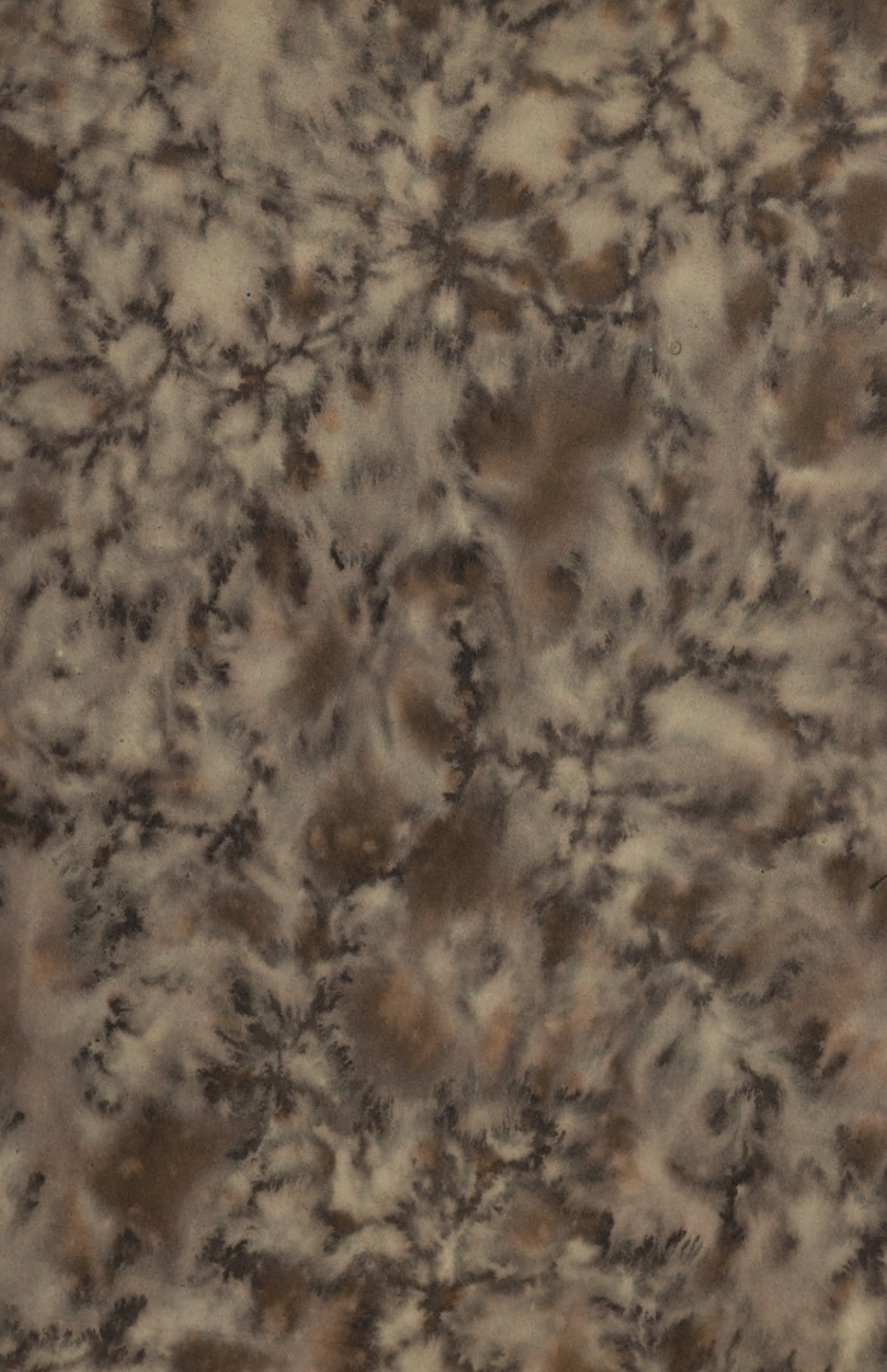


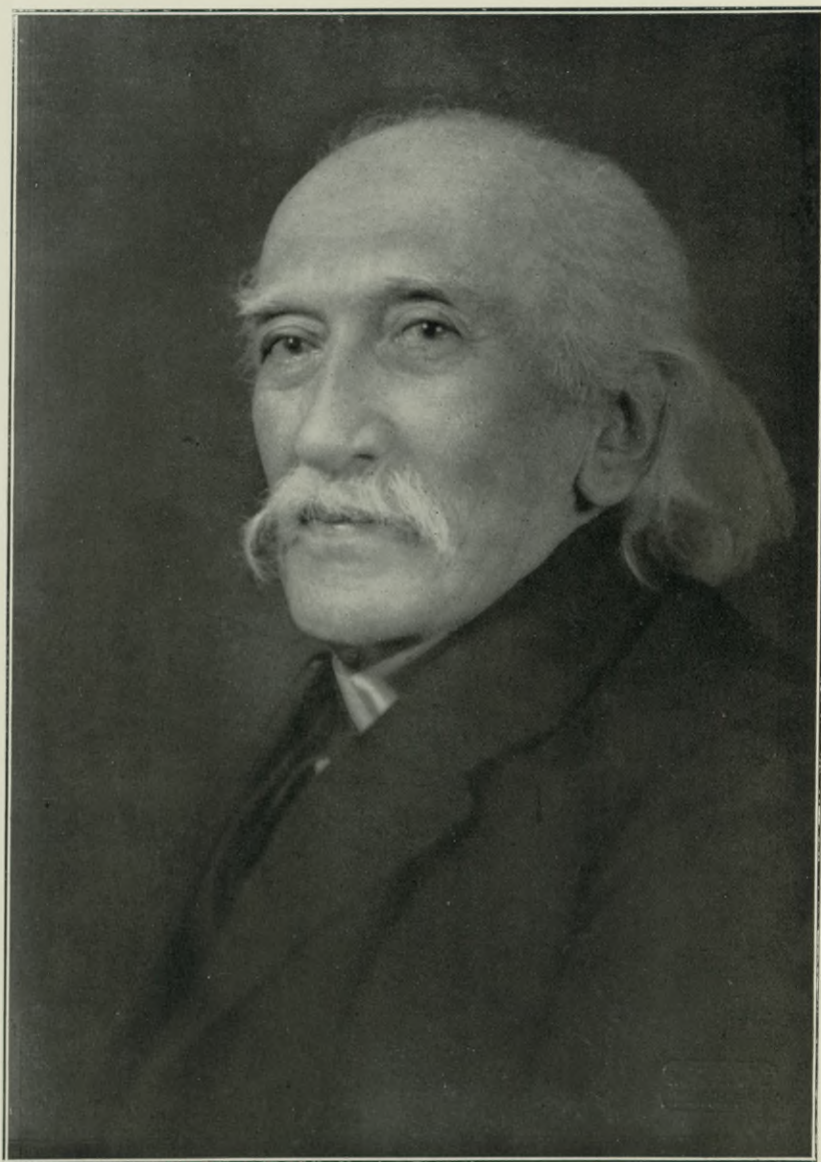
Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000233976



KSIEGA PAMIĄTKOWA



Dr. Maximilian Fuchs

KSIĘGA PAMIĄTKOWA

KU UCZCZENIU ZASŁUG
DOKTORA HONORIS CAUSA

PROFESORA

MAKSYMILJANA THULLIEGO

WYDANA STARANIEM WYDZIAŁU INŻYNIERJI
LĄDOWEJ I WODNEJ POLITECHNIKI LWOWSKIEJ
I POLSKIEGO TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO



L W Ó W

PIERWSZA ZWIĄZKOWA DRUKARNIA WE LWOWIE, UL. LINDEGO 4.

MCMXXXII



34908

KOMITET REDAKCYJNY:

PRZEWODNICZĄCY:

Prof. EMIL BRATRO

CZŁONKOWIE:

Prof. Dr. STEFAN BRYŁA

Prof. Dr. STANISŁAW BRZozowski

Inż. LEON GROCH

Prof. Dr. MAKSYMILJAN T. HUBER

Inż. GUSTAW JAGIEŁŁO

Prof. Dr. ADAM KURYŁŁO

Inż. Dr. ALEKSANDER PAREŃSKI

D-295/67

Dla wielkiego Męza nauki, jakim jest sędziwy Profesor Maksymiljan Thullie, niema godniejszej formy uczczenia nadzwyczajnych Jego zasług, położonych dla rozwoju nauki, — nad hołd Jego uczniów, kolegów, przyjaciół — mężów nauki, uwieczniony w Księdze Pamiątkowej ku czci Jego Imienia.

Godzi się zaznaczyć, iż realizacja szczytnej myśli takiego uczczenia Jego niespożytych zasług, przypada na ten okres życia, w którym Dostojny Profesor, w pełni jeszcze sił i zapału w pracy naukowej, rozpoczął już 80-ty rok życia, nie szczędząc nadal Swej zewszechmiar ofiarnej pracy w szlachetnem oddaniu się społeczeństwu.

Zarazem mija też 54 lat od Jego pierwszego występu na polu naukowem, na którym w pełni triumfu dla Siebie, osiągnął tak wielkie rezultaty dla polskiej nauki technicznej.

Równocześnie upływa długi okres Jego pełnej zasług i poświęcenia działalności profesorskiej w Politechnice Lwowskiej, w tej najstarszej uczelni akademickiej polskiej tego rodzaju, w której przed 42 laty jako Profesor rozpoczął kształcenie inżynierów polskich, objąwszy Katedrę Budowy Mostów w Swoje mistrzowskie włodarzenie.

Przebiegając myślą Jego działalność naukową, jesteśmy pełni podziwu dla niezwyklej rozpiętości jej zasięgu. Wielce owocna twórczość Jego ducha, dominowała w nader licznych działach zagadnień technicznych i konstrukcyjnych ukochanych przez Niego przedmiotów: Wytrzymałości Materiałów i Budowy Mostów.

Poza niezrównaną Statyką Budowli obdarował naukę polską świetnymi dziełami z Teorii Mostów i ich konstrukcyjnej bu-

dowy — we wszystkich działach tego rodzaju ustrojów, nie wyłączając mostów żelazno-betonowych, dla których stworzył doskonałą teorię, opartą na oryginalnych poglądach.

Prawdziwie wielki podziw wzbudza u uczonych i fachowców Jego wszechstronność, ścisłość myślenia, daleko idąca zdolność przewidywania, lotność myśli i doskonała analiza.

Epokowe Swe myśli o liniach wpływowych wprowadził do nauki mostów, wyprzedzając pod tym względem najwybitniejsze powagi ówczesnego świata naukowego. Jak chlebem powszechnym karmił młode pokolenia inżynierskie temi problemami, dając ze Swej skarbnicy myślowej najwłaściwszą metodę badania zespołów mostowych pod wpływem obciążeń ruchomych. Dzisiaj linje wpływowe zespoliły się tak z naturą inżyniera, iż wprost trudno się bez nich obejść.

Poza specjalnością mostową otaczał On wyjątkową opieką problemy należące do zagadnień ustrojów żelazno-betonowych, biorąc je pod Swoje mistrzowskie pióro, które tak wiele zdziałało w tej dziedzinie dla rozwoju dzisiejszej nauki technicznej.

Pracami Swemi zdobył On jedno z pierwszych miejsc w świecie naukowym, okrywając Siebie i naukę polską sławą światową, za co należy Mu się hołd imieniem Politechniki Lwowskiej i Polskiego Towarzystwa Politechnicznego.

Wielki Uczony znachodził też czas na pracę obywatelską, odgrywając również i w tej dziedzinie życia społecznego wybitną rolę, czego najlepszym wyrazem są rozliczne zaszczyty i uznania, jakie otrzymywał za Swoją niestrudzoną działalność. Długoletnie piastowanie mandatu Senatora Rzeczypospolitej stanowi dalszy przyczynek Jego zasług w tej dziedzinie.

Poza pracami naukowymi oddał On Politechnice Lwowskiej niespożyte zasługi przede wszystkim przez wychowanie całego szeregu pokoleń inżynierskich, z pośród których wielki zastęp Jego uczniów pracuje naukowo, a wielu z nich zajmuje katedry w polskich uczelniach akademickich. Te rezultaty Jego pracy wychowawczej stanowią w historii Wydziału Inżynierji Lądowej i Wodnej Politechniki Lwowskiej najchlubniejszą kartę.

Ogrom zasług Czcigodnego Jubilata w odniesieniu do polskiej nauki technicznej musiał znaleźć oddźwięk u Jego uczniów, którzy rozprószeni nie tylko na ziemiach polskich, ale również zagranicą, pośpieszyli na pierwszy odzew celem uczczenia swego duchowego Przewodnika i Nestora inżynierów polskich.

Jest rzeczą łatwo zrozumiałą, że myśl uczczenia Jubilata zakiełkować musiała tam, gdzie było główne pole naukowej pracy Jego całego życia, zatem we Lwowie, gdzie też zgromadzona jest największa liczba Jego uczniów. Prawie równocześnie w dwóch ośrodkach, jednoczących naukowy i zawodowy świat techniczny, a więc na Wydziale Inżynierji Lądowej i Wodnej Politechniki Lwowskiej, oraz w Polskiem Towarzystwie Politechnicznem we Lwowie, powstała w r. 1929 myśl dania godnego wyrazu tej czci, jaką ku Niemu żyjemy.

Wyłoniony przez obie te organizacje wspólny Komitet, w skład którego weszli: jako przewodniczący Prof. Emil Bratro, oraz członkowie: Prof. Dr. Stefan Bryła, Prof. Dr. Stanisław Brzozowski, Inż. Leon Groch, Prof. Dr. Maksymiljan Huber, Inż. Gustaw Jagiełło, Prof. Dr. Adam Kuryłło i Inż. Dr. Aleksander Pareński, uznał za najodpowiedniejszy sposób uczczenia wydanie Księgi Pamiątkowej, która to forma nie tylko niewątpliwie najbardziej odpowie intencjom Jubilata, ale nadto przyniesie technice polskiej pożytek i pozostanie jako dokument polskiej pracy naukowej. Redakcję niniejszego wydawnictwa objął Prof. Dr. Stanisław Brzozowski, który sprawował ją przez cały okres prac Komitetu, przy pomocy w okresach początkowych Inż. Dra Aleksandra Pareńskiego.

Trudności materialne jakie Komitet miał do pokonania, szczególnie w okresie obecnej depresji gospodarczej, pokonane zostały dzięki subwencjom Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Ministerstwa Robót Publicznych, oraz Ministerstwa Komunikacji, które pośpieszyły Komitetowi z pomocą, dając w ten sposób także wyraz uznania dla Jubilata. Za umożliwienie wydania niniejszego dzieła, składa Komitet Wysokim Władzom gorące podziękowanie.

Wypuszczając w świat niniejszą Księgę ku chwale Jubilata i pożytkowi ogółu technicznego, pragniemy wyrazić życzenie, by Nestor polskiej nauki technicznej widział w niej choć częściową spłatę tego długu, jaki w stosunku do Jego Osoby zaciągnęło kilka pokoleń inżynierów polskich.

We Lwowie, w kwietniu 1932 r.

PROFESOR INŻ. DR. MAKSYMILJAN THULLIE urodził się we Lwowie 16 stycznia 1853 r. Naukę rozpoczął w szkole ludowej w Monasterzyskach, we Lwowie zaś ukończył klasę czwartą. Uczęszczał potem do gimnazjum Franciszka Józefa we Lwowie, jedyne podówczas gimnazjum polskiego w b. Galicji i złożył egzamin dojrzałości z wyszczególnieniem w roku 1871. Następnie studjował jeden rok w Akademji Technicznej we Lwowie, a w następnych czterech latach uczęszczał na Politechnikę w Wiedniu, którą ukończył w 1876 r.

W r. 1876 wstąpił do służby kolei lwowsko - czerniowiecko-jasskiej jako techniczny dietarjusz. Przydzielony do sekcji konserwacji we Lwowie, a po jej rozwiązaniu do sekcji konserwacji w Stanisławowie, w rok później przeniesiony został do budowy mostu w Paskanach w Rumunji na rzece Serecie w charakterze inspicjenta budowy.

Dnia 8 czerwca 1878 złożył egzamin ścisły na Wydziale Inżynierji Politechniki Wiedeńskiej i uzyskał godność inżyniera dyplomowanego, poczem zamianowany został inżynierem elewem 2 klasy i przydzielony do biura konserwacji kolei w Dyrekcji we Lwowie, otrzymując referat mostowy i wszelkich statycznych obliczeń.

Dnia 15 grudnia 1878 r. habilitował się jako docent prywatny teorii mostów w Szkole Politechnicznej we Lwowie. W następnym roku poślubił żonę swą ś. p. Józefę z Passakasów. W niedługim czasie, bo w jesieni 1880, zlecono Mu wykłady mechaniki budowniczej w tej szkole. Od tej chwili datuje się Jego ruchliwa, a tak wybitna i wszechstronna działalność naukowa, pedagogiczna i społeczna. W 1882 r. rozszerza swą habilitację na statykę wykreślną.

W roku 1889 został mianowany bezpłatnym profesorem statyki budowli i budowy mostów, a po wystąpieniu ze służby kolejowej w rok później profesorem nadzwyczajnym. W pięć lat później, dnia 1 stycznia 1894, został profesorem zwyczajnym i w tymże roku wybrano Go rektorem Szkoły Politechnicznej. W r. 1902 uzyskał godność doktora nauk technicznych na Politechnice w Pradze. Drugi raz był rektorem w roku naukowym 1910/11, a także z początkiem wojny w r. 1914

i podczas całej inwazji rosyjskiej, aż do wyboru rektora w jesieni 1915, prowadził rektorat szkoły jako zastępca. Wielokrotnie był dziekanem Wydziału Inżynierji i tak: przez trzy lata z rządu począwszy od roku 1891/2 — 1893/4, następnie przez okres dwuletni w r. 1896/7—1897/8 i w r. 1903/4—1904/5, oraz przez cztery lata, począwszy od r. 1906/7—1909/10, z tego w r. 1907/8 dziekanem Wydziału Inżynierji Wodnej.

Po odzyskaniu niepodległości naszego Państwa wziął czynny udział w organizowaniu Politechniki Warszawskiej, oraz Akademji Nauk Technicznych, której był jednym z założycieli i prezesem. Jest również członkiem czynnym Towarzystwa Naukowego we Lwowie. W roku 1925 przeszedł w stan spoczynku, został jednak przez Politechnikę Lwowską mianowany profesorem honorowym i jako taki ogłasza mimo sędziwego wieku wykłady i bierze czynny udział w życiu ukochanej przez siebie uczelni. W r. 1930 w uczczeniu Jego zasług Politechnika Warszawska obdarzyła Go honorowym doktoratem nauk technicznych.

Działalność naukową rozpoczął Prof. Thullie w roku 1878. Odrazu stanął w pierwszym szeregu inżynierów i uczonych, którzy ocenili znaczenie linii wpływowych w dziale nauk inżynierskich. Zaznaczył się tem samem Jego żywy i bystry umysł, chwytający w lot aktualne zagadnienia inżynierskie i starający się je rozwiązać na podstawie wielkiej wiedzy teoretycznej i żmudnych badań laboratoryjnych.

Już pierwsze Jego rozprawy „O krzywych influencyjnych“ (1878) i „Linje influencyjne dla mostów łukowych“ (1879) znalazły uznanie starego mistrza budowy mostów Winklera. Później ogłosił rozprawy o liniach wpływowych dla łuku parabolicznego dwu i bezprzegubowego (1883), o najniekorzystniejszym obciążeniu belki prostej przez układ ciężarów skupionych (1887), oraz o liniach wpływowych dla belki ciągłej dwuprzęsłowej (1891).

Od tego czasu nie było niemal zagadnienia w zakresie nauk konstrukcyjnych, któremby się nie zainteresował i w któremby nie dodał od siebie cennego dorobku i to tak w pismach polskich, jako też i zagranicznych, niemieckich i francuskich. Zwłaszcza zagadnienia wytrzymałości materiałów i statyki budowli, nauki, która podówczas jeszcze była w początkach swego rozwoju, znalazły w Nim znakomitego teoretyka.

Publikuje prace w sprawie wytrzymałości belek na zginanie po przekroczeniu granicy sprężystości (1887), w sprawie wytrzymałości na wyboczenie (1890 i 1892), ogłasza teorię drewnianych belek złożonych poprawiając teorię Melana (1891), zajmuje się teorią parcia ziemi na mury oporowe (1884 i 1885), bada naprężenia belek o kracie wielokrotnej (1895). Wreszcie w ostatniem dziesięcioleciu zajmuje się

obliczeniem naprężeń drugorzędnych w belkach kratowych, z którego to działu ogłasza ogromnie cenne prace.

Gdy zaś jako nowy materiał budowlany pojawiły się konstrukcje żelbetowe, które tak ogromną rolę odgrywają obecnie w budowach inżynierskich, zwrócił się Jego umysł w tę stronę i tu rozpoczęła się główna część jego działalności naukowej. Powstający świeżo dział nauki inżynierskiej znalazł w Nim gorliwego orędownika i znakomitego teoretyka i badacza. Nazwisko Jego związało się jak najściślej z rozwojem żelbetnictwa.

Nie wymieniamy tu wszystkich prac, jakie na tem polu wydał tak w polskim, jako też w obcych językach; są one podane w osobnem zestawieniu.

W pracach tych podaje zasady, na jakich opierać należy obliczenie belek żelbetowych; pierwszy wprowadza pojęcie i rozgraniczenie faz i ustala, według której z nich należy wyznaczać naprężenia, wprowadza pierwszy wzory i tablice na obliczenie belek żebrowanych Hennebique'a, oraz sklepień żelbetowych; opracowuje w roku 1903 zupełnie niejasną podówczas kwestję rozkładu naprężeń ściągających w belkach zginanych — a wszystkie te prace dają Mu w całym świecie inżynierskim uznanie i powagę jednego z najpierwszych uczonych w tej szczególnie przezeń umiłowanej dziedzinie techniki.

To też gdy przed wielką wojną uczeni, pracujący nad teorią konstrukcyj żelbetowych, opracowywali poszczególne jej dziedziny, Thullie zajął się zbadaniem sprawy najmniej bodaj znanej, wymagającej największego nakładu pracy: wytrzymałości słupów żelbetowych — specjalnie słupów obciążonych mimośrodowo.

Podjąwszy się tej pracy, wykonywa ją z tą samą sumiennością, z jaką pracował zawsze; wykonywa kilkaset doświadczeń w Stacji Doświadczalnej Politechniki Lwowskiej, których owocem są dzieła: „Neue Versuche mit betoneisernen Säulen in Lemberg“ (1906/7) i „Versuche mit excentrisch belasteten betoneisernen Säulen“ (1909 i 1912).

To też nic dziwnego, że w najważniejszych kwestjach, dotyczących ustrojów żelbetowych, uciekano się do Niego po fachową poradę i ocenę, powoływano na rzeczoznawcę do Krakowa, Warszawy, Wiednia i t. p.

Tą najbardziej umiłowaną przez siebie dziedziną pracy zajmuje się po dzień dzisiejszy, biorąc czynny udział w Polskiej Radzie Cementowej, której jest jednym z najgorliwszych pracowników. I te też zasługi Jego uczcił dobitnie Zjazd Żelbetników Polskich, czcząc w Nim Nestora żelbetnictwa polskiego.

Równoległe z działalnością naukową szła Jego działalność na polu polskiego słownictwa technicznego. Wszak w czasie gdy Thullie

zaczął pracować, nie było tego słownictwa prawie zupełnie. To też podnieść należy Jego zasługi położone w komisji słownikowej Polskiego Towarzystwa Politechnicznego, która pod przewodnictwem inż. Darowskiego opracowała pierwszy słownik kolejowy. W dziedzinie mostów i statyki budowli tworzył polskie piśmiennictwo techniczne dzięki benedyktyńskiej pracy i wytrwałości. Statyka budowli — dzieło, które ukazywało się od roku 1886 do roku 1925 w coraz to zmienianych i uzupełnianych wydaniach, Mosty drewniane, Mosty sklepione, Mosty blaszane, Mosty kratowe, Mosty żelbetowe i szereg innych podręczników, to owoc Jego niestrudzonego wysiłku. Czy to student jedynej podówczas Politechniki polskiej, czy to inżynier pracujący w kraju czy zagranicą, wszyscy posługiwali się Jego dziełami. Praca ta była tem trudniejsza, że podówczas nawet terminologii polskiej nie było; musiał ją stwarzać — tem żmudniejsza, że skrupulatnie zbierać musiał w swych dziełach wszystkie dane, dotyczące dorobku techniki mostowej polskiej. On go inwentaryzował, On go odślaniał zagranicą.

I tu dalsza Jego zasługa i rozstawienie inżyniera polskiego zagranicą, która o nim nie wiedziała, lub wiedziała bardzo niewiele. Prace Thulliego publikowane i cytowane były daleko — i w literaturze świata weszły jako chlubny polski dorobek.

Ogółem napisał Thullie 183 rozpraw, z tego 92 w języku polskim, 89 w niemieckim, 2 we francuskim, 22 podręczników w 33 wydaniach, oraz opracował pięć działów do Podręcznika Inżynierskiego.

Ale Thullie nietylko zajmował się teorią, sięgał i w dziedzinę konstrukcji. M. i. był rzeczoznawcą w sprawie żelbetowego wiaduktu im. Księcia Józefa Poniatowskiego w Warszawie. Poza tem od roku 1916 był inżynierem cywilnym i jako taki wykonał niejeden projekt i niejedną ekspertyzę inżynierską.

Przez tyle dziesiątków lat Swej działalności pedagogicznej wykształcił tysiące uczniów, którzy poszli w świat z dobrem ziarnem jakie zasiał w ich umysłach, których przygotował, wykształcił i ukształtował na wybitnych pracowników w dziale inżynierji. Rzec można — stworzył Swą szkołę.

Zdawałoby się mogło, że przy takiej ogromnej pracy zawodowej w kąć musiały pójść inne prace i zajęcia. A jednak tak nie jest! Przecież Thullie obok pracy naukowej, zawodowej i pedagogicznej, znalazł czas i siły na pracę społeczną, kulturalną, polityczną. Wierny i gorliwy katolik, brał udział od młodości w stowarzyszeniach katolickich, w Skale, Przyjaźni i innych towarzystwach. Gdy zaś do Polski dotarł ruch chrześcijańsko-społeczny, stanął we Lwowie w pierwszym szeregu pracowników na tem polu. Był jednym z założycieli i długoletnim prezesem stronnictwa Katolicko-Narodowego. Jako taki

wszedł w r. 1894 do Rady Miejskiej lwowskiej, w której, z przerwą od roku 1901—1907 do dnia dzisiejszego zasiada, biorąc w niej zawsze czynny i gorliwy udział. Gdy stronnictwo Katolicko-Narodowe weszło po zjednoczeniu ziem polskich w skład stronnictwa Chrześcijańskiej Demokracji, wziął w niem czynny udział — i w roku 1922 został wybrany senatorem Rzeczypospolitej Polskiej, którą to godność piastuje obecnie już w trzeciej zrzędu kadencji. Pracuje też czynnie w publicystyce, zabierając wielokrotnie głos w sprawach politycznych chwili bieżącej.

W pracy publicznej był i jest twardy i nieugięty w obronie Swoich przekonań. Dowiódł tego po inwazji rosyjskiej, gdy władze austriackie, za Jego nieprzychylny w stosunku do mocarstw centralnych stanowisko, stały Go przed sąd wojenny i zażądały ustąpienia z Katedry. Dowiódł tego całym Swojem bezkompromisowem życiem.

Pracę Jego oceniło też społeczeństwo, darząc Go uznaniem i szacunkiem, jaki żywią dlań wszyscy bez różnicy przekonań. Jest honorowym profesorem Politechniki Lwowskiej, jest doktorem nauk technicznych honoris causa Politechniki Warszawskiej, — i to są najlepsze oznaki uznania ze strony obu Politechnik. W roku 1931 miasto Lwów obdarzyło Go nagrodą naukową. Młodzież — do której zawsze odnosił się z największą serdecznością — ofiarowała Mu godność członka honorowego Towarzystwa Wzajemnej Pomocy Studentów Politechniki i Związku Studentów Inżynierji.

W uznaniu zasług położonych dla Kościoła otrzymał krzyż „Pro Ecclesia et Pontifice“. Jest honorowym członkiem Polskiego Towarzystwa Politechnicznego, w którym w latach 1884—1889 był redaktorem „Czasopisma Technicznego“, oraz wielu innych towarzystw, jak Czytelni Katolickiej, Skały, Przyjaźni.

A dziś — pomimo sędziwego wieku, pomimo pięknie przepracowanego życia, nie ustaje w pracy — czy to na polu naukowem, w Politechnice, czy w Senacie, czy w Radzie miejskiej.

Niechaj żyje i pracuje w najdłuższe lata!

Spis prac Prof. Dr. M. Thulliego.

1. Kilka słów o belce ciągłej, *Dźwignia*, Lwów, 1878.
2. O krzywych influencyjnych i ich zastosowaniu do wyznaczania graficznego sił, działających w zwykłej belce kratowej, *Dźwignia*, Lwów, 1878.
3. Linje influencyjne dla mostów łukowych o trzech zawiasach, *Dźwignia*, Lwów, 1879.
4. W kwestyi ogólnej teoryi belek, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1880.
5. Oznaczenie sił, działających w belce ciągłej przegubowej, zapomocą linii wpływowych, *Dźwignia*, Lwów, 1881.
6. Nowsze poglądy w kwestji teoryi sklepień, *Dźwignia*, Lwów, 1881.
7. Szkic teoryi mostów łukowych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1882.
8. Mechanika budownicza, kurs II. Wykłady hektografowane, Lwów, 1882.
9. Druckverteilung durch die Schotterschichte, *Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch. Vereines*, Wiedeń, 1882.
To samo po polsku:
10. Rozdzielenie się ciśnienia przez warstwę żwiru, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1883.
11. Analityczne oznaczenie linii wpływowych dla łuku parabolicznego dwu i bezprzegubowego, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1883.
12. Einige Bemerkungen über die ältere Erddrucktheorie, *Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch. Vereines*, Wiedeń, 1884.
13. Graphische Bestimmung der im continuirlichen Gitterträger mit 2 Feldern auf Grund der Durchbiegung wirkenden Kräfte, *Wochenblatt f. Architekten u. Ingenieure*, Berlin, 1884.

14. Gobin's Erddruckversuche, *Wochenblatt f. Baukunde*, Berlin, 1885.
To samo po polsku:
15. Doświadczenia Gobina w kwestji parcia ziemi, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1885.
16. Teorya mostów, autografja, Lwów, 1885.
17. Podręcznik statyki budowli, wyd. I, Lwów, 1886.
18. Oznaczenie wykreślne sił, działających w belce ciągłej o dwóch otworach, na podstawie wygięcia belki, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1887.
19. Doświadczenia Considère'a nad wytrzymałością żelaza i stali, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1887.
20. Doświadczenia M. L. Leygue'a nad parciem ziemi, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1887.
21. Berechnung der Spannungen der über die Elastizitätsgrenze gebogenen Stäbe, *Wochenblatt f. Baukunde*, Berlin 1887.
22. Analityczne wyznaczenie najniekorzystniejszego obciążenia belki prostej układem ciężarów skupionych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1887.
To samo po niemiecku:
23. Analytische Bestimmung der ungünstigsten Belastung eines Balkenträgers durch ein System concentrirter Lasten, *Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch. Vereines*, Wiedeń, 1887.
24. Najnowsze rozporządzenie ministerjalne, dotyczące obliczania mostów, *Czasopismo Techniczne i Przegląd Techniczny*, Lwów, Warszawa, 1888.
25. Obciążenie zespołów budowlanych i natężenie dopuszczalne materiałów, *Czasopismo Techn.*, Lwów, 1889.
26. Przyczynek do dawnej teoryi parcia ziemi, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1889.
27. Współczynniki natężeń w zeskładach konstrukcyjnych żelaznych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1889.
28. Wpływ obciążenia ruchomego na mosty sklepione, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1889.
29. Obliczenie grubości ścian i dna zbiornika blaszanego, *Przegląd Techniczny*, Warszawa 1889.
30. Wytrzymałość słupów na wyboczenie przy zwykłej i wysokiej ciepłocie, *Przegląd Techn.*, Warszawa, 1889.
31. Wytrzymałość cementów, *Przegl. Techn.*, Warszawa, 1889.

32. Wytrzymałość betonu na złamanie, *Przegląd Techn.*, Warszawa, 1890.
33. Obliczenie natężeń w zeskładach Monier'a, *Przegląd Techniczny*, Warszawa 1890.
34. Obliczenie krzyżulców na wyboczenie, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1890.
To samo po niemiecku:
35. Berechnung der Gitterstäbe auf Knickfestigkeit, *Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch. Vereines*, Wiedeń 1890.
36. Podręcznik teorii mostów, Cz. I., tom I., wyd. I., Lwów, 1890.
37. Doświadczenia z drewnianymi belkami złożonemi, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1891.
38. Próby wytrzymałości belek żelaznych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1891.
39. Beitrag zur Berechnung der Stäbe auf Knickfestigkeit, *Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1891.
40. Zur Berechnung der Holzträger, *Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch. Vereines*, Wiedeń, 1891.
41. Bestimmung der Einflusslinien für die inneren Kräfte des continuirlichen Trägers mit drei Stützpunkten, *Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch. Vereines*, Wiedeń, 1891.
42. Obliczenie krzyżulców i pasów żelaznych belek na wyboczenie, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1891.
43. Przyczółki i filary kamienne mostów drewnianych i żelaznych, wykłady autogr., Lwów, 1891.
44. Weiterer Beitrag zur Berechnung der Stäbe auf Knickfestigkeit, *Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1892.
45. Wyznaczenie linii wpływowych sił wewnętrznych dwuprzęsłowej belki ciągłej, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1892.
46. Podręcznik teorii mostów, Cz. I., tom II., wyd. I., Lwów, 1892.
47. O obliczeniu prętów na wyboczenie, *Przegląd Techn.*, Warszawa, 1893.
48. Mosty blaszane, wykłady litogr., Lwów, 1893.
49. Trägheitsmomente der Walzeisenquerschnitte, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Vereines*, Wiedeń, 1894.
To samo po polsku:
50. Momenty bezwładności przekroi kształtówek, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1894.
51. Zur Anwendung verzahnter und verdübelter Träger, *Centralblatt d. Bauverwaltung*, Berlin, 1895.

52. Natężenia w belkach kratowych o kracie wielokrotnej, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1895.
53. Mosty drewniane, Zeszyt I., Lwów, 1895.
54. Messung der Spannungen und Durchbiegungen der eisernen Brücken, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1896.
55. Über die Berechnung der Biegungsspannungen in den Beton und Monier-Constructionen, *Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1896.
To samo po polsku:
56. Obliczenie natężeń zginających w belkach betonowych i Monier'a, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1896.
57. Obliczenie belek betonowych układu Hennebique'a, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1896.
58. Galicyjskie drewniane mosty kratowe, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1897.
To samo po niemiecku:
59. Hölzerne Gitterbrücken in Galizien, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1897.
60. Niektóre wzory i tablice z dziedziny statyki budowlanej, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1897.
61. Über die Berechnung der Monierplatten, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1897.
To samo po polsku:
62. Obliczenie płyt Monier'a, Odbitka z *Pamiętnika Tow. Politechnicznego*, Lwów, 1897.
63. Obliczenie natężeń w sklepieniach Moniera, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1898.
To samo po niemiecku:
64. Über die Berechnung der Spannungen in den Moniergewölben, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1898.
65. Mosty drewniane, Zeszyt II., Lwów, 1898.
66. Obliczenie belek żelaznobetonowych z żebrami układu Hennebique'a, *Przegląd Techn.*, Warszawa, 1899.
To samo po niemiecku:
67. Berechnung der gerippten Betoneisenträger System Hennebique, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1899.
68. O wpływie wkładek żelaznych na własności zaprawy i betonu, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1899.

69. Mosty kratowe żelazne i filary kratowe, wykł. litogr., Lwów, 1899. Drukiem Lwów, 1906.
70. Berechnung der Betoneisenträger mit oberen Rippen, *Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1900.
To samo po polsku:
71. Obliczenie belek żelaznobetonowych z górnemi żebrami, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1900.
72. Obliczenie dźwigarów drewnianych złożonych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1901.
To samo po niemiecku:
73. Zur Berechnung der zusammengesetzten Holzträger, *Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń 1901.
74. Obliczenie słupów drewnianych na wyboczenie, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1901.
To samo po niemiecku:
75. Berechnung der hölzernen Säulen auf Knickfestigkeit, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1901.
76. Mosty drewniane I, wyd. II., Lwów, 1901.
77. Przyczynek do obliczenia płyt Moniera, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1902.
To samo po niemiecku:
78. Beitrag zur Berechnung der Monierplatten, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1902.
79. Mosty sklepione, Lwów, 1902.
80. Podręcznik statyki budowli, wyd. II., Lwów, 1902.
81. Neue Versuche mit Betoneisenbalken, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1902.
82. Neue Versuche mit Hennebiqueträgern in Lemberg, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1902.
To samo po polsku:
83. Nowe doświadczenia z belkami Hennebique'a we Lwowie, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1903.
84. Naprężenia ścinające w belkach żelazno-betonowych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1903.
To samo po niemiecku:
85. Die Schubspannungen in Betoneisenträgern, *Beton u. Eisen*, Wiedeń, 1903.
86. Obliczenia sklepień żelazno-betonowych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1903.
To samo po niemiecku:
87. Die Berechnung von Gewölben aus Eisenbeton, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1903.

88. Przyczółki i filary kamienne mostów drewnianych i żelaznych, wyd. I, Lwów, 1903.
89. Über die Berechnung von beiderseits armierten Betonbalken, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1903.
90. Schlussfolgerungen aus der Debatte über Schubspannungen, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1903.
91. Dimensionierung der T-förmigen Träger, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1904.
92. Podręcznik teorii mostów, część I, tom I, wyd. II, Lwów, 1904.
93. Die zulässigen Spannungen in Balkenträgern aus Eisenbeton, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1904.
94. Die Bruchursachen der betoneisernen geraden Träger, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1905.
To samo po polsku:
95. Przyczyny złamania belek żelazno-betonowych prostych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1906.
96. Zur Dimensionierung der rechteckigen und T-förmigen betoneisernen Träger, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1905.
97. Wyznaczenie wymiarów belek żelazno-betonowych z żebrami, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1905.
98. Wykreślne wyznaczenie wysokości belek żelazno-betonowych, *Przegl. Techn.*, Warszawa, 1905.
99. Dimensionierung der betoneisernen Gewölbe, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1905.
To samo po polsku:
100. Wyznaczanie wymiarów sklepień żelazno-betonowych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1905.
101. Mosty blaszane, wyd. I, Lwów, 1905.
102. Przyczynek do obliczenia sił wewnętrznych w dźwigarach kratowych mostów kolejowych zapomocą ciężarów zastępczych, *Przegląd Techn.*, Warszawa, 1905.
103. Mosty kratowe żelazne, Lwów, 1905.
104. Podręcznik teorii mostów, część I, tom II, wyd. II, Lwów, 1906.
105. Bruchursachen von betoneisernen Balken, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1906.
To samo po polsku:
106. Doświadczenia Goodrich'a, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1906.
107. Neue Versuche mit betoneisernen Säulen in Lemberg, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1906/7.

To samo po polsku:

108. Nowe doświadczenia ze słupami żelazno-betonowymi we Lwowie, *Przegląd Techn.*, 1907.
109. Filary żelazne, Lwów, 1907.
110. Neuere Versuche mit Eisenbeton, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1907.

To samo po polsku:

111. Doświadczenia ze słupami żelazno-betonowymi w Urbanie, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1908.
 112. Neue französische Versuche mit umschnürten Beton, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1907.
 113. Mosty drewniane 2, wyd. II., Lwów, 1907.
 114. Mosty kamienne, wyd. II., Lwów, 1908.
 115. Mosty żelazno-betonowe, litografia, Lwów, 1908.
 116. Empergers Versuche mit betoneisernen Säulen, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1908.
 117. Die österreichische Beton-Verordnung, *Armierter Beton*, Berlin, 1908.
 118. Hardings Versuche mit Eisenbetonbalken, *Beton und Eisen*, Berlin, 1908.
 119. Die Druckfestigkeit des reinen, armierten und umschnürten Betons, *Emperger, Handb. f. Eisenbetonbau*, Tom I, wyd. 1, Berlin, 1908.
 120. Doświadczenia Bacha co do ciągliwości betonu i betonu wzmocnionego, *Przeegl. Techn.*, Warszawa, 1908.
 121. Neuere Versuche mit Eisenbeton, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1908.
 122. Versuche mit exzentrisch belasteten betoneisernen Säulen, *Forscherarbeiten aus dem Gebiete des Eisenbetons*, Berlin, 1909.
 123. Allgemeine Bestimmungen des deutschen Ausschusses für Eisenbeton für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Bauten aus Stampfbeton, *Armierter Beton*, Berlin, 1909.
- To samo po polsku:
124. Postanowienie niemieckiego komitetu żelazno-betonowego co do budowli z betonu ubijanego, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1909.
 125. Der Dauerversuch an einem Eisenbetonbalken, *Armierter Beton*, Berlin, 1909.
 126. Budownictwo żelazno-betonowe, litografia, Lwów, 1909.

127. Versuche Schüles mit Eisenbetonbalken und Säulen, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1909.
To samo po polsku:
128. Doświadczenia Schülego z belkami i słupami żelazno-betonowymi, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1910.
129. Berechnung der Betoneisenträger mit oberen Rippen, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1909.
130. Der Entwurf einer Vorschrift über die Herstellung von Tragwerken aus Beton-Eisen bei Hochbauten, aufgestellt vom österreichischen Beton-Verein, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1909.
131. Doświadczenia Empergera ze słupami żelazno-betonowymi, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1909.
132. Nowe badania Probstta nad słupami żelazno-betonowymi, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1909.
133. Mosty łukowe i wiszące, Lwów, 1909.
134. Neue Versuche Talbots mit Eisenbetonsäulen, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1910.
135. Die neuen Vorschriften für Eisenbetontragwerke in Österreich und in der Schweiz, *Zement u. Beton*, Berlin, 1910.
136. Witheys Versuche mit Säulen aus Betoneisen, *Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baudienst*, Wiedeń, 1910.
To samo po polsku:
137. Doświadczenia Withey'a ze słupami żelazno-betonowymi, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1910.
138. Talbots Versuche mit Eisenbetonbalken bezüglich des Stegwidestandes, *Rundschau für Technik u. Wirtschaft*, Praga, 1910.
139. Die neuen österreichischen Vorschriften über Eisenbetonbauten, *Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1911.
140. Versuche mit Betonsäulen, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1911.
141. Versuche mit Eisenbetonbalken von Bach und Graf, *Rundschau f. Technik u. Wirtschaft*, Praga, 1911.
142. Säulenversuche des deutschen Ausschusses für Eisenbeton, *Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Bd.*, Wiedeń, 1911.
To samo po polsku:
143. Doświadczenia ze słupami niemieckiego Komitetu dla betonu wzmocnionego, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1911.
144. Einige Bestimmungen der neuen österreichischen Vorschriften über Eisenbetonbauten, *Rundschau für Technik u. Wirtschaft*, Praga, 1911.

145. Obliczenie natężeń przyczepnych wedle nowych austriackich przepisów ministerjalnych, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1911.
146. Die Versuche Witheys mit exzentrisch belasteten Säulen, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1911.
To samo po polsku:
147. Doświadczenia Withey'a ze słupami żelazno-betonowymi obciążonemi mimośrodkowo, *Przegląd Techn.*, Warszawa, 1912.
148. Versuche Bachs mit Eisenbetonbalken, *Tonindustrietzg*, Berlin, 1912.
To samo po polsku:
149. Doświadczenia Bacha z belkami żelazno-betonowymi, *Przegląd Techn.*, Warszawa, 1911.
150. Versuche mit Betonsäulen, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1912.
151. Weitere Versuche von Bach und Graf mit Eisenbetonbalken, *Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Bd.*, Wiedeń, 1912.
152. Witheys Versuche mit Eisenbetonsäulen, *Beton und Eisen*, Berlin, 1912.
153. Versuche Bachs mit Kontrollbalken, *Rundschau f. Technik u. Wirtschaft*, Praga, 1912.
154. Weitere Versuche mit excentrisch belasteten Eisenbetonsäulen, Wiedeń, 1912.
155. Druckfestigkeit des reinen, bewehrten und umschnürten Betons, *Emperger, Handb. f. Eisenb.*, Tom I, wyd. 2, Berlin 1912.
156. Austriackie przepisy ministryalne, dotyczące obliczenia i budowy mostów, Tłumaczenie, Lwów, 1913.
157. Dimensionierung der längsbewehrten Eisenbetonsäulen, *Zeitschrift für Betonbau*, Wiedeń, 1913.
158. Berechnung der umschnürten Säulen aus Eisenbeton, *Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Bd.*, Wiedeń, 1913.
159. Mosty drewniane 1, wyd. III., Lwów, 1913.
160. Die dritte Phase der gebogenen Eisenbetonträger, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1913.
To samo po polsku:
161. Trzecia faza w zginanych belkach żelbetowych, *Kwartalnik Techniczny*, Lwów, 1913.
162. Podręcznik teoryi mostów, Cz. II. Łuki i wieszary, Lwów, 1913.
163. Säulen aus umschnürten Gusseisen, *Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Bd.*, Wiedeń, 1914.

164. Versuche mit Eisenbetonsäulen, *Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Bd.*, Wiedeń, 1915.
165. Bachs Knickungsversuche mit Eisenbetonsäulen, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1915.
166. Teorya żelbetu, Lwów, 1915.
167. Amerikanische Betonversuche, *Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1915.
168. Neue Versuche mit Eisenbetonsäulen, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1916.
169. Wirkungsweise der Umschnürung bei Eisenbetonsäulen, *Armierter Beton*, Berlin, 1916.
170. Berücksichtigung der Schale bei umschnürten Eisenbetonsäulen, *Zeitschrift f. Betonbau*, Wiedeń, 1916.
171. Rama prostokątna dwuprzegubowa, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1916.
172. Podręcznik statyki budowli, wyd. III., Lwów, 1917.
173. Berechnung der Säulen aus umschnürten Gusseisen, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1917.
174. Zur Dimensionierung exzentrisch gedrückter T-Querschnitte, *Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Bd.*, Wiedeń, 1918.
175. Uzbrojenie belek żelbetowych z powodu sił poprzecznych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1918.
176. Berechnung der umschnürten Eisenbetonsäulen (wspólnie z Dr. A. Kuryłłą), *Beton u. Eisen*, Berlin, 1918.
177. Projekt przepisów żelbetowych (wspólnie z Prof. Dr. M. T. Huberem), *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1919.
178. Projekt organizacji szkół politechnicznych, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1919.
179. Pustaki betonowe, jako materiał do odbudowy miast polskich, *Roboty Publiczne*, Warszawa, 1920.
180. O murach z pustaków betonowych *M* i *N* systemu Empergera, *Roboty Publiczne*, Warszawa, 1920.
181. Erddruckbestimmung nach Färber (wspólnie z Dr. A. Kuryłłą), *Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, Wiedeń, 1920.
To samo po polsku:
182. O wyznaczeniu parcia ziemi sposobem Färbera (wspólnie z Dr. Kuryłłą), *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1920.
183. La réglementation officielle des ponts routes en Pologne, *Le Genie Civil*, 1920.
184. Polskie przepisy budowy i utrzymania mostów drogowych, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1920.
185. Ciśnienie ciał sypkich, *Czasopismo Techn.*, Lwów, 1920.

186. Podręcznik teorii mostów, wyd. III., Lwów, 1920.
187. Przyczółki i filary kamienne mostów drewnianych i żelaznych, wyd. II., Lwów, 1921.
188. Druckfestigkeit des reinen, bewehrten und umschnürten Betons, rozdział III., tom I., *Emperger, Hdbch. für Eisenbetonbau*, wyd. III., Berlin, 1921.
189. Mosty żelbetowe, Lwów, 1921.
190. Die Grösse der Zahl n bei Stahl, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1922.
191. Rozkład ciężarów na belki mostów żelbetowych, *Archiwum Towarzystwa Naukowego*, Lwów, 1922.
To samo po niemiecku:
192. Die Druckverteilung auf die einzelnen Träger der Betonbrücken, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1922.
To samo po francusku:
193. La répartition des charges entre les poutres dans les ponts en béton armé, *Le Genie Civil*, 1922.
194. Teorja ram, Lwów, 1922.
195. Podręcznik statyki budowli, wyd. IV., Lwów, 1923.
196. Obciążenie stropu przy próbach obciążenia.
197. Projektowanie słupów żelbetowych uzwojonych, opracowane wspólnie z Dr. Chmielowcem, ogłoszone na Komisji Lwowskiej Akademji Nauk Techn. i w Kole Żelbetników w Warszawie, *Przegląd Techniczny*, Warszawa, 1924.
198. Przekroje trójkątne i pięciokątne belek żelbetowych, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1925.
199. Doświadczenia Menscha ze słupami uzwojonemi z wkładką żeliwną (wspólnie z Dr. Chmielowcem), *Archiwum Towarzystwa Naukowego*, Lwów, 1925.
To samo po niemiecku:
200. Die Versuche von Mensch mit Säulen aus umschnürtem Eisenbeton mit der gusseisernen Einlage (wspólnie z Dr. Chmielowcem), *Beton u. Eisen*, Berlin, 1925.
201. Mosty blaszane, wyd. II., Lwów, 1925.
202. Słupy żelazne obetonowane, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1926.
To samo po niemiecku:
203. Einbetonierte Eisensäulen, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1927.
204. Neue österreichische Versuche mit Eisenbetonsäulen, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1927.

To samo po polsku:

205. Nowe austriackie doświadczenia ze słupami żelbetowymi, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1927.
206. Wyznaczenie wymiarów słupów żelbetowych na wyboczenie, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1927.
207. Naprężenia drugorzędne w belkach kratowych i sposób przybliżony ich wyznaczania (wspólnie z Dr. Chmielowcem), *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1928.
208. Linje wpływowe naprężeń drugorzędnych (wspólnie z Dr. Chmielowcem), *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1928.
209. Naprężenia drugorzędne w belkach kratowych (wspólnie z Dr. Chmielowcem), Lwów, 1928.
- | | |
|---|---|
| 210. Mosty kamienne | } <i>Podręcznik Inżynierski</i>
pod redakcją
Prof. Bryły
Tom II.
1927 — 1929. |
| 211. Przyczółki i filary kamienne | |
| 212. Mosty żelbetowe | |
| 213. Obliczenie sklepienia i murów
przy pomocy linii ciśnienia | |
| 214. Teoria żelbetu | |
215. Wyznaczenie wymiarów słupów żelbetowych na wyboczenie, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1929.
216. Wzmacnianie mostów żelaznych kratowych żelbetem i spawaniem według Empergera, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1930.
217. U kolebki żelbetu, *Cement*, 1930/31.
218. Uwagi do projektu przepisów dotyczących konstrukcyj betonowych i żelbetowych, *Cement*, 1930/31.
219. Najnowsze doświadczenia wiedeńskie ze słupami żelbetowymi, *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 1932.
- To samo po niemiecku:
220. Die neuesten Wiener Versuche mit Eisenbetonsäulen, *Beton u. Eisen*, Berlin, 1932.

Oprócz tego wspomnieć należy o znacznej ilości sprawozdań, recenzji i krytyk z literatury technicznej, pomieszczanych przeważnie na łamach *Czasopisma Technicznego*, a także w *Przeglądzie Technicznym* i innych pismach polskich. Z prac w czasopismach zagranicznych wymienić należy liczne krytyki, opublikowane w *Zeitschrift des österreichischen Ingenieur u. Architekten Ver.* i w *Beton u. Eisen*.

Zastosowanie zasady Castigliana do wyznaczenia reakcyj belek ciągłych.

Jednym z najogólniejszych prawideł w teorii sprężystości, które pozwala w całym szeregu zagadnień z tej dziedziny wyznaczać t. z. wielkości statycznie niewyznaczalne, jest niewątpliwie zasada Castigliana. Przedmiotem niniejszej pracy jest zastosowanie tej właśnie zasady do pewnego szczegółowego wypadku, a mianowicie do obliczania reakcyj belek wieloprzęsłowych, o stałym przekroju, wolno podpartych na skrajnych podporach (bez momentów utwierdzenia).

A) Belki ciągłe, na równo wysokich podporach, o przęsłach równych.

Do wyznaczenia wielkości reakcyj podporowych służą przede wszystkim dwa ogólne równania równowagi:

1) Suma sił = 0

$$\varphi_1(A_0, A_1, A_2 \dots A_n) = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n - \Sigma(P, Q) = 0 \quad (1)$$

2) Suma momentów statycznych wszystkich sił względem dowolnego punktu, np. względem skrajnej prawej podpory, jest zerem

$$\varphi_2(A_0, A_1, A_2 \dots A_n) = A_0 \cdot nl + A_1(n-1)l + \dots + A_{n-1} \cdot l - \Sigma(Pe, Qd) = 0 \quad (2)$$

W powyższych równaniach $A_0, A_1, A_2 \dots$ oznaczają kolejno po sobie następujące reakcje, wyrażenie $\Sigma(P, Q)$ oznacza sumę sił zewnętrznych (skupionych i ciągłych) działających na belkę, zaś wyrażenie $\Sigma(Pe, Qd)$ sumę momentów statycznych tych sił względem prawej podpory.

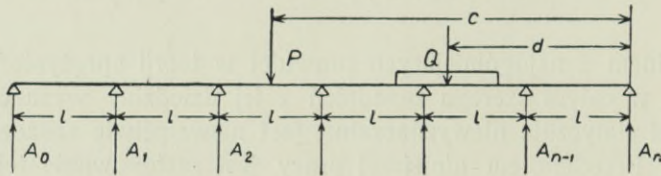
Ilość niewiadomych reakcyj wynosi $n+1$; dla wyznaczenia ich potrzeba zatem jeszcze dalszych równań — do tego celu mogą posłużyć równania wynikające z prawa Castigliana. Na podstawie tego prawa pochodne cząstkowe pracy odkształcenia względem każdej poszczególnej reakcji są zerem, przyczem jednakże trzeba uwzględnić,

iż wspomniane reakcje muszą równocześnie czynić zadość ogólnym równaniom równowagi (1) i (2).

Dla wyznaczenia tych reakcyj w sposób możliwie prosty należy przedewszystkiem utworzyć funkcję pomocniczą

$$F = U + t_1 \cdot \varphi_1 + t_2 \cdot \varphi_2^{1)}$$

gdzie U oznacza pracę odkształcenia, t_1 t_2 dwa niewiadome współczynniki. Przyrównując do zera pochodne cząstkowe funkcji F względnie niewiadomych reakcyj otrzymamy $n+1$ równań, które w połączeniu z równaniami (1) i (2) utworzą układ (I) złożony z $n+3$ równań, określający w sposób jednoznaczny $n+3$ niewiadomych, a to $n+1$ reakcyj podporowych, oraz dwa wyżej wspomniane współczynniki t_1 i t_2 .



Rys. 1.

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial A_0} = \frac{\partial U}{\partial A_0} + t_1 \cdot 1 + t_2 \cdot n \cdot l = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial A_1} = \frac{\partial U}{\partial A_1} + t_1 \cdot 1 + t_2 \cdot (n-1) \cdot l = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial F}{\partial A_{n-1}} = \frac{\partial U}{\partial A_{n-1}} + t_1 \cdot 1 + t_2 \cdot l = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial A_n} = \frac{\partial U}{\partial A_n} + t_1 \cdot 1 = 0 \\ \varphi_1 = A_0 + A_1 + \dots + A_n - \Sigma(P, Q) = 0 \\ \varphi_2 = A_0 \cdot n \cdot l + A_1 \cdot (n-1) \cdot l + \dots + A_{n-1} \cdot l - \Sigma(Pc, Q \cdot d) = 0 \end{array} \right.$$

Praca odkształcenia belki U (o ile uwzględnimy samo tylko zgięcie — pomijając wpływ sił ścinających) wyraża się wzorem

$$U = \int_0^{n \cdot l} \frac{1}{2} \frac{M^2}{E \cdot I} dx \quad \dots \quad (3)$$

gdzie M oznacza zmienny moment zgięcia

E stały współczynnik sprężystości

I „ moment bezwładności przekroju belki.

¹⁾ Dziwiński: Wykład matematyki. Tom II., str. 344.

E. Goursat: Kurs analizy matem. Tom I. (Tłómacz. Łazowski et cons.) str. 115.

Stąd:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_0} &= \int_0^{nl} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial A_0} dx \\ \frac{\partial U}{\partial A_1} &= \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial A_1} dx + \int_l^{nl} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial A_1} dx \\ &= \int_l^{nl} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial A_1} dx \\ &\dots \\ \frac{\partial M}{\partial A_i} &= \int_{il}^{nl} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial A_i} dx \\ &\dots \\ \frac{\partial M}{\partial A_n} &= 0 \end{aligned}$$

gdyż dla $0 \leq x \leq il$, $\frac{\partial M}{\partial A_i} = 0$, jeśli jako moment zgięcia w danym przekroju belki uważamy moment statyczny sił leżących po lewej stronie tego przekroju.

Podstawiając za M wartości

$$(II) \begin{cases} M = A_0 x - f_0(P, Q) & \text{dla } 0 \leq x \leq l \\ M = A_0 x + A_1 \cdot (x-l) - f_1(P, Q) & \text{dla } l \leq x \leq 2l \\ \dots \\ M = A_0 x + A_1(x-l) + \dots + A_i(x-il) - f_i(P, Q) & \text{dla } i \cdot l \leq x \leq (i+1) \cdot l \\ \dots \end{cases}$$

widzimy, iż:

$$(III) \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial A_0} = A_0 \int_0^{nl} x^2 \cdot dx + A_1 \int_l^{nl} x \cdot (x-l) dx + A_2 \int_{2l}^{nl} x \cdot (x-2l) dx \\ \quad + \dots + A_{n-1} \int_{(n-1)l}^{nl} x \cdot [x-(n-1)l] dx - \frac{1}{EI} \cdot \psi_0(P, Q) \\ \frac{\partial U}{\partial A_1} = A_0 \int_l^{nl} x(x-l) dx + A_1 \int_l^{nl} (x-l)^2 dx + A_2 \int_{2l}^{nl} (x-l)(x-2l) dx \\ \quad + \dots + A_{n-1} \int_{(n-1)l}^{nl} (x-l)[x-(n-1)l] \cdot dx - \frac{1}{EI} \cdot \psi_1(P, Q) \\ \dots \\ \frac{\partial M}{\partial A_i} = A_0 \int_{il}^{nl} x(x-il) dx + A_1 \int_{il}^{nl} (x-l)(x-il) dx + \dots \\ \quad + A_i \int_{il}^{nl} (x-il)^2 dx + \dots + A_{n-1} \int_{(n-1)l}^{nl} (x-il)[x-(n-1)l] dx - \frac{1}{EI} \psi_i(P, Q) \end{cases}$$

*

W powyższych równaniach (II) i (III) funkcje $f_0(P, Q)$, $f_1(P, Q)$.. $\psi_0(P, Q)$, $\psi_1(P, Q)$... oznaczają pewne funkcje zależne od kształtu belki i rodzaju obciążenia, niezależne natomiast od niewiadomych reakcyj.

Po podstawieniu wartości za $\frac{\partial U}{\partial A_0}$, $\frac{\partial U}{\partial A_1}$... w równania (I) otrzymamy układ równań (IV):

$$(IV) \left\{ \begin{aligned} (0) \dots A_0 \int_0^{nl} x^2 dx + A_1 \int_l^{nl} x(x-l) dx + \dots \\ + A_{n-1} \int_{(n-1)l}^{nl} x[x-(n-1)l] dx + t_1 EI + t_2 EINl = \psi_0(P, Q) \\ (1) \dots A_0 \int_l^{nl} x(x-l) dx + A_1 \int_l^{nl} (x-l)^2 dx + \dots \\ + A_{n-1} \int_{(n-1)l}^{nl} (x-l)[x-(n-1)l] dx + t_1 EI + t_2 EI(n-1)l = \psi_1(P, Q) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (i) \dots A_0 \int_{il}^{nl} x(x-il) dx + A_1 \int_{il}^{nl} (x-l)(x-il) dx + \dots \\ + A_i \int_{il}^{nl} (x-il)^2 dx + \dots + t_1 EI + t_2 EI(n-i)l = \psi_i(P, Q) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (n) \dots A_n \cdot 0 + t_1 EI = 0 \\ (n+1) \dots A_0 + A_1 + \dots + A_n - \Sigma(P, Q) = 0 \\ (n+2) \dots A_0 \cdot nl + A_1(n-1)l + \dots + A_{n-1} \cdot l - \Sigma(Pc, Qd) = 0 \end{aligned} \right.$$

Uwzględniając, iż na podstawie równania (n) współczynnik $t_1=0$, otrzymamy — po opuszczeniu równania (n+1) — układ (V) złożony z n+1 równań o n+1 niewiadomych $A_0, A_1, A_2 \dots A_{n-1}, t$ (gdzie $t=EI \cdot t_2$) w następującej formie:

$$(V) \left\{ \begin{aligned} a_{00} l^3 \cdot A_0 + a_{01} \cdot l^3 A_1 + \dots & \quad a_{0, n-1} \cdot l^3 A_{n-1} + t \cdot nl = \psi_0 \\ a_{10} l^3 \cdot A_0 + a_{11} \cdot l^3 \cdot A_1 + \dots & \quad a_{1, n-1} \cdot l^3 A_{n-1} + t(n-1)l = \psi_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{i0} l^3 A_0 + a_{i1} \cdot l^3 A_1 + \dots & \quad a_{i, n-1} \cdot l^3 A_{n-1} + t(n-i)l = \psi_i \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n-1, 0} l^3 \cdot A_0 + a_{n-1, 1} l^3 A_1 + \dots & \quad a_{n-1, n-1} \cdot l^3 A_{n-1} + t \cdot l = \psi_{n-1} \\ n \cdot l \cdot A_0 + (n-1) \cdot l \cdot A_1 + \dots & \quad l \cdot A_{n-1} = \Sigma(Pc, Qd) \end{aligned} \right.$$

przyczem:

$$a_{00} = \frac{1}{l^3} \int_0^{nl} x^2 \cdot dx = \frac{n^3}{3}$$

$$a_{11} = \frac{1}{l^3} \int_l^{nl} (x-l)^2 \cdot dx = \frac{(n-1)^3}{3}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= \frac{1}{l^3} \int_{il}^{nl} (x-il)^2 dx = \frac{(n-i)^3}{3} \\
 &\dots \\
 a_{n-1, n-1} &= \frac{1}{l^3} \int_{(n-1)l}^{nl} [x-(n-1)l]^2 dx = \frac{1}{3} \\
 a_{ik} &= a_{ki} = \int_{kl}^{nl} (x-il)(x-kl) dx \text{ dla } i < k \dots (4) \\
 a_{ik} &= a_{ki} = \int_{il}^{nl} (x-kl)(x-il) dx \text{ dla } k < i \dots (5)
 \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że wyznacznik

$$Dn = \begin{vmatrix}
 a_{00} & a_{01} & a_{02} \dots & a_{0, n-1} \\
 a_{10} & a_{11} & a_{12} \dots & a_{1, n-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} \dots & a_{i, n-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n-1, 0} & a_{n-1, 1} & a_{n-1, 2} \dots & a_{n-1, n-1}
 \end{vmatrix}$$

który nazywać będziemy w dalszym ciągu „wyznacznikiem podstawowym“ układu równań (V), posiada następujące własności:

1) Wyrazy na głównej przekątnej są określone wzorem:

$$a_{ii} = \frac{(n-i)^3}{3} \dots (6)$$

2) Wyrazy, różniące się tylko porządkiem wskaźników, są sobie równe $a_{ik} = a_{ki}$, czyli wyznacznik jest symetryczny względem głównej przekątnej.

Prócz tych dwu cech posiada wyznacznik podstawowy jeszcze jedną charakterystyczną własność, która go pozwala w jednej chwili utworzyć dla belki o dowolnej ilości przęseł, a tem samem wyznaczyć dla tej belki lewe strony równań układu (V).

Wyrażenie:

$$a_{ik} = \frac{1}{l^3} \int_{kl}^{nl} (x-il)(x-kl) dx \text{ dla } i < k$$

da się bowiem przekształcić na postać:

$$a_{ik} = a_{ki} + (k-i) \frac{(n-k)^2}{2} \dots (7)$$

a to daje nam właśnie trzecią charakterystyczną własność wyznacznika podstawowego:

3) Kolejno po sobie następujące (od strony prawej ku lewej) wyrazy jednego wiersza, poczynszy od wyrazu na głównej przekątnej a_{kk}

(a podobnie — wskutek symetrii — kolejno po sobie następujące od dołu ku górze wyrazy jednej kolumny, począwszy od wyrazu na głównej przekątnej $a_{k,k}$) tworzą postęp arytmetyczny o różnicy $\frac{(n-k)^2}{2}$.

W ostatnim wierszu wynosi więc ta różnica $\Delta_1 = \frac{[n-(n-1)]^2}{2} = \frac{1}{2}$;
w przedostatnim $\Delta_2 = \frac{[n-(n-2)]^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$;

w trzecim od końca $\Delta_3 = \frac{9}{2}$, następnie $\frac{16}{2}$, $\frac{25}{2}$... i t. d.

Dla przykładu i lepszej ilustracji własności wyznacznika podstawowego podano w tekście (poniżej) wyznaczniki D_3 , D_4 i D_5 .

$$D_3 = \begin{vmatrix} \frac{27}{3} & \frac{14}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} & \frac{8}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} \frac{64}{3} & \frac{27}{2} & \frac{20}{3} & \frac{11}{6} \\ \frac{27}{2} & \frac{27}{3} & \frac{14}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{20}{3} & \frac{14}{3} & \frac{8}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{11}{6} & \frac{4}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} \frac{125}{3} & \frac{88}{3} & 18 & \frac{26}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{88}{3} & \frac{64}{3} & \frac{27}{2} & \frac{20}{3} & \frac{11}{6} \\ 18 & \frac{27}{2} & \frac{27}{3} & \frac{14}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{26}{3} & \frac{20}{3} & \frac{14}{3} & \frac{8}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{7}{3} & \frac{11}{6} & \frac{4}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

Przy pomocy wyznacznika podstawowego lewe strony równań układu (V) dadzą się bez najmniejszej trudności zbudować — jak już zresztą o tem wspomniano — przystępujemy teraz z kolei do wyznaczenia prawych stron tych równań, t. j. funkcji ψ_i , zależnych tylko od rodzaju obciążenia zewnętrznego belki. Ograniczymy się na razie do dwu typowych wypadków, a to obciążenia jednostajnego na całej długości belki, oraz obciążenia każdego przęsła symetrycznie i w równych odstępach rozłożonemi ciężarami skupionemi, o tej samej wielkości.

