





Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000278502

PRACE NAUKOWE  
WYDAWNICTWO TOWARZYSTWA DLA POPIERANIA NAUKI POLSKIEJ  
DZIAŁ II. — TOM I.

---

# PODSTAWY KRYSTALOGRAFII

WYKŁAD ELEMENTARNY PRAWA JEDNORODNOŚCI,  
PRAWA KĄTÓW STAŁYCH I PRAWA KIERUNKÓW RÓWNYCH

NAPISAL

ZYGMUNT WEYBERG

Z 124-MĄ RYSUNKAMI W TEKŚCIE I Z CZTEREMA TABLICAMI



WE LWOWIE  
NAKŁADEM TOWARZYSTWA DLA POPIERANIA NAUKI POLSKIEJ  
Z FUNDUSZU BOLESŁAWA ORZECZOWICZA  
1916.

Skład główny wydawnictw Towarzystwa utrzymują: we Lwowie Gubrynowicz,  
w Krakowie Gebethner i Sp., w Warszawie E. Wende i Sp.



**WYDAWNICTWA  
TOWARZYSTWA DLA POPIERANIA NAUKI POLSKIEJ  
WE LWOWIE.**

	Kor.
<b>Abraham Władysław.</b> Powstanie organizacji kościoła łacińskiego na Rusi. Tom I. 8 <sup>o</sup> więk. str. XVI i 418. 1904. . . . .	8
<b>Balzer Oswald.</b> Porządek sądów i spraw prawa ormiańskiego z r. 1604. 8 <sup>o</sup> więk. str. 64. 1912. . . . .	2
— Sądownictwo ormiańskie w średniowiecznym Lwowie, 8 <sup>o</sup> więk. str. 187. 1909. . . . .	4
— Statut ormiański w zatwierdzeniu Zygmunta I z r. 1519. 8 <sup>o</sup> więk. str. 289. 1910. . . . .	6
— Stolice Polski 963—1138, 8 <sup>o</sup> więk. str. 76. 1916. . . . .	3
— Z zagadnień ustrojowych Polski. 8 <sup>o</sup> więk. str. 75. 1916. . . . .	3
<b>Bodaszewski Łukasz J.</b> Teorya ruchu wody na zasadzie ruchu falowego. Część I, z 76 fig. w tekście i 2 tabl. 8 <sup>o</sup> więk. str. 126. 1901. . . . .	4
<b>Buzek Józef.</b> Studya z zakresu administracji wychowania publicznego. I. Szkolnictwo ludowe, 8 <sup>o</sup> więk. str. 479. 1904. . . . .	10
<b>Chodynicki Henryk.</b> Sejmiki ziem ruskich w wieku XV. 8 <sup>o</sup> więk. str. 119. 1906.	3
<b>Dąbkowski Przemysław.</b> Dobra rodowe i nabyte w prawie litewskim od XIV do XVI wieku. 8 <sup>o</sup> więk. str. 117. 1916. . . . .	4
— Litkup. Studium z prawa polskiego. 8 <sup>o</sup> więk. str. 68. 1906. . . . .	2
— O utwierdzeniu umów pod grozą łajania w prawie polskim średnio- wiecznym. 8 <sup>o</sup> więk. str. 75. 1903. . . . .	2
— Prawo prywatne polskie, tom I. 8 <sup>o</sup> więk. str. XXII i 602. 1910, t. II. 8 <sup>o</sup> więk. str. X i 731. 1911. . . . .	28
— Prawo zastawu w zwierciadłach saskim, szwabskim i niemieckim. Studjum z historyi prawa niemieckiego. 8 <sup>o</sup> więk. str. 88. 1913. . . . .	2
— Rękojemstwo w prawie polskim średniowiecznym. 8 <sup>o</sup> więk. str. 255. 1904. . . . .	6
— Stanowisko cudzoziemców w prawie litewskim w drugiej połowie XV i w XVI wieku (1447—1588). 8 <sup>o</sup> więk. str. 85. 1912. . . . .	2
— Wierna ręka czyli pokład. Studium z prawa polskiego. 8 <sup>o</sup> więk. str. 188. 1909. . . . .	4
— Załoga w prawie polskim średniowiecznym. 8 <sup>o</sup> więk. str. 49. 1905.	1
<b>Demiński Bronisław.</b> Stanisław August i Ks. Józef Poniatowski w świetle własnej korespondencji. 8 <sup>o</sup> więk. str. 259. 1904. . . . .	6
— Źródła do dziejów drugiego i trzeciego rozbioru Polski. Tom I. Poli- tyka Rosyi i Prus wobec Polski od początku Sejmu Czteroletniego do ogłoszenia Konstytucyi Trzeciego Maja, 1788—1791. 8 <sup>o</sup> więk. str. LXXI i 565. 1902. . . . .	12
<b>Ehrlich Ludwik.</b> Starostwa w Halickiem w stosunku do Starostwa lwow- skiego w wiekach średnich (1390—1501). 8 <sup>o</sup> więk. str. 136. 1914. . . . .	3
<b>Grochmalicki Jan.</b> Badania nad regeneracją soczewki ocznej u ryb, z ta- blicą. 8 <sup>o</sup> więk. str. 28. 1908. . . . .	1
<b>Grzegorzewski Jan.</b> Z Sidzylłatów rumelijskich epoki wyprawy wiedeń- skiej akta tureckie. 8 <sup>o</sup> więk. str. 408. 1912. . . . .	9

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000278502











PRACE NAUKOWE

KRYSTALOGRAFIA

WYDAWNICTWO

TOWARZYSTWA DLA POPIERANIA NAUKI POLSKIEJ

DZIAŁ II - TOM I

ZYGMUNT WEYBRO

PODSTAWY KRYSTALOGRAFII

Hochachtungsvoll  
Ihnen  
Panu Władysławowi Pawlińskiemu  
na pamiątkę!

Weybro

Lwów, d. 7. maja. 1917.



# PRACE NAUKOWE

WYDAWNICTWO  
TOWARZYSTWA DLA POPIERANIA NAUKI POLSKIEJ

DZIAŁ II. — TOM I.

ZYGMUNT WEYBERG

## PODSTAWY KRYSTALOGRAFII



WE LWOWIE  
NAKŁADEM TOWARZYSTWA DLA POPIERANIA NAUKI POLSKIEJ  
Z FUNDUSZU BOLESŁAWA ORZECZOWICZA  
1916



# PODSTAWY KRYSTALOGRAFII

WYKŁAD ELEMENTARNY PRAWA JEDNORODNOŚCI,  
PRAWA KĄTÓW STAŁYCH I PRAWA KIERUNKÓW RÓWNYCH

NAPISAŁ

ZYGMUNT WEYBERG

Z 124-MA RYSUNKAMI W TEKŚCIE I Z CZTEREMA TABLICAMI



WE LWOWIE

NAKŁADEM TOWARZYSTWA DLA POPIERANIA NAUKI POLSKIEJ  
Z FUNDUSZU BOLESŁAWA ORZECZOWICZA  
1916.

W PODSTAWYACH  
KRYSTALOGRAFII

WYKŁAD ELEMENTARNY PRAWA JEDNORODNOŚCI  
PRAWA KĄTÓW STAŁYCH I PRAWA KIERUNKÓW RÓWNYCH

WYDAWCA

ZYGMUNT WEYBRO

WYDAWCA WYKŁADY Z KRYSTALOGRAFII



II - 341317

~~III 16596~~

---

Z drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie  
pod zarządem J. Filipowskiego.

Akc. Nr. 3551/50

J-64/2014



## Przedmowa.

»Podstawy« niniejsze zawierają wykład elementarny trzech praw krystalografii, oraz wiadomości o najważniejszych następstwach, które z tych praw wypływają.

Dotychczasowe podręczniki krystalografii pisane są przeważnie dla mineralogów; a więc są to dzieła obszerne, zapełnione ogromem szczegółów krystalografii opisowej i techniki metod badania. Wiadomości w nich zawarte nie wiążą się w całość spójną, gdyż z równą dbałością traktowane są tam elementy nauki, jak i jej technika. Z tego powodu koło ich czytelników jest daleko szczuplejsze, niż na to zasługują. Prawa krystalografii w nauce o stanie stałym są tem samem, czem w nauce o gazach są prawa Boyle'a, Gay-Lussaca, Dumasa. Sprawy izomorfizmu, polimorfizmu, stopów, roztworów złożonych, roztworów stałych, dwójłomności i polaryzacji światła, oraz wielu innych kwestyj, w spólczesnej fizyce i chemii coraz bardziej wysuwających się na plan pierwszy, są niezrozumiałe dla tych, którym obce są podstawy krystalografii.

Należy pragnąć, aby każdy podręcznik fizyki i chemii ogólnej zawierał rozdziały, traktujące ściśle i dokładnie o tych prawach, które rządzą ciałami stałymi, tak samo jak zawiera on prawa, dotyczące gazów i cieczy. Nie dzieje się tak tylko z powodu tradycji przestarzałej i szkodliwej, która ciągle jeszcze umieszcza krystalografię w ramach mineralogii, zamiast w jej granicach przyrodzonych, t. j. w zakresie nauk fizykochemicznych. Powoduje to istotną i dotkliwą lukę w całokształcie wykładu tych nauk, co się szczególnie odbija niepomysłnie na fizykochemicznym wykształceniu początkujących uczonych.

Książka niniejsza napisana jest w celu zapełnienia tej luki. Jej zadaniem jest przedstawić i podać kwintesencję krystalografii

w takiej postaci, jaką ma geometrya, t. j. nie opisowej i rozlewnej, jak się to przeważnie praktykuje, tylko w jednolitym i spójnym systemie, w ścisłym szeregu definicji i twierdzeń, logicznie z sobą związanych i kolejno po sobie następujących.

Książka, ułożona w tym celu i w tym zakresie, co niniejsza, nie może być odbiciem bezpośrednim ani bieżącego piśmiennictwa naukowego, ani klasyków. Z temi praźródłami nauki winna się ona łączyć przez monograficzne opracowania i wielkie podręczniki. Na te ogniwa pośrednie autor »Podstaw« niniejszych wybrał podręcznik Grotha<sup>1</sup> — pierwszego popularyzatora krystalografii, Liebicha<sup>2</sup> — twórcy najdoskonalszych dzieł o krystalografii fizycznej i Wulffa<sup>3</sup>, który do krystalografii geometrycznej w czasach ostatnich wprowadził najwięcej prostoty i ładu. Za wzór ogólny służyły autorowi dzieła Millera, »A Treatise on Crystallography« (1839) i »A Tract on Crystallography« (1863). Źródła te spółnie odbiły się na treści paragrafów tej książki w różnej mierze, tylko nauka o projekcji stereograficznej i o symetrii, jako oryginalne pomysły i teorie Wulffa, są opracowane prawie wyłącznie na zasadzie jego dzieła.

Wybór materiału i zakres książki, układ całości wyłącznie dedukcyjny w jednym szeregu wniosków i następstw, kolejno wypływających z jednego tylko założenia, oraz dobór przykładów i sposób ich opracowania, pochodzi od autora.

Aby koło czytelników »Podstaw« mogło być jak najszersze, opracowane są one tak, że zrozumie je każdy, kto zna prawa równości i podobieństwa trójkątów, własności koła i kuli oraz ich przekrojów, komu nie obce są początki stereometrii płaszczyzny i prostej, kto umie rozwiązywać najprostsze równania pierwszego stopnia i kto wie, co to jest wstawa i dostawa kąta.

Dla uwydatnienia budowy i ciągłości wykładu użyto w »Podstawach« pisma trojakiego. Najgrubszem podana jest treść główna, ujęta w paragrafy numerowane kolejno. Ustępy, łączące części wykładu i streszczające zawartość ustępów poprzednich, są ozna-

<sup>1</sup> P. Groth, *Physikalische Krystallographie*. Lipsk. Engelmann. 1905.

<sup>2</sup> Th. Liebisch, *Grundriss der physikalischen Krystallographie*. Lipsk. Veit i Sp. 1896.

<sup>3</sup> G. Wulff, *Rukowodstwo po krystalografii*. Warszawa. Drukarnia okręgu naukowego. 1904.



czone gwiazdkami na początku i na końcu ustępu. Średniem pismem wytłoczone są różne następstwa i dodatki, pomagające do głębszego wniknięcia w istotę rzeczy. Nakoniec przykłady i uwagi, do tekstu wtrącone, odbite są czcionkami najdrobniejszymi. Trzy pisma te stanowią ciągłą całość, ale pismo najgrubsze samo również tworzy treść jednolitą rzeczy najważniejszych.

W książkach takich jak niniejsza, rysunki są tegoż znaczenia, co tekst. Stąd ich obfitość: sto dwadzieścia cztery na 155-ciu stronicach. Wszystkie wyszły one z pod ręki autora. O ile który został zapożyczony, źródło jego wskazane jest w spisie rysunków, umieszczonym po streszczeniu i spisie rzeczy.

»Podstawa« niniejsze są wstępem do krytalografii, którego znajomość jest nieodzowna w cyklu zasadniczych wiadomości fizykochemicznych.

Całokształt krytalografii w formie przystępnej i dość treściwej, acz niezbyt ściślej, czytelnik polski znajdzie w dziełach następujących:

Z. Weyberg, Wiadomości początkowe z krytalografii. Warszawa. E. Wende i Sp. 1905.

G. Tschermak (Przełożył J. Morozewicz), Podręcznik mineralogii. Warszawa. E. Wende i Sp. 1900.

Dr. M. Goldszlag z całą koleżeńską uprzejmością wziął na siebie niewdzięczne zadanie korekty »Podstaw«. Autor składa serdeczne podziękowanie D-rowi Goldszlagowi za tę nieocenioną pomoc.

Z. W.

We Lwowie, przy ul. Długosza 6, w instytucie chemicznym uniwersytetu, d. 18. kwietnia 1916 roku.





## SPIS RZECZY I STRESZCZENIE.

	Str.
Wstęp . . . . .	1
§ 1. Dwa rodzaje ciał. Są ciała bezpostaciowe i krystaliczne . . . . .	1

### CZĘŚĆ PIERWSZA.

#### Prawo jednorodności.

§ 2. Pierwsza definicya kryształu. Kryształ jest to ciało fizycznie jednorodne, różnokierunkowe . . . . .	2
§ 3. Sieć przestrzenna. Wyrazem graficznym ciała jednorodnego jest sieć przestrzenna . . . . .	5
§ 4. Ograniczenia sieci przestrzennej i kryształu. Jak sieć przestrzenna ogranicza się płaszczyznami siatkowemi, tak kryształ ograniczony jest ścianami . . . . .	7
§ 5. Wyraz graficzny ścian i krawędzi kryształu. Wyrazem graficznym ściany kryształu jest płaszczyzna siatkowa, czyli sieć płaska punktów analogicznych, a wyrazem graficznym krawędzi kryształu jest szereg prostolinijny równoodległych punktów analogicznych . . . . .	8
§ 6. Związek geometryczny ścian i krawędzi kryształu. Jak płaszczyznę siatkową wyznaczają dwa szeregi, a szereg wyznacza się dwiema płaszczyznami siatkowemi, tak ścianę kryształu wyznaczają dwie krawędzi, a krawędź wyznacza się dwiema ścianami . . . . .	9
§ 6 <sup>a</sup> . Związek arytmetyczny ścian i krawędzi kryształu. Jak płaszczyzny siatkowe odcinają od każdego szeregu sieci przestrzennej odcinki wymierne, tak ściany kryształu odcinają odcinki wymierne od każdej jego krawędzi . . . . .	16
§ 6 <sup>b</sup> . Wyznaczniki. Położenie każdej sieci płaskiej i każdej ściany kryształu można wyrazić stosunkiem trzech liczb całych . . . . .	18
§ 7. Pasy. Ściany kryształu tworzą grupy krawędzi równoległych . . . . .	21
§ 8. Związek pasów i ścian. Każda ściana kryształu leży na skrzyżowaniu przynajmniej dwu pasów . . . . .	21
§ 9. Poszukiwanie arytmetycznego wyrazu związku pasów. Trzy zagadnienia . . . . .	23
§ 10. Wyznaczniki. Położenie ściany kryształu wyznacza się stosunkiem trzech liczb, zwanych jej wyznacznikami . . . . .	24

	Str.
§ 11. Czworoscian jednostkowy. Znaki ścian czworoscianu jednostkowego są: (111), (100), (010) i (001) . . . . .	27
§ 12. Zagadnienie pierwsze. Wyznaczenie kierunku osi pasa. Jaki jest kierunek krawędzi, powstałej z przecięcia się dwu nierównoległych ścian, których położenie jest wiadome? . . . . .	30
Rozwiązanie. Kierunek krawędzi, powstałej z przecięcia się dwu ścian nierównoległych ( $hkl$ ) i ( $h'k'l'$ ) wyznacza się stosunkiem wyznaczników $[uvw]$ , których wartości są następujące: $u : v : w = (kl' - lk') : (lh' - hl') : (hk' - kh')$ . . . . .	34
§ 13. Zagadnienie drugie. Równanie pasów. Jakim warunkom czynią zadość wyznaczniki każdej ściany, równoległej do krawędzi, której kierunek jest wiadomy? . . . . .	35
Rozwiązanie. Wyznaczniki każdej ściany ( $hkl$ ), równoległej do krawędzi $[uvw]$ , t. j. leżącej w pasie $[uvw]$ , czynią zadość równaniu: $hu + kv + lw = 0$ . . . . .	36
§ 14. Zagadnienie trzecie. Dedukcja. Jakie jest położenie ściany, równoległej do dwu przecinających się krawędzi, których kierunki są wiadome? . . . . .	37
Rozwiązanie. Położenie ściany $X$ , równoległej do dwu krawędzi: $[u_1v_1w_1]$ i $[u_2v_2w_2]$ , t. j. leżącej w dwu pasach: $[u_1v_1w_1]$ i $[u_2v_2w_2]$ wyznacza się stosunkiem wykładników ( $h_xk_xl_x$ ), których wartości są następujące: $h_x : k_x : l_x = (v_1w_2 - w_1v_2) : (w_1u_2 - u_1w_2) : (u_1v_2 - v_1u_2)$ . . . . .	38
§ 15. Wyraz arytmetyczny związku pasów. Prawo wyznaczników całych, czyli prawo wymiernych odcinków krawędzi. Położenie każdej ściany kryształu wyraża się stosunkiem trzech liczb całych, bo wszystkie ściany kryształu od każdej jego krawędzi odcinają odcinki wymierne . . . . .	38
§ 15 <sup>a</sup> . Dedukcja pasów i jej przykłady . . . . .	40
§ 16. Wyraz fizyczny prawa pasów. Prawo jednorodności. Kryształ jest to ciało jednorodne, różnokierunkowe . . . . .	43

## CZĘŚĆ DRUGA.

### Prawo kątów stałych.

§ 17. Prawo kątów stałych. Wszystkie kryształy jednej substancji chemicznej, skryształizowanej w jednakowych warunkach temperatury, ciśnienia i stężenia, mają jednakowe nachylenie ścian, t. j. stałe kąty dwuścienne . . . . .	47
§ 18. Przyrost kryształów. Płaszczyzny kryształu podczas jego przyrostu oddalają się od jego środka równoległe samym sobie . . . . .	50
§ 19. Kierunek przyrostu ściany. Podczas przyrostu kryształu każda jego ściana odsuwa się od jego środka w kierunku swej normalnej, której kierunek jest stały . . . . .	51
§ 20. Związek kątów pomiędzy normalnymi ścian i krawędziami osiowymi, a wyznacznikami ścian. Znak ściany jest to stosunek trzech ilorazów, otrzymanych z dzielenia dostaw	



	kątów pomiędzy jej normalną i krawędziami osiowymi przez do- stawy kątów, jakie tworzy normalna ściany jednostkowej z temiż krawędziami osiowymi . . . . .	52
§ 20 <sup>a</sup> .	Wnioski z prawa kątów stałych . . . . .	56
§ 20 <sup>b</sup> .	Pomiary kątów . . . . .	56
§ 20 <sup>c</sup> .	Rzut stereograficzny . . . . .	60
§ 20 <sup>d</sup> .	Siatka stereograficzna G. Wulffa . . . . .	63
§ 20 <sup>e</sup> .	Ogólnie przyjęty sposób orientowania kryształu i ozna- czania krawędzi osiowych . . . . .	67
§ 20 <sup>f</sup> .	Rzut stereograficzny kryształu skalenia potasowego i obliczenie sposobem graficznym wyznaczników jego ścian . . . . .	69

### CZĘŚĆ TRZECIA.

#### Prawo kierunków równych.

§ 21.	Definicja kierunków równych i prawo kierunków ró- wnych. Kierunki równe są to kierunki, w których kryształ ma wszystkie własności jednakowe. Kierunki równe leżą w kryształe symetrycznie . . . . .	75
*§ 22.	Druga definicja kryształu. Kryształ jest to ciało fizyczne, którego kierunki równoległe i symetryczne są fizycznie równe, a kierunki nierównoległe i niesymetryczne są fizycznie nierówne .	77
§ 23.	Symetryczność kryształów. Różny jest stopień i rodzaj symetryczności kryształów . . . . .	78
§ 24.	Definicja płaszczyzny zwierciadlanej, odzwiercie- dlenia utworu, utworów symetrycznie równych i utwo- rów symetrycznie leżących. Jeżeli płaszczyzna $PZ$ ma obok siebie po obu swych stronach dwa utwory $F_I$ i $F_{II}$ tego kształtu i tak leżące, że pion, spuszczonej na płaszczyznę $PZ$ z któregośkolwiek punktu utworu $F_I$ przecina utwór $F_{II}$ w punkcie analogicznym, i od- wrotnie, przyczem płaszczyzna $PZ$ dzieli ten pion na dwa odcinki równe, to nazywamy płaszczyznę $PZ$ płaszczyzną zwierciadlaną i mówimy: 1° że utwory $F_I$ i $F_{II}$ mają się do siebie wzajemnie tak, jak się ma przedmiot do swego odbicia w zwierciadle płaskim, t. j., że jeden jest odzwierciedleniem drugiego w płaszczyźnie $PZ$ , 2° że $F_I$ i $F_{II}$ są symetrycznie równe, 3° że $F_I$ i $F_{II}$ leżą symetrycznie .	79
§ 25.	Definicja symetryczności. Symetrycznością nazywamy ten stosunek przestrzenny, który zachodzi pomiędzy utworem i jego od- zwierciedleniem w jednej lub w kilku płaszczyznach zwierciadlanych	80
§ 26.	Definicja przekształcenia symetrycznego i powtó- rzenia symetrycznego. Wykreślenie odzwierciedlenia utworu danego, dokonane przez zastosowanie jednej lub kilku przecinają- cych się płaszczyzn zwierciadlanych, nazywa się przekształceniem symetrycznym danego utworu. Jeżeli utwór jest tylko punktem,	

	Str.
prostą, lub płaszczyzną, to odzwierciedlenie jego, dokonane przez zastosowanie jednej lub kilku płaszczyzn zwierciadlanych, nazywamy powtórzeniem symetrycznym punktu, prostej lub płaszczyzny .	80
§ 26 <sup>a</sup> . Twierdzenie o miejscu symetrycznych powtórzeń punktu. Punkt i wszystkie jego powtórzenia symetryczne, wywołane płaszczyznami zwierciadlanymi, przecinającymi się w jednym punkcie, leżą na powierzchni kuli, której środkiem jest punkt przecięcia się płaszczyzn zwierciadlanych . . . . .	80
§ 27. Twierdzenie o trzech przekształceniach symetrycznych. Są trzy przekształcenia symetryczne: odbicie, obrót, inwersya . . . . .	81
§ 28. Definicja pierwszego przekształcenia symetrycznego czyli odbicia. Przekształcenie symetryczne, dokonane jedną płaszczyzną zwierciadlaną, nazywa się przekształceniem pierwszym lub odbiciem, a płaszczyzna zwierciadlana, do tego przekształcenia potrzebna, lub to przekształcenie uzasadniająca, nazywa się płaszczyzną pierwszego przekształcenia symetrycznego, albo płaszczyzną odbicia . . . . .	82
§ 29. Definicja drugiego przekształcenia symetrycznego, czyli obrotu. Przekształcenie symetryczne, dokonane dwiema przecinającymi się płaszczyznami zwierciadlanymi, nazywa się przekształceniem symetrycznym drugim, albo obrotem; a dwie przecinające się płaszczyzny zwierciadlane, do tego przekształcenia potrzebne, lub to przekształcenie uzasadniające, sprzężone warunkiem istnienia i działania wspólnego, oraz warunkiem dawania tylko wyniku ostatecznego, nazywają się płaszczyznami drugiego przekształcenia symetrycznego, albo płaszczyznami obrotu . . . . .	83
§ 30. Definicja trzeciego przekształcenia symetrycznego, czyli inwersyi. Przekształcenie symetryczne, dokonane trzema płaszczyznami zwierciadlanymi, przecinającymi się w jednym punkcie, lecz nie w jednej prostej, nazywa się trzecim przekształceniem symetrycznym, albo inwersją, a trzy płaszczyzny zwierciadlane, do tego przekształcenia potrzebne, lub to przekształcenie uzasadniające, sprzężone warunkiem istnienia i działania wspólnego, oraz warunkiem dawania tylko wyniku ostatecznego, nazywają się płaszczyznami trzeciego przekształcenia symetrycznego, albo płaszczyznami inwersyi . . . . .	84
§ 31. Zachowanie się wzajemne przecinających się płaszczyzn zwierciadlanych. Przecinające się płaszczyzny zwierciadlane odzwierciedlają się w sobie nawzajem, wobec czego kąty dwuścienne płaszczyzn zwierciadlanych i ich trójkąty sferyczne powtarzają się naokoło prostych ich przecięcia się tak, jak w kalejdoskopie .	85
§ 32. Twierdzenie o kącie obrotu. Przekształcenie symetryczne, uwarunkowane dwiema płaszczyznami zwierciadlanymi, tworzącymi	



- kąt  $A^{\circ}$ , równe jest obrotowi o kąt  $2A^{\circ}$  około prostej przecięcia się tych płaszczyzn zwierciadlanych, jak około osi . . . . . 87
- § 33. Twierdzenie o wielkości kątów pomiędzy płaszczyznami zwierciadlanymi. Kąty pomiędzy płaszczyznami zwierciadlanymi mają mierzyć tylko  $0^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$ ,  $60^{\circ}$  i  $90^{\circ}$ , jeżeli uwarunkowane temi płaszczyznami zwierciadlanymi powtórzenia symetryczne kierunków równych mają czynić zadość prawu jednorodności . . . . . 88
- § 34. Twierdzenie o jedenastu typach symetrycznych. Jest jedenaście połączeń płaszczyzn zwierciadlanych, czyniących zadość prawu jednorodności . . . . . 92
- § 35. Oznaczanie typów symetryczności. Kąty  $180^{\circ}$ ,  $90^{\circ}$ ,  $60^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$  i  $30^{\circ}$ , lub boki trójkątów sferycznych kątom tym przeciwległe, oznaczamy liczbami: 1, 2, 3, 4 i 6 . . . . . 93
- § 36. Holosymetria. Z jedenastu połączeń płaszczyzn zwierciadlanych otrzymujemy jedenaście rodzajów holosymetrycznych, gdy płaszczyznom zwierciadlanym nadamy znaczenie płaszczyzn odbicia . . . . . 96
- § 37. Hemisymetria zupełna. Z jedenastu połączeń płaszczyzn zwierciadlanych otrzymujemy jedenaście rodzajów hemisymetrii zupełnej, gdy wszystkim płaszczyznom zwierciadlanym nadajemy znaczenie płaszczyzn obrotu . . . . . 97
- § 38. Konieczność istnienia rodzajów hemisymetrii niezupełnej. W niektórych trójkątach sferycznych płaszczyzn zwierciadlanych jeden bok może być płaszczyzną odbicia, a dwa pozostałe boki mogą być płaszczyznami obrotu . . . . . 99
- § 39. Twierdzenie o kątach płaszczyzn obrotu w trójkątach sferycznych. Jeżeli w trójkącie sferycznym płaszczyzn zwierciadlanych tylko dwa boki mają być płaszczyznami obrotu, a w trójkącie tym jest kąt, będący nieparzystą częścią półkola, to płaszczyznami obrotu muszą być oba boki, tworzące kąt nieparzysty . . . . . 99
- § 40. Twierdzenie o siedmiu rodzajach hemisymetrii niezupełnej. Siedm jest rodzajów hemisymetrii niezupełnej, czyli siedm jest połączeń płaszczyzn obrotu z płaszczyzną odbicia . . . . . 100
- § 41. Konieczność istnienia rodzajów tetartosymetrycznych. Inwersja, wymagająca trzech płaszczyzn zwierciadlanych, wraz z istnieniem trójkątowych typów symetryczności, wywołuje konieczność istnienia rodzajów tetartosymetrycznych . . . . . 102
- \*§ 42. Definicja osi przystawania, jej okresu i jej rzędu. Prosta, powstała z przecięcia się płaszczyzn zwierciadlanych, nosi nazwę osi przystawania. Kąt, o który obrócić należy utwór około osi przystawania, aby przysłał do położenia pierwiastkowego, czyli, aby stał się sam z sobą jednokładny, nazywa się okresem osi przystawania. Liczba wskazująca, ile razy układ przystaje do swego położenia pierwiastkowego w pełnym obrocie  $360^{\circ}$  dokoła osi przystawania, nazywa się rzędem tej osi . . . . . 102

§ 43. Twierdzenie o okresach i o rzędach osi przystawania, powstałych z płaszczyzn inwersyi. Płaszczyzny inwersyi tworzą osi przystawania, których okres jest $4A^0$ i rząd jest $360:4A^0$ , gdzie $A^0$ jest to wielkość kąta pomiędzy dwiema płaszczyznami inwersyi, tworzącymi daną oś . . . . .	105
§ 44. Twierdzenie o kącie płaszczyzn inwersyi. Płaszczyzny inwersyi przecinają się tylko pod kątami, będącymi parzystą częścią półkola . . . . .	107
§ 45. Twierdzenie o trzech rodzajach tetartosymetrii. Trzy są rodzaje tetartosymetryczne . . . . .	108
§ 46. Twierdzenie o trzydziestu dwu rodzajach symetryczności krystalograficznej. Są trzydziści dwa rodzaje symetryczności krystalograficznej . . . . .	108

---

### ZAKOŃCZENIE.

§ 47. Znaczenie krystalograficzne płaszczyzn zwierciadlanych i osi przystawania . . . . .	112
§ 48. Sposób wyprowadzania wszystkich form, możliwych w jednym rodzaju symetryczności, i przykład opisu jednej klasy krystalograficznej . . . . .	117
§ 49. Przegląd klas, do których należą kryształy ciał, wymienionych w » Podstawach« jako przykłady, oraz wyjaśnienie różnicy pomiędzy symetrią geometryczną i fizyczną . . . . .	125
§ 50. Kształty czworoscianów jednostkowych, spis klas krystalograficznych, ich nazwy i przykłady. Podstawy krystalografii fizycznej. Klasyfikacja kryształów pod względem różnych zjawisk fizycznych. Kryształy bliźniące, wielokrotne i naśladowcze . . . . .	129

---

### DODATEK.

- TABLICA I. Wstawy i dostawy kątów od  $0^0$  do  $90^0$  co  $30'$ . (Przedruk. J. Claudel, Tables:  $1^0$  des carrés et des cubes etc., Paris, Dunod, éditeur. 1871).
- TABLICA II. Logarytmy czterocyfrowe liczb od 100 do 1109. (Przedruk. Tablice matematyczno-fizyczne. Ułożył A. W. Witkowski, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego. Nakład redakcyi »Wiadomości Matematycznych«, Warszawa 1904).
- TABLICA III. Siatka stereograficzna G. Wulffa, zmniejszona z 20 cm do 15 cm średnicy.
- TABLICA IV. Odbitka rękopiśmiennej projekcyi kryształu skalenia.



## SPIS RYSUNKÓW W TEKSCIE.

	Str.
§ 2. Rys. 1. Romboedr . . . . .	3
> Rys. 2. Kryształ gipsu . . . . .	3
> Rys. 3. Spękania w kryształach soli kamiennej, wywołane wbijaniem igły. Powiększenie 10 . . . . .	3
> Rys. 4. Figury wytrawione ałunu. Powiększenie 20 . . . . .	4
§ 3. Rys. 5. Sieć płaska . . . . .	5
> Rys. 6. Sieć przestrzenna . . . . .	6
§ 6. Rys. 7. Wyodrębnienie czworościanu z sieci przestrzennej . . . . .	10
> Rys. 8. Czworościan, wyodrębniony z sieci przestrzennej płaszczyznami siatkowymi . . . . .	11
> Rys. 9. Schemat powstawania pięciościanu . . . . .	11
> Rys. 10. Pięciościan, wydzielony z sieci przestrzennej płaszczyznami siatkowymi . . . . .	12
> Rys. 11. Dwie pozostałe płaszczyzny siatkowe, wyznaczone krawędziami czworościanu rys. 8 . . . . .	12
> Rys. 12. Czworościan w połączeniu z trzema ścianami, wyznaczonymi przez jego krawędzie . . . . .	13
> Rys. 13. Wielościan z narożami czworościennymi . . . . .	15
> Rys. 14. Kształt wielościanu rys. 13 po rozpostarciu ścian $T$ . . . . .	15
> Rys. 15. Kształt wielościanu rys. 13 po rozpostarciu ścian $I$ . . . . .	15
> Rys. 16. Wielościan rys. 13 po zjawieniu się na nim ścian $L$ , wyznaczonych krawędziami $T/T$ i $I/I$ . . . . .	15
§ 6 <sup>a</sup> . Rys. 17. Odcinki, odcinane różnymi płaszczyznami siatkowymi od jednego szeregu sieci przestrzennej . . . . .	16
§ 6 <sup>b</sup> . Rys. 18. Wielościan ze ścianami, odcinającymi różne odcinki od jednej jego krawędzi . . . . .	19
> Rys. 19. Wielościan rys. 18 po rozpostarciu jego ścian do przecięcia się wzajemnego . . . . .	19
§ 7. Rys. 20. Kryształ apatytu . . . . .	21
§ 8. Rys. 21—24. Rzut pionowy czterech kryształów skalenia (Według Th. Liebisch'a »Grundriss der Krystallographie«. Lipsk. Veit & Comp. 1896, str. 24, fig. 54—57) . . . . .	22
§ 10. Rys. 25. Czworościan . . . . .	24
> Rys. 26. Pięciościan . . . . .	25
> Rys. 27. Pięciościan po rozpostarciu ścian do przecięcia się ich z każdą krawędzią osiową . . . . .	26
§ 12. Rys. 28. Kierunek prostej, powstałej od przecięcia się dwu płaszczyzn (Według P. Grotha »Physikalische Krystallographie« Lipsk. W. Engelmann. 1905, str. 308, fig. 173) . . . . .	30
§ 14. Rys. 29. Kryształ akcyntu . . . . .	37
> Rys. 30. Wielościan ze ścianą w dwu pasach . . . . .	37
§ 15 <sup>a</sup> . Rys. 31. Ściany czworościanu jednostkowego w połączeniu ze ścianą, leżącą w pasie $[100] / (111)$ i $[(001) / (010)]$ . . . . .	41
> Rys. 32. Kryształ akcyntu i znaki jego ścian . . . . .	42

	Str.
§ 16. Rys. 33. Sieć przestrzenna. (Według G. Wulffa »Rukowodstwo po krystallografii«. Warszawa. Drukarnia okręgu naukowego. 1904, str. 94, rys. 90) . . . . .	44
» Rys. 34. Prąd koncentracyjny. (Z G. Wulffa »Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflächen«. Zeitschrift für Krystallographie etc. 1901. XXXIV. 449—530)	46
§ 17. Rys. 35. Kierunek przyrostu ściany . . . . .	48
» Rys. 36—39. Cztery kryształy kwarcu. (Według M. Bauera »Lehrbuch der Mineralogie« Berlin i Lipsk. J. Guttentag (D. Collin) 1886, str. 328, fig. 362—365) . . . . .	49
» Rys. 40—41. Dwa kryształy staurolitu. (Według M. Bauera, str. 24, fig. 15 i 16) . . . . .	50
§ 18. Rys. 42. Ośmiościan umiarowy . . . . .	51
» Rys. 43. Trzy kryształy magnetytu . . . . .	51
» Rys. 44. Ośmiościan umiarowy ze ścianami, równoległe poprzesuwaniem . . . . .	51
§ 20. Rys. 45. Czworoscian i normalna ściany jednostkowej . . . . .	53
» Rys. 46. Powierzchnia kuli z przecięciami się z nią krawędzi osiowych $X$ , $Y$ , $Z$ i normalnych ścian $P_1$ i $P_N$ . . . . .	54
§ 20 <sup>b</sup> . Rys. 47. Goniometr przykładany, $\frac{1}{3}$ wielkości naturalnej . . . . .	57
» Rys. 48. Zasada goniometrów z odbiciem . . . . .	57
» Rys. 49. Goniometr z odbiciem jednokołowy, $\frac{1}{5}$ wielkości naturalnej	58
» Rys. 50. Goniometr z odbiciem dwukołowy czyli teodolitowy $\frac{1}{6}$ wielkości naturalnej . . . . .	59
§ 20 <sup>c</sup> . Rys. 51. Zasada rzutu stereograficznego . . . . .	61
» Rys. 52. Okrąg koła małego na powierzchni kuli i jego rzut stereograficzny. (Według G. Wulffa, str. 17, rys. 25) . . . . .	61
» Rys. 53. Przekrój kuli rysunku 52-go. (Według G. Wulffa, str. 17, rys. 26)	62
§ 20 <sup>d</sup> . Rys. 54. Graficznie dokonana dedukcja pasów. (Według G. Wulffa, str. 79, rys. 79) . . . . .	67
§ 20 <sup>e</sup> . Rys. 55. Krawędzi osiowe i osi (por. rys. 19) . . . . .	68
» Rys. 56. Osi, ich promienie dodatnie i odjemne . . . . .	68
§ 20 <sup>f</sup> . Rys. 57. Kryształ skalenia . . . . .	69
» Rys. 58. Rzut stereograficzny kryształu skalenia . . . . .	70
» Rys. 59. Kryształ skalenia . . . . .	73
§ 21. Rys. 60. Spękania muskowitu. Powiększenie 20 . . . . .	76
» Rys. 61. Kryształ sfalerytu . . . . .	77
» Rys. 62. Kryształ platynocyanku magnezowego . . . . .	77
§ 23. Rys. 63. Figury wytrawione apatyty. (Z H. Baumhauera »Die Resultate der Aetzmethode«. Lipsk. W. Engelmann. 1894, Tabl. III. 10)	78
» Rys. 64. Kryształ aragonitu . . . . .	79
§ 24. Rys. 65. Płaszczyzna zwierciadlana i stosunek utworu do jego odzwierciedlenia . . . . .	79
§ 26 <sup>a</sup> . Rys. 66. Miejsce powtórzeń punktu, wywołanych przecinającymi się płaszczyznami zwierciadlanymi . . . . .	80
§ 27. Rys. 67. Trzy przekształcenia symetryczne figury na powierzchni kuli	81
§ 28. Rys. 68. Pierwsze przekształcenie symetryczne . . . . .	82



	Str.
§ 29. Rys. 69. Obrót . . . . .	83
> Rys. 70. Płaszczyzny obrotu . . . . .	83
§ 30. Rys. 71. Inwersja . . . . .	84
> Rys. 72. Płaszczyzny inwersji . . . . .	84
§ 31. Rys. 73. Płaszczyzny zwierciadlane i ich powtórzenia kalejdoskopowe	85
> Rys. 74. Kalejdoskopowe powtórzenie trójkąta sferycznego w rzucie stereograficznym . . . . .	85
§ 32. Rys. 75. Trzy przekształcenia symetryczne . . . . .	87
§ 33. Rys. 76. Sieć płaska i jej symetryczność . . . . .	89
§ 35. Rys. 77. Rzuty stereograficzne 32-u rodzajów symetryczności krystalograficznej . . . . .	95
§ 37. Rys. 78. Kwaśny prawy winian strontu . . . . .	98
§ 39. Rys. 79. Powtórzenie kalejdoskopowe kąta parzystego o niejednakowym charakterze boków . . . . .	100
> Rys. 80. Powtórzenie kalejdoskopowe kąta nieparzystego o niejednakowym charakterze boków . . . . .	100
§ 42. Rys. 81. Powtórzenie kalejdoskopowe dwu przecinających się płaszczyzn zwierciadlanych w rzucie stereograficznym . . . . .	104
> Rys. 82. Płaszczyzna $MN$ rysunku 81-go a na niej ślady płaszczyzn zwierciadlanych i przekształceń figury . . . . .	104
> Rys. 83. Płaszczyzny zwierciadlane z rys. 81-go i 82-go mające znaczenie płaszczyzn obrotu . . . . .	105
§ 43. Rys. 84. Kalejdoskopowe powtórzenie trójkąta płaszczyzn inwersji w rzucie stereograficznym . . . . .	105
> Rys. 85. Utwór rys. 84-go w rzucie pionowym na płaszczyznę $P_{III} Z_{III}$ . . . . .	105
§ 46. Rys. 86. Kryształ zasadowego margarycianu wapniowego z figurami wytrawionemi (schematycznie) . . . . .	110
> Rys. 87. Rzut stereograficzny biegunów ( $hkl$ ) w klasie $S(2''2''4'')$ . . . . .	111
> Rys. 88. Podwójny sfenoid tetragonalny . . . . .	111
> Rys. 89. Figura wytrawiona kryształów margarycianu wapniowego na płaszczyźnie podstawowej, widziana z góry. Powiększenie 310 . . . . .	111
> Rys. 90. Figury wytrawione na płaszczyznach podstawowych margarycianu, widziane z boku. Powiększenie 310 . . . . .	111
> Rys. 91. Figury wytrawione margarycianu na ścianach słupa. Powiększenie 310 . . . . .	112
§ 47. Rys. 92. Płaszczyzna odbicia i cztery przecinające się z nią ściany kryształu w rzucie stereograficznym . . . . .	113
> Rys. 93. Rzut stereograficzny osi przystawiania rzędu parzystego i dwu sieci płaskich. (Według G. Wulffa, str. 160, rys. 129) . . . . .	114
> Rys. 94. Przekrój $MLM_I$ , prostopadły do płaszczyzny rys. 93-go . . . . .	114
> Rys. 95. Rzut stereograficzny osi przystawiania rzędu nieparzystego i trzech rzędów symetrycznie równych i symetrycznie leżących. (Według G. Wulffa, str. 160, rys. 130) . . . . .	115
> Rys. 96. Drugie przekształcenie symetryczne, dokonane różnie orientowanymi płaszczyznami obrotu, tworzącymi kąt jednakowy . . . . .	116
§ 48. Rys. 97. Rzut stereograficzny biegunów formy ( $hkl$ ) w klasie $S(2'2'2)$ . . . . .	121

	Str.
§ 49. Rys. 98. Kierunek prążków na ścianach sześciangu kryształów sfa-	
lerytu . . . . .	127
> Rys. 99. Kierunek prążków na ścianach sześciangu kryształów pirytu	127
> Rys. 100. Kształt i układ figur wytrawionych na ścianach sześciangu	
bromianu sodowego . . . . .	128
> Rys. 101. Figury wytrawione sylwinu . . . . .	128
> Rys. 102. Figury wytrawione soli kamiennej . . . . .	128
§ 50. Rys. 103. Kryształ bliźnięcy kalcytu . . . . .	148
> Rys. 104. Gips . . . . .	148
> Rys. 105. Spinel . . . . .	148
> Rys. 106. Fluoryt . . . . .	148
> Rys. 107. Gips . . . . .	149
> Rys. 108. Staurolit . . . . .	149
> Rys. 109. Spinel . . . . .	150
> Rys. 110. Fluoryt . . . . .	150
> Rys. 111. Mikroklin . . . . .	150
> Rys. 112. Perowskit . . . . .	150
> Rys. 113. Boracyt . . . . .	151
> Rys. 114. Leucyt . . . . .	151
> Rys. 115—118. Kryształy filipsytu . . . . .	152
> Rys. 119. Desmin . . . . .	153
> Rys. 120. Cyrkon . . . . .	153
> Rys. 121. Dwunastościan rombowy . . . . .	153
> Rys. 122. Adular . . . . .	153
> Rys. 123. Penin . . . . .	154
> Rys. 124. Korund . . . . .	154



## WSTĘP.

### § 1. Dwa rodzaje ciał. Są ciała bezpostaciowe i krystaliczne.

Różne substancje ciekłe różnie zachowują się z obniżeniem temperatury.

Roztopione szkliwa lub żywice, gdy stygną, gęstnieją i twarднеją, aż wreszcie stają się ciałami takimi, jak znane wszystkim szkło, kałafonia lub smoła, zachowując do końca kształt kropeł lub naczyń, w którym stygły. Ciała takie noszą nazwę ciał bezpostaciowych.

Gdy którekolwiek z nich rozpuścimy w jakimś rozpuszczalniku, a potem wydzielimy go z roztworu, n. p. przez dolanie cieczy, w której dana substancja się nie rozpuszcza, to każde ciało bezpostaciowe wydzieli się w kształcie kropeł kulistych, podobnie jak to czynią ciecze, gdy są wytrącone ze swych roztworów w cieczach innych.

Olbrzymia ilość substancji stanowi drugi rodzaj. To są substancje takie, jak n. p. woda. Zachowują się one we względzie omawianym wprost przeciwnie. Każda z nich w pewnej, pod stałym ciśnieniem stałej, temperaturze raptownie zmienia swą gęstość i zarazem się zestala. N. p. woda pod ciśnieniem jednej atmosfery w temperaturze  $0^{\circ} C.$  staje się lodem, który jest od niej lżejszy o  $\frac{1}{11}$  w tej samej temperaturze i pod tem samym ciśnieniem.

Substancje tego drugiego rodzaju, krzepnąc, przybierają samorzutnie postać wielościanów geometrycznych, zwanych kryształami.

Substancje takie, jeżeli są zdolne do rozpuszczania się w jakimś rozpuszczalniku, to w każdej temperaturze i pod każdym ciśnieniem rozpuszczają się w nim tylko do pewnego kresu, stałego u każdej substancji i u każdego rozpuszczalnika w tej temperaturze i pod tem ciśnieniem. Tworzą one wtedy ze swym rozpuszczalnikiem roz-

twór nasycony. W temperaturze stałej i pod stałym ciśnieniem roztwór, pewną substancją nasycony, już więcej nie rozpuszcza tej substancji, ani też jej nie wydziela. Lecz gdy temperatura roztworu nasyconego zostaje obniżona, lub gdy rozpuszczalnik poczyna zeń uchodzić przez parowanie, wtedy roztwór staje się przesycony i wydziela substancję stałą również w postaci kryształów.

Substancje, mające takie własności, nazywamy ciałami krystalicznymi.

## CZĘŚĆ PIERWSZA.

### Prawo jednorodności.

§ 2. **Pierwsza definicya kryształu.** Kryształ jest to ciało fizycznie jednorodne, różnokierunkowe.

Niepodobna przypuścić, aby ciała bezpostaciowe i ciała krystaliczne różniły się tylko swym kształtem. Postać, niewątpliwie, jest tylko wyrazem ich własności fizycznych. Własności fizyczne ciał bezpostaciowych i krystalicznych muszą być zasadniczo odmienne, jeżeli postać tych ciał jest tak różna.

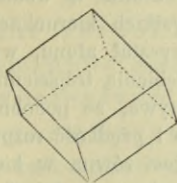
Istotnie. Wiadomo, że szkliwa, kalafonie, żywice, smoły i t. p. ciała bezpostaciowe, od silnych uderzeń kruszą się i pękają powierzchniami przypadkowymi. Powierzchnie ich odłamu są zawsze nierówne; przebiegają one każdą bryłę ciała bezpostaciowego w kierunkach nieokreślonych i nieregularnych. Gdy rozbijamy ciało bezpostaciowe, przeciwstawia ono opór jednakowy w każdym kierunku; a więc spójność jego jest na ogół równa we wszystkich kierunkach; a zatem, ciało bezpostaciowe jest fizycznie równokierunkowe czyli izotropowe.

Ciała krystaliczne zachowują się wprost przeciwnie: od uderzenia, a niektóre nawet od lekkiego nacisku, pękają i łupią się doskonałemi, gładkiemi, nieraz nieskazitelnie lśniącemi, a zawsze równoległemi płaszczyznami. Własność kryształów łupania się równoległemi płaszczyznami nazywa się łupliwością.

Weźmy kryształ soli, zwanej pirochromianem potasu,  $K_2Cr_2O_7$ ; duże jej osobniki krystaliczne możemy nabyć w każdym składzie materiałów aptecznych. Rozbijając kryształ taki, spostrzegamy, że w jednym kierunku łupie się on daleko łatwiej, niż w innych, przytem łupie się gładkiemi, lśniącemi, równoległemi płaszczyznami.

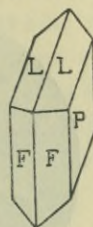


Łupliwość może być stwierdzona jeszcze wyraźniej w kryształach kalcytu,  $CaCO_3$ . Złotka żółtawe, prawie zupełnie przezroczyste, osobniki tego minerału otrzymamy n. p. z góry Kadzielni pod Kielcami. Osobnik kalcytu, uderzony młotem, rozpada się na bryłki równoległościenne takiego kształtu, że przez równoległe odłupywanie zawsze możemy zeń otrzymać wielościan foremny, nazywany romboedrem (rys. 1).



Rys. 1. Romboedr.

Tak samo doskonałą łupliwość wykazują kryształy galenitu  $PbS$ , albo soli kamiennej  $NaCl$ , które za łada uderzeniem łupią się równoległymi płaszczyznami w trzech kierunkach prostopadłych.



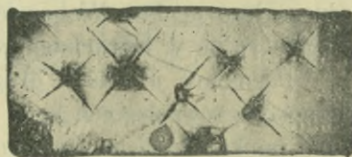
Rys. 2. Kryształ gipsu.

Kryształy gipsu,  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ , (rys. 2), są tak łupliwe, że równoległe do ściany  $P$  dzielą się na równoległościenne płytki już lekkim naciśnięciem noża, a nawet twardego kartonu na ścianę  $F$  albo  $L$ .

Zjawiska łupliwości dowodzą, że spójność kryształów w kierunkach, prostopadłych do płaszczyzn łupliwości, jest bardzo mała, a w innych kierunkach tak wielka, że nie ustępuje nawet bardzo silnym naciskom.

Prócz tego, równoległościennosc odłupanych okruszków kryształu dowodnie przekonywa, że spójność kryształu jest równa w kierunkach równoległych.

Dla unaocznienia sprawy omawianej zwróćmy uwagę na rys. 3. W ścianie kryształu soli kamiennej lekkimi uderzeniami młotka wbijano igłę. W każdym punkcie, w którym wbito w ścianę kryształu ostrze igły, powstały dwa prostopadłe spękania. Spękania te, otrzymane w jednym punkcie ściany, są równoległe do spękań, powstałych w którymkolwiek innym punkcie tej ściany. Rys. 3 jest to mikrofotogram tych spękań w powiększeniu dziesięciokrotnym.

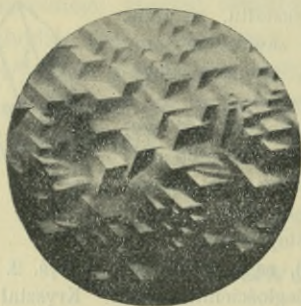


Rys. 3. Spękania w kryształ soli kamiennej, wywołane wbijaniem igły. Powiększenie 10.

Doświadczenie, przed chwilą opisane, dowodzi, podobnie jak opisane poprzednio, że spójność kryształu jest różna w kierunkach różnych, i że jest ona jednakowa w kierunkach równoległych, t. j. że około jednego punktu wielkości jej są takie same i tak samo ułożone, jak około każdego innego punktu tego kryształu.

Nie tylko ze spójności, ale z innych własności kryształu też wnosimy, że kierunki równoległe w kryształach są fizycznie jednakowe, i że własności kryształu zmieniają się ze zmianą kierunku.

Rys. 4 jest to mikrofotogram widoku, jaki przedstawia ściana kryształu ałunu glinowopotasowego,  $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ , zwilżona czystą wodą. Ałun rozpuszcza się w wodzie dość znacznie. Rys. 4 dowodnie przekonywa, że prędkość rozpuszczania się ałunu w wodzie,



Rys 4. Figury wytrawione ałunu.  
Powiększenie 20.

nie jest równa we wszystkich kierunkach. Woda, rozpuszczając kryształ ałunu, wybiera w ścianie jego wgłębienia trójścienne. Zarazem rys. 4 przekonywa, że podobnie jak łupliwość, tak samo i prędkość rozpuszczania się kryształu jest równa w kierunkach równoległych, gdyż na całej płaszczyźnie figury wytrawione są do siebie równoległe. Innemi słowy, figury wytrawione wodą na ścianie kryształu ałunowego są jednakowe i jednakowo ułożone w każdym punkcie tej ściany, tak samo jak spękania, powstałe od igły, wbijanej w ścianę kryształu soli kamiennej, są jednakowe i jednakowo leżą w każdym punkcie ściany badanej.

Jeżeli zjawiska tak różne w swej istocie, jak spękania i figury wytrawione, objawiają się w kryształach jednakowo, to musimy wnosić, że kryształy zachowują się tak samo pod względem wszystkich zjawisk fizycznych. Tak jest rzeczywiście.

Wszystkie badania kryształów stwierdzają zgodnie, że nie tylko spójność, ale wszystkie własności fizyczne każdego kryształu są zmienne w kierunku, lecz są jednakowe w kierunkach równoległych.

Przypuśćmy, że poznaliśmy wszystkie własności kryształu około jednego jego punktu. Wobec różnokierunkowości kryształu będą one w ogóle różne w kierunkach różnych.

Poznajmy je około drugiego punktu. Wobec jednakowości kierunków równoległych będą one takie same i tak samo ułożone około punktu drugiego, jak około punktu pierwszego.

To samo znajdziemy około trzeciego, czwartego i wszystkich innych punktów tego kryształu.

Wszystkie kryształy zachowują się tak samo.

Ciało, które ma różne własności fizyczne w różnych kierunkach, nazywa się ciałem fizycznie różnokierunkowym albo anizotropowem.

Ciało, które ma takie same i tak samo ułożone wła-



sności fizyczne około każdego swojego punktu, nazywa się ciałem fizycznie jednorodnym.

A więc kryształ jest to ciało fizycznie jednorodne różnokierunkowe, t. j. własności kryształu są zmienne zależnie od kierunku, lecz w kierunkach równoległych są one jednakowe, czyli, wszystkie własności kryształu około jednego punktu są takie same i tak samo ułożone, jak około każdego innego punktu tego kryształu.

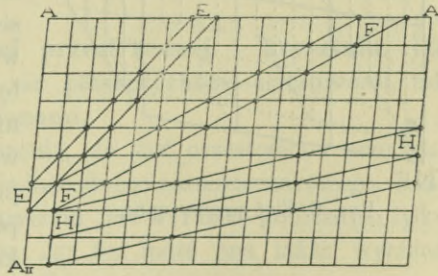
To jest prawo jednorodności.

§ 3. Sieć przestrzenna. Wyrazem graficznym ciała jednorodnego jest sieć przestrzenna.

Rozważmy, jakim utworem geometrycznym możemy wyrazić poznane dotychczas własności kryształu, t. j. różnokierunkowość i jednorodność.

Nasamprzód pomyślmy tylko o jednej dowolnej płaszczyźnie kryształu. Wobec tego, co się rzekło na końcu ustępu poprzedniego, w każdym szeregu prostych równoległych, leżących na tej płaszczyźnie, wszystkie proste są fizycznie jednakowe. Wykreślmy więc na płaszczyźnie szereg prostych, równoległych i równoodległych np.  $AA_1$  (rys. 5), i przetnijmy go drugim szeregiem prostych  $AA_2$ , również pomiędzy sobą równoległych i również oddzielonych odstępami równymi. Dwa szeregi prostych równoległych i równoodległych, przecinając się, pokrywają płaszczyznę jednostajną siecią punktów. Punkty te nazwiemy analogicznymi, ponieważ około któregośkolwiek z nich wszystkie pozostałe leżą tak samo, jak około każdego innego w tej sieci, a więc każdy może być zamieniony na którykolwiek z pozostałych.

Przeprowadźmy prostą przez dwa dowolne punkty analogiczne utworu omawianego (n. p. prostą  $E$  lub prostą  $F$ , albo prostą  $H$ , rys. 5). Widzimy, że każda prosta do niej równoległa jest podzie-



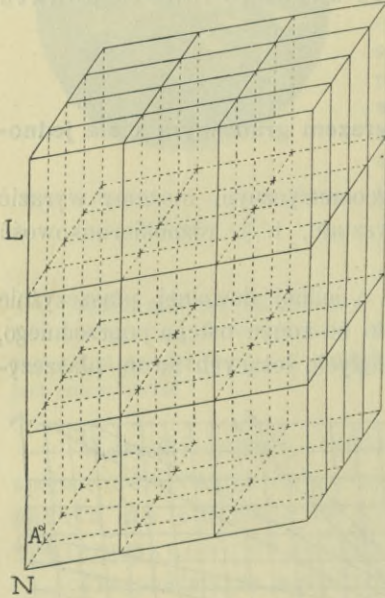
Rys 5. Sieć płaska.

lona punktami analogicznymi na odcinki tej samej długości, co i ona, a więc wyobraża to graficznie jednakowość fizyczną wszystkich prostych, należących do jednego szeregu prostych równoległych.

Utwór tak zbudowany, t. j. dwa przecinające się szeregi prostych, w każdym szeregu równoległych i równoodległych, nazywamy siecią płaską punktów analogicznych, albo płaszczyzną siatkową. Niekiedy bywa ona zwana z łacińska płaszczyzną

retykularną. Punkty analogiczne nazywamy też węzłami.

Kryształ jest bryłą, a więc utworem trójwymiarowym. Zatem wyraz jego własności, wykreślany obecnie, musimy uczynić również trójwymiarowym. To może stać się w sposób następujący:



Rys. 6. Sieć przestrzenna.

Przez którykolwiek punkt analogiczny wykreślonej poprzednio sieci płaskiej przeprowadzmy prostą, przecinającą się z tą siecią pod kątem dowolnym, lecz większym od zera, i podzielmy tę prostą punktami analogicznymi na odcinki dowolne, lecz równe. Innymi słowy, przez jakiś punkt  $N$  przeprowadzamy sieć płaską i nachyloną do niej pod kątem  $A^0$  szereg równoodległych

punktów analogicznych punktowii  $N$ . Lecz jeżeli węzły tego szeregu (nazwijmy go szeregiem  $L$ ) mają być analogiczne punktowii  $N$ , to przez każdy z nich musimy przeprowadzić taką samą sieć płaską, jak ta, która przechodzi przez  $N$ , i nachyloną do szeregu  $L$  pod tym samym kątem  $A^0$ , t. j. do sieci pierwszej równoległą. W ten sposób otrzymamy t. zw. sieć przestrzenną (rys. 6), t. j. przestrzeń, podzieloną płaszczyznami na równoległościany, których naroża, czyli wierzchołki, są punktami analogicznymi, czyli węzłami, sieci.

Oczywista, w utworze takim szeregi nierównoległe mają różne odstępę pomiędzy punktami analogicznymi. Obrazowo wyraża to



fizyczną niejednakowość kierunków nierównoległych w kryształach, czyli jego różnokierunkowość fizyczną.

Gdy przez dwa dowolne punkty analogiczne sieci przestrzennej przeprowadzamy prostą, to znajdujemy, że wszystkie szeregi punktów analogicznych do niej równoległe mają równe odstępki pomiędzy węzłami, t. j. obrazowo przedstawiają jednakowość fizyczną kierunków równoległych w kryształach.

Innymi słowy, sieć przestrzenna jest zbiorem węzłów, ułożonych jednostajnie: około któregośkolwiek węzła wszystkie pozostałe ułożone są tak samo, jak około każdego innego węzła tej sieci.

Z poprzedniego wiadomo, że własności fizyczne kryształu około jednego, któregośkolwiek, punktu są takie same i tak samo ułożone, jak około każdego innego punktu w tym kryształach.

A więc sieć przestrzenna jest wyrazem graficznym własności ciała jednorodnego różnokierunkowego, t. j. kryształu.

Sieć przestrzenna jest obrazem kryształu tak dokładnym, że, jak przekonamy się niżej, da nam ona możliwość przewidzenia różnych własności kryształu, dotychczas nie wymienionych jeszcze w wykładzie niniejszym.

**§ 4. Ograniczenia sieci przestrzennej i kryształu. Jak sieć przestrzenna ogranicza się płaszczyznami siatkowymi, tak kryształ ograniczony jest ścianami.**

Doszliliśmy do przeświadczenia, że sieć przestrzenna przedstawia graficznie własności ciała jednorodnego różnokierunkowego. Rozważmy jednak, czy sieć przestrzenna jest wyrazem graficznym tylko fizycznych własności kryształu, czy też może ona także wyrażać pewne geometryczne jego własności.

Sieć przestrzenna, jako utwór geometryczny, może być przez nas budowana w nieskończoność, t. j. możemy wyobrażać ją sobie ciągnącą się bez ograniczeń w każdym kierunku dowolnie daleko. Ale kryształ, jako ciało fizyczne, jest ograniczony. Chcąc zatem upodobnić sieć przestrzenną do kryształu nie tylko pod względem jednorodności i anizotropii, należy wydzielić z nieograniczonej sieci przestrzennej jakąś jej część skończoną.

Rzecz jest sama przez się jasna i zrozumiała, że najnaturalniejszymi i najwłaściwszymi ograniczeniami sieci przestrzennej są płaszczyzny siatkowe. Czyli: wyosobnienie wielościanów, ograniczo-



nych płaszczyznami siatkowemi, jest najnaturalniejszym i najprostszym sposobem wydzielenia z nieograniczonej sieci przestrzennej jej uczestków skończonych.

Wielościenność tych wyodrębnianych przez nas uczestków sieci przestrzennej jest wynikiem układu jej węzłów, a układem tym wyraziliśmy jednorodność i anizotropię kryształu. W takim razie jednorodność i anizotropia kryształu powinna pociągać za sobą wielościenny kształt jego, tak samo, jak jednostajność i różnokierunkowość sieci przestrzennej pociąga za sobą wielościanny, jako najprostsze ograniczenia jej części skończonych.

