131) i 132)

$$M_1 = - (0 \cdot 2803 p_3 m^2 (2 - m^2) + 0 \cdot 4405 p) \frac{36 \cdot 2^2}{8},$$

a wedle 132) 
$$najw(-Q) = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} p_3 m^2 l_1$$

$$najw(-Q) = - (0.2803 p_3 m^2 (2 - m^2) + 0.4405 \times 2.8855) \frac{163.805}{27.87} +$$

$$- \frac{1}{2} p_3 m^2 27.87,$$

$$najw(-Q) = - (1.647 p_3 m^2 (2 - m^2) + 7.470 + 13.935 p_3 m^2).$$

Wstawivszy wartości za  $m = \frac{x}{l_1}$  i za  $p_3$  wedle rozporządzenia austriackiego zmienne wedle długości obciążonej, otrzymamy

dla $m =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$najw(-Q) =$	-7.470,	-9.038,	-12.111,	-16.163,	-20.572,	-26.014,	-31.994,
	0.7	0.8	0.9	1.00			
	-38.410,	-45.949,	-54.101,	-62.389 t.			

W drugim przesłie otrzymamy  $najw(+Q)$  z rów. 133)

$$najw(+Q) = \frac{3.073 \times 0.77^3 + 2 p_4 (1 - n)^2 (1 + 2 \times 0.77 - n^2)}{4(1 + 2 \times 0.77)} l$$

$$najw(+Q) = + 5.0 + 7.126 p_4 (1 - n)^2 (2.54 - n^2).$$

Wstawivszy wartości za  $n = \frac{x}{l}$  i  $p_4$  według długości obciążonej przesła średniego, otrzymamy,

dla $\frac{x}{l} =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$najw(+Q) =$	63.517	54.059	44.747	35.921	27.858	21.210	15.763	11.405	8.302	5.996	5.00.

Ponieważ belka jest symetryczną, więc  $najw(+Q)$  dla  $n$  jest zarazem równe  $- najw(-Q)$  dla  $(1 - n)$ . Powyższe wartości dają nam więc zarazem  $najw(-Q)$ .

β) Momenty. Pierwsze przesło, część średnia.

Według 38) jest  $v_2 = 2(1 + \xi) = 2(1 + 0.77) = 3.54$ , zaś  $b_2 = \frac{l}{1 + v_2} =$

$$= \frac{l}{1 + 3.54} = \frac{l}{4.54} = 0.22l = 0.22 \times 36.2 = 7.964 m.$$

$$v_1 = \frac{2(1 + \xi)}{5} - \frac{1}{5v_2} = \frac{2(1 + 0.77)}{0.77} - \frac{1}{0.77 \times 3.54} = 4.231,$$

$$b_1 = \frac{l_1}{1 + 4.231} = \frac{l_1}{5.231} = 0.1912 l_1 = 5.328 m.$$

Wprost możemy otrzymać  $b_1$  z rów. 144)

$$b_1 = \frac{2 \times 0.77 (1 + 0.77)}{3 + 10 \times 0.77 + 6 \cdot 0.77^2} 27.87 = 0.1912 \times 27.87 = 5.328 m.$$

Według rów. 139) i 140) otrzymamy

$$najw(-M) = - \frac{2.855 \times 36.2^2}{4(3 + 2 \times 0.77)} \frac{x}{l_1} = - 208.2 \frac{x}{l_1},$$

a 
$$najw(+M) = \frac{3(2 + 0.77) - 2(3 + 2 \times 0.77)m}{4(3 + 2 \times 0.77)} \cdot 3.073 \cdot 27.87^2 m,$$

$$najw(+M) = 1092.251 m - 1193.456 m^2.$$

Dla $m =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$najw(+M) =$	0	+97.29	+170.71	+220.26	+247.75	+247.76	+225.71
$najw(-M) =$	0	-20.82	-41.64	-62.46	-83.28	-104.20	-124.92

$$\begin{array}{r} 0.7 \qquad 0.8 \\ +179.79 \quad +99.99 \\ -145.74 \quad -166.56. \end{array}$$

Pierwsze przeszło, część trzecia.

Tu wyznaczmy *najw* (+*M*) i *najw* (-*M*) tylko jeszcze dla punktów dla których  $m = 0.9$  i  $1.0$ , czyli dla  $w = 0.1$  i  $w = 0$ .

Z rów. 142) otrzymamy

$$\begin{array}{l} \text{dla } w = 0.1 \quad e_1 = 27.87 \sqrt{\frac{l_1 \cdot 5.328 - 2.787}{b_1 \cdot 27.87 - 2.787}} = 22.551 m, \\ \text{,, } w = 0 \quad e_1 = l_1. \end{array}$$

Dalej mamy dla  $w = 0.1$ ,  $p_1 = 3.192$ ,  $p = 2.885$ ,

$$m_1 = \frac{22.551}{27.87} = 0.8092, \text{ więc według 145)}$$

$$M_1 = - \left[ \frac{4(1+5)5^3}{4(1+5)^2-1} \times 3.192 \times 0.8092^2 (2 - 0.8092^2) + \frac{2}{3+2.5} \cdot 2.885 \right] \frac{36.2^2}{8},$$

$$M_1 = - (0.2803 \times 3.192 \times 0.6547 \times 1.3453 + 0.4405 \times 2.885) 163.805,$$

$$M_1 = - (0.7880 + 1.2790) 163.805 = 338.585 tm.$$

$$\text{Najw} (-M) = - 338.585 \times 0.9 + \frac{2.711 \times 22.551^2 (1 - 0.9)}{2},$$

$$\text{najw} (-M) = - 304.72 + 68.93 = - 255.79 tm.$$

Dla  $w = 0$ ,  $p_1 = 3.073$  i  $m_1 = 1$

$$M_1 = - \left[ \frac{4(1+5)5^3}{4(1+5)^2-1} \cdot 3.073 + \frac{2}{3+2.5} \cdot 2.885 \right] \frac{36.2^2}{8},$$

$$M_1 = - (0.2803 \times 3.073 + 0.4405 \times 2.885) 163.805,$$

$$M_1 = - 350.525 tm.$$

Dalej otrzymamy według 146)

$$\text{dla } w = 0.1 \text{ i } p_2 = \frac{11.308}{2} = 5.654,$$

$$\begin{aligned} \text{najw} (+M) &= \frac{-2(1+0.77)5.654(1-0.8092^2)^2 + 3.073}{4(1+0.77)^2-1} \frac{27.87^2 \times 0.77}{4} = \\ &= + 8.856 tm, \end{aligned}$$

a według rów. 147)

$$\begin{aligned} \text{najw} (+M) &= 8.856 \times 0.9 + \frac{5.654 \times 0.1 (0.9 - 0.8092^2)}{2} 27.87^2 = \\ &= 7.970 + 41.50 = 49.47 tm. \end{aligned}$$

Dla  $w = 0$  otrzymamy  $p_2 = 0$ , więc z rów. 146)

$$M_1 = \frac{3.073 \times 27.87^2 \times 0.77}{4(4(1+0.77)^2-1)} = 39.86 tm,$$

a więc otrzymamy

$$\begin{array}{r} \text{dla } m = \quad 0.9 \qquad 1.0 \\ \text{najw} (+M) \quad +49.47 \quad +39.86 tm \\ \text{najw} (-M) \quad -255.79 \quad -349.29 \text{ ,,} \end{array}$$

Drugie przeszło, część pierwsza.

Otrzymaliśmy pierwiej  $b_2 = 0.22l = a_2$ , a więc wyznaczmy największe i najmniejsze momenty dla  $u = 0.1l$  i  $u = 0.2l$ , bo dla  $u = 0$ , czyli dla średniej podpory, jużesmy otrzymali *najw* (+*M*) i *najw* (-*M*).

Z rów. 148a otrzymamy, wstawivszy  $v = \frac{u}{l}$ ,

$$e^2 - e \times 36 \cdot 2 \frac{(3 + 4 \times 0.77) - v(3 + 2 \times 0.77)}{(3 + 2 \cdot 0.77)(1 - 2v)} + \frac{(1 + 2 \times 0.77)v}{1 - 2v} 36 \cdot 2^2 = 0.$$

$$e^2 - e \times 7 \cdot 97 \frac{6 \cdot 08 - 4 \cdot 54v}{1 - 2v} + \frac{2 \cdot 54v}{1 - 2v} \times 1310 \cdot 44 = 0.$$

Stąd otrzymamy dla  $v = 0.1$

$$e^2 - 56 \cdot 047e + 416 \cdot 065 = 0, \text{ więc}$$

$$e = + 28 \cdot 023 - \sqrt{28 \cdot 023^2 - 416 \cdot 065} = 8 \cdot 81 m,$$

a dla  $v = 0.2$   $e^2 - 68 \cdot 701e + 1109 \cdot 2 = 0$ , zatem

$$e = 34 \cdot 35 - \sqrt{34 \cdot 35^2 - 1109 \cdot 2} = 25 \cdot 94 m.$$

$M_1$  wyznaczmy z rów. 149),

$$\text{zatem dla } v = \frac{u}{l} = 0.1, \quad m_1 = \frac{8 \cdot 81}{36 \cdot 2} = 0.2434, \text{ a } p_1 = 3 \cdot 073 t/m$$

$$M_1 = \left[ - \frac{2(1 + 0.77)(3 \cdot 073 \times 0.77^2 + 3 \cdot 084(1 - 0.2434)^2(1 + 2 \times 0.2434 - 0.2434^2))}{4(\times 4(1 + 0.77)^2 - 1)} + \right. \\ \left. + \frac{-3 \cdot 084(1 - 0.2434^2)^2}{4(4(1 + 0.77)^2 - 1)} \right] 36 \cdot 2^2, \text{ czyli}$$

$$M_1 = - 323 \cdot 55 tm.$$

Dalej mamy

$$M_1 - M_2 = \frac{2 \times 3 \cdot 084(1 - 0.2434)^2 0.2434^2 - 3 \cdot 073 \times 0.77^2}{4(1 + 2 \times 0.77)} \times 36 \cdot 2^2 = - 122 \cdot 89 tm,$$

więc według 150)

$$\text{najw (+M)} = - 323 \cdot 55 + 122 \cdot 89 \times 0.1 + \frac{3 \cdot 084 \times 27 \cdot 39^2 \times 0.1}{2} = \\ = - 323 \cdot 55 + 12 \cdot 29 + 115 \cdot 68 = - 195 \cdot 58 tm.$$

$$\text{Dla } v = \frac{u}{l} = 0.2, \quad m_1 = \frac{25 \cdot 94}{36 \cdot 2} = 0.7066, \quad p = 4 \cdot 214 t/m, \quad \zeta = 0.77,$$

otrzymamy wedle 149)

$$M_1 = [- 0.2803 \times 3 \cdot 073 - 0.614(1 - 0.7066)^2(1 + 2 \times 0.7066 - 0.7066^2) 4 \cdot 214 + \\ + 0.1734(1 - 0.7066^2)^2 4 \cdot 214] 163 \cdot 805 = 180 \cdot 98 tm.$$

Dalej mamy  $M_1 - M_2 = [1 \cdot 5748(1 - 0.7066)^2 0.7066^2 \times 4.214 - 0.7874 \times \times 0.4565 \times 3 \cdot 073] 163 \cdot 805 = - 134 \cdot 67$ , więc według 150)

$$\text{najw (-M)} = - 180 \cdot 98 + 134 \cdot 67 \times 0.2 + \frac{1}{2} 4 \cdot 214 \times 10 \cdot 26^2 \times 0.2 = 109 \cdot 70 tm.$$

$\text{Najw (+M)}$  otrzymamy według rów. 151), 152) i 153), a mianowicie

$$\text{dla } v = 0.1, \text{ wstawivszy } e = 8 \cdot 81 m, \quad p = \frac{9 \cdot 214}{2} = 4 \cdot 607 t/m, \quad p_1 = 3 \cdot 073 tm, \\ M_1 = (- 0.1734 \times 4 \cdot 607 \times 0.2434^2 [2(1 + 0.77)(2 - 0.2434)^2 - (2 - 0.2434^2)] + \\ + 0.07918 - 3 \cdot 073) 163 \cdot 805 = - 29 \cdot 72 tm.$$

$$\text{Dalej } M_1 - M_2 = (- 4 \times 0.3937 \times 4 \cdot 607 \times 0.2434^2)(1 - 0.2434)^2 + \\ + 0.3937 \times 0.77^2 \times 2 \times 3 \cdot 073) 163 \cdot 805 = 140 \cdot 67 tm.$$

$$\text{Najw (+M)} = - 29 \cdot 72 - 14 \cdot 07 + \frac{4 \cdot 607}{2} 0.1(2 \times 0.2434 - 0.2434^2 + \\ - 0.1) 36 \cdot 2^2 = 45 \cdot 09 tm.$$

$$\text{Dla } v = 0.7 \text{ jest } e = 25 \cdot 94 m \text{ a } p = \frac{6 \cdot 232}{2} = 3 \cdot 116 t/m, \quad m_1 = 0.7066, \text{ więc}$$



$$M_1 = (-0.1734 \times 3.116 \times 0.7066^2 [2(1+0.77)(2-0.7066)^2 - (2-0.7066^2)] + 0.07918 \times 3.073) 163.805 = -141.01 \text{ tm.}$$

$$\text{Dalej mamy } M_1 - M_2 = (-4 \times 0.3937 \times 3.116 \times 0.7066^2)(1 - 0.7066)^2 + (0.3937 \times 0.77^2 \times 2 \times 3.073) 163.805 = 146.40 \text{ tm.}$$

$$\text{Zatem } najw (+M) = -141.01 - 146.4 \times 0.2 + \frac{1}{2} 3.116 \times 0.2 (2 \times 0.7066 - 0.7066^2 - 0.2) 36.2^2 = -170.29 + 291.44 = +121.15 \text{ tm.}$$

Przeszło drugie, część druga.

Według rów. 155. otrzymamy

$$najw (-M) = -\frac{2.5^3}{3+2.5} 3.073 \times \frac{36.2^2}{8},$$

$$najw (-M) = -0.44053 \times 0.4565 \times 3.073 \times 163.805 = 101.23 \text{ tm.}$$

*Najw (+M)* otrzymamy z rów. 156), mianowicie

$$najw (+M) = -0.44053 \times 2.885 \times 163.805 + \frac{1}{2} 2.885 n (1-n) 36.2^2 = -208.18 - 1890.97 n (1-n),$$

a więc dla  $n = \frac{x}{l} = 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5$

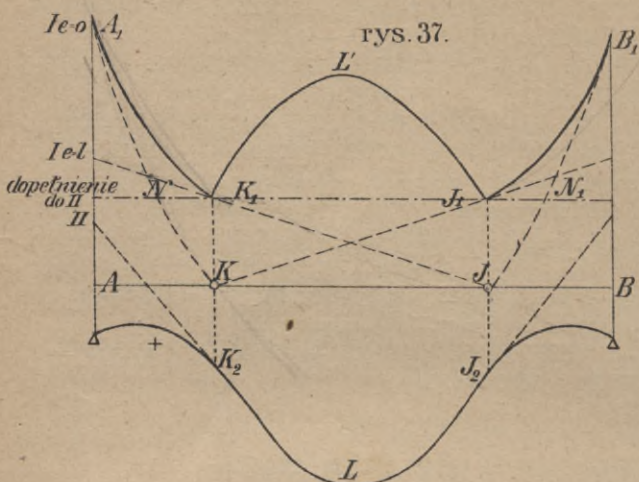
$$najw (+M) = 188.92 \quad 245.65 \quad 264.56 \text{ tm.}$$

### III. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

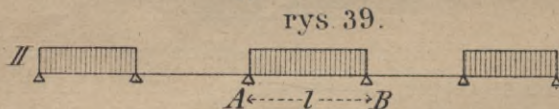
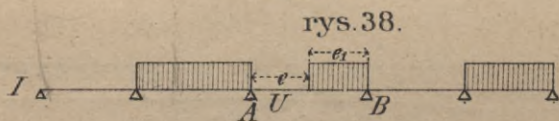
#### §. 26. Zasada.

Widzieliśmy na przykładzie, jak żmudne jest obliczenie sił zewnętrznych belki ciągłej trójprzęsłowej. Jeżeli belka ma więcej przęseł, obliczenie staje się jeszcze żmudniejszym. Znacznie uprościć da się jednak rachunek, jeżeli według Lebera przyjmować będziemy dla momentów tylko całkowite obciążenie przęseł. Wiemy z poprzedniego rozdziału, że każde przęśło średnie da się podzielić na trzy części. W części środkowej otrzymamy największe lub najmniejsze momenty, gdy dane przęśło jest całe obciążone lub całe nieobciążone, a inne przęśła naprzemian. W pierwszej i trzeciej części linie największych i najmniejszych  $M$  są liniami czwartego stopnia, które jednak dadzą się w przybliżeniu zastąpić prostą i parabolami, przyczem otrzymamy zamiast  $A_1K_1$  (rys. 37.) linią  $A_1NK_1$ . Ta linia łamana odpowiada obciążeniu całkowitemu przęseł, i tak  $najw (-M)$  w  $A$  odpowiada obciążeniu I (rys. 38.), gdy  $e=0$ , dla którego otrzymujemy parabolę  $A_1N$ .  $Najw (-M)$  w  $K$  odpowiada obciążeniu I, gdy  $e=l$ , dla którego otrzymujemy prostą  $NK_1$ , przechodzącą przez punkt stały  $I$ .

Leber udowadnia, że linie te  $najw (-M)$  przybliżonych mają wspólne styczne z linią dokładną w  $A_1$  i  $K_1$  tak, że wy-



kreśliwszy te linie mogli byśmy jeszcze na podstawie tych stycznych wykreślić  $A_1K_1$ . Różnice są jednak tak małe, że w praktyce możemy się nawet zadowolnić liniami przybliżonemi \*).



Ponieważ dla obliczenia przekroju chodzi zwykle głównie o bezwzględnie największe

wartości, więc, jeśli chcemy je otrzymać, obrócimy *najw* (—  $M$ ) około osi poziomej. Przelóżmy je na górę, wtedy punkt  $L$  przypadnie na  $L'$ . Widzimy stąd, że bezwzględnie największe momenty możemy łatwo wyznaczyć w przybliżeniu, przyjmując obciążenie całkowite przesła.

Metoda Lebera polega na tem, że obliczamy momenty podporowe dla obciążenia całkowitego każdego przęsła z osobna. Obciążenia te i momenty kombinujemy w ten sposób, aby otrzymać przybliżoną linię momentów. Leber uwzględnia zarazem ciężar własny, inny dla każdego przęsła; można jednak łatwo obliczyć osobno momenty podporowe w skutek ciężaru własnego, a osobno w skutek ciężaru ruchomego. Znając momenty podporowe, łatwo obliczymy albo wykreślimy zapomocą szablonu parabolicznego momenty w drugim przęsle całkowicie obciążonym lub nieobciążonym. Dla sił poprzecznych musi być w da-

\*) Weyrauch przyjmuje nawet w przybliżeniu proste  $A_1K_1$  i  $I_1B_1$ , linie te są jednak zanadto niedokładne.

nem przeszłe obciążenie jednostronne. Dla tego obciążenia oblicza się momenty podporowe i dodaje do nich momenty, powstałe z obciążenia całkowitego innych przeszł. Na tej podstawie oblicza się największe siły poprzeczne w kilku punktach przeszła.

### §. 27. Najniekorzystniejsze obciążenia.

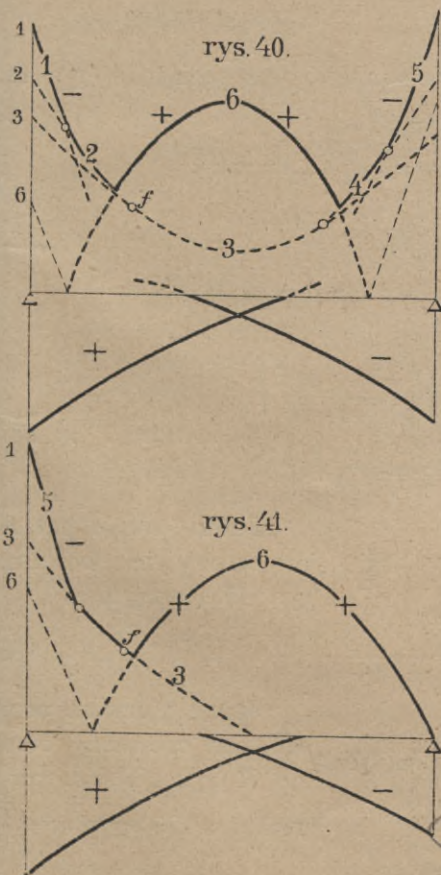
Na rysunku 40. i 41. są wykreślone linie największych i najmniejszych momentów i sił poprzecznych dla sumy ciężarów stałego i ruchomego dla przeszła średniego i skrajnego. Na

rys. 42. podajemy wedle Lebera schemat obciążeń, które sprawiają w różnych częściach belki najw. i najmn. momenty. Jeśli belka jest symetryczna, liczba kombinacyj znacznie się zmniejsza.

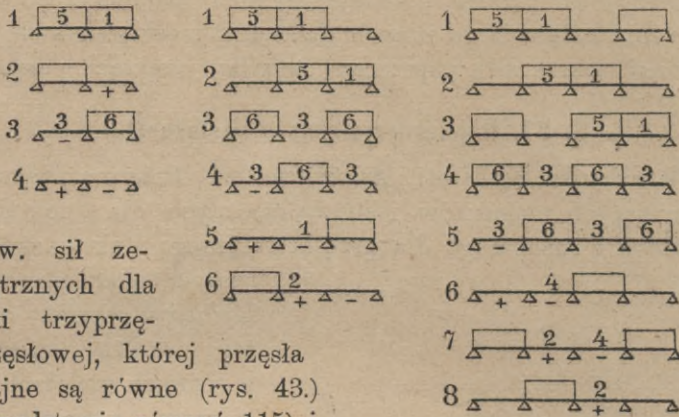
Ciężar własny, który zmienia się wedle rozpiętości, przedstawiliśmy czarną kreską, ciężar ruchomy prostokątami białymi. Liczby wpisane odnoszą się do rys. 40 i 41. i wskazują, którą część linii najw (+M) lub najw (-M) otrzymamy danem obciążeniem. Znaki + i - na rys. 42. oznaczają, że w tem przeszłe po dodaniu obciążenia jednostronnego dla tego obciążenia przeszł otrzymamy najw (+Q) lub najw (-Q).

### §. 28. Belka trzyprzęsłowa.

Jako przykład wskażemy tu sposób wyznaczenia



rys. 42.

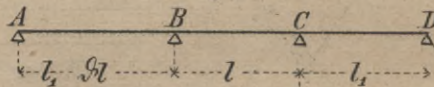


najw. sił zewnętrznych dla belki trzyprzęsłowej, której przęsła skrajne są równe (rys. 43.)

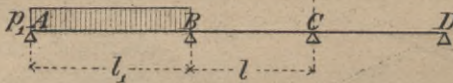
Na podstawie równań 115) i

116) otrzymamy, jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone (rys. 44.)

rys. 43.

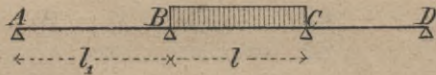


rys. 44.



$$\left. \begin{aligned} M_1 &= - \frac{4 \vartheta^3 (1 + \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{p_1 l^2}{8} \\ M_2 &= + \frac{2 \vartheta}{4(1 - \vartheta)^2 - 1} \frac{p_1 l^2}{8} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 157)$$

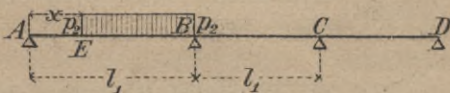
rys. 45.



Jeżeli drugie przęsło jest całkowicie obciążone (rys. 45.), otrzymamy

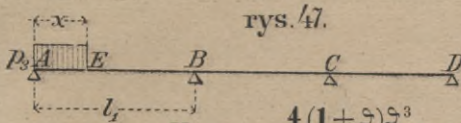
$$M_1 = M_2 = - \frac{2}{3 + 2 \vartheta} \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 158)$$

rys. 46.



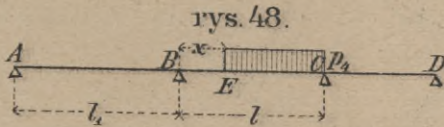
Jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone od E do B (rys. 46.), to otrzymamy z 129) gdy  $m = \frac{x}{l_1}$ ,

$$M_1 = - \frac{4(1 + \vartheta) \vartheta^3}{4(1 - \vartheta)^2 - 1} p_2 (1 - m^2)^2 \frac{l^2}{8} \dots \dots \dots 159)$$



rys. 47.

$$M_1 = - \frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1} p_3 m^2 (2-m^2) \frac{l^2}{8} \dots 160$$



rys. 48.

Jeżeli drugie przęsło jest obciążone od E do C (rys. 48.), to według 133), jeżeli  $\frac{x}{l} = n$ ,

$$M_1 - M_2 = \frac{4(1-n)^2 n^2}{1+2\vartheta} p_4 \frac{l^2}{8} \dots 161$$

Nakoniec otrzymamy wedle 56) i 57)

$$\left. \begin{aligned} \text{najw } (+Q) &= \frac{M'' - M'}{l_m} + \frac{1}{2} p_m (1-m)^2 l_m \\ \text{najw } (-Q) &= \frac{M'' - M'}{l_m} - \frac{1}{2} p_m m^2 l_m \end{aligned} \right\} \dots 162$$

### §. 29. Przykład.

Dla porównania sposobu Lebera ze sposobem dokładnym, obliczymy przybliżonym sposobem ten sam przykład, co w §. 25.

Dla ciężaru własnego wzory są tak proste i obliczenie tak łatwe, że użycie sposobu Lebera nie przedstawia tu żadnej korzyści. Ograniczymy się więc tylko na ciężarze ruchomym.

a) Momenty. Najprzód obliczymy, jak w §. 25., odstępów punktów stałych, potem momenty podporowe.

Jeżeli jest obciążone pierwsze przęsło, to dla  $\vartheta = 0.77$  wedle 157)

$$M_1 = - 0.2803 \times 3.073 \frac{36.2^2}{8} = - 141.09 \text{ tm},$$

$$M_2 = + 0.0792 \times 3.073 \frac{36.2^2}{8} = + 39.87 \text{ tm}.$$

Jeżeli drugie przęsło jest obciążone, otrzymamy według 158)

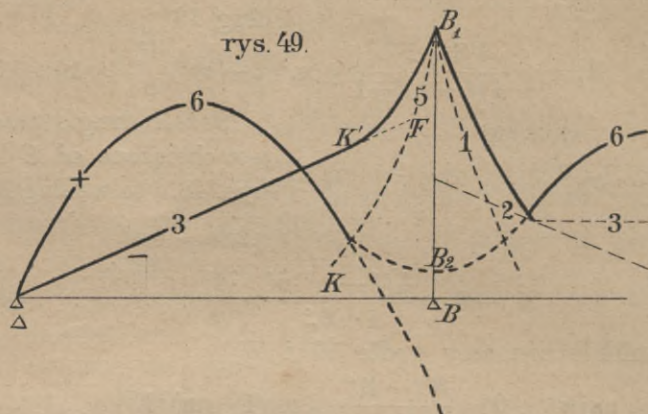
$$M_1 = M_2 = - 0.4405 \times 2.8855 \frac{36.2^2}{8} = - 208.20 \text{ tm}.$$

Pierwsze przęsło. Dla wyznaczenia linii 6 (rys. 49.) t. j. linii najw (+M) w pierwszym przęśle środkowej części, obciążyć musimy pierwsze i trzecie przęsło (rys. 42. układ 3), więc

$$M_1 = - 141.09 + 39.87 = - 101.22 \text{ tm}$$

Wykreślnie moglibyśmy więc zrobić  $B_6 = 101.22 \text{ tm}$  i wykreślić szablona paraboliczną dla  $p_1 = 3.073$  linię 6. Szablona tę możemy wyciąć z pa-

pieru wykreśliwszy parabolę momentów według rów.  $M = \frac{p_1}{2} x(l-x)$ , jak dla belki zwykłej.



Liczebnie możemy obliczyć punkty linii 6 wedle równania 67):

$$\begin{aligned} \text{najw}(+M) &= -M_1 m + \frac{l_1^2}{2} 3 \cdot 073 m(1-m) = 101 \cdot 22 m + 388 \cdot 37 \times 3 \cdot 073 m(1-m), \\ \text{najw}(+M) &= 1092 \cdot 25 m - 1193 \cdot 45 m^2, \end{aligned}$$

zupełnie jak w §. 25.

Z wzoru tego otrzymamy, jak poprzednio:

dla  $m = 0, 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.7 \quad 0.8$   
 $\text{najw}(+M) = 0, 97 \cdot 29, 170 \cdot 71, 220 \cdot 26, 247 \cdot 75, 247 \cdot 76, 225 \cdot 71, 179 \cdot 79, 99 \cdot 99.$

Linia 3. leży poniżej 6, nie potrzebujemy więc jej koniecznie wyznaczać, co zresztą nie przedstawia żadnej trudności. Dla  $\text{najw}(-M)$  musi być przeszło średnie obciążone (rys. 42. układ 4), a zatem  $\text{najw}(-M) = -208 \cdot 2 m$ , jak w §. 25; a więc

dla  $m = 0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6$   
 $\text{najw}(-M) = 0, -20 \cdot 82, -41 \cdot 64, -62 \cdot 46, -83 \cdot 28, -104 \cdot 2, -124 \cdot 92,$   
 $0.7 \quad 0.8$   
 $-145 \cdot 74, -166 \cdot 56 \text{ tm}.$

Dla wyznaczenia linii 5) obciążymy pierwsze i drugie przeszło (rys. 42. układ 1), a więc

$$M_1 = -141 \cdot 09 - 208 \cdot 20 = -349 \cdot 29 \text{ (punkt } B_1 \text{ rys. 49.)}. \text{ Dla } m = \frac{x}{l_1} \text{ otrzymamy}$$

$$M = -349 \cdot 29 m + \frac{l_1^2}{2} 3 \cdot 073 m(l-m) = 844 \cdot 16 m - 1193 \cdot 45 m^2.$$

Więc dla  $m = 0.8 \quad 0.9$   
 $M = -88 \cdot 48 \quad -206 \cdot 95 \text{ tm}.$

Widzimy, że w §. 25. otrzymaliśmy dla  $m = 0.9$ ,  $M = -255 \cdot 79 \text{ tm}$ , gdy według Lebera otrzymujemy tylko  $-206 \cdot 95 \text{ tm}$ . Jeżeli jednak zaokrąglimy kąt przy  $F$  łukiem parabolicznym, to zbliżymy się znacznie do wartości dokładnych. Punkt  $B_2$  możemy także łatwo otrzymać, gdyż dla

*najw* (+ *M*) musi być wtedy obciążone tylko trzecie przęsło, więc  $M_1 = + 39\cdot87 tm$ , jak w §. 25.

Drugie przęsło.

Dla wyznaczenia linii 1. w drugim przęśle obciążamy pierwsze dwa przęsła (rys. 42, układ I) więc

$$M_1 = - 349\cdot29 tm$$

$$M_2 = + 39\cdot87 - 208\cdot20 = - 168\cdot33 tm,$$

a według 67)

$$M = - 349\cdot29 - (-349\cdot29 + 168\cdot33)n + \frac{36\cdot2^2}{2} 2\cdot8855 n(1-n),$$

$$M = - 349\cdot29 + 180\cdot91 n + 1890\cdot65 n(1-n),$$

A zatem dla  $n = 0\cdot1$   $n = 0\cdot2$

$$M = -161\cdot05 \quad -10\cdot60 tm.$$

Dla wyznaczenia linii 2 obciążamy tylko pierwsze przęsło, więc

$$M_1 = - 141\cdot09, \quad M_2 = + 39\cdot87,$$

$$M = - 141\cdot09 - (-141\cdot09 - 39\cdot87)n = - 141\cdot09 + 180\cdot96 n.$$

Stąd dla  $n = 0\cdot1$   $0\cdot2$   $0\cdot3$

$$M = - 122\cdot99, \quad 104\cdot89, \quad 82\cdot79 tm.$$

I tu widzimy, że linie 1 i 2 dość znacznie odstępują od linii *najw* (-*M*), że jednak rysowawszy między te dwie linie łuk paraboliczny znacznie się zbliżyliśmy do prawdy.

Dla wyznaczenia poziomej 3 obciążymy oba przęsła skrajne, więc

$$M_1 = M_2 = M = - 141\cdot09 + 39\cdot87 = - 101\cdot22 tm. \quad *$$

Dla wyznaczenia paraboli 6 obciążamy tylko średnie przęsło, więc  $M_1 = - 208\cdot2 tm$  a  $M = - 208\cdot2 + 1890\cdot65 n(1-n)$ , zatem jak w §. 25.

Dla  $n = 0\cdot2$   $0\cdot3$   $0\cdot4$   $0\cdot5$

$$M = 104\cdot31 \quad 188\cdot84 \quad 245\cdot55 \quad 264\cdot46 tm.$$

b) Siły poprzeczne.

Pierwsze przęsło. Dla *najw* (+ *Q*) w pierwszym przęśle musi być oprócz obciążenia jednostronnego w tem przęśle obciążone także 3-cie przęsło, więc według 159)

$$M_1 = - 0\cdot2803 p_2 (1-m^2)^2 \frac{36\cdot2^2}{8} + 39\cdot87.$$

$$M_1 = - 45\cdot914 p_2 (1-m^2)^2 + 39\cdot87.$$

Jeżeli teraz w równ. 56) wstawimy  $M' = 0$  i  $M'' = M_1$ , to *najw* (+ *Q*) =  $= 1\cdot647 p_2 (1-m^2)^2 + 1\cdot431 + 13\cdot985 p_2 (1-m)^2$ , jak w §. 25.