W wypadku obciążenia jednostajnego na całej długości belki funkcje ψ_i przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \int_0^{nl} \frac{qx^2}{2} x dx = q \frac{n^4 l^4}{8} \\ \psi_1 &= \int_l^{nl} \frac{qx^2}{2} (x-l) dx = ql^4 \cdot \frac{3n^4 - 4n^3 + 1}{24} \\ & \dots \dots \dots \\ \psi_i &= \int_{il}^{nl} \frac{qx^2}{2} (x-il) dx = ql^4 \cdot \frac{3n^4 - 4in^3 + i^4}{24} \dots \dots \dots \quad (8) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

W wypadku obciążenia każdego przęsła równemi ciężarami skupionemi, działającemi w połowie każdego przęsła, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= P \cdot \int_{l/2}^{nl} \left(x - \frac{l}{2}\right) \cdot x dx + P \int_{3l/2}^{nl} \left(x - \frac{3l}{2}\right) \cdot x dx + \dots \\ &= P \left[\frac{n^4 l^3}{12} + \frac{l^3}{48} (1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots) \right] \\ \psi_1 &= P \left[\frac{(n^4 - 1) l^3}{12} + \frac{l^3}{48} (3^3 + 5^3 + \dots) - \frac{1 \cdot l^3}{8} (3^2 + 5^2 + \dots) \right] \\ & \dots \dots \dots \\ \psi_i &= P \left[\frac{n^4 - i^4}{12} l^3 + \frac{1}{48} \sum_i^{n-1} (2k+1)^3 - \frac{i \cdot l^3}{8} \sum_i^{n-1} (2k+1)^2 \right] \dots \dots \quad (9) \end{aligned}$$

Dla obciążenia każdego przęsła dwoma ciężarami skupionemi (w $1/3$ i $2/3$ rozpiętości), dostaniemy:

$$\begin{aligned} \psi_i &= P \left[\frac{2(n^4 - i^4) l^3}{12} + \frac{l^3}{6 \cdot 3^3} \sum_i^{n-1} (3k+1)^3 + (3k+2)^3 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{i \cdot l^3}{2 \cdot 3^3} \sum_i^{n-1} (3k+1)^2 + (3k+2)^2 \right] \end{aligned}$$

Ogólnie — dla obciążenia każdego przęsła zapomocą „s-1“ ciężarów, skupionych (równych), rozmieszczonych w $1/s, 2/s, \dots, s-1/s$ części rozpiętości:

$$\psi_i = P \left[\frac{(s-1)(n^4 - i^4)}{12} l^3 + \frac{l^3}{6 \cdot s^3} \sum_i^{n-1} (sk+1)^3 + (sk+2)^3 + \dots [sk+(s-1)]^3 - \right. \\ \left. - \frac{i l^3}{2 \cdot s^2} \sum_i^{n-1} (sk+1)^2 + (sk+2)^2 + \dots (sk+s-1)^2 \dots \right] \quad (10)$$

Po wyznaczeniu wielkości $\psi_0, \psi_1 \dots \psi_i \dots$ można już przystąpić do obliczenia reakcyj podporowych. W tym celu należy przedewszystkiem obliczyć t. z. „minory“ (podwyznaczniki) „wyznacznika rozszerzonego“ \bar{D}_n , utworzonego ze współczynników przy niewiadomych w równaniach układu (V), które to minory powstają z tego wyznacznika przez skreślenie jednego wiersza i jednej kolumny. Oznaczmy przez \bar{D}_{ikn} minor, który powstaje przez skreślenie tego wiersza i tej kolumny wyznacznika \bar{D}_n , w którym znajduje się wyraz $a_{ik} l^3$, a przez $\bar{D}_{n0n}, \bar{D}_{n1n} \dots$ minory, odpowiadające poszczególnym współczynnikom ostatniego równania z układu (V), wówczas niewiadome reakcje można wyrazić w postaci:

$$A_0 = [\bar{D}_{00n} \psi_0 - \bar{D}_{10n} \psi_1 + \bar{D}_{20n} \psi_2 \dots \pm \bar{D}_{n0n} \Sigma(Pc, Qd)]: \bar{D}_n$$

$$\dots$$

$$A_i = [\bar{D}_{0in} \psi_0 - \bar{D}_{1in} \psi_1 + \bar{D}_{2in} \psi_2 \dots \pm \bar{D}_{nin} \Sigma(Pc, Qd)]: \bar{D}_n$$

$$i=2k$$

$$\dots$$

$$A_j = [-\bar{D}_{0jn} \psi_0 + \bar{D}_{1jn} \psi_1 - \bar{D}_{2jn} \psi_2 \dots \mp \bar{D}_{njn} \Sigma(Pc, Qd)]: \bar{D}_n$$

$$j=2m+1$$

$$\dots$$

gdzie

$$\bar{D}_n = \begin{vmatrix} a_{00} l^3 & a_{01} l^3 \dots & a_{0, n-1} l^3 & n l \\ a_{10} l^3 & a_{11} l^3 \dots & a_{1, n-1} l^3 & (n-1) l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1, 0} l^3 & a_{n-1, 1} l^3 \dots & a_{n-1, n-1} l^3 & l \\ n l & (n-1) l \dots & l & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{D}_{ikn} = \begin{vmatrix} a_{00} l^3 & a_{01} l^3 \dots & a_{0, k-1} l^3 & a_{0, k+1} l^3 \dots & n l \\ a_{10} l^3 & a_{11} l^3 \dots & a_{1, k-1} l^3 & a_{1, k+1} l^3 \dots & (n-1) l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1, 0} l^3 & a_{i-1, 1} l^3 \dots & a_{i-1, k-1} l^3 & a_{i-1, k+1} l^3 \dots & (n-i+1) l \\ a_{i+1, 0} l^3 & a_{i+1, 1} l^3 \dots & a_{i+1, k-1} l^3 & a_{i+1, k+1} l^3 \dots & (n-i-1) l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n l & (n-1) l & (n-i+1) l & (n-i-1) l \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Możnaby jeszcze zauważyć, iż układ (V) równań linjowych da się rozwiązać także sposobem graficznym (znanym z literatury).

W tym celu należy poprowadzić szereg prostych równoległych $L_0, L_1, L_2 \dots L_n$ i prostopadłą do nich oś Y . Na prostych L odmie-

rzamy w pewnej skali współczynniki przy niewiadomych $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, t$, oraz wyrazy wolne ψ , jako odcinki, odmierzane od osi Y . W ten sposób otrzymamy szeregi punktów:

$$\begin{matrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0, n-1} & P_{0t} & P_{0\psi} & \text{na prostej } L_0 & (\text{równ. } 0) \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1, n-1} & P_{1t} & P_{1\psi} & \text{„} & \text{„} & L_1 & (\text{„} & 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Chcąc wyrugować np. niewiadomą A_i z równań (0) i (k) łączymy punkty P_{0i}, P_{ki} zapomocą prostej i przez punkt przecięcia tej prostej z osią Y prowadzimy prostą L' , równoległą do prostych L_0, L_1, \dots . Punkty przecięcia odcinków, łączących odpowiednie punkty na prostych L_0, L_k z prostą L' odpowiadają współczynnikom nowego równania linowego, w którym niewiadoma A_i została wyeliminowana.

Postępując dalej w sposób analogiczny dochodzimy do układu równań zawierającego o jedną niewiadomą mniej, niż układ (V) i t. d., aż wreszcie dojdziemy do równań o jednej niewiadomej.

Poniżej podano kilka przykładów na obliczenie reakcji belki trój- i czteroprzęsłowej sposobem analitycznym, nie graficznym.

1) Belka trójprzęsłowa, obciążona równymi ciężarami skupionymi działającymi w połowie każdego przęsła

$$\bar{D}_3 = \begin{vmatrix} 9l^3 & \frac{14}{3}l^3 & \frac{4}{3}l^3 & 3l \\ \frac{14}{3}l^3 & \frac{8}{3}l^3 & \frac{5}{6}l^3 & 2l \\ \frac{4}{3}l^3 & \frac{5}{6}l^3 & \frac{1}{3}l^3 & l \\ 3l & 2l & l & 0 \end{vmatrix} = -\frac{5}{12}l^8$$

$$\bar{D}_{003} = -\frac{2}{3}l^5 \quad \bar{D}_{013} = -\frac{3}{2}l^5 \quad \bar{D}_{023} = -1l^5$$

$$\bar{D}_{103} = -\frac{3}{2}l^5 \quad \bar{D}_{113} = -4l^5 \quad \bar{D}_{123} = -\frac{7}{2}l^5$$

$$\bar{D}_{203} = -1l^5 \quad \bar{D}_{213} = -\frac{7}{2}l^5 \quad \bar{D}_{223} = -4l^5$$

$$\bar{D}_{303} = +\frac{1}{36}l^7 \quad \bar{D}_{313} = +\frac{1}{6}l^7 \quad \bar{D}_{323} = +\frac{2}{3}l^7$$

$$\psi_0 = Pl^3 \left[\frac{81-0}{12} + \frac{1}{48}(1+27+125) \right] = \frac{159}{16}Pl^3$$

$$\psi_1 = Pl^3 \left[\frac{81-1}{12} + \frac{1}{48}(27+125) - \frac{1}{8}(9+25) \right] = \frac{67}{12}Pl^3$$

$$\psi_2 = Pl^3 \left[\frac{81-16}{12} + \frac{1}{48} \cdot 125 - \frac{2}{8} \cdot 25 \right] = \frac{85}{48} Pl^3$$

$$\psi_3 = \Sigma(Pe, Qd) = P \left(\frac{5l}{2} + \frac{3l}{2} + \frac{l}{2} \right) = \frac{9}{2} Pl$$

$$A_3 = A_0 = \left[\left(\frac{159}{16} \right) \left(-\frac{2}{3} \right) - \left(\frac{67}{12} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) + \left(\frac{85}{48} \right) (-1) - \right. \\ \left. - \left(\frac{9}{2} \right) \left(\frac{1}{36} \right) \right] Pl^3 : \left(-\frac{5}{12} l^3 \right) = \frac{7}{20} P = 0.35 P$$

$$A_1 = A_2 = \left[\left(-\frac{159}{16} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) + \left(\frac{67}{12} \right) (-4) - \left(\frac{85}{48} \right) \left(-\frac{7}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{9}{2} \right) \left(\frac{1}{36} \right) \right] Pl^3 : \left(-\frac{5}{12} l^3 \right) = \frac{23}{20} P = 1.15 P$$

2) Belka trójprzęsłowa, obciążona w każdym przęśle dwoma ciężarami skupionymi, w $1/3$ i $2/3$ rozpiętości przęśla. \bar{D}_3 , \bar{D}_{ik3} jak poprzednio

$$\psi_0 = Pl^3 \left[\frac{2(81-0)}{12} + \frac{1}{162} (1^3 + 2^3 + 4^3 + 5^3 + 7^3 + 8^3) \right] = 20 Pl^3$$

$$\psi_1 = Pl^3 \left[\frac{2(81-1)}{12} + \frac{1}{162} (4^3 + 5^3 + 7^3 + 8^3) - \frac{1}{18} (4^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2) \right] = \frac{101}{9} Pl^3$$

$$\psi_2 = Pl^3 \left[\frac{2(81-16)}{12} + \frac{1}{162} (7^3 + 8^3) - \frac{2}{18} (7^2 + 8^2) \right] = \frac{32}{9} Pl^3$$

$$\psi_3 = \Sigma(Pe, Qd) = 9 Pl$$

$$A_0 = A_3 = \frac{11}{15} P = 0.7333 P$$

$$A_1 = A_2 = \frac{34}{15} P = 2.2667 P$$

3) Belka trójprzęsłowa, obciążona w każdym przęśle trzema ciężarami skupionymi, działającymi w $1/4$, $2/4$ i $3/4$ rozpiętości przęśla.

$$\psi_0 = Pl^3 \left[\frac{3(81-0)}{12} + \frac{1}{384} (1^3 + 2^3 + 3^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 9^3 + 10^3 + 11^3) \right] = \frac{963}{32} Pl^3$$

$$\psi_1 = Pl^3 \left[\frac{3(81-1)}{12} + \frac{1}{384} (5^3 + 6^3 + 7^3 + 9^3 + 10^3 + 11^3) - \frac{1}{32} (5^2 + 6^2 + \dots) \right] = \\ = \frac{135}{8} Pl^3$$

$$\psi_2 = Pl^3 \left[\frac{3(81-16)}{12} + \frac{1}{384} (9^3 + 10^3 + 11^3) - \frac{2}{32} (9^2 + 10^2 + 11^2) \right] = \frac{171}{32} Pl^3$$

$$\psi_3 = \Sigma(Pe, Qd) = \frac{27}{2} Pl$$

$$A_0 = A_3 = \frac{9}{8} P = 1.125 P$$

$$A_1 = A_2 = \frac{27}{8} P = 3.375 P$$

4) Belka czteroprzęsłowa, obciążona ciężarami skupionymi, działającymi w połowie każdego przęsła

$$\bar{D}_4 = \begin{vmatrix} \frac{64}{3} l^3 & \frac{27}{2} l^3 & \frac{20}{3} l^3 & \frac{11}{6} l^3 & 4l \\ \frac{27}{2} l^3 & 9l^3 & \frac{14}{3} l^3 & \frac{4}{3} l^3 & 3l \\ \frac{20}{3} l^3 & \frac{14}{3} l^3 & \frac{8}{3} l^3 & \frac{5}{6} l^3 & 2l \\ \frac{11}{6} l^3 & \frac{4}{3} l^3 & \frac{5}{6} l^3 & \frac{1}{3} l^3 & l \\ 4l & 3l & 2l & l & 0 \end{vmatrix} = -\frac{7}{27} l^{11}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{004} &= -\frac{5}{12} l^8 & \bar{D}_{014} &= -\frac{17}{18} l^8 & \bar{D}_{024} &= -\frac{2}{3} l^8 & \bar{D}_{034} &= -\frac{1}{6} l^8 \\ \bar{D}_{104} &= -\frac{17}{18} l^8 & \bar{D}_{114} &= -\frac{23}{9} l^8 & \bar{D}_{124} &= -\frac{22}{9} l^8 & \bar{D}_{134} &= -1 l^8 \\ \bar{D}_{204} &= -\frac{2}{3} l^8 & \bar{D}_{214} &= -\frac{22}{9} l^8 & \bar{D}_{224} &= -\frac{32}{9} l^8 & \bar{D}_{234} &= -\frac{22}{9} l^8 \\ \bar{D}_{304} &= -\frac{1}{6} l^8 & \bar{D}_{314} &= -1 l^8 & \bar{D}_{324} &= -\frac{22}{9} l^8 & \bar{D}_{334} &= -\frac{23}{9} l^8 \\ \bar{D}_{404} &= +\frac{1}{54} l^{10} & \bar{D}_{414} &= +\frac{1}{36} l^{10} & \bar{D}_{424} &= +\frac{1}{9} l^{10} & \bar{D}_{434} &= +\frac{5}{12} l^{10} \end{aligned}$$

$$\psi_0 = Pl^3 \left[\frac{256-0}{12} + \frac{1}{48} (1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3) \right] = \frac{95}{3} Pl^3$$

$$\psi_1 = Pl^3 \left[\frac{256-1}{12} + \frac{1}{48} (3^3 + 5^3 + 7^3) - \frac{1}{8} (3^2 + 5^2 + 7^2) \right] = \frac{339}{16} Pl^3$$

$$\psi_2 = Pl^3 \left[\frac{256-16}{12} + \frac{1}{48} (5^3 + 7^3) - \frac{2}{8} (5^2 + 7^2) \right] = \frac{45}{4} Pl^3$$

$$\psi_3 = Pl^3 \left[\frac{256-81}{12} + \frac{1}{48} \cdot (7^3) - \frac{3}{8} \cdot (7^2) \right] = \frac{161}{48} Pl^3$$

$$\psi_4 = 8 Pl$$

$$A_4 = A_0 = \frac{\bar{D}_{004}}{\bar{D}_4} \psi_0 - \frac{\bar{D}_{104}}{\bar{D}_4} \psi_1 + \frac{\bar{D}_{204}}{\bar{D}_4} \psi_2 - \frac{\bar{D}_{304}}{\bar{D}_4} \psi_3 + \frac{\bar{D}_{404}}{\bar{D}_4} \psi_4 = \frac{19}{56} P$$

$$A_1 = A_3 = \frac{17}{14} P$$

$$A_2 = \frac{25}{28} P$$

5) Belka czteroprzęsłowa, obciążona ciężarami skupionymi w $1/3$ i $2/3$ rozpiętości każdego przęsła.

$$\psi_0 = Pl^3 \left[\frac{2(256-0)}{12} + \frac{1}{162} (1^3 + 2^3 + 4^3 + 5^3 + 7^3 + 8^3 + 10^3 + 11^3) \right] = \frac{572}{9} Pl^3$$

$$\psi_1 = Pl^3 \left[\frac{2(256-1)}{12} + \frac{1}{162} (4^3 + 5^3 + 7^3 + 8^3 + 10^3 + 11^3) - \frac{1}{18} (4^2 + 5^2 + \dots) \right] = \frac{255}{6} Pl^3$$

$$\psi_2 = Pl^3 \left[\frac{2(256-16)}{12} + \frac{1}{162} (7^3 + 8^3 + 10^3 + 11^3) - \frac{2}{18} (7^2 + 8^2 + \dots) \right] = \frac{203}{9} Pl^3$$

$$\psi_3 = Pl^3 \left[\frac{2(256-81)}{12} + \frac{1}{162} (10^3 + 11^3) - \frac{3}{18} (10^2 + 11^2) \right] = \frac{121}{18} Pl^3$$

$$\psi_4 = 16 Pl$$

$$A_0 = A_4 = \frac{5}{7} P$$

$$A_1 = A_3 = \frac{50}{21} P$$

$$A_2 = \frac{38}{21} P$$

B) Belki ciągłe na podporach leżących w równej wysokości o przęsłach nierównych.

Dla uzyskania równań i współczynników przy niewiadomych reakcjach w formie możliwie prostej, oznaczmy przez L — całkowitą długość belki ciągłej, $\alpha_i L$ — odległość od skrajnej lewej podpory do punktu działania reakcji A_i (przyczem oczywiście $\alpha_n = 1$).

Przy tych oznaczeniach układ $(n+1)$ równań, służący do wyznaczenia reakcyj, przyjmie postać:

$$(VI) \begin{cases} (0) & \alpha_{00} & L^3 \cdot A_0 + \alpha_{01} & L^3 A_1 \dots + t \cdot L = \psi_0 \\ (1) & \alpha_{10} & L^3 \cdot A_0 + \alpha_{11} & L^3 A_1 \dots + t(1-\alpha_1) L = \psi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1) & \alpha_{n-1,0} & L^3 \cdot A_0 + \alpha_{n-1,1} & L^3 A_1 \dots + t(1-\alpha_{n-1}) L = \psi_{n-1} \\ (n) & & L \cdot A_0 + L(1-\alpha_1) \cdot A_1 \dots & = \Sigma(Pe, Qd) \end{cases}$$

przyczem:

$$\alpha_{00} = \frac{1}{L^3} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{L^3} \int_{\alpha_1 L}^L (x - \alpha_1 L)^2 dx = \frac{(1-\alpha_1)^3}{3}$$

.....

$$a_{ii} = \frac{1}{L^3} \int_{\alpha_i L}^L (x - \alpha_i L)^2 dx = \frac{(1 - \alpha_i)^3}{3} \dots \dots \dots (11)$$

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{1}{L^3} \int_{\alpha_k L}^L (x - \alpha_i L)(x - \alpha_k L) dx$$

$$= \frac{1}{L^3} \int_{\alpha_k L}^L (x - \alpha_k L)(x - \alpha_k L + \alpha_k L - \alpha_i L) dx$$

$$a_{ik} = a_{ki} + (\alpha_k - \alpha_i) \frac{(1 - \alpha_k)^2}{2} \dots \dots \dots (12)$$

„Wyznacznik podstawowy“ układu równań (VI) jest więc wyznacznikiem symetrycznym, którego wyrazy na głównej przekątnej są określone wzorem (11) zaś inne wyrazy wzorem (12).

Dla wyznaczenia funkcji ψ_i w najogólniejszym wypadku rozpatrzymy, jaki wpływ na wielkość tych funkcji wywierają ciężary skupione, obciążenia jednostajnie rozłożone, wreszcie obciążenia ciągle niejednostajnie rozłożone:

1) Ciężar skupiony P_k , położony w odstępnie $\beta_k L$ od lewej podpory, przyczynia się do zwiększenia funkcji ψ_i o wielkość

$$\Delta_1 \psi_i = \int_{\alpha_i L}^L P_k (x - \alpha_i L)(x - \beta_k L) dx, \text{ o ile } \beta_k < \alpha_i \dots (13)$$

względnie o wielkość

$$\Delta_2 \psi_i = \int_{\beta_k L}^L P_k (x - \alpha_i L)(x - \beta_k L) dx, \text{ o ile } \beta_k > \alpha_i \dots (14)$$

2) Obciążenie jednostajnie rozłożone „ q “ na długości od $\gamma_1 L$ do $\gamma_2 L$ (licząc od lewej podpory), przyczynia się do zwiększenia funkcji ψ_i o wielkość

$$\Delta_3 \psi_i = \int_{\alpha_i L}^L q (\gamma_2 - \gamma_1) L \cdot (x - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} L)(x - \alpha_i L) dx \text{ dla } \gamma_1 < \gamma_2 \leq \alpha_i \dots (15)$$

względnie o wielkość

$$\Delta_4 \psi_i = \int_{\gamma_1 L}^{\gamma_2 L} q \frac{(x - \gamma_1 L)^2}{2} (x - \alpha_i L) dx +$$

$$+ \int_{\gamma_2 L}^L q (\gamma_2 - \gamma_1) L \cdot (x - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} L)(x - \alpha_i L) dx \dots (16)$$

3) Obciążenie ciągłe p_x , niejednostajnie rozłożone na belce na długości od $\delta_1 L$ do $\delta_2 L$ (licząc od lewej podpory) zwiększa funkcję ψ_i o wielkość

$$\Delta_5 \psi_i = \int_{\alpha_i L}^L P_x \cdot (x - x_0)(x - \alpha_i L) dx \text{ dla } \delta_1 < \delta_2 \leq \alpha_i \dots (17)$$

(przyczem P_x oznacza wielkość powierzchni obciążeń $= \int_{\delta_1 L}^{\delta_2 L} p_x dx$
 x_0 — odległość środka ciężkości tej powierzchni od lewej podpory)
 względnie o wielkość

$$\Delta_{\delta} \psi_i = \int_{\delta_1 L}^{\delta_2 L} (x - \alpha_i L) dx \cdot \int_{x'=\delta_1 L}^{x'=x} p_x \cdot dx' (x - x') + \\ + \int_{\delta_2 L}^L (x - \alpha_i L) \cdot P_x \cdot (x - x_0) dx \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Po wyznaczeniu funkcji ψ_i dalszy tok postępowania przy obliczaniu reakcyj analogiczny, jak dla belek równoprzęślowych.

C) Belki ciągłe na podporach, leżących w różnej wysokości.

W tym wypadku należy uwzględnić, iż pochodne cząstkowe wzmiankowanej na początku funkcji F względem poszczególnych reakcyj nie są zerem, lecz równają się rzędnym odnośnych podpór. Przez „rzędne“ rozumiemy tu wysokości podpór ponad (a raczej popod) pewnym poziomem porównawczym, który — dla uproszczenia — najlepiej przyjąć na wysokości skrajnej prawej podpory.

Wówczas układ równań dla wyznaczania niewiadomych reakcyj przyjmie postać:

$$(VII) \begin{cases} a_{00} L^3 \cdot A_0 + a_{01} L^3 \cdot A_1 + \dots + a_{0, n-1} L^3 \cdot A_{n-1} + t \cdot L = \psi_0 - EI y_0 \\ a_{10} L^3 \cdot A_0 + a_{11} L^3 \cdot A_1 + \dots + a_{1, n-1} L^3 \cdot A_{n-1} + t L(1 - \alpha_1) = \psi_1 - EI y_1 \\ \dots \\ a_{i0} L^3 \cdot A_0 + a_{i1} L^3 \cdot A_1 + \dots + a_{i, n-1} L^3 \cdot A_{n-1} + t L(1 - \alpha_i) = \psi_i - EI y_i \\ \dots \\ a_{n-1, 0} L^3 A_0 + a_{n-1, 1} L^3 A_1 + \dots + a_{n-1, n-1} L^3 A_{n-1} + t L(1 - \alpha_{n-1}) = \psi_{n-1} - EI y_{n-1} \\ L \cdot A_0 + L(1 - \alpha_1) A_1 + \dots + L(1 - \alpha_{n-1}) A_{n-1} = \Sigma(Pe, Qd) \end{cases}$$

W powyższych równaniach rzędne y_k oznaczają różnice wysokości między odnośną podporą (w miejscu reakcji A_k) a prawą skrajną podporą. Wielkość tych rzędnych należy uważać za dodatnią o ile dotycząca k — ta podpora leży niżej, niż poziom porównawczy, przechodzący przez prawą skrajną podporę, w przeciwnym zaś razie za ujemną.

D) Belki ciągłe na sprężystości uginających się podporach.

Pod wyrażeniem „sprężystości uginające się“ podpory rozumiemy tu takie podpory, które uginają się proporcjonalnie do wielkości reakcyj. Tego rodzaju podpory spotykamy — przynajmniej w przybliżeniu — przy szynach kolejowych, przyczem oczywiście o sprężystym ugięciu

może być mowa tylko w razie reakcji dodatnich. W tym wypadku pochodne cząstkowe funkcji $F=U+t_1\varphi_1+t_2\varphi_2$ względem poszczególnych reakcji są do tych reakcji proporcjonalne, wobec czego — dla belki równoprzęsłowej — otrzymamy następujący układ równań:

$$(VIII) \begin{cases} a_{00}l^3 \cdot A_0 + a_{01}l^3 \cdot A_1 + \dots & EIt_1 + EIt_2 \cdot nl = \psi_0 - E \cdot I \cdot c \cdot A_0 \\ a_{10}l^3 \cdot A_0 + a_{11}l^3 \cdot A_1 + \dots & EIt_1 + EIt_2(n-1)l = \psi_1 - E \cdot I \cdot c \cdot A_1 \\ \dots & \dots \\ a_{n-1,0}l^3 A_0 + a_{n-1,1}l^3 A_1 + \dots & EIt_1 + EIt_2 \cdot l = \psi_{n-1} - E \cdot I \cdot c \cdot A_{n-1} \\ & EIt_1 = -E \cdot I \cdot c \cdot A_n \\ A_0 + A_1 + \dots A_{n-1} & = \Sigma(P, Q) \\ A_0 \cdot nl + A_1(n-1)l + \dots A_{n-1} \cdot l & = \Sigma(Pc, Qd) \end{cases}$$

Po wyznaczeniu współczynnika $t_1 = -cA_n$, oraz po wprowadzeniu oznaczeń

$$\begin{aligned} E \cdot I \cdot c &= \varphi \\ EIt_2 &= t \end{aligned}$$

otrzymamy ostatecznie układ równań

$$(IX) \begin{cases} (a_{00}l^3 + \varphi) \cdot A_0 + a_{01}l^3 A_1 + \dots & -\varphi \cdot A_n + t \cdot nl = \psi_0 \\ a_{10} \cdot A_0 + (a_{11}l^3 + \varphi) A_1 + \dots & -\varphi A_n + t(n-1)l = \psi_1 \\ \dots & \dots \\ a_{n-1,0} A_0 + a_{n-1,1} A_1 + \dots & (a_{n-1,n-1} + \varphi) A_{n-1} - \varphi A_n + t \cdot l = \psi_{n-1} \\ A_0 + A_1 + \dots & A_{n-1} + A_n = \Sigma(P, Q) \\ A_0 \cdot nl + A_1(n-1)l + \dots & A_{n-1} \cdot l = \Sigma(Pc, Qd) \end{cases}$$

„Wyznacznik rozszerzony“ utworzony ze współczynników przy niewiadomych w układzie równań przyjmie postać

$$\overline{\overline{D}}_n = \begin{vmatrix} a_{00}l^3 + \varphi & a_{01}l^3 & a_{02}l^3 \dots & a_{0,n-1}l^3, & -\varphi & nl \\ a_{10}l^3 & a_{11}l^3 + \varphi & a_{12}l^3 \dots & a_{1,n-1}l^3, & -\varphi & (n-1)l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i0}l^3 & a_{i1}l^3 \dots & a_{ii}l^3 + \varphi \dots & a_{i,n-1}l^3, & -\varphi & (n-i)l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,0}l^3 & a_{n-1,1}l^3 \dots & a_{n-1,i}l^3 \dots & a_{n-1,n-1}l^3 + \varphi, & -\varphi & l \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ n \cdot 1 & (n-1)l \dots & (n-i) \cdot l \dots & l & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Obliczenie reakcji podporowych, jako prostych funkcji minorów $\overline{\overline{D}}_{i,k,n}$, utworzonych z wyznacznika $\overline{\overline{D}}_n$, oraz wielkości ψ_i odbywa się w dalszym ciągu w sposób analogiczny, jak w poprzednio rozpatrywanych wypadkach.

Reasumując powyższe uwagi widzimy, że obliczenie reakcji podporowych belek ciągłych przy pomocy zasady Castigliana sprowadzić można w każdym razie przedewszystkiem do wyznaczenia pewnego

charakterystycznego „wyznacznika podstawowego“, bardzo prostej budowy, jednakowego dla wszystkich belek, posiadających tę samą ilość pręseł, a proporcjonalne do siebie rozpiętości poszczególnych pręseł. W dalszym ciągu należy utworzyć „wyznacznik rozszerzony“ (wynikający bezpośrednio z wyznacznika podstawowego), obliczyć jego wartość oraz wartość jego minorów. Ta ostatnia czynność jest dosyć mozolna — o ile jednak chodzi o belki równoprzęsłowe, to trzeba zauważyć, iż raz obliczone minory dla belki o pewnej ilości pręseł, stanowiące wielokrotność pewnej potęgi rozpiętości l jednego pręśla, mogą następnie służyć za podstawę do wyznaczania reakcji dla dowolnego rodzaju obciążenia. Wreszcie musimy obliczyć wielkości ψ_i , zależne od obciążeń zewnętrznych (i ewentualnie wysokości podpór), a wkońcu wyznaczyć reakcje jako proste funkcje linjowe wielkości ψ_i .

Na zakończenie możnaby jeszcze zwrócić uwagę na fakt, iż równania, służące do wyznaczania reakcji podporowych, wyprowadzone wedle wyżej określonego sposobu, odznaczają się nadzwyczaj symetryczną budową i stanowią niejako naturalne uzupełnienie dwóch ogólnych równań równowagi, służących do obliczenia reakcji belek jednoprzęsłowych.

Załomy spadków drogowych w sąsiedztwie mostów.

Niweleta drogowa doznaje prawie z reguły w sąsiedztwie większych obiektów załomów, wynikających bądź to z naturalnego ukształtowania terenu, bądź też z konieczności takiego usytuowania mostu, by umożliwiony był przepływ wielkich wód, bez narażenia na niebezpieczeństwo konstrukcji mostowej. Z pierwszym wypadkiem będziemy mieli do czynienia w terenie pagórkowatym i górskim, drugi będzie regułą w terenie nizinnym.

Spowodowany, którymkolwiek z wymienionych powodów załom niwelety może być wypukły lub wklęsły. Z uwagi na zupełnie odmienny charakter oddziaływania tak na pojazd jakoteż na drogę załomów wypukłych a wklęsłych koniecznym będzie oddzielne omówienie obu typów.

Dopóki na drodze panował niepodzielnie powolny ruch zaprzęgowy, sprawa odpowiedniego wykształcenia załomów spadków była do pewnego stopnia rzeczą obojętną. Obowiązywała zasada, by o ile możliwości pozostawić przed i za mostem pewną partję, o długości bliżej nieokreślonej (10—30 *m*) poziomą, załom spadku zaokrąglić pewną, znowu bliżej nieokreśloną pionową krzywą wyrównawczą i sprawa na tem się kończyła. Stanowisko to, będące wynikiem czystej empirji, było do pewnego stopnia nawet słuszne, albowiem pojazd zaprzęgowy nie przedstawiał właściwie w normalnych warunkach żadnego niebezpieczeństwa ani dla ruchu ani też dla drogi względnie obiektu.

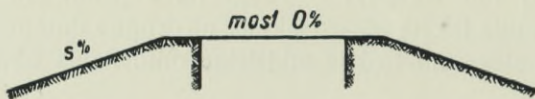
Sprawa zmieniła się jednakże diametralnie z chwilą ukazania się na drodze pojazdu mechanicznego, którego zasadniczą cechą, różniącą go od pojazdu zaprzęgowego jest chyżość. Zwiększenie chyżości przejazdu powoduje w rezultacie konieczność szczegółowego zajęcia się bezpieczeństwem ruchu oraz zbadania tych wszystkich momentów, które oddziałują w sposób dodatni lub ujemny na pojazd i drogę. Ażeby bodaj pobieżnie zilustrować różnicę pomiędzy powolnym ruchem zaprzęgowym a szybkobieżnym motorowym, zwróć uwagę, iż kiedy

przy pierwszym mamy do czynienia właściwie tylko z oddziaływaniem statycznym na drogę lub konstrukcję mostową, to przy drugim liczy się już musimy z oddziaływaniami dynamicznymi, często, w zależności od stanu nawierzchni i chyżości, kilkakrotnie większymi niżli oddziaływanie statyczne. Ponieważ zaś wszelkie załomy spadków, nie ubezpieczone odpowiednio, są powodem do uderzeń wozu o drogę, a więc do zwiększania oddziaływań niszczących tak drogę jakoteż pojazd, przeto sprawa szczegółowego zbadania tego momentu jest szczególnie ważną w sąsiedztwie obiektów, celem uniknięcia przykrych i niepożądanych następstw. Również, jak zobaczymy, wielką rolę odgrywać tu będzie sprawa bezpieczeństwa ruchu.

Uwzględniając ruch samochodowy nie będziemy mogli już polegać tylko na wystarczającej dotąd empirji, lecz wszystkie elementy, które tutaj będą miarodajne, a więc odległości załomów od początku lub końca konstrukcji mostowej, promienie krzywizn wyrównawczych i t. p. będą musiały być ściśle obliczone.

a) Załom wypukły.

Normalnym typem, który powinien być omówiony, test ten, iż konstrukcja mostowa wykonana jest w poziomie, natomiast rampy



Rys. 1.

dojazdowe wznoszą się ku mostowi z pewnym spadkiem $s\%$. W praktyce spotykamy, zresztą bardzo rzadko, również obiekty o niwelecie uło-

żonej w pewnym spadku; o ile by z tym wypadkiem miało się do czynienia, nie zachodzi żadna trudność uwzględnienia w obliczeniach tego momentu.

Zastanović się winniśmy w pierwszym rzędzie, na jakie niebezpieczeństwo narażony jest pojazd w chwili przejeżdżania przez załom spadku w ogólności. Otóż mogą się tu zdarzyć następujące ewentualności:

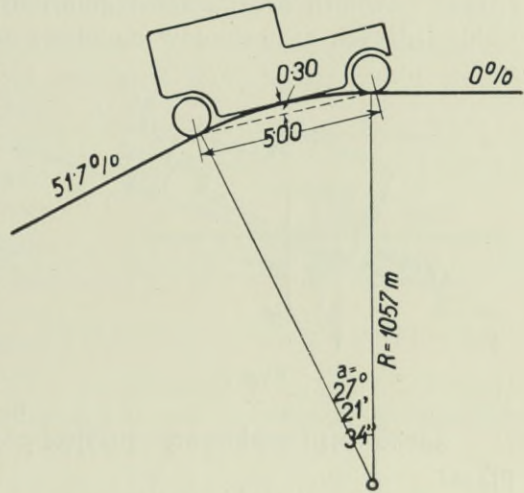
1) spód wozu może uderzyć o drogę, wskutek czego uszkodzą się nisko położone części konstrukcyjne samochodu,

2) przy szybkim ruchu, wskutek działania siły odśrodkowej nastąpić może podniesienie pojedynczych kół, względnie nawet całości wozu a w następstwie silne uderzenie samochodu o drogę lub konstrukcję mostową i

3) zanik pola widzenia niebezpieczny z uwagi na możliwość zderzenia się dwóch naprzeciw siebie jadących samochodów, z których jeden, z jakichkolwiek powodów nie znajduje się po przepisanej stronie drogi.

Pierwsze dwa niebezpieczeństwa są stosunkowo mało prawdopodobne.

Przy ostrem zaokrągleniu załomu spadków, niebezpieczeństwo uderzenia dolną częścią konstrukcji samochodowej o drogę będzie tem większe, im większym będzie rozstaw osi samochodu. Przyjąwszy rozstaw ten na 5 m (autobusy), zaś wysokość ponad drogą najniżej położonych części konstrukcyjnych wozu (karter) na 30 cm zobaczymy, iż dopiero przy spadku 51% i zaokrągleniu o promieniu 1057 m jest możliwem zeknięcie się samochodu z drogą, albowiem dopiero w tym wypadku wysokość łuku wyniesie 0,30 m. Ponieważ jednak dróg o spadku 51% serjo traktować nie można, zaś promień krzywej wyrównawczej, jak zobaczymy, z innych powodów musi być większy, przeto nad tem niebezpieczeństwem dalej zastanawiać się nie potrzebujemy.



Rys. 2.

Poderwanie kół samochodu, przy przejeździe przez zaokrąglony załom nastąpić może podówczas, gdy siła odśrodkowa, działająca w tym wypadku w kierunku wprost przeciwnym do ciężaru, będzie równą, względnie nieco większą od ciężaru samochodu, zatem:

$$Z = \frac{M c^2}{R} = \frac{W c^2}{g R} > W$$

jeżeli przez Z — oznaczymy wielkość siły odśrodkowej
 W — ciężar samochodu
 c — chyżość przejazdu
 R — promień krzywej wyrównawczej
 g — przyspieszenie ziemskie.

Z powyższego wynika, że:

$$R > \frac{c^2}{9.81}$$

Jeżeli przyjmiemy, iż samochód porusza się nawet z bardzo znaczną szybkością 100 km/g = 27.8 m/s, co z uwagi na sąsiedztwo

mostu będzie prawdopodobnie wykluczone, natenczas:

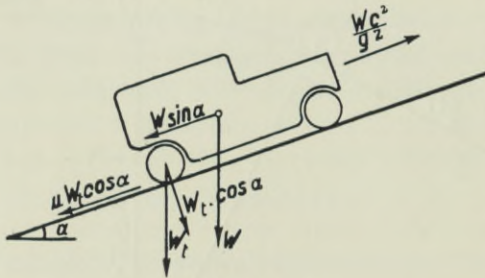
$$R = \frac{27 \cdot 8^2}{9 \cdot 81} = 79 \text{ m}$$

wystarczy już, by ominąć

niebezpieczeństwa uderzenia wozu o drogę. Zobaczymy jednakże zaraz, iż z trzeciego powodu, mianowicie możliwości zaniku pola widzenia, będziemy musieli zastosować pionowe krzywe wyrównawcze o promieniach znacznie większych, wobec czego wzgląd drugi zupełnie odpada.

Przechodząc do punktu trzeciego zaznaczyć należy, iż załom spadku powinien być tak zaokrąglony, by kierowcy dwóch, naprzeciw siebie jadących samochodów mogli się na czas spostrzec i umożliwić sobie zahamowanie wozów, o ile nie jest możliwe z jakichkolwiek powodów, wzajemne wyminięcie się.

W pierwszym rzędzie zbadamy wielkość pracy hamowania wozu jadącego na rampie ku mostowi, przy czem przyjmiemy, iż hamowanie odbywa się tylko na oś tylną.



Rys. 3.

Zachowując znakowanie przyjęte poprzednio, a nadto oznaczając przez:

- c_1 — chyżość przejazdu
- W_t — ciężar samochodu wypadający na oś tylną
- b_1 — długość drogi hamowania
- μ — współczynnik tarcia posuwistego
- α — kąt pochylenia rampy drogowej

natenczas, wielkość pracy hamowania na spadku będzie:

$$\frac{W c_1^2}{2g} = W_t \mu \cos \alpha b_1 + W \sin \alpha b_1$$

lub też z uwagi, iż możemy przyjąć $\cos \alpha = 1$

$$\frac{W c_1^2}{2g} = b_1 (\mu W_t + W \sin \alpha)$$

stąd zaś:

$$b_1 = \frac{W c_1^2}{2g (\mu W_t + W \sin \alpha)}$$

Z uwagi na małość kąta α można przyjąć $\sin \alpha = \text{tg } \alpha$ a zatem:

$$b_1 = \frac{W c_1^2}{2g (\mu W_t + W \text{tg } \alpha)}$$

Niechaj drugi samochód porusza się po poziomie w kierunku wprost przeciwnym z chyżością c_2 . Również i tutaj przypuszczamy możliwość hamowania tylko na oś tylną. Jeżeli, analogicznie jak po-

przednio, nazwiemy przez b_2 długość drogi hamowania tego samochodu, natenczas:

$$\frac{W c_2^2}{2g} = \mu W_t b_2$$

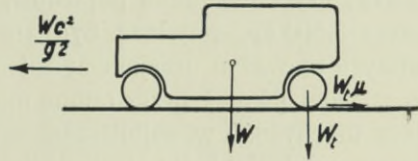
albo też:

$$b_2 = \frac{W c_2^2}{2g \mu W_t}$$

Całkowita zatem droga hamowania obu wozów wyniesie:

$$B' = b_1 + b_2 = \frac{W c_1^2}{2g (\mu W_t + W \operatorname{tg} \alpha)} + \frac{W c_2^2}{2g \mu W_t}$$

Zdać sobie jednak musimy sprawę z dwóch rzeczy, mianowicie, iż do odległości otrzymanej na podstawie powyższego wzoru należy dodać jeszcze: 1) tę odległość jaką każdy wóz przebędzie w czasie potrzebnym do zorientowania się o grożącym niebezpieczeństwie, który to czas przyjmujemy na 1'', oraz 2) iż w chwili zahamowania oba samochody nie będą się znajdowały tuż obok siebie, lecz w pewnej, niewielkiej zresztą odległości. Co do pierwszej długości, to wynosić ona będzie $e_1 + e_2$, co do drugiej, przyjmijmy ją na 5 m.



Rys. 4.

Wobec tego całkowita odległość orjentacyjna, warunkująca bezpieczeństwo ruchu wynosić będzie:

$$B = \frac{W c_1^2}{2g (\mu W_t + W \operatorname{tg} \alpha)} + \frac{W c_2^2}{2g \mu W_t} + (e_1 + e_2) + 5$$

Jak wiadomo ciężar samochodu nie jest rozdzielony równomiernie na obie osie; na oś tylną, pędną, przypada przy samochodach ciężarowych 64—75% całego ciężaru, przy osobowych 56—62%. Przyjawszy zatem przeciętną wartość:

$$W_t = 0.6 W$$

otrzymamy:

$$B = \frac{W c_1^2}{2g (0.6 \mu W + W \operatorname{tg} \alpha)} + \frac{W c_2^2}{2g 0.6 \mu W} + (e_1 + e_2) + 5$$

lub też z uwagi, iż chyżość przejazdu podajemy zwyczajnie w kilometrach na godzinę przyczem:

$$c_1 \text{ m/s} = \frac{C_1 \text{ km/h}}{3.6} \text{ i } c_2 \text{ m/s} = \frac{C_2 \text{ km/h}}{3.6}$$

otrzymamy:

$$B = \frac{W C_1^2}{3.6^2 \cdot 2g W (0.6 \mu + \operatorname{tg} \alpha)} + \frac{W C_2^2}{3.6^2 \cdot 2g \cdot 0.6 \mu W} + \frac{1}{3.6} (C_1 + C_2) + 5$$

$$\text{lub: } B = \frac{C_1^2}{254 \cdot 3 (0.6\mu + \operatorname{tg} \alpha)} + \frac{C_2^2}{152 \cdot 6 \mu} + 0.28 (C_1 + C_2) + 5.$$

Jak widzimy z powyższego wzoru, długość orientacyjna jest w wysokiej zależności od chyżości jazdy oraz szorstkości nawierzchni.

Przed dalszym rozpatrzeniem tej sprawy należy w pierwszym rzędzie zastanowić się nad oboma tymi czynnikami.

Na wolnej przestrzeni chyżość jazdy jest u nas ograniczoną dla tych pojazdów, których całkowita waga, złożona z ciężaru własnego i największego dopuszczalnego obciążenia, jest większą niż 3.500 *kg*. Jak widzimy rozchodzi się tu o samochody ciężarowe. Nadto na mostach, przed którymi umieszczono odpowiednie ostrzeżenie, szybkość ruchu pojazdów, których całkowita waga nie przekracza 3.500 *kg*, powinna być zmniejszona do granicy 20 *km/g*. Dla dalszych rozważań przyjmijmy zatem samochody osobowe, jadące tak przez most jakoteż przez rampę mostową z chyżością $e_1 = e_2 = 40$ *km/g*, która to chyżość w najbliższym sąsiedztwie mostu, gdzie ma być zredukowaną do 20 *km/g*, jest dostatecznie usprawiedliwioną. O ile by w pewnych szczególnych wypadkach należało przyjąć chyżość większą, lub też różną dla mostu i rampy, nie ma żadnej przeszkody przeciwko uwzględnieniu tego w obliczeniu.

Współczynnik tarcia posuwistego μ zależny jest od bardzo wielu czynników a w szczególności od rodzaju nawierzchni, jej chwilowego stanu (sucha lub mokra), wreszcie od rodzaju obręczy kół samochodowych, które mogą być masywami lub też pneumatykami (te ostatnie znowu w wysokim lub niskim ciśnieniu, balony, gładkie, karbowane lub zaopatrzone w napinki). Badania nad tą sprawą do dzisiaj jeszcze ukończone nie są; naogół można powiedzieć, iż w normalnych warunkach waha się wartość tego współczynnika w granicach między 0.25 do 0.50 — 0.60, przy czym pierwsza data odnosi się będzie do mokrej, oślizłej nawierzchni tłuczniowej, która w naszych warunkach jest jeszcze na drogach dominującą, wobec czego i daty uzyskane z uwzględnienia tego współczynnika, będą miały charakter ogólniejszy. Niemniej jednak przeprowadzimy obliczenia również dla wartości $\mu = 0.50$, gdyż w sąsiedztwie szczególnie większych mostów zdarzają się już coraz częściej uporządkowane i zaopatrzone w nowsze nawierzchnie partje dróg. Spadki ramp dojazdowych do mostów wahają się w granicach od 1% do 7%, przy czym ta ostatnia data jest już zupełnie wyjątkową i wymaga specjalnego zezwolenia ze strony Ministerstwa Robót Publicznych.

Odnośne długości orientacyjne przedstawiają się zatem następująco:

dla $\mu=0.25$

Spadek rampy %	C_1 km/g	C_2 km/g	Długość orientacyjna B m
1	40	40	109
2			106
3			104
4			102
5			101
6			99
7			98

dla $\mu=0.50$

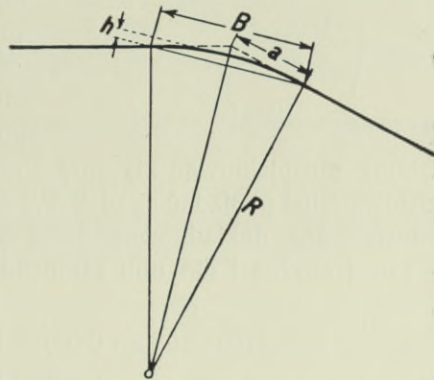
Spadek rampy %	C_1 km/g	C_2 km/g	Długość orientacyjna B m
1	40	40	69
2			68
3			68
4			67
5			67
6			66
7			66

Przyjawszy, iż krzywa wyrównująca załom spadku będzie łukiem kołowym, możemy obecnie na podstawie obliczonych długości orientacyjnych znaleźć promień krzywizny. W tym wypadku będzie nam jednak potrzebne założenie odnoszące się do wysokości oka kierowcy siedzącego na samochodzie, które przyjmiemy z uwagi na obecną niską budowę nadwozi na 1.20 m.

Uwzględniając uboczny szkie otrzymamy:

$$\frac{B}{2} = \sqrt{R^2 - (R - h)^2}$$

$$\text{a stąd } R = \frac{B^2 + 4h^2}{8h}$$



Rys. 5.

Obliczone na podstawie tego wzoru promienie krzywizny znajdują się w poniżej podanym zestawieniu, przy czym wobec bardzo nieznacznych kątów środkowych, długość stycznych przyjąć można z dostateczną dokładnością za połowę wartości długości orientacyjnej.

Spadek %	Dług. orient. B		Dług. styczn. S		Promień krzyw. R	
	$\mu=0.25$	$\mu=0.50$	$\mu=0.25$	$\mu=0.50$	$\mu=0.25$	$\mu=0.50$
1	109	69	54.5	34.5	1238	496
2	106	68	53.0	34.0	1171	482
3	104	68	52.0	34.0	1127	482
4	102	67	51.0	33.5	1084	468
5	101	67	50.5	33.5	1063	468
6	99	66	49.5	33.0	1022	454
7	98	66	49.0	33.0	1000	454

Z powyższego zestawienia widzimy, że:

1) Promień krzywizny wyrównawczej, a co zatem idzie również długość stycznej jest w wysokiej zależności od współczynnika tarcia posuwistego. Im ten współczynnik jest większy, tem mniejszym promieniem może być zatoczona krzywa wyrównawcza, tem mniejszą też wypadnie długość stycznej.

2) Przy zachowaniu przyjętych chyżości wypadają z uwagi na bezpieczeństwo ruchu promienie krzywych wyrównawczych stosunkowo znaczne. W związku z tem otrzymujemy również znaczne długości stycznych. Dla wartości $\mu=0.50$ przyjmujemy przeciętną wartość $R=500 m$.

3) Ponieważ tak znacznych długości stycznych, nie zawsze używać będziemy mogli, przeto w pewnych wypadkach okaże się koniecznem indywidualne ustalenie dopuszczalnej maksymalnej chyżości przejazdu przez rampę mostową.

Ostatni punkt będziemy się starali poprzeć przykładem. Przypuśćmy, iż w danym wypadku nie możemy zaprojektować stycznej dłuższej niżli $30.0 m$, przyczem rampa mostowa musi posiadać spadek 3% zaś $\mu=0.25$. Natenczas przyjąwszy z dostateczną dokładnością, iż $B=60 m$ otrzymamy przy założeniu tej samej chyżości dla obu samochodów:

$$60 = \frac{C^2}{254 \cdot 3 (0.6 \times 0.25 + 0.03)} + \frac{C^2}{152.6 \times 0.25} + 2 \times 0.28 C + 5$$

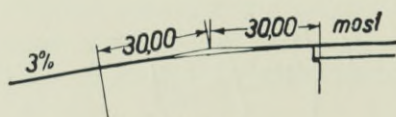
skąd

$$C = 28.5 \text{ km/g}$$

zaś promień krzywej wyrównawczej:

$$R = \frac{60^2 + 4 \cdot 1.4^2}{8 \times 1.4} = 322 m.$$

Nie od rzeczy będzie uwaga, iż przeprowadzone obliczenie posiada do pewnego stopnia charakter przybliżony z tego powodu, iż przy zaokrągleniu załomu, mamy w każdym punkcie z innym spadkiem do czynienia. Ścisłe uwzględnienie tego momentu doprowadziłoby w rezultacie do nieznacznego powiększenia długości orjentacyjnej; sprawa ta jednak nie posiada głębszego znaczenia już choćby z tego powodu, iż musimy i tak poprzestać na przybliżeniu nietylko z uwagi na współczynnik tarcia posuwistego, lecz również na przyjętą wysokość h . Co do tej ostatniej daty zwrócę uwagę, iż w nowoczesnej budowie wozów panuje tendencja obniżania środka ciężkości samochodu, a co zatem idzie i siedzenia kierowcy. Im zaś h przyjmujemy mniejsze, tem bardziej pogarszamy sobie warunki przejrzystości drogi.



Rys. 6.

Z drugiej strony zwrócić musimy uwagę, iż obecnie coraz częściej ukazują się na drodze samochody hamowane na obie osie. O ile by ten typ wozu w przyszłości miał wyprzeć dotychczasowe konstrukcje, natenczas dla drogi sprawa przedstawiałaby się korzystniej, albowiem długość drogi hamowania wypadłaby w tym wypadku krótsza. W równaniu na pracę hamowania należałoby zatem przyjąć:

$W_i = W$ wobec czego długość orientacyjna

$$B = \frac{W C_1^2}{3 \cdot 6^2 \cdot 2 g W (\mu + \operatorname{tg} \alpha)} + \frac{W C_2^2}{3 \cdot 6^2 \cdot 2 g \mu W} + 0 \cdot 28 (C_1 + C_2) + 5$$

$$B = \frac{C_1^2}{254 \cdot 3 (\mu + \operatorname{tg} \alpha)} + \frac{C_2^2}{254 \cdot 3 \mu} + 0 \cdot 28 (C_1 + C_2) + 5$$

co stanowiłoby 25—30% zmniejszenia długości hamowania.

Co do kształtów krzywych wyrównawczych, to stosowane są przeważnie łuki kołowe. Parabole, których używa się tu i ówdzie w Ameryce nie mają właściwie tego uzasadnienia, jakie znajdujemy dla nich przy poziomych krzywych przejściowych.

Z praktycznego punktu widzenia, pionową krzywą wyrównawczą nie wykonuje się w sposób ciągły lecz jako linię łamaną, składającą się z szeregu fragmentów prostych o długościach wynikających z uwzględnienia tej zasady, by różnica spadków pomiędzy poszczególnymi odcinkami prostymi nie przekraczała 2% do 2·5%.

b) Załom wklęsły.

Przy załomach wklęsłych, które w sąsiedztwie mostów wielkich trafiają się dość wyjątkowo i to przeważnie tylko w terenach górskich lub podgórszych, stosunki ukształtują się znacznie korzystniej.

Nie może tu być już naturalnie mowy, ani o możliwości uszkodzenia spodniej części samochodu, ani też o jakimkolwiek ograniczeniu przejrzystości przejazdu.

Natomiast pozostaje do rozpatrzenia tylko oddziaływanie siły odśrodkowej, która w tym wypadku powiększa nacisk na resory i osie, a co zatem idzie i na drogę względnie obiekt drogowy. Ten ostatni wypadek zwiększania obciążeń ruchomych na obiekt drogowy zajdzie przeważnie tylko w odniesieniu do niewielkich przepustów usytuowanych często w najniższym punkcie lokalnego wgłębienia, albowiem większe mosty, w wypadku posiadania rampy spadającej ku mostowi, nigdy nie znajdują się usytuowane w obrębie poziomej krzywej przejściowej. Wielkość promienia krzywizny wyrównawczej będzie tu zależną od wymogów stawianych w odniesieniu do dopuszczalnej wielkości dodatkowych ciśnień. Im ciśnienie dodatkowe dopuścimy większe, tem promienie wypadną mniejsze.

Jeżeli przykładowo przyjmiemy, iż zwiększenie nacisku z powodu działania siły odśrodkowej nie powinno przekroczyć 30% normalnego nacisku statycznego, natenczas:

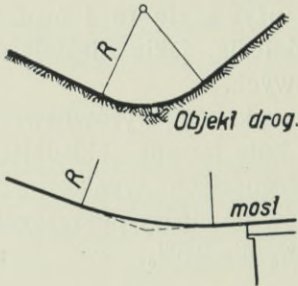
$$Z = \frac{M c^2}{R} = \frac{W c^2}{g R} = 0.3 W \quad \text{a stąd}$$

$$R = \frac{C^2}{0.3 g} = 0.34 C^2$$

Wziąwszy pod uwagę nawet bardzo znaczną chyżość $120 \text{ km/g} = 33 \text{ m/g}$ (wielkość ta będzie usprawiedliwioną z uwagi na ruch wozu ze spadkiem) otrzymujemy:

$$R = 0.34 \cdot 33^2 = 370 \text{ m.}$$

Widzimy z tego, że nawet w bardzo niekorzystnych warunkach ze względu na ruch, promienie krzywizn wyrównujących załomy spaków nie przekroczą tutaj wartości 500 m, którą zwyczajnie przyjmujemy jako wartość zasadniczą. Z uwzględnienia tego promienia oraz spadków wypadną nam wartości pojedynczych stycznych, umieszczone w obok podanem zestawieniu, które będą miarodajne jako minimalne dla należytego usytuowania mostu.



Rys. 7.

Przepusty mogą zupełnie swobodnie znajdować się w obrębie krzywej wyrównawczej, której konstrukcja będzie

zupełnie analogiczną do krzywej wypukłej.

dla $R = 500 \text{ m}$

Spadek %	Kąt środkowy α	Długość cięciwy m	Długość styczn. m
1	0° 34' 23''	5.0	2.5
2	1° 8' 45''	10.0	5.0
3	1° 43' 6''	15.0	7.5
4	2° 17' 26''	20.0	10.0
5	2° 51' 45''	24.9	12.5
6	3° 26' 7''	29.9	15.0
7	4° 0' 15''	34.9	17.5

Powyżej podane rozważania odnosiły się do wypadku, gdy dojazd mostowy jest w sytuacji linią prostą będącą przedłużeniem osi mostu. W wypadku, gdy dojazd usytuowany jest w łuku, okaże się również koniecznym zbadanie dostatecznej przejrzystości z uwagi na rzut poziomy drogi. Sprawa ta, o której miałem możliwość pisać już gdzieś indziej¹⁾, nie wchodzi jednak w zakres niniejszego tematu.

¹⁾ Czasopismo Techniczne 1930 Nr. 6 „Krzywizny drogowe a motoryzacja ruchu drogowego“.

INŻ. DR. STEFAN BRYŁA

Profesor Politechniki Lwowskiej

Wzmacnianie kratowych konstrukcyj nitowanych przy pomocy spawania.

Wzmocnienia konstrukcyj żelaznych kratowych dokonywano dotychczas przy pomocy donitowywania części wzmacniających lub też przy pomocy otulania konstrukcji żelaznej betonem. Spawanie wchodzące tak ogromnie szybko w ogólne zastosowanie w technice rozszerzyło i na tem polu, a do pewnego stopnia nawet przedewszystkiem na tem polu, możliwości, jakie posiadał inżynier-konstruktor.

Spawanie ma te ogromne walory, jakich oba inne, wyżej wspomniane sposoby wzmacniania nie posiadają. Otulanie betonem, wogóle korzystne, prowadzi jednak do znacznego zwiększenia ciężaru własnego, co nieraz nie jest dopuszczalne ze względu na podpory, a przytem w częściach rozciąganych zmusza do stosowania wielkiej ilości żelaza, która często bywa większa, niżby wymagała konstrukcja czysto żelazna. Donitowywanie poszczególnych części konstrukcyjnych zaś jest trudne i kłopotliwe, konieczne jest tu bowiem usunięcie istniejących nitów przy należytem podtrzymaniu konstrukcji i niezmiernie dokładnem dostosowaniu nowych części, tak, aby otwory w nich najzupełniej dostosowały się do istniejących, a dopiero następnie umieszczenie nitów nowych. Trudności te powodowały, że wzmacnianie mostów istniejących przy pomocy nitowania opłacać się mogło tylko w granicach do najwyżej 30% wagi istniejącej konstrukcji żelaznej; przy niektórych zaś przekrojach pasów i innych prętów było nieomal niemożliwe; podobnie ilości nitów w połączeniach węzłowych nieraz zwiększyć poprostu nie było można, a wtedy tem samem wszelkie wzmocnienie konstrukcji wogóle musiało odpaść.

Przy zastosowaniu spawania prawie wszystkie te trudności odpadają. Wzmocnienie konstrukcji żelaznej mostów da się tu wykonać bez usuwania nitów, a zatem bez chwilowego choćby osłabienia konstrukcji istniejącej, bez trudnego dostosowywania się do nitów

istniejących. Da się ono wykonać nadto przy niemal wszystkich kształtach prętów i belek. Wreszcie zaś należyte wzmocnienie połączeń węzłowych również przeprowadzić da się zazwyczaj łatwo i prosto.

Również pod względem stopnia zniszczenia zastosowanie tego sposobu zwiększa niezmiernie skalę możliwości wzmocnień. Jeżeli bowiem zniszczenia są tylko lokalne, choćby i bardzo znaczne, to wzmocnienie będzie można nieraz wykonać w wypadkach, gdy przy pomocy nitowania było ono albo niezmiernie trudne, albo wręcz niewykonalne.

W poniższych rozważaniach omówimy zasady jakimi należy się posługiwać przy wzmacnianiu mostów i wszelakich konstrukcyj kratowych bezpośrednio, t. j. bez zmiany zasadniczego ustroju¹⁾. W takim razie dotyczy ono wogóle:

A) wzmacniania poszczególnych prętów, zbyt słabych lub też zniszczonych lokalnie;

B) wzmacnianie połączeń węzłowych.

Oba zadania są równie ważne; niemożność wypełnienia jednego z nich redukowałaby wartość możliwości wzmocnień do minimalnej ilości wypadków. Rozpatrzmy kolejno, do jakiego stopnia rozwiązać je będzie można przy pomocy spawania.

A) Wzmacnianie prętów konstrukcyj kratowych.

Mogą tu wogóle zajść dwa wypadki. Najczęściej mamy do czynienia z mostem, którego przekroje przeliczone były dla znacznie mniejszych obciążeń niż obciążenia, jakie obecnie są stosowane w obliczeniach, a nawet niż obecnie zachodzą w rzeczywistości. Zdarza się jednak, że rekonstrukcja spowodowana jest zniszczeniem, a więc osłabieniem mostu z powodu rdzy lub z powodów innych.

1. Wzmocnienie z powodu wzrostu obciążeń.

Przy wzmocnieniu prętów, przy których chodzi jedynie o odpowiednie zwiększenie ilości materiału, należy dodać nowe profile o potrzebnym przekroju. Należy je dodać tak, aby o ile możliwości środek ciężkości przekroju nie przesunął się, a przynajmniej przesunął się możliwie nieznacznie.

Przy przekrojach symetrycznych należy zatem oczywiście profile wzmacniające umieścić symetrycznie, co zazwyczaj trudności nie nastęrcza. Przy niesymetrycznych natomiast utrzymanie dotychczasowej ich osi ciężkości jest wogóle trudne, jeżeli nawet nie niemożliwe do

¹⁾ Zaznaczyć należy, że tembardziej wzmocnienie pośrednie da się również wykonać przy pomocy spawania.

osiągnięcia. Przekroje takie posiadają w belkach kratowych najczęściej pasy, tak górny, jakoteż dolny. W pasach jednakowoż linje środków ciężkości przekrojów są i tak zazwyczaj częściowo przesunięte wobec zarysu osiowego kratownicy, tem samem zaś pewna niezgodność obu osi dana jest a priori i, znów tem samem, na zupełnie doskonałej zgodności ich po wzmocnieniu specjalnie zależeć nie będzie. Zredukowanie zaś przesunięcia do minimum prawie zawsze da się uzyskać.

Najkorzystniej jest, jeżeli części dodatkowe wzmacniające dadzą się umieścić bez przeszkody ze strony nitów. Główki tychże bowiem utrudniają zadanie w wysokim stopniu. Najłatwiej zatem wzmocnić przekroje na tych powierzchniach, na których nitów niema. Spełnić się to da jednak stosunkowo rzadko, tembardziej, że w grę wchodzi wogóle moment drugi, natury ekonomicznej: możliwe zmniejszenie ilości użytego szwu. Przy wzmacnianiu konstrukcyj nitowanych bowiem nie materiał, potrzebny do wzmocnienia, odgrywa pierwszą i główną rolę w kosztorysie ogólnym, ale raczej samo spawanie. Chodzi zatem o to, by zużytego materiału pałeczek i mniej więcej proporcjonalnie doń zużytego prądu było jak najmniej.

W przeważnej części wypadków musi się umieścić części wzmacniające na płaszczyznach, posiadających przeszkody w postaci główek nitów. Przy wzmacnianiu przy pomocy nitowania musiało ono bezwzględnie pociągnąć za sobą usunięcie starych nitów. Przy pomocy spawania nawet i tutaj trudności dadzą się ominąć stosunkowo łatwo.

Uzyskać to można w kilka sposobów:

a) Można dać nakładkę z otworami w miejscach główek nitów i zalać je następnie elektrodą. Otwory te oczywiście muszą być odpowiednio większe od główek nitów, tak, aby materiał elektrody mógł chwycić nie tylko główkę nitu, ale i sam właściwy materiał konstrukcyjny. Ważne jest to tembardziej, że główki nitów wskutek zetknięcia się z roztopionym materiałem pałeczki pękają stosunkowo łatwo. Zresztą sposób ten wymaga stosunkowo dużej ilości materiału nałożonego, tem samem zaś prądu elektrycznego.

b) Można nałożyć podkładki o grubości równej lub nieco większej od wysokości główek nitów. Podkładki takie wykonane być mogą z płaskowników lub nawet odpadków blach (co zresztą jest znacznie gorsze). Na takich podkładkach umieszcza się dopiero właściwy element wzmacniający. Ten rodzaj wzmocnienia wymaga stosunkowo dużej ilości szwów; potrzebne są bowiem szwy podwójne: jedne, łączące podkładki z częścią wzmacnianą i drugie, łączące części wzmacniające z podkładkami.

c) Wreszcie można dla wzmocnienia wybrać profile takie, któreby nie kolidowały z główkami nitów, ale stykały się powierzchnią prze-

kroju wzmocnionego pomiędzy nimi. Jako taki profil nadaje się przede wszystkim ceówka (korytko); mogą być jednak zastosowane i inne profile. Profil ten należy tak dobrać, aby mieścił się przynajmniej w granicach pomiędzy odpowiednimi szerokościami; lepiej jest, gdy jest o tyle mniejszy, iżby szwy można było swobodnie wzmocnić, nie zbliżając się zbyt do główek nitów.

Ustrój ten posiada zalety znacznie większej prostoty, oraz mniejszej ilości szwów, tem samem większej taniaści; natomiast tę niekorzyść, że odchyła więcej oś ciężkości niż ustrój *b*.

Słabą stroną ustrojów *b* i *c* jest to, że pozostaje przestrzeń wolna, trudno dostępna, narażająca powierzchnię przylegających profilów na rdzewienie i niszczenie. Należy ją wypełnić albo kitem, albo zaprawą cementową, względnie nawet betonem. Kit jest wygodniejszy przy zastosowaniu wzmocnienia drugiego (*b*), zaprawa cementowa trzeciego (*c*). Większe walory konserwacyjne przedstawia oczywiście zaprawa cementowa. Pewne trudności powstają też wskutek tego, że profile — zwłaszcza pasów — są zmienne, oraz wskutek tego, że do wzmocnienia potrzeba w poszczególnych prętach różnych profilów. Jeżeli zaś nawet w niektórych wypadkach ze względu na prostotę roboty zastosuje się ten sam profil wzmacniający, to nie jest to jednak regułą zasadniczą. Trudność pierwszą łatwo jest usunąć przy pomocy palnika tleno-acetylenowego, trudność drugą przez zastosowanie wstawek poprzecznych zamykających poszczególne części, złożone z tego samego profilu, jak to proponowałem dla wzmocnienia mostu w Równem (por. niżej).

2. Wzmocnienie z powodu uszkodzeń przez rdzę, uderzenie i t. d.

Inaczej przedstawia się sprawa, gdy poszczególne pręty belki kratowej zostały zniszczone przez rdzę lub z powodów innych. Stopień takiego zniszczenia może być bardzo różny, również i miejsce konstrukcji, w którym zniszczenie nastąpiło, może być bardzo różne.

Odpowiednio do obu tych czynników i sposób wzmocnienia może być w poszczególnych wypadkach zupełnie inny.

W razie, gdy uszkodzenia są stosunkowo niewielkie, zwłaszcza pod względem zniszczenia powierzchni, najprostszym sposobem naprawy jest poprostu zalanie uszkodzonych miejsc przy pomocy metalu elektrody po należytem ich oczyszczeniu i przygotowaniu. Jedno z pierwszych zastosowań spawania do rekonstrukcji budowli mostowej, miałowicie mostu w Pittsburgu, polegało właśnie na zastosowaniu tego sposobu; części mostu zostały tam wyżarte przez rdzę.

Może zająć jednak wypadek gorszy: uszkodzenie konstrukcji żelaznej są tak znaczne, że z pręta pozostała np. połowa przekroju lub

nawet mniej. W skrajnym wypadku może dojść nawet do zupełnego zniszczenia i zniknięcia przekroju w pewnym miejscu. Wtedy, oczywiście, sposób wyżej opisany do celu nie doprowadzi, tembardziej, że wogóle można przypuszczać, że materiał w ten sposób dobrany będzie mniej wartościowy od materiału konstrukcyjnego. Tak znaczne zniszczenie może być spowodowane tak przez rdzę, jakoteż przez jakiegokolwiek zewnątrz powody, np. uderzenie, wybuch i t. p.