A więc, gdy wyraziliśmy siecią przestrzenną własności fizyczne kryształu, to pierwszym następstwem tego jest wniosek, że najprostszymi i najnaturalniejszymi ograniczeniami ciała jednorodnego różnokierunkowego są płaskie ściany. W takim razie wnosimy dalej, że wielościennność kryształu nie jest jakąś cechą od własności fizycznych niezależną i odrębną, ale że jest to tylko zewnętrzny wyraz jednorodności i różnokierunkowości.

Innemi słowy: jednorodne ciało stałe, wydzielając się z cieczy, samorzutnie przybiera kształty wielościannów geometrycznych jako bezpośredni wynik swej jednorodności.

**§ 5. Wyraz graficzny ścian i krawędzi kryształu.** Wyrazem graficznym ściany kryształu jest płaszczyzna siatkowa, czyli sieć płaska punktów analogicznych, a wyrazem graficznym krawędzi kryształu jest szereg prostolinijny równoodległych punktów analogicznych.

Kryształ otoczony jest ścianami, które, przecinając się, tworzą krawędzi.

Ciało jednorodne różnokierunkowe, pojęte w sposób nieograniczony, wyraziliśmy graficznie nieograniczoną siecią przestrzenną. Bezpośredniem tego następstwem był wniosek, że tak, jak uczestki sieci przestrzennej ograniczają się płaszczyznami siatkowemi, tak kryształ jest ograniczony ścianami. Czyli: czem w sieci przestrzennej są sieci płaskie i szeregi węzłów, tem w kryształach są ściany i krawędzi.

Innemi słowy: jeżeli część sieci przestrzennej jest graficznym wyrazem kryształu, to każda płaszczyzna siatkowa tej sieci przestrzennej jest graficznym wyrazem jakiejś ściany, na tym kryształach



możliwej, a każdy szereg tej sieci jest wyrazem graficznym możliwej tego kryształu krawędzi. Czyli w ogóle uznajemy, że wyrazem graficznym ściany kryształu jest sieć płaska, a wyrazem graficznym krawędzi kryształu jest prostoliniowy szereg równoodległych punktów analogicznych.

### § 6. Związek geometryczny ścian i krawędzi kryształu.

Jak płaszczyznę siatkową wyznaczają dwa szeregi, a szereg wyznacza się dwiema płaszczyznami siatkowymi, tak ścianę kryształu wyznaczają dwie krawędzi, a krawędź wyznacza się dwiema ścianami.

Doszliśmy do wniosku, że najwłaściwszymi i najprostszymi ograniczeniami sieci przestrzennej są sieci płaskie. A więc w następstwie powinniśmy rozważyć, jak mamy postąpić, gdy pragniemy wydzielić z nieograniczonej sieci przestrzennej jej część i ograniczyć ją najmniejszą ilością płaszczyzn siatkowych. W takim razie wypada nasamprzód rozwiązać zagadnienie, jak przeprowadzają się płaszczyzny siatkowe w danej sieci przestrzennej.

Przypomnijmy zatem konstrukcję rysunku 5-go. Wykreśliwszy dwa szeregi:  $AA_I$  i  $AA_{II}$ , tem samem wykreśliłmy sieć płaską. Bowiem punkt  $A$  jest przecięciem się szeregu  $AA_I$  z szeregiem  $AA_{II}$  pod kątem  $A_I A A_{II}$ . Zatem analogia wszystkich punktów analogicznych na obu szeregach  $AA_I$  i  $AA_{II}$  musi być wyrażona w ten sam sposób, t. j. przez każdy z tych punktów musimy przeprowadzić dwa szeregi, tworzące kąt, równy kątowi  $A_I A A_{II}$ .

Oczywista, że otrzymamy tę samą sieć płaską, jeżeli zamiast szeregów  $AA_I$  i  $AA_{II}$  pod kątem  $A_I A A_{II}$ , wykreślimy którekolwiek dwa inne przecinające się szeregi tej sieci, i przez węzły jednego przeprowadzimy pod ich kątem szeregi równoległe i analogiczne drugiemu, n. p. gdy założymy szereg  $E$  i  $F$  pod ich kątem.

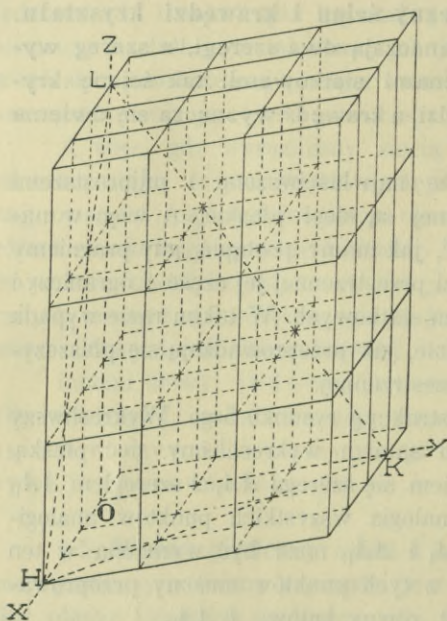
Od płaszczyzny siatkowej do sieci przestrzennej przeszliśmy w ten sposób, że przez równoodległe węzły szeregu dowolnego przeprowadziliśmy równoległe analogiczne sieci płaskie.

Stąd oczywista, że gdy w sieci przestrzennej wybierzemy w którymkolwiek bądź kierunku dwa przecinające się szeregi, to płaszczyzna, przeprowadzona przez te dwa szeregi, będzie płaszczyzną siatkową.

Również jest oczywiste, że gdy chcemy wytknąć szereg punktów analogicznych, to otrzymamy go przez przecięcie się dwu nierównoodległych płaszczyzn siatkowych.



Słowem, leży to w istocie sieci przestrzennej, że przecięcie się każdych dwu nierównoległych sieci płaskich jest szeregiem równoodległych punktów analogicznych, a każda płaszczyzna, przeprowadzona przez którekolwiek dwa nierównoległe szeregi, lub do obu tych szeregów równoległa, jest płaszczyzną siatkową.



Rys. 7. Wyodrębnienie czworościanu z sieci przestrzennej.

W tym celu, w sieci przestrzennej (rys. 7) obierzmy trzy szeregi dowolne  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , nie leżące na jednej płaszczyźnie, które wychodzą z jednego dowolnie wybranego węzła  $O$ . Te trzy szeregi, parami, wyznaczają trzy płaszczyzny siatkowe: para szeregów  $OX/OY$  wyznacza płaszczyznę  $XOY$ , para szeregów  $OX/OZ$  wyznacza płaszczyznę  $XOZ$ , para szeregów  $OY/OZ$  wyznacza płaszczyznę  $YOZ$ . Z rys. 7 widoczna, że wszystkie te trzy płaszczyzny  $XOY$ ,  $XOZ$ ,  $YOZ$ , są siatkowe.

Dalej, na którymkolwiek z tych trzech szeregów, n. p. na szeregu  $OX$ , wybierzmy dowolny węzeł  $H$ . Poczem weźmy dwa dowolne szeregi, przecinające się w tym węźle  $H$ , lecz takie, aby jeden przecinał się prócz tego z szeregiem  $OY$ , a drugi z szeregiem  $OZ$ . Niechaj takimi szeregami będą szeregi  $HK$  i  $HL$ . Te dwa szeregi,  $HK$  i  $HL$ , wyznaczają płaszczyznę siatkową  $HKL$ . Że ona jest istotnie siatkowa, to jest widoczne z rys. 8-go.

Mamy więc sposób przeprowadzenia dowolnej lub żądanej płaszczyzny siatkowej w danej sieci przestrzennej.

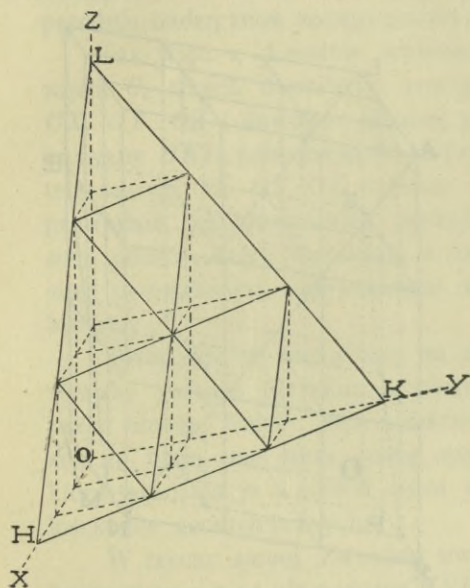
Możemy zatem przystąpić do rozwiązania zagadnienia, postawionego na początku paragrafu niniejszego: mamy wydzielić z sieci przestrzennej część, ograniczoną najmniejszą ilością płaszczyzn siatkowych.

W tym celu, w sieci przestrzennej (rys. 7) obierzmy trzy szeregi dowolne  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , nie leżące na jednej płaszczyźnie, które wychodzą z jednego dowolnie wybranego węzła  $O$ . Te trzy szeregi, parami, wyznaczają trzy płaszczyzny siatkowe: para szeregów  $OX/OY$  wyznacza

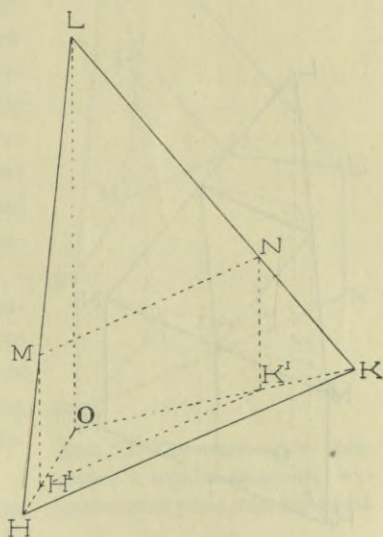


Płaszczyzna siatkowa  $HKL$  przecina się ze wszystkimi trzema sieciami płaskimi, wytkniętymi poprzednio, t. j. z  $XOY$ ,  $XOZ$  i  $YOZ$ . Innymi słowy, cztery płaszczyzny siatkowe:  $XOY$ ,  $XOZ$ ,  $YOZ$  i  $HKL$  tworzą czworościan, t. j. bryłę, ograniczoną najmniejszą ilością płaszczyzn.

Tak więc rozwiązaliśmy zagadnienie: z danej sieci przestrzennej mamy wydzielić wielościan, zamknięty najmniejszą ilością płaszczyzn.



Rys. 8. Czworościan, wydrebniony z sieci przestrzennej płaszczyznami siatkowymi.



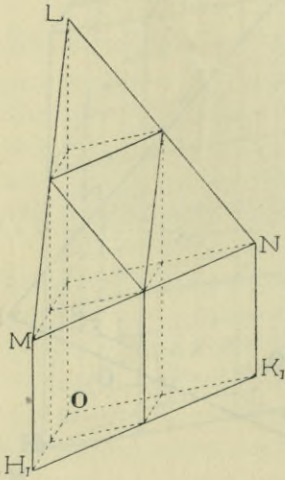
Rys. 9. Schemat powstawania pięciościanu.

szczyzn siatkowych. Rozwiązaliśmy to zagadnienie przez wybór dowolny trzech nierównoległych i nieleżących na jednej płaszczyźnie szeregów, oraz przez przecięcie wszystkich tych trzech szeregów dowolnie obraną płaszczyzną siatkową.

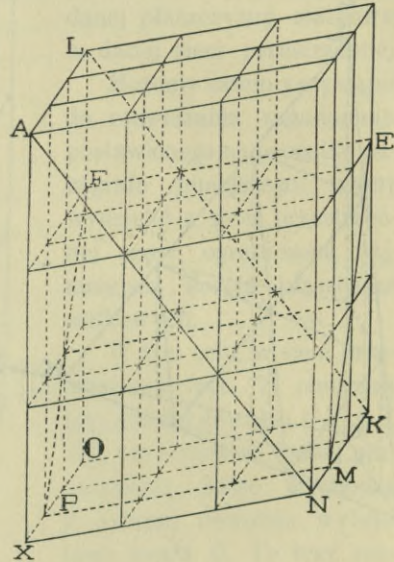
Następnie powinniśmy przejść od czworościanu do brył bardziej złożonych, t. j. ograniczonych ilością płaszczyzn siatkowych większą od czterech. Najprościej sprawić to możemy ścięciem krawędzi czworościanu jakąś nową siecią płaską. Taką płaszczyzną siatkową wytkną nam którekolwiek dwa szeregi z pomiędzy szeregów  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ ,  $HK$ ,  $HL$ ,  $KL$ . Oczywiście, że możemy połączyć te szeregi w trzy pary, a każda para wytknie nam nową płaszczyznę siatkową.

Mianowicie: dwa szeregi —  $OL$  i  $HK$  — wyznaczają równoległą do obu nich płaszczyznę  $H_1K_1MN$ , która jest wykreślona w rys. 9. Rys. 10 uwidacznia, że płaszczyzna ta jest również siatkowa.

Tak samo siecią płaską jest płaszczyzna  $ALNK$  (rys. 11), wytknięta przez parę szeregów  $OX/LK$ , a także jest płaszczyzną siatkową płaszczyzna  $EFPM$  (rys. 11), równoległa do szeregu  $OK$  (czyli  $OY$  na rys. 7 i 8) i do szeregu  $HL$ .



Rys. 10. Pięciościan, wydzielony z sieci przestrzennej płaszczyznami siatkowymi.



Rys. 11. Dwie pozostałe płaszczyzny siatkowe, wyznaczone krawędziami czworoscianu rys. 8.

Wytknęliśmy zatem trzy nowe płaszczyzny siatkowe. Są to wszystkie płaszczyzny, które mogą być wytknięte przez wszystkie krawędzie czworoscianu pierwiastkowego  $OHKL$  rys. 7 i 8. Temi płaszczyznami możemy teraz pościnać kąty krawędziowe czworoscianu  $OHKL$  i otrzymamy bryłę, w ściany obfitszą. To jest zrobione na rysunku 12-stym. Na tym rysunku ściany  $OHK$ ,  $OHFAL$ ,  $OKEL$  i  $MNP$  są to ściany czworoscianu pierwiastkowego, a ściana  $HKENMF$  odpowiada płaszczyźnie  $H_1K_1MN$  rysunku 9-go i 10-go, ściana  $ALENP$  jest to płaszczyzna  $ALKN$  rysunku 11-go, ściana zaś  $APMF$  jest równoległa do płaszczyzny  $EFPM$  rysunku 11-go.



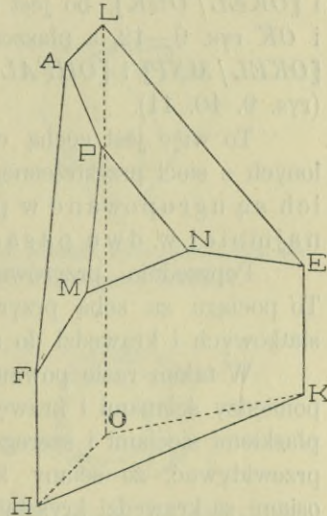
Na wielościanie rys. 12 mamy nowe krawędzie:  $AP$ ,  $EN$  i  $FM$ . Jako przecięcia się płaszczyzn siatkowych, nie są to dowolne proste, tylko są to również kierunki szeregów sieci przestrzennej, podobnie jak krawędzi czworościanu pierwiastkowego. Każdy z tych nowych szeregów z którymkolwiek z szeregów poprzednich, t. j. z którąkolwiek krawędzią czworościanu pierwiastkowego, wytyka kierunek nowej sieci płaskiej. Te nowe sieci, przecinając się z sieciami, wytkniętymi poprzednio, dadzą znów szeregi nowe i t. d.

Tak więc z dowolnie wybranego węzła  $O$ , trzech dowolnych szeregów  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  i dowolnie obranej płaszczyzny  $HKL$ , przecinającej wszystkie trzy szeregi  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , możemy wykonać jaknajrozmaitsze pochylone sieci płaskie, które wydzielają z danej sieci przestrzennej najrozmaitsze wielościany.

Wszystkie te wielościany są zbudowane jednym sposobem, opisanym przed chwilą. Należy więc spodziewać się, że mają one jakąś cechę wspólną, która wyróżnia je z pośród ogółu wielościanów geometrycznych.

W rzeczy samej. Zwróćmy uwagę bacniejszą n. p. na płaszczyznę  $MNH_1K_1$  rysunku 9-go i 10-go. Ona jest równoległa do prostej  $HK$  (rys. 9). A ponieważ ta prosta jest przecięciem się płaszczyzn  $OHK$  i  $HKL$  (rys. 9), więc wszystkie te trzy płaszczyzny  $LMN$ ,  $MNH_1K_1$  i  $OH_1K_1$  (rys. 9 i 10) są równoległe do prostej  $HK$ . Grupę płaszczyzn, równoległych do jednej prostej, nazywamy pasem, a prostą, do której wszystkie płaszczyzny pasa są równoległe, nazywamy osią pasa. W danym więc razie prosta  $HK$ , lub każda do niej równoległa (n. p. prosta  $H_1K_1$ , lub  $MN$  rys. 10) jest osią pasa płaszczyzn  $[OH_1K_1/H_1K_1MN/LMN]$  na rys. 10-ym.

Ale płaszczyzna w mowie będąca —  $H_1K_1MN$  — prócz tego jest równoległa także do prostej  $OL$ . A że prosta  $OL$  jest przecięciem się płaszczyzn  $H_1OLM$  i  $K_1OLN$ , więc mamy tu drugi pas płaszczyzn:  $[H_1K_1MN/H_1MLO/LNK_1O]$ , którego osią jest prosta  $OL$ .



Rys. 12. Czworościan w połączeniu z trzema ścianami, wyznaczonymi przez jego krawędzie.



A zatem płaszczyzna  $H_1K_1MN$  leży w dwu pasach. Czasami używa się też wyrażenia, że płaszczyzna leży na przecięciu się dwu pasów, lub na ich skrzyżowaniu.

Rzecz jasna, że każda z dwu pozostałych płaszczyzn, wyprowadzonych przez nas z czworościanu  $OHKL$ , ma te same właściwości: płaszczyzna  $APMF$  (rys. 12) leży w pasach  $[OHFAL/MPN]$  i  $[OKEL/OHK]$ , bo jest równoległa do prostej  $HL$  rysunku 9-go i  $OK$  rys. 9—12, a płaszczyzna  $ALENP$  (rys. 12) leży w pasach  $[OKEL/MNP]$  i  $[OHFAL/OHK]$  jako równoległa do osi  $OH$  i  $KL$  (rys. 9. 10. 11).

To więc jest cechą charakterystyczną wielościanów, wydzielonych z sieci przestrzennej płaszczyznami siatkowymi, że ściany ich są ugrupowane w pasy, i że każda ściana leży przynajmniej w dwu pasach.

Poprzednio przyrównaliśmy kryształ do sieci przestrzennej. To pociąga za sobą przyrównanie ścian kryształu do płaszczyzn siatkowych i krawędzi do szeregów sieci przestrzennej.

W takim razie powinniśmy oczekiwać takiego samego związku pomiędzy ścianami i krawędziami kryształu, jaki zachodzi pomiędzy płaskimi sieciami i szeregami punktów analogicznych, t. j. musimy przewidywać, że ściany kryształu grupują się w pasy, których osiami są krawędzi kryształu, i że każda ściana kryształu leży przynajmniej w dwu pasach.

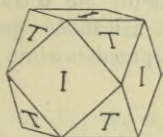
Innymi słowy, jak w sieci przestrzennej przecięcie się każdych dwu płaszczyzn siatkowych jest szeregiem węzłów sieci, tak na kryształach przecięcie się każdych dwu ścian winno być kierunkiem krawędzi, możliwej na tym kryształach; jak w sieci przestrzennej każda płaszczyzna, wyznaczona dwoma przecinającymi się szeregami, jest płaszczyzną siatkową, tak na kryształach każde dwie nierównoległe krawędzi wyznaczać winny położenie ściany, możliwej na tym kryształach.

Wobec tego, że omawiana obecnie zależność ścian i krawędzi jest sprawą wagi pierwszorzędnej, więc dla ugruntowania jej i najdokładniejszego zrozumienia nie od rzeczy będzie rozpatrzenie przykładowego następującego.

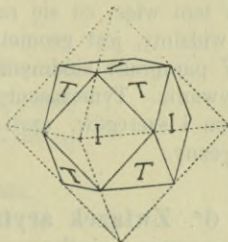
Wyobraźmy sobie naroże czworościenne, takie n. p., jakie na wielu kryształach galenitu  $PbS$  (rys. 13) tworzą pary ścian  $T$  z parami ścian  $I$ . Ściany  $T$ , rozpostarte do wzajemnego się przecięcia, tworzą proste, uwidocznione liniami kropkowanymi na rys. 14. Ściany  $I$ , w razie rozpostarcia do spotkania się, dają proste, oznaczone liniami przerywanymi na rys. 15. Związek pomiędzy ścianami i krawędziami kryształu polega nasamprzód na tem, że proste  $T/T$  rysunku 14-go,



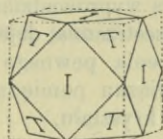
lub  $I/I$  rysunku 15-go, są to krawędzie, możliwe na wielościanie rys. 13, t. j. że w zmienionych warunkach wzrostu tego kryształu ściany  $T$  mogłyby odsunąć się od środka bryły przez przybytek na nich substancji aż do pojawienia się krawędzi  $I/I$ , lub odwrotnie, przez przyrost ścian  $I$  mogłyby się zjawić krawędzi  $T/T$ . A następnie, w mowie będąca obecnie zależność pomiędzy ścianami i krawędziami kryształu wyraża się w tem jeszcze, że gdy w zmienio-



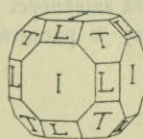
Rys. 13. Wielościan z narożami czworosściennymi.



Rys. 14. Kształt wielościanu rys. 13 po rozpostarcu ścian  $T$ .



Rys. 15. Kształt wielościanu rys. 13 po rozpostarcu ścian  $I$ .



Rys. 16. Wielościan rys. 13 po zjawieniu się na nim ścian  $L$ , wyznaczonych krawędziami  $T/T$  i  $I/I$ .

nych warunkach wzrostu kryształu rys. 13, zamiast naroży  $TT/II$  zjawiają się ściany  $L$  (rys. 16), to będą one równoległe do obu kierunków krawędzi możliwych:  $TT$  i  $II$ , t. j. będą one leżały w obu pasach: w pasie  $ILLI$  i w pasie  $TLT$ , czyli będą one miały jedną parę krawędzi równoległych do możliwej krawędzi  $T/T$  rysunku 14-go i drugą parę krawędzi, równoległą do możliwej krawędzi  $I/I$  rysunku 15-go.

To więc znaczy, gdy mówimy, że każde dwie nierównoległe ściany wyznaczają kierunek możliwej na kryształach krawędzi, i że każde dwie nierównoległe krawędzie kryształu wyznaczają położenie ściany, zdolnej do zjawienia się na nim.

Innymi słowy, jeżeli postąpimy tak, jak poczynaliśmy sobie w konstrukcyi rys. 7 i 8, t. j. jeżeli wybierzemy na kryształach takie cztery ściany, że po ich rozpostarcu do przecięcia się wzajemnego utworzą one czworoscian, to wszystkie pozostałe ściany tego kryształu dadzą się wyprowadzić z tego czworoscianu w sposób podany w konstrukcyi rys. 9, 10, 11 i 12, o ile wykreślenia te będą doprowadzone dostatecznie daleko. Rozumie się, że ta zależność nie tylko daje możliwość wyprowadzenia wszystkich ścian, istniejących na kryształach danym, ale pozwala nawet przewidzieć wszystkie ściany, które mogłyby się na nim pojawić.

Jednym słowem, dochodzimy do przeświadczenia, że ciało jednorodne, wydzielając się z cieczy, musi przybierać samorzutnie postaci wielościenne, ograniczone ścianami, które winny tworzyć pasy, i które winny być związane zależnością pasową. A zależność ta polega na tem, że każda ściana leży na przecięciu się dwu pasów, t. j. że położenie jej wyznaczają kierunki dwu nierównoległych krawędzi. Te zaś krawędzi wytknięte są dwiema parami przecinających się ścian.

W tem więc, co się rzekło, przewidujemy prawo pasów. Prawo to, jak widzimy, jest geometrycznym wyrazem prawa jednorodności.

W paragrafie siódmym i dalszych przekonamy się o trafności tego przewidywania. Tymczasem jeszcze omówioną zależność geometryczną płaszczyzn i szeregów, czyli ścian i krawędzi, przedstawimy w sposób arytmetyczny.

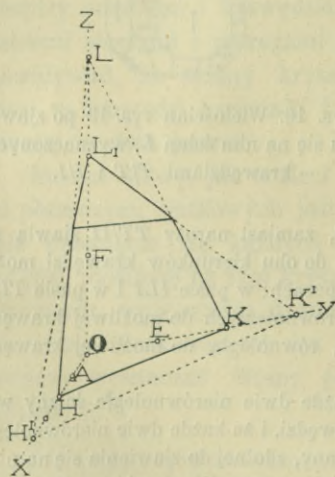
§ 6<sup>a</sup>. **Związek arytmetyczny ścian i krawędzi kryształu.**  
Jak płaszczyzny siatkowe odcinają od każdego szeregu sieci przestrzennej odcinki wymierne, tak ściany kryształu odcinają odcinki wymierne od każdej jego krawędzi.

Oprócz zależności geometrycznej, którą wyprowadziliśmy z sieci przestrzennej w paragrafie poprzednim, sieć przestrzenna daje nam możność przewidzenia pewnego arytmetycznego związku pomiędzy ścianami i krawędziami kryształu.

Wybermy w sieci przestrzennej jeden dowolny węzeł  $O$  (rys. 17) i trzy którekolwiek przecinające się w nim szeregi  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , nie leżące na jednej płaszczyźnie. Następnie, przeprowadźmy dwie płaszczyzny siatkowe  $H_1K_1L_1$  i  $HKL$ , przecinające się z szeregami  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  w różnych stosunkach odcinków  $OH_1:OK_1:OL_1$  i  $OH:OK:OL$ .

Dowiedliśmy poprzednio, że płaszczyzna siatkowa wyznacza się dwoma nierównoległymi szeregami. Niechaj więc płaszczyznę  $H_1K_1L_1$  wyznaczają szeregi:  $H_1K_1$  i  $H_1L_1$ , a płaszczyznę  $HKL$  szeregi:  $HK$  i  $HL$ . Innymi słowy, jeżeli płaszczyzny  $H_1K_1L_1$  i  $HKL$  są siatkowe, to muszą one przecinać szeregi  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , w punktach analogicznych, czyli w węzłach sieci. W takim razie odcinki, odcięte płaszczyznami  $H_1K_1L_1$  i  $HKL$

od szeregów  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , są wielokrotnościami odcinków  $OA$ ,  $OE$  i  $OF$ .



Rys. 17. Odcinki, odcinane różnymi płaszczyznami siatkowymi od jednego rzędu sieci przestrzennej.



Napiszmy, że

$$OA = a$$

$$OE = b$$

$$OF = c.$$

W takim razie możemy napisać, że

$$OH_I = m_1 a \quad OH = ma$$

$$OK_I = n_1 b \quad OK = nb$$

$$OL_I = p_1 c \quad OL = pc$$

gdzie  $m_1, n_1, p_1, m, n, p$ , są to liczby całe.

Stąd wynika, że stosunki

$$OH_I : OH$$

$$OK_I : OK$$

$$OL_I : OL$$

są wymierne, jako ilorazy liczb całych, bowiem

$$\frac{OH_I}{OH} = \frac{m_1}{m}$$

$$\frac{OK_I}{OK} = \frac{n_1}{n}$$

$$\frac{OL_I}{OL} = \frac{p_1}{p}$$

W rozumowaniu tem założyliśmy dowolne trzy szeregi i dowolne przecinające się z nimi płaszczyzny siatkowe, a więc wyniki nasze stosują się do każdego szeregu i do wszystkich płaszczyzn retykularnych jednej sieci przestrzennej. Możemy więc powiedzieć, że wszystkie płaszczyzny siatkowe jednej sieci przestrzennej od każdego jej szeregu odcinają odcinki wymierne.

Gdy w twierdzeniu tem wyrazy »sieć przestrzenna«, »płaszczyzna siatkowa« i »szereg« zamienimy kolejno na wyrazy »kryształ«, »ściana« i »krawędź«, to otrzymamy prawo odcinków wymiernych: wszystkie ściany jednego kryształu od każdej jego krawędzi odcinają odcinki wymierne.

Prawo to, również jak prawo pasów, potwierdza się na wszystkich kryształach dotychczas poznanych.

Prawo pasów jest geometrycznym wyrazem prawa jednorodności, a prawo odcinków wymiernych jest prawem jednorodności następstwem arytmetycznym.

§ 6<sup>b</sup>. Wyznaczniki. Położenie każdej sieci płaskiej i każdej ściany kryształu można wyrazić stosunkiem trzech liczb całych.

Z wymierności odcinków należy wysnuć jeszcze pewien wniosek. Dowiedliśmy, że

$$\frac{OH_1}{OH} = \frac{m_1}{m}$$

$$\frac{OK_1}{OK} = \frac{n_1}{n}$$

$$\frac{OL_1}{OL} = \frac{p_1}{p}$$

gdzie  $m_1, n_1, p_1, m, n, p$ , są to liczby całe.

Weźmy stosunek tych ilorazów. Otrzymamy:

$$\frac{OH_1}{OH} : \frac{OK_1}{OK} : \frac{OL_1}{OL} = \frac{m_1}{m} : \frac{n_1}{n} : \frac{p_1}{p}$$

Stosunek może być pomnożony przez jakikolwiek mnożnik spólny i wartość stosunku przez to nie ulega zmianie. Pomnożmy więc stosunek

$$\frac{m_1}{m} : \frac{n_1}{n} : \frac{p_1}{p}$$

przez iloczyn  $mnp$ . Otrzymamy:

$$\left(\frac{m_1}{m} : \frac{n_1}{n} : \frac{p_1}{p}\right) mnp = m_1 np : n_1 mp : p_1 mn$$

A że liczby  $m_1, n_1, p_1, m, n, p$ , są całe, więc iloczyny ich są również całe. Możemy przeto napisać, że

$$\frac{OH_1}{OH} : \frac{OK_1}{OK} : \frac{OL_1}{OL} = h : k : l$$

gdzie  $h, k, l$ , są to liczby całe.

Innymi słowy, gdy dwie płaszczyzny siatkowe —  $H_1K_1L_1$  i  $HKL$  — od trzech szeregów, nie leżących na jednej płaszczyźnie i przecinających się w jednym węźle, odcinają sześć odcinków

$$OH_1, OK_1, OL_1, OH, OK, OL,$$

to stosunek ilorazów

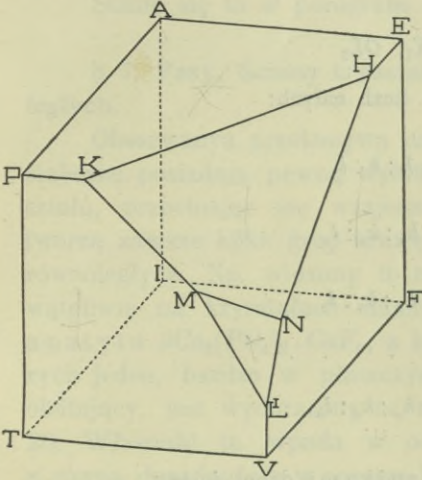
$$\frac{OH_1}{OH} : \frac{OK_1}{OK} : \frac{OL_1}{OL}$$

wyraża się zawsze stosunkiem trzech liczb całych.

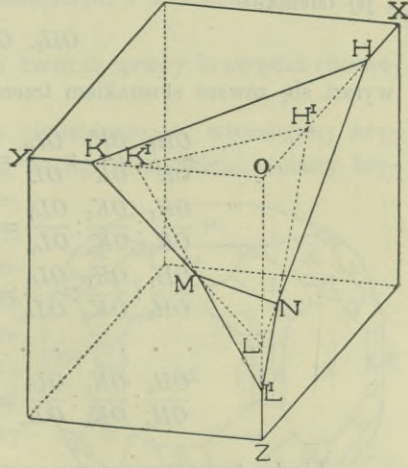


Nie robiliśmy żadnych zastrzeżeń w tem rozumowaniu. A więc, twierdzenie, wyrażone przed chwilą, jest słuszne względem każdego trzech szeregów i każdego dwu płaszczyzn siatkowych jednej sieci przestrzennej.

Zastosujmy teraz to rozumowanie do kryształu. Niechaj tym kryształem będzie np. wielościan, wyobrażony na rys. 18. Rozpościerajmy jego ściany  $APKHE$ ,  $PKML^1VT$ ,  $EFVL^1NH$ ,  $MNL^1$  i  $KHMN$  do wzajemnego się przecięcia, tak jak to jest do widzenia na rys. 19. Nazwijmy



Rys. 18. Wielościan ze ścianami, odcinającymi różne odcinki od jednej jego krawędzi.



Rys. 19. Wielościan rys. 18 po rozpościarcu jego ścian do przecięcia się wzajemnego.

kolejno krawędziami  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  rys. 19 krawędzi  $HE$ ,  $KP$ ,  $L^1V$  rys. 18. Przenieśmy twierdzenie o stosunku liczb całych na kryształ. Otrzymamy co następuje: gdy dwie ściany kryształu  $H^1K^1L^1$  i  $HKL$  (rys. 19) od trzech jego krawędzi  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , nie przylegających do jednej płaszczyzny i przecinających się w jednym punkcie  $O$ , odcinają sześć odcinków

$$OH_1, OK_1, OL_1, OH, OK, OL,$$

to stosunek ilorazów

$$\frac{OH_1}{OH} : \frac{OK_1}{OK} : \frac{OL_1}{OL}$$

wyraża się zawsze stosunkiem liczb całych.

To prawo jest słuszne względem każdej pary ścian i każdego trzech krawędzi kryształu. Jeżeli więc wszystkie ściany danego kryształu

$$HKL, H_aK_aL_a, H_bK_bL_b, \dots, H_nK_nL_n$$

odniesiemy do jednej jego ściany

$$H_1 K_1 L_1$$

to nachylenie każdej ściany tego kryształu do którejkolwiek z nich, wybranych na ścianę

$$H_1 K_1 L_1$$

i jej odcinków

$$OH_1, OK_1, OL_1$$

wyrazi się zawsze stosunkiem trzech liczb całych:

$$\frac{OH_1}{OH} : \frac{OK_1}{OK} : \frac{OL_1}{OL} = h : k : l$$

$$\frac{OH_1}{OH_a} : \frac{OK_1}{OK_a} : \frac{OL_1}{OL_a} = h_a : k_a : l_a$$

$$\frac{OH_1}{OH_b} : \frac{OK_1}{OK_b} : \frac{OL_1}{OL_b} = h_b : k_b : l_b$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{OH_1}{OH_n} : \frac{OK_1}{OK_n} : \frac{OL_1}{OL_n} = h_n : k_n : l_n$$

Liczby te nazywamy wyznacznikami danej ściany.

Twierdzenie omawiane, t. zw. prawo wyznaczników całych, jest tylko odmiennem wyrażeniem prawa odcinków wymiernych.

\* Zanim pójdziemy dalej, streśmy w kilku słowach bieg naszego rozumowania dotychczasowego.

Z łupliwości, ze spękań i z figur wytrawionych wysnuiliśmy pojęcie fizycznej jednorodności kryształu.

Potem graficznie wyraziliśmy ciało jednorodne siecią przestrzenną.

Logicznem następstwem przyjęcia tego wyrazu graficznego było przyrównanie krawędzi kryształu do szeregów sieci przestrzennej, i ścian kryształu do płaszczyzn siatkowych, oraz przypisanie ścianom i krawędziom kryształu takich samych zależności geometrycznych i arytmetycznych, jakie charakteryzują związek szeregów z sieciami płaskimi.

To przyrównanie ścian do sieci płaskich i krawędzi do szeregów sieci przestrzennych, oraz przypisanie im jednakowych własności, doprowadziło nas do przewidywania, że ściany kryształu mu-



szą być związane zależnością pasową i że muszą one odcinać od krawędzi odcinki wymierne, a więc, że mogą być wyrażone wyznacznikami całymi.

Te wyniki, wysnute z rozbioru sieci przestrzennej, winniśmy stwierdzić empirycznie, t. j. sprawdzić słuszność ich przez obserwację kryształów.

Stanie się to w paragrafie następnym i w dalszych\*.

### § 7. Pasy. Ściany kryształu tworzą grupy krawędzi równoległych.

Obserwacja przekonywa nas nieustannie, że wielościany kryształiczne posiadają pewną wybitną cechę. Mianowicie: ściany kryształu, przecinając się wzajemnie, tworzą zawsze kilka grup krawędzi równoległych. Np. widzimy to niewątpliwie na kryształach minerału apatytu  $3Ca_3(PO_4)_2 \cdot CaF_2$ , z których jeden, bardzo w płaszczyzny obfitujący, jest wyobrażony na rys. 20. Własność ta wpada w oczy z równą dosadnością w pozorze każdego kryształu, posiadającego znaczniejszą ilość ścian.

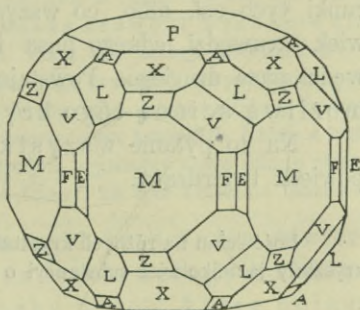
Już poprzednio, w paragrafie 6-tym na str. 13, wspomnieliśmy, że grupa ścian, przecinająca się w krawędziach równoległych, nazywa się pasem ścian, albo pasem krytalograficznym.

Oczywista, że płaszczyzny, tworzące przez przecięcie się wzajemne grup prostych równoległych, same są równoległe do jednej prostej, którą już powyżej nazwaliśmy osią pasa. Również jest oczywista, że oś pasa jest równoległa do każdej krawędzi tegoż pasa, czyli że oś pasa i wszystkie jego krawędzi mają jeden kierunek.

### § 8. Związek pasów i ścian. Każda ściana kryształu leży na skrzyżowaniu przynajmniej dwu pasów.

Wynika z poprzedniego, że ściana, przecinająca się z dwiema sąsiednimi ścianami tego samego pasa, ma jedną parę krawędzi równoległych.

Obserwacja dokładniejsza przekonywa, że ściany kryształu



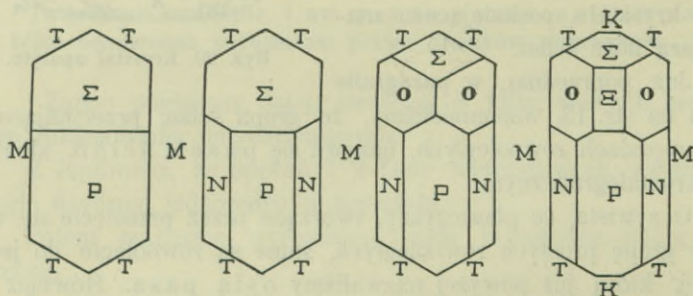
Rys. 20. Kryształ apatytu.

mają nie jedną, ale więcej par krawędzi równoległych. N. p. ściany  $Z$  kryształów apatytu (rys. 20) mają po dwie pary krawędzi równoległych, ściany  $V$  mają trzy pary, ściany  $M$  cztery pary i t. d. Przykładów takich jest mnogość niezliczona. A więc, na zasadzie całego zasobu faktów, stanowiących materiał kryształografii opisowej, stwierdzamy empirycznie, że każda ściana kryształu leży przynajmniej w dwu pasach się przecinających.

Kierunek każdego pasa wytknięty jest przez jego oś, albo, co na jedno wychodzi, przez którąkolwiek jego krawędź. Ponieważ dwie proste nierównoległe wyznaczają położenie płaszczyzny równoległej do obu tych prostych, więc położenie ściany, leżącej w dwu pasach, t. j. równoległej do osi obu tych pasów, jest wyznaczone przez kierunki tych osi, albo, co wszystko jedno, przez kierunek którejkolwiek krawędzi jednego pasa i przez kierunek którejkolwiek krawędzi pasa drugiego. Powstaje pytanie, czy taka ściana jest możliwą ścianą tego kryształu?

Na to pytanie wszystkie obserwacje kryształów dają odpowiedź twierdzącą.

Ilość ścian na różnych kryształach jednej substancji bywa różna. Weźmy kryształy jakiegokolwiek substancji o różnej a znacznej ilości ścian, np. kryształy



Rys. 21—24. Rzut pionowy czterech kryształów skalenia.

skalenia potasowego  $K_2Al_2Si_8O_{16}$ . Ułóżmy je kolejno, tak jak na rys. 21—24, w miarę powiększającej się ilości ścian. Przekonamy się wtedy, że każda ściana, przybywająca na kryształ o większej ilości ścian, jest równoległa do dwu nierównoległych krawędzi, istniejących na kryształ poprzednim, który ma ilość ścian mniejszą: ściany  $N$  są równoległe do krawędzi  $P/M$  i  $P/T$ , ściany  $O$  są równoległe do krawędzi  $T/\Sigma$  i  $P/N$ , ściana  $E$  jest równoległa do krawędzi  $\Sigma/P$  i  $O/O$  i t. d.

Łączność tą stwierdza się powszechnie przez porównanie kryształów



jednej substancji o różnej ilości ścian; daje się ona również widzieć podczas wzrostu jednego kryształu.

Ilość ścian kryształu zależy od bardzo różnorodnych warunków wzrostu. Kryształy na początku swego wzrostu mają bardzo często ilość ścian nieznaną. W miarę powiększania się kryształu na miejscach jego krawędzi i naroży zjawiają się nowe ściany. Stwierdza się stale, że nowe płaszczyzny pojawiają się zawsze na skrzyżowaniu dwu lub nawet większej ilości pasów, t. j. że one są równoległe przynajmniej do dwu istniejących przedtem krawędzi nierównoległych.

Są substancje<sup>1</sup>, których kryształy, w pewnych warunkach i na pewnych stadiach ich wzrostu mają tylko cztery ściany, t. j. ich ilość najmniejszą, jaka może utworzyć bryłę zamkniętą. Te cztery ściany wystarczają zupełnie do obliczenia wszystkich ścian innych, które zjawiają się na tych kryształach, stepując ich krawędzi i naroża w innych warunkach wzrostu dalszego. Z niezmiernie bowiem obfitego zasobu faktów, zebranych przez wszystkich krytalografów, wynika stale, że każda ściana kryształu wyznacza się dwiema nierównoległymi krawędziami, a każda krawędź wyznacza się przez dwie nierównoległe ściany. Stąd, gdy mamy czworościan — bryłę w ściany najuboższą — to z trzech par jego krawędzi, nieprzylegających do jednej jego ściany, możemy wyprowadzić ścianę piątą, szóstą i siódmą. Te trzy ściany nowe, przecinając się między sobą, tworzą nowe krawędzi. Każda z tych nowych krawędzi wraz z którąkolwiek poprzednią wyznaczy nową ścianę ósmą, dziewiątą i t. d., i t. d., i wogóle wszystkie ściany, na tym kryształach możliwe.

Obserwacja wszystkich znanych kryształów utwierdza nas w przekonaniu, że wszystkie ściany każdego kryształu znajdują się w związku pasów, który polega na tem, że każda ściana jest spólna przynajmniej dwu pasom.

Tak więc obserwacja stwierdza trafność przewidywań, wysnutych z rozbioru własności sieci przestrzennej i z przyrównania sieci przestrzennej do kryształu.

### §. 9. Poszukiwanie arytmetycznego wyrazu związku pasów. Trzy zagadnienia.

Poznaliśmy geometryczną zależność ścian i krawędzi kryształu. Należy zatem znaleźć wyraz arytmetyczny tej zależności, czyli należy teraz wykonać rachunkiem to, co się odbywa na kryształach pod-

<sup>1</sup> Np. chloran sodu  $NaClO_3$ , bromian sodu  $NaBrO_3$ , azotan strontu  $Sr(NO_3)_2$ , azotan baru  $Ba(NO_3)_2$ , azotan ołowiu  $Pb(NO_3)_2$ , sulfoantymonian sodu  $Na_3SbS_4 \cdot 9H_2O$ , octan uranilowosodowy  $NaUO_2(C_2H_3O_2)_2$ , arsenian strontowosodowy  $NaSrAsO_4 \cdot 9H_2O$ , sfaleryt czyli przyrodzony siarczek cynku  $ZnS$ , diament  $C$ .

czas jego wzrostu. Mianowicie: z wzajemnego nachylenia najmniejszej ilości ścian kryształu, zamykających przestrzeń, to jest z czterech jego ścian, dowolnie wybranych, lecz takich, które po rozpostarciu tworzą czworościan, mamy obliczyć położenie ściany piątej, szóstej, i t. d. Aby tego dokonać, należy rozwiązać trzy zagadnienia.

**Zagadnienie pierwsze.** Jaki jest kierunek krawędzi, powstałej z przecięcia się dwu nierównoległych ścian, których położenie jest wiadome?

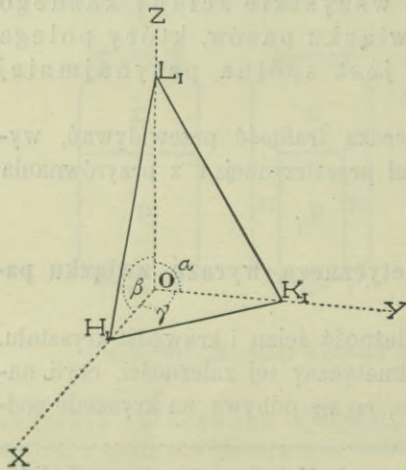
**Zagadnienie drugie.** Jakim warunkom czyni zadość każda ściana, równoległa do krawędzi, której kierunek jest wiadomy?

**Zagadnienie trzecie.** Jakie jest położenie ściany, równoległej do dwu przecinających się krawędzi, których kierunki są wiadome?

Lecz aby rozwiązać te zagadnienia, trzeba nasamprzód wyrazić położenie ściany znakiem liczbowym. Uskuteczmy to w sposób następujący.

§ 10. **Wyznaczniki.** Położenie ściany kryształu wyznacza się stosunkiem trzech liczb, zwanych jej wyznacznikami.

Mówiło się wyżej wielokrotnie, że cztery przecinające się i zamykające przestrzeń ściany kryształu przez związek pasów wyznaczają położenie wszystkich innych ścian, obecnych na tym kryształu, lub na nim możliwych. Ponieważ wszystkie ściany kryształu związane są spólną zależnością pasową, więc wszystko jedno, czy te cztery ściany będą ścianami, pierwiastkowo istniejącymi na kryształu, jak to się czasem zdarza u niektórych substancji i o czym wspominaliśmy poprzednio tylko dla ułatwienia wykładu, czy też będą to cztery dowolnie wybrane

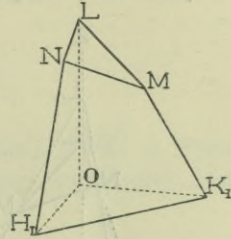


Rys. 25. Czworościan.

ściany z pośród wielu ścian, obecnych na kryształu. Stąd wynika, że czterem ścianom kryształu, po rozpostarciu do wzajemnego się



przecięcia tworzącym czworościan, możemy dać znaki dowolne, ale już wszystkie ściany pozostałe muszą otrzymać jakieś znaki pochodne od znaków, którymi oznaczone zostały ściany czworościanu. To znaczy, innymi słowy, że gdy chcemy wyrazić liczbami wzajemne nachylenie ścian kryształu, to nie możemy posługiwać się jakimś niezależnym od kryształu, dowolnie obranym, układem spórzędnych, lecz na ten układ musimy użyć ścian samego kryształu, mianowicie, musimy użyć tych ścian, które wybraliśmy na czworościan, tak często przez nas omawiany w wykładzie niniejszym.



Rys. 26. Pięciościan.

A więc, wyobraźmy sobie, że cztery dowolnie wybrane na kryształ ściany, po rozpostarciu ich do wzajemnego się przecięcia tworzą czworościan  $OH_I K_I L_I$  (rys. 25). Możemy również wyobrażać sobie, że kryształ w pewnym stanie wzrostu ma kształt tego czworościanu.

Jeden z czterech wierzchołków czworościanu  $OH_I K_I L_I$ , dowolnie wybrany, np.  $O$ , niech nosi nazwę początku. Przecinające się w nim krawędzie  $OH_I$ ,  $OK_I$ ,  $OL_I$ , oraz ich ciągi dalsze  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , nazwijmy krawędziami osiowymi. Krawędzi osiowe przylegają parami do trzech płaszczyzn osiowych:  $OK_I L_I$ ,  $OH_I L_I$ ,  $OH_I K_I$ , i na tych płaszczyznach tworzą kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Wielkość i pokrój czworościanu wyznacza się sześcioma danymi: długościami trzech odcinków  $OH_I$ ,  $OK_I$ ,  $OL_I$ , i wielkościami trzech kątów  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Rzecz jasna, że bezwzględne wymiary tego czworościanu — jego wielkość — to sprawa dla nas obojętna. Nas obchodzi jego postać, forma czyli pokrój. Dla określenia postaci tego czworościanu wystarcza wielkość kątów

$$\alpha, \beta, \gamma,$$

i stosunek trzech odcinków

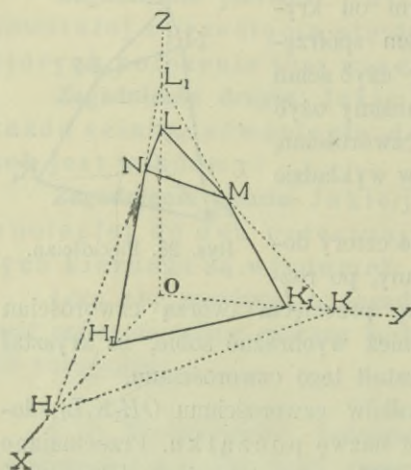
$$OH_I : OK_I : OL_I.$$

Następnie założmy, że którakolwiek z pozostałych ścian kryształu, rozpostarta dostatecznie, przecina się z płaszczyznami czworościanu  $OH_I K_I L_I$ , i tworzy płaszczyznę  $NLM$  rys. 26.

Jeżeli poprzednio wyobrażaliśmy sobie, że czworościan  $OH_I K_I L_I$  jest kształtem pierwotnym jakiegoś kryształu, to teraz możemy wyo-

brazać sobie, że podczas dalszego przyrostu tego kryształu powstała na nim ściana pięta  $LMN$ , lub do niej równoległa, która nadała mu kształt wielościanu  $OLMNH_1K_1$  rys. 26.

Ściana  $LMN$  do ścian czworościanu  $OH_1K_1L_1$  niechaj będzie nachylona tak, że po dostatecznym jej rozpostarciu niech przetnie ona ciąg dalszy wszystkich krawędzi osiowych  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  (rys. 27) i niechaj odetnie od nich odcinki  $OH$ ,  $OK$ ,  $OL$  (rys. 27).



Rys. 27. Pięćścian po rozpostarciu ścian do przecięcia się ich z każdą krawędzią osiową.

Nachylenie ściany  $LMN$  czyli  $HKL$  do czworościanu  $OH_1K_1L_1$  wyznacza się stosunkami jej odcinków do odcinków czworościanu, t. j. wartościami trzech ilorazów:

$$\frac{OH_1}{OH}, \frac{OK_1}{OK}, \frac{OL_1}{OL}.$$

Ale tak samo, jak obojętna jest dla nas wielkość bryły omawianej, tak samo obojętna jest odległość ściany  $LMN$  od początku  $O$ . Mamy więc na względzie nie tylko ścianę  $LMN$ , ale każdą do niej równoległą, bo wtedy wszystkie one, ścinając naroże  $L_1$  czworościanu  $OH_1K_1L_1$  w sposób, wynikający z ich nachylenia, jednakowo modyfikują kształt bryły. Innymi słowy, obojętna jest dla nas wartość bezwzględna ilorazów

$$\frac{OH_1}{OH}, \frac{OK_1}{OK}, \frac{OL_1}{OL},$$

natomiast winniśmy mieć na względzie stosunek tych ilorazów

$$\frac{OH_1}{OH} : \frac{OK_1}{OK} : \frac{OL_1}{OL}$$

bo on wyznacza położenie względem czworościanu  $OH_1K_1L_1$  zarówno ściany  $LMN$  czyli  $HKL$ , jak każdej płaszczyzny do niej równoległej.



Napiszmy, że

$$OH = OH_1 \cdot h$$

$$OK = OK_1 \cdot k$$

$$OL = OL_1 \cdot l$$

Wtedy

$$\frac{OH_1}{OH} : \frac{OK_1}{OK} : \frac{OL_1}{OL} = \frac{1}{h} : \frac{1}{k} : \frac{1}{l}$$

Liczby  $h, k, l$ , są to wyznaczniki ściany  $HKL$ , a wyraz  $(hkl)$  jest znakiem tej ściany, lub każdej do niej równoległej. Znak

$$(hkl)$$

jest skróconym sposobem pisania stosunku

$$\frac{1}{h} : \frac{1}{k} : \frac{1}{l}.$$

Tak więc każda ściana kryształu może być wyrażona trzema liczbami  $(hkl)$ . Liczby te wskazują orientację danej ściany względem pewnych czterech ścian kryształu, wybranych tak, aby po dostatecznym ich rozpostarciu przecięły się wzajemnie i utworzyły czworościan.

§ 11. Czworościan jednostkowy. Znaki ścian czworościanu jednostkowego są:  $(111)$ ,  $(100)$ ,  $(010)$  i  $(001)$ <sup>1</sup>.

Sposób wyznaczania ścian wyznacznikami, zastosowany do ściany  $HKL$ , zastosujemy obecnie do ściany czworościanu  $H_1K_1L_1$ . Możemy tego dokonać przez podstawienie jej odcinków

$$OH_1, OK_1, OL_1$$

pod wielkości

$$OH, OK, OL$$

w stosunku ilorazów

$$\frac{OH_1}{OH} : \frac{OK_1}{OK} : \frac{OL_1}{OL}$$

<sup>1</sup> Znaki te wymawiamy w sposób następujący:  $(111)$  — »jeden, jeden, jeden«,  $(100)$  — »jeden, zero, zero« i t. p. Tak samo czytamy wszystkie inne znaki ścian.

Otrzymamy wtedy dla płaszczyzny  $H_1K_1L_1$  wyraz

$$\frac{OH_1}{OH_1} \cdot \frac{OK_1}{OK_1} \cdot \frac{OL_1}{OL_1} = 1 : 1 : 1.$$

A więc, według sposobu wyznaczania ścian wyznacznikami, wyznaczniki ściany  $H_1K_1L_1$  są 1, 1, 1, a znakiem jej jest znak

$$(111)$$

Tę płaszczyznę nazywa się więc płaszczyzną jednostkową a czworościan  $OH_1K_1L_1$  nosi miano czworościanu jednostkowego.

Co zaś do ścian osiowych czworościanu jednostkowego, to nasamprzód przypomnijmy sobie, że znak ściany, jako stosunek trzech liczb, wyznacza położenie nie tylko jednej płaszczyzny, ale położenie każdej płaszczyzny do niej równoległej. A więc przesuniemy równoległe każdą płaszczyznę osiową tak, aby każda z nich przecinała krawędź osiową w wierzchołku czworościanu a nie w początku  $O$ , t. j. ściana  $L_1OK_1$  (rys. 25) niech będzie przesunięta równoległe samej sobie do punktu  $H_1$ , ściana  $L_1OH_1$  do punktu  $K_1$  i ściana  $H_1OK_1$  do punktu  $L_1$ . Ponieważ w pierwotnym ich położeniu każda z nich przecina jedną krawędź osiową, a do dwu pozostałych przylega, więc po przesunięciu ich równoległym każda odetnie od jednej krawędzi osiowej odcinek skończony, a do dwu drugich krawędzi osiowych będzie równoległa t. j. odetnie od nich odcinki nieskończone.

Gdy więc po tem przesunięciu równoległym ścian osiowych zastosujemy do nich ten sam sposób wyznaczania, który zastosowaliśmy do ściany  $HKL$ , t. j. gdy odcinki ścian osiowych, otrzymane po równoległym tych ścian przesunięciu, wstawimy na miejsce odcinków

$$OH, OK, OL$$

w wyrazie

$$\frac{OH_1}{OH} \cdot \frac{OK_1}{OK} \cdot \frac{OL_1}{OL} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{l}$$

to otrzymamy wyrazy następujące:

dla ściany  $K_1OL_1$

$$\frac{OH_1}{OH} \cdot \frac{OK_1}{\infty} \cdot \frac{OL_1}{\infty} = 1 : 0 : 0$$



dla ściany  $H_1OL_1$

$$\frac{OH_1}{\infty} : \frac{OK_1}{\infty} : \frac{OL_1}{\infty} = 0 : 1 : 0$$

dla ściany  $H_1OK_1$

$$\frac{OH_1}{\infty} : \frac{OK_1}{\infty} : \frac{OL_1}{\infty} = 0 : 0 : 1.$$

A więc znaki ścian osiowych i ścian do nich równoległych są

$$(100)$$

$$(010)$$

$$(001).$$

Innymi słowy, jeżeli jeden z czterech wierzchołków czworościanu jednostkowego obierzemy na początek, to znak ściany mu przeciwległej jest  $(111)$  i nazwą tej ściany: płaszczyzna jednostkowa albo ściana jednostkowa; wtedy ściany, przecinające się w tym wierzchołku, który nazwaliśmy początkiem, otrzymują znaki  $(100)$ ,  $(010)$  i  $(001)$ , a wszelka inna ściana wyraża się znakiem

$$(hkl)$$

gdzie

$$\frac{1}{h} : \frac{1}{k} : \frac{1}{l} = \frac{OH_1}{OH} : \frac{OK_1}{OK} : \frac{OL_1}{OL}.$$

Albo, jeżeli wybierzemy takie cztery ściany kryształu, że po rozpostarciu przetną się one w czterech punktach czyli w sześciu prostych, t. j. że utworzą czworościan, i jeżeli jednej z tych ścian nadamy dowolnie znak

$$(111)$$

a pozostałym trzem przypiszemy w takim razie znaki

$$(100), (010), (001),$$

to wtedy wszystkie inne ściany tego kryształu wyrażą się znakami

$$(hkl), (h_a k_a l_a), (h_b k_b l_b) \dots \dots (h_n k_n l_n)$$

gdzie

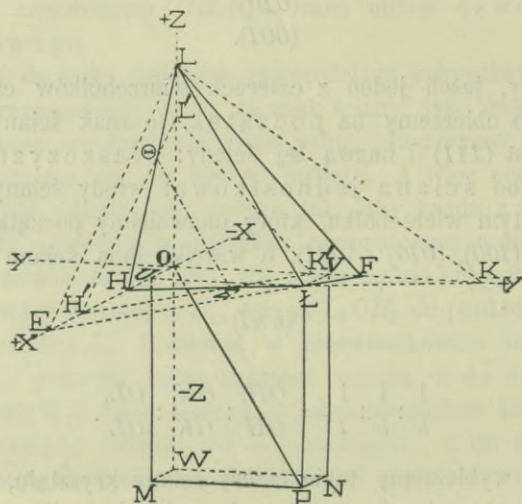
$$\frac{1}{h_n} : \frac{1}{k_n} : \frac{1}{l_n} = \frac{OH_1}{OH_n} : \frac{OK_1}{OK_n} : \frac{OL_1}{OL_n}.$$

Taka więc jest zasada liczbowego wyznaczania ścian kryształu.

Obecnie, gdy znamy już tę zasadę, i gdy, opierając się na niej, oznaczyliśmy liczbami ściany czworościanu jednostkowego, możemy przystąpić do rozwiązania zagadnienia pierwszego z trzech wymienionych w paragrafie dziewiątym.

§ 12. **Zagadnienie pierwsze. Wyznaczenie kierunku osi pasa. Jaki jest kierunek krawędzi, powstałej z przecięcia się dwu nierównoległych ścian, których położenie jest wiadome?**

Dany jest  $(hkl)$  — znak ściany  $HKL$  (rys. 28) i  $(h'k'l')$  — znak ściany  $H'K'L'$ , t. j. niech ściany  $HKL$  i  $H'K'L'$  od osi  $OX$ ,



Rys. 28. Kierunek prostej, powstałej od przecięcia się dwu płaszczyzn.

$OY$ ,  $OZ$  odcinają odcinki  $OH$ ,  $OK$ ,  $OL$ ,  $OH'$ ,  $OK'$ ,  $OL'$ , do których odcinki jakiegoś czworościanu jednostkowego  $OH_xK_xL_x$ , w danym razie dla nas obojętnego i przez to na rysunku 28-ym nie wykreślonego, mają się jak:

$$\frac{OH_x}{OH} : \frac{OK_x}{OK} : \frac{OL_x}{OL} = \frac{1}{h} : \frac{1}{k} : \frac{1}{l}$$

$$\frac{OH_x}{OH'} : \frac{OK_x}{OK'} : \frac{OL_x}{OL'} = \frac{1}{h'} : \frac{1}{k'} : \frac{1}{l'}$$

Wobec tego, że czworościan  $OH_xK_xL_x$  dla nas nie istnieje, a więc jest dowolny, uznajmy jego odcinki za równe jedności, t. j. napiszmy, że



$$\begin{array}{ll} OH = \frac{1}{h} & OH' = \frac{1}{h'} \\ OK = \frac{1}{k} & OK' = \frac{1}{k'} \\ OL = \frac{1}{l} & OL' = \frac{1}{l'} \end{array}$$

Płaszczyzny  $HKL$  i  $H'K'L'$  przecinają się i tworzą krawędź  $\Theta\Sigma$ . Kierunek krawędzi  $\Theta\Sigma$  i każdej do niej równoległej mamy wyrazić znakiem liczbowym, pochodnym od znaków  $(hkl)$  i  $(h'k'l')$ .