Dla *najw* (-*Q*) obciążamy przęsło pierwsze z lewej strony danego punktu i drugie przęsło, więc według 160)

$$M_1 = - \frac{4(1+\zeta)\zeta^3}{4(1+\zeta)^2-1} p_3 m^2 (2-m^2) \frac{l^2}{8} - 208\cdot20,$$

$$M_1 = - 45\cdot914 p_3 m^2 (2-m^2) - 208\cdot20.$$

Jeżeli teraz wstawimy w rów. 57) tę wartość, to

*najw* (-*Q*) =  $\frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} p_3 m^2 l \zeta = - 1\cdot647 p_3 m^2 (2-m^2) - 7\cdot470 - 13\cdot985 p_3 m^2$ ,  
jak w §. 25.

Drugie przęsło.

Dla *najw* (+ *Q*) obciążymy pierwsze przęsło całe, a drugie po prawej stronie danego punktu, więc według 161)

$$M_1 - M_2 = -141.09 - 39.87 + \frac{4(1-n)^2 n^2 l^2}{1+2.5} =$$

$$= -180.96 + 257.959(1-n)^2 n^2 p_4.$$

Więc według 162) *najw* (+ *Q*) = +  $\frac{180.96 - 257.959 p_4 (1-n)^2 n^2}{36.2}$  +  $\frac{1}{4} p_4 (1-n)^2 36.2 = 5.0 - 7.126 p_4 (1-n)^2 n^2 + 18.1 p_4 (1-n)^2$ , jak w §. 25.

## IV. Belka o nieskończonej ilości przęseł.

### §. 30. Ogólne uwagi.

Jeżeli belka ciągła ma 4 lub 5 przęseł, to możemy w praktyce obliczać siły zewnętrzne w ten sposób, jak gdyby ilość przęseł była nieskończona. Stosuje się to zwłaszcza do obliczenia szyn kolejowych i podłużnic. Z tego powodu zastanowimy się tu nad belką o nieskończonej ilości przęseł.

Przypuścimy przytem, że wszystkie przęsła są równe, to według rów. 37)

$$\mu_2 = 4, \quad \mu_3 = \frac{4l - \frac{l}{4}}{l} = 3.75, \quad \mu_4 = 3.733,$$

$$\mu_5 = \mu_6 = 3.732, \text{ więc otrzymamy z rów. 44)}$$

dla przęsła	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---

$$\frac{a}{l} = 0.2000 \quad 0.2105 \quad 0.2113 \quad 0.2113.$$

Przy dowolnem obciążeniu możemy teraz momenty i siły poprzeczne obliczyć według rozdziału II. My tu jednak zastanowimy się bliżej nad tem, gdy belka jest obciążona ciężarem stałym jednostajnie rozłożonym *g* i gdy jeden ciężar skupiony może leżeć w jednym przęśle.

### §. 31. Obciążenie zupełne jednostajne ciągłe.

Jeżeli belka o nieskończonej ilości równych przęseł jest obciążoną całkowicie ciężarem jednostkowym *g*, to według rów. 28) otrzymamy następnne równania.

$$2 M_1 (l+l) + M_2 l = -\frac{1}{4} g (l^3 + l^3) = -\frac{1}{2} g l^3,$$

$$M_1 l + 2 M_2 (l+l) + M_3 l = -\frac{1}{2} g l^3$$

. . . . . czyli



$$\left. \begin{aligned} 4M_1 + M_2 &= -\frac{1}{2}gl^2 \\ M_1 + 4M_2 + M_3 &= -\frac{1}{2}gl^2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ M_m + 4M_{m+1} + M_{m+2} &= -\frac{1}{2}gl^2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ M_{n-1} + 4M_n &= -\frac{1}{2}gl^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 163)$$

Jeżeli  $n$  jest nieskończenie wielkie, to możemy przyjąć  $M_m = M_{m+1} = M_{m+2}$ , więc  $6M_m = -\frac{1}{2}gl^2$ , a stąd momenty podporowe przęśła średniego

$$M_m = -\frac{1}{12}gl^2 = -0.0833gl^2 \dots \dots \dots 164)$$

Wstawivszy w pierwsze dwa równania 163)  $M_3 = -\frac{1}{12}gl^2$ , otrzymamy  $4M_1 + M_2 = -\frac{1}{2}gl^2$ ,

$$\left. \begin{aligned} M_1 + 4M_2 + (-\frac{1}{12}gl^2) &= -\frac{1}{2}gl^2, \text{ z czego wynika} \\ M_2 &= \frac{7}{90}gl^2 = -0.07778gl^2 \\ M_1 &= -0.10833gl^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 165)$$

Na podstawie tych momentów podporowych, możemy wyznaczyć siły poprzeczne i momenty.

Według rów. 29) otrzymamy dla przęśła skrajnego

$$\left. \begin{aligned} Q_1' &= \frac{1}{2}gl + \frac{M_1}{l} = +0.3917gl \\ Q_1'' &= -\frac{1}{2}gl + \frac{M_1}{l} = -0.6083gl \\ Q_1 &= 0.3917gl - gx, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 166)$$

dla przęśła drugiego

$$\left. \begin{aligned} Q_2' &= \frac{1}{2}gl - \frac{M_1 - M_2}{l} = +0.5306gl \\ Q_2'' &= -\frac{1}{2}gl - \frac{M_1 - M_2}{l} = -0.4694gl \\ Q_2 &= 0.5306gl - gx, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 167)$$

a dla przęseł średnich

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{2}gl = +0.5gl \\ Q'' &= -\frac{1}{2}gl = -0.5gl \\ Q &= 0.5gl - gx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 168)$$

Momenty zaś otrzymamy z rów. 32) dla przęśła skrajnego

$$M = \frac{1}{2}gx(l-x) + \frac{M''x}{l} = \frac{1}{2}gx(1-x) - 0.1083glx \dots 169)$$

*Najw* (+*M*) jest dla  $x_0$ , dla którego  $Q=0$ , więc według r. 166)  $x_0=0.3917l$ , zatem

$$\text{najw (+M)} = +0.0767 gl^2 \dots \dots \dots 170)$$

Dla przeszła średnich otrzymamy z powodu, że  $M'=M''$ ,

$$M = \frac{1}{2} gx(1-x) - 0.0833 gl^2 \dots \dots \dots 171)$$

*Najw* (+*M*) jest dla  $x_0 = \frac{1}{2}l$ , więc

$$\text{najw (+M)} = 0.125 gl^2 - 0.0833 gl^2 = +0.0417 gl^2 \dots 172)$$

### §. 32. Momenty podporowe dla obciążenia układem ciężarów skupionych.

Jeżeli *r*-te przeszło jest obciążone ciężarem skupionym *P*, to według 13)

$$\mathfrak{R}_r' = -\frac{Pe_1(l^2 - e_1^2)}{l^2}, \quad \mathfrak{R}_r'' = -\frac{Pe(l^2 - e^2)}{l^2},$$

zaś według 54) 
$$M_{r-1} = \frac{\nu_r \mathfrak{R}_r' - \mathfrak{R}_r''}{\mu_r \nu_r - 1},$$

albo wstawivszy  $\nu_r = \mu_r = 3.7321$

$$M_{r-1} = -\frac{3.7321 Pe_1(l^2 - e_1^2) - Pe(l^2 - e^2)}{12.9287 l^2} = \frac{P}{12.9287 l^2} (3.7321 e(l - e)(2l - e) - e(l^2 - e^2)) \dots 173)$$

*Najw*  $M_{r-1}$ , a zatem i największe wszystkie momenty podporowe po lewej stronie *r*-tego przeszła, otrzymamy dla  $e_0$ , dla którego  $\frac{dM_{r-1}}{de} = 0$ , zatem

$$3.7321(2l^2 - 2e_0l - 4e_0l + 3e_0^2) - l^2 + 3e_0^2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$e_0 = 0.7886l - \sqrt{0.7886^2 l^2 - 0.4554 l^2} = 0.3804l,$$

a wstawivszy to w r. 173), otrzymamy dla obciążenia *r*-tego przeszła

$$\text{najw } M_{r-1} = -0.08505 Pl \dots \dots \dots 174)$$

Dalej otrzymamy  $M_{r-2} = -\frac{1}{3.7321} M_{r-1} = +0.02279 Pl$

$$M_{r-3} = -0.268^2 \times 0.08505 Pl = -0.00610 Pl$$

$$M_{r-4} = -0.268^3 \times 0.08505 Pl = +0.00164 Pl$$

$$M_{r-5} = -0.268^4 \times 0.08505 Pl = -0.00044 Pl$$

$$M_{r-6} = +0.00011 Pl.$$

Jeżeli więc co drugie przeszło na prawo *r*-tej podpory jest obciążone ciężarem skupionym *P*, to

$$\text{najw } (-M_r) = -(0.08505 + 0.00610 + 0.00044) Pl = -0.09159 Pl \dots \dots \dots 175)$$

Jeżeli co drugie przeszło z obu stron  $r$ -tej podpory jest najniekorzystniej obciążone, to

$$\text{najw } (-M_r) = -(0.09159 + 0.09159) Pl = -0.18318 Pl \quad 176)$$

Dla przeszła skrajnego jest

$$a=0, \quad b=0.21132 l, \quad c=0.78868 l.$$

Wstawivszy to w rów. 60), jeżeli ciężar  $P$  znajduje się w skrajnem przeszle, otrzymamy

$$M_0=0, \quad M_1 = -\frac{Pbe e_1}{cl^2} (l+e) = -\frac{Pbe(l^2-e^2)}{cl^2},$$

a *najw*  $(-M_1)$  jest dla  $e_0$ , dla którego  $\frac{dM_1}{dx}=0$ ,

$$\text{więc } \frac{Pb}{cl^2} (l^2 - 3e_0^2) = 0, \quad \text{stad } e_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.5774 l.$$

$$\begin{aligned} \text{Zatem } \text{najw } (-M_1) &= -\frac{Pl 0.21132 \times 0.5774 (1 - 0.5774^2)}{0.78868} \\ &= -0.10313 Pl \quad \dots \dots \dots 177) \end{aligned}$$

Dla drugiego przeszła jest  $a=0.2l$ ,  $b=0.21132 l$ ,  $c=0.58868 l$ , więc według 60)

$$M_1 = -\frac{Pae(l-e)}{cl^2} (2l - 3b - e),$$

$$\frac{dM_1}{de} = -\frac{Pa}{cl^2} (2l^2 - 3bl - 6le_0 + 6e_0b + 3e_0^2) = 0,$$

więc  $e_0 = (l-b) - \sqrt{(l-b)^2 - \frac{2}{3}l^2 + bl}$ , a po wstawieniu wartości  $e_0 = 0.78868 l - 0.40827 l = 0.38041 l$ . Dla tej wartości  $e_0$  będzie zatem

$$M_1 = -\frac{Pl (0.2 \times 0.3804 \times 0.6196 (2 - 3 \times 0.21132 - 0.38041))}{0.58868},$$

$$M_1 = -0.07893 Pl \quad \dots \dots \dots 178)$$

$$\text{A zatem } \text{najw } (-M_1) = -(0.10313 + 0.07893 + 0.00160 + 0.00044) Pl = -0.1841 Pl \quad \dots \dots \dots 179)$$

Chcąc otrzymać *najw*  $(+M_r)$  na  $r$ -tej podporze, musimy umieścić ciężary  $P$  w przeszłach przedtem nieobciążonych, otrzymamy więc *najw*  $(+M_r) = +(0.02279 + 0.00164 + 0.00011) Pl$ ,

$$\text{najw } (+M_r) = +0.02454 Pl, \quad \dots \dots \dots 180)$$

a jeśli obciążymy w ten sposób belkę po obu stronach  $r$ -tej podpory, to

$$\text{najw } (+M_r) = 0.04908 Pl \quad \dots \dots \dots 181)$$

Aby otrzymać *najw*  $(+M_1)$  możemy zastosować wzór 180), zmniejszwszy tylko moment w stosunku  $\frac{3.732}{4.000}$ , bo  $\mu_2 = 4.0$ , a zatem *najw*  $(+M_1) = +0.02290 Pl \quad \dots \dots \dots 182)$

**§. 33. Największe momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych.**

Momenty podporowe, któreśmy wyznaczyli w poprzednim paragrafie są największymi momentami ujemnymi, dodatnie najw. momenty otrzymamy zawsze w punktach zaczepienia siły  $P$ . W tym wypadku mamy według 24)  $Q = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{Pe_1}{l}$ , a według 26)

$$M = M' + (M'' - M') \frac{e}{l} + \frac{Pe_1 e}{l} \dots \dots \dots 183)$$

Przeszło skrajne.

Jeżeli tylko przeszło skrajne jest obciążone ciężarem  $P$ , to

$$M' = 0, \quad M'' = -\frac{Pbe(l^2 - e^2)}{cl^2}, \quad \text{więc}$$

$$M = -\frac{Pbe^2(l^2 - e^2)}{cl^3} + \frac{Pe(l - e)}{l}.$$

Chcąc wyznaczyć *najw* ( $+M$ ), zrobmy

$$\frac{dM}{de} = -\frac{Pb}{cl^3}(2e_0 l^2 - 4e_0^3) + \frac{P}{l}(l - 2e_0) = 0, \quad \text{zatem}$$

$$-\frac{2b}{cl} e_0 + \frac{4b}{cl^3} e_0^3 + 1 - \frac{2}{l} e_0 = 0, \quad \text{a stąd } e_0 = 0.427l,$$

a zatem

$$\text{najw } (+M) = +0.2047 Pl.$$

Jeżeli oprócz tego obciążymy inne przeszła najniekorzystniej, to otrzymamy według 182)  $M_1 = 0.02290 Pl$ , a  $M = -0.02290 Pl \frac{x}{l}$ . Wstawiając  $x = 0.427l$  i dodawszy ten moment do poprzedniej wartości, otrzymamy

$$\text{najw } (+M) = 0.2047 Pl + 0.0098 Pl = +0.2145 Pl \dots 184)$$

Przeszło średnie. W przeszle średnim największy moment otrzymamy, gdy  $e_0 = \frac{1}{2} l$ , a to z powodu, że  $M' = M''$ , a zatem według rów. 183),  $M = M' + \frac{Pl}{4} \dots \dots \dots 185)$

Wstawiając  $e = \frac{l}{2}$  w rów. 173) otrzymamy wręście

$$M = -\frac{P}{12 \cdot 9287 l^2} (3 \cdot 7321 \frac{3}{8} l^3 - \frac{3}{8} l^3) + \frac{Pl}{4} = 0.17076 Pl \dots 186)$$

Jeżeli oprócz tego obciążymy inne przeszła na prawo i na lewo najniekorzystniej, to według rów. 180)

$$\text{najw } (+M) = \left( 0.17076 + 0.02454 \frac{l - 2b}{l - b} \right) Pl = +0.18873 Pl \dots 187)$$

**§. 34. Największe siły poprzeczne.**

Największą siłę poprzeczną otrzymamy, gdy ciężar  $P$  leży na którejkolwiek podporze, wtedy z 24) otrzymamy  $M''=M'=0$ ,  $r_1=l$ , więc  $Q'=P$ .

Oprócz tego należy inne przęsła tak obciążyć, aby  $\frac{M''-M'}{l}$  było największością. Dla przęsła skrajnego musi być  $\frac{M'}{l}$  największością, więc wedle rów. 182)

$$\text{najw (+Q)} = (1 + 0.02290) P = +1.0229 P \quad . \quad . \quad 188)$$

W przęsle średnim otrzymamy dla najkorzystniejszego obciążenia jednostronnego z rów. 175)  $M_r = -0.09159 Pl$ , a  $M_{r-1} = -\frac{+0.09159}{3.732} Pl = 0.02454 Pl$ ,  $M_{r-2} = -0.0658 Pl$ . Dla *najw (+Q)* albo *najw (-Q)* musi być obciążone dane przęsło i co drugie na prawo i na lewo, a zatem będzie

$$M_r = -(0.09159 + 0.00658) Pl = -0.09817 Pl,$$

$$M_{r-1} = + (0.02454 + 0.02454) Pl = 0.04908 Pl,$$

$$\text{więc najw (-Q)} = -(1 + 0.09817 + 0.04908) P = -1.14725 P \quad \left. \vphantom{\text{najw (-Q)}} \right\} 189)$$

$$\text{„ (+Q) . . . . .} = +1.14725 P$$

*Najw (-Q)* w pierwszym przęsle otrzymamy, obciążając przęsło pierwsze, drugie, czwarte itd. najniekorzystniej. Otrzymamy zatem według 174)

$$\text{najw (-Q)} = -(1 + 0.08505) P = -1.08505 P \quad . \quad 190)$$

**§. 35. Największe oddziaływania.**

Oddziaływanie  $O_0$  na podporze 0 jest równe sile poprzecznej, więc

$$\text{Najw (+O}_0) = 1.02290 P \quad \left. \vphantom{\text{Najw (+O}_0)} \right\} \dots \dots \dots 191)$$

$$\text{„ (-O}_0) = -1.08505 P$$

Według 27) jest  $O_m = -Q_m'' + Q_{m+1}'$ . Dla najniekorzystniejszego obciążenia otrzymamy więc z rów. 189), zważywszy, że siły  $P$  na  $r$ -tej podporze wcale nie kładziemy,

$$\text{najw (-O}_r) = -(0.14725 + 0.14725) P = -0.2945 P.$$

*Najw (+O<sub>r</sub>)* otrzymamy z rów. 189), jeżeli zważać będziemy na to, że ciężar  $P$  na  $r$ -tej podporze wywiera oddziaływanie  $P$  i uwzględniając rów. 27)

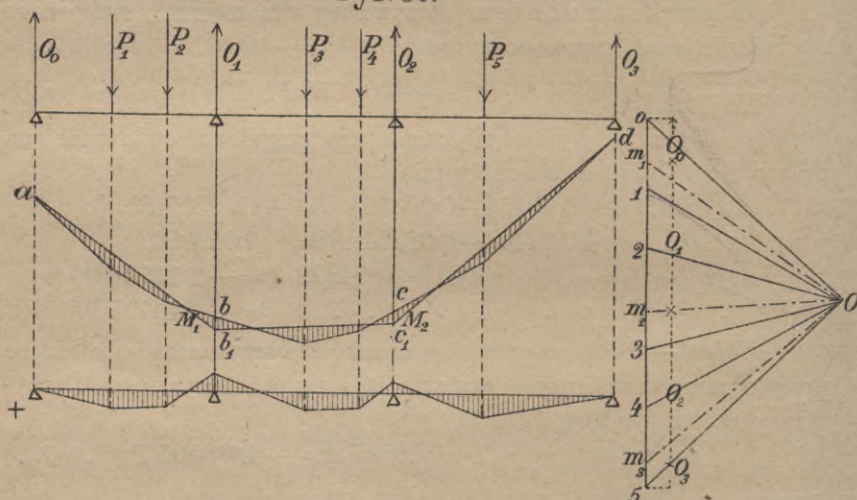
$$\text{najw (+O}_r) = (1 + 0.14725 + 0.14725) P = +1.2945 P.$$

## V. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla przekroju stałego.

### §. 36. Pierwszy wielobok sznurowy.

Jeżeli belka ciągła jest obciążona ciężarami  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  (rys. 50.), to możemy wykreślić dla tych ciężarów wielobok sił i wielobok sznurowy, zamknąć ich jednak nie możemy, bo wiemy wprawdzie, że  $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = O_0 + O_1 + O_2 + O_3$ , lecz wielkości pojedynczych oddziaływań nie znamy. Gdybyśmy

rys. 50.



w jakikolwiek sposób wyznaczyli momenty podporowe, to moglibyśmy zamknąć wielobok sznurowy i wielobok sił i wszystkie siły zewnętrzne byłyby wyznaczone. Momenty  $M_0$  i  $M_n$  są równe zero, pozostałe  $(n-1)$  momenty odciawszy w pionowych podporowych, możemy teraz łatwo wykreślić zamykające  $ab_1, b_1c_1, c_1d$  we wszystkich przęsłach. Jeżeli teraz wykreślimy w wieloboku sił równoległe do zamykających, to otrzymamy oddziaływania  $O_0, O_1, O_2, O_3$ .

Jeżeli znamy oddziaływania, wyznaczenie momentów i sił poprzecznych nie podlega już najmniejszej trudności\*). Widzimy więc, że w celu wyznaczenia sił zewnętrznych belki ciągłej dążyć nam wypada najpierw do wyznaczenia momentów podporowych.

\*) por. Podręcznik statyki budowlanej str. 14.

**§. 37. Linia ugięcia.**

Wiemy ze statyki budowli \*), że równanie linii ugięcia jest:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{\epsilon I} = -\frac{\left(\frac{M}{a^2}\right)}{\left(\frac{\epsilon I}{a^2}\right)} \dots \dots \dots 192)$$

w którym moment sił zewnętrznych  $M$  wyrazić mamy jako funkcję  $x$ , a  $a$  oznacza długość, którą możemy dowolnie przyjąć.

Równanie zaś linii sznurowej (lub linii ciśnienia w sklepieniu \*\*) jest

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{H} \dots \dots \dots 193)$$

jeśli  $q$  oznacza ciężar jednostkowy, a  $H$  odległość biegunową.

Widzimy więc, że obie linie będą te same, gdy zrobimy  $q = \frac{M}{a^2}$ , a  $H = \frac{\epsilon I}{a^2}$ , a zatem linia ugięcia jest linią sznurową, dla której obciążenie jednostkowe jest proporcjonalne do momentu  $M$ , a odległość biegunowa do  $\epsilon I$ , iloczynu momentu bezwładności i współczynnika sprężystości.

Więc jeśli powierzchnię momentów uważamy jako powierzchnię obciążenia i do wykreślenia wieloboku sznurowego użyjemy odległości biegunowej  $b = \frac{\epsilon I}{a^2}$  ( $b$  w podziałce sił), to ten wielobok sznurowy będzie przedstawiał oś belki. Jestto twierdzenie Mohra.

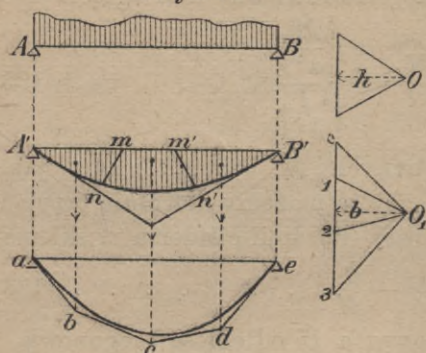
Jeżeli zamiast  $b = \frac{\epsilon I}{a^2}$ , przyjmiemy  $b = \frac{1}{n} \frac{\epsilon I}{a^2}$ , to rzędne linii ugięcia będą  $n$  razy większe. Jeżeli więc długości były wykreślone w podziałce  $\frac{1}{n}$ , to teraz rzędne linii ugięcia będą w naturalnej wielkości.

Jeżeli więc belka  $AB$  (rys. 51.) jest dowolnie obciążona i dla tego obciążenia wyznaczmy zapomocą odległości biegunowej  $h$  momenty, to uważamy teraz według twierdzenia Mohra powierzchnię momentów, jako powierzchnię obciążenia, dzielimy ją na części dowolnie liniami  $mn$  i  $m'n'$ , kreślimy wielobok sił 0123, używając do przemiany powierzchni na linie podstawy  $a$ ,

\*) porów. Podręcznik statyki budowli str. 137.

\*\*) " " " " " 220.

rys. 51.



obieramy biegun  $O_1$  w odległości  $b$  i kreślimy drugi wielobok sznurowy. Jeżeli linie podziału są pionowe, to, jak wiemy\*), wielobok ten jest styczny do linii sznurowej. W ten sposób otrzymujemy wykreślnie ugięcie belki o przekroju stałym. Jeżeli zaś linie podziału  $mn$  i  $m'n_1$  nie są pionowe, to wielobok sznurowy  $abcde$  nie będzie stycznym do linii sznurowej. Tylko

boki skrajne, równoległe do promieni skrajnych wieloboku są styczne w  $a$  i  $e$  do linii sznurowej, która według twierdzenia Mohra przedstawia ugiętą oś belki. Boki skrajne drugiego wieloboku sznurowego są więc stycznymi do linii sznurowej na podporach czyli tak zwanymi stycznymi podporowemi (n. *Stützentangente*, a. *tangential lines over the points of support*).

Z rów. 192) i 193) wynika, że

$$\frac{q}{H} = \frac{M}{\varepsilon I}, \dots \dots \dots 194)$$

a jeśli chcemy, aby rzędne linii ugięcia były  $n$  razy większe, to robimy  $\frac{q}{H} = \frac{nM}{\varepsilon I} = \frac{nh y}{\varepsilon I}$ , gdzie  $y$  oznacza rzędną linii momentów, a  $h$  pierwszą odległość biegunową. Jeżeli zrobimy teraz  $aq = y \cdot 1$  i wstawimy  $b = H$ , to  $\frac{y}{ab} = \frac{nh y}{\varepsilon I}$ , więc

$$n = \frac{\varepsilon I}{ab h}, \dots \dots \dots 195)$$

przyczem  $b$  odczytać należy w podziałce sił.

Jeżeli podpory są w nierównej wysokości, to należy różnice wysokości rysować według  $n$  razy większej podziałki niż długość.

### §. 38. Wielobok ugięcia.

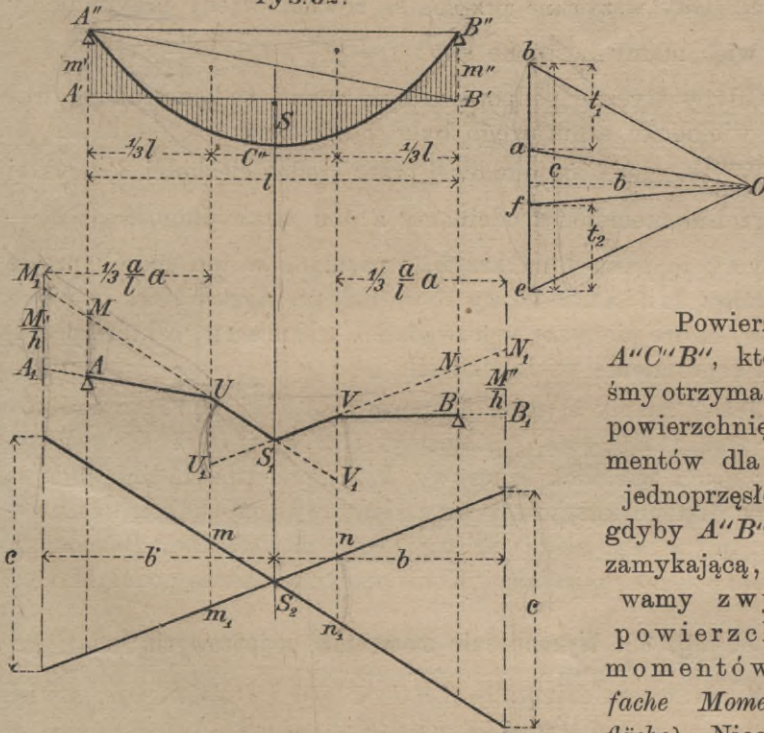
Dla belki ciągłej potrzebne nam są tylko styczne podpory, które dla pewnej podpory są te same dla obu sąsiednich

\*) porów. Podręcznik statyki budowli str. 18.



przęseł. W takim razie powierzchnię momentów możemy podzielić prostymi ukośnymi, a że na podporach momenty zwykle są ujemne, więc dzielimy powierzchnię momentów, jak to uwidoczniliśmy, na rys. 52, na trzy części prostymi  $A''B'$  i  $A'B''$ .

rys. 52.



Powierzchnię  $A''C''B''$ , którąbyśmy otrzymali jako powierzchnię momentów dla belki jednoprzęsłowej, gdyby  $A''B''$  była zamykająca, nazywamy zwykłą powierzchnią momentów (*ein-fache Momenten-fläche*). Niech bę-

dzie wielkość jej  $ac$ , to

$$A'A''C''B''B' = -A'A''B' - A'B''B' + A''C''B'' = a(-t_1 - t_2 + c).$$

Z rysunku widzimy, że

$$at_1 = A'A''B' = \frac{1}{2} m'l = \frac{1}{2} \frac{M'l}{h},$$

$$at_2 = A'B''B' = \frac{1}{2} m''l = \frac{1}{2} \frac{M''l}{h},$$

nareszcie  $ac = A''C''B'' = \frac{\mathfrak{M}l}{h}$ , jeżeli  $\mathfrak{M}$  oznacza średni moment belki jednoprzęsłowej.

Kreśliśmy teraz wielobok sił  $abef$ , obieramy biegun  $O$  w odległości  $b = \frac{\varepsilon I}{a^2 n}$  według poprzedniego paragrafu, więc będzie

$$t_1 = \frac{1}{2} M' \frac{l}{ah}, \quad t_2 = \frac{1}{2} M'' \frac{l}{ah}, \quad c = \mathfrak{M} \frac{l}{ah}, \quad b = \frac{\epsilon I}{a^2 n}. \quad 196)$$

Długość  $a$ , służącą za podstawę przy wyrażaniu płaszczyzny przez proste, możemy przyjąć dowolnie, a więc np. możemy przyjąć  $a =$  średniej rozpiętości albo jednej z rzeczywistych rozpiętości. Gdy wszystkie przesła są równe, wtedy przyjmujemy  $a = l$ , więc mamy następujące siły:  $t_1 = \frac{1}{2} \frac{M'}{h}$ ,  $t_2 = \frac{1}{2} \frac{M''}{h}$ ,  $c = \frac{\mathfrak{M}}{h}$ .

Gdyby styczne podporowe były znane, to konstrukcyja drugiego wieloboku sznurowego byłaby następująca:

W odstępnie  $b$  od pionowej przez środek ciężkości  $S$  zwykłej powierzchni momentów odcinamy z obu stron długość  $c = \mathfrak{M} \frac{l}{ah}$  i łączymy te punkty na krzyż, otrzymane w ten sposób proste nazywamy liniami krzyżowymi (n. *Kreuzlinien*, fr. *transversales*), które pierwszy wprowadził Cullmann, a które przedstawiają promienie wieloboku sił.

Jeżeli znamy styczne podporowe  $A_1U$  i  $B_1V$ , to zrobimy  $UU_1 = mm_1$  i  $VV_1 = nn_1$ , połączmy  $U$  z  $V_1$  i  $U_1$  z  $V$ , a otrzymamy drugi wielobok sznurowy, który przedstawia linię ugięcia i który dlatego nazywamy drugim wielobokiem sznurowym lub wielobokiem ugięcia (n. *elastisches Polygon*, fr. *le second polygon funiculaire*). Konstrukcyę powyższą podał Mohr.

### §. 39. Wyznaczenie momentów podporowych.

Z rys. 52. widzimy, że  $AMU \sim abO$  i  $BNV \sim Ofc$ , a więc

$$AM : t_1 = \frac{1}{3} l : b \quad \text{i} \quad BN : t_2 = \frac{1}{3} l : b,$$

a stąd

$$AM = \frac{t_1 l}{3b} \quad \text{i} \quad BN = \frac{t_2 l}{3b}.$$

Podstawmy wartości za  $t_1$  i  $t_2$ , a otrzymamy

$$AM = \frac{\frac{1}{2} M' \frac{l}{ah} l}{3b} = \frac{M' l^2}{6abh}, \quad BN = \frac{M'' l^2}{6abh},$$

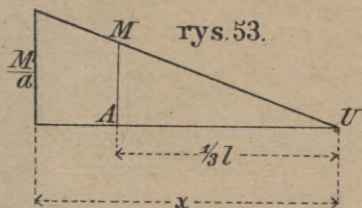
a więc odcinki  $AM$  i  $BN$  są proporcjonalne do momentów podporowych. Jeżeli przyjmujemy

$$\underbrace{b = \frac{1}{3} a, \text{ to}} \quad \left. \begin{aligned} AM &= \frac{M'}{h} \left( \frac{l}{a} \right)^2 \\ BM &= \frac{M''}{h} \left( \frac{l}{a} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 197)$$

a jeżeli  $a=l$ , to

$$\left. \begin{aligned} AM &= \frac{M'}{h} = m' \\ BN &= \frac{M''}{h} = m'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 198)$$

a



Jeżeli chcemy wynaleść odległość  $x$  (rys. 53.), w której pionowy odcinek między przedłużeniami pierwszego i drugiego boku drugiego wieloboku sznurowego równa się  $\frac{M'}{h}$ , to otrzymamy

$$\frac{M'}{h} : AM = x : \frac{1}{3} l, \text{ więc } x = \frac{M' \cdot \frac{1}{3} l}{h \left( \frac{l}{a} \right)^2} =$$

$= \frac{1}{3} \frac{a}{l} a$ , a zatem pionowa w odległości  $x = \frac{1}{3} \frac{a}{l} a$  odcina  $\frac{M'}{h}$  (rys. 52.).

Gdy  $a=l$ , to  $AM = \frac{M'}{h}$ .

**§. 40. Porównanie z belką poziomo obu końcami utwierdzoną.**

Poprzednia konstrukcyja da się wprost zastosować do belki jednostronnie lub obustronnie poziomo utwierdzonej. Poprzednio przyjęliśmy  $b = \frac{\varepsilon I}{a^2 n}$ , przyczem  $b$  mierzymy według podziałki sił, teraz przypuszczamy  $b = \frac{1}{6} a$  według podziałki długości. Jeśli więc zrobimy oba te przypuszczenia, to stosunek podziałki sił do podziałki długości jest już dany.