W takim wypadku można albo część zniszczoną zastąpić wstawioną częścią nową, albo też ująć ją w odpowiednie przykładki, które przenosić będą siły wewnętrzne.

Celem zastosowania wstawki należy materiał pręta usunąć na takiej przestrzeni, aby pozostał wyłącznie pełny zdrowy materiał; dla wszelkiej pewności kilka do kilkunastu *cm* poza obręb dostrzeżonego zniszczenia; następnie wstawić odpowiednio dobraną wstawkę, wreszcie spoić ją z materiałem konstrukcyjnym pręta. Aby uzyskać należyte połączenie, musi być miejsce spojenia odpowiednio zukosowane i wolne od wszelkich nieczystości. Wstawka musi być nieco mniejsza wymiarem, tak, aby przy zukosowaniu na V , jakie najchętniej stosowane będzie, materiał elektrody mógł się przedostać nawskróś przekroju. Oczywiście niezmiernie ważną rzeczą będzie należyte ustalenie wszystkich części w prostej przy pomocy uchwytów, które gwarantować będą niezmiennosc osi wobec czynności spawania. Po wykonaniu spoiny z nadłaniem zeszlifuje się ją do gładkiej powierzchni i powlecze farbą.

Można przypuszczać przy bardzo dobrej robocie na miejscu budowy, że miejsce spojenia będzie miało wytrzymałość około 80% wytrzymałości materiału konstrukcyjnego. Jest to wystarczające o tyle, że przekrój użyteczny (netto) zazwyczaj nie osiąga nawet tej cyfry.

Przy wykonaniu należy baczną uwagę zwrócić na odkształcenia termiczne i dostosować do nich wykonanie spoin.

Zastosowanie przykładek jest bezporównania prostsze w wykonaniu, o tyle, że nie potrzeba tu żadnego dopasowywania i żadnej obróbki, poza oczyszczeniem odpowiednich części przekrojów spawanych. Szpary, które pozostają w częściach uszkodzonych pod przykładkami, można wypełnić kitem albo cementem j. w.

Rekonstrukcja przy pomocy nakładek jest pewniejsza od rekonstrukcji przy pomocy wstawek, jednakowoż, jeżeli chodzi o względy estetyczne, wskazane będą raczej wstawki, przykładki bowiem zdradzają odrazu swym wyglądem miejsca rekonstruowane, wyglądające wskutek tego jak łąty. Specjalnie wskazane są wstawki w przekrojach złożonych, bowiem główki nitów utrudniają zastosowanie przykładek, aczkolwiek w tym wypadku również wstawki są trudniejsze do wykonania.

B) Wzmacnianie połączeń węzłowych.

Wzmacnianie połączeń węzłowych polega na uzupełnieniu nitów przez spawki, zazwyczaj boczne lub czołowe, lub jedne i drugie, rzadziej szczelinowe.

Jednakowoż inny charakter pracy nitów, a inny spoin powoduje, że proste sumowanie wytrzymałości jednych i drugich nie da się przeprowadzić. Pierwsze doświadczenia, jakie zostały wykonane z połączeniami złożonymi z nitów i spawek (wykonane w Szwajcarii przez prof. Roša) dały nadmiar rzeczywiście wyniki nie zupełnie zachęcające. Nie były one ujemne, jednakowoż wpływ wzmocnienia przez dodanie szwów dawał się odczuć dopiero od pewnej granicy. Rezultaty te określił Roš w sposób następujący:

„Stosując odpowiednią spawkę czołową i boczną (przy połączeniach nitowanych), doprowadzi się do odciążenia połączenia nitowanego, jeżeli całkowity przekrój spawek jest większy niż 70% powierzchni nitów. Tylko nadwyżka ponad tę wartość powoduje odciążenie połączenia nitowanego. Z wytrzymałości połączenia nitowanego wyzyskać można tylko 60%, gdyż ponad tę wartość przy zwiększającym się obciążeniu wydłużenia nitów tak silnie wzrastają, że cała nadwyżka siły przenosi się na połączenie spawane. Przy założonej równowartości pomiędzy połączeniem nitowanym, a połączeniem kombinowanym, muszą spoiny przenieść resztę siły rozciągającej, t. j. 40%. Prowadzi to do zależności:

$$F_{sp} = F_{nit} \frac{(1-0.60) \cdot 4.00}{2.30} = 70\% F_{nit}$$

t. j. przy równowartości pomiędzy samem połączeniem nitowanym, oraz połączeniem kombinowanym z nitów i spawania czołowego i bocznego, musi całkowita powierzchnia spawania wynosić 70% powierzchni nitowania. Połączenie nitowane wzmacnia się przez spawkę wówczas, gdy powierzchnia spawania równa się pracującej powierzchni nitów. Zastosowanie spoin, które nie pozwalają na przenoszenie siły przez nity, jak to się dzieje przy szwach na styk i przy silnie dymenzjonowanych szwach czołowych, wyklucza współpracę obu rodzajów połączeń“.

Przytaczając powyższą opinię, zauważyć można, że sąd ten wypada raczej na niekorzyść połączeń kombinowanych, t. j. zarazem nitowanych i spawanych. W rzeczywistości sprawa wzmocnienia konstrukcji nitowanych przy pomocy połączeń spawanych przedstawia bardzo duże trudności w umiejętności doboru rodzaju połączenia spawanego i wielkości jego powierzchni w stosunku do powierzchni nitów pracujących ze względu na różny charakter i zdolność pracy obu rodzajów połączeń.

Roś przyjął w swych wywodach dla szwów bocznych i czołowych niezależnie od grubości i długości szwu średnią wartość 23 kg/mm^2 . Wynik ten wydaje się już na pierwszy rzut oka za niski, a powtórnie nie jest właściwe przyjęcie jednej wartości niezależnie od długości i grubości szwu, co stwierdzają dowodnie doświadczenia, przeprowadzone przezemnie dla Ministerstwa Robót Publicznych.

Ze względu na szczególne znaczenie tego zagadnienia dla wzmacniania mostów w serii doświadczeń nad konstrukcjami spawanymi, przeprowadziłem również badania połączeń kombinowanych: nitów i szwów spawanych. Doświadczenia te wykonane były również dla Ministerstwa Robót Publicznych, którego departament drogowy kierowany przez prof. Nestorowicza, ocenił przenikliwie znaczenie konstrukcji spawanych wobec rozwoju techniki.

W danej części przeprowadzono kilka seryj doświadczeń przy różnych średnicach nitów, oraz różnych długościach i grubościach szwów tak bocznych, jakoteż czołowych. Z doświadczeń tych wykonanych w Mechanicznej Stacji Doświadczalnej Politechniki Lwowskiej, które ogłoszone będą szczegółowo w „Czasopiśmie Technicznym“, podaję tutaj wyniki.

Wytrzymałość połączenia kombinowanego obliczono zapomocą następującego ułożonego wzoru:

$$P_c = P_n + k \cdot P_s.$$

Przyczem oznaczenia są następujące:

1) P_c ... całkowita siła zrywająca dla połączenia kombinowanego, nitowanego i spawanego.

2) P_n ... siła zrywająca dla połączenia wyłącznie nitowanego.

3) P_s ... siła zrywająca dla samego połączenia spawanego.

Powyższe trzy wielkości dane są z oddzielnych pomiarów, a zatem do obliczenia mamy jedną niewiadomą k .

Spółczynnik k obliczony był przy danej wartości P_s , którą to wartość brano dokładnie z wyników doświadczeń z próbką spawaną tego samego typu, a więc wykonaną przez tego samego spawacza o tej samej długości i przekroju poprzecznym szwów.

Obliczenie wykonano oczywiście przy założeniu, że dobroć i jakość wykonanej spawki są takie same przy próbce o połączeniu kombinowanym, jak przy próbce wyłącznie spawanej.

Ostateczne rezultaty badań są następujące:

a) Dla szwów czołowych:

Do wartości $\frac{F_s}{F_n} = 0.70$ nie otrzymano wyraźnego wzmocnienia nitów przez spawkę; dla wartości $\frac{F_s}{F_n} = 0.5$ otrzymano dla nitów $\phi 14 R \cong 0.4$, dla

$\phi 17 R \cong 0.12$. Natomiast dla wartości $\frac{F_s}{F_n} = 0.7$ otrzymano dla $2 \phi 11$ $k = 0.5$, dla $2 \phi 14$ $k = 0.6$, dla $2 \phi 17$ $k = 0.5$.

Przyjmując:

$$\text{dla } \frac{F_s}{F_n} = 0.7 \quad k = 0.5 \quad \text{dla } \frac{F_s}{F_n} = 2.00 \quad k = 0.8$$

otrzymamy po odpowiednich przekształceniach przy przyjęciu prostoliniowej zmienności spółychnika k wartość tegoż:

$$k = 0.23 \frac{R_n}{R_{sp}} \cdot \frac{P_s}{P_n} + 0.34 \quad \dots \quad (1)$$

Dla $R_n = 40 \text{ kg/mm}^2$ otrzymujemy:

$$k = 0.23 \cdot \frac{40}{R_{sp}} \cdot \frac{P_s}{P_n} + 0.34 \quad \dots \quad (2)$$

Równanie to możemy napisać też w formie:

$$k = 0.23 \frac{F_s}{F_n} + 0.34 \quad \dots \quad (3)$$

gdzie $R_n =$ wytrzymałość nitów na ścinanie, zwykle 40 kg/mm^2

$R_{sp} =$ „ spawki na ścinanie

$P_n =$ siła, przenoszona przez nity

$P_s =$ siła, jaką może przenieść sama spawka.

b) Dla szwów bocznych:

Analogicznie otrzymamy:

$$k = 0.64 \sqrt{\frac{P_s}{P_n} \cdot \frac{R_n}{R_s}} \quad \dots \quad (4)$$

$$\text{czyli dla } R_n = 40 \text{ kg/mm}^2 \quad k = 4 \sqrt{\frac{P_s}{P_n} \cdot \frac{1}{R_{sp}}} \quad \dots \quad (5)$$

$$\text{względnie} \quad k = 0.64 \sqrt{\frac{F_s}{F_n}} \quad \dots \quad (6)$$

z ważnością od $\frac{F_s}{F_n} = 0.5$ do $\frac{F_s}{F_n} = 2.5$.

W powyższych wzorach można przyjmować dla żelaza zlewego, używanego na nity $R_n = 40 \text{ kg/mm}^2$, zaś R_{sp} należy przyjmować zależnie od wykonania spawki; wynosi ona zwykle $20-40 \text{ kg/mm}^2$, średnio 30 kg/mm^2 . Przy wzmacnianiu mostów używać się będzie zazwyczaj dobrych spawaczy i wyborowych materiałów, tak, że wartości te mogą być wysokie. Przed wykonaniem wzmocnienia należy oczywiście przeprowadzić próby z tymi samymi spawaczami i materiałami i w tych samych warunkach, jakie będą na budowie.

Przykłady obliczeń:

a) Szwy czołowe:

1. Łączna powierzchnia nitów utwierdzenia pręta obliczonego na siłę $P_n = 24 \cdot 0$ ton wynosi $F_n = 30 \text{ cm}^2 = 3000 \text{ mm}^2$. Należy połączenie to wzmocnić zapomocą szwów czołowych, tak, aby przenieść mogło siłę $P_c = 32 \cdot 0$ ton przy zachowaniu tego samego współczynnika pewności.

Spawka ma przenieść $32 \cdot 0 - 24 \cdot 0 = 8 \cdot 0$ ton, czyli ponad 30% (jedną trzecią) siły przenoszonej przez nity. Należy ją zatem obliczyć na obciążenie $P_s = \frac{8 \text{ ton}}{k}$. Ponieważ dla szwu czołowego nie otrzymujemy wyraźnego wzmocnienia poniżej stosunku $\frac{F_s}{F_n} = 0 \cdot 7$, przeto przyjmujemy

$$\frac{F_s}{F_n} = 0 \cdot 7,$$

a tem samem przynależne $k = 0 \cdot 5$

$$\text{czyli: } P_s = \frac{8 \text{ ton}}{0 \cdot 5} = 16 \text{ ton},$$

a stąd potrzebna powierzchnia spawki czołowej

$$F_{sp} = \frac{16000}{\sigma_{sp}}.$$

2. $P_n = 24$ ton, P_c wynosić ma 48 ton, zatem połączenie należy wzmocnić o 100% przy pomocy szwów czołowych.

$$\text{Z wzoru 3 otrzymujemy dla } \frac{F_s}{F_n} = 1 \quad k = 0 \cdot 57,$$

przyjmujemy okrągło $k = 0 \cdot 60$. Wtedy:

$$P_s = \frac{P_c - P_n}{k} = \frac{48 \cdot 0 - 24 \cdot 0}{0 \cdot 60} = \frac{24 \cdot 0}{0 \cdot 60} = 40 \text{ ton}$$

$$F_s = \frac{40000}{8} = 5000 \text{ mm}^2 = 50 \text{ cm}^2$$

Kontrolujemy przy pomocy wzoru 3.

$$\frac{F_s}{F_n} = \frac{5000}{3000} = 1 \cdot 66$$

a stąd $k' = 0 \cdot 71$, czyli obrano powierzchnię nieco za dużą. Przerachujemy ją zatem dla $k = 0 \cdot 65$.

$$P_s = \frac{24}{0 \cdot 65} = 37 \cdot 0 \text{ ton} \quad F_s = \frac{37000}{8} = 4620 \text{ mm}^2$$

$$\frac{F_s}{F_n} = \frac{4620}{3000} = 1 \cdot 54.$$

Sprawdzając k wedle równania 2, otrzymamy:

$$k = 0.69,$$

co jest dostatecznie zgodne z przyjęciem. Oczywiście można przez dalszą próbę uzyskać zupełną dokładność.

b) Szwy boczne:

Dana siła $P_n = 24.0$ ton; mamy uzyskać $P_c = 50.0$ ton. Spawka ma przenieść ponad 100% (dokładnie 108% siły P_n). Przyjmujemy $k = 0.8$, a stąd

$$P_s = \frac{P_c - P_n}{k} = \frac{26.0 \text{ ton}}{0.8} = 32.5 \text{ ton.}$$

Sprawdzamy wedle wzoru 3:

$$k = 4 \sqrt{\frac{32.5}{24} \cdot \frac{1}{30}} = \sqrt{0.72} = 0.85.$$

Zgodność teraz można uważać za dostateczną; liczymy jednakowoż dalej; przyjmujemy mianowicie $k = 0.83$, czyli:

$$P_s = \frac{26.0}{0.83} = 31.4 \text{ ton}$$

i powtórnie wedle wzoru 3:

$$k = 0.835,$$

co już jest zgodnością najzupełniej wystarczającą.

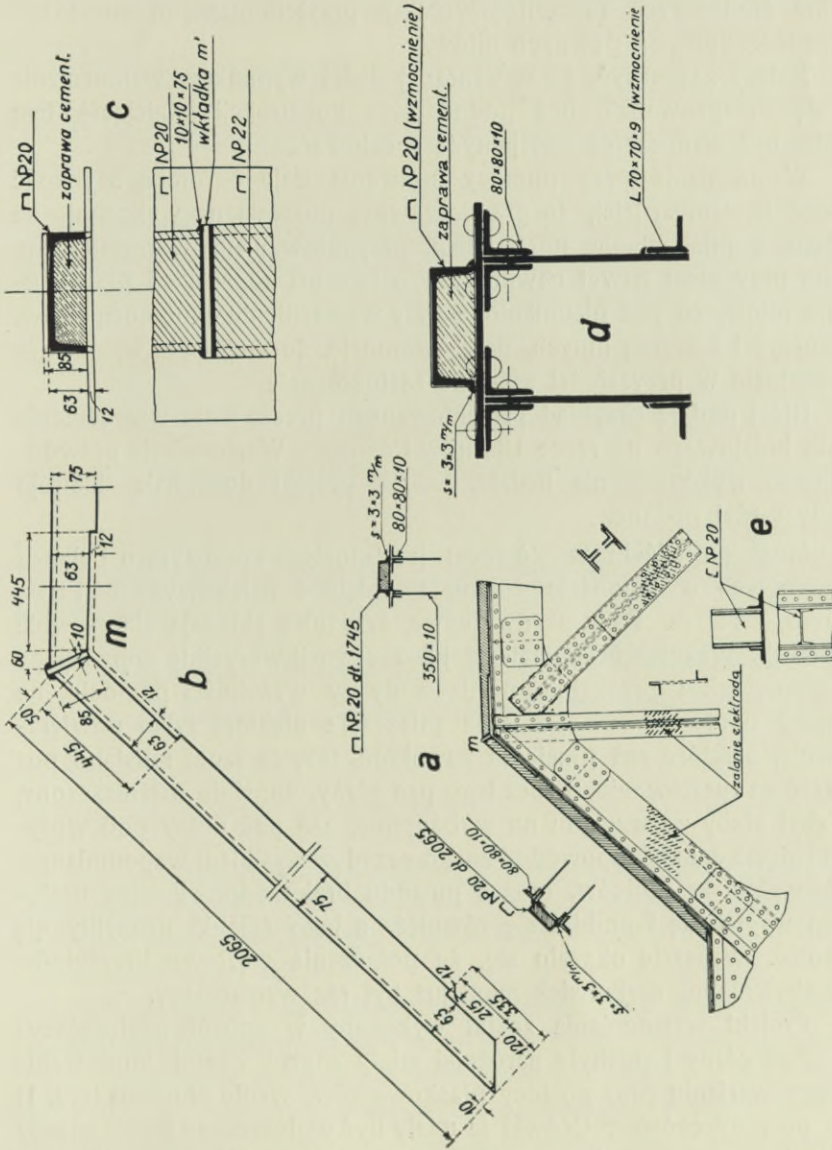
Niech spawka ma wytrzymałość 400 kg/cm b, to sumaryczna długość szwów:

$$\Sigma a = \frac{31400}{400} = \approx 80 \text{ cm.}$$

Może zająć potrzeba szwów kombinowanych, bocznych i czołowych. Wypadek ten nie ze wszystkim jest wyjaśniony, a doświadczenia odpowiednie są w toku. Zachodzi on jednakowoż przy potrzebnych dużych wartościach wzmocnień, a wtedy współczynnik k jest wogóle duży dla obu rodzajów szwów i wynosi conajmniej 0.8.

Powyższe wzory, wyprowadzone na podstawie bardzo znacznej ilości doświadczeń, najkompletniejszych, jakie dotychczas zostały wykonane, pozwalają na obliczenie potrzebnego wzmocnienia przy pomocy spawek, jakoteż dla różnej ich dobroci.

W praktyce inżynierskiej najczęściej trzeba będzie przedewszystkiem określić dobroć spawania wykonywanego przez spawaczy, którzy do roboty będą użyci, a następnie przy przyjęciu najkorzystniejszej grubości spawki określić k dla każdego węzła i każdego pręta z osobna. Względy konstrukcyjne będą bowiem niejednokrotnie nawet dyktowały inny rodzaj wzmocnienia w jednym, inny w drugim końcu tego samego pręta.



Rys. 1.

Przy stosowaniu spoin należy oczywiście uwzględnić te same reguły, jakie ważne są dla konstrukcyj spawanych, przedewszystkiem więc rozmieścić je odpowiednio do osi ciężkości poszczególnych prętów.

W poszczególnych wypadkach może zająć potrzeba zastosowania szwów środkowych (szczelinowych), a przytem czasem nawet konieczność usunięcia pewnych nitów.

Należy zaznaczyć, że w znacznej ilości wypadków wzmocnienie da się przeprowadzić bez podnoszenia konstrukcji istniejącej, tem samem bez wznoszenia specjalnych rusztowań.

Wzmacnianie przy pomocy spawania daje ogromną szybkość w robocie, tembardziej, że prawie zawsze pozwala na wykonanie na miejscu z minimalnem uprzedniem przygotowaniem warsztatowem. Niema przy niem nawet chwilowego osłabienia konstrukcji przy usuwaniu nitów, co jest nieuniknione przy wzmacnianiu zapomocą nitów. Te korzyści i szereg innych, dają gwarancję, że metoda ta wzmacniania znajdzie w przyszłości szerokie zastosowanie.

Niżej podaję przykład projektowanego przeze mnie wzmocnienia mostu kolejowego na rzece Ujściu w Równem. Wzmocnienie prawdopodobnie wykonane nie będzie, jednak projekt doskonale ilustruje zasady wyżej podane.

Most na Ujściu w Równem jest mostem kratowym o belkach równoległych o pomoście dołem. Rozpiętość belek wynosi 21·0 *m*, wysokość 2·25 *m*. Pasy są dwuteowe, krzyżulce składają się głównie z kątowników. Wskutek braku należytej konserwacji wszystkie pręty ściany tak słupy, jak i przekątnie pordzewiały w wysokości pomostu, na długości około 15—20 *cm*. Rdza zniszczyła niektóre tylko powierzchnie, niektóre zaś przejadła nawskróś, tak, że most musiano podeprzeć na rusztowaniu. Prócz tego pas górny, zupełnie niezniszczony, był zbyt słaby ze względu na wyboczenie, zaś pas dolny pod wpływem ugięcia całości, spowodowanego przedewszystkiem wspomnianem zniszczeniem krzyżulców, oraz z powodu braku odpowiednich usztywnień wygiął się i poddał się również, a jego ścianki nachyliły się ku sobie. Wreszcie okazało się, że połączenia węzłowe krzyżulców były zbyt słabe, aczkolwiek most już był raz wzmacniany.

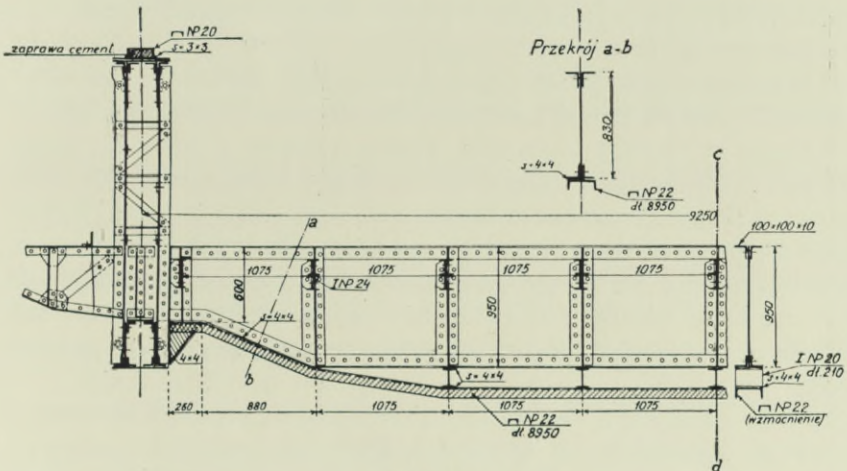
Projekt wzmocnienia został wykonany w sposób następujący:

Pas górny i pochyłe narożniki miały zostać wzmocnione wedle jednego warjantu przy pomocy płaskowników, wedle drugiego (rys. 1) przy pomocy ceówek. Ceówki te miały być umieszczone wedle zasady podanej powyżej pod *e*, a mianowicie miały mieścić się wraz ze szwami pomiędzy rzędami pionowych nitów. Ceówki te musiały być wzajemnie przeminięte pionowo względem siebie z powodu nakładek pasa górnego, których ilość jest zmienna. Odpowiednie umieszczenie

umożliwiają nadto ścięcia stopek na odpowiedniej długości, jakie należałoby wykonać przy pomocy palnika tleno - acetylenowego. Poszczególne części ceówek byłyby zamknięte przy pomocy poprzeczek z prostokątnych blach *m*. Ze względu na bezpieczeństwo przeciw rdzewieniu ceówki miałyby być wypełnione następnie zaprawą cementową.

Wzmocnienie ukośnych narożników w częściach przerdzewiałych miałyby być wykonane przy pomocy dospojenia blach, pokrywających części zżarte, przyczem próżnie byłyby wypełnione również zaprawą cementową lub kitem.

Zrekonstruowanie kątówek krzyżulców projektowane było w paru wypadkach przez nadlanie elektrody. Ponieważ jednak przeważna część



Rys. 2.

ich była tak przeżarta, że wyłącznie minimalna ilość materiału pozostała, przeto znów zaprojektowane były dwa warjanty: jeden z nakładkami, drugi z wycięciem zniszczonych części i wymianą ich na odpowiednie nowe kątówki.

Wzmocnienie pasa dolnego projektowane było przez wstawienie odpowiednich usztywnień, któreby rozparły zniszczone ścianki, a nadto przez umieszczenie pochylni betonowej, pokrytej asfaltem, ze spadkiem około 2‰ dla uzyskania należytego odwodnienia, którego nie było.

Wzmocnienie poprzecznic, również zbyt słabych, projektowano przez dospojenie dołem ceówki, opartej na słupkach, a tem samem utworzenie t. zw. belki wzmocnionej (rys. 2).

Wzmocnienia są w rysunkach zakreskowane.

Przykład ten, aczkolwiek niewykonany, świadczy dobitnie o szerokiej gamie możliwości, jakie przedstawia spawanie w zakresie wzmacniania konstrukcyj nitowanych kratowych.

W pracy niniejszej omówiłem wyłącznie bezpośrednio wzmacnianie konstrukcyj kratowych, pomijając ustroje inne, a także pomijając wzmocnienia pośrednie, przez dodanie nowych prętów, zmianę ustroju belki, obetonowanie i t. d. W zakresie tym jest to właściwie pierwsza praca syntetyczna, oparta z jednej strony na doświadczeniach krajów innych (Ameryki, Australji) i drugiej na własnym doświadczeniu, jakoteż na badaniach przeze mnie przeprowadzonych.

INŻ. DR. STANISŁAW BRZOZOWSKI

Profesor Politechniki Lwowskiej

Ogólna metoda wyznaczania kształtu mostów łukowych z konstrukcją pachwinową.

Mosty łukowe kształtu szczególniejszego, o osi odpowiadającej przebiegowi linii ciśnienia, wynikającej bądźto z obciążenia ciężarem własnym i połową ciężaru ruchomego zastępczego, stosownie do przyjęć niektórych autorów, jak Tolkmitta, Färbera, Melana i Thulliego, bądź też tylko z samego ciężaru własnego, zgodnie z przyjęciami Mörscha, Strassnera i innych — wymagają mniejszej ilości materiału aniżeli mosty o tych samych wymiarach zasadniczych urobione według znanych krzywych rzędu drugiego, chyba, że nadamy ustrojowi kształt skombinowany z kilku łuków kołowych, czyli t. zw. koszowy, o takim doborze promieni, że osiągnięcie najmniejszych wymiarów, przy uwzględnieniu wszelkich możliwych wpływów działania, da się urzeczywistnić.

Konstrukcje tego rodzaju tak ze względów statycznych jakoteż i ekonomicznych są najwłaściwsze, przytem nie tracą wcale na dobrym wyglądzie, lecz owszem zyskują przez to, że wzbudzają na widzu, swoim do pewnego stopnia osobliwym kształtem większy spokój, świadczący niewątpliwie o wyjątkowej harmonji sił występujących w takim ustroju.

W przypadkach powszechnie zachodzącej symetrii ustroju, a w szczególności dla obciążenia ciągłego symetrycznie rozłożonego, czyli dla mostów z nadsypką zwyczajną, kształty łuków odpowiadające linii ciśnienia są nam znane; natomiast dla mostów łukowych o konstrukcji pachwinowej, zapomocą której obciążenie z jezdni przenosi się na ustrój główny łukowy, przez słupy względnie filary, jako skupione, tylko w przybliżeniu.

Właśnie w takich przypadkach przywykliśmy do pomijania wpływu ciężarów skupionych, zastępując je częstokroć obciążeniem zastępczem ciągłym, tak jak gdyby jezdnia spoczywała wprost na nadsypce. Następnie dla takiego ustroju zastępczego zastosowujemy znane rozwiązanie matematyczne kształtu linii ciśnienia, w postaci

funkcji hiperbolicznej, podane przez Färbera. Jednak takie przyjęcie przybliżone może być stosowane tylko w mostach kamiennych o gęsto rozstawionych sklepieniach pachwinowych, natomiast w mostach łukowych tak betonowych jak i żelbetowych o konstrukcji pachwinowej żelbetowej, dla której odstęp słupek pomostowych są już z zasadniczych względów większe, powyższe przybliżenie może wykazywać niekiedy i większe odchyłki.

W niektórych zaś przypadkach, gdy słupy pachwinowe skrajne są bardziej odsunięte od przyległych węzłowi, zachodzić może nawet i poważniejsza różnica w położeniu przebiegu linii ciśnienia, a to dlatego, że przyjmowane obciążenie zastępcze, rozłożone stosownie do wielkości poszczególnych pól pachwinowych między słupami, pojawi się jako nieciągłe, z uskokami, przez co krzywa wyrównawcza odbiegać też będzie od stanu rzeczywistego, stając się raczej niewłaściwą. W rezultacie, stosunek obciążeń jednostkowych węzłowi i zwornika, mający jak wiadomo rozstrzygający wpływ na równania linii ciśnienia, stanie się tem samem wysoce niepewny.

Również większe odstęp słupek, pachwinowej konstrukcji żelbetowej, zwiększają zarazem obciążenia skupione przenoszące się przez te słupy, które w rzeczywistości spowodują spłaszczenie osi łuku pomiędzy słupami. Wobec tego ogólny wygląd łuku zmieni się, upodabniając się raczej do ustroju ramowego o wielokrotnie łamanym zarysie. Wspomnianego spłaszczenia osi łuku nie możemy oczywiście uzyskać przy oparciu się o znane równanie osi dla obciążenia ciągłego, a podjęcie ścisłego dostosowania się do warunku zmienności przekroju $d=d_0 \cdot \cos \alpha$ jak tego wymaga Kögler¹⁾, wtedy niewiele pomoże, gdyż i tak powstaną dodatkowe momenty zginające powodujące nierównomierny rozkład nateżeń w przekrojach, a tem samem łuk nie otrzyma najmniejszych wymiarów.

Następnie sprawa formowania według linii ciśnienia łuków niesymetrycznych pojawiających się w mostach leżących w większych spadkach lub posiadających węzłowi w wybitnie różnych wysokościach, jak np. wiadukt włoski przez dolinę Serra i drugi przez Valdassa²⁾, wymaga również rozwiązania właściwego.

Z tych właśnie względów dla mostów łukowych z konstrukcją pomostową pachwinową opartą na łuku zapomocą szeregu słupów, wprowadzamy nową metodę matematycznego określania kształtu łuku przebiegającego według linii ciśnienia.

Oprócz uwzględniania wpływu dowolnych obciążeń skupionych na kształt łuku, oczywiście zastosujemy tę metodę do przypadków

¹⁾ Kögler: Gewölbetabellen.

²⁾ Santarella e Miozzi. — Ponti Italiani in cemento armato.

obciążeń skupionych, zmieniających się według funkcji linjowych lub parabolicznych, które często w praktyce przychodzą. Ponadto uzyskać będziemy mogli kształt łuku według linii ciśnienia przede wszystkim dla ustroju niesymetrycznego.

Wkońcu zawiły przypadek równoczesnego traktowania obciążenia własnego samego łuku wraz z ciężarami skupionymi, dają się również rozwiązać, dopełniając tem samym całości zakreślonego zadania podjętego w ramach niniejszej pracy.

Łuki symetryczne.

Linia ciśnienia dla dowolnego obciążenia skupionego.

Ustrojem powszechnie używanym w konstrukcjach mostowych jest łuk symetryczny. Wykażmy zatem wpływ na linię ciśnienia, dowolnych ciężarów skupionych, symetrycznie rozmieszczonych względem osi pionowej. Składowa pozioma rozpierająca podpory czyli wezgiłowa niechaj będzie H . Z powodu symetrii układu, linia ciśnienia w szczytowem położeniu t. j. zworniku (kluczu) staje się pozioma.

Niechaj zatem na łuk o rozpiętości l i strzałce f działają tylko ciężary skupione $G_1, G_2, G_3 \dots G_n$, i dla takiego obciążenia chcemy wyznaczyć linię ciśnienia, jeżeli przyrosty odnośnych obciążeń skupionych wzrastają proporcjonalnie do rzędnych linii ciśnienia odniesionych do osi poziomej $0-X$, przechodzącej zarazem przez poziomy bok wieloboku sznurowego w zworniku. Po oznaczeniu rzędnych w miejscach działania sił przez: $y_1=0, y_2, y_3 \dots y_n$ — i współczynników proporcjonalności przez: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots \gamma_n$ — otrzymamy odpowiednie przyrosty ciężarów: $y_2 \cdot \gamma_2, y_3 \cdot \gamma_3 \dots y_n \cdot \gamma_n$.

Dla konstrukcji pachwinowej ze słupami przekroju stałego, o grubości $g_1, g_2 \dots g_n$ — a szerokości $s_1, s_2 \dots s_n$, określają się odpowiednie γ w zależności od ciężaru właściwego konstrukcji γ_w — jako ciężar $1 m b$ wysokości słupa, np. $\gamma_n = g_n \cdot s_n \cdot \gamma_w$.

Poszczególne $\gamma_{1,2 \dots n}$ są zatem przyrostami obciążeń $1 m b$ wysokości odpowiedniego słupa.

Obciążenie siłami $G_1, G_2 \dots G_n$, znaczyć będziemy obciążeniem zasadniczem. Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia znaczenie obciążeń zasadniczych w przypadkach najczęściej zdarzających się w budowie mostów łukowych.

Oznaczmy poszczególne obciążenia konstrukcji pomostowej, składające się z ciężaru własnego (części wznoszącej się ponad osią $0-X$, lub poniżej w zależności od umieszczenia pomostu), i ewentualnie połowy ciężaru ruchomego (według Tolkmitta), które przypadają na poszczególne słupy — przez $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$; to po uwzględnieniu

grubości pionowej samego łuku, pod odpowiednimi siłami, o wartościach $v_1, v_2 \dots v_n$, dostaniemy, stosownie do położenia konstrukcji pachwinowej względem poziomej osi $O-X$, następujące związki na określenie ciężaru zasadniczego dla typów według rys. 1 *a, b, c*:

$$a) \quad G_3 = C_3 - \frac{1}{2} v_3 \cdot \gamma_3$$

$$b) \quad G_3 = C_3 - \left(w_3 + \frac{v_3}{2} \right) \cdot \gamma_3$$

$$c) \quad G_3 = C_3 + \left(z - \frac{v_3}{2} \right) \cdot \gamma_3$$

Całkowity ciężar z uwzględnieniem przyrostów wynosi:

$$P_2 = G_2 + y_2 \cdot \gamma_2$$

$$P_3 = G_3 + y_3 \cdot \gamma_3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P_n = G_n + y_n \cdot \gamma_n$$

Ponieważ w obciążeniach zasadniczych $G_{1,2,\dots,n}$ występują nieznanie narazie grubości łuku, z wyjątkiem danych projektem w zworniku i na wezgielciu, przeto z wystarczającym dla praktyki przybliżeniem przyjąć możemy, dla określenia tych pionowych grubości v , zmianę przekrojów według paraboli, o ile przekroje są w ogólności zmienne. To niezupełnie dokładne przyjęcie będzie miało przeważnie znikomy wpływ na końcowy wynik, gdyż różnice okazują się naogół niewielkie, w porównaniu do obciążeń zasadniczych.

Po tych uwagach praktycznych co do stosowania ciężarów zasadniczych w poszczególnych przypadkach konstrukcyj łukowych, przychodzimy do dalszych rozważań.

Wprowadzimy przedtem jeszcze, oznaczenia następujące:

$$\underline{\mu_{21} = G_2 : G_1}, \quad \underline{\mu_{31} = G_3 : G_1} \quad \dots \quad \underline{\mu_{n1} = G_n : G_1}.$$

Ponieważ y_1 mierzone pod siłą G_1 jest zerem, wobec tego $\underline{P_1 = G_1}$.
Gdy następnie oznaczymy stosunek rzeczywistego obciążenia do P_1 ,

$$\text{przez } \underline{m}, \text{ to} \quad \underline{m_{21} = \frac{P_2}{P_1}}, \quad \underline{m_{31} = \frac{P_3}{P_1}} \quad \dots \quad \underline{m_{n1} = \frac{P_n}{P_1}},$$

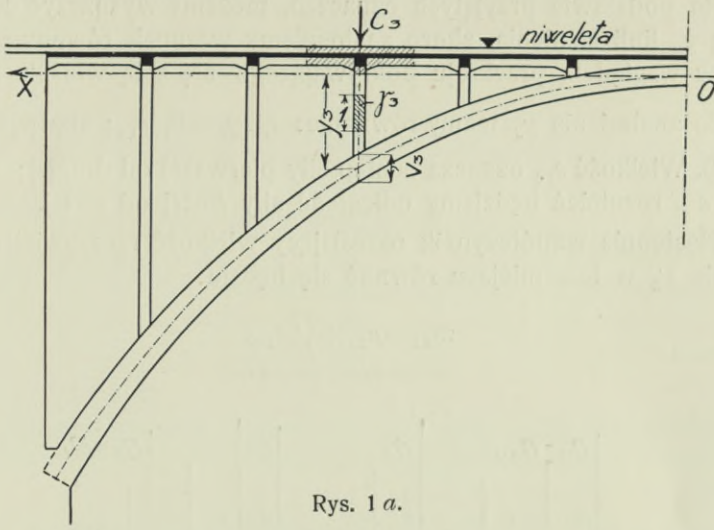
a otrzymamy:

$$m_{21} = \mu_{21} + \frac{y_2 \cdot \gamma_2}{P_1}$$

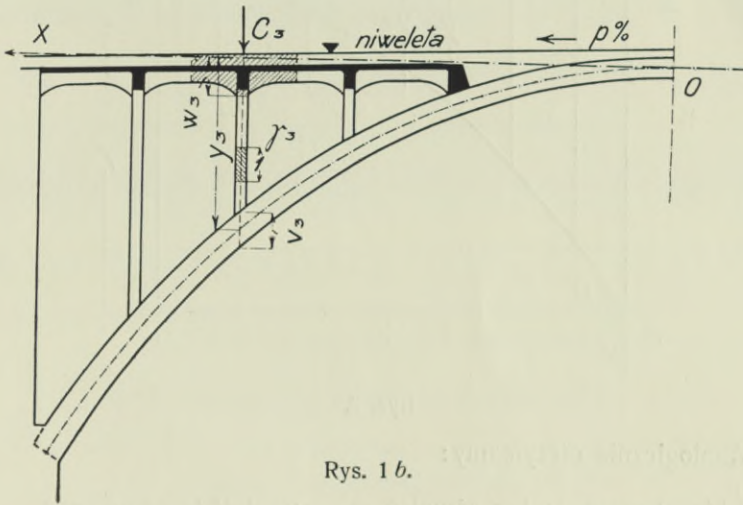
$$m_{31} = \mu_{31} + \frac{y_3 \cdot \gamma_3}{P_1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

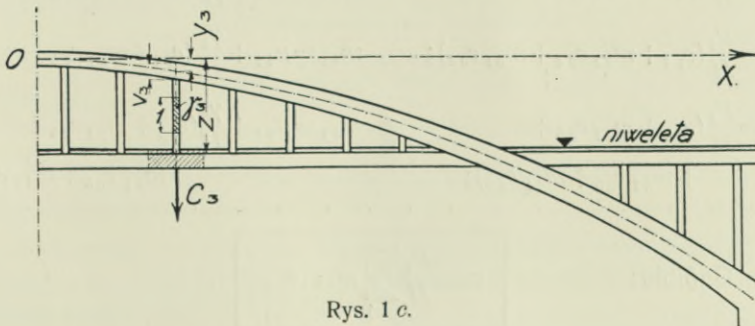
$$m_{n1} = \mu_{n1} + \frac{y_n \cdot \gamma_n}{P_1}$$



Rys. 1 a.



Rys. 1 b.



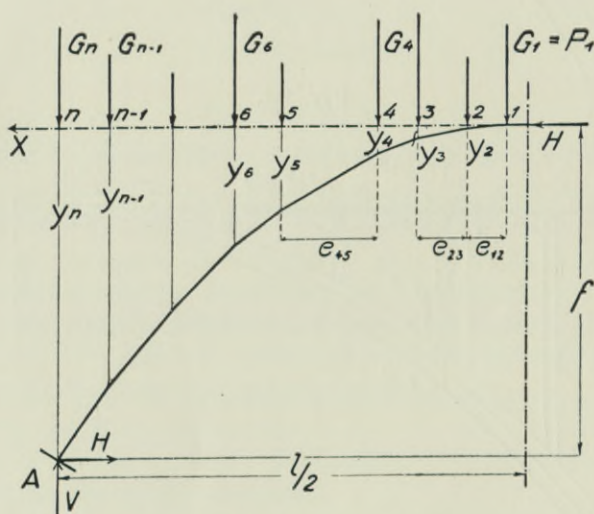
Rys. 1 c.

Na podstawie przyjętych oznaczeń, możemy wyznaczyć dowolną rzędną y_n linii ciśnienia, skoro zastosujemy warunek równowagi momentów względem przekroju pokrywającego się z tą właśnie rzędną.

Np. dla znalezienia y_2 mamy równanie: $H \cdot y_2 = P_1 \cdot e_{12}$; stąd $y_2 = \frac{P_1}{H} e_{12}$ (rys. 2). Wielkość e_{12} oznacza odstęp siły pierwszej od drugiej; ogólnie przez $e_{k,r}$ rozumieć będziemy odległość siły k -tej od r -tej.

Następnie współczynnik określający wielkość rzeczywistego obciążenia P_2 w tem miejscu równać się będzie:

$$m_{21} = \mu_{21} + \frac{\gamma_2}{H} e_{12}.$$



Rys. 2.

Analogicznie otrzymamy:

$$y_3 = \frac{P_1}{H} (e_{13} + m_{21} e_{23}); \text{ jak również } m_{31} = \mu_{31} + \frac{\gamma_3}{H} (e_{13} + m_{21} e_{23})$$

$$y_4 = \frac{P_1}{H} (e_{14} + m_{21} e_{24} + m_{31} e_{34}); \quad m_{41} = \mu_{41} + \frac{\gamma_4}{H} (e_{14} + m_{21} e_{24} + m_{31} e_{34})$$

$$y_5 = \frac{P_1}{H} (e_{15} + m_{21} e_{25} + m_{31} e_{35} + m_{41} e_{45}); \quad m_{51} = \mu_{51} + \frac{\gamma_5}{H} (e_{15} + m_{21} e_{25} + m_{31} e_{35} + m_{41} e_{45})$$

Ogólnie:

$$y_n = \frac{P_1}{H} \sum_{k=1}^{n-1} m_{k1} \cdot e_{kn} \quad \dots \quad (1)$$

przyczem należy zwrócić uwagę, że współczynnik $m_{11} = 1$,

zaś
$$m_{n1} = \mu_{n1} + \frac{y_n \cdot \gamma_n}{P_1}; \quad \left(m_{n1} = \frac{P_n}{P_1} \right),$$

albo
$$\boxed{m_{n1} = \mu_{n1} + \frac{\gamma_n}{H} \sum_{k=1}^{n-1} m_{k1} \cdot e_{kn}} \quad \dots \dots \dots (2)$$

Jeżeli następnie w równaniu na y_n , zastąpimy pokolei wszystkie współczynniki m odnośnemi funkcjami zawierającemi parcie poziome H , to w rezultacie otrzymamy równanie, z którego na podstawie znanej rzędnej y_n , równej przyjętej strzałce łuku f , obliczymy niewiadome parcie poziome H .

Przypuśćmy więc, że na połowce łuku stoją trzy dowolne siły zasadnicze G_1, G_2, G_3 , o przyrostach jednostkowych różnych: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — a pod siłą czwartą G_4 , znajdującą się już nad podporą, rzędna y_4 jest równa strzałce łuku; otóż stosownie do równania wprowadzonego dla czterech sił dostajemy:

$$y_4 = \frac{P_1}{H} (e_{14} + m_{21} e_{24} + m_{31} e_{34}),$$

w które podstawione wartości za m nadają postać:

$$y_4 = \frac{P_1}{H} \left\{ e_{14} + (\mu_{21} + \frac{\gamma_2}{H} e_{12}) e_{24} + \left[\mu_{31} + \frac{\gamma_3}{H} (e_{13} + (\mu_{21} + \frac{\gamma_2}{H} e_{12}) e_{23}) \right] e_{34} \right\};$$

albo
$$y_4 = \frac{P_1}{H} \left\{ e_{14} + \mu_{21} e_{24} + \mu_{31} e_{34} + \frac{1}{H} (\gamma_2 e_{12} e_{24} + \gamma_3 e_{13} e_{34} + \gamma_3 \mu_{21} e_{23} e_{34}) + \frac{1}{H^2} (\gamma_2 \gamma_3 e_{12} e_{23} e_{34}) \right\}.$$

Po pomnożeniu jeszcze przez H^3 dostaniemy:

$$H^3 y_4 = P_1 [H^2 (e_{14} + \mu_{21} e_{24} + \mu_{31} e_{34}) + H (\gamma_2 e_{12} e_{24} + \gamma_3 e_{13} e_{34} + \gamma_3 \mu_{21} e_{23} e_{34}) + \gamma_2 \gamma_3 e_{12} e_{23} e_{34}];$$

a po oznaczeniu: $(e_{14}) = e_{14} + \mu_{21} e_{24} + \mu_{31} e_{34}$

$(e_{13}) = e_{13} + \mu_{21} e_{23}$

otrzymamy:

$$\boxed{\frac{H^3}{P_1} y_4 = H^2 (e_{14}) + H [\gamma_2 e_{12} e_{24} + \gamma_3 (e_{13}) e_{34}] + \gamma_2 \gamma_3 e_{12} e_{23} e_{34}} \quad (3)$$

Zastępując w dalszym ciągu współczynniki przy niewiadomej przez $\alpha_{04}, \alpha_{14}, \alpha_{24}$, gdzie stały wskaźnik drugi (4) oznacza położenie podpory znajdującej się pod 4-tą siłą, otrzymujemy równanie:

$$\boxed{\frac{H^3 \cdot y_4}{P_1} = \alpha_{04} \cdot H^3 + \alpha_{14} \cdot H + \alpha_{24}} \quad . . . \quad (3a)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{04} &= (e_{14}) \\ \alpha_{14} &= \gamma_2 \cdot e_{12} e_{24} + \gamma_3 (e_{13}) e_{34} \\ \alpha_{24} &= \gamma_2 \gamma_3 \cdot e_{12} e_{23} e_{34} \end{aligned}} \quad . . . \quad (3b)$$

W ten sposób, przy obciążeniu (połowy łuku) trzema dowolnymi siłami skupionymi, rzeczywistymi czynnymi, otrzymaliśmy na niewiadome parcie poziome H , równanie trzeciego stopnia, z którego wkońcu otrzymać będziemy mogli jego wielkość.

Na podstawie znanej H , możemy następnie obliczyć rzędne linii ciśnienia z równań:

$$y_2 = \frac{P_1}{H} e_{12}, \quad \text{przyczem } m_{21} = \mu_{21} + \frac{\gamma_2}{H} e_{12},$$

a wreszcie:
$$y_3 = \frac{P_1}{H} (e_{13} + m_{21} \cdot e_{23}).$$

Określenie linii ciśnienia odpowiadającej pewnemu dowolnemu obciążeniu zasadniczemu, o różnych przyrostach jednostkowych γ , zostało tem samym jednoznacznie wyznaczone.

Nietrudno jednak przewidzieć już z góry, że wraz z wzrostem ilości sił skupionych rość będzie też stopień równania z niewiadomą H , którego wielkość zgadza się z ilością występujących ciężarów czynnych, t. j. z wyłączeniem siły stojącej wprost nad podporą czyli wezłowiec łuku.

Przyjmując w dalszym ciągu rozważań zamiast trzech — cztery siły czynne G_1, G_2, G_3, G_4 , to z równania na rzędną y_5 w miejscu podpory, obliczymy niewiadomą H :

$$y_5 = \frac{P_1}{H} (e_{15} + m_{21} e_{25} + m_{31} e_{35} + m_{41} e_{45}).$$

Jednakże zamiast wstawiać pokolei wartości za m , prędzej osiągniemy ostateczny wynik, skoro zwrócimy uwagę na to, że trzy pierwsze wyrazy w nawiasie są podobne do pierwotnych wyrazów na y_4 , tylko w miejsce drugiego wskaźnika 4 wejdzie wskaźnik 5. A więc zamiast e_{14} wprowadzimy e_{15} i t. d.

$$\text{Czyli: } y_5 = \frac{P_1}{H} (e_{15} + m_{21} e_{25} + m_{31} e_{35}) + \frac{P_1}{H} m_{41} e_{45},$$

przyczem pamiętać należy, że ostateczne równanie na y_4 pomnożyliśmy przez H^3 , a więc:

$$\frac{H^3 \cdot y_5}{P_1} = \alpha_{04} \cdot H^3 + \alpha_{14} H + \alpha_{24} + H^2 m_{41} \cdot e_{45}.$$

W tem równaniu mamy jeszcze określić ostatni wyraz $H^2 m_{41} e_{45}$, a zatem:

$$\begin{aligned} H^2 m_{41} \cdot e_{45} &= H^2 \mu_{41} e_{45} + H \gamma_4 e_{45} (e_{14} + m_{21} e_{24} + m_{31} e_{34}) = \\ &= H^2 \mu_{41} \cdot e_{45} + H \{ e_{14} e_{45} \gamma_4 + \gamma_4 \mu_{21} e_{24} e_{45} + \gamma_4 \mu_{31} e_{34} e_{45} + \\ &+ \frac{\gamma_2}{H} \gamma_4 e_{12} e_{24} e_{45} + \frac{\gamma_3}{H} \gamma_4 e_{13} e_{34} e_{45} + \frac{\gamma_3 \gamma_4}{H} \mu_{21} e_{23} e_{34} e_{45} + \\ &+ \frac{\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}{H^2} e_{12} e_{23} e_{34} e_{45} \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^2 m_{41} e_{45} &= H^2 \mu_{41} e_{45} + H [\gamma_4 e_{45} (e_{14} + \mu_{21} e_{24} + \mu_{31} e_{34})] + \\ &+ \gamma_2 \gamma_4 e_{12} e_{24} e_{45} + \gamma_3 \gamma_4 e_{34} e_{45} (e_{13} + \mu_{21} e_{23}) + \\ &+ \frac{\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}{H} e_{12} e_{23} e_{34} e_{45}. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu tego wyrażenia do równania zasadniczego otrzymamy wynik, skoro jeszcze całe równanie przez H pomnożymy:

$$\begin{aligned} \frac{H^4 y_5}{P_1} &= \alpha_{04} H^3 + \alpha_{14} H^2 + \alpha_{24} H + H^3 \mu_{41} e_{45} + H^2 [\gamma_4 e_{45} (e_{14} + \\ &+ \mu_{21} e_{24} + \mu_{31} e_{34})] + H [\gamma_2 \gamma_4 e_{12} e_{24} e_{45} + \gamma_3 \gamma_4 (e_{13} + \\ &+ \mu_{21} e_{23}) e_{34} e_{45}] + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 e_{12} e_{23} e_{34} e_{45}. \end{aligned}$$

Skupiając wyrazy przy równych potęgach H , dostaniemy po uwzględnieniu wielkości na α_{04} , α_{14} i α_{24} , ale z poprzednią uwagą co do zastępstwa wielkości e_{14} na e_{15} i t. d. i wprowadzeniu skrótów (e_{13}) i (e_{14}) według pierwotnego oznaczenia:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{H^4 \cdot y_5}{P_1} &= H^3 [e_{15} + \mu_{21} e_{25} + \mu_{31} e_{35} + \mu_{41} e_{45}] + H^2 [\gamma_2 e_{12} e_{25} + \\ &+ \gamma_3 (e_{13}) e_{35} + \gamma_4 (e_{14}) e_{45}] + H [\gamma_2 \gamma_3 e_{12} e_{23} e_{35} + \gamma_2 \gamma_4 e_{12} e_{24} e_{45} + \\ &+ \gamma_3 \gamma_4 (e_{13}) e_{34} e_{45}] + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 e_{12} e_{23} e_{34} e_{45}. \end{aligned}} \quad (4)$$

Wkońcu oznaczając odpowiednie współczynniki przy H , przez α_{05} , α_{15} , α_{25} , α_{35} , otrzymamy postać równania:

$$\boxed{\frac{H^4 \cdot y_5}{P_1} = \alpha_{05} \cdot H^3 + \alpha_{15} \cdot H^2 + \alpha_{25} \cdot H + \alpha_{35}} \quad (4a)$$

gdzie

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{05} &= (e_{15}) = e_{15} + \mu_{21} e_{25} + \mu_{31} e_{35} + \mu_{41} e_{45} \\ \alpha_{15} &= \gamma_2 e_{12} e_{25} + \gamma_3 (e_{13}) e_{35} + \gamma_4 (e_{14}) e_{45} \\ \alpha_{25} &= \gamma_2 \gamma_3 e_{12} e_{23} e_{35} + \gamma_2 \gamma_4 e_{12} e_{24} e_{45} + \gamma_3 \gamma_4 (e_{13}) e_{34} e_{45} \\ \alpha_{35} &= \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \cdot e_{12} e_{23} e_{34} e_{45} \end{aligned}} \quad (4b)$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie zasadnicze czwartego stopnia na niewiadomą H ; jak widać, również i w tym przypadku stopień równania jest zgodny z ilością ciężarów czynnych, znajdujących się po jednej stronie symetrycznego ustroju.

Po tych dwu przykładach, oszczędzając w dalszym ciągu czytelnikowi trudu śledzenia przebiegu rachunku prowadzącego do równania ostatecznego, przytoczę jeszcze wynik końcowy, w przypadku obciążenia czynnego pięcioma zasadniczymi siłami dowolnymi $G_1, G_2 \dots G_5$, z jednej strony symetrycznego ustroju.

Po rozwiązaniu równania:

$$y_6 = \frac{P_1}{H} \sum_{k=1}^5 m_{k1} \cdot e_{k6}$$

dojdziemy do ostatecznego równania piątego stopnia, w postaci:

$$\frac{H^5 \cdot y_6}{P_1} = \alpha_{06} H^4 + \alpha_{16} H^3 + \alpha_{26} H^2 + \alpha_{36} H + \alpha_{46} \quad . \quad . \quad (5a)$$

o współczynnikach:

$$\begin{aligned} \alpha_{06} &= (e_{16}) = e_{16} + \mu_{21} e_{26} + \mu_{31} e_{36} + \mu_{41} e_{46} + \mu_{51} e_{56} \\ \alpha_{16} &= \gamma_2 e_{12} e_{26} + \gamma_3 (e_{13}) e_{36} + \gamma_4 (e_{14}) e_{46} + \gamma_5 (e_{15}) e_{56} \\ \alpha_{26} &= \gamma_2 \gamma_3 e_{12} e_{23} e_{36} + \gamma_2 \gamma_4 e_{12} e_{24} e_{46} + \gamma_3 \gamma_4 (e_{13}) e_{34} e_{46} + \\ &\quad + \gamma_2 \gamma_5 e_{12} e_{25} e_{56} + \gamma_3 \gamma_5 (e_{13}) e_{35} e_{36} + \gamma_4 \gamma_5 (e_{14}) e_{45} e_{56} \\ \alpha_{36} &= \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 e_{12} e_{23} e_{34} e_{46} + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_5 e_{12} e_{23} e_{35} e_{56} + \\ &\quad + \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5 e_{12} e_{24} e_{45} e_{56} + \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 (e_{13}) e_{34} e_{45} e_{56} \\ \alpha_{46} &= \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 e_{12} e_{23} e_{34} e_{45} e_{56} \end{aligned} \quad (5b)$$

Wpływ dowolnej ilości sił skupionych na linię ciśnienia.

Gdybyśmy po jednej stronie łuku symetrycznego i symetrycznie obciążonego, mieli n ciężarów zasadniczych: $G_1, G_2 \dots G_n$, przybierających pewne dowolne przyrosty jednostkowe $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ — to uważając rzędną y_n , pod n -tą siłą G_n , za znaną, równą np. obranej strzałce ustroju f , otrzymamy w zależności od $n-1$ sił czynnych równanie na niewiadome parcie poziome H , $n-1$ stopnia, w postaci:

$$\frac{H^{n-1} \cdot y_n}{P_1} = \alpha_{0n} H^{n-2} + \alpha_{1n} H^{n-3} + \alpha_{2n} H^{n-4} + \alpha_{3n} H^{n-5} + \dots + \alpha_{(n-3)n} H + \alpha_{(n-2)n} \cdot H^0$$

albo:

$$\frac{H^{n-1} \cdot y_n}{P_1} = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{kn} H^{n-(k+2)} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Współczynniki tego równania dadzą się określić z zasadniczego równania na y_n :

$$y_n = \frac{P_1}{H} \sum_{k=1}^{n-1} m_{k1} \cdot e_{kn}, \text{ w którym } m_{11} = 1.$$

Jednak ten sposób osiągania stałych współczynników przy dowolnej liczbie ciężarów staje się wysoce niedogodnym, oczywiście z powodu piętrzących się przekształceń, a co więcej jeszcze, wcale niezabezpiecza wyników przed ewentualnymi pomyłkami rachunkowymi, mogącemi mieć rozstrzygający wpływ na ostateczne równanie. Sposób bezpośredni, wyznaczania współczynników α dla jakiegokolwiek ilości sił, działających po jednej stronie ustroju, jest tem samem najwłaściwszy i bardzo wskazany.

Otóż, analogicznie do poprzednio przytoczonych przypadków, widzimy, że pierwszy współczynnik α_{0n} jest równy zastępczemu ramieniu (e_{1n}) siły $G_1 = P_1$, na którym ona sprawia moment, równy co do wielkości momentowi statycznemu względem podpory (pod n), wszystkich sił zasadniczych ($G_1 \dots G_n$).

A więc:

$$\alpha_{0n} = (e_{1n}) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{k1} \cdot e_{kn} \quad \text{gdzie } \mu_{11} = 1 \quad (7a)$$

Następnie przy pomocy indukcji stwierdzić możemy ogólność prawa dyktującego następne współczynniki, w odniesieniu do podpory (wezwłowania) znajdującego się pod ostatnią siłą G_n .

I tak, współczynniki $\alpha_{1n}, \alpha_{2n} \dots \alpha_{(n-2)n}$ występują po kolei jako sumy iloczynów przyrostów jednostkowych $\gamma_2, \gamma_3 \dots \gamma_{n-1}$, wchodzących jako kombinacje bez powtórzeń, poczynawszy od klasy 1-szej do $n-2$ -giej, stosownie do pierwszych wskaźników przy α — i poszczególnych odległości sił — występujących w pewnej klasie kombinacyj — od siebie, sił skrajnych od podpory, a siły pierwszej P_1 odsuniętej od sąsiedniej (najbliższej) na odległość ramienia zastępczego.

Towarzystwające czynnikom γ czynniki e charakteryzujące wzajemne położenie sił, wystąpią zatem z podwójnemi wskaźnikami, tworząc stosowne pary wraz z pierwszymi wskaźnikami czynników przy γ — skoro tylko

¹⁾ Siła G_n znajduje się nad samą podporą, wzgl. wezwłowiem, więc tem samem wskaźnik n określa położenie podpory, od której siła G_1 stoi w odległości e_{1n} , zaś ramię zastępcze siły $P_1 = G_1$ wynosi (e_{1n}).

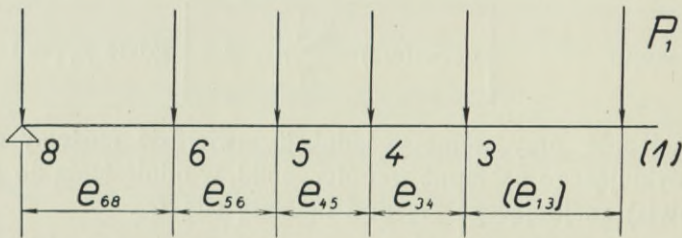
przydamy im na początku wskaźnik 1, a na końcu n (wskaźnik podporowy). Przytem każdy czynnik e ze wskaźnikiem 1, należy rozumieć w znaczeniu nawiasowym, t. zn. jako ramię zastępcze; np.

$$(e_{15}) = \sum_{k=1}^{k=4} \mu_{k1} \cdot e_{k5}.$$

Przytem na uwagę zasługuje ramię zastępcze siły P_1 względem P_2 , które wprost równa się odległości obu sił, czyli $(e_{12}) = e_{12}$.

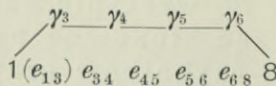
Postać wzoru ogólnego na określenie tych współczynników:

$$\begin{aligned} \alpha_{1n} &= \sum_{k=2}^{n-1} \gamma_k (e_{1k}) e_{kn} \\ \alpha_{2n} &= \sum \gamma_k \gamma_{k'} (e_{1k}) e_{kk'} e_{k'n} \\ \alpha_{3n} &= \sum \gamma_k \gamma_{k'} \gamma_{k''} (e_{1k}) e_{kk'} e_{k'k''} e_{k''n} \\ &\dots \end{aligned} \quad \dots \quad (7b)$$



Rys. 3.

Dla lepszego wyjaśnienia, podajemy schemat budowy pewnego wyrazu współczynnika α_{18} , którego wskaźnik drugi 8 znamionuje podporę ustroju obciążonego po jednej stronie 7-ma siłami czynnemi, zaś wskaźnik 4 oznacza klasę kombinacji bez powtórzeń, wszystkich elementów $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \dots \gamma_7$, z wyjątkiem pierwszej i ostatniej siły. Następnie weźmy pod uwagę jedną z kombinacji np. $\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$ — to budowa czynników e zawarta jest w schemacie:



Wobec tego odnośny wyraz szukany równa się:

$$\underline{\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 \cdot (e_{13}) e_{34} e_{45} e_{56} e_{68}}$$

Wymiary poszczególnych współczynników są:

$$\begin{array}{l} \alpha_{0n} \dots \dots \dots W \quad m \\ \alpha_{1n} \dots \dots \dots \text{„} \quad t \quad m \\ \alpha_{2n} \dots \dots \dots \text{„} \quad t^2 m \\ \alpha_{3n} \dots \dots \dots \text{„} \quad t^3 m \end{array}$$

Opierając się na wskazanej zasadzie, potrafimy zatem określić współczynniki w przypadku obciążenia 7-ma dowolnymi siłami, pojawiającymi się po obu stronach ustroju łukowego przy symetrycznym obciążeniu obustronnem ustroju, występującem w zupełnie dowolnych odstępach.

I tak:
$$\alpha_{07} = \sum_{k=1}^{k=6} \mu_{k1} \cdot e_{k7}$$

czyli:
$$\alpha_{07} = e_{17} + \mu_{21} e_{27} + \mu_{31} e_{37} + \mu_{41} e_{47} + \mu_{51} e_{57} + \mu_{61} e_{67}.$$

Następny współczynnik α_{17} , składać się będzie z 5 wyrazów o czynnikach kierujących γ , występujących jako kombinacje bez powtórzeń 1-szej klasy, z elementów $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ — a czynniki e wystąpią z wskaźnikami:

12, 27 — 13, 37, 14, 47 — 15, 57 — 16, 67; a zatem:

$$\alpha_{17} = \gamma_2 (e_{12}) \cdot e_{27} + \gamma_3 (e_{13}) e_{37} + \gamma_4 (e_{14}) e_{47} + \gamma_5 (e_{15}) e_{57} + \gamma_6 (e_{16}) e_{67}.$$

Z kolei współczynnik α_{26} , zawierać będzie 10 wyrazów, z czynnikami γ , występującymi jako kombinacje 2-giej klasy z tych samych elementów (bez powtórzeń); zaś towarzyszące im czynniki e stanowią będą odległości poszczególnych par sił względem podpory i siły P_1 — oczywiście odsuniętej każdorazowo na odległość ramienia zastępczego:

$$\begin{aligned} \alpha_{27} = & \gamma_2 \gamma_3 (e_{12}) e_{23} e_{37} + \gamma_2 \gamma_4 (e_{12}) e_{24} e_{47} + \gamma_2 \gamma_5 (e_{12}) e_{25} e_{57} + \\ & + \gamma_2 \gamma_6 (e_{12}) e_{26} e_{67} + \gamma_3 \gamma_4 (e_{13}) e_{34} e_{47} + \gamma_3 \gamma_5 (e_{13}) e_{35} e_{57} + \\ & + \gamma_3 \gamma_6 (e_{13}) e_{36} e_{67} + \gamma_4 \gamma_5 (e_{14}) e_{45} e_{57} + \gamma_4 \gamma_6 (e_{14}) e_{46} e_{67} + \\ & + \gamma_5 \gamma_6 (e_{15}) e_{56} e_{67}. \end{aligned}$$

Podobnie postępując, stworzymy kombinacje (bez powtórzeń) 3-ciej klasy z elementów $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ — i wprowadzimy stosowne odległości e — w ten sposób dostaniemy dalszy współczynnik α_{37} , posiadający również 10 wyrazów:

$$\begin{aligned} \alpha_{37} = & \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 (e_{12}) e_{23} e_{34} e_{47} + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_5 (e_{12}) e_{23} e_{35} e_{57} + \\ & + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_6 (e_{12}) e_{23} e_{36} e_{67} + \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5 (e_{12}) e_{24} e_{45} e_{57} + \\ & + \gamma_2 \gamma_4 \gamma_6 (e_{12}) e_{24} e_{46} e_{67} + \gamma_2 \gamma_5 \gamma_6 (e_{12}) e_{25} e_{56} e_{67} + \\ & + \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 (e_{13}) e_{34} e_{45} e_{57} + \gamma_3 \gamma_4 \gamma_6 (e_{13}) e_{34} e_{46} e_{67} + \\ & + \gamma_3 \gamma_5 \gamma_6 (e_{13}) e_{35} e_{56} e_{67} + \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 (e_{14}) e_{45} e_{56} e_{67}. \end{aligned}$$

Celem obliczenia α_{47} , układamy kombinacje 4-tej klasy, których będzie 5, a następnie dostosowujemy do nich odpowiednie czynniki, charakteryzujące odległości sił.

$$\begin{aligned}\alpha_{47} = & \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \cdot (e_{12}) e_{23} e_{34} e_{45} e_{57} + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_6 \cdot (e_{12}) e_{23} e_{34} e_{46} e_{67} + \\ & + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_5 \gamma_6 \cdot (e_{12}) e_{23} e_{35} e_{56} e_{67} + \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 (e_{12}) e_{24} e_{45} e_{56} e_{67} + \\ & + \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 (e_{13}) \cdot e_{34} e_{45} e_{56} e_{67}.\end{aligned}$$

Wreszcie ostatni współczynnik α_{57} , jako kombinacje 5-tej klasy z tych samych $\gamma_{2,3,\dots,6}$ — z przynależnymi odległościami e .

$$\alpha_{57} = \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 \cdot (e_{12}) e_{23} e_{34} e_{45} e_{56} e_{67}.$$

Najczęściej w praktyce, obciążenie pomostowe pojawia się jako szereg sił skupionych, występujących przeważnie w równych odstępach a . Dla takiego założenia, przy obciążeniu 7-ma siłami z których 6 w istocie wpływają na wielkość parcia poziomego H , powyższe wzory znacznie się uproszczą.

$$\alpha_{07} = (6 + 5\mu_{21} + 4\mu_{31} + 3\mu_{41} + 2\mu_{51} + \mu_{61}) a$$

$$\alpha_{17} = [5\gamma_2 + 4(2 + \mu_{21})\gamma_3 + 3(3 + 2\mu_{21} + \mu_{31})\gamma_4 + 2(4 + 3\mu_{21} + 2\mu_{31} + \mu_{41})\gamma_5 + (5 + 4\mu_{21} + 3\mu_{31} + 2\mu_{41} + \mu_{51})\gamma_6] a^2$$

$$\alpha_{27} = [4\gamma_2\gamma_3 + 6\gamma_2\gamma_4 + 6\gamma_2\gamma_5 + 4\gamma_2\gamma_6 + 3(2 + \mu_{21})\gamma_3\gamma_4 + 4(2 + \mu_{21})\gamma_3\gamma_5 + 3(2 + \mu_{21})\gamma_3\gamma_6 + 2(3 + 2\mu_{21} + \mu_{31})\gamma_4\gamma_5 + 2(3 + 2\mu_{21} + \mu_{31})\gamma_4\gamma_6 + (4 + 3\mu_{21} + 2\mu_{31} + \mu_{41})\gamma_5\gamma_6] a^3$$

$$\alpha_{37} = [3\gamma_2\gamma_3\gamma_4 + 4\gamma_2\gamma_3\gamma_5 + 3\gamma_2\gamma_3\gamma_6 + 4\gamma_2\gamma_4\gamma_5 + 4\gamma_2\gamma_4\gamma_6 + 3\gamma_2\gamma_5\gamma_6 + 2(2 + \mu_{21})\gamma_3\gamma_4\gamma_5 + 2(2 + \mu_{21})\gamma_3\gamma_4\gamma_6 + 2(2 + \mu_{21})\gamma_3\gamma_5\gamma_6 + (3 + 2\mu_{21} + \mu_{31})\gamma_4\gamma_5\gamma_6] \cdot a^4$$

$$\alpha_{47} = [2\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5 + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_6 + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_5\gamma_6 + 2\gamma_2\gamma_4\gamma_5\gamma_6 + (2 + \mu_{21})\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6] \cdot a^5$$

$$\alpha_{57} = \gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6 \cdot a^6.$$

Wielkość parcia poziomego dla takiego obciążenia o dowolnych μ i γ , a stałych odstępach a , obliczymy z równania, po wprowadzeniu $y_7 = f$ (strzałka łuku).

$$H^6 \cdot f = P_1 (\alpha_{07} H^5 + \alpha_{17} H^4 + \alpha_{27} H^3 + \alpha_{37} H^2 + \alpha_{47} H + \alpha_{57}).$$

Gdyby jednak wszystkie siły zasadnicze, z wyjątkiem pierwszej ($G_1 = P_1$), były równe, więc tem samym współczynnik μ stały, a nadto także przyrosty jednostkowe obciążeń γ niezmiennie, natenczas otrzymamy jeszcze prostsze wyniki:

$$\begin{aligned}\alpha_{0\tau} &= (6 + 15\mu) a \\ \alpha_{1\tau} &= (35 + 35\mu) \gamma a^2 \\ \alpha_{2\tau} &= (56 + 28\mu) \gamma^2 a^3 \\ \alpha_{3\tau} &= (36 + 9\mu) \gamma^3 a^4 \\ \alpha_{4\tau} &= (10 + 1\mu) \gamma^4 a^5 \\ \alpha_{5\tau} &= 1 \gamma^5 a^6.\end{aligned}$$

Przyjmując wreszcie wszystkie siły zasadnicze równe co do wielkości sile P_1 , więc zarazem $\mu=1$, to powyższe wzory otrzymają wreszcie najprostszą postać:

$$\begin{aligned}\alpha_{0\tau} &= 21 a \\ \alpha_{1\tau} &= 70 \gamma a^2 \\ \alpha_{2\tau} &= 84 \gamma^2 a^3 \\ \alpha_{3\tau} &= 45 \gamma^3 a^4 \\ \alpha_{4\tau} &= 11 \gamma^4 a^5 \\ \alpha_{5\tau} &= 1 \gamma^5 a^6.\end{aligned}$$

Na powyższym przykładzie wykazaliśmy przebieg budowy współczynników „ α ” tak w przypadku zupełnie ogólnym, gdy μ , γ i odstęp e są różne, jakoteż pod założeniami szczególniejszemi, raz dla równych odstępów sił a , a potem jeszcze gdy μ i γ są stałe, i wreszcie gdy oprócz tego $\mu=1$.