Przesuńmy równolegle płaszczyznę  $H'K'L'$  aż do punktu  $L$ , t. j. do położenia płaszczyzny  $EFL$ , która z płaszczyzną  $HKL$  przecina się w prostej  $L\bar{L}$ . Jeżeli płaszczyzna  $EFL$  jest równoległa do płaszczyzny  $H'K'L'$ , to prosta  $L\bar{L}$  jest równoległa do prostej  $\Theta\Sigma$ . W takim razie zamiast krawędzi  $\Theta\Sigma$  możemy poszukiwać krawędzi  $L\bar{L}$ , jeżeli bowiem są one równoległe, t. j. mają jeden kierunek, to wyznaczają się one stosunkiem tych samych wielkości.

Nazwijmy

$$\begin{array}{lll} OH = a & OH' = m & OE = q \\ OK = b & OK' = n & OF = r \\ OL = c & OL' = p & OL = c. \end{array}$$

Po równoległym przesunięciu płaszczyzny  $H'K'L'$  do położenia  $EFL$  odcinki, odcinane płaszczyzną  $H'K'L'$  na osiach  $OX, OY, OZ$ , powiększyły się  $\frac{c}{p}$  razy<sup>1</sup>.

A więc płaszczyzna  $EFL$  odcina odcinki:

$$\begin{array}{l} OE = q = \frac{cm}{p} \\ OF = r = \frac{cn}{p} \\ OL = c. \end{array}$$

Jak się wyżej rzekło, zagadnienie, w mowie będące, polega na wyznaczeniu kierunku prostej  $L\bar{L}$ . Tę prostą wyznaczają dwa punkty: punkt  $L$ , określony wyznacznikiem  $l$ , wiadomym ze znaku  $(hkl)$ , i punkt  $\bar{L}$ , którego współrzędne są właśnie poszukiwane.

<sup>1</sup>  $c$  od  $p$  jest większe  $\frac{c}{p}$  razy, ponieważ przez równoległe przesunięcie płaszczyzny  $H'K'L'$  odcinki osi powiększają się proporcjonalnie, więc to przesunięcie jest pomnożeniem odcinków przez współczynnik  $\frac{c}{p}$ .

Przeprowadźmy przez ten punkt  $E$  dwie proste, równoległe do osi  $OX$  i  $OY$ , i nazwijmy punkty przecięcia się tych prostych z osiami przez  $U$  i  $V$ . A więc  $EU$  jest równoległa do  $OY$  i  $EV$  jest równoległa do  $OX$ .

Położenie punktu  $E$  wyznaczają odcinki  $EU$  i  $EV$ , albo równe im odcinki  $OV$  i  $OU$ . Nazwijmy je  $u$  i  $v$ , mianowicie:

$$EV = OU = u$$

$$EU = OV = v.$$

Wobec równoległości  $EU$  do  $OY$  i  $EV$  do  $OX$  zachodzi podobieństwo trójkątów:

$$\triangle OKH \sim \triangle U\dot{L}H$$

$$\triangle OFE \sim \triangle U\dot{L}E.$$

Z podobieństwa trójkątów wynika

$$\frac{b}{v} = \frac{a}{a-u}$$

$$\frac{r}{v} = \frac{q}{q-u}$$

czyli

$$av = ab - bu$$

$$qv = qr - ru.$$

Rozwiązujemy te równania względem  $u$  i  $v$ , jako niewiadomych i otrzymujemy:

$$u = \frac{aqr - abq}{ar - bq}$$

$$v = \frac{abr - bqr}{ar - bq}.$$

Wylączając  $aq$  i  $br$ , otrzymujemy:

$$u = aq \frac{r - b}{ar - bq}$$

$$v = br \frac{a - q}{ar - bq}$$

Wprowadźmy pod  $q$  i  $r$  ich wartości:

$$q = \frac{cm}{p}$$

$$r = \frac{cn}{p}$$



Otrzymujemy wtedy

$$u = \frac{am}{p} \cdot \frac{cn - bp}{an - bm}$$

$$v = \frac{bn}{p} \cdot \frac{ap - cm}{an - bm}$$

Wyżej zaznaczyliśmy, że poszukiwany kierunek krawędzi  $LE$  (rys. 28) jest wytknięty przez dwa punkty: punkt  $L$  i punkt  $\bar{L}$ , czyli przez odcinki

$$OU, OV, OL.$$

Ponieważ odcinek  $OL$  dany jest przez wyznacznik  $l$  w znaku  $(hkl)$ , a wartości  $u$  i  $v$  otrzymaliśmy przez dopiero co dokonane rozwiązanie zagadnienia pierwszego, więc jesteśmy w posiadaniu wszystkich trzech wyznaczników, wytykających kierunek poszukiwanej krawędzi  $LE$ . Obecnie może tylko iść nam o uproszczenie i o ujednostajnienie trzech tych wyrazów.

Aby to osiągnąć, wykreślmy równoległoscian

$$OU\bar{L}VWMPN$$

(rys. 28) na odcinkach

$$OU, OV, OW,$$

jak na krawędziach, przyczem niech

$$OW = -OL.$$

Odcinkowi  $OW$  nadajemy znaczenie odjemne, bo leży on względem odcinka  $OL$  po przeciwnej stronie początku  $O$ .

Nazwijmy

$$OW = w$$

a że wartość  $OL$  na początku oznaczyliśmy jako równą  $c$ , więc

$$w = -c.$$

Przekątna równoległoscianu  $OU\bar{L}VWMPN$ , t. j. prosta  $OP$ , jest równoległa do krawędzi  $LE$ , bo kierunek obu tych prostych wyznacza się stosunkiem tych samych wielkości, mianowicie stosunkiem

$$u : v : w.$$

Wartości tych wyznaczników są, jak wiadomo, następujące:

$$u = \frac{am}{p} \cdot \frac{cn - bp}{an - bm}$$

$$v = \frac{bn}{p} \cdot \frac{ap - cm}{an - bm}$$

$$w = -c.$$

Ponieważ wyznaczniki te wytykają kierunek krawędzi swym stosunkiem, a nie wartościami bezwzględными, więc nie zmienimy wartości stosunku, czyli kierunku prostej, jeżeli wszystkie trzy wyznaczniki pomnożymy przez dowolny spółczynnik.

Niech spółczynnikiem tym będzie ilorz

$$\frac{an - bm}{ambnc}.$$

Wtedy

$$u = \frac{1}{bp} - \frac{1}{cn}$$

$$v = \frac{1}{cm} - \frac{1}{ap}$$

$$w = \frac{1}{an} - \frac{1}{bm}$$

Podstawiając

$$a = \frac{1}{h} \quad m = \frac{1}{h'}$$

$$b = \frac{1}{k} \quad n = \frac{1}{k'}$$

$$c = \frac{1}{l} \quad p = \frac{1}{l'}$$

otrzymamy

$$u = kl' - lk'$$

$$v = lh' - hl'$$

$$w = hk' - kh'$$

**Rozwiązanie.** Kierunek krawędzi, powstałej z przecięcia się dwu ścian nierównoległych

$$(h k l) \text{ i } (h' k' l')$$

wyznacza się stosunkiem wyznaczników

$$[u v w]$$



których wartości są następujące:

$$u : v : w = (kl' - lk') : (lh' - hl') : (hk' - kh').$$

Wyznaczniki krawędzi w wyrazach ogólnych oznaczamy stałe literami  $u$ ,  $v$ ,  $w$  i znak krawędzi ujmujemy w nawias kątowny  $[uvw]$  dla odróżnienia od wyznaczników ściany, dla których przyjęte są litery  $h$ ,  $k$ ,  $l$ , i od znaku ściany, który zamykamy w nawias zwykły  $(hkl)$ .

Krawędź, powstała z przecięcia się dwu ścian nierównoległych przylega do każdej z tych dwu ścian, czyli jest do każdej z nich równoległa. Przez to samo jest ona równoległa do osi tego pasa, w którym leżą obie te ściany, tworzące przez przecięcie się wzajemne krawędź omawianą. A ponieważ znak  $[uvw]$ , jako stosunek trzech liczb, wyznacza nie tylko kierunek jednej jakiejś prostej, ale wszystkich do niej równoległych, więc znak ten wyznacza też kierunek osi pasa. Dlatego znak  $[uvw]$  nazywamy albo znakiem krawędzi, albo znakiem osi pasa, albo też krócej znakiem pasa.

§ 13. **Zagadnienie drugie. Równanie pasów.** Jakim warunkom czynią zadość wyznaczniki każdej ściany, równoległej do krawędzi, której kierunek jest wiadomy?

Niechaj trzy ściany

$$(hkl), (h_1k_1l_1), (h_2k_2l_2)$$

będą równoległe do jednej prostej, t. j. niech będą to ściany jednego pasa.

Obliczmy kierunek osi tego pasa ze znaków dwu ścian, do tego pasa należących, n. p. ze znaków:

$$(h_2k_2l_2) \text{ i } (h_1k_1l_1).$$

Według odpowiedzi na zagadnienie pierwsze otrzymamy:

$$u = k_2l_1 - l_2k_1$$

$$v = l_2h_1 - h_2l_1$$

$$w = h_2k_1 - k_2h_1$$

Obliczmy następnie kierunek tej samej osi ze znaków drugiej i pierwszej ściany z trzech nam danych, t. j. z

$$(h_1k_1l_1) \text{ i } (hkl).$$

Otrzymamy

$$\begin{aligned}u_1 &= k_1 l - l_1 k \\v_1 &= l_1 h - h_1 l \\w_1 &= h_1 k - k_1 h\end{aligned}$$

Ponieważ otrzymane przez nas wyznaczniki

$$[u \ v \ w] \text{ i } [u_1 \ v_1 \ w_1]$$

wyznaczają kierunek jednej prostej — osi jednego pasa — więc stosunki ich są równe:

$$u : v : w = u_1 : v_1 : w_1$$

i wartości  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , są kolejno równe wartościom  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ , pomnożonym przez jakiś współczynnik  $s$ .

A więc

$$\begin{aligned}u &= s(k_1 l - l_1 k) \\v &= s(l_1 h - h_1 l) \\w &= s(h_1 k - k_1 h)\end{aligned}$$

Pomnożmy obie strony równania pierwszego przez  $h$ , równania drugiego przez  $k$  i równania trzeciego przez  $l$ . Otrzymamy:

$$\begin{aligned}h u &= s h k_1 l - s h l_1 k \\k v &= s h k l_1 - s h_1 k l \\l w &= s h_1 k l - s h k_1 l\end{aligned}$$

Po zsumowaniu tych trzech równań otrzymujemy równanie

$$h u + k v + l w = 0.$$

**Rozwiązanie.** Wyznaczniki każdej ściany

$$(h \ k \ l)$$

równoległej do krawędzi

$$[u \ v \ w]$$

t. j. leżącej w pasie  $[u \ v \ w]$ , czynią zadość równaniu

$$h u + k v + l w = 0.$$

Równanie to, noszące nazwę równania pasów, wyraża kardynalne prawo krystalografii, a więc ma ono znaczenie pierwszorzędne.

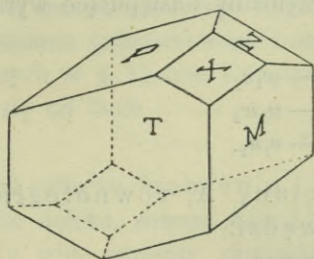


§ 14. **Zagadnienie trzecie. Dedukcja.** Jakie jest położenie ściany równoległej do dwu przecinających się krawędzi, których kierunki są wiadome?

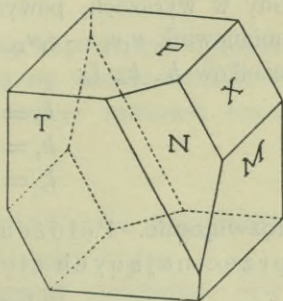
Założmy, że znaki czterech ścian

$P, M, T, N,$

(rys. 29 lub 30) są wiadome.



Rys. 29. Kryształ aksynitu.



Rys. 30. Wielościan ze ścianą w dwu pasach.

Mamy znaleźć wyznaczniki ściany  $X$ , która leży w pasie  $[PXM]$  i w pasie  $[TXN]$ .

Znak osi pasa  $[PXM]$ , obliczony z wiadomych nam wyznaczników ściany  $P$  i ściany  $M$ , niechaj będzie  $[u_1 v_1 w_1]$ . Znak osi pasa  $[TXN]$ , obliczony z wiadomych nam wyznaczników ściany  $T$  i ściany  $N$ , niechaj będzie  $[u_2 v_2 w_2]$ .

Poszukiwane wyznaczniki ściany  $X$

$$(h_x k_x l_x)$$

jako należącej do obu pasów

$$[u_1 v_1 w_1] \text{ i } [u_2 v_2 w_2]$$

muszą czynić zadość obu równaniom następującym:

$$h_x u_1 + k_x v_1 + l_x w_1 = 0$$

$$h_x u_2 + k_x v_2 + l_x w_2 = 0.$$

Rozwiązując te równania względem  $h_x$  i  $k_x$ , jako niewiadomych, otrzymujemy:

$$h_x = l_x \frac{v_1 w_2 - w_1 v_2}{u_1 v_2 - v_1 u_2}$$

$$k_x = l_x \frac{w_1 u_2 - u_1 w_2}{u_1 v_2 - v_1 u_2}$$

Znak ściany jest to stosunek trzech liczb. A więc jednej z tych liczb zawsze możemy nadać wartość dowolną i wartość stosunku przez to nie ulegnie zmianie.

Nadajmy zatem wyznacznikowi  $l_x$  wartość mianownika  $u_1v_2 - v_1u_2$ :

$$l_x = u_1v_2 - v_1u_2.$$

Gdy w wyrazach, powyżej otrzymanych, na miejsce  $l_x$  wstawimy mianownik  $u_1v_2 - v_1u_2$ , to otrzymamy następujące wyrażenia wyznaczników  $h_x$ ,  $k_x$ ,  $l_x$ :

$$h_x = v_1w_2 - w_1v_2$$

$$k_x = u_1u_2 - u_1w_2$$

$$l_x = u_1v_2 - v_1u_2.$$

Rozwiązanie. Położenie ściany  $X$ , równoległej do dwu przecinających się krawędzi:

$$[u_1v_1w_1] \text{ i } [u_2v_2w_2]$$

t. j. leżącej w dwu pasach:

$$[u_1v_1w_1] \text{ i } [u_2v_2w_2]$$

wyznacza się stosunkiem wyznaczników

$$h_x : k_x : l_x$$

których wartości są następujące:

$$h_x : k_x : l_x = (v_1w_2 - w_1v_2) : (w_1u_2 - u_1w_2) : (u_1v_2 - v_1u_2).$$

**§ 15. Wyraz arytmetyczny związku pasów. Prawo wyznaczników całych, czyli prawo wymiernych odcinków krawędzi.** Położenie każdej ściany kryształu wyraża się stosunkiem trzech liczb całych, bo wszystkie ściany kryształu od każdej jego krawędzi odcinają odcinki wymierne.

Porównajmy wartości, otrzymane w rozwiązaniu zagadnienia pierwszego (§ 12 str. 34) z wartościami, podanymi w odpowiedzi na zagadnienie trzecie (§ 14). Spostrzeżemy nasamprzód, że wyrazy te są jednakowe, t. j. że znak krawędzi oblicza się ze znaków dwu ścian tak samo jak wyznaczniki ściany ze znaków dwu krawędzi. Potwórze widzimy, że wyrazy te są to różnice iloczynów.

Jednakowość tych wzorów, oraz ich charakter, są to sprawy wielkiej wagi.



Gdy do oznaczenia rozkładu ścian na kryształach zastosujemy sposób wyznaczników, opisany w § 10-tym, to, jak wskazano w § 11-tym, ściany czworościanu jednostkowego otrzymują znaki

$$(111), (100), (010), \text{ i } (001),$$

a wyznaczniki

$$h, k, l,$$

wszelkiej innej ściany tego kryształu są to pochodne wyznaczników czworościanu jednostkowego i obliczają się według wzorów, wyprowadzonych w § 12-tym i 14-tym. A zatem: rachunek ten rozpoczyna się od liczb

$$1 \text{ i } 0$$

i polega tylko na mnożeniu i odejmowaniu, więc prowadzony dowolnie daleko, zawsze daje tylko liczby całe.

Tu więc możemy sformułować prawo następujące: wyznaczniki wszystkich ścian kryształu są to zawsze liczby całe, albo, każda ściana, wyznaczająca się wyznacznikami całkowitymi, jest na kryształach możliwa.

Dla jaknajdokładniejszego zrozumienia sprawy omawianej nie będzie od rzeczy, jeżeli jeszcze raz przypomnimy sobie, że według empirycznie ustalonego prawa pasów, któremu podlegają wszystkie kryształy bez wyjątku, każda nowa ściana wyznacza się dwiema poprzednio istniejącymi krawędziami. Nazwijmy ściany czworościanu jednostkowego ścianami pierwszego okresu. Z jego krawędzi parami możemy obliczyć wyznaczniki ścian nowych, t. j. ścian drugiego okresu. Dadzą one nowe krawędzi, które z krawędziami dawnymi wytkną ściany trzeciego okresu i t. d., i t. d., i t. d. Rachunek ten nie wychodzi po za liczby całe.

Tak oto, obserwacją stwierdziwszy prawo pasów, i poddawszy go rozbiorowi odpowiedniemu, doszliśmy do poznania prawa wyznaczników całych, które przewidzieliśmy w § 6-tym przez poznanie sieci przestrzennej i przez przyrównanie ścian i krawędzi kryształu do płaszczyzn siatkowych i szeregów sieci przestrzennej.

Na czworościan jednostkowy możemy wybrać każde cztery ściany kryształu, przecinające się w czterech punktach czyli w sześciu prostych, t. j. na krawędzi osiowe możemy wziąć każde trzy krawędzi kryształu, nierównoległe i nieprzylegające do jednej płaszczyzny. A więc wyżej wywnioskowane prawo wyznaczników całych możemy wyrazić również w ten sposób: wszystkie ściany kryształu od każdej jego krawędzi odcinają odcinki

wymierne, albo odcinki, odcięte od jednej krawędzi kryształu przez wszystkie jego ściany, są spójmierne, t. j. stosunki ich wyrażają się liczbami całymi.

Jak widzimy, dokonaliśmy zadania, które postawiliśmy w paragrafie dziewiątym, t. j. znaleźliśmy wyraz arytmetyczny prawa pasów. Wyraz ten, jak już wiadomo, nosi nazwę prawa wyznaczników całych czyli prawa odcinków wymiernych. Nazwa ta pozostała z przeszłości, kiedy prawo odcinków wymiernych było wykryte empirycznie, niezależnie od prawa pasów i prawa jednorodności. Obecnie jednak umiemy wyprowadzić z jednorodności zarówno związek pasów jak całkowitość liczb wyznacznikowych, a także umiemy dowieść łączności pomiędzy związkiem pasowym i całkowitością wyznaczników. A więc dla nas obecnie jest jasne, że prawo pasów i prawo odcinków wymiernych są to objawy fizycznej jednorodności kryształu.

### § 15°. Dedukcja pasów i jej przykłady.

Wartości  $u, v, w$ , ze znaków  $(hkl)$  i  $(h_1k_1l_1)$ , lub  $h, k, l$ , ze znaków  $[uvw]$  i  $[u_1v_1w_1]$  obliczają się według następującego schematu.

Wypisujemy po dwakroć znak pierwszy  $(hkl)$  lub  $[uvw]$  w jednym wierszu, a pod nim, w wierszu następnym, tak samo piszemy dwukrotnie znak drugi  $(h_1k_1l_1)$  lub  $[u_1v_1w_1]$ , poczem odrzucamy pierwszą i ostatnią kolumnę pionową. Pozostaje ośm liczb. Mnożymy je w tej kolei, którą wskazują krzyże na dygramie, podanym niżej: 1) pierwszą górną mnożymy przez drugą dolną, 2) drugą górną przez pierwszą dolną, 3) drugą górną przez trzecią dolną, 4) trzecią górną przez drugą dolną, 5) trzecią górną przez czwartą dolną, 6) czwartą górną przez trzecią dolną. Do każdego nieparzystego iloczynu dodajemy ze znakiem odwrotnym następujący po nim iloczyn parzysty. Otrzymujemy trzy wypadkowe: wypadkowa pierwsza jest to  $u$  albo  $\bar{h}$ , wypadkowa druga jest  $v$  lub  $\bar{k}$ , wypadkowa trzecia to jest  $w$  albo  $\bar{l}$ .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|ccc|ccc}
 h & k & l & h & k & l \\
 & \times & \times & \times & & \\
 h_1 & k_1 & l_1 & h_1 & k_1 & l_1 \\
 \hline
 & & & & & \\
 u & = & kl_1 & - & lk_1 & \\
 & & & & & \\
 v & = & lh_1 & - & hl_1 & \\
 & & & & & \\
 w & = & hk_1 & - & kh_1 & 
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c|ccc|ccc}
 u & v & w & u & v & w \\
 & \times & \times & \times & & \\
 u_1 & v_1 & w_1 & u_1 & v_1 & w_1 \\
 \hline
 & & & & & \\
 h & = & vw_1 & - & wv_1 & \\
 & & & & & \\
 k & = & wu_1 & - & uw_1 & \\
 & & & & & \\
 l & = & uv_1 & - & vu_1 & 
 \end{array}
 \end{array}$$

Obliczenie to nosi nazwę dedukcyi albo dedukcyi pasów. Mamy w niem dwa rodzaje zagadnień: albo stwierdzenie, czy dane ściany



należą czy nie należą do jednego pasa; albo znalezienie wyznaczników takiej ściany, która leżałaby w dwu pasach, wyznaczonych przez dwie pary ścian wiadomych.

Zagadnienie pierwsze rozwiązuje się w ten sposób, że z danych nam znaków wybieramy dwa dowolne, obliczamy z nich znak pasa i liczby otrzymane wstawiamy do równania pasów wraz z wyznacznikami ściany trzeciej, czwartej, lub w ogóle wszelkiej ściany pozostałej.

Przykład pierwszy. Pytanie. Czy ściany  $(31\bar{2})$ ,  $(21\bar{2})$ ,  $(11\bar{2})$  leżą w jednym pasie?

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{c|cccc|c} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ & \times & \times & \times & & \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (0 \times 1) + (\bar{2} \times 1) + (1 \times 2) = 0.$$

$$[0\bar{2}1]^1 \quad (2 - 2), (4 - 6), (3 - 2) = [0\bar{2}1]$$

Odpowiedź. Ściany  $(31\bar{2})$ ,  $(21\bar{2})$ ,  $(11\bar{2})$  leżą w jednym pasie  $[0\bar{2}1]$ .

Przykład drugi. Pytanie. Czy ściany  $(211)$ ,  $(2\bar{2}1)$ ,  $(111)$  leżą w jednym pasie?

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{c|cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ & \times & \times & \times & & \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (\bar{1} \times 1) + (0 \times 1) + (2 \times 1) = 1.$$

$$[\bar{1}02]$$

Odpowiedź. Ściany  $(211)$ ,  $(2\bar{2}1)$ ,  $(111)$  nie leżą w jednym pasie.

Rozwiązanie zagadnień drugiego rodzaju poznamy na czterech przykładach następujących.

Przykład pierwszy. Na rys. 31 jest widoczne, że ściany  $P$ ,  $M$ ,  $T$  i  $N$ , rozpostarte do przecięcia się wzajemnego, tworzą czworościan. Ściana  $N$  niechaj będzie ścianą jednostkową  $(111)$ .

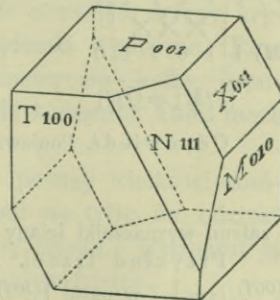
$$N = (111)$$

Wtedy

$$T = (100)$$

$$M = (010)$$

$$P = (001).$$



Rys. 31. Ściany czworościanu jednostkowego w połączeniu ze ścianą, leżącą w pasie  $[(100)/(111)]$  i  $[(001)/(010)]$ .

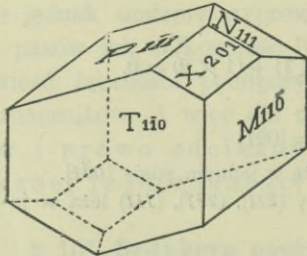
<sup>1</sup> Znak  $[0\bar{2}1]$  czytamy: »pas: zero, mniej dwa, jeden«,  $[\bar{1}02]$ : »pas: mniej jeden, zero, dwa«, liczby odjemne oznaczamy znakiem »mniej« położonym nad liczbą.

Pytanie. Jakie są wyznaczniki ściany  $X$  (rys. 31), która leży w pasie  $[N/T]$  i w pasie  $[P/M]$ ?

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{l}
 (N) \ 1 \ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \times & \times & \times & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \ 1 \\
 (T) \ 1 \ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \times & \times & \times & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \ 0 \\
 \hline
 [N/T] = [0\bar{1}\bar{1}]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (P) \ 0 \ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \ 1 \\
 (M) \ 0 \ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \ 0 \\
 \hline
 [P/M] = [\bar{1}00]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 [N/T] \ 0 \ \left| \begin{array}{cccc} 1 & \bar{1} & 0 & 1 \\ \times & \times & \times & \\ 0 & 0 & \bar{1} & 0 \end{array} \right| \ 1 \\
 [P/M] \ \bar{1} \ \left| \begin{array}{cccc} 1 & \bar{1} & 0 & 1 \\ \times & \times & \times & \\ 0 & 0 & \bar{1} & 0 \end{array} \right| \ 0 \\
 \hline
 (hkl)_z = (01\bar{1})
 \end{array}$$

Odpowiedź. Wyznaczniki ściany  $X$  są:  $(01\bar{1})$ , leży ona w pasach  $[0\bar{1}\bar{1}]$  i  $[\bar{1}00]$ .



Rys. 32. Kryształ akasynitu i znaki jego ścian.

Przykład drugi. Rys. 32 przedstawia wielościan krystaliczny minerału akasynitu  $HMgCa_2Al_2BSi_4O_{16}$ . Mineralodzy opisowi ustalili następującą orientację ścian tego minerału:

$$\begin{array}{l}
 N = (111) \\
 P = (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) \\
 M = (110) \\
 T = (\bar{1}\bar{1}0)
 \end{array}$$

Pytanie. Jaki jest znak ściany  $X$  (rys. 32), która leży w pasie

$$[P/M] = [(\bar{1}\bar{1}\bar{1})/(110)]$$

i w pasie

$$[T/N] [(\bar{1}\bar{1}0)/(111)]?$$

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{l}
 (P) \ 1 \ \left| \begin{array}{cccc} \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} \\ \times & \times & \times & \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \ 1 \\
 (M) \ 1 \ \left| \begin{array}{cccc} \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} \\ \times & \times & \times & \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \ 0 \\
 \hline
 [P/M] = [\bar{1}\bar{1}2]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (T) \ 1 \ \left| \begin{array}{cccc} \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} \\ \times & \times & \times & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \ 0 \\
 (N) \ 1 \ \left| \begin{array}{cccc} \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} \\ \times & \times & \times & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \ 1 \\
 \hline
 [T/N] = \bar{1}\bar{1}2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 [P/M] \ \bar{1} \ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \bar{1} & 1 \\ \times & \times & \times & \\ \bar{1} & 2 & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right| \ 2 \\
 [T/N] \ \bar{1} \ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \bar{1} & 1 \\ \times & \times & \times & \\ \bar{1} & 2 & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right| \ 2 \\
 \hline
 X = (402)
 \end{array}$$

Odpowiedź. Ponieważ znak ściany jest to stosunek trzech liczb, więc

$$4 : 0 : 2 = 2 : 0 : 1$$

a zatem, wyznaczniki ściany  $X$  są  $(201)$ , ściana ta leży w pasach  $[\bar{1}\bar{1}2]$  i  $[\bar{1}\bar{1}2]$ .

Przykład trzeci. Pytanie. Jaki jest znak ściany, leżącej w pasie  $[(00\bar{1})/(110)]$  i w pasie  $[(10\bar{1})/(01\bar{1})]$ ?

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{l}
 0 \ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \ 1 \\
 1 \ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \ 0 \\
 \hline
 [\bar{1}10]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 1 \ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \ 1 \\
 0 \ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \ 1 \\
 \hline
 [\bar{1}\bar{1}\bar{1}]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \bar{1} \ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right| \ 0 \\
 \bar{1} \ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \bar{1} & 1 \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right| \ 1 \\
 \hline
 (112)
 \end{array}$$

Odpowiedź. Znak ściany poszukiwanej jest  $(112)$ , ściana ta leży w pasie  $[\bar{1}10]$  i w pasie  $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$ .



Przykład czwarty. Pytanie. Jaki jest znak ściany, leżącej w pasie  $[(01\bar{1})/(110)]$  i w pasie  $[(11\bar{2})/(010)]$ ?

Rozwiązanie.

$$\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & \bar{2} & 1 & 1 & \bar{2} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc|c} \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & \bar{1} \\ \hline \bar{2} & 0 & 1 & \bar{2} & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$[\bar{1}\bar{1}\bar{1}] \qquad \qquad \qquad [\bar{2}01] \qquad \qquad \qquad (1\bar{3}\bar{2}).$

Odpowiedź. Znak ściany poszukiwanej jest  $(1\bar{3}\bar{2})$ , ściana ta leży w pasie  $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$  i  $[\bar{2}01]$ .

Cztery te przykłady wskazują, jak od ścian czworoszczanu jednostkowego dochodzimy drogą dedukcji do ścian o wyznacznikach coraz większych od jedności.

### § 16. Wyraz fizyczny prawa pasów. Prawo jednorodności. Kryształ jest to ciało jednorodne, różnokierunkowe.

Podane w paragrafie poprzednim prawo wyznaczników całych, czyli prawo odcinków wymiernych, jest wyprowadzone przez nas dwukrotnie: po raz pierwszy dedukcyjnie z pojęcia jednorodności, a raczej z jej obrazu graficznego, i po raz wtóry na drodze indukcji, z empirycznie stwierdzonego związku pasów.

Zapomnijmy na czas pewien o pierwszej, dedukcyjnej, drodze i aby sprawdzić ścisłość rozumowania naszego, spróbujmy przedstawić graficznie prawo odcinków wymiernych, otrzymane indukcyjnie z rozbioru prawa pasów.

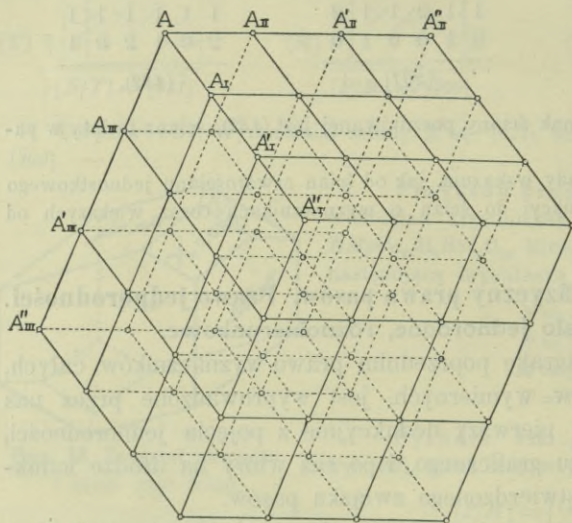
Prawo odcinków wymiernych głosi, że wszystkie ściany kryształu od każdej jego krawędzi odcinają odcinki wymierne. Rozważmy więc nasamprzód, jaki utwór geometryczny byłby odpowiednim wyrazem takiej prostej, jak krawędź kryształu, która może być dzielona tylko na odcinki wymierne.

Wielkości wymierne są to wielokrotne pewnej wielkości skończonej. Jeżeli więc krawędź kryształu dzieli się tylko na odcinki wymierne, to dla jej zobrazowania nakreślmy prostą i podzielmy ją na odcinki równe, oraz załóżmy, że są one niepodzielne.

Równe odcinki prostej są jednokładne: którykolwiek odcinek  $AB$  przylega do odcinka  $BC$ ,  $CD$ , i t. d., t. j. do każdego z odcinków, na które prosta, w mowie będąca, została podzielona. Stąd wynika, że punkty końcowe odcinków są analogiczne, t. j. punkt  $A$  może być zastąpiony przez punkt  $B$ ,  $C$ , i przez każdy, dzielący prostą omawianą na odcinki skończone, równe, niepodzielne.

Znaczy to, że obrazem graficznym krawędzi kry-

ształu jest szereg prostolinijny równoodległych punktów analogicznych, czyli prosta, podzielona punktami analogicznymi na odcinki równe, skończone i niepodzielne.



Rys. 33. Sieć przestrzenna.

Wierzchołek czworościanu jest punktem przecięcia się trzech krawędzi, nie przylegających do jednej płaszczyzny. Więc jeżeli punkt  $A$  ma być obrazem wierzchołka czworościanu, to oprócz prostej  $AA_I^n$  musimy przez punkt  $A$  przeprowadzić szereg drugi  $AA_{II}^n$ . Gdy jednak punkty  $A_I$  i  $A_{II}$  mają być analogiczne z punktem  $A$ , a przez punkt  $A$  przeprowadziliśmy dwa szeregi  $AA_I^n$  i  $AA_{II}^n$ , tworzące kąt  $A_I A A_{II}$ , to analogia punktów  $A_I$  i  $A_{II}$ , oraz wszystkich z nimi analogicznych, musi być wyrażona graficznie tak samo, t. j. przez każdy z nich muszą być poprowadzone dwa szeregi, przecinające się pod takim samym kątem; a więc otrzymujemy dwa przecinające się szeregi prostych równoległych i równoodległych, czyli sieć płaską punktów analogicznych. A że dwie krawędzi kryształu wyznaczają ścianę, więc sieć płaska, wytknięta przez dwa szeregi  $AA_I^n$  i  $AA_{II}^n$ , wyrażające dwie krawędzi, jest obrazem graficznym ściany kryształu.

Wierzchołek czworościanu, jak wiadomo, jest to punkt przecięcia się trzech krawędzi, nie leżących na jednej płaszczyźnie. Jeżeli więc punkt  $A$  ma być obrazem wierzchołka czworościanu, to

Niechaj punkt  $A$  (rys. 33) wyobraża wierzchołek czworościanu jednostkowego i prosta  $AA_I^n$  niech wyobraża jedną krawędź tego czworościanu, t. j. niechaj będzie ona szeregiem równoodległych punktów analogicznych  $A, A_I, A'_I, A''_I, \dots, A_I^n$ .

Wierzchołek czworościanu jest punktem przecięcia się trzech krawędzi,



oprócz szeregów  $AA_I^n$  i  $AA_{II}^n$  winniśmy przez punkt  $A$  przeprowadzić szereg trzeci  $AA_{III}^n$ , nie przylegający do płaszczyzny  $A_I A A_{II}$ , t. j. taki, który przecina się z nią pod kątem, większym od zera.

Niechaj w tym trzecim szeregu  $AA_{III}^n$  punktem analogicznym punktowi  $A$  i mu najbliższym będzie punkt  $A_{III}$ . Ponieważ przez punkt  $A$  przechodzi sieć płaska  $A_I A A_{II}$ , więc analogia punktu  $A_{III}$  winna być wyrażona graficznie tak samo, t. j. powinniśmy przeprowadzić przez punkt  $A_{III}$  taką samą sieć płaską, jak  $A_I A A_{II}$  i tak samo jak ona nachyloną do szeregu  $AA_{III}^n$ , t. j. do sieci  $A_I A A_{II}$  równoległą. Dalej to samo uczynić należy ze wszystkimi pozostałymi punktami analogicznymi szeregu  $AA_{III}^n$ .

A więc w wyniku ostatecznym, jako wyraz graficzny prawa odcinków wymiernych otrzymujemy sieć przestrzenną, t. j. zbiór punktów analogicznych, ułożonych tak, że około jednego punktu pozostałe punkty leżą tak samo, jak około każdego innego punktu, znajdującego się w tym zbiorze.

Fizycznym odpowiednikiem takiego utworu geometrycznego jest ciało, które około jednego punktu ma własności fizyczne takie same i tak samo ułożone, jak około każdego innego punktu.

Widzimy zatem, że gdy rozpoczynamy rozumowanie nasze od empirycznie stwierdzonego prawa pasów, to dochodzimy do jego wyrazu arytmetycznego w prawie wyznaczników całych, a wyrazu graficznego w sieci przestrzennej i fizycznego w ciele jednorodnym różnokierunkowym.

Odwrotnie, gdy poznaliśmy jednorodność kryształu i wyraziliśmy ją graficznie siecią przestrzenną, to przez przyrównanie kryształu do cząstek sieci przestrzennej, ograniczonych jej płaszczyznami siatkowymi, doszliśmy do przewidzenia prawa pasów i prawa odcinków wymiernych czyli wyznaczników całych.

Zgodność ta przekonywa nas, że w całym rozumowaniu dotychczasowym nie popełniliśmy błędu, i upewnia, że jednorodność i różnokierunkowość jest istotną i najważniejszą cechą ciała krystalicznego, a wielościennność, związek pasowy i wymierność stosunku wyznaczników, są to tylko objawy tej jednorodności i nieodzowne jej następstwa.

Tak więc, czy wychodzimy z fizycznych czy z geometrycznych własności kryształu, dochodzimy do jednego wniosku, że kryształ jest to ciało jednorodne różnokierunkowe.

Zarazem wnosimy, że ciało stałe jednorodne, wydzielając się z cieczy, musi przybierać samorzutnie postać wielościanów, których ściany są związane zależnością pasów, a więc dzielą każdą krawędź na odcinki wymierne.

Ostatecznie więc dochodzimy do przekonania, że kardynalnem i podstawowem prawem nauki o ciele stałym jest prawo jednorodności.

Prawo jednorodności nazywane bywa też drugim prawem krytalografii.

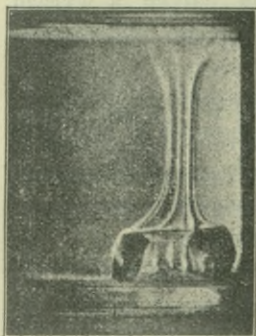
Widząc obok kryształów nieskazitelnych kryształy mętne, niedoskonałe, pełne ciał obcych, moglibyśmy pomyśleć, że jednorodność ciała stałego jest raczej rzadkim wyjątkiem, niż główną i istotną własnością kryształu. Taki pogląd byłby jednak błędny.

Nasamprzód prawo pasów — prawo empiryczne, na kryształach nieustannie obserwowane — nieodzownie przywodzi do pojmowania kryształu, jako ciała jednorodnego, jak właśnie poucza nas rozumowanie wyżej przeprowadzone.

Następnie, o jednorodności kryształu przekonywa nas łupliwość, figury wytrawione i w ogóle wszystkie własności kryształu.

Nakoniec, do tegoż wyniku prowadzą nas wszystkie obserwacje i doświadczenia, dokonywane nad powstawaniem kryształów.

Mówiło się na wstępie, że kryształ powstaje w roztworze przesyconym, t. j. w roztworze, zawierającym część substancji w stanie równowagi niestalej. Warstwa roztworu, która styka się z kryształem rosnącym, oddaje powierzchni kryształu wydzielając się nadmiar substancji — swe przesylenie — przez to warstwa ta staje się lżejsza, wznosi się i rozprasza w górnych częściach roztworu. Powstaje wyraźnie widoczny prąd koncentracyjny (rys. 34). Na miejsce uchodzącego do góry roztworu napływają nowe jego części, mniej odsyczone, które znów ten sam los spotyka. Tak więc wzrost kryształu pociąga za sobą nieustanne krążenie roztworu. Gdy roztwór jest przesycony dużo, ruch w nim bywa znaczny, prądy silne, wzrost kryształu odbywa się pospiesznie, powstają w roztworze zakłócenia, które pociągają za sobą zakłócenia w kryształach. Kryształ, rosnąc, zamyka w sobie krople roztworu i wszelkie ciała obce, znajdujące się w roztworze, w razie gdy roztwór jest nieczysty. Prócz tego, wobec anizotropii kryształu, różne ściany rosną z prędkością nierówną, co powoduje niejednostajne zmniejszanie się gęstości w warstwie roztworu,



Rys. 34.  
Prąd koncentracyjny.



przylegającej do kryształu. Prądy cieczy wnoszą się niejednostajnie z różnych ścian kryształu, u krawędzi jego się kłębią i wywołują w kryształach zakłócenia. Tak więc w samym procesie krystalizacji zachodzą zjawiska nieraz znacznie zakłócające przebieg stopniowego ustalania się równowagi pomiędzy cieczą i ciałem stałym. Zawsze jednak gdy widzimy niedoskonałości kryształu, to wraz z nimi widzimy nie tylko ich przyczyny, ale i to, że przyczyny te leżą poza kryształem, a nie w nim samym. I w miarę tego, jak powiększamy masę roztworu, jak zmniejszamy przesylenie, jak chronimy roztwór coraz staranniej od niepomyślnych, nagłych i znacznych zmian temperatury, otrzymujemy kryształy coraz doskonalsze. A gdy w doświadczeniach odpowiednich osiągamy zupełne wyzwolenie kryształu z pod wpływu czynników niepomyślnych, otrzymujemy go w stanie jednorodności niezakłóconej.

## CZĘŚĆ DRUGA.

### Prawo kątów stałych.

§ 17. **Prawo kątów stałych.** Wszystkie kryształy jednej substancji chemicznej, skrytalizowanej w jednakowych warunkach temperatury, ciśnienia i stężenia, mają jednakowe nachylenie ścian, t. j. stałe kąty dwuścienne.

W wykładzie dotychczasowym nie mieliśmy na względzie kryształów jakiejś określonej substancji. Podawaliśmy tylko ogólne własności ciał krystalicznych bez względu na cechy indywidualne tych ciał. Tak samo zachowywaliśmy się względem sieci przestrzennej: roztrząsaliśmy jej istotę, ale nie mówiliśmy o żadnym przypadku szczególnym sieci przestrzennej. Te rozważania ogólne dały nam poznać jednorodność, jako cechę istotną ciała krystalicznego, cechę właściwą kryształom wszystkich substancji skrytalizowanych.

Obecnie wypada nam zastanowić się nad tem, jakie są istotne cechy wspólne kryształom jednej substancji.

Jeżeli kryształ w ogóle przyrównaliśmy do dowolnej sieci przestrzennej, to wszystkie kryształy jednej substancji możemy przyrównać do jednego jakiegoś szczególnego przypadku sieci przestrzennej, t. j. do sieci o pewnych określonych kątach pomiędzy szeregami i o pewnych określonych odstępach pomiędzy węzłami.

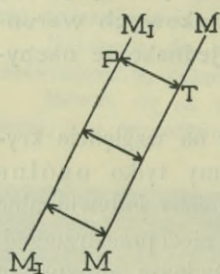
Zważmy jednak, że cechą istotną każdej sieci przestrzennej jest równoznaczność wszystkich jej szeregów równoległych. A ponieważ przekonaaliśmy się, że przyrównanie szeregów sieci do krawędzi kryształu nie naraziło nas dotychczas na wysnucie wniosków

błędnych, przeto trwajmy dalej w tem przyrównaniu i miejmy za jedno wszystkie równoległe krawędzie wszystkich kryształów jednej substancji, jeżeli kryształy te ustawimy obok siebie jednakowo.

Tak samo jednoznaczne są wszystkie równoległe płaszczyzny siatkowe jednej sieci przestrzennej. W takim razie musimy uważać za jedno różne wielościany, wydzielone z jednej sieci przestrzennej płaszczyznami siatkowymi jednoznaczными, t. j. równoległymi, chociażby te płaszczyzny leżały w różnych odległościach od punktu środkowego każdego wielościanu.

Z tego wynika, że równoległe ściany kryształów jednej substancji są również jednoznaczne, bez względu na ich odległość od środka. Innymi słowy, kryształy jednej substancji mogą być wielościanami różnego pozoru i pokroju, ale ściany tych wszystkich wielościanów są równoległe.

W rzeczy samej. Jeżeli własności kryształu w kierunkach równoległych są jednakowe, to prędkość jego przyrostu w kierunkach



Rys. 35. Kierunek przyrostu ściany.

równoległych musi być równa. Wyobraźmy sobie kryształ rosnący i jego ścianę  $MM$  (rys. 35), której kierunek przyrostu jest  $PT$  i prędkość przyrostu w tym kierunku jest  $m$ . W takim razie na wszystkich prostych, równoległych do  $PT$ , prędkość ta jest również  $m$ . A więc, po pewnym czasie ściana  $MM$  znajduje się w położeniu  $M_1M_1$ , równoległym do  $MM$ . To samo ściągą się do każdej ściany kryształu. Jeżeli więc przemieszczanie się ścian kryształu podczas jego wzrostu musi być równoległe, to równoległe ściany muszą

być jednoznaczne. Innymi słowy, kryształy jednej substancji mogą być wielościanami różnego kształtu i pokroju, lecz kąty dwuściennie pomiędzy ich ścianami muszą być stałe, t. j. wzajemne nachylenie ścian wszystkich kryształów jednej substancji musi być jednakowe.

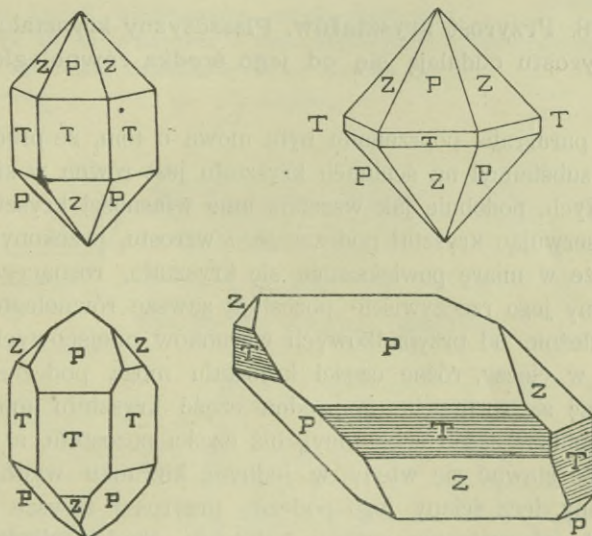
Istotnie. Porównanie kryształów jednej substancji, skryształizowanej w jednakowych warunkach temperatury, ciśnienia i stężenia, przekonywa nas o słuszności rozumowania powyższego. Mianowicie: Pomimo, że kryształy jednej substancji są to wielościany różnego pozoru i pokroju, jednak ściany jednego kryształu są na-



chylone do siebie tak samo, jak ściany każdego innego kryształu substancji tej samej.

Jest to prawo kątów stałych, zwane też pierwszym prawem krytalografii.

Prawo to nazywa się pierwszym dla tego, że było ono odkryte przed innymi prawami i stanowiło zaczątek naukowego badania kryształów. Obecnie widzimy, że nie jest ono prawem samoistnym. Jest to tylko jeden z wyrazów zewnętrznych jednorodności kryształu, która powoduje, że kryształ rośnie z równą prędkością na prostych równoległych.

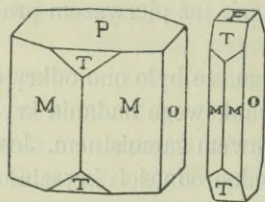


Rys. 36—39. Cztery kryształy kwarcu różnego pokroju.

Prawo kątów stałych możemy poznać przez doświadczenie bardzo proste. W wosku, albo w innej masie plastycznej, odcisniemy którykolwiek kąt dwuścienny na kryształku jakiejś substancji. A potem przykładamy ten odcisk do innych kryształów substancji tej samej. Przekonamy się, że na każdym kryształku jednej substancji do każdego kąta dwuściennego dokładnie przystają odciski, zdjęte z odpowiedniego kąta innych kryształów substancji tej samej.

Bardzo pouczającym i ogólnie przystępnym okazem, na którym możemy przekonać się łatwo o istocie prawa kątów stałych, są kryształy kwarcu  $SiO_2$ , zwanego też kryształkiem górskim lub skalnym. Mają one pozór bardzo rozmaity (rys. 36—39), lecz zawsze odcisk z kąta  $P/T$  jednego kryształu, przy-

staje do tegoż kąta na kryształach drugim i t. d., bowiem u wszystkich kryształów kwarcu kąt  $P/T = 141^{\circ} 47'$ , kąt  $P/Z = 133^{\circ} 44'$ , i t. d.



Rys. 40—41. Dwa kryształy staurolitu.

Na rys. 40 i 41 mamy wyobrażone dwa kryształy minerału staurolitu  $HFeAl_5Si_2O_{13}$ . Z pozoru są to dwa wielościany różne, że jednak mają nachylenie ścian jednakowe, więc z krystalograficznego punktu widzenia oba są tym samym wielościanem. Bez względu na pozór zewnętrzny wielościanów staurolitu zawsze kąt pomiędzy ich ścianami  $M/M$  wynosi  $129^{\circ} 26'$ , wszystkie ich kąty  $M/T$  mierzą  $137^{\circ} 58'$ , zawsze kąt  $M/O = 115^{\circ} 17'$ ,  $M/P = 90^{\circ}$ ,  $O/P = 90^{\circ}$ .

**§ 18. Przyrost kryształów.** Płaszczyzny kryształu podczas jego przyrostu oddalają się od jego środka równoległe samym sobie.

W paragrafie poprzednim była mowa o tem, że prędkość narastania substancji na ścianach kryształu jest równa w kierunkach równoległych, podobnie jak wszelkie inne własności kryształu.

Obserwując kryształ podczas jego wzrostu, przekonujemy się istotnie, że w miarę powiększania się kryształu, rosnącego w cieczy, ściany jego rzeczywiście pozostają zawsze równoległe samym sobie. Zależnie od przypadkowych warunków miejscowych, zachodzących w cieczy, różne części kryształu mogą podczas wzrostu powiększać się rozmaicie, np. jedna część kryształu może otrzymywać obfitszy zasób substancji, niż części pozostałe, a więc kryształ może stawać się wtedy w jednym kierunku wydłużony lub spłaszczony, lecz ściany jego podczas przyrostu zawsze pozostają równoległe pierwotnemu swemu położeniu. Stąd pochodzi różnorodny pozór zewnętrzny kryształów jednej substancji z zachowaniem stałości kątów dwuściennych. Różne kształty i różny pokrój kryształów jednej substancji jest tem samym, czem są różne stadia wzrostu jednego kryształu. Wszystkie kryształy jednej substancji, skryształizowanej w jednakowych warunkach temperatury, ciśnienia i stężenia, są zawsze jednym wielościanem, którego ściany są poprzesuwane równoległe na różne odległości od środka.

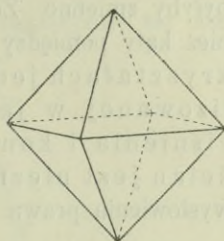
Obserwować przyrost ścian kryształu możemy doraźnie przez mikroskop, gdy krystalizacja odbywa się w kropli roztworu, parującego na wolnym powietrzu. W czasie dłuższym obserwacji tej możemy dokonać okiem nieuzbrojonym na kryształach, rosnących zwolna w roztworze przesyconym, który



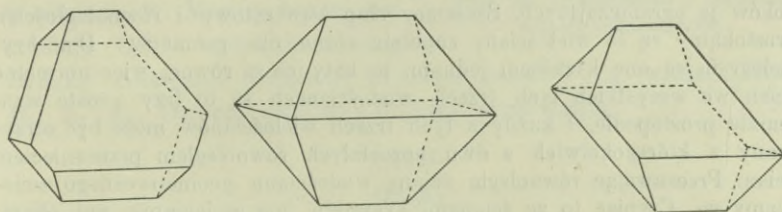
znajduje się w przezroczystym naczyniu. W ciągu dni kilku możemy wtedy widzieć wyraźne powiększanie się kryształu oraz niezmiennie i stale towarzyszące przyrostowi jednakowe nachylenie ścian kryształu do dna naczynia.

Tak samo o równoległym przesunięciu ścian przekonywają nas przykłady, podane wyżej w §-cie 17-stym, jak również przykład następujący.

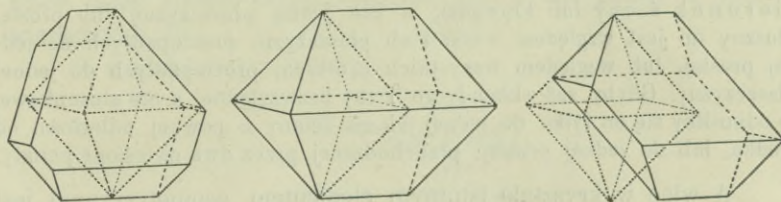
Minerał magnetyt  $Fe''Fe_2'''O_4$  zdarza się często w kształcie ośmiościanów umiarowych, t. j. wielościanów, ograniczonych ośmioma ścianami, stale nachylenymi do siebie pod kątem  $109^\circ 28'$  (rys. 42). Ten sam kąt wykazują ściany wszystkich ośmiościennych kryształów magnetytu, choć często mają one kształt wielościanów takich, jakie wyobraża rys. 43, są to bowiem te same ośmiościany, tylko że ściany ich poodsuwane są od środka niejednostajnie, co ilustruje rys. 44.



Rys. 42. Ośmiościan umiarowy



Rys. 43. Trzy kryształy magnetytu.



Rys. 44. Ośmiościan umiarowy ze ścianami, równolegle poprzesuwanymi.

§ 19. Kierunek przyrostu ściany. Podczas przyrostu kryształu każda jego ściana odsuwa się od jego środka w kierunku swej normalnej, której kierunek jest stały.

Jeżeli ściany kryształu podczas jego przyrostu zawsze pozostają równoległe samym sobie, to, po pierwsze, kierunkiem przyrostu każdej ściany jest linia prosta, prostopadła do tej ściany czyli t. zw. normalna ściany, i po drugie, kierunek normalnej jest niezmienny.

Gdyby bowiem ściany kryształu zmieniały kierunek swego

przyrostu, to odchyłałyby się od swego położenia t. j. nie pozostałyby ciągle równoległe sobie, a więc tworzone przez nie kąty byłyby zmienne. Że jednak kąty te są stałe, przeto stałe są również kąty pomiędzy normalnemi. Innemi słowy, we wszystkich kryształach jednej substancyi chemicznej, skryształizowanej w jednakowych warunkach temperatury, ciśnienia i koncentracji, rozkład normalnych jego ścian jest niezmienny. Zdanie to jest tylko innym sposobem wysłowienia prawa kątów stałych.

Z tego wynika, że w rozważaniach krystalograficznych odrzucamy pojęcie kształtu wielościanów i mamy na względzie tylko rozkład pionów, spuszczonej ze środka kryształu na jego ściany. To właśnie stanowi różnicę pomiędzy geometrycznym i krystalograficznym traktowaniem wielościanów. Wielościany geometryi charakteryzują się kształtem wieloboków je ograniczających. Sześcian, słup kwadratowy i równoległościan prostokątny są to wielościany zupełnie różne dla geometryi. Dla krystalografa są one kształtem jednym, bo kąty ich są równe, więc normalne ścian we wszystkich tych trzech wielościanach są to trzy proste wzajemnie prostopadłe, i każdy z tych trzech wielościanów może być otrzymany z któregokolwiek z dwu pozostałych równoległym przesunięciem ścian. Przesuwając równoległe ściany wielościanu geometrycznego zmieniamy go. Czyniąc to ze ścianami kryształu, nie zmieniamy ani charakteru ścian, ani charakteru wielościanu. Na to właśnie znak ściany ( $hkl$ ) i krawędzi [ $uvw$ ] jest stosunkiem trzech liczb, aby wyznaczał tylko kierunek ściany lub krawędzi, a nie jedną płaszczyznę lub prostą. Słuszny on jest względem wszystkich płaszczyzn, prostopadłych do jednej prostej, lub względem wszystkich prostych, prostopadłych do jednej płaszczyzny. Gdyby zaś składały go liczby bezwzględne, a nie stosunkowe, to odnosiłby się on tylko do jednej jakiejś ściany o pewnej odległości od środka, lub do jednej prostej, przechodzącej przez dwa określone punkty.

A więc w kryształach istotnym elementem geometrycznym jest tylko rozkład normalnych t. j. kąty pomiędzy normalnemi jego ścian.

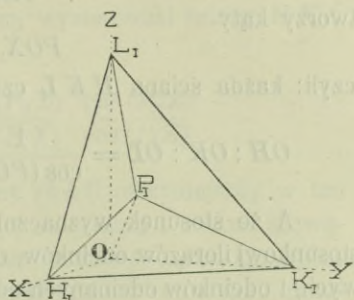
§ 20. Związek kątów pomiędzy normalnemi ścian i krawędziami osiowymi a wyznacznikami ścian. Znak ściany jest to stosunek trzech ilorazów, otrzymanych z dzielenia dostaw kątów pomiędzy jej normalną i krawędziami osiowymi przez dostawy kątów, jakie tworzy normalna ściany jednostkowej z temiż krawędziami osiowymi.

Wobec prawa kątów stałych, jedynymi niezmiennymi elementami, które charakteryzują kryształ, jako utwór geometryczny, są



kąty dwuścienne, albo, co na jedno wynosi, kąty pomiędzy normalnemi ścian. Lecz poprzednio, w rozdziale o prawie jednorodności, doszliśmy do przekonania, że każda ściana charakteryzuje się znakiem  $(hkl)$ . A więc obecnie należy znaleźć ten związek, który zachodzi pomiędzy kątami normalnych i znakami ścian.

Niechaj będzie czworościan  $OH_1K_1L_1$  (rys. 45) i trzy jego krawędzi osiowe  $OX, OY, OZ$ . Z początku  $O$  spuśmy pion na płaszczyznę  $H_1K_1L_1$ . Niech pion ten przetnie płaszczyznę  $H_1K_1L_1$  w punkcie  $P_1$ . Mówiąc krócej, wykreślmy  $OP_1$  — normalną ściany  $H_1K_1L_1$ . Następnie połączmy prostymi punkt  $P_1$  z wierzchołkami  $H_1, K_1, L_1$ . Otrzymujemy trzy trójkąty prostokątne:



Rys. 45. Czworościan i normalna ściany jednostkowej.

$$\begin{aligned} OP_1H_1 \\ OP_1K_1 \\ OP_1L_1 \end{aligned}$$

które mają wspólną przyprostokątną  $OP_1$  i kąt prosty u wspólnego wierzchołka  $P_1$ .

Z trójkątów tych mamy:

$$OH_1 = \frac{OP_1}{\cos(P_1OX)}$$

$$OK_1 = \frac{OP_1}{\cos(P_1OY)}$$

$$OL_1 = \frac{OP_1}{\cos(P_1OZ)}$$

Skąd wynika bezpośrednio, że:

$$OH_1 : OK_1 : OL_1 = \frac{1}{\cos(P_1OX)} : \frac{1}{\cos(P_1OY)} : \frac{1}{\cos(P_1OZ)}$$

Jest to słuszne względem każdej ściany

$HKL$

której normalna

$OP$

przecina ją w punkcie

$P$

i z trzema krawędziami

$OX, OY, OZ,$

tworzy kąty

$POX, POY, POZ,$

czyli: każda ściana  $HKL$  czyni zadość równaniu

$$OH : OK : OL = \frac{1}{\cos(POX)} : \frac{1}{\cos(POY)} : \frac{1}{\cos(POZ)}.$$

A że stosunek wyznaczników każdej ściany  $HKL$  jest równy stosunkowi ilorazów odcinków, odcinanych przez nią od krawędzi osiowych, i odcinków odcinanych od tychże krawędzi przez ścianę jednostkową, t. j.:

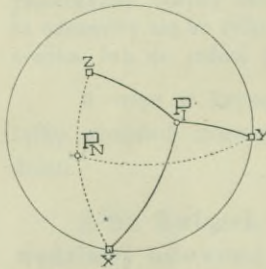
$$h : k : l = \frac{OH_1}{OH} : \frac{OK_1}{OK} : \frac{OL_1}{OL}$$

więc gdy w ilorazach  $\frac{OH_1}{OH}, \frac{OK_1}{OK}, \frac{OL_1}{OL}$  na miejsce  $OH_1, OK_1, OL_1,$

$OH, OK, OL$  kolejno wstawimy  $\frac{1}{\cos(P_1OX)}, \frac{1}{\cos(P_1OY)}, \frac{1}{\cos(P_1OZ)},$

$\frac{1}{\cos(POX)}, \frac{1}{\cos(POY)}, \frac{1}{\cos(POZ)}$ , to otrzymamy, że

$$h : k : l = \frac{\cos(POX)}{\cos(P_1OX)} : \frac{\cos(POY)}{\cos(P_1OY)} : \frac{\cos(POZ)}{\cos(P_1OZ)}.$$



Rys. 46. Powierzchnia kuli z przecięciami się z nią krawędzi osiowych  $X, Y, Z,$  i normalnych ścian  $P_1$  i  $P_N.$

Dla unaocznienia i łatwiejszego spa-  
miętania tej zależności przedstawmy ją na  
powierzchni kuli.

Mianowicie, z początku  $O,$  jak ze  
środka, zakreszmy kulę promieniem dowol-  
nym. Krawędzi osiowe i normalne ścian  
przetną powierzchnię tej kuli w różnych  
punktach: punkty  $X, Y, Z,$  (rys. 46) niech  
będą to punkty przecięcia się z powierz-  
nią kuli krawędzi osiowych  $OX, OY, OZ,$   
normalna ściany  $H_1K_1L_1$  niech przecina  
powierzchnię kuli w punkcie  $P_1,$  a nor-

malna ściany  $HKL$  w punkcie  $P_N.$  Ponieważ środkiem kuli jest  
początek  $O,$  więc miarą kątów normalnej  $OP_1$  i normalnej  $OP_N$



z krawędziami osiowymi  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , są łuki wielkich kół:

$$P_1X, P_1Y, P_1Z, P_NX, P_NY, P_NZ.$$

Przeto, w myśl równania ostatniego, wyznaczniki ściany  $HKL$  mają się jak następuje:

$$h : k : l = \frac{\cos(P_NX)}{\cos(P_1X)} \cdot \frac{\cos(P_NY)}{\cos(P_1Y)} \cdot \frac{\cos(P_NZ)}{\cos(P_1Z)}$$

A więc wyznaczniki każdej ściany ( $hkl$ ) otrzymujemy w ten sposób, że dostawy kątów pomiędzy jej normalną i trzema krawędziami osiowymi dzielimy kolejno przez dostawy kątów pomiędzy normalną ściany jednostkowej, a temiż krawędziami osiowymi; otrzymujemy trzy ilorazy, poczem znajdujemy ich stosunek, t. j. dzielimy dwa większe przez trzeci najmniejszy.