Dla belki obustronnie poziomo utwierdzonej są obie styczne podporowe poziome, więc oba odnośne promienie  $Oa$  i  $Of$  (rys. 54.) poziome; zatem punkt  $a$  wpada na  $f$ , a stąd  $c = t_1 + t_2$ , albo  $A'A''E + B'B''E' = EE'C'$ , co się da słowami wyrazić: Dla belki poziomo obu końcami utwierdzonej jest suma powierzchni ujemnych momentów równa powierzchni momentów dodatnich\*). A zatem  $\mathfrak{M}l = = \frac{1}{2} \mathfrak{M}'l + \frac{1}{2} \mathfrak{M}''l$ , jeżeli  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$  oznaczają momenty podporowe belki poziomo utwierdzonej, a więc  $\mathfrak{M}^* = \frac{1}{2} (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'')$ . Dla belki poziomo utwierdzonej otrzymamy więc drugi wielobok sznurowy  $AU_0S_0V_0B_0$ , a dla tak samo obciążonej belki ciągłej  $AUSVB$ .

\*) porów. Podręcznik statyki budowlnej str. 232.

Z rys. widzimy, że  $AU_0M_0 \cong U_0V_0V_0'$ , więc  $AM_0 = V_0V_0' = VV'$ ,

odstępowi linii krzyżowych  $MT$  i  $NS$ . Dalej otrzymamy  $AM_0 : \frac{1}{3}l = t_1 : b$ , a zatem wstawiając wartość za  $t_1$ ,

$$AM_0 = \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{M}' \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{1}{3}l}{b} =$$

$$= \frac{\mathfrak{M}' l^2}{6abh}, \text{ a jeżeli } b = \frac{1}{6}a, \text{ więc}$$

$$AM_0 = \mathfrak{M}' \left(\frac{l}{a}\right)^2 = V_0V_0' = VV',$$

$$\text{a podobnie } B_0N_0 = \frac{\mathfrak{M}''}{h} \left(\frac{l}{a}\right)^2 =$$

$$= U_0U_0' = UU'. \text{ Widzimy stąd, że odstęp}$$

linii krzyżowych w pionowych trzecich części

(n. *Drittverticale*, fr. *verticale trisectrice*) są proporcjonalne do momentów  $\mathfrak{M}''$  i  $\mathfrak{M}'$ . Dla  $a=l$  a  $b=\frac{1}{6}l$  byłyby te odstępymnożone przez odległość biegunową równe momentom  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$ . Zmieniwszy odpowiednio podziałkę i odczytując  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$  w podziałce momentów, otrzymamy  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$  wprost równe odstępom linii krzyżowych w pionowych trzecich części. Na przyszłość przyjmować będziemy, że momenty odczytujemy według osobnej podziałki momentów.

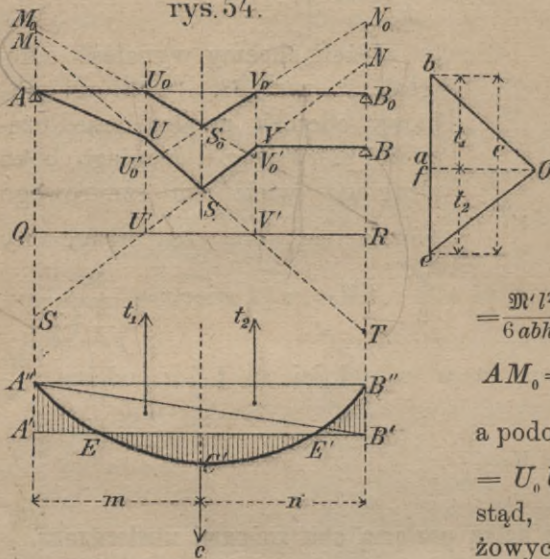
Z rysunku widzimy, że

$$QM = 2UU' = 2\mathfrak{M}'' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \quad QS = VV' = \mathfrak{M}' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \text{ więc}$$

$$MS = (2\mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}') \left(\frac{l}{a}\right)^2 = \mathfrak{M}'' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \text{ podobnie } NT = \mathfrak{M}' \left(\frac{l}{a}\right)^2, \text{ a więc}$$

odstępym linii krzyżowych w pionowych podporowych są proporcjonalne do ilości  $\mathfrak{M}''$  i  $\mathfrak{M}'$ , a dla  $a=l$  równe ilościom  $\mathfrak{M}''$  i  $\mathfrak{M}'$ . Ilości  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$  i  $\mathfrak{N}'$  i  $\mathfrak{N}''$  są zależne tylko od obciążenia i dadzą się, jak wiemy, analitycznie wyznaczyć (§. 4). Znając je, możemy linie krzyżowe wykreślić.

rys. 54.



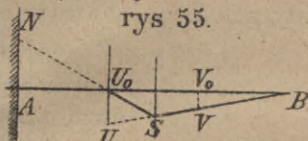
Z rysunku widzimy też, że odcinki  $MS$  i  $NT$  są to momenty statyczne siły  $c$ , działającej w  $S$ , ze względu na pionowe podporowe  $AS$  i  $BT^*$ ). Mamy więc

$$\left. \begin{aligned} MS \cdot b = cm, \quad MS = \frac{c \cdot m}{b} \\ NT \cdot b = c \cdot n, \quad NT = \frac{c \cdot n}{b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 199)$$

Długości  $c$ ,  $m$  i  $n$  są znane, jeżeli obciążenie jest dane, dla danego  $b$  możemy więc obliczyć także w ten sposób  $MS$  i  $NT$  i wykreślić linie krzyżowe.

Jeżeli belka jest tylko z jednej strony poziomo utwierdzona, to tylko ta strona ma styczną poziomą  $AU_0$  (rys. 55.)

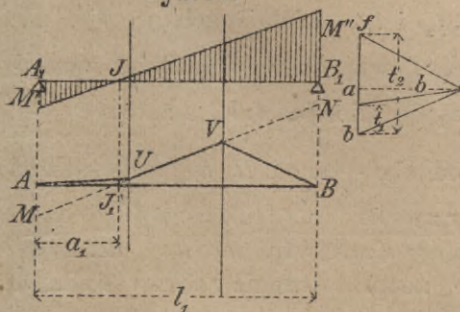
Ponieważ na drugiej podporze  $B$  moment jest równy zero,  $BN=0$ , zatem  $UVB$  jest linią prostą. Znając linie krzyżowe potrzebujemy więc tylko wykreślić  $UU_0 =$  odstępowi odnośnemu linii krzyżowych i wykreślić  $BS$  i  $U_0S$ .



§. 41. Przęsło nieobciążone. 22/10.

Jeżeli dane przęsło jest nieobciążone, a którekolwiek inne przęsło obciążone, to  $c=0$ , więc drugi wielobok sił składa się tylko z dwóch sił  $t_1 = \frac{1}{2} M' \frac{l}{ah}$  i  $t_2 = \frac{1}{2} M'' \frac{l}{ah}$ . Jeżeli styczne podporowe są dane, to jest on zupełnie oznaczony.

rys. 56.



Wiemy z poprzedniego, że momenty podporowe w przęsłach nieobciążonych są naprzemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu (rys. 56). Wykreśliwszy drugi wielobok sznurowy, mamy:

Wiemy z poprzedniego, że momenty podporowe w przęsłach nieobciążonych są naprzemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu (rys. 56). Wykreśliwszy drugi wielobok sznurowy, mamy:

$$AM = \frac{M'}{h} \left( \frac{l}{a} \right)^2, \quad BN = \frac{M''}{h} \left( \frac{l}{a} \right)^2, \quad \text{więc } AM:BN = M':M''. \quad \text{Z rysunku widzimy też, że}$$

\*) por. Podręcznik statyki budowlanej str. 12.

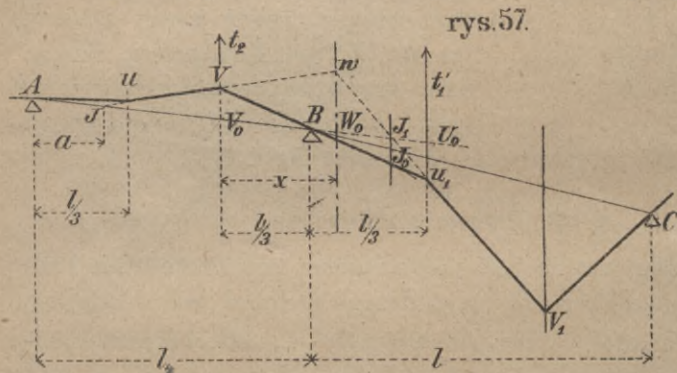
$a_1 : (l - a_1) = AM : BN$ , więc  $a_1 : (l - a_1) = M' : M''$ , a że także  $A_1 I : IB_1 = M' : M''$ , więc

$$a_1 = A_1 I, \quad (l - a_1) = IB_1.$$

A zatem punkt  $I_1$  przecięcia się boku średniego  $UV$  z prostą  $AB$  wyznacza punkt, w którym moment staje się zerem w przęśle nieobciążonym. Jestto ów punkt stały znany z §. 9; że rzeczywiście jest on punktem stałym, udowodnimy to w następnym paragrafie.

### §. 42. Dwa przęśła sąsiednie nieobciążone.

Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę dwa sąsiednie przęśła nieobciążone (rys. 57.), to wiemy, że styczna podporowa w  $B$



jest wspólna dla obydwu przęseł. Jeżeli przedłużymy boki średnie wieloboku ugięcia obu przęseł, to  $WW_0$  wyznaczy kie-

runek wypadkowej dwóch sił  $t_2$  i  $t_1'$ , działających w  $V$  i  $U_1$ . A że  $t_2 : t_1' = \frac{1}{2} \frac{M_1 l_1}{h a} : \frac{1}{2} \frac{M_1 l}{h a} = l_1 : l$ , więc odstępki poziome wypadkowej  $W_0 W_1$  od  $V$  i  $U_1$  muszą się mieć jak  $l : l_1$ , a zatem  $x = \frac{l}{3}$ .

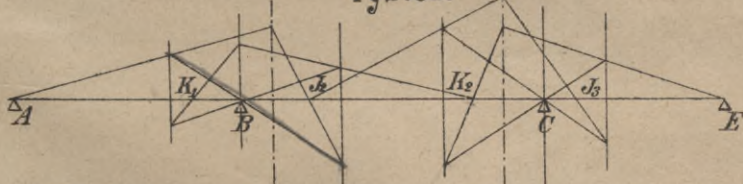
Pionową  $WW_0$ , odległą od  $V$  o  $\frac{l}{3}$  a od  $U_1$  o  $\frac{l_1}{3}$ , niezależną od obciążenia, nazywamy przesuniętą pionową podporową (n. *verschränkte Stützenverticale*, fr. *verticale auxiliaire, contreverticale*); widzimy więc, że przedłużenia boków średnich dwóch przęseł nieobciążonych przecinają się w przesuniętej podporowej.

Z rysunku widzimy dalej, że  $I_1 U_0 : I_1 W_0 = U_0 U_1 : WW_0$ , a także  $U_0 U_1 : V_0 V = l : l_1$ ,  $V_0 V : WW_0 = IV_0 : IW_0$ , a więc  $U_0 U_1 : WW_0 = l IV_0 : l_1 IW_0$ , nareszcie  $I_1 U_0 : I_1 W_0 = l IV_0 : l_1 IW_0$ .

Widzimy więc że położenie punktu  $I_1$  jest przy danych  $l$  i  $l_1$  zależne tylko jeszcze od położenia punktu  $I$ , więc dla jakiegokolwiek wieloboku sznurowego pozostaje punkt  $I_1$  ten sam, jeżeli punkt  $I$  się nie zmienia. Ponieważ w przeszle skrajnym punkt  $I$ , w którym moment staje się zerem, jest zawsze na podporze, więc położenie jego się nie zmienia, a zatem i w następnych przeszłach punkty  $I$  nie zmieniają swego położenia, są więc stałymi. Z tego wynika następną konstrukcyą wyznaczenia punktów stałych: Z punktu stałego  $I$  (a w pierwszym przeszle z podpory  $A$ ) kreślimy dowolną prostą  $IW$  i otrzymujemy punkty  $V$  i  $W$ , kreślimy  $VB$  aż do przecięcia się z pionową trzecich części w  $U_1$  i łączymy  $U_1$  z  $W$ . Punkt przecięcia się z prostą  $AB$  wyznacza punkt stały  $I_1$ . Jeżeli  $A$ ,  $B$  i  $C$  nie leżą w linii prostej, to właściwym punktem stałym dla przeszła  $BC$  jest punkt  $I_0$ , a punkt  $I_1$  leży w pionowej punktu stałego.

W rys. 58. wyznaczyliśmy w ten sposób punkty stałe  $I_2$  i  $I_3$  dla podpór równo wysokich. Zaczynając z drugiego końca  $E$  wyznaczyliśmy też drugie punkty stałe  $K_2$  i  $K_1$ .

rys. 58.



Jeżeli belka jest na pierwszej podporze w  $A$  poziomo utwierdzona, to wedle poprzedniego (§. 9.) punkt stały  $I_1$  leży nie w  $A$ , lecz w jednej trzeciej pierwszego przeszła.

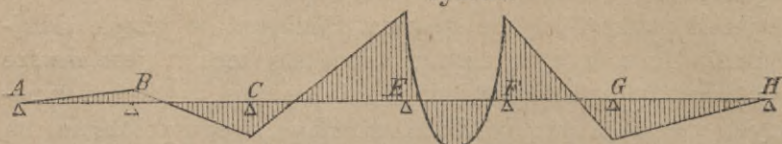
Z konstrukcyi tej podanej przez Mohra wynika bezpośrednio, że punkty stałe leżeć muszą w skrajnych trzecich częściach przeszła.

### §. 43. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przeszłach nieobciążonych.

Rysunek 59. przedstawia pierwszy wielobok sznurowy dla belki ciągłej, której  $n$ -te przeszło jest obciążone. Linie momentów są w przeszłach nieobciążonych proste i przechodzą przez punkty stałe, stąd momenty podporowe są naprzemian dodatnie i ujemne, wzrastają ku przeszłu obciążonemu i są więcej niż dwa razy większe od poprzednich. Siły poprzeczne są to pochodne

funkcyi momentów, a więc w przęsłach nieobciążonych linie sił poprzecznych są poziome, a że stęż jest naprzemian dodatnia

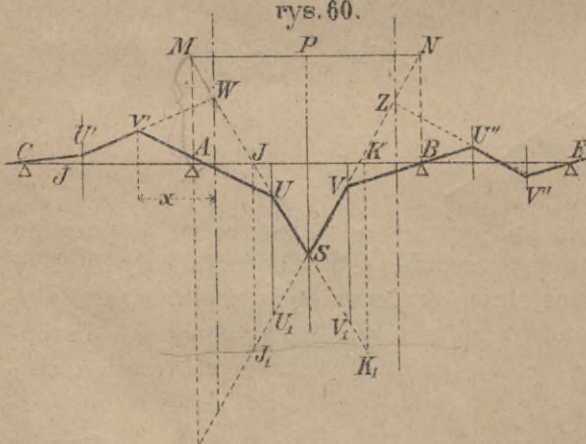
rys. 59.



i ujemna, więc i siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne. Oddziaływania równają się różnicy algebraicznej sił poprzecznych z prawej i lewej strony podpory, a więc gdy siły poprzeczne zmieniają naprzemian znaki, oddziaływania są też naprzemian dodatnie i ujemne.

#### §. 44. Przęsło obciążone.

Jeżeli przęsło  $AB$  (rys. 60.) jest obciążone, a inne przęsła nieobciążone, to można podobnie, jak w §. 41, łatwo dowieść,



że przedłużenia boków średnich drugiego wieloboku sznurowego dwóch sąsiednich przęseł przecinają się w przesuniętej podporowej i przedłużenia boków średnich  $SM$

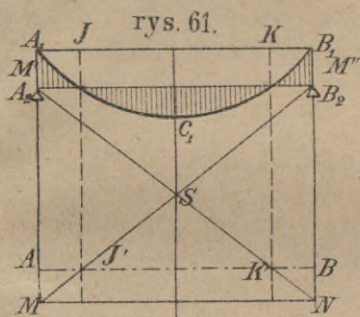
i  $SN$  przechodzą przez punkty stałe  $I$  i  $K$ , gdy podpory są w jednej linii prostej, inaczej zaś przez punkt przecięcia się prostej  $CA$  względnie  $BE$  i pionowej przez punkt stały. Aby więc wykreślić drugi wielobok sznurowy przęsła obciążonego, postępujemy w następujący sposób. Jeżeli mamy dane obciążenie, wykreślamy linie krzyżowe. W §. 40 udowodniliśmy, że  $UU_1$  i  $VV_1$  są równe odnośnym odstępom linii krzyżowych, a że odnosi się to i do innych odcinków, więc i do  $II_1$  i  $KK_1$ , które



robimy równe odnośnym odstępom linii krzyżowych, kreślimy  $IK$ , i  $KI_1$  i w ten sposób otrzymujemy dwa średnie boki drugiego wieloboku sznurowego. Odcinki  $AM$  i  $BN$ , któreśmy teraz uzyskali, są proporcjonalne do momentów podporowych.

Ponieważ  $AI < \frac{1}{3}l$ , a  $AUS < 180^\circ$ , więc siła działająca w  $U = \frac{1}{2}M' \frac{l}{a}$  działa do góry i jest ujemna, a stąd i  $M'$  jest ujemnem. Widzimy więc, że momenty podporowe pręśla obciążonego są ujemne.

Jeżeli podpory leżą w linii prostej, to do wyznaczenia momentów podporowych możemy użyć następczej konstrukcyi (rys. 61).

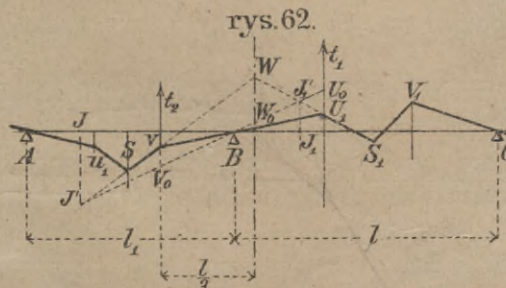


tów  $M'$  i  $M''$ . Robimy teraz momenty  $M' = A_1A_2$  i  $M'' = B_1B_2$ , a  $A_2B_2$  jest linią zamykającą dla belki ciągłej.

Jeżeli  $A_1C_1B_1$  jest zwykłą powierzchnią momentów, a  $SN$  i  $MT$  liniami krzyżowymi, to spuszczone z punktów stałych  $I$  i  $K$  pionowe, które przecinają linie krzyżowe w  $I'$  i  $K'$ , a  $I'K'$  jest wtedy linią zamykającą  $AB$ , jak w (rys. 60.), odcinki zatem  $AM$  i  $BN$  są równe (jeżeli  $a_1 = l$ ), albo proporcjonalne do momen-

25/10 §. 45. Dwa sąsiednie pręśła obciążone.

I tu (rys. 62.)  $W_0W$  jest wypadkową sił  $t_2$  i  $t_1'$ , leży więc w odległości  $\frac{l}{3}$  od  $V_0$ , a zatem przedłużenia boków średnich



dwóch sąsiednich pręśel przecinają się w przesuniętej podporowej. Możemy tu także udowodnić, że prosta  $I'I_1'$  poprowadzona przez punkt  $B$  przecina przedłużenia boków śred-

dnich  $VS$  i  $U_1S_1$  w pionowych punktach stałych. Widzimy bowiem z rysunku, że:  $U_0U_1 \parallel VV_0 = l:l_1$  i  $VV_0:WW_0 = I'V_0:I'W_0$ , a zatem  $U_0U_1:WW_0 = lI'V_0:l_1I'W_0$ .

Dalej mamy  $U_0 U_1 I' \sim W_0 W I'$ , więc

$$U_0 U_1 : W W_0 = U_0 I_1' : W_0 I_1', \text{ zatem}$$

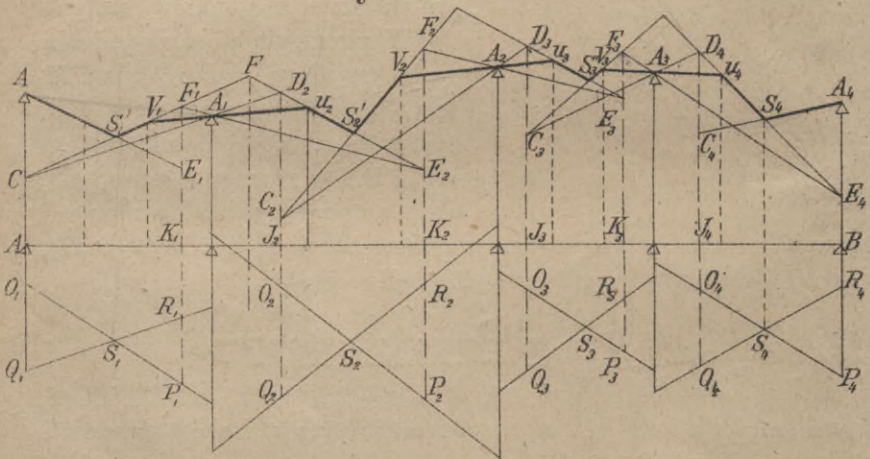
$$U_0 I_1' : W_0 I_1' = l \cdot I' V_0 : l_1 I' W_0.$$

Gdy punkt  $I'$  porusza się w pionowej, nie zmienia się stosunek  $I' V_0 : I' W_0$ , więc i stosunek  $U_0 I_1' : W_0 I_1'$  zostaje ten sam, a zatem  $I_1'$  pozostaje w tej samej pionowej. Gdy więc punkt  $I'$  jest stałym, to i  $I_1'$  jest także punktem stałym.

### §. 46. Dowolne obciążenie przęseł.

Jeżeli belka ciągła o nierówno wysokich podporach jest dowolnie obciążona (rys. 63.), to korzystając z poprzednich twierdzeń, możemy wykreślić drugi wielobok sznurowy i zeń

rys.63.



wyznaczyć momenty podporowe. Postępujemy wtedy w następujący sposób.

1. Wyznaczamy punkty stałe  $A_1, I_2, I_3 \dots K_1, K_2 \dots$  zapomocą konstrukcyi, opisanej w §. 42.

2. Wykreślamy we wszystkich przęsłach linie krzyżowe, a to według §. 38., wykreśliwszy drugi wielobok sił i przyjąwszy odpowiednią odległość biegunową  $b = \frac{1}{3} a$ , lub też, co lepiej i prędzej, obliczając  $\mathcal{N}$  i  $\mathcal{N}''$ , a stąd odstępny linii krzyżowych w pionowych podporach według §. 40.

Według §. 38. odstęp między średnimi bokami w pionowych trzecich części, a zatem i w innych pionowych jest równy

odpowiedniemu odstępowi linii krzyżowych. A więc robimy  $AC=O_1Q_1$ , kreślimy  $CA_1$  aż do  $D_2$ , do przecięcia się z pionową punktu stałego w drugim przęśle, wtedy  $D_2$  jest punktem boku średniego drugiego wieloboku sznurowego według §. 45. Dalej robimy  $D_2C_2=O_2Q_2$ , kreślimy  $C_2A_2$  aż do  $D_3$  i t. d. Potem zaczynamy znów od  $A_4$ , robimy  $A_4E_4=R_4P_4$ , kreślimy  $E_4A_3$  aż do  $F_3$ , robimy  $F_3E_3=R_3P_3$  itd.

4. W ten sposób otrzymamy dla każdego boku średniego dwa punkty  $C$  i  $F_1$ ,  $C_2$  i  $F_2$ ,  $A$  i  $E_1$  itd. tak, że te boki możemy wykreślić. Pionowe trzecich części, przecinające boki średnie, wyznaczają punkty boków skrajnych, które teraz możemy wykreślić. Odcinki pionowe między przedłużeniami boków średnich a podporami są, jak wiadomo, proporcjonalne do momentów podporowych, które w ten sposób możemy wyznaczyć. Czy konstrukcja była dokładna, możemy sprawdzić w następujący sposób:

1. Boki średnie przecinają się w przesuniętych podporowych np.  $CF_1$  i  $E_2D_2$  w  $F$ .

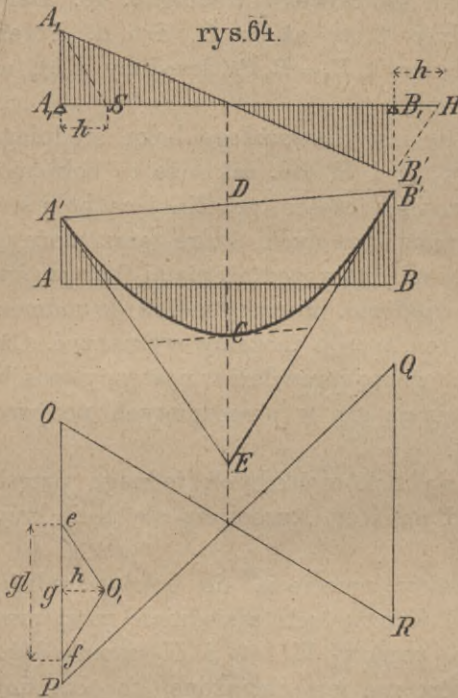
2. Punkt przecięcia się boków średnich jednego przęsła musi leżeć w pionowej nad punktem przecięcia się linii krzyżowych np.  $S_1'$  nad  $S_1$ .

3. Prosta łącząca punkty przecięcia się boków średnich z pionowymi trzecich części w przęsłach sąsiednich musi przechodzić przez podporę, np. punkty  $V_1$ ,  $A_1$  i  $U_2$  muszą leżeć w prostej. Jeżeli przęsło które nie jest obciążone, to obie linie krzyżowe wpadają na siebie. Konstrukcję tę podał pierwszy Culmann.

Co się tyczy podziałek musimy pamiętać, że stosunek podziałki momentów jest, jak wiemy,  $\frac{1}{hm}$ , jeżeli stosunek podziałki długości jest  $1/m$ . Druga odległość biegunowa  $b$  ma być równą  $\frac{a}{6}$ . Jeżeli nie chodzi nam o ugięcie, a podpory są w linii prostej, to obojętna jest podstawa  $a$  do zamieniania powierzchni; jeżeli zaś podpory są w nierównych wysokościach, a różnice wysokości wykreślimy w podziałce  $\frac{1}{n}$ , to musimy według 196) przyjąć  $b = \frac{n \varepsilon I}{a^2 m}$ . Przyjmujemy więc najprzód  $a$  równe rozpiętości średniej lub jednej z danych rozpiętości, przyjmujemy dalej  $b = \frac{a}{6}$  w podziałce długości i obieramy taką podziałkę sił, aby  $b = \frac{n \varepsilon I}{a^2 m}$ .

**§. 47. Obciążenie jednostajne zupełne.**

Jeżeli przęsło  $AB$  (rys. 64.) belki ciągłej jest jednostajnie



obciążone, to linia momentów jest tu parabola. Płóci  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$  wyznaczmy według równania 15), mianowicie  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = -\frac{1}{4}gl^2$ , a więc według §. 40) odcińki podporowe linii krzyżowych  $OP = QR = \frac{1}{4}gl^2 \left(\frac{l}{a}\right)^2 = \frac{1}{4}ga^2 \left(\frac{l}{a}\right)^4$ . Wyznaczenie momentów podporowych w ogóle odbywa się podług poprzedniego paragrafu w razie, jeśli podpory znajdują się w linii prostej, według §. 44 (rys. 61).

Znając momenty podporowe  $AA'$  i  $BB'$ , kreślimy  $A'B'$  i w połowie przęsła pionową  $DE = \frac{1}{4}gl^2$ , wtedy  $A'E$  i  $EB'$  są stycznymi paraboli a  $DC = \frac{DE}{2} = \frac{1}{8}gl^2$ .

Sily poprzeczne wyznaczamy w następnym sposobie: Robimy  $ef = gl$ ,  $f'O \parallel EB'$  i  $eO \parallel A'E$ , to otrzymamy biegun  $O$ , i pierwszą odległość biegunową  $h$ . Prowadzimy teraz  $Og \parallel AB$ , jako zamykającą, a będzie  $eg = Q'$ ,  $gf = Q''$ . Zróbmy teraz  $A_1A_1' = Q' = eg$  i  $BB_1' = Q'' = gf$ , to  $A_1B_1'$  jest linią sił poprzecznych.

$A_1A_1'$  i  $B_1B_1'$  możemy też wprost otrzymać. Zróbmy  $B_1H = A_1S = h$ , dalej  $SA_1' \parallel EA'$  i  $HB_1' \parallel B'E$ , to otrzymamy  $Q'$  i  $Q''$ .

**§. 48. Obciążenie jednostajne częściowe.**

Jeżeli tylko część przęsła  $C_0B_0$  (rys. 65.) jest jednostajnie obciążona, to linia sznurowa składa się z prostej  $AC$  i paraboli  $CB$ . Jeżeli w wieloboku sił wykreślimy promień równoległy do stycznych podporowych, to dla obciążenia całego przęsła styczna byłaby  $EF'$ , więc odnośny promień  $OE' \parallel EF'$ . Zróbmy

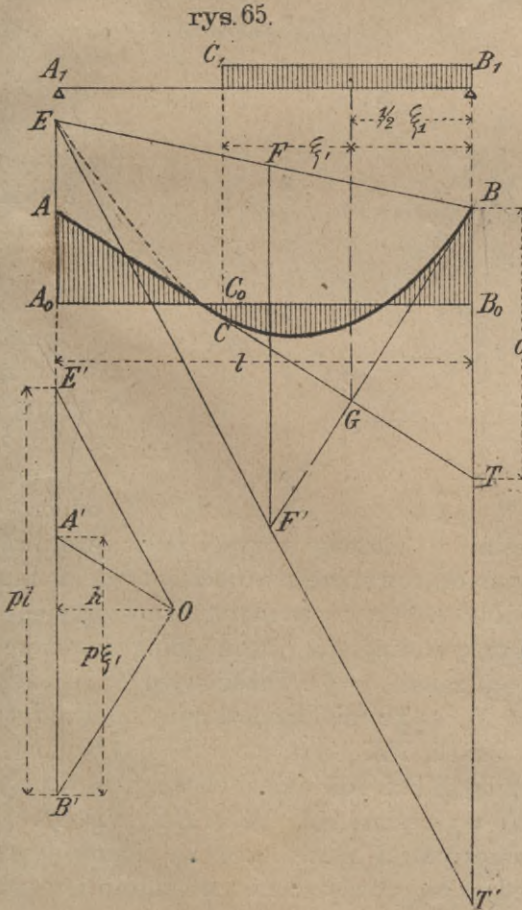
też  $OA' \parallel CA$  i  $OB' \parallel BG$ , to  $A'B' : B'E' = \xi_1 : l$ . Z rysunku widzimy, że  $GBT \sim OA'B'$ , więc  $BT : B'A' = \frac{1}{2} \xi_1 : h$ . A że

$A'B' = p\xi_1$ , więc  $BT : p\xi_1 = \frac{1}{2} \xi_1 : h$ , a zatem

$$BT = \frac{p\xi_1^2}{2h} \dots \dots \dots 200)$$

Jeżeli długości  $BT = d$  dla zmiennej  $\xi_1$  wykreśliśmy jako rzędne, to otrzymamy według 200) parabolę dla  $\xi_1 = l$ , a więc dla obciążenia zupełnego jest  $BT' = 2FF' = \frac{pl^2}{2h}$ , więc gdy nazwiemy  $FF' = t$ , to  $d = BT = \frac{2t}{l^2} \xi_1^2 = 2t \left( \frac{\xi_1}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 201)$

Jestto równanie paraboli, a na niem zasadza się następną konstrukcyą (rys. 66). W znany sposób wykreślamy parabolę  $Acrb$ , dla  $d$  według równ. 201), zrobiwszy  $B_0b = 2t$ . Zrobmy  $A_0n = \xi_1$ , to  $nr = d$ , robimy więc  $d = nr =$

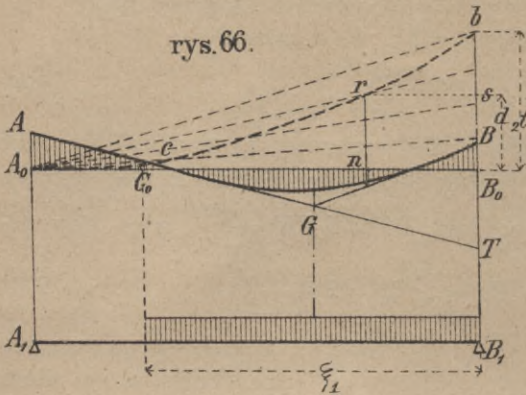


$=BT$ , łączymy  $A$  z  $T$ , w połowie  $C_0B_0$  spuszczaemy pionową, otrzymujemy  $G$  i styczną  $GB$ , poczem wykreślamy bez trudności paraboliczną linię sznurową  $C_0B$ .

**§. 49. Obciążenie jednym ciężarem skupionym.**

Jeżeli ciężar skupiony  $P$  działa w punkcie  $D_0$  (rys. 67.), a trójkąt  $ACB$  jest pojedynczą powierzchnią

rys. 66.



momentów, to jeżeli  $CD=f$ ,  $ABC=\frac{1}{2}lf$ ,  
 więc  $\mathfrak{M}=\frac{ABC}{l}=\frac{1}{2}f$ .