W dalszym ciągu rozważań nad szczególniejszemi przypadkami, poznamy jeszcze ogólne wzory na wielkość współczynników „ α ”, które zestawiamy dla niektórych obciążeń najczęściej w praktyce mostowej zachodzących.

Wielkość niewiadomego parcia poziomego H .

Ogólne równanie na parcie poziome H , przy n siłach, odniesione do ostatniej z nich t. j. n -tej, czyli o $n-1$ siłach rzeczywicie czynnych, znajdujących się po każdej stronie ustroju — opiewa:

$$\frac{H^{n-1} \cdot y_n}{P_1} = \alpha_{0n} H^{n-2} + \alpha_{1n} H^{n-3} + \alpha_{2n} H^{n-4} + \dots + \alpha_{(n-3)n} H + \alpha_{(n-2)n}.$$

Rozwiązać go możemy, którymkolwiek bądź sposobem wziętym z literatury matematycznej. Jednak rozwiązywanie równań wyższych stopni o jednej niewiadomej zabiera projektującemu niemało czasu, tak, że niejednokrotnie mimo najlepszych zamiarów ścisłego rozwiązywania matematycznego, dogadzającemu nawet istotnemu zadowoleniu, przecież zwrócić się nam przychodzi do sposobów prostszych, jak to przeważnie się zdarza w zagadnieniach statycznych o ograniczonej dokładności wyników, z uwagi na ich przydatność techniczną.

W ogólności chcielibyśmy już zgóry wiedzieć, który z $(n-1)$ pierwiastków równania spełni nasze zadanie statyczne.

Przedewszystkiem rzeczywiste pierwiastki ujemne nie mogą oczywiście ze względów statycznych odpowiedzieć wymaganym warunkom. Wobec tego rozwiązania należy poszukiwać tylko wśród pierwiastków dodatnich. Pozostaje zatem do rozstrzygnięcia kwestja, czy w ogólności mogą występować inne pierwiastki, oprócz jednego.

Otóż, gdyby obok właściwego pierwiastka H_1 , powodującego w ustroju łukowym określoną linię ciśnienia o rzędnych y_i^1 — występować mogły inne pierwiastki dodatnie np. $H' < H_1$ lub $H'' > H_1$, formujące linię ciśnienia według rzędnych y_i' względnie y_i'' — natenczas ze względów statycznych wyniknąć musiałyby następujące nierówności $y_i' > y_i^1$, zaś dla drugiego założenia $y_i'' < y_i^1$ — które pociągają znowu za sobą takie konsekwencje jak: $H' > H_1$ względnie $H'' < H_1$, stojące oczywiście w wyraźnej sprzeczności z pierwotnymi założeniami. Z tego wynika, że wielkość niewiadomego parcia poziomego H dla pewnego ustroju łukowego, zawarta jest w jednym jedynym pierwiastku dodatnim, równania zasadniczego $n-1$ stopnia.

Wartość niewiadomej w każdym razie musi być większa od dolnej granicy $\alpha_{0n} \frac{P_1}{y_n}$.

Po tych bezsprzecznie ważnych uwagach, znaczenia ogólnego i praktycznego, należy zkolei zająć się sposobem rozwiązania, któreby jak najprędzej prowadził do celu. Otóż, biorąc pod uwagę przedział funkcji w otoczeniu szukanego pierwiastka, a więc o rzędnych zasadniczo większych od wartości $\alpha_{0n} \frac{P_1}{y_n}$, możemy przez podzielenie przez H^{n-4} osiągnąć równanie w postaci:

$$\frac{H^3 \cdot y_n}{P_1} = \alpha_{0n} H^2 + \alpha_{1n} H + \alpha_{2n} + \frac{\alpha_{3n}}{H} + \frac{\alpha_{4n}}{H^2} + \frac{\alpha_{5n}}{H^3} + \dots$$

Wyrazy prawej strony równania, będące ilorazami o niewiadomej H , z potęgą stopniowo wzrastającą w poszczególnych mianownikach, maleją pokolei, o czym nie trudno przekonać się na przykładach, tak, że ze względów na wystarczającą dokładność wyników, zupełnie dobrze ograniczyć możemy ilość występujących ilorazów do kilku początkowych; a zależeć to będzie oczywiście od stopnia pożądanej dokładności rachunku. Zwyczajnie trzy, a najwyżej cztery wyrazy najzupełniej zapewniają dostateczną dokładność, wchodzącym w grę wielkościom statycznym ustroju łukowego.

Gdybyśmy się jednak zadowolili tylko trzema pierwszymi wyrazami prawej strony równania, to uzyskalibyśmy równanie trzeciego

stopnia, którego pierwiastek rzeczywisty określa już bardzo zbliżoną wielkość parcia poziomego H . Podstawiając następnie tę wartość niewiadomej w wyrazach opuszczonych, mamy możliwość poprawienia wolnego wyrazu α_{2n} a w konsekwencji i szukanej wartości H .

Powyższy sposób praktycznej redukcji równania dowolnego stopnia do równania trzeciego stopnia, w znacznej mierze przyczynia się do ułatwienia postępowania matematycznego, nie umniejszając wcale dokładności wymaganej względami statycznymi.

Poprzestając zatem na równaniu trzeciego stopnia, dostaniemy po wprowadzeniu $y_n = f$ (strzałka ustroju), i po oznaczeniu jeszcze:

$$\alpha_0 = \alpha_{0n} \cdot \frac{P_1}{f}$$

$$\alpha_1 = \alpha_{1n} \cdot \frac{P_1}{f}$$

$$\alpha_2 = \alpha_{2n} \cdot \frac{P_1}{f}$$

$$\underline{H^3 - \alpha_0 H^2 - \alpha_1 H - \alpha_2 = 0.}$$

Celem rozwiązania powyższego równania, wprowadzamy znane podstawienia:

$$\underline{p = \left(\frac{\alpha_0}{3}\right)^2 + \frac{\alpha_1}{3}; \quad q = \frac{\alpha_0}{3} \left[\left(\frac{\alpha_0}{3}\right)^2 + \frac{\alpha_1}{2} \right] + \frac{\alpha_2}{2}}$$

lub też:
$$q = \frac{\alpha_0}{3} \left(p + \frac{\alpha_1}{6} \right) + \frac{\alpha_2}{2}.$$

Ponieważ nadto zachodzić będzie nierówność $q^2 > p^3$, przeto rzeczywisty pierwiastek ma znane rozwiązanie za pomocą funkcji hiperbolicznych.

$$\text{Cos } \bar{\psi} = \frac{q}{p \cdot \sqrt{p}}, \text{ skąd znajdziemy } \bar{\psi} \text{ i } \frac{\bar{\psi}}{3}, \text{ a następnie } \text{Cos } \frac{\bar{\psi}}{3};$$

wreszcie niewiadomą:
$$\underline{H = 2\sqrt{p} \cdot \text{Cos } \frac{\bar{\psi}}{3} + \frac{\alpha_0}{3}.$$

Jednakże w przypadkach ustrojów mostów łukowych średnia wartość funkcji (hip.) $\text{Cos } \frac{\bar{\psi}}{3}$ waha około -1.025 , więc w przybliżeniu moglibyśmy obliczać H z równania:

$$H = 2.05 \sqrt{p} + \frac{\alpha_0}{3},$$

względnie:
$$H = 2.05 \sqrt{\left(\frac{\alpha_0}{3}\right)^2 + \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_0}{3}}.$$



Niekiedy nawet wprowadzenie $\text{Cos } \frac{\psi}{3} = 1$, może zupełnie wystarczyć za pierwsze przybliżenie wartości na H ;

$$\text{t. j. } H = 2\sqrt{p} + \frac{\alpha_0}{3}, \text{ wzgl. } H = 2\sqrt{\left(\frac{\alpha_0}{3}\right)^2 + \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_0}{3}}.$$

Skoro następnie przybliżoną wartość parcia poziomego H podstawimy w wyrazach opuszczonych (str. 16), osiągniemy poprawkę dla wolnego wyrazu, t. j.

$$\Delta \alpha_2 = \frac{\alpha_3}{H} + \frac{\alpha_4}{H^2} + \frac{\alpha_5}{H^3}, \text{ gdzie } \alpha_3 = \alpha_{3n} \cdot \frac{P_1}{f}$$

$$\alpha_4 = \alpha_{4n} \quad "$$

$$\alpha_5 = \alpha_{5n} \quad "$$

Wobec tego q zmieni się o $\Delta q = \frac{1}{2} \Delta \alpha_2$.

A więc $\text{Cos } \psi = \frac{q + \frac{1}{2} \Delta \alpha_2}{p \sqrt{p}}$, skąd znajdziemy ψ , $\frac{\psi}{3}$ i $\text{Cos } \frac{\psi}{3}$,

$$\text{a wreszcie: } H = \underline{2\sqrt{p} \cdot \text{Cos } \frac{\psi}{3} + \frac{\alpha_0}{3}}.$$

W ten sposób wielkość szukanego parcia poziomego H została z wystarczającą dokładnością określona.

Następnie pozostaje nam jeszcze do określenia kształt przebiegu linii ciśnienia, na czem wreszcie całe zagadnienie zostanie całkowicie rozwiązane.

Wielkość rzędnych linii ciśnienia w punktach działania ciężarów skupionych zastrzeżona jest równaniem:

$$y_n = P_1 \left(\frac{\alpha_{0n}}{H} + \frac{\alpha_{1n}}{H^2} + \frac{\alpha_{2n}}{H^3} + \dots \right),$$

gdzie za n należy wstawiać liczby 2, 3, 4... k ... $n-1$ — a za H wartość ostateczną, obliczoną poprzednio.

Dowolna rzędna y_k linii ciśnienia, dla znanego parcia poziomego H , jest zależna od współczynników α_{0k} , α_{1k} , α_{2k} ..., które według znanej reguły ogólnej, dadzą się każdorazowo ściśle określić, tak dla zupełnie dowolnego obciążenia zasadniczego skupionego, przybierającego całkiem różne przyrosty jednostkowe γ , jakoteż dla pewnego szczególniejszego przypadku, częściej trafiającego się w omawianych ustrojach łukowych. Wobec czego problem kształtu ustroju według linii ciśnienia jest rozwiązany ogólnie, oczywiście z pominięciem odkształcalności osiowej samego łuku.

**Wzory ogólne na współczynniki $\alpha_{0n}, \alpha_{1n} \dots$
dla niektórych obciążeń.**

Gdy obciążenie skupione zasadnicze, pojawia się w równych odstępach a i przytem zachodzi jeszcze jednakowy przyrost obciążeń jednostkowych pionowych γ , natenczas dadzą się wyrazić wszystkie współczynniki $\alpha_{0n}, \alpha_{1n} \dots$ w postaci zupełnie prostej.

Obciążenie prawie równomierne.

W obciążeniu łuków zachodzi często taki przypadek, że poza pierwszym ciężarem w pobliżu zwornika, inne mogą być równe i równomiernie rozłożone. Niechaj zatem na symetryczny ustrój łukowy działa również symetrycznie rozmieszczone obciążenie skupione, które po jednej stronie zawiera siły: P_1 i szereg sił μP_1 o wypadkowej $\sum_2^n \mu P_1$, przyczem wszystkie odstępny są jednakowe i równe a , jakoteż wszystkie γ są stałe.

Chcąc zatem wyprowadzić wzory na $\alpha_{0n}, \alpha_{1n} \dots$ w odniesieniu do n -tej siły, zastosujemy poprzednio wprowadzone wzory ogólne (7 a).

I tak pierwszy współczynnik:

$$\alpha_{0n} = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{k1} \cdot e_{kn}, \text{ a ponieważ } \mu_{11} = 1, \text{ więc}$$

$$\alpha_{0n} = e_{1n} + \mu \sum_{k=2}^{n-1} e_{kn}; \text{ podstawiając wartości za } e_{1n} = (n-1)a$$

$$\text{ i } e_{kn} = (n-k)a$$

$$\alpha_{0n} = a [n-1 + \mu \sum_{k=2}^{n-1} (n-k)].$$

Zastępując sumę $\sum_{k=2}^{n-1} (n-k)$ przez $\sum_{k=1}^{n-2} k$, dostaniemy po wprowadzeniu i zesumowaniu w zakresłonych granicach szeregu arytmetycznego:

$$\alpha_{0n} = a [n-1 + \mu \sum_{k=1}^{n-2} k] = a \left[n-1 + \mu \binom{n-1}{2} \right],$$

albo:

$$\alpha_{0n} = a \left[\binom{n-1}{1} + \mu \binom{n-1}{2} \right] \dots \dots \dots (8)$$

Zkolei przychodzi nam wyznaczyć współczynnik α_{1n} ; z równania ogólnego (7 b) dostaniemy:

$$\alpha_{1n} = \gamma \sum_{k=2}^{n-1} (e_{1k}) \cdot e_{kn}, \text{ a ponieważ } (e_{1k}) = \alpha_{0n}; e_{kn} = (n-k)a,$$

¹⁾ W ogólności symbol $\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$

więc:

$$\alpha_{1n} = \gamma a \sum_{k=2}^{n-1} (n-k) \cdot \alpha_{0k}, \quad \text{wstawiając} \quad \sum_{k=2}^{n-1} (n-k) \alpha_{0k} = \sum_{k=1}^{n-2} k \cdot \alpha_{0(n-k)}$$

$$\alpha_{1n} = \gamma a \sum_{k=1}^{n-2} k \cdot \alpha_{0(n-k)}.$$

Gdy następnie wprowadzimy jeszcze za $\alpha_{0(n-k)}$ wartość według otrzymanego równania na α_{0n} czyli:

$$\alpha_{0(n-k)} = a \left[\binom{n-1-k}{1} + \mu \binom{n-1-k}{2} \right],$$

to otrzymamy:

$$\alpha_{1n} = \gamma a^2 \sum_{k=1}^{n-2} k \cdot \left[\binom{n-1-k}{1} + \mu \binom{n-1-k}{2} \right].$$

Po przeprowadzeniu zakreślonego sumowania według ogólnego wzoru:

$$\sum_{k=1}^{m-r} k \cdot \binom{m-k}{r} = \binom{m+1}{r+2}$$

dostaniemy wkońcu wartość współczynnika α_{1n} w postaci:

$$\boxed{\alpha_{1n} = \gamma a^2 \left[\binom{n}{3} + \mu \binom{n}{4} \right]} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (9)$$

Postępując analogicznie wyprowadzimy równanie na wielkość następnego współczynnika α_{2n} .

$\alpha_{2n} = \gamma \sum \gamma(e_{1k}) \cdot e_{kk'} \cdot e_{k'n}$, gdzie kk' przedstawiają kombinacje drugiej klasy z elementów 2, 3, 4... $n-1$; ($k' = 3, 4 \dots n-1$).

Ponieważ $\gamma(e_{1k}) \cdot e_{kk'} = \alpha_{1k'}$ więc:

$$\alpha_{2n} = \gamma \sum_{k'=3}^{n-1} \alpha_{1k'} \cdot e_{k'n} = \gamma a \sum_{k'=3}^{n-1} (n-k') \cdot \alpha_{1k'},$$

albo:

$$\alpha_{2n} = \gamma a \sum_{k'=1}^{n-3} k' \cdot \alpha_{1(n-k')}.$$

Po wprowadzeniu wartości za $\alpha_{1(n-k')}$ według równania poprzednio wyprowadzonego, dostaniemy:

$$\alpha_{1(n-k')} = \gamma a^2 \left[\binom{n-k'}{3} + \mu \binom{n-k'}{4} \right],$$

a następnie: $\alpha_{2n} = \gamma^2 a^3 \sum_{k'=1}^{n-3} k' \left[\binom{n-k'}{3} + \mu \binom{n-k'}{4} \right]$ wreszcie

po wykonaniu: $\boxed{\alpha_{2n} = \gamma^2 a^3 \left[\binom{n+1}{5} + \mu \binom{n+1}{6} \right]} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (10)$

W ten sam sposób możemy otrzymać wzory na dalsze współczynniki. Poprzestając na samych tylko wynikach podajemy jeszcze dwa następujące:

$$\alpha_{3n} = \gamma^3 a^4 \left[\binom{n+2}{7} + \mu \binom{n+2}{8} \right] \cdot \cdot \cdot \quad (11)$$

$$\alpha_{4n} = \gamma^4 a^5 \left[\binom{n+3}{9} + \mu \binom{n+3}{10} \right] \cdot \cdot \cdot \quad (12)$$

Porównyując ze sobą wyniki końcowe, możemy łatwo wysnuć z nich prawo pomocnicze, według którego da się zbudować każdy współczynnik. Przedewszystkiem daje się zauważyć pewne rytmiczne następstwo budowy czynników, skoro za podstawę przyjmiemy pierwszy współczynnik α_{0n} , przedstawiający zarazem moment statyczny sił układu zasadniczego P_1 razy zmniejszonego, względem ostatniej siły znajdującej się w punkcie n — t. j. dla obciążenia 1-ką i układem μ .

W ogólności każdy człon czynnika w [], omawianego współczynnika α_{0n} , daje się przedstawić w postaci symbolu ogólnego $\binom{m}{k}$; przyczem odpowiednie człony następujących współczynników α_{1n} , α_{2n} ..., posiadają, pokolei biorąc, ilość elementów m stale zwiększającą się o 1, a klasę kombinacji rosnącą o 2 — pozostały czynnik a^i , stopniowo przybiera nowy czynnik γa , o potęgde równej pierwszemu wskaźnikowi przy a .

Pisząc ogólnie, otrzymamy równanie każdego współczynnika odniesionego do n -tej siły, o wskaźnikach $i=0, 1, 2, 3 \dots$ w postaci:

$$\alpha_{in} = a (\gamma a)^i \cdot \left[\binom{m_1+i}{k_1+2i} + \mu \binom{m_2+i}{k_2+2i} \right]$$

gdzie m_1 , m_2 są funkcjami n .

Dostosowując następnie, wartości dla przyjętego przypadku obciążenia uzyskujemy równanie:

$$\alpha_{in} = a (\gamma a)^i \cdot \left[\binom{n-1+i}{1+2i} + \mu \binom{n-1+i}{2+2i} \right] \cdot \cdot \quad (13)$$

$i=0, 1, 2, 3 \dots$

Mając jeszcze w dalszym ciągu na uwadze podporę ustroju odsuniętą od n -tej siły, o dowolną wielkość $\delta \cdot a$ (δ niemianowane), natenczas rozważane współczynniki „ a ” służące do znalezienia parcia poziomego H określimy przez:

$$\alpha_{i n + \delta} = \alpha_{in} + \delta \cdot (\alpha_{i n + 1} - \alpha_{in}), \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots$$

¹⁾ Równanie (8).

Różnica sąsiednich wielkości przedstawia spadek na długości a , który oznaczamy będziemy przez α'_{in} ;

$$\text{więc } \alpha_{in+\delta} = \alpha_{in} + \delta \cdot \alpha'_{in}.$$

Wielkość spadku w pewnym miejscu n , odnośnych funkcji $\binom{m}{k}$ osiągniemy zniżając o 1 klasę k^1 .

$$\text{A zatem: } \alpha'_{in} = a(\gamma a)^i \cdot \left[\binom{m_1+i}{k_1-1+2i} + \mu \binom{m_2+i}{k_2-1+2i} \right],$$

a w danym przypadku wielkość spadku równa się:

$$\alpha'_{in} = a(\gamma a)^i \cdot \left[\binom{n-1+i}{2i} + \mu \binom{n-1+i}{1+2i} \right] \quad (13a)$$

Dla lepszego przeglądu, zestawiamy poniżej część wzorów na określenie wielkości współczynników, odnosząc je do położenia podpory znajdującej się w odstępnie $\delta \cdot a$ od ostatniej siły, a zarazem najbliższej podpory — skoro obciążenie zasadnicze, o równych odstępach sił a i równych przyrostach γ , składa się z siły P_1 i szeregu sił μP_1 .

$$\begin{aligned} \alpha_{0,n+\delta} &= a \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \mu \right] + \delta \cdot a [1 + (n-1) \mu] \\ \alpha_{1,n+\delta} &= \gamma a^2 \left[\binom{n}{3} + \binom{n}{4} \mu \right] + \delta \cdot \gamma a^2 \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3} \mu \right] \\ \alpha_{2,n+\delta} &= \gamma^2 a^3 \left[\binom{n+1}{5} + \binom{n+1}{6} \mu \right] + \delta \cdot \gamma^2 a^3 \left[\binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{5} \mu \right] \\ \alpha_{3,n+\delta} &= \gamma^3 a^4 \left[\binom{n+2}{7} + \binom{n+2}{8} \mu \right] + \delta \cdot \gamma^3 a^4 \left[\binom{n+2}{6} + \binom{n+2}{7} \mu \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Zakładając następnie $\mu = 1$, t. j. równomierność obciążenia zasadniczego o wypadkowej $\sum_1^n P_1$, powyższe równania znacznie się uproszczą:

$$\begin{aligned} \alpha_{0,n+\delta} &= \binom{n}{2} a + \binom{n}{1} \delta a \\ \alpha_{1,n+\delta} &= \binom{n+1}{4} \gamma a^2 + \binom{n+1}{3} \delta \cdot \gamma a^2 \\ \alpha_{2,n+\delta} &= \binom{n+2}{6} \gamma^2 a^3 + \binom{n+2}{5} \delta \cdot \gamma^2 a^3 \\ \alpha_{3,n+\delta} &= \binom{n+3}{8} \gamma^3 a^4 + \binom{n+3}{7} \delta \cdot \gamma^3 a^4 \\ &\dots \end{aligned} \quad (15)$$

I tak:

¹⁾ Wogóle $\binom{m+1}{k} - \binom{m}{k} = \binom{m}{k-1}$.

W przypadku położenia podpory pod n -tą siłą, czyli dla $\delta=0$, wyrażenia na wielkość współczynników równają się:

$$\begin{array}{l}
 \alpha_{0n} = \binom{n}{2} a \\
 \alpha_{1n} = \binom{n+1}{4} \gamma a^2 \\
 \alpha_{2n} = \binom{n+2}{6} \gamma^2 a^3 \\
 \alpha_{3n} = \binom{n+3}{8} \gamma^3 a^4 \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (16)$$

Uproszczenia.

Gdy następnie dla rozważanego obciążenia n siłami, z których pierwsza jest P_1 , a reszta μP_1 , wyrazimy współczynniki będące funkcją ilości sił n , przez λ_{in} , względnie λ'_{in} , dostaniemy:

$$\alpha_{in} = \lambda_{in} \cdot \gamma^i a^{i+1}$$

o spadach:

$$\alpha'_{in} = \lambda'_{in} \cdot \gamma^i a^{i+1},$$

w których przez odpowiednie λ_{in} , λ'_{in} należy rozumieć:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{in} &= \binom{n-1+i}{1+2i} + \mu \binom{n-1+i}{2+2i} \\
 \lambda'_{in} &= \binom{n-1+i}{2i} + \mu \binom{n-1+i}{1+2i} \quad \text{dla } i=0, 1, 2, 3, \dots, (n-2).
 \end{aligned}$$

Wobec tego współczynnik $\alpha_{i(n+\delta)} = (\lambda_{in} + \delta \lambda'_{in}) \gamma^i a^{i+1}$.

Po oznaczeniu: $\underline{\lambda''_{in} = \lambda_{in} + \delta \lambda'_{in}}$ uzyskuje się $\underline{\alpha_{i(n+\delta)} = \lambda''_{in} \cdot \gamma^i a^{i+1}}$.

$$\begin{array}{llll}
 \text{Dla } i=0 & \lambda''_{0n} = \lambda_{0n} + \delta \cdot \lambda'_{0n} & \text{''} & \text{''} & \alpha_{0(n+\delta)} = \lambda''_{0n} \cdot a \\
 i=1 & \lambda''_{1n} = \lambda_{1n} + \delta \cdot \lambda'_{1n} & \text{''} & \text{''} & \alpha_{1(n+\delta)} = \lambda''_{1n} \cdot \gamma a^2 \\
 i=2 & \lambda''_{2n} = \lambda_{2n} + \delta \cdot \lambda'_{2n} & \text{''} & \text{''} & \alpha_{2(n+\delta)} = \lambda''_{2n} \cdot \gamma^2 a^3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

W przypadku, gdy podpora ustroju łukowego znajduje się wprost pod n -tą siłą co często może zachodzić, natenczas współczynniki $\lambda''_{in} = \lambda_{in}$. Korzyści powyższych uproszczeń poznamy w dalszym ciągu, podczas wyznaczania wielkości parcia poziomego H .

Tabela I.

i	$\lambda_{i,n}$	$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	$\lambda_{0,n}$	$\binom{n-1}{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		$\binom{n-1}{2}$	—	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
1	$\lambda_{1,n}$	$\binom{n}{3}$	—	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455
		$\binom{n}{4}$	—	—	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1 001	1 365
2	$\lambda_{2,n}$	$\binom{n+1}{5}$	—	—	0	1	6	21	56	126	252	462	792	1 287	2 002	3 003	4 368
		$\binom{n+1}{6}$	—	—	—	0	1	7	28	84	210	462	924	1 716	3 003	5 005	8 008
3	$\lambda_{3,n}$	$\binom{n+2}{7}$	—	—	—	0	1	8	36	120	330	792	1 716	3 432	6 435	11 440	19 448
		$\binom{n+2}{8}$	—	—	—	—	0	1	9	45	165	495	1 287	3 003	6 435	12 870	24 310
4	$\lambda_{4,n}$	$\binom{n+3}{9}$	—	—	—	—	0	1	10	55	220	715	2 002	5 005	11 440	24 310	48 620
		$\binom{n+3}{10}$	—	—	—	—	0	1	11	66	286	1 001	3 003	8 008	19 448	43 758	$\cdot \mu$
5	$\lambda_{5,n}$	$\binom{n+4}{11}$	—	—	—	—	—	0	1	12	78	364	1 365	4 368	12 376	31 824	75 582
		$\binom{n+4}{12}$	—	—	—	—	—	0	1	13	91	455	1 820	6 188	18 564	50 388	$\cdot \mu$

Tabela I.

i	$\lambda_{i,n}$	$n =$	16	17	18	19	20	21	22	23
0	$\lambda_{0,n}$	$\binom{n-1}{1}$	15	16	17	18	19	20	21	22
		$\binom{n-1}{2}$	105	120	136	153	171	190	210	231
1	$\lambda_{1,n}$	$\binom{n}{3}$	560	680	816	969	1 140	1 330	1 540	1 771
		$\binom{n}{4}$	1 820	2 380	3 060	3 876	4 845	5 985	7 315	8 855
2	$\lambda_{2,n}$	$\binom{n+1}{5}$	6 188	8 568	11 628	15 504	20 349	26 334	33 649	42 504
		$\binom{n+1}{6}$	12 376	18 564	27 132	38 760	54 264	74 613	100 947	134 596
3	$\lambda_{3,n}$	$\binom{n+2}{7}$	31 824	50 388	77 520	116 280	170 544	245 157	346 104	480 700
		$\binom{n+2}{8}$	43 758	75 582	125 970	203 490	319 770	490 314	735 471	1 081 575
4	$\lambda_{4,n}$	$\binom{n+3}{9}$	92 378	167 960	293 930	497 420	817 190	1 307 504	2 042 975	3 124 550
		$\binom{n+3}{10}$	92 378	184 756	352 716	646 646	1 144 066	1 961 256	3 268 760	5 311 735
5	$\lambda_{5,n}$	$\binom{n+4}{11}$	167 960	352 716	705 432	1 352 078	2 496 144	4 457 400	7 726 160	13 037 895
		$\binom{n+4}{12}$	125 970	293 930	646 646	1 352 078	2 704 156	5 200 300	9 657 700	17 383 860

Dla różnej ilości sił skupionych, $n=1, 2, 3 \dots$, pojawiających się jako obciążenie równomierne częściowe, o sile P_1 i szeregu sił o wartościach μP_1 , występujących w równych odstępach a , ze stałymi przyrostami obciążeń pionowych γ — zestawiliśmy tabelarycznie (tabela I), wszystkie wielkości potrzebne do określenia współczynników λ_{in} , λ'_{in} ; z których znajdziemy λ''_{in} , a wreszcie szukane współczynniki $\alpha_{i(n+\delta)}$.

Sposób używania tabeli I jest następujący:

Dla pewnej znanej ilości sił n , obciążających poziomą ustroj, otrzymujemy z n -tej kolumny, wszystkie wielkości λ_{in} , skoro dodamy liczby obu wierszy, z których każdy drugi wiersz odpowiedniej rubryki $i=0, 1, 2 \dots$ mnożymy przez μ .

Wielkości charakteryzujące spady λ'_{in} (pod n -tą siłą), uzyskujemy jako sumę liczb — z kolumny $n+1$ -szej, wiersza bezpośrednio położonego nad rubryką $i=1, 2, 3 \dots$, z wyjątkiem λ'_{0n} o wartości 1 — z kolumny n -tej, wiersza pierwszego mnożonego przez μ , każdej rubryki $i=0, 1, 2 \dots$

Zastosowanie.

Dla lepszego wyjaśnienia sposobu używania tabeli I, podajemy przykład obejmujący obciążenie zasadnicze 8-ma siłami ($n=8$), z których pierwsza jest P_1 a siedem pozostałych μP_1 — o równych odstępach a i stałych γ .

Z kolumny $n=8$, dostaniemy wielkości λ_{in} :

$$\lambda_{08} = 7 + 21\mu$$

$$\lambda_{18} = 56 + 70\mu$$

$$\lambda_{28} = 126 + 84\mu$$

$$\lambda_{38} = 120 + 45\mu$$

$$\lambda_{48} = 55 + 11\mu$$

$$\lambda_{58} = 12 + 1\mu$$

$$\lambda_{68} = 1 + 0$$

zaś z kolumny $n+1=9$ i $n=8$ odpowiednie spady λ'_{in} :

$$\lambda'_{08} = 1 + 7\mu$$

$$\lambda'_{18} = 28 + 56\mu$$

$$\lambda'_{28} = 126 + 126\mu$$

$$\lambda'_{38} = 210 + 120\mu$$

$$\lambda'_{48} = 165 + 55\mu$$

$$\lambda'_{58} = 66 + 12\mu$$

$$\lambda'_{68} = 13 + 0$$

Następnie odpowiednie współczynniki $\lambda''_{i8} = \lambda_{i8} + \delta \lambda'_{i8}$, gdy uważać będziemy podporę ustroju umieszczoną względem 8-mej siły w odstępnie $\delta \cdot a$:

$$\begin{aligned} \lambda''_{08} &= 7 + 21\mu + \delta(1 + 7\mu) \\ \lambda''_{18} &= 56 + 70\mu + \delta(28 + 56\mu) \\ \lambda''_{28} &= 126 + 84\mu + \delta(126 + 126\mu) \\ \lambda''_{38} &= 120 + 45\mu + \delta(210 + 120\mu) \\ \lambda''_{48} &= 55 + 11\mu + \delta(165 + 55\mu) \\ &\dots \end{aligned}$$

Wobec tego ostatecznie współczynniki α wynoszą:

$$\begin{aligned} \alpha_{0(8+\delta)} &= \lambda''_{08} \cdot \alpha \\ \alpha_{1(8+\delta)} &= \lambda''_{18} \cdot \gamma \alpha^2 \\ \alpha_{2(8+\delta)} &= \lambda''_{28} \cdot \gamma^2 \alpha^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Gdybyśmy założyli $\mu=1$, t. j. równomierność obciążenia:

$$\begin{aligned} \lambda''_{08} &= 28 + 8\delta \\ \lambda''_{18} &= 126 + 84\delta \\ \lambda''_{28} &= 210 + 252\delta \\ \lambda''_{38} &= 165 + 330\delta \\ &\dots \end{aligned}$$

A wreszcie gdyby podpora znajdowała się pod 8-mą siłą, czyli $\delta=0$:

$$\begin{aligned} \lambda''_{08} &= \lambda_{08} = 28 \\ \lambda''_{18} &= \lambda_{18} = 126 \\ \lambda''_{28} &= \lambda_{28} = 210 \\ \lambda''_{38} &= \lambda_{38} = 165 \\ &\dots \end{aligned}$$

W przypadku równomiernego obciążenia zupełnego, $\mu=1$, możemy wyznaczyć współczynniki λ_{in} i λ'_{in} wprost z kolumny $n+1$, biorąc wartości — dla pierwszych, z drugiego wiersza, dla drugich zaś, z pierwszego wiersza, odnośnych rubryk — $i=0, 1, 2, \dots$

Ten bezpośredni sposób wyznaczania współczynników pomocniczych λ_{in} i spadów λ'_{in} z tabeli I, umożliwi szybkie znalezienie wielkości współczynników $\alpha_{i(n+\delta)}$, zabezpieczając ostateczne wyniki pod-

stawowe przed ewentualnymi pomyłkami, których nietrudno popełnić podczas każdorazowego wyliczania odpowiednich funkcji zmiennej n .

W przypadku rozpatrywanego obciążenia symetrycznego, występującego po obu stronach ustroju łukowego, wyszliśmy nawet poza zwyczajnie pojawiającą się ilość sił skupionych w ustrojach łukowych konstrukcyj mostowych, zwiększając ich liczbę do 23 ($n=23$), by mieć zarazem możliwość uwzględniania obciążeń ciągłych, jak np. ciężaru własnego samego łuku, który praktycznie biorąc, możemy również zastąpić większą ilością sił skupionych, jak to się często w praktyce stosuje.

Wielkość parcia poziomego H przy zastosowaniu uproszczeń.

Stosując poprzednio wyprowadzone równanie ogólne na H :

$$\frac{H^3}{P_1} y_n = \alpha_{0n} H^2 + \alpha_{1n} H + \alpha_{2n} + \frac{\alpha_{3n}}{H} + \frac{\alpha_{4n}}{H^2} + \dots$$

do przypadku, gdy podpora znajduje się w odległości δa od ostatniej siły P_n , otrzymamy:

$$\frac{H^3}{P_1} y_{n+\delta} = \alpha_{0(n+\delta)} \cdot H^2 + \alpha_{1(n+\delta)} \cdot H + \alpha_{2(n+\delta)} + \frac{\alpha_{3(n+\delta)}}{H} + \frac{\alpha_{4(n+\delta)}}{H^2} + \dots,$$

gdzie za współczynnik i -ty podstawić należy:

$$\alpha_{i(n+\delta)} = \lambda''_{in} \cdot \gamma^i a^{i+1}, \text{ zaś za } \lambda''_{in} = \lambda_{in} + \delta \lambda'_{in}.$$

Gdybyśmy nadto wprowadzili $\gamma = \varphi \frac{P_1}{y_{n+\delta}}$, względnie $\gamma = \varphi \frac{P_1}{f}$, ponieważ $y_{n+\delta}$ równa się strzałce ustroju f , to uzyskamy w dalszym ciągu znaczniejsze ułatwienie w rozwiązywaniu równania, gdyż wszystkie wielkości pomocnicze stają się niemianowanymi.

Przyrosty jednostkowe γ wyrażają się zatem jako zredukowane współczynnikiem φ obciążenie jednostkowe strzałki: $\left(\frac{P_1}{f}\right)$.

A więc: $\alpha_{i(n+\delta)} = \lambda''_{in} \cdot a^{i+1} \cdot \left(\varphi \frac{P_1}{f}\right)^i$ (17)

Pomocnicze wielkości służące do rozwiązania równania trzeciego stopnia, dadzą się przedstawić jako niemianowane w postaci:

$$p = \left(\frac{\lambda''_{0n}}{3}\right)^2 + \varphi \frac{\lambda''_{1n}}{3}; \quad q = \frac{\lambda''_{0n}}{3} \left[\left(\frac{\lambda''_{0n}}{3}\right)^2 + \varphi \frac{\lambda''_{1n}}{2} \right] + \varphi^2 \frac{\lambda''_{2n}}{2}$$

albo:
$$q = \frac{\lambda''_{0n}}{3} \left[p + \varphi \frac{\lambda''_{1n}}{6} \right] + \varphi^2 \frac{\lambda''_{2n}}{2}.$$

Na podstawie tych wartości obliczymy z funkcji hiperbolicznych wielkość $\bar{\psi}$ z wzoru: $\text{Cos } \bar{\psi} = \frac{q}{p \cdot \sqrt{p}}$, gdyż $q^2 > p^3$;

a następnie współczynnik charakteryzujący wielkość parcia poziomego H , z równania:

$$\bar{\varrho} = 2\sqrt{p} \cdot \text{Cos } \frac{\bar{\psi}}{3} + \frac{\lambda''_{0n}}{3}, \quad (18)$$

poczem niewiadome parcie $H = \bar{\varrho} \cdot P_1 \frac{\alpha}{f}$.

Otrzymaną w ten sposób przybliżoną wartość na H należy jeszcze uzupełnić, przez poprawienie wielkości q , zależnej od wyrazu wolnego λ''_{2n} , który możemy poprawić dalszemi kilkoma wyrazami zawierającemi H w mianownikach, według równania:

$$\Delta \alpha_{2(n+\delta)} = \frac{\alpha_{3(n+\delta)}}{H} + \frac{\alpha_{4(n+\delta)}}{H^2} + \frac{\alpha_{5(n+\delta)}}{H^3} + \dots,$$

w którym dalsze człony mają w ogólności mały wpływ.

A więc: $\varphi^3 \cdot \Delta \lambda''_{2n} = \frac{\varphi^3}{\varrho} \lambda''_{3n} + \frac{\varphi^4}{\varrho^2} \lambda''_{4n} + \frac{\varphi^5}{\varrho^3} \lambda''_{5n} + \dots$

następnie $\Delta q = \frac{1}{2} \varphi^2 \cdot \Delta \lambda''_{2n}$, czyli:

$$\Delta q = \frac{\varphi^2}{2} \left[\lambda''_{3n} \frac{\varphi}{\varrho} + \lambda''_{4n} \left(\frac{\varphi}{\varrho}\right)^2 + \lambda''_{5n} \left(\frac{\varphi}{\varrho}\right)^3 + \dots \right] \quad . . . (19)$$

Z równania $\text{Cos } \psi = \frac{q + \Delta q}{p \cdot \sqrt{p}}$ znajdziemy ψ i $\text{Cos } \frac{\psi}{3}$, poczem poprawioną wartość:

$$\varrho = 2\sqrt{p} \cdot \text{Cos } \frac{\psi}{3} + \frac{\lambda''_{0n}}{3},$$

a wkońcu parcie poziome: $H = \varrho \cdot P_1 \frac{\alpha}{f} \quad (20)$

Po obliczeniu wielkości parcia poziomego H , możemy już wyznaczyć linię ciśnienia, określając rzędne w punktach działania sił. Dowolną rzędną dostaniemy z równania:

$$y_\nu = \frac{f}{\varrho} \left[\lambda''_{0\nu} + \lambda''_{1\nu} \frac{\varphi}{\varrho} + \lambda''_{2\nu} \left(\frac{\varphi}{\varrho}\right)^2 + \lambda''_{3\nu} \left(\frac{\varphi}{\varrho}\right)^3 + \dots \right] \quad . . . (21)$$

gdzie $\nu = 1, 2, 3 \dots n, n + \delta$

zaś dla $\nu = 1$; $y_1 = 0$; $\nu = n + \delta$; $y_{n+\delta} = f$.

Wielkość oddziaływania pionowego na podporze, otrzymamy:

$$V = H \frac{y_{n+\delta} - y_n}{\delta \cdot a}$$

a po podstawieniu wartości:

$$V = \frac{\varrho}{\delta} \left(1 - \frac{y_n}{f} \right) P_1.$$

Gdyby podpora ustroju znajdowała się wprost pod n -tą siłą, wtedy

$$V = \varrho \left(1 - \frac{y_{n-1}}{f} \right) P_1,$$

a współczynnik ϱ zależny będzie od $n-1$ sił.

Całkowite oddziaływanie pionowe na wezłowie zwiększy się ponadto o siłę n -tą, t. j. o μP_1 ;

$$V = \varrho \left(1 + \mu - \frac{y_{n-1}}{f} \right) P_1.$$

Następnie wyprowadzimy ogólne wzory dla obciążenia dwoma i trzema ciężarami skupionymi.

Dla dwu sił: P_1 i μP_1 odległych o a , przy podporze odsuniętej od drugiej siły μP_1 o dowolną odległość δa , dostaniemy z tabeli I:

$$\lambda''_{02} = 1 + \delta(1 + \mu)$$

$$\lambda''_{12} = \delta,$$

po uwzględnieniu:

$$\gamma = \varphi \frac{P_1}{f}$$

otrzymamy w tym przypadku z równania drugiego stopnia:

$$\varrho = \frac{1 + \delta(1 + \mu)}{2} + \sqrt{\left[\frac{1 + \delta(1 + \mu)}{2} \right]^2 + \delta \varphi}$$

zaś:

$$H = \varrho P_1 \frac{a}{f}.$$

$$\text{Gdyby } \delta = 1 \quad \text{to } \varrho = \frac{2 + \mu}{2} + \sqrt{\left(\frac{2 + \mu}{2} \right)^2 + \varphi}$$

$$\text{„ } \mu = 1 \quad \text{„ } \varrho = \frac{1 + 2\delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + 2\delta}{2} \right)^2 + \delta \varphi}$$

$$\text{zaś dla } \delta = 1 \text{ i } \mu = 1; \quad \varrho = 1.5 + \sqrt{2.25 + \varphi}.$$

Dla obciążenia trzema siłami, dostaniemy z tabeli I:

$$\lambda''_{03} = 2 + \mu + \delta(1 + 2\mu)$$

$$\lambda''_{13} = 1 + \delta(3 + \mu)$$

$$\lambda''_{23} = \delta.$$

Następnie:
$$p = \left[\frac{2 + \mu + \delta(1 + 2\mu)}{3} \right]^2 + \frac{1 + \delta(3 + \mu)}{3} \varphi$$

$$q = \frac{2 + \mu + \delta(1 + 2\mu)}{3} \left[p + \frac{1 + \delta(3 + \mu)}{6} \varphi \right] + \frac{\delta \varphi^2}{2},$$

poczem z równania $\text{Cos } \psi = \frac{q}{p\sqrt{p}}$ wyniknie ψ , a stąd $\text{Cos } \frac{\psi}{3}$.

Wobec tego:
$$\varrho = 2\sqrt{p} \text{Cos } \frac{\psi}{3} + \frac{2 + \mu + \delta(1 + 2\mu)}{3}$$

wkońcu:
$$H = \varrho P_1 \frac{a}{f}.$$

W poszczególnych przypadkach otrzymamy:

dla $\delta = 1$

$$p = (1 + \mu)^2 + \frac{4 + \mu}{3} \varphi$$

$$q = (1 + \mu) \cdot \left[p + \frac{4 + \mu}{6} \varphi \right] + \frac{\varphi^2}{2}; \quad \text{Cos } \psi = \frac{q}{p\sqrt{p}}$$

$$\varrho = 2\sqrt{p} \cdot \text{Cos } \frac{\psi}{3} + (1 + \mu)$$

dla $\mu = 1$

$$p = (1 + \delta)^2 + \frac{1 + 4\delta}{3} \varphi$$

$$q = (1 + \delta) \cdot \left[p + \frac{1 + 4\delta}{6} \varphi \right] + \frac{\delta \varphi^2}{2}; \quad \text{Cos } \psi = \frac{q}{p\sqrt{p}}$$

$$\varrho = 2\sqrt{p} \cdot \text{Cos } \frac{\psi}{3} + (1 + \delta)$$

dla $\begin{cases} \delta = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$

$$p = 4 + \frac{5}{3} \varphi$$

$$q = 2 \cdot \left[p + \frac{5}{6} \varphi \right] + \frac{\varphi^2}{2} = 8 + 5\varphi + \frac{\varphi^2}{2}; \quad \text{Cos } \psi = \frac{q}{p\sqrt{p}}$$

$$\varrho = 2\sqrt{p} \text{Cos } \frac{\psi}{3} + 2.$$

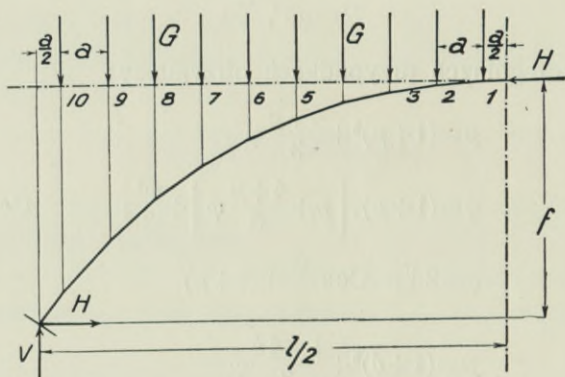
Mając wielkość współczynnika ϱ , a tem samem parcie poziome H , możemy następnie wyznaczyć rzędne linji ciśnienia, jak również wielkości oddziaływań.

Przykład.

Dla ustroju łukowego, symetrycznego, będącego pod działaniem równomiernie i symetrycznie rozłożonego obciążenia zasadniczego składającego się z 10-ciu jednakowo wielkich sił skupionych, po każdej stronie osi pionowej łuku, mamy wyznaczyć kształt pokrywający się z linją ciśnienia. Położenie wezłowi i zwornika niechaj wynosi

połowę stałej odległości a poszczególnych sił. Stosunek ciężarów zasadniczych względem siły pierwszej jest oczywiście przy tym założeniu stały, $\mu=1$.

Podstawowe współczynniki λ otrzymać możemy bezpośrednio z tabeli I-szej, biorąc średnie wartości dla $n=10$ i $n=11$, przy uwzględnianiu każdorazowo $\mu=1$ — lub też wprost jako średnie wartości poszczególnych rubryk, $i=0, 1, 2, \dots$ branych z drugich wierszy — dla $n=11$ i $n=12$, stosownie do reguły wypowiedzianej poprzednio na stronie 26 i następnjej.



Rys. 4.

A zatem:

$$\lambda_0 = \frac{45+55}{2} = 50$$

$$\lambda_1 = \frac{330+495}{2} = 412.5$$

$$\lambda_2 = \frac{924+1716}{2} = 1320$$

$$\lambda_3 = \frac{1287+3003}{2} = 2145$$

$$\lambda_4 = \frac{1001+3003}{2} = 2002.$$

Pomocnicze wartości: $\frac{\lambda_0}{3} = 16.667$; $\left(\frac{\lambda_0}{3}\right)^2 = 277.778$; $\frac{\lambda_1}{3} = 137.5$;

wobec tego $p = 277.778 + 137.5 \cdot \varphi$; przyjmąwszy $\varphi = 3$;
 $p = 690.278$, $\sqrt{p} = 26.273$, $p\sqrt{p} = 18135.67$,

zaś przybliżone $\bar{q} = \frac{50}{3} \left(277.778 + \varphi \frac{412.5}{2} \right) + \frac{1320}{2} \varphi^2$

czyli: $\bar{q} = 20882.13$.

Następnie: $\text{Cos } \bar{\psi} = \frac{20882 \cdot 13}{18135 \cdot 67} = 1 \cdot 1514$, stąd $\bar{\psi} = 0 \cdot 5435$,

$$\text{a } \text{Cos } \frac{\bar{\psi}}{3} = \text{Cos } 0 \cdot 1812 = 1 \cdot 0164.$$

Współczynnik określający wielkość parcia poziomego równa się:

$$\bar{\rho} = 2\sqrt{p} \cdot \text{Cos } \frac{\bar{\psi}}{3} + \frac{\lambda_0}{3}$$

$$\bar{\rho} = 2 \cdot 26 \cdot 273 \cdot 1 \cdot 0164 + 16 \cdot 667 = 70 \cdot 074.$$

Następnie wprowadzamy tę przybliżoną wartość do równania (19) celem uzyskania poprawki Δq .

$$\Delta q = \frac{3^2}{2} \left(\frac{2145}{70 \cdot 074} 3 + \frac{2002}{70 \cdot 074^2} 3^2 \right) = 429 \cdot 7524,$$

$$\frac{\Delta q}{p\sqrt{p}} = \frac{429 \cdot 7524}{18135 \cdot 67} = 0 \cdot 0237.$$

W konsekwencji dokładniejszy wynik:

$$\text{Cos } \psi = 1 \cdot 1514 + 0 \cdot 0237 = 1 \cdot 1751; \quad \text{stąd } \psi = 0 \cdot 5833, \quad \frac{\psi}{3} = 0 \cdot 1944$$

$$\text{zaś } \text{Cos } \frac{\psi}{3} = 1 \cdot 01855.$$

Wobec tego $\rho = 2 \cdot 26 \cdot 273 \cdot 1 \cdot 01855 + 16 \cdot 667 = 70 \cdot 188$.

A zatem wzór na parcie poziome dla przyjętego $\varphi = 3$ równa się:

$$H = 70 \cdot 188 P_1 \frac{\alpha}{f}.$$

Znając wielkość parcia poziomego łuku, możemy już wyznaczyć jego kształt, odpowiadający przebiegowi linii ciśnienia. W tym też celu dla obliczenia rzędnych tej linii zastosujemy wzór ogólny (21):

$$y_\nu = \frac{f}{\rho} \left[\lambda''_{0\nu} + \lambda''_{1\nu} \left(\frac{\varphi}{\rho} \right) + \lambda''_{2\nu} \left(\frac{\varphi}{\rho} \right)^2 + \lambda''_{3\nu} \left(\frac{\varphi}{\rho} \right)^3 + \dots \right],$$

który z uwagi na rzędne znajdujące się wprost pod siłami przekształci się po równoczesnem wprowadzeniu $\vartheta = \frac{\varphi}{\rho}$ na:

$$y_\nu = \frac{f}{\rho} \left[\lambda_{0\nu} + \lambda_{1\nu} \vartheta + \lambda_{2\nu} \vartheta^2 + \lambda_{3\nu} \vartheta^3 + \dots \right], \quad \text{gdzie } \nu = 1, 2, \dots, 10.$$

$$\text{Wartość: } \vartheta = \frac{3}{70 \cdot 188} = 0 \cdot 04274.$$

Wobec tego współrzędne linii ciśnienia po uwzględnieniu wartości na λ wziętych z tabeli I-szej, równają się:

$$y_{10} = \frac{f}{\varrho} (45 + 330 \vartheta + 924 \vartheta^2 + 1287 \vartheta^3 + 1001 \vartheta^4) = 60 \cdot 8960 \frac{f}{\varrho} = 0 \cdot 8676 f$$

$$y_8 = \frac{f}{\varrho} (28 + 126 \vartheta + 210 \vartheta^2 + 165 \vartheta^3 + 66 \vartheta^4) = 33 \cdot 7823 \frac{f}{\varrho} = 0 \cdot 4813 f$$

$$y_6 = \frac{f}{\varrho} (15 + 35 \vartheta + 28 \vartheta^2 + 9 \vartheta^3 + \vartheta^4) = 16 \cdot 5479 \frac{f}{\varrho} = 0 \cdot 2357 f$$

$$y_5 = \frac{f}{\varrho} (10 + 15 \vartheta + 7 \vartheta^2 + \vartheta^3) = 10 \cdot 6540 \frac{f}{\varrho} = 0 \cdot 1518 f$$

$$y_4 = \frac{f}{\varrho} (6 + 5 \vartheta + \vartheta^2) = 6 \cdot 2155 \frac{f}{\varrho} = 0 \cdot 0885 f$$

$$y_3 = \frac{f}{\varrho} (3 + \vartheta) = 3 \cdot 0427 \frac{f}{\varrho} = 0 \cdot 0433 f$$

$$y_2 = \frac{f}{\varrho} = 0 \cdot 01425 f$$

$$y_9 = 0 \cdot 6534 f$$

$$y_7 = 0 \cdot 3441 f.$$

Kształt linii ciśnienia dla obranego układu sił skupionych występujących w równych odstępach α , przy stałym μ i γ — przedstawiony jest na rys. 4.

Oddziaływanie pionowe obliczymy z wzoru:

$$V = \frac{\varrho}{\delta} \left(1 - \frac{y_n}{f} \right) P_1,$$

gdzie $\delta = 0 \cdot 5$, $n = 10$, zaś $y_{10} = 0 \cdot 8676 f$.

$$V = \frac{70 \cdot 188}{0 \cdot 5} (1 - 0 \cdot 8676) P_1 = 18 \cdot 586 P_1.$$

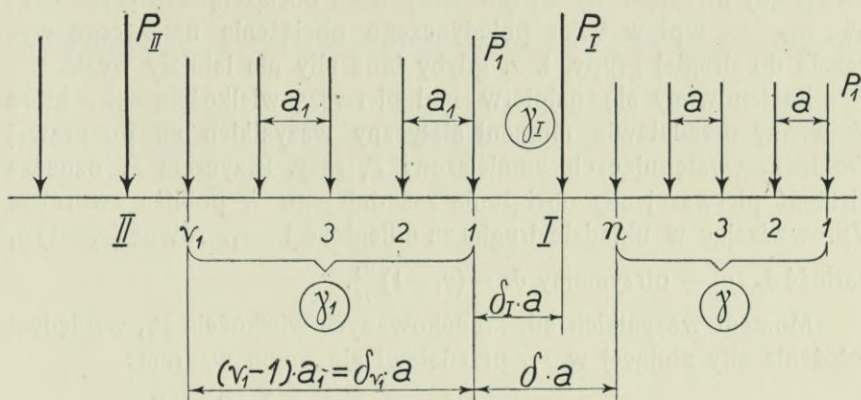
Kształt osi ustroju dla obciążenia skupionego pomostem słupowym i ciężarem własnym samego łuku.

Przebiegając myślą dotychczasowe rozważania nad kształtowaniem się linii ciśnienia według pewnego obciążenia zasadniczego skupionego, występującego w ogólności o dowolnych przyrostach jednostkowych γ — stwierdzić możemy, że stanowią one jeszcze dość luźny związek z rzeczywistym stanem ustroju łukowego o pomoście słupowym, dając dopiero podstawę do właściwego rozwiązania. W rzeczywistości oprócz ciężarów skupionych zasadniczych, wejść musi w rachubę przede wszystkim obciążenie zasadnicze samego ciężaru własnego. Dostosowywanie kształtu osi ustroju łukowego tak, by uzyskać można zgodność z linią ciśnienia, dla obu rodzajów obciążeń, napotyka jednak na większe trudności. Tem samym problem staje się dosyć skomplikowany, ale pomimo to dający się rozwiązać całkiem ogólnie, co do konstrukcyj łukowych, żelbetowych, myśląc

o ustrojach masywnych lub szkieletowych, może mieć praktyczne znaczenie wcale niepoślednie, z uwagi na kształt upodabniający ustrój do lekko załamanej ramy.

W tym więc rozdziale zastanowimy się nad właściwym zagadnieniem kształtu osi ustroju łukowego według linii ciśnienia, gdy oprócz obciążenia skupionego z pomostu, spoczywającego na łuku za pośrednictwem słupów lub filarów pachwinowych, uwzględnimy równocześnie wpływ ciężaru własnego samego ustroju łukowego, który przyjmować będziemy jako obciążenie skupione o praktycznie wystarczającej ilości ciężarów.

Oprócz zasadniczych sił skupionych pomostu $P_I, P_{II} \dots$ wejdą zatem jeszcze siły z obciążenia własnego, a te w zależności od odstępów



Rys. 5.

ów słupów pachwinowych mogą być po obu stronach ciężarów pomostowych w ogólności różne¹⁾.

Ażeby powyższe zagadnienie rozwiązać, wystarczy rozważyć narażenie wpływ jednej siły pomostowej P_I , o dowolnym przyroście obciążenia γ_I , gdy po obu stronach tej siły występuje obciążenie zasadnicze, różne z każdej strony, a z wyjątkiem pierwszych sił (P_I i \bar{P}_I) rys. 5 w ogólności równomiernie rozłożone, tak co do położenia, jak i wielkości. Odpowiednie przyrosty obciążeń oznaczymy, dla prawego obciążenia względem siły P_I działającej w osi słupa pomostowego, przez γ ; zaś dla lewego przez γ_I — i to jako stałe dla każdej siły. Odstęp obu obciążeń z ciężaru własnego łuku oznaczyliśmy na rysunku przez $\delta \cdot a$, zaś położenie siły P_I względem pierwszej siły \bar{P}_I drugiego układu, przez $\delta_1 \cdot a$.

¹⁾ Wszystkie siły oznaczone przez P należy uważać jako zasadnicze, poprzednio określone przez G .

Otóż, gdybyśmy dla całego układu sił znali wielkość parcia poziomego H łuku, to tem samym potrafimy już określić linię ciśnienia zapomocą rzędnych odnoszących się do miejsca działania sił, gdy tylko znajdziemy odpowiednie wielkości $\alpha_{0\nu}$, $\alpha_{1\nu}$, $\alpha_{2\nu}$... dla $\nu=1, 2, \dots, n$; a te dla pierwszej grupy obciążenia dadzą się w znany sposób ściśle określić. Natomiast pod dowolną siłą drugiej grupy obciążenia własnego, np. pod siłą ν_1 -tą, narazie nie możemy uzyskać odpowiednich współczynników, gdyż nie poznaliśmy jeszcze w dotychczasowej metodzie, właściwego sposobu, według którego można sumować poszczególne wpływy obciążeń występujących na łuku.

Ażeby zatem dojść do wyników matematycznych, oznaczmy przez $\bar{\alpha}_{0\nu_1}$, $\bar{\alpha}_{1\nu_1}$, $\bar{\alpha}_{2\nu_1}$... wielkości odnoszące się do siły położonej w miejscu ν_1 , gdy uwzględnimy wpływ wszystkich obciążeń, zaś przez $\alpha_{0\nu_1}$, $\alpha_{1\nu_1}$, $\alpha_{2\nu_1}$... wpływ tylko pojedynczego obciążenia należącego wyłącznie do drugiej grupy, t. z. gdyby inne siły nie istniały wcale.

Zastanowimy się najpierw nad pierwszą wielkością $\bar{\alpha}_{0\nu_1}$, która jak wiemy przedstawia moment statyczny wszystkich sił po prawej stronie ν_1 występujących, zmniejszony P_1 razy. Przyczem P_1 oznacza wielkość pierwszej siły obciążenia zasadniczego w pobliżu zwornika. Wprowadzając w układzie drugim za odległość $1-\nu_1$, równą $(\nu_1-1)a_1$ wartość $\delta_{\nu_1} \cdot a$ — otrzymamy $\delta_{\nu_1} = (\nu_1-1) \frac{a_1}{a}$.

Moment wszystkich sił, zredukowanych wielkością P_1 , względem położenia siły stojącej w ν_1 , przedstawi się zatem wzorem:

$$\bar{\alpha}_{0\nu_1} = \alpha_{0n+\delta} + (\nu_1-1) \frac{a_1}{a} \alpha'_{0n} + \left[\delta_1 + (\nu_1-1) \frac{a_1}{a} \right] a \frac{P_1}{P_1} + \frac{\bar{P}_1}{P_1} \alpha_{0\nu_1};$$

gdzie $\bar{\alpha}_{0n+\delta}$ oznacza wielkość momentu statycznego n sił względem siły \bar{P}_1 , α'_{0n} różnicę momentów, w tem miejscu i następnem, czyli spad — $\alpha_{0\nu_1}$ moment spowodowany wyłącznie obciążeniem drugiej grupy, o odstępach sił a_1 i przyrostach stałych γ_1 , pod założeniem, że inne obciążenia znikają zupełnie.

Powyższy wzór w postaci całkowicie przystosowanej do określania następnych wielkości $\bar{\alpha}_{1\nu_1}$... przedstawia się:

$$\boxed{\bar{\alpha}_{0\nu_1} = \binom{\nu_1-1}{0} \alpha_{0n+\delta} + \binom{\nu_1-1}{1} \frac{a_1}{a} \alpha'_{0n} + \left[\binom{\nu_1-1}{0} \delta_1 + \binom{\nu_1-1}{1} \frac{a_1}{a} \right] a \frac{P_1}{P_1} + \frac{\bar{P}_1}{P_1} \alpha_{0\nu_1}. \quad (22)}$$

Otrzymywanie następnych wielkości napotyka jednak na pewne trudności, wymagające obszerniejszego omówienia, na które potrzebaby poświęcić więcej miejsca. Wobec tego poprzestaniemy na sposobie

bezpośrednim, prowadzącym szybko do właściwego rozwiązania, który daje się streścić w następującej definicji:

Podstawowa funkcja $\bar{a}_{0\nu_1}$ pozwala całkowicie na otrzymanie następnych wyższych, jak $\bar{a}_{1\nu_1}$, $\bar{a}_{2\nu_1}$..., jeśli zastosujemy kolejną zmianę każdego pierwszych czynników poszczególnych wyrazów, przy zachowaniu równoczesnem niezmienności drugich (czynników) — i naodwrot, przy pozostawieniu pierwszych zmienimy drugie.

Wobec tego dla następnej funkcji $\bar{a}_{1\nu_1}$, symbole $\binom{\nu_1-1}{0}$, $\binom{\nu_1-1}{1}$ przechodząc na wyższe, zmieniają się stosownie do zasadniczej reguły przytoczonej na stronie 21-szej — na $\binom{\nu_1}{2} \gamma_1 a_1$, względnie $\binom{\nu_1}{3} \gamma_1 a_1$, zaś towarzyszące im czynniki drugie pozostaną niezmiennione — i odwrotnie, zachowując powyższe symbole, wielkości $\alpha_{0n+\delta}$, α'_{0n} , $\alpha_{0\nu_1}$, przejdą na następne, o wskaźnikach 1 w miejsce 0.

Stosując powyższą definicję otrzymamy w rezultacie:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{1\nu_1} = & \left[\binom{\nu_1}{2} \alpha_{0n+\delta} + \binom{\nu_1}{3} \frac{a_1}{a} \alpha'_{0n} \right] \gamma_1 a_1 + \binom{\nu_1-1}{0} \alpha_{1n+\delta} + \\ & + \binom{\nu_1-1}{1} \frac{a_1}{a} \alpha'_{1n} + \left[\binom{\nu_1}{2} \delta_1 + \binom{\nu_1}{3} \frac{a_1}{a} \right] a \frac{P_1}{P_1} \gamma_1 a_1 + \\ & + \left[\binom{\nu_1-1}{0} \delta_1 + \binom{\nu_1-1}{1} \frac{a_1}{a} \right] \gamma_1 a \cdot \alpha_{0n+\delta-\delta_1} + \bar{P}_1 \alpha_{1\nu_1}. \quad (23) \end{aligned}$$

Jednakże w tem równaniu wyraz przedostatni zasługuje jeszcze na bliższe omówienie, gdyż zawiera on w sobie wpływ obu obciążeń, z grupy pierwszej i obciążenia słupowego zasadniczego P_1 , a dotychczas nie został jeszcze objaśniony.

Otóż, żeby takie wyrażenie matematyczne otrzymać należy tylko zwrócić uwagę na pierwszy wyraz prawej strony równania powyższego na $\bar{a}_{1\nu_1}$, który w szczególnym przypadku — gdy $\nu_1=2$, t. zn., że po prawej stronie położenia oznaczonego przez ν_1 , znajduje się z drugiej grupy obciążenia własnego ustroju łukowego tylko sama jedna siła \bar{P}_1 , oraz wszystkie siły grupy pierwszej — otrzyma postać:

$$\binom{2}{2} \alpha_{0n+(\delta)} \cdot \gamma_1 a_1, \text{ zaś drugi składnik w tym przypadku staje się zerem.}$$

Dla odróżnienia od pierwotnego a_1 wzięto tak powstającą odległość $1-\nu_1$ w nawias (a_1) , jak również i (δ) . Zastosowując powyższe roz-

wiązanie do układu podobnego z tą tylko zmianą, że zamiast siły \bar{P}_1 wprowadzimy P_1 , uzyskamy po uwzględnieniu:

$$(a_1) = \delta_1 a + (\nu_1 - 1) a_1; \quad (\delta) = \delta - \delta_1 \quad \text{i} \quad \gamma_1 = \gamma_1;$$

$$\alpha_{0n+\delta-\delta_1} \cdot \gamma_1 [\delta_1 a + (\nu_1 - 1) a_1],$$

czyli wkońcu: $\left[\binom{\nu_1-1}{0} \delta_1 + \binom{\nu_1-1}{1} \frac{a_1}{a} \right] a \gamma_1 \cdot \alpha_{0n+\delta-\delta_1}$.