Wszystkie dotychczas wykonane pomiary kryształów i obliczenia wykazują zgodnie, że gdy weźmiemy trzy którekolwiek przecinające się w jednym punkcie krawędzi kryształu, i którekolwiek dwie normalne jego ścian, to stosunek trzech ilorazów dostaw wyżej omawianych zawsze wyraża się liczbami całymi.

Np. w kryształach pewnego minerału, zwanego skaleniem (ob. § 20) normalna jednej ze ścian (oznaczymy ją przez  $L$ ) z trzema pewnymi krawędziami tego kryształu tworzy kąty następujące:

$$L/X = 64^\circ$$

$$L/Y = 29^\circ$$

$$L/Z = 90^\circ$$

Z temi samymi krawędziami normalna innej ściany tego kryształu (normalna ściany  $O$ ) tworzy kąty następujące:

$$O/X = 47^\circ$$

$$O/Y = 63^\circ$$

$$O/Z = 36^\circ$$

Na ścianę jednostkową weźmy ścianę  $O$ , ponieważ, jak widzimy z kątów pomiędzy jej normalną i krawędziami osiowymi, przecina ona wszystkie trzy krawędzi osiowe. Wtedy wyznaczniki ściany  $L$ , w myśl równania ostatniego, otrzymujemy ze stosunku ilorazów następujących:

$$h_L : k_L : l_L = \frac{\cos 64^\circ}{\cos 47^\circ} \cdot \frac{\cos 29^\circ}{\cos 63^\circ} \cdot \frac{\cos 90^\circ}{\cos 36^\circ}$$

Wstawmy w równanie to wartości dostaw kątów w niem podanych,

Wartości te mamy na osobnej tablicy I w dodatku do książki niniejszej. Otrzymujemy, że:

$$h_L : k_L : l_L = \frac{438}{682} : \frac{875}{454} : 0$$

t. j.

$$h_L : k_L : l_L = 0.64 : 1.92 : 0$$

czyli:

$$h : k : l = 1 : 3 : 0$$

A więc znaki ścian skalenia  $O$  i  $L$  są:

$$O(hkl) = (111)$$

$$L(hkl) = (130)$$

Ustęp niniejszy jest wyjątkiem z § 20', w którym czytelnik znajdzie więcej przykładów, stwierdzających prawo wyznaczników całych, gdyż znajduje się tam opis kryształu skalenia, ograniczonego pięcioma parami ścian.

### § 20<sup>c</sup>. Wnioski z prawa kątów stałych.

Z prawa kątów stałych wysnuwamy wnioski następujące.

I. Pomiaru godne są tylko wielkości kątów dwuściennych kryształu, albo, co na jedno wychodzi, kątów pomiędzy normalnemi jego ścian.

II. Rozwiązując zagadnienia krystalograficzne, w razie potrzeby możemy przesuwając równolegle ściany i krawędzi, t. j. wszystkie płaszczyzny równoległe mamy za jedną płaszczyznę i wszystkie proste równoległe uważamy za jedną prostą.

III. W rozważaniu jakichkolwiek odcinków linii prostych nie mamy na względzie ich długości absolutnych, a tylko ich stosunki.

IV. Za najracjonalniejszą powierzchnię do wykonywania wykreśleń krystalograficznych uważamy powierzchnię kuli, a za podstawę racjonalnych pomiarów i obliczeń krystalograficznych uważamy trygonometrię kulistą.

Wniosek pierwszy i drugi jest sam przez się oczywisty.

Wniosek trzeci jest również prosty. N. p. gdy przesuwamy jeden bok trójkąta równoległe, to otrzymujemy różne trójkąty podobne, których pole i suma boków jest zmienna, ale kąty są stałe i stosunek boków niezmienny.

Wniosek czwarty zawiera w sobie trzy następstwa metodologiczne:

1<sup>o</sup> używanie kątomiarów teodolitowych,

2<sup>o</sup> stosowanie w krystalografii rzutu stereograficznego,

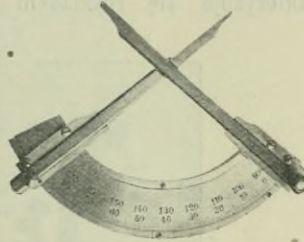
3<sup>o</sup> posługiwanie się w obliczeniach krystalograficznych sposobami trygonometrii sferycznej.

### § 20<sup>b</sup>. Pomiary kątów.

Obecnie więc wypada odpowiedzieć na pytanie, jak otrzymujemy wielkości kątów pomiędzy ścianami kryształu, lub ich normalnemi t. j. tu mamy podać zasadę pomiarów krystalograficznych.



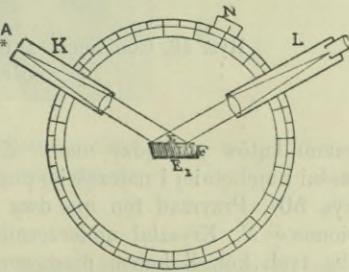
Kąty dwuściennie kryształów wielkich mierzymy goniometrem przykładanym (rys. 47). Przyrząd ten składa się z półkola, podzielonego na stopnie, i z dwu ruchomych linijek. Sposób użycia tego prostego narzędzia jest sam przez się zrozumiały. Czułość jego nie przenosi jednego stopnia ( $1^0$ ). Goniometr przykładany daje się stosować tylko, jak się rzekło, do kryształów dużych i przytem do kątów pomiędzy ścianami dość szerokimi. Gdy kąt tworzą ściany o polu małym, rzecz oczywista, goniometr przykładany jest przyrządem zbyt niedołącznym do takiego przypadku. Jak widzimy, jest to przyrząd niedoskonały i ograniczony w użyciu do ścian szerokich na kryształach pokazywanych, a więc nie nadaje się do badań ścisłych i dokładnych. Jednak w wielu przypadkach praktyki, szczególniej mineralogicznej, oddaje dobre usługi.



Rys. 47. Goniometr przykładany,  $\frac{1}{3}$  wielkości naturalnej.

Wiadomość o goniometrze przykładanym podajemy nasamprzód z powodu jego znaczenia historycznego w kryształografii, jako pierwszego przyrządu mierniczego w tej nauce, a powtórę dla tego, że poznanie jego budowy czyni łatwiej zrozumiałą zasadę przyrządów ścisłych.

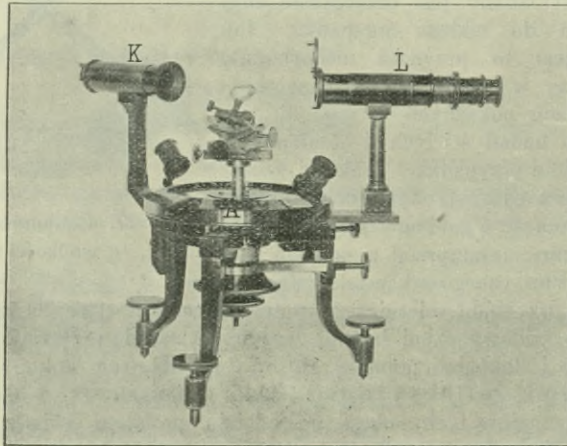
Ścisłe i dokładne pomiary kątów dwuściennych dokonywamy goniometrami refleksyjnymi czyli goniometrami z odbiciem. Zasada przyrządów tych polega na odbiciu promieni światła od ścian kryształu. Z kolimatora *K* (rys. 48), oświetlonego źródłem światła *A*, pada na ścianę kryształu *E* wiązka równoległych promieni, które po odbiciu się od ściany *E*, wpadają do lunety *L* i zbierają się w jej ognisku. Oko, spoglądające w lunetę *L*, widzi obraz szczeliny kolimatora. Obróćmy kryształ *EF*, wraz z kołem dzielonym, tak, aby w położeniu ściany *E* znalazła się ściana *F* t. j. druga ściana mierzonego kąta dwuściennego. Wtedy oko znów ujrzy w lunecie obraz szczeliny kolimatora, jeżeli, rozumie się, położenie lunety i kolimatora jest stałe i jeżeli krawędź kąta mierzonego jest prostopadła do płaszczyzny kolimatora i lunety. Rzecz jasna, że aby ujrzeć odbicie od drugiej ściany, należy obrócić kryształ o kąt, równy kątowi pomiędzy normalnemi dwu ścian w mowie będących. Wielkość tego kąta odczytamy na kole dzielonym, notując położenie jego względem stałej wskazówki *N* przy pierwszym i drugim odbiciu. Na rys. 49 przedstawiony jest goniometr refleksyjny w postaci najczęściej używanej. Oprócz kolimatora *K*, lunety *L* i koła dzielonego, które jest ukryte w pierścieniu-



Rys. 48. Zasada goniometrów z odbiciem.

wem pudełku *A*, goniometr ten posiada przyrząd do ustawiania pionowo krawędzi kątów mierzonych, oraz śruby mikrometryczne, którei każda ściana, odbijająca wiązkę promieni, ustawia się ściśle w to samo położenie. Dokładny opis tych przyrządów należy już do praktyki krystalograficznej.

Mówiło się jednak niejednokrotnie, że kryształ najwłaściwiej charakteryzuje się rozkładem normalnych w przestrzeni a nie wielko-



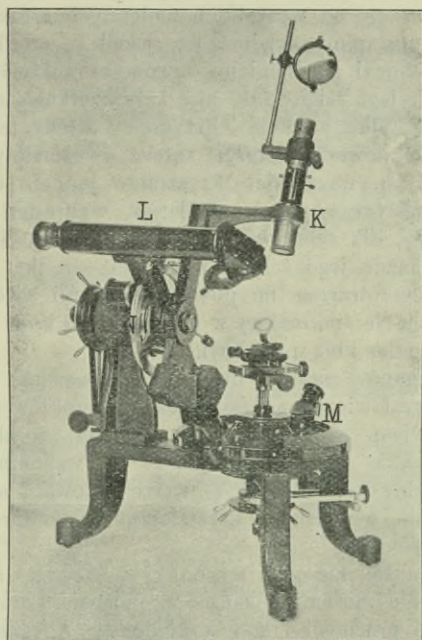
Rys. 49. Goniometr z odbiciem jednokołowy,  $\frac{1}{5}$  wielkości naturalnej.

ściami kątów pomiędzy nimi. Z tego więc powodu krystalografowie społeczeństwa najchętniej i najczęściej posługują się goniometrem teodolitym (rys. 50). Przyrząd ten ma dwa koła dzielone, jedno poziome *M*, drugie pionowe *N*. Kryształ umieszczamy na przecięciu się osi geometrycznych obu tych kół. Z kołem pionowym złączona jest luneta *L* i kolimator *K*. Luneta i kolimator ustawia się do siebie pod kątem stałym w ciągu pomiaru. Przez obrót koła poziomego z kryształem, oraz przez obrót koła pionowego z kolimatorem i lunetą zawsze możemy tak ustawić każdą ścianę kryształu badanego, że dwudzielna kąta kolimatora i lunety będzie prostopadła do ściany kryształu. Wtedy wiązka promieni światła z kolimatora padnie na ścianę, odbije się od niej i trafi do lunety. Ujrzymy w lunecie obraz szczeliny kolimatora i zapiszemy podziałki obu kół, znajdujące się wtedy naprzeciw stałych wskazówek. Jeżeli więc ustawiliśmy poprzednio kryształ tak, aby normalna jednej jakiegś jego ściany była równoległa do pionowej osi przyrządu, to odczytanie koła pionowego da nam, jak mówią astronomowie, »odległość wierzchołkową« każdej innej normalnej, a z odczytania koła poziomego będziemy mieć jej »azymut«.



albo, używając terminów geograficznych, otrzymamy »długość i »szerokość« każdej ściany<sup>1</sup>.

Czułość goniometrów refleksyjnych, jednokołowych i teodolitowych czyli dwukołowych, bywa doprowadzana przez konstruktorów społecznych



Rys. 50. Goniometr z odbiciem dwukołowy, czyli teodolitowy,  $\frac{1}{8}$  wielkości naturalnej.

do 10'', jednak w przeważnej większości badań krystalograficznych zupełnie wystarczają przyrządy, dające możliwość pomiaru z dokładnością 1'.

Rzeczą jest oczywistą, że dokładność pomiaru zależy nie tylko od czułości i dokładności przyrządu, oraz umiejętności nim władania, ale i od stopnia doskonałości kryształu. Im ściany kryształu są gładsze i lepiej lśniące, tem pomiar jest dokładniejszy.

<sup>1</sup> W razie gdy jest potrzebna wielkość kąta pomiędzy dwiema normalnemi, to oblicza się ją z odległości wierzchołkowych i azymutów tych dwu normalnych przez rozwiązanie odpowiednich trójkątów sferycznych, lub oznacza się ją graficznie siatką stereograficzną, o czem mowa będzie niżej w paragrafie 20<sup>a</sup>.

### § 20°. Rzut stereograficzny.

Mówiło się wyżej, że jedynym niezmiennym elementem geometrycznym kryształu jest ugrupowanie w przestrzeni prostych, które nazwalibyśmy normalnemi jego ścian. A więc w razie gdy zechcemy podać istotną charakterystykę geometryczną kryształu jakiejsz substancyi, czyli, gdy zaopragniemy oderwać się od wszystkich zmiennych szczegółów ich pozoru zewnętrznego, to postąpimy najstuszniej, jeżeli ze środka któregośokolwiek kryształu tej substancyi promieniem dowolnym zakreśliemy kulę i przesuniemy równolegle jego ściany tak, aby każda zetknęła się z powierzchnią tej kuli w jednym tylko punkcie. Otrzymany wtedy na powierzchni kuli punkty styczne. Z powodu stałości kątów dwuściennych rozkład tych punktów jest stały u wszystkich kryształów jednej substancyi, a więc dla niej charakterystyczny, godny pomiarów, wykreślić i obliczeń.

Innemi słowy, dla scharakteryzowania kryształu spuszczaemy z jego środka pion na każdą jego ścianę i z tegoż środka zakreślamy kulę. Wtedy każda ściana otrzyma na powierzchni kuli swój biegun, t. j. punkt przecięcia się jej normalnej z powierzchnią kuli. Kulę tę nazwijmy kulą projekcyjną, albo kulą projekcyi.

Rozkład biegunów na kuli może być oznaczony tym samym sposobem, jakim geografowie oznaczają położenie punktów powierzchni ziemi na globie, t. j. dwiema spólrzędnymi sferycznymi: szerokością i długością, albo, używając języka astronomów, jak to już wspomnieliśmy w opisie goniometru teodolitowego, odległością wierzchołkową i azymutem. Z tego widzimy, że istotnie, wykreślenia kryształograficzne najprościej wykonywać możemy na globusie.

Globus, wszakże, nie jest wygodny w użyciu, a, co ważniejsza, jego powierzchni nie możemy dołączać do pisma. Użycie globusu ogranicza się tylko do pracowni i sali wykładowej. Abyśmy więc mogli dokonywać wykreśleń kryształograficznych na tablicy i papierze, musimy przenieść powierzchnię kuli na płaszczyznę.

Liczne są sposoby przenoszenia powierzchni kuli na płaszczyznę. Z pomiędzy nich wybierzemy ten sposób, który wymaga użycia tylko linii prostych i łuków kół. Jest to t. zw. rzut stereograficzny, albo projekcyja stereograficzna. W rzucie tym »płaszczyzną projekcyi« jest przekrój środkowy kuli projekcyjnej, a »punktem widzenia« jest jeden z biegunów tego przekroju.

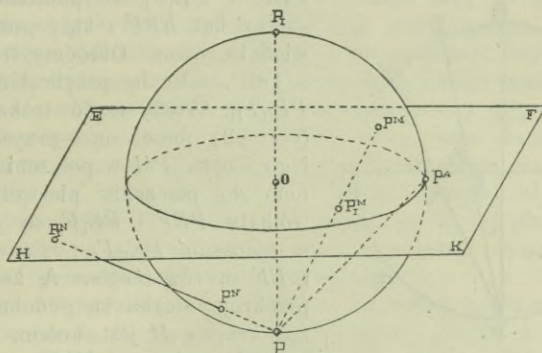
A więc wyobraźmy sobie kulę  $O$  (rys. 51) i na jej powierzchni kilka punktów:  $P$ ,  $P^A$ ,  $P^M$ ,  $P^N$ ,  $P_T$ . Mamy wykreślić te punkty na płaszczyźnie w projekcyi stereograficznej.

Przetnijmy kulę  $O$  dowolną płaszczyzną środkową  $EFHK$  i obierzmy ją na płaszczyznę rzutu. Koło, powstałe z przecięcia kuli projekcyjnej płaszczyzną rzutu, będziemy nazywali kołem projekcyi, a jego okrąg, obwodem projekcyi, albo okręgiem koła projekcyjnego. T. zw. »punkt widzenia« w rzucie stereograficznym jest jednym z dwu biegunów płaszczyzny rzutu, t. j. leży on na powierzchni kuli w odległości  $90^\circ$  od płaszczyzny rzutu. Na rys. 51 widoczna, że biegunami płaszczyzny



$EFKH$  są punkty  $P$  i  $P_1$ , jako przecięcia się z powierzchnią kuli prostej  $PP_1$ , która jest normalną płaszczyzny  $EFHK$ , czyli do niej prostopadłą. Prosta  $PP_1$ , prostopadłą do płaszczyzny rzutu, będziemy nazywali osią projekcji.

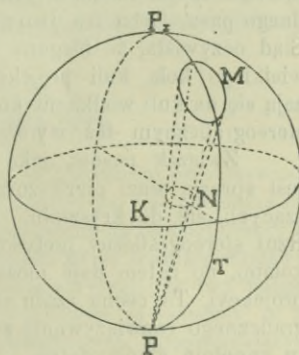
Obierzmy na punkt widzenia biegun  $P$ . Następnie połączmy liniami prostymi każdy punkt znajdujący się na powierzchni kuli z punktem



Rys. 51. Zasada rzutu stereograficznego.

widzenia  $P$ . Te proste przecinają się z płaszczyzną rzutu  $EFHK$  w różnych punktach: prosta  $PP_1$  w punkcie  $O$ , prosta  $PP^M$  w punkcie  $P_1^M$ , prosta  $PP^A$  w punkcie  $P^A$ , prosta  $PP^N$  w punkcie  $P_1^N$  i t. d. Otóż punkty, w których proste omawiane przecinają płaszczyznę rzutu, są rzutami stereograficznymi punktów, znajdujących się na powierzchni kuli. A więc  $O$  jest rzutem czyli projekcją punktu  $P_1$ , punkt  $P_1^M$  jest rzutem punktu  $P^M$ ,  $P_1^N$  jest projekcją punktu  $P^N$ , a punkt  $P^A$  jest sam sobie projekcją, bo pada na płaszczyznę  $EFHK$ .

Taka więc jest istota rzutu stereograficznego, który panuje wszędzie w krytalografii, a panuje on w niej z powodu swej najważniejszej własności, że każdy okrąg koła, znajdujący się na powierzchni kuli, w rzucie stereograficznym wyraża się również okręgiem koła. Mianowicie, niechaj  $M$  (rys. 52) będzie okręgiem małego koła na powierzchni kuli,  $K$  niechaj będzie płaszczyzną rzutu,  $P$  — punktem widzenia. Wtedy rzutem stereograficznym okręgu  $M$  jest krzywa  $N$ , czyli przekrój stożka ukośnego z płaszczyzną  $K$ . Wierzchołkiem tego stożka jest  $P$ , a podstawą koło  $M$ . Oczywiście, że istnieje jedno takie wielkie koło południkowe  $PTP_1$ , które



Rys. 52. Okrąg koła małego na powierzchni kuli i jego rzut stereograficzny.





szczyzny rzutu, czyli te, których osi przecinają płaszczyznę rzutu pod kątem nierównym  $90^\circ$ , na kuli wyrażają się wielkimi kołami, przecinającami się z kołem projekcyi, a w rzucie stereograficznym wyrażają się one okręgami kół ekscentrycznych względem koła projekcyi i mających promień większy od promienia koła projekcyjnego. Okrąg każdego takiego koła przecina się z okręgiem koła projekcyi w dwu punktach. Oba te punkty i środek koła projekcyi zawsze leżą na jednej prostej, czyli zawsze są one końcami średnicy koła projekcyjnego.

Im więcej odchyła się oś pasa od osi projekcyi, tem większy jest promień koła, będącego rzutem stereograficznym owego pasa. Aż wreszcie, gdy oś pasa z osią projekcyi tworzy kąt prosty, t. j. gdy oś pasa przylega do płaszczyzny rzutu, to wtedy promień koła stanowiącego rzut stereograficzny pasa odnośnego, staje się nieskończenie wielki, t. j. taki pas projektuje się już nie kołem lecz prostą. Oczywiście: koła pasowe o osiach równoległych do płaszczyzny rzutu są do tej płaszczyzny prostopadłe, a więc w projekcyi stereograficznej wyrażają się one jako proste, przechodzące przez środek koła projekcyjnego.

Z rys. 51 widzimy, że ta półkula, na której powierzchni znajduje się punkt widzenia  $P$ , projektuje się zewnątrz obwodu koła projekcyjnego. Tę część rzutu stereograficznego, jako rozciągającą się na bardzo rozległej płaszczyźnie, odrzucamy. Pozostawiamy tylko tę drugą część rzutu, zawartą w obrębie obwodu koła projekcyi. Jest to rzut półkuli górnej, t. j. tej, która znajduje się po przeciwnej stronie płaszczyzny projekcyjnej od punktu widzenia.

Tak więc projekcyja stereograficzna kryształu ma zawsze kształt koła, w którego obwodzie powykreślane są różne średnice jako projekcyje pasów równoległych do płaszczyzny rzutu, i łuki kół o różnych promieniach, opierających się na średnicach koła projekcyi jak na cięciwach, jako rzuty pasów, pochylonych do płaszczyzny projekcyjnej (ob. rys. 54, 58 i tablicę IV dodatku).

## § 20<sup>a</sup>. Siatka stereograficzna G. Wulffa.

Do wykreslania rzutów stereograficznych i do graficznego rozwiązywania różnych zagadnień trygonometryczno-sferycznych nadzwyczaj jest przydatna siatka stereograficzna G. Wulffa. Jej okaz zmniejszony mamy na osobnej tablicy III w dodatku do książki niniejszej. W oryginale ma ona 20 cm średnicy. Siatka ta składa się z koła projekcyjnego, na którego obwodzie wybrane są dwa bieguny przeciwległe. Przez bieguny te stereograficznie wykreslone są południki co  $2^\circ$ . Sieć południków przecięta jest siecią kół równoleżnikowych, odpowiadających biegunom sieci południkowej. Koła równoleżnikowe również wykreslone są w odstępach  $2^\circ$ . Na siatkę kładziemy gładką i równą kartę przeźroczystej kalki. Na kalce wykreslamy obwód koła, równy obwodowi siatki, naznaczamy jego środek i na obwodzie zaznaczamy jakiś punkt, odpowiadający któremukolwiek stałemu punktowi siatki. Wtedy możemy za każdym razem ułożyć kalkę na siatce w położeniu tem samym.

Opiszmy rozwiązanie czterech najważniejszych zagadnień rzutu stereograficznego. To wyjaśni nam sposób użycia siatki.

1°. Mamy wykreślić wielkie koło, przechodzące przez dwa bieguny dane, oraz mamy zmierzyć odległość kątową pomiędzy tymi biegunami.

Weźmy np. projekcję kryształu skalenia, wykreśloną na przezroczystej kalce na tablicy IV w dodatku do książki niniejszej i wyobraźmy sobie, że mamy już wyznaczone bieguny ścian  $O$ ,  $P$ ,  $N$ ,  $M$ ,  $T$ ,  $L$ , i t. d., lecz niema jeszcze na niej wyznaczonych kół pasowych, które wykreślić należy dla uwidocznienia, a nieraz nawet dla wykrycia związku pasów. Przypuśćmy, że mamy znaleźć wielkie koło, przechodzące przez [bieguny:  $P(001)$  i  $O_I(\bar{1}11)$ ]. A więc, układamy kalkę na siatce tak, aby środek projekcji t. j. punkt  $+Z$  leżał na środku siatki, poczem obracamy kalkę koncentrycznie, to znaczy tak, aby punkt  $+Z$  ciągle pozostawał na środku siatki. Tym sposobem doprowadzimy kalkę do takiego położenia, że oba bieguny:  $P(001)$  i  $O_I(\bar{1}11)$  znajdują się na jednym południku siatki. W danym razie będzie to południk, odległy od południka środkowego o  $14^\circ$ . Południk ten jest właśnie poszukiwaną projekcją tego pasa, do którego należą ściany  $P(001)$  i  $O_I(\bar{1}11)$ . (Znalazłszy ten południk zarazem spostrzegamy, że ściany  $T_I$ ,  $O_I$ ,  $P$  i  $T_{III}$  należą do jednego pasa). Policzmywszy równoleżniki pomiędzy biegunem  $P$  i  $O_I$  na znalezionym południku, otrzymujemy poszukiwaną odległość kątową tych biegunów:  $56^\circ$ . W razie gdy południk poszukiwany znajdzie się pomiędzy dwoma południkami siatki, to łatwo możemy go interpolować na oko, wobec tego, że południki siatki, wykreślone są dość gęsto. W każdym, zatem, przypadku jesteśmy w stanie wykreślić od ręki z pomocą siatki znaleziony południk.

2°. Mamy znaleźć biegun danego koła wielkiego.

Np. dano nam koło  $M_I N_I P N_{II} M_{II}$  (tabl. IV). Mamy znaleźć biegun tego koła, t. j. punkt na powierzchni kuli odległy od koła omawianego o  $90^\circ$ .

Obracamy kalkę koncentrycznie, aż dany rzut koła wielkiego przylegnie do któregoś odpowiadającego mu południka siatki. Koło  $MNP$  przylega do południka, leżącego w odległości  $25^\circ$  od południka środkowego. Znalazłszy ten południk, na równiku siatki odliczamy od niego  $90^\circ$  i znajdujemy biegun poszukiwany. W danym, razie biegunem koła  $MNP$  jest punkt —  $X$ .

Zagadnienie odwrotne — mamy znaleźć koło wielkie, odległe o  $90^\circ$  od bieguna wiadomego — rozwiązuje się tak samo: koncentrycznym obrotem kalki ustawiamy dany biegun na równiku siatki, odliczamy na równiku punkt, odległy od danego bieguna o  $90^\circ$  i wykreślamy na kalce południk, przez ten punkt przechodzący.

3°. Mamy znaleźć miejsce punktów, odległych od bieguna wiadomego o daną ilość stopni.

Rzecz oczywista, że będzie to jakieś koło małe. Dla wykreślenia tego koła przykładamy kalkę do siatki koncentrycznie w położeniu dowolnym, i na południku, który przechodzi w tem położeniu przez dany nam biegun, liczymy równoleżniki, poczynając od danego bieguna. Przez odliczenie żądanej ilości stopni znajdujemy punkt, który na tym południku leży w odległości żądanej. Następnie obracamy kalkę koncentrycznie o kąt dowolny i w tem drugim po-



łożeniu kalki znów wyznaczamy tak samo punkt, odległy od danego bieguna o żadaną ilość stopni na tym południku, na którym znalazł się biegun, będący przedmiotem zadania. To samo robimy jeszcze po raz trzeci. W ten sposób znajdujemy trzy punkty, które wyznaczają całe koło. Ponieważ jednak dokonujemy wykreśleń, w mowie będących, od ręki, więc musimy manipulację, opisaną przed chwilą, powtórzyć więcej niż trzy razy. Trzy bowiem punkty wystarczają do wykreślenia koła cyrklem, a do wykreślenia odręcznego jest to ich ilość zamała. Zwykle przeto wyznaczamy punkty, odległe od danego bieguna o żadaną ilość stopni, nie tylko po jednej, lecz i po drugiej stronie bieguna, a prócz tego powtarzamy to wyznaczenie więcej niż trzy razy. Sześć pozycyji wystarcza zazwyczaj.

Po wyznaczeniu kilku lub kilkunastu punktów, odległych od bieguna danego o żadaną ilość stopni, przesuujemy kalkę ekscentrycznie i wyszukujemy takiego koła równoleżnikowego, do którego przystawałyby punkty przez nas znalezione. Obracając kalkę ekscentrycznie i bacząc, aby za każdą pozycyją kalki kilka wyznaczonych punktów leżało na odpowiednim kole równoleżnikowym, możemy skopiować cały równoleżnik i wykreślić całe koło poszukiwane.

4°. Mamy zmienić płaszczyznę projekcyi.

Biegun płaszczyzny projekcyjnej, jak nam wiadomo, projektuje się w punkcie środkowym koła projekcyjnego. A więc, w razie zmiany płaszczyzny projekcyjnej na inną, biegun tej nowej płaszczyzny projekcyjnej znajdzie się w środku projekcyi. Obracamy przeto kalkę koncentrycznie, dopóki biegun tej płaszczyzny, którą obraliśmy na nową płaszczyznę rzutu, nie padnie na równik. Gdy wreszcie umieścimy biegun omawiany na równiku siatki, wtedy liczymy stopnie, dzielące go od środka. Ponieważ w nowem położeniu projekcyi biegun ten ma znaleźć się w środku koła projekcyjnego, więc musi on być przesunięty do środka o tę ilość stopni, która go obecnie oddziela od środka, i którą odliczyliśmy na równiku przed chwilą. Lecz razem z nim o tę samą ilość stopni i w tym samym kierunku muszą być przesunięte na swych kołach równoleżnikowych wszystkie inne bieguny tej projekcyi.

Wykreślenie to wykonywa się najlepiej w sposób taki, że projekcyę pierwotną układamy na siatce tak, aby, biegun nowej płaszczyzny rzutu był na równiku, a na tę projekcyę kładziemy czystą kalkę i na niej wyznaczamy nowe miejsca biegunów na ich równoleżnikach, przemieszczając je tak, jak się rzekło wyżej. Robi się to bez trudności, bo linie siatki widać dobrze nawet przez kilka warstw kalki.

Te cztery zadania obejmują najważniejsze przypadki użycia siatki stereograficznej w praktyce.

Gdy sposób użycia siatki jest już nam znany, możemy przystąpić do wyjaśnienia, jak notuje się na siatce wyniki pomiarów goniometrycznych.

Przeniesienie na siatkę wyników pomiaru goniometrem teodolitowym jest samo przez się tak proste i zrozumiałe, że nie wymaga żadnych wyjaśnień bliższych.

Co zaś do pomiaru, wykonanego goniometrem jednokołowym lub przykładanym, to zważmy co następuje.

Zanim przystąpimy do pomiaru kątów dwuściennych kryształu badanego,

oznaczamy ściany jego numerami, lub wogóle jakimikolwiek znakami dowolnymi. Poczem, gdy zmierzylismy już kąty pomiędzy normalnemi ścian, przystępujemy do wykreślenia projekcyi stereograficznej na kalce. A więc, jak się to już mówiło, naznaczamy na kalce środek, wykreślamy okrąg koła, równy obwodowi siatki, i na okręgu tym zaznaczamy jakiś punkt, zgodny z którymkolwiek punktem stałym siatki. Potem na obwodzie projekcyi w punkcie dowolnym umieszczamy biegun ściany Nr. 1. Licząc po obwodzie równoleżniki, wyznaczamy punkt bieguna Nr. 2, który od Nr. 1 leży, rzecz jasna, w odległości kąta, jaki tworzą normalne ścian Nr. 1 i Nr. 2. Aby wyznaczyć miejsce bieguna Nr. 3 wykreślamy dwa małe koła (zagadnienie 3<sup>o</sup>), których środki sferyczne leżą w biegunach Nr. 1 i Nr. 2, a promienie sferyczne równają się zmierzonym kątom normalnej Nr. 1 z Nr. 3, oraz Nr. 2 z Nr. 3. Punkt przecięcia się tych dwu kół jest biegunem ściany Nr. 3. W ten sam sposób przechodzimy do ściany Nr. 4 i t. d. A więc w pomiarach kątów kryształu uważać należy, aby każda ściana była związana pomiarem z dwiema innymi ścianami.

Po wyznaczeniu wszystkich biegunów przerysowujemy rzut sposobem 4<sup>o</sup> na odpowiednią celom naszym płaszczyznę projekcyi, o ile, rzecz jasna, od razu nie obralimy na płaszczyznę rzutu przekroju kryształu, prostopadłego do pasa ścian Nr. 1 i Nr. 2.

Gdy wreszcie ustaliliśmy w ten czy w inny sposób płaszczyznę rzutu, wybieramy ściany czworosięcianu jednostkowego, a potem wyznaczamy punkty, w których powierzchnię kuli projekcyjnej przecinają krawędzi osiowe czworosięcianu jednostkowego, mając na względzie co następuje.

Rzeczą jest oczywistą, że jeżeli w jakimś punkcie powierzchni kuli znajduje się biegun ściany, to ściana ta, po jej równoległym przesunięciu do środka kuli, tworzy koło wielkie, odległe od swego bieguna o 90°. Innemi słowy wszystkie proste, do tej ściany przylegające, po jej równoległym przesunięciu do środka, przecinają powierzchnię kuli na okręgu wielkiego koła, odległego od jej bieguna o 90°. Z tego wynika, że prosta, która powstaje z przecięcia się dwu ścian, przecina powierzchnię kuli w punkcie odległym od obu biegunów tych ścian o 90°. A więc gdy mamy bieguny dwu ścian i pragniemy wyznaczyć punkt, w którym krawędź tych ścian przecina powierzchnię kuli, to wykreślamy wielkie koło, odległe o 90° od jednego bieguna i wielkie koło odległe o 90° od drugiego bieguna. Punkt przecięcia się tych dwu wielkich kół, jako odległy o 90° od obu biegunów, jest rzutem tego punktu, w którym krawędź poszukiwana przecina powierzchnię kuli. Tym sposobem wyznaczamy punkty: *X*, *Y*, *Z*, t. j. punkty przecięcia się trzech krawędzi osiowych z powierzchnią kuli.

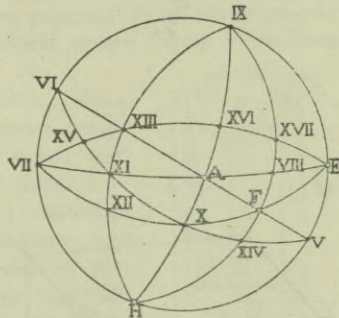
Nakoniec, koncentrycznymi obrotami kalki mierzymy łuki pomiędzy biegunem każdej ściany a trzema punktami osiowymi *X*, *Y*, *Z*, poczem, wzięwszy z tablicy I dostawy kątów otrzymanych, obliczamy znak każdej ściany wzorem:

$$h : k : l = \frac{\cos(PX)}{\cos(P_1X)} : \frac{\cos(PY)}{\cos(P_1Y)} : \frac{\cos(PZ)}{\cos(P_1Z)}$$

Sposobami, opisanymi powyżej, bardzo łatwo przeprowadza się dedukcyja pasów t. j. graficzne rozwiązywanie tych zagadnień, które w § 15<sup>o</sup> rozwiązywaliśmy rachunkiem. N. p. niechaj punkty *A*, *E*, *F*, *H*, (rys. 54.) będą



biegunami ścian czworościanu jednostkowego. Te cztery ściany wyznaczają sześć pasów:  $AE, AF, AH, FE, FH, EH$ . Wykreślmy ich koła pasowe. Widzimy, że przecinają się one w punktach:  $V, VI, VII, VIII, IX, X$ . Punkty te są to projekcje ścian, możliwych na tym kryształcie, które bezpośrednio wyprowadzają się z czterech ścian  $A, E, F, H$ . Jeżeli następnie przez otrzymane bieguny i bieguny ścian czworościanu jednostkowego parami przeprowadzimy dalsze koła pasowe, to ich przecięciami wyznaczą się bieguny ścian  $XI, XII, XIII, \dots$  i w ogóle wszystkich możliwych na tym kryształcie.



Rys. 54. Graficznie dokonana dedukcja pasów.

Po nabyciu pewnej wprawy, kreśląc uważnie i starannie na kalkach zupełnie gładkich i równych, możemy graficznie rozwiązywać zagadnienia z dokładnością do  $30'$ , o ile używamy siatki oryginalnej, t. j. mającej średnicę  $20\text{ cm}$ . Siatka, zmniejszona do wymiarów tablicy III, daje dokładność  $1^\circ$ , co także zupełnie wystarcza do rachunków przybliżonych.

**§ 20. Ogólnie przyjęty sposób orientowania kryształu i oznaczania krawędzi osiowych.**

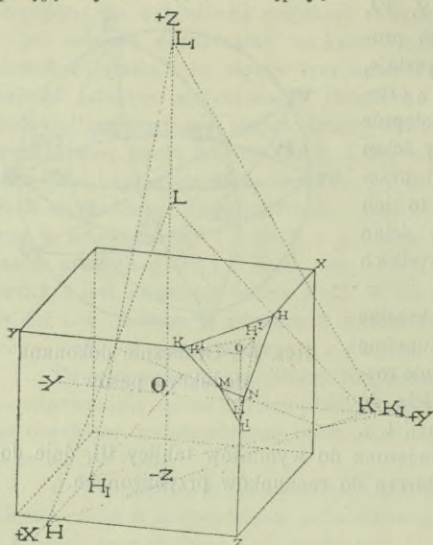
Przez stosowanie rzutu stereograficznego, a więc przez sprowadzenie wszystkich kierunków równoległych do jednej prostej, ten wierzchołek czworościanu jednostkowego, który oznaczyliśmy literą  $O$  i nazwaliśmy początkiem, staje się środkiem kuli projekcyjnej t. j. środkiem koła projekcyi. Umieszczenie początku  $O$  w środku konstrukcyi stosujemy we wszystkich przypadkach praktyki krytalograficznej. Mianowicie, na krawędzi osiowe wybieramy trzy nierównoległe i nieleżące na jednej płaszczyźnie krawędzi kryształu (n. p.  $ox, oy, oz$ , rys. 55), a potem przez jego środek przeprowadzamy trzy proste, równoległe do tych wybranych krawędzi, (n. p.  $+X-X, +Y-Y, +Z-Z$ , rys. 55). Te proste nazywają się osi. Następnie wybieramy ścianę kryształu, która po rozpostarciu przecina wszystkie trzy osi i nadajemy jej znak ( $III$ ), t. j. mianujemy ją ścianą jednostkową. Wtedy wszystkie pozostałe ściany tego kryształu otrzymują znaki

$$(h\ k\ l), (h_a k_a l_a), (h_b k_b l_b) \dots \dots \dots (h_n k_n l_n)$$

z długości łuków pomiędzy ich biegunami oraz biegunami ściany jednostkowej a punktami osiowymi, t. j. tymi punktami, w których krawędzi osiowe przecinają powierzchnię kuli, jak wskazuje znany nam wzór:

$$h : k : l = \frac{\cos(PX)}{\cos(P_1X)} : \frac{\cos(PY)}{\cos(P_1Y)} : \frac{\cos(PZ)}{\cos(P_1Z)}$$

Co zaś do ustawienia, czyli orientowania kryształu, to ogólnie przyjęta jest zasada następująca.



Rys. 55. Krawędzi osiowe i osi (por. rys. i str. 19).

W znaku  $(hkl)$  i  $[uvw]$  liczba pierwsza ( $h$  lub  $u$ ) ściąga się do osi  $X$ , liczba stojąca na drugim miejscu ( $k$  lub  $v$ ) odnosi się do osi  $Y$ , i liczba ostatnia ( $l$  lub  $w$ ) ma się do osi  $Z$ .

Kryształ ustawia się tak, aby oś  $X$  była skierowana do obserwatora. Oś  $Y$  biegnie od obserwatora na prawo i na lewo. A więc oś  $Z$  ma kierunek w górę i w dół.

Z początku  $O$  wychodzą zatem po dwa promienie każdej osi (rys. 56). Promień przedni osi  $X$ , prawy osi  $Y$  i górny osi  $Z$  mamy za dodatni. Promień tylny osi  $X$ , lewy osi  $Y$  i dolny osi  $Z$  uważamy za ujemny. Gdy ściana przecina ujemny promień osi, to wyznacznik jej, odnoszący się do promienia ujemnego, ozna-

czamy znakiem „mniej”, położonym nad liczbą np.  $(\bar{1}\bar{1}\bar{2})$ .

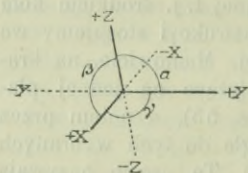
Gdy dla charakterystyki substancji podaje się kształt czworościanu jednostkowego jej kryształów, t. j. kąty krawędzi osiowych i stosunek odcinków ściany jednostkowej, który w książce niniejszej stale oznaczamy przez  $OH_1 : OK_1 : OL_1$ , to powszechnie przyjęto, że odcinek  $OH_1$  odcięty od osi  $X$ , jest oznaczony literą  $a$ , odcinek osi  $Y$ , t. j.  $OK_1$ , ma znak  $b$  i odcinek osi  $Z$ , t. j.  $OL_1$ , oznacza się przez  $c$ , czyli  $OH_1 : OK_1 : OL_1 = a : b : c$ , przyczem  $b$  stale przyjęte jest zrównywać z jednością. Kąty krawędzi osiowych czworościanu

jednostkowego oznacza się literami greckimi:  $\alpha, \beta, \gamma$  (rys. 56). Mianowicie:  $\alpha$  oznacza kąt osi  $YOZ$ ,  $\beta = XOZ$ ,  $\gamma = XOY$ . A więc kryształ zwraca się do obserwatora kątem  $\beta$ , przytem za dodatnie promienie osi  $X$  i  $Z$  ma się boki rozwartego kąta  $\beta$ .

N. p. kształt czworościanu jednostkowego jednego ze skaleni, mianowicie albitu  $Na_2Al_2Si_6O_{18}$  jest:

$$a : b : c = 0.6333 : 1 : 0.5575$$

$$\alpha = 94^\circ 4', \quad \beta = 116^\circ 28', \quad \gamma = 88^\circ 8'.$$



Rys. 56. Osi, ich promienie dodatnie i ujemne.

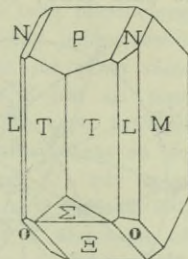


### § 20'. Rzut stereograficzny kryształu skalenia potasowego i obliczenie sposobem graficznym wyznaczników jego ścian.

Rozpatrzmy teraz przykład, na którym poznamy bliżej użycie projekcji i siatki, oraz przekonamy się naocznie o istocie prawa pasów i wyznaczników całych.

Związek chemiczny potasu, glinu, krzemu i tlenu  $K_2Al_2Si_6O_{16}$  — skałek potasowy — jest bardzo rozpowszechniony w skorupie ziemskiej. Jeden rodzaj tego skalenia, t. zw. mikroklin, tworzy duże i piękne kryształy. Łatwo je nabyć możemy w każdym zasobniejszym składzie minerałów. Wielościanny krystaliczne tego minerału bywają ograniczone różnymi ilościami płaszczyzn, jak to już wiemy z rysunku 21—24-go na str. 22.

Pewien kryształ skalenia był połączeniem ścian:  $M, L, T, P, \Xi, \Sigma, O, N$  (rys. 57 i 58). Jedna ze słuchaczek autora zmierzyła kąty pomiędzy jego ścianami goniometrem przykładowym. Spełnienia tych kątów do  $180^\circ$  są to kąty pomiędzy normalnemi ścian. Oto te spełnienia:



Rys. 57. Kryształ skalenia.

$$M_1/L_1 = 29^\circ$$

$$M_1/T^1 = 60^\circ$$

$$T_{IV}/P = 68^\circ$$

$$P/\Xi = 50^\circ$$

$$P/\Sigma = 80^\circ$$

$$P/N_I = 45^\circ$$

$$\Xi/O_I = 27^\circ$$

Mając kąty pomiędzy normalnemi ścian, oraz posiadając siatkę stereograficzną i arkusz kalki, możemy od ręki wykreślić rzut stereograficzny tego kryształu.

Ustawmy pas ścian  $MLT$  pionowo i obróćmy kryształ tak, aby ściana  $P$  była do nas pochylona. Ścianę  $P$  odróżnimy od ściany  $\Xi$  i poznamy po tem, że równoległe do niej biegnie w kryształach skaleni łupliwość, która zwykle uwidacznia się na ścianach  $M$  delikatnymi szczelinkami, równoległemi do krawędzi  $M/P$ . W takim ustawieniu kryształu ściany  $M$  znajdują się na jego prawej i lewej stronie.

Obierzmy na płaszczyznę rzutu przekrój prostopadły do pasa  $MLT$ .

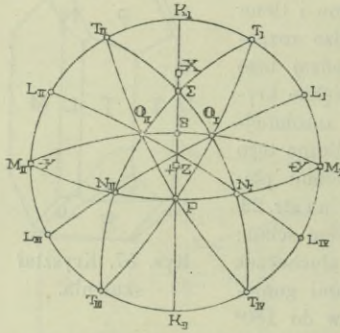
Następnie naznaczmy na kalce punkt środkowy i nakreślmy obwód koła projekcji<sup>1</sup>.

Kąt  $M/P$  w granicach dokładności pomiaru goniometrem przykładowym i w granicach dokładności siatki stereograficznej wynosi  $90^\circ$  z obu stron (prawej i lewej) kryształu. A więc możemy podzielić kryształ na dwie połowy

<sup>1</sup> Na tablicy IV w luźnym dodatku do książki niniejszej mamy na kalce odbitkę rękopiśmiennej projekcji, którą opisuje ustęp niniejszy.

symetryczną płaszczyzną, równoległą do ścian  $M$ . Nakreślmy zatem na kalce prostą  $K_I K_{II}$  (rys. 58) t. j. ślad tej płaszczyzny na płaszczyźnie rzutu. Ta prosta  $K_I K_{II}$  ułatwi nam w następstwie pewne postępowanie.

Rzecz oczywista, że gdy płaszczyzną rzutu jest płaszczyzna prostopadła do pasa  $MLT$ , to obwód koła projekcji jest kołem pasowym tego pasa,



Rys. 58. Rzut stereograficzny kryształu skalenia.

t. j. bieguny ścian  $M$ ,  $L$ ,  $T$ , znajdują się na obwodzie koła projekcyjnego. Jeżeli średnica  $K_I K_{II}$  jest śladem płaszczyzny środkowej, równoległej do ścian  $M_I$  i  $M_{II}$ , to bieguny tych ścian leżą o  $90^\circ$  od tej średnicy, t. j. znajdują się w punktach  $M_I$  i  $M_{II}$  rysunku 58-go. Z pomiaru wynika, że w odległości  $29^\circ$  od biegunów  $M$  leżą bieguny  $L$ , a w odległości  $60^\circ$  bieguny  $T$ .

Dalej, mamy kąt normalnych  $T_{IV}/P = 68^\circ$ . Nazwijmy biegun siatki odpowiadający punktowi  $K_I$  biegunem północnym, podobnie jak to przyjęte jest na mapach geograficznych. Obróćmy kalkę koncentrycznie tak, aby biegun  $T_{IV}$  znalazł się na południowym biegunie siatki. Policzmy koła

równoleżnikowe i odszukajmy koło, odległe od bieguna o  $68^\circ$ . Rzut bieguna  $P$  leży bowiem od  $T_{IV}$  w odległości  $68^\circ$ , a z kształtu kryształu widać, że winien on leżeć na linii  $K_I K_{II}$ , linia ta bowiem jest rzutem koła pasowego  $P\Xi\Sigma$ . A więc poszukiwany rzut bieguna  $P$  jest to punkt przecięcia się równoleżnika  $68^\circ$  ze śladem  $K_I K_{II}$  w tem położeniu, gdy na biegunie południowym siatki leży biegun  $T_{IV}$ .

Mając już biegun  $P$ , przywracamy pierwotne położenie kalki, t. j. to, w którym linia  $K_I K_{II}$  przystaje do środkowego południka siatki i, licząc koła równoleżnikowe wzdłuż linii  $K_I K_{II}$  od punktu  $P$ , wyznaczamy  $\Xi$ , odległe od  $P$  o  $50^\circ$  i  $\Sigma$  odległe od  $P$  o  $80^\circ$ , jak wskazuje pomiar.

Następnie, z równoległości krawędzi wnosimy, że ściany  $M$ ,  $N$  i  $P$  należą do jednego pasa, a więc bieguny tych ścian znajdują się na jednym kole pasowym. Obróćmy kalkę koncentrycznie o  $90^\circ$  od położenia pierwotnego, t. j. ustawmy punkty  $M_I$  i  $M_{II}$  na południowy i północny biegun siatki. Wtedy na tym południku, na którym znajduje się biegun  $P$ , liczymy koła równoleżnikowe, odliczamy odległość  $45^\circ$  od  $P$  i znajdujemy biegun  $N$ . W tem samym położeniu kalki na kole pasowym  $MO\Xi$  wyznaczamy biegun  $O$ , odległy od  $\Xi$  o  $27^\circ$ , widać bowiem na kryształach, że ściany  $M$ ,  $O$ ,  $\Xi$  należą do jednego pasa.

Jeżeli za każdym razem wyznaczaliśmy bieguny nie tylko tych ścian, o których tu mowa, ale również odpowiednich im po drugiej stronie  $K_I K_{II}$ , to projekcję ukończyliśmy.

Teraz obracamy kalkę koncentrycznie. Przekonamy się, że siatką wykryjemy pasy, niewidoczne pierwotnie na kryształach. W bezpośredniej obserwacji kryształu spostrzegamy tylko pasy  $[MLT]$ ,  $[P\Xi\Sigma]$ ,  $[MO\Xi]$  i  $[MNT]$ . Dopiero na projekcji siatki wykazuje, że bieguny  $L_{IV}$ ,  $N_I$ ,  $O_{II}$ ,  $L_{II}$ , leżą na jednym



kole tak samo, jak  $L_{III}$ ,  $N_{II}$ ,  $O_I$ ,  $L_I$ , a także  $T_{IV}$ ,  $N_I$ ,  $O_I$ ,  $\Sigma$ ,  $T_{II}$  i  $T_{III}$ ,  $N_{II}$ ,  $O_{II}$ ,  $\Sigma$ ,  $T_I$ , oraz  $T_{IV}$ ,  $P$ ,  $O_{II}$ ,  $T_{II}$  i  $T_{III}$ ,  $P$ ,  $O_I$ ,  $T_I$ .

Przykład ten jest naocznym dowodem związku pasów: każda ściana leży na skrzyżowaniu nie tylko dwu, ale trzech, a nawet, jak  $O$ , czterech pasów.

Ponieważ zawczasu wybraliśmy na płaszczyznę rzutu przekrój odpowiedni, przeto nie zachodzi potrzeba przerysowywania projekcyi na inną płaszczyznę.

Przystąpmy teraz do wyboru krawędzi osiowych i ściany jednostkowej.

Ustawiliśmy kryształ pionowo pasem  $[MLT]$ . A więc już przez samo ustawienie wybraliśmy oś  $Z$  i oś  $Y$ . Mianowicie: osią  $Z$  jest oś pasa  $[MLT]$  t. j. krawędź  $M/L \parallel L/T$ , a osią  $Y$  jest oś pasa  $[P\Sigma\Sigma]$  czyli krawędź  $P/\Sigma \parallel \Sigma/\Sigma$ , albo normalna ścian  $M$ . Co zaś do osi  $X$ , to możemy obrać na nią oś pasa  $[MNP]$ , albo oś pasa  $[MO\Sigma]$ . W przypadku pierwszym, t. j. gdy na oś  $X$  obierzemy oś pasa  $[MNP]$ , ścianą jednostkową będzie ściana  $O$ , a znak  $(001)$  dostanie się ścianie  $P$ . W przypadku drugim, t. j. gdy osią  $X$  stanie się oś pasa  $[MO\Sigma]$ , znak  $(111)$  otrzyma ściana  $N$ , a znak  $(001)$  przypadnie dla ściany  $\Sigma$ . Rzecz jasna, że ścianom  $M$ , jako równoległym do osi  $X$  i  $Z$ , a przecinającym oś  $Y$ , należy się znak  $(010)$ .

Ponieważ na ścianę  $(001)$ , czyli na t. zw. ścianę podstawową, wybieramy zwykle tę ścianę, do której równoległe biegnie najdoskonalsza łupliwość i która się znajduje na większości kryształów substancji badanej, przeto w kryształach skaleni na ścianę  $(001)$  przyjęta jest ściana  $P$ . A zatem znaczenie osi  $X$  ma krawędź  $P/N \parallel N/M$ , t. j. oś pasa  $[MNP]$ , i przez to znak  $(111)$  należy się ścianie  $O$ , gdyż od razu widoczna i na kryształach i na projekcyi, że przecina się ona ze wszystkimi trzema krawędziami, wybranymi przez nas na krawędzi osiowe.

Gdy krawędzi osiowe są już obrane, należy wyznaczyć projekcyę tych punktów, w których krawędzi osiowe przecinają powierzchnię kuli projekcyjnej.

Rzeczą jest oczywistą, że oś  $X$ , jako oś pasa  $[MNP]$ , jest prostopadła do płaszczyzny swego koła pasowego, a więc rzut przecięcia się jej z powierzchnią kuli znajduje się na linii  $K_I K_{II}$  w odległości  $90^\circ$  od  $P$ , ponieważ normalna ściany  $P$  i oś  $X$  leżą na jednej płaszczyźnie i są do siebie prostopadłe; innemi słowy, ściana  $P$  jest do osi  $X$  równoległa, jak to zresztą wskazuje pierwszy wyznacznik w znaku ściany  $P = (001)$ .

Oś  $Y$  jest to normalna ścian  $M$ , a więc oś ta przecina powierzchnię kuli w tych samych punktach, w których znajdują się bieguny  $M$ .

Oś  $Z$ , jako oś pasa  $[MLT]$ , jest prostopadła do koła pasowego tego pasa, przeto spotyka powierzchnię kuli w punkcie, odległym od koła  $MLT$  o  $90^\circ$ , t. j. w środku projekcyi.

Co zaś do znaków promieni osiowych, to ponieważ ustawiliśmy kryształ tak, aby ściana  $P$  biegła do nas ku dołowi, więc oś  $X$ , jako równoległa do ściany  $P$ , jest również ku nam pochylona, przeto jej promień dodatni przecina powierzchnię kuli projekcyjnej pod płaszczyzną rzutu, a stąd punkt tego przecięcia leży na powierzchni dolnej półkuli, i co za tem idzie, rzut jego znajduje się na zewnątrz obwodu koła projekcyi. A jak wiadomo, tę część projekcyi odrzucamy. Zatem na projekcyi mamy tylko odjemny promień osi  $X$ . Oś  $Y$  ma na projekcyi promienie oba. Oś  $Z$  ma tylko promień dodatni.

Teraz koncentrycznymi obrotami kalki sprowadźmy każde żądane dwa punkty projekcyi na jeden południk siatki i odczytajmy odległości kątowe pomiędzy punktami, t. j. rozwiążmy graficznie zagadnienie: jaki kąt tworzy normalna każdej ściany z osią  $X$ , z osią  $Y$  i z osią  $Z$ .

Osoba ta sama, która wykonała pomiar kryształu goniometrem przykładanym, zmierzyła siatką łuki pomiędzy biegunem każdej ściany i punktami  $-X$ ,  $Y$  i  $Z$ . Otrzymała ona wyniki następujące.

	$-X$	$Y$	$Z$
$O_1$	$47^\circ$	$63^\circ$	$36^\circ$
$L_1$	$64^\circ$	$29^\circ$	$90^\circ$
$T_1$	$39^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\Xi$	$40^\circ$	$90^\circ$	$24^\circ$
$\Sigma$	$10^\circ$	$90^\circ$	$54^\circ$
$N_1$	$90^\circ$	$45^\circ$	$50^\circ$

Wypiszmy z tablicy I (dodatek do książki niniejszej) dostawy kątów otrzymanych.

	$-X$	$Y$	$Z$
$O_1$	0.682	0.454	0.809
$L_1$	0.438	0.875	0
$T_1$	0.777	0.500	0
$\Xi$	0.766	0	0.913
$\Sigma$	0.985	0	0.588
$N_1$	0	0.707	0.643

Każdą z trzech liczb, odpowiadających danej ścianie, podzielmy przez liczbę ściany  $O_1$ , znajdującą się w tej samej kolumnie pionowej.

A więc:

$$L_1(hkl) = -\frac{438}{682} : \frac{875}{454} : 0 = -0.64 : 1.92 : 0 = -1 : 3 : 0$$

$$T_1(hkl) = -\frac{777}{682} : \frac{500}{454} : 0 = -1.12 : 1.10 : 0 = -1.02 : 1 : 0$$

$$\Xi(hkl) = -\frac{766}{682} : 0 : \frac{913}{809} = -1.12 : 0 : 1.12 = -1 : 0 : 1$$

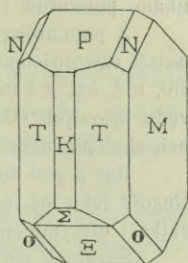
$$\Sigma(hkl) = -\frac{985}{682} : 0 : \frac{588}{809} = -1.44 : 0 : 0.72 = -2 : 0 : 1$$

$$N_1(hkl) = 0 : \frac{707}{454} : \frac{643}{809} = 0 : 1.56 : 0.79 = 0 : 1.98 : 1$$



Jak widzimy, nawet pomiar przyrządem najprostszym i sposób obliczeń graficzny, więc tylko przybliżony, z dużym stopniem dokładności daje liczby całe:

$$\begin{aligned} L_I &= (\bar{1}30) \\ T_I &= (\bar{1}10) \\ \Xi &= (\bar{1}01) \\ \Sigma &= (\bar{2}01) \\ N_I &= (021) \end{aligned}$$



Rys. 59. Kryształ skalenia.

Sprawdźmy wyniki obliczeń powyższych przez dedukcję pasów.

Nasamprzód ze ścian czworoscianu jednostkowego obliczymy wyznaczniki ściany  $T_I$ , wytkniętej skrzyżowaniem się pasów  $[M/K]$  i  $[P/O]$ . Mamy ściany czworoscianu jednostkowego:  $O(111)$ ,  $M(010)$  i  $P(001)$ . Na kryształach, opisanym w niniejszym, nie było ścian  $K$ , którym przypadają znaki  $(100)$ , ale one są możliwe: leżą w dwu pasach  $[M/L]$  i  $[P/\Xi]$  i rzeczywiście zdarzają się na kryształach skalenia, jak wskazuje rys. 59.

$$\begin{array}{l} (M_I) \ 0 \ | \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ | \ 0 \\ (K_I) \ \bar{1} \ | \ 0 \ 0 \ \bar{1} \ 0 \ | \ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (P) \ 0 \ | \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ | \ 1 \\ (O_I) \ \bar{1} \ | \ 1 \ 1 \ \bar{1} \ 1 \ | \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} [M_I/K_I] \ 0 \ | \ 0 \ \bar{1} \ 0 \ 0 \ | \ 1 \\ [P/O_I] \ \bar{1} \ | \ \bar{1} \ 0 \ \bar{1} \ \bar{1} \ | \ 0 \end{array}$$

$$\frac{[M_I/K_I] = [00\bar{1}]}{[P/O_I] = [\bar{1}\bar{1}0]} \quad T_I = (\bar{1}10)$$

Mając znak ściany  $T_I = (\bar{1}10)$ , możemy znaleźć wyznaczniki ściany  $\Sigma$ , którą wyznacza pas  $[P/K_I]$  i  $[T_I/O_{II}]$ .

$$\begin{array}{l} (P) \ 0 \ | \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ | \ 1 \\ (K_I) \ \bar{1} \ | \ 0 \ 0 \ \bar{1} \ 0 \ | \ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (T_I) \ \bar{1} \ | \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ | \ 0 \\ (O_{II}) \ \bar{1} \ | \ \bar{1} \ 1 \ \bar{1} \ \bar{1} \ | \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} [P/K_I] \ 0 \ | \ \bar{1} \ 0 \ 0 \ 1 \ | \ 0 \\ [T_I/O_{II}] \ 1 \ | \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ | \ 2 \end{array}$$

$$\frac{[P/K_I] = [0\bar{1}0]}{[T_I/O_{II}] = [11\bar{2}]} \quad \Sigma = (\bar{2}01)$$

Następnie obliczamy znak ściany  $\Xi$  z pasów  $[O_I/M_I]$  i  $[P/K_I]$

$$\begin{array}{l} (O_I) \ \bar{1} \ | \ 1 \ 1 \ \bar{1} \ 1 \ | \ 1 \\ (M_I) \ 0 \ | \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ | \ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} [O_I/M_I] \ \bar{1} \ | \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ | \ 1 \\ [P/K_I] \ 0 \ | \ \bar{1} \ 0 \ 0 \ \bar{1} \ | \ 0 \end{array}$$

$$\frac{[O_I/M_I] = [\bar{1}0\bar{1}]}{[P/K_I] = [0\bar{1}0]} \quad \Xi = (\bar{1}01)$$

Dalej, z pasów:  $[T_I/O_{II}]$  i  $[P/M_I]$  obliczamy  $N_{II}$ .

$$\begin{array}{l} (P) \ 0 \ | \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ | \ 1 \\ (M_I) \ 0 \ | \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ | \ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} [T_I/O_{II}] \ 1 \ | \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ | \ 2 \\ [P/M_I] \ \bar{1} \ | \ 0 \ 0 \ \bar{1} \ 0 \ | \ 0 \end{array}$$

$$\frac{[T_I/O_{II}] = [11\bar{2}]}{[P/M_I] = [\bar{1}00]} \quad N_{II} = (0\bar{2}1)$$

Nakoniec wyznaczniki ściany  $L_I$  obliczamy z pasów  $[M_I/K_I]$  i  $[N_{II}/O_I]$ :

$$\begin{array}{l} (N_{II}) \ 0 \ | \ \bar{2} \ 1 \ 0 \ \bar{2} \ | \ 1 \\ (O_I) \ \bar{1} \ | \ 1 \ 1 \ \bar{1} \ 1 \ | \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} [M_I/K_I] \ 0 \ | \ 0 \ \bar{1} \ 0 \ 0 \ | \ 1 \\ [N_{II}/O_I] \ \bar{3} \ | \ \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \ 1 \ | \ 2 \end{array}$$

$$\frac{[M_I/K_I] = [00\bar{1}]}{[N_{II}/O_I] = [\bar{3}\bar{1}\bar{2}]} \quad L_I = (\bar{1}30)$$

Jak widzimy, nie popełniliśmy błędu: wyniki dedukcji są zgodne z wynikami pomiarów i ich obliczenia<sup>1</sup>.