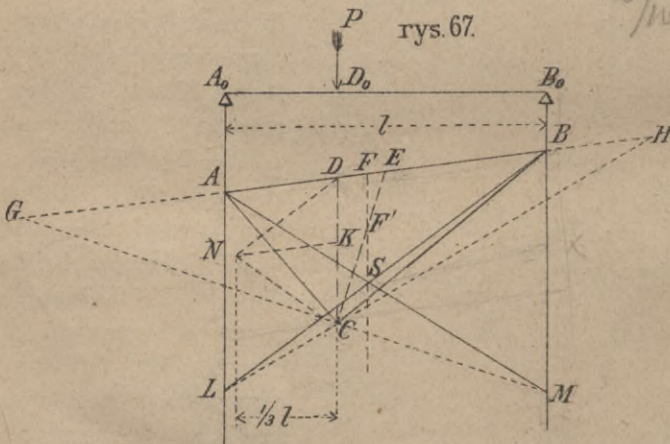
Zróbmy  $AE=EB$ ,  
 $EF'=\frac{1}{3}ED$ , to przez  $F$   
 przechodzi oś ciężkości  
 trójkąta  $ACB$ , bo  
 $EF'=\frac{1}{3}EC$ . Ponieważ  
 $CD=f$  jest proporcjo-  
 nalne do  $\mathfrak{M}$ , więc moż-  
 zemy tu zaraz wykre-  
 ślić drugi wielobok  
 sznurowy. Z powodu,

28/10

że  $f=2\mathfrak{M}$ ,  
 więc dla-  
 tego i  $b$   
 przyjmie-  
 my 2 razy  
 większe,  
 więc  $b=$   
 $=2\frac{1}{8}a=\frac{1}{4}a$ .

Jeżeli  
 chodzi nam  
 o wyzna-  
 czenie mo-  
 mentów  
 podporo-

rys. 67.



wych tylko danego przęsła, to możemy przyjąć  $l=a$ ; jeżeli zaś  
 jest kilka przęseł nierównych równocześnie obciążonych, a mo-  
 menty wyznaczamy według §. 46), to wtedy musimy przyjąć  $a$   
 wspólne dla wszystkich przęseł, najlepiej średnią długość przęseł.

Tu przyjmiemy  $a=l$ , zatem  $b=\frac{1}{3}l$ . Jeżeli więc  $N$  jest dru-  
 gim biegunem, to  $ND$  i  $NC$  są promieniami skrajnymi drugiego  
 wieloboku sznurowego. Jeżeli  $NK \parallel AB$ , to  $NK=\frac{1}{3}AB$ . Linie  
 krzyżowe są równoległe do  $ND$  i  $NC$ , jeżeli chcemy, aby prze-  
 chodziły przez  $A$  i  $B$ , to wykreślmy  $AM \parallel NC$  i  $BL \parallel ND$ . Punkt  
 przecięcia się linii krzyżowych  $S$  musi leżeć w pionowej pod  
 środkiem ciężkości pojedynczej powierzchni momentów i mamy

$SBM \sim NDC$ , zatem  $BM:CD=BF:NK$ . Ale  $BF=\frac{1}{2}AB +$   
 $+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}AB - AD)=\frac{1}{3}(2AB - AD)$ , a  $NK=\frac{1}{3}AB$ ,

więc  $BM:CD=(2AB - AD):AD$ .

Zróbmy teraz  $DG=AB$  i  $DH=AB$ , to  $BG=2AB - AD$ .  
 A więc prosta  $GC$  musi przechodzić przez punkt  $M$ , gdyż  
 w takim razie

$$BM:CD=BG:GD, \text{ czyli}$$

$$BM:CD=(2AB - AD):AB, \text{ jak pierwiej.}$$

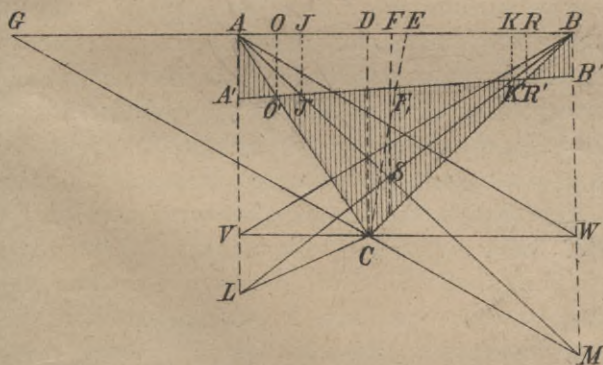
Podobnie otrzymamy, przedłużając linię  $HC$ , punkt  $L$ .

Jeżeli punkt  $G$  wypada za papier, użyć możemy drugiego  
 sposobu wyznaczenia punktów  $L$  i  $M$ .

Wykreślmy  $VW \parallel AB$  (rys. 68.),  $CL \parallel BV$  i  $CM \parallel AW$ .  
 Wtedy linie  $AM$  i  $BL$  są liniami krzyżowemi, jak to zaraz  
 udowodnimy. Przedłużmy  $AB$  i  $MC$  aż do  $G$ , to  $GDC \cong ABW$ ,

bo  $DC=BW$ ,  
 a wszystkie  
 boki równole-  
 głe, więc  $GD=$   
 $=AB$ , a zatem  
 na mocy po-  
 poprzedniego do-  
 wodu punkt  $M$   
 jest punktem  
 linii krzyżo-  
 wej. To samo  
 możemy udo-  
 wodnić co do

rys. 68.



punktu  $L$ . Z konstrukcyi powyższej wynika, że punkt  $S$  musi  
 leżeć wewnątrz trójkąta  $ABC$ . Po wykreśleniu linii krzyżowych  
 możemy teraz łatwo według §. 44) wyznaczyć momenty w da-  
 nem przęśle. Spuszczamy z punktów stałych pionowe do prze-  
 cięcia się z liniami krzyżowemi w  $I'$  i  $K'$  i kreślimy przez  $I'$   
 i  $K'$  zamykającą  $A'B'$ . Powierzchnia kreskowana przedstawia  
 powierzchnię momentów.

### §. 50. Linie wpływowe.

Na podstawie poprzednich twierdzeń możemy wyznaczyć  
 łatwo linie wpływowe sił poprzecznych i momentów. Tok kon-  
 strukcyi wedle Steinera (tabl. I, rys. 1.) jest następujący:

1. Wyznaczamy punkty stałe (rys.  $\alpha$ ) według §. 42. w znany sposób.

2. Dzielimy każde przesło na pewną ilość części np. na 4 części i wyznaczamy momenty dla położenia ciężaru w punktach 1, 2, 3, 5, 6. Niech np. ciężar  $P=1t$  działa w punkcie 2. Przyjąwszy podziałkę  $\frac{1t}{2cm}$  i  $\frac{1mm}{1m}$ , wykreślamy wielobok sił, a mianowicie  $a'b'=P$  (rys.  $\gamma$ ), obieramy biegun  $O$  w odległości  $h=\frac{1}{2}t$ , kreślimy promienie i wielobok sznurowy (rys.  $\beta$ ).  $A'2'B'$  jest pojedynczą powierzchnią momentów.

Zrobiwszy  $2H=A'B'$ , kreślimy  $H2'$  aż do  $A''$ , a prosta  $B'A''$  jest linią krzyżową. Druga linia krzyżowa przechodzi przez  $A$ . Z punktów stałych  $A$  i  $K_1$  spuszczone pionowe aż do przecięcia z liniami krzyżowymi, łączymy punkty przecięcia się i otrzymujemy zamykającą  $A'b$ , która odcina na pionowej w  $B$  odcinek  $B'b$ , równy momentowi podporowemu dla tego obciążenia. Linię tę momentów sprowadzamy teraz do poziomej zamykającej (rys.  $\delta$ ) i wykreślamy też momenty w innych przesłach, prowadząc linie momentów przez punkty stałe. Linie te momentów oznaczyliśmy na rysunku cyframi 2. Tak samo wykreślamy linie momentów dla położenia ciężaru  $P$  w punktach 1 aż do 6 i linie te oznaczone są znaczkami punktu zaczepienia siły. Teraz możemy wykreślić linie wpływowe momentów (rys.  $\eta$ ). Jeżeli chcemy np. wykreślić linię wpływową dla punktu 2, to gdy siła  $P$  stoi w 1, w punkcie 2  $M=2''a$ , robimy więc (rys.  $\eta$ )  $1'a'=2''a$ . Gdy ciężar  $P$  stoi w punkcie 2, to moment w tym punkcie  $2''2$ , robimy więc (rys.  $\eta$ )  $2'2=2''2$  i t. d.

Jeżeli ciężar stoi w punkcie 7, to sprawia ten sam moment w punkcie 2, co ciężar w punkcie 5 sprawia w punkcie 10, więc  $b10''$ , robimy więc  $b10''=7'b'$  i t. d. Połączywszy poszczególne punkty, otrzymamy linię wpływową momentów dla 2. Tak samo wykreślamy linie wpływowe dla innych punktów. Stosunek podziałki dla momentów będzie  $\frac{1mm}{1m \frac{1}{2}t} = \frac{1mm}{\frac{1}{2}tm}$ .

Na rys.  $\epsilon$  wykreśliliśmy linie wpływowe dla sił poprzecznych. Pełna linia jest dla punktu 2, dla innych linie kreskowane. Jeżeli ciężar  $P$  stoi w punkcie 2, jak w danym wypadku, to kreślimy w wieloboku sił promień  $Om // A'b$ , a wtedy  $Om=O_0$ . Na długości od  $A$  do 2 jest więc  $Q=O_0=a'm$ , dla punktów zaś od 2 do 4  $Q=O_0-P=mb'$ . Widzimy więc, że wszystkie linie



wpływowe dla punktów od  $A$  do 2 będą miały w 2 tę samą rzędną, zaś linie wpływowe dla punktów od 2 do  $B$  mają w 2 rzędną  $c 2'$ . Długość  $2'2 = P$ . Wyznaczenie linii wpływowych dla sił poprzecznych jest więc bardzo łatwe, bo te nakrywają się po części.

Jeżeli ciężary przenoszą się na belkę zapomocą poprzecznic, to linie te zmieniają się wskutek tego tak, jak przy belce jedno-przęsłowej. Zamiast linii wpływowych otrzymujemy wieloboki, których wierzchołki, odpowiadające poprzecznicom, leżą na tych liniach krzywych.

### §. 51. Najniekorzystniejsze obciążenie dla sił poprzecznych i momentów.

Z kształtu linii wpływowych sił poprzecznych widzimy, że siła poprzeczna w danym przekroju jest największą lub najmniejszą, gdy obciążenie sięga od przekroju do prawej lub lewej podpory tegoż przęsła, a następne przęsła są naprzemian obciążone. Chcąc wyznaczyć najniekorzystniejsze położenie dla momentów, założmy, że w punkcie  $D$  przęsła  $AB$  (rys. 68.) działa ciężar  $P$ . Dla tego położenia ciężaru wyznaczyliśmy linią zamykającą  $A'B'$ , a więc jeśli  $a=l$ ,  $AA'$  i  $BB'$  są równe momentom podporowym. Z rysunku widzimy, że jeżeli ciężar jest w  $D$ , w  $O$  moment jest równy zeru. Jeżeli ciężar posunie się na prawo, w  $O$  moment jest ujemny, jeżeli na lewo, dodatni. Dla *najw*  $M$  w punkcie  $O$  musi więc być obciążona długość  $AD$ , dla *najmn*  $M$  długość  $DB$ . Ponieważ punkt  $S$  jest wewnątrz trójkąta  $ABC$ , więc punkty  $O$  i  $R$  leżą po za punktami stałymi. Widzimy więc, że tylko dla punktów pierwszej i trzeciej części przęsła mamy punkt obojętny, dla punktów części średniej między punktami stałymi nie ma takiego punktu obojętnego, moment jest zawsze dodatni, a zatem *najw*  $M$  jest dla zupełnego obciążenia (tabl I, rys. 2 $\gamma$ ). Inne przęsła muszą być naprzemian obciążone.

### §. 52. Największe siły zewnętrzne.

Siły poprzeczne i momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych najlepiej obliczymy zapomocą linii wpływowych. Sposób wyznaczenia największych sił zewnętrznych na podstawie linii wpływowych podaliśmy w Podr. teor. most. w tomie I (str. 33). Jeżeli belka jest obciążona ciężarem jednostajnym

ciągłym, to największe siły poprzeczne i momenty wyznaczymy w następujący sposób:

1. Wyznaczamy najpierw punkty stałe znanym sposobem według §. 42 (tab. I, rys. 2α).

2. Dla wyznaczenia momentów podporowych (rys. β) postępujemy w następujący sposób:

Na pionowej przez podpórę  $A$  odcinamy  $T_4$  odległość linii krzyżowych na podporach dla obciążenia zupełnego pierwszego przęsła. Według §. 47) jest  $T_4 = \mathfrak{N}' \left(\frac{l_1}{a}\right)^2 = \frac{1}{4} p l_1^2 \left(\frac{l_1}{a}\right)^2$ . Gdy przyjmujemy  $a = l_1$ , to  $T_4 = \mathfrak{N}' = \frac{1}{4} p l_1^2$ , a z konstrukcyi otrzymamy wprost moment podporowy  $M$ .  $T_4$  możemy też otrzymać zapomocą konstrukcyi, łącząc  $B$  z wierzchołkiem paraboli wykreślonej dla belki zwykłej,  $T_4$  będzie wtedy także  $= 2\frac{1}{8} p l_1^2 = = \frac{1}{4} p l_1^2$ . Dalej obliczymy  $T_3$ ,  $T_2$  i  $T_1$  dla obciążeń częściowych pierwszego przęsła od podpory  $A$  do punktu 3, 2 lub 1 (§. 40.) Jeżeliśmy, jak tu, przyjęli  $a = l_1$ , to  $T_3 = \mathfrak{N}_3'$  i t. d., zaś  $\mathfrak{N}'$  wyznaczymy według równania 17). Punkty w ten sposób wyznaczone łączymy z  $B_1$ , a punkty przecięcia się tych prostych z pionową punktu stałego  $K_1$ , połączone z  $A$ , wyznaczają na podporowej  $B$  punkta 1, 2, 3, 4. Odcinki  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  są to momenty podporowe dla obciążeń długości  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  i  $AB$ .

Podobnie otrzymujemy i w drugim przęsle momenty podporowe  $B_5$ ,  $B_6$ ,  $B_7$ ,  $B_8$  i  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C_7$ ,  $C_8$ . I tu odcinamy najpierw na obu pionowych podporowych ilości  $T_5$ ,  $T_6 \dots T_5'$ ,  $T_6' \dots$ , łączymy te punkty z  $C$ , a względnie z  $B$  i przez punkty przecięcia się z pionowymi punktów stałych prowadzimy zamykające, które odcinają momenty podporowe dla odnośnych obciążeń częściowych drugiego przęsła.

3. Teraz rysujemy najmniejsze momenty i to najprzód w pierwszym przęsle. Na długości  $AK_1$  są najmniejsze momenty, gdy jest obciążone przęsło średnie (obciążenie I, rys. γ), wtedy moment na podporze  $B$  jest  $B_8$ . Zróbmy (rys. δ)  $B'O''' = B_8$  i połączmy  $A'$  z  $O'''$ , wtedy prosta ta do  $K_1$  będzie linią najmniejszych momentów. Dla wykreślenia dalszej części tej linii najlepiej będzie wyznaczyć ją stycznymi dla obciążenia  $\frac{l_1}{4}$ ,  $\frac{2l_1}{4}$ ,  $\frac{3l_1}{4}$  i  $\frac{4l_1}{4}$  i dla równoczesnego obciążenia drugiego przęsła [II, III, IV, V, rys. γ]. Najprzód wyznaczymy według rów. 201) długość  $d = 2t \left(\frac{\xi_1}{l_1}\right)^2$  dla powyższych obciążeń i otrzymamy  $d_4 = 2t =$

$=A'4'''$  (rys.  $\delta$ ),  $d_3=A'3'''$ ,  $d_2=A'2'''$ ,  $d_1=A'1'''$ . Moment podporowy dla obciążenia II jest  $=B1+B8=B0''' + 0'''1''' = B1'''$ , zatem  $1''1'''$  jest styczną do linii sznurowej dla obciążenia II. Podobnie otrzymamy styczne  $2''2'''$ ,  $3''3'''$ ,  $4''4'''$  dla obciążenia III, IV i V, które wyznaczają resztę linii najmniejszych momentów w pierwszym przęśle.

W przęśle średnim także najpierw wykreślimy linią najmniejszych momentów. Dla obciążenia IV (rys.  $\gamma$ ) otrzymamy moment ujemny w  $C$   $CO'=B4$ . Połączmy  $O$  z  $F_2$ , a otrzymamy moment podporowy w  $B$ . Punkt  $K_2'$  tej prostej wyznacza najmn. moment w punkcie  $K$ ; jeżeli więc przez  $K_2'$  poprowadzimy poziomą, to  $F_2''K_2'$  będzie linią najmniejszych momentów. Pozostaje jeszcze krzywa 4go stopnia  $K_2'S'$ , którą znowu wyznaczymy stycznymi.

Dla najmniejszych momentów na trzeciej części średniego przęsła musi być obciążona pewna długość od  $B$  i trzecie przęsło (obciąż. VII do X, rys.  $\gamma$ ). Najprzód więc wyznaczymy momenty podporowe dla każdego obciążenia. Np. dla obciążenia VII, otrzymamy ujemny moment w  $C$  dodając  $CO'$  do  $C5$ , otrzymamy więc  $C5'$ , na podporze zaś  $B$  będzie  $M=B5-B0$ . Teraz wyznaczamy według §. 48)

$d_8=2t_8=B'S'$ ,  $d_7'=B7'$  itd., odciągamy od tego odnośny moment podporowy w  $B$  i otrzymujemy wtedy punkty  $8''7''$  i t. d.; które połączone z punktami  $8'$  i  $7'$  itd. dają styczne do linii najmniejszych momentów.

Resztę linii najmniejszych momentów dopełniamy, rysując symetrycznie do środka belki.

Linią największych momentów otrzymamy przez odciąganie rzędnych linii najmniejszych momentów od linii momentów dla całkowitego obciążenia. Aby zaś tę linię otrzymać, zauważymy, że dla zupełnego obciążenia otrzymamy momenty podporowe, dodając momenty, wywołane obciążeniem każdego przęsła, więc w punkcie  $B$  będzie  $M=-B4-B8+B0$ . W  $C$  będzie moment także tak wielki, a znając teraz momenty podporowe, wykreślić możemy z łatwością paraboliczne linie sznurowe.

Wyznaczenie sił poprzecznych jest łatwe; zważyć nam tylko trzeba, że obciążenia w schemacie (rys.  $\gamma$ ) uwidocznione, wywołują najmn  $Q$  dla odnośnych punktów. Jeżeli więc od punktu  $A$ , 1, 2, 3,  $B$ , 5, 6 itd. (rys.  $\epsilon$ ) na lewo odetniemy odległość biegunową  $a$  i wykreślimy równoległe do odnośnych stycznych

$A0''$ ,  $1''1''$ ,  $2''2''$  itd., otrzymamy punkty linii najmn. sił poprzecznych.

Dla obciążenia zupełnego linie sił poprzecznych są proste, dość więc wyznaczyć dla każdej po dwa punkty, co robimy w ten sam sposób, kreśląc n. p.  $On' // A'n$  i t. d. Linie największych sił poprzecznych otrzymujemy znów przez odciąganie rzędnych *najmn*  $Q$  od linii sił poprzecznych dla obciążenia zupełnego. Ostatnie 3 rysunki ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\delta$ ) przedstawiają wyznaczenie sił zewnętrznych, wywołanych ciężarem własnym. Tu wyznaczamy tylko momenty podporowe dla obciążenia całkowitego pręseł, a więc  $B4$ ,  $B8$  i  $C0$ . Moment w  $B$  będzie  $M = -B4 - B8 + C0$ ; dalsza konstrukcja jest wobec tego, cośmy wyżej powiedzieli, zupełnie jasną.

## VI. Obliczenie analityczne belki ciągłej o przekroju zmiennym.

### §. 53. Belka pochyło utwierdzona.

Dotychczas przypuszczaliśmy, że przekrój belki ciągłej, a więc i moment bezwładności był stały, teraz zbadajmy, o ile obliczenie to się zmieni, jeśli przekrój będzie zmienny, przy czem wyłożymy rzecz według Winklera.

Dla belki pochyło utwierdzonej otrzymamy wtedy zamiast równań 2) 3) i 4), jeśli  $I$  jest zmienne

$$\epsilon(\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l \frac{M}{I} dx \quad . . . . . 202)$$

$$\epsilon y = \epsilon x \frac{dy}{dx} + \int \frac{M}{I} x dx \quad . . . . . 203)$$

$$\epsilon(s - lt_2) = \int_0^l \frac{M}{I} x dx \quad . . . . . 204)$$

Równania 5) i 6a) pozostają niezmienione. Wstawiwszy rów. 6a) w 202) i 204) otrzymamy

$$\epsilon(\tau_1 - \tau_2) = \frac{M'}{l} \int_0^l \frac{(l-x) dx}{I} + \frac{M''}{l} \int_0^l \frac{x dx}{I} + \int_0^l \frac{X dx}{I} \quad . 205)$$

$$\epsilon(s - lt_2) = \frac{M'}{l} \int_0^l \frac{x(l-x) dx}{I} + \frac{M''}{l} \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} + \int_0^l \frac{X x dx}{I} \quad 205 a)$$

Nazwijmy  $I_0$  średni moment bezwładności, t. j. taki, aby

$$\frac{l}{I_0} \int_0^l \frac{dx}{I} \quad . . . . . 206)$$

przyczem całkować mamy od początku do końca belki przez wszystkie przęsła.

Nazwijmy dalej dla pewnego przęsła

$$\frac{I_0}{l} \int_0^l \frac{dx}{I} = A, \quad \frac{2 I_0}{l^2} \int_0^l \frac{x dx}{I} = B, \quad \frac{3 I_0}{l^3} \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} = C,$$

to, jeśli  $I$  stałe,  $A=B=C=1$ .

Nazwijmy jeszcze dla skrócenia

$$-\frac{6 I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X x dx}{I} = \mathfrak{M}', \quad \frac{6 I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X(l-x) d(l-x)}{I} = \mathfrak{M}'', \quad (207)$$

$$\text{to} \quad \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = -\frac{6 I_0}{l} \int_0^l \frac{X dx}{I} \dots \dots \dots (208)$$

Wstawivszy te wartości w rów. 205) i 205 a), otrzymamy

$$6 \epsilon I_0 l (\tau_1 - \tau_2) = 3(2A - B) M' l^2 + 3 B M'' l^2 - (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'') l^2,$$

$$6 \epsilon I_0 (s - l \tau_2) = (3B - 2C) M' l^2 + 2 C M'' l^2 - \mathfrak{M}' l^2.$$

A stąd otrzymamy

$$\tau_1 = \frac{1}{6 \epsilon I_0} (2 \alpha M' + \gamma M'' - \mathfrak{M}') + \frac{s}{l} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots (209)$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{6 \epsilon I_0} (\gamma M' + 2 \beta M'' - \mathfrak{M}'') + \frac{s}{l} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$\text{jeżeli} \quad \alpha = 3A - 3B + C, \quad \beta = C, \quad \gamma = 3B - 2C \dots \dots \dots (210)$$

Dla przekroju stałego otrzymamy znowu  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , a wtedy rów. 209), przechodzi w rów. 10).

Jeżeli dla belki poziomo utwierdzonej nazwiemy, jak pierwiej, momenty podporowe  $\mathfrak{M}'$  i  $\mathfrak{M}''$ , to według rów. 209)

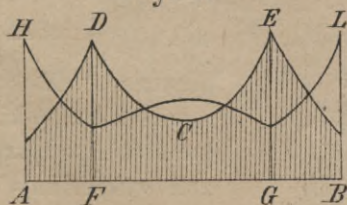
$$0 = 2 \alpha \mathfrak{M}' + \gamma \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}', \quad 0 = \gamma \mathfrak{M}' + 2 \beta \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}'',$$

$$\text{więc} \quad \mathfrak{M}' = 2 \alpha \mathfrak{M}'' + \gamma \mathfrak{M}'', \quad \mathfrak{M}'' = \gamma \mathfrak{M}' + 2 \beta \mathfrak{M}'' \dots \dots \dots (211)$$

Dla przekroju stałego przechodzi rów. 211) w rów. 11).

### §. 54. Wyznaczenie ilości pomocniczych.

rys. 69.



W celu wyznaczenia ilości pomocniczych  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , wykreślmy w każdym punkcie belki rzędną proporcjonalną do odwrotności momentu bezwładności, więc  $\frac{1}{I}$  (rys. 69.). Końce tych rzędnych, wyznaczają

linię krzywą, a powierzchnia między tą linią a osią niech się nazywa odwrotną powierzchnią bezwładności (n. *Krümmungsfläche*).

Całki  $\int_0^l \frac{dx}{I}$ ,  $\int_0^l \frac{x dx}{I}$ ,  $\int_0^l \frac{x^2 dx}{I}$  oznaczają zatem powierzchnię odwrotną bezwładności  $A'$ , moment jej statyczny  $S'$  i bezwładności  $I'$  ze względu na  $AH$ , więc

$$A = \frac{I_0 A'}{l}, \quad B = \frac{2 I_0 S'}{l^2}, \quad C = \frac{3 I_0 I'}{l^3}.$$

Nazwijmy moment statyczny i bezwładności ze względu na  $BL$   $S''$  i  $I''$  i  $B_1 = \frac{2 I_0 S''}{l^2}$ ,  $C_1 = \frac{3 I_0 I''}{l^3}$ , to

$$S'' = \int_0^l \frac{(l-x) dx}{I} = l \int_0^l \frac{dx}{I} - \int_0^l \frac{x dx}{I} = A'l - S',$$

$$I'' = \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} = l^2 \int_0^l \frac{dx}{I} - 2l \int_0^l \frac{x dx}{I} + \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} = A_1 l^2 - 2l S' + I',$$

więc  $B_1 = \frac{2 I_0}{l^2} (A'l - S') = 2A - B,$

$$C_1 = \frac{3 I_0}{l^3} (A_1 l^2 - 2l S' + I') = 3A - 3B + C,$$

a zatem według 210)

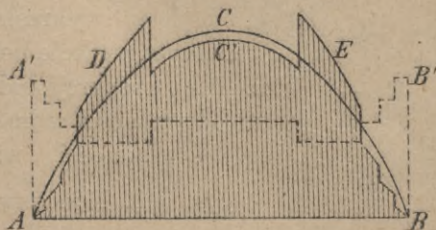
$$\alpha = C_1, \quad \beta = C, \quad \gamma = 3B - 2C = 3A - \alpha - \beta \quad . \quad . \quad 212)$$

Do wyznaczenia ilości pomocniczych  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  potrzebujemy więc tylko  $A$ ,  $C$  i  $C_1$ , a więc powierzchnię i momenty bezwładności odwrotnej powierzchni bezwładności, co możemy wyznaczyć albo rachunkiem sposobem zwykłym lub Simpsona albo konstrukcją albo planimetrem.

### §. 55. Wyznaczenie ilości $\mathfrak{R}'$ i $\mathfrak{R}''$ .

Według rów. 207)

rys. 70.



$$\mathfrak{R}'' = - \frac{6 I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X x dx}{I},$$

$$\mathfrak{R}' = + \frac{6 I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X(l-x) d(l-x)}{I},$$

przyczem  $X$  oznacza moment dla belki w dwu punktach podparte. Jeżeli wykreślimy zwykłą linią momentów  $ACB$  (rys. 70.) i jeżeli każdą

rzędną pomnożymy przez  $\frac{I_0}{I}$ , to nowe rzędne dadzą nam powierzchnię kreskowaną  $ADC'EB$ , którą nazwiemy skurczoną powierzchnią momentów (n. *verzerrte Momentenfläche*).

Nazwijmy  $S_1$  moment statyczny tej powierzchni dla pionowej  $AA'$ , a  $S_2$  dla pionowej  $BB'$ , to

$$\mathfrak{N}'' = -\frac{6S_1}{l^2}, \quad \mathfrak{N}' = +\frac{6S_2}{l^2} \quad \dots \quad (213)$$

### §. 56. Momenty podporowe belki ciągłej.

Jeżeli równanie 209) zastosujemy do dwóch sąsiednich przęseł belki ciągłej o równo wysokich podporach, jak w §. 5, to otrzymamy

$$6 \varepsilon I_0 \tau_m = -l_m (\gamma_m M_{m+1} + 2 \beta_m M_m - \mathfrak{N}_m'')$$

$$6 \varepsilon I_0 \tau_m = +l_{m+1} (2 \alpha_{m+1} M_m + \gamma_{m+1} M_{m+1} - \mathfrak{N}_{m+1}')$$

a stąd

$$\gamma_m l_m M_{m-1} + 2 (\beta_m l_m + \alpha_{m+1} l_{m+1}) M_m + \gamma_{m+1} l_{m+1} M_{m+1} =$$

$$= l_m \mathfrak{N}_m'' + l_{m+1} \mathfrak{N}_{m+1}' \quad \dots \quad (214)$$

Równanie to posłuży nam do wyznaczenia momentów podporowych, jak dla przekroju stałego.

### §. 57. Punkty stałe.

Jeżeli tylko jedno przęsło jest obciążone, to w nieobciążonych przęsłach otrzymamy momenty podporowe, podstawiając w rów. 214)  $m=1, 2$ , itd. i  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'' = 0$ , więc

$$2 (\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2) M_1 + \gamma_2 l_2 M_2 = 0,$$

$$\gamma_2 l_2 M_1 + 2 (\beta_2 l_2 + \alpha_3 l_3) M_2 + \gamma_3 l_3 M_3 = 0,$$

. . . . .

Z pierwszego równania wynika

$$M_2 = -2 \left( \frac{\alpha_2}{\gamma_2} + \frac{\beta_1 l_1}{\gamma_2 l_2} \right) M_1, \text{ z drugiego}$$

$$M_3 = - \left[ 2 \frac{\alpha_3}{\gamma_3} + \frac{l_2}{l_3} \left( 2 \frac{\beta_2}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \frac{M_1}{M_2} \right) \right] M_1, \text{ a zatem}$$

$$\mu_2 = \frac{2 (\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2)}{\gamma_2 l_2}, \quad \mu_3 = \frac{2 (\beta_2 l_2 + \alpha_3 l_3) - \frac{\gamma_2 l_2}{\mu_2}}{\gamma_3 l_3} \quad \dots \quad (215)$$

Podobnie więc, jak dla przekroju stałego, momenty podporowe są naprzemian dodatnie i wzrastają ku przęsłu obciążo-

nemu; podobnie też w każdym przęśle znajdują się dwa punkty stałe, dla których, jak w 44 i 45),

$$a = \frac{l}{1+\mu}, \quad b = \frac{l}{1+\nu} \quad \dots \quad 216)$$

Dalsze obliczenie odbywa się zupełnie, jak dla przekroju stałego.

### §. 58. Przykład.

Jako przykład obliczmy momenty, wywołane ciężarem własnym, dla tej samej belki trzyprzęsłowej, którą obliczyliśmy dla przekroju stałego w §. 25. A więc niech będzie  $l_1 = 27.87 \text{ m}$ ,  $l = 36.2 \text{ m}$ ,  $g_1 = 0.82 \text{ t/m}$ ,  $g = 0.94 \text{ t/m}$ . Na rys. 1. tab. II. wyznaczyliśmy na podstawie poprzedniego obliczenia przybliżonego dla przekroju stałego przekroje pasów, do których przy stałej wysokości proporcjonalne są momenty bezwładności. Jeżeli przyjmiemy wysokość belki  $3.16 \text{ m}$ , to  $I = \frac{Ah^2}{2} = 5A$ . Na rys. 3. wykreśliliśmy na tej podstawie  $\frac{1}{I}$  (linie kreskowane), i wypisaliśmy  $\frac{1000}{I}$ . Dla połowy belki obliczyliśmy teraz powierzchnie prostokątów, odczytując długości w  $mm$ , wysokości według liczb na rysunku ( $\frac{1000}{I}$ ) i otrzymaliśmy powierzchnię  $215.9$ . Podzieliwszy tę powierzchnię przez długość  $138.5 \text{ mm}$ , otrzymaliśmy  $1.56$  czyli właściwie  $0.00156$  jako średni odwrotny moment bezwładności  $\frac{1}{I_0}$ . Aby wyznaczyć  $\frac{I_0}{I}$ , podzieliłiśmy  $\frac{1}{I}$  przez  $\frac{1}{I_0}$  i wykreślili i oznaczyli na rysunku  $\frac{I_0}{I}$  (linie pełne).

Jeżeli  $l_3 = l_1$  mierzyć będziemy w  $mm$ , więc  $l_3 = 83.9 \text{ mm}$ , to  $A' = 88.2$ , a że  $I_0 = 1$ , więc  $A = \frac{88.2}{83.9} = 1.051$ .

Dla pierwszego przęśla jest  $I' = 17294$ ,  $I'' = 252025$ , więc gdy  $I_0 = 1$   
 $C = \frac{3 \cdot 17294}{83.9^3} = 0.870 = \beta_1$ ,  $C_1 = \frac{3 \cdot 252025}{83.9^3} = 1.111 = \alpha_1$ ,  $\gamma = 3 \cdot 1.051 - 0.870 +$   
 $- 1.111 = 1.172$ .