Jak widzimy wynik zupełnie zgodny z odpowiednim wyrazem na $\bar{\alpha}_{1\nu_1}$. Wobec tego postać wzoru na wielkość $\bar{\alpha}_{1\nu_1}$ jest w zupełności dostosowana do poprzednio przytoczonej definicji, dając właściwe rozwiązanie w drodze bezpośredniej, a więc tem samem najkrótszej; co dla celów technicznych, przy tak skomplikowanym obciążeniu ma znaczenie niepoślednie.

Analogicznie postępując według powyższej reguły oczywiście zastosowanej już do wyprowadzonego równania na $\alpha_{1\nu_1}$, otrzymamy następujące rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{2\nu_1} = & \left[\binom{\nu_1+1}{4} \alpha_{0n+\delta} + \binom{\nu_1+1}{5} \frac{a_1}{a} \alpha'_{0n} \right] \gamma_1^2 a_1^2 + \left[\binom{\nu_1}{2} \alpha_{1n+\delta} + \right. \\ & + \binom{\nu_1}{3} \frac{a_1}{a} \alpha'_{1n} \left. \right] \gamma_1 a_1 + \binom{\nu_1-1}{0} \alpha_{2n+\delta} + \binom{\nu_1-1}{1} \frac{a_1}{a} \alpha'_{2n} + \\ & + \left[\binom{\nu_1+1}{4} \delta_1 + \binom{\nu_1+1}{5} \frac{a_1}{a} \right] a \frac{P_1}{P_1} \cdot \gamma_1^2 a_1^2 + \\ & + \left[\binom{\nu_1}{2} \delta_1 + \binom{\nu_1}{3} \frac{a_1}{a} \right] \gamma_1 a \alpha_{0n+\delta-\delta_1} \cdot \gamma_1 a_1 + \\ & + \left[\binom{\nu_1-1}{0} \delta_1 + \binom{\nu_1-1}{1} \frac{a_1}{a} \right] \gamma_1 a \alpha_{1n+\delta-\delta_1} + \frac{\bar{P}_1}{P_1} \alpha_{2\nu_1} \cdot \dots \quad (24) \end{aligned}$$

Taksamo uzyskamy z równania $\bar{\alpha}_{2\nu_1}$ dalszy z kolei współczynnik:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{3\nu_1} = & \left[\binom{\nu_1+2}{6} \alpha_{0n+\delta} + \binom{\nu_1+2}{7} \frac{a_1}{a} \alpha'_{0n} \right] \gamma_1^3 a_1^3 + \left[\binom{\nu_1+1}{4} \alpha_{1n+\delta} + \right. \\ & + \binom{\nu_1+1}{5} \frac{a_1}{a} \alpha'_{1n} \left. \right] \gamma_1^2 \cdot a_1^2 + \left[\binom{\nu_1}{2} \alpha_{2n+\delta} + \binom{\nu_1}{3} \frac{a_1}{a} \alpha'_{2n} \right] \gamma_1 a_1 + \\ & + \binom{\nu_1-1}{0} \alpha_{3n+\delta} + \binom{\nu_1-1}{1} \frac{a_1}{a} \alpha'_{3n} + \left[\binom{\nu_1+2}{6} \delta_1 + \binom{\nu_1+2}{7} \frac{a_1}{a} \right] a \frac{P_1}{P_1} \gamma_1^3 a_1^3 + \\ & + \left[\binom{\nu_1+1}{4} \delta_1 + \binom{\nu_1+1}{5} \frac{a_1}{a} \right] \gamma_1 a \alpha_{0n+\delta-\delta_1} \cdot \gamma_1^2 a_1^2 + \\ & + \left[\binom{\nu_1}{2} \delta_1 + \binom{\nu_1}{3} \frac{a_1}{a} \right] \gamma_1 a \alpha_{1n+\delta-\delta_1} \cdot \gamma_1 a_1 + \\ & + \left[\binom{\nu_1-1}{0} \delta_1 + \binom{\nu_1-1}{1} \frac{a_1}{a} \right] \gamma_1 a \alpha_{2n+\delta-\delta_1} + \frac{\bar{P}_1}{P_1} \alpha_{3\nu_1} \cdot \dots \quad (25) \end{aligned}$$

Stosując w dalszym ciągu powyższą zasadę, możemy zbudować równania następnych wielkości, mających charakter współczynników równania przy niewiadomej H , lecz te jednakże ze względów praktycznych przecież nie będą potrzebne, a to z powodu niewielkiego wpływu wyrazów równania zawierającego te wielkości — co najwyraźniej się uwidoczni w równaniach na rzędne linii ciśnienia.

W ten sposób ujęliśmy dopiero wpływ siły skupionej pomostu działającej w osi słupa wraz z dwiema grupami obciążenia własnego samej konstrukcji łukowej. Gdybyśmy w dalszym ciągu chcieli uwzględnić następną siłę skupioną pomostu P_{II} wraz z trzecią grupą obciążenia własnego, rozłożonego pomiędzy następnymi słupami od P_{II} na lewo, natenczas należałoby określić dla ostatniej siły drugiej grupy, wszystkie współczynniki α (najwyżej cztery) — i te następnie uważać jako wielkości mające podobne znaczenie, jak na początku przyjęte wartości współczynników $\alpha_{0n}, \alpha_{1n} \dots$ — odnoszące się do ostatniej n -tej siły pierwszej grupy obciążenia własnego.

Gdybyśmy jeszcze dla ostatniej siły drugiej grupy wyznaczyli w tem miejscu spady odpowiednich wielkości dla α — to te oczywiście będą spełniały zupełnie identyczną rolę co współczynniki $\alpha'_{0n}, \alpha'_{1n} \dots$ z pierwszej grupy.

Celem znalezienia spadów, wyznaczymy jeszcze dla miejsca $\nu_1 + 1$ odnośnie $\bar{\alpha}_{0\nu_1+1}, \bar{\alpha}_{1\nu_1+1} \dots$ poczem one równać się będą różnicy:

$$\bar{\alpha}'_{0\nu_1} = \bar{\alpha}_{0\nu_1+1} - \bar{\alpha}_{0\nu_1}$$

$$\bar{\alpha}'_{1\nu_1} = \bar{\alpha}_{1\nu_1+1} - \bar{\alpha}_{1\nu_1}$$

$$\dots \dots \dots$$

które przy przejściu do następnej grupy obciążeń uważać będziemy za takie same jak $\alpha'_{0n}, \alpha'_{1n} \dots$

Następnie dadzą się już określić dla dowolnej siły należącej do grupy trzeciej wszystkie $\bar{\alpha}_{0\nu_2}, \bar{\alpha}_{1\nu_2} \dots$, w których zawarty będzie wpływ obciążenia znajdującego się po prawej stronie ν_2 .

Tak postępując poszczególnymi trójkami obciążeń, z których dla grupy pierwszej określone będą wielkości współczynników α zawierających wpływ wszystkich ciężarów znajdujących na prawo od ciężaru poprzedzającego nowy ciężar zasadniczy skupiony pochodzący z pomostu — dojdziemy wreszcie do ostatniego ciężaru znajdującego się tuż przy wezłowaniu, dla którego znalezione wartości na poszczególnie $\bar{\alpha}$ stanowiąc będą właściwe współczynniki dla niewiadomej H , równania podstawowego; skąd wreszcie H znajdziemy.

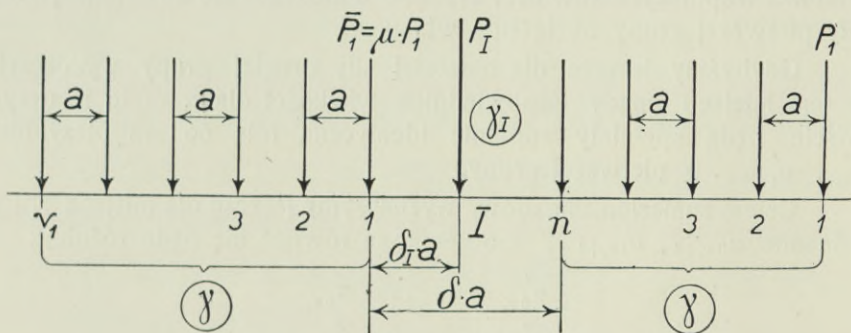
Zagadnienie kształtu ustroju łukowego według linii ciśnienia, wynikającej z obciążenia skupionego ciężarami przenoszącymi się przez

pomost słupowy, jakoteż z ciężaru własnego konstrukcji łukowej — ujęliśmy wystarczająco ściśle, dając rozwiązanie w postaci całkiem ogólnej.

Bardziej przydatne w praktyce uproszczenia równań podstawowych uzyskać możemy, zakładając następnie podział obciążenia zasadniczego własnego, na równe siły w odstępach a , i o wielkościach stałych na całym łuku, z wyjątkiem ciężarów w pobliżu zwornika tak, jak to przyjmowaliśmy w poprzednich rozważaniach — oraz o niezmiennych przyrostach obciążeń jednostkowych pionowych γ .

Obciążenie skupione pomostu i ciężar własny łuku, prawie równomiernie rozłożony, o równych przyrostach γ i stałych odstępach a .

Przyjmując powyższe założenia składające się z obciążenia zasadniczego o wartości pierwszej siły P_1 i szeregu równych sił μP_1 ,



Rys. 6.

uzyskujemy $\delta=1$, $\bar{P}_1 : P_1 = \mu$. Gdy następnie wprowadzimy znane podstawienia:

$$\alpha_{in} = \lambda_{in} \cdot \gamma^i a^{i+1}; \quad \alpha'_{in} = \lambda'_{in} \gamma^i a^{i+1};$$

oraz wyrazimy $\alpha_{i(n+\delta-\delta_I)}$ wprowadzając spód, czyli:

$$\alpha_{i(n+\delta-\delta_I)} = \alpha_{in} + (\delta - \delta_I) \alpha'_{in},$$

otrzymamy równania na:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{0v_1} &= \bar{\lambda}_{0v_1} \cdot a \\ \bar{\alpha}_{1v_1} &= \bar{\lambda}_{1v_1} \cdot \gamma a^2 \\ \bar{\alpha}_{2v_1} &= \bar{\lambda}_{2v_1} \cdot \gamma^2 a^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

w którym współczynniki λ przybierają postać ostateczną po uwzglę-

dzeniu równania: $\left(\frac{v_1}{k-1}\right) + \left(\frac{v_1}{k}\right) = \left(\frac{v_1+1}{k}\right)$:

$$\bar{\lambda}_{0v_1} = \lambda_{0n} + \binom{v_1}{1} \lambda'_{0n} + \left[\delta_1 + \binom{v_1-1}{1} \right] \frac{P_1}{P_1} + \mu \cdot \lambda_{0v_1} \dots \dots \dots (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{1v_1} = & \binom{v_1}{2} \lambda_{0n} + \binom{v_1+1}{3} \lambda'_{0n} + \lambda_{1n} + \binom{v_1}{1} \lambda'_{1n} + \left[\binom{v_1}{2} \delta_1 + \binom{v_1}{3} \right] \frac{P_1}{P_1} + \\ & + \left[\delta_1 + \binom{v_1-1}{1} \right] \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{0n} + (1-\delta_1) \lambda'_{0n} \right] + \mu \cdot \lambda_{1v_1} \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{2v_1} = & \binom{v_1+1}{4} \lambda_{0n} + \binom{v_1+2}{5} \lambda'_{0n} + \binom{v_1}{2} \lambda_{1n} + \binom{v_1+1}{3} \lambda'_{1n} + \\ & + \lambda_{2n} + \binom{v_1}{1} \lambda'_{2n} + \left[\binom{v_1+1}{4} \delta_1 + \binom{v_1+1}{5} \right] \frac{P_1}{P_1} + \\ & + \left[\binom{v_1}{2} \delta_1 + \binom{v_1}{3} \right] \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{0n} + (1-\delta_1) \lambda'_{0n} \right] + \\ & + \left[\delta_1 + \binom{v_1-1}{1} \right] \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{1n} + (1-\delta_1) \lambda'_{1n} \right] + \mu \cdot \lambda_{2v_1} \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{3v_1} = & \binom{v_1+2}{6} \lambda_{0n} + \binom{v_1+3}{7} \lambda'_{0n} + \binom{v_1+1}{4} \lambda_{1n} + \binom{v_1+2}{5} \lambda'_{1n} + \\ & + \binom{v_1}{2} \lambda_{2n} + \binom{v_1+1}{3} \lambda'_{2n} + \lambda_{3n} + \binom{v_1}{1} \lambda'_{3n} + \\ & + \left[\binom{v_1+2}{6} \delta_1 + \binom{v_1+2}{7} \right] \frac{P_1}{P_1} + \\ & + \left[\binom{v_1+1}{4} \delta_1 + \binom{v_1+1}{5} \right] \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{0n} + (1-\delta_1) \lambda'_{0n} \right] + \\ & + \left[\binom{v_1}{2} \delta_1 + \binom{v_1}{3} \right] \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{1n} + (1-\delta_1) \lambda'_{1n} \right] + \\ & + \left[\delta_1 + \binom{v_1-1}{1} \right] \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{2n} + (1-\delta_1) \lambda'_{2n} \right] + \mu \cdot \lambda_{3v_1} \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

Odpowiednie spady przedstawiają się wzorami:

$$\bar{\lambda}'_{0v_1} = \binom{v_1}{0} \lambda'_{0n} + \binom{v_1-1}{0} \frac{P_1}{P_1} + \mu \lambda'_{0v_1} \dots \dots \dots (26 a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}'_{1v_1} = & \binom{v_1}{1} \lambda_{0n} + \binom{v_1+1}{2} \lambda'_{0n} + \binom{v_1}{0} \lambda'_{1n} + \left[\binom{v_1}{1} \delta_1 + \binom{v_1}{2} \right] \frac{P_1}{P_1} + \\ & + \binom{v_1-1}{0} \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{0n} + (1-\delta_1) \lambda'_{0n} \right] + \mu \lambda'_{1v_1} \dots \dots \dots (27 a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}'_{2\nu_1} &= \binom{\nu_1+1}{3} \lambda_{0n} + \binom{\nu_1+2}{4} \lambda'_{0n} + \binom{\nu_1}{1} \lambda_{1n} + \binom{\nu_1+1}{2} \lambda'_{1n} + \binom{\nu_1}{0} \lambda'_{2n} + \\
&+ \left[\binom{\nu_1+1}{3} \delta_I + \binom{\nu_1+1}{4} \right] \frac{P_1}{P_1} + \\
&+ \left[\binom{\nu_1}{1} \delta_I + \binom{\nu_1}{2} \right] \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{0n} + (1 - \delta_I) \lambda'_{0n} \right] + \\
&+ \binom{\nu_1-1}{0} \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{1n} + (1 - \delta_I) \lambda'_{1n} \right] + \mu \lambda'_{2\nu_1} \quad \dots \quad (28a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}'_{3\nu_1} &= \binom{\nu_1+2}{5} \lambda_{0n} + \binom{\nu_1+3}{6} \lambda'_{0n} + \binom{\nu_1+1}{3} \lambda_{1n} + \binom{\nu_1+2}{4} \lambda'_{1n} + \\
&+ \binom{\nu_1}{1} \lambda_{2n} + \binom{\nu_1+1}{2} \lambda'_{2n} + \binom{\nu_1}{0} \lambda'_{3n} + \\
&+ \left[\binom{\nu_1+2}{5} \delta_I + \binom{\nu_1+2}{6} \right] \frac{P_1}{P_1} + \\
&+ \left[\binom{\nu_1+1}{3} \delta_I + \binom{\nu_1+1}{4} \right] \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{0n} + (1 - \delta_I) \lambda'_{0n} \right] + \\
&+ \left[\binom{\nu_1}{1} \delta_I + \binom{\nu_1}{2} \right] \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{1n} + (1 - \delta_I) \lambda'_{1n} \right] + \\
&+ \binom{\nu_1-1}{0} \frac{\gamma_1}{\gamma} \cdot \left[\lambda_{2n} + (1 - \delta_I) \lambda'_{2n} \right] + \mu \lambda'_{3\nu_1} \quad \dots \quad (29a) \\
&\dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Potrzebny dla zilustrowania postępowania przykład, jakoteż wzory dla obciążeń zasadniczych zmieniających się linjowo lub parabolicznie, oraz zastosowanie tej metody do ustrojów niesymetrycznych — nie zamieszcza się, z uwagi na nieprzeciążanie zbiorowego wydawnictwa.

INŻ. DR. WŁODZIMIERZ BURZYŃSKI

Z teorii łuku bezprzegubowego.

Streszczenie.

1. Stosowane w praktyce wzory (16) dla składowych hiperstatycznych symetrycznego łuku bezprzegubowego łącznie z współrzędną (13) posiadają większą dokładność, aniżeli im się dotychczas przyznawało; uwzględniają one bowiem — wbrew panującym zapatrywaniom — nie tylko wpływ siły podłużnej na skrócenie sprężyste osi łuku, lecz także wpływ krzywizny osi t. j. wyraźniej wpływ momentu zginającego na wielkość owego skrócenia. Oba wpływy znoszą się nie przedstawiając godnego uwagi śladu swej obecności; wyjątek stanowi składowa pozioma H , w której oba wpływy wyrażają się drobnym współczynnikiem ψ . Poprawki tej nie można utartym zwyczajem liczyć według wzoru (15), gdy wykładnik stosunku charakterystycznego $f : L$ jest większy od 0,25, albowiem otrzymujemy wówczas wartości przesadzone; wielkość poprawną ψ wyznaczyć można dla łuków strześniejszych z wzoru (14). Przejście z grupy (16) za pośrednictwem (8) do formuły stanu napięcia w formie stałe stosowanej (5) jest dopuszczalne.

2. Równanie różniczkowe (17) prowadzi do najpoprawniejszego kształtu osi łuku bezprzegubowego — oczywiście przy racjonalnym oznaczeniu obciążenia zasadniczego. Nie istnieje absolutnie taki łuk rzeczywisty, dla którego linja ciśnienia z obciążenia nawet stałego pokrywa się z jego osią we wszystkich punktach. Poprawa osi łuku, zaprojektowanej według (17), prowadzi zawsze do pogorszenia warunków jego wytrzymałości odnośnie do obciążenia q . Równie niemożliwym jest doprowadzenie osi łuku do pokrycia się z linją ciśnienia wynikającą z wpływów równoczesnych obciążenia stałego, średniej temperatury, średniej wartości skurczu i t. p.

3. Wielkości hiperstatyczne M_0 , V i H są w wypadku obciążenia zasadniczego praktycznie niezależne od prawidła zmiany przekrojów

poprzecznych osi, zaprojektowanej według (17). Przypuszczalnie wpływ ten jest mały i dla obciążenia dowolnego, a w każdym razie mniejszy od wpływu, jaki wywierają zmiany kształtu osi.

Na temat łuku bezprzegubowego pisało się u nas i zagranicą dużo. Z reguły dyskusja toczy się nad trzema pytaniami:

1. Czy stosowane powszechnie wzory, zapożyczone z teorii prętów prostych, gwarantują dostateczną dokładność?
2. Jaki kształt należy nadać osi łuku?
3. Jak obrać prawo zmienności przekroju?

Odpowiedzi mamy w literaturze mostowej dość dużo; nie zawadzi jednakże od czasu do czasu oświetlić krytycznie kilka ciekawych szczegółów. Oczywiście niesposób jest w krótkiej notatce temat tego rodzaju wyczerpać. Z tego powodu ograniczymy się do omówienia tych kwestyj, co do których zapatrywania są albo nieustalone, albo rozbieżne, albo wręcz błędne.

1. Nawiązując do powyższej uwagi pominiemy w rozważaniach wpływ siły poprzecznej, wpływ zmienności przekroju i wreszcie ten wpływ zakrzywienia osi pręta, który objawia się wzajemnym działaniem na siebie sąsiadujących warstw łuku; przyjmijmy, że faktycznie czynniki te nie wyrażają się żadnymi godnymi uwagi datami. Rozpatrzenie działania reszty wpływów t. j. siły podłużnej S , momentu zginającego M i zakrzywienia $\frac{1}{r}$ osi, narzucającego momentowi M podwójną rolę, prowadzi — między innymi — do wzorów, określających wartość naprężenia podłużnego σ tudzież energii sprężystości Φ , w formie:

$$\sigma = \frac{S + \frac{M}{r}}{A} + \frac{Mz}{Z} \cdot \frac{r}{r+z} \quad \dots \quad (1)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \int \frac{\left(S + \frac{M}{r}\right)^2}{EA} ds + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EZ} ds \quad \dots \quad (2)$$

przyczem E jest stałą sprężystości podłużnej, A oznacza pole przekroju, Z — o wymiarze momentu bezwładności — wynika ze skrócenia:

$$Z = r \cdot \int \frac{z^2 dA}{r+z} \quad \dots \quad (3)$$

wreszcie s jest długością łuku, a z spólrzdną mierzoną w płaszczyźnie przekroju prostopadle do linii obojętnej i to dodatnio od środka krzywizny.

Wzory (1) i (2) można uprościć przez zastąpienie wielkości Z momentem bezwładności I przekroju tudzież przyjęcie $\frac{r}{r+z} = \approx 1$. Tak np. dla przekroju prostokątnego o wysokości d jest:

$$Z = I \cdot \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{d}{2r} \right)^2 + \frac{3}{7} \left(\frac{d}{2r} \right)^4 + \dots \right];$$

przyjmując tedy $Z = \approx I$ popełniamy nawet przy $\frac{d}{2r} = \frac{1}{25}$ (faktycznie przy rozpiętościach, dla których wypada stosować ustroje łukowe jest często $\frac{d}{2r} < \frac{1}{100}$) błąd raptem $\approx 1^0/00$; błąd przyjęcia $\frac{r}{r+z} = \approx 1$ wynosi w tym wypadku $\approx 4^0/0$, zatem leży w granicy dla praktyki konstrukcyjnej jeszcze dopuszczalnej.

Uproszczenie to zmusza nas do pominięcia w formule (1) dodajnika $\frac{M}{r}$; w przeciwnym bowiem wypadku nie spełniłyby się warunki równowagi:

$$\int \sigma dA = S, \quad \int \sigma z dA = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dla łuków mostowych możemy przeto napisać

$$\sigma = \frac{S}{A} + \frac{Mz}{I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wypada jednak dodać, że pominięcie ostatnie było konsekwentną koniecznością. Można wykazać, że istnieją takie wypadki, w których $\frac{M}{r}$ jest liczebnie znacznie większe od S , jak np. w przypadku uwzględniania wpływu temperatury u stromych łuków i t. p. W zagadnieniach tego rodzaju jednak cały pierwszy dodajnik wzoru (1) jest wogóle mały w porównaniu do drugiego,

Inaczej nieco przedstawia się sprawa z uproszczeniem formuły (2). Oczywiście i tu założymy $Z = \approx I$; jednak czynnik $\frac{r}{r+z}$ nie pozostawił tu po sobie żadnego charakterystycznego śladu tak, że nie jesteśmy zmuszeni skreślać wyrazu $\frac{M}{r}$. Przeciwnie okaże się, że odrzucając cały pierwszy wyraz będziemy znacznie bliżsi prawdy teoretycznej, aniżeli zatrzymując tylko jego część z wpływem S .

Z tego powodu zatrzymamy — przynajmniej narazie — odnośny dodajnik $\frac{M}{r}$ we wzorze (2) i w tej formie zastosujemy go do łuku utwierdzonego jak na rys. 1. Założywszy dla uproszczenia symetrię geometryczną względem osi η względnie y mamy widocznie spełnione warunki:

$$\int \left[\left(\sin \varphi + \frac{x}{r} \right) \frac{1}{A r} + \frac{x}{Z} \right] ds = 0$$

$$\int \left[\left(\sin \varphi + \frac{x}{r} \right) \left(\cos \varphi - \frac{y}{r} \right) \frac{1}{A} - \frac{x y}{Z} \right] ds = 0$$

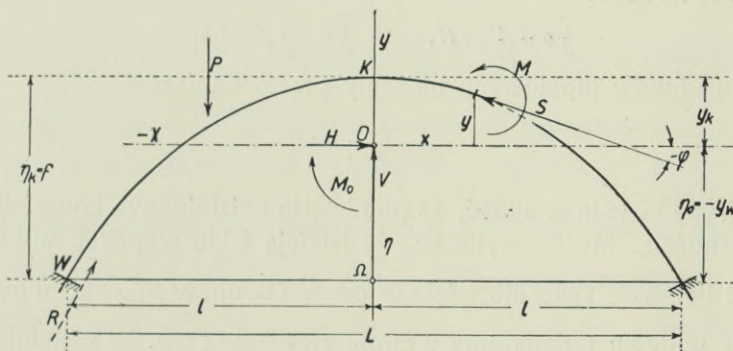
Uczyńmy nadto:

$$y = \eta - \eta_0 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots (6)$$

$$\eta_0 = \frac{\int \left[- \left(\cos \varphi - \frac{\eta}{r} \right) \frac{1}{A r} + \frac{\eta}{Z} \right] ds}{\int \left(\frac{1}{A r^2} + \frac{1}{Z} \right) ds} = -y_w$$

to będzie dodatkowo:

$$\int \left[\left(\cos \varphi - \frac{y}{r} \right) \frac{1}{A r} - \frac{y}{Z} \right] ds = 0$$



Rys. 1.

Przyjmijmy w dalszym ciągu za niewiadomą zbedną reakcję R lewego węzłowa, zredukowaną do przed chwilą zdefiniowanego punktu 0 , w postaci składowych M_0 , V i H (M_0 jest liczebnie równe momentowi siły R względem punktu 0). Składowe owe najprościej znajdziemy stosując zasadę najmniejszości energii odkształcenia w formie warunków:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial M_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial H} = 0 \dots (7)$$

Podstawiając w tym celu w wzór (2) wyrażenia na S i M w dowolnym punkcie (x, y) łuku t. j.:

$$\left. \begin{array}{l} S = V \sin \varphi + H \cos \varphi - S_* \\ M = M_0 + V x - H y - M_* \end{array} \right\} \dots (8)$$

i wykonując (7) znajdujemy:

$$\left. \begin{aligned} M_0 \cdot \int \left[\frac{1}{A r^2} + \frac{1}{Z} \right] ds &= \int \left(S_* + \frac{M_*}{r} \right) \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{A} + \int M_* \frac{ds}{Z} \\ V \cdot \int \left[\left(\sin \varphi + \frac{x}{r} \right)^2 \frac{1}{A} + \frac{x^2}{Z} \right] ds &= \int \left(S_* + \frac{M_*}{r} \right) \left(\sin \varphi + \frac{x}{r} \right) \frac{ds}{A} + \int M_* \frac{x ds}{Z} \\ H \cdot \int \left[\left(\cos \varphi - \frac{y}{r} \right)^2 \frac{1}{A} + \frac{y^2}{Z} \right] ds &= \int \left(S_* + \frac{M_*}{r} \right) \left(\cos \varphi - \frac{y}{r} \right) \frac{ds}{A} - \int M_* \frac{y ds}{Z} \end{aligned} \right\} (9)$$

przyczem S_* oznacza rzut obciążeń na kierunek stycznej, a M_* moment obciążeń względem punktu (x, y) ; dla zupełności dodaje się, że dla $x < 0$ są $\varphi > 0$ i naodwrot dla $x > 0$ przyjęto $\varphi < 0$; pozatem S i M przyjęto jako dodatnie, gdy ich strzałki odpowiadają rys. 1.

Przechodząc do uproszczenia wzorów (6) i (9) musimy wpiery założyć jakiś kształt $y = y(x)$ i prawidło zmian wymiarów $A = A(x)$ względnie $Z = Z(x)$ — wreszcie i obciążenie. Otóż — jak wiadomo — ogół współcześnie projektowanych osi (17) zbliża się silnie do paraboli:

$$\frac{\eta}{f} = 1 - c_1 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - c_2 \left(\frac{x}{l} \right)^4,$$

przyczem zależne od rozpiętości $L = 2l$ i obciążenia podstawowego parametry niemianowane c_1 i c_2 zawarte są w granicach $\frac{1}{2} \leq c_1 \leq 1$, $\frac{1}{2} \geq c_2 \geq 0$. Łuk kołowy zajmuje między temi krzywymi położenie średnie; przyjmijmy go tedy za podstawę dalszych wniosków. Sposób zmiany wymiarów poprzecznych zawarty jest w praktyce między dwiema granicami: $I_w = I = I_k$ tudzież $I \cos \varphi \cdot \left[1 - (1-n) \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] = I_k$

(propozycja M. Ritter'a znacznie lepsza od stosowanej często H. Neumann'a), gdzie dobór współczynnika n pozostawia się konstruktorowi. Sprawa ta jednakże ma charakter drugorzędny; jak bowiem gdzieindziej okazemy, wielkości M_0 , V , H reagują na zmiany w przyjęciu omawianego prawidła znacznie słabiej aniżeli na zmiany kształtu osi. Z korzyścią rachunkową przeto przyjmijmy $A = \text{stałej}$ i $Z = \text{stałej}$. Odnośnie do kwestji obciążenia najpoprawniej będzie umieścić na łuku jeden ciężar skupiony P ; dla łuku kołowego określi najprościej jego położenie kąt φ_0 ; wielkości S_* i M_* wyrażą się wobec tego wzorami:

$$S_* = P \sin \varphi, \quad M_* = P r (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) \quad . \quad . \quad (10)$$

pozatem będzie:

$$x = -r \cdot \sin \varphi, \quad \eta = r \cdot (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \quad . \quad . \quad (11)$$

Uwzględniając uwagi powyższe tudzież relację (11) we wzorze (6) otrzymamy:

$$\eta_0 = r \cdot \left(\frac{1}{1+s} \cdot \frac{\sin \varphi_w}{\varphi_w} - \cos \varphi_w \right), \quad s = \frac{Z}{A r^2} \quad . \quad . \quad (12)$$

Odrzucając we wzorze (6) wpływ siły podłużnej i zakrzywienia otrzymalibyśmy uproszczenie:

$$y = \eta - \eta_0, \quad \eta_0 = \frac{\int \eta ds}{\int \frac{ds}{I}} \quad \dots \quad (13)$$

Odpowiedni rezultat dla rozważanego przez nas przykładu różnić się będzie obecnie od (12) nieobecnością małego ułamka s ; stąd błąd wzoru (13) wynosi:

$$-\frac{s}{1 - (1+s) \frac{\varphi_w}{\operatorname{tg} \varphi_w}} = \infty - \frac{s}{1 - \frac{\varphi_w}{\operatorname{tg} \varphi_w}}$$

Faktycznie przeto środek redukcji 0 leży nieco niżej, aniżeli to podaje stosowany w praktyce wzór (13). Uproszczenie (13) jest jednak zupełnie słuszne, albowiem dopiero przy bardzo płaskich łukach (poniżej $\frac{f}{L} = \frac{1}{12}$), a przytem wybitnie grubych ($\frac{d}{2r} > \frac{1}{25}$) może wykazywać błąd urosnąć do wartości niepożądaną.

Dyskusję wzorów (9) przeprowadzimy rozpatrując dla każdej ze składowych z osobna lewą i prawą stronę; po lewej całkowanie należy wykonać w granicach od $-\varphi_w$ do $+\varphi_w$, po prawej zaś od $-\varphi_w$ do φ_0 , albowiem wielkości (10) dla $\varphi_w \geq \varphi \geq \varphi_0$ znikają.

Po lewej stronie relacji na M_0 znika pierwszy dodatek podcałkowy w porównaniu do drugiego, ponieważ iloraz ich

$$s = \frac{Z}{Ar^2} = \infty \frac{I}{Ar^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{d}{2r} \right)^2$$

wynosi nawet przy $\frac{d}{2r} = \frac{1}{25}$ raptem $\frac{1}{2} \text{‰}$. Stosunek obu całek prawej strony wynosi:

$$\frac{s}{1 + \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi_w}{(\varphi_0 + \varphi_w) \sin \varphi_0}}$$

Osiąga on wartość największą dodatnią dla $\varphi_0 = \varphi_w$ a mianowicie s ; w dalszym ciągu z ubytkiem φ_0 stosunek ten maleje tak, że dla $\varphi_0 = 0$ wynosi on 0, poczem wykładnik badany rośnie ujemnie i dla φ_0 bliskich $-\varphi_w$ obliczyć go można z wyrażenia:

$$\infty - s \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_w}{\varphi_0 + \varphi_w} - 1 \right) = \infty \sim - \frac{s}{\delta} \cdot \operatorname{tg} \varphi_w,$$

które przy ustawieniu ciężaru nad prawem węzłowiem, t. j. dla $\delta = \varphi_0 + \varphi_w = 0$, osiąga wartość ujemnie nieskończoną. Ten zatrważający rezultat niema jednakże żadnego znaczenia, albowiem w okolicy

$\delta \rightarrow 0$ zarówno pierwsza jak i druga całka zdąża do zera (po prostu tylko pierwsza słabiej, druga silniej); rzędne np. odnośnej linii wpływowej są tu tak małe, że praktycznie nie można z nich korzystać. Poza to ten widoczny wpływ dodajnika pierwszego ogranicza się do bardzo małej części całkowitej rozpiętości łuku L ; i tak dla łuków $\frac{f}{L} = \sim \frac{1}{5}, \frac{1}{7.5}$ t. j. $\varphi_w = \sim \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ chcąc otrzymać wykładnik badanego stosunku lub — co na jedno wychodzi — błąd odnośnego pominięcia w wielkości -1% , musielibyśmy przyjąć $\delta = \sim 0.05, 0.03$, co odpowiada w obu wypadkach raptem $\frac{1}{30}$ długości całego łuku. Z powyższych powodów można w wyrażeniu na M_0 zupełnie słusznie pominąć omawiany mały wyraz. Wypada dodać, że gdybyśmy w odnośnym wyrazie pominęli zgóry $\frac{M_*}{r}$ wobec S_* , to ogólnie stosunki zmieniłyby się na niekorzyść prawdy teoretycznej.

Najprościej w rozważanym przykładzie przedstawia się sprawa uproszczenia V w grupie (9). Z tytułu równości (11) zarówno po lewej jak i po prawej stronie odpadają wyrazy opatrzone mianownikiem A — niezależnie zresztą od tego czy jest on stałym — jak założono — czy też zmiennym. Najwidoczniej i w wypadku innej krzywej jako osi łuku omawiane wyrazy będą bardzo drobne. Wypada podkreślić, że przy pominięciu wpływu krzywizny przy ustalaniu grupy (9) stosunki gruntownieby się zmieniły; mianowicie sile podłużnej musielibyśmy przyznać pewien wpływ i może nawet — jak się to u niektórych autorów zdarza — zatrzymalibyśmy po lewej stronie pod znakiem całki wyraz $\frac{\sin^2 \varphi}{A}$. W rzeczywistości zatem uwzględnienie krzywizny pręta nie tylko sprawy nie komplikuje, ale ją wyjaśnia i upraszcza.

Równie ciekawie przedstawia się sprawa z ostatnią składową t. j. H . Stosunek obu scałkowanych wyrazów lewej strony wynosi tutaj:

$$\psi = \frac{2s}{2s^2 + (1+s)^2 \Psi} = \sim \frac{2s}{\Psi}$$

przyczem:

$$\Psi = \left(\frac{\varphi_w}{\sin \varphi_w} \right)^2 + \frac{\varphi_w}{\operatorname{tg} \varphi_w} - 2.$$

Przeprowadzone wyżej uproszczenie dla ψ daje przybliżenie odpowiadające akurat przyjęciu $\frac{1}{1+s} = \sim 1$ we wzorze (11) t. j. przejściu z (6) na (13); błąd tak popełniony nie przekracza 2% , albowiem nawet w najgorszym wypadku jest pierwszy dodajnik mianownika

przecież 500 razy mniejszy od dodajnika drugiego. Wynika to najlepiej z niżej podanej tabeli:

$\frac{f}{L} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{w}}}{2} =$	1:2	1:3	1:4	1:5	1:7.5	1:10	1:12.5	1:15
$\Psi =$	0.46 74	0.11 31	0.03 90	0.01 67	0.00 34 57	0.00 11 12	0.00 04 60	0.00 02 23

Poza tem widzimy, że z wzrostem $\frac{f}{L}$ współczynnik Ψ rośnie. Ponieważ w tych samych warunkach równocześnie $s = \frac{Z}{A r^2}$ — jak z praktyki wiadomo — maleje, przeto wydawałoby się, że wpływ ψ można u łuków stromych w zupełności pominąć; jednakże tak nie jest. Albowiem w obliczeniu naprężeń σ w grę z reguły wchodzi nie wielkość ψ , lecz $\psi \cdot \frac{y}{d}$ — przyczem d oznacza odpowiadającą rzędnej y grubość łuku. Otóż w opisanych warunkach, gdy ψ maleje, równocześnie $\frac{y}{d}$ rośnie i w konsekwencji wpływ całki z mianownikiem A da się zawsze zauważyć i pominąć go nie można. Z opisanych wyżej powodów zmiany naprężeń σ , wywołane dodatkiem ψ , wahają wogóle w znacznie ciaśniejszych granicach, aniżeli sam współczynnik ψ . Ogólnie zatem wypada zanotować:

$$\psi = \frac{\int \left(\cos \varphi - \frac{y}{r} \right)^2 \frac{d s}{A} \dots \frac{f}{L} > \frac{1}{4} \dots \dots (14)$$

W ostatniej równości zastąpiono z wyłuszczonych już powodów wielkość Z momentem bezwładności I ; poza tem wzoru (14) należy w każdym razie używać, gdy $\frac{f}{L} > \frac{1}{4}$. Jak wiadomo tymczasem podaje się stale w najrozmaitszych podręcznikach wzór:

$$\psi = \frac{\int \cos^2 \varphi \cdot \frac{d s}{A} \dots \frac{f}{L} \leq \frac{1}{4} \dots \dots (15)$$

niezależnie od stosunku $\frac{f}{L}$. Otóż uproszczenie to, równające się pominięciu wpływu krzywizny może mieć miejsce dla łuków płaskich, względnie tych jakie przy (15) określono dodatkową nierównością. Istotnie, gdybyśmy dla omawianego przykładu zastosowali formułę (15), uzyskalibyśmy rezultat

$$\psi = 2s \left(\frac{1}{\overline{\psi}} + \frac{1}{2} \right) = \infty \approx \frac{2s}{\overline{\psi}}$$

wprawdzie podobny do ścisłego, z identycznym znaczeniem s i $\overline{\psi}$, którego jednak forma końcowa uproszczona — w wywodzie poprzednim ścisła — tutaj możliwa jest tylko przy łukach płaskich. Ogólnie ψ obliczone z (15) przesadza wpływ wyrazu opatrzonego wielkością A ; uwzględnienie wpływu momentu na skrócenie osi łuku okazuje się przeto i tutaj korzystnym. Użycie wzoru (15) zamiast (14) powoduje w oznaczeniu naprężeń dodatkowych dla pierwszych czterech wartości stosunku $\frac{f}{L}$, podanych przed chwilą w tabeli, błąd ujemny o bezwzględnej wartości kolejno: 23% , 6% , 2% , 1% . Stąd ograniczenie ważności relacji (15) do granic błędu wzoru (5).

Przy dotychczasowej dyskusji prawych stron grupy (9) badaliśmy stosunek odnośnych dwóch całek. Ten sposób postępowania w zastosowaniu do wielkości H zawodzi, albowiem rachunek wykazuje, że przy ścisłym obliczeniu każda z obu całek daje wyrażenie względem φ_0 niesymetryczne, a dopiero suma obu jest funkcją względem φ_0 symetryczną, jak — rzecz jasna — być powinno. Owa suma przedstawia się dla rozważanego przykładu następująco:

$$\frac{Pr^3}{Z} \cdot \left[\sin \varphi_0 \sin \varphi_w \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_w} - \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_w} \right) + \frac{1}{1+s} \cdot \frac{\sin \varphi_w}{\varphi_w} \cdot (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_w) - \frac{1}{2} (\cos^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_w) \right].$$

Szczególne forma tego rozwiązania (prawie niewidoczny wpływ A) nasuwa następujące uproszczenie: Pomińmy w zupełności pierwszą całkę prawej strony i obliczmy tylko drugą; zadziwiającym zbiegiem okoliczności otrzymamy wyrażenie, które od podanego wyżej różnic się będzie tylko tem, że w miejscu $\frac{1}{1+s}$ figurować obecnie będzie równo 1. Zauważmy, że przy wyznaczaniu liczebnej wartości wypisanego wyrażenia faktycznie ułamek wspomniany zostałby zastąpiony jednością z błędem dla całości prawie zerowym. Zatem całkę pierwszą należy pominąć lub raczej ściśle ona sama odpada z rachunku. Znow się tedy okazało, że uwzględnienie zakrzywiania obok działania siły podłużnej nietylko zadania nie komplikuje, ale je znakomicie upraszcza i to w sposób ścisły. Nawiasem mówiąc K. Wieghardt w „Sprawozdaniach Akademji Wiedeńskiej“ z r. 1915 wykazał przy sposobności omawiania zresztą zagadnienia innego, że stosowane w rachunkach technicznych uwzględnianie wpływu siły podłużnej prowadzi do większych błędów, aniżeli zupełne pominięcie tego wpływu. Przeprowadzona

przez nas dyskusja potwierdza w zupełności to zapatrywanie — notabene poza szczegółem ψ .

Resumując dotychczasowe, napiszemy wobec tego wzory (9) w formie następującej:

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \frac{\int M_* \frac{ds}{I}}{\int \frac{ds}{I}} \\ V &= \frac{\int M_* \frac{x ds}{I}}{\int \frac{x^2 ds}{I}} \\ H &= - \frac{\int M_* \frac{y ds}{I}}{(1 + \psi) \cdot \int \frac{y^2 ds}{I}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

2. Kształt osi łuku wyznacza się — jak wiadomo — z równania różniczkowego:

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{q}{H^*} \dots \dots \dots (17)$$

w którym q oznacza t. zw. obciążenie zasadnicze lub podstawowe. Według Tolkmitt'a stanowi q ciężar własny łuku łącznie z dodatkami konstrukcyjnymi tudzież połowa obciążenia ruchomego, rozłożonego w sposób ciągły wzdłuż całej długości L ; Mörsch dla łuków żelazno-betonowych radzi pod q rozumieć tylko ciężar własny. Nawiązując do uwagi wstępnej notatki skrócimy rozważania nie rozpatrując bliżej kwestji doboru obciążenia podstawowego; poprostu przyjmiemy, że obciążenie takie istnieje i wynosi $q = q(x)$. Natomiast szerzej rozpatrzmy sprawę ważniejszą, bo bardzo często kwestjonowaną nawet przez wybitne powagi, a mianowicie kwestję samowystarczalności równania (17). Równanie to — jak wiadomo — uzyskuje się z prostych rozważań geometryczno - statycznych, w których w pierwszym przybliżeniu zakłada się sztywność łuku. Z warunków brzegowych ustalić można w bardzo prosty sposób stałe całkowania równania (17), a nadto wartość składowej poziomej H^* łuku sztywnego; przy pomocy tej ostatniej lub też warunków równowagi łatwo znajduje się składową pionową V^* ; wreszcie redukując układ do punktu 0, znajdujemy M_0^* . Przy pomocy tych wielkości znajdujemy relacje podobne do (8) t. j.

$$\left. \begin{aligned} S^* &= V^* \sin \varphi + H^* \cos \varphi - S_* \\ M^* &= M_0^* + V^* x - H^* y - M_* = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Drugie z równań (18) wyraża właśnie charakterystyczną własność osi łuku sztywnego, t. j. brak momentów w dowolnym przekroju; różniczkując je dwukrotnie względem x otrzymamy oczywiście (17). Zachodzi następujące pytanie: Ile wynoszą faktyczne wartości M_0 , V i H łuku (17) względnie (18) — t. j. wartości obliczone z uwzględnieniem odkształcalności materiału. Odpowiedź jest prosta. Podstawmy w grupie (16) równość (18) t. j.

$$M_* = M_0^* + V^* x - H^* y$$

Uwzględnivszy, że z powodu założonej symetrii łuku i odpowiedniego przyjęcia η_0 jest:

$$\int \frac{x ds}{I} = 0, \quad \int \frac{xy ds}{I} = 0, \quad \int \frac{y ds}{I} = 0$$

$$\text{otrzymamy: } M_0 = M_0^*, \quad V = V^*, \quad H = \frac{H^*}{1 + \psi} \quad \dots \quad (19)$$

W związku z powyższem przejdzie układ (18) na podobny:

$$\left. \begin{aligned} S^* &= V \sin \varphi + H(1 + \psi) \cos \varphi - S_* \\ M^* &= M_0 + Vx - H(1 + \psi)y - M^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (20)$$

Porównując wielkości (20) łuku sztywnego, z odnośniami rzeczywistymi (8) widzimy, że dla łuku o osi (17) w dowolnym punkcie tej osi istnieje siła podłużna i moment zginający o wartościach:

$$\left. \begin{aligned} S &= S^* - H\psi \cos \varphi \\ M &= H\psi \cdot y \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (21)$$

Zatem łuk, którego oś zaprojektowano według (17) nie wyklucza — jak to zresztą wiadomo — obecności momentów zginających w wszystkich przekrojach pod obciążeniem zasadniczym; innemi słowy linja ciśnienia łuku nie jest krzywą identyczną z linją sznurową obciążenia.

Powyższy rezultat wywołał u pokażnej liczby autorów szereg zarzutów krytycznych w odniesieniu do roli równania różniczkowego (17). Istnieją zapatrywania, że tak uzyskaną oś należy poprawić w ten sposób, by momenty (21) znikły lub chociażby zmalały. Wykażemy, że jedno jest wogóle niemożliwe, a drugie może tylko zaszkodzić, albowiem poprawiając sytuację np. w dwóch miejscach, w całym szeregu innych ją się pogarsza.

Wyobraźmy sobie, żeśmy rzędne η osi łuku — narazie niekoniecznie (17) — poprawili zmianami $\Delta \eta$; te ostatnie uważajmy przytem za tak małe, że ich kwadraty i wyższe potęgi, poza tem pochodne $\frac{d\Delta \eta}{ds}$ bez obawy pominiemy. Rezultatem tych poprawek będą pewne

zmiany. Pierwsza dotyczy położenia środka redukcji 0; wychodząc z definicji (13) znajdziemy zmianę wysokości η_0 w postaci:

$$\Delta \eta_0 = \frac{\int \frac{\Delta \eta ds}{I}}{\int \frac{ds}{I}} = -\Delta y_w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Nowy punkt 0 pozostanie poza tem na osi symetrii, jeśli poprawki zastosowano symetryczne. Odnośnie do składowych hiperstatycznych informują nas wzory (16), że tylko ostatnia ulegnie zmianie co do wielkości; dwie pierwsze nie zmieniają się, jakkolwiek pierwsza w myśl (22) zmieniła położenie. Poszukiwaną zmianę znajdziemy uwzględniając, że rzędne dawne y przybrały obecnie wartość $y + \Delta \eta - \Delta \eta_0$. Rezultaty przedstawiają się następująco:

$$\Delta M_0 = 0, \quad \Delta V = 0, \quad \Delta H = \frac{\int (M_0 - 2Hy - M_*) \frac{\Delta \eta ds}{I}}{(1 + \psi) \cdot \int \frac{y^2 ds}{I}} \quad . \quad . \quad (23)$$

Podane wzory mają charakter ogólny. Przechodząc z kolei do łuku (17) uwzględnijmy w (23) drugi z wniosków (20); zważywszy dodatkowo, że z tytułu założonej symetrii jest $\int \frac{x \Delta \eta ds}{I} = 0$, otrzymamy:

$$\Delta M_0 = 0, \quad \Delta V = 0, \quad \Delta H = -H \cdot \frac{1 - \psi}{1 + \psi} \cdot \frac{\int \frac{y \Delta \eta ds}{I}}{\int \frac{y^2 ds}{I}} \quad . \quad . \quad (24)$$

Wyrazem nowych stosunków będzie zmiana S i M w dowolnym przekroju. Znajdziemy je z wzorów (8), zastępując figurujące tam wielkości S, M, M_0, V, H, y przez $S + \Delta S, M + \Delta M, M_0 + \Delta M_0, V + \Delta V, H + \Delta H, y + \Delta \eta - \Delta \eta_0$. Otrzymane relacje miałyby znów charakter ogólny; odnośnie wzory dla łuku (17) znajdziemy przyjmując dodatkowo obecność (20). Mianowicie uzyskamy:

$$\left. \begin{aligned} S + \Delta S &= S^* - (H\psi - \Delta H) \cos \varphi \\ M + \Delta M &= (H\psi - \Delta H)y - (H + \Delta H)(\Delta \eta - \Delta \eta_0) = \\ &= \mathfrak{M} = \sim (H\psi - \Delta H)y - H(\Delta \eta - \Delta \eta_0) \end{aligned} \right\} \quad . \quad (25)$$

Takie są zmiany, które wywołały poprawkami $\Delta \eta$ łuku (17); $\Delta \eta_0$ i ΔH określają równania (22) i (24). Wypada dodać, że w rachunku powyższym milcząco przyjęto, że obciążenie q , a zatem i wielkości S_* i M_* nie uległy jednak żadnym zmianom; przy łukach z nadbudową ażurową faktycznie tak będzie — przy nadbudowie litej zająd pewne zmiany Δq . Uwzględnienie ich nie nastęrcza trudności w przypadku konkretnym; rozwiązanie w formie ogólnej jest prawie

niemożliwe; pozatem wykładnik stosunku $\frac{\Delta q}{q}$ będzie wogóle znacznie mniejszy od ilorazu $\frac{\Delta \eta}{\eta}$ — można go zatem z korzyścią rachunkową pominąć.

Wracając do kwestji zasadniczej możemy na podstawie równania (25) w tej chwili stwierdzić, że uniknięcie na całej długości łuku momentów zginających $\mathfrak{M} = M + \Delta M$ jest rzeczą absolutnie niemożliwą. Zauważmy, że $\Delta \eta = \Delta \eta(x)$ nie może być funkcją zupełnie dowolną; między innymi musimy od niej przedewszystkiem zażądać, by w kluczu i we węzłowie znikła, albowiem — rzecz jasna — te dwa miejsca są względami konstrukcyjnymi względnie podstawowymi wymogami zgóry ustalone. Tymczasem warunek $\mathfrak{M} = 0$ prowadzi najwidoczniej do równania linjowego między zmiennymi $\Delta \eta$ i y , innymi słowy wyklucza on możliwość $\Delta \eta = 0$ dla dwóch różnych miejsc $y = y_k$ i $y = y_w$. Zatem jak widać nie istnieje oś łuku rzeczywistego, któraby dla obciążenia stałego mogła się pokryć z odnośną linją ciśnienia.

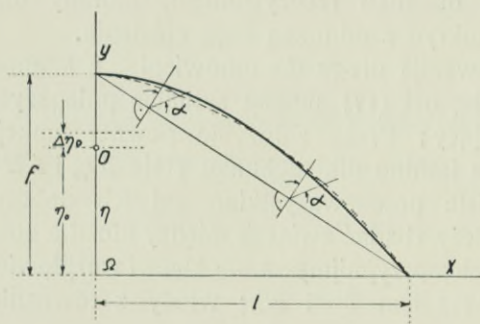
Pozostała wobec tego kwestja druga do omówienia, a mianowicie zbadanie, o ile poprawką osi (17) można sytuację polepszyć. Sprawie nadamy tok następujący: Przez założenie pewnej funkcji $\Delta \eta = \Delta \eta(x)$ wprowadzamy dwie istotne dla rachunku stałe $\Delta \eta_0$ i ΔH ; poprawa sytuacji zależeć będzie przedewszystkiem od ich doboru liczebnego. Z tego powodu należy zbadać związek między nimi a momentami \mathfrak{M} w dwóch przekrojach; przyjmijmy za nie klucz i węzłowie. Niech odnośne momenty wynoszą tam \mathfrak{M}_k i \mathfrak{M}_w ; wtedy z równania (25) znajdujemy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \eta_0 &= \frac{\mathfrak{M}_w y_k - \mathfrak{M}_k y_w}{H f (1 + \psi) - (\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_w)} \\ \Delta H &= H \psi - \frac{\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_w}{f} \end{aligned} \right\} \dots \dots (26)$$

Przyjmując dla badanych miejsc \mathfrak{M}_k i \mathfrak{M}_w ustalamy tem samem $\Delta \eta_0$ i ΔH i w konsekwencji krępujemy swobodę funkcji $\Delta \eta$. Oczywiście jest rzeczą niemożliwą zbadać wszelkie dowolnie się nasuwające założenia co do obioru liczebnego \mathfrak{M}_k i \mathfrak{M}_w ; w dalszym ciągu przeto przyjmijmy założenie możliwie proste. Zauważmy, że przed przyjęciem poprawek $\Delta \eta$ było według (21) $\frac{M_k}{M_w} = \frac{y_k}{y_w}$. Poprawiając tedy stosunki starajmy się zrobić $|\mathfrak{M}_k| < |M_k|$ tudzież $|\mathfrak{M}_w| < |M_w|$, zachowując równocześnie podany stosunek. Z układu (26) uzyskamy wtedy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathfrak{M}_k}{\mathfrak{M}_w} &= \frac{y_k}{y_w}, & \Delta \eta_0 &= 0 \\ \Delta H &= H \psi - \frac{\mathfrak{M}_k}{y_k} = H \psi - \frac{\mathfrak{M}_w}{y_w} = \nu H \psi \end{aligned} \right\} \dots \dots (27)$$

przyczem dla skrócenia wprowadzono parametr ν , jako wielkość, którą można obliczyć z pozostałego nam jeszcze do dyspozycji drugiego przyjęcia odnośnie do \mathfrak{M}_k względnie \mathfrak{M}_w . Oczywiście powyższe można odwrócić; istotnie zakładając zgóry $\Delta\eta_0=0$ otrzymujemy z (26) resztę jak w (27). Środek redukcji 0 ma duże znaczenie; obliczywszy raz jego położenie niechętnie widzimy jakkolwiekbydź zmianę $\Delta\eta_0$; ma to swoje częściowe usprawiedliwienie w rozpowszechnieniu się prostych metod wykreślnych przy wyznaczaniu linii wpływowych i t. p., gdzie zmiana położenia punktu 0 powodowałaby niepotrzebne komplikacje rysunkowe. Z tego to powodu bardzo często przy stosowaniu dość dowolnych poprawek $\Delta\eta$ przyjmuje się albo milcząco albo też z dobrą wiarą, że $\Delta\eta_0=0$, jakkolwiek prowadzi to czasem do rażących błędów. Przykładem takiej poprawki jest rysunek 2, w którym podano stosowaną w Italji metodę pomocniczego stałego kąta α , dobieranego indywidualnie przez konstruktora.



Rys. 2.

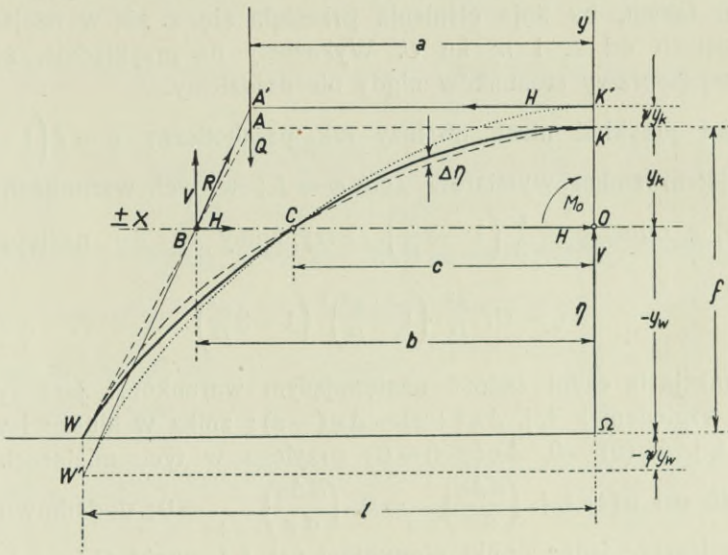
indywidualnie przez konstruktora. Często się twierdzi (np. w „Bericht über die II Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau”), że tego rodzaju zmiane osi łuku towarzyszy $\Delta\eta_0=0$; tymczasem prosty rachunek wykazuje:

$$\Delta\eta_0 = \frac{fl}{f^2 + l^2} (f - \eta_0) \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

W naszym wypadku dobierzemy $\Delta\eta = \Delta\eta(x)$ tak, by faktycznie było $\Delta\eta_0=0$; zrobimy to dla wygody rachunkowej; spódczynnik ν pozostawia nam jeszcze całą skalę rozmaitych możliwości rachunkowych. Następczająca się dalsza dyskusja jest o tyle interesująca, że da się częściowo śledzić rysunkowo.

Na rysunku 3 przedstawia pełna krzywa KCW oś łuku (17); linja ciśnienia (21) przedstawiona tu jest krzywą $K'CW'$. Na nakreślonej połówce łuku działają: wypadkowa obciążenia $Q=V$, reakcja R wzdłuż $W'B$ i zastępczą działanie odrzuconej połówki siła H wzdłuż prostej $K'A'$; składowe reakcji dla punktów wzdłuż prostej $W'B$ są V i H — jej moment względem 0 wynosi M_0 . Położenie Q określa $x=a$; położenie reakcji R określają jej składowe V i H tudzież moment M_0 . Umieszczając owe składowe w punkcie B , widzimy w tej chwili, że $b = \frac{M_0}{V}$; pozioma H musi przejść przez A' . Po dokonaniu zmian $\Delta\eta$, Q nie ulega zmianie tak co do położenia jak i co do

wielkości; podobnie nie zmieniają się ilościowo M_0 i V . Zatem b nie ulega żadnej zmianie; ponieważ nadto założono wypadek $\Delta\eta_0 = 0$, przeto punkt B pozostanie w miejscu. Wykazaliśmy przeto, że w czasie dokonywania zmian $\Delta\eta$ reakcja R obraca się dokoła stałego punktu B . W zależności od wielkości tych zmian będzie punkt A' wędrować ku A , a wtedy automatycznie K' będzie się zbliżać do K , punkt W' do W ; oczywiście położenia te mogą być przekroczone. Dla założonego kierunku wędrówki punktów A' , K' , W' musi najwidoczniej składowa pozioma wzrastać czyli musi być $\Delta H > 0$; aby zaś tak było musi być według (24) $\int \frac{y \Delta\eta ds}{I} < 0$; skoro zaś ma być $\Delta\eta_0 = 0$, to według (22) stanie się to wtedy, gdy część poprawek $\Delta\eta$ będzie do-



Rys. 3.

datnia a część ujemna. Łącząc oba wnioski widzimy, że uzyskamy $\Delta H > 0$, gdy na dłuższej partji $y > 0$ zastosujemy $\Delta\eta < 0$ i naodwrot w znacznym interwale $y < 0$ przyjmujemy $\Delta\eta > 0$; owym zmianom bowiem nie mają towarzyszyć żadne osobliwości matematyczne. W rys. 3 wkreślono nową oś stosując się do uwag wyżej podanych; odpowiada ona tej chwili, w której K' pokryło się z K i W' z W . Że to ostatnie stanie się równocześnie jest rzeczą jasną z stosunku $\frac{\mathfrak{M}_k}{\mathfrak{M}_w} = \frac{y_k}{y_w}$; wykreśli też się to potwierdza; wystarczy w tym celu rozpatrzeć podobieństwo paru figur, utworzonych raz z sił, a drugi raz z wymiarów geometrycznych; pomijamy ten prosty rachunek. Zauważmy tylko, że ostatniemu wypadkowi t. j. $\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_w = 0$ odpowiada $v = 1$ t. j. $\Delta H = H\psi$,

$H + \Delta H = H(1 + \psi) = H^*$ czyli akurat ta wartość składowej, z którą spotkaliśmy się w (19) przy omawianiu łuku sztywnego; równanie (25) daje w tym wypadku $\mathfrak{M} = -(H + \Delta H)\Delta\eta$, to znaczy, że nowa linja ciśnienia pokryła się dokładnie ze starą osią (17).

W ostatnim ustępie przedstawiliśmy całokształt stosunków jakie panują w czasie poprawiania osi (17). Mianowicie linja ciśnienia nie może nadażyć w pogoni za zmienianą osią. W chwili gdy ta pierwsza przeszła z położenia $K'CW'$ do KCW , równocześnie ta druga usunęła się z położenia KCW do nowego, oznaczonego linją przerywaną. Jednakże mogłoby się zdawać, że nowe mimośrodody — $\Delta\eta$ będą znacznie mniejsze od poprzednich ψy , skoro w K i W uzyskaliśmy nawet brak momentów; wreszcie może kto zażądać dalszych zmian osi i to takich, by linja ciśnienia przecięła się z nią w miejscach przesuniętych od K i W ku C . Wykażemy na przykładzie, że do faktycznej poprawy stosunków nigdy nie dojdziemy.

Jako przykład niech posłuży łuk paraboliczny $\eta = f\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$ z prawidłem zmian wymiarów $I \cos \varphi = I_k$; w tych warunkach jest $\eta_0 = \frac{2}{3}f$, a zatem $y = \frac{f}{3}\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right)$. Przyjmijmy za $\Delta\eta$ następującą funkcję:

$$\Delta\eta = Cf \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 \cdot \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right) \dots \dots (28)$$

Funkcja ta czyni zadość następującym warunkom: Jest symetryczną względem x t. j. $\Delta\eta(+x) = \Delta\eta(-x)$; znika w kluczu i wezłowie t. j. $\Delta\eta(0) = 0$, $\Delta\eta(\pm l) = 0$; przylega w tych miejscach do stycznych osi $y(x)$ t. j. $\left(\frac{d\Delta\eta}{dx}\right)_{x=0} = 0$, $\left(\frac{d\Delta\eta}{dx}\right)_{x=\pm l} = 0$; dodatkowo zachowuje jeszcze jeden punkt pierwotnej osi t. j. punkt C ($x = \pm c = \pm \frac{l}{\sqrt{3}}$, $y = 0$, $\Delta\eta = 0$); wreszcie czyni zadość warunkowi $\Delta\eta_0 = 0$, jak łatwo sprawdzić wykonując (22). Oczywiście zamiast równania (28) można było przyjąć inne, byleby warunki powyższe — względnie większość z nich — zostały zachowane. Wspomniana metoda stałego kąta musi tu być wykluczona, albowiem w kluczu otrzymuje się tam styczną nachyloną, przyczem bezwzględna wartość tangensu kąta na-

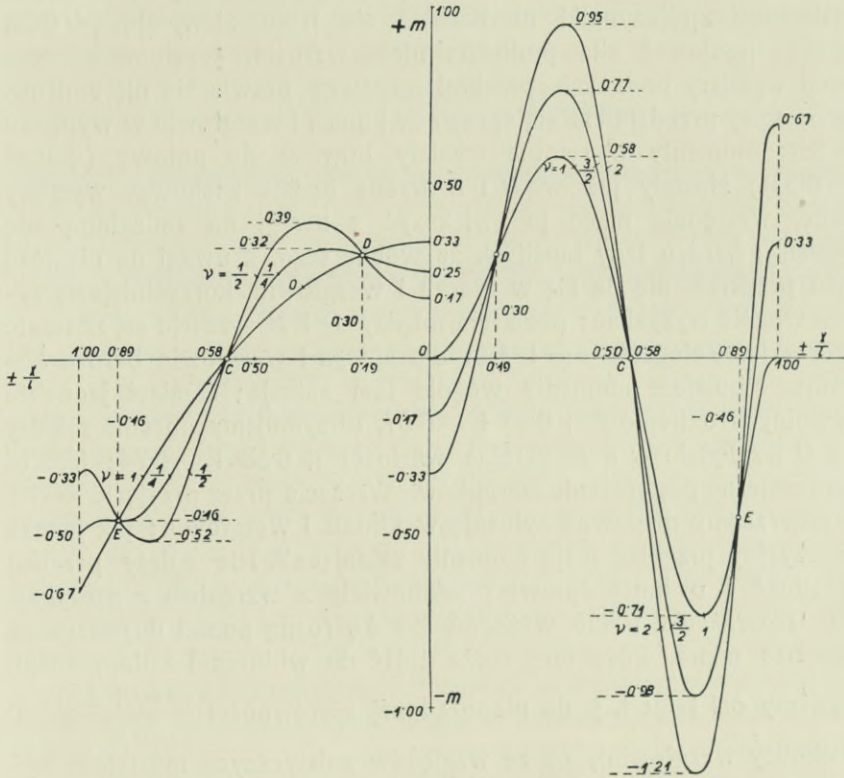
chylenia $\frac{\left(\frac{f}{l}\right)^2 \operatorname{tg} \alpha}{\left(\frac{f}{l}\right)^2 + \frac{f}{l} \operatorname{tg} \alpha + 1}$ może przybrać nawet kilkanaście procent,

a pozatem — jak wspomniano — jest $\Delta\eta_0 \neq 0$. Różnice między rzęd-
nemi (28), a innymi będą oczywiście zawsze bardzo małe; wartości

konkretne reguluje parametr niemianowany C . Wstawiając (28) w relację (24) i przyrównując do (27) otrzymujemy:

$$C = -\frac{77}{8} \nu \cdot \psi \cdot \frac{1 + \psi}{1 - \psi} \approx -\frac{77}{8} \nu \psi \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

W ten sposób ustaliliśmy momenty zginające \mathfrak{M} dla nowej osi. Rezultat podstawienia (27), (28) i (29) w równanie (25) daje po drobnych pominięciach:



Rys. 4.

$$m = \frac{\mathfrak{M}}{Hf\psi} = \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2}\right) \cdot \left[\frac{1-\nu}{3} - \frac{77}{8} \nu \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad (30)$$

Wielkość m , proporcjonalna do \mathfrak{M} , nadaje się bardzo dobrze do scharakteryzowania nowej sytuacji. Na rysunku 4 podano zestawienie krzywych $m = m\left(\frac{x}{l}\right)$ dla sześciu różnych wartości ν . Poza punktem C ($x = \pm 0.577 l$), w którym moment w rozpatrywanym przykładzie stale

*

jest równy zeru, widoczne są na łuku jeszcze dwa inne miejsca D ($x = \pm 0.193 l$) i E ($x = \pm 0.889 l$), w których niezależnie od wielkości przyjętych poprawek osi $\Delta \eta$ moment zginający ($+ 0.296 H f \psi$ względnie $- 0.457 H f \psi$) nie ulega zupełnie zmianie; już ten fakt daje dużo do myślenia. Bliższe rozpatrzenie wykresów podaje w mocną wątpliwość celowość stosowania zmian osi (17). Krzywa $\nu = 0$ charakteryzuje stan pierwotny niekorygowany; extrema momentów oddają współczynniki $+ 0.33$ w kluczu i $- 0.67$ w wezłowie. Zastosowanie zmian małych $\nu = 0.25$ nie przedstawia żadnych korzyści istotnych, albowiem wymienione współczynniki nieznacznie się tylko zmieniają ($+ 0.25$, $- 0.50$); ponieważ siła podłużna nieco wzrosła, przeto w konsekwencji wymiary badanych przekroi zapewne prawie się nie zmieniają. Nieco lepiej przedstawia się sprawa w kluczu i wezłowie w wypadku $\nu = 0.5$; momenty pierwotne zmały bowiem do połowy ($+ 0.17$ i $- 0.33$); niestety już w D i E trzeba będzie zachować wymiary dawne, względnie nieco je zwiększyć z uwagi na zmienioną siłę podłużną; bardzo tedy możliwe, że wobec tego, z uwagi na ciągłość zmian przekroi, nie da się w kluczu i wezłowie korzystniejszej sytuacji wogóle wyzyskać; poza tem między D i E sytuacja się znacznie pogorszyła. Założenie $\nu = 1$ jest dla klucza i wezłowie bardzo korzystne, albowiem momenty wogóle tam znikają; zamiast jednakże pierwotnych ekstremów $+ 0.33$ i $- 0.67$, otrzymujemy obecnie między D a C względnie C a E skrajne wartości $+ 0.58$ i $- 0.74$; jest to zatem znaczne pogorszenie warunków. Wreszcie przez przyjęcie $\nu = 1.5$ i 2 odwracamy niedawną sytuację w kluczu i wezłowie; jak jednak niekorzystny przebieg mają momenty zginające? Nie należy przytem zapominać i o innej sprawie; mianowicie z wzrostem ν zaczynają nasze rozważania tracić ważność, bo $\Delta \eta$ rosną ponad dopuszczoną przez nas miarę. Poza tem może dojść do widocznej zmiany znaku krzywizny osi łuku t. j. do niepożądaney nierówności $\frac{d^2(\eta + \Delta \eta)}{dx^2} > 0$ (w okolicy wezłowie), co ze względów estetycznych musiałoby być tuszowane — oczywiście znów kosztem wymiarów. Jednem słowem poprawienie osi ze względu na obciążenie zasadnicze nie daje wybitnych korzyści. Jeśli przeto — jak się to zdarza — czytamy, że dzięki zmianie osi (17) uzyskano np. we wezłowie zarobek na naprężeniach w wysokości 25%, to oświadczenia takiego nie możemy wprawdzie traktować za bezpodstawne — możemy jednak gwarantować, że ten zarobek zniweńczyły w dwójnasób straty w innych przekrojach. Zachowanie odnośnych zmniejszonych wymiarów w kluczu i wezłowie prowadzi w takich warunkach do silnych wzmocnień w całym szeregu

innych przekroi; będzie to możliwem tylko w konstrukcji żelazno-betonowej, nigdy w kamiennej lub betonowej.