Z pomiarów, podanych w ustępie niniejszym, możemy jeszcze obliczyć kształt czworościanu jednostkowego, charakterystycznego dla kryształów skaleni, t. j. kąt  $\beta$  i stosunek odcinków  $OH_I : OK_I : OL_I = a : b : c$ , odciętych od krawędzi osiowych  $OX, OY, OZ$  przez ścianę jednostkową. (Kąt  $\alpha$  i  $\gamma$  w kryształach skalenia mierzy po  $90^\circ$ ).

Kąt  $\beta$  jest to kąt osi  $OX$  i  $OZ$ , a więc miarą jego jest łuk  $+Z/-X$ . Długość łuku od punktu  $+Z$  do punktu  $-X$  (rys. 58. i tabl. IV) mierzymy siatką i otrzymujemy  $65^\circ$ , a więc  $\beta$ , jako spełnienie do  $180^\circ$ , mierzy  $115^\circ$ .

Stosunek odcinków  $OH_I : OK_I : OL_I$  (ob. str. 53, rys. 45 i str. 54, rys. 46) jest równy stosunkowi ułamków:

$$\frac{1}{\cos(P_1X)} : \frac{1}{\cos(P_1Y)} : \frac{1}{\cos(P_1Z)},$$

gdzie  $P_1$  jest to punkt przecięcia się z powierzchnią kuli normalnej ściany  $H_1K_1L_1$ ; w danym razie ścianą  $H_1K_1L_1$  jest ściana  $O$ , więc

$$a : b : c = \frac{1}{\cos O/X} : \frac{1}{\cos O/Y} : \frac{1}{\cos O/Z}$$

a ponieważ  $O/X = 47^\circ, O/Y = 63^\circ, O/Z = 36^\circ$ , przeto

$$a : b : c = \frac{1}{682} : \frac{1}{454} : \frac{1}{809}$$

Odcinek  $b$  przyjmuje się za jedność, więc czworościan jednostkowy skalenia, opisanego w ustępie niniejszym, ma kształt następujący:

$$a : b : c = 0.66 : 1 : 0.56; \beta = 115^\circ \text{ } ^2.$$

Rzecz jasna, że jest to kształt, wyrażony tylko w przybliżeniu, gdyż obliczyliśmy go z pomiarów, wykonanych goniometrem przykładowym, i obliczenie było dokonane sposobem graficznym: siatką stereograficzną.

Tak przedstawia się w zarysie najogólniejszym istota pomiarów i obliczeń krystalograficznych.

Co zaś do ścisłych pomiarów goniometrami z odbiciem i dokładnych obliczeń sferyczno-trygonometrycznych, to sprawy te nie leżą w zakresie książki niniejszej, bo jej celem jest tylko informacja o podstawach krystalografii, a nie technika naukowego badania kryształów.

<sup>1</sup> Przykład powyższy, jako sprawdzenie bezpośrednie prawa pasów i wyznaczników całych przez pomiar i obliczenie kryształu, a nie przez ilustracje sztucznymi modelami, poleca się czytelnikowi do powtórzenia.

<sup>2</sup> Por. na str. 68 czworościan jednostkowy albitu.



## CZĘŚĆ TRZECIA.

## Prawo kierunków równych.

§ 21. **Definicja kierunków równych i prawo kierunków równych.** Kierunki równe są to kierunki nierównoległe, w których kryształ ma wszystkie własności jednakowe. Kierunki równe leżą w kryształach symetrycznie.

Wykład powyższy doprowadził nas dwukrotnie do sieci przestrzennej jako do graficznego wyrazu istotnej własności kryształu: jego jednorodności fizycznej. Sieć przestrzenna jest tak dokładnym obrazem kryształu, że dała nam ona możność przewidzenia prawa pasów czyli odcinków wymiernych i prawa kątów stałych.

Rozważmy jednak, czy wysnuliśmy już wszystkie płynące z sieci przestrzennej następstwa, czy też przeciwnie, możemy opierać na niej dalsze przewidywania innych istotnych własności kryształu, które dotychczas nie są nam znane.

Sieć przestrzenną wykresaliśmy w ten sposób, że zakładaliśmy pomiędzy punktami analogicznymi odstępów równe w kierunkach równoległych, a kierunki nierównoległe charakteryzowaliśmy wogóle nierównymi odstępami punktów analogicznych. W całym jednak wykładzie dotychczasowym nie nastęczało się nam ani jedno zastrzeżenie, które nie dozwalało by w wykreślaniu sieci przestrzennej zakładać, n. p. jednego kąta prostego pomiędzy szeregami punktów analogicznych. Wykreśliłyśmy więc sieć przestrzenną, w której dwa szeregi są sobie prostopadłe. Gdy to uczynimy, otrzymamy sieć, mającą szeregi przekątne równe, choć nierównoległe. Jeżeli wykreśliłyśmy trzy szeregi pierwiastkowe wzajemnie pomiędzy sobą prostopadłe, to otrzymamy jeszcze więcej nierównoległych szeregów przekątnych, które będą równe. Dwa te przykłady są dowodem zupełnie wystarczającym, że szeregi równe, choć nierównoległe, nie tylko nie są sprzeczne z zasadą sieci przestrzennej, ale nawet są następstwem pewnych kątów pomiędzy jej szeregami. Zarazem przykłady te dowodzą, że szeregi równe, acz nierównoległe, nie mogą leżeć w sieci przestrzennej bezładnie, lecz muszą być ułożone w pewnym prostym porządku, który powszechnie nosi miano symetrycznego.

Z tego należy wnosić, że ciało jednorodne może mieć równe kierunki pomiędzy kierunkami nierównoległymi, oraz, że kierunki te muszą być symetryczne.

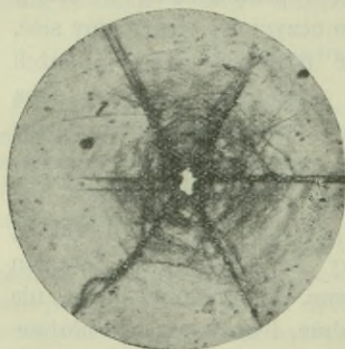
Istotnie. Obserwacja i doświadczenie uczy, że są kryształy, które mają wszystkie własności fizyczne jednakowe w niektórych kierunkach nierównoległych. Kierunki nierównoległe, w których wszystkie własności kryształu są jednakowe, nazywamy kierunkami równymi.

Prócz tego, obserwacja i doświadczenie wykazuje, że kierunki równe zawsze ułożone są w kryształach z pewnym ładem. Jest to ten rodzaj ładu, który nazywamy symetrycznym.

A więc, z poznania zasad sieci przestrzennej wysnuwamy trafne przewidywanie zarówno istnienia kierunków równych, jak sposobu ich ugrupowania w kryształach, czyli przychodzimy do prawa kierunków równych, które głosi, że kierunki równe leżą w kryształach symetrycznie.

Prawo kierunków równych nazywamy też prawem symetryczności, albo trzecim prawem kryystalografii.

Nie podlega zaprzeczeniu, że prawo kierunków równych, podobnie jak prawo kątów stałych, jest następstwem jednorodności. A więc znów mamy jeden dowód więcej, że jednorodność jest najistotniejszą i najważniejszą cechą kryształu, a wszystkie inne są tylko jej objawami. Z tego więc względu prawo jednorodności uważamy za kardynalne prawo kryystalografii.



Rys. 60. Spękania muskowitzu.  
Powiększenie 20.

kryształy kwarcu (ob. § 17 str. 49) mają na ścianach  $T$  prążki (rys. 39). Ta cecha wskazuje, że ściany te są fizycznie odmienne od ścian  $P$  i  $Z$ , ale

Że w kryształach istnieją kierunki równe i że ułożone są one symetrycznie, to widzimy z przykładów, przytoczonych w § 2-gim, w którym była mowa o jednorodności i różnokierunkowości kryształu. Podane tam figury wytrawione (rys. 4 str. 4) wykazują trzy kierunki równe i niewątpliwie symetryczne. To samo odnosi się do łupliwości. Trzy kierunki łupliwości kalcytu lub soli kamiennej są symetryczne. Również są symetryczne spękania, które wywołuje igła, wbijana w kryształ soli kamiennej (rys. 3 str. 3) albo w kryształ muskowitzu (rys. 60).

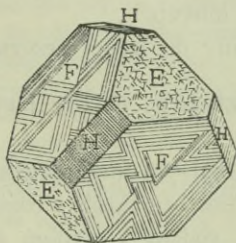
Ściany kryształów nie zawsze są zupełnie gładkie. Zazwyczaj mają one różne właściwości zewnętrzne, z których wnosimy o ich równości lub nierówności fizycznej. Najpospolitsze jest odróżnianie się ich delikatną rzeźbą lub deseniem rysunku. N. p.



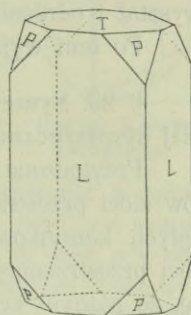
między sobą jednakowe czyli sobie nawzajem równe. Kąt pomiędzy niemi mierzy  $120^\circ$ , a więc kąt ich normalnych wynosi  $60^\circ$  czyli rozkład ich jest symetryczny.

Rys. 61 przedstawia kryształ sfalerytu  $ZnS$ , na którym wyraźnie widoczne są różnice fizyczne ścian  $E$ ,  $F$  i  $H$ , oraz układ symetryczny ścian równych.

Bardzo pouczającym przykładem fizycznej równości i układu symetrycznego nierównoległych ścian kryształu są kryształy platynocyanku magnezowego



Rys. 61. Kryształ sfalerytu.



Rys. 62. Kryształ platynocyanku magnezowego.

zowego  $MgPt(CN)_4 \cdot 7H_2O$  (rys. 62). Platynocyanki są to związki barwne o żywych mieniących się kolorach. Otóż cztery ściany  $L$  kryształów platynocyanku przytoczonego mają połysk metaliczny i żywą barwę zieloną, dwie ściany podstawowe  $T$  są matowe ciemnoczerwone, a ośm ścian  $P$  w świetle od nich odbitem połyska barwą ciemnoniebieską.

**\*§ 22. Druga definicja kryształu.** Kryształ jest to ciało fizyczne, którego kierunki równoległe i symetryczne są fizycznie równe, a kierunki nierównoległe i niesymetryczne są fizycznie nierówne.

W tem miejscu przerwiemy wątek wykładu cofnięciem się na krótko wstecz.

W paragrafie drugim (str. 2—5), w którym zebrane są dowody jednorodności i anizotropii kryształu, określiliśmy kryształ jako ciało fizycznie jednorodne, różnokierunkowe.

Obecnie, poznawszy prawo kierunków równych, możemy powiedzieć, że kryształ jest to ciało, którego kierunki równoległe i symetryczne są fizycznie równe, a kierunki nierównoległe i niesymetryczne są fizycznie nierówne.

Rzeczą jest oczywistą, że te dwa określenia kryształu ani nie przeczą sobie, ani nie podają różnych cech kryształu. Są one tylko różnym wysłowieniem jednej myśli. Rozumiemy bowiem, że

ciało jednorodne różnokierunkowe ma jednakowe własności w kierunkach równoległych i symetrycznych, oraz odwrotnie, że ciało, które ma jednakowe własności w kierunkach równoległych i symetrycznych, jest jednorodne. Różnica tych dwu definicji jest tylko ta, że pierwsza podaje istotną własność kryształu, a druga wymienia jej następstwa, po których najłatwiej i najpewniej poznajemy kryształ i odróżniamy go od ciał innych.

Po tem wyjaśnieniu powróćmy do treści przerwanej.\*

### § 23. Symetryczność kryształów. Różny jest stopień i rodzaj symetryczności kryształów.

Przytoczone poprzednio w § 21-ym dwa przykłady przypadków sieci przestrzennej są dowodem, że ilość i rozkład nierównoległych kierunków równych, t. j. rodzaj i stopień symetryczności sieci przestrzennej może być rozmaity. A więc należy spodziewać się, że różnym kryształom też musi być właściwy rozmaity rodzaj i stopień symetryczności.

W rzeczy samej. Kryształy różnych substancji, a także kryształy substancji jednej, powstałe w różnych warunkach temperatury, ciśnienia i stężenia, wykazują różny stopień i rodzaj symetryczności. t. j. mają rozmaitą ilość i różny stosunek przestrzenny kierunków równych.

Niejednakowy stopień i rozmaity rodzaj symetryczności kryształów widzimy na wszystkich przykładach anizotropii, jednorodności i symetrii kryształu, które są przytoczone w książce niniejszej.

Spękania soli kamiennej, (str. 3 rys. 3), są sobie prostopadłe, a w muskowiecie (rys. 60 str. 76) tworzą kąt  $60^\circ$ .

Figury wytrawione ałunu są trójpromienne (rys. 4 str. 4), a apatyty sześcioboczne (rys. 63).

Łupliwość kalcytu biegnie równolegle do ścian romboedru (rys. 1 str. 3), które tworzą kąty dwuścienne  $105^\circ 5'$ , a płaszczyzny łupliwości soli kamiennej są równoległe do ścian sześciangu, t. j. kierunki jej są do siebie prostopadłe.

Takie same różnice widzimy w kryształach jednej substancji, powstałych w warunkach niejednakowych.

Węglan wapnia  $CaCO_3$  występuje w przyrodzie, jako nieraz już wspomniany minerał

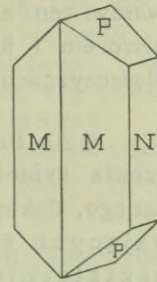
kalcyt, tam, gdzie krystalizacja zachodziła w temperaturze niskiej lub



Rys. 63. Figury wytrawione apatyty.



w roztworach, zawierających nieznaczne ilości innych soli. Tam zaś gdzie węgiel wapnia albo wydzielał się w temperaturze wyższej, albo z roztworów, zawierających znaczniejsze ilości substancji innych, skryształizował się on jako minerał aragonit. Symetryczność kalcytu i aragonitu jest zupełnie inna. Wszystkie kryształy kalcytu są to pochodne geometryczne romboedru (rys. 1 str. 3), a kryształy aragonitu dają się sprowadzić do równoległościanu prostokątnego, jako do ich formy najprostszej. Łupliwość kalcytu biegnie równoległe do każdej ściany romboedru, a więc płaszczyzny łupliwości kalcytu leżą w trzech pasach; aragonit zaś ma łupliwość równoległą do ścian  $M/M$  i  $N$ , (rys. 64) t. j. tylko w jednym pasie.

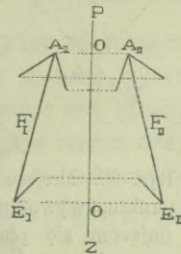


Rys. 64. Kryształ aragonitu.

Z tego należy wnosić, że każdy sposób ugrupowania w przestrzeni kierunków równych jest w kryształach możliwy, jeżeli jest symetryczny i jeżeli czyni zadość prawu jednorodności. A więc gdy poznamy wszystkie, zgodne z prawem jednorodności, sposoby symetrycznego rozkładu w przestrzeni kierunków równych, to wyczerpiemy wszystkie rodzaje symetryczności krystalograficznej, t. j. poznamy wszystkie rodzaje kryształów.

\* Aby tego dokonać należy poznać pojęcie symetrii. Przerwiemy więc bieg wykładu na przeciąg kilku paragrafów, które będą poświęcone definicyjom i twierdzeniom, odnoszącym się do symetryczności utworów geometrycznych, poczem w § 33-cim podejmiemy wątek przerwany.

§ 24. Definicja płaszczyzny zwierciadlanej, odzwierciedlenia utworu, utworów symetrycznie równych i utworów symetrycznie leżących. Jeżeli płaszczyzna  $PZ$  (rys. 65) ma obok siebie po obu swych stronach dwa utwory  $F_I$  i  $F_{II}$  tego kształtu i tak leżące, że pion, spuszczonej na płaszczyznę  $PZ$  z któregośkolwiek punktu utworu  $F_I$  przecina utwór  $F_{II}$  w punkcie analogicznym, i odwrotnie, przyczem płaszczyzna  $PZ$  dzieli ten pion na dwa odcinki równe, to nazywamy płaszczyznę  $PZ$  płaszczyzną zwierciadlaną i mówimy: 1<sup>o</sup>, że utwory  $F_I$  i  $F_{II}$  mają się do siebie tak, jak się ma przedmiot do swego odbicia w zwierciadle płaskim, t. j. że jeden jest odzwierciedleniem drugiego w płaszczyźnie  $PZ$ , 2<sup>o</sup>, że utwory  $F_I$  i  $F_{II}$  są symetrycznie równe, 3<sup>o</sup>, że utwory  $F_I$  i  $F_{II}$  leżą symetrycznie.



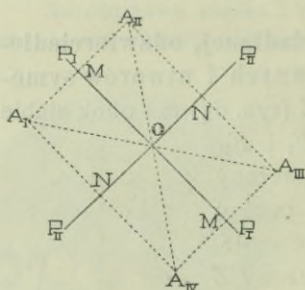
Rys. 65. Płaszczyzna zwierciadlana i stosunek utworu do jego odzwierciedlenia.

§ 25. **Definicja symetryczności.** Symetrycznością nazywamy ten stosunek przestrzenny, który zachodzi pomiędzy utworem i jego odzwierciedleniem w jednej lub w kilku płaszczyznach zwierciadlanych.

§ 26. **Definicja przekształcenia symetrycznego i powtórzenia symetrycznego.** Wykreślenie odzwierciedlenia utworu danego, dokonane przez zastosowanie jednej lub kilku przecinających się płaszczyzn zwierciadlanych, nazywa się przekształceniem symetrycznym danego utworu. Jeżeli utwór jest tylko punktem, prostą lub płaszczyzną, to odzwierciedlenie jego, dokonane przez zastosowanie jednej lub kilku przecinających się płaszczyzn zwierciadlanych, nazywamy powtórzeniem symetrycznym punktu, prostej lub płaszczyzny.

§ 26<sup>a</sup>. **Twierdzenie o miejscu symetrycznych powtórzeń punktu.** Punkt i jego powtórzenia symetryczne, wywołane płaszczyznami zwierciadlanymi, przecinającymi się w jednym punkcie, leżą na powierzchni kuli, której środkiem jest punkt przecięcia się płaszczyzn zwierciadlanych.

$P_1P_1$  i  $P_2P_2$  (rys. 66) niechaj będą to ślady płaszczyzn zwierciadlanych, prostopadłych do płaszczyzny rysunku. Na powierzchni rysunku niech będzie punkt  $A_1$  po lewej stronie płaszczyzny  $P_1P_1$ . Jeżeli założymy, że



Rys. 66. Miejsce powtórzeń punktu, wywołanych przecinającymi się płaszczyznami zwierciadlanymi.

płaszczyzna  $P_1P_1$  jest zwierciadłana i wyznaczymy punkt  $A_2$ , leżący po drugiej stronie płaszczyzny  $P_1P_1$  symetrycznie do punktu  $A_1$ . Lecz jeżeli płaszczyzna  $P_2P_2$  jest płaszczyzną zwierciadłaną, to wobec istnienia punktów  $A_1$  i  $A_2$  musimy po jej drugiej stronie wykreślić punkty symetryczne  $A_3$  i  $A_4$ . W myśl definicji odzwierciedlenia (§ 24) prosta  $A_1A_2$  jest prostopadła do  $OP_1$  i odcinek  $A_1M$  jest równy odcinkowi  $A_2M$ . Stąd  $OA_1 = OA_2$ . Również  $A_2A_3$  jest prostopadła do  $OP_2$  a  $A_2N$  jest równy  $A_3N$ . Stąd  $OA_2 = OA_3 = OA_4 \dots OA_s$  we wszystkich kierunkach naokoło punktu  $O$ , jeżeli założymy  $S$  płaszczyzn zwierciadlanych  $OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, \dots, OP_s$ , przechodzących przez punkt  $O$  we wszystkich kierunkach. Jeżeli więc odcinki  $OA_1, OA_2, OA_3, \dots, OA_s$  są równe, to miejsce punktów  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_s$  jest to powierzchnia kuli, której środkiem jest punkt  $O$ .



A więc: punkt  $A_I$  i jego odzwierciedlenia  $A_{II}$ ,  $A_{III}$ ,  $A_{IV}$ , .....  $A_S$  w płaszczyznach zwierciadlanych  $OP_I$ ,  $OP_{II}$ ,  $OP_{III}$ , .....  $OP_S$ , przecinających się w punkcie  $O$ , leżą na powierzchni kuli  $AA_I A_{II} A_{III} A_{IV}$  .....  $A_S$ , zakreślonej promieniem  $OA_I = OA_{II} = \dots = OA_S$  około środka  $O$ , t. j. około punktu przecięcia się płaszczyzn zwierciadlanych.

Twierdzenie to wprowadzamy, aby uniknąć nieporozumienia i nieścisłości w rozumowaniu wyłożonym w § 27.

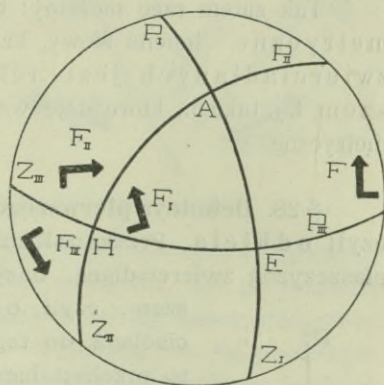
§ 27. **Twierdzenie o trzech przekształceniach symetrycznych.** Są trzy przekształcenia symetryczne: odbicie, obrót, inwersja.

Niechaj  $F$  (rys. 67 i 75 str. 87) będzie figurą na powierzchni kuli. Niech  $AE$  będzie łukiem koła wielkiego, które powstało od przecięcia

kuli płaszczyzną zwierciadlaną  $P_I Z_I$ , przeprowadzoną przez środek kuli. Jeżeli  $P_I Z_I$  jest płaszczyzną zwierciadlaną, to po drugiej stronie tej płaszczyzny  $P_I Z_I$  na powierzchni kuli (w myśl definicji § 24) musi istnieć figura  $F_I$ , figurze  $F$  symetrycznie równa i symetrycznie z nią leżąca.

Za figurą  $F_I$  przeprowadźmy przez środek kuli drugą płaszczyznę zwierciadlaną  $P_{II} Z_{II}$ . Płaszczyzna  $P_{II} Z_{II}$  przecina się z płaszczyzną  $P_I Z_I$  w prostej, która spotyka powierzchnię kuli w punkcie  $A$ . Wobec istnienia figury  $F_I$  przeprowadzenie płaszczyzny zwierciadlanej  $P_{II} Z_{II}$  pociąga za sobą wykreślenie figury  $F_{II}$ , symetrycznie równej i symetrycznie z nią leżącej. Względem zaś figury  $F$  figura  $F_{II}$  jest jednokładna. Jest rzeczą oczywistą z rysunku, że figura  $F_{II}$  doprowadza się do jednokładności z figurą  $F$ , czyli przystaje do niej, po obrocie kuli około prostej przecięcia się płaszczyzn  $P_I Z_I$  i  $P_{II} Z_{II}$  jak około osi.

Przeprowadźmy trzecią płaszczyznę zwierciadlaną  $P_{III} Z_{III}$ , która z poprzednimi płaszczyznami tworzy trójkąt sferyczny  $AEH$ . Wobec istnienia figury  $F_{II}$  przeprowadzenie płaszczyzny zwierciadlanej  $P_{III} Z_{III}$  pociąga za sobą wykreślenie figury  $F_{III}$ . Figura  $F_{III}$  względem figury  $F$  nie jest ani symetrycznie jej równa, ani z nią jednokładna.



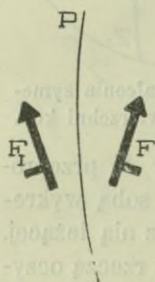
Rys. 67. Trzy przekształcenia symetryczne figury na powierzchni kuli.

Z rysunku jest oczywista, że figura  $F_{III}$  nie może być doprowadzona do jednokładności, czyli przystawania, z figurą  $F$  żadnym obrotem kuli około żadnej jej średnicy. Gdy ostrza figury  $F$  i  $F_{III}$  do siebie przystają, belty ich są zwrócone w strony przeciwne<sup>1</sup>.

Gdybyśmy przeprowadzili jakąkolwiek czwartą płaszczyznę zwierciadlaną, to otrzymalibyśmy figurę jednokładną z figurą  $F$ , t. j. taką i tak leżącą, że po obrocie kuli przystałaby do figury  $F$ . A więc miałaby się ona do figury  $F$  tak samo, jak się ma figura  $F_{II}$ . Przeprowadzenie piątej płaszczyzny zwierciadlanej pociągnęłoby za sobą istnienie figury takiej i tak leżącej, że miałaby się ona do  $F$  tak, jak się ma do  $F$  figura  $F_{III}$ , i t. d. Jednym słowem, staje się rzeczą oczywistą, że ilość płaszczyzn zwierciadlanych większa od trzech nie pociąga już za sobą nowych przekształceń symetrycznych.

Tak zatem rzecz możemy: trzy są przekształcenia symetryczne. Innemi słowy, trójkąt sferyczny płaszczyzn zwierciadlanych jest ich połączeniem najogólniejszym, t. j. takim, które daje wszystkie możliwe przekształcenia symetryczne.

§ 28. Definicja pierwszego przekształcenia symetrycznego czyli odbicia. Przekształcenie symetryczne, dokonane jedną płaszczyzną zwierciadlaną, nazywa się przekształceniem pierwszym, czyli odbiciem, a płaszczyzna zwierciadlana, do tego przekształcenia potrzebna, lub to przekształcenie uzasadniająca, nazywa się płaszczyzną pierwszego przekształcenia symetrycznego, albo płaszczyzną odbicia.



Rys. 68. Pierwsze przekształcenie symetryczne.

Jeżeli mamy figurę daną  $F$  (rys. 68) i chcemy wykreślić figurę  $F_{II}$ , symetrycznie jej równą i symetrycznie z nią leżącą, to dokonywamy tego przeprowadzając płaszczyznę odbicia  $P^2$ , i postępując w myśl definicji płaszczyzny zwierciadlanej t. j. w myśl §-fu 24-go.

Albo, gdy mamy dwie figury symetrycznie równe i symetrycznie leżące, to uzasadniamy ten

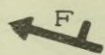
<sup>1</sup> Dla ułatwienia i unaocznienia sprawy figurom omawianym umyślnie nadano kształt strzałek niesymetrycznych.

<sup>2</sup> Na rys. 68 i dalszych płaszczyzna odbicia  $P$  jest wyrażona łukiem koła, bo wyobrażamy sobie, że figury  $F$  i  $F_{II}$  są styczne z powierzchnią kuli.

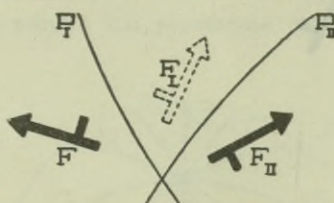


ich stosunek przestrzenny przeprowadzeniem pomiędzy nimi jednej płaszczyzny odbicia.

§ 29. **Definicja drugiego przekształcenia symetrycznego czyli obrotu.** Przekształcenie symetryczne, dokonane dwiema przecinającymi się płaszczyznami zwierciadlanymi, nazywa się przekształceniem symetrycznym drugim lub obrotem, a dwie przecinające się płaszczyzny zwierciadlane, do tego przekształcenia potrzebne, lub to przekształcenie uzasadniające, sprzężone warunkiem istnienia i działania wspólnego, oraz warunkiem dawania tylko wyniku ostatecznego, nazywają się płaszczyznami drugiego przekształcenia symetrycznego, albo płaszczyznami obrotu.



Rys. 69. Obrót.

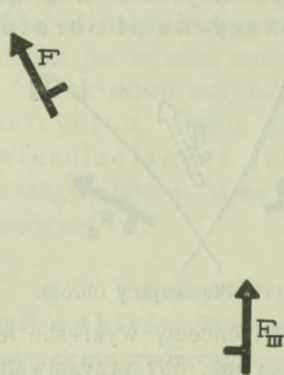


Rys. 70. Płaszczyzny obrotu.

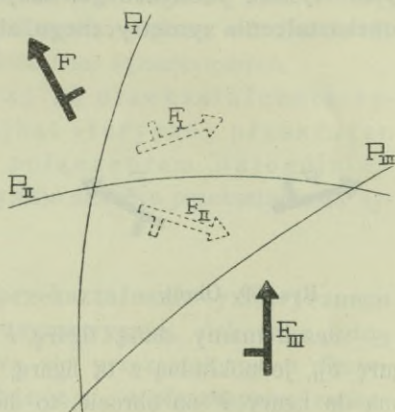
Jeżeli mamy daną figurę  $F$  (rys. 69) i chcemy wykreślić figurę  $F_{II}$ , jednokładną z tą figurą, oraz leżącą tak, aby przystawała ona do figury  $F$  po obrocie, to dokonywamy tego przez przeprowadzenie płaszczyzn obrotu czyli dwu przecinających się płaszczyzn zwierciadlanych  $P_I$  i  $P_{II}$  (rys. 70), sprzężonych warunkiem działania i istnienia wspólnego, t. j. warunkiem, aby jedna z nich nie istniała i nie działała bez drugiej, a także warunkiem, aby znaczenie realne miał tylko wynik ostateczny ich istnienia, t. j. figura  $F_{II}$ , co zaś do figury pośredniej ( $F_I$  na rys. 70) to nadajemy jej, przez warunek poprzedni, tylko znaczenie urojone, czyli uważamy ją za niebyłą.

Albo, gdy mamy dwie figury jednokładnie równe i leżące tak, że jedna przylega do drugiej po obrocie około pewnej prostej, to uzasadniamy i tłumaczymy ten ich stosunek przestrzenny przeprowadzeniem pomiędzy nimi przez tę prostą dwu płaszczyzn zwierciadlanych i nadajemy tym płaszczyznom znaczenie płaszczyzn obrotu, t. j. zakładamy, że jedna nie istnieje bez drugiej i że znaczenie istotne t. j. rzeczywiste, ma tylko ostateczny wynik ich istnienia, a figura pośrednia ma znaczenie tylko pomocnicze, czyli mamy ją za fikcyjną i w rzeczywistości nie istniejącą.

§ 30. **Definicja trzeciego przekształcenia symetrycznego czyli inwersyi.** Przekształcenie symetryczne, dokonane trzema płaszczyznami zwierciadlanymi, przecinającymi się w jednym punkcie, lecz nie w jednej prostej, nazywa się trzecim przekształceniem symetrycznym albo inwersją; a trzy płaszczyzny zwierciadlane, do tego przekształcenia potrzebne, lub to przekształcenie uzasadniające, sprzężone warunkiem istnienia i działania wspólnego oraz warunkiem dawania tylko wyniku ostatecznego, nazywają się płaszczyznami trzeciego przekształcenia symetrycznego albo płaszczyznami inwersyi.



Rys. 71. Inwersja.



Rys. 72. Płaszczyzny inwersyi.

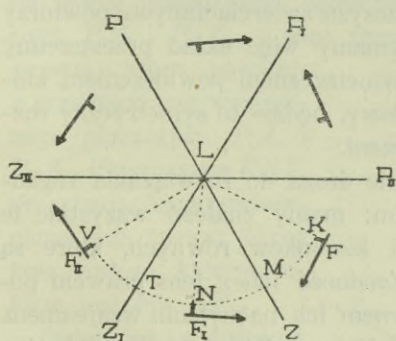
Jeżeli mamy daną figurę  $F$  (rys. 71) i chcemy wykreślić figurę taką i tak leżącą, jak figura  $F_{III}$ , to dokonywamy tego przez przeprowadzenie płaszczyzn inwersyi t. j. trzech płaszczyzn zwierciadlanych  $P_I$ ,  $P_{II}$  i  $P_{III}$  (rys. 72) przecinających się w jednym punkcie, lecz nie w jednej prostej, sprzężonych warunkiem istnienia i działania wspólnego, t. j. warunkiem, aby żadna nie działała i nie istniała bez dwu pozostałych oraz warunkiem, aby znaczenie rzeczywiste, realne, miał tylko ostateczny wynik ich istnienia i działania, t. j. figura  $F_{III}$  (rys. 72), a figury pośrednie ( $F_I$  i  $F_{II}$ ), aby miały tylko znaczenie fikcyjne, urojone, czyli aby uważane były za nieistniejące, t. j. po wykreśleniu figury  $F_{III}$ , aby zostały usunięte.

Albo, gdy mamy dwie figury takie, i tak ułożone, jak np.  $F$  i  $F_{III}$  na rys. 71, że ani są jednokładne, ani symetrycznie leżące, to uzasadniamy i tłumaczymy ten ich stosunek przestrzenny tem,

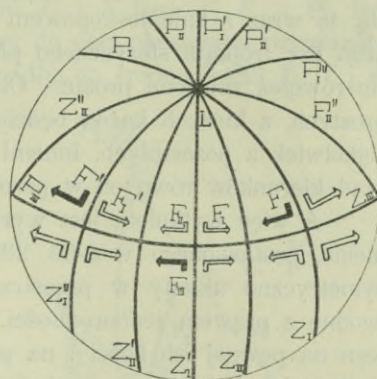


że przeprowadzamy pomiędzy nimi trzy przecinające się w jednym punkcie, lecz nie w jednej prostej płaszczyźnie zwierciadlane (rys. 72) i nadajemy im znaczenie płaszczyzn inwersji, t. j. zakładamy, że żadna z nich nie istnieje i nie działa bez dwu pozostałych, że istotne, rzeczywiste znaczenie posiada tylko ostateczny rezultat ich istnienia (figura  $F_{III}$ ), a figury pośrednie ( $F_I$  i  $F_{II}$ ) są tylko pomocnicze, t. j. fikcyjne, urojone i w rzeczywistości nieistniejące.

§ 31. Zachowanie się wzajemne przecinających się płaszczyzn zwierciadlanych. Przecinające się płaszczyzny zwierciadlane odzwierciedlają się w sobie nawzajem, wobec czego kąty dwuścienne płaszczyzn zwierciadlanych i ich trójkąty sferyczne powtarzają się naokoło prostych ich przecięcia się tak, jak w kalejdoskopie.



Rys. 73. Płaszczyzny zwierciadlane i ich powtórzenia kalejdoskopowe.



Rys. 74. Kalejdoskopowe powtórzenie trójkąta sferycznego w rzucie stereograficznym.

W paragrafach, poprzedzających niniejszy, poczynając od dwudziestego czwartego, podane są definicje i twierdzenia, stanowiące podstawę nauki o symetryczności. Z tych definicji i twierdzeń wynika, że do otrzymania utworów symetrycznych winniśmy założyć płaszczyznę zwierciadlaną, a także winniśmy zakładać kąty dwuścienne lub trójkąty sferyczne, których boki są płaszczyznami zwierciadlanymi.

Załóżmy płaszczyzny zwierciadlane  $LZ$  i  $LZ_1$  (rys. 73) prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Definicja płaszczyzny zwiercia-

dlanej głosi, że płaszczyzna zwierciadlana ma po obu swych stronach utwory symetrycznie równe i symetrycznie leżące. A więc gdy każda z dwu założonych płaszczyzn ma po jednej swej stronie drugą płaszczyznę, to, jeżeli zakładamy je jako zwierciadlane, w takim razie już przez to samo założenie musimy po drugiej stronie każdej z nich założyć też płaszczyznę zwierciadlaną  $LP_{II}$  i  $LZ_{II}$  pod tym samym kątem. Ale te znów, jako zwierciadlane, wymagają istnienia płaszczyzn  $LP_I$  i  $LP$ . Tak więc widzimy, że definicja płaszczyzny zwierciadlanej pociąga za sobą powtórzenie kąta dwuściennego płaszczyzn zwierciadlanych, jak w kalejdoskopie.

Stąd jasnym się staje, że trójkąty sferyczne płaszczyzn zwierciadlanych, odzwierciedlając się w swych własnych bokach, również powtarzają się kalejdoskopowo, jak to unaocznia rys. 74.

W takim razie, gdy pomiędzy dwiema płaszczyznami zwierciadlanymi lub w polu ich trójkąta sferycznego założymy jakąś prostą, to wraz z kalejdoskopowym powtórzeniem się kąta dwuściennego, czy trójkąta sferycznego płaszczyzn zwierciadlanych, powtórzy się również założona prosta. Otrzymamy więc układ przestrzenny prostych, z których każda będzie symetrycznym powtórzeniem którejkolwiek z pozostałych. Innymi słowy, będzie to symetryczny rozkład kierunków równych w przestrzeni.

A więc wytknięta jest wyraźnie droga do rozwiązania zagadnienia, postawionego w §-cie 23-cim: mamy znaleźć wszystkie te symetryczne układy w przestrzeni kierunków równych, które są zgodne z prawem jednorodności. Zgodność ich z tem prawem polega na pewnej ich ilości i na pewnym ich nachyleniu wzajemnem. A ilość ich i wzajemne nachylenie jest wynikiem wielkości kątów, pod jakimi przecinać się będą wywołujące te rozkłady prostych płaszczyzny zwierciadlane w ich kątach dwuściennych i trójkątach sferycznych. Należy przeto nasamprzód rozwiązać zagadnienie: jakie kąty płaszczyzn zwierciadlanych czynią zadość prawu jednorodności, potem połączyć pod temi kątami płaszczyzny zwierciadlane po dwie i po trzy, a potem wywołać ich powtórzenia kalejdoskopowe. Wtedy założony pomiędzy nimi kierunek również powtórzy się wraz z niemi kalejdoskopowo, skąd powstanie w każdym przypadku układ kierunków równych, który będzie zarazem i symetryczny i zgodny z prawem jednorodności.

A zatem na pierwszym miejscu musi stanąć zadanie o kątach



płaszczyzn zwierciadlanych. Rozwiązanie tego zadania podaje twierdzenie, zawarte w §-fie 33-cim.

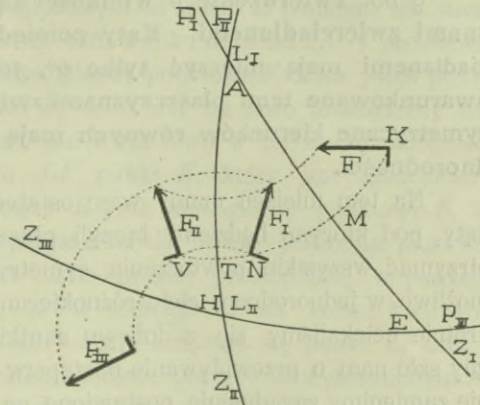
Niemoże ono jednak być dowiedzione bez twierdzenia o kącie obrotu. A więc przejdźmy do tego twierdzenia.

§ 32. **Twierdzenie o kącie obrotu.** Przekształcenie symetryczne, uwarunkowane dwiema płaszczyznami zwierciadlanymi, tworzącymi kąt  $A^0$ , równe jest obrotowi o kąt  $2A^0$  około prostej przecięcia się tych płaszczyzn zwierciadlanych, jak około osi.

Rys. 75 przedstawia część powierzchni kuli, na której znajduje się figura  $F$  i jej przekształcenia symetryczne, dokonane przez trójkąt sferyczny  $AEH$  płaszczyzn zwierciadlanych  $P_I Z_I$ ,  $P_{II} Z_{II}$  i  $P_{III} Z_{III}$ .

Z definicji odzwierciedlenia (§ 24) wypływa, że każde dwa punkty analogiczne utworów symetrycznie równych i symetrycznie leżących, znajdują się na prostej, prostopadłej do płaszczyzny zwierciadlanej. W takim razie punkty  $K$ ,  $N$  i  $V$  figur  $F$ ,  $F_I$ , i  $F_{II}$  leżą na jednej płaszczyźnie, prostopadłej do obu płaszczyzn zwierciadlanych  $P_I Z_I$  i  $P_{II} Z_{II}$ , a więc prostopadłej do średnicy kuli  $L_I$ , t. j. do prostej, która powstaje z przecięcia się wzajemnego płaszczyzn  $P_I Z_I$  i  $P_{II} Z_{II}$ . Płaszczyzna  $KNV$ , przecinając się z powierzchnią kuli, tworzy okrąg koła małego, którego łukiem jest łuk  $KV$ .

Podobnie, z definicji płaszczyzny zwierciadlanej wynika, że łuk  $KM$  jest równy łukowi  $MN$  i łuk  $NT$  równa się łukowi  $TV$ :



Rys. 75. Trzy przekształcenia symetryczne.

$$KM = NM$$

$$NT = TV.$$

Z tego wypływa, że

$$TN + NM = VT + MK$$

czyli, że

$$VK = 2TM.$$

Łuk  $TM$  jest miarą kąta  $A^\circ$ , utworzonego przez płaszczyzny  $P_I Z_I$  i  $P_{II} Z_{II}$ , a więc

$$\widehat{VK} = 2A^\circ.$$

To samo jest słuszne względem każdego punktu figur  $F$ ,  $F_I$  i  $F_{II}$ .

A zatem, jeżeli kąt pomiędzy płaszczyznami  $P_I Z_I$  i  $P_{II} Z_{II}$  mierzy  $A^\circ$ , i jeżeli całą kulę rys. 75-tego obrócimy około średnicy  $L_I$ , jak około osi o kąt  $2A^\circ$ , to figura  $F$  będzie doprowadzona do przystania z figurą  $F_{II}$ <sup>1</sup>. Jednym słowem, działanie dwu przecinających się pod pewnym kątem płaszczyzn zwierciadlanych równe jest obrotowi około prostej ich przecięcia się o kąt dwa razy większy.

Po tem twierdzeniu, którego słuszność jest konieczna do dowodzenia teorematu następnego, możemy nawiązać treść przerwana i podać twierdzenie najważniejsze w nauce o symetrii krystalograficznej, a tem jest twierdzenie o wielkości kątów pomiędzy płaszczyznami zwierciadlanymi\*.

§ 33. **Twierdzenie o wielkości kątów pomiędzy płaszczyznami zwierciadlanymi.** Kąty pomiędzy płaszczyznami zwierciadlanymi mają mierzyć tylko  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $90^\circ$ , jeżeli uwarunkowane temi płaszczyznami zwierciadlanymi powtórzenia symetryczne kierunków równych mają czynić zadość prawu jednorodności.

Na tem miejscu mamy więc ostatecznie znaleźć te wszystkie kąty, pod którymi będziemy łączyli płaszczyzny zwierciadlane, aby otrzymać wszystkie powtórzenia symetryczne kierunków równych, możliwe w jednorodnym ciele różnokierunkowym. A ponieważ wielokrotnie uciekaliśmy się z dobrym skutkiem do sieci przestrzennej, gdy szło nam o przewidywanie następstw jednorodności, więc i obecnie zamienimy zagadnienie, postawione na początku paragrafu niniejszego, na zagadnienie następujące: znaleźć wszystkie kąty płaszczyzn zwierciadlanych zgodne z symetrycznością sieci przestrzennej, t. j. nie przeczące zasadom jej budowy.

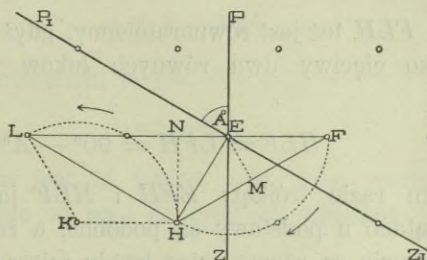
Płaszczyzna rysunku 76-go niech będzie siecią płaską i niechaj  $LF$  będzie to którykolwiek szereg tej sieci.

---

<sup>1</sup> Porównaj także rys. 73, gdzie to samo jest przedstawione na płaszczyźnie.



Załóżmy, że rozłożenie kierunków równych na tej płaszczyźnie siatkowej czyni zadość dwom prostopadłym do omawianej sieci płaskiej płaszczyznom zwierciadlanym, których ślady  $PZ$  i  $P_1Z_1$  przechodzą przez węzeł  $E$ , dowolny w szeregu  $LF$ , i tworzą kąt  $A^\circ$ .



Rys. 76. Sieć płaska i jej symetryczność.

W takim razie, według twierdzenia o kącie obrotu (§ 32) po obrocie sieci o kąt  $2A^\circ$  około prostej, prostopadłej do sieci i przecinającej ją w punkcie  $E$  sieć przystanie do swego położenia poprzedniego. Jeżeli więc w szeregu  $LF$  najbliższym od węzła  $E$  punktem mu analogicznym jest węzeł  $F$ , to na końcu łuku długości  $2A^\circ$  i promienia  $EF$  znajduje się punkt  $H$ , analogiczny punktowi  $F$ . Lecz jeżeli punkt  $H$  jest analogiczny punktowi  $F$ , a  $F$  ma na lewo analogiczny mu punkt  $E$ , to i punkt  $H$  musi mieć na lewo w tej samej odległości na prostej równoległej do  $LF$  punkt  $K$ , który jest analogiczny punktowi  $E$ . Jeżeli zaś punkt  $K$  jest analogiczny punktowi  $E$ , to płaszczyzna siatkowa też przystanie do swego położenia pierwotnego, gdy będzie obrócona około prostej prostopadłej w punkcie  $K$  o kąt  $2A^\circ$ . To znaczy, że w szeregu  $LF$  na końcu łuku  $HL$  długości  $2A^\circ$  i promienia  $KH = EF$  znajduje się punkt  $L$ , analogiczny punktowi  $H$  i wszystkim innym, poprzednio wymienionym.

Zasada sieci przestrzennej polega na tem, że szeregi jej są prostolinijne oraz, że odległości pomiędzy jej węzłami są skończone i w jednym szeregu równe. A więc, jeżeli napiszemy, że

$$EF = p$$

to musimy uznać za słuszne, że

$$LF = mp$$

gdzie  $m$  jest jakaś liczba cała.

Znajdźmy zależność pomiędzy wartością  $m$  i wielkością kąta  $A^\circ$ .

Trójkąt  $EFH$  jest równoramienny, ponieważ boki jego  $EF$  i  $EH$  są równe, jako promienie jednego koła. W takim razie:

$$EFH = EHF = \frac{1}{2} (180^\circ - 2A^\circ) = 90^\circ - A^\circ$$

Trójkąt  $FLH$  też jest równoramienny, gdyż boki jego  $FH$  i  $HL$  są równe, jako cięciwy dwu równych łuków jednego promienia. A więc

$$HLF = LFH = 90^\circ - A^\circ$$

W takim razie trójkąty  $EFH$  i  $HLF$  jako równoramienne o równych kątach u podstawy są podobne, a zatem ich kąty przeciwległe podstawie są równe, więc każdy mierzy po  $2A^\circ$ :

$$LHF = FEH = 2A^\circ$$

Przeprowadźmy  $EM$  prostopadłą do  $HF$  i nazwijmy

$$FM = n$$

Widoczna, że

$$n : p = \sin A^\circ$$

czyli

$$n = p \sin A^\circ$$

Przeprowadźmy  $HN$  prostopadłą do  $LF$ . Widoczna, że

$$FN : FH = n : p$$

czyli

$$FN : FH = \sin A^\circ$$

a że

$$FN = \frac{1}{2} mp$$

$$FH = 2n$$

więc

$$\frac{1}{2} mp : 2n = \sin A^\circ.$$

Skąd po wstawieniu na miejsce  $n$  wartości jego:  $p \sin A^\circ$ , otrzymamy

$$m = 4 \sin^2 A^\circ.$$



Wstawa kąta jest to wielkość, której krańcowymi wartościami jest zero i jedność:

$$0 \leq \sin A^\circ \leq 1.$$

Jeżeli więc

$$m = 4 \sin^2 A^\circ,$$

to krańcowymi wartościami  $m$  jest 0 i 4:

$$0 \leq m \leq 4.$$

A ponieważ  $m$  jest to liczba cała, więc wartościami jej są wszystkie liczby całe od zera do czterech włącznie:

$$m = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Stąd wynikają następujące wartości kąta  $A^\circ$ :

$m$	$\sin^2 A^\circ$	$\sin A^\circ$	$A^\circ$
0	0	0	180°
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	30°
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	45°
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	60°
4	1	1	90°

A zatem: kąty pomiędzy płaszczyznami zwierciadlanymi mogą mierzyć tylko

$$180^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ,$$

aby uwarunkowane przez te płaszczyzny zwierciadlane powtórzenia kalejdoskopowe kierunków równych czyniły zadość prawu jednorodności.

Twierdzenie to jest podstawowe w nauce o symetryczności kryształów, ono bowiem wyłącza wszystkie te skojarzenia płaszczyzn zwierciadlanych, które są niemożliwe w ciele jednorodnym.





Od jednego rzutu oka na tę tablicę widzimy, że suma kątów w każdym z połączeń, wytłoczonych pismem grubszym, jest większa od  $180^\circ$ , przyczem największa z nich  $3 \times 90^\circ$  jest mniejsza od  $3 \times 180^\circ$ . A więc sześć tych skojarzeń jest możliwe jako trójkąty sferyczne. Lecz już połączenie siódme w kolumnie pierwszej odpada, bo suma kątów jego jest  $180^\circ$ . Tak samo odpadają kolumny pozostałe, albowiem suma kątów połączenia pierwszego w kolumnie drugiej jest  $180^\circ$ , a suma kątów pozostałych w połączeniach jest od  $180^\circ$  mniejsza.

A więc, z kątów  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $30^\circ$  można zbudować tylko sześć trójkątów sferycznych.

Spiszmy razem typy, wyprowadzone w paragrafie niniejszym, na tablicy następującej.

1.	180°			Jedna płaszczyzna zwierciadlana.
2.	90°			Dwie płaszczyzny zwierciadlane.
3.	60°			» » »
4.	45°			» » »
5.	30°			» » »
6.	90°	90°	90°	Trzy płaszczyzny zwierciadlane.
7.	90°	90°	60°	» » »
8.	90°	90°	45°	» » »
9.	90°	90°	30°	» » »
10.	90°	60°	60°	» » »
11.	90°	60°	45°	» » »

Z tablicy tej widzimy, że istotnie, zgodnych z prawem jednorodności skojarzeń płaszczyzn zwierciadlanych, czyli typów symetryczności krystalograficznej jest **jedenaste**.

§ 35. **Oznaczanie typów symetryczności.** Kąty  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $30^\circ$ , lub boki trójkątów sferycznych kątom tym przeciwnie, oznaczamy liczbami: 1, 2, 3, 4 i 6.

Kąty  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $30^\circ$  możemy wyrazić jako ułamki półkola:

$$\frac{1}{1} \cdot 180^\circ, \frac{1}{2} \cdot 180^\circ, \frac{1}{3} \cdot 180^\circ, \frac{1}{4} \cdot 180^\circ, \frac{1}{6} \cdot 180^\circ.$$

Umówmy się, że w typach o dwu płaszczyznach zwierciadla-

nych kąt pomiędzy płaszczyznami zwierciadlanymi będziemy wyrażali mianownikiem odpowiedniego ułamka. A więc kąt  $180^\circ$  oznaczać będziemy liczbą 1, kąt  $90^\circ$  oznaczymy liczbą 2, kąt  $60^\circ$  oznaczać będzie liczba 3, kąt  $45^\circ$  liczba 4, kąt  $30^\circ$  liczba 6.

Co zaś do trójkątów sferycznych, umówmy się, że bok trójkąta sferycznego będziemy oznaczali mianownikiem kąta przeciwległego, a więc liczba 2 oznaczać będzie bok przeciwległy kątowi  $90^\circ$ , liczba 3 oznaczać będzie bok przeciwległy kątowi  $60^\circ$ , liczba 4 oznaczać będzie bok przeciwległy kątowi  $45^\circ$  i liczba 6 oznaczać będzie ten bok trójkąta sferycznego, który jest przeciwległy kątowi  $30^\circ$ .

Znaki te zamykać będziemy nawiasem zwykłym, i dla odróżnienia od wyznaczników ścian położymy przed nawiasem literę  $S$  (symetria).

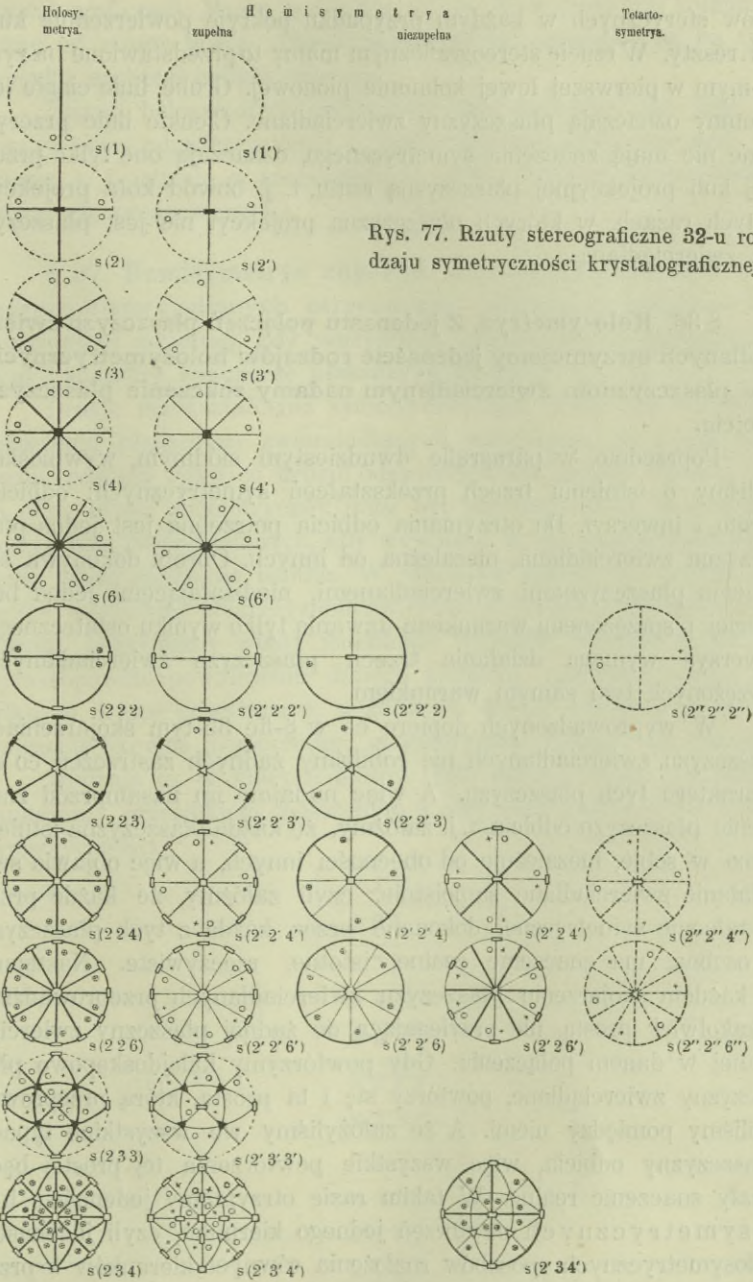
Otrzymamy znaki proste, obrazowe, łatwozrozumiałe i nietrudne do zapamiętania.

1.	$S(1)$	Jedna płaszczyzna zwierciadlana.	$\frac{180^\circ}{1} = 180^\circ$
2.	$S(2)$	Dwie płaszczyzny zwierciadlane, tworzące kąt:	$\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$
3.	$S(3)$	» » » » »	$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$
4.	$S(4)$	» » » » »	$\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$
5.	$S(6)$	» » » » »	$\frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$
6.	$S(222)$	Trzy pł. zwierciadlane, tworzące trójkąt sferyczny:	$90^\circ 90^\circ 90^\circ$
7.	$S(223)$	» » » » » »	$90^\circ 90^\circ 60^\circ$
8.	$S(224)$	» » » » » »	$90^\circ 90^\circ 45^\circ$
9.	$S(226)$	» » » » » »	$90^\circ 90^\circ 30^\circ$
10.	$S(233)$	» » » » » »	$90^\circ 60^\circ 60^\circ$
11.	$S(234)$	» » » » » »	$90^\circ 60^\circ 45^\circ$

Przecinające się płaszczyzny zwierciadlane, powtarzają się kalejdoskopowo naokoło prostej ich przecięcia się (§ 31). A ponieważ kąty, pod którymi łączymy te płaszczyzny, są to ilorazy dzielenia  $180^\circ$  przez liczby całe, więc powtarzające się płaszczyzny skojarzeń omawianych zapełniają przestrzeń bez przerw.

Zakreślmy kulę promieniem dowolnym z któregokolwiek punktu prostej przecięcia się dwu płaszczyzn w skojarzeniach  $S(1)$ ,  $S(2)$ ,  $S(3)$ ,  $S(4)$ ,  $S(6)$  i z punktów przecięcia się trzech płaszczyzn w skojarzeniach  $S(222)$ ,  $S(223)$ ,  $S(224)$ ,  $S(226)$ ,  $S(233)$ ,  $S(234)$ . Kalejdoskopowe powtarzanie się wycinków kuli lub trój-





Rys. 77. Rzuty stereograficzne 32-u rodzaju symetryczności krystalograficznej.

kątów sferycznych w każdym przypadku pokryje powierzchnię kuli bez reszty. W rzucie stereograficznym mamy to przedstawione na rys. 77-mym w pierwszej lewej kolumnie pionowej. Grube linie ciągłe tej kolumny oznaczają płaszczyzny zwierciadlane. Cienkie linie przerywane nie mają znaczenia symetrycznego, oznaczają one tylko przekrój kuli projekcyjnej płaszczyzną rzutu, t. j. obwód koła projekcyi w tych razach, w których płaszczyzna projekcyi nie jest płaszczyzną zwierciadlaną.

§ 36. **Holosymetrya.** Z jedenastu połączeń płaszczyzn zwierciadlanych otrzymujemy jedenaście rodzajów holosymetrycznych, gdy płaszczyznom zwierciadlanym nadamy znaczenie płaszczyzn odbicia.

Poprzednio, w paragrafie dwudziestym siódmym, wywnioskowaliśmy o istnieniu trzech przekształceń symetrycznych: odbicia, obrotu i inwersyi. Do otrzymania odbicia potrzebna jest jedna płaszczyzna zwierciadlana, niezależna od innych. Obrót dokonywa się dwiema płaszczyznami zwierciadlanymi, niedziałającymi jedna bez drugiej i sprzężonymi warunkiem dawania tylko wyniku ostatecznego. Inwersya wymaga działania trzech płaszczyzn zwierciadlanych, sprzężonych tym samym warunkiem.

W wyprowadzonych dopiero co w §-fie 35-tym skojarzeniach płaszczyzn zwierciadlanych nie robiliśmy żadnych zastrzeżeń co do charakteru tych płaszczyzn. A więc nadajmy im nasamprzód znaczenie płaszczyzn odbicia, t. j. załóżmy, że każda płaszczyzna istnieje sama w sobie, niezależnie od obecności innych, a więc objawia swe działanie zwierciadlane samoistnie, czyli załóżmy, że każde przekształcenie symetryczne, dokonane przez każdą z tych płaszczyzn z osobna, ma znaczenie realne, istotne, rzeczywiste. Następnie w każdym skojarzeniu płaszczyzn zwierciadlanych przeprowadźmy jakąkolwiek prostą, nie przylegającą do żadnej płaszczyzny zwierciadlanej w danym połączeniu. Gdy powtórzmy kalejdoskopowo płaszczyzny zwierciadlane, powtórzy się i ta prosta, którą przeprowadziliśmy pomiędzy nimi. A że założyliśmy we wszystkich typach płaszczyzny odbicia, więc wszystkie powtórzenia tej prostej będą miały znaczenie realne. W takim razie otrzymamy jedenaście holosymetrycznych powtórzeń jednego kierunku, czyli jedenaście holosymetrycznych sposobów rozłożenia równych kierunków w przestrzeni, albo jedenaście holosymetrycznych rodzajów symetryczności



krystalograficznej. Mamy je właśnie na rys. 77 w pierwszej kolumnie, licząc od strony lewej. Płaszczyzny odbicia oznaczone są na tym rysunku grubymi liniami ciągłymi.

Nazwa holosymetrii przysługuje tym rodzajom dla tego, że wszystkie odzwierciedlenia w tych rodzajach mają znaczenie fizyczne, t. j. istnieją w rzeczywistości, gdyż niema tu odzwierciedleń urojonych, pomocniczych.

§ 37. **Hemisymetria zupełna.** Z jedenastu połączeń płaszczyzn zwierciadlanych otrzymujemy jedenaście rodzajów hemisymetrii zupełnej, gdy wszystkim płaszczyznom zwierciadlanym nadajemy znaczenie płaszczyzn obrotu.

Drugie przekształcenie symetryczne czyli obrót, jest wynikiem sprzężenia płaszczyzn zwierciadlanych warunkiem, że realne znaczenie posiada tylko co drugie odzwierciedlenie danego utworu, t. j. że dany utwór geometryczny musi być odzwierciedlony w dwu płaszczyznach zwierciadlanych, aby wywołane w ten sposób przekształcenie miało znaczenie istotne. W jedenastu poznanych typach nadajmy wszystkim płaszczyznom zwierciadlanym znaczenie płaszczyzn obrotu. Otrzymamy wtedy jedenaście rodzajów, w których, po kalejdoskopowym powtórzeniu danego kierunku, znaczenie istotne ma tylko co drugie powtórzenie, a znów co drugie pomiędzy nimi ma znaczenie fikcyjne pomocnicze, geometryczne tylko, a nie fizyczne.

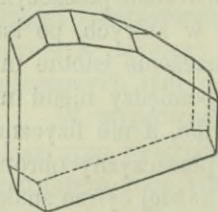
Rodzaje te, w których mamy tylko same płaszczyzny obrotu, oznaczamy przecinkiem, położonym u góry przy każdej cyfrze znaku symetryczności.

$S(1')$
$S(2')$
$S(3')$
$S(4')$
$S(6')$
$S(2'2'2')$
$S(2'2'3')$
$S(2'2'4')$
$S(2'2'6')$
$S(2'3'3')$
$S(2'3'4')$

Te jedenaście rodzajów nazywamy hemisymetrią zupełną; hemisymetrią dla tego, bo każdy rodzaj ma o połowę mniejszą ilość powtórzeń danego kierunku, niż odpowiadający mu rodzaj w grupie holosymetrycznej, a zupełną dla tego, że każda płaszczyzna zwierciadlana ma tu znaczenie płaszczyzny obrotu, t. j. że w tej grupie niema połączeń płaszczyzn obrotu z płaszczyznami odbicia.