Podobnie otrzymamy dla drugiego przęśla

$$A = \frac{103.8}{109.2} = 0.919, \quad I' = I'' = 377533,$$

$$\alpha_2 = \beta_2 = \frac{3 \cdot 377533}{109.2^3} = 0.944, \quad \gamma_2 = 3 \cdot 0.919 - 2 \cdot 0.944 = 0.869.$$

W celu wyznaczenia  $\mathcal{R}'$  i  $\mathcal{R}''$  wykreślamy zwykle powierzchnie momentów (rys. 2). W pierwszym przęśle otrzymamy dla  $x = \frac{1}{2} l_1$ ,  $\frac{1}{2} 0.82 \cdot 27.87^2 = 79.6 \text{ tm}$ , w drugim  $\frac{1}{2} 0.94 \cdot 36.2^2 = 154.0 \text{ tm}$ . Mnożąc odnośnie rzędne przez  $\frac{I_0}{I}$  otrzymaliśmy skurczoną powierzchnię momentów.

Dalej otrzymamy moment statyczny tej powierzchni w pierwszym przęśle

$$S_1 = 39038 \text{ tm}^3, \quad S_2 = 46823 \text{ tm}^3,$$



a więc według 213)

$$\mathfrak{R}_1'' = - \frac{6.39038}{27.87^2} = 301.56 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{R}_1' = + \frac{6.46823}{27.87^2} = 361.71 \text{ tm.}$$

Dla drugiego przęsła otrzymamy

$$S_1 = S_2 = 97950 \text{ tm}^2, \text{ a więc według 213)}$$

$$\mathfrak{R}_2'' = \mathfrak{R}_2' = \frac{6.97950}{36.2^2} = 448.47 \text{ tm.}$$

Teraz ustawimy równanie momentów podporowych. Ponieważ tu z powodu symetrii  $M_1 = M_2$ , więc wystarczy jedno równanie, które otrzymamy z 214), wstawiając  $m = 1$ ,

$$2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l) M_1 + \gamma_2 l M_2 = l_1 \mathfrak{R}_1'' + l \mathfrak{R}_2',$$

a po wstawieniu wartości

$$\{2(0.87.27.87 + 0.944.36.2) + 0.869.36.2\} M_1 = 27.87.301.56 + 36.2.448.47,$$

a stąd

$$M_1 = M_2 = -165.4 \text{ tm.}$$

W §. 25. otrzymaliśmy dla przekroju stałego  $M_1 = M_2 = -94.84 \text{ tm.}$

Widzimy więc, że wpływ zmienności przekroju jest bardzo znaczny.

## VII. Obliczenie dokładne belki ciągłej kratowej o przekroju zmiennym.

### §. 59. Dokładność rozmaitych sposobów obliczenia.

30/10.90

Powyżej wyłożony sposób obliczenia belki ciągłej o przekroju zmiennym jest bardzo żmudny, a pomimo tego dla belek kratowych, o który tu zwykle chodzi, niedokładny. Obliczając bowiem belki ciągłe kratowe, według poprzedniego sposobu uwzględnimy przy wyznaczeniu momentu bezwładności tylko przekrój pasów, krzyżulców zaś wcale nie uwzględniamy. Błąd, jaki z tego powodu popełniamy w wyznaczeniu momentów podporowych jest bardzo znaczny, tak dalece, że mniejszy błąd popełniamy, licząc według sposobu dla przekroju stałego, niż uwzględniając zmienność pasów, a nie uwzględniając krzyżulców. Dlatego licząc sposobem przybliżonym, będziemy zawsze przyjmować przekrój stały, a licząc dokładnie, musimy uwzględnić także i krzyżulce.

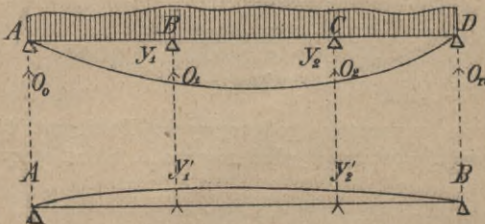
### §. 60. Zasada dokładnego obliczenia.

Zasada obliczenia dokładnego belki ciągłej polega na tem \*), że uważamy belkę jako w dwu punktach na skrajnych podpo-

\*) p. sposób Fontviolanta. Köchlin. Statique graphique str. 338.

rach  $A$  i  $D$  (rys. 71.) podpartą i wyznaczamy ugięcie obciążonej belki liczebnie lub wykreślnie. Otrzymujemy w ten sposób ugię-

rys. 71.



cia na podporach  $y_1, y_2, \dots$

Teraz przypuszczamy, że na podporze  $B$  działa do góry siła  $O_1 = 1$  na belkę nieobciążoną (ani ciężarem własnym) i wyznaczamy ugięcia na podporach  $-y_1'$  i  $-y_2'$ . Tak samo wyzna-

czamy ugięcie, jeśli siła  $= 1$  działa na drugiej podporze i otrzymujemy  $-y_1''$ ,  $-y_2''$  itd. Dla belki ciągłej ugięcia w punktach  $B, C, \dots$  muszą być równe zeru, więc

$$\left. \begin{aligned} y_1 - O_1 y_1' - O_2 y_1'' - \dots &= 0 \\ y_2 - O_1 y_2' - O_2 y_2'' - \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 217)$$

Otrzymamy w ten sposób  $(n-1)$  równań, właśnie tyle, co mamy nieznanomych. Z równań tych wyznaczymy teraz  $O_1, O_2, \dots$  dla danego obciążenia.

Ponieważ dla rozmaitych prętów belki najniekorzystniejsze obciążenia są rozmaite, więc dla każdego z nich musieliśmy powtórzyć cały żmudny rachunek.

Dla wyznaczenia linii wpływowych trzeba by przyjąć  $P=1$  działające po kolei we wszystkich węzłach dolnych i dla tych przypadków wyznaczyć siły wewnętrzne. Droga to dość żmudna, do wykreślenia linii wpływowych możemy dojść jeszcze innym sposobem, który poniżej podamy.

**Przykład.** Belka ciągła  $ABC$  (t. III r. 1) dwuprzęsłowa o rozpiętości 2 razy po  $24\text{ m}$  jest obciążona tylko w drugim przęśle  $BC$ , pierwsze przęsło  $AB$  nie jest wcale obciążone. Niechaj będzie ciężar własny jednej belki  $0.9\text{ t/m}$ , z czego wypada  $0.6\text{ t/m}$  na pas dolny a  $0.3\text{ t/m}$  na górny. Ciężar ruchomy niech będzie  $3.16\text{ t/m}$ . Według tego obliczone ciężary węzłowe są oznaczone na rysunku.

Przekroje pojedynczych prętów, które należy tymczasowo wyznaczyć wedle przybliżonej zwykłej teorii, uwidoczniliśmy poniżej w tabliczce. Przypuszczając, że belka jest tylko podparta na podporach skrajnych  $A$  i  $C$ , kreślimy wielobok sznurowy i plan sił (rys. 2. i 3.), obliczamy skrócenia i przedłużenia wszystkich prętów i wyznaczamy ugięcie belki sposobem Williota\*) (rys. 4.). Otrzymaliśmy w ten sposób ugięcie punktu  $B$   $y_1 = 168\text{ mm}$ .

\*) patrz Podr. t. m. tom I. str. 161.

Prêt	A		P		dl		I'		dl'		I''		Prêt		A		P		dl		I'		dl'		I''	
	cm <sup>2</sup>	cm	t	mm	t	mm	t	mm	t	mm	t	mm	cm <sup>2</sup>	cm	t	mm	t	mm	t	mm	t	mm	t	mm	t	mm
a	35	600	+ 31.0	+ 2.7	- 20.15	- 1.7	+ 11.5	+ 2.7	- 20.15	- 1.7	+ 11.5	+ 2.7	48	420	- 43	- 1.9	+ 28.5	+ 1.2	- 15.8	+ 1.2	- 43	- 1.9	+ 28.5	+ 1.2	- 15.8	
b	90	600	+ 86.5	+ 2.9	- 60.4	- 2.0	+ 26.4	+ 2.9	- 60.4	- 2.0	+ 26.4	+ 2.9	42	420	+ 42	+ 2.1	- 28.5	- 1.4	+ 13.5	- 1.4	+ 42	+ 2.1	- 28.5	- 1.4	+ 13.5	
c	60	600	+ 131.5	+ 6.6	- 100.65	- 6.0	+ 29.8	+ 6.6	- 100.65	- 6.0	+ 29.8	+ 6.6	18	420	- 36.5	- 4.3	+ 28.5	+ 3.3	- 8.0	+ 3.3	- 36.5	- 4.3	+ 28.5	+ 3.3	- 8.0	
d	75	600	+ 166.0	+ 6.6	- 140.9	- 7.5	+ 22.5	+ 6.6	- 140.9	- 7.5	+ 22.5	+ 6.6	18	420	+ 34.8	+ 3.8	- 28.5	- 3.3	+ 5.0	- 3.3	+ 34.8	+ 3.8	- 28.5	- 3.3	+ 5.0	
e	75	600	+ 193.5	+ 7.7	- 140.9	- 7.5	+ 50.5	+ 7.7	- 140.9	- 7.5	+ 50.5	+ 7.7	36	420	- 29.5	- 1.7	+ 28.5	+ 1.6	- 0.5	+ 1.6	- 29.5	- 1.7	+ 28.5	+ 1.6	- 0.5	
f	60	600	+ 196.6	+ 9.7	- 100.65	- 6.0	+ 92.7	+ 9.7	- 100.65	- 6.0	+ 92.7	+ 9.7	55	420	+ 26.8	+ 1.0	- 28.5	- 1.05	- 2.5	- 1.05	+ 26.8	+ 1.0	- 28.5	- 1.05	- 2.5	
g	90	600	+ 150.0	+ 5.0	- 60.4	- 2.0	+ 88	+ 5.0	- 60.4	- 2.0	+ 88	+ 5.0	75	420	- 21.8	- 0.6	+ 28.5	+ 0.8	+ 7.0	+ 0.8	- 21.8	- 0.6	+ 28.5	+ 0.8	+ 7.0	
h	35	600	+ 57.8	+ 4.7	- 20.15	- 1.7	+ 37.2	+ 4.7	- 20.15	- 1.7	+ 37.2	+ 4.7	90	420	+ 20.0	+ 0.5	- 28.5	- 0.7	- 9.5	- 0.7	+ 20.0	+ 0.5	- 28.5	- 0.7	- 9.5	
i	55	300	- 0.45	- 0.02	0	0	- 0.45	- 0.02	0	0	- 0.45	- 0.02	60	300	- 0.9	- 0.02	0	0	- 0.9	0	- 0.9	- 0.02	0	0	- 0.9	
k	38	300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	90	420	- 18.5	- 0.6	- 28.5	- 0.7	- 48.0	- 0.7	- 18.5	- 0.6	- 28.5	- 0.7	- 48.0	
l	60	600	- 114.8	- 5.7	+ 40.25	+ 2.0	- 73.4	- 5.7	+ 40.25	+ 2.0	- 73.4	- 5.7	75	420	+ 16.5	+ 0.7	+ 28.5	+ 0.8	+ 45.2	+ 0.8	+ 16.5	+ 0.7	+ 28.5	+ 0.8	+ 45.2	
m	70	600	- 183.5	- 7.9	+ 80.5	+ 3.4	- 101.2	- 7.9	+ 80.5	+ 3.4	- 101.2	- 7.9	55	420	+ 14.0	+ 0.5	- 28.5	- 1.05	- 15.0	- 1.05	+ 14.0	+ 0.5	- 28.5	- 1.05	- 15.0	
n	60	600	- 205.0	- 10.2	+ 120.75	+ 6.0	- 82.0	- 10.2	+ 120.75	+ 6.0	- 82.0	- 10.2	36	420	- 17.0	- 1.0	+ 28.5	+ 1.6	+ 12.4	+ 1.6	- 17.0	- 1.0	+ 28.5	+ 1.6	+ 12.4	
o	110	600	- 180.5	- 4.9	+ 161.0	+ 8.05	- 17.0	- 4.9	+ 161.0	+ 8.05	- 17.0	- 4.9	18	420	+ 47.2	+ 5.2	- 28.5	- 3.3	+ 18.8	- 3.3	+ 47.2	+ 5.2	- 28.5	- 3.3	+ 18.8	
p	60	600	- 150.5	- 7.5	+ 120.75	+ 6.0	- 28.0	- 7.5	+ 120.75	+ 6.0	- 28.0	- 7.5	18	420	- 50.0	- 5.5	+ 28.5	+ 3.3	- 21.0	+ 3.3	- 50.0	- 5.5	+ 28.5	+ 3.3	- 21.0	
r	70	600	- 110.5	- 4.7	+ 80.5	+ 3.4	- 29.8	- 4.7	+ 80.5	+ 3.4	- 29.8	- 4.7	18	420	+ 80.2	+ 4.0	- 28.5	- 1.4	+ 50.8	- 1.4	+ 80.2	+ 4.0	- 28.5	- 1.4	+ 50.8	
s	60	600	- 60.5	- 3.0	+ 40.25	+ 2.0	- 20.8	- 3.0	+ 40.25	+ 2.0	- 20.8	- 3.0	42	420	+ 82.4	- 3.6	+ 28.5	+ 1.2	- 53.0	+ 1.2	+ 82.4	- 3.6	+ 28.5	+ 1.2	- 53.0	
t	38	300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	48	420	- 82.4	- 3.6	+ 28.5	+ 1.2	- 53.0	+ 1.2	- 82.4	- 3.6	+ 28.5	+ 1.2	- 53.0	
u	55	300	- 0.45	- 0.01	0	0	- 0.45	- 0.01	0	0	- 0.45	- 0.01	48	420	- 82.4	- 3.6	+ 28.5	+ 1.2	- 53.0	+ 1.2	- 82.4	- 3.6	+ 28.5	+ 1.2	- 53.0	

Teraz przypuśćmy, że w  $B$  działa siła  $P=40t$  do góry. Dla tego obciążenia kreśliśmy plan sił (rys. 5.) i otrzymujemy siły, zestawione w tabliczce w rubryce  $P'$ . Obliczywszy odpowiednie  $dl'$ , wykreślamy połowę (z powodu symetrii) ugiętej belki i otrzymujemy ugięcie punktu  $B$  165 mm.

Zatem dla siły  $P=1$   $y_1' = \frac{165}{40}$ , a według 217)

$$168 - O_1 \frac{165}{40} = 0, \quad \text{stad } O_1 = 40 \cdot \frac{168}{165} = 40.7t.$$

W rysunku 2. otrzymaliśmy  $O_0 = 31.7$ ,  $O_2 = 58.18$ , od tego odjąć należy  $\frac{40.7}{2} = 20.35$ , więc

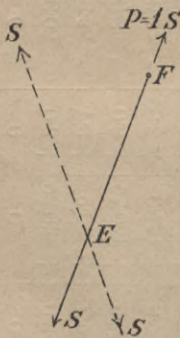
$$O_0 = 11.35t, \quad O_1 = 40.7t, \quad O_2 = 37.83t.$$

Na tej podstawie wykreśliliśmy plan sił (rys. 7.), z którego otrzymujemy dokładne siły wewnętrzne dla danego obciążenia ( $P''$  w tabliczce).

### §. 61. Prawo pracy przygotowanej.

Jeżeli na pręt jakiś belki kratowej działają równe i wprost przeciwnie siły  $S$  (rys. 72.), to praca ich, t. j. iloczyn sił przez drogi w kierunku sił, jest w czasie jakiegokolwiek ruchu pręta  $= 0$ . Ruch ten możemy bowiem rozłożyć na postępowy, podczas którego prace obu sił  $S$  są równe i wprost przeciwnie i znoszą się i na obrotowy, około dowolnego punktu pręta  $E$ , podczas którego praca jest równa zeru, bo kierunki sił przechodzą przez punkt obrotu.

rys. 72



Jeżeli długość pręta wzrośnie z jakichkolwiek przyczyn (a więc niekoniecznie wskutek sił  $S$ ) o  $\Delta s$ , to praca sił  $S$  da się wyrazić równaniem

$$A = S \int_0^{\Delta s} d\Delta s = S \Delta s.$$

Ponieważ odnosi się ona do jakichkolwiek, byle nadzwyczaj małych możliwych przesunięć, więc nazywa się ona pracą możliwą, przygotowaną (n. *virtuelle Arbeit*). Dla całej belki kratowej będzie

$$A = \Sigma S ds \dots \dots \dots 218)$$

Siły wewnętrzne, działające w prętach belki, możemy zastąpić każdy dwiema siłami  $S$ , działającymi w kierunku pręta, zaczepiającymi w węzłach. Ponieważ mają one zatem kierunek wprost przeciwny, więc praca ich jest  $-\Sigma S ds$ . Przypuśćmy, że

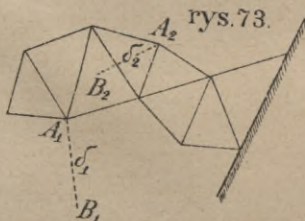
na belkę tę działają siły zewnętrzne  $P$ , które są w równowadze między sobą i z siłami wewnętrznymi, a rzuty przesunięć się odnośnych punktów zaczepienia na kierunki tych sił nazwiemy  $dp$ , to w każdym węźle dla równowagi suma składowych pionowych i poziomych wszystkich sił jest równa zero, a na podstawie zasady momentów przygotowanych\*) i praca ich jest równa zero. Zatem praca możliwa wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych musi być równa zero. Więc

$$\left( \sum P dp - \sum S ds = 0 \right) \dots \dots \dots 219)$$

Prawo powyższe zwane prawem pracy przygotowanej\*\*) lub możliwych przesunięć (n. *Princip der virtuellen Arbeit, der virtuellen Verschiebungen*) można w ten sposób wyrazić: W stanie równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych praca przygotowana sił zewnętrznych równa się pracy odkształcenia belki kratowej (n. *Formänderungsarbeit*).

### §. 62. Prawo Maxwella.

Przypuśćmy, że wskutek jakichkolwiek sił zewnętrznych zmieniły się długości  $s$  prętów belki kratowej  $A_1 A_2$  (rys. 73.) o  $\Delta s$ , przyczem węzeł  $A_1$  zrobił drogę  $\delta_1 = A_1 B_1$ , a węzeł  $A_2$  drogę  $\delta_2 = A_2 B_2$ .



Na mocy prawa pracy przygotowanej możemy wyznaczyć  $\delta_1$ , które powstają wskutek  $\Delta s$ , nazwawszy  $S_1$

siły wewnętrzne, wywołane siłą  $= 1$ , działającą w  $A_1$  w kierunku  $A_1 B_1$ . Mianowicie mamy wtedy 1.  $\delta_1 = \sum S_1 \Delta s$ .

Podobnie wyznaczymy  $\delta_2$ , nazwawszy  $S_2$  siły wewnętrzne, wywołane siłą  $= 1$ , działającą w  $A_2$  w kierunku  $A_2 B_2$ . Otrzymamy wtedy

$$1. \delta_2 = \sum S_2 \Delta s.$$

Dla pewnego obciążenia jest

$$\Delta s = \frac{S s}{\epsilon A} \dots \dots \dots 220)$$

\*) p. Franke. Mechanika teoretyczna str. 163.

\*\*\*) Mohr. Betrag zur Theorie des Fachwerkes Z. d. Ar. u. J. V. zu Hann. 1874. 1875.

\*\*\*\*) p. Podręcznik statyki budowli str. 31.

jeżeli  $S$  oznacza siłę wewnętrzną, odpowiadającą danemu obciążeniu a  $A$  przekrój pręta. A zatem otrzymamy

$$\delta_1 = \sum \frac{S_1 S_s}{\varepsilon A}, \quad \delta_2 = \sum \frac{S_2 S_s}{\varepsilon A}.$$

Załóżmy, że  $S=S_2$ , to  $\delta_1 = \sum \frac{S_1 S_2 s}{\varepsilon A}, \dots \dots \dots$  221)

a gdy  $S=S_1$ , to  $\delta_2 = \sum \frac{S_2 S_1 s}{\varepsilon A}, \dots \dots \dots$  221 a)

a ponieważ wtedy  $\delta_1 = \delta_2$ , zatem możemy wypowiedzieć następane twierdzenie:

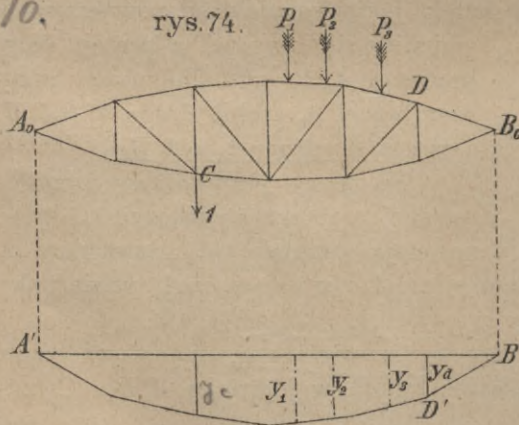
Siła równa jedności, zaczepiająca w  $A_1$  w kierunku  $A_1 B_1$ , przesuwa punkt  $A_2$  w kierunku  $A_2 B_2$ , o długość, która jest tak wielką, jak długość  $A_1 B_1$ , o którą przesuwa się  $A_1$ , gdy w  $A_2$  działa siła  $=1$  w kierunku  $A_2 B_2$ .

Twierdzenie to nazywamy twierdzeniem Maxwella.

**§. 63. Linia wpływa ugięcia.**

31  
10.

Aby wyznaleść linię wpływa ugięcia punktu  $C$  (rys. 74.)



postąpimy według Müllera Breslaua w następnym sposób:

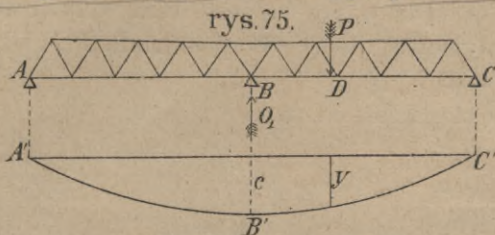
Zacznemy w  $C$  siłę pionową  $=1$  i wyznaczmy w znany sposób liczebny lub wykreślmy wielobok ugięcia pasu, na którym leży pomost (np. pasu górnego), to rzędna  $y_a$  oznacza ugięcie punktu  $D$ , gdy

w  $C$  działa siła  $=1$ . Uwzględniamy tu jednak tylko ugięcia pionowe. Na mocy prawa Maxwella będzie jednak  $y_a$  oznaczać także ugięcie punktu  $C$ , jeżeli w punkcie  $D$  działa siła  $=1$ . To samo możemy powiedzieć o każdym innym punkcie pasu  $A D B$ , a zatem linia  $A' D' B'$  jest linią wpływa ugięcia punktu  $C$ .

Jeżeli więc siły  $P_1, P_2$  i  $P_3$  działają na belkę, to ugięcie w punkcie  $C$  będzie  $y_c = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$ .

**§. 64. Linia wpływowa oddziaływania belki dwuprzęsłowej.**

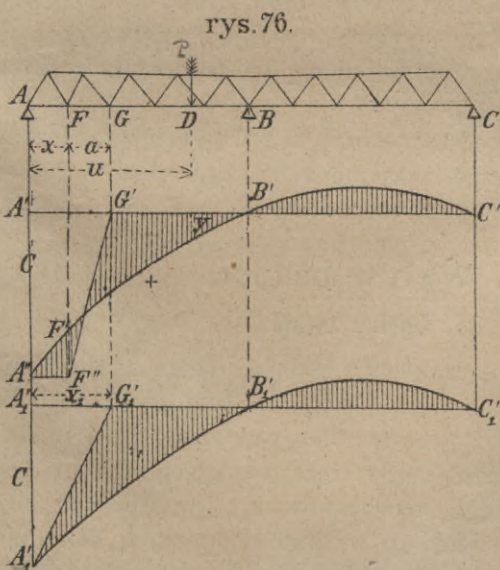
Jeśli mamy wyznaczyć oddziaływanie  $O_1$  belki ciągłej dwuprzęsłowej na środkowej podporze  $B$  (rys. 75.), przypuszczamy,



że belka jest podparta tylko w  $A$  i  $C$ , a w  $B$  działa na dół siła pionowa  $=1$  i kreślimy dla niej wielobok ugięcia pasu dolnego  $A'B'C'$ . Na mocy poprzedniego paragrafu jest  $A'B'C'$  zarazem linią wpływową ugięcia punktu  $B$ .

Przypuśćmy teraz, że na belkę ciągłą  $ABC$  działa w  $D$  siła  $P$ , to w  $B$  powstanie oddziaływanie nieznanne nam jeszcze  $O_1$ . Z linii wpływowej otrzymamy ugięcie punktu  $B$ , które dla belki ciągłej jest równe zero, więc  $Py - O_1c = 0$ , a zatem

$$O_1 = \frac{1}{c} Py. \quad (222)$$



Ponieważ  $c$  jest ilością stałą, więc widzimy, że linia  $A'B'C'$  jest zarazem linią wpływową oddziaływania  $O_1$ , a  $\frac{1}{c}$  jest mnożnikiem dla tej linii.

W podobny sposób przypuszczając, że belka podparta jest w  $B$  i  $C$  a obciążona siłą  $=1$  w  $A$ , otrzymamy (rys. 76.) linią wpływową  $A''B''C''$

dla oddziaływania  $O_0$ , przyczem  $O_0 = \frac{1}{c} Py$ .

**§. 65. Linie wpływowe sił poprzecznych i momentów.**

Wyznamy teraz linie wpływowe siły poprzecznej w przedziale  $FG$  (rys. 76.).

Jeżeli  $u < x$   $Q = O_0 - P$

„  $u > x+a$   $Q = O_0$ .

Jeśli więc zrobimy  $A''F'' // A'B'$ , to różnica rzędnych linii  $A''F''$  i  $A''F'$  wyznacza  $Q$ . Dla  $u > x+a$  jest linia wpływowa dla  $O_0$  zarazem linią wpływową dla  $Q$ . W przedziale  $FG$  jest linia wpływowa prosta, więc  $F''G'$ .

Dla momentu statycznego jest znowu,

jeśli  $u > x_1$ ,

„  $u < x_1$ ,

$$M = O_0 x_1,$$

$$M = O_0 x_1 - P(x_1 - u).$$

Niech będzie  $M' = \frac{M}{x_1}$ , to dla  $u > x_1$   $M' = O_0$ ,

a „  $u < x_1$   $M' = O_0 - P \frac{x_1 - u}{x_1}$ .

A więc dla  $u > x_1$  linia wpływowa dla  $O_0$  jest zarazem linią wpływową dla  $M'$ , a więc i dla  $M$  z mnożnikiem  $x_1$ , dla długości  $AG$  mamy od rzędnej linii  $O_0$  odciągnąć  $y_1 = P \frac{x_1 - u}{x_1}$ . Dla  $u=0$  jest  $y_1 = P$ , dla  $u=x_1$  jest  $y_1 = 0$ , a więc powierzchnia kreskowana jest powierzchnią wpływową momentów.

Widzimy więc, że do wykreślenia linii wpływowych sił poprzecznych i momentów potrzebujemy jednego tylko wykresu ugiętej belki i kilku linii prostych.

W jaki sposób na podstawie linii wpływowych wyznaczamy największe siły poprzeczne i momenty i największe siły wewnętrzne, wiemy z tomu pierwszego.

## VIII. Wpływ podpór.

### §. 66. Ogólne uwagi.

Dotychczas przypuszczaliśmy, badając belkę analitycznie, że podpory znajdowały się w jednej linii, a właściwie, że belka jest tak podparta w kilku punktach, że przez to podparcie nie powstają żadne momenty, gdy ciężaru własnego nie uwzględnimy. Badając belkę ciąglą sposobem wykreślonym przypuszczaliśmy już jednak także nierówno wysokie podpory, to samo musimy teraz zrobić przy użyciu sposobu liczebnego zwłaszcza, że podpory czasami umyślnie umieszczamy w nierównej wysokości, czasem zaś wskutek osiadania się filarów niektórych nierówność ta powstaje pomimo naszej woli.

Pokrótkie wspomnimy też w tym rozdziale o wpływie na momenty łożysk szerokich albo podwójnych i przytwierdzenia belki stałej do filaru.



**§. 67. Momenty podporowe przy nierówno wysokich podporach.**

Niechaj odstępów pionowych podpór od poziomej, przechodzącej przez pierwszą podporę będą  $s_1, s_2 \dots s_n$ , przy czem oznaczamy je jako dodatnie dla podpór niżej leżących, to jeśli przypuścimy, że belka nie jest wcale obciążona, więc  $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'' = 0$ , otrzymamy dla  $m$ -tej podpory belki ciągłej, analogicznie jak w §. 5, na podstawie rów. 10)

$$\tau_m = - \frac{l_m}{6 \varepsilon I} (M_{m-1} + 2 M_m) + \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m},$$

$$\tau_{m+1} = + \frac{l_{m+1}}{6 \varepsilon I} (2 M_m + M_{m+1}) + \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}.$$

A stąd

$$\begin{aligned} & M_{m-1} l_m + 2 M_m (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} = \\ & = 6 \varepsilon I \left( \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}} \right) \dots \dots 223 \end{aligned}$$

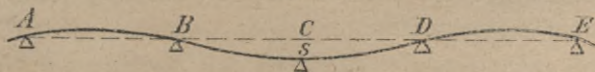
Wstawiając w tem równaniu za  $m$  wartości od 1 do  $n-1$ , otrzymamy  $n-1$  równań momentów podporowych, z których możemy wyznaczyć  $n-1$  niewiadomych momentów podporowych, wywołanych nierówną wysokością podpór.

Do tych momentów dodać należy momenty, wywołane obciążeniem, które wyznaczyliśmy w poprzednich rozdziałach. Widzimy stąd, że najniekorzystniejsze obciążenie i linie wpływowe sił poprzecznych i momentów dla obciążenia są niezależne od wysokości podpór, których wpływ zupełnie osobno obliczamy.

**§. 68. Wpływ zmiany wysokości jednej podpory.**

Jeżeli jedna podpora się zniży o  $s$  (rys. 77.), to na tej podporze linia ugięcia jest ku dołowi wypukłą, a zatem powstaje

rys. 77.



tu moment dodatni.

Przez podwyższenie

podpory średniej powstaje przeciwnie moment ujemny.

Ponieważ obciążenie belki sprawia na średnich podporach moment ujemny, zatem przez podwyższenie podpory moment ten się powiększa, przez zniżenie powiększa.

Momenty na sąsiednich podporach zmieniają znak i stają się coraz mniejsze, co możnaby udowodnić zupełnie w ten sam sposób, co dla obciążenia jednego przęsła w §. 8.

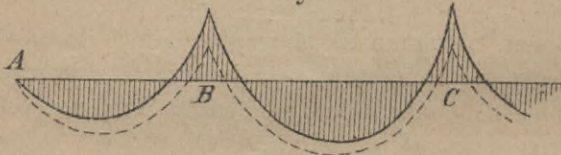
Udowodnione w § 9. twierdzenia co do sił poprzecznych i oddziaływań stosują się i tutaj.

**§. 69. Najkorzystniejsza wysokość podpór.**

Przez zmianę wysokości podpór zmieniają się momenty. Zachodzi więc teraz pytanie, w jakiej wysokości muszą leżeć podpory dla najmniejszej ilości materiału.

Jeżeli przekrój belki ciągłej jest stały, to obliczamy go według największego momentu. Bezwzględnie największe momenty są tu ujemne na podporach (rys. 78.). Jeżeli środkowe podpory zniżymy, zmniejszamy *najw* ( $-M$ ), za to wzrasta

rys. 78.



*najw* ( $+M$ ). Najkorzystniej byłoby więc zniżyć o tyle podpory średnie, aby *najw* ( $-M$ ) było bez względu

na znak równe *najw* ( $+M$ ).

Jeżeli przekrój belki ciągłej jest zmienny, wtedy o ilości materiału rozstrzyga powierzchnia momentów i sił poprzecznych. Tu musimy w każdym wypadku szukać, kiedy te powierzchnie będą najmniejsze. Wiele nie możemy jednak zaoszczędzić na materiale przez zmianę wysokości podpór, bo jeśli w jednym miejscu momenty maleją, to w drugim wzrastają tak, że wysokość podpór prawie nie wpływa na ilość materiału.

**§. 70. Belka dwu- i trzyprzęsłowa.**

Jeżeli średnia podpora belki dwuprzęsłowej zniży się o  $s$ , to z rów. 223) otrzymamy

$$2 M_1 (l_1 + l_2) = 6 \epsilon I \left( \frac{s}{l_1} + \frac{s}{l_2} \right), \text{ zatem}$$

$$M_1 = \frac{3 \epsilon I s}{l_1 + l_2} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = \frac{3 \epsilon I s}{l_1 l_2} \dots \dots \dots 224)$$

a dla  $l_1 = l_2 = l$  
$$M_1 = \frac{3 \epsilon I s}{l^2} \dots \dots \dots 225)$$

Rozumie się, że dla podwyższenia podpory średniej o  $s$  otrzymamy równie wielki moment ujemny.