Rozkład dodatkowych nieuniknionych momentów zginających jest z pośród wszystkich możliwych najlepszy dla osi (17). Bijący w oczy z rys. 4 fakt, że przy wzrastających ν , rosną bezwzględne wartości pól, zawartych między krzywami m a osią $\frac{x}{l}$, jest dowodem tego, że i ogół wartości owych momentów jest dla łuku (17) najmniejszy. Niezależnie od tego możnaby jednak szukać takiej osi, dla której ogół mimośrodków jest najmniejszy. Niestety nasuwające się w ten sposób zagadnienie rachunku warjacyjnego w postaci:

$$\int \left(\frac{M + \Delta M}{S + \Delta S} \right)^2 \frac{ds}{W} = \text{Minimum} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

żądataj najmniejszości dla sumy kwadratów mimośrodków (wielkości W mają charakter wag), nie prowadzi do celu, albowiem pierwsza warjacja podanej całki identycznie znika — jak łatwo się przekonać. Jest to matematyczne ostrzeżenie dla zwolenników poprawiania osi (17).

Przy tej sposobności wypada parę słów dodać o sprawie analogicznej. Mianowicie istnieje sporo autorów, którzy utrzymują, że tak jak łatwo jest złagodzić wpływ skrócenia sprężystego osi, równie prosto można oś dostosować do średniej wartości skurczu betonu, średniej temperatury rocznej i t. p. Prowadzi to w konsekwencji do utrzymywania, że bezwzględnie największe wartości momentów zginających muszą być sobie w takim łuku równe, że łuk, którego wzmocnienie wkładkami jest inne w górnej aniżeli w dolnej strefie tego samego przekroju, jest zaprojektowany fałszywie i t. p. Otóż wypada z naciskiem podkreślić, że tego rodzaju stanowisko nie da się w stosunku do łuków bezprzegubowych absolutnie utrzymać. Gdyby faktycznie kształt osi łuku dał się dostosować do wspomnianych wpływów, to możnaby świetnie uprościć przepisy budowlane względnie sposoby obliczenia zastępując np. zmianę temperatury fikcyjnem obciążeniem i t. p. Że jednak tak nie jest łatwo wykazać. Zauważmy, że tego rodzaju dostosowanie musiałoby się dać przeprowadzić w każdym konkretnym wypadku niezależnie od tego, czy np. obciążenie stałe q jest większe czy też mniejsze, a zatem i w wypadku pomyślanym $q=0$. Jeśli jednak $q=0$ to linja ciśnienia — jak wynika z (17) — jest linją prostą; faktycznie wiemy, że zmiana temperatury wywołuje jako jedyne siły równowartą zeru dwójkę sił H , działającą wzdłuż prostej poziomej przez 0. Jeśli tedy linja ciśnienia jest prostą, to na jakiej podstawie można twierdzić, że przejdzie ona równocześnie np. przez klucz i oba wezłowania? Ten krótki dowód powinien wystarczyć.

3. Już w pierwszym ustępie przyjęliśmy, że prawidło zmian momentu bezwładności przekroju nie odgrywa zbyt wielkiej roli w dymensjonowaniu wielkości M_0 , V , H . Podobnie w ustępie drugim zastanawiając się nad ewentualnymi korzyściami ze zmiany osi łuku nie uwzględnialiśmy, że do odnośnych zmian momentu M i siły S należałoby dostosować wymiary łuku, w konsekwencji uwzględnić nowe zmiany w M_0 , V i H i dopiero w tym stadium zagadnienie przedyskutować. Wykażemy, że było to rzeczą zbędną.

Udzielmy w tym celu wymiarom wszystkich przekroji drobnych zmian tak, że I zmieni się na $I + \Delta I$ — i oznaczymy dla skrótowania $\frac{\Delta I}{I} = \Delta i$. Zmiany drobnej wielkości ψ wogóle pominiemy; nie uwzględnimy nadto małych zmian ciężaru samego łuku. Uwzględniając poprawki ΔI w wzorach (13) i (16) znajdziemy grupę następującą:

$$\Delta \eta_0 = - \frac{\int y \Delta i \frac{d s}{I}}{\int \frac{d s}{I}} \quad \dots \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_0 &= \frac{\int (M_0 - M_*) \Delta i \frac{d s}{I}}{\int \frac{d s}{I}} \\ \Delta V &= \frac{\int (V x - M_*) \Delta i \frac{x d s}{I}}{\int \frac{x^2 d s}{I}} \\ \Delta H &= - \frac{\int (M_0 - H y - M_*) \Delta i \frac{y d s}{I}}{(1 + \psi) \int \frac{y^2 d s}{I}} \end{aligned} \right\} \dots \quad (33)$$

Wzory powyższe mają charakter ogólny. Gdy w szczególności przejdziemy do łuku (17), to z wzorów (33) na podstawie (20) otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_0 &= -H(1 + \psi) \Delta \eta_0 = \sim -H \Delta \eta_0 \\ \Delta V &= 0 \\ \Delta H &= -H \frac{\psi}{1 + \psi} \frac{\int y^2 \Delta i \frac{d s}{I}}{\int y^2 \frac{d s}{I}} = -H \frac{\psi \bar{\Delta i}}{1 + \psi} = \sim 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (34)$$

przyczem w ostatnim równaniu $\bar{\Delta i}$ oznacza przeciętną wartość Δi w badanym interwale (po myśli twierdzenia o wartości średniej).

Zmiany wielkości S i M w dowolnym przekroju znajdziemy za pośrednictwem grupy (8), zastępując figurujące tam wielkości odnośniami zmienionymi. Nowe wzory będą miały charakter ogólny przy użyciu (32) i (33) lub szczególny, gdy uwzględnimy (32) i (34). W tym ostatnim wypadku otrzymujemy analogicznie do (25) grupę:

$$\left. \begin{aligned} S + \Delta S &= S^* - (H\psi - \Delta H) \cos \varphi = \sim S^* - H\psi \cos \varphi = S \\ M + \Delta M &= \Delta M_0 + (H\psi - \Delta H) y + \\ &+ (H + \Delta H) \Delta \eta_0 = H\psi (y - \Delta \eta_0) \left(1 + \frac{\overline{\Delta i}}{1 + \psi} \right) = \sim H\psi y = M \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

W wzorach (35) z powodu małych wartości ψ , $\Delta \eta_0$ i $\overline{\Delta i}$ wartości $S + \Delta S$ i $M + \Delta M$ praktycznie nie różnią się od wielkości podanych w (21). Innymi słowy jest $\Delta S = 0$ i $\Delta M = 0$. Zatem nieznaczna zmiana wymiarów prowadzi wprawdzie do widocznej zmiany położenia środka redukcji tudzież do zmiany momentu M_0 , oba wpływy jednak wzajemnie się znoszą tak, że siła podłużna S i moment zginający M w dowolnym przekroju nie ulegają zmianie. Z powyższego wynika, że wprowadzenie zmian ΔI w treść ustępu drugiego było niepotrzebne. Ponieważ dla tego samego łuku zmiana osi wywoływała skończone ΔS i ΔM , przeto należy przypuszczać, że i w wypadku obciążenia dowolnego będzie decydującym czynnikiem kształt osi, a drugorzędym prawidło zmian przekroju. Szczegółowe rozstrząsanie tej sprawy przez dyskusję wzorów (33) przedłużyłoby znacznie rozmiary artykułu.

Na zakończenie wreszcie wypada dodać, że wzory (22) i (23) tudzież (32) i (33) łącznie z warunkiem warjacyjnym (31) lub innym podobnym (np. dla odchyłek naprężeń) mogą prowadzić do najpoprawniejszej osi łuku i najpoprawniejszych wymiarów z uwagi na całokształt wszystkich stałych i zmiennych wpływów, działających na łuk. Punktem wyjścia może być oś dość dowolna i równie dowolne prawo zmiany przekrojów. Jedynie w ten sposób można uzyskać ścisłą podstawę do ustalenia pojęcia obciążenia zasadniczego. Rozwiązanie tego ciekawego problemu nie mieści się w ramach niniejszej notatki.

INŻ. DR. ALFONS CHMIELOWIEC

Jeszcze jeden sposób badania belki ciągłej.

Jedną z najnowszych prac dostojnego Jubilata jest wygłoszona przez Niego na posiedzeniach Akademii Nauk Technicznych i ogłoszona jej nakładem rozprawa p. t.: „Naprężenia drugorzędne w belkach kratowych“ (Lwów 1928), której mam wysoki zaszczyt być współautorem. W rozdziale II. podano tam przybliżony sposób obliczania naprężeń drugorzędnych. Polega on na tem, że najpierw wyznaczamy przesunięcia węzłów; następnie, przyjmując, że krzyżulce i słupy połączone są z obwodem kratownicy przy pomocy przegubów beztarciovych (idealnych), obliczamy momenty w obwodzie, wywołane przesunięciami węzłów; wreszcie uwzględniamy w sposób przybliżony wpływ sztywnego połączenia kraty z obwodem.

Nas będą tu interesować momenty w obwodzie kratownicy. Badanie momentów węzłowych sprowadzić można do szukania momentów podporowych belki ciągłej prostej, wywołanych danem przesunięciem podpór. W wymienionej rozprawie podano dwa sposoby wyznaczenia tych momentów: sposób analityczny przy pomocy równań trzech momentów i sposób wykreślny przy pomocy związków między linją momentów, a linją ugięcia. Poniżej skorzystamy z tego ostatniego sposobu, aby wyznaczyć momenty podporowe w belce ciągłej, spowodowane dowolnem obciążeniem. Wykażemy bowiem, że momenty podporowe w belce ciągłej się nie zmieniają, jeżeli dane obciążenie zastąpimy odpowiedniami przesunięciami podpór.

Zachodzi pytanie, czy jest rzeczą wskazaną i pożyteczną szukać nowych sposobów badania belki ciągłej. Wszak pisano o niej już bardzo wiele. Znamy sposoby analityczne wyznaczania momentów podporowych belki ciągłej przy pomocy równań trzech momentów, a także przy pomocy równań dwóch momentów. Znamy wykreślną

metodę punktów stałych i linii krzyżowych. Znamy też sposoby wykreślne niezależne od linii krzyżowych¹⁾, wreszcie metodę przęseł skrajnych zastępczych²⁾. W krótkich odstępach czasu pojawiają się po sobie jeden po drugim nowe sposoby wykreślania i obliczania, nowe przyczynki do teorii belki ciągłej, starające się czyto uprościć nieco rachunek przez zastosowanie tablic, czy też oszczędzić paru kresek w metodzie graficznej. Mimo to nie waham się podać jeszcze jednego sposobu. Jest on niepodobny do innych. Wszystkie one bowiem są niewygodne o tyle, że musimy je przejść do samego końca, aby znaleźć szukane momenty podporowe, które ostatecznie mogą nam się okazać zupełną niespodzianką. Przed ukończeniem obliczenia zaś nie znamy ani wartości dokładnych, ani przybliżonych. Natomiast sposób poniżej podany jest elastyczny w tem znaczeniu, że bardzo prędko prowadzi do wartości przybliżonych, a potem, zależnie od nakładu pracy, pozwala dokładność dowolnie zwiększać. Zależnie od żądanej dokładności można prędzej lub później pracę szukania niewiadomych przerwać, otrzymując w każdym razie pewien produkt, który może nam wystarczyć. Niezawsze bowiem warto silić się na wielką dokładność. W żelbecie np. iluzją byłoby mniemanie, że wyznaczając z dokładnością stuprocentową momenty podporowe poznamy naprężenia rzeczywiste. Przecież błąd przyjęcia stosunku $n = E_s : E_b$ może wynosić kilkadziesiąt procent! Sposób poniżej podany jest ekonomiczny jeżeli belka ma dużo podpór. Nakład pracy jest tu wprost proporcjonalny do ilości przęseł, czyli do ilości niewiadomych hiperstatycznych. Tymczasem przy wszystkich innych sposobach nakład pracy, potrzebny do wyznaczenia niewiadomych hiperstatycznych rośnie nieporównanie prędzej od ich liczby. Wprawdzie przepisy budowlane pozwalają liczyć belkę ciągłą wieloprzęsłową, jako trzyprzęsłową, to jednak uwzględnienie wszystkich przęseł belki, więcej niż trzyprzęsłowej, prowadzi do oszczędności w materiale. Ze względów naukowo dydaktycznych sposób poniższy może mieć swoją wartość, jako sposób poglądowy, wyrabiający czucie inżynierskie. Wreszcie może on być pożądany przez to, że zastępuje żmudne rachowanie, zajmującą zabawką.

Weźmy pod uwagę dwa sąsiednie przęsła belki ciągłej, przedzielone podporą m -tą (rys. 1). Rozpiętość lewego przęsła niech będzie l , prawego zaś p . Odpowiednio do tego znakowania I_l i I_p będą to momenty bezwładności przekrojów lewego i prawego przęsła. Wskutek

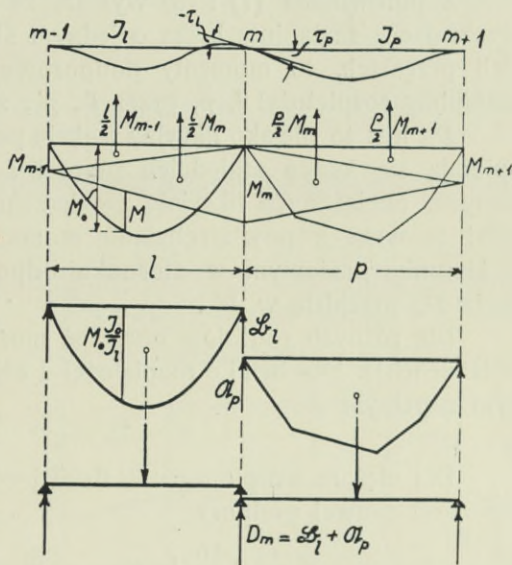
¹⁾ Por. Brzozowski: „Belka obustronnie sprężyste utwierdzona o dowolnej sztywności „ n “ i jej zastosowanie do obliczania ram i belek ciągłych“, Czasopismo Techn. 1923; Bartoszewicz: „Nowy sposób wykreślny rozwiązywania ustrojów statycznie niewyznaczalnych“, Czas. Techn. 1929.

²⁾ Por. Kluz: „Ustroje hiperstatyczne o elementach prostych“, Czasopismo Techn. 1927.

obciążenia belka się ugnie. Styczna linii ugięcia (ugiętej) nad podporą m niech tworzy z linią $(m-1)$ m kąt τ_l , zaś z linią m $(m+1)$ kąt τ_p (dodatni, jeżeli odpowiada odchyleniu ugiętej ku dołowi). Ponieważ styczna ta jest wspólna obu przęsłom, przeto

$$\tau_l + \tau_p = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Jeżeli zaniedbamy wpływ sił poprzecznych na odkształcenia, to kąt τ , równa się oddziaływaniu podpory m w belce wolno podpartej $(m-1)$ m obciążonej skurczoną powierzchnią momentów M , t. j. taką, której rzędne podzielono przez sztywność przekroju $E I_l$ (zasada Mohra). Przez M rozumiemy moment w danym przekroju przęsła l belki ciągłej, zaś przez M_0 moment w tymże przekroju belki l , jako wolno podpartej pod danym obciążeniem. Nazwijmy \mathfrak{B}_l oddziaływanie fikcyjne podpory m w belce lewej jako wolno podpartej, obciążonej powierzchnią momentów M_0 zaś \mathfrak{A}_p , także oddziaływanie podpory m w belce prawej, to zasada Mohra wyrazi się równaniami:



Rys. 1.

$$\left. \begin{aligned} EI_l \tau_l &= M_{m-1} \frac{l}{2} \frac{1}{3} + M_m \frac{l}{2} \frac{2}{3} + \mathfrak{B}_l \\ EI_p \tau_p &= M_{m+1} \frac{p}{2} \frac{1}{3} + M_m \frac{p}{2} \frac{2}{3} + \mathfrak{A}_p \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Wprowadźmy pewną wygodną okrągłą wartość momentu bezwładności I_0 i nazwijmy

$$l' = l \frac{I_0}{I_l}, \quad p' = p \frac{I_0}{I_p} \dots \dots \dots (3)$$

$$\mathfrak{B}'_l = \mathfrak{B}_l \frac{I_0}{I_l} = \mathfrak{B}_l \frac{l'}{l}, \quad \mathfrak{A}'_p = \mathfrak{A}_p \frac{p'}{p} \dots \dots \dots (4)$$

$$D_m = \mathfrak{B}_l + \mathfrak{A}_p \dots \dots \dots (5)$$

$$D'_m = \mathfrak{B}'_l + \mathfrak{A}'_p \dots \dots \dots (6)$$

to z uwagi na (1) i (2) będzie

$$l' M_{m-1} + 2(l' + p') M_m + p' M_{m+1} = -6 D'_m \quad . \quad . \quad (7)$$

Jest to znane równanie trzech momentów. Jeżeli przekrój belki jest stały we wszystkich przęsłach, to:

$$I_l = I_p = I_0$$

i z uwagi na (3), (4), (5) i (6) będzie zamiast (7)

$$l M_{m-1} + 2(l + p) M_m + p M_{m+1} = -6 D_m \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Z porównania (7) i (8) wynika, że jeżeli daną belkę o różnych przekrojach, zastąpimy belką o jednym stałym przekroju we wszystkich przęsłach, to momenty podporowe nie ulegną zmianie, o ile zastąpimy rozpiętości l , p , przez l' , p' , zaś D_m przez D'_m .

D_m jest to niejako fikcyjna reakcja podpory m , np. filara, o który opierają się końce sąsiednich przęseł l i p niby belek wolnopodpartych, obciążonych fikcyjnie powierzchniami momentów M_0 . Jeżeli belki te wraz z powierzchniami momentów M doznają kontrakcji w kierunku poziomym w stosunku odpowiednio $l:l'$ i $p:p'$, to reakcja D_m przejdzie w D'_m .

Dla różnych rodzajów obciążeń można wartości \mathfrak{B}_l i \mathfrak{A}_p znaleźć w tablicach¹⁾. Dla belki o rozpiętości l obciążonej ciężarem jednostajnym zupełnym q

$$\mathfrak{A}_l = \mathfrak{B}_l = q l^3 : 24 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dla ciężaru skupionego P , działającego w odległości a od lewej, zaś b od prawej podpory

$$\mathfrak{A}_l = P \frac{a b}{6 l} (l + b), \quad \mathfrak{B}_l = P \frac{a b}{6 l} (l + a) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Dla $a = b = l : 2$

$$\mathfrak{A}_l = \mathfrak{B}_l = P l^2 : 16 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Dla obciążenia momentem M_a na lewej podporze

$$\mathfrak{A}_l = M_a \frac{l}{3}, \quad \mathfrak{B}_l = M_a \frac{l}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11 a)$$

Dla każdej podpory prócz podpór skrajnych, wolnych, możemy równanie (1) a tem samym (7) wzgl. (8) ustawić. Jeżeli jeden z końców belki, np. lewy, jest utwierdzony, to dla pierwszej podpory możemy przyjąć $l' = 0$, zastępując utwierdzenie przez przęsło skrajne nieskończenie małe, względnie nieskończenie sztywne ($I_l = \infty$). Będziemy więc mieli tyle równań (7) wzgl. (8), ile niewiadomych momentów podporowych. Rozwiązanie analityczne układu równań o znacznej ilości niewiadomych jest bardzo żmudne. Rozwiążemy go wykreślnie przy pomocy interpretacji geometrycznej.

¹⁾ Por. np. Podręcznik Inżynierski prof. Bryły, tom II, str. 1292.

Jeżeli podpory belki prostej ciągłej, nieobciążonej, przesuniemy tak, iż linja, łącząca je, przestanie być prostą, a stanie się linją łamaną, to belka się ugnie, przyjmując kształt linji ciągłej, przechodzącej przez podpory. Wskutek tego powstaną na podporach pewne reakcje, a w samej belce powstaną momenty zgięcia. Linja momentów w obrębie każdego przęsła będzie linją prostą, ograniczającą w ogólności trapez momentów i — łamaną na podporach.

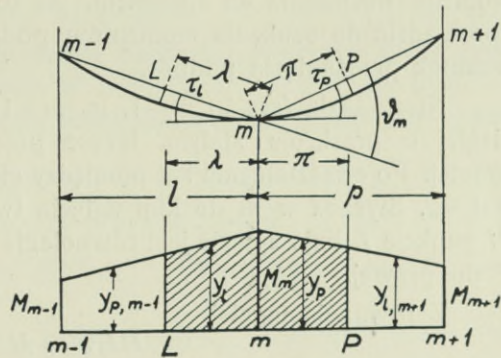
Jeżeli kąt zawarty między przedłużeniem prostej $(m-1) m$ a prostą $m (m+1)$, czyli odchylenie prawej cięciwy od kierunku lewej (por. rys. 2) wynosi ϑ_m , to

$$\tau_l + \tau_p = \vartheta_m \quad \dots \quad (12)$$

Zważywszy, że tu $\mathfrak{B}_l = \mathfrak{A}_p = 0$, otrzymamy z równania (2) i (12) a także z uwagi na (3), zamiast (7) równanie

$$l' M_{m-1} + 2(l + p') M_m + p' M_{m+1} = 6 EI_0 \vartheta_m \quad \dots \quad (13)$$

Równanie to jest identyczne z równaniem 25, str. 34 wymienionej na wstępie rozprawy Akademji. Dzięki wprowadzonemu tu znakowaniu logicznemu, ma ono kształt symetryczny i przejrzysty, podobnie jak i równania (7) i (8). Autorowie, piszący o belce ciągłej, nazywają z reguły l_m przęsło lewe, zaś l_{m+1} przęsło prawe, t. j. określają podpory liczbami bieżącymi od 0 do n , zaś przęsła liczbami bieżącymi od 1 do n , wskutek tego otrzymują dla równania trzech momentów postać zawiłą, trudną do spamiętania, w której symetryczność się zatracza. A przecież, logicznie rzecz biorąc, zarówno lewe jak i prawe przęsło mają jednakie prawo do znaczka m . Skoro zdecydowaliśmy się podporom dać znak liczby bieżącej, to każde przęsło jest już automatycznie określone znaczkami podpór, ograniczających je. Zatem dla przęsła pomiędzy podporami $r-1$ i r odpowiednie nazwy byłyby $l_{r-1, r}$ albo $(r-1) r$. Takie znakowanie jednak byłoby uciążliwe. Lepiej więc, używając liter l i p dla określenia „lewy“ i „prawy“, nazwiemy l_r lub p_{r-1} przęsło $(r-1) r$, zaś p_r lub l_{r+1} przęsło $r (r+1)$. W ten sposób unikniemy nieporozumień i uzgodnimy się ze znakowaniem powszechnie używanem w praktyce. Znakowanie wprowadzić nie jest



Rys. 2.

w nauce rzeczą istotną, to jednak niefortunny dobór symbolów może w wysokim stopniu utrudnić zrozumienie istoty rzeczy i przesłonić jasność obrazu prawdy.

Jeżeli przekrój jest stały i ten sam we wszystkich przęsłach, to $l' = l$, $p' = p$. Z równania (13) wynika zatem, że celem wyznaczenia momentów podporowych można belkę, o przekroju innym w każdym przęsle, sprowadzić do belki o przekroju stałym, zamieniając rozpiętości l i p na l' , p' . Będziemy zatem mówić już tylko o belce ciągłej o przekroju stałym.

Z porównania (7) i (13) wynika, że momenty podporowe wskutek obciążenia są takie same, jak wskutek przesunięcia podpór, którego wynikiem są załamania na podporach o kąty

$$\vartheta_m = - \frac{D_m}{EI_0} \dots \dots \dots (14)$$

Zagadnienie znalezienia momentów podporowych wskutek dowolnego obciążenia da się zatem, jak to powiedzieliśmy na wstępie, sprowadzić do szukania momentów podporowych w tej samej belce wskutek przesunięcia podpór.

Niech będą (rys. 2) $m-1$, m , $m+1$ trzy sąsiednie podpory belki ciągłej o przekroju stałym, leżące przed odkształceniem na jednej prostej. Po odkształceniu kąt pomiędzy cięciwami $(m-1)m$ i $m(m+1)$ jest ϑ_m . Styczna w m do linii ugięcia tworzy z cięciwami kąty τ_l i τ_p . W punkcie L linia ugięcia jest równoległa do cięciwy lewej. W punkcie P do prawej.

Z równania ugiętej

$$EI_0 y'' = M \dots \dots \dots (14a)$$

otrzymamy przez całkowanie w granicach od m do L

$$EI_0 \tau_l = \int_0^\lambda M dx = \lambda y_l \dots \dots \dots (15)$$

jeżeli y_l jest średnią wartością momentu zgięcia na długości Lm , czyli momentem w odległości $\frac{\lambda}{2}$ na lewo od m . Podobnie

$$EI_0 \tau_p = \pi y_p \dots \dots \dots (16)$$

Zatem linia momentów posiada w połowie długości λ rzędną

$$y_l = EI_0 \tau_l : \lambda \dots \dots \dots (17)$$

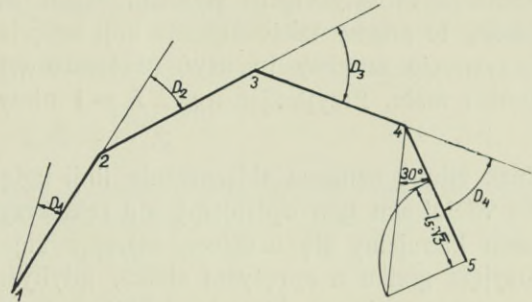
zaś w połowie długości π rzędną

$$y_p = EI_0 \tau_p : \pi \dots \dots \dots (18)$$

Można tedy linię momentów wykreślić, jeżeli dana jest linia ugięcia; wystarczy bowiem wyszukać na niej punkty L i P , czyli

wyznaczyć długości λ , π i odczytać wartości kątów τ_l i τ_p , aby następnie według (17) i (18) obliczyć wartości y_l i y_p t. j. momenty w miejscach, oddalonych od podpory o $\frac{\lambda}{2}$ względnie $\frac{\pi}{2}$. W ten sposób

w każdym przęśle mamy po dwa punkty, przez które określona jest prosta, ograniczająca trapez momentów. Oczywiście każde dwie sąsiednie proste przecinają się nad podporami, wyznaczając momenty podporowe.



Rys. 3.

Z równań (12), (15) i (16) wynika

$$\lambda y_l + \pi y_p = EI_0 \vartheta_m \dots \dots \dots (19)$$

Zatem powierzchnia momentów pomiędzy punktami L i P czyli powierzchnia obu trapezów, zakreskowanych na rys. 2 b przy węźle m , o podstawach λ i π , i średnich wysokościach odpowiednio y_l i y_p jest równa $E I_0 \vartheta_m$.

Jeżeli na skrajnej podporze, np. na pierwszej, belka jest utwierdzona, to pierwsze z równań (13) przyjmie postać:

$$2 p_1 M_1 + p_1 M_2 = 6 E I_0 \tau_{p_1}$$

zaś pierwsze z równań (7):

$$2 p_1 M_1 + p_1 M_2 = - 6 \mathfrak{M}'_{p_1}$$

zatem

$$E I_0 \tau_{p_1} = - \mathfrak{M}'_{p_1}.$$

Jeżeli zaś skrajna podpora n , jest wolna, to pole momentów w przęśle skrajnem l_n jest trójkątem. Zatem według (11 a)

$$\tau_{p\ n-1} = \frac{1}{2} \tau_{l_n}$$

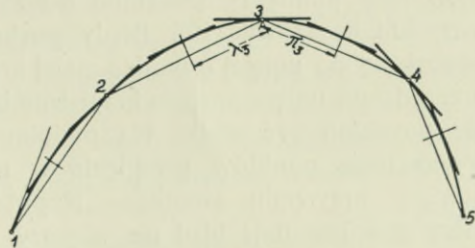
zaś odległość punktu L od wolnej podpory, jak to można udowodnić wynosi:

$$\lambda_n = l_n : \sqrt{3} \dots (20)$$

Stąd wynika łatwa konstrukcja. Na rys. 5 a $n = 5$.

Prosta poprowadzona pod kątem 30° do prostej $\overline{4-5}$ odcina na skrajnej pionowej podporowej długość

$$\overline{5-s} = \overline{4-5} : \sqrt{3} = \lambda_5.$$

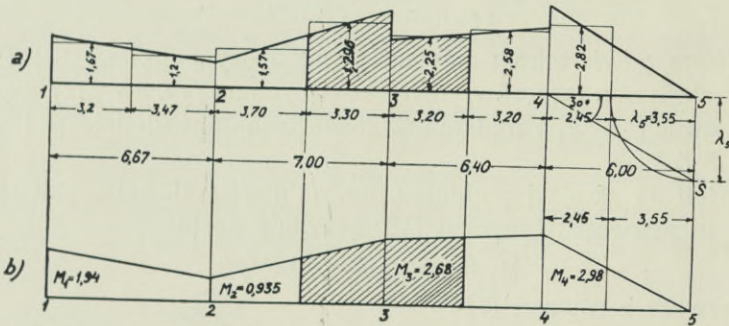


Rys. 4.

Przystępując do obliczenia momentów podporowych, znamy długości boków według (3) i kąty ϑ_m (wg. 14), możemy więc nakreślić wielobok łamany cięciw (rys. 3). Jeżeli podpory skrajne są utwierdzone, to znamy także styczne linji ugięcia na podporach skrajnych. Oczywiście musimy tu użyć przesadzonej skali dla kątów, które są bardzo małe. Przyjmując np. $EI_0 = 1$ otrzymamy według (14)

$$\vartheta_m = -D_m.$$

Znak minus oznacza skierowanie linji ugięcia wypukłością ku górze. Na wieloboku tym opisujemy od ręki krzywą ugięcia (rys. 4), przy czym kierujemy się czuciem, starając się naśladować kształt, jakiby przyjęła giętka a sprężysta stalka, gdybyśmy jej kazali przejść przez wszystkie podpory. Linja ta, jakieśmy to wyżej widzieli, posłuży nam do wyznaczenia linji momentów. Jednakże, z powodu przesadzonej skali przesunięć podpór, proste linji momentów nie przetną się nad podporami (por. rys. 5 a). Będziemy musieli linję tę poprawić (rys. 5 b)



Rys. 5 a, b.

tak, aby czyniła zadość następującym warunkom: żeby 1) proste linje momentów przecięły się na pionowych podporowych i 2) żeby powierzchnie pomiędzy punktami L i P dla każdej podpory pozostały niezmienione (równ. 19). Błędy pochodzą stąd, że równanie (14 a) odnosi się do ugiętej o bardzo małej krzywiznie, gdy tymczasem nasza przesadzona ugięta posiada krzywiznę bardzo znaczną. Błąd ten jednak nie powinien być wielki. Na podobnej zasadzie opiera się przecież wyznaczenie punktów przegięcia w ustrojach hiperstatycznych przy pomocy przyrządu zwanego „Nupubest“ (Nullpunkt Bestimmung), który podobno daje błąd nie większy, jak 5%.

Jako pierwsze przybliżone wartości momentów moglibyśmy przyjąć średnie z dwóch, jakie otrzymujemy z wykresu. Zwykle różnią się one mało od wartości dokładnych i można na nich poprzestać, jak się o tem przekonamy na poniższym przykładzie.

Znając momenty podporowe, możemy obliczyć reakcje tudzież siły poprzeczne i momenty w dowolnym przekroju belki, każde bowiem przeszło $AB = l$ belki ciągłej możemy uważać za belkę wolno podpartą, na której końce działają momenty podporowe M_a i M_b . W dowolnym przekroju tego przeszła siła poprzeczna wynosi

$$T = T_0 + \frac{M_b - M_a}{l},$$

jeżeli T_0 jest siłą poprzeczną w belce l jako wolno podpartej. Jeśli n -ta podpora jest wolna, to jej reakcja

$$R_n = R'_n + (M_{n-1} : l_n)$$

Jeśli pierwsza podpora jest utwierdzoną, to

$$R_1 = R'_1 + (M_2 - M_1) : p_1$$

R'_1 i R'_n są to reakcje odpowiednie belek p_1 i l_n jako wolno podpartych. Dla podpory środkowej m jest

$$R_m = R'_m + \frac{L_m}{l_m} - \frac{L_{m+1}}{l_{m+1}} \cdot \dots \cdot \dots \quad (21)$$

przyczem

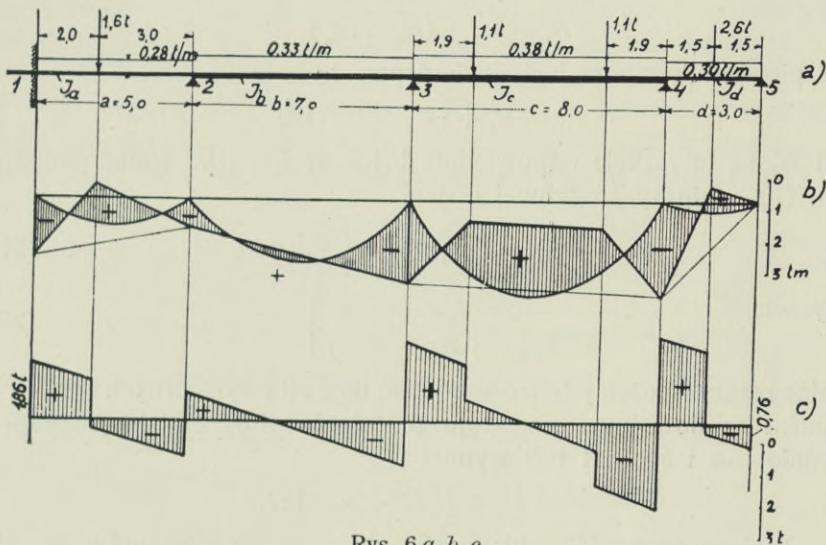
$$\left. \begin{aligned} L_m &= M_{m-1} - M_m \\ L_{m+1} &= M_m - M_{m+1} \end{aligned} \right\} \cdot \dots \cdot \dots \quad (22)$$

Znając reakcje możemy łatwo wykreślić linje sił poprzecznych (rys. 6 e). Moment w dowolnym przekroju przeszła $l = AB$, oddalonym odpowiednio o a i b od A i B wynosi

$$M = M_0 + (b M_a + a M_b) : l.$$

Wykres momentów składa się więc z figury momentów M_0 dla belki wolnopodpartej i z trapezu momentów podporowych, który należy odjąć od pierwszej. Czynimy to zwykle w ten sposób, że odcinamy na pionowych podporowych wartości momentów podporowych z tej samej strony osi poziomej, z której kreślimy figurę momentów M_0 (zwykle od dołu). Łącząc końce odcinków podporowych prostymi, otrzymujemy nasz wykres, przyczem pola, zawarte poniżej trapezu, dają momenty dodatnie, zaś pola ograniczone figurą M_0 i trapezami w pobliżu pionowych podporowych, wyznaczają nam momenty ujemne. Jeżeli obciążenie belki ciągłej składa się z ciężarów skupionych i ciężarów, rozłożonych w sposób ciągły na belce, to wykres figury M_0 jest trudny. Otrzymujemy go zwykle dodając wykres, odpowiadający siłom skupionym, do wykresu, odpowiadającego ciężarom rozłożonym w sposób ciągły. Ten ostatni jest linią krzywą. Pierwszy zaś jest linią łamaną. (Dla obciążenia zupełnego, jednostajnego otrzymujemy parabolę, dla jednej siły skupionej — trójkąt). Suma obu wykresów daje nam wykres, który będzie ciągiem łamanym linii krzywych. Aby

uniknąć mozolnego kreślenia go, postąpimy inaczej. Od pewnej poziomej podstawy wychodząc, wykreślamy parabole (wogóle krzywe, odpowiadające obciążeniu ciągłemu) wypukłością ku dołowi (rys. 6 b). Następnie kreślimy trapezy momentów ujemnych (wywołanych momentami podporowemi). Na nich, jako na podstawach (zamykających) kreślimy ku górze wieloboki sznurowe, odpowiadające ciężarom skupionym. Pole, zawarte pomiędzy nimi a parabolami, jest szukanym wykresem momentów. Po stronie wklęsłej parabol są momenty dodatnie, po stronie wypukłej zaś — ujemne.



Rys. 6 a, b, c.

Przykład:

Belka ciągła, czteroprzęsłowa (rys. 6 a) o przęsłach $a = 5 m$, $b = 7 m$, $c = 8 m$, $d = 3 m$, utwierdzona na 1-szej podporze. Momenty bezwładności zmieniają się według równania:

$$I_a : I_b : I_c : I_d = 3 : 4 : 5 : 2.$$

Obciążenie ciągłe, jednostajne, zupełne poszczególnych przęseł wynosi

$$q_a = 0,28 \quad q_b = 0,33 \quad q_c = 0,38 \quad q_d = 0,30 t/m.$$

Oddziaływania fikcyjne według wzoru (9) $ql^3 : 24$ dla poszczególnych przęseł wynoszą (w t/m^2)

$$1,459, \quad 4,7, \quad 8,1, \quad 0,338 t/m^2.$$

Oddziaływanie fikcyjne z powodu ciężarów skupionych

$$\text{Według (10)} \quad \mathfrak{A}_1 = 1,6 \frac{2,0 \cdot 3,0}{6 \cdot 5,0} (5,0 + 3,0) = 2,56 tm^2$$

$$\mathfrak{B}_2 = 1,6 \frac{2,0 \cdot 3,0}{6 \cdot 5,0} (5,0 + 2,0) = 2,24 \text{ tm}^2$$

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}_4 = \frac{1}{2} \cdot 1,1 \cdot 1,9 (8,0 - 1,9) = 6,37 \text{ „}$$

$$\text{Według (11)} \quad \mathfrak{A}_4 = 2,6 \cdot 3,0^2 : 16 = 1,46 \text{ „}$$

Całkowite oddziaływania fikcyjne będą

$$\mathfrak{A}_1 = 1,46 + 2,56 = 4,02 \text{ tm}^2$$

$$\mathfrak{B}_2 = 1,46 + 2,24 = 3,70 \text{ „}$$

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_3 = 4,70 \text{ „}$$

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}_4 = 8,1 + 6,37 = 14,47 \text{ „}$$

$$\mathfrak{A}_4 = 0,34 + 1,46 = 1,80 \text{ „}$$

Przyjmując $b = b'$, czyli $I_b = I_0$, otrzymamy rozpiętości sprowadzone wg. (3):

$$a' = \frac{4}{3} \cdot 5,0 = 6,67 \text{ m} \quad b' = \frac{4}{4} \cdot 7,0 = 7,0 \text{ m}$$

$$c' = \frac{4}{5} \cdot 8,0 = 6,40 \text{ „} \quad d' = \frac{4}{2} \cdot 3,0 = 6,0 \text{ „}$$

$$\text{Według (4)} \quad \mathfrak{A}'_1 = 4,02 \cdot \frac{4}{3} = 5,36 \text{ tm}^2$$

$$\mathfrak{B}'_2 = 3,70 \cdot \frac{4}{3} = 4,94 \text{ „}$$

$$\mathfrak{A}'_2 = \mathfrak{B}'_3 = 4,70 \cdot \frac{4}{4} = 4,70 \text{ „}$$

$$\mathfrak{A}'_3 = \mathfrak{B}'_4 = 14,47 \cdot \frac{4}{5} = 11,57 \text{ „}$$

$$\mathfrak{A}'_4 = 1,80 \cdot \frac{4}{2} = 3,60 \text{ „}$$

$$\text{Według (6)} \quad D'_1 = \mathfrak{A}'_1 = 5,36 \text{ tm}^2$$

$$D'_2 = 4,94 + 4,70 = 9,64 \text{ „}$$

$$D'_3 = 4,70 + 11,57 = 16,27 \text{ „}$$

$$D'_4 = 11,57 + 3,60 = 15,17 \text{ „}$$

I. Rozwiązanie przy pomocy równań 3 momentów.
Spółczynniki równań (7) zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1.

m	l'	$2(l' + p')$	p'	$6D'_m$
1	0	13,34	6,67	32,16
2	6,67	27,34	7,0	57,84
3	7,0	26,8	6,4	97,62
4	6,4	24,8		91,02

Równania trzech momentów brzmią:

$$13,34 M_1 + 6,67 M_2 \dots \dots \dots = -32,16$$

$$6,67 M_1 + 27,34 M_2 + 7,0 M_3 \dots \dots = -57,84$$

$$7,00 M_2 + 26,8 M_3 + 6,4 M_4 = -97,62$$

$$6,4 M_3 + 24,8 M_4 = -91,02.$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez (6,67 : 13,34) i odejmując od drugiego rugujemy M_1 , mnożąc zaś ostatnie przez (6,4 : 24,8) i odejmując od przedostatniego rugujemy M_4 . W ten sposób otrzymujemy układ 2 równań.

$$24,00 M_2 + 7,00 M_3 = -41,76$$

$$7,00 M_2 + 25,15 M_3 = -74,04.$$

Teraz już łatwo znajdziemy:

$$M_3 = -2,68, \quad M_2 = -0,935, \quad M_1 = -1,94 \quad M_4 = -2,98 \text{ tm}.$$

II. Rozwiązanie wykreślne.

Przyjmując dla kątów (równ. 14)

$$E I_0 \vartheta_m = -D_m$$

skalę $1 \text{ tm}^2 = 3^\circ$, t. j. odmierzając w stopniach kątowych zamiast ϑ_m wartość $3 D_m$, wykreślamy zwyczajnym kątomierzem i linijką wielobok łamany rys. 3 z oznaczeniem stycznej podporowej 1. Na nim opisujemy od ręki krzywą (rys. 4). Z niej odczytujemy dla każdej podpory długość λ i π i kąty τ_l i τ_p , zestawione w tabeli 2.

Tabela 2.

1	2	3	4	5	6
m	λ	$E I_0 \tau_l$	$y_l \text{ tm}$	M_{sr}	M
	π	$E I_0 \tau_p$	y_p		
1	3,2	16,1 ⁰	1,675	1,9	1,94
2	3,47	12,5 ⁰	1,2	1,0	0,935
	3,70	17,5 ⁰	1,575		
3	3,3	26,7 ⁰	2,696	2,6	2,68
	3,2	21,6 ⁰	2,25		
4	3,2	24,8 ⁰	2,58	3,1	2,98
	2,45	21,2 ⁰	2,82		
5	3,55				

Wg. (17) i (18) obliczamy y_l i y_p (kolumna 4) np. dla węzła 3.

$$y_l = \frac{1}{3} 26^{\circ} 7 : 3,3 m = 2,696 tm, \quad y_p = \frac{1}{3} 21^{\circ} 6 : 3,2 m = 2,25 tm.$$

Na podstawie tych wartości, wykreślono rys. 5a. Z niego czytamy średnie wartości momentów podporowych. M_{sr} (kolumna 5). Rys. 5a daje linię momentów przerywaną, gdyż proste nie przecinają się nad podporami. Trzeba ją przeto poprawić. Rys. 5b daje już rozwiązanie dokładne (kolumna 6). Z porównania obu kolumn ostatnich widać, że błąd wartości średnich z kolumny 5 jest bardzo mały. Zatem często można na nich poprzestać.

Dla wykreślenia linii sił poprzecznych (rys. 6c) obliczamy reakcje $R_m = R'_m + R''_m$ według równ. (21).

Dla belek wolno podpartych jest

$$A_4 = B_5 = \frac{1}{2} (2,6 + 3,0 \cdot 0,30) = 3,5 : 2 = 1,75 t = R'_5$$

$$A_3 = B_4 = 1,1 + (8,0 \cdot 0,38 : 2) = 1,1 + 1,52 = 2,62 t$$

$$A_2 = B_3 = 7,0 \cdot 0,33 : 2 = 1,15 t$$

$$B_2 = 5,0 \cdot 0,28 : 2 + 1,6 \cdot 2 : 5 = 0,7 + 0,64 = 1,34 t$$

$$A_1 = 0,7 + 1,6 \cdot 3 : 5 = 0,7 + 0,96 = 1,66 t = R'_1$$

Stąd obliczymy

$$R'_4 = A_4 + B_4 = 1,75 + 2,62 = 4,37 t$$

$$R'_3 = 2,62 + 1,15 = 3,77 t$$

$$R'_2 = 1,15 + 1,34 = 2,49 t.$$

Reakcje

$$R''_m = \frac{L_m}{l_m} - \frac{L_{m+1}}{l_{m+1}}$$

zarówno jak i $R_m = R'_m + R''_m$ obliczono tabelarycznie, por. tabela 3.

Tabela 3.

m	$-M_m$	M_{m-1}	L_m	l_m	$\frac{L_m}{l_m}$	$\frac{L_{m+1}}{l_{m+1}}$	R''_m	R'_m	R_m
1	1,94					-0,2	+0,2	1,66	1,86
2	0,94	-1,94	-1	5,0	-0,2	+0,25	-0,45	2,49	2,04
3	2,68	-0,94	+1,74	7,0	+0,25	+0,038	+0,212	3,77	3,98
4	2,98	-2,68	+0,30	8,0	+0,038	-0,993	+1,031	4,37	5,40
5	0	-2,98	-2,98	3,0	-0,993		-0,993	1,75	0,76

Dla wykreślenia linii momentów (rys. 6 *b*) obliczamy największe rzędne parabol

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} q_a a^2 &= 0,28 \cdot 5^2 : 8 = 0,875 \text{ tm} \\ &0,33 \cdot 7^2 : 8 = 2,020 \text{ „} \\ &0,38 \cdot 8^2 : 8 = 3,040 \text{ „} \\ &0,30 \cdot 3^2 : 8 = 0,338 \text{ „} \end{aligned}$$

tudzież rzędne wieloboków sznurowych:

$$\begin{aligned} \text{pod ciężarem } 1,6 \text{ t} \quad M_{1,6} &= 1,6 \cdot 2,3 : 5 = 1,92 \text{ tm} \\ \text{„} \quad \text{„} \quad 1,1 \text{ t} \quad M_{1,1} &= 1,1 \cdot 1,9 = 2,09 \text{ „} \\ \text{„} \quad \text{„} \quad 2,6 \text{ t} \quad M_{2,6} &= 2,6 \cdot 3 : 4 = 1,95 \text{ „} \end{aligned}$$

Wykreśliwszy parabole (rys. 6 *b*), odcinamy na pionowych podporowych momenty podporowe. Końce odcinków łączymy prostymi. Od tych prostych w górę odcinamy na kierunkach działania sił skupionych, znalezione powyżej, odpowiednie rzędne wieloboków sznurowych. Pole, zawarte pomiędzy temi wielobokami a parabolami (na rys. 6 *b* zakreskowane), jest wykresem momentów.

INŻ. AURELJUSZ CHRÓSCIELEWSKI

Jedenaście przęseł mostowych dla Jugosławji.

W roku 1928 w firmie K. Rudzki i Ska wykonano dla Jugosławji według własnego projektu jedenaście stalowych przęseł mostów kolejowych, montując je na miejscu we własnym zarządzie. Zatwierdzenie projektów należało oczywiście do jugosłowiańskich władz kolejowych. Przęsła stalowe co do rozpiętości dzielą się na małe i średnie, z tego jedno o największej rozpiętości 68,30 m.

Oryginalność w stosunku do naszych mostów polegała na innych przepisach technicznych, oraz na nadzwyczajnej różnorodności warunków terenowych, które w naszych stosunkach rzadko się tak razem kojarzą. Drugą partję mostów wykonywała dla Jugosławji jednocześnie druga polska wytwórnia. Poniżej będę mówił tylko o jedenastu przęsłach, wykonywanych przez naszą wytwórnię.

Mosty o których mowa, leżą na różnych kilometrach trzech szlaków jugosłowiańskiej sieci kolejowej, mianowicie na szlakach Split-Knin, Perković-Sibenik i Sombor-Bogojevo.

W tabeli 1 pomieszczono wszystkie dane, otrzymane przez nas do projektowania przęseł. Z tabeli tej przekonywamy się o różnorodności warunków terenowych: są mosty w prostej i w łuku, w poziomie i na pochyłości, prostokątne w planie i ukośne, małe i duże, na szlaku i w pobliżu stacyj. Ciężary podane w tabeli 1 były przysłane tylko jako orientacyjne i przeważnie są większe od otrzymanych przez nas po zestawieniu szczegółowego obliczenia ciężaru na zasadzie rysunku. Ciężary te podaję w tej samej rubryce tabeli 1 w nawiasach.

W następującym referacie opisuję wykonanie projektów mostów jugosłowiańskich oraz same mosty, przeprowadzając od czasu do czasu porównanie pomiędzy warunkami jugosłowiańskimi a polskimi albo innymi.

Tabela 1.

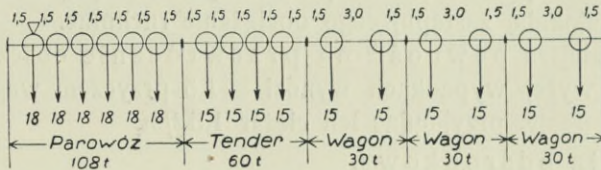
Nr.	Nazwa szlaku	Kilometr	Kąt pomiędzy osi ² przęsa toru pod wiad.	Nachylenie toru $\frac{0}{100}$	Promień toru		Swiatło		Rozpiętość	Wysokość ustrojowa	Położenie jezdnia	Koszt ¹ pomiędzy dzwigarami	System dzwigarów	Przybliżony ciężar przęsa z łożyskami	Z chodnikami mi czy bez	U w a gi
					m	m	m	m								
1		$6\frac{5}{6}$	90°	0	∞	∞	38,06	39,70	$1,00^{(1)}$ $1,21^{(2)}$	Jezdnia dołem	4,80	Kratownica trapezowa	112000 (104678)	bez	¹⁾ Na łożysku stałym. ²⁾ Na łożysku ruchomem.	
2		$14\frac{3}{4}$	"	11,11	$R=300$	∞	6,00	6,50	0,60	"	2,60	Błachownica	6800 (7821)	z chodnikami	Most znajduje się na przystanku Ka-tel-Likać, musi więc mieć 5 m szerok. Wsporniki potrzebne.	
3		$78\frac{6}{7}$	"	0	∞	∞	38,10	39,70	$1,00^{(1)}$ $1,21^{(2)}$	"	4,80	Kratownica trapezowa	112000 (104678)	bez		
4		$82\frac{7}{8}$	"	2,0	∞	∞	4,50	5,00	0,40	"	1,52	Błachow. bliźniacza	4800 (4671)	bez	Most znajduje się w bezpośredniej bliskości stacji Sivekić więc musi mieć szerokości 5 m.	
5		$84\frac{5}{6}$	75°	17	$R=400$	∞	20,67	21,70	0,75	"	4,80	Kratownica trapezowa	40800 (47483)	bez	Most znajduje się na początku tuku $R=400 m$.	
6		$100\frac{1}{2}$	$67^{\circ}54'$	15	$R=500$	∞	2,26	2,75	$0,24$ $0,294$	"	1,52	Błachow. bliźniacza	4000 (2609)	bez		
7		$101\frac{1}{2}$	90°	0	∞	∞	64,85	68,30	1,47	"	4,80	Kratownica półparabol.	263000 (266391)	bez		
8		$102\frac{1}{2}$	"	0	∞	∞	23,20	25,10	1,02	"	4,80	Kratownica trapezowa	40800 (52656)	bez	Most znajduje się pomiędzy sygnalem wejściowym a stacją Kuhn.	
9	Perkovič	$9^{\circ}/_1$	"	10	∞	∞	38,00	39,70	$1,00^{(1)}$ $1,21^{(2)}$	"	4,80	Kratownica trapezowa	112000 (105327)	bez		
10	Sibenik	$13\frac{2}{3}$	"	0	∞	∞	7,60	8,30	0,65	"	2,70	Błachownica	10000 (9130)	z chodnikami		
11	Zombor	283,985	"	0	∞	∞	37,50	38,70	$1,435^{(1)}$ $1,495^{(2)}$	"	4,90	Kratownica trapezowa	117000 (100547)	bez		

§ I. Wyjątki z przepisów technicznych kolei jugosłowiańskich.

A) Obciążenie.

1. Obciążenie ruchome dla mostów normalnotorowych (1435 mm).

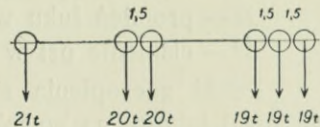
Przedstawiony na rys. 1 pociąg ustawia się najniekorzystniej dla danego przęsła, t. j. albo jeden albo dwa parowozy z tendrami skierowane kominami do siebie lub w jedną stronę. Wagony ustawia się z obu stron pociągu¹⁾.



Rys. 1.

Mosty o małych rozpiętościach oraz podłużnice i poprzecznice, na których nie pomieści się więcej niż cztery osie parowozu, sprawdza się jeszcze na dodatkowe obciążenie:

2. Parcie wiatru na przęsło obciążone pociągiem wynosi 150 kg/m^2 , a na przęsło nie obciążone pociągiem 250 kg/m^2 .



Rys. 2.

W wypadku przęsła nie obciążonego przyjmować należy następujące płaszczyzny oporu:

a) płaszczyznę netto pierwszego dźwigara, określoną podług następującego wzoru: $F_n = F_{br} - F_0$, gdzie F_{br} — płaszczyzna dźwigara brutto po obwodni, F_0 — płaszczyzna otworów pomiędzy przęsłami;

b) płaszczyznę jezdni nie zakrytą dźwigarem pierwszym;

c) płaszczyznę drugiego dźwigara nie zakrytą jezdnią i stanowiącą część powierzchni dźwigara pierwszego, pomnożoną przez spódczynnik η^2 , zależny od stosunku $\frac{F_0}{F_{br}}$, mianowicie:

¹⁾ Pg. przepisów polskich, wagony ustawia się z jednej strony parowozów. Pg. przepisów niemieckich (25/II 1925) wagony ustawia się z jednej albo z obu stron.

Pg. przepisów łotewskich — z jednej strony.

Pg. przepisów bułgarskich — z jednej strony.

²⁾ Pg. przepisów bułgarskich działanie wiatru na drugi dźwigar przyjmuje się równe połowie działania na bezpośrednio wystawiony na wiatr dźwigar.

$$\begin{array}{l} \text{jeżeli} \quad \frac{F'_0}{F'_{br}} = 0,4; \quad 0,6; \quad 0,8 \\ \text{to} \quad \eta = 0,2; \quad 0,4; \quad 1,0. \end{array}$$

Dla wielkości pośrednich cyfry te należy interpolować.

W wypadku przęśła obciążonego, jako płaszczyznę pociągu należy przyjąć prostokąt o wysokości $3 m^1$) umieszczony na odległości pionowej $0,5 m$ od główki szyny.

W tym wypadku punkty *a*) i *b*) pozostają bez zmiany. W punkcie *c*) należy wziąć płaszczyznę drugiego dźwigara, pozostałą od zakrycia jezdnią oraz prostokątem, zastępującym obciążenie ruchome.

Dochodzi jeszcze punkt *d*) w którym należy pomieścić płaszczyznę prostokąta, zastępującego obciążenie ruchome.

Najmniejsza pewność na przewrócenie obliczona w obu opisanych wyżej wypadkach wynosi $\cong 1,5$ przyczem wagony należy uważać za puste, przyjmując ich ciężar $1,5 t/m$.

3. Siła odśrodkowa.

Dla mostów leżących w łukach, wielkość siły odśrodkowej określamy według następującego wzoru

$$C = \frac{P \cdot V^2}{127 \cdot R}$$

gdzie V — szybkość pociągu w $km/godz$;

R — promień łuku w m ;

P — ciśnienie osi w t .

Punkt zaczepienia siły odśrodkowej przyjmuje się w środku ciężkości taboru, na wysokości $2 m$ nad górną krawędzią szyny.

Przy obliczeniu siły odśrodkowej należy przyjąć szybkość podług następującego wzoru

$$V \text{ km/godz} = 4,0 \sqrt{R} - \frac{R}{40}$$

Na mostach o spadku 15‰ i większym jak również i na stacjach nie powinno się przyjmować szybkości większej niż $60 km/godz$.

4. Wpływ uderzeń bocznych oraz bocznych ciśnień taboru rozpatrujemy czy to na prostej czy na łuku jako siłę poziomą równą $6 t$, skierowaną prostopadłe do osi toru i zaczepioną na wysokości górnej krawędzi szyny w miejscu dla podłużnicy najniekorzystniejszym.

5. Siłę hamowania, równą $\frac{1}{7}$ wszystkich znajdujących się na przęśle ciśnień osi²⁾, należy uwzględnić przy przęśtach o otworze

¹⁾ Wysokość prostokąta, zastępującego płaszczyznę pociągu, wg przepisów technicznych polskich, niemieckich oraz łotewskich wynosi nad główką szyny $3,5 m$. Pg. przepisów bułgarskich wynosi ona $3 m$ nad główką szyny.

²⁾ Siłę tarcia kół o szyny przy hamowaniu, warunki niemieckie, łotewskie i bułgarskie określają również jako $\frac{1}{7}$ ciśnień osi, warunki zaś polskie — jako $\frac{1}{10}$.

większym niż 40 m. Przy otworze mniejszym niż 40 m uwzględnia się ją przy spadku większym niż 5‰ lub w mostach leżących w pobliżu stacji, gdzie pociągi są hamowane.

6. Chodniki, przeznaczone tylko dla służby kolejowej, oblicza się na 340 kg/m², przyczem obciążenia tego nie przyjmuje się do obliczenia dźwigarów lecz tylko belek i wsporników chodnikowych.

7. Wahania temperatury przyjmuje się w granicach od -20°C do +60°C¹⁾.

B) Natężenia dopuszczalne.

1. Natężenia dopuszczalne dla dźwigarów z żelaza zlewneego zgodne są z takimiż wielkościami podług warunków pruskich z 1903 r., mają tylko dodaną dokładną wykładnię kiedy należy stosować natężenia mniejsze, a kiedy większe. Pomieszczono je w tabeli 2.

Tabela 2.

Rozpiętość	* 10 lub mniej	20	40	80	120	160	200	m
α) Przy uwzględnieniu obciążenia stałego, ruchomego, siły odśrodkowej oraz zmian temperatury . . .	800	850	900	950	1000	1050	1100	$\sigma_{dop.}$ kg/cm ²
β) Przy uwzględnieniu oprócz powyższych jeszcze parcia wiatru, siły hamowania, uderzeń bocznych oraz tarcia w łożyskach . . .	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250	$\sigma_{dop.}$ kg/cm ²

Pręty rozciągane oblicza się podług wzoru

$$\sigma_{otr.} = \frac{S}{F_n} \leq \sigma_{dop.} \quad (I)$$

Pręty wybaczone oblicza się podług wzoru

$$\sigma_{otr.} = \frac{S}{F_{br}} \leq \frac{1}{\omega} \sigma_{dop.} \quad (II)$$

gdzie S — napięcie w kg

F_{br} i F_n — powierzchnia przekroju brutto lub netto

ω — współczynnik wyobczenia, zależny od wysmukłości pręta, pomieszczony jest w tabeli 3.

¹⁾ Pg. przepisów niemieckich i polskich wahania temperatury przyjmuje się od -25°C do +45°C. Największa różnica nagrzania dwóch różnych części prześła może wynosić 15°C. Średnia temperatura +10°C.

Pg. warunków bułgarskich różnice temperatur wynoszą -25°C, +55°C. Temperatura średnia +15°C.

Tabela 3.

λ	ω	λ	ω	λ	ω	λ	ω	λ	ω
0	1,000	66	1,300	100	2,12	118	2,96	136	3,93
10	1,005	68	1,324	101	2,17	119	3,01	137	3,99
15	1,012	70	1,350	102	2,21	120	3,06	138	4,04
20	1,022	72	1,378	103	2,25	121	3,11	139	4,10
25	1,034	74	1,408	104	2,30	122	3,16	140	4,16
30	1,050	76	1,440	105	2,34	123	3,21	141	4,22
35	1,069	78	1,475	106	2,39	124	3,27	142	4,28
40	1,093	80	1,512	107	2,43	125	3,32	143	4,34
45	1,120	82	1,552	108	2,46	126	3,37	144	4,40
50	1,152	84	1,568	109	2,52	127	3,43	145	4,46
52	1,167	86	1,643	110	2,57	128	3,48	146	4,53
54	1,182	88	1,694	111	2,62	129	3,53	147	4,59
56	1,199	90	1,750	112	2,66	130	3,59	148	4,65
58	1,217	92	1,811	113	2,71	131	3,64	149	4,71
60	1,235	94	1,878	114	2,76	132	3,70	150	4,78
62	1,255	96	1,952	115	2,81	133	3,76	151	4,84
64	1,277	98	2,033	116	2,86	134	3,81	152	4,91
		100	2,124	117	2,91	135	3,87	153	4,97

Pręty wybaczone - rozciągane sprawdzamy na rozciąganie podług wzoru (I) z tem, że natężenie dopuszczalne zmniejsza się według następującego wzoru

$$\sigma_{\text{dop.}} = \sigma_{\text{dop. na rozciąg.}} \cdot \left(1 - \frac{1 S_{\text{min}}}{3 S_{\text{max}}}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\text{III})$$

oraz na wybaczenie podług wzoru (II) i tabeli 3.

2. Natężenie dopuszczalne dla podłużnic i poprzecznic, jeżeli jezdnia pokryta jest żwirówką, jest to samo, co i dla dźwigarów do 10 m rozpiętości, czyli $\sigma_{\text{dop.}} = 800 \text{ kg/cm}^2$.

Jeżeli szyny leżą na podłużnicach za pośrednictwem mostownic drewnianych — $\sigma_{\text{dop.}} = 750 \text{ kg/cm}^2$.

Jeżeli zaś szyny na podłużnicach leżą bezpośrednio lub za pośrednictwem podkładek, to $\sigma_{\text{dop.}} = 700 \text{ kg/cm}^2$.

3. Natężenie dopuszczalne dla tężników wiatrowych to samo co dla dźwigarów w tabeli 2 pod β .

Dla tężników nie stosuje się profilów mniejszych niż $70 \times 70 \times 3^1$.

4. Natężenie dopuszczalne dla nitów, służących do połączenia części dźwigarów lub tężników, na ścinanie wynosi $0,8 \alpha$ lub $0,8 \beta$, a na zgniot ścianek równa się trzykrotnemu natężeniu dopuszczalnemu na ścinanie.

¹⁾ Pg. warunków bułgarskich należy w tych wypadkach unikać zastosowania kątowników mniejszych niż $80 \times 80 \times 10$.

Najmniejsza ilość nitów, służących do umocowania pręta, stanowi trzy.

Natężenie dopuszczalne dla nitów, służących do przymocowania podłużnic do poprzecznic i poprzecznic do dźwigarów, należy przyjmować na ścinanie — 600 kg/cm^2 , a na zgmiot ścianek — 1800 kg/cm^2 .

C) Skrajnia.

Skrajnia dla torów normalnotorowych odpowiada w zupełności niemieckiej.

§ III. Obliczenia statyczne.

Obliczenia statyczne, aczkolwiek zasadniczo bardzo proste, wykonywane były z uwzględnieniem wszystkich rodzajów obciążeń, jakie ze względu na warunki terenowe dla danego obiektu były przepisane warunkami technicznymi.

Wszystkie one miały zastosowanie przy obliczaniu przęsła o rozpiętości $l = 21,7 \text{ m}$ w $km \ 84^5/8$ szlaku Split-Knin, gdyż most ten wypadł jednocześnie na znacznym pochyleniu, w łuku w ukosie, o dźwigarach kratowych otwartych górą.

Chcąc dać obraz najbardziej charakterystyczny w dalszym ciągu przy opisie obliczeń statycznych, właśnie ten most brać będziemy pod uwagę.

Podłużnice. Podłużnica zewnętrzna ze względu na łuk, jest wyższa od wewnętrznej o wielkość przechyłki. Pasy górne obu podłużnic wykonano silniejsze niż dolne.

W płaszczyźnie pionowej obliczono podłużnice na sumę momentów od obciążenia stałego (M_p), od obciążenia ruchomego (M_k), od wiatru pionowego (M_w) i od siły odśrodkowej (M_c), t. j. na moment

$$M = M_p + M_k + M_w + M_c.$$

Moment od obciążenia ruchomego ulegnie pewnej modyfikacji:

W moście, na którym tor ułożono w łuku o promieniu R zastosowano również przechyłkę, określoną podług wzoru

$$u = \frac{V^2}{2R},$$

gdzie V — największa szybkość pociągu w $km/godz$

R — promień łuku w m .

Wskutek przesunięcia toru ku podłużnicy zewnętrznej, oś toru przesunęła się w prawo (patrz rys. 3) od osi przęsła na V_a , ale zato

1) Bleich: Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken — str. 382.

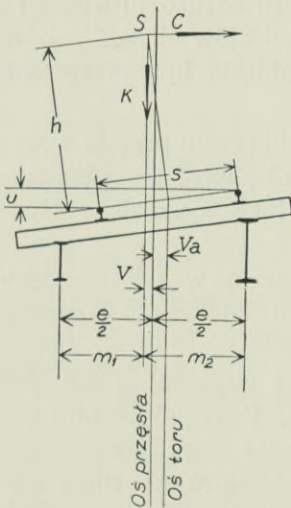
wskutek przechyłki u środek ciężkości S przesunął się na lewo i ostatecznie przesunięcie środka ciężkości na lewo od osi przęsła będzie

$$v = u \cdot \frac{h}{s} - V_a$$

tak, że odległość, na której działa obciążenie ruchome K , nie jest dla obu podłużnic jednakowa i równa $\frac{e}{2}$, lecz będzie

$$m_1 = \frac{e}{2} - V \quad \text{i} \quad m_2 = \frac{e}{2} + V.$$

Z powyższego widzimy, że moment od obciążenia ruchomego dla podłużnicy zewnętrznej należy pomnożyć przez współczynnik $\frac{m_1}{e}$ ¹⁾



Rys. 3.

i określać go dla tego pola dla którego jest on największy.