Rodzaje hemisymetrii zupełnej w rzucie stereograficznym wykreślone są w drugiej kolumnie pionowej rysunku 77-go. Płaszczyzny obrotu oznaczone są tam liniami cienkimi ciągłymi. Linie cienkie kropkowane oznaczają tylko obwód koła projekcyi w tych rodzajach, w których płaszczyzna projekcyi nie jest płaszczyzną zwierciadlaną.

Rodzaj  $S(1')$  mógłby wydawać się nonsensem: zawiera on tylko jedną płaszczyznę obrotu, gdy tymczasem obrót, t. j. drugie przekształcenie symetryczne, w istocie swej wymaga sprzężenia dwu przecinających się płaszczyzn zwierciadlanych. Jednak gdy wejrzymy głębiej w treść znaku  $S(1')$ , to przekonamy się, że ma on znaczenie rozumne.



Rys. 78. Kwaśny prawy winian strontu.

Załóżmy na powierzchni kuli jakiś biegun dowolny, obok tego bieguna przeprowadźmy środkową płaszczyznę zwierciadlaną i nadajmy jej znaczenie płaszczyzny obrotu, t. j. takiej właśnie, jaką mamy w rodzaju  $S(1')$ . W myśl definicyi obrotu, t. j. drugiego przekształcenia symetrycznego, utwór, odbity w jednej płaszczyźnie zwierciadlanej, nie istnieje. Nabrał by on znaczenia realnego dopiero wtedy, gdyby się odzwierciadlił jeszcze raz w drugiej płaszczyźnie obrotu. Lecz w rodzaju  $S(1')$  istnieje tylko jedna płaszczyzna zwierciadlana; drugiej już niema. A więc

w rodzaju  $S(1')$  każdy biegun pozostaje samotny, bez wszelkiego drugiego mu symetrycznego, bo niema w czym się odzwierciadlić. Znaczy to, innymi słowy, że rodzaj  $S(1')$ , otrzymany przez nas na drodze konsekwentnego i ścisłego stosowania definicyi i twierdzeń, przewiduje istnienie takich kryształów, których żadna ściana niema sobie równej i każdy kierunek jest jedyny: rodzaj  $S(1')$  jest teoretycznem uzasadnieniem istnienia kryształów asymetrycznych.

Kryształy asymetryczne rzeczywiście istnieją. Na rys. 78 widzimy wielościan, ograniczony ścianami, z których żadna niema drugiej sobie równej. Jest to kryształ kwaśnego prawego winianu strontowego  $SrH_2(C_4H_4O_6)_2 \cdot 2H_2O$ . Oprócz tej soli istnieją też inne substancje krystalizujące się podobnie, t. j. tak, że żadna ich ściana niema sobie równej. Kryształy te podlegają prawu jednorodności, lecz są rzekomym wyjątkiem z prawa kierunków równych. Jednakże w tym sposobie przed-



stawienia symetryczności kryształów, który przyjęty jest w książce niniejszej, kryształy te znajdują swoje miejsce, a istnienie ich jest przewidziane i usprawiedliwione teoretycznie, jako ciało rodzaju  $S(1')$  bez żadnej różnicy od wszelkich rodzajów innych.

**§ 38. Konieczność istnienia rodzajów hemisymetrii niezupełnej.** W niektórych trójkątach sferycznych płaszczyzn zwierciadlanych jeden bok może być płaszczyzną odbicia, a dwa pozostałe boki mogą być płaszczyznami obrotu.

Z jednej strony istnienie obrotu, który wymaga tylko dwu płaszczyzn zwierciadlanych, a z drugiej strony połączenia płaszczyzn zwierciadlanych po trzy, przywodzą nas nieodwołnie do rodzajów hemisymetrii niezupełnej, t. j. do rodzajów takich, które są wynikiem trójkątów sferycznych, lecz w których dwie płaszczyzny zwierciadlane mają znaczenie płaszczyzn obrotu, a trzecia ma charakter płaszczyzny odbicia.

Zachodzi więc pytanie, czy możliwe jest związanie warunkiem obrotu każdego z dwu boków w poznanych wyżej trójkątach sferycznych. Jeżeli zaś jest to niemożliwe, to należy rozwiązać zagadnienie: w których trójkątach sferycznych jakim parom boków możemy nadać charakter płaszczyzn obrotu. Zagadnienie to rozwiążemy w paragrafie następnym.

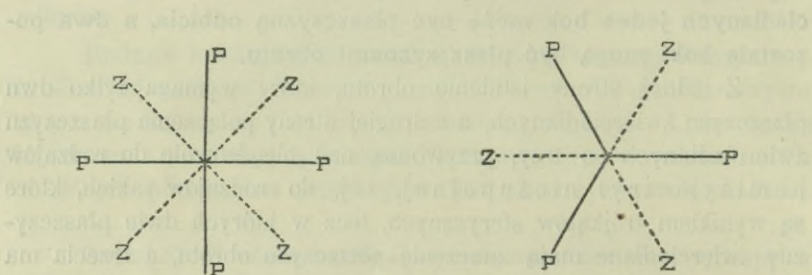
**§ 39. Twierdzenie o kątach płaszczyzn obrotu w trójkątach sferycznych.** Jeżeli w trójkącie sferycznym płaszczyzn zwierciadlanych tylko dwa boki mają być płaszczyznami obrotu, a w trójkącie tym jest kąt, będący nieparzystą częścią półkola, to płaszczyznami obrotu muszą być oba boki, tworzące kąt nieparzysty.

Niechaj  $P$  i  $Z$  (rys. 79 i 80) będą to płaszczyzny zwierciadlane, tworzące kąt  $A^0$ . Niech  $Z$  będzie płaszczyzną obrotu t. j. taką płaszczyzną, która sprowadza drugie przekształcenie symetryczne, a  $P$  niech to będzie płaszczyzna odbicia, t. j. płaszczyzna przekształcenia pierwszego.

W kalejdoskopowym powtórzeniu tych płaszczyzn, t. j. w ich wzajemnym się odzwierciedlaniu, dalszym ciągiem płaszczyzny  $Z$  może być odbicie tej samej płaszczyzny, co dzieje się wtedy, gdy  $A^0$  jest ilorazem półkola i liczby parzystej (rys. 79), albo dalszym ciągiem  $Z$  będzie płaszczyzna  $P$ , jeżeli kąt  $A^0$  jest nieparzysty (rys. 80). Ale rzecz jest oczywista, że drugi ten przypadek nie ma sensu,

bo jest to niemożliwe, aby ta sama płaszczyzna miała równocześnie charakter płaszczyzny odbicia i płaszczyzny obrotu.

Również jest oczywiste, że gdy obu płaszczyznom  $P$  i  $Z$  nadamy charakter płaszczyzn obrotu, to czy  $A^0$  jest parzystą czy nieparzystą częścią półkola, zawsze w powtórzeniu kalejdoskopowym dalsze ciągi płaszczyzn będą jednakowe.



Rys. 79. Powtórzenie kalejdoskopowe kąta parzystego o niejednakowym charakterze boków.

Rys. 80. Powtórzenie kalejdoskopowe kąta nieparzystego o niejednakowym charakterze boków.

A zatem kąty parzyste w trójkątach sferycznych mogą mieć boki różnego charakteru, ale nieparzyste muszą mieć oba boki obdarzone charakterem jednakowym.

Innymi słowy, jeżeli w trójkącie sferycznym płaszczyzn zwierciadlanych tylko dwa boki mają być płaszczyznami obrotu, a trójkąt ten zawiera kąt, będący nieparzystą częścią półkola, to **oba** boki tego kąta muszą być płaszczyznami obrotu.

Z tego wynika, że w rodzajach hemisymetrii niezupełnej, gdzie jeden bok trójkąta sferycznego ma być płaszczyzną odbicia a dwa pozostałe mają być płaszczyznami obrotu, płaszczyzna odbicia nie może przylegać do kąta nieparzystego, tylko musi być mu przeciwległa, a przylegać winna do kąta parzystego.

§ 40. **Twierdzenie o siedmiu rodzajach hemisymetrii niezupełnej.** Jest siedm rodzajów hemisymetrii niezupełnej, czyli siedm jest połączeń płaszczyzn obrotu z płaszczyzną odbicia.

Z twierdzenia paragrafu poprzedniego wynika, że trójkąt

$$S(2\ 2\ 2)$$



jako zawierający wszystkie kąty parzyste i wszystkie trzy boki równe, może dać jeden rodzaj hemisymetrii niezupełnej:

$$S( 2' 2' 2 ).$$

Trójkąt

$$S( 2 2 3 )$$

w myśl twierdzenia paragrafu poprzedniego, może dać jeden rodzaj hemisymetrii niezupełnej:

$$S( 2' 2' 3 )$$

t. j. oba boki (2) przylegające do kąta nieparzystego  $\frac{1}{3} \cdot 180^\circ$  muszą być płaszczyznami obrotu, a płaszczyzną odbicia jest bok (3), przeciwny kątowi  $\frac{1}{3} \cdot 180^\circ$ .

Trójkąty:

$$S( 2 2 4 )$$

$$S( 2 2 6 )$$

jako zawierające tylko parzyste kąty, mogą dać po dwa rodzaje hemisymetrii niezupełnej:

$S( 2' 2' 4 )$	$S( 2' 2' 4' )$
$S( 2' 2' 6 )$	$S( 2' 2' 6' )$

Trójkąt  $S( 2 3 3 )$ , jako zawierający dwa kąty nieparzyste, warunkowi hemisymetrii niezupełnej podlegać nie może, bo gdy dwa boki jednego kąta nieparzystego zrobimy płaszczyznami obrotu, to drugi kąt nieparzysty będzie miał jeden bok płaszczyzną obrotu, a drugi bok płaszczyzną odbicia, co jak wiemy z paragrafu poprzedniego, prowadzi do absurdu, więc jest niemożliwe. Innymi słowy, każdy bok tego trójkąta przylega do kąta nieparzystego, więc żaden nie może być jedyną płaszczyzną odbicia.

Nakoniec trójkąt

$$S( 2 3 4 )$$

jako posiadający jeden kąt nieparzysty, może dać tylko jeden rodzaj hemisymetrii niezupełnej:

$$S( 2' 3 4' ).$$

A więc rodzajów hemisymetrii niezupełnej mamy siedm:

$S(2' 2' 2)$	
$S(2' 2' 3)$	
$S(2' 2' 4)$	$S(2' 2' 4')$
$S(2' 2' 6)$	$S(2' 2' 6')$
	$S(2' 3' 4')$

Rodzaje te są bardzo łatwe do zapamiętania: przecinkiem, oznaczającym płaszczyznę obrotu, opatrzone są tylko liczby parzyste.

Kalejdoskopowe powtórzenia trójkątów sferycznych tej grupy podane są w kolumnie trzeciej i czwartej rysunku 77-go. Linie grube oznaczają płaszczyzny odbicia, linie cienkie — płaszczyzny obrotu.

**§ 41. Konieczność istnienia rodzajów tetartosymetrycznych. Inwersya, wymagająca trzech płaszczyzn zwierciadlanych, wraz z istnieniem trójkątowych typów symetryczności, wywołuje konieczność istnienia rodzajów tetartosymetrycznych.**

Z definicji trzech przekształceń symetrycznych (§§ 24—26) wiadomo nam, że oprócz odbicia i obrotu, jest jeszcze trzecie przekształcenie symetryczne, które nazwaliśmy inwersją. Inwersya jest wynikiem trzech płaszczyzn zwierciadlanych, tworzących trójkąt sferyczny, które są sprzężone warunkiem istnienia i działania spólnego oraz warunkiem dawania w rzeczywistości tylko ostatecznego następstwa ich istnienia.

Rzecz jest oczywista, że w kalejdoskopowym powtórzeniu płaszczyzn inwersyi znaczenie istotne mieć będzie odzwierciedlenie co czwarte. A więc rodzaje symetryczności, powstałe przez skojarzenie płaszczyzn inwersyi, możemy nazwać tetartosymetrycznymi.

Rozważmy obecnie, jakie mogą istnieć rodzaje tetartosymetryczne, t. j. rozpatrzmy, które z trójkątów sferycznych, nam znanych, mogą podlegać warunkowi inwersyi.

Aby rozwiązać to zagadnienie, należy podać przed tem pewne definicje i pewne twierdzenie.

**\*§ 42. Definicja osi przystawania, jej okresu i jej rzędu. Prosta, powstała z przecięcia się płaszczyzn zwierciadlanych,**



nosi nazwę osi przystawania. Kąt, o który obrócić należy utwór około osi przystawania, aby przystał do położenia pierwiastkowego, czyli aby stał się sam z sobą jednokładny, nazywa się okresem osi przystawania. Liczba, wskazująca, ile razy utwór przystaje do swego położenia pierwiastkowego w pełnym obrocie  $360^\circ$  dookoła osi przystawania, nazywa się rzędem tej osi.

Z twierdzenia o kącie obrotu (§ 32) wiadomo, że przekształcenie symetryczne, uwarunkowane przez dwie płaszczyzny zwierciadlane, przecinające się pod kątem  $A^\circ$ , jest równe obrotowi o kąt  $2A^\circ$  około prostej przecięcia się tych płaszczyzn, jak około osi.

Prostą, powstałą od przecięcia się płaszczyzn zwierciadlanych nazywamy osią przystawania, bo gdy obrócimy około niej ten utwór, który powstał od spóldziałania płaszczyzn zwierciadlanych, to przystaje on do swego położenia pierwotnego, t. j. przywodzi się sam z sobą do jednokładności.

Jeżeli mamy w utworze dwie płaszczyzny zwierciadlane, przecinające się pod kątem  $A^\circ$ , to jednokładność utworu zachodzi po obrocie o kąt  $2A^\circ$ . Kąt  $2A^\circ$  nazywamy okresem osi przystawania, albo jej kątem obrotu.

Rzecz oczywista, przez kalejdoskopowe powtórzenie płaszczyzn zwierciadlanych około osi powstać musi utwór, który przystaje sam do siebie co  $2A^\circ$  w obrocie o  $360^\circ$ . Podzielmy  $360^\circ$  przez  $2A^\circ$ . Otrzymamy iloraz, który wskazuje, ile razy utwór przychodzi sam z sobą do jednokładności podczas obrotu około danej osi o  $360^\circ$ . Wobec tego, że wartości kąta  $A^\circ$  są:  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  lub  $30^\circ$ , iloraz ten jest zawsze liczbą całą. Iloraz ten

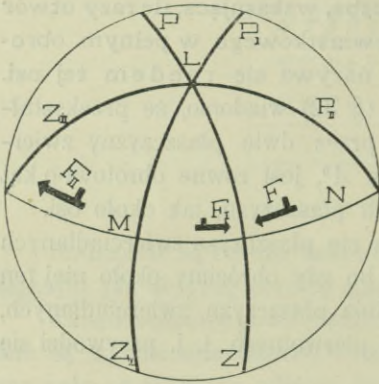
$$\frac{360^\circ}{2A^\circ} = \varphi = 2, 3, 4, 6$$

nazywamy rzędem osi przystawania.

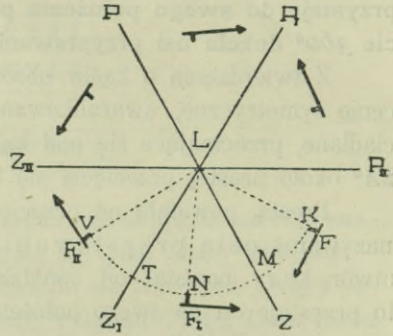
Dla ilustracji rzeczonych przed chwilą mamy rys.: 81, 82 i 83-ci.

Rys. 82 jest to rzut stereograficzny płaszczyzn zwierciadlanych  $PZ$  i  $P_1Z_1$  oraz ich powtórzenia kalejdoskopowego, t. j. płaszczyzn  $P_{II}Z_{II}$  i dalszych ciągów tych płaszczyzn, przecinających się w średnicy kuli  $L$ . (Średnica ta na rys. 82 jest nachylona do płaszczyzny rzutu pod kątem  $30^\circ$ ). Widoczna, że figury  $F$  i  $F_{II}$  są jednokładne, t. j. przystają do siebie po obrocie kuli około średnicy  $L$  jak około osi.

Rys. 82 jest to przecięcie utworu, narysowanego na rys. 81-szym, płaszczyzną  $MN$ , prostopadłą do płaszczyzn  $PZ$ ,  $P_IZ_I$  i  $P_{II}Z_{II}$ , a więc



Rys. 81. Powtórzenie kalejdoskopowe dwu przecinających się płaszczyzn zwierciadlanych w rzucie stereograficznym.



Rys. 82. Płaszczyzna  $MN$  rysunku 81-szego i na niej ślady płaszczyzn zwierciadlanych oraz przekształceń figury  $F$ .

i do osi  $L$ . Na rysunku tym wykreślone są wszystkie przekształcenia figury  $F$ , wywołane kalejdoskopowym powtórzeniem płaszczyzn zwierciadlanych, przyczem płaszczyznom tym dany jest charakter płaszczyzn odbicia, t. j. przypisano realne istnienie każdemu przekształceniu z osobna. Oprócz tego na rys. 82 uwidoczniiono, że

$$KM = MN$$

i

$$NT = TV$$

t. j. że

$$TM = KM + TV$$

a więc, że

$$VK = 2TM$$

skąd staje się oczywiste, że cały utwór rys. 82, powstały z kalejdoskopowego powtórzenia kąta  $ZLZ_I$ , przychodzi do jednokładności

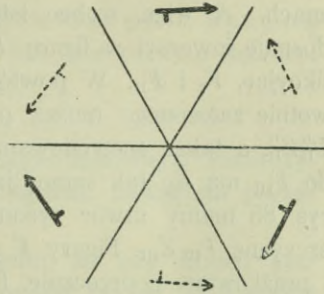


sam z sobą po obrocie o kąt  $2A^0$  około  $L$ , jeżeli kąt  $ZLZ_1$  mierzy  $A^0$ .

Rys. 83 przekonywa, że to samo dzieje się, gdy płaszczyznom zwierciadlanym nadamy znaczenie płaszczyzn obrotu, t. j. gdy uznamy za nieistniejące co drugie przekształcenie  $F$ .

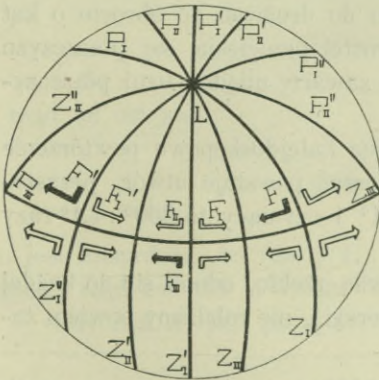
Wnosimy więc, że bez względu na to, czy kąt  $A^0$  jest utworzony przez płaszczyzny odbicia czy przez płaszczyzny obrotu, to zawsze jego powtórzenie kalejdoskopowe daje oś przystawiania okresu  $2A^0$  i rzędu  $360^0 : 2A^0$ .

W przypadku, przedstawionym na rys. 81, 82 i 83,  $A^0 = 60^0$ ,  $2A^0 = 120^0$ ,  $\varphi = 360^0 : 120^0 = 3$ .

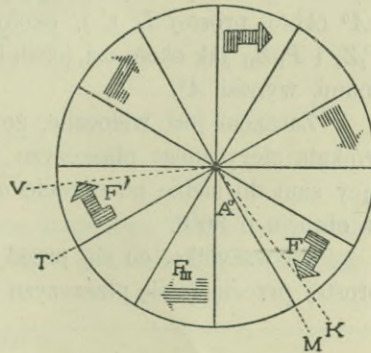


Rys. 83. Płaszczyzny zwierciadlane z rys. 81 i 82, mające znaczenie płaszczyzn obrotu.

§ 43. Twierdzenie o okresach i o rządach osi przystawiania, powstałych z przecięcia się płaszczyzn inwersji. Płaszczyzny inwersji tworzą osi przystawiania, których okres jest  $4A^0$  i rząd jest  $360^0 : 4A^0$ , gdzie  $A^0$  jest to wielkość kąta pomiędzy dwiema płaszczyznami inwersji, tworzącymi daną oś.



Rys. 84. Kalejdoskopowe powtórzenie trójkąta płaszczyzn inwersji.



Rys. 85. Utwór rys. 84-go w rzucie pionowym na płaszczyznę  $P_{III}Z_{III}$ .

Niechaj będą trzy płaszczyzny zwierciadlane  $P_1Z_1$ ,  $P_2Z_2$  i  $P_3Z_3$  (rys. 84) związane warunkiem działania spólnego w myśl trzeciego

przekształcenia symetrycznego, t. j. niech żadna nie istnieje bez dwu pozostałych i realnego znaczenia niechaj utwór nabiera dopiero po kolejnym odzwierciedleniu się we wszystkich tych trzech płaszczyznach. A więc, wobec istnienia tych trzech płaszczyzn, figura  $F$  doznaje inwersji w figurę  $F_{III}$  przez pośredniczące figury urojone, fikcyjne,  $F_I$  i  $F_{II}$ . W powtórzeniu kalejdoskopowym trójkąta pierwotnie założonego muszą powstać płaszczyzny  $P_I Z_I$ ,  $P_{II} Z_{II}$ ,  $P_I' Z_I'$ ,  $P_{II}'' Z_{II}''$ , a także spowodowana przez te płaszczyzny figura  $F'$ , która do  $F_{III}$  ma się tak samo, jak  $F$  przez figury urojone  $F_{II}$  i  $F_I'$ . Na rys. 85 mamy utwór rysunku 84-go w rzucie pionowym na płaszczyznę  $P_{III} Z_{III}$ . Figury  $F$  półkuli górnej są obwiedzione konturem i prążkowane poprzecznie, figury dolnej półkuli, t. j. znajdujące się pod płaszczyzną rzutu, są bez konturu i prążkowane podłużnie. Figury fikcyjne są na rys. 85 pominięte. Nakreślone są tylko te, które istnieją w rzeczywistości.

Z §-fu 32-go wiadomo nam, że na rys. 85

$$KM + TV = A^\circ$$

a więc łuk

$$KV = 4A^\circ$$

Tak więc z definicji przekształceń symetrycznych wynika i z rysunków 84 i 85 widocznem się staje, że  $F$  jest jednokładne z  $F'$  i że utwory te przystają jeden do drugiego po obrocie o kąt  $4A^\circ$  około prostej  $L$ , t. j. około prostej przecięcia się płaszczyzn  $P_I Z_I$  i  $P_{II} Z_{II}$  jak około osi, jeżeli kąt, zawarty między temi płaszczyznami, wynosi  $A^\circ$ .

Zarazem jest widoczne, że przez kalejdoskopowe powtórzenie trójkąta sferycznego płaszczyzn inwersji powstaje utwór, przystający sam do siebie po obrocie o  $4A^\circ$  i czyniący to  $360^\circ : 4A^\circ$  razy w obrocie o  $360^\circ$ .

To wszystko, co się przed chwilą rzekło, odnosi się do każdej prostej przecięcia się płaszczyzn inwersji<sup>1</sup>, nie robiliśmy bowiem za-

<sup>1</sup> Przypadek, wykreślony na rys. 84 i 85 jest to kalejdoskopowe powtórzenie trójkąta  $S(2\ 2\ 6)$ , a więc  $L$  jest osią przystawania z okresem  $30^\circ \times 4 = 120^\circ$ , t. j. oś ta jest rzędu trzeciego:  $360^\circ : 120^\circ = 3$ . Na dwu pozostałych krawędziach trójkąta płaszczyzn inwersji niema jednokładności, bo pozostałe dwa kąty mierzą po  $90^\circ$ , a  $90^\circ \times 4 = 360^\circ$  i  $360^\circ : 360^\circ = 1$ : każdy utwór geometryczny po obrocie o  $360^\circ$  staje się sam z sobą jednokładny, a więc oś przystawania powstaje od płaszczyzn inwersji tylko przy kącie mniejszym od  $90^\circ$ .



nych zastrzeżeń co do wielkości kąta  $A^0$ . A więc: płaszczyzny inwersyi dają osi przystawania okresu  $4A^0$  i rzędu  $360:4A^0$ , gdzie  $A^0$  jest to wielkość kąta pomiędzy dwiema płaszczyznami inwersyi, tworzącymi daną oś.

Rzecz oczywista, że twierdzenie to jest następstwem definicyi inwersyi oraz definicyi okresu i rzędu osi.\*

§ 44. **Twierdzenie o kącie płaszczyzn inwersyi.** Płaszczyzny inwersyi przecinają się tylko pod kątami, będącymi parzystą częścią półkola.

Dowiedliśmy w paragrafie poprzednim, że gdy trójkąt płaszczyzn inwersyi zawiera przy danej krawędzi kąt  $A^0$ , to krawędź ta jest osią przystawania rzędu  $\varphi$ , gdzie

$$\varphi = \frac{360^0}{4A^0}$$

Niech  $A^0$  będzie nieparzystą częścią półkola, t. j. niech

$$A^0 = \frac{180^0}{2n + 1}$$

gdzie  $n$  jest liczbą całą.

Wtedy okresem osi jest

$$4A^0 = \frac{4 \cdot 180^0}{2n + 1}$$

i rząd tej osi jest:

$$\varphi = \frac{2n + 1}{2}$$

co jest absurdem, bo  $(2n + 1) : 2$  nie może być liczbą całą, tymczasem rząd osi jest to liczba cała, jak to wiadomo z §-fu 42-giego.

Gdy zaś  $A^0$  jest parzyste, to

$$A^0 = \frac{180^0}{2n}$$

$$4A^0 = \frac{360^0}{n}$$

$$\varphi = n$$

co nie przeczy pojęciu osi przystawania i założeniu, że  $n$  jest liczbą cała.

A więc, kąty pomiędzy płaszczyznami inwersyi muszą być zawsze parzyste.

**§ 45. Twierdzenie o trzech rodzajach tetartosymetryi. Trzy są rodzaje tetartosymetryi.**

Z §-fu poprzedniego wynika bezpośrednio, że rodzaje tetartosymetryczne mogą być następstwem tylko tych trójkątów sferycznych płaszczyzn zwierciadlanych, których boki tworzą kąty, będące parzystymi częściami półkola, t. j. typy

$$\boxed{2 \ 2 \ 2} \quad \boxed{2 \ 2 \ 4} \quad \boxed{2 \ 2 \ 6}$$

A więc mamy tylko trzy rodzaje tetartosymetryczne. Ich płaszczyzny zwierciadlane oznaczymy przecinkiem podwójnym.

$S(2'' \ 2'' \ 2'')$
$S(2'' \ 2'' \ 4'')$
$S(2'' \ 2'' \ 6'')$

Rzut stereograficzny tych rodzajów znajduje się w piątej kolumnie rysunku 77-go. Płaszczyzny inwersyi oznaczone są grubemi liniami przerywanemi.

**§ 46. Twierdzenie o trzydziestu dwu rodzajach symetryczności krystalograficznej. Są trzydzieści dwa rodzaje symetryczności krystalograficznej.**

Krótki przegląd dotychczasowego rozumowania naszego przekonywa, że wyczerpaliśmy wszystkie rodzaje symetryczności, czyniące zadość prawu jednorodności. A więc powtórzmy w streszczeniu wykład nasz o prawie kierunków równych.

Nasamprzód podaliśmy definicyę kierunków równych i wskazaliśmy, że kierunki równe leżą w kryształach symetrycznie. Potem określiliśmy pojęcie płaszczyzny zwierciadlanej. Następnie dowiedliśmy, że istnieją tylko trzy przekształcenia symetryczne. Dalej doszliśmy do wniosku, że kąty pomiędzy płaszczyznami zwierciadlanymi czynią zadość prawu jednorodności tylko o tyle, o ile mierzą  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$



i 30°. W następstwie poczyniliśmy wszystkie możliwe połączenia płaszczyzn pod tymi kątami po dwie i po trzy. Nakoniec wszystkim tym połączeniom nadaliśmy wszystkie możliwe znaczenia płaszczyzn odbicia, obrotu i inwersji.

Na tej drodze, krok za krokiem, poznaliśmy jedenaście rodzajów holosymetrycznych, jedenaście rodzajów hemisymetrii zupełnej, siedm rodzajów hemisymetrii niezupełnej i trzy rodzaje tetartosymetryczne, co w wypadku ostatecznym stanowi **trzydzieści dwa** rodzaje symetryczności, możliwe w budowie i własnościach ciała krystalicznego. Znaki ich mamy zebrane w tablicy następującej.

Holo- symetria	Hemisymetria		Tetarto- symetria
	zupełna	niezupełna	
$S(1)$	$S(1')$		
$S(2)$	$S(2')$		
$S(3)$	$S(3')$		
$S(4)$	$S(4')$		
$S(6)$	$S(6')$		
$S(2\ 2\ 2)$	$S(2'\ 2'\ 2')$	$S(2'\ 2'\ 2)$	$S(2''\ 2''\ 2'')$
$S(2\ 2\ 3)$	$S(2'\ 2'\ 3')$	$S(2'\ 2'\ 3)$	
$S(2\ 2\ 4)$	$S(2'\ 2'\ 4')$	$S(2'\ 2'\ 4)$	$S(2''\ 2''\ 4'')$
$(S\ 2\ 2\ 6)$	$S(2'\ 2'\ 6')$	$S(2'\ 2'\ 6)$	$S(2''\ 2''\ 6'')$
$S(2\ 3\ 3)$	$S(2'\ 3'\ 3')$		
$S(2\ 3\ 4)$	$S(2'\ 3'\ 4')$		$S(2'\ 3\ 4')$

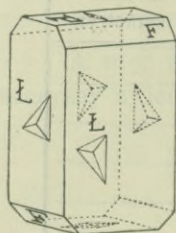
Z wyjątkiem rodzajów  $S(2'\ 2'\ 3)$  i  $S(2\ 2\ 3)$ , których przykłady są nieznanne, (ale odkrycie ciała, którego kryształy są przykładem danego rodzaju symetryczności, jest tylko sprawą czasu i przypadku), znamy kryształy wszystkich rodzajów pozostałych; a co ważniejsza, pomimo, że poznane są liczne tysiące ciał krystalicznych, nie znamy ani jednej takiej substancji, której kryształy rodzajem swojej symetryczności nie odpowiadałyby żadnemu z rodzajów, przewidzianych przez teorię.

Teoria rodzajów symetryczności krystalograficznej, podana w ten sposób, jak to się czyni w książce niniejszej, wyczerpująco i dowodnie

przekonywa, że muszą istnieć trzydzieści dwa rodzaje symetryczności krystalograficznej i że nie może ich być ani mniej ani więcej.

Najważniejszym dowodem słuszności tej teorii jest rodzaj  $S(2''2''4'')$  który, jak widzieliśmy, wywodzi się zupełnie gładko, tak, że nie zwraca na siebie żadnej uwagi szczególnej, ani wymaga dowodzenia osobnego, podobnie, jak wszystkie inne rodzaje. A jednak możliwość istnienia tego rodzaju symetryczności była podawana w wątpliwość, a nawet zaprzeczana przez niektórych autorów teorii innych, tembardziej, że kryształy rodzaju  $S(2''2''4'')$  były nieznanne. Po ogłoszeniu wyłożonej tu teorii otrzymany został zasadowy margarycian wapnia  $Ca_2Al_2SiO_7$ , którego kryształy mają symetryczność rodzaju  $S(2''2''4'')$ .

Przez topienie bromku wapniowego  $CaBr_2$  z niewielkim dodatkiem kaolinu  $H_2Al_2Si_2O_8 \cdot H_2O$  powstaje stop, składający się z kilku ciał krystalicznych.



Rys. 86. Kryształ zasadowego margarycianu wapniowego z figurami wytrawionymi (schematycznie).

Pomiędzy nimi znajduje się bardzo drobna ilość mikroskopowej wielkości kryształów, które zostały wydzielone i zanalizowane, poczem ustalono ich skład, wyrażający się wzorem  $Ca_2Al_2SiO_7$ . Kształt tych kryształów mamy na rys. 86: słupek kwadratowy  $\mathcal{L}$ , zamknięty płaszczyznami podstawowymi  $P$ , którego naprzemianległe krawędzie podstawowe ścięte są czterema ścianami  $F$ . Figury wytrawione na ścianach słupeka  $\mathcal{L}$  okazują, że ściany te są asymetryczne i że wszystkie cztery są sobie równe, przyczem figury wytrawione, otrzymane na ścianach przyległych są do siebie w stosunku inwersyi, a figury na ścianach przeciwległych przystają do siebie po obrocie kryształu o  $180^\circ$  dookoła osi pionowej. Figury wytrawione na ścianach  $P$  również są do siebie w stosunku inwersyi i też dowodzą istnienia prostopadłej do  $P$  osi przystawania drugiego rzędu. Figury te rysunek 86 przedstawia schematycznie. Figury na ścianach tylnych wyobrażone są kropkami.

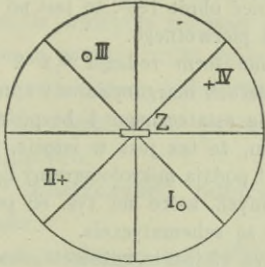
Zalóżmy trójkąt  $S(2''2''4'')$  i wykreślmy wszystkie jego powtórzenia kalejdoskopowe (rys. 87). Wtedy prosta  $Z$ , w myśl twierdzenia §-fu 43-ciego, musi być osią przystawania drugiego rzędu, bo  $A^\circ = 45^\circ$ , więc  $4A = 180^\circ$ , przeto

$$\varphi = 360^\circ : 180^\circ = 2.$$

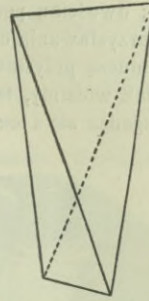
Zalóżmy biegun dowolny  $I$  i wyznaczmy wszystkie jego powtórzenia symetryczne. Z założenia inwersyi wynika, że każde z nich wtedy tylko jest realne, jeżeli powstało przez kolejne odzwierciedlenie w trzech płaszczyznach inwersyi. A więc pierwsze realne odzwierciedlenie bieguna  $I$  znajduje się na dolnej półkuli  $II$ , drugie na górnej  $III$ , trzecie na dolnej  $IV$ , a czwarty raz biegun odzwierciedlony znajduje się w tym punkcie, z którego wyszliśmy. A więc, jeżeli jest biegun  $I$ , muszą być jeszcze trzy, równe biegunowi  $I$ , leżące w punktach  $II$ ,  $III$  i  $IV$ . Gdy do punktów tych przeprowadzimy płaszczyzny styczne, to, oczywiście, będą one odpowiadały ścianom  $F$ , rysunku 86-go. Rozpostarte do przecięcia się wzajemnego dają one bryłę rys. 88: t. zw. podwójny sfenoid



tetragonalny. Ściany w tym do siebie stosunku się znajdujące będą przez nas otrzymane bez względu na to, w którym miejscu założymy biegun  $I$ , z wyjąt-



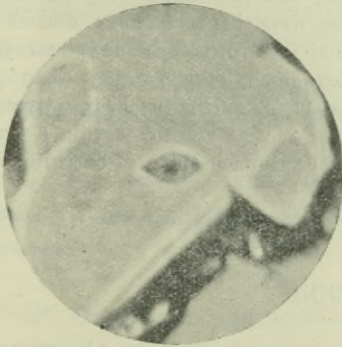
Rys. 87. Rzut stereograficzny biegunów ( $hkl$ ) w klasie  $S(2'' 2'' 4'')$ .



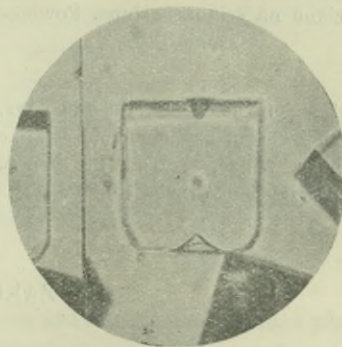
Rys. 88. Podwójny sfenoid tetragonalny.

kiem okręgu koła projekcji i jego środka. To znaczy, że w tym rodzaju symetryczności możliwe są liczne sfenoidy, których spólną cechą jest naprzemianległość ich ścian co  $90^\circ$ .

Gdy przeniesiemy biegun  $I$  na obwód koła projekcji, to samo stanie się z biegunami  $II$ ,  $III$  i  $IV$ . Otrzymamy cztery bieguny na obwodzie w odstępach



Rys. 89. Figura wytrawiona kryształów margarycianu wapniowego na płaszczyźnie podstawowej, widziana z góry. Powiększenie 310.



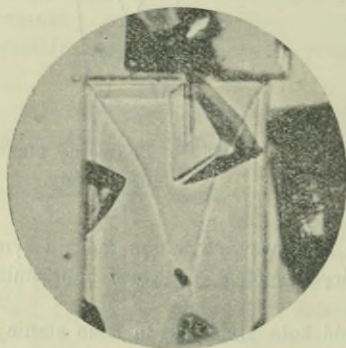
Rys. 90. Figury wytrawione na płaszczyznach podstawowych margarycianu, widziane z boku. Powiększenie 310.

co  $90^\circ$ , a gdy przeprowadzimy do nich płaszczyzny styczne będziemy mieli słup kwadratowy  $\mathcal{E}$  złożony z czterech ścian sobie równych, z których każda jest prostopadła do dwu z pozostałych, a do trzeciej równoległa. Słupów tych może być w tym rodzaju tyle, ile jest punktów na obwodzie koła, zgodnych z prawem jednorodności.

Nakoniec, przesunijmy biegun *I* w punkt środkowy koła projekcji. Zleje się on wtedy z biegunem *III* w środku na półkuli górnej, a z biegunami *II* i *IV* stanie się to samo na dolnej półkuli. Otrzymamy formę jedyną w swoim rodzaju; dwuścian podstawowy (*P* rys. 86). Ściany tej formy, jako prostopadłe do osi przystawania drugiego rzędu, muszą mieć obrót  $180^\circ$ , to jest po obrocie o  $180^\circ$  muszą przystawać do swego położenia pierwotnego.

Jak widzimy, teoretyczne wyprowadzenie form rodzaju  $S(2'' 2'' 4'')$  zupełnie zgadza się z tem, co otrzymano na kryształach margarycianu wapniowego.

Dla ostatecznego i bezpośredniego dowodu, że tak jest w istocie, rys. 89, 90 i 91 podają mikrofotogramy figur wytrawionych, które na rys. 86 przedstawione są schematycznie.



Rys. 91. Figury wytrawione margarycianu na ścianach słupa. Powiększenie 310.

Rys. 89 jest to mikrofotogram figury wytrawionej kwasem solnym na płaszczyźnie podstawowej (*P* na rys. 86). Na rys. 90 widzimy inny kryształ margarycianu, leżący na ścianie słupa, a więc figury, wytrawione na ścianach *P*, w tem położeniu kryształu widzialne są z boku. Tak się zdarzyło pomyślnie, że na obu ścianach *P* powstały figury wytrawione, co pozwala widzieć, że na jednej ścianie *P* figura leży podłużnie, a na drugiej poprzecznie: dłuższa oś jednej jest równoległa do płaszczyzny fotogramu, a drugiej figury oś krótsza

jest w tem położeniu. Nakoniec rys. 91 jest to mikrofotogram figur wytrawionych kwasem azotowym na ścianach słupa *E*. Jedną widzimy wprost, a drugą z boku. Widać, że figury na dwu przyległych ścianach słupa są odwrócone jedna względem drugiej o  $180^\circ$ .

## ZAKOŃCZENIE.

### § 47. Znaczenie krystalograficzne płaszczyzn zwierciadlanych i osi przystawania.

Należy dodać słów kilka o znaczeniu krystalograficznym płaszczyzn zwierciadlanych i prostych, w których się one przecinają. Mianowicie, wypada rozwiązać zagadnienie, nasamprzód, czy płaszczyzny te i ich przecięcia się są możliwe na kryształach jako jego ściany i krawędzi. Następnie należy rozwiązać zagadnienie drugie: o ile są one możliwe w tym charakterze, t. j. które płaszczyzny zwierciadlane w każdym rodzaju i które ich przecięcia możliwe są



jako ściany i krawędzi kryształu. Zagadnienia te stawiamy dlatego, że idzie nam o to, czy możemy i o ile możemy obierać na ściany i krawędzi czworoscianu jednostkowego płaszczyzny zwierciadlane i proste, w których się one przecinają. A sprawa to nie błaha, bo najprostsze wyznaczniki ścian otrzymują się właśnie w takim wyborze czworoscianu jednostkowego.

Odpowiedź na te pytania znajdziemy w trzech twierdzeniach następujących.

1<sup>o</sup>. **Płaszczyzna odbicia jest zawsze możliwa jako ściana kryształu.**

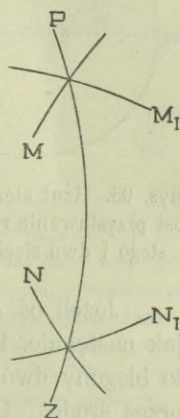
Łuk wielkiego koła  $PZ$  (rys. 92) niech będzie odcinkiem przecięcia się płaszczyzny odbicia z powierzchnią kuli, a  $M$  i  $N$  niech będą to dwie jakiegokolwiek ściany kryształu, rozpostarte do przecięcia się z powierzchnią kuli. Wobec istnienia płaszczyzny odbicia  $PZ$  ściany  $M$  i  $N$  muszą się w niej odzwierciedlić i powtórzyć symetrycznie t. j. muszą oprócz nich istnieć ściany  $M_1$  i  $N_1$ . W punktach przecięcia się  $M$  z  $M_1$  i  $N$  z  $N_1$  krawędzi tych ścian przecinają powierzchnię kuli. Ponieważ punkty te leżą na obwodzie koła  $PZ$ , t. j. na płaszczyźnie  $PZ$ , więc  $PZ$  jest wyznaczona przez dwie krawędzi kryształu, czyli jest możliwa na kryształ jako jego ściana.

Z tego wynika, że każdą płaszczyznę odbicia możemy wziąć na płaszczyznę czworoscianu jednostkowego.

2<sup>o</sup>. **Oś przystawania jest możliwą krawędzią kryształu, a płaszczyzna do niej prostopadła jest możliwą ścianą kryształu.**

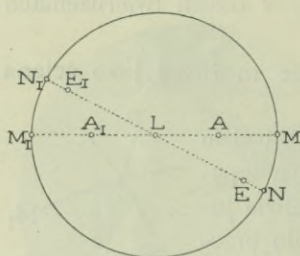
Że oś przystawania, która powstała od przecięcia się dwu płaszczyzn odbicia jest możliwą krawędzią kryształu, to wynika z twierdzenia poprzedniego. Każda bowiem płaszczyzna odbicia jest możliwą ścianą kryształu, a więc prosta, powstała od przecięcia się dwu płaszczyzn odbicia, jest tem samem możliwą kryształu krawędzią.

Co zaś do osi przystawania, powstałej przez przecięcie się dwu płaszczyzn obrotu, to jej znaczenie krystalograficzne wyjaśni się zgodnie z twierdzeniem powyższem przez rozumowanie następujące.

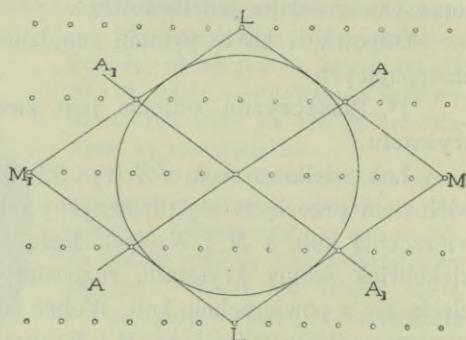


Rys. 92. Płaszczyzna odbicia i cztery przecinające się z nią ściany kryształu w rzucie stereograficznym

Wyobraźmy sobie kryształ, jako sieć przestrzenną, symetryczną względem jakiejś osi przystawania, t. j. względem dwu płaszczyzn obrotu. Zakreślmy kulę dowolnym promieniem z węzła, przez który przechodzi oś w mowie będąca, jak ze środka. Niechaj punkt  $L$  (rys. 93) będzie biegunem tej osi przystawania.



Rys. 93. Rzut stereograficzny osi przystawania rzędu parzystego i dwu sieci płaskich.



Rys. 94. Przekrój  $MLM_1$ , prostopadły do płaszczyzny rzutu stereograficznego rys. 93-go.

Jeżeli oś  $L$  jest osią rzędu parzystego, to rozumować będziemy jak następuje. Punkt  $A$  i punkt  $E$  na powierzchni kuli niech będą to bieguny dwóch którychkolwiek szeregów sieci, przechodzących przez środek. Ponieważ oś  $L$  jest parzysta, więc, wobec istnienia  $A$  i  $E$  muszą istnieć szeregi  $A_1$  i  $E_1$ , leżące na płaszczyznach  $LM$  i  $LN$ . Kąt  $LA$  równy jest kątowi  $LA_1$ , a kąt  $LE$  równa się kątowi  $LE_1$ . Ponieważ szeregi  $A$  i  $A_1$  są symetrycznie równe, więc odstępów ich węzłów są równe. Tak samo odstępów szeregu  $E$  równe są odstępom szeregu  $E_1$ . A więc oś  $L$  jest przekątną dwu równoległoboków, wykreślonych na szeregach  $A$  i  $A_1$  oraz  $E$  i  $E_1$ , czyli sama też jest szeregiem sieci, a przeto jest ona możliwą krawędzią kryształu.

Dla unaocznienia tego na rys. 94 wykreślony jest przekrój  $MAL_1M_1$ , prostopadły do płaszczyzny rzutu stereograficznego rys. 93.

Na rys. 94 widzimy, że, jeżeli istnieje szereg  $A$ , to musi istnieć symetryczny mu szereg  $A_1$ , wobec czego prosta  $LL$  jest przekątną równoległoboku szeregów.

Prócz tego zaznaczyć się godzi, że, jeżeli  $L$  jest osią rzędu parzystego, to jest ona przecięciem się dwu sieci płaskich:  $MAA_1M_1$  i  $NEE_1N_1$ , a więc jest możliwą krawędzią kryształu.

Co się zaś tyczy płaszczyzny, prostopadłej do osi  $L$ , to wiemy, że punkty  $M$  i  $N$  na rys. 93 są to bieguny możliwych szere-

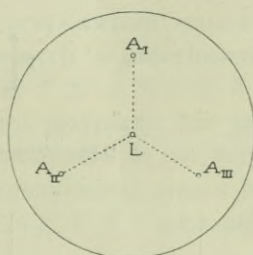


gów sieci, ponieważ punkty te wyznaczają kierunek przekątnych równoległoboku, utworzonego przez  $A$  i przez odjemny kierunek szeregu  $A_I$  oraz przez  $E$  i  $E_I$ . Widać to naocznie na rys. 94, t. j. na przekroju  $MA$ . Przekrój  $NE$  jest w treści swej taki sam, od  $MA$  różni się tylko wielkością kąta pomiędzy szeregiem  $E$  i szeregiem  $N$  lub  $L$ , więc jako zbędny, nie jest nakreślony. Ponieważ oba szeregi  $M$  i  $N$  leżą na jednej płaszczyźnie, prostopadłej do osi  $L$ , więc płaszczyzna ta, jako wyznaczona dwoma szeregami, jest siecią płaską, a zatem jest możliwa, jako ściana kryształu.

Znaczenie osi rzędu nieparzystego, jako możliwej krawędzi kryształu, oraz znaczenie płaszczyzny do niej prostopadłej, jako możliwej ściany, dowodzi się jeszcze prościej.

Wobec tego, że pomiędzy płaszczyznami zwierciadlaniami możliwy jest tylko jeden kąt, będący nieparzystą częścią półkola, mianowicie  $A^\circ = 60^\circ = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ$ , więc nieparzysta oś przystawania jest możliwa tylko rzędu trzeciego:  $2A^\circ = 120^\circ$ ,  $\varphi = 360^\circ : 120^\circ = 3$ . Niechaj więc  $L$  (rys. 95) będzie biegunem osi trzeciego rzędu i  $A_I$  niech będzie to biegun jednego jakiegoś szeregu sieci przestrzennej, przechodzącego przez środek kuli.

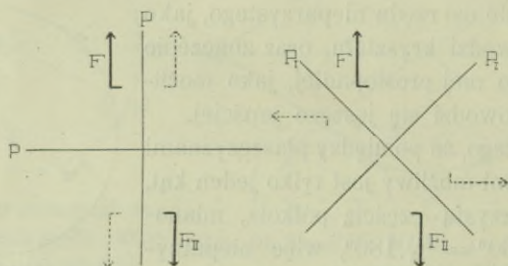
Jeżeli symetryczność sieci czyni zadość trzeciorzędnej osi przystawania, to oprócz szeregu  $A_I$  muszą istnieć dwa szeregi równe mu i symetryczne:  $A_{II}$  i  $A_{III}$ . W takim razie prosta  $L$ , jako leżąca pomiędzy trzema równymi i symetrycznymi szeregami w równych odległościach kątowych od każdego szeregu, jest przekątną równoległocianu, którego krawędziami są szeregi  $A_I$ ,  $A_{II}$  i  $A_{III}$ , a więc sama również jest szeregiem sieci, czyli jest możliwą krawędzią kryształu. Co zaś do płaszczyzny, prostopadłej do osi  $L$  to, rzecz oczywista, jest nią płaszczyzna, przechodząca przez trzy równoodległe od środka węzły szeregów  $A_I$ ,  $A_{II}$  i  $A_{III}$ : wszystkie te trzy szeregi mają odstępów węzłów równe i leżą symetrycznie około osi  $L$ , a więc płaszczyzna przechodząca przez trzy równoodległe od środka węzły tych szeregów musi być do  $L$  prostopadła. A ponieważ wyznacza się ona trzema nie leżącymi na jednej prostej węzłami sieci, więc sama jest płaszczyzną siatkową, czyli jest możliwa na kryształach w charakterze jego ściany.



Rys. 95. Rzut stereograficzny osi przystawania rzędu nieparzystego i trzech szeregów symetrycznie równych i symetrycznie leżących.

Słowem widzimy, że każda oś przystawiania, czy jest rzędu parzystego, czy nieparzystego, może być wzięta na krawędź osiową czworoscianu jednostkowego, a płaszczyzna, prostopadła do każdej osi przystawiania, może być ścianą tego czworoscianu.

3<sup>o</sup>. Jedna z płaszczyzn obrotu, lub jedna z płaszczyzn inwersyi, jest możliwą ścianą kryształu tylko w tych przypadkach, w których leżą na niej przynajmniej dwie osi przystawiania, albo w których jest ona do osi przystawiania prostopadła.



Rys. 96. Drugie przekształcenie symetryczne, dokonane różnie orientowanymi płaszczyznami obrotu, tworzącymi kąt jednakowy.

Para płaszczyzn obrotu tworzy oś przystawiania z okresem  $2A^\circ$ , a trójkąt sferyczny płaszczyzn inwersyi daje obrót jednokładny okresu  $4A^\circ$  (§ 42 i § 43). A więc stały jest tylko kierunek przecięcia się płaszczyzn, t. j. kierunek osi, powstałej przez ich współdziałanie, oraz kąt  $A^\circ$ , jaki tworzą te płaszczyzny. Ale już położenie kąta  $A^\circ$  w obrębie okresu  $2A^\circ$  czy  $4A^\circ$  jest nieokreślone, jak to widzimy n. p. z rys. 96, gdzie położenie figury  $F$  i jej przekształcenia symetrycznego wtórego  $F_{II}$  jest jednakże bez względu na to, czy to przekształcenie wywołały płaszczyzny obrotu  $P$  czy  $P_I$ , o ile tylko kąt pomiędzy płaszczyznami obrotu jest ten sam i o ile ten sam jest kierunek prostej przecięcia się tych płaszczyzn. Tak samo, jeżeli w utworze rys. 84 i 85 będziemy zmieniali położenie kąta  $P_I Z_I$  i  $P_{II} Z_{II}$ , obracając go około osi  $L$  w obrębie łuku  $KV$ , to zmieniać się będą miejsca figur urojonych, pomocniczych, a więc znaczenia fizycznego niemających, ale figury realnie istniejące w rzeczywistości, pozostaną na tych samych miejscach. Stąd wynika, że płaszczyzny obrotu i płaszczyzny inwersyi, jako elementy geometryczne tylko, a nie fizyczne, nie mają orientacji stałej, nie mogą więc być ścianami kryształu i co zatem idzie na elementy czwo-



rościanu jednostkowego się nie nadają, z wyjątkiem przypadków, wyszczególnionych w twierdzeniu, t. j. z wyjątkiem tych rodzajów symetryczności, w których płaszczyzna zwierciadlana przylega do dwu przecinających się osi przystawania, albo gdy jest ona do osi przystawania prostopadła. Wynika to z twierdzenia 2<sup>o</sup>, które głosi, że każda oś przystawania może być kryształową krawędzią, więc płaszczyzna przylegająca do dwu osi przystawania może być ścianą kryształu, oraz że płaszczyzna prostopadła do osi przystawania też jest możliwą jako ściana kryształu. Z tych dwu przypadków, wskazanych w twierdzeniu 3<sup>o</sup>, i omawianych na tem miejscu, przypadek pierwszy (płaszczyzna przylegająca do dwu osi przystawania) stanowią płaszczyzny obrotu w klasach hemisymetrycznych o trójcyfrowym znaku symetryczności, z wyjątkiem klas  $S(2' 2' 2)$ ,  $S(2' 2' 3)$ ,  $S(2' 2' 4)$  i  $S(2' 2' 6)$ . W tetartosymetrii przypadek ten jest niemożliwy. Przypadek drugi (płaszczyzna prostopadła do osi przystawania) zachodzi we wszystkich rodzajach hemisymetrii oraz w tetartosymetrycznych rodzajach  $S(2'' 2'' 4'')$  i  $S(2'' 2'' 6'')$  gdzie boki 4'' i 6'' są prostopadłe do osi przystawania.

#### § 48. Sposób wyprowadzania wszystkich form, możliwych w jednym rodzaju symetryczności, i przykład opisu jednej klasy krystalograficznej.

Powtórzenia kalejdoskopowe wszystkich trzydziestu dwu skojarzeń płaszczyzn zwierciadlanych w rzucie stereograficznym wykreślone są na rys. 77, do którego odwoływaliśmy się już niejednokrotnie. Na rysunku tym linie grube ciągle oznaczają rzuty płaszczyzn odbicia, linie cienkie ciągle — płaszczyzny obrotu, linie grube przerywane — płaszczyzny inwersyi. Linie cienkie przerywane nie mają znaczenia płaszczyzn zwierciadlanych; oznaczają one tylko obwód koła projekcyjnego w tych rodzajach, w których płaszczyzna projekcyjnej nie jest płaszczyzną zwierciadlaną, t. j. w rodzajach:  $S(1)$ ,  $S(1')$ ,  $S(2)$ ,  $S(2')$ ,  $S(3)$ ,  $S(3')$ ,  $S(4)$ ,  $S(4')$ ,  $S(6)$ ,  $S(6')$ ,  $S(2 3 3)$ ,  $S(2' 3' 3')$ .

Na rys. 77 zaznaczone są również w każdym rodzaju osi przystawania, powstałe z przecięcia się płaszczyzn zwierciadlanych, oraz wskazany jest rząd każdej osi: prostokąty oznaczają rzut punktu, w którym powierzchnię kuli projekcyjnej przecina oś drugiego rzędu, trójkąty oznaczają oś rzędu trzeciego, kwadraty — czwartego i sześciokąty oznaczają osi szóstego rzędu. Wielokąty zaciernione oznaczają bieguny tych osi, które nie mają prostopadłych do siebie płaszczyzn zwierciadlanych, t. j. w rodzajach:  $S(2)$ ,  $S(2')$ ,  $S(3)$ ,  $S(3')$ ,  $S(4)$ ,  $S(4')$ ,  $S(6)$ ,  $S(6')$ ,  $S(2 2 3)$ ,  $S(2' 2' 3')$ ,  $S(2 3 3)$ ,  $S(2' 3' 3')$ . Wielokąty z polem białym oznaczają te osi przystawania, do których są prostopadłe płaszczyzny zwierciadlane.

Powtórzmy kalejdoskopowo każde skojarzenie  $S(p)$  czy  $S(pqr)$ , zakładając w każdym skojarzeniu dowolną ścianę  $(hkl)$ . Powtórzy się ona kalejdoskopowo, i powtórzenia jej utworzą wielościan  $\{hkl\}$  dający się dzielić płaszczyznami odbicia, o ile one w nim są, na części symetrycznie równe i symetrycznie leżące, oraz przywodzić do przystawania po obrocie dokoła pewnych prostych jak dokoła osi. Prócz tego w jednych przypadkach otrzymamy wielościany ze ścianami równoległymi, a w innych otrzymamy wielościany bez ścian równoległych. Wszystko to w każdym przypadku możemy odczytać z symbolu symetrycznego  $S(p)$ , czy  $S(pqr)$  i skonstruować z jego projekcyi stereograficznej. Wielu autorów używa tu terminologii nieco odmiennej od naszej. Mianowicie płaszczyzna odbicia nosi u nich nazwę płaszczyzny symetrii. W rodzajach, mających ściany równoległe, według tego sposobu nazywania istnieje »środek symetrii«. Autorowie ci wypisują owe »elementy symetrii«<sup>1</sup> wynikające, jak wiemy, z kalejdoskopowego powtórzenia skojarzeń  $S(p)$  czy  $S(pqr)$ , oznaczające je następującymi znakami:  $L$  oznacza oś przystawania, mającą oba promienie symetrycznie równe,  $L_p$  oznacza oś przystawania biegunową czyli polarną, t. j. taką do której niema prostopadłej płaszczyzny zwierciadlanej.  $P$  oznacza płaszczyznę odbicia.  $C$  oznacza centrum, t. j. środek symetrii. Liczba położona przed znakiem  $L$  i  $P$  oznacza ilość płaszczyzn i osi w danym rodzaju. Liczba położona z prawej strony u góry znaku  $L$  oznacza rząd osi. Prócz tego jeszcze jakimikotwiek indeksami, dopisanymi u dołu liter  $L$  i  $P$ , odróżniają się osi i płaszczyzny niejednoznaczne pomiędzy sobą. Niektóre klasy mają jedną oś niejednoznaczną z pozostałymi, leżącymi na płaszczyźnie prostopadłej do tej jedynej w swym rodzaju osi. Taka jedyna w swym rodzaju oś nazywa się osią główną. Płaszczyzna prostopadła do osi głównej, o ile jest płaszczyzną odbicia, nazywa się płaszczyzną symetrii głównej. Inne osi i płaszczyzny w tych klasach noszą nazwę osi i płaszczyzn bocznych.

Tak więc n. p. z projekcyi stereograficznej powtórzenia kalejdoskopowego trójkąta  $S(2\ 3\ 4)$  odczytujemy, że ten rodzaj symetryczności ma dziewięć płaszczyzn odbicia, trzynaście osi przystawania i wielościany o ścianach równoległych. Trzy płaszczyzny odbicia, do siebie wzajemnie prostopadłe, przylegają każda do dwu osi czwartego rzędu i do dwu osi rzędu drugiego. Pozostałe płaszczyzny odbicia przylegają każda do jednej osi rzędu czwartego, do jednej drugiego i do dwu trzeciego. A więc trzy pierwsze płaszczyzny nie są jednoznaczne z pozostałymi sześcioma. Według omówionego wyżej sposobu oznaczania możemy napisać symbol następujący:

$$S(2\ 3\ 4) = 3L^4, 4L^3, 6L^2, 3P_I, 6P_{II}, C.$$

<sup>1</sup> Dla czytelników książki niniejszej jest zupełnie jasne, że jedynym i istotnym elementem symetrii jest płaszczyzna zwierciadlana, bo z jej skojarzeń i z wywołanych przez nie przekształceń symetrycznych wypływa i oś i środek symetrii.



Tak samo z innych znaków  $S(pqr)$  możemy napisać n. p.

$$S(2\ 3\ 3) = 3L^2, 4L_p^3, 6P.$$

$$S(2\ 2\ 6) = L^6, 3L_I^2, 3L_{II}^2, P, 3P_I, 3P_{II}, C. i. t. p.$$

W rzucie stereograficznym każdego rodzaju na rys. 77 oprócz tego, o czym była już mowa, umieszczony jest jeszcze biegun dowolny i wywołane przez płaszczyzny zwierciadlane jego powtórzenia symetryczne. Bieguny oznaczone kółkami są to bieguny półkuli górnej. Krzyżyki oznaczają bieguny, znajdujące się na półkuli dolnej, przyczem zastosowano do nich punkt widzenia drugi, mianowicie punkt widzenia umieszczony na górnej półkuli, aby rzuty ich znalazły się w obrębie koła projekcyjnego, a nie poza nim.

Z podanych na rys. 77 rzutów stereograficznych możemy również odczytać, czy wielościany danego rodzaju mają ściany równoległe, czy nie. Zważmy mianowicie, że bieguny dwu ścian równoległych leżą na jednej średnicy kuli. Jeżeli więc na jednym promieniu średnicy koła projekcyjnego na rys. 77 mamy kółko, a na drugim krzyżyk, to znaczy, że mamy tu ściany równoległe.

Umieszczając bieguny tak, jak to zrobiono na rys. 77, t. j. w polu trójkątów sferycznych, otrzymujemy w każdym rodzaju ogólny przypadek powtórzenia symetrycznego danej normalnej, czyli przypadek ogólny symetrycznego rozkładu kierunków równych. Kładąc zaś bieguny na bokach lub wierzchołkach trójkątów sferycznych, otrzymamy przypadki szczegółowe o mniejszej liczbie kierunków równych. Każdy rodzaj  $S(p)$  czy  $S(pqr)$  odpowiada jednej klasie kryształów o spólnym rodzaju symetryczności. Przewodząc płaszczyzny styczne do kuli w tych biegunach, w każdym rodzaju i przypadku otrzymanych, możemy wyprowadzić wszystkie wielościany możliwe w danej klasie krystalograficznej, oraz przewidzieć symetrię fizyczną każdej ściany. To należy już do krystalografii opisowej, a więc przekracza założenie książki niniejszej, która ma nieporuszać szczegółów.