Ponieważ  $M_1 = O_0 l_1$ , więc

$$O_0 = \frac{M_1}{l_1} = \frac{3 \varepsilon I s}{l_1^2 l_2}, \dots \dots \dots 226)$$

a 
$$O_1 = - (O_0 + O_2) = - \frac{3 \varepsilon I s}{l_1^2 l^2} (l_1 + l_2) \dots \dots \dots 227)$$

Dla  $l_1 = l_2 = l$

$$O_0 = \frac{3 \varepsilon I s}{l^3}, \quad O_1 = - \frac{6 \varepsilon I s}{l^3} \dots \dots \dots 228)$$

Jeśli obie średnie podpory belki trzyprzęsłowej zniżą się o  $s$ , a rozpiętości jej są  $l_1 = 2l = l_3$ ,  $l_2 = l$ , to otrzymamy  $M_1 = M_2$ , do określenia którego wystarcza jedno równanie według 223)

$$2 M_1 (l_1 + l) + M_2 l = 6 \varepsilon I \frac{s}{l_1}, \text{ a zatem}$$

$$M_1 = \frac{6 \varepsilon I s}{(3 + 2 \vartheta) \vartheta l^2}, \dots \dots \dots 229)$$

a 
$$O_0 = - O_1 = \frac{6 \varepsilon I s}{(3 + 2 \vartheta) \vartheta^2 l^3} \dots \dots \dots 230)$$

Rów. 225) i 229) możemy ogólnie wyrazić  $M_w = a \cdot \frac{I s}{l^2}$ , gdzie  $a$  oznacza pewien współczynnik. Moment średni, wywołany obciążeniem, da się przedstawić w kształcie  $b \cdot ql^2$ , siła wewnętrzna w pasie  $\frac{bql^2}{h}$ , przekrój pasu  $\frac{bql^2}{h \tau}$ , a moment bezwładności  $I = \frac{A h^2}{4} = \frac{bql^2 h}{4 \tau}$ , zatem  $M_w = a \frac{bql^2 h s}{4 \tau l^2} = \frac{a b n q l s}{4 \tau} = c \cdot l s$ , jeżeli przyjmiemy  $h = l n$ , przyczem  $c$  i  $n$  oznaczają pewne ilości stałe.

Jeżeli największy moment, wywołany obciążeniem, nazwiemy  $M_c = b_1 ql^2$ , to

$$\frac{M_w}{M_c} = \frac{c l s}{b_1 ql^2} = c_1 \frac{s}{l} \dots \dots \dots 231)$$

Zatem stosunek momentu podporowego, wywołanego zmianą wysokości podpór do momentu, wywołanego obciążeniem, jest wprost proporcjonalny do różnicy wysokości  $s$ , a odwrotnie do rozpiętości.

Winkler oblicza, że jeśli  $s$  wyrazimy w  $mm$ , a  $l$  w  $m$ , to dla belki dwuprzęsłowej  $c_1 = 0.25$ , dla belki trzyprzęsłowej  $c_1 = 0.11$ , a więc jeśli  $s = 10 mm$  będzie

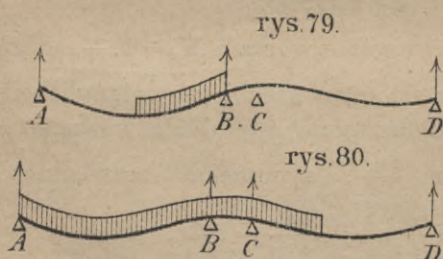
	dla $l = 10$	30	50	100	150 m
dla belki dwuprzęsłowej $\frac{M_w}{M_c} =$	0.25	0.08	0.05	0.025	0.016
" " trzyprzęsłowej $\frac{M_w}{M_c} =$	0.11	0.04	0.02	0.011	0.007.

Wpływ małej zmiany względnej wysokości podpór jest więc dla belki ciągłej bardzo znaczny przy małych rozpiętościach, mały przy wielkich.

### §. 71. Podwójne łożyska.

Dawniej używano często dla belek ciągłych na jednej podporze dwu łożysk tak, że właściwie powstawały oprócz wielkich przęseł, także przęsła małe między dwoma łożyskami jednej podpory. Chociaż teraz nie używamy już nigdy dwu łożysk na jednej podporze, to także szerokie jedno łożysko działa podobnie jak dwa łożyska.

Mogą przytem zajść dwa wypadki. Jeżeli oddziaływanie w  $C$  (rys. 79.) wypada ujemne, a belka nie jest zakotwioną, to belka w tem miejscu się podnosi i przy obliczeniu przyjąć należy, że belka w  $C$  nie



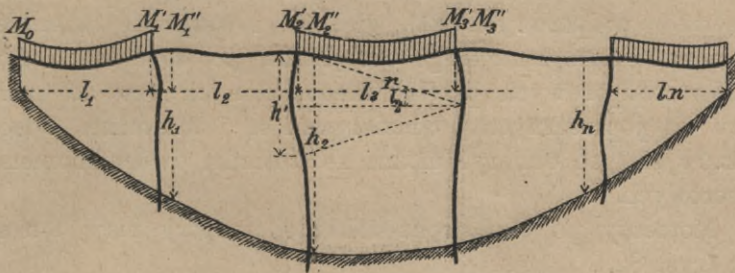
jest podpartą. Jeżeli oddziaływania w  $B$  i  $C$  są dodatnie (rys. 80.), to wtedy długość  $BC$  stanowi rzeczywiste przęsło, które przy obliczeniu należy uwzględnić.

Z powodu, że obecnie unikamy tak podwójnych, jak i szerokich łożysk, nie będziemy wchodzić w szczegóły obliczenia takich belek, które zresztą małego się różni od obliczenia belek o pojedynczych łożyskach, trzeba tylko dodatkowo badać, czy oddziaływania są ujemne, czy dodatnie.

### §. 72. Wpływ przytwierdzenia belek do filarów.

Jeżeli belki są stale połączone z filarami, to filary muszą wziąć udział w ugięciu belek (rys. 81.), a więc pewna część momentu podporowego  $\Delta M$  zostaje zużyta na ugięcie filaru. Jeżeli moment przy podporze po lewej stronie oznaczymy jedną, a po prawej dwiema kreskami, to

rys. 81.



$$M_1' - M_1'' = \Delta M_1,$$

$$M_2' - M_2'' = \Delta M_2 \text{ itd.}$$

Nazwijmy kąty nachylenia stycznej linii ugięcia na podporach  $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \dots \tau_i$ , to na podstawie rów. 10) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} 6 \varepsilon I \tau_1 &= -l_1 (2 M_1' - \mathfrak{R}_1'') \\ 6 \varepsilon I \tau_1 &= +l_2 (2 M_1'' + M_2' - \mathfrak{R}_2') \\ 6 \varepsilon I \tau_2 &= -l_2 (M_1'' + 2 M_2' - \mathfrak{R}_2'') \\ 6 \varepsilon I \tau_2 &= +l_3 (2 M_2'' + M_3' - \mathfrak{R}_3'') \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 232)$$

Z rysunku widzimy, że  $\tau_2 = \frac{h'}{2r}$ , a że  $\varepsilon I_2 = \Delta M_2 r$ , jeżeli  $I_2$  oznacza moment bezwładności filaru, a możemy przyjąć  $h' = 0.7 h_2$ ,

to

$$\tau_2 = \frac{0.7 h_2 \Delta M_2}{2 \varepsilon I_2} = \frac{0.35}{\varepsilon I_2} h_2 (M_2'' - M_2') \left\{ \dots \dots \dots 233) \right.$$

podobnie

$$\tau_1 = \frac{0.35}{\varepsilon I_1} h_1 (M_1'' - M_1') \left\{ \dots \dots \dots \right.$$

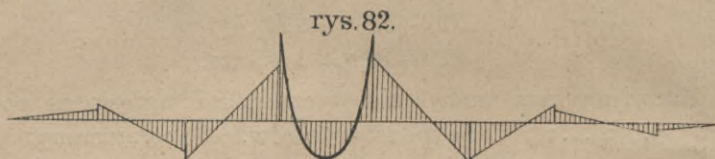
Z porównania rów. 232) i 233) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} 2.1 \frac{I}{I_1} h_1 (M_1'' - M_1') &= -l_1 (2 M_1' - \mathfrak{R}_1'') \\ 2.1 \frac{I}{I_1} h_1 (M_1'' - M_1') &= +l_2 (2 M_1'' + M_2' - \mathfrak{R}_2') \\ 2.1 \frac{I}{I_2} h_2 (M_2'' - M_2') &= -l_2 (M_1'' + 2 M_2' - \mathfrak{R}_2'') \\ 2.1 \frac{I}{I_2} h_2 (M_2'' - M_2') &= +l_3 (2 M_2'' + M_3' - \mathfrak{R}_3'') \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 234)$$

Otrzymujemy w ten sposób  $2(n-1)$  równań, które nam służą do wyznaczenia  $2(n-1)$  niewiadomych.

Ponieważ równania 234) mają ten sam kształt, co równania momentów podporowych 21), więc też i wszystkie twierdzenia co do najniekorzystniejszego obciążenia, co do stosunków momentów podporowych przęseł nieobciążonych, co do zmiany znaku sił poprzecznych i oddziaływań są i tu ważne. Odstepy punktów stałych obliczyć można ze stosunku dwóch momentów podporowych.

Momenty po obu stronach każdej podpory mają ten sam znak (rys. 82.).



## B. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne i nateżenia drugorzędne.

### IX. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

#### §. 73. Pręty nadliczbowe.

Belki kratowe mogą być, jak wiadomo\*), albo statycznie wyznaczalne, albo statycznie niewyznaczalne, albo też chwiejne. Belek kratowych prostych ostatniego rodzaju nie powinniśmy w praktyce używać, o statycznie wyznaczalnych jużśmy mówili, teraz mówić mamy o belkach kratowych statycznie niewyznaczalnych.

Jeżeli ilość węzłów nazwiemy  $m$ , ilość prętów  $n$ , to otrzymamy belkę kratową statycznie niewyznaczalną, jeśli  $2m - 3 < n$ . Chcąc z takiej belki kratowej utworzyć belkę statycznie wyznaczalną, musimy  $n - 2m + 3$  prętów opuścić, a zatem te  $k = n - 2m + 3$  pręty nazywamy nadliczbowymi (n. *überzählig*), inne pręty nazywamy potrzebnymi (n. *nothwendig*).

Opuściwszy pręty nadliczbowe, możemy dla danego obciążenia wyznaczyć w pozostałych prętach siły wewnętrzne  $\mathcal{E}_1$ ,

\*) por. Podręcznik statyki budowlanej str. 183.

$\mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \dots$ , poczem w miejsce prętów nadliczbowych przyczepiamy po kolei za każdy pręt dwie siły równe jedności i wprost przeciwne, działające w kierunku tego pręta. Nazwijmy siły wewnętrzne, wywołane siłami  $=1$  zamiast pierwszego pręta nadliczbowego,  $u_1', u_2', u_3', \dots$ , zamiast drugiego pręta  $u_1'', u_2'', u_3'', \dots$ , zamiast trzeciego  $u_1''', u_2''', u_3''', \dots$ , naraście nazwijmy  $S_1, S_2, S_3, \dots$  rzeczywiste siły wewnętrzne prętów potrzebnych belki statycznie niewyznaczalnej, a  $S', S'', S'''$  prętów nadliczbowych, to

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \mathfrak{E}_1 + u_1' S' + u_1'' S'' + u_1''' S''' + \dots \\ S_2 &= \mathfrak{E}_2 + u_2' S' + u_2'' S'' + u_2''' S''' + \dots \\ S_3 &= \mathfrak{E}_3 + u_3' S' + u_3'' S'' + u_3''' S''' + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots 1)$$

### §. 74. Obliczenie sił wewnętrznych prętów nadliczbowych.

Z powyższych równań widzimy, że moglibyśmy łatwo obliczyć  $S_1, S_2, \dots$ , gdybyśmy znali siły wewnętrzne prętów nadliczbowych  $S', S'', S'''$ . Siły te wyznaczymy na podstawie odkształceń. Nazwijmy odkształcenia prętów potrzebnych  $ds_1, ds_2, ds_3, \dots$  a prętów nadliczbowych  $ds', ds'', ds'''$ , to na mocy prawa pracy (§. 61.), możemy napisać

$$\Sigma P dp - \Sigma S ds = 0, \dots \dots \dots 2)$$

a wstawiwszy wartość za  $S$

$$\Sigma P dp - \Sigma \mathfrak{E} ds - S' ds \Sigma u' - S'' ds \Sigma u'' - \dots = 0 \dots \dots 3)$$

Równanie to jest ważne ogólnie dla jakichkolwiek sił w równowadze zostających i dla jakichkolwiek przesunięć możliwych wskutek zmiany długości prętów. Załóżmy, że wszystkie  $P$  są równe zeru,  $S' = 1, S'' = S''' = 0$ , to

$$ds \Sigma u' = 0, \text{ czyli}$$

$$u_1' ds_1 + u_2' ds_2 + u_3' ds_3 + \dots ds' = 0$$

Podobnie możemy napisać

$$u_1'' ds_1' + u_2'' ds_2' + u_3'' ds_3' + \dots ds'' = 0$$

$$u_1''' ds_1 + u_2''' ds_2 + u_3''' ds_3 + \dots ds''' = 0$$

$\left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} k \text{ równań } 4)$

Jeżeli ciepłota prętów potrzebnych jest  $\tau_0$ , to dla tej ciepłoty są długości prętów, a zatem i położenie wszystkich węzłów oznaczone. Jeśli przy tej ciepłocie wstawimy pręty nadliczbowe tak, że przez to nie nastąpi zmiana kształtu belki, to przy każdej innej ciepłocie odstępów węzłów są inne i wstawienie prętów nadliczbowych wywołuje natężenia.

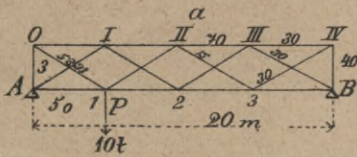




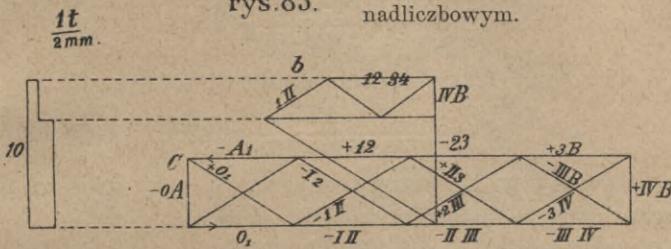
Zamiast obliczać  $ds$  według rów. 5) możemy wyznaczyć je wykresnie według Williota.

**Przykład.** Belka równoległa o kracie równoramiennej podwójnej (rys. 83.) obciążona jest w punkcie 1 ciężarem 10 t. Belka ta jest statycznie niewyznaczalna, bo  $m=10$ ,  $n=18$  więc

$k = n + 3 - 2m = 18 + 3 - 20 = 1$ ,  
a zatem jestto belka statycznie niewyznaczalna pierwszego rzędu, która ma jeden pręt nadliczbowy. Niech zastrzał  $A I$  będzie prętem nadliczbowym.



rys. 83.

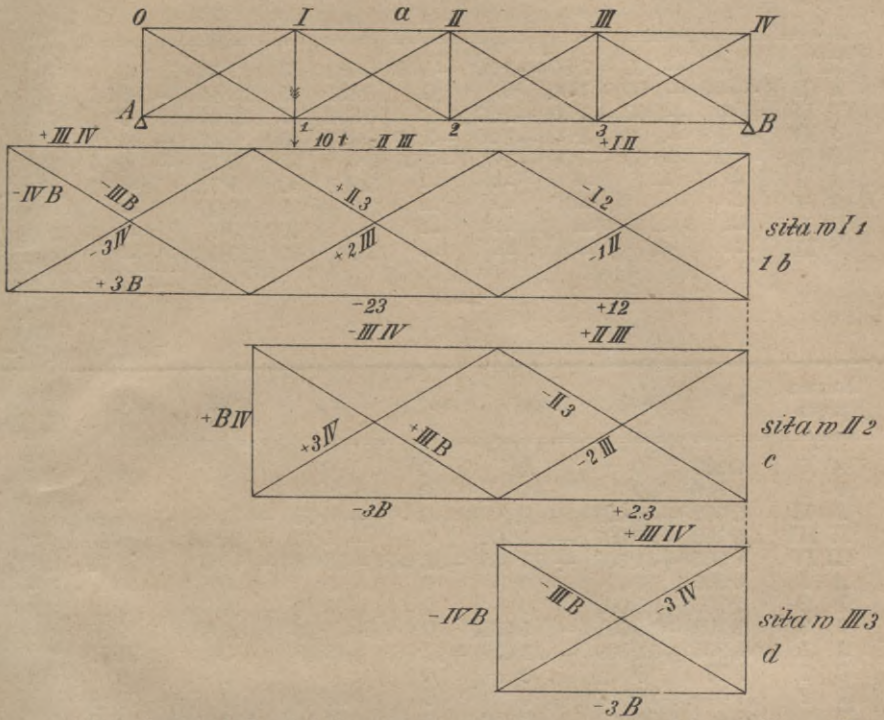


Na rys. 83 a) z prawej strony wypisaliśmy długości prętów, z lewej przekroje w  $cm^2$ . Wyznamy za pomocą planu sił siły  $S$  dla danego obciążenia (rys. 83 b).

Nazwa pręta	$\mathcal{E}$	$u$	$s$	$A$	1000000	$u\rho$	$u\rho\mathcal{E}$	$u^2\rho$	$S$
					$\rho$				
				$cm^2$	$\frac{cm}{kg}$				
A 0	- 7.5	-0.50	3.0	40	3.75	-1.875	+ 14.06	0.937	- 7.64
0 I	-12.5	-0.87	5.0	30	8.33	-7.247	+ 90.59	6.305	-12.75
I II	-12.5	+0.87	5.0	70	3.57	+3.106	- 38.82	2.702	-12.25
II III	- 4.2	-0.87	5.0	70	3.57	-3.106	+ 13.05	2.702	- 4.45
III IV	- 4.2	+0.87	5.0	30	8.33	+7.247	- 30.44	6.305	- 3.95
A 1	0	-0.87	5.0	30	8.33	-7.247	0	6.305	- 0.25
1 2	+ 8.5	+0.87	5.0	70	3.57	+3.106	+ 26.40	2.702	+ 8.75
2 3	+ 8.5	-0.87	5.0	70	3.57	-3.106	- 26.40	2.702	+ 8.25
3 B	0	+0.87	5.0	30	8.33	+7.247	0	6.305	+ 0.25
0 1	+14.9	+1.00	5.831	30	9.72	+ 9.72	+144.83	9.72	+15.19
I 2	0	-1.00	5.831	15	19.44	-19.44	0	19.44	- 0.29
II 3	- 4.8	+1.00	5.831	15	19.44	+19.44	- 93.31	19.44	- 4.51
III B	0	-1.00	5.831	30	9.72	- 9.72	0	9.72	- 0.29
1 II	+ 4.8	-1.00	5.831	15	19.44	-19.44	- 93.31	19.44	+ 4.51
2 III	0	+1.00	5.831	15	19.44	+19.44	0	19.44	+ 0.29
3 IV	+ 4.8	-1.00	5.831	30	9.72	- 9.72	- 46.66	9.72	+ 4.51
IV B	- 2.5	+0.50	3.0	40	3.75	+ 1.875	- 4.44	0.937	- 2.36
A I	-	-	5.831	30	9.72	-	-	-	+ 0.29
							- 44.55	144.822	



rys. 84.



siły równe jedności i wprost przeciwne, rys. 84c, jeśli w II i 2 działają siły równe jedności, a 84d, jeśli w III i 3 działają siły równe jedności. Siły wewnętrzne w pierwszym wypadku nazwijmy  $u'$ , w drugim  $u''$ , w trzecim  $u'''$ . Wyniki zestawiliśmy w tabliczce.

Nazwa pręta	$\Sigma$	$u$	$u'$	$u''$	$u'''$	$s$	$A$	1000000	$u \rho \Sigma$
	$t$	$t$	$t$	$t$	$t$	$m$	$cm^2$	$\frac{cm}{kg}$	
A 0	- 7.5	-0.50	0	0	0	3.0	40	3.75	+ 14.06
0 1	-12.5	-0.87	0	0	0	5.0	30	8.33	+ 90.59
1 II	-12.5	+0.87	+1.61	0	0	5.0	70	3.57	- 38.82
II III	- 4.2	-0.87	-1.61	+1.61	0	5.0	70	3.57	+ 13.05
III IV	- 4.2	+0.87	+1.61	-1.61	+1.61	5.0	30	8.33	- 30.44
A 1	0	-0.87	0	0	0	5.0	30	8.33	0
1 2	+ 8.5	+0.87	+1.61	0	0	5.0	70	3.57	+ 26.40
2 3	+ 8.5	-0.87	-1.61	+1.61	0	5.0	70	3.57	- 26.40
3 B	+ 0	+0.87	+1.61	-1.61	+1.61	5.0	30	8.33	0
0 1	+14.9	+1.00	0	0	0	5.831	30	9.72	+144.83
I 2	0	-1.00	-1.90	0	0	5.831	15	19.44	0
II 3	- 4.8	+1.00	+1.90	-1.90	0	5.831	15	19.44	- 93.31



Nazwa pręta	$u'u''\rho$	$u'u'''\rho$	$u''^2\rho$	$u''u'''\rho$	$u''\rho\mathfrak{S}$	$u'''\rho\mathfrak{S}$	$u''^2\rho$	$S$
1 2	0	0	0	0	0	0	0	+10·03
2 3	- 9·26	0	9·26	0	+ 48·88	0	0	+ 6·62
3 B	- 21·71	21·71	21·71	- 21·71	0	0	21·71	+ 1·40
0 1	0	0	0	0	0	0	0	+ 9·21
I 2	0	0	0	0	0	0	0	- 1·96
II 3	- 70·19	0	70·19	0	+177·31	0	0	- 2·42
III B	- 35·10	35·10	35·10	- 35·10	0	0	35·10	- 1·61
1 II	0	0	0	0	0	0	0	+ 2·841
2 III	- 70·19	0	70·19	0	0	0	0	+ 2·38
3 IV	- 35·10	35·10	35·10	- 35·10	+ 88·65	- 88·65	35·10	+ 3·19
IV B	- 3·75	3·75	3·75	+ 3·75	- 9·38	+ 9·38	3·75	- 7·30
A I	-	-	-	-	-	-	-	- 5·69
1 I	-	-	-	-	-	-	-	+ 4·03
2 II	-	-	-	-	-	-	-	- 0·22
3 III	-	-	-	-	-	-	-	- 0·30
	-276·27	117·37	276·27	-117·37	+330·31	-128·27	117·37	

Według rów. 2) mamy

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \mathfrak{S}_1 + u_1 S' + u_1' S'' + u_1'' S''' + u_1''' S^{IV} \\ S_2 &= \mathfrak{S}_2 + u_2 S' + u_2' S'' + u_2'' S''' + u_2''' S^{IV} \\ S_3 &= \mathfrak{S}_3 + u_3 S' + u_3' S'' + u_3'' S''' + u_3''' S^{IV} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots 13)$$

Gdy wstawimy wartości za  $S_1$  w rów. 10), otrzymamy  
 $u_{1\rho_1} (\mathfrak{S}_1 + u_1 S' + u_1' S'' + u_1'' S''' + u_1''' S^{IV}) + u_{2\rho_2} (\mathfrak{S}_2 + u_2 S' + u_2' S'' +$   
 $+ u_2'' S''' + u_2''' S^{IV}) + \dots + \rho' S' = 0$ , czyli

$$\left. \begin{aligned} \sum u \rho \mathfrak{S} + (\sum u^2 \rho + \rho') S' + S'' \sum u u' \rho + S''' \sum u u'' \rho + S^{IV} \sum u u''' \rho &= 0 \\ \sum u' \rho \mathfrak{S} + S' \sum u' u \rho + S'' (\sum u'^2 \rho + \rho'') + S''' \sum u' u' \rho + S^{IV} \sum u' u'' \rho &= 0 \\ \sum u'' \rho \mathfrak{S} + S' \sum u'' u \rho + S'' \sum u'' u' \rho + S''' (\sum u''^2 \rho + \rho''') + & \\ + S^{IV} \sum u'' u'' \rho &= 0 \\ \sum u''' \rho \mathfrak{S} + S' \sum u''' u \rho + S'' \sum u''' u' \rho + S''' \sum u''' u'' \rho + S^{IV} (\sum u'''^2 \rho + & \\ + \rho^{IV}) &= 0 \end{aligned} \right\} 14)$$

Wstawiwszy wartości otrzymamy

$$\begin{aligned} -44\cdot55 + (144\cdot82 + 9\cdot72) S' + 226\cdot15 S'' - 142\cdot27 S''' + 58\cdot39 S^{IV} &= 0, \\ -530\cdot62 + 226\cdot15 S' + (435\cdot17 + 10) S'' - 276\cdot27 S''' + 117\cdot36 S^{IV} &= 0, \\ + 330\cdot31 - 142\cdot27 S' - 276\cdot27 S'' + (276\cdot27 + 10) S''' - 117\cdot37 S^{IV} &= 0, \\ -128\cdot27 + 58\cdot39 S' + 117\cdot37 S'' - 117\cdot37 S''' + (117\cdot37 + 10) S^{IV} &= 0. \end{aligned}$$

A stąd po rozwiązaniu równań mamy

$$S' = -5\cdot694, \quad S'' = +4\cdot026, \quad S''' = -0\cdot220, \quad S^{IV} = -0\cdot296.$$

Na podstawie tych wartości i wartości  $u$  możemy nareszcie obliczyć według 13.) dokładne wartości sił wewnętrznych  $S$ , które znajdują się w ostatnim rzędku tabliczki.

Z porównania tych sił, ze siłami wewnętrznymi, któreśmy otrzymali w poprzednim paragrafie widzimy, że przez dodanie słupów zmieniliśmy zupełnie siły wewnętrzne i to nietylko w krzyżulcach, ale i w pasach. A zatem obliczenie kraty złożonej o krzyżulcach tęgich przez nieuwzględnienie słupów i rozłożenie na dwa układy daje wyniki zupełnie niezgodne z rzeczywistością. Dodanie słupów wzmaga w niektórych prętach siły wewnętrzne. A że obliczenie dokładne jest nadzwyczaj żmudne, więc lepiej nie używać takiej kraty.

### §. 76. Belka wieloboczna.

Sposób obliczenia belki wielobocznej statycznie niewyznaczalnej jest taki sam, jak belki równoległej; nie potrzebujemy się więc powtarzać. Wyniki jednak obliczenia są tu inne, niż w poprzednich paragrafach. Winkler oblicza jako przykład belkę paraboliczną zbieżną o kracie równoramiennej dwukrotnej i dwóch słupach\*) i otrzymuje wprawdzie dla pasów wyniki dokładne mało co się różniące od przybliżonych, dla krzyżulców zaś zupełnie odmienne.

Jeżeli krata jest więcej, niż dwukrotną, to liczba prętów nadliczbowych jest większa, niż 1. Dla belki równoległej rozkładanie na pojedyncze układy jest dozwolone, gdyż błąd jest bardzo mały, dla belki wielobocznej daje sposób ten przybliżony tylko dla pasów dość dokładne wyniki, dla kraty zaś nie.

To samo stosuje się także do belek o kracie prostokątnej i podwójnych gibkich krzyżulcach. Belki takie równoległe możemy snadnie obliczać według sposobu przybliżonego.

### §. 77. Belka Howe'a.

Belka Howe'a ma kratę złożoną ze sztucznem nateżeniem. W celu obliczenia jej dokładnego należy obliczyć ją naprzód bez względu na sztuczne nateżenie, a więc według §. 72, uwzględniając tę okoliczność, że drzewo ma inny współczynnik sprężystości, niż żelazo, a potem uwzględnić wpływ sztucznego nateżenia\*\*).

---

\*) p. Winkler. Theorie der gegliederte Balkenträger, str. 252.

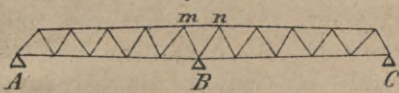
\*\*\*) p. Podr. t. most. tom I. str. 90.

Wprawdzie obliczenie przybliżone kraty złożonej daje wyniki bardzo niedokładne, jednak z powodu, że natężenia styczne nie dadzą się dokładnie wyznaczyć, więc dokładniejsze wyznaczenie sił wewnętrznych już z tego powodu nie jest możliwe; w praktyce więc wystarcza wyznaczenie przybliżone.

### §. 78. Belka ciągła.

Sposób ten wyznaczenia sił wewnętrznych da się zastosować także do belki wieloprzęsłowej. Jeżeli w belce dwuprzęsłowej (rys. 85.), opuścimy pręt  $m n$ , to otrzymamy dwie belki statycznie wyznaczalne.

rys. 85



Pręt  $m n$  jest więc tu prętem nadliczbowym. W belce trzyprzęsłowej mamy dwa

takie pręty nadliczbowe, w czteroprzęsłowej trzy. Jeżeli przytem krata jest podwójna lub potrójna, liczba prętów nadliczbowych wzrasta. Dalsze obliczenie jest takie samo, jak w poprzednich paragrafach.

### §. 79. Wpływ zmiany ciepłoty.

Jeżeli ciepłota  $\tau_0$  belki statycznie niewyznaczalnej się zmieni o  $(\tau - \tau_0)$ , to zamiast rów. 10) musimy użyć pierwotnych równań 9) i wprowadzić w rachunek ilości  $U = \alpha (\tau - \tau_0) \epsilon A$  według rów. 7).

Jeżeli belka składa się z części drewnianych i żelaznych, musimy uwzględnić tę okoliczność, że  $\alpha$  i  $\epsilon$  są inne dla części drewnianych a inne dla żelaznych.

## X. Natężenie drugorzędne.

### §. 80. Określenie natężeń drugorzędnych.

Przy obliczeniu belek kratowych przypuszczaliśmy dotychczas zawsze, że pręty połączone są między sobą przegibnie, bez tarcia, a co za tem idzie, że siły zewnętrzne działają w osi prętów. Tymczasem przy mostach europejskich łączymy pojedyncze pręty zawsze nitami, wskutek czego kąty, jakie tworzą pręty belki kratowej przy ugięciu jej nie mogą się zmieniać, a więc w węzłach powstają momenty, zginające pręty, których osi nie są już teraz proste, lecz wyginają się w jednym kierunku lub

esowato. A nawet jeżeli połączenie prętów jest przegibne (w mostach amerykańskich), to występuje zawsze tarcie, w skutek czego siły wewnętrzne przyjmują położenie mniej lub więcej mimośrodkowe.

Natężenia, wywołane siłami wewnętrznymi w przypuszczeniu połączenia przegibnego beztarciowego, nazywamy natężeniami pierwszorzędnymi (n. *Hauptspannung*, *primäre Spannung*), natężenia, które powstają wskutek stałych połączeń węzłowych, nazywamy natężeniami drugorzędnymi (n. *Sekundärspannung*, fr. *effort secondaire*, cz. *sekunderne napjeti*).

Oprócz tych natężeń powstają jeszcze dodatkowe natężenia wskutek mimośrodkowego połączenia prętów, wskutek nagłej zmiany przekroju, ugięcia poprzecznic itd. Niektórzy nazywają te natężenia także drugorzędnymi, my jednak dla odróżnienia od natężeń, powstałych z powodu stałych połączeń węzłowych będziemy je nazywać dodatkowymi. W tym rozdziale mówić będziemy tylko o natężeniach drugorzędnych i wyłożymy rzecz tę według Rittera\*).

### §. 81. Zasada obliczenia natężeń drugorzędnych.

Według Manderli\*), który rozwiązał pierwszy trudne zadanie wyznaczenia natężeń drugorzędnych, postępujemy w następujący sposób:

Obliczamy najprzód siły wewnętrzne pierwszorzędne w przypuszczeniu połączeń beztarciowych przegibnych, z tych natężenia pierwszorzędne i zmianę kątów przy ugięciu, któreby powstały przy połączeniach przegibnych beztarciowych. Momenty, które powstają wskutek stałych połączeń węzłowych, uważamy jako nieznanne, które wyznaczamy w ten sposób, aby przez ugięcie prętów wskutek tych momentów, kąty te odzyskały pierwotną wielkość. Z momentów węzłowych wyznaczamy wreszcie w zwykły sposób natężenia drugorzędne.

Dla obliczenia natężeń drugorzędnych potrzeba według poprzedniego wyznaczenia natężeń pierwszorzędnych i znajomości przekrojów. A zatem musimy zawsze najprzód wyznaczyć w zwykły sposób siły wewnętrzne i obliczyć przekroje, dla których dopiero możemy obliczać natężenie drugorzędne.

\*) Ritter W. *Anwendungen der graphischen Statik*. 1890.

\*\*) p. *Allgemeine Bauzeitung* 1880.

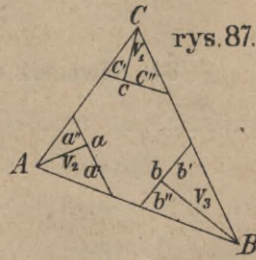
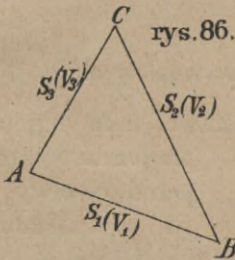


**§. 82. Zmiana kątów w trójkącie.**

Zmianę kątów trójkąta wskutek zmiany długości jego boków wyznaczyliśmy już w tomie I\*). Nazwijmy zmianę kąta przy  $A$  (rys. 86.)  $\delta_\alpha$ , przy  $B$   $\delta_\beta$ , przy  $C$   $\delta_\gamma$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  i  $\nu_3$  nateżenia prętów  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$ , to według rów. 90 (t. I, str. 159).