Dla podłużnicy wewnętrznej moment od obciążenia ruchomego mnożymy przez współczynnik $\frac{m_2}{e}$ i określamy go dla tego pola dla którego jest on największy.

Moment od siły odśrodkowej jest dla podłużnicy wewnętrznej ujemny, gdyż siła działa z dołu do góry i z tego powodu przy obliczeniu podłużnicy wewnętrznej siły odśrodkowej się nie uwzględnia, t. j. zakłada się, że pociąg znajduje się w spoczynku, czyli że oblicza ją się na $M = M_p + M_k + M_w$.

Pasy górne są mocniejsze od pasów dolnych, ponieważ dodatkowo są jeszcze obliczane jako pasy kratownicy poziomej,

t. j. tężników międzypodłużnicowych, na zginanie miejscowe od obciążenia wiatru poziomego oraz siły odśrodkowej, działających na długości swobodnej pasa górnego.

Tężniki międzypodłużnicowe.

Podług Bleich'a²⁾ tężniki podłużnicowe należy dawać gdy rozpiętość podłużnic przewyższa 2,5 m, a to z tego powodu, że pasy górne podłużnic o takiej długości swobodnej przeważnie byłyby w płaszczyźnie poziomej za słabe do przeniesienia sił bocznych od nacisku

¹⁾ Współczynnik ten odnosi się do momentu od ciśnienia osi. Jeżeli byłby moment od ciśnienia kół, to współczynnik byłby $\frac{m_1}{\frac{e}{2}}$.

²⁾ Bleich: Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken — str. 372.

wiatru oraz drgania parowozów i ewentualnie siły odśrodkowej. Tężniki poziome międzypodłużnicowe obliczają się również na te obciążenia¹⁾.

Zatrzymamy się na chwilę na wpływie bocznych wahań i uderzeń taboru na tężniki międzypodłużnicowe.

Podług warunków polskich jako obciążenie przyjmujemy 0,05 wszystkich nacisków osi, mieszczących się na podłużnicy.

Podług warunków jugosłowiańskich należy obciążyć kratownicę poziomą dla niej najnieodgodniej jedną siłą skupioną = 6 t.

Co to jest za siła te 6 t — w warunkach jugosłowiańskich nie powiedziano. Prawdopodobnie jest to siła równa 0,05 ciężaru parowozu z sześciu osi po 20 t, którą się zaczepia w miejscu pierwszej osi parowozu. Tak bowiem bywa w innych przepisach technicznych²⁾.

W następującym przykładzie, wziętym z obliczenia mostu na Wiśle pod Sandomierzem³⁾, porównujemy oba przepisy:

Podłużnice są podzielone na 3 przedziały.

Siła pozioma, działająca na tężniki poziome równa się $125 \cdot 0,05 = 6,25$ t, co stanowi jako ciężar równomiernie rozłożony

$$\frac{6,25}{6,25} = 1,00 \text{ t/m.}$$

Rzędna linii wpływu dla krzyżulca pierwszego będzie:

$$\eta = \frac{4125}{6250} \cdot \frac{2785}{1800} = 1,021 \text{ jednostek siły.}$$

Pole linii wpływu $F = \frac{1,021 \cdot 6,25}{2} = 3,19$ jednostko - metrów.

Siła w krzyżulcu $S = 3,19 \cdot 1,00 = 3,19$ t.

Podług warunków jugosłowiańskich napięcie w krzyżulcu byłoby:

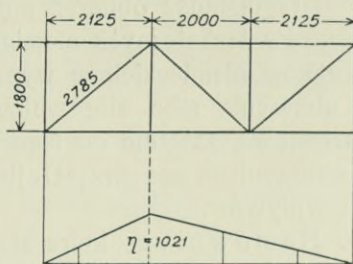
$$S = 6,0 \cdot 1,021 = 6,126 \text{ t.}$$

Okazuje się, co zresztą można było przewidzieć, że warunki jugosłowiańskie co do wpływu wahań i uderzeń taboru są nieodgodniejsze.

1) Podług warunków polskich wahań boczne uwzględnia się tylko przy obliczaniu poziomych tężników międzypodłużnicowych, przyczem można nie uwzględniać działania wahań na pasy podłużnic.

2) M. Thullie: Podręcznik teorii mostów — str. 20.

3) Projekt wykonał Profesor A. Pszenicki i Inż. Pac-Pamarnacki.



Rys. 4.

Tężniki podłużne międzydźwigarowe.

Tężniki podłużne obliczają się na działanie wiatru, na wpływ wahań i uderzeń bocznych taboru, ewentualnie na działanie siły odśrodkowej.

Aby obliczyć działanie na kratę tężników podłużnych wpływu wahań i uderzeń taboru rysujemy linię wpływu napięcia naprzykład w krzyżulcu danego pola, ustawiamy najniegodniej dla krzyżulca siłę $6t$ i obliczamy napięcie.

Aby obliczyć napięcie w krzyżulcu od siły odśrodkowej na tychże liniach wpływu ustawiamy najniegodniej dla krzyżulców pociągi, licząc jako ciśnienie osi tyle ile na nią wypada siły odśrodkowej.

W razie jednostronnego umocowania krzyżulców wiatrownic u węzłówek sprawdza się jeszcze krzyżulce na zginanie od momentu, którego ramieniem jest odległość pomiędzy osią węzłówki a środkiem ciężkości krzyżulca.

Oryginalność obliczeń mostów jugosłowiańskich w stosunku do warunków technicznych niemieckich (25/II 1925) stanowi to, że podług warunków niemieckich w wypadku mostu w łuku należy zastosować do obliczenia albo siłę wahań i uderzeń bocznych taboru lub siłę odśrodkową, zależnie od tego która z nich wywiera większe natężenia. W obliczeniach zaś przeseł jugosłowiańskich sumowaliśmy rezultaty obu wpływów.

Hamownice, które służą do przeniesienia tarcia kół o szyny na pasy dźwigarów i zapobiegają wobec tego wyginaniu się bocznemu poprzecznic, mają w warunkach technicznych jugosłowiańskich wyraźnie określony zakres zastosowania. Warunki polskie ani niemieckie nie określają rozpiętości przeseł, przy których zastosowanie hamownic staje się już potrzebne.

Z autorów Schaper w „Eiserne Brücken“, powiada, że hamowanie trzeba stosować w mostach jednotorowych powyżej $l = 25 m$, a przy dwutorowych powyżej $l = 15 m$.

Bleich w „Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken“, że hamownicę środkową lub końcową należy w przesełach jednotorowych dawać powyżej $l = 30 m$, dla dwutorowych powyżej $l = 20 m$.

Prof. A. Pszenicki w podręczniku inżynierskim S. Bryły wspomina ogólnie, że hamownice stosuje się tylko w mostach kolejowych większych rozpiętości, oraz w mostach na spadku lub w pobliżu stacyj.

Warunki jugosłowiańskie określają tę rozpiętość jako większą niż $40 m$, pochylenie zaś ponad 5‰ .

Wielkość siły tarcia kół o szyny przy hamowaniu warunki polskie określają jako $\frac{1}{10}$ nacisku osi, warunki niemieckie, jugosłowiańskie i łotewskie jako $\frac{1}{7}$.

Siła tarcia za pomocą hamownicy umieszczonej w środku przęsła przenosi się na pas a za jego pośrednictwem na łożysko stałe.

Wielkość siły przenoszącej się na hamownicę: $F = f \Sigma P$.

Wielkość jej przenosząca się na łożysko stałe i działająca w pasie:

$$T' = f \Sigma \frac{P}{2} - \varphi \cdot A,$$

gdzie f — współczynnik tarcia kół o szyny

ΣP — ciśnienie osi, mieszczących się na przęsle

φ — współczynnik tarcia wałków łożyska ruchomego na płycie dolnej. Współczynnik ten uwzględniający zanieczyszczenie płyty drobnym piaskiem $= \frac{0,175}{r}$, gdzie r — promień wałków wyrażony w cm^1)

A — odpór równy połowie obciążenia stałego i ruchomego, działającego na jeden dźwigar.

W powyższym wzorze wyraz $f \Sigma \frac{P}{2}$ — oznacza siłę tarcia kół o jedną szynę przy hamowaniu, a wyraz $\varphi \cdot A$ — wielkość odporu jaką tej sile, przenoszonej zapomocą pasa dolnego na łożysko stałe — daje łożysko ruchome.

Hamownice leżą zwykle w płaszczyźnie tężników wiatrowych dolnych i pasami ich kratownicy są zazwyczaj części krzyżulców wiatrowych, których natężenia, wobec tej podwójnej roli, będą się sumować.

Dźwigary.

Napięcia w prętach dźwigarów obliczano od wszystkich rodzajów obciążeń, pomieszczonych w tabeli 2, z wyjątkiem wpływu wahań i uderzeń bocznych, oraz naturalnie, temperatury. Wyprowadzono dla każdego pręta dwa wypadkowe napięcia, jedno z napięć odpowiadających rubryce α i drugie odpowiadające rubryce β i sprawdzano czy natężenia otrzymane nie przekroczą odpowiednich natężeń dopuszczalnych.

Przy obliczaniu napięć od obciążenia ruchomego oraz siły odśrodkowej uwzględniono łukowe położenie toru na jezdni, a więc różną odległość obciążenia ruchomego od różnych prętów kraty. Wskutek uwzględnienia tej okoliczności napięcia otrzymane, jak to ma miejsce normalnie, mnoży się przez pewne współczynniki, wyprowadzone z czysto geometrycznych przesłanek.

¹⁾ O. E. Paton: „Żelaznyje mosty“ — tom II, str. 110.

Współczynnik przy ślizganiu łożysk przesuwowych pg. warunków polskich i niemieckich przyjmuje się $f' = 0,2$.

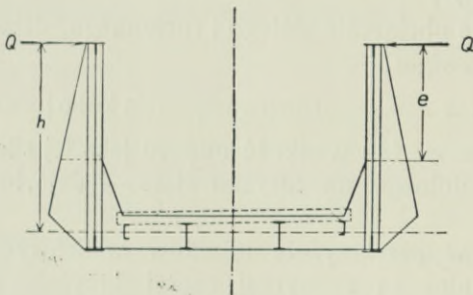
Współczynnik tarcia przy toczeniu się wałków w łożyskach pg. warunków polskich i niemieckich przyjmuje się — $\frac{0,03}{r}$.

Przy tej sposobności zauważam, iż zwykle obciążenie pionowe wiatrem przyjmujemy pod uwagę dopiero, gdy ono jest większe niż 10% obciążenia stałego t. j. obciążenia ciężarem własnym¹⁾.

Podług warunków technicznych bułgarskich obciążenie pionowe wiatrem przyjmuje się dopiero wtedy pod uwagę, gdy obciążenie to przenosi 10% obciążenia stałego i ruchomego.

W mostach jugosłowiańskich przyjmowaliśmy te obciążenia pod uwagę bez żadnych zastrzeżeń co do ich wielkości w stosunku do wielkości napięć od obciążenia stałego lub ruchomego.

Wobec tego, że przeszło jest otwarte, to należałoby pręty pasa górnego sprawdzić: a) w płaszczyźnie dźwigara na wyoboczenie, przy



Rys. 5.

długości swobodnej równej jednemu polu — oraz b) w płaszczyźnie poziomej na wyoboczenie, określając długość swobodną podług złożonego wzoru Jasińskiego²⁾ lub znacznie prostszego wzoru Haeseler'a:

$$l_0 = a \sqrt{\frac{10}{\sqrt{12} \frac{I_0 O^3}{I_0 h^3}}} \quad ^3)$$

- gdzie a — długość pola w cm
 h — odległość pasa od środka porzecznicy . . w cm
 I_0 — moment bezwładności pasa względem osi pion. w cm^4
 I — moment bezwł. słupa względem osi równoległej do osi podłużnej przęsła w cm^4
 O — długość pasa górnego w jednym polu . . w cm .

Sztywność poprzeczna.

Sztywność poprzeczną przęsła sprawdzaliśmy podług wzoru Engesser'a⁴⁾, według którego określa się moment bezwładności słupa półramownicy względem osi równoległej do płaszczyzny dźwigara.

Zamiast jednakże tego, polecono nam zastosować do sprawdzenia sztywności półramownicy przepis podług warunków technicznych niemieckich (25/II 1925), który każe w środkach ciężkości pasa górnego zaczepić dwie siły poziome Q , równe $1/100$ największego napięcia w pasie górnym.

¹⁾ Patrz obliczenie statyczne przęsła $l = 75 m$ mostu na Wiśle pod Sandomierzem, str. 55.

²⁾ O. E. Paton: „Żelaznyje mosty“, tom I, str. 483.

³⁾ M. Thullie: Teorja mostów, część I, str. 35.

⁴⁾ O. E. Paton: „Żelaznyje mosty“, tom I, str. 486.

Otrzymane tą drogą natężenia sumuje się z natężeniem zasadniczym słupa i sprawdza się czy suma ta nie będzie większa niż natężenie dopuszczalne podług rubryki α , tabela 2.

Na moment zginający $Q.e$ należy sprawdzić słup ramownicy w miejscu gdzie się zaczyna wspornik, oraz na moment $Q.h$ — poprzecznicy. Suma natężeń w poprzecznicy, t. j. zasadniczego od zgięcia obciążeniem pionowym i dodatkowego od siły Q nie powinna być większa niż $\sigma_{dop.}$

Ł o ż y s k a.

Łożyska ze stali lanej obliczano, sprawdzając — jak zwykle — na zginanie wahacz górny, kadłub łożyska ruchomego i stałego, oraz płyty podłożyskowe. Natężenie dopuszczalne na zginanie dla stali lanej przyjęto 1100 kg/cm^2 .

Największe natężenie, otrzymane przy ciśnieniu wałków na płytę podłożyskową, wklęsłej powierzchni cylindrycznej wahacza górnego na wypukłą powierzchnię cylindryczną kadłuba lub naodwrot, wypukłej powierzchni cylindrycznej wahacza na wklęsłą powierzchnię cylindryczną kadłuba, lub przy ciśnieniu wahacza i kadłuba na wałek przegubowy ściśle do nich przylegający, określono podług wzorów Hertz'a.

Największe natężenie przy dotykaniu po linii stycznej powierzchni cylindrycznej i płaskiej podług wzoru:

$$\sigma = 0,418 \sqrt{\frac{A \cdot E}{l \cdot r}} \cong 6500^1) \text{ kg/cm}^2$$

gdzie A — odpór podpory od ciężaru stałego i ruchomego w kg
 E — współczynnik sprężystości dla stali lanej 2200000 kg/cm^2
 l — długość walca w cm
 r — promień walca w cm .

Przy dotykaniu powierzchni cylindrycznej wklęsłej i cylindrycznej wypukłej po linii stycznej podług wzoru:

$$\sigma = 0,418 \cdot \sqrt{\frac{A \cdot E}{l} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \cong 6500^1) \text{ kg/cm}^2$$

gdzie r_1 — promień walca (mniejszy) w cm
 r_2 — promień krzywizny wklęsłej (większy) w cm .

Jeżeli wahacz górny i kadłub obejmują ściśle wałek przegubu, to:

$$\sigma_{otrz.} = 0,778 \frac{A}{r \cdot l} \cong 1400 \text{ kg/cm}^2,$$

gdzie A — odpór w kg ; $\sigma_{dop.} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ dla stali lanej;
 r — promień walca przegubowego w cm ; l — jego długość w cm .

¹⁾ Schaper: Eiserne Brücken — str. 665.

Foerster: Eisen-Konstruktionen — str. 316.

Stateczność.

Sprawdzenie stateczności przęsła uskuteczniiono przy dwóch założeniach: 1) przęsło obciążone pociągiem, przyczem ciężar wagonów pustych = 1,5 t/m; 2) przęsło nieobciążone. W obu wypadkach otrzymane współczynniki pewności nie powinny być mniejsze niż 1,5.

Ugięcie i podniesienie wykonawcze.

Ugięcie obliczono od obciążenia stałego i ruchomego. Podniesienie wykonawcze, dane podług paraboli, miało strzałkę w środku rozpiętości równą połowie ugięcia od obciążenia ruchomego + ugięcie od ciężaru własnego + ugięcie pozostające po usunięciu próbnego obciążenia statycznego.

Podniesienie wykonawcze w ostatnio wykonywanych dla Ministerstwa Komunikacji mostach polskich, zgodnie z warunkami technicznymi M. K. z 14/VI 1929 r. określa się podług wzoru

$$f \geq f_1 + f_2 + f_3^1),$$

gdzie f — rzędna paraboli w środku rozpiętości przęsła

f_1 — ugięcie środka przęsła od obciążenia stałego, określone teoretycznie

f_2 — ugięcie środka przęsła od obciążenia ruchomego, ustawionego tak, aby dla środka przęsła otrzymać największy moment zginający, określone teoretycznie

f_3 — pozostające ugięcie (pozostałe po usunięciu próbnego obciążenia statycznego), określone empirycznie podług wzoru

$$f_3 = \frac{l}{5000}.$$

Podług przepisów niemieckich dla mostów o rozpiętości ponad 20 m podniesienie wykonawcze w środku rozpiętości daje się

$$f = f_1 + \frac{1}{2} f_2.$$

Podług warunków bułgarskich podniesienie wykonawcze

$$f = f_1 + \frac{3}{4} f_2$$

lecz to podniesienie nie może być osiągnięte zapomocą wypychania go na montażu, lecz powinno być osiągnięte przez zastosowanie odpowiednich wydłużeń i skróceń prętów przy trasowaniu przęsła.

W ostatnich czasach zastosowano u nas w przęsłach o kracie systemu Warren'a dla pasów dolnych lub górnych, zależnie od położenia jezdni, metodę Inż. Baticle'a i Inż. Freyssinet'a¹⁾, polegającą na tem, że dodatkowe napięcia w pasach, powstałe wskutek zginania

¹⁾ Przęsła $l = 92$ m mostu przez Wisłę na linii średnicowej w Warszawie.

Przęsła $l = 42$ m; $l = 32$ m; $l = 12$ m mostu na Warcie.

Przęsła $l = 65,4$ m mostu na Wieprzu pod Trawnikiemami.

miejscowego, neutralizuje się, wywołując przy montażu sztucznie w pasach natężenia tej samej wielkości co dodatkowe, lecz odwrotnego znaku.

Do tego czasu, na przykład, w przęśle z jezdnią dolną, ponieważ, wskutek wyciągnięcia się wieszadła (rys. 6) pod wpływem miejscowego obciążenia dwóch pól sąsiednich, pas dolny ugiął się ku dołowi i otrzymywał dodatkowe rozciąganie w warstwach dolnych przekroju C , obliczano te natężenia dodatkowe i sumowano z zasadniczym natężeniem rozciągającym pasa dolnego, bacząc aby suma tych natężeń nie przekraczała zasadniczego natężenia dopuszczalnego więcej niż na 30%²⁾.

Ażeby znaleźć jaka część siły P , obciążającej węzeł C , idzie na wyciągnięcie wieszadła a jaka na zginanie pasa, nazywamy tę pierwszą P_1 a tę drugą P_2 oraz moment bezwładności pasa oznaczamy przez I a przekrój wieszadła przez F i piszemy dwa równania

$$P_1 + P_2 = P \quad \text{oraz} \quad \frac{P_2 \cdot l^3}{192 EI} = \frac{P_1 \cdot h}{F \cdot E},$$

w którym wyraz pierwszy stanowi ugięcie pasa, a drugi wyciągnięcie się wieszadła.

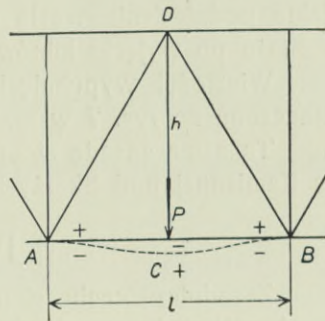
Z powyższych dwóch równań znajdowaliśmy

$$P_2 = \frac{192 \cdot h \cdot I}{Fl^3 + 192 h I} \cdot P$$

$$P_1 = P - P_2.$$

Znalazszy tym sposobem siłę P_2 , zginającą pas dolny, określamy w nim natężenie dodatkowe.

Obecnie natężenia dodatkowe od obciążenia miejscowego neutralizujemy, sumując je ze sztucznie wywołanymi natężeniami równymi lecz odwrotnego znaku. Wykonywa się tę operację tym sposobem, że jeżeli na przykład, mamy do czynienia z przęseł z jezdnią dolną, to skracamy wieszadła już w wytwórni o $\frac{P_1 \cdot h}{FE}$ a otwory dla nitów dolnych dajemy mniejszej średnicy. Na montażu po opuszczeniu przęśla z klinów wypychamy węzły środkowe pasów dolnych ku górze o wielkość wydłużenia wieszadeł, przewiercamy otwory w pasach i wieszadłach do potrzebnej wielkości i nitujemy je.

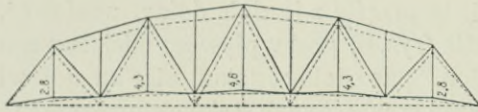


Rys. 6.

¹⁾ Inż. Dr. F. Szelągowski: „O stosowaniu w konstrukcjach korzystnych naprężeń i odkształceń“. Przegląd Techniczny, str. 847, 1929.

²⁾ O. E. Paton: „Żelaznyje Mosty“, tom I, str. 241.

Tę zasadę „korzystnych natężeń i odkształceń“ wskutek polecenia władz kolejowych, stosujemy przy budowie mostu o rozpiętości $l = 65,4 m$ na Wieprzu pod



Rys. 7.

na Trawnikami. Na rys. 7 pokazano podniesienie wykonawcze tego przęsła nadawane przy trasowaniu przęsła w wytwórni, oraz pod każdym wieśladem pokazano jeszcze spe-

cialne podniesienie węzła drugorzędowego, które należy wykonać na montażu po wyjęciu klinów z pod węzłów.

Wielkości wypchnięcia każdego dolnego węzła drugorzędowego oznaczono na rys. 7 w *mm*.

Tą samą zasadę stosujemy w mostach na Niemnie pod Mostami, na Kamiennej pod Skarżyskiem, na Wiśle pod Modlinem i innych.

§ IV. Konstrukcja.

Zasadniczą cechą charakterystyczną naszych przęseł mostowych w stosunku do współczesnych konstrukcyj mostowych zachodnioeuropejskich jest konstruowanie belek i prętów przęseł prawie wyłącznie z kątowników i wstęg, podczas gdy w przęsłach mostów państw zachodnich ma zastosowanie bardzo dużo *u*-owników i *i*-owników.

Stosując naszą zasadę osiągamy mniejszy ciężar gdyż możemy lepiej dociągnąć przekroje do natężeń dopuszczalnych, a zato mamy trochę więcej roboty i nitowania w wytwórni. Zyskujemy jeszcze przy naszym systemie na dobroci tworzywa, gdyż ono szczególnie w profilach kształtowników większych jest gorsze i dlatego to Haeseler proponuje przy zastosowaniu kształtowników *u*-owych i *i*-owych, poczynając od Nr. 30 wzwyż, zmniejszać natężenie dopuszczalne, mnożąc zasadniczą jego wielkość przez współczynniki coraz dla następnego większego numeru – mniejsze¹⁾. Również przepisy techniczne łotewskie polecają zmniejszenie natężeń dopuszczalnych, poczynając od Nr. 40 wzwyż o coraz to większy procent.

Na tabl. I, ryc. 1 przedstawiono zmontowane już i wynitowane przęsło o rozpiętości $l = 39,7 m$ na rzece Jadro przy ujściu jej do morza Adryatyckiego na szlaku Split-Knin.

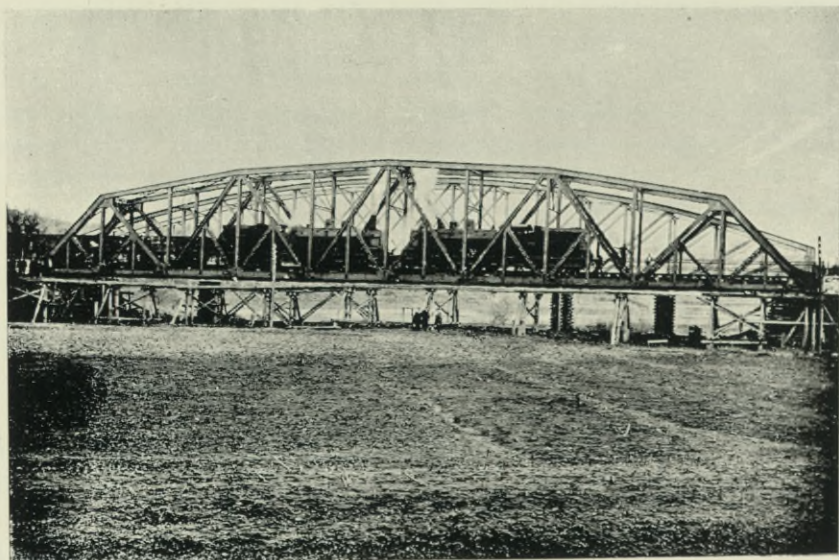
Na tabl. I, ryc. 2 pokazano przęsło o rozpiętości $l = 68,3 m$ w *km* $101\frac{1}{2}$ szlaku Split-Knin po zmontowaniu go i wynitowaniu w czasie próby. Na pierwszym planie widoczne jest nasze nowe przęsło, a na dalszym, odsunięte stare przęsło.

¹⁾ O. E. Paton: „Żelaznyje mosty“, tom I, str. 50.

TABLICA I.



Ryc. 1. Most na rzece Jadro o rozpiętości 39,7 m.



Ryc. 2. Most w km 101 $\frac{1}{2}$ szlaku Split-Knin o rozpiętości 68,3 m.

INŻ. LEON GROCH

O drewnianych ustrojach kratowych.

Ustroje niosące kratowe, mają zastosowanie przy budowie przęseł mostowych o większych rozpiętościach.

Jak wiadomo, ze wzrostem rozpiętości przęseł wzrasta również koszt metra bieżącego ustroju niosącego. Powiększenie rozpiętości przęseł opłaca się jednak nieraz przy trudnem fundowaniu filarów, gdy skutek tego możemy zmniejszyć ich liczbę.

Niejednokrotnie zmuszają nas do powiększenia rozpiętości przęseł potrzeby żeglugi lub spławu.

Wreszcie może nas skłonić do powiększenia rozpiętości, obawa zerwania komunikacji na rzekach, które wzbierając gwałtownie, toczą zwały rumowiska, lub unoszą całe drzewa, albo też podczas pochodu lodów rozbijają nimi gęsto postawione jarzma mostowe.

Dzieje się to bądź przez bezpośrednie uderzenia zwłaszcza z boku, bądź też przez tworzenie zatorów z lodu lub łomu drewna, przyczem spiętrzona woda podmywa jarzma i unosi je razem z zatorem. Aby temu zapobiec budujemy odpowiednio fundowane filary murowane lub betonowe, w odstępach od 20 do 50 m, a na nich stawiamy kratowe ustroje niosące żelazne, lub o połowę tańsze drewniane.

Budowa mostów kratowych drewnianych rozwinęła się w pierwszej połowie ubiegłego stulecia w Ameryce. Belka Hove'a powstała w roku 1840.

W Małopolsce posiadającej liczne rzeki i poddostatkiem drewna, gdzie natomiast fundusze publiczne nie mogły nadążyć potrzebom komunikacji, poczęto budować drewniane ustroje kratowe systemu inż. Ibjńskiego około 1880 roku.

Budowa drewnianych kratownic na murowanych filarach umożliwia bezpieczną komunikację i była gospodarczo uzasadnioną, gdyż osiągnano zamierzony cel przy niskim kapitale zakładowym.

Dziś w Polsce wobec wysokiego oprocentowania kapitału sprawa ta jest tembardziej aktualna — gdyż w ostatnich latach związki ko-

TABLICA I.



Ryc. 1. Most kratowy systemu Ibjńskiego $2 \times 35 \cdot 0$ m św. na Dunajcu pod Krościenkiem.



Ryc. 2. Most na Sanie pod Zarzeczem $5 \times 40 = 200$ m św. systemu Inż. L. Grocha.

Dalej podnieść należy, że budując most stały w ciągu drogi państwowej, musimy go budować na największe obciążenia, a więc I kl., czyli że koszt budowy byłoby wyższe około 18% od przyjętych w przykładzie.

Zastosowany przy budowie mostu na Dniestrze pod Żurawnem ustrój kratowy mieszany posiada pasy dolne i ścięgna pionowe żelazne, a także poprzecznice mają pasy żelazne — przeto trwałość ich jest równa trwałości mostu żelaznego. Pasy górne i krzyżulce drewniane są okryte blachą, więc nawet przy niekorzystnych warunkach potrwają co najmniej 30 lat.

Koszta konserwacji pomostu będą, z powodu drewnianej dyliny w żelaznym moście, takie same jak w ustroju mieszanym, a wymiana wiatrownic nie będzie kosztowała więcej jak malowanie żelaza w pasach górnych i wiatrownicach.

Korzyść zatem z zastosowania tego ustroju zamiast żelaznego jest udowodniona.

Ustrój ten zapewnia komunikację bez ograniczeń — umożliwia redukcję wydatków o połowę, a tem samem zezwala na użycie gotówki na inne potrzebne objekty, lub w braku tejże redukuje budżet, względnie opodatkowanie na ten cel o połowę, czego wobec trudności gospodarczych nie można lekceważyć.

Jeżeli mówimy o trwałości mostów kratowych drewnianych, to mamy w tym kierunku liczne doświadczenia za sobą.

Do dzisiaj stoją dwa mosty kratowe systemu inż. Ibjańskiego postawione w r. 1880, a więc przed 50 laty, w ciągu drogi krajowej Nowy Sącz - Krościenko - Szczawnica.

Jeden z nich na Ochotnicy, lewym dopływie Dunajca — tuż przy ujściu, a drugi na Dunajcu pod Krościenkiem t. zw. most szczawnicki, na murowanych filarach o rozpiętości $2 \times 36 = 72$ m św. tabl. I, ryc. 1.

Jest on nakryty pełnym dachem, a prócz tego pasy dolne kratownic kryte są osobnemi daszkami.

Ustrój niosący jest bardzo dobrze zakryty przed opadami atmosferycznymi — w zimie jednak musi się nawozić śnieg na pomost, inaczej saniami byłoby trudno przejechać.

Inne mosty kratowe systemu Ibjańskiego i Pintowskiego zbudowane w czasie 1880 do 1900 r. zostały zniszczone podczas wojny światowej w r. 1914, a więc istniały przeciętnie po 20 lat, w szczególności:

Most na Dunajcu pod Kurowem	5 × 35 m św.
„ „ Sanie pod Jarosławiem	4 × 48 „ „
„ „ Bystrzycy pod Jezupolem	6 × 30 „ „
„ „ Rybnicy pod Kosowem	36 „ „
„ „ „ „ Sokołówką	30 „ „
„ „ Strypie pod Czortkowem	26 „ „

Wreszcie mosty na Prucie pod Śniatynem $7 \times 30 m$ oraz pod Zabłotowem przebudowane jeszcze przed wojną światową na żelazne, zostały również podczas wojny światowej zdemolowane.

Ten ostatni fakt wskazuje, że budowanie stałych mostów blisko granicy Państwa (jeżeli rozpiętość poszczególnych przęseł nie przekracza $50 m$) jest conajmniej zbytekiem.

W r. 1900 postawił inż. Juljusz Orzelski pierwszy most systemu Rychtera $20 m$ w św. na Rybnicy pod Jaworowem w *km* 10·7 drogi Kosów-Tatarów, zaś sześć lat później zbudował inż. Józef Rams następne cztery przęsła po $25 m$ systemu Rychtera mostu na Bugu pod Krystynopolem — mosty te uległy zniszczeniu podczas wojny światowej.

Tej samej doli uległy mosty drogowe systemu Hove'a na Sanie pod Przemyślem i pod Zarzeczem, stawiane na drewnianych jarmach, tak że śladu po nich nie zostało.

Po roku 1900 nikt już nie stawiał mostów systemu Ibjńskiego — budowano je zatem w Małopolsce tylko przez 20-letni okres.

Wojna światowa stanowi następny okres w postępie budowy mostów drewnianych kratowych — gdyż spowodowała zagładę prawie wszystkich większych mostów bez względu na to czy były żelbetowe, żelazne lub kratowe drewniane. Pozostało kilka zaledwie nietkniętych i liche leżajowe prowizorya wojenne.

Właściwą jednak epokę w budowie większych mostów stanowią polskie przepisy „O budowie i utrzymaniu mostów drogowych“, zatwierdzone rozp. M. R. P. z dnia 9 listopada 1925 r. L. XIII-1386, które wprowadzają obciążenia znacznie wyższe od obowiązujących pod zaborem austriackim (3 kl.: szereg wozów 3 tonowych i $340 kg/m^2$). Na drogach powiatowych i wojewódzkich buduje się obecnie mosty na obciążenie II kl., t. j. walce drogowe o wadze 16 tonn i tłum ludzi po $400 kg/m^2$.

Obciążenie tak znaczne jest konieczne ze względu na ruch automobilowy, rozwijający się w przyśpieszonym tempie, który wymaga walcowania pokładu drogowego.

Od roku 1924 postawiono cały szereg mostów systemu Rychtera na nowe obciążenie II kl.

Kratownica mostowa otrzymała wymiary odpowiednie do obciążenia, przyczem zaszła potrzeba zbrojenia drewnianych klinów, żelaznemi kątówkami, celem przeniesienia ciśnienia prostopadłego do włókien drewna, na większe powierzchnie. Poprzecznicę rozporow zastąpiono belkami klockowymi lub wieszarami zbrojonymi żelazem. Między innymi zbudowano według systemu Rychtera:

1. Most na Sanie pod Postołowem 4 przęsła po $24 m$ św.
2. „ „ „ „ Jarosławiem 4 „ „ 42 „ „

3. Most na Sanie pod Krzeszowem 8 przęseł po 35 *m* św.

4. „ „ Mlecze p. Przeworskiem 1 przęsło 26 „ „

Oprócz tego postawiono jednotorowe prowizorja na Prucie pod Mikuliczynem i na Dniestrze pod Niżniowem.

Obok systemu Rychtera budowano mosty systemu Hove'a.

I tak postawiono jedno przęsło 30 *m* św. mostu na Strymbie pod Nadworną, oraz 5 przęseł mostu na Dunajcu pod Kurowem po 35 *m* św. Doświadczenia ostatnich lat wykazują gwałtowne osiadanie tych krat i duże trudności przy konserwacji, tak że mimo rozpowszechnionej sławy belki Hove'a nie można polecać jej budowy na dłuższy okres czasu. Bliższych objaśnień w tym kierunku mógłby udzielić Kierownik biura mostowego Krakowskiej Dyrekcji Robót Publicznych inż. Tadeusz Żebrowski, radca budownictwa.

Powstały również nowe systemy ustrojów niosących kratowych a mianowicie:

1. inż. J. Francoza,

2. „ St. Rechniewskiego,

3. „ L. Grocha.

Ustrój niosący systemu inż. J. Francoza jest kratą równoramienną zbudowaną z brusów łączonych w węzłach kolistych śrubogwoździami.

Autor opisał ją w „Czasopiśmie Technicznym“ z r. 1928 nr. 19. Most tego systemu postawiono na Wielopolu pod Kopczycami 20 *m* św. II kl. i na Wiśle w Krakowie, jako most objazdowy przy budowie mostu żelaznego.

Ustrój niosący systemu inż. Rechniewskiego jest kratą równoramienną posiadającą nitowane sztywne węzły żelazne zabetonowane, z których wystające blachy z zanitowanymi kątownikami, służą do przytwierdzenia drewnianych prętów rozciąganych, złożonych zwykle z półek kraglaków. Pręty ściskane okrągłe opierają się o klocki betonowe.

Poprzecznice rozporowe zawieszono w węzłach lub podparte jako belki złożone z 5 belek zazębionych. Parcie wiatru przenosi się z poziomej kraty górnej zapomocą sztywnych ram na podporach lub zapomocą tężników pionowych przy mostach otwartych. Bliższy opis ustroju znajduje się w Czasopiśmie Technicznym z r. 1926 nr. 5.

Mostów systemu inż. Rechniewskiego postawiono w ciągu ostatnich 5-ciu lat przeszło 4 *km* łącznej długości, z tego w Małopolsce postawiono:

1. Most na Wiśle pod Szczucinem	$6 \times 40 \text{ m} = 240 \text{ m}$ św.
2. „ „ Sanie pod Liskiem	$3 \times 40 \text{ „} = 120 \text{ „}$ „
3. „ „ Strwiążu pod Terlem	$2 \times 26 \text{ „} = 52 \text{ „}$ „
4. „ „ Barze pod Lisnią	$1 \times 26 \text{ „} = 26 \text{ „}$ „
5. „ „ Białej pod Tuchowem	$3 \times 26 \text{ „} = 78 \text{ „}$ „

- | | | |
|------------------------------------|---|-----|
| 6. Most na Stryju w Stryju | $5 \times 26 \text{ m} = 130 \text{ m}$ | św. |
| 7. „ „ Bystrzyca pod Stanisławowem | $3 \times 26 \text{ „} = 78 \text{ „}$ | „ |
| 8. „ „ Strypie pod Buczaczem | | |
| 9. „ „ Serecie pod Lisowcami | $1 \times 30 \text{ „} = 30 \text{ „}$ | „ |

ten ostatni z żelaznym pomostem.

Trzecia z wyżej wymienionych kratownic systemu autora powstała w 1925 r. na podstawie dwudziestokilkuletnich obserwacji mostów kratowych. Wykonanie jej jest zastrzeżone patentem polskim Nr. 9622. Jest to kratownica prostokątna pojedyncza, zbudowana na zasadzie: „żelazo na pręty rozciągane, drewno na ściskanie“. Pasy dolne i ścięgni pionowe wykonane są z żelaza. Pasy górne i krzyżulce, zbudowane są z drewna kantowego obrzynanego. Kratownica spoczywa na łożyskach, które umożliwiają dylatację w żelaznym moście.

Zastosowanie żelaza na pręty rozciągane daje zupełną gwarancję bezpieczeństwa publicznego — jako materiał jednorodny, a ponieważ posiada dziesięciokrotną wytrzymałość drewna, powoduje zmniejszenie wagi ustroju niosącego oraz redukcję kosztów konserwacji w stosunku do innych krat o pasach dolnych drewnianych, co najmniej o połowę.

Założenie, że drewna używa się tylko na pręty ściskane, powoduje uproszczenie ustroju kratowego gdyż drewno musi być obrobione tylko od czoła i zetknięte bez zamków pełnymi płaszczyznami. Zastosowanie śrub na ścięgni pionowe umożliwia regulację strzałki ustroju bez budowy osobnych rusztowań, co przy żadnym innym systemie nie jest możliwe, gdyż nawet u Hove'a z powodu kraty złożonej strzałka da się regulować tylko do pewnej granicy.

Podkładki z blach odwijanych pod ścięgni pionowe, powodują równomierny rozkład nacisku na przyległe pręty kraty.

Pod podwójnymi nakrętkami ścięgien pionowych, ułożone są klinowe podkładki wyrównujące strzałkę pasa górnego, tak że nakrętki obracają się na poziomych podstawach.

Pasy dolne zbudowane są z dźwigarów żelaznych \square złączonych w każdym węźle przeponami z żelaza \square z przynitowaną od spodu blachą klinową wyrównującą strzałkę dolnego pasa. Na pasach dolnych opierają się krzyżulce na poprzecznych kątówkach, zapartych o blachę i krótkie kątówki, przytwierdzone wzdłuż pasów taką ilością nitów jaka odpowiada parciu poziomemu krzyżulca.

O pas górny opierają się krzyżulce przy pomocy piętek dębowych, których rozmiary dostosowane do nacisku, a oś jest równoległą do dłuższych płaszczyzn zaciosów w pasach górnych.

Zależnie od rozpiętości i klasy ruchomego obciążenia pasy górne składają się z jednej, dwóch lub czterech belek obrzynanych dokładnie piłami.

Pasy i krzyżulce kratownicy mostowej nakrywa się blachą pocynkowaną w ten sposób, aby bez rozginania dała się zdjąć dla celów rewizji mostu.

Poprzecznicze kratowe zbudowane są analogicznie jak belki główne, z tą różnicą, że także pas górny daje się z żelaza, a przedłużenie jego wykorzystuje się do podparcia tężników pionowych. Dębowe krzyżulce poprzeczniczy opierają się o kątowniki przynitowane do pasów poprzeczniczy.

Jakkolwiek przepisy o budowie mostów przewidują jednostajne rozłożenie ciężaru ruchomego — przyczem we wszystkich krzyżulcach wystąpi ściskanie, to jednak przy jednostronnem obciążeniu mogą zająć w środkowych krzyżulcach, a nawet i pierwszym ścięgnię, siły z obciążenia ruchomego, o znakach odwrotnych — dlatego krzyżulce środkowe dajemy z żelaza, a pierwsze ścięgno pionowe dajemy grubsze między pasami, aniżeli otwory w pasach, aby mogło znieść nieznaczne ściskanie. Zamiast pogrubiania pierwszego ścięgna można go przewlec przez rurkę rozpinającą pasy poprzeczniczy. Oczywiście, że wymiary muszą odpowiadać działającej sile (około 1 tonny).

Wiatrownice przytwierdzone są do pasów dolnych poprzecznic. Podłużnicze sięgają przez dwa pola, a spadek pomostu 1% uzyskuje się przez zacięcie podłużnic. Dyliny przybijają się poprzecznie do podłużnic.

O ustroju tym wygłosiłem odczyt na kongresie drogowym we Lwowie w 1926 r.

W ożywionej dyskusji jaka się po tym odczycie rozwinęła, Prof. Dr. Maksymiljan Thullie wyraził się o tym ustroju bardzo przychylnie, a podnosząc odwieczny związek drewna i żelaza, wskazał jako zalety tegoż: prostotę ustroju, możliwość szybkiego wykonania niezależnie od pory roku. Na prośbę Tymcz. Wydz. Samorządowego z 10 listopada 1927 Lw. 51558/27 porównał Profesor Thullie ustroje niosące systemu inż. Grocha i inż. Rechniewskiego i uznał za lepszy pod względem konstrukcyjnym ustrój inż. Grocha, a przy porównaniu kosztów obu ustrojów, zwracał uwagę na potrzebę uwzględnienia, prócz jednorazowego wydatku, również kosztów utrzymania i na trwałość ustroju. Wreszcie przestrzegał przed powstać mogącymi stratami dla Skarbu Państwa w razie przyznania monopolu ustrojowi inż. Rechniewskiego. Doświadczenia z 1930 r. opinię powyższą potwierdziły w całości.

Mosty systemu inż. Grocha zbudowano wyłącznie w Małopolsce, w szczególności:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. Most na Sanie pod Zarzeczem | $5 \times 40 m = 200 m$ św. |
| 2. „ „ Bystrzycy pod Jezupolem | $30 + 5 \times 29 „ = 175 „$ „ |
| 3. „ „ Dubie pod Roźniatowem | $2 \times 30 „ = 60 „$ „ |
| 4. „ „ Rybnicy pod Sokołówką | $1 \times 30 „ = 30 „$ „ |
| 5. „ „ Dunajcu pod Niedzicą | $2 \times 40 „ = 80 „$ „ |

6. Most na Taborze w Rymanowie Zdroju $1 \times 31 \text{ m} = 31 \text{ m}$ św.
 7. „ „ „ Jasiołce pod Stasianą $1 \times 30 \text{ „} = 30 \text{ „}$ „
 8. W toku budowy znajduje się most na
 Dniestrze pod Martynowem $4 \times 45 \text{ „} = 180 \text{ „}$ „

o którym wspomniałem na wstępie.

Na tabl. I, ryc. 2 przedstawiono most na Sanie pod Zarzeczem.

Na dołączonych tabl. II, ryc. 3, 4 i tabl. III, ryc. 5 widoczny jest postęp budowy przy moście na Dubie pod Roźniatowem.

Na tabl. III, ryc. 6 przedstawiono przęśło mostu na Dunajcu pod Niedzicą (40 m św.) w budowie.

Przeprowadzone w 1930 r. rewizje większych mostów kratowych wykazały, że w systemach Rychtera i Rechniewskiego:

1. Pasy dolne drewniane zamakają mimo zakrycia daszkami.

2. Pręty narażone na rozciąganie, a pracujące zapomocą zębów lub zaciosów w drewnie — w bardzo wielu wypadkach mają te zęby nadpęknięte lub nawet zupełnie ścięte, tak że ustrój kratowy trzyma się tylko na śrubach wiążących styki.

3. Używanie do budowy mostów kratowych świeżego drewna powoduje jego zsychnanie, tak że zachodzi potrzeba dokręcania śrub łączących podwójne belki o 5 mm i więcej, zwłaszcza dopóki drewno nie wyschnie.

Przeprowadzone niwelacje pasów dolnych mostów kratowych wykazują osiadanie ustrojów kratowych od 8—12 cm, przyczem więcej osiadają te kraty które mają oba pasy t. j. górny i dolny z drewna.

Kształt kraty może inżynier w ustroju mego systemu doprowadzić w ciągu 8 do 10 godzin, przy pomocy instrumentu i czterech zdolnych ludzi, do kształtu pierwotnego. Robót tych jednak nie można poruczać ludziom bez dozoru inżyniera lub specjalisty, umięjącego przy pomocy instrumentu strzałkę regulować.

Reasumując powyższe wywody dochodzimy do następujących wniosków:

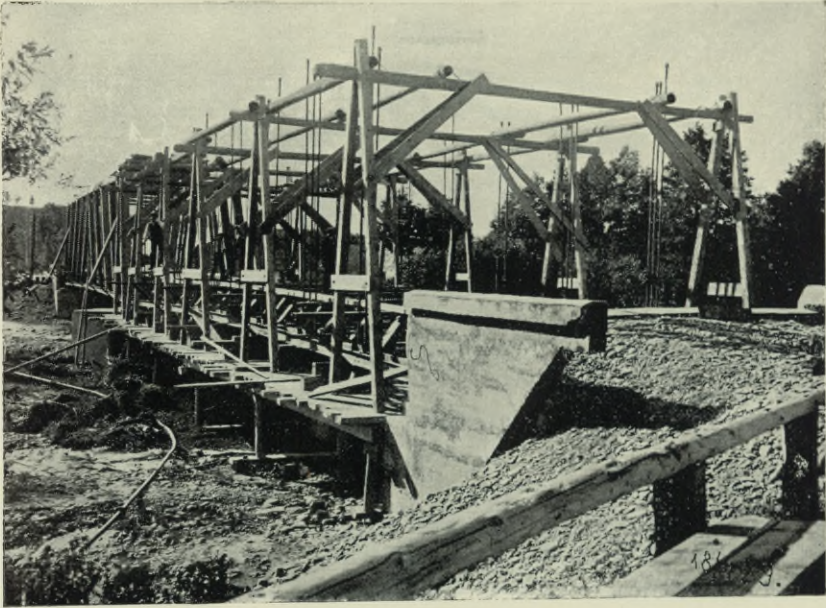
1. Ustroje kratowe należy stawiać tylko na murowanych lub betonowych podporach.

2. Dobrze zabezpieczone przed wpływami atmosferycznymi ustroje kratowe drewniane stoją po 50 lat.

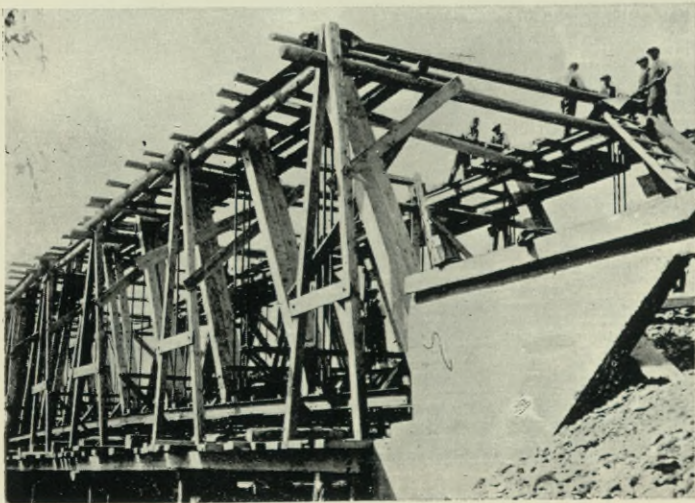
3. W porównaniu ze stałymi mostami, koszt wykonania ustrojów drewnianych są o połowę niższe, chociaż oddają te same usługi gospodarcze.

4. Budowa drewnianych ustrojów kratowych będzie się opłacała zwłaszcza na drogach wojewódzkich i powiatowych, oraz na kresach do czasu obniżenia stopy procentowej conajmniej o połowę obecnej wysokości t. j. do 4%.

TABLICA II



Ryc. 3. Most na Dubie pod Roźniatowem 30 m św. system inż. L. Grocha.



Ryc. 4. Most na Dubie pod Roźniatowem 30 m św.
system inż. L. Grocha.

TABLICA IV.



Ryc. 7. Most na Dniestrze pod Żurawnem 4×45 m św.) systemu L. Grocha, zbudowany w r. 1931.

Niechaj ε_{kr} oznacza bezwzględną wartość jednostkowego skrócenia pręta przy obciążeniu krytycznym, która w przypadku pręta metalowego nie przewyższa paru tysięcznych. Wówczas $l=l_0(1-\varepsilon_{kr})$, a linjowy wymiar poprzeczny $b=b_0(1+\mu\varepsilon_{kr})$, przyczem μ oznacza stosunek Poisson'a. A zatem z dokładnością wystarczającą będzie:

$$I = I_0 (1 + 4 \mu \varepsilon_{kr}); \quad l^2 = l_0^2 (1 - 2 \varepsilon_{kr})$$

czyli

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI_0}{l_0^2} [1 + 2(1 + 2\mu)\varepsilon_{kr}].$$

Uwzględniając tutaj związek $\frac{P_{kr}}{EF_0} = \varepsilon_{kr}$ i rozwiązując względem ε_{kr} , otrzymujemy

$$\varepsilon_{kr} = \frac{\pi^2}{\lambda_0^2 - 2\pi^2(1+2\mu)} \quad \dots \quad (4)$$

podczas, gdy zwykła postać wzoru Eulera dałaby oczywiście:

$$\varepsilon_{kr} = \frac{\pi^2}{\lambda_0^2} \quad \dots \quad (1a)$$

Uwzględnienie odkształceń sprężystych w chwili osiągnięcia wartości krytycznej przez obciążenie prowadzi zatem do większych nieco wartości ε_{kr} , a zarazem do większych wartości σ_{kr} . Atoli pamiętać trzeba, że wzór (4) przestałby być dokładnym, gdyby obliczone żeń ε_{kr} przewyższało kilka tysięcznych lub, co gorzej, parę setnych (nawet przy zachowaniu koniecznego warunku $\lambda_0 \geq \lambda_{gr}$).

Zagadnienie wyboczenia sprężystego posiada zatem rozwiązanie teoretyczne zupełnie zadawalniające w postaci wzoru na obciążenie krytyczne. Jakkolwiek P_{kr} nie ma w istocie swej nic wspólnego z tą wartością obciążenia, którą inżynierowie nazywają wytrzymałością pręta na wyboczenie, a którą oznaczymy przez P_w to jednak przy smukłościach niezbyt wielkich P_w przewyższa tak nieznacznie P_{kr} , że uważa się je praktycznie za równe. Bardzo nieznaczna nadwyżka obciążenia ponad P_{kr} prowadzi bowiem z reguły do trwałego pozbawienia pręta zdolności stawiania oporu siłom ściskającym.

§ 3. Inaczej ma się rzecz z zagadnieniem wyboczenia niesprężystego, zachodzącego przy smukłościach pręta mniejszych od

¹⁾ M. Broszko („Sur le flambage des barres prismatiques“ C. R. rok 1928, t. 186, p. 1041) zwróciwszy, jak się zdaje, pierwszy uwagę na tę postać wzoru Eulera, spróbował uogólnić jej ważność do przypadku wyboczenia niesprężystego prętów metalowych. Jakkolwiek wywody teoretyczne tej pracy spotkały się z krytyką poczęści słuszną, to jednak zaproponowana postać odpowiada w obszernych granicach smukłości wcale dobrze wynikom najnowszych bardzo licznych badań doświadczalnych wykonanych w Niemczech staraniem Związku Budownictwa Stalowego („Deutscher Stahlbau-Verband“) i zreferowanych w pracy: W. Rein, „Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen“. (Berlin, Springer 1930).

λ_{gr} . Wtedy oczywiście tracą ważność wzory oparte na teorii sprężystości i nasuwa się pytanie, czy przez uwzględnienie znalezionej empirycznie zależności odkształceń od naprężeń przy prostym rozciąganiu nie da się wyprowadzić wzór ogólniejszy, któryby określał teoretycznie wartość siły krytycznej w zależności od smukłości λ w obszarze wyboczenia niesprężystego. Na to pytanie usiłowano niejednokrotnie znaleźć odpowiedź. Przez szereg lat panowało nawet w literaturze techniczno-naukowej przekonanie, że sprawa jest zupełnie załatwiona (w przypadku prętów metalowych) wzorem jaki się wyłonił z dyskusji między F. Jasińskim a F. Engesser'em na łamach „Schweizerische Bauzeitung“ w r. 1895, który to wzór ustawił także później niezależnie Th. v. Kármán w cieszącej się zasłużonym rozgłosem pracy doktorskiej p. t. „Untersuchungen über Knickfestigkeit“ (Forschungsheft 81 V. D. I. Berlin 1910).

Tymczasem M. Broszko, po ogłoszeniu pracy powyżej przytoczonej zaatakował podstawy teoretyczne wzoru Kármána w dyskusji nad kwestją wyboczenia, jaka się toczyła we wrześniu r. 1928 na II. Międzynarodowym Kongresie Inżynierji Budowlanej w Wiedniu¹⁾. Zarazem usiłował wykazać, że jego wzór teoretyczny lepiej się zgadza z pomiarami doświadczalnymi od wzoru Kármána. Zaoponował temu w sprawozdaniu kongresowem P. F. Fillunger kwestjonując słuszność krytyki wzoru Engessera-Kármána (E.-K.) i krytykując uzasadnienie matematyczne wzoru Broszki. Z podobną krytyką wystąpił niezależnie Dr. Wł. Burzyński w pracy p. t. „O wyboczeniu posprężystem“ (Czasopismo Techn. Lwów 1930). W przytoczonej powyżej nowej publikacji W. Rein'a znajdujemy również krytykę wywodów wzoru E.-K. ze wzmianką że, także Th. F. Hellan zakwestjonował poprawność tych wywodów w publikacji norweskiej p. t. „Publikationer over statiske undersøkelser (zesz. 1 i 3 Drontheim: F. Brun 1922 i 1928).

Nie mamy zamiaru wyliczać tutaj szczegółowych zarzutów i krytyk w powyższej interesującej dyskusji, jakkolwiek celem niniejszej pracy jest wyjaśnienie ważnej sprawy wyboczenia niesprężystego. Do tego celu dojdziemy jednakże prędzej drogą pośrednią, a mianowicie przez rozważenie podstawowych różnic zagadnień wyboczenia niesprężystego i sprężystego prętów metalowych. Na te różnice nie zwrócono dotychczas należytej uwagi w żadnej z przytoczonych prac i traktowano obydwie zagadnienia według tego samego schematu wzorowanego oczywiście na klasycznym zagadnieniu Eulera.

¹⁾ Ob. Comptes-Rendus du 2-me Congrès Intern. de Construction des Ponts et Charpentes, Wien 24—28 IX. 1928 (str. 303—346).

§ 4. W dziedzinie wyboczenia sprężystego ($s_{gr} < s < \infty$) można traktować pręt ze stanowiska mechaniki teoretycznej jako układ zachowawczy pozostający pod działaniem sił zewnętrznych (P, P) i wewnętrznych (molekularnych) sił sprężystości. O tem czy równowaga takiego układu jest stała (stateczna) lub niestała (niestateczna) przekonywamy się zapomocą jednej z dwu metod. W pierwszej bada się zmianę całkowitej energii układu przy jego odchyleniu od położenia równowagi. Jeżeli ta zmiana jest przyrostem dla każdego odchylenia przygotowanego układu, to rozpatrywane położenie jest położeniem równowagi stałej, według energetycznego kryterjum Mindling'a i Dirichlet'a¹⁾.

W drugiej metodzie bada się ruch układu, jaki powstaje wskutek udzielenia mu w położeniu równowagi bardzo małej energii kinetycznej. Gdy ruch ten ma charakter okresowy i przedstawia się jako drobne wahania układu około położenia równowagi, to rozpatrywane położenie równowagi jest położeniem równowagi stałej; w razie przeciwnym, t. j. gdy powstający ruch zniewala układ do trwałego opuszczenia tego położenia równowagi, mamy do czynienia z położeniem równowagi niestałej. Obie metody prowadzą w naszym przypadku do wniosku sformułowanego na wstępie, czyli do następującego schematu teoretycznego: Wartości obciążenia $P < P_{kr}$ odpowiadają prostej osi pręta jako jedynej postaci równowagi, która jest równowagą stałą. Wartości $P > P_{kr}$ odpowiadają prostej osi jako postaci równowagi niestałej i osi wygiętej jako postaci równowagi stałej. (Dla pręta nieograniczenie sprężystego istnieje jak wiadomo nieskończone mnóstwo wygiętych postaci równowagi odpowiadających ciągłemu wartości krytycznych $P_{kr} < P'_{kr} < P''_{kr} < \dots$. Atoli wszystkie inne, prócz pierwszej, są niestałe).

W warunkach rzeczywistych doświadczenia nawet najbardziej precyzyjnego muszą zejść odchylenia od schematu teoretycznego. Nieuniknione tarcie w przegubach podporowych pręta sprawia, że przy obciążeniu siłą $P = P_{kr}$ jest równowaga pręta prostego jeszcze stałą, chociaż o stałości bardzo małej. Niestalą staje się dopiero przy wartości nieco większej od teoretycznej. Ale to zaburzenie schematu teoretycznego bywa kompensowane niemal zupełnie wpływem wstrząśnięć, pochodzących np. z ruchu ulicznego w pobliżu laboratorium. Zaobserwowano to już niejednokrotnie, że niepodobna było osiągnąć równowagi przy prostej postaci pręta obciążonego siłą P przewyższającą bardzo nieznacznie teoretyczne P_{kr} , jeżeli maszyna do badań podlegała drobnym wstrząśnieniom. Skoro zaś powiodło się przy wy-

¹⁾ Ob. np. pracę autora: „Kryterja stałości równowagi“ (Akad. Nauk Techn. w Warszawie 1926, zes. 3).

jątkowym spokoju utrzymać pręt prosty pod obciążeniem przewyższającym nieco P_{kr} , to pierwsze wstrząśnienie wywoływało niechybnie nagły przeskok do wygiętej postaci równowagi.

Nieco gorzej przedstawia się sprawa z innymi odchyleniami od schematu teoretycznego w doświadczeniu rzeczywistym. Te odchylenia pochodzą od nieuniknionej chociażby bardzo małej mimośrodkowości obciążenia przekrojów końcowych, od początkowej nieprostolinowości osi, niejednorodności materiału i t. p. Wtedy wartość P_{kr} traci, biorąc ściśle, powyższe znaczenie mechaniczne, gdyż oś pręta musi się zakrzywić przy każdej skończonej wartości P . Doniosłość praktyczna wartości teoretycznej P_{kr} nie doznaje jednak uszczerbku, albowiem znaczenie jej polega teraz na stwierdzeniu prawidła następującego:

Wygięcie (wyboczenie) pręta rzeczywistego pod wpływem sił podłużnie ściskających staje się bardzo znacznym i niebezpiecznym, gdy wielkość obciążenia zbliża się do wartości krytycznej.

Do ścisłego ilościowego ujęcia zagadnienia przy założeniu smukłości dowolnie wielkich należałoby wyjść z „dokładnego“ równania różniczkowego płaskiej linii ugięcia pręta

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{M}{EI}.$$

Tutaj oznacza lewa strona przyrost krzywizny, a prawa moment zginający M podzielony przez sztywność zginania EI . W wielu wypadkach da się całość tego równania wyrazić zapomocą funkcji eliptycznych, co jednakże prowadzi z reguły do rachunków bardzo uciążliwych, jak stwierdzają liczne prace temu zadaniu poświęcone.

Atoli w obszarze smukłości niezbyt wielkich jakie są stosowane z reguły jako elementy konstrukcyjne wystarcza zupełnie bez porównania prostsze całkowanie równania różniczkowego przybliżonego

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

ażebymy otrzymać liczne wyniki ilościowo zgodne z doświadczeniem¹⁾.

¹⁾ Tą drogą poszedł H. Zimmermann w pracach ogłoszonych w „Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. d. Wissenschaften“ z roku 1923, a zużytkowanych przy wykonywaniu wspomnianych powyżej doświadczeń niemieckich. Interesujące wyniki tych badań teoretycznych nie przeszkodziły jednakże autorowi wygłosić ryzykowne zdanie „dass es einen sicheren Gleichgewichtszustand nach der Ueberschreitung der Eulergrenze nicht gibt“ (Zimmermann, Lehre von Knicken auf neuer Grundlage. Berlin 1930. N. Ernst & Sohn na str. 6 wiersz 13 zgóry). To zdanie jest oczywiście słuszne tylko dla niewielkiego obszaru smukłości większych od s_{gr} uwzględnianego jedynie w badaniach doświadczalnych wytrzymałościowych. Zimmermann byłby zapewne uniknął powyższego błędnego wniosku, gdyby wyszedł z równania dokładnego jak np. w pracach Obrębowicza, Bełzeckiego, Czopowskiego, Szelałowski, Bodaszewskiego i Vetulaniego.

§ 5. Przechodząc teraz do dziedziny wyboczenia niesprężystego wykażemy z łatwością głębokie i istotne różnice odnośnego zagadnienia w porównaniu do wyboczenia sprężystego. Przedewszystkiem pręt nie jest już układem zachowawczym, a więc traci dlań ważność kryterjum energetyczne stałości równowagi. Metoda drobnych drgań również niema zastosowania. Ponadto komplikuje się napozór zadanie różnym zachowaniem się metali odkształczanych poza granicę sprężystości. Jakże więc określić P_{kr} ? Ażeby odpowiedzieć na to pytanie rozpatrzmy dokładnie wykres rozciągania i ściskania dla wszelkich materiałów konstrukcyjnych.

Przy badaniu doświadczalnym rozciągania lub ściskania prętów pryzmatycznych zwiększa się stopniowo napięcie P działające wzdłuż osi pręta, a więc zarazem i naprężenie

$$\sigma = \frac{P}{F_0}$$

odniesione do pola przekroju F_0 w stanie nieobciążonym. Każdy przyrost wartości σ w doświadczaniu rzeczywiście odbywa się oczywiście z pewną prędkością $\frac{d\sigma}{dt}$ i wywołuje odpowiedni przyrost odkształcenia ϵ o prędkości $\frac{d\epsilon}{dt}$. Przedstawiając każdą parę jednoczesnych wartości ϵ i σ punktem na płaszczyźnie współrzędnych prostokątnych otrzymujemy doświadczalny wykres (ϵ, σ) charakterystyczny dla badanego materiału. Rzecz jasna, że wykres taki musi być zależny od prędkości, z jaką wzrasta ϵ i σ . Wynika to już z tego, co wiadomo o t. zw. „opóźnieniu sprężystym“.

Ale jeszcze silniej wychodzi na jaw zależność od prędkości doświadczania poza obszarem odkształceń sprężystych, gdy mamy do czynienia ze znacznie większymi od nich odkształceniami niesprężystymi czyli plastycznymi (albo „trwałymi“). Taki przypadek zachodzi u licznych metali, jak np. stal konstrukcyjna¹⁾, miedź walcowana lub kuta i t. p.

¹⁾ Nazwa stal obejmuje obecnie wszystkie materiały żelazne z wyjątkiem żeliwa, czyli żelaza łanego. Podział dawniejszy na żelazo (spawalne lub zlewne) i stal (spawalną lub zlewną) opierano na różnieniu ilościowym bądź to co do zawartości węgla (żelazo do 0,25% C, stal powyżej 0,25% C), bądź też co do wytrzymałości doraźnej (żelazo mniej jak 50 kg/mm², stal 50 kg/mm² i więcej). Taki podział panował w Europie środkowej i wschodniej pod wpływem słownictwa technicznego niemieckiego i odpowiadał nazwom niemieckim „Eisen“ i „Stahl“. Natomiast w języku francuskim jest oddawna w użyciu jedna wspólna nazwa „acier“ i podobnie w angielskim „steel“.

Sztuczność dawnego podziału na „żelazo“ i „stal“ oraz nieporozumienia w stosunkach międzynarodowych skłoniły Komitety Normalizacyjne kilku państw, a między niemi i nasz do uzgodnienia nazwy „stal“ z wymienionymi nazwami:

Najbardziej pożądanym byłoby zbadanie wykresu, odpowiadającego stanom trwałej równowagi wewnętrznej (międrzycząsteczkowej) przy każdej parze odpowiadających sobie wartości ϵ i σ . Atoli to jest praktycznie niewykonalne, gdyż wymagałoby nieskończenie powolnej zmiany wielkości ϵ lub σ . Zadawalniamy się przeto wykonaniem badania w ten sposób, że np. po udzieleniu wartości σ pewnego przyrostu, obserwujemy rosnące odkształcenie tak długo, aż prędkość tego przyrostu stanie się znikomo małą, poczem dopiero zwiększamy znowu σ . Należy o tem dobrze pamiętać przy teoretycznej interpretacji wykresu (σ, ϵ), szczególnie u metali posiadających wybitną granicę plastyczności (ang. Yield point, fr. limite d'élasticité, niem. Fließgrenze, ros. Kriticzeskaja toczka albo przediel tiekuczestii). Tak nazywamy, jak wiadomo, pewną charakterystyczną dla materiału wartość naprężenia — oznaczmy ją przez σ_{pl} — przy osiągnięciu której pojawiają się szybko zrazu rosnące odkształcenia plastyczne bez jednoczesnego wzrostu naprężenia. Obciążenie wartością σ_{pl} wywołuje zatem zaburzenie równowagi wewnętrznej, a nowy stan równowagi wytwarza się dopiero po pewnym czasie. Doświadczenie poucza bowiem, że prędkość odkształceń plastycznych szybko maleje, stając się równą zeru, gdy np. u pewnych rodzajów stali zmiana długości osiągnie około 2^o/_o.

Odpowiednia część wykresu ma mniej więcej postać odcinka prostego równoległego do osi ϵ i odległego od niej o wielkość σ_{pl} .

Od chwili odpowiadającej końcowi tego odcinka potrzeba znowu dalszego wzrostu naprężenia, ażeby zwiększyć odkształcenie (ob. rys. 1).

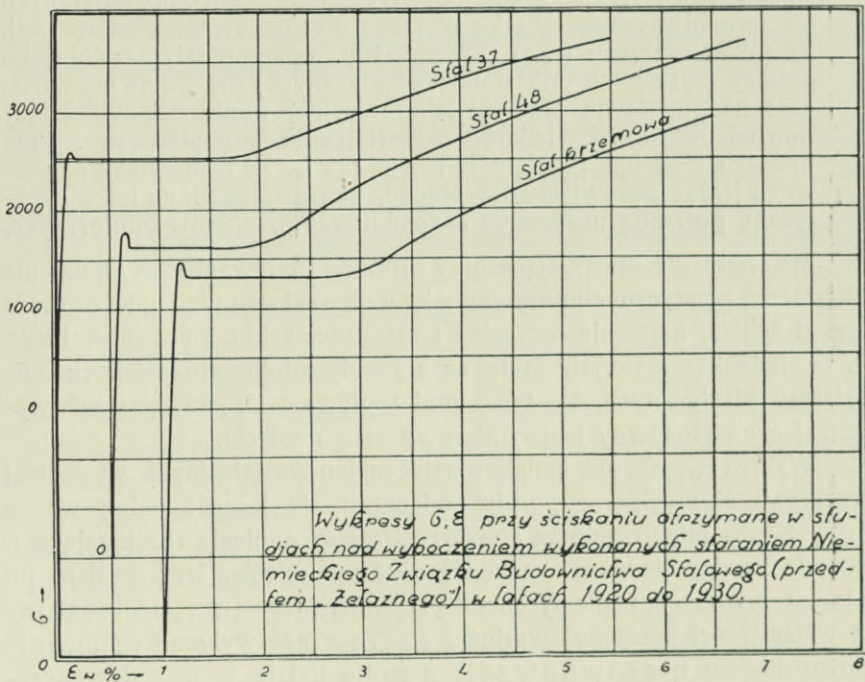
Jeżeli od pewnego punktu wykresu zmniejszymy naprężenie σ aż do zera, to odkształcenia maleją według prawa odkształceń sprężystych, czyli otrzymujemy linię prawie prostą nachyloną do osi pod tym samym kątem, co początkowa linja od zera do granicy proporcjonalności.