Dla przykładu i objaśnienia zrobimy to, o czym się mówiło przed chwilą w jednej klasie, dowolnie wybranej; mianowicie wyprowadzimy wszystkie możliwe w niej rozkłady kierunków równych, oraz wszystkie rodzaje możliwych ugrupowań równych ścian i oznaczymy rodzaj fizycznej symetryczności każdej ściany na kryształach tej klasy, t. j. szczegółowiej powtórzmy z inną klasą to, co ogólnikowo dokonaliśmy na str. 111 z klasą podwójnych sfenoidów tetragonalnych.

Jest jeden rodzaj symetryczności bardzo rozpowszechniony w świecie ciał krystalicznych. Do tego rodzaju należą kryształy substancyj wielkiej wagi w chemii i mineralogii; jedne z tych substancyj są bardzo rozpowszechnione w skorupie ziemskiej, jako istotne części składowe skał najważniejszych, zajmujących wielkie obszary i tworzących olbrzymie pasma górskie i płaskowzgórza, inne są znów w nieustannem użyciu chemii, lub medycyny i przemysłu, a są prócz tych znowuż takie, które były przedmiotem i podłożem badań bardzo ważnych i wybitnych w historii nauk fizyko-chemicznych. Jest to ta klasa, do której należą kryształy wielu skaleni, licznych piroksenów, niektórych am-

fibolów, kryształy wszystkich łuszczyków, chlorytów i epidotów, kryształy niektórych stanów siarki, kryształy gipsu, soli glauberskiej, wityriolu żelaza, soli Berthollet'a, boraksu, chlorku barowego, octanu sodowego, octanu miedzi (grynszpanu), octanu ołowianego (cukru ołowianego), kwasu szczawiowego, kwasu salicylowego, antracenu, naftalinu i wielu innych substancyj. Czytelnicy książki niniejszej są już obeznani z nią, bo kryształ skalenia, opracowany w § 20<sup>w</sup> należy właśnie do tej klasy.

Klasa omawiana nosi nazwę klasy słu<sup>p</sup>ów jednoskośnych. Stanowi ją zbiór wszystkich kryształów, których stopień i rodzaj symetryczności odpowiada rodzajowi hemisymetrii niepełnej  $S(2'2'2)$ . Jest to więc kalejdoskopowe powtórzenie trójkąta sferycznego o trzech kątach prostych, którego jeden bok jest płaszczyzną odbicia, a dwa pozostałe są płaszczyznami obrotu. To znaczy, że mamy tu dwie prostopadłe do siebie płaszczyzny obrotu przecięte prostopadłą do nich obu płaszczyzną odbicia. Ponieważ dwie, przecinające się pod kątem prostym, płaszczyzny obrotu dają oś przystawania drugiego rzędu, więc innemi słowy klasa ta charakteryzuje się tem, że ma jedną płaszczyznę odbicia i jedną prostopadłą do niej oś przystawania drugiego rzędu.

Rodzaj w mowie będący jest podany na rys. 77 w trzeciej kolumnie na pierwszym miejscu od góry. Tam płaszczyzna odbicia jest płaszczyzną projekcyi, a więc osią projekcyi jest oś przystawania. Ten sposób wyboru płaszczyzny rzutu, zastosowany na rys. 77 dla jednostajności z pozostałymi rodzajami kolumny trzeciej, nie jest wygodny ze względów praktycznych, a więc nie jest on zgodny ze sposobami orientacyi, przyjętymi powszechnie, które podaliśmy w §-ie 20<sup>w</sup>. Tu więc obrócimy utwór omawiany o 90° i ustawimy płaszczyznę odbicia prostopadłe do płaszczyzny rzutu, a osi przystawania nadamy kierunek  $Y$  (rys. 97), tak jak postąpiliśmy z kryształem skalenia, opracowanym w § 20<sup>w</sup>.

Na powierzchni kuli, w jej prawym przednim górnym oktancie, założymy biegun dowolny, byle nie leżący na żadnym boku trójkąta sferycznego  $S(2'2'2)$ . Na rys. 97 oznaczony on jest kółeczkiem i cyfrą  $I$ .

Założwszy biegun  $I$ , wyznaczmy wszystkie jego odzwieriedlenia, które są następstwem trójkąta  $S(2'2'2)$ , czyli odbijamy go we wszystkich trzech płaszczyznach, dopóki nie otrzymamy odbicia w tym samym punkcie, z którego wychodzimy, t. j. w punkcie  $I$ .

Pierwsze odzwieriedlenie  $II$  jest realne, bo powstaje od płaszczyzny odbicia ( $2$ ), oznaczonej na rys. 97 linią grubszą. Następne odzwieriedlenie w płaszczyźnie ( $2'$ )<sup>r</sup>, oznaczonej na rys. 97 cieńszą linią  $Y$ , nie istnieje, aż dopiero odzwieriedli się po raz wtóry w płaszczyźnie ( $2'$ ), będącej w danym razie płaszczyzną rzutu. A więc odzwieriedlenie to znajduje się na dolnej półkuli. Jest to mianowicie biegun  $III$ , oznaczony krzyżykiem, tak samo jak na rys. 77, gdzie wszystkie bieguny półkuli dolnej oznaczone są krzyżykami. Biegun  $III$  odzwieriedlony płaszczyzną ( $2$ ) daje biegun  $IV$ , który znów odzwieriedlony dalej jedną płaszczyzną ( $2'$ ), w danym razie będącą płaszczyzną rzutu, nie daje istotnego bieguna, aż dopiero po drugim odzwieriedleniu się w płaszczyźnie ( $2'$ )<sup>r</sup> nabiera rzeczywistego istnienia i trafia w punkt  $I$ , t. j. w punkt pierwotnie założony. A więc obeszlśmy całą powierzchnię kuli i powróciliśmy do tego samego punktu, z którego wyszliśmy. To daje nam pewność, że wy-



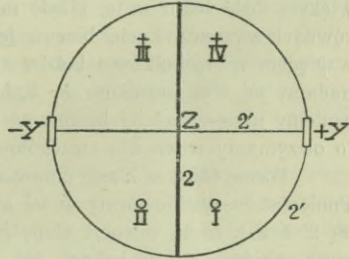
czterpaliliśmy wszystkie powtórzenia symetryczne bieguna, pierwotnie przez nas założonego.

Wyznaczywszy odzwierciedlenia bieguna założonego, otrzymaliśmy utwór geometryczny, który jedną płaszczyzną (2) dzieli się na dwie połowy symetrycznie równe i symetrycznie leżące, i który przywodzi się do jednokładności sam z sobą po obrocie o kąt  $180^\circ$  około prostej, prostopadłej do tej płaszczyzny. Z rozmieszczenia jednoznacznych biegunów wnosimy, że wielościanny tego rodzaju muszą mieć pary ścian równoległych. Możemy to napisać w skróceniu:  $S(2' 2' 2) = L^2 P C$ . Jak już nadmienialiśmy poprzednio, jest to cecha spólna, a więc istotna wszystkich kryształów do tej klasy należących. Mówimy o nich, że mają jedną płaszczyznę odbicia i jedną do niej prostopadłą oś przystawania drugiego rzędu. Widzimy to na wszystkich rysunkach, podanych w książce niniejszej, które przedstawiają kryształy klasy słułow jednoskośnych: gipsu (rys. 2 str. 3) i skalenia (rys. 21—24 str. 22 i str. 69 rys. 57, 58).

Przeprowadźmy płaszczyzny styczne do kuli w tych biegunach, które wyznaczyliśmy na rys. 97. Otrzymamy cztery płaszczyzny, które tworzą słułow o przekroju rombowym, równoległy do jednej jakiejś prostej, leżącej na płaszczyźnie odbicia. Cztery te płaszczyzny, rzecz oczywista, są pomiędzy sobą jednoznaczne. Zarazem stanowią one pewną całość, bo istnienie jednej z nich warunkuje obecność trzech pozostałych, są one bowiem wyrazem rodzaju symetrii tej klasy. Taki właśnie zbiór ścian jednakowego pochodzenia symetrycznego, a więc fizycznie sobie równych, nazywa się w krytalografii formą krytalograficzną pojedynczą. Przykłady form pojedynczych już mieliśmy: ściany  $L$  kryształu platynocyanu magnezowego (§ 21 rys. 62 str. 77) stanowią jedną formę, ściany  $P$  druga, ściany  $T$  trzecią formę, lub na kryształach margarycianu wapniowego (rys. 84 w § 48 str. 110) cztery ściany  $E$  tworzą jedną formę — słułow, cztery ściany  $F$  — sfenoid, dwie ściany  $P$  — dwuścian podstawowy.

Słuszna jest rzecz, aby ściany jednej formy krytalograficznej miały jednakowe wyznaczniki, t. j. jeden znak krytalograficzny. Ponieważ biegun  $I$  założyliśmy dowolnie, więc możemy napewno twierdzić, że względem jakiegoś ewentualnego czworoscianu jednostkowego należą mu się jakieś trzy nierówne wyznaczniki  $(hkl)$ . Znak ten odpowiada ścianie prawego górnego przedniego oktantu, bo wszystkie trzy jego liczby są dodatnie. Możemy go przypisać całej formie, a na znak tego, że oznacza on całą formę a nie jedną płaszczyznę, zamknijemy go w nawias klamrowy:  $\{hkl\}$ . Niewątpliwie znak ten jest słuszny względem wszystkich czterech ścian słułowa, jeżeli tylko na krawędzi czworoscianu jednostkowego wybierzemy oś przystawania i dwie proste leżące na płaszczyźnie odbicia.

Znak  $\{hkl\}$  oznacza w klasie omawianej tę formę, która jest zbiorem powtórzeń symetrycznych ściany, założonej w prawym przednim górnym oktante.



Rys. 97. Rzut stereograficzny biegunów formy  $\{hkl\}$  w klasie  $S(2' 2' 2)$ .

cie. Zwróćmy jednak uwagę, że forma  $\{hkl\}$  zajmuje tylko cztery oktanty kuli; drugie cztery oktanty, tamtych przeciwległe, są wolne. A więc rzecz jasna, że w klasie omawianej może istnieć druga jeszcze forma tego samego znaku, poprzedniej nierówna i od niej niezależna. Istotnie, jeżeli założymy biegun ( $\bar{h}kl$ ), czyli ścianę w oktancie górnym prawym tylnym, t. j. gdy w rys. 97 zamienimy kółka na krzyżyki i odwrotnie, to otrzymamy drugi słupek  $\{hkl\}$  powstały z powodu zjawienia się ściany ( $\bar{h}kl$ ) nierówny fizycznie słupowi ( $hkl$ ) i odcień niezależny, lecz tak samo jak on zorientowany względem czworościanu jednostkowego, tylko leżący na przeciwległych poprzedniemu częściach kryształu.

Forma  $\{hkl\}$  czy  $\{\bar{h}kl\}$  jest w klasie omawianej ogólna, t. j. ma największą ilość ścian w tej klasie możliwych, wyraża się znakiem o trzech nierównych wyznacznikach, biegun jej nie leży w żadnym szczególnym punkcie względem wierzchołków i boków trójkąta sferycznego  $S(2' 2' 2)$ , a więc gdy nadamy jej wyznacznikom  $h, k, l$ , jakieś wartości szczegółowe, t. j. gdy poczniemy umieszczać jej biegun na bokach i wierzchołkach trójkąta  $S(2' 2' 2)$ , to otrzymamy wszystkie szczegółowe formy klasy omawianej.

Formę  $\{hkl\}$  w klasie omawianej nazywamy słupem jednoskośnym. Ponieważ wszystkie formy w tej klasie, których bieguny leżą w polu trójkąta  $S(2' 2' 2)$ , są to również słupy jednoskośne, a wszystkie formy, których bieguny znajdują się na bokach lub wierzchołkach tego trójkąta, są to szczegółowe przypadki słupa jednoskośnego, więc nazwalimy tę klasę klasą słupów jednoskośnych. Każda klasa krystalograficzna nosi nazwę swej formy ogólnej  $\{hkl\}$ , użytą w liczbie mnogiej (ob. § 50).

Rzecz jest sama przez się oczywista, że ściany ( $hkl$ ) jako nie prostopadłe ani do płaszczyzny odbicia, ani do osi przystawiania, są asymetryczne, to znaczy, że n. p. figury wytrawione, lub figury spękań na nich otrzymane są zawsze utworami, pozbawionymi wszelkiej symetryczności.

Ścianę jednego słupa obiera się na płaszczyznę  $\{111\}$ , wtedy, rozumie się słup ten ma znak  $\{111\}$  n. p. słup  $O$  skalenia, lub  $L$  gipsu (ob. rys. 2, 57 i 58)

Wszystkie słupy, równoległe do krawędzi osiowej  $X$ , mają pierwszy wyznacznik równy zeru; znak ich:  $\{0kl\}$  np. słup  $N$  skalenia  $\{021\}$  (ob. rys. 57, 58, 59 i tabl. IV). Rzecz oczywista, że jeżeli każdej wartości wyznaczników  $h, k, l$ , odpowiadają dwa słupy:  $\{hkl\}$  i  $\{\bar{h}kl\}$ , to każdemu znakowi  $\{0kl\}$  odpowiada słup jeden.

Wyobraźmy sobie teraz, że biegun  $I$  przesuwamy coraz bliżej do obwodu koła projekcyjnego. Oczywista rzecz, że, jeżeli jeden biegun odsuwa się od płaszczyzny odbicia, to wszystkie jego powtórzenia symetryczne czynią to samo. Aż wreszcie gdy znajdzie się on na obwodzie, to znajdują się tam również wszystkie trzy pozostałe, przyczem otrzymamy jeden wynik bez różnicy czy będziemy to czynili z biegunem ( $\bar{h}kl$ ) czy ( $hkl$ ), t. j. że każdy słup czy  $\{hkl\}$  czy  $\{\bar{h}kl\}$  stanie się wtedy słupem pionowym  $\{hk0\}$ . Przykłady słupów pionowych to ściany  $T\{110\}$  lub  $L\{130\}$  skalenia albo  $F\{110\}$  gipsu. Słupom tym przypisujemy znak  $\{hk0\}$ , t. j. wyznacznikowi  $l$  dajemy wartość 0, bo oś  $Z$  zawsze czynimy osią projekcyjną. A więc ściany, których bieguny leżą na obwodzie koła projekcyjnego, t. j. ściany do płaszczyzny rzutu prostopadłe, są przez to równoległe do osi  $Z$ .



Gdy przeniesiemy biegun  $I$  na drugą płaszczyznę obrotu, t. j. na drugi bok ( $2'$ ) trójkąta sferycznego, czyli w projekcyi na średnicę  $Y$ , otrzymamy również słuły.

Gdy biegun  $I$  umieścimy na boku ( $2$ ), t. j. na płaszczyźnie odbicia, wtedy zleje się on z biegunem  $II$  w jeden punkt. To samo stanie się po drugiej stronie kuli, t. j. bieguny  $III$  i  $IV$  znajdują się na jednym punkcie płaszczyzny odbicia. Gdy w tych punktach przeprowadzimy płaszczyzny styczne, otrzymamy nową formę — dwuścian. Ponieważ wszystkie ściany, których bieguny leżą na wielkiem kole ( $2$ ), są równoległe do osi  $Y$ , więc znaki ich mają na drugim miejscu 0:  $\{h0l\}$ . Rzecz jasna, że ściana ( $h0l$ ), t. j. leżąca na górnej przedniej półkuli, należy do dwuścianu  $\{h0l\}$ ; a zarazem oczywista, że jest możliwa ściana ( $\bar{h}0l$ ) na górnej tylnej półkuli, należąca do dwuścianu  $\{\bar{h}0l\}$ . A więc jednej wartości  $h$  i  $l$  odpowiadają dwa dwuściany  $\{h0l\}$  i  $\{\bar{h}0l\}$  sobie nierówne i nawzajem niezależne, t. j. obecność na kryształach jednego nie pociąga za sobą istnienia drugiego. N. p. kryształy skaleni mają dwuścian  $\Sigma\{101\}$  i dwuścian  $\Sigma\{201\}$ , a dwuścianów  $\{101\}$  i  $\{201\}$  na nich niema.

Zależnie od wyboru krawędzi na oś  $X$  i  $Z$ , dwa dwuściany otrzymują wartość 0 także dla trzeciego lub pierwszego swego wyznacznika. Mianowicie, dwuścian, równoległy do osi  $Z$ , ten którego biegun leży w punkcie przecięcia się obwodu projekcyi z płaszczyzną odbicia, ma znak  $\{100\}$  to jest dwuścian  $K\{100\}$  niektórych kryształów skaleni (ob. rys. 24, 58 i 59), a ten, który jest równoległy do osi  $X$  ma znak  $\{001\}$  i nazywa się dwuścianem podstawowym, np. dwuścian  $P\{001\}$  u skaleni.

Rzecz jasna, że ściany dwuścianów są monosymetryczne, są one bowiem prostopadłe do płaszczyzny odbicia. Każde zjawisko fizyczne odbywa się na nich symetrycznie względem śladu płaszczyzny odbicia i względem ich krawędzi. N. p. spękania muskowitu rys. 60 (str. 76) wywołane są na ścianie ( $001$ ). Są one symetryczne względem jednej szczeliny, a ta szczelina jest równoległa do jednej krawędzi dwuścianu  $\{001\}$ .

Nakoniec kiedy umieścimy biegun  $I$  w punkcie  $+Y$  rysunku 97-go, to spłynie się on w jeden punkt z biegunem  $IV$ , a to samo stanie się z biegunem  $II$  i  $III$  w punkcie  $-Y$ . Przeprowadziwszy płaszczyzny styczne w tych punktach z kulą, otrzymujemy dwuścian  $\{010\}$  prostopadły do osi przystawiania, równoległy do płaszczyzny odbicia, a więc równoległy do obu osi:  $X$  i  $Z$ . Przykłady tej formy: na kryształach skaleni forma  $M\{010\}$ , na kryształach gipsu  $P\{010\}$ .

Prostopadłość dwuścianu  $\{010\}$  do osi przystawiania czyni go formą jedyną w swoim rodzaju w klasie omawianej: nie wymaga dowodzenia, że wszystkie zjawiska, na nim zachodzące, odbywają się tak, że jest on jednokładny sam z sobą po obrocie o  $180^\circ$ , ale nigdy nie da się on podzielić na dwie połowy symetrycznie równe i symetrycznie leżące. A więc ściany ( $100$ ) i ( $\bar{1}00$ ) są fizycznie odmienne od wszystkich innych dwuścianów, bo tamte są monosymetryczne, i od wszystkich słułow, bo słuły są asymetryczne. Mówimy zatem, że dwuścian  $\{010\}$  na kryształach tej klasy ma obrót drugiego rzędu, albo obrót dwukrotny.

Zważmy teraz, że w znaku ( $hkl$ ) nadaliśmy wartość 0 każdemu kolejno wyznacznikowi, a także porobiliśmy wszystkie przełożenia z jedności i dwu zer.

Wyrażając to graficznie, umieściliśmy biegun  $I$  we wszystkich szczególnych punktach projeccy, to znaczy, że poznaliśmy wszystkie rodzaje ścian i wszystkie połączenia ścian równych w formy proste, jakie tylko są możliwe na kryształach klasy słułow jednoskońnych. Oto ich spis dla powtórzenia.

Nazwy form.	Wyznaczniki.	Rodzaj symetrii ścian.
Słułow.	$\{hkl\}$ , $\{0kl\}$ , $\{\bar{h}kl\}$ , $\{hk0\}$	Ściany asymetryczne.
Dwuściany.	$\{100\}$ , $\{h0l\}$ , $\{001\}$ , $\{\bar{h}0l\}$	Ściany monosymetryczne.
Dwuścian.	$\{010\}$	Ściany z obrotem 2-go rzędu.

To wszystko, co powiedziano o klasie omawianej i jej symetrii, odnosi się przedewszystkiem do symetryczności wielościanu przyrostu i rozpuszczania, t. j. do ilości ścian, do ich równości i rozkładu, oraz do figur na nich wytrawionych. Rozważmy jeszcze, jak zachować się winny kryształy klasy słułow jednoskońnych względem innych własności fizycznych.

Na płaszczyznach prostopadłych do najmniejszej spójności kryształy wykazują łupliwość, która w różnych kierunkach może być różna, o ile te kierunki są nierówne, a jednakowa w kierunkach równych. A więc w kryształach omawianych możemy spodziewać się łupliwości w jednym kierunku albo na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny odbicia, albo na płaszczyznach do tej płaszczyzny prostopadłych. Jeżeli zaś łupliwość będzie równoległa do płaszczyzny tworzącej z płaszczyzną odbicia kąt nierówny  $90^\circ$ , to jednakowo doskonała łupliwość zachodzić będzie w kierunku symetrycznym, tworzącym taki sam kąt z płaszczyzną odbicia po drugiej jej stronie. Istotnie tak się dzieje. N. p. kryształy skalenia potasowego (ortoklaz) mają doskonałą łupliwość równoległą do ściany  $P(001)$ , (rys. 57 str. 69), mniej doskonałą, acz dość wyraźną, równoległą do ściany  $M(010)$  i bardzo niewyraźną, równoległą do ścian słułow  $T(110)$ , a więc w dwu kierunkach jednakową.

Kryształy posiadające osi polarne, t. j. takie proste, których kierunki dodatnie nie są równe kierunkom ujemnym, n. p. kryształy klasy  $S(1')$  (por. str. 97) otrzymują na biegunach osi polarnych różnicę potencyału elektrycznego, gdy są jednostajnie ogrzewane albo studzone. Rzecz jasna, że kryształy klasy słułow jednoskońnych tej własności mieć nie mogą.

Co się tyczy tych własności fizycznych, które się odbywają według elipsoidy, jak n. p. zjawiska optyczne, to w kryształach klasy słułow jednoskońnych elipsoida każdego zjawiska, wywołanego energią promienistą, musi być zawsze elipsoidą trójosiową, lecz w każdym przypadku jedna oś elipsoidy musi być zgodna z osią przystawiania. Doświadczenia i obserwacje wykazują, że tak jest w istocie. Tak n. p. wszystkie zjawiska optyczne w kryształach klasy omawianej odbywają się symetrycznie do krawędzi kryształu na ścianach pasa równoległego do osi przystawiania. Na wszelkich innych ścianach odbywają się one skośnie względem krawędzi i największe odchylenie wykazują na ścianach  $(0\bar{1}0)$  i  $(010)$ .



Wyprowadzając wszystkie możliwe formy pojedyncze w każdej klasie ze znaku jej symetryczności  $S(pqr)$ , t. j. przewidując ilość ścian każdej formy, ich wzajemny stosunek przestrzenny i symetryczność fizyczną każdej ściany, idziemy za prawem kątów stałych, t. j. rozważamy kompleksy normalnych a pomijamy wielościany, jakie powstają po przeprowadzeniu płaszczyzn do nich prostopadłych. Jeżeli przytem nazywamy kompleksy normalnych nazwami brył, to tylko przez hołdowanie tradycyi.

Jednak dla osób początkujących i nie mających wyrobionej wyobraźni geometrycznej bywają pomocne rysunki perspektywiczne wielościanów, odpowiadających temu czy owemu rozkładowi biegunów na kuli. Przyjęto wykreślać je izosymetrycznie t. j. tak, aby ściany równe, czyli będące wzajemnem powtórzeniem symetrycznem, leżały na równej odległości od środka. Wtedy, przecinając się wzajemnie, wszystkie ściany równe zostają otoczone pozostałemi ścianami jednakowo i otrzymują ograniczenia swe w kształcie jednakowych wielokątów np. na rys. 16 (str. 15) wszystkie ściany  $I$  są ośmiokątami, wszystkie ściany  $T$  mają zarys sześciokątów, wszystkie ściany  $L$  są równoległobokami prostokątnymi.

W takich rysunkach kształt wieloboku uzmysławia rodzaj symetryczności danej ściany. np. ściana  $I$  rys 16 jest czterosymetryczna,  $T$  trójsymetryczna,  $L$  — dwusymetryczna, o ile rozumie się symetryczność geometryczna i fizyczna idzie w parze, co właściwie dzieje się tylko w formach  $\{hkl\}$ , oraz w wielu formach tych klas, których symetryczność uzasadnia się tylko płaszczyznami odbicia, bez płaszczyzn obrotu i inwersyi.

W przypadkach wzrostu wyjątkowo pomyślnych czasami powstają kryształy izosymetryczne, np. galenit w postaci wielościanów rys. 13 (str. 15), magnetyt w ośmiościanach umiarowych, lub kwarc taki, jak na rys. 36, 37, lub 38 (str. 49). Ale są to przypadki rzadkie. Przeważnie ściany kryształów są bardzo znacznie poprzesuwane na rozmaite odległości od środka, a więc zazwyczaj kształt ich i pokrój jest bardzo daleki od kształtu izosymetrycznego, tak jak wielościan rys. 39 od wielościanu rys. 36-go i rys. 38-go.

#### § 49. Przegląd klas, do których należą kryształy ciał, wymienianych w „Podstawach“ jako przykłady, oraz wyjaśnienie różnicy pomiędzy symetrią geometryczną i fizyczną.

Nie będzie od rzeczy wymienienie tych klas krystalograficznych, do których należą kryształy, przytaczane w tej książce jako przykłady.

Wielościan krystaliczny aksynitu  $HMgCa_2BaSi_4O_{16}$  (rys. 29 str. 37) i 32 str. 42) oraz wielościan teoretyczny (rys. 30 str. 37 i rys. 31 str. 41) są to przykłady symetryczności rodzaju  $S(2''2''2'')$ , t. j. klasy dwuścianów trójskośnych. Każda ściana ma tylko jedną sobie równą i równoległą na przeciwległej części kryształu.

Kryształy staurolitu  $HFeAl_5Si_2O_{13}$  i aragonitu  $CaCO_3$  (rys. 40, 41 str. 50 i rys. 64 str. 79) są oczywistym przykładem rodzaju  $S(222)$ , t. j. klasy podwójnych piramid rombowych:  $L_I^2, L_{II}^2, L_{III}^2, P_I, P_{II}, P_{III}, C$ .

Dzieli się one trzema płaszczyznami prostopadłymi na części symetryczne, a więc w trzech kierunkach prostopadłych mają obrót z przystawaniem dwukrotnym.

Kryształy platynocyanku magnezowego  $MgPt(CN)_4 \cdot 7H_2O$  (rys. 62 str. 77) należą do rodzaju symetryczności  $S(2\ 2\ 4)$ , t. j. do klasy podobnych piramid dwutetragonalnych  $L^4, L^2, 2L^2, P, 2P_1, 2P_2, C$ .

Kwarc  $SiO_2$  jest przykładem krystalicznym rodzaju  $S(2\ 2\ 3) = L^3, 3L^2$ , czyli klasy trapezoedrów trygonalnych. Trzeciorzędna oś przystawiania szczególnie łatwo jest widoczna w wielościanie rys. 38 str. 49.

Apatyt  $3[Ca_3(PO_4)_2] \cdot CaF_2$ , którego kryształ przedstawia rys. 20 (str. 21), krystalizuje się w rodzaju  $S(2\ 2\ 6) = L^6, P, C$ . Na rysunku przytoczonym istotnie widać, że kryształy te przychodzą do jednokładności po każdym obrocie o  $60^\circ$ ; widzimy to z układu ścian  $L, V$  i  $E, F$ , oraz stosunku ich do ścian  $M$ . Potwierdzają to figury wytrawione (rys. 63 str. 78) apatyty, jakie powstają na płaszczyźnie  $P$  (rys. 20) jego kryształów od działania kwasu azotowego. Klasa ta nosi nazwę klasy heksagonalnych piramid podobnych.

Minerał kalcyt  $CaCO_3$  wymieniony jest na str. 3 i 79 dla doskonałej łupliwości. Kryształy jego są bardzo urozmaicone pod względem kształtu, ale wszystkich ich postacią zasadniczą jest romboedr wyobrażony na rys. 1 (str. 3). Kryształy tego minerału mają symetryczność  $S(2\ 2\ 6)$ , t. j.  $L^3, 3L^2, 3P, C$ , i należą do klasy, zwanej klasą skalenoedrów heksagonalnych.

Kryształy ałunu  $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$  należą do rodzaju  $S(2\ 3\ 4) = 3L^3, 4L^2, 3P, C$ , t. j. do klasy dyakisdoekaedrów. Figury wytrawione, które przedstawia rys. 4 (str. 4) powstają na ścianie ośmiościanu  $\{111\}$  (por. rys. 42 str. 51), która jest prostopadła do osi przystawiania trzeciego rzędu. Kształt tych figur to potwierdza.

Spękania soli kamiennej  $NaCl$ , które przedstawia rys. 3 (str. 3), wywołane są na ścianie sześcianu  $\{100\}$ : najpospolitszej formy kryształów tej substancji. Własności fizyczne kryształów soli kamiennej są takie, że zaliczamy je do rodzaju  $S(2\ 3\ 4) = 3L^3, 4L^2, 6L^2, 3P_1, 6P_2, C$ , t. j. do klasy czterdziestoosmiościanów. Jest to rodzaj najwyższej symetryczności krystalograficznej. Ściany sześcianu soli kamiennej są prostopadłe do osi przystawiania czwartego rzędu, oraz do czterech płaszczyzn odbicia, przecinających się co  $45^\circ$  (kąt obrotu =  $45^\circ \times 2 = 90^\circ$ , rząd =  $360^\circ : 90^\circ = 4$ ); spękania na rys. 3 przedstawione, są sobie prostopadłe i z krawędziami sześcianu tworzą kąt  $45^\circ$ , a więc ściana sześcianu soli kamiennej istotnie czyni zadość wskazanemu rodzajowi symetryczności. To samo wykazują figury wytrawione, o czym będzie mowa niżej z powodu rys. 102.

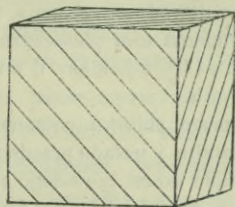
Kryształy galenitu  $PbS$ , wyobrażone na rys. 13, 14, 15 i 16 (str. 15), należą do klasy  $S(2\ 3\ 4)$ . Zaliczamy je do niej nie na zasadzie geometrycznej tylko symetryczności wielościanów, przedstawionych na tych rysunkach, ale na zasadzie własności fizycznych tego minerału. Gdyby bowiem dano nam tylko sam kształt wielościanów rys. 13, 14, 15 i 16, to mielibyśmy prawo zaliczyć je nie tylko do klasy  $S(2\ 3\ 4)$ , ale do  $S(2\ 3\ 4')$  i  $S(2\ 3' 4')$ , bowiem kształty te są możliwe we wszystkich tych klasach.

Aby to co się rzekło przed chwilą, było zrozumiałe, zwróćmy uwagę na różnicę pomiędzy symetrycznością geometryczną a fizyczną.

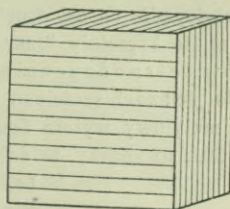


Jeżeli założymy biegun  $(hkl)$ , to otrzymamy formę ogólną, która w każdej klasie ma kształt inny, będący zupełnym wyrazem symetryczności danej klasy we wszystkich szczegółach. Symetryczność geometryczna takiej formy jest obrazem symetryczności fizycznej wszystkich kryształów danej klasy. Dla tego każdą klasę nazywamy mianem jej formy ogólnej  $\{hkl\}$ . Ale gdy założymy biegun nie w polu trójkąta  $S(pqr)$ , lecz na jego bokach lub w którymkolwiek wierzchołku, czyli innemi słowy, gdy w znaku  $(hkl)$  nadamy wyznacznikom wartości blizkie do 1 albo nawet 1 i 0, to przez powtórzenie kalejdoskopowe tego bieguna otrzymamy formy szczegółowe, t. j. formy o mniejszej ilości ścian, niż forma ogólna  $\{hkl\}$ . Formy te o wyznacznikach najprostszych zazwyczaj są wspólne kilku klasom. A więc geometryczna ich symetryczność jest nieraz wyższa, niż symetryczność fizyczna, wykazywana przez własności ciał, które w tych formach się krystalizują. N. p. forma o sześciu równych sobie i wzajemnie do siebie prostopadłych ścianach<sup>1</sup> jest możliwa we wszystkich pięciu klasach typu symetryczności  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  jako jeden z przypadków formy szczegółowej każdej klasy. Jeżeli ją wykreślimy izosymetrycznie, otrzymamy sześcian umiarowy, t. j. bryłę, której stopień i rodzaj symetryczności odpowiada klasie  $S(2\ 3\ 4)$ , a więc najwyższej symetryczności krystalograficznej. Tymczasem, gdy zbadamy ściany sześcianów na kryształach różnych substancji chemicznych, to okaże się rzecz następująca.

Ściany sześcianu na kryształach sfalerytu, czyli rodzimego siarczku cynkowego  $ZnS$ , mają zawsze delikatne prążkowanie przekątne o kie-



Rys. 98. Kierunek prążków na ścianach sześcianu kryształów sfalerytu.

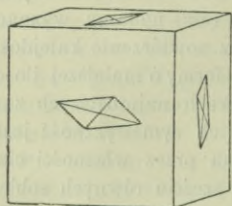


Rys. 99. Kierunek prążków na ścianach sześcianu kryształów pirytu.

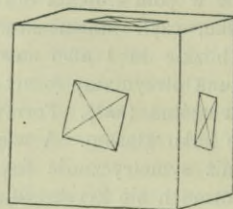
runku, wskazanym na rys. 98 (por. ściany  $H$  na rys. 61 str. 77). Oczywiście, że taki sześcian ma symetryczność rodzaju  $S(2\ 3\ 3)$ , t. j. każda ściana jego jest prostopadła do osi przystawiania drugiego rzędu i do dwu płaszczyzn odbicia, których ślady tworzą z krawędziami sześcianu kąt  $45^\circ$ . Jest to klasa heksakistetradrów:  $3L^2, 4L^3, 6P$ .

<sup>1</sup>  $\{100\}$ , jeżeli na krawędzi osiowe obierzemy krawędzi tej właśnie formy, jak to się czyni zwykle.

Piryt  $FeS_2$  (rys. 99) ma na ścianach sześcianu prążki, równoległe do krawędzi, przyczem tak ułożone, że na dwu przyległych ścianach są one sobie prostopadłe. A więc każda ściana sześcianu piritowego jest prostopadła do



Rys. 100. Kształt i układ figur wytrawionych na ścianach sześcianu bromianu sodowego.

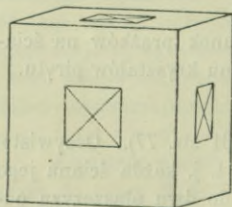


Bys. 101. Figury wytrawione sylwinu.

dwu płaszczyzn odbicia, równoległych do jego krawędzi, t. j. mamy tu rodzaj  $S(2' 3' 4') = 3L^2, 4L^3, 3P, C$  t. j. klasę dyakisdodekaedrów (por. wyżej ałun).

Sześciany bromianu sodowego  $NaBrO_3$ , potraktowane ostrożnie wodą otrzymują figury wytrawione rys. 100, które dowodnie wykazują, że ściany te są prostopadłe do osi drugiego rzędu, ale że niema tam płaszczyzn odbicia, a więc są to kryształy klasy  $S(2' 3' 3') = 3L^2, 4L^3, 6L^2$ , t. j. klasy dwunastokątów tetraedrycznie pentagonalnych.

Na ścianach sześcianu sylwinu (rodzimego chlorku potasowego  $KCl$ ) alkohol metylowy wyżera figury wytrawione kształtu i układu przedstawionego na rys. 101, to znaczy, że ściany te są prostopadłe do osi czwartego rzędu, ale bez płaszczyzn odbicia, bo całej ściany z jej figurami nie możemy w żadnym kierunku podzielić na części symetrycznie równe i symetrycznie leżące; a więc mamy tu klasę  $S(2' 3' 4) = 3L^4, 4L^3, 6L^2$ , noszącą nazwę klasy dwudziestoczworokątów pentagonalnych.



Rys. 102. Figury wytrawione soli kamiennnej.

I dopiero sól kamienna (chlerek sodu  $NaCl$ ) na swych ścianach sześcianu wykazuje figury wytrawione rys. 102, t. j. okazuje symetryczność fizyczną, zgodną z symetrycznością geometryczną sześcianu umiarowego, a więc kryształy jej należą do klasy czterdziestościanów  $S(2 3 4) = 3L^4, 4L^3, 6L^2, 3P_1, 6P_{II}, C$ .

Magnetyt  $Fe'' Fe''' O_4$  rys. 43 podobnie jak sól kamienna krystalizuje się w klasie  $S(2 3 4)$ .

Przykłady podane dają pojęcie o charakterze krytalografii opisowej



i o klasyfikacji krystalograficznej. Zarazem wszystko wskazuje, że krystalografia geometryczna w obecnym jej stanie jest już zupełnie doprowadzona do poziomu nauki dedukcyjnej: cała jej treść daje się wyprowadzić z jednego założenia, z sieci przestrzennej, niezależnie od wyników obserwacji i doświadczenia a jednak w zupełnej z nimi zgodności.

**§ 50. Kształty czworościanów jednostkowych, spis klas krystalograficznych, ich nazwy i przykłady. Podstawy krystalografii fizycznej. Klasyfikacja kryształów pod względem różnych zjawisk fizycznych. Kryształy bliźniące, wielokrotne i naśladowcze.**

W książce niniejszej daliśmy szczegółowe ugruntowanie zasadniczych praw krystalografii i ich następstw, oraz wskazaliśmy zasadę pomiarów i obliczeń krystalograficznych.

Na zakończenie tej książki podajmy jeszcze kształty czworościanów jednostkowych, nazwy klas i najpospolitsze ich przykłady, a także dajmy w zarysie związek pomiędzy nauką o symetryczności, a kryształem jako utworem geometrycznym i ciałem fizycznym.

Z przykładów opisanych w § 48 i § 49 widoczna, że o należeniu kryształów danego ciała do tej czy owej klasy symetryczności wnosimy z rodzaju symetrii fizycznej jego ścian i z ich układu wzajemnego. A więc z zespołu własności fizycznych i geometrycznych kryształu badanego wnioskujemy o kierunkach, ilości i rodzaju płaszczyzn zwierciadlanych, jakie należy przeprowadzić w nim dla poznania właściwego mu stopnia symetryczności.

Twierdzenia, wyłożone w §-fie 47-mym, zakreślają granice, w których możemy korzystać z płaszczyzn zwierciadlanych i osi przystawiania na elementy czworościanu jednostkowego. Rzecz jasna, że przez użycie na czworościan jednostkowy odpowiednio obranych osi przystawiania lub płaszczyzn zwierciadlanych, osiągamy to, że symetrycznie równe ściany kryształu otrzymują znaki o jednakowych wyznacznikach. Z tego więc względu taki wybór elementów czworościanu jednostkowego stale się praktykuje. Powoduje on kształty czworościanu niektórym klasom wspólne.

**I. Kryształy trójskośne.**

W klasach  $S(1')$  i  $S(2''2''2'')$  niema ani płaszczyzn odbicia, ani osi przystawiania. Więc w kryształach tych klas na czworościan jednostkowy obieramy cztery dowolne ściany kryształu. W tych zatem klasach kształt czworościanu jednostkowego jest trójskośny, t. j. wszystkie trzy odcinki krawędzi osiowych, odcięte przez ścianę jednostkową,

są nierówne, a kąty krawędzi osiowych też nie są równe i żaden nie mierzy  $90^\circ$ . Wszystkie kryształy tych dwu klas nazywamy trójskośniami. Postać ich czworościanu jednostkowego oznaczamy:

$$a : b : c; \alpha, \beta, \gamma.$$

N. p. przytoczony już na str. 68 czworościan jednostkowy albitu:

$$a : b : c = 0.6333 : 1 : 0.5575$$

$$\alpha = 94^\circ 4', \beta = 116^\circ 28', \gamma = 88^\circ 8',$$

czworościan jednostkowy aksynitu:

$$a : b : c = 0.4921 : 1 : 0.4797$$

$$\alpha = 82^\circ 54', \beta = 91^\circ 52', \gamma = 131^\circ 32'$$

czworościan jednostkowy kwaśnego prawego winianu strontowego:

$$a : b : c = 1.2136 : 1 : 0.9630$$

$$\alpha = 66^\circ 53', \beta = 102^\circ 48', \gamma = 105^\circ 40'.$$

1.  $S(1')$ . Klasa pedyonów trójskośnych.  $OL. OP. OC.$

Tiosiarczan wapniowy =  $CaS_2O_3 \cdot 6H_2O$ .

Octanoazotan strontowy =  $Sr(C_2H_3O_2)_2 \cdot Sr(NO_3)_2 \cdot 3H_2O$ .

Kwaśny prawy winian strontu =  $SrH_2(C_4H_4O_6)_2 \cdot 4H_2O$ .

2.  $S(2'2'2')$ . Klasa dwuścianów trójskośnych.  $C.$

Kwas borowy  $H_3BO_3$ .

Pirochromian potasowy  $K_2Cr_2O_7$ .

Siarczan miedzi  $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ .

Aksynit  $HCa_3BAI_2Si_4O_{16}$ .

Albit  $Na_2Al_2Si_6O_{16}$ .

## II. Kryształy jednoskośne.

Kryształy klasy  $S(1)$ ,  $S(2')$  i  $S(2'2'2)$  mają albo płaszczyznę odbicia  $S(1)$ , albo oś przystawania drugiego rzędu  $S(2')$ , albo płaszczyznę odbicia i prostopadłą do niej oś przystawania drugiego rzędu  $S(2'2'2)$ . A więc stopień symetryczności kryształów tych klas dostarcza na czworościan jednostkowy jedną płaszczyznę, której daje się znak  $(010)$  i jedną prostopadłą do niej krawędź, której nadaje się kierunek osi  $Y$ . Na pozostałe elementy czworościanu jednostkowego obieramy ściany i krawędzi na kryształach obecne, a więc krawędzi te, jako nie związane z sobą zależnością symetryczną, są nie równe. Co zaś do ich nachylenia, to dwa kąty krawędzi osiowych mierzą po  $90^\circ$ , kąt trzeci oznaczamy literą  $\beta$ , t. j. kąt osi  $X$  i  $Z$  jest nierówny kątowi prostemu. Po-



nieważ tylko jeden kąt jest tu nieprosty, więc czworoscian taki nazywa się jednoskośny. Ogólny znak kształtu tego czworoscianu:

$$a : b : c; 90^\circ, \beta, 90^\circ.$$

N. p. skaień potasowy  $K_2Al_2Si_6O_{16}$  obliczony przez nas na str. 69—74

$$a : b : c = 0.66 : 1 : 0.56, \beta = 116^\circ,$$

gips  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ :

$$a : b : c = 0.6895 : 1 : 0.4132, \beta = 98^\circ 58',$$

muskowit  $H_2KAl_3Si_3O_{12}$

$$a : b : c = 0.5774 : 1 : 2.2170, \beta = 84^\circ 55'.$$

3.  $S(1)$ . Klasa daszków jednoskośnych.  $P$ .

Tetractionian potasu  $K_2S_4O_6$ .

4.  $S(2)$ . Klasa sfenoidów jednoskośnych.  $L_P^2$ .

Prawy kwas winowy  $C_4H_6O_6$  i niektóre jego sole.

5.  $S(2'2'2)$ . Klasa słupów jednoskośnych<sup>1</sup>.  $L^2, P, C$ .

Siarka  $S$  w temperaturach wyższych od  $+95.6^\circ C$ .

Bezwodnik arsenawy czyli arsenik  $As_2O_3$ .

Chlorek baru  $BaCl_2 \cdot 2H_2O$ .

Żelazicyanek potasu  $K_3Fe(CN)_6$ .

Żelazocyjanek potasu  $K_4Fe(CN)_6 \cdot 3H_2O$ .

Chloran potasu czyli sól Bertholleta  $KClO_3$ .

Węglan sodu czyli soda  $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ .

Siarczan sodu czyli sól glauberska  $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ .

Dwuwodny siarczan wapnia czyli gips  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ .

Siedmiowodny siarczan żelazawy czyli wityryol żelaza  $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ .

Boraks  $Na_2B_4O_7 \cdot 10H_2O$ .

Octan sodowy  $NaC_2H_3O_2 \cdot 3H_2O$ .

Octan miedziowy czyli grynszpan  $Cu(C_2H_3O_2)_2 \cdot H_2O$ .

Octan ołowiany czyli cukier ołowiany  $Pb(C_2H_3O_2)_2 \cdot 3H_2O$ .

Kwas szczawiowy  $H_2C_2O_4 \cdot 2H_2O$ .

Kwas salicylowy  $H_6C_7O_3$ .

Naftalin  $C_{10}H_8$ .

Antracen  $C_{14}H_{10}$ .

Skalenie potasowe  $K_2Al_2Si_6O_{16}$ : adular, ortoklaz i sanidyn.

Muskowit i wszystkie łyszczyki.

Liczne minerały z grupy piroksenów i amfibolów.

<sup>1</sup> Opracowana przez nas szczegółowo na str. 119—124 w §-fie 48-mym.

## III. Kryształy rombowe.

Kryształy klas:  $S(2)$ ,  $S(2'2'2')$  i  $S(222)$  czyli t. zw. rombowe, jako elementy czworościanu jednostkowego posiadają albo dwie prostopadłe płaszczyzny odbicia  $S(2)$ , a więc oś przystawania i płaszczyznę do niej prostopadłą, albo trzy prostopadłe nierówne osi przystawania  $S(2'2'2')$ , albo trzy prostopadłe płaszczyzny odbicia  $S(222)$ . A więc mamy tu zawsze do użycia trzy nierówne, wzajemnie do siebie prostopadłe, kierunki jako krawędzi osiowe czworościanu jednostkowego; na ścianę  $(111)$  służy którakolwiek ściana kryształu, przecinająca się ze wszystkimi trzema krawędziami osiowymi. Kształt rombowy czworościanu jednostkowego jest zatem

$$a : b : c ; 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ:$$

N. p. aragonit  $CaCO_3$   $a : b : c = 0.6224 : 1 : 0.7206$ ,

staurolit  $HFeAl_3Si_2O_{13}$   $a : b : c = 0.4803 : 1 : 0.6761$ .

6.  $S(2)$ . Klasa pojedynczych piramid rombowych.  $L_p^2, P_I, P_{II}$ .

Fosforan amonowomagnezowy  $NH_4MgPO_4 \cdot 6H_2O$ .

Rezorcyna  $C_6H_4(OH)_2$ .

Kwas pikrynowy  $C_6H_3(NO_2)_3 \cdot OH$ .

7.  $S(2'2'2')$ . Klasa podwójnych sfenoidów rombowych.  $L_I^2, L_{II}^2, L_{III}^2$ .

Siedmiowodny siarczan magnezu czyli sól gorzka  $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ .

Azotan srebra czyli lapis  $AgNO_3$ .

8.  $S(222)$ . Klasa podwójnych piramid rombowych.

$$L_I^2, L_{II}^2, L_{III}^2, P_I, P_{II}, P_{III}, C.$$

Siarka w temperaturach niższych od  $+95.6^\circ C$ .

Azotan potasu czyli saletra potasowa  $KNO_3$ .

Nadmanganian potasu  $KMnO_4$ .

Aragonit  $CaCO_3$ .

Staurolit  $HFeAl_3Si_2O_{13}$ .

Topaz  $5Al_2SiO_6 \cdot Al_2SiF_{10}$ .

Kwas cytrynowy  $C_6H_8O_7 \cdot H_2O$ .

Benzol  $C_6H_6$ .

## IV. Kryształy tetragonalne.

Kryształy wszystkich tych siedmiu klas, w których znaku symetryczności znajduje się liczba 4, lecz niema liczby 3, mają spólny kształt czworościanu jednostkowego tetragonalny, którego postać:

$$a : a : c ; 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ,$$



t. j. trzy krawędzi osiowe są wzajemnie prostopadłe, przyczem dwie z nich są równe, a trzecia nierówna dwom pierwszym.

N. p. platynocyjanek magnezu  $MgPt(CN)_4 \cdot 7H_2O$   $a:c = 1:0.5863$ ,

siarczan niklu  $NiSO_4 \cdot 6H_2O$   $a:c = 1:1.9061$ .

9.  $S(4')$ . Klasa pojedynczych piramid tetragonalnych.  $L^4_p$ .  
Molibdenian ołowiu czyli wulfenit  $PbMoO_4$ .

10.  $S(4)$ . Klasa pojedynczych piramid dwutetragonalnych.  
 $L^4_p, 2P_I, 2P_{II}$ .  
Fluorek srebra  $AgF \cdot H_2O$ .

11.  $S(2'' 2'' 4'')$ . Klasa podwójnych sfenoidów tetragonalnych.  $L^2$ .  
Zasadowy margarycian wapniowy  $Ca_2Al_2SiO_7$ .

12.  $S(2' 2' 4')$ . Klasa trapezodrów tetragonalnych.  $L^4, 2L^2_I, 2L^2_{II}$ .  
Siarczan niklu  $NiSO_4 \cdot 6H_2O$ .

13.  $S(2' 2' 4)$ . Klasa podwójnych piramid tetragonalnych.  $L^4, P, C$ .  
Wolframian wapnia czyli szelit  $CaWO_4$ .

14.  $S(2' 2' 4')$ . Klasa skalenoedrów tetragonalnych.  $L^2, 2L^2_p, 2P$ .  
Chalkopiryt  $CuFeS_2$ .

15.  $S(2 2 4)$ . Klasa podwójnych piramid dwutetragonalnych.  $L^4, 2L^2_I, 2L^2_{II}, P, 2P_I, 2P_{II}, C$ .

Dwutlenek cyny czyli kasyteryt  $SnO_2$ .  
Platynocyjanek magnezu  $MgPt(CN)_4 \cdot 7H_2O$ .  
Cyrkon  $ZrSiO_4$ .

#### V. Kryształy trygonalne i heksagonalne.

Dwanaście klas, których znaki symetryczności nie zawierają liczby 4 ani też dwu trójkątów, a tylko 3 lub 6 same, albo z dwójkami, są to klasy kryształów trygonalnych i heksagonalnych. Spólny im czworoscian jednostkowy — heksagonalny — ma kształt

$$a:a:c; 90^\circ, 60^\circ, 90^\circ.$$

N. p. kwarc  $SiO_2$   $a:c = 1:1.0999$ ,

kalcyt  $CaCO_3$   $a:c = 1:0.8543$ ,

apatyt  $3[Ca_3(PO_4)_2] \cdot CaF_2$   $a:c = 1:0.7346$ .

16.  $S(3')$ . Klasa pojedynczych piramid trygonalnych.  $L_p^3$ .  
Nadjodan sodowy  $NaJO_4 \cdot 3H_2O$ .
17.  $S(3)$ . Klasa pojedynczych piramid dwutrygonalnych.  $L_p^3, 3P$ .  
Lód  $H_2O$ .  
Turmaliny<sup>1</sup>.
18.  $S(2' 2' 3)$ . Klasa podwójnych piramid trygonalnych.  $L^3, P$ .  
Przykład nie znany.
19.  $S(2' 2' 3')$ . Klasa trapezoedrów trygonalnych.  $L^3, 3L_p^2$ .  
Kwarc  $SiO_2$ .
20.  $S(2 2 3)$ . Klasa podwójnych piramid dwutrygonalnych.  
 $L^3, 3L_p^2, P, 3P_1$ .  
Przykład nie znany.
21.  $S(6')$ . Klasa pojedynczych piramid heksagonalnych.  $L_p^6$ .  
Nefeliny  $K_2Na_nAl_{n+2}Si_{4n+10}$ .
22.  $S(6)$ . Klasa pojedynczych piramid dwuheksagonalnych.  
 $L_p^6, 3P_1, 3P$ .  
Grenokit  $CdS$ .  
Jodek srebra  $AgJ$ .
23.  $S(2'' 2'' 6'')$ . Klasa romboedrów.  $L^3, C$ .  
Dolomit  $CaMg(CO_3)_2$ .  
Fenakit  $Be_2SiO_4$ .  
Dyoptaz  $CuH_2SiO_4$ .
24.  $S(2' 2' 6')$ . Klasa trapezoedrów heksagonalnych.  $L^6, 3L_p^2, 3L_{II}^2$ .  
Połączenie azotanu potasowego z winianem antymonilowołowiwowym albo antymonilowobarowym:  $KNO_3 \cdot Pb(SbO)_2 \cdot (C_4H_4O_6)_2$ ;  $KNO_3 \cdot Ba(SbO)_2 \cdot (C_4H_4O_6)_2$ .
25.  $S(2' 2' 6)$ . Klasa podwójnych piramid heksagonalnych.  $L^6, P, C$ .  
Apatyt  $3[Ca_3(PO_4)_2] \cdot CaF_2$ .
26.  $S(2' 2' 6')$ . Klasa skalenoedrów heksagonalnych.  $L^3, 3L^3, 3P, C$ .  
Kalcyt  $CaCO_3$ .

<sup>1</sup> Grupa minerałów, zwanych turmalinami, nie ma jeszcze ustalonego ogólnego wzoru chemicznego.



Korund  $Al_2O_3$ .  
Hematyt  $Fe_2O_3$ .

27.  $S(2\ 2\ 6)$ . Klasa podwójnych piramid dwuheksagonalnych.  
 $L^6, 3L^2_I, 3L^2_{II}, P, 3P_I, 3P_{II}, C$ .

Beryl  $Be_3Al_2Si_6O_{18}$ .

### VI. Kryształy regularne.

Nakoniec pięć klas pozostałych, których rodzaj symetryczności należy do typu  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$  albo  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  obejmuje tak zwane kryształy regularne. Regularny kształt czworościanu jednostkowego jest

$$a : a : a; 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ,$$

t. j. czworościan regularny ma trzy równe wzajemnie do siebie prostopadłe krawędzie osiowe, a więc substancje krystalizujące się w tych klasach nie mogą mieć indywidualnie im właściwego kształtu czworościanów jednostkowych; kształt czworościanu jednostkowego jest uwarunkowany przez ich wysoki stopień symetryczności, a więc wszystkim spólny.

28.  $S(2\ 3\ 3')$ . Klasa dwunastościanów tetraedrycznie pentagonalnych.  $3L^2, 4L^3_p$ .

Azotan baru  $Ba(NO_3)_2$ .

Arsenian sodowostrontowy  $NaSrAsO_4 \cdot 9H_2O$ .

Chloran sodu  $NaClO_3$ .

Bromian sodu  $NaBrO_3$ .

Sulfoantymonian sodu czyli sól Schlippego  $Na_4SbS_4 \cdot 9H_2O$ .

29.  $S(2\ 3\ 3)$ . Klasa heksakistetraedrów.  $3L^2, 4L^3_p, 6P$ .

Dyament  $C$ .

Sfaleryt  $ZnS$ .

Boracyt  $Mg_3B_{16}O_{30}Cl_2$ .

30.  $S(2\ 3\ 4')$ . Klasa dwudziestoczworościanów pentagonalnych.  
 $3L^4, 4L^3, 6L^2$ .

Chlorek amonowy  $NH_4Cl$ .

Chlorek potasu  $KCl$ .

Kupryt  $Cu_2O$ .

31.  $S(2\ 3\ 4)$ . Klasa dwunastościanów podwójnych.  $3L^2, 4L^3, 3P, C$ .

Ałun glinowopotasowy  $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ .

Piryt  $FeS_2$ .

Jodek cynawy  $SnI_2$ .

32.  $S(234)$ . Klasa czterdziestoośmiościanów.

$3L^4, 4L^3, 6L^2, 3P_1, 6P_2, C$ .

Sól kamienna  $NaCl$ .

Fluoryt  $CaF_2$ .

Magnetyt  $Fe''Fe_2'''O_4$ .

(Klasa symetryczności najwyższej: normalna  $(hkl)$  ma czterdzieści ośm kierunków równych).

W wykładzie o trzydziestu dwu klasach symetryczności krystalograficznej nieustannie wspominaliśmy o fizycznej symetrii ścian kryształów i ciągle kładliśmy nacisk na to, że w granicach wyprawdzanych przez nas rodzajach symetryczności ma się wypowiadać stopień symetrii fizycznej każdego ciała krystalicznego. Obecnie więc należy odpowiedzieć na pytanie, czy wszystkie zjawiska fizyczne w równej mierze dokładnie idą za wszelkimi szczegółami symetrii krystalograficznej, czy przeciwnie symetria zjawisk fizycznych jest bardziej ogólnikowa, niż symetria krystalograficzna. Innymi słowy tu mamy odpowiedzieć na pytanie, czy pod względem każdego zjawiska fizycznego odróżnić można trzydzieści dwie klasy ciał krystalicznych, czy też mniej.

Z rozproszonych tu i ówdzie uwag czytelnik mógł już wywnioskować, że symetria krystalograficzna, t. j. ta, którą wywiedliśmy teoretycznie, jest zarazem symetrią wielościanów rozpuszczania i przyrostu. Wielokrotnie bowiem wspominało się o figurach wytrawionych, a także o ilości i o wzajemnem ustosunkowaniu przestrzennem ścian kryształu w każdej klasie. Nawet nazwa każdej klasy jest jej dana od nazwy tej bryły, jaką w tej klasie tworzą ściany  $\{hkl\}$  t. j. od t. zw. postaci ogólnej każdej klasy. Istotnie. Zjawisko przyrostu i rozpuszczania ciała krystalicznego jest zjawiskiem najniesymetryczniejszym, a więc znajduje się ono w jak najściślejszej zależności od symetrii krystalograficznej, t. j. każde dwa nierówne kierunki krystalograficzne muszą być nierówne pod względem przyrostu i rozpuszczania. A więc trzydzieści dwa rodzajów symetrii krystalograficznej zarazem są trzydziestoma dwiema klasami symetryczności wielościanów przyrostu i rozpuszczania ciał krystalicznych.

Co zaś do innych zjawisk fizycznych, to każde z nich zachodzi w kryształach w zupełnej zgodzie z symetrią krystalograficzną, ale ponieważ symetryczność tych zjawisk jest przeważnie daleko wyż-



sza, niż symetryczność przyrostu ciała jednorodnego, przeto kryształy niektórych klas różnych zachowują się jednakowo pod względem wielu innych zjawisk fizycznych. Dwa kierunki krystalograficznie równe są także równe pod każdym względem fizycznym, t. j. wszystkie zjawiska fizyczne zachodzą i odbywają się w tych kierunkach jednakowo. Ale dwa kierunki nierównoległe a jednakowe pod względem jakiegoś zjawiska fizycznego, nie będącego zjawiskiem przyrostu lub rozpuszczania ciała jednorodnego, nie zawsze są kierunkami krystalograficznie równymi. Ich równość fizyczna pod względem jednego jakiegoś zjawiska fizycznego może być wynikiem wielkiej symetryczności samego zjawiska, a nie krystalograficznej równości tych kierunków. Wszystkie bowiem zjawiska fizyczne we wszystkich kryształach odbywają się jednakowo na wszystkich kierunkach krystalograficznie równych, ale wiele jest takich zjawisk fizycznych, które odbywają się jednakowo w niektórych kierunkach krystalograficznie nie równych. N. p. każde zjawisko centryczne, t. j. takie, którego przebieg jest jednakowy na dodatnim i odjemnym kierunku jednej prostej, przebiega jednakowo w klasach różniących się tylko posiadaniem lub nieobecnością w nich środka symetrii. Albo n. p. wszystkie kierunki w każdym kryształ regularnym są równe pod względem termicznym, elektrycznym, magnetycznym i optycznym, tak że względem tych zjawisk one są izotropowe, t. j. jednokierunkowe. Przeciwnie w spójności, sprężystości, piroelektryczności i piezoelektryczności kryształy regularne wykazują anizotropię bardzo znaczną.

A więc rozpatrzmy w zarysie zachowanie się różnych klas krystalograficznych pod względem najlepiej poznanych zjawisk fizycznych.

I. Pod względem łupliwości kryształy dzielą się na siedem grup.

1. Kryształy trójskośne, t. j. klasy  $S(1')$  i  $S(2''2''2'')$  zależnie od substancji mają łupliwość rozmałą, ale wszystkie one wykazują łupliwość jednakową tylko równoległe do jednej ściany. Może być w nich kilka kierunków łupliwości, ale w każdym będzie ona różnego stopnia.

2. Kryształy jednoskośne, t. j. klasy  $S(1)$ ,  $S(2')$  i  $S(2'2'2)$  mają łupliwość jednakową albo równoległe do ściany

(010) albo do tej ściany prostopadle, albo mają one łupliwość jednakową w dwu kierunkach: równoległe do ścian słupa. Słowem, wszystkie kryształy jednoskośne pod względem łupliwości mają symetrię klasy słupów jednoskośnych  $S(2' 2' 2)$ .

3. Kryształy rombów mają łupliwość zgodną z symetrią klasy  $S(2 2 2)$ , t. j. czyniącą zadość trzem płaszczyznom odbicia wzajemnie prostopadłym. A więc zależnie od substancji bywa ona albo równoległa do jednej płaszczyzny odbicia, albo do dwu ścian słupa, tak że płaszczyzna odbicia dzieli kąt łupliwości na dwie równe części, albo też wreszcie łupliwość jednakowa biegnie równoległe do czterech par równoległych ścian piramidy rombowej.

4. Kryształy heksagonalne o osi głównej trzeciego rzędu mogą mieć łupliwość jednakowego stopnia albo równoległą do ścian romboedru, albo równoległą do ścian słupa o podstawie umiarowego sześcioboku.

5. Kryształy heksagonalne o osi głównej szóstego rzędu miewają łupliwość jednakową albo równoległe do ścian piramidy, której podstawą jest sześciokąt umiarowy, albo do takiegoż słupa. Ciała mające tę ostatnią łupliwość, nie różnią się od grupy poprzedniej.

6. Kryształy tetragonalne mają łupliwość zgodną z symetrią rodzaju  $S(2 2 4)$ , a więc łupią się albo prostopadle do osi głównej, albo równoległe do ścian słupa kwadratowego, t. j. w dwu kierunkach, albo mają jednakową łupliwość w czterech kierunkach, t. j. równoległe do ścian piramidy o podstawie kwadratowej.

7. Nakoniec kryształy regularne mają łupliwość odpowiadającą symetrii klasy  $S(2 3 4)$ , a więc zależnie od substancji łupią się albo w trzech kierunkach (równoległe do ścian sześciianu), t. j. prostopadle do osi przystawania czwartego rzędu, albo w czterech kierunkach (równoległe do ścian ośmiościanu umiarowego), t. j. prostopadle do osi przystawania trzeciego rzędu, albo w sześciu kierunkach (równoległe do ścian dwunastościanu rombowego), t. j. prostopadle do osi przystawania rzędu drugiego.