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \delta_\alpha &= (\nu_2 - \nu_1) \text{ dot } B + (\nu_2 - \nu_3) \text{ dot } C \\ \varepsilon \delta_\beta &= (\nu_3 - \nu_1) \text{ dot } A + (\nu_3 - \nu_2) \text{ dot } C \\ \varepsilon \delta_\gamma &= (\nu_1 - \nu_2) \text{ dot } B + (\nu_1 - \nu_3) \text{ dot } A \end{aligned} \right\} \dots 15)$$

Równanie 15) da się wykreślić też przedstawić. Spuśćmy z  $A$ ,  $B$  i  $C$  (rys. 87.) prostopadłe na przeciwległe boki i odejmiemy na nich nateżenia  $\nu$  przeciwległych boków, poczem wykreślmy do nich równoległe, a otrzymamy

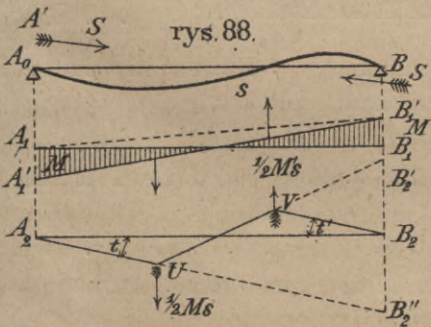


$\nu_2 \text{ dot } B = a'$ ,  $\nu_2 \text{ dot } C = a''$ ,  $\nu_1 \text{ dot } B = c''$ ,  $\nu_3 \text{ dot } C = b'$ ,

więc

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \delta_\alpha &= a - b' - c'' \\ \varepsilon \delta_\beta &= b - c' - a'' \\ \varepsilon \delta_\gamma &= c - a' - b'' \end{aligned} \right\} \dots 16)$$

**§. 83. Kąt odchylenia osi prętów.**



Teraz będziemy się starali wyznaczyć styczne kątów odchylenia osi prętów w węzłach.

Powiedzieliśmy wyżej, że siła wewnętrzna  $S$  nie działa w osi pręta i wywołuje momenty węzłowe  $M$  i  $M'$  (rys. 88.), wskutek czego pręt się wygina. Nazwijmy styczne kątów nachylenia linii ugięcia

\*) p. Podręcznik statyki budowli tom I, str. 158.

w  $A$  i  $B$   $\tau$  i  $\tau'$ , to otrzymamy je, wykreśliwszy drugi wielobok sznurowy, jak dla belki ciągłej. Powierzchnię momentów dzielimy na dwa trójkąty, których powierzchnie  $\frac{1}{2} Ms$  i  $-\frac{1}{2} M's$  zaczepiają w pionowych trzecich części.  $A_1 U$  i  $VB_2$  są to styczne podporowe.

Z rysunku widzimy, że  $B_2 B_2''$ , pomnożone przez odległość biegunową  $\epsilon J$ , jest moment statyczny siły  $\frac{1}{2} Ms$ , a więc

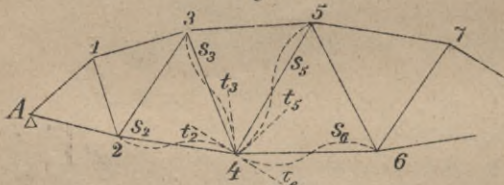
$$B_2 B_2'' = \frac{\frac{1}{2} Ms \cdot \frac{2}{3} s}{\epsilon J} = \frac{2 Ms^2}{6 \epsilon J}, \quad B_2 B_2' = \frac{M's^2}{6 \epsilon J},$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{więc } B_2 B_2'' = \frac{(2M - M') s^2}{6 \epsilon J}, \quad \text{stad } \tau = \frac{B_2 B_2''}{s} = \frac{(2M - M') s}{6 \epsilon J} \\ \text{a podobnie } \tau' = \frac{(2M' - M) s}{6 \epsilon J} \end{array} \right\} 17)$$

### §. 84. Równania momentów węzłowych.

Przypuśćmy, że rys. 89. przedstawia nam ugiętą belkę,

rys. 89.



przyczem wykreśliłiśmy pełno cięciwy prętów, a wykreskowaliśmy ugięte pręty, schodzące się w węźle 4. Kąt zawarty między ugiętymi prętami 24 i 34 jest taki

sam, jaki był przed ugięciem z powodu połączenia stałego nitami, kąt 3 4 2 jest o  $\tau_2 - \tau_3$  większy od tego kąta, zatem  $\delta_{2,3} = \tau_2 - \tau_3$ , a ze względu na rów. 17)

$$\epsilon \delta_{2,3} = \frac{s_2 (2M_2 - M_2')}{6 J_2} - \frac{s_3 (2M_3 - M_3')}{6 J_3}, \quad \dots 18)$$

przyczem  $M_2$  i  $M_3$  oznaczają momenty węzłowe przy danem węźle  $M_2'$  i  $M_3'$  w przeciwnym końcu prętów.

Podobne równania otrzymamy dla  $\delta_{3,5}$  i  $\delta_{5,6}$ .

Ponieważ wszystkie momenty węzłowe w węźle 4 muszą być w równowadze, więc

$$M_2 + M_3 + M_5 + M_6 = 0 \quad \dots 19)$$

Otrzymamy więc dla węzła 4 cztery równania, które możemy także inaczej napisać, nazwawszy

$$\frac{s M}{6 J} = \mu \quad \dots 20)$$

Otrzymamy mianowicie dla węzła 4

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \delta_{2.3} &= (2\mu_2 - \mu_2') - (2\mu_3 - \mu_3') \\ \varepsilon \delta_{3.5} &= (2\mu_3 - \mu_3') - (2\mu_5 - \mu_5') \\ \varepsilon \delta_{5.6} &= (2\mu_5 - \mu_5') - (2\mu_6 - \mu_6') \end{aligned} \right\} \dots 21)$$

$$\frac{J_2}{s_2} \mu_2 + \frac{J_3}{s_3} \mu_3 + \frac{J_5}{s_5} \mu_5 + \frac{J_6}{s_6} \mu_6 = 0.$$

Podobne równania dadzą się ustawić dla każdego węzła, a otrzymamy ich tyle, ile jest momentów węzłowych; możemy je zatem obliczyć, rozwiązawszy równanie wedle  $\mu$ .

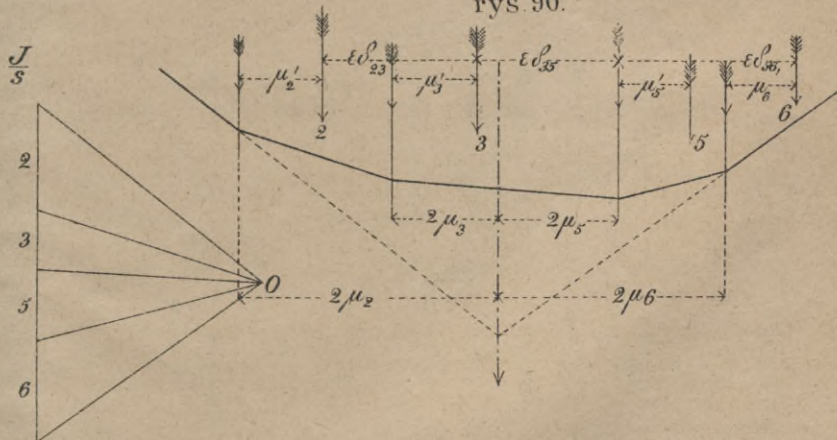
### §. 85. Wykreślne wyznaczenie momentów węzłowych.

Rozwiązanie  $2n$  równań byłoby rzeczą bardzo żmudną, prędzej, chociaż próbowaniem, dojdziemy do celu drogą wykreślną, podaną przez Rittera.

Przypuścimy, że znamy  $\mu'$  dla węzła 4., a staramy się wyznaczyć  $\mu$ .

Wykreślmy wielobok sił (rys. 90.), odcinając siły  $\frac{J}{s}$ , potem wykreślmy kierunki tych sił w odstępach  $\varepsilon\delta$  i przesuńmy te

rys. 90.



siły o  $\mu'$ . Złożmy teraz te siły, a otrzymamy wypadkową 4. Odstępy przesuniętych sił od wypadkowej są równe  $2\mu$ .

Konstrukcyja ta czyni zadość wszystkim rów. 21). Odstępy sił nieprzesuniętych od wypadkowej są  $2\mu - \mu'$ , a różnica tych odstępów równa się  $\varepsilon\delta$ , przez co wypełniają się pierwsze trzy równania. Ostatnie rów. 21) orzeka, że suma momentów doty-

czących sił  $\frac{J}{s}$  ze względu na wypadkową jest równą zeru co wedle konstrukcyi się sprawdza.

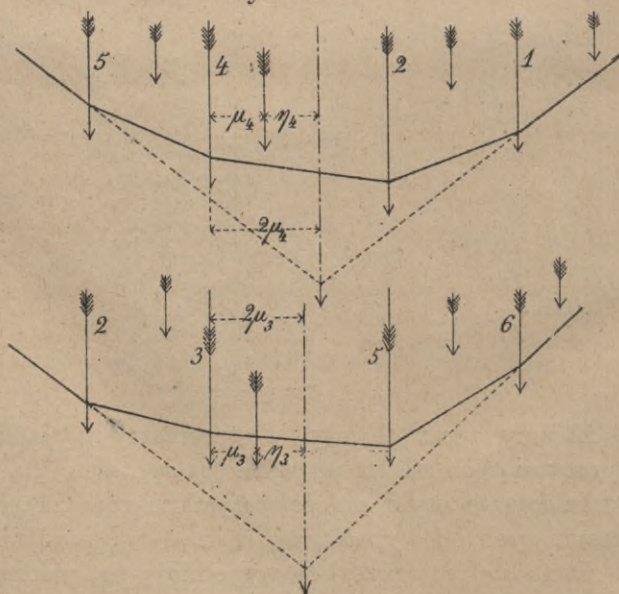
Zachodzi tylko ta okoliczność, że nie znamy wielkości  $\mu'$ . Nie pozostaje nam nic innego, jak w pierwszym przybliżeniu przyjąć  $\mu' = 0$ . Otrzymamy przybliżone wartości  $\mu$ , które dla sąsiednich węzłów dadzą nam  $\mu'$ , możemy więc tam już dokładniej wyznaczyć  $\mu$ , które znów są dla sąsiednich węzłów  $\mu'$ . Na podstawie tych  $\mu'$  obliczamy po raz drugi, a jeśli potrzeba i trzeci,  $\mu$  tak długo, aż nie okażą się już więcej znaczniejsze różnice.

Przy tej konstrukcyi trzeba, rozumie się, uwzględnić znak  $\varepsilon \delta$  i  $\mu'$ . Kreślmy więc w każdym węźle pręty w porządku, jak wskazówką posuwa się na zegarze i odcinajmy dodatnie  $\delta$  na prawo, na prawo od wypadkowej leżące  $\mu$  uważajmy jako dodatnie, na lewo jako ujemne.

Na rys. 91. widzimy dwa wieloboki sznurowe dla węzła 3 i 4 (rys. 89.). Nazwijmy odstęp nieprzesuniętej siły od wypadkowej  $\eta$ , to

$$2\mu_4 = \mu_4' + \eta_4 \quad \text{i} \quad 2\mu_3 = \mu_3' + \eta_3.$$

rys. 91.



Ponieważ dalej  $\mu_4 = \mu_3'$  i  $\mu_3 = \mu_4'$ , więc

$$\mu_3' = \frac{\eta_3 + 2\eta_4}{3}, \mu_4 = \frac{\eta_4 + 2\eta_3}{3} \dots \dots \dots 22)$$

Gdybyśmy znali położenie wypadkowych, tobyśmy mogli wprost obliczyć  $\mu'$ , tymczasem ponieważ zwykle wypadkowe niewiele się przesuwały, więc na podstawie tych równań możemy w przybliżeniu wyznaczyć  $\mu'$ . Podwajamy cyrklem  $\eta_4$ , dodajemy do tego  $\eta_3$  i dzielimy przez 3, o tę długość  $\mu_3'$  przesuwamy siłę 3 na lewo.

Wyznaczywszy w ten sposób  $\mu$ , możemy łatwo obliczyć natężenie  $v'$ . Mamy bowiem  $v'I = Me$ , a że według 20)

$$M = \frac{6I\mu}{s}, \text{ więc } v' = \frac{6e}{s}\mu \dots \dots \dots 23)$$

**Przykład.** Jako przykład wyznaczmy natężenia drugorzędne mostu nad Pegnicą kolei Norymbergia — Neuhaus o rozpiętości 36 m (tabl. IV), dla którego Steiner wyznaczył te natężenia innym sposobem (liczebnym\*). Pomost leży u góry, ciężar własny wynosi dla pasu dolnego 0.29 t/m, dla górnego 0.71 t/m, ciężar ruchomy 2.94 t/m jednej belki. Belka jest całkowicie obciążona. Siły wewnętrzne pierwszorzędne  $S$ , przekroje prętów  $A$ , momenty bezwładności  $I$ , odstęp włókna skrajnego od osi obojętnej  $e$  i długości prętów  $s$  podane są w poniższej tablicy.

Pręt	$s$	$A$	$I$	$e$	$S$	$\frac{I}{s}$	$\mu_2$	$\mu_1$	$v_1$	$v_1'$	$v$
	cm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm	t	cm <sup>3</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>
1 3	400	86	2040	13.6	35.3	5.1	-1270	-1400	254	286	-410
3 5	400	166	7110	18.0	93.0	17.75	- 360	- 690	104	186	-560
5 7	400	226	13000	20.0	134.8	32.5	- 20	- 400	6	120	-596
7 9	400	253	13000	20.0	159.7	32.5	+ 220	- 460	66	138	-621
9 11	400	253	15100	20.0	168.0	37.75	+ 400	- 400	120	120	-664
0 2	200	48	2140	13.8	15.0	10.7	-1200	-1470	497	609	+312
2 4	400	95	4270	13.8	66.4	10.67	- 360	- 860	75	178	+699
4 6	400	182	5960	16.0	116.7	14.90	- 300	- 650	72	156	+642
6 8	400	224	12260	20.0	149.3	30.65	- 50	- 690	15	207	+667
8 10	400	239	13000	20.0	165.9	32.5	+ 600	+ 500	180	150	+694
0 1	380	143	4410	12.6	70.9	11.61	+1120	+ 540	223	107	-496
2 3	429	136	6920	18.0	70.6	16.13	+ 740	+ 390	186	98	-527
4 5	429	117	6590	17.8	52.8	13.26	+ 730	+ 600	182	149	-451
6 7	429	89	3200	14.8	35.0	7.45	+ 760	+ 710	157	147	-393
8 9	429	55	1640	12.6	17.2	3.82	+ 340	+ 140	57	25	-313
1 2	429	96	12800	20.0	71.9	29.84	+ 60	+ 360	17	107	+749
3 4	429	77	6550	16.0	54.1	15.27	+ 310	+ 490	69	110	+703
5 6	429	56	3660	14.0	36.3	8.53	+ 800	+ 570	159	112	+648
7 8	429	40	740	9.6	18.5	1.73	+ 750	+ 280	107	38	+462
9 10	429	48	1130	11.1	0.66	2.63	+ 400	+ 30	62	5	+ 14

\*) p. Handbuch der Ingenieurwissenschaften t. II. str. 362.

Najprzód wyznaczyliśmy natężenia pierwszorzędne i dotychczasowe kąty i oznaczyli je na rys. 1. Na podstawie rów. 14) obliczyliśmy potem zmianę kątów  $\varepsilon\delta$  i z uwzględnieniem znaku oznaczyliśmy wartości te w rys. 2., poczem przystępujemy do wyznaczenia  $\mu$  i  $\mu'$  według §. 82 (rys. 3. do 13). W każdym z tych rysunków wykreśliliśmy dla danego węzła wielobok sił n. p. w rys. 4. dla węzła 4 siły  $\frac{I}{s}$  dla prętów 13, 12, 10 zawsze w porządku tym, w jakim natrafiamy pręty, posuwając się, jak wskazówka na zegarze.

Dalej kreślimy kierunki tych sił w odstępach  $\varepsilon\delta$  w podziałce  $\frac{1\text{ mm}}{100\text{ kg/cm}^2}$ , licząc dodatnie  $\varepsilon\delta$  na prawo, ujemne na lewo; kierunki te wyciągnąć należy od razu tuszem. Siły te składamy teraz zapomocą wieloboku sznurowego i otrzymujemy tymczasowe położenie wypadkowej. Teraz przesuwamy kierunki o  $\mu'$ , które nam jednak jeszcze nie jest znane, przyjmujemy więc  $\mu$  w przybliżeniu, korzystając z rów. 22),  $\mu$  i  $\mu'$ , leżące na prawo od wypadkowej, uważamy jako dodatnie, na lewo jako ujemne i przesuwamy odpowiednio kierunki sił w pierwszym wypadku na lewo, w drugim na prawo. Dla przesuniętych sił kreślimy znów wielobok sznurowy i otrzymujemy poprawiony kierunek wypadkowej. Teraz sprawdzamy, czy dla jednego pręta  $\mu$  otrzymane z jednego rysunku równa się  $\mu'$  w drugim, n. p. czy odstęp wypadkowej 1 w rys. 4. (węzeł 1) od siły 3, więc  $2\mu_3$  równa się podwójnemu odstępowi wypadkowej 3 (rys. 6.) i poprawiamy rysunki te dopóty, aż tę zgodność osiągniemy, wtedy odczytujemy  $\mu$  z rysunków według podziałki  $\varepsilon\delta$  (tu  $\frac{1\text{ mm}}{100\text{ kg/cm}^2}$ ). Wpisaliśmy wartości te w tabliczkę w rubrykach  $\mu$  i  $\mu'$ . Na podstawie rów. 23. obliczamy stąd wręście  $v_1$  i  $v_1'$ , natężenia drugorzędne na obu końcach pręta.

### §. 85. Wpływ mimośrodkowego utwierdzenia prętów.

Jeśli niektóre pręty są mimośrodkowo utwierdzone, to powstają wskutek tego dodatkowe natężenia, a oprócz tego zmieniają się natężenia drugorzędne.

Nazwijmy odstęp osi pręta od węzła  $c$ , dodatnie lub ujemne wedle tego, czy wskutek tego koniec pręta zgina się na prawo lub lewo, to odnośne momenty są  $M = Sc$  i  $M' = Sc'$ , a według 17)

$$\tau_c = \frac{(2M - M')s}{6\varepsilon I} = \frac{(2c - c')Ss}{6\varepsilon I} \dots \dots \dots 24)$$

Kąty zmieniają się więc nie tylko wskutek odkształcenia prętów, ale i mimośrodkowego utwierdzenia. Konstrukcja wskazana w poprzednim paragrafie cała małego się zmienia, mianowicie każde poprzednie  $\delta$  powiększa się o  $\tau_c$ , każde następne pomniejsza się o tę ilość, a więc w rys. 88. i 89., posuwamy kierunki sił o  $\tau_c$  na prawo. Zresztą konstrukcja się nie zmienia. W ten sposób otrzymujemy natężenia drugorzędne,

oprócz tego obliczamy wprost natężenia, powstałe wskutek mimośrodowego utwierdzenia; mają one zwykle znak przeciwny tak, że natężenia te po części się znoszą.

### §. 86. Wpływ przekroju prętów.

Aby zbadać wpływ przekroju prętów na natężenie drugorzędne, pomyślmy, że momenty bezwładności  $I$  wszystkich prętów stały się  $n$  razy większe, a przekrój ich  $A$  i odstęp skrajnej warstwy od osi pozostał niezmienny, to przez to  $\mu$  się nie zmniejsza, natężenia drugorzędne pozostaną te same. Przypuśćmy teraz, że także wszystkie  $A$  stały się  $n$  razy większe,  $e$  pozostały te same, wtedy natężenia stały się  $n$  razy mniejsze, a więc  $\delta$  i  $\mu$   $n$  razy mniejsze, zatem natężenia zmniejszyły się  $n$  razy. Jeżeli zaś  $A$  nie zmienimy, lecz  $e$  stanie  $n$  razy większym, to natężenia  $n$  razy wzrosną.

Z powyższego widzimy, że natężenia drugorzędne są w prostym stosunku proporcjonalne do szerokości prętów i natężeń pierwszorzędnych, a w odwrotnym do przekroju prętów. A zatem chcąc uniknąć wielkich natężeń drugorzędnych, należy robić pręty tak wąskie, jak na to pozwala dokładne połączenie nitami i względ na wyboczenie prętów ciśnionych.

Ponieważ w mostach dla małych rozpiętości szerokości prętów są w stosunku do ich długości największe, więc też przy takich mostach powstają największe natężenia drugorzędne.

### §. 87. Wpływ obciążenia.

Jeżeli na belkę działa ciężar ruchomy, to powstaje pytanie, dla jakiego obciążenia powstają największe natężenia drugorzędne. Najprędzej wyznaczyć je możemy zapomocą linii wpływowych. Wprawdzie tu metoda linii wpływowych nie da się ściśle zastosować, bo tu zmiany ramion momentów wskutek odkształceń sprężystych nie są w stosunku do wymiaru prętów nadzwyczaj małe, ale i cała powyższa teoria jest tylko przybliżoną, możemy więc równem prawem używać linii wpływowych. W tym celu należałoby badać wpływ ciężaru  $P=1$ , zaczepionego w pojedynczych węzłach; badanie takie byłoby jednak za żmudne. Winkler doszedł przytem do wyniku, że w ogóle można przyjąć, że natężenia drugorzędne są największe dla tego samego obciążenia, co pierwszorzędne.

### §. 88. Wpływ ustroju belki.

Winkler badał natężenia drugorzędne dla rozmaitych belek kratowych; my tu podamy tylko wyniki, do jakich on doszedł.

W belce kratowej równoległej o kracie prostokątnej powstają natężenia drugorzędne wynoszące w pasach 10 do 24%, w kracie równoramiennej 5—14% pierwszorzędnych. Natężenia drugorzędne w kracie są również w pierwszym przypadku większe, niż w drugim.

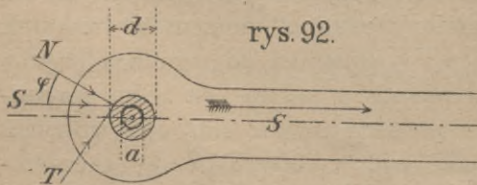
Jeśli belki kratowe o kracie wielokrotnej obciążymy tak, że tylko jeden układ jest obciążony, powstają bardzo znaczne natężenia drugorzędne w pasach. Winkler otrzymał w pewnym wypadku natężenia drugorzędne, sięgające do 88% pierwszorzędnych, średnio 45%. Przy obciążeniu wszystkich węzłów otrzymał on tylko natężenia wynoszące 12%.

Jeżeli przytem krzyżulce są połączone, natężenia drugorzędne wzrastają jeszcze bardziej. Winkler otrzymał w pasach natężenia drugorzędne, wynoszące 27 do 113%, przeciętnie 65%, w krzyżulcach przeciętnie 51%.

Na średniej podporze belek ciągłych powstają znaczne natężenia drugorzędne w pasie zwłaszcza dolnym, natężenia te mogą być dwa razy większe, niż w innych częściach belki.

### §. 89. Połączenia przegibne.

Jeżeli pręty belki kratowej połączone są przegibnie, to jednak obrót pręta około sworznia nastąpi dopiero wtedy, gdy moment  $M_r$ , wywołany tarcie, mniejszy jest, niż moment węzłowy  $M$ , obliczony poprzednim sposobem. Siła  $S$  (rys. 92.)



rys. 92.

rozkłada się na  $N=S \times \sin \varphi$  i  $T=S \cos \varphi = N \operatorname{ctg} \varphi$ , przyczem  $\varphi$  jest kątem tarcia, więc  $\operatorname{ctg} \varphi = f$ . Jeżeli wykreślimy promieniem  $a$  koło, to dopóki kierunek siły  $S$  przecina

koło, nie może ruch nastąpić, a zatem największy mimośród możliwy jest  $a = \frac{d}{2} \operatorname{ctg} \varphi$ . . . . . 24)



Mimowśród ten największy możemy odrazu obliczyć.

Wyznaczenie więc natężeń drugorzędnych pozostaje takie samo, jak wprzód, tylko baczyć musimy, że *najw*  $M_r = Sa$ .

Z powyższego wynika, że aby natężenia były jak najmniejsze, powinny być jak najcieńsze sworznie, o ile tylko wytrzymałość materiału na to pozwala. Tam więc, gdzie natężenia drugorzędne są wielkie, dadzą się urządzeniem połączeń przegibnych zmniejszyć natężenia drugorzędne, ale tylko do pewnej granicy, zależnej od wielkości średnicy sworznia. Na każdy sposób widzimy, że nawet przy użyciu połączeń przegibnych nie dadzą się natężenia drugorzędne zupełnie usunąć.



## D O D A T E K.

### Literatura.

Podajemy tu w porządku chronologicznym spis podręczników i niektórych ważniejszych artykułów i nowszych dzieł, odnoszących się do części teorii mostów, zawartej w niniejszym tomie.

#### 1. Ogólne dzieła.

- Rebhann: *Theorie der Holz- und Eisenconstructions*. Wien 1856.
- Mollinos i Pronnier: *Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques*. Paryż 1857.
- Laissle i Schübler: *Der Bau der Brückenträger*. Stuttgart 1857. 4 wyd. 1876.
- Bresse: *Cours de la mécanique appliquée*. II. część. Paryż 1862.
- Scheffler: *Über Gitter und Bogenträger*. Brunswik 1862.
- Culmann: *Die graphische Statik*. Zurych 1866. 2 wyd. 1875.
- Winkler: *Die Lehre von der Elastisität und Festigkeit*. Praga 1867.
- Collignon: *Cours de la mécanique appliquée aux constructions*. Paryż 1869.
- Ott: *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik*. Praga 1870, 4 wyd. 1835.
- Ritter W. *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken*. Zurych 1871, 2 wyd. 1883.
- Ott: *Vorträge über Baumechanik*. Praga 1872. 2. wyd. 1878—1891.
- Weyrauch: *Allgemeine Theorie der continuirlichen und einfachen Träger*. Lipsk 1873.
- Levy: *La statique graphique et ses applications aux constructions*. Paryż 1874. 2. wyd.
- Winkler: *Vorträge über Brückenbau I. Heft Aeussere Kräfte gerader Träger*. 1875. 3. wyd. 1886.
- Ritter: *Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik*. Hannover 1876.
- Jay du Bois: *The elements of graphical statics and their application to framed structures*. Nowy York 1875. 2. wyd. 1877.

- Winkler: *Vorträge über Brückenbau. II. H. Innere Kräfte. gerader Träger.* 2. wyd. 1881.
- Eddy: *Researches in graphical statics.* Nowy York 1878., tłum. niem. 1880.
- Castigliano: *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et-ses applications.* Turyn 1879.
- Burr: *A course on the stresses in bridge and roof trusses.* Nowy York 1880.
- Chalmers: *Graphical determination of forces in engineering structures.* Londyn 1881.
- Schäffer i Sonne: *Handbuch der Ingenieurwissenschaft II. B. Der Brückenbau.* Lipsk 1882. 2. wyd. 1886—1890.
- Stelzel: *Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den continuirlichen Träger.* Gradziec 1882.
- Weyrauch: *Theorie elastischer Körper.* Lipsk 1884.
- Résal: *Ponts métalliques.* Paryż 1885—1889.
- Müller Breslau: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre.* Lipsk 1886.
- Müller Breslau: *Graphische Statik der Bauconstructionen* Berlin 1879., 2. wyd. 1887—1891.
- Planat: *Pratique de la mécanique appliquée.* Paryż 1887.
- Leber: *Die neue Brückenverordnung des österr. Handelsministeriums.* Wiedeń 1886.
- Koechlin: *Applications de la statique graphique.* Paryż 1889.
- Ritter W.: *Anwendungen de graphischen Statik II. Th. Das Fachwerk.* Zurych 1890.

## 2. Belka ciągła.

- Clapeyron: *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement exposées.* Comptes rendus. 1857.
- Winkler: *Beiträge zur Theorie der continuirlichen Brückenträger.* Civilingenieur 1862.
- Schmidt: *Über die Bestimmung der äusseren auf ein Brückensystem wirkenden Kräfte.* Allg. Bauz. 1866.
- Lippich: *Theorie des continuirlichen Trägers konstanten Querschnittes.* Allg. Bauz. 1871.
- Šolin: *Geometrische Theorie der continuirlichen Träger.* Mittheil. d. Arch. u. Ing. Ver. in Böhmen. 1873., 1874.

- Greene: *Graphical method for the analysis of bridge trusses extended to continuous girders and draw spans.* Nowy York 1875.
- Meriman: *On the theory and calculation of continuous bridges.* Nowy Jork 1876.
- Schäffer: *Belastungsgesetze für den geraden stabförmigen Körper* *Zeit. f. Bauw.* 1876.
- Kleitz: *Note sur les calculs de stabilité des poutres continues, ayantes des moments d'inertie variables.* *An. d. pouts et chaus.* 1876., 1877.
- Hulewicz: *Obliczenie wytrzymałości belek wieloprzęsłowych.* *Pam. tow. nauk ścisłych. Paryż* 1876., to samo po franc. *Ann. d. pon. et cha.* 1882.
- Krohn: *Berechnung kontinuierlicher Fachwerksträger auf Grund der Deformationen der einzelnen Fachwerkstäbe.* *Civilingenieur* 1880.
- Landsberg: *Beitrag zur graphischen Berechnung kontinuierlicher Träger.* *Centr. der Bauver.* 1881.
- Rytiř: *Der kontinuierliche Balken.* *Allg. Bauzeit.* 1882.
- Müller Breslau: *Influenzlinien für den kontinuierlichen Träger auf drei Stützen* *Wochenb. f. Arch. u. Ing.* 1883.
- Thullie: *Graphische Bestimmung der im kontinuierlichen Gitterträger mit 2 Feldern wirkenden Kräfte auf Grund der Durchbiegung.* (*Woch. der Arch. u. Ing.* 1884. i po polsku *Przegl. Techn.* 1887).
- Šolin: *Zur Theorie des kontinuierlichen Trägers veränderlichen Querschnittes.* *Civilingenieur* 1885.
- Šolin: *Theorie zevnitřních sil trámu přímých.* Praga 1885.
- Steiner: *Über den Einfluss einer Erwärmung der Gurte auf den kontinuierlichen Träger* 1887, 1888.
- Müller-Peterwitz: *Einflusslinien für kontinuierliche Träger.* *Deutsche Bauz.* 1888.
- Thullie: *Bestimmung der Einflusslinien für die inneren Kräfte des kontinuierlichen Trägers mit drei Stützpunkten.* *Woch. d. österr. Ing. u. Arch.* 1891.