II. Pod względem sprężystości kryształy dzielą się na dziewięć grup.

Jeżeli zmierzmy współczynnik rozszerzalności w różnych kierunkach kryształu i odetniemy odcinki proporcjonalne zmierzonym wielkościom od prostych ułożonych w przestrzeni tak samo, jak te



kierunki, w których zmierzylismy współczynnik omawiany, a potem połączymy końce tych odcinków powierzchnią, to otrzymamy t. zw. powierzchnię sprężystości tego ciała. Symetria powierzchni sprężystości jest wielu klasom wspólna. Jej rodzajów, jak wskazano przed chwilą, jest dziewięć. Mianowicie.

1. Obie klasy trójskośne różnią się tylko tem, że jedna nie ma środka symetrii a druga go posiada. Ale obie one nie mają ani płaszczyzn odbicia ani osi przystawania. Ponieważ sprężystość jest zjawiskiem centrycznym, więc te dwie klasy nie mogą różnić się w tym względzie. Ich powierzchnia sprężystości musi być jednakowego rodzaju. Musi być ona asymetryczna i nie może być oryentowana w kryształach w jakikolwiek sposób zależny od jego krawędzi. Do wyznaczenia tej powierzchni należy zmierzyć współczynniki sprężystości ciała trójskośnego w 21 kierunkach.

2. Wszystkie kryształy jednoskośne wykazują powierzchnię sprężystości jednakowej symetrii zgodnej z symetrycznością klasy słupów jednoskośnych  $S(2' 2' 2')$ , t. j. z jedną płaszczyzną odbicia i z jedną prostopadłą do niej osią przystawania drugiego rzędu. Do wyznaczenia powierzchni sprężystości kryształu jednoskośnego potrzeba pomiarów w trzynastu kierunkach.

3. Kryształy rombów mają powierzchnię sprężystości o rodzaju i stopniu symetrii podwójnej piramidy rombowej  $S(2 2 2)$ , t. j. o trzech prostopadłych płaszczyznach odbicia i, co z tego wypływa, o trzech osiach przystawania, do siebie prostopadłych. Do wykreslenia tej powierzchni trzeba zmierzyć współczynnik rozszerzalności w dziewięciu kierunkach.

4. Tetragonalne kryształy klas  $S(2' 2' 4')$ ,  $S(4')$  i  $S(2'' 2'' 4'')$  mające tylko oś główną  $Z$  czwartego lub drugiego rzędu, a nie mające ani osi ani płaszczyzn bocznych, stanowią jedną grupę o wspólnym kształcie powierzchni sprężystości. Do wyznaczenia tej powierzchni trzeba pomiarów w siedmiu kierunkach.

5. Tetragonalne klasy  $S(2 2 4)$ ,  $S(4')$ ,  $S(2' 2' 4')$  i  $S(2'' 2'' 4'')$ , mające płaszczyzny i osi boczne, do wyznaczenia powierzchni sprężystości wymagają pomiarów współczynnika sprężystości w sześciu kierunkach. Powierzchnia sprężystości tej grupy niema w żadnym kierunku przekroju kołowego, ale każde dwie jej średnice prostopadłe do siebie i do płaszczyzny  $XOY$  zawsze są równe.

6. Heksagonalne kryształy klas  $S(2'' 2'' 6'')$  i  $S(3')$

mają powierzchnię sprężystości o siedmiu niezależnych stałych. Powierzchnia ta ma oś trzeciego rzędu, ma jeden przekrój kołowy, ale nie ma trzech płaszczyzn symetrii bocznej.

7. Heksagonalne kryształy klas  $S(2' 2' 6')$ ,  $S(3)$ ,  $S(2' 2' 3')$  mają cechę spólną: oś trzeciego rzędu bez płaszczyzny do niej prostopadłej oraz bez płaszczyzn i osi bocznych. Ich powierzchnia sprężystości jest niejako romboedrem, którego krawędzi i naroża są zaokrąglone, a przytem na każdej ścianie znajduje się wgłębienie. Do wyznaczenia tej powierzchni trzeba pomiarów w sześciu kierunkach.

8. Kryształy klas heksagonalnych  $S(2 2 6)$ ,  $S(6)$ ,  $S(2' 2' 6')$ ,  $S(2 2 3)$ ,  $S(2' 2' 6)$ ,  $S(6')$  i  $S(2' 2' 3)$  mają spólność symetrii w tym stopniu, że mają one osi przystawania szóstego albo trzeciego rzędu i prostopadłą do niej płaszczyznę odbicia (rozumie się po wprowadzeniu dodatkowem w niektórych klasach środka symetrii, co już z góry zapowiedzieliśmy ze względu na centryczność zjawiska omawianego). Powierzchnia sprężystości tych kryształów jest powierzchnią obrotową, której osią obrotu jest główna oś kryształu. Do jej otrzymania potrzeba pięciu stałych. Każda płaszczyzna, przylegająca do osi głównej lub do niej prostopadła, dzieli tę powierzchnię na dwie połowy symetrycznie równe.

9. Wszystkie kryształy regularne, t. j. klasy  $S(2' 3' 3')$ ,  $S(2 3 3)$ ,  $S(2' 3' 4')$ ,  $S(2' 3 4')$  i  $S(2 3 4)$  mają powierzchnię sprężystości, dającą się obliczyć z trzech stałych. Powierzchnia ta ma stopień symetrii klasy czterdziestościanu, t. j.  $S(2 3 4)$ , czyli ma trzynaście osi przystawania i dziewięć płaszczyzn odbicia.

III. Pod względem wewnętrznego przewodnictwa cieplnego t. j. pod względem przewodzenia ciepła od jednej do drugiej części kryształu w razie gdy temperatura ich nie jest jednakowa, kryształy dzielą się na sześć grup.

1. W kryształach trójskośnych zjawisko omawiane odbywa się według równań o dziewięciu stałych.

2. Kryształy jednoskośne wykazują we względzie omawianym symetryczność klasy słupów jednoskośnych  $S(2' 2' 2)$  i różniczniki mają współczynniki pięć.

3. Kryształy rombowe przewodzą według symetryczności



klasy podwójnych piramid rombowych  $S(2\ 2\ 2)$  i równania tu się odnoszące mają trzy współczynniki.

4. W kryształach klas heksagonalnych i tetragonalnych, które nie mają osi bocznych, t. j.  $S(2' 2' 6)$ ,  $S(6')$ ,  $S(2' 2' 3)$ ,  $S(2'' 2'' 6'')$ ,  $S(3')$ ,  $S(2' 2' 4)$ ,  $S(4')$  i  $S(2'' 2'' 4'')$  zjawisko wewnętrznego przewodzenia ciepła zawisłe jest od trzech współczynników.

5. Klasy heksagonalne i tetragonalne  $S(2\ 2\ 6)$ ,  $S(6)$ ,  $S(2' 2' 6)$ ,  $S(2\ 2\ 3)$ ,  $S(2' 2' 6')$ ,  $S(3)$ ,  $S(2' 2' 3')$ ,  $S(2\ 2\ 4)$ ,  $S(4)$ ,  $S(2' 2' 4')$  i  $S(2' 2' 4')$ , t. j. mające osi boczne, przewodzą zależnie od dwu współczynników.

6. Kryształy regularne we względzie omawianym są izotropowe.

IV. Optycznie kryształy dzielą się na ośm klas. Wektor świetlny zmienia się z kierunkiem tak, jak zmieniają się promienie wodzące elipsoidy. Najogólniejszym przypadkiem tej powierzchni jest elipsoida trójosiowa czyli powierzchnia krzywa symetryczna względem trzech prostopadłych płaszczyzn odbicia i trzech prostopadłych osi przystawania, dająca elipsę w każdym przekroju z płaszczyzną odbicia.

1. W kryształach trójskośnych, t. j. w klasach  $S(1')$  i  $S(2'' 2'' 2'')$  elipsa przewodnictwa świetlnego jest trójosiowa, dla każdej długości fali świetlnej orientowana inaczej i niezależnie od krawędzi i ścian kryształu.

2. Kryształy jednoskośne, t. j. klasy  $S(1)$ ,  $S(2')$  i  $S(2' 2' 2)$  mają tak samo elipsoidę trójosiową, ale jedna oś wszystkich elipsoid każdej długości fali światła ma kierunek spólny: jest to kierunek osi  $Y$ , t. j. osi przystawania klasy  $S(2' 2' 2)$  i  $S(2')$  czyli kierunek prostopadły do płaszczyzny odbicia klasy  $S(1)$ .

3. Wszystkie klasy rombowe nie różnią się optycznie pomiędzy sobą. Ich elipsoida trójosiowa dla wszystkich długości fal świetlnych ma wszystkie osi zgodne z trzema osiami przystawania albo z odpowiednimi tym osiom krawędziami kryształu. Zatem każde zjawisko optyczne w kryształach rombówym zachodzi symetrycznie względem krawędzi trzech pasów do siebie prostopadłych, których osi są:  $[100]$ ,  $[010]$  i  $[001]$ .

4. Kryształy klas: pedyonów trójskośnych ( $S(1')$ ), sfenoidów jednoskośnych ( $S(2')$ ) i podwójnych sfenoi-

dów rombowych  $S(2' 2' 2')$ , zachowując wszystkie własności optyczne odpowiednie tym grupom do jakich należą, mają jeszcze tę właściwość, że w dwu kierunkach, których orientacja zależy od substancji, wykazują optyczne skręcanie: własność ogólną i konieczną ciał nie mających płaszczyzn odbicia.

5. Wszystkie kryształy tetragonalne i heksagonalne optycznie zachowują się jednakowo. Mianowicie ich elipsoida przewodnictwa świetlnego jest elipsoidą obrotu. Jest to przypadek szczególny elipsoidy trójosiowej z dwiema osiami równymi. Oś obrotu tej elipsoidy jest zgodna z krystalograficzną osią główną. Innymi słowy na płaszczyznach prostopadłych do osi  $Z$  własności optyczne kryształów heksagonalnych i tetragonalnych są równe we wszystkich azymutach.

6. Kryształy klas tetragonalnych i heksagonalnych nie posiadające płaszczyzn odbicia, a więc klasy  $S(2'' 2'' 4'')$ ,  $S(4')$ ,  $S(2' 2' 4')$ ,  $S(3')$ ,  $S(2' 2' 3')$ ,  $S(6')$  i  $S(2' 2' 6')$ , zachowując wszystko co się powiedziało wyżej w ogóle o własnościach optycznych kryształów tetragonalnych i heksagonalnych, mają tę jeszcze właściwość, że w kierunku osi obrotu elipsoidy, t. j. w kierunku osi głównej mają zdolność skręcania optycznego. Własność ta polega na tem, że gdy przez te kryształy przechodzi w wymienionym kierunku fala światła, odbywająca swe drgania w jednym azymucie, to po przejściu przez taki kryształ przetwarza się ona na dwie fale o dwu przeciwnych drganiach kołowych, których wynikiem jest fala, odbywająca drgania w azymucie innym.

7. Wszystkie kryształy regularne są optycznie izotropowe, t. j. ich powierzchnią przewodnictwa świetlnego jest kula, jako szczególny przypadek elipsoidy trójosiowej o trzech osiach równych.

8. Kryształy klas  $S(2' 3' 3')$  i  $S(2' 3' 4')$  w każdym kierunku wykazują anizotropię optyczną w tym względzie, że falę drgającą w pewnym azymucie przetwarzają na dwie fale drgające kołowo, w czego skutku okazuje się skręcanie optyczne.

V. Pod względem rozszerzalności cieplnej kryształy dzielą się na pięć grup. Kryształy ogrzewane rozszerzają się na ogół różnie w różnych kierunkach, a więc deformują się. Powierzchnia, wyrażająca tę deformację w przypadku najogólniejszym, jest elipsoidą trójosiową, rozmaicie orientowaną względem płaszczyzn i krawędzi kryształu zależnie od jego symetrii.



1. W kryształach trójskośnych osi elipsoidy rozszerzalności termicznej nie leżą w jakimkolwiek związku z kierunkami krawędzi i ścian kryształu.

2. Gdy kryształ jednoskośny doznaje deformacji przez jednostajne podwyższenie temperatury, to, podobnie jak w kryształach trójskośnych, punkty znajdujące się w nim pierwotnie na powierzchni kuli, po ogrzaniu znajdują się na powierzchni elipsoidy trójosiowej. Z trzech osi tej elipsoidy jedna jest zgodna z osią  $Y$ . Może być ona zmierzona przez przyrost grubości płytki równoległej do ściany  $(010)$ . Dwie pozostałe osi elipsoidy rozszerzalności prostopadłe do wymienionej poprzednio, leżą w kryształach niezależnie od kierunków krawędzi kryształu na płaszczyźnie  $(010)$ .

3. W kryształach rombowych kierunki osi elipsoidy rozszerzalności cieplnej są zgodne z kierunkami trzech osi przystawiania albo ze śladami trzech płaszczyzn odbicia. Wielkości trzech współczynników rozszerzalności otrzymuje się bezpośrednio z pomiaru zmiany grubości trzech płytek kryształu rombowego, równoległych do ścian  $(100)$ ,  $(010)$  i  $(001)$ .

4. Elipsoidą deformacji termicznej kryształów tetragonalnych i heksagonalnych jest elipsoida obrotowa. Oś jej obrotu jest zgodna z osią  $Z$ , t. j. z osią główną.

5. Powierzchnią rozszerzalności termicznej kryształów regularnych jest kula. Wszystkie punkty, leżące w nich na kuli w pierwotnym stanie termicznym, po ogrzaniu jednostajnym również znajdują się na kuli.

Na te same pięć grup kryształy dzielą się pod względem indukcji magnetycznej i dielektrycznej, oraz przewodnictwa elektrycznego.

VI. W kryształach substancyj, źle przewodzących elektryczność, dopływ energii cieplnej lub mechanicznej wywołuje nie tylko powiększenie objętości i deformację kryształu, ale oprócz tego część tej energii przemienia się na energię elektryczną. Mianowicie w kryształach i na ich powierzchni powstaje różnica potencjału elektrycznego. Sama już polarność tego zjawiska dowodzi, że może ono zachodzić tylko w tych kryształach, które mają osi polarne, t. j. w których dodatnie i odjemne promienie jednego kierunku nie są krystalograficznie równe. A więc zjawiska te, zwane piroelektrycznymi i piezoelektrycznymi objawami, mogą zachodzić

tylko w klasach następujących:  $S(1')$ ,  $S(1)$ ,  $S(2')$ ,  $S(2)$ ,  $S(3')$ ,  $S(3)$ ,  $S(4')$ ,  $S(4)$ ,  $S(6')$ ,  $S(6)$ ,  $S(2'2'3')$ ,  $S(223)$ ,  $S(2'3'3')$  i  $S(233)$ .

Tych czternaście klas pod względem zjawisk piro- i piezoelektrycznych dzieli się na pięć grup.

1. W trójskośnej klasie  $S(1')$  różnica potencjału występować może w każdym kierunku.

2. W jednoskośnej klasie  $S(1)$  zjawiać się ona może tylko w kierunkach, leżących na jednej płaszczyźnie, mianowicie na płaszczyźnie odbicia.

3. W klasach: jednoskośnej  $S(2')$ , rombowej  $S(2)$ , tetragonalnych:  $S(4')$  i  $S(4)$ , heksagonalnych  $S(3')$ ,  $S(3)$ ,  $S(6')$  i  $S(6)$  piro- i piezoelektryczne objawy mogą zachodzić tylko na biegunach osi głównej.

4. W klasach heksagonalnych (trygonalnych)  $S(2'2'3')$  i  $S(223)$  piro- i piezoelektryczność może się objawić na przeciwnych biegunach trzech bocznych osi przystawiania drugiego rzędu, leżących na płaszczyźnie prostopadłej do osi głównej. Osi te tworzą pomiędzy sobą kąty  $60^\circ$ . Bieguny elektryczne zmieniają się tu kolejno na przemian dodatnie i ujemne na jednej płaszczyźnie co  $60^\circ$ .

5. W klasach regularnych  $S(2'2'3')$  i  $S(233)$  różnicy potencjału należy oczekiwać na biegunach czterech osi trzeciego rzędu prostopadłych do ścian czworościanu umiarowego.

Te wszystkie przewidywania zupełnie potwierdzają się wynikami doświadczenia.

Z podanego przed chwilą zarysu łączności pomiędzy symetrią kryształów i symetrycznością ich własności fizycznych widzimy, że klasyfikacja kryształów, oparta na kształcie czworościanu jednostkowego jest bardzo ogólnikowa i co ważniejsza, jako wyłącznie geometryczna nie jest ani jednolita fizycznie, gdyż nie pokrywa się w całości z całokształtem własności fizycznych, ani jest istotna, bo kryształ jest przede wszystkim ciałem fizycznym. Przeciwnie, klasyfikacja kryształów wynikająca z symetrii, jedynie może być uznana za istotną, bo jest i dostatecznie szczegółowa i daje możność przewidywania, jak to czy inne zjawisko zmieniać się winno w kryształach danej klasy ze zmianą kierunku. Jednak nie odrzucamy zupełnie klasyfikacji kryształów, opartej na ich kształcie czworościanu



jednostkowego z powodu tego, że w wielu przypadkach jest ona niewątpliwie praktyczna jako pierwsze przybliżenie.

Kryształy wielu substancyj, szczególnie organicznych, dochodzą do rąk krystalografa przeważnie w stanie tak mało podatnym szczegółowemu badaniu, że poznać on może zaledwie kształt czworoscianu jednostkowego. A bywają przypadki, w których dokładne ustalenie rodzaju symetryczności ciała badanego może być dokonane tylko drogą doświadczeń i pomiarów bardzo starannych i dość rozległych. Prócz tego nauka o symetryczności ugruntowana została dość niedawno. Dopiero w ósmym dziesięcioleciu wieku dziewiętnastego zaczęto zdawać sobie dokładnie sprawę z samoistności i odrębności rodzajów symetrycznych i zrozumiano potrzebę charakteryzowania ciał krystalicznych zaliczeniem ich do tej czy owej klasy symetryczności. Przedtem w przeważającej ilości przypadków uważano za dostateczne wymienienie tylko kształtu czworoscianu jednostkowego.

Pomiarowe badanie kryształów trwa w nauce około lat stu trzydziestu. Zbadano kilka tysięcy związków chemicznych. Dzielą się one pomiędzy wyliczone powyżej klasy krystalograficzne bynajmniej niejednakowo.

Według niezbyt dokładnego zestawienia dokonanego w roku 1902-gim z 5662 substancyj krystalicznych, do tego czasu poznanych, było

trójskośnych . . . . .	581
jednoskośnych . . . . .	2343
rombowych . . . . .	1703
tetragonalnych . . . . .	273
trygonalnych i heksagonalnych . . .	432
regularnych . . . . .	329

W roku 1906-tym P. Groth rozpoczął wydawać spis i opis krystalograficzny wszystkich ciał krystalicznych, dotychczas zbadanych. Wyszły tymczasem trzy tomy, obejmujące związki nieorganiczne, a z organicznych połączenia alifatyczne i pochodne heksahydrobenzolu. W tych trzech tomach niedokończonego jeszcze wydawnictwa znajdujemy opisy 3652 ciał. Pomiedzy klasy krystalograficzne dzielą się one jak następuje:

1.	$S(1')$	Klasa pedyonów trójskośnych	23
2.	$S(2'' 2'' 2'')$	Klasa dwuścianów trójskośnych	371
		Trójskośnych o klasie nieoznaczonej lub wątpliwej	39
		Trójskośnych wszystkich	333
3.	$S(1)$	Klasa daszków jednoskośnych	17
4.	$S(2')$	Klasa sfenoidów jednoskośnych	99
5.	$S(2' 2' 2')$	Klasa słupów jednoskośnych	1216
		Jednoskośnych klasy nieoznaczonej lub wątpliwej	68
		Jednoskośnych wszystkich	1399
6.	$S(2)$	Klasa pojedynczych piramid rombowych	29
7.	$S(2' 2' 2')$	Klasa podwójnych sfenoidów rombowych	242
8.	$S(2 2 2)$	Klasa podwójnych piramid rombowych	572
		Rombowych klasy nieoznaczonej lub wątpliwej	275
		Rombowych wszystkich	1118
9.	$S(4')$	Klasa pojedynczych piramid tetragonalnych	3
10.	$S(4)$	Klasa pojedynczych piramid dwutetragonalnych	3
11.	$S(2'' 2'' 4'')$	Klasa podwójnych sfenoidów tetragonalnych	1
12.	$S(2' 2' 4')$	Klasa trapezodrów tetragonalnych	17
13.	$S(2' 2' 4)$	Klasa podwójnych piramid tetragonalnych	24
14.	$S(2' 2 4')$	Klasa skalenoedrów tetragonalnych	18
15.	$S(2 2 4)$	Klasa podwójnych piramid dwutetragonalnych	59
		Tetragonalnych klasy nieoznaczonej lub wątpliwej	107
		Tetragonalnych wszystkich	232
16.	$S(3')$	Klasa pojedynczych piramid trygonalnych	2
17.	$S(3)$	Klasa pojedynczych piramid dwutrygonalnych	12
18.	$S(2' 2' 3)$	Klasa podwójnych piramid trygonalnych	16
19.	$S(2' 2' 3')$	Klasa trapezodrów trygonalnych	16
20.	$S(2 2 3)$	Klasa podwójnych piramid dwutrygonalnych	11
21.	$S(6')$	Klasa pojedynczych piramid heksagonalnych	10
22.	$S(6)$	Klasa pojedynczych piramid dwuheksagonalnych	13
23.	$S(2'' 2'' 6'')$	Klasa romboedrów	4
24.	$S(2' 2' 6')$	Klasa trapezodrów heksagonalnych	7
25.	$S(2' 2' 6)$	Klasa podwójnych piramid heksagonalnych	55
26.	$S(2' 2 6')$	Klasa skalenoedrów heksagonalnych	17
27.	$S(2 2 6)$	Klasa podwójnych piramid dwuheksagonalnych	183
		Trygonalnych klasy nieoznaczonej lub wątpliwej	60
		Heksagonalnych klasy nieoznaczonej lub wątpliwej	60
		Trygonalnych i heksagonalnych wszystkich	391



28.	$S(2' 3' 3')$	Klasa dwunastościanów tetraedrycznie pentagonalnych	8
29.	$S(2 3 3)$	Klasa heksakitetraedrów	9
30.	$S(2' 3' 4')$	Klasa dwudziestoczworoscianów pentagonalnych	12
31.	$S(2' 3 4')$	Klasa dwunastościanów podwójnych	46
32.	$S(2 3 4)$	Klasa czterdziestoośmiościanów	20
		Regularnych klasy nieoznaczonej lub wątpliwej	77
		Regularnych wszystkich	172
		Razem	3652

Rzecz godna uwagi, acz niestety niewyjaśniona i niezrozumiała, że przeważającej ilości substancyj właściwy jest czworoscian jednostkowy trójskośny, jednoskośny i rombowy, a z nich jednoskośny jest rozpowszechniony najwięcej.

Przewaga klas symetrii niższej trudna jest do wyjaśnienia z tego względu, że ciało krystaliczne, jeżeli można się tak wyrazić, ma niejako dążność do osiągnięcia symetryczności jak najwyższej, przynajmniej pod względem geometrycznym.

Już wyżej, tam gdzie była mowa o pięciu sześciianach: pirytu, sfalerytu, bromianu sodowego, chlorku potasowego i chlorku sodowego, wyjaśniliśmy pokrótce, że symetria geometryczna kryształu wyższa jest zazwyczaj od jego symetrii fizycznej, bo najpospolitsze postaci kryształu są to formy o wyznacznikach najmniejszych, a formy takie są wspólne wielu klasom.

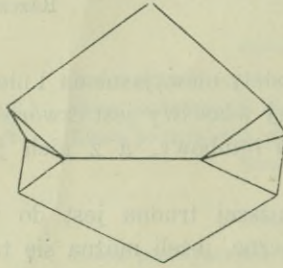
Ale nie tylko w tym względzie symetryczność geometryczna u bardzo wielu ciał krystalicznych przewyższa fizyczną.

Stopień symetryczności geometrycznej wielu kryształów przewyższa symetrię fizyczną ich substancyj przez bliźnięcość, polisyntetyczność kryształu lub też jego postać naśladowczą czyli przez mimezyę.

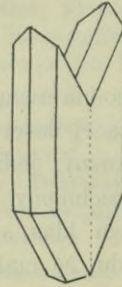
Co to jest bliźnięcość, oraz co to są kryształy polisyntetyczne czyli wielokrotnie zrosłe i kryształy mimetyczne czyli naśladowcze, wyjaśnia przykłady niżej podane.

W książce niniejszej miano na względzie tylko wielościany wypukłe, t. j. takie, których powierzchnia z prostą, przeprowadzoną dowolnie, przecina się najwyżej w dwu punktach. Jednak oprócz nich są pospolite w świecie ciał krystalicznych wielościany wklęsłe t. j. takie, których powierzchnia z dowolnie przeprowadzoną prostą przecina się w ilości punktów, większej od dwu. N. p. rys. 103

przedstawia kryształ kalcytu, mający kąty wklęsłe. Porównajmy go z rys. 1 (str. 3), który wyobraża romboedr tego minerału. Przekonamy się, że wielościan rys. 103 jest to jakoby romboedr przecięty płaszczyzną podstawową na dwie połowy i jedna z nich jest obrócona względem drugiej na kąt  $60^\circ$ . A więc wielościan rys. 103 pod względem symetryczności jest bogatszy od wielościanu rys. 1 o jedną płaszczyznę odbicia.



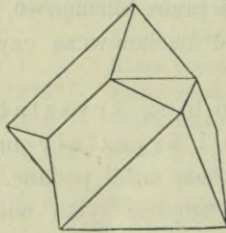
Rys. 103. Kryształ bliźniący kalcytu.



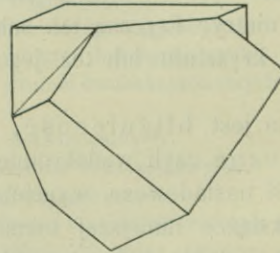
Rys. 104. Gips.

Drugi przykład kryształu z kątami wklęsłymi mamy na rys. 104. Jest to kryształ gipsu. Porównawszy go z rys. 2 (§ 2 str. 3), widzimy, że wielościan rys. 104 może być wyprowadzony z wielościanu rys. 2 przez przecięcie go płaszczyzną (100) na dwie połowy i potem przez odwrócenie jednej połowy względem drugiej o  $180^\circ$ .

Rys. 105 jest to wielościan minerału spinelu  $MgAl_2O_4$ : ośmiościan regularny (por. rys. 42 w § 18 str. 51) o dodatkowej płaszczyźnie odbicia, równoległej do jednej ze ścian ośmiościanu.



Rys. 105. Spinel.



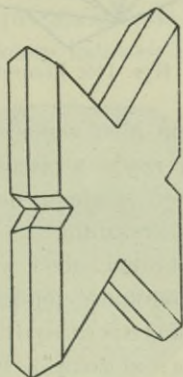
Rys. 106. Fluoryt.

Rys. 106 przedstawia kryształ minerału fluorytu  $CaF_2$ . Jest to sześciian przecięty płaszczyzną równoległą do ścian ośmiościanu i odwrócony, a więc względem płaszczyzny ośmiościanu symetryczny.

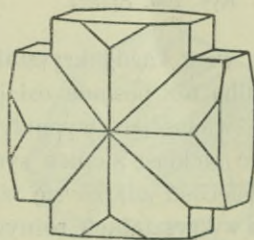


Ten więc rodzaj kryształów bliźnięcych jest jakoby powstały z jednego wielościanu wypukłego przez przecięcie go płaszczyzną i odwrócenie jednej połowy względem drugiej o kąt taki, że potem płaszczyzna przecięcia staje się płaszczyzną zwierciadlaną dla obu połów całego utworu.

Przykładem drugiego rodzaju kryształów bliźnięcych jest wielościan, przedstawiony na rys. 107. Mamy tu kryształ gipsu (ob. str. 3 rys. 2), który jest jakoby dwoma kryształami, złączonymi symetrycznie i nawzajem przerosłymi. Widoczna, że w tym razie również mamy podwyższenie symetryczności.



Rys. 107. Gips.



Rys. 108. Staurolit.

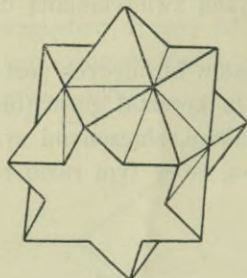
Podobnie rys. 108 wyobraża kryształ bliźnięcy minerału staurolitu (ob. str. 50 rys. 40 i 41 w § 17), który jest jakoby dwoma pojedynczymi kryształami tego minerału, przerosłymi na krzyż symetrycznie. Oczywiście, jest on o dwie płaszczyzny odbicia bogatszy od kryształu pojedynczego rys. 40.

Tak samo wielościan rys. 109 (kryształ spinelu) jest jakoby dwoma ośmiościanami przerosłymi symetrycznie tak, że kierunek, będący osią przystawania trzykrotnego, t. j. prosta, prostopadła do ściany ośmiościanu, w omawianym kryształe bliźnięcym jest osią przystawania sześciokrotnego.

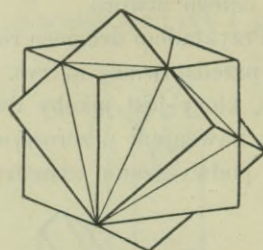
Na rys. 110 widzimy kryształ fluorytu, który łatwo zrozumiałym się staje, gdy pojmować go będziemy jako dwa sześciany, przerosłe symetrycznie względem ściany ośmiościanu.

Należy dodać, że owo przerastanie czy zrastanie się wielościanów, o którym mówimy obecnie, jest to tylko geometryczny

sposób łomaczenia wielościanów wklęsłych. W rzeczy samej niema tu żadnego zrastania się gotowych wielościanów: każdy kryształ bliźnięć odrazu powstaje jako taki.



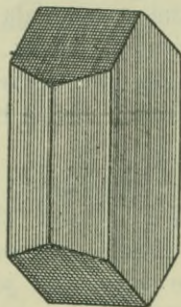
Rys. 109. Spinel.



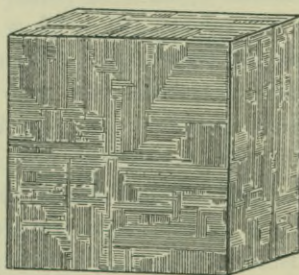
Rys. 110. Fluoryt.

Tak więc każdy kryształ bliźnięć ma albo więcej płaszczyzn odbicia, albo też posiada osi przystawiania rzędu wyższego, niż elementarny wielościan wypukły. Z tego więc względu mówimy, że bliźnięć podnosi stopień symetryczności kryształu.

Bliźnięć zdarza się nie tylko dwukrotna, ale i wielokrotna, przyczem w kryształach różnych ciał wielokrotność jej zachodzi tak daleko, że są one jak gdyby subtelną tkaniną nieraz bardzo zawilej, lecz zawsze symetrycznej budowy, tkaniną, złożoną z bardzo cieniutkich listewek lub płytek. Symetria fizyczna każdej takiej listewki bywa nieraz bardzo niska, n. p. trójskośna, a całość kształt budowy



Rys. 111. Mikroklin.



Rys. 112. Perowskit.

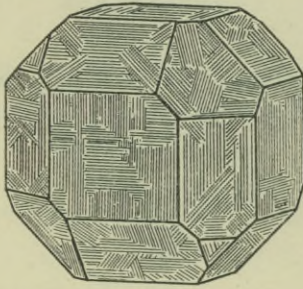
ma pokrój wysoce symetryczny, bo nieraz aż regularny. Te listewki w niektórych razach bywają tak cienkie, że dopiero zastosowanie bardzo czułych metod optycznych wykrywa je i ujawnia właściwą im symetrię. Oto kilka przykładów.



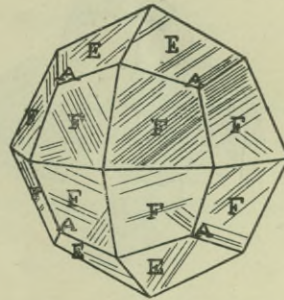
Rys. 111 przedstawia schematycznie budowę kryształów minerału mikroklinu (jest to jeden ze skaleni potasowych  $K_2Al_2Si_6O_{16}$ ). Wie'ości z pozoru jednoskośny w istocie jest splotem dwu grup trójskośnych listewek: jedna grupa listewek pomiędzy sobą równoległych przeplata drugą na krzyż prostopadle.

Drugi przykład mamy na rys. 112. Rysunek ten przedstawia sześcienn minerału perowskitu (tytaniumu wapnia  $CaTiO_3$ ). Ściany jego mają delikatną brózdkowatość, która jest wynikiem i ujawnieniem jego budowy wielokrotnie bliźnięcej z elementów jednoskośnych.

Podobnie wielokrotnie bliźnięce są kryształy minerału bora-cytu ( $Mg_7Cl_2B_{16}O_{30}$ ) rys. 113. Są one z pozoru regularne, z kształtu mogłyby być zaliczone do klasy heksakistetraedrów, jednak w istocie są one splotem listewek jednoskośnych.



Rys. 113. Bora-cyt.

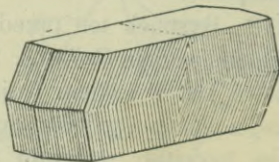


Rys. 114. Leucyt.

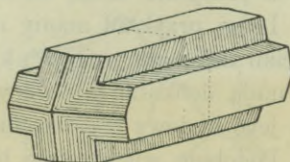
Bardzo pouczającym przykładem w tym względzie są kryształy minerału leucytu ( $K_2Al_2Si_4O_{12}$ ) rys. 114. Z pozoru są to dwudziestoczworościany deltoidowe, możliwe w kilku klasach regularnych. Gdyby jednak było tak w istocie, to trzy kąty dwuścienne, tworzące naroże *A*, byłyby równe. Tymczasem dokładne pomiary goniometryczne stwierdzają, że wielościanny leucytu właściwie są połączeniem ścian podwójnej piramidy tetragonalnej *E* i ścian podwójnej piramidy dwutetragonalnej *F*. Ale i to nie odpowiada jeszcze istocie fizycznej symetrii leucytu, bowiem kryształy jego składają się z drobnutkich elementów, których własności optyczne wykazują symetrię jednoskośną.

Nakoniec rozpatrzmy jeszcze bardzo ciekawą budowę kryształów minerału filipsytu (jest to jeden z glinokrzemianów składu  $(Ca,K_2)Al_2Si_5O_{14} \cdot 5H_2O$ ). Cieniutkie jego listewki jednoskośne tworzą

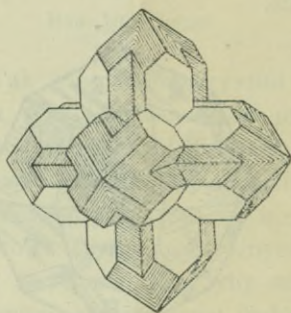
zespół z pozoru rombów rys. 115. Rys. 116 przedstawia drugi, tetragonalny stopień symetrii kształtu tych kryształów, gdzie dwa wielościany rys. 115 są na krzyż przerosłe. Wreszcie trzy wielościany rys. 116 dają zespół symetrii klasy czterdziestościanów



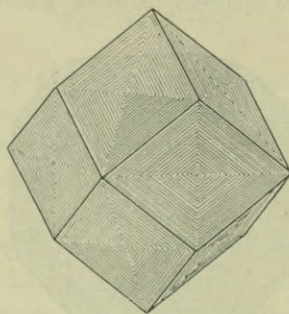
Rys. 115.



Rys. 116.



Rys. 117.



Rys. 118.

Rys. 115 – 118. Kryształy filipsytu.

rys. 117. Na niektórych kryształach filipsytu kąty wklęsłe są zupełnie zarosłe (rys. 118) tak, że powstaje całkowite podobieństwo do dwunastościanu rombów, formy właściwej klasom regularnym.

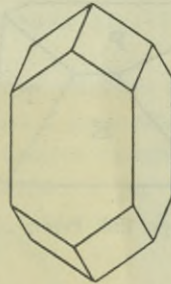
Przykłady przytoczone dają pojęcie i o polisyntetyczności i o mizemii czyli o postaciach naśladowczych zarazem. Ta naśladowczość form wyższej symetrii jest bardzo rozpowszechniona w świecie ciał krystalicznych. N. p. na rys. 119 widzimy rombów kryształ minerału desminu. Jest to glinokrzemian składu  $CaAl_2Si_6O_{16} \cdot 6H_2O$ . Rys. 120 przedstawia wielościan minerału cyrkonu  $ZrSiO_4$  tetragonalny, a na rys. 121 mamy tetragonalny jodek czwórmetyloamony  $N(CH_3)_4J$ , łudząco podobny do regularnego dwunastościanu rombów (por. rys. 118) właściwego granatom i wielu innym ciałom klas regularnych.



To samo widzimy na rys. 122, który przedstawia jednoskośny kryształ adularu (jeden ze skałeni potasowych  $K_2Al_2Si_6O_{16}$ ) na rys. 123, wyobrażającym jednoskośny penin (jeden z chlorytów



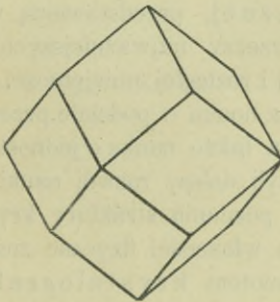
Rys. 119. Desmin.



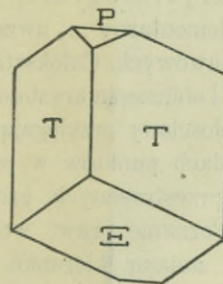
Rys. 120. Cyrkon.

$3H_4Mg_3Si_2O_9 \cdot H_4Mg_2Al_2SiO_9$ ) i na rys. 124, podającym kształt kryształów trygonalnego korundu  $Al_2O_3$ .

A więc ustosunkowanie ścian i wielkości kątów dwuściennych wielu kryształów tylko nieznacznie różni się od pokroju i kątów ciał wyższego typu symetrycznego. Będąca w mowie obecnie na-



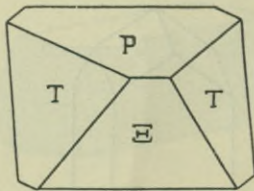
Rys. 121. Dwunastościan rombowy.



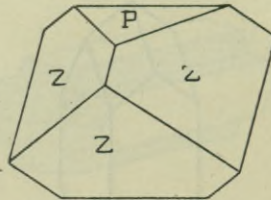
Rys. 122. Adular.

śladowczość istnieje nie tylko u kryształów polisyntetycznych, ale i u takich, których symetria geometryczna odpowiada ich symetryczności fizycznej, np. cyrkonu, korundu lub adularu. Wobec tych faktów rzeczy można, że gdy stopień symetryczności fizycznej jest indywidualną własnością każdej substancji skryształowanej w pe-

wnych granicach temperatury i ciśnienia, to ciała stałemu wogóle właściwa jest dążność do osiągnięcia najwyższej symetryczności kształtu.



Rys. 123. Penin.



Rys. 124. Korund.

Kwestye te poruszamy na tem miejscu tylko ogólnikowo, dla zakończenia obrazu krytalografii geometrycznej. Stanowią one teren badań przyszłości, dotyczą bowiem najzawilszych i najtrudniejszych spraw: zależności pomiędzy składem chemicznym substancji i jej symetrią, oraz stosunku cieczy i ciała stałego w chwili przejścia ich wzajemnego z jednego stanu w drugi.

Na tem zakończymy książkę niniejszą. Zawartość jej stanowi treść krytalografii geometrycznej, przedstawioną w sposób elementarny z uwzględnieniem rzeczy najważniejszych tylko i podstawowych. Całokształt tej pięknej i rozległej umiejętności, to pomiary i obliczenia krytalograficzne, oraz nauka o podziale przestrzeni na wielościany przylegające do siebie, a także nauka o jednostajnych rozkładach punktów w przestrzeni, czyli dalszy rozwój nauki o sieciach przestrzennych, prowadzący do poznania struktury kryształu.

Poznanie praw, według których własności fizyczne zmieniają się ze zmianą kierunku, jest przedmiotem krytalografii fizycznej.

Rzeczą krytalografii opisowej jest szczegółowe wyrowadzenie wszystkich form każdej klasy, wyjaśnienie w niej kryształów bliźnięcych, wielokrotnych i naśladowczych, oraz wskazanie sposobów krytalograficznego opisu ciał.

Wielki dział zjawisk i kwestyj, dotyczących związku pomiędzy krytalograficznymi i chemicznymi własnościami substancji, a także spraw rozpuszczania się i przyrostu ścian kryształu, wzajemnego



stosunku ścian pod względem ich wielkości, zjawiania się na kryształach ścian tych czy owych, zjawisko krystalizowania się substancji tego samego składu chemicznego w różnych klasach krystalograficznych, oraz podobieństwa i różnice kryształów substancji chemicznie sobie pokrewnych it. p., jest to zakres krystalografii fizyko-chemicznej.

Że jednak wszystkie te sprawy są niezrozumiałe bez dokładnego poznania pierwiastkowych wiadomości z geometrii kryształu, przeto autor streścił je jak najkrócej w książce niniejszej, usunął z niej wszystko, co tylko bez szkody całości i jej zrozumienia usunąć się dało i opatrzył nazwą: „Podstawy krystalografii“.



## SKOROWIDZ.

- Adular 131, 153.  
Aksynit 43, 125, 130.  
Albit 69, 130.  
Ałun 4, 78, 126, 135.  
Amfibole 131.  
Analogiczne punkty 5.  
Anizotropowe ciała 4.  
Antracen 131.  
Apatyt 21, 78, 126, 133, 134.  
Aragonit 79, 125, 132.  
Arsenawy bezwodnik 131,  
Arsenian sodowostrontowy 135.  
Arszenik 131.  
Arytmiczny wyraz prawa pasów 39.  
Asymetryczne kryształy 98.  
Azotan baru 135.  
Azotan potasu 132.  
Azotan srebra 132.
- Benzol 132.  
Bertholleta sól 131.  
Beryl 135.  
Bezpostaciowe ciała 1.  
Bezwodnik arsenawy 131.  
Bliźniętość 147.  
Boraeyt 135, 151.  
Boraks 131.  
Borowy kwas 130.  
Bromian sodowy 128, 135.
- Całych wyznaczników prawo 20, 39.  
Chalkopiryt 133.  
Chloran potasu 131.  
Chloran sodu 135.
- Chlorek amonowy 135.  
Chlorek barowy 131.  
Chlorek potasowy 135.  
Ciała anizotropowe 4.  
Ciała bezpostaciowe 1.  
Ciała izotropowe 2.  
Ciała jednorodne 5.  
Ciała krystaliczne 2.  
Ciała równokierunkowe 2.  
Ciała różnokierunkowe 4.  
Ciepne przewodnictwo 140.  
Ciepła rozszerzalność 142.  
Cukier ołowiany 131.  
Cyrkon 153, 152.  
Cytrynowy kwas 132.  
Czworościan 11.  
Czworościan jednostkowy 28.
- Dedukcyja 40.  
Definiacyja kryształu 2, 43, 77.  
Definiacyja symetryczności 80.  
Desmin 152.  
Dolomit 134.  
Drugie prawo 46.  
Drugie przekształcenie 83.  
Dwojaki 148.  
Dwukołowy goniometr 59.  
Dwunastościan rombowy 152.  
Dwuścian podstawowy 112, 121, 123.  
Dwutlenek cyny 133.  
Dyoptaz 134.  
Dyament 135.
- Elementy symetrii 118.



- Fenakit 134.  
 Figury wytrawione 4.  
 Filipasyt 151.  
 Fluorek srebra 133.  
 Fluoryt 136, 148, 149.  
 Forma krystalograficzna pojedyncza 121.  
 Forma ogólna 122, 136.  
 Fosforan amonowomagnezowy 132.  
  
 Galenit 3, 14, 126.  
 Gips 3, 121, 131, 148, 149.  
 Glauberska sól 131.  
 Goniometr dwukołowy 59.  
 Goniometr jednokołowy 58.  
 Goniometr przykładany 57.  
 Goniometr tedolitowy 59.  
 Goniometry refleksyjne 57.  
 Gorzka sól 132.  
 Granaty 152.  
 Grenokit 134.  
 Grynszpan 131.  
  
 Heksagonalne kryształy 133, 145.  
 Hematyt 135.  
 Hemisymetria niezupełna 99.  
 Hemisymetrii niezupełnej rodzaje 101.  
 Hemisymetria zupełna 97.  
 Holosymetria 96.  
  
 Inwersya 84.  
 Inwersyi płaszczyzn kąt 107.  
 Izotropowe ciała 2.  
 Izometryczność 125.  
  
 Jednokołowy goniometr 58.  
 Jednorodne ciała 5.  
 Jednorodności prawo 2.  
 Jednostkowy czworościan 28.  
 Jednostkowa płaszczyzna 28.  
 Jednoskośne kryształy 130, 145.  
 Jednoskośnych słupów klasa 119.  
 Jodek czwórmetyloamonowy 152.  
 Jodek cynawy 135.  
 Jodek srebra 134.  
  
 Kaleyty 3, 78, 126, 133, 134, 148.  
 Kalejdoskopowe powtórzenie 85.  
 Kasyteryt 133.  
 Kąt obrotu osi przystawiania 87.  
 Kąt płaszczyzn inwersyi 107.  
 Kąt płaszczyzn obrotu 99.  
 Kąt płaszczyzn zwierciadlanych 89.  
 Kątów stałych prawo 47, 49.  
 Kierunek przyrostu ściany 48, 51.  
 Kierunki równe 74.  
 Kierunków równych prawo 74.  
 Klasa słupów jednoskośnych 119.  
 Klasy krystalograficzne 130, 146.  
 Koncentracyjny prąd 46.  
 Korund 135, 153.  
 Krawędzi osiowe 25.  
 Kryształiczne ciała 2.  
 Kryształiczne spękania 3.  
 Krytalograficzna forma pojedyncza 121.  
 Kryształiczna forma ogólna 122, 136.  
 Krytalograficzne znaczenie osi przystawiania i płaszczyzn zwierciadlanych 112.  
 Kryształ 43.  
 Kryształy 1.  
 Kryształy asymetryczne 98.  
 Kryształu definicya 2, 43, 77.  
 Kupryt 135.  
 Kwas borowy 130.  
 Kwas cytrynowy 132.  
 Kwas pikrynowy 132.  
 Kwas salicylowy 131.  
 Kwas szczawiowy 131.  
 Kwas winowy 131.  
 Kwaśny prawy winian strontu 98.  
 Kwarc 49, 76, 126, 133, 134.  
  
 Lapis 132.  
 Leucyt 151.  
 Lód 1, 134.  
  
 Łupliwość 2, 137.  
 Łyszczyki 131.  
  
 Magnetyt 51, 128, 136.  
 Margarycian wapnia 110, 133.

- Mikroklin 69, 151.  
 Mimetyczne kryształy 147.  
 Molibdenian ołowiu 133.  
 Muskowit 76, 78, 131.  
  
 Nadjodan sodowy 134.  
 Nadmanganian potasowy 132.  
 Naftalin 131.  
 Nefeliny 134.  
 Niezupelna hemisymetria 99.  
 Niezupelnej hemisymetrii rodzaje 101.  
  
 Obrót 83.  
 Octan miedziowy 131.  
 Octan ołowiaowy 131.  
 Octan sodowy 131.  
 Octanoazotan strontu 130.  
 Odbicie 82.  
 Odcinków wymiernych prawo 17.  
 Ogólna postać 122, 136.  
 Okres osi przystawiania 103, 105.  
 Optyczne własności 141.  
 Ortoklaz 124, 131.  
 Oryentowanie kryształu 67.  
 Osiowe krawędzi 25.  
 Osiowe płaszczyzny 25.  
 Osi przystawiania okres 103, 105.  
 Osi przystawiania rząd 103, 105.  
 Oś polarna 124.  
 Oś pasa 13.  
 Oś przystawiania 102, 105.  
 Oś przystawiania jako krawędź 113.  
 Ośmiościan umiarowy 51.  
 Oznaczanie typów symetryczności 93.  
  
 Pas 13.  
 Pasa oś 13.  
 Pasów dedukcja 40.  
 Pasów prawo 14, 16  
 Pasów równanie 36.  
 Pasów i ścian związek 21.  
 Pasy ścian 21.  
 Penin 153.  
 Perowskit 151.  
 Pierwsze prawo 49.  
 Pierwsze przekształcenie 82.  
 Piezoelektryczność 143.  
  
 Pikrynowy kwas 132.  
 Pirochromian potasu 2.  
 Piroelektryczność 143.  
 Pirokseny 131.  
 Piryt 128, 135.  
 Platynocyanek magnezu 77, 126, 133.  
 Płaszczyzn inwersji kąt 107,  
 Płaszczyzn obrotu kąt 99.  
 Płaszczyzna jednostkowa 28.  
 Płaszczyzna odbicia jako ściana kry-  
 ształu 113.  
 Płaszczyzny osiowe 25.  
 Płaszczyzna projekcji 60, 65.  
 Płaszczyzna retikularna 6.  
 Płaszczyzna siatkowa 6.  
 Płaska sieć 6.  
 Płaszczyzna zwierciadlana 79.  
 Płaszczyzny obrotu jako ściany kry-  
 ształu 116.  
 Początek 25.  
 Podstawowy dwuścian 112, 121.  
 Podwójny sfenoid tetragonalny 111.  
 Pojedyncza forma krystalograficzna 121.  
 Polarne osi 124.  
 Polisyntetyczność 147.  
 Postać ogólna 122, 136.  
 Powtórzenie kalejdoskopowe 85.  
 Powtórzenie symetryczne 80.  
 Prawo drugie 46.  
 Prawo jednorodności 2.  
 Prawo kątów stałych 47, 49.  
 Prawo kierunków równych 74.  
 Prawo odcinków wymiernych 17.  
 Prawo pasów 14, 16.  
 Prawo pierwsze 49.  
 Prawo symetryczności 76.  
 Prawo wyznaczników całych 20, 39.  
 Prąd koncentracyjny 46.  
 Projekcja stereograficzna 60.  
 Przekształcenie drugie 83.  
 Przekształcenie pierwsze 82.  
 Przekształcenie symetryczne 80.  
 Przekształcenie trzecie 94.  
 Przestrzenna sieć 5, 6, 44.  
 Przewodnictwo ciepła 140.  
 Przykładany goniometr 57.  
 Przyrost ściany 48.



- Przyrost kryształów 50.  
Przystawania oś 102 105.  
Przystawania osi okres 103, 105.  
Przystawania osi rzęd 103, 105.  
Punkty analogiczne 5.
- Refleksyjne goniometry 57.  
Regularne kryształy 135, 145.  
Retykularna płaszczyzna 6.  
Rezorcyna 132.  
Rodzaje hemisymetrii niezupełnej 100.  
Rodzaje hemisymetrii zupełnej 97.  
Rodzaje symetryczności 95.  
Romboedr 3, 79, 148.  
Rombowe kryształy 132, 145.  
Rozszerzalność cieplna 142.  
Roztwór nasycony 2.  
Roztwór przesycony 2.  
Równanie pasów 36.  
Równe kierunki 74.  
Równokierunkowe ciała 2.  
Równych kierunków prawo 74.  
Rzęd osi przystawania 103, 105.  
Rzut stereograficzny 60.
- Saletra 132.  
Salicylowy kwas 131.  
Sanidyn 131.  
Schlippego sól 135.  
Sfaleryt 77, 127, 135.  
Sfenoid 111, 121.  
Siarczan magnezu 132.  
Siarczan miedzi 130.  
Siarczan niklu 133.  
Siarczan sodu 131.  
Siarczan wapnia 131.  
Siarczan żelazawy 131.  
Siarka 131, 132.  
Siatka stereograficzna 63.  
Siatkowa płaszczyzna 6.  
Sieć płaska 6.  
Sieć przestrzenna 5, 6, 44.  
Skalenie 22, 55, 69, 121, 131.  
Skęcanie optyczne 142.  
Słup 121.  
Słupów jednoskośnych klasa 159.
- Soda 131.  
Sól Bertholleta 131.  
Sól glauberska 131.  
Sól gorzka 132.  
Sól kamienna 3, 78, 125, 128, 136.  
Sól Schlippego 135.  
Spinel 148, 149.  
Spękania krystaliczne 3.  
Spójność 3.  
Sprężystość 138.  
Staurolit 50, 125, 132, 149.  
Stałych kątów prawo 47, 49.  
Stereograficzna projekcja 60.  
Stereograficzna siatka 63.  
Stereograficzny rzut 60.  
Sulfoantymonian sodu 135.  
Sylwin 128.  
Symetryczne powtórzenie 80.  
Symetryczne przekształcenie 80.  
Symetrycznie leżące utwory 79.  
Symetrycznie równe utwory 79.  
Symetryczność sieci płaskiej 89.  
Symetryczności definicya 80.  
Symetryczności prawo 76.  
Szczawiowy kwas 131.  
Szelit 133.  
Ścian i pasów związek 21.  
Ściany znak 27.
- Teodolitowy goniometr 59.  
Tetartosymetria 108.  
Tetragonalne kryształy 132, 145.  
Tetrationian potasu 131.  
Tetragonalny sfenoid 111.  
Tiosiarczan wapniowy 130.  
Topaz 132.  
Trójskośne kryształy 129, 145.  
Trygonalne kryształy 133, 145.  
Trzecie prawo 76.  
Trzecie przekształcenie 84.  
Trzydzieści dwa rodzaje 109.  
Trzy przekształcenia 81.  
Turmaliny 134.  
Typów symetryczności oznaczanie 93.  
Typy symetryczności 91.  
Tytanian wapnia 151.

50.00

160

Umiarowy ośmiościan 51.  
 Utwory symetrycznie leżące 79.  
 Utwory symetrycznie równe 79.  
 Węglan sodu 131.  
 Węzły 6.  
 Winian antymoniowobarowy 134.  
 Winian strontu 98, 130.  
 Winiany 131.  
 Witryol żelaza 131.  
 Wklęsłe wielościany 147.  
 Woda 1.  
 Wolframian wapnia 133.  
 Wulfenit 133.  
 Wymierne odemki krawędzi 39.  
 Wymiernych odcinków prawo 17.  
 Wyprowadzanie form 117.

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

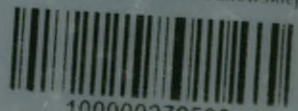


II-341317

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Znaczenie krystalograficzne płaszczyzn  
 zwierciadlanych i osi przystawia-  
 nia 112.  
 Znak ściany 27.  
 Związek kątów i wyznaczników 52.  
 Związek pasów i ścian 21.  
 Zwierciadlana płaszczyzna 79.  
 Zupełna hemisymetria 97.  
 Żelazocyjanek potasu 131.  
 Żelazicyjanek potasu 131.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000278502











Wstawy i dostawy kątów od 0° do 90° co 1/2°.

$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\beta$
0°	0·000	1·000	90°	23°	0·391	0·920	67°
	0·009	1·000			0·399	0·917	
1°	0·017	1·000	89°	24°	0·407	0·913	66°
	0·026	1·000			0·415	0·910	
2°	0·035	0·999	88°	25°	0·423	0·906	65°
	0·044	0·999			0·430	0·902	
3°	0·052	0·999	87°	26°	0·438	0·899	64°
	0·061	0·998			0·446	0·895	
4°	0·070	0·997	86°	27°	0·454	0·891	63°
	0·078	0·997			0·462	0·887	
5°	0·087	0·996	85°	28°	0·469	0·883	62°
	0·096	0·995			0·477	0·879	
6°	0·104	0·994	84°	29°	0·485	0·875	61°
	0·113	0·993			0·492	0·870	
7°	0·122	0·992	83°	30°	0·500	0·866	60°
	0·130	0·991			0·507	0·862	
8°	0·139	0·990	82°	31°	0·515	0·857	59°
	0·148	0·989			0·522	0·853	
9°	0·156	0·988	81°	32°	0·530	0·848	58°
	0·165	0·986			0·537	0·843	
10°	0·174	0·985	80°	33°	0·545	0·839	57°
	0·182	0·983			0·552	0·834	
11°	0·191	0·982	79°	34°	0·559	0·829	56°
	0·199	0·980			0·566	0·824	
12°	0·208	0·978	78°	35°	0·573	0·819	55°
	0·216	0·976			0·581	0·814	
13°	0·225	0·974	77°	36°	0·588	0·809	54°
	0·233	0·972			0·595	0·804	
14°	0·242	0·970	76°	37°	0·602	0·799	53°
	0·250	0·968			0·609	0·793	
15°	0·259	0·966	75°	38°	0·616	0·788	52°
	0·267	0·964			0·622	0·783	
16°	0·276	0·961	74°	39°	0·629	0·777	51°
	0·284	0·959			0·636	0·772	
17°	0·292	0·956	73°	40°	0·643	0·766	50°
	0·301	0·954			0·649	0·760	
18°	0·309	0·951	72°	41°	0·656	0·755	49°
	0·317	0·948			0·663	0·749	
19°	0·325	0·945	71°	42°	0·669	0·743	48°
	0·334	0·943			0·675	0·737	
20°	0·342	0·940	70°	43°	0·682	0·731	47°
	0·350	0·937			0·688	0·725	
21°	0·358	0·933	69°	44°	0·695	0·719	46°
	0·366	0·930			0·701	0·713	
22°	0·375	0·927	68°	45°	0·707	0·707	45°
	0·383	0·924			0·713	0·701	
$\alpha$	$\cos \beta$	$\sin \beta$	$\beta$	$\alpha$	$\cos \beta$	$\sin \beta$	$\beta$





Logarytmy czterocyfrowe liczb od 100 do 609.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6991	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9



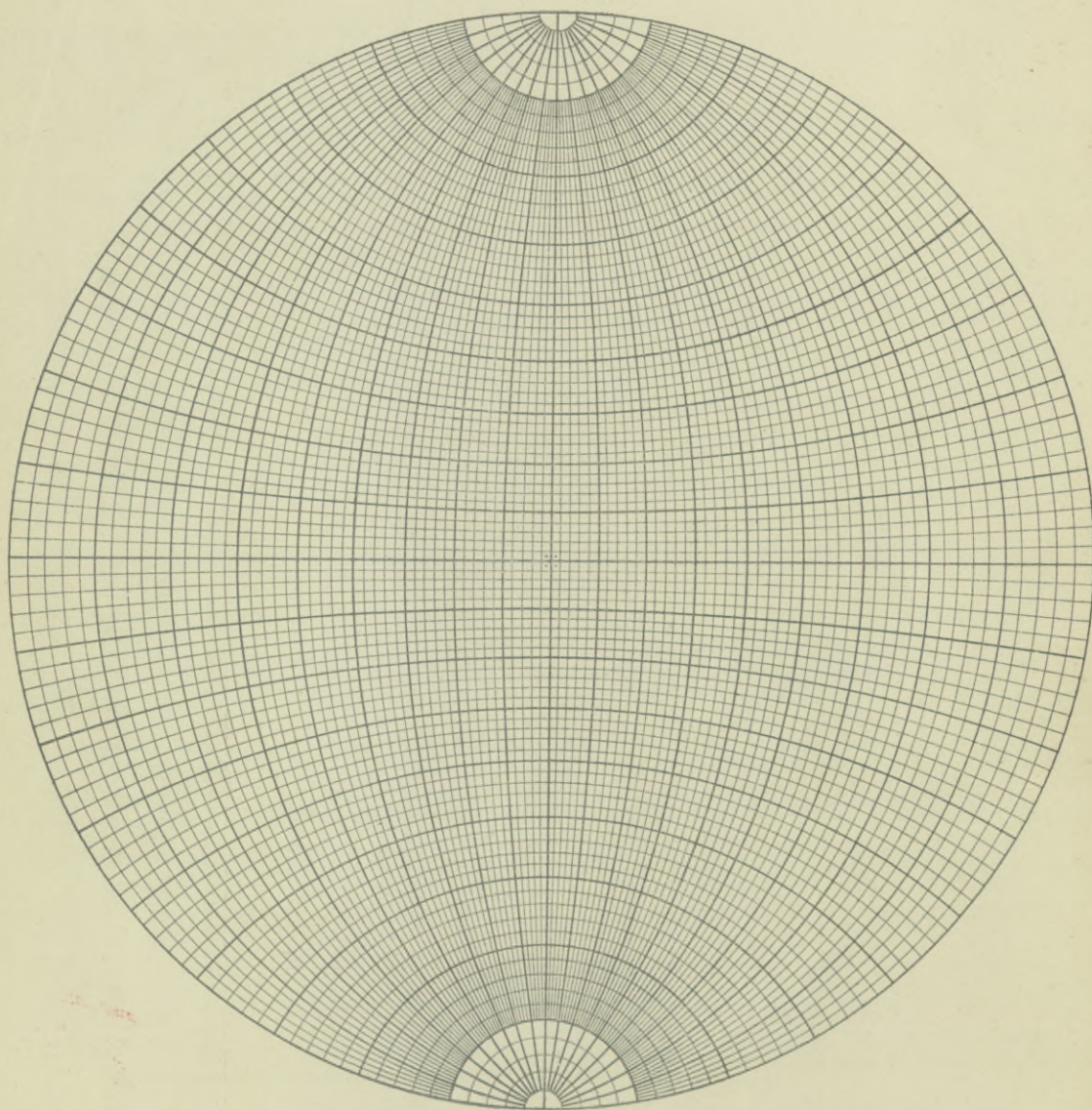
Logarytmy czterocyfrowe liczb od 609 do 1109.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039	0	1	1	2	2	3	3	3	4
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082	0	1	1	2	2	3	3	3	4
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	0	1	1	2	2	3	3	3	4
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166	0	1	1	2	2	3	3	3	4
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	0	1	1	2	2	2	3	3	4
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249	0	1	1	2	2	2	3	3	4
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290	0	1	1	2	2	2	3	3	4
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	0	1	1	2	2	2	3	3	4
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370	0	1	1	2	2	2	3	3	4
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	0	1	1	2	2	2	3	3	4
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449	0	1	1	2	2	2	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9





Siatka stereograficzna G. Wulffa zmniejszona z 20 c. do 15 c. średnicy.



Z. Weyberg. Podstawy krystalografii. Tablica III.



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-341317

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000278502