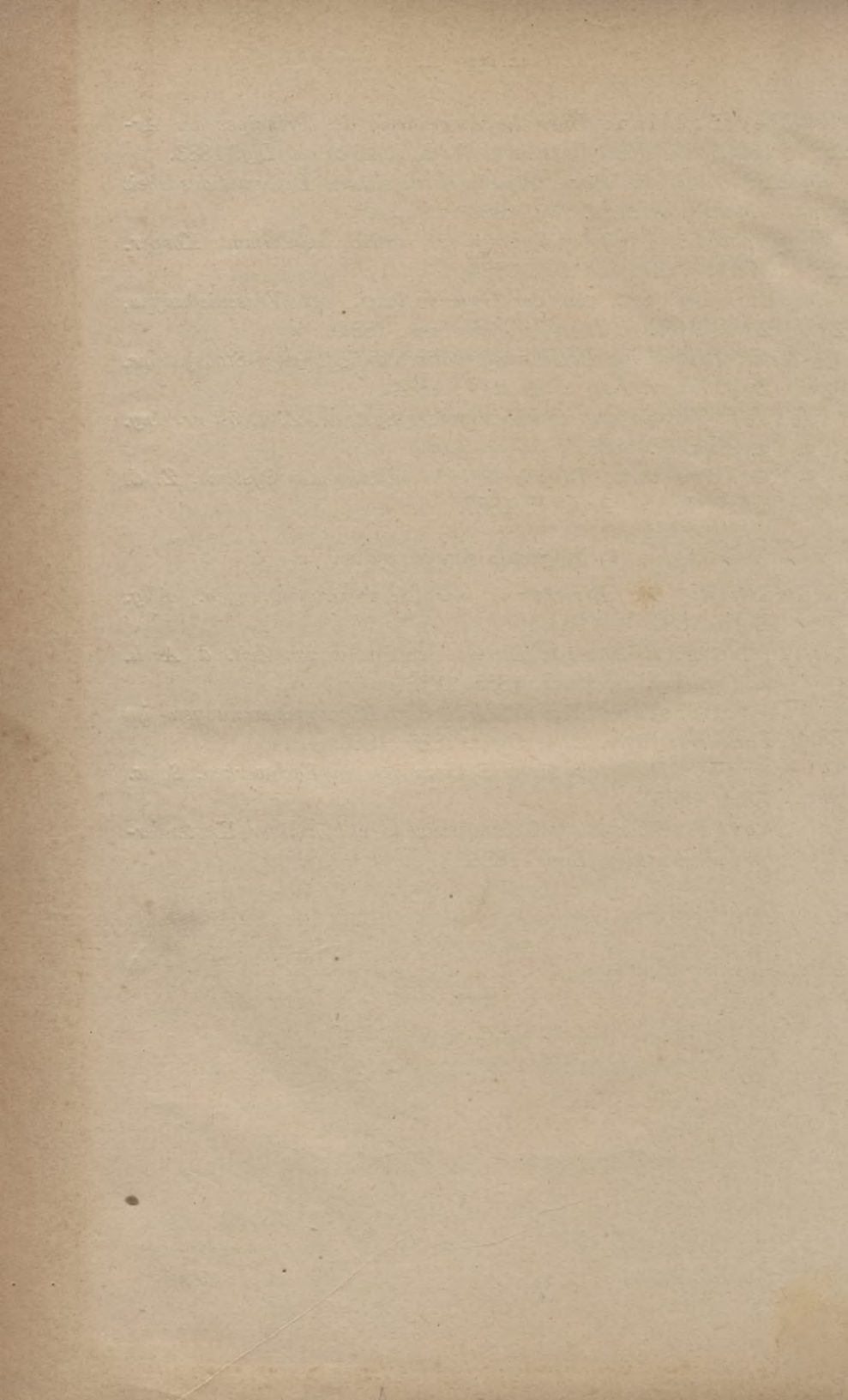
### 3. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

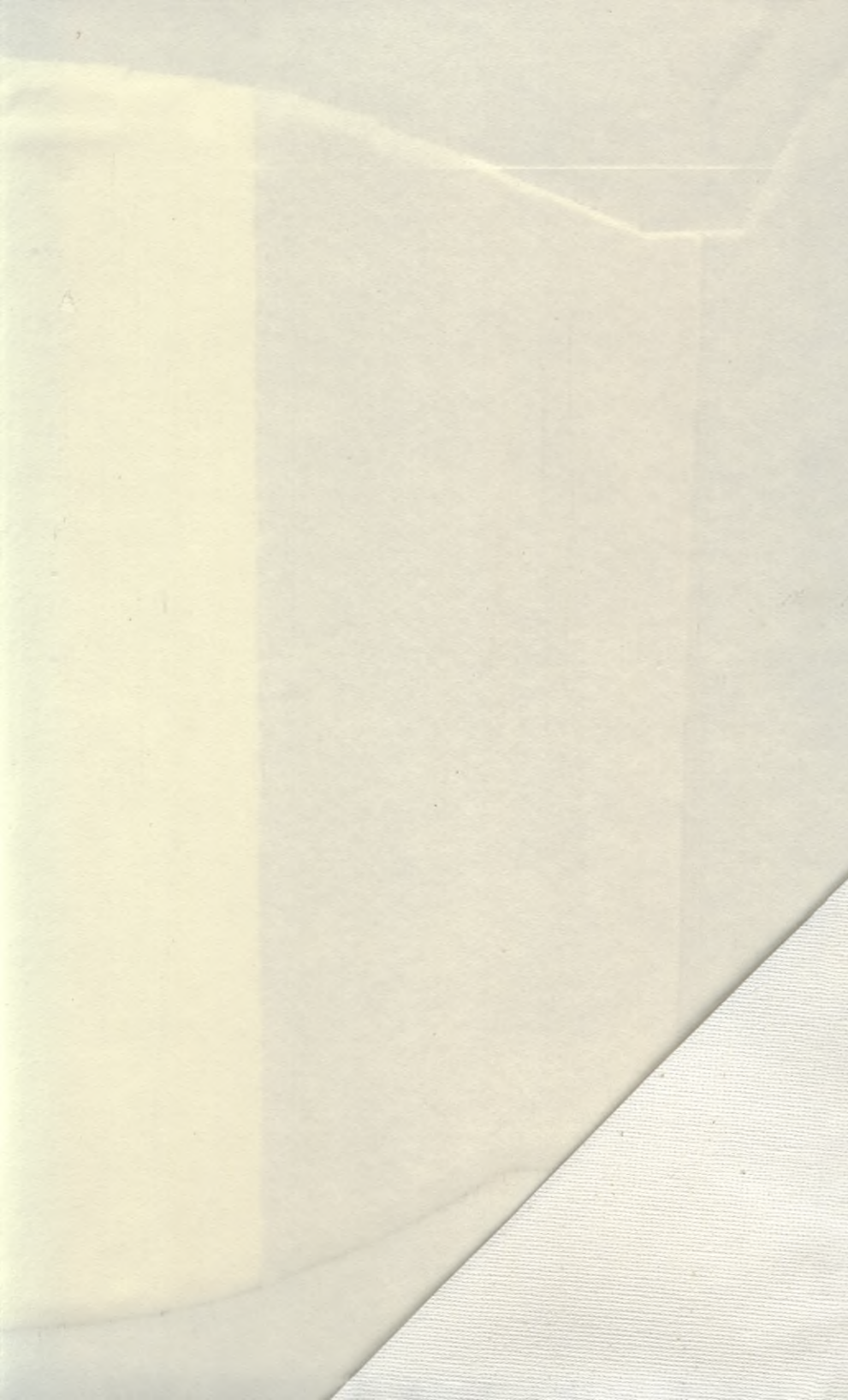
- Fränkel: *Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme* *Z. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hann.* 1882.

- Müller Breslau: *Über die Anwendung des Principes der Arbeit in der Festigkeitslehre.* Woch. f. Arch. u. Ing. 1883.
- Mohr: *Über das sogen. Princip der kleinsten Deformationsarbeit* Woch. f. Arch. u. Ing. 1883.
- Weyrauch: *Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Körper.* Woch. f. Ar. und Ing. 1884.
- Krohn: *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen,* Z. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hann. 1884.
- Melan: *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme.* Z. d. österr. Ing. u. Arch. V. 1884.
- Steiner: *Theorie statisch unbestimmter Systeme.* Z. d. öst-rr. Ing. u. Arch. V. 1886.
- Müller Breslau: *Theorie statisch unbestimmter Systeme.* Z. d. österr. Ing. u. Arch. V. 1887.

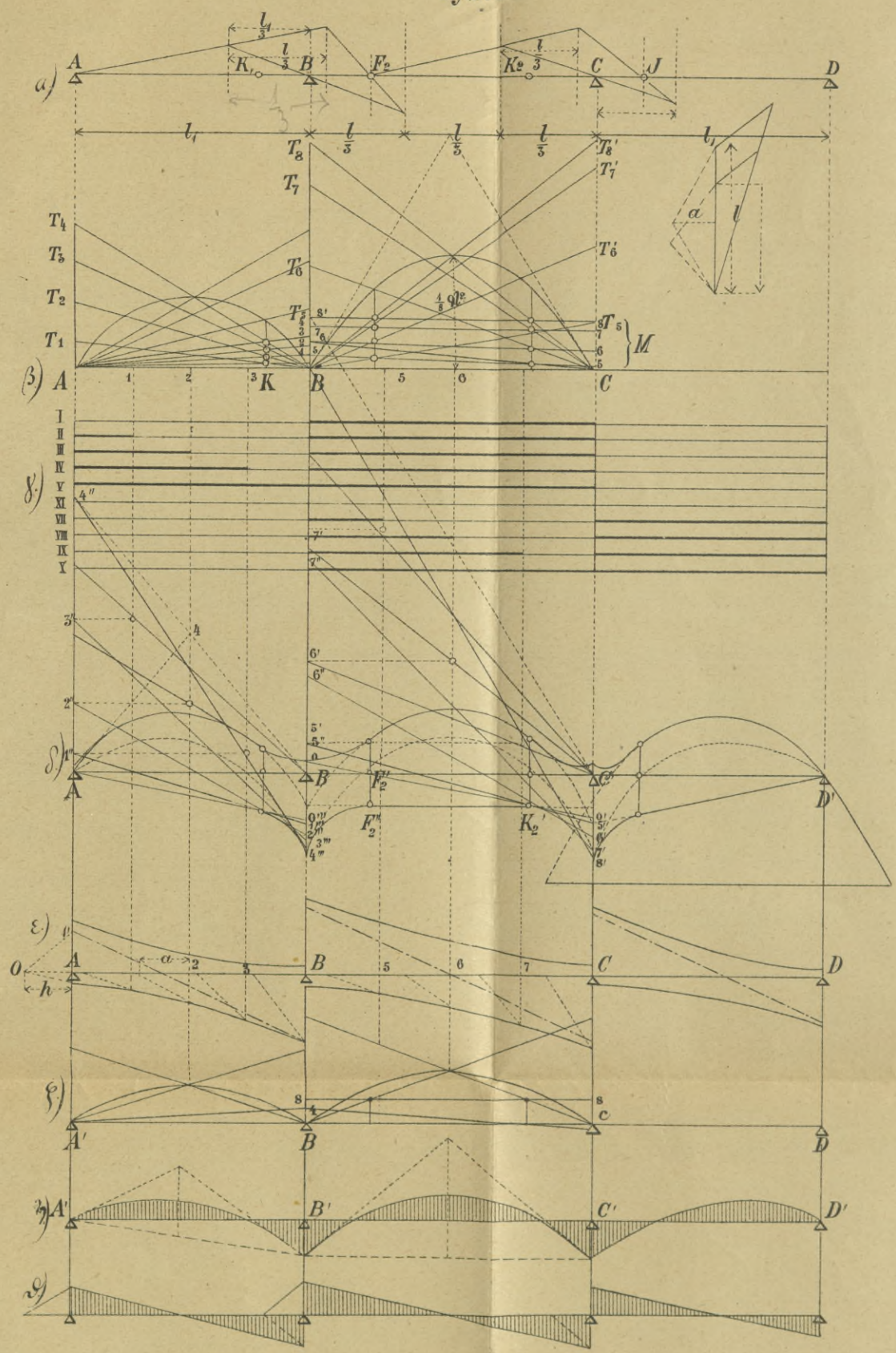
#### 4. Natężenia drugorzędne.

- Manderla: *Die Berechnung der Secundärspannungen.* Allg. Bauz. 1880.
- Landsberg: *Beitrag zur Theorie der Fachwerke.* Zeit. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hann. 1885, 1886.
- Müller Breslau: *Zur Theorie der Biegungsspannungen im Fachwerksträger.* Allg. Bauz. 1885, 1886.
- Ritter W.: *Die secundären Spannungen in Fachwerken.* Schw. Bauz. 1885.
- Manderla: *Über die Wirkungsweise gelenkförmiger Knotenverbindungen.* Allg. Bauz. 1886.

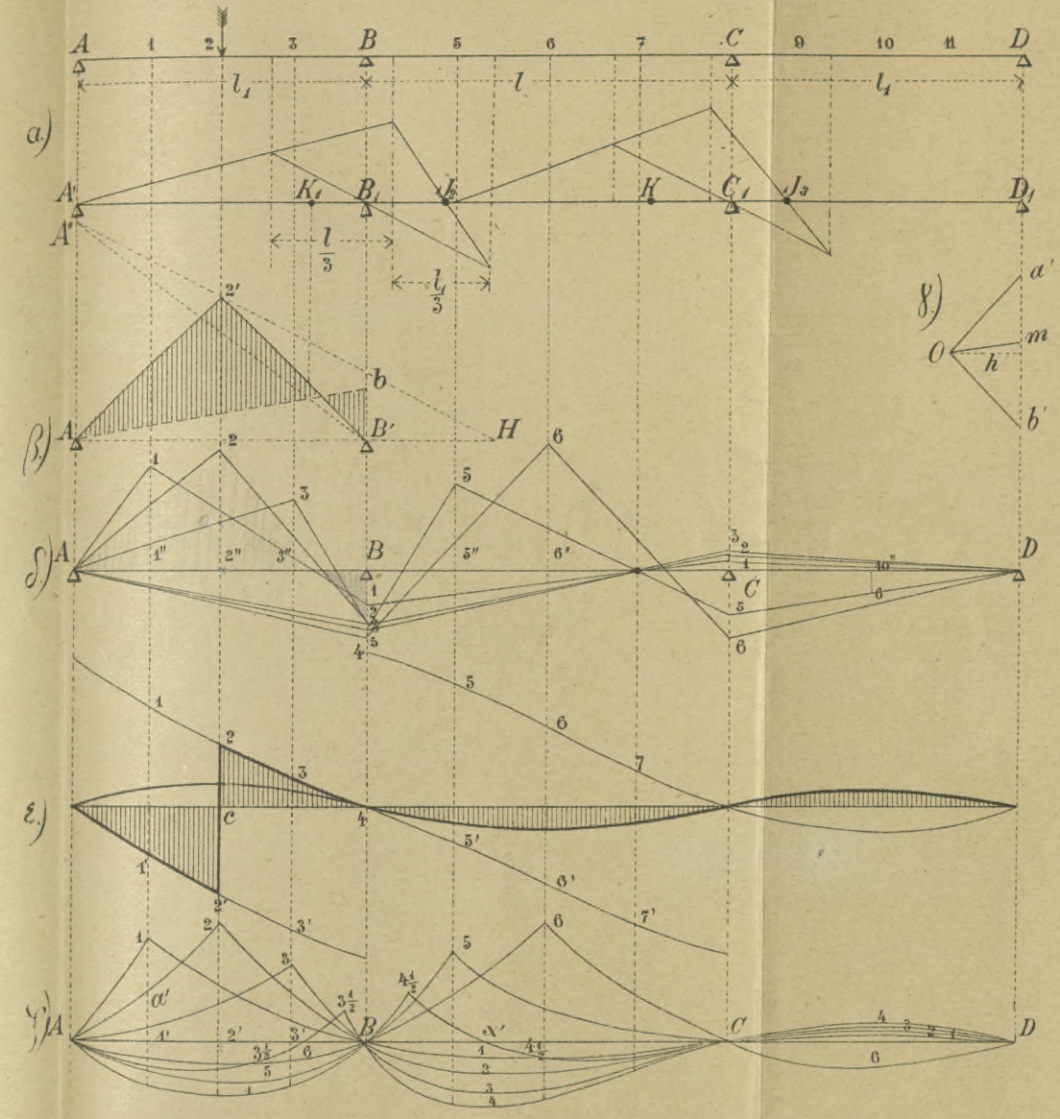




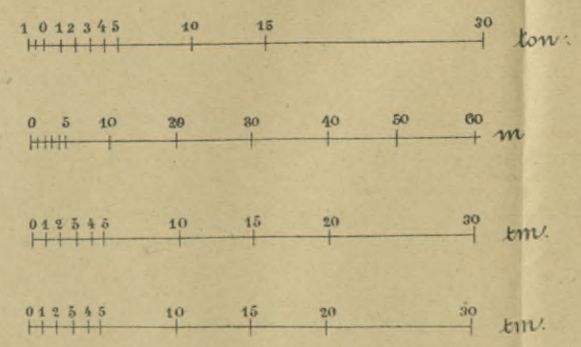
rys. 2.



rys. 1.



Belka ciągła trzypiętowa  
o przekroju stałym

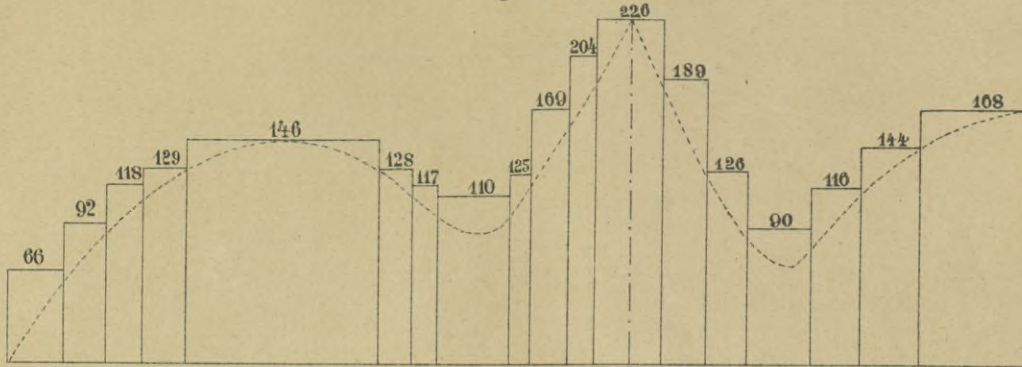




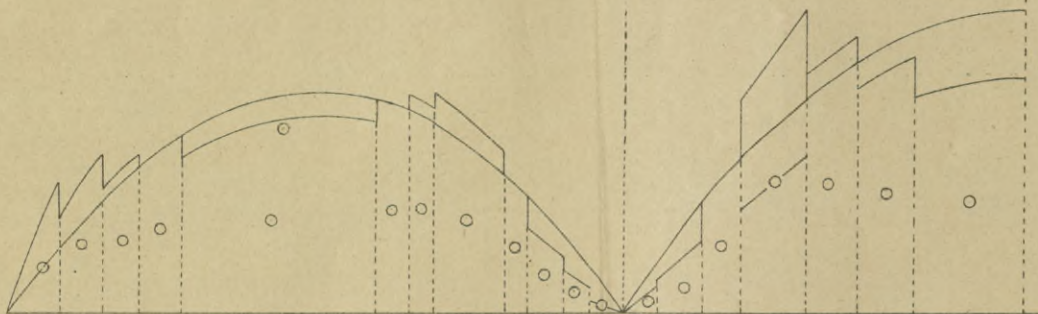


Belka ciągła o przekroju zmiennym.

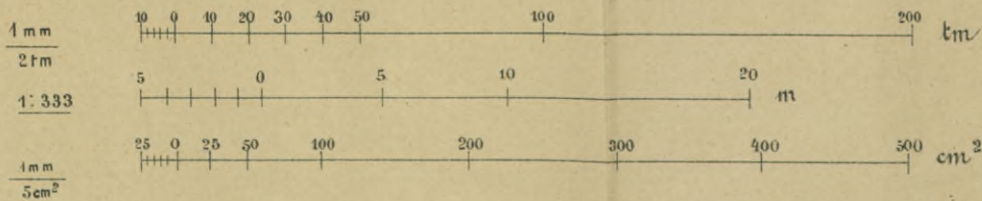
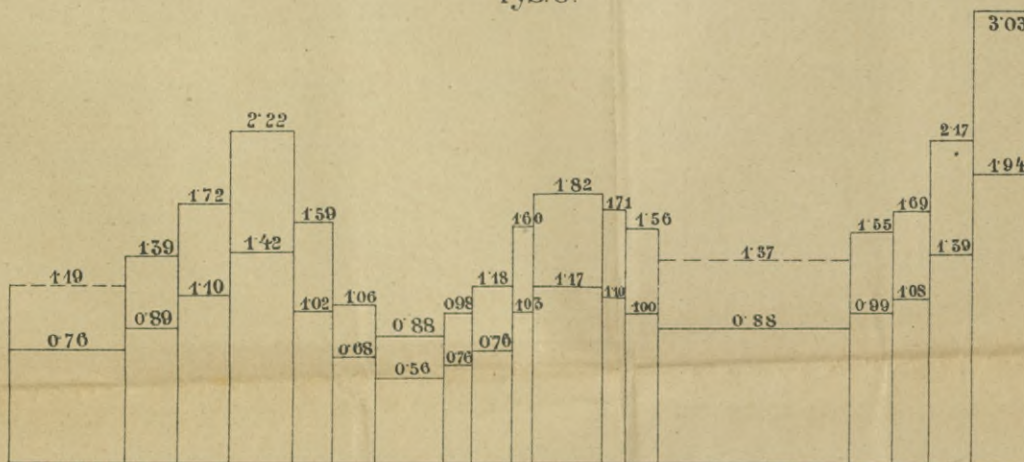
rys. 1.



rys. 2.

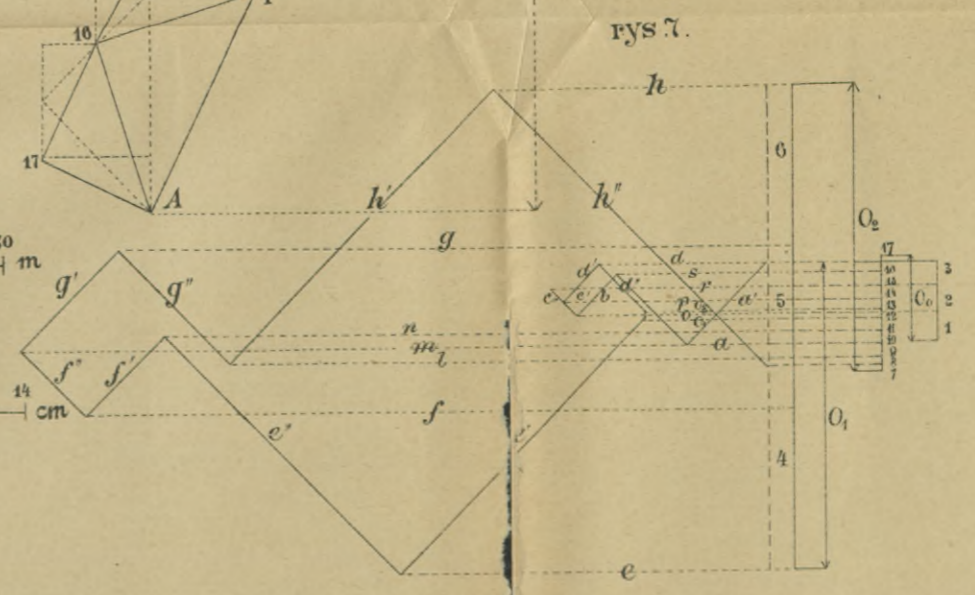
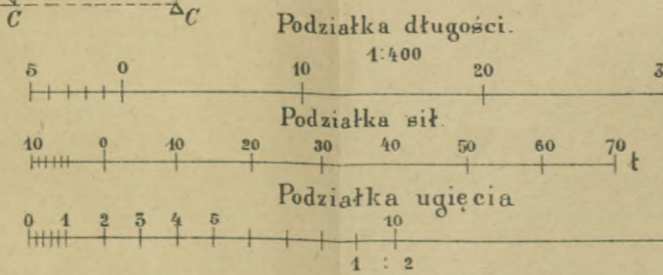
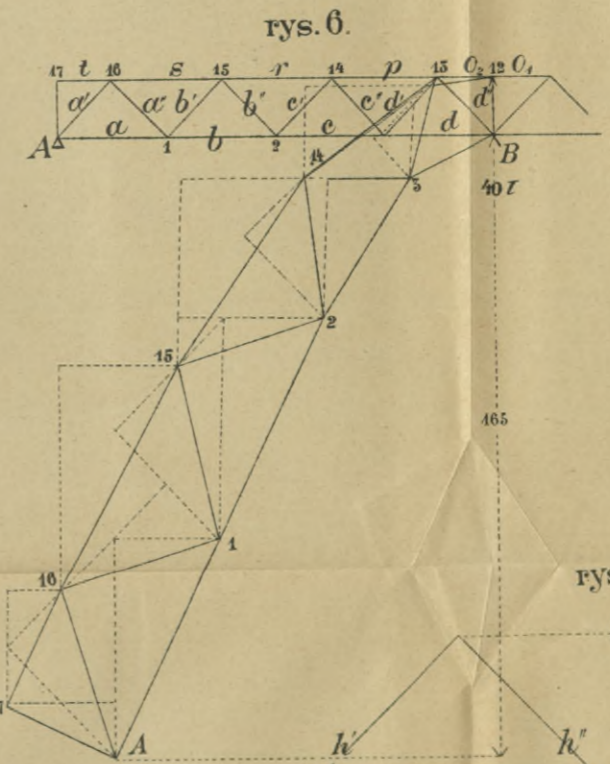
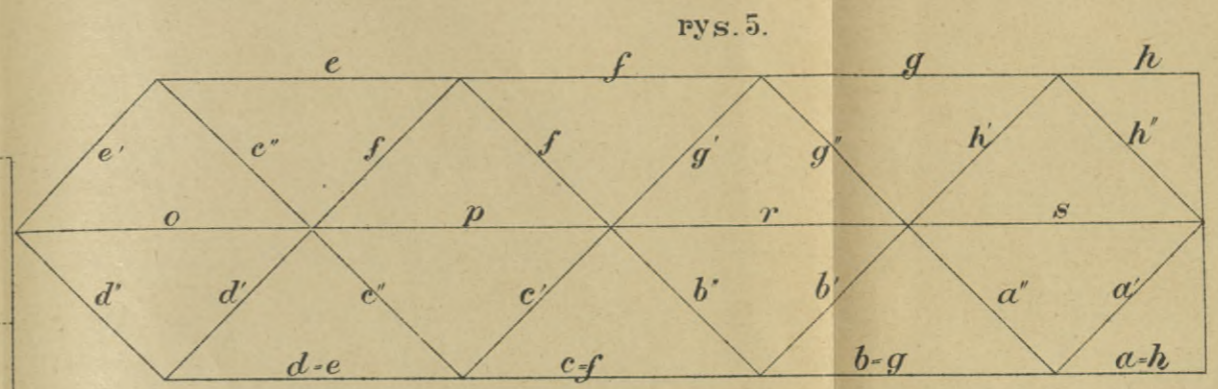
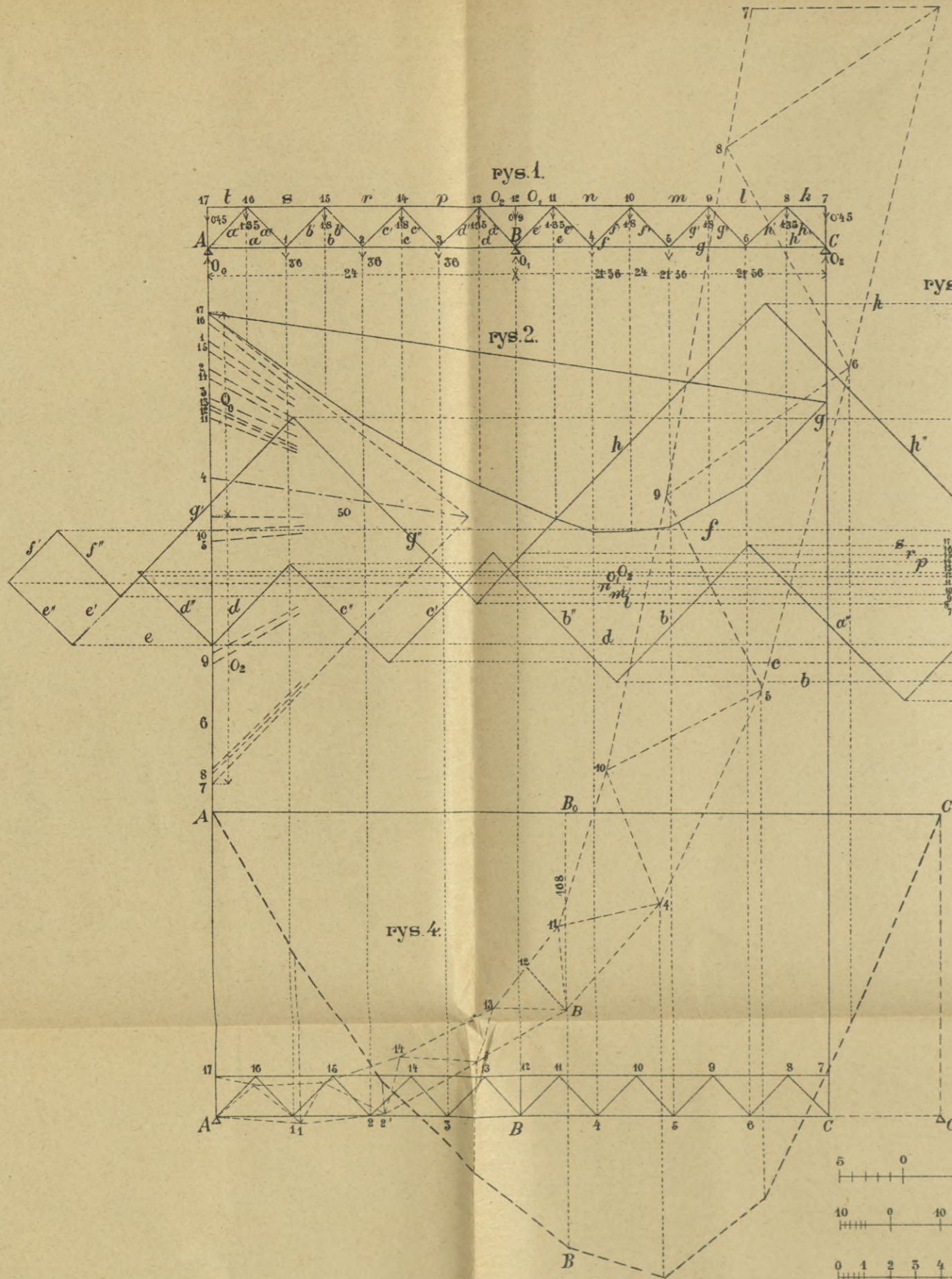


rys. 3.





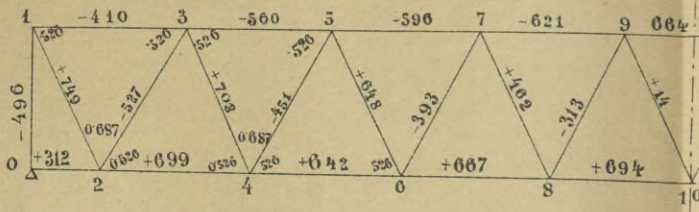
Belka ciągła kratowa





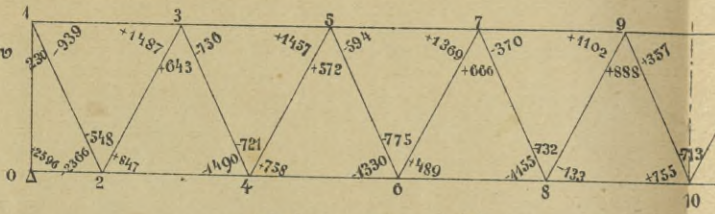
rys. 1.

pierwsorzędne  
napięcia  
i  
dotyczące kątown

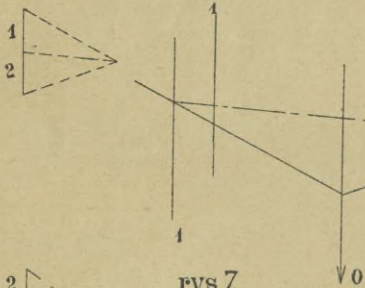


rys. 2.

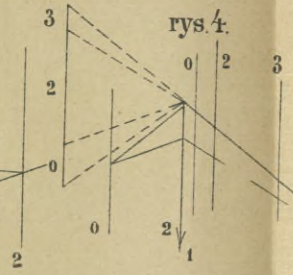
zmiana kątown  
 $\epsilon$



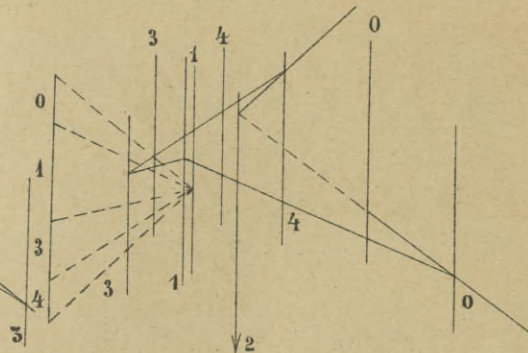
rys. 8.



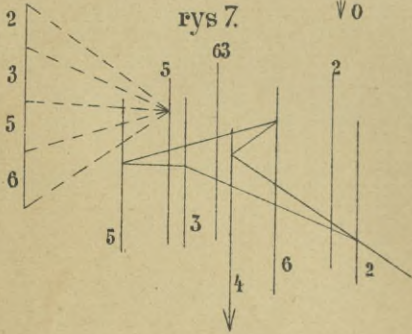
rys. 4.



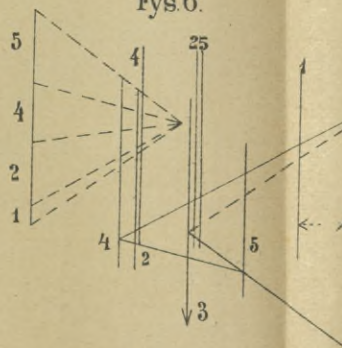
rys. 5.



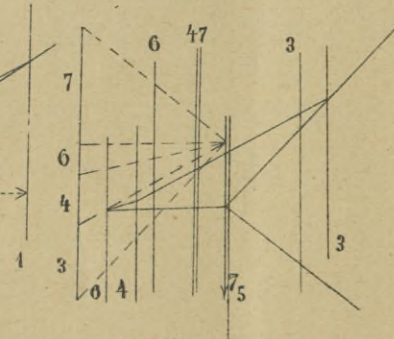
rys. 7.



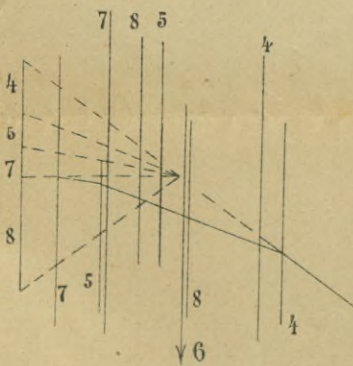
rys. 6.



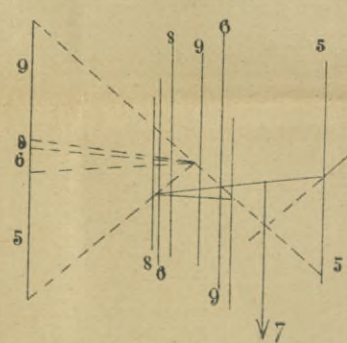
rys. 8.



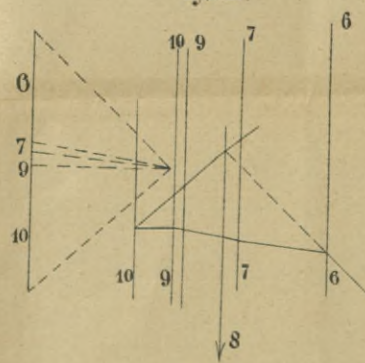
rys. 9.



rys. 10.



rys. 11.



$\frac{J}{J} \frac{1 \text{ cm}^3}{\frac{1}{2} \text{ mm}} \quad \epsilon \frac{100}{1 \text{ mm}}$



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-341277

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000275632