§ 6. W takim wykresie można odróżnić trzy obszary. Obszary te, częściowo zachodzące na siebie nawzajem, odpowiadają trzem własnościom materiału, a mianowicie: sprężystości, plastyczności i hartowności mechanicznej, czyli zdolności do twarwienia (wskutek odkształceń plastycznych).

Obszar sprężystości zajmuje głównie pierwsza część wykresu prawie prosta i stroma aż do $\sigma = \sigma_{pl}$. Jest to obszar stałej równowagi wewnętrznej. Równowaga ta staje się niestałą przy zbliżeniu

angielską i francuską. Stosownie do tego rozumiemy teraz przez „żelazo“ niemal tylko pierwiastek chemiczny *Fe*; materiały techniczne zaś, zawierające głównie żelazo, noszą nazwę: „stal“, jeżeli są wytworem walcownictwa i żeliwo, jeżeli są wytworem odlewnictwa.

się do σ_{pl} , jak o tem świadczy „zęb“ wykresu¹⁾ w miejscu przejścia w prostą poziomą obszaru plastyczności. Z tego powodu odróżniają wyższą granicę plastyczności σ_{pl}^{10} odpowiadającą szczytowi „zęba“ od niższej granicy plastyczności σ_{pl}^n odpowiadającej jego podstawie, a więc praktycznie równej σ_{pl} . Zważywszy, że wysokość, a nawet kształt tego zęba zmieniają się u jednego i tego samego materiału zależnie od sposobu i szybkości wzrostu obciążenia, a tylko wartość σ_{pl} jest ze znacznym przybliżeniem od tego niezależna, możemy tylko tej wielkości przypisywać charakter stałej materiału.



Rys. 1.

Obszar plastyczności, przedstawiony częścią wykresu równoległą do osi ϵ , jest obszarem nierównowagi; materiał „płylnie“ niejako z prędkością wyraźnie malejącą aż do początku trzeciego obszaru, w którym linja wykresu znowu się podnosi.

Ten trzeci obszar jest znowu obszarem równowagi wewnętrznej dzięki tajemniczemu zjawisku twardnienia (fr. *écrouissage*,

¹⁾ Niektóre systemy maszyn wytrzymałościowych dają zamiast tego dwa lub więcej zębów, co się wyjaśnia różnorodną reakcją części maszyny wywierającej obciążenie na części mierzące odkształcenie, oraz wpływem bezwładności części mechanizmu samopiszącego wykres (σ, ϵ).

niem. *Verfestigung*, ang. cold work effects). Opór wewnętrzny materiału przeciw rosnącym odkształceniom plastycznym, który w drugim obszarze był stałym, zaczyna teraz znowu wzrastać wraz z wielkością odkształcenia. Materiał „krzepnie“ niejako i zmienia swoje własności wytrzymałościowe, stając się przede wszystkim twardszym i kruchszym, t. j. mniej zdolnym do nowych odkształceń plastycznych. Stąd nazwa zjawiska twardnienia znanego w technologii metali pod nazwą „skutków zimnej obróbki“ albo także „zgniotu“.

Zjawisko twardnienia występuje również u metali nie posiadających wyraźnej granicy plastyczności, a więc pozbawionych obszaru plastyczności, jako obszaru nierównowagi wewnętrznej. Za punkt wykresu (ϵ , σ) równoważny granicy plastyczności (jako granicy wyraźnych odkształceń plastycznych) przyjmuje się wówczas na podstawie praktyki laboratoryjnej punkt odpowiadający pewnej określonej wielkości odkształcenia jednostkowego. Przy próbach stali np. przyjęto ją równą 0,2^o/_o. Ze stanowiska naukowego jest to oczywiście dowolność, usprawiedliwiona tylko praktyczną potrzebą uczynienia zadość literze przepisów odbiorczych.

Materiały nie ujawniające przy próbach rozrywania lub zgniatania odkształceń plastycznych nazywamy *kruchemi*. Do nich należą gorsze gatunki żeliwa, kamienie naturalne i sztuczne, szkło, porcelana, beton i t. p. Jednakże materiały takie są z reguły zdolne do wielkich odkształceń plastycznych, ale tylko pod wpływem sił zewnętrznych wytworzących stosowny trójwymiarowy stan napięcia.

Wykres (ϵ , σ) dla metali plastycznie odkształcalnych w postaci otrzymywanej zwykle z „prób“ odznacza się jeszcze jedną ważną cechą. Skoro mianowicie w obszarze trzecim napięcie rozciągające P osiągnie maximum to nie zachodzi zaraz pęknięcie, lecz dopiero po dalszym wydłużeniu plastycznym przy malejącej (w sposób zależny od właściwości maszyny) wartości P . Ta część wykresu odpowiada znowu stanom nierównowagi, a nadto ustaje w niej dotychczasowa równomierność wydłużania, gdyż w chwili osiągnięcia maximum P pojawia się miejscowe zwężenie przekroju („szyjka“) pociągające za sobą koncentrację dalszych wydłużeń w pobliżu tego miejsca. Z tego powodu odnośna część wykresu winna być wyłączona, jako niedopuszczająca jasnej i prostej interpretacji teoretycznej. Ostatni teoretycznie doniosły punkt podany przez wymienioną największość napięcia P , a więc i największość naprężenia (odniesionego do pierwotnego pola przekroju) na granicy równowagi wewnętrznej. Wartość ta określa doraźną wytrzymałość na rozciąganie (albo „na rozrywanie“).

Doświadczenia ze ściskaniem tychże metali nie prowadzą do analogicznego punktu wykresu, gdyż ściskanie podłużne wywołuje roz-

szerzenie poprzeczne zmniejszające oczywiście wartość naprężenia w odniesieniu do przekroju rzeczywistego. Powstaje teraz miejscowe zgrubienie poprawiające zwykle warunki równowagi wewnętrznej. Za to występuje inny czynnik zakłócający, a mianowicie niebezpieczeństwo „wymboczenia“, zależne jak wiadomo od „smukłości“ ściskanego pręta.

Z tego powodu nie wyznacza się doraźnej wytrzymałości na ściskanie takich metali, przyjmując zgóry w praktycznych obliczeniach wytrzymałościowych, że ona jest przynajmniej równa doraźnej wytrzymałości na rozciąganie.

§ 7. W wykresach (ϵ , σ) rozciągania lub ściskania możemy przeto ustalić wogóle następujące ważne punkty:

1) Granica proporcjonalności, t. j. punkt do którego linja wykresu jest odcinkiem prostej przechodzącej przez początek współrzędnych. Obydwa odcinki odpowiadające rozciąganiu i ścisnaniu należą przytem do jednej prostej a zatem moduły odkształcenia sprężystego przy rozciąganiu i ścisnaniu naprężeniami nie przewyższającymi granicy proporcjonalności mają wspólną wartość E .

2) Granica sprężystości, t. j. punkt do którego linja wykresu przy obciążeniu rosnącym zlewa się z linją odpowiadającą obciążeniu malejącemu aż do zera. Z licznych badań doświadczalnych dawniejszych wysnuwano wnioski przeczący wogóle istnieniu ścisłej granicy sprężystości. Nawet bowiem przy bardzo małych naprężeniach materiału obciążonego poraz pierwszy stwierdzono jakoby po zniesieniu obciążenia, że drobna część odkształcenia całkowitego pozostawała trwale. Atoli kiedy nowsi badacze wykonali metodami udoskonalonemi pomiary wielokrotne przy cyklach obciążeń rosnących powoli i malejących następnie aż do zera, to stwierdzili, że już po paru cyklach przedstawia się odkształcenie jako zjawisko odwracalne w dość obszernych granicach. Bardzo małe odkształcenia plastyczne dające się dostrzec po pierwszym cyklu tłumaczą się nieuniknionemi niejednorodnościami i naprężeniami wewnętrznymi materiałów technicznych o budowie z reguły bardzo złożonej. A zatem granica sprężystości ma być realny i daje się wyznaczyć chociaż nie w tak łatwy sposób, jaki jest pożądanym przy wykonywaniu „prób“ materiału.

3) Granica plastyczności bliżej określona już powyżej.

4) Granica wytrzymałości t. j. najwyższy punkt linii wykresu, którego rzędna przedstawia wytrzymałość doraźną.

Sporządzany zwykle w laboratorjach technicznych wykres (ϵ , σ) na podstawie „próby rozciągania“ pozwala z reguły wyznaczyć tylko granicę proporcjonalności i granicę wytrzymałości, a często także i granicę plastyczności. Wyznaczenie granicy

sprężystości wymaga osobnego badania przyczem do celów technicznych poprzestajemy na pomiarze praktycznej granicy sprężystości, określonej dla metali wielkością naprężenia, które powoduje wydłużenie trwałe o wartości 0,001 do 0,003%. Podobne badanie jest potrzebne także do wyznaczenia punktu określonego powyżej, który się uważa za równoważny granicy plastyczności w przypadku gdy materiał wyraźnej takiej granicy nie posiada.

Wykresy (ϵ, σ) dla materiałów kruchych są znacznie prostsze i składają się z odcinka prostego wychodzącego z początku układu i przechodzącego łagodnie w łuk zwrócony wypukłością ku osi σ .

§ 8. Teraz dopiero możemy przystąpić do odpowiedzi na pytanie postawione na początku § 5. Szukanie krytycznej wartości siły P ściskającej pręt osiowo w obszarze małych smukłości, gdy wzór Eulera traci ważność, musi się odbywać inaczej w przypadku, kiedy materiał pręta objawia wyraźną granicę plastyczności, a inaczej kiedy ten materiał granicy takiej nie posiada. W pierwszym bowiem przypadku jest osiągnięcie granicy plastyczności (oczywiście niższej) równoznaczne ze zwichnięciem równowagi wewnętrznej, co prowadzić musi do wybożenia bez względu na wartość smukłości, o ile tylko ta wartość jest zawarta między granicami, które oznaczymy przez:

$\lambda_{gr}^w \equiv$ wyższa smukłość graniczna,

$\lambda_{gr}^n \equiv$ niższa smukłość graniczna.

Wyższą smukłość graniczną znajdziemy z wzoru o tej samej postaci, co wzór (3) na smukłość graniczną zamykającą ważność zwykłego wzoru Eulera, a mianowicie:

$$\lambda_{gr}^w = \pi \sqrt{\frac{E'}{\sigma_{pl}^{(n)}}} \dots \dots \dots (5)$$

przyczem E' oznacza wartość pochodnej $\frac{d\sigma}{d\epsilon}$ lewostronnej w punkcie $\sigma = \sigma_{pl}^{(n)}$.

Niższa smukłość graniczna da się ustalić tylko doświadczalnie, albowiem przy bardzo małej smukłości staje się prędkość twardnienia większa od prędkości wybożenia, którego dzięki temu nie można zrealizować. W przytoczonych powyżej badaniach doświadczalnych Niem. Związku Budownictwa Stalowego (D. St. V.) znaleziono (dla stali) wartość λ_{gr}^n leżącą między 20 a 30, zaś λ_{gr}^w od 70 do 80 zależnie od rodzaju stali. Pomiedzy temi granicami smukłości okazało się ze znaczną dokładnością zgodnie z naszym powyższym wnioskiem teoretycznym:

$$\sigma_{kr} = \sigma_{pl}^{(n)}, \text{ czyli } P_{kr} = F \cdot \sigma_{pl}^{(n)}$$

Nic tedy dziwnego, że wzór teoretyczny wspomniany w § 3, czy to w postaci znanej z pracy Kármán'a z r. 1910, czy też w udoskonalonej postaci W. Burzyńskiego z r. 1930 nie nadaje się do wyznaczenia P_{kr} w przypadku materiałów o wyraźnej granicy plastyczności. Wzór ten nie może mieć przeto pretensji do ważności ogólnej, jaką mu przypisywano powszechnie, dopóki M. Broszko nie wykrył sprzeczności, do których wzór prowadzi w niektórych przypadkach. Wprawdzie nowy wzór, ustawiony przez Broszkę w miejsce wzoru Kármán'a nie może być również traktowany jako ściśle rozwiązanie teoretyczne naszego zagadnienia, jak tego dowiódł Burzyński w przytoczonej pracy z r. 1930 p. t. „O wyboczeniu posprężystem“ (Czas. Techn.), jednakże niewątpliwą zasługą odnośnej pracy Broszki jest znalezienie słabej strony wzoru cenionego przez ogromną większość inżynierów - badaczy wskutek zaufania do wielkiego i zasłużonego autorytetu Kármán'a.

Atoli ta słaba strona wzoru niema charakteru ogólnego, lecz tkwi głównie w braku zastrzeżenia wynikającego z naszych rozważań, że wzór ten można stosować tylko w przypadkach, gdy funkcja $\sigma=f(\epsilon)$ materiału pręta jest, jak się wyrażają matematycy — *monotonicznie rosnącą*. To ważne zastrzeżenie wyklucza oczywiście stosowalność wzoru Engesser'a-Kármán'a (jak go nazywają Niemcy) do prętów stalowych o wyraźnej granicy plastyczności, naco widocznie nie zważa W. Rein w przytoczonej powyżej pracy z r. 1930, gdyż próbuje uwzględnić nawet „zab“, z wykresu (ϵ, σ) , a sprzeczności stara się usunąć sztucznem, a niezrozumiałem „dokładnem“ obliczeniem „modułu wyboczenia“.

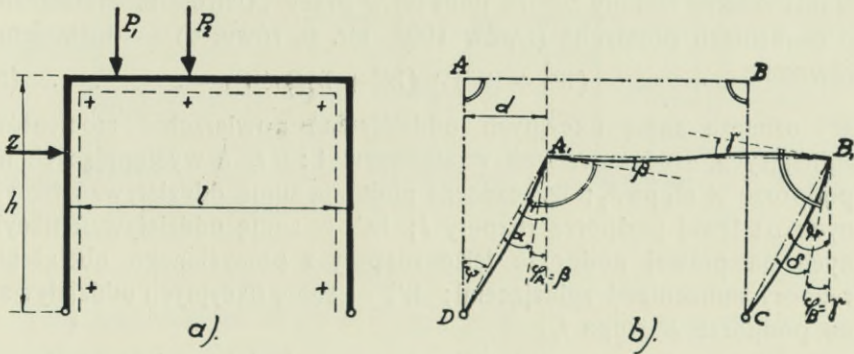
Ale i w tych przypadkach, gdy w wykresie (ϵ, σ) materiału pręta σ ciągle rośnie wraz z ϵ , nie może być mowy o ważności wzoru E.-K. dla prętów o dowolnej zwartej postaci przekroju. Burzyński zwraca słusznie uwagę na to, że wyrażenie we wzorze, określające sztywność zginania powyżej granicy proporcjonalności odpowiada tylko przypadkowi przekrojów podwójnie symetrycznych, a w innych przypadkach należałoby szukać nietylko nowych wyrażeń na sztywność zginania (lub „moduł wyboczenia“), lecz także zależności kierunku wyboczenia od postaci przekroju. Z tego zdawał sobie sprawę już Engesser, jak dowodzi jego praca, którą czytałem może 25 lat temu w jednym z roczników V. D. I.

Co się tyczy wzoru Broszki w postaci (1a), to jak już zaznaczono w odsyłaczu w § 2, jego zgodność z doświadczeniem potwierdza się właśnie w przypadku materiału o wyraźnej granicy plastyczności, kiedy, jak dowiedliśmy, nie można stosować wzoru teoretycznego E.-K. Wzór Broszki należy przytem traktować jako empiryczny.

Wzór teoretyczny Engesser'a-Kármán'a (zwłaszcza z poprawką Burzyńskiego) jest niewątpliwie stosowalny w przypadkach materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności i przekrojów zwartych o symetrii podwójnej. Wyraz „stosowalny“ odnosi się przytem do warunków laboratoryjnych zbliżonych możliwie do uproszczonego schematu teoretycznego przedstawionego w § 1. Nie może być zatem wogóle mowy o bezpośredniej stosowalności omawianych tutaj wzorów do praktyki konstrukcyjnej z powodu znacznego ogromnego wpływu drobnych zboczeń prętów praktyki od teoretycznego schematu na wartość obciążenia niebezpiecznego, zwłaszcza przy wartościach smukłości leżących w okolicy smukłości granicznej. Ale jak już zaznaczyłem w § 3 niniejszej pracy, chodziło mi w niej o wyjaśnienie naukowej strony zagadnienia w sposób zapobiegający być może nowym sporom i nieporozumieniom na temat teorii wybożenia niesprężystego.

Rama prostokątna dwuprzegubowa.

Pod wpływem obciążenia rama dwuprzegubowa (rys. 1 a) przybierze po odkształceniu kształt wskazany w rysunku 1 b. W ogólnym wypadku obciążenia niesymetrycznego, naroża A i B rozpatrywanej ramy ulegną przesunięciu o wielkość d . Równocześnie końcowe przekroje rozpory o rozpiętości l doznają obrotu o wartości β i γ , końcowe zaś górne przekroje słupów o wysokości h — obrotu o kąty α i δ . Ustrój ramowy po przesunięciu naroży A i B i obrocie najbliższych



Rys. 1 a, b.

tym punktom przekrojów nie zmienia zasadniczo kątów prostych, które tworzą ze sobą słupy i rozpory.

Między kątami w punkcie A_1 zachodzi więc następujący związek

$$\varphi_A + \alpha = \psi \quad \dots \quad (1)$$

Ponieważ styczne do linii ugięcia rozpory i słupa w punkcie A_1 tworzą ze sobą kąt prosty, więc

$$\varphi_A = \beta \quad \dots \quad (2)$$

Równanie (1) otrzyma więc postać

$$\beta + \alpha = \psi \quad \dots \quad (1a)$$

Podobny związek zachodzi i dla kątów w B_1

$$\gamma + \delta = \psi \quad (3)$$

Z równań (1a) i (3) możemy wyeliminować kąt ψ , który charakteryzuje przesunięcie naroży ramy, otrzymamy

$$\beta + \alpha = \gamma + \delta$$

lub w wartościach bezwzględnych

$$(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 0 \quad (4)$$

Równanie (4) podaje zasadniczy związek między kątami podporowemi (t. j. kątami, jakie tworzą styczne do linii ugięcia prętów schodzących się w narożu A_1 i B_1 , z prostymi łączącymi naroża ramy) naroży A i B . Związek ten przedstawia warunek ciągłości dwusłupowej ramy dwuprzegubowej o kształcie prostokątnym.

W równanie (4) nie wchodzi przesunięcie d ani kąt ψ zależny bezpośrednio od tego przesunięcia. Podobnie jak warunek ciągłości belki ciągłej kształtu

$$\alpha + \beta = 0$$

— warunek wyrażony równaniem (4) podaje, że „suma kątów podporowych dwu naroży A i B ramy równa jest zeru“.

Wprowadzając zamiast kątów podporowych fikcyjne oddziaływania według metody autora podanej w pracy „Ustroje hiperstatyczne o elementach prostych“ (Lwów 1928, str. 6, równ. 4) — dostaniemy równanie

$$(W'_1 + W'') + (W' + W''_2) = 0 \quad (5)$$

W'_1 oznacza sumę fikcyjnych oddziaływań powierzchni momentów zginających, zredukowanych w stosunku 1: EI , a występujących na podporze A słupa h_1 ; W'' oznacza podobną sumę oddziaływań fikcyjnych na lewej podporze rozpory l ; W' — sumę oddziaływań fikcyjnych na prawej podporze tejże rozpory z pomyślanego obciążenia rozpory momentami zginającymi; W''_2 — sumę fikcyjnych oddziaływań na podporze B słupa h_2 .

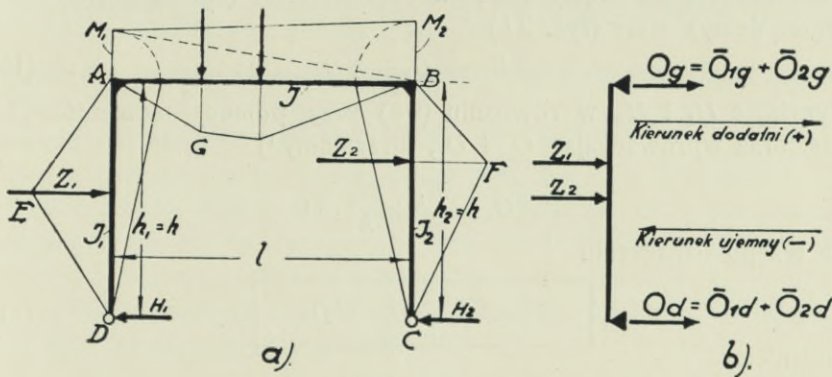
W rozpatrywanym wypadku fikcyjne oddziaływania W mają następujące wartości (por. rys. 2)

$$\begin{aligned} W'_1 &= \frac{1}{I_1} \left(T'_1 + \frac{1}{3} M_1 h_1 \right) \\ W'' &= \frac{1}{I} \left(T'' + \frac{1}{3} M_1 l + \frac{1}{6} M_2 l \right) \\ W' &= \frac{1}{I} \left(T' + \frac{1}{3} M_2 l + \frac{1}{6} M_1 l \right) \\ W''_2 &= \frac{1}{I_2} \left(T''_2 + \frac{1}{3} M_2 h_2 \right) \end{aligned}$$

przyczem T'_1 przedstawia pomyślane oddziaływanie powierzchni zwykłych momentów ADE (t. j. momentów występujących w belce AD , uważanej za swobodnie podpartą na obydwu podporach) w punkcie A na prawej podporze; T'' — oddziaływanie powierzchni AGB na podporze A (lewej); T' — oddziaływanie tej samej powierzchni na podporze B (prawej); T''_2 — oddziaływanie fikcyjne powierzchni BFC na podporze B (lewej) słupa h_2 . Dalsze wyrazy objęte nawiasami wyrażają fikcyjne oddziaływania powierzchni trójkątnych momentów o wysokościach M_1 i M_2 (rys. 2) będących nieznanymi a szukanymi momentami węzłowymi w punktach A i B .

Wstawiając powyższe wartości na W w równanie (5) otrzymamy

$$\left(\frac{T'_1}{I_1} + \frac{T''}{I} + \frac{T'}{I} + \frac{T''_2}{I_2} \right) + \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{3} M_1 h_1 + \frac{1}{I} \cdot \frac{1}{3} M_1 l + \frac{1}{I} \cdot \frac{1}{6} M_2 l + \frac{1}{I} \cdot \frac{1}{3} M_2 l + \frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{3} M_2 h_2 + \frac{1}{I} \cdot \frac{1}{6} M_1 l = 0.$$



Rys. 2 a, b.

Po pomnożeniu całego równania przez I i oznaczeniu stosunków momentów bezwładności

$$\boxed{m_1 = \frac{I}{I_1}} \quad \boxed{m_2 = \frac{I}{I_2}} \quad \dots \quad (6)$$

mamy

$$(m_1 \cdot T'_1 + T'' + T' + m_2 \cdot T''_2) + m_1 \cdot \frac{1}{3} M_1 h_1 + \frac{1}{3} M_1 l + \frac{1}{6} M_2 l + \frac{1}{3} M_2 l + m_2 \cdot \frac{1}{3} M_2 h_2 + \frac{1}{6} M_1 l = 0.$$

Jeżeli wyrazy objęte nawiasem oznaczymy literą T_0

$$\boxed{T_0 = m_1 \cdot \bar{T}'_1 + \bar{T}'' + \bar{T}' + m_2 \cdot \bar{T}''_2} \quad \dots \quad (7)$$

(\bar{T}' i \bar{T}'' wyrażone w wartościach bezwzględnych) i zgrupujemy wyrazy z M_1 i M_2 , otrzymamy

$$\bar{T}_0 + \frac{1}{3} M_1 \left(m_1 \cdot h_1 + \frac{3}{2} l \right) + \frac{1}{3} M_2 \left(m_2 \cdot h_2 + \frac{3}{2} l \right) = 0 \quad (8)$$

Równanie fikcyjnych oddziaływań w postaci wyrażonej równaniem (8) oraz znane warunki równowagi, posłużą nam do rozwiązywania rozpatrywanej ramy. Ponieważ mamy do czynienia z dwiema wielkościami niewiadomymi M_1 i M_2 , potrzebne nam jest jeszcze jedno równanie, które otrzymamy z warunku rzutów sił poziomych (rys. 2) w postaci

$$\Sigma Z + \Sigma H = 0 \quad (9)$$

lub w naszym przypadku

$$\Sigma Z + \bar{H}_1 + \bar{H}_2 = 0 \quad (9a)$$

gdy przez \bar{H}_1 i \bar{H}_2 oznaczymy parcie poziome słupa h_1 i słupa h_2 wyrażone w wartościach bezwzględnych.

Zewnętrzne siły poziome Z działające na słupy ramy h_1 i h_2 przenoszą się na węzły ramy w częściach O_g (naroże górne) i O_d (węzeł dolny), więc (rys. 2 b)

$$\Sigma Z = \Sigma \bar{O}_g + \Sigma \bar{O}_d \quad (10)$$

Wyrażając \bar{H}_1 i \bar{H}_2 w równaniu (9a) przy pomocy momentów M_1 i M_2 oraz wprowadzając O_g i O_d , otrzymamy¹⁾

$$\Sigma O_g - \frac{\bar{M}_1}{h} + \frac{\bar{M}_2}{h} = 0$$

lub też po oznaczeniu

$$\bar{R} = \Sigma \bar{O}_g = \bar{O}_{1,g} + \bar{O}_{2,g} \quad (11)$$

dostaniemy

$$\bar{R} - \frac{\bar{M}_1}{h} + \frac{\bar{M}_2}{h} = 0 \quad (9b)$$

po uwzględnieniu, że $h_1 = h_2 = h$, jako drugie szukane równanie dla wyznaczenia niewiadomych M_1 i M_2 .

Wyznaczoną z równania (9b) wartość na M_2 wstawiamy w równanie (8). Uwzględniając, że $h_1 = h_2 = h$, otrzymamy po wykonaniu działań równanie

$$\bar{T}_0 + \frac{1}{3} M_1 (m_1 \cdot h + 3l + m_2 \cdot h) = \frac{1}{3} \bar{R} h (m_2 \cdot h + \frac{3}{2} l)$$

skąd

$$M_1 = \frac{\bar{R} h (m_2 \cdot h + 1,5 l) - 3 \bar{T}_0}{(m_1 + m_2) \cdot h + 3 l} \quad (12)$$

¹⁾ Por. W. Gehler: „Der Rahmen“, III wyd. str. 120 i poprzednie.

Równanie (12) podaje wartość na moment M_1 w narożu lewym (A) ramy dwusłupowej, o dwu przegubach, dowolnie obciążonej i o różnych momentach bezwładności I_1, I, I_2 . W równaniu tem \bar{R} i \bar{T}_0 , jako wartości bezwzględne, przybierają znaki plus lub minus zależnie od kierunku działania sił oraz przyjętych oznaczeń momentów dodatnich i ujemnych.

Jeżeli znakiem dodatnim oznaczymy te momenty zginające, które wywołują ciągnięcia we włóknach skrajnych prętów ramy od strony wewnętrznej według oznaczenia linjami kreskowanymi w rysunku 1 a , to wchodzące w T_0 fikcyjne oddziaływania powierzchni zwykłych momentów T' i T'' będą miały wartość dodatnią w wypadku, gdy siły zewnętrzne (obciążenia) będą skierowane do wewnątrz omawianego ustroju ramowego. W przeciwnym wypadku, gdy dane obciążenie działać będzie od strony wewnętrznej ramy (np. siła Z_2 w rys. 2), to odpowiednie oddziaływanie T' i T'' w równaniu (7) oznaczyć należy znakiem ujemnym.

Wartość na \bar{R} obliczymy z równania (11) w postaci

$$\bar{R} = \bar{O}_{1g} + \bar{O}_{2g}.$$

Przez \bar{O}_{1g} oznaczono tę część wartości sumy sił poziomych (składowych poziomych) działających na słup h_1 , która przenosi się na górne naroże (A) słupa h_1 , przyczem słup h_1 uważany jest za belkę swobodnie podpartą w punktach A i D (rys. 2 a i b). Wielkość \bar{O}_{1g} ma więc znaczenie reakcji sił poziomych działających w h_1 na podporze górnej słupa h_1 uważanego za belkę wolnopodpartą. Wyznaczenie wartości O_{1g} nie przedstawia więc żadnej trudności.

Podobnie przez \bar{O}_{2g} oznaczono reakcję sił poziomych działających na słup h_2 na podporze górnej (B).

Wielkości \bar{O}_{1g} i \bar{O}_{2g} podane są w wartościach bezwzględnych. Zależnie od kierunku działania poziomych sił Z otrzymujemy na \bar{O}_{1g} i \bar{O}_{2g} znak dodatni lub ujemny. Za kierunek dodatni — według poprzedniego przyjęcia — uważać należy kierunek sił Z od strony lewej ku prawej. Dla danej siły Z działającej od lewej ku prawej stronie występująca wielkość O_{1g} (lub O_{2g}) posiada również znak dodatni, jako posiadająca ten sam kierunek, co siła Z .

W wypadku, gdy siły zewnętrzne działają tylko na rozporze (słupy nieobciążone) lub gdy $O_{1g} = O_{2g}$ (równe oddziaływania na podporze górnej słupów o kierunku przeciwnym) wtedy $R=0$, a równanie (12) przybiera prostszą postać

$$M_1 = - \frac{3 \bar{T}_0}{(m_1 + m_2)h + 3l} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (12 a)$$

Dla obciążeń rozpory działających od strony górnej teje rozpory moment M_1 będzie zawsze ujemnym.

W ostatnim wypadku według równania (7)

$$T_0 = T'' + T' = F$$

jeżeli przez F oznaczymy powierzchnie zwykłych momentów. Wtedy równanie (12a) możemy napisać w innej jeszcze postaci

$$M_1 = - \frac{3F}{(m_1 + m_2) \cdot h + 3l} \quad \dots \quad (12b)$$

Gdy momenty bezwładności słupów będą sobie równe $I_1 = I_2$, równanie ogólne na M_1 przybierze postać

$$M_1 = \frac{\bar{R} \cdot h (m h + 1,5 l) - 3 \bar{T}_0}{m \cdot 2 h + 3 l} \quad \dots \quad (13)$$

przyczem

$$\frac{I}{I_1} = \frac{I}{I_2} = m.$$

Dla $I_1 = I = I_2$ (równy przekrój słupów i rozpory)

$$M_1 = \frac{\bar{R} h (h + 1,5 l) - 3 \bar{T}_0}{2 h + 3 l} \quad \dots \quad (13a)$$

Analogicznie do wartości na M_1 moment M_2 otrzyma ogólną postać

$$M_2 = \frac{\bar{R} h (m_1 \cdot h + 1,5 l) - 3 \bar{T}_0}{(m_1 + m_2) \cdot h + 3 l} \quad \dots \quad (14)$$

W równaniu (14) podającą wartość na M_2 dodatni znak otrzymają te siły (składowe) poziome, które posiadają kierunek od prawej strony do lewej, a więc odwrotnie niż w równaniu na M_1 (por. rys. 3). Natomiast wartość T_0 jest identyczną tak w równaniu na M_1 jak i na M_2 .

W wypadku obciążenia samej tylko rozpory moment

$$M_2 = - \frac{3 \bar{T}_0}{(m_1 + m_2) \cdot h + 3 l} = - \frac{3 F}{(m_1 + m_2) \cdot h + 3 l} = M_1 \quad \dots \quad (14a)$$

M_2 równy jest momentowi M_1 tak co do znaku jak i wielkości, co zresztą wynika z ogólnego równania (12).

Identyczną również postać z równaniem na M_1 przybiera równanie na M_2 w wypadku, gdy $I_1 = I_2$, wtedy

$$M_2 = \frac{\bar{R} h (m h + 1,5 l) - 3 \bar{T}_0}{m \cdot 2 h + 3 l} \quad \dots \quad (15)$$

Mimo identycznej postaci równań (13) (wartość na M_1) i (15) (wartość na M_2) równania te różnią się między sobą. W równ. (13) — jak to powyżej zaznaczono — dodatnim kierunkiem sił poziomych jest kierunek od strony lewej ku prawej, w równaniu zaś na M_2 (równ. 15) tenże kierunek jest kierunkiem ujemnym.

1. Przykład.

Daną mamy ramę dwuprzegubową (rys. 3) obciążoną na rozporze ciężarem jednostajnie rozłożonym q oraz poziomą siłą skupioną Z działającą w narożu A ramy. Przekroje słupów są sobie równe, $I_1 = I_2$.

Momenty M_1 i M_2 obliczymy z równania 13 (15) w postaci

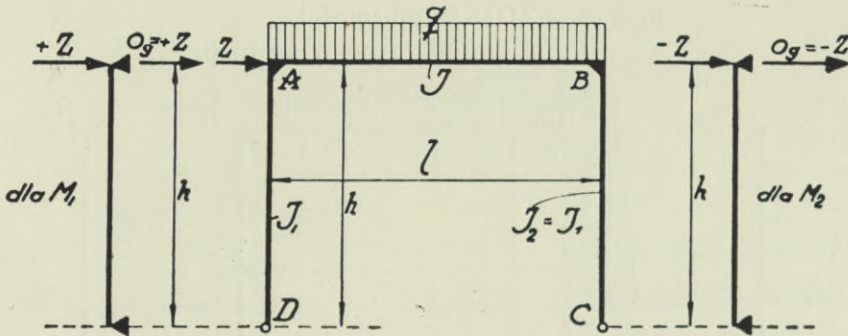
$$M = \frac{\bar{R} h (m h + 1,5 l) - 3 \bar{T}_0}{m \cdot 2 h + 3 l}$$

w czym

$$m = \frac{I}{I_1}$$

Wartość na R otrzymamy z równania (11) ($O_{2g} = 0$)

$$\bar{R} = \bar{O}_{1g} = \bar{Z}.$$



Rys. 3.

Dla M_1 kierunek siły Z jest kierunkiem dodatnim

$$R = + Z.$$

Dla M_2 kierunek ten jest kierunkiem ujemnym

$$R = - Z.$$

Wartość \bar{T}_0 obliczymy z równania (7)

$$\bar{T}_0 = m T_1' + \bar{T}'' + \bar{T}' + m \cdot \bar{T}_2''.$$

Ponieważ siła Z działa na podporze A słupa AD uważanego za belkę wolnopodpartą, nie wywołuje więc (zwykłych) momentów, tem samym $T' = 0$; podobnie $T_2'' = 0$. Więc (obciążenie q działa w kierunku do wewnątrz ustroju ramowego, T' i T'' posiada więc znak dodatni)

$$\bar{T}_0 = \bar{T}'' + \bar{T}' = F = + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} q l^2 l = + \frac{1}{12} q l^3.$$

Po wstawieniu powyższych wartości w równanie (13) otrzymamy wartość na M_1

$$M_1 = \frac{+Z \cdot h(m \cdot h + 1,5l) - \frac{1}{4} q l^3}{m \cdot 2h + 3l} = \boxed{+\frac{Z \cdot h}{2} - \frac{q l^3}{4(2mh + 3l)}}$$

Wartość momentu M_2 dostaniemy po wstawieniu $R = -Z$

$$M_2 = \frac{-Z \cdot h(m \cdot h + 1,5l) - \frac{1}{4} q l^3}{m \cdot 2h + 3l} = \boxed{-\frac{Z \cdot h}{2} - \frac{q l^3}{4(2mh + 3l)}}$$

Przykład liczbowy.

Daną jest rama dwuprzegubowa o rozpiętości rozpry $l=8,0\text{ m}$, słupów $h_1=h_2=h=5,0\text{ m}$, obciążona, jak w rysunku 4 siłami:

$$q = 1,00\text{ t/mb na rozprze } l$$

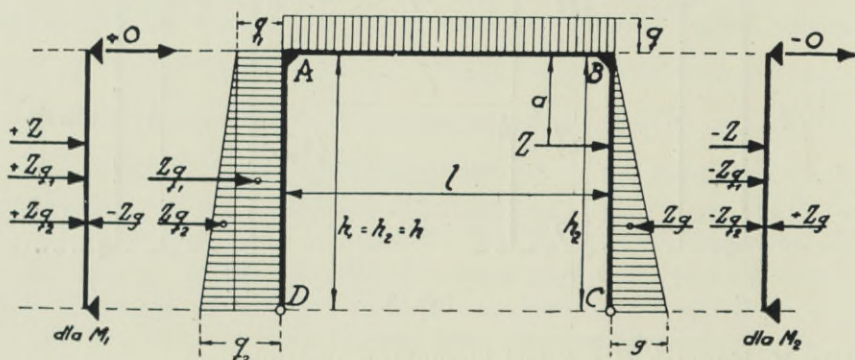
$$q_1 = 1,20\text{ t/mb}$$

$$q_2 = 3,00\text{ t/mb}$$

$$g = 0,60\text{ t/mb}$$

oraz $Z = 2,00\text{ t}$ w odległości

$a = 2,0\text{ m}$ od rozpry, na rozp. h_2 .



Rys. 4.

Moment bezwładności rozpry jest dwa razy większy od momentu bezwładności słupów ($I_1=I_2$), więc

$$m = \frac{I}{I_1} = \frac{I}{I_2} = 2.$$

Obliczamy R z równania (11). Obciążenie q_1 daje oddziaływanie na podporze górnej: $O_{q_1} = \frac{q_1 \cdot h}{2} = \frac{1,20 \cdot 5,0}{2} = 3,00\text{ t}$

Obciążenie $(q_2 - q_1)$: $O_{q_2} = \frac{1}{2} (q_2 - q_1) h \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cdot 1,80 \cdot 5,00 = 1,50\text{ t}$

Obciążenie Z : $O_z = Z \cdot \frac{h-a}{h} = 2,00 \cdot \frac{5,00-2,00}{5,00} = 1,20\text{ t}$

Obciążenie g : $O_g = \frac{1}{6} gh = \frac{1}{6} \cdot 0,60 \cdot 5,00 = 0,50\text{ t}$.

A więc dla M_1 mamy dla R wartość

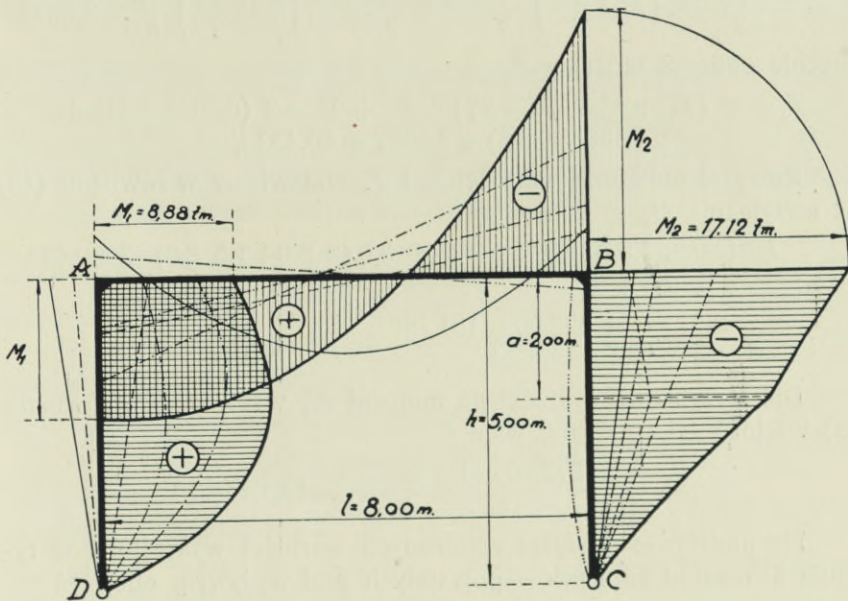
$$R = + O_{q_1} + O_{q_2} + O_z - O_g = 3,00 + 1,50 + 1,20 - 0,50 = + 5,20 t.$$

Dla M_2 $R = - 5,20 t.$

Z równania (7) obliczamy T_0 . Obciążenia q , q_1 , q_2 i g wywołują w prętach ramy, uważanych za belki wolnopodparte, momenty dodatnie, obciążenie zaś skupione Z — momenty ujemne.

Pod obciążeniem q_1 występują zwykłe momenty ograniczone parabolą. Powierzchnia tych momentów

$$F_{q_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} q_1 h^2 h = \frac{1}{12} q_1 h^3$$



Rys. 5.

uważana za obciążenie wywołuje na górnej podporze A oddziaływanie fikcyjne

$$T'_{q_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} q_1 \cdot h^3 = \frac{1}{24} q_1 h^3 = \frac{1}{24} \cdot 1,20 \cdot 5,0^3 = 6,25 t/m^2.$$

Obciążenie $(q_2 - q_1) = 1,80 t/m$ wywołuje momenty o powierzchni

$$F_{q_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} (q_2 - q_1) h^3 = \frac{1}{24} (q_2 - q_1) h^3$$

która to powierzchnia daje fikcyjne oddziaływanie na górnej podporze (odległość środka ciężkości tej powierzchni od poziomej przechodzącej przez podporę dolną ma wartość $\frac{7}{15} h$).

$$T'_{q_2} = \frac{1}{24} \cdot (q_2 - q_1) h^3 \cdot \frac{7}{15} \frac{h}{h} = \frac{7}{360} q h^3 = \frac{7}{360} \cdot 1,8 \cdot 5^3 = 4,375 \text{ t/m}^2.$$

Podobnie obciążenie q daje fikcyjne oddziaływania

$$T'' + T' = F = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} q l^2 \cdot l = \frac{1}{12} q l^3 = \frac{1}{12} \cdot 1,0 \cdot 8,0^3 = 42,667 \text{ t/m}^2.$$

Pod obciążeniem g występuje fikcyjne oddziaływanie

$$T''_g = \frac{7}{360} \cdot g h^3 = \frac{7}{360} \cdot 0,60 \cdot 5^3 = 1,458 \text{ t/m}^2.$$

Wreszcie, pod działaniem siły skupionej Z powstaje fikcyjne oddziaływanie

$$T''_z = \frac{Z \cdot a(h-a)}{2} \cdot \left(h - \frac{h+a}{3}\right) \cdot \frac{1}{h} = \frac{2,00 \cdot 2,0 \cdot 3,0}{2} \cdot \left(5 - \frac{5+2}{3}\right) \cdot \frac{1}{5,0} = 3,20 \text{ t/m}^2$$

Obecnie obliczyć możemy T_0

$$T_0 = m \cdot (T'_{q_1} + T'_{q_2} + T''_g - T''_z) + T'' + T' = 2 \cdot (6,25 + 4,375 + 1,458 - 3,20) + 42,667 = 60,433 \text{ t/m}^2.$$

Powyżej obliczone wartości R i T_0 wstawiamy w równanie (13) dla otrzymania M_1

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{R h(m h + 1,5 l) - 3 T_0}{m \cdot 2 h + 3 l} = \frac{+5,20 \cdot 5,0 (2 \cdot 5,0 + 1,5 \cdot 8,0) - 3 \cdot 60,433}{2 \cdot 2 \cdot 5,0 + 3 \cdot 8,0} = \\ &= \frac{+572,00 - 181,299}{44} = +8,88 \text{ tm}. \end{aligned}$$

Dla otrzymania wartości na moment M_2 wstawiamy w równanie (13) wartość $R = -5,20 \text{ t}$, więc

$$M_2 = \frac{-572,00 - 181,299}{44} = -17,12 \text{ tm}.$$

Na podstawie powyżej obliczonych wartości wykreślono w rysunku 5 rozkład momentów powstałych pod wpływem obciążeń zaznaczonych w rys. 4 wzdłuż prętów rozpatrywanej ramy.

Podana powyżej metoda analityczna zastosowana do dwustupowej ramy dwuprzegubowej posiada między innymi tę zaletę, że umożliwia obliczenie momentów w narożach ramy od razu pod sumarycznym i dowolnym obciążeniem słupów i rozpory. Całe postępowanie można jeszcze uprościć znacznie przez zestawienie wartości fikcyjnych oddziaływań powierzchni momentów występujących pod obciążeniami, z którymi mamy w praktyce zwykle do czynienia. Równie dobre wyniki praktyczne daje metoda „fikcyjnych oddziaływań“ i przy rozwiązywaniu innych ustroji ramowych, spotykanych w technice.

Zamocowane łuki paraboliczne o zmiennym przekroju pod wpływem działania zmiany temperatury.

Jeżeli zamocowany łuk rozgrzewa się lub ochładza o t stopni w stosunku do temperatury, w jakiej został wykonany, to ta zmiana temperatury wywołuje parcie poziome oraz moment gnący w kluczu łuku, które według Melana¹⁾ przy symetryczności łuku w stosunku do osi pionowej wyrazić można w sposób następujący:

$$H_t^{\pm} = \frac{3 E \epsilon t l}{2 \Delta s} \cdot \frac{\gamma}{\beta \gamma - \alpha^2} = C_t \frac{\gamma}{\beta \gamma - \alpha^2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1 a)$$

$$M_{0t}^{\pm} = - \frac{\alpha}{\gamma} H_t = - C_t \frac{\alpha}{\beta \gamma - \alpha^2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1 b)$$

We wzorach tych oznaczają:

E = współczynnik sprężystości materiału,

ϵ = współczynnik rozszerzalności materiału,

$\pm t$ = powstałe różnice temperatury,

l = rozpiętość łuku,

$\Delta s = \frac{l}{n}$, gdzie n oznacza ilość części, na które podzieliłiśmy łuk, zamieniając całki w równaniach pracy sprężystej na sumy. (W naszej pracy $n = 20$).

α , β i γ są to współczynniki, zależne jedynie od kształtu osi łuku, jego przekrojów oraz momentów bezwładności. Współczynniki te są prosto skrótem następujących wyrażeń:

$$\alpha = - \left[\frac{4 y_1}{I_1 \cos \varphi_1} + \frac{2 y_2}{I_2 \cos \varphi_2} + \frac{4 y_3}{I_3 \cos \varphi_3} + \dots + \frac{y_{10}}{I_{10} \cos \varphi_{10}} \right] \quad (2 a)$$

$$\beta = \left[\frac{4 y_1^2}{I_1 \cos \varphi_1} + \frac{2 y_2^2}{I_2 \cos \varphi_2} + \frac{4 y_3^2}{I_3 \cos \varphi_3} + \dots + \frac{y_{10}^2}{I_{10} \cos \varphi_{10}} \right] + \quad (2 b)$$

$$+ \left[\frac{1}{\omega_0} + \frac{4 \cos \varphi_1}{\omega_1} + \frac{2 \cos \varphi_2}{\omega_2} + \frac{4 \cos \varphi_3}{\omega_3} + \dots + \frac{\cos \varphi_{10}}{\omega_{10}} \right] \quad (2 c)$$

¹⁾ Melan: Handbuch für Eisenbetonbau (Emperger), tom I, wydanie II.

$$\gamma = \frac{1}{I_0 \cos \varphi_0} + \frac{4}{I_1 \cos \varphi_1} + \frac{2}{I_2 \cos \varphi_2} + \frac{4}{I_3 \cos \varphi_3} + \dots + \frac{1}{I_{10} \cos \varphi_{10}} \quad (2d)$$

We wzorach tych oznaczają według rys. 1:

y_n = pionowe rzędne osi łuku,

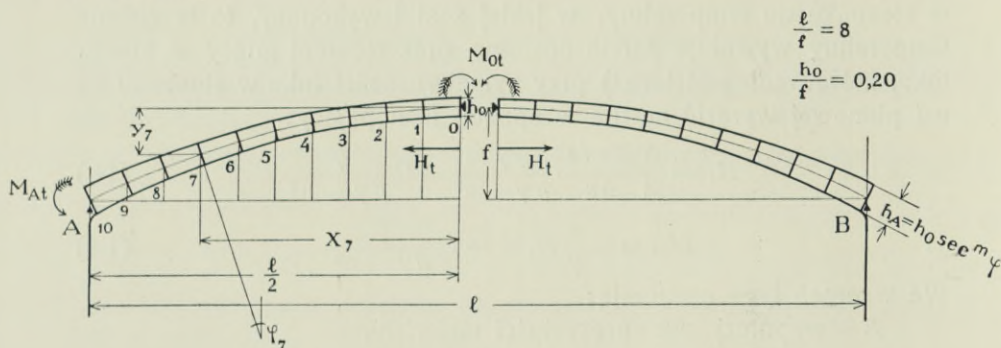
ω_n = przekrój łuku w punkcie n w kierunku promienia krzywizny,

I_n = moment bezwładności tegoż przekroju,

φ_n = kąt pochylenia przekroju n od linii pionowej.

Widzimy tu najpierw, że wzory z pod (2) mają bardzo podobną do siebie formę i jedno z drugich w łatwy sposób zapomocą suwaka wyliczone być mogą.

Wzory (2) nabierają jednak specjalnie prostej formy, jeżeli zastosować je do łuków parabolicznych; wtedy trygonometryczne funkcje można zamienić na algebraiczne, nadające się tembardziej do liczenia suwakowego.



Rys. 1.

Ponieważ łuk paraboliczny w największej ilości praktycznych wypadków można podstawić pod łuk o innej osi łukowej, przeto podaję dla użytku codziennego cały szereg wylczeń, które uporządkowane w tablice ¹⁾, pozwalają zapomocą interpolacji w prosty sposób określić dla każdego innego, bezpośrednio nie obliczanego łuku, odpowiednie wartości.

Chcąc wartości we wzorach (2) w łatwy sposób zesumować, należy nam jeszcze zrobić dla zmienności łuku pewne założenia, któreby oczywiście w dużym stopniu zbliżały się do konkretnych

¹⁾ Dla uproszczenia liczenia różni autorzy poszli przy doborze matematycznego wyrazu na zgrubienie łuku różnymi drogami, wybierając najczęściej hiperboliczne prawo dla zmiany przekroju. Porównaj w tym względzie:

Melan, Handbuch für Eisenbeton (Emperger) 1921, tom I. str. 239.

Müller — Breslau. Graficzeskaja Statika, tom II, część II, str. 543.

Strassner, Neuere Methoden, Band II, str. 53.

Kurt Beyer, Statik im Eisenbetonbau 1927, str. 285.

zgrubień łuków w naturze, poczynając od klucza a kończąc w węzłowie. Prawo, według którego nasz łuk będzie swój przekrój powiększał, przyjmijmy

$$h_n = h_0 \sec^m \varphi_n \dots \dots \dots (3)$$

gdzie h_0 = wysokość przekroju w kluczu łuku,

h_n = wysokość przekroju łuku w punkcie n ,

m = liczba dodatnia, stosownie dobrana, w zależności od potrzeb statycznych oraz stosunku $\frac{l}{f}$ obliczanego łuku.

Jeśli bowiem porównamy większość wykonanych łuków zauważymy że w całym szeregu łuków $\sec^m \varphi$ waha się dla przekroju w węzłowie między 1 a 2, rzadko tylko przy ciężkich łukach mostowych tę wartość przekraczając.

Jeżeli więc wprowadzimy do obliczenia jako oś łuku linię paraboliczną, z równaniem

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2,$$

czyli

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{8f}{l^2} x.$$

Po podstawieniu:

$$v = \frac{10}{4} \frac{l}{f} \text{ i } x = \frac{nl}{20},$$

otrzymamy:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{v} \frac{20nl}{20l} = \frac{n}{v},$$

zatem

$$\sec^2 \varphi = \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 = \frac{n^2 + v^2}{v^2},$$

czyli

$$\sec^m \varphi = \left[\frac{n^2 + v^2}{v^2} \right]^{\frac{m}{2}} \dots \dots \dots (4)$$

przyczem dla pionowych rzędnych punktów n otrzymamy, przyjmując podział osi poziomej na 20 części:

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2 = \frac{4f}{l^2} \left(\frac{nl}{20} \right)^2 = \left(\frac{n}{10} \right)^2 \cdot f.$$

Jeżeli $\sec^m \varphi$ ma być 2 to

$$\left[\frac{n^2 + v^2}{v^2} \right]^{\frac{m}{2}} = 2 \text{ czyli dla } n = 10 \text{ i } v = \frac{10}{4} \frac{l}{f}$$

$$m = \frac{\log 4}{\log \frac{n^2 + v^2}{v^2}} \dots \dots (4a)$$

Tabela A.

$z=l:f$	m
2	0,86
4	2,00
6	3,80
8	6,01
10	9,33
12	13,29

Dla praktycznego liczenia jednak wzór (4a) nie jest dogodny jak pokazuje tabela A, raczej należy dobrać sobie m tak, aby można było wzory (2) liczyć na suwaku, w najgorszym razie w prosty sposób na arytmetrze.

W wyniku tego rozważania dobieramy sobie dla różnych $\frac{l}{f}$ następującą tabelę B dla m , przy czym podajemy równocześnie w ten sposób otrzymane

$$h_A = h_0 \sec^m \varphi_A,$$

gdzie h_A jest przekrojem łuku w węzłowie.

Tabela B.

$l:f =$ m	2	4	6	8	10	12
$\frac{1}{3}$	$h_A = 1,308 h_0$	$h_A = 1,122 h_0$	$h_A = 1,063 h_0$	$h_A = 1,038 h_0$	$h_A = 1,085 h_0$	$h_A = 1,018 h_0$
$\frac{2}{3}$	$h_A = 1,710 h_0$	$h_A = 1,260 h_0$	—	—	—	—
$\frac{3}{3}$	$h_A = 2,236 h_0$	$h_A = 1,414 h_0$	$h_A = 1,202 h_0$	$h_A = 1,118 h_0$	$h_A = 1,077 h_0$	$h_A = 1,054 h_0$
$\frac{4}{3}$	—	$h_A = 1,587 h_0$	—	—	—	—
2	—	$h_A = 2,000 h_0$	$h_A = 1,444 h_0$	$h_A = 1,250 h_0$	—	—
3	—	—	$h_A = 1,736 h_0$	—	—	—
4	—	—	$h_A = 2,086 h_0$	$h_A = 1,565 h_0$	$h_A = 1,346 h_0$	—
6	—	—	—	$h_A = 1,953 h_0$	$h_A = 1,561 h_0$	$h_A = 1,370 h_0$
9	—	—	—	—	$h_A = 1,950 h_0$	$h_A = 1,607 h_0$
13	—	—	—	—	—	$h_A = 1,984 h_0$

Wszystkie wartości, jakie z naszej tabeli B otrzymamy, tak tutaj podane $k \cdot h_0$, jak później dla α , β , γ , H i M_0 , pozwalają na interpolację, tak w poziomym jak i pionowym kierunku, czyli że otrzymujemy pole wartości, na którym wszystkie w praktyce zachodzące wypadki odnaleźć możemy. W wyjątkowych wypadkach przyjdzie nam wartości ekstrapolować, zwłaszcza przy $h_A > 2h_0$. W tym wypadku ekstrapolacja jest szczególnie prosta, ponieważ funkcje szukanych wartości mają w tych rejonach bardzo łagodny przebieg i nawet podstawienie prostej zamiast krzywej nie doprowadzi do błędów poważniejszych.

Jeżeli zgodnie z równaniem (3) napiszemy:

$$\omega_n = b h_0 \cdot \sec^m \varphi_n$$

$$I_n = \frac{b h_0^3}{12} \sec^{3m} \varphi_n \text{ i uwzględnimy równ. (4)}$$

wtedy wartości dla α , β , γ nabierają następującej formy:

$$\alpha = -\frac{12l v^{3m-1}}{10^2 z b h_0^3} \left[\frac{n_0^2}{[v^2 + n_0^2]^{\frac{3m-1}{2}}} + \frac{4n_1^2}{[v^2 + n_1^2]^{\frac{3m-1}{2}}} + 2 \dots + \frac{n_{10}^2}{[v^2 + n_{10}^2]^{\frac{3m-1}{2}}} \right] \quad (5a)$$

$$\beta = \beta_I + \beta_{II}.$$

$$\beta_I = \frac{12l^2 v^{3m-1}}{10^4 z^2 b h_0^3} \left[\frac{n_0^4}{[v^2 + n_0^2]^{\frac{3m-1}{2}}} + \frac{4n_1^4}{[v^2 + n_1^2]^{\frac{3m-1}{2}}} + 2 \dots + \frac{n_{10}^4}{[v^2 + n_{10}^2]^{\frac{3m-1}{2}}} \right] \quad (5b)$$

$$\beta_{II} = \frac{\nu^{3m-1}}{b h_0 \nu^{2(m-1)}} \left[\frac{[\nu^2 + n_0^2]^{m-1}}{[\nu^2 + n_0^2]^{\frac{3m-1}{2}}} + \frac{4[\nu^2 + n_1^2]^{m-1}}{[\nu^2 + n_1^2]^{\frac{3m-1}{2}}} + 2 \dots + \frac{[\nu^2 + n_{10}^2]^{m-1}}{[\nu^2 + n_{10}^2]^{\frac{3m-1}{2}}} \right] \quad (5c)$$

$$\gamma = \frac{12 \nu^{3m-1}}{b h_0^3} \left[\frac{1}{[\nu^2 + n_0^2]^{\frac{3m-1}{2}}} + \frac{4}{[\nu^2 + n_1^2]^{\frac{3m-1}{2}}} + 2 \dots + \frac{1}{[\nu^2 + n_{10}^2]^{\frac{3m-1}{2}}} \right] \quad (5d)$$

Wzory (5) dopuszczają bardzo prosty rachunek liczbowy. Należy najpierw wyliczyć nawias dla wartości γ , wtedy wartości dla α i β_1 , wyprowadzają się przez mnożenie składników γ_n przez n^2 względnie n^4 . Jedynie β_{II} wymaga dodatkowego mozolniejszego przemnożenia przez $(\nu^2 + n^2)^{m-1}$. Mnożnik dla β_{II} , stojący przed nawiasem, jest jednak w porównaniu z mnożnikiem dla β_1 bardzo mały, wskutek czego niedokładność w liczeniu β_{II} , np. na suwaku, nie może się w żaden poważniejszy sposób odbić na β . W podobny sposób i mnożniki przed nawiasami wyprowadzają się w łatwy sposób jedne z drugich.

Ze wzorów (1) widać, że zmienny mnożnik przy C_t ma w mianowniku, tak dla H jak i M_0 , tę samą wartość. Mianownik ten zatrzymuje, jak to pokażemy na innym miejscu, także dla wszystkich innych obciążeń zewnętrznych tę samą wartość, co dla praktycznego obliczenia łuków ma duże znaczenie.

Jeżeli więc przeprowadzimy właściwe liczenie to otrzymamy dla użytku codziennego następujące tablice I—V dla H_t , M_{ot} , M_{At} , σ_{dg}^{ot} , σ_{dg}^{At} .

Dla przykładu obliczymy zapomocą naszych tablic parcie poziome oraz momenty gnące, powstałe od zmiany temperatury, w moście Melana, obliczonym przez tegoż autora w Handbuch für Eisenbetonbau, tom I, r. 1908, str. 440.

Rozpiętość łuku: $l = 21,0 m$.

Strzałka łuku: $f = 2,3 m$.

Wysokość przekroju w kluczu: $h_0 = 0,45 m$.

Wysokość przekroju u stóp: $h_A = 0,73 m$.

Szerokość pasa łuku: $b = 1,00 mb$.

Zmiana temperatury: $t^0 = \pm 20^0$.

W tablicach naszych przyjęto współczynnik sprężystości betonu:

$$E = 210\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\varepsilon = 0,000\,0125.$$

Charakterystyka łuku, potrzebna do obliczenia łuku według naszych tablic:

$$z = \frac{l}{f} = \frac{21}{2,3} = 9,15;$$

$$h_A = 0,79 = 1,75 \cdot 0,45 = 1,75 h_0.$$

Tablica I.

$$\chi = \frac{h_0}{f}$$

 H_t

$k = E \varepsilon b f t$

m	z = l : f		
	2	4	6
1/3	$h_A = 1,31 h_0$ $0,937 k \frac{\chi^3}{1 + 0,616 \chi^2}$	$h_A = 1,13 h_0$ $0,937 k \frac{\chi^3}{1 + 0,794 \chi^2}$	$h_A = 1,06 h_0$ $0,937 k \frac{\chi^3}{1 + 0,860 \chi^2}$
2/3	$h_A = 1,71 h_0$ $1,525 k \frac{\chi^3}{1 + 0,916 \chi^2}$	$h_A = 1,26 h_0$ $1,138 k \frac{\chi^3}{1 + 0,928 \chi^2}$	
3/3	$h_A = 2,23 h_0$ $2,530 k \frac{\chi^3}{1 + 1,401 \chi^2}$	$h_A = 1,41 h_0$ $1,386 k \frac{\chi^3}{1 + 1,089 \chi^2}$	$h_A = 1,20 h_0$ $1,153 k \frac{\chi^3}{1 + 1,018 \chi^2}$
4/3		$h_A = 1,58 h_0$ $1,696 k \frac{\chi^3}{1 + 1,283 \chi^2}$	
2		$h_A = 2,00 h_0$ $2,538 k \frac{\chi^3}{1 + 1,669 \chi^2}$	$h_A = 1,45 h_0$ $1,556 k \frac{\chi^3}{1 + 1,295 \chi^2}$
4			$h_A = 2,08 h_0$ $2,891 k \frac{\chi^3}{1 + 2,152 \chi^2}$
6			
9			
13			

Tablica I.

$$\chi = \frac{h_0}{f}$$

 H_t

$k = E \varepsilon b f t$

$z = l : f$			m
8	10	12	
$h_A = 1,04 h_0$ $0,937 k \frac{\chi^3}{1 + 0,891 \chi^2}$	$h_A = 1,03 h_0$ $0,937 k \frac{\chi^3}{1 + 0,906 \chi^2}$		$\frac{1}{3}$
			$\frac{2}{3}$
$h_A = 1,12 h_0$ $1,057 k \frac{\chi^3}{1 + 0,984 \chi^2}$	$h_A = 1,08 h_0$ $1,014 k \frac{\chi^3}{1 + 0,985 \chi^2}$	$h_A = 1,05 h_0$ $0,991 k \frac{\chi^3}{1 + 0,957 \chi^2}$	$\frac{3}{3}$
$h_A = 1,16 h_0$ $1,123 k \frac{\chi^3}{1 + 1,028 \chi^2}$		$h_A = 1,08 h_0$ $1,019 k \frac{\chi^3}{1 + 0,982 \chi^2}$	$\frac{4}{3}$
			2
$h_A = 1,56 h_0$ $1,832 k \frac{\chi^3}{1 + 1,53 \chi^2}$	$h_A = 1,35 h_0$ $1,455 k \frac{\chi^3}{1 + 1,289 \chi^2}$		4
$h_A = 1,95 h_0$ $2,650 k \frac{\chi^3}{1 + 2,073 \chi^2}$	$h_A = 1,56 h_0$ $1,857 k \frac{\chi^3}{1 + 1,821 \chi^2}$	$h_A = 1,38 h_0$ $1,478 k \frac{\chi^3}{1 + 1,347 \chi^2}$	6
	$h_A = 1,95 h_0$ $2,681 k \frac{\chi^3}{1 + 2,125 \chi^2}$	$h_A = 1,61 h_0$ $1,965 k \frac{\chi^3}{1 + 1,675 \chi^2}$	9
		$h_A = 1,99 h_0$ $2,767 k \frac{\chi^3}{1 + 2,205 \chi^2}$	13

Tablica II.

$$\chi = \frac{h_0}{f}$$

$$M_{ot}$$

$$k' = E \varepsilon b f^2 t$$

m	z = l : f		
	2	4	6
1/3	$h_A = 1,31 h_0$ $0,3126 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,616 \chi^2}$	$h_A = 1,13 h_0$ $0,312 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,794 \chi^2}$	$h_A = 1,06 h_0$ $0,312 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,860 \chi^2}$
2/3	$h_A = 1,71 h_0$ $0,400 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,916 \chi^2}$	$h_A = 1,26 h_0$ $0,344 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,928 \chi^2}$	
3/3	$h_A = 2,23 h_0$ $0,510 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,401 \chi^2}$	$h_A = 1,41 h_0$ $0,378 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,089 \chi^2}$	$h_A = 1,20 h_0$ $0,3472 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,018 \chi^2}$
4/3		$h_A = 1,58 h_0$ $0,417 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,283 \chi^2}$	
2		$h_A = 2,00 h_0$ $0,508 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,669 \chi^2}$	$h_A = 1,45 h_0$ $0,400 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,295 \chi^2}$
4			$h_A = 2,08 h_0$ $0,541 k' \frac{\chi^3}{1 + 2,152 \chi^2}$
6			
9			
13			

Tablica II.

$$\chi = \frac{h_0}{f}$$

$$M_0 t$$

$$k' = E \varepsilon b f^3 t$$

$z = l : f$			m
8	10	12	
$h_A = 1,04 h_0$ $0,312 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,891 \chi^2}$	$h_A = 1,03 h_0$ $0,312 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,906 \chi^2}$		$1/3$
			$2/3$
$h_A = 1,12 h_0$ $0,331 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,984 \chi^2}$	$h_A = 1,08 h_0$ $0,325 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,985 \chi^2}$	$h_A = 1,05 h_0$ $0,321 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,957 \chi^2}$	$3/3$
		$h_A = 1,08 h_0$ $0,326 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,982 \chi^2}$	$4/3$
			2
$h_A = 1,56 h_0$ $0,433 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,53 \chi^2}$	$h_A = 1,35 h_0$ $0,387 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,289 \chi^2}$		4
$h_A = 1,95 h_0$ $0,520 k' \frac{\chi^3}{1 + 2,073 \chi^2}$	$h_A = 1,56 h_0$ $0,436 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,821 \chi^2}$	$h_A = 1,38 h_0$ $0,395 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,347 \chi^2}$	6
	$h_A = 1,95 h_0$ $0,522 k' \frac{\chi^3}{1 + 2,125 \chi^2}$	$h_A = 1,61 h_0$ $0,446 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,675 \chi^2}$	9
		$h_A = 1,99 h_0$ $0,530 k' \frac{\chi^3}{1 + 2,205 \chi^2}$	13

Tablica III.

$$\chi = \frac{h_0}{f}$$

$$M_{At}$$

$$k' = E \varepsilon b f^2 t$$

m	$z = l : f$		
	2	4	6
$\frac{1}{3}$	$h_{At} = 1,31 h_0$ $- 0,625 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,616 \chi^2}$	$h_{At} = 1,13 h_0$ $- 0,625 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,794 \chi^2}$	$h_{At} = 1,06 h_0$ $- 0,625 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,860 \chi^2}$
$\frac{2}{3}$	$h_{At} = 1,71 h_0$ $- 1,125 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,916 \chi^2}$	$h_{At} = 1,26 h_0$ $- 0,794 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,928 \chi^2}$	
$\frac{3}{3}$	$h_{At} = 2,23 h_0$ $- 2,020 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,401 \chi^2}$	$h_{At} = 1,41 h_0$ $- 1,008 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,089 \chi^2}$	$h_{At} = 1,20 h_0$ $- 0,806 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,018 \chi^2}$
$\frac{4}{3}$		$h_{At} = 1,58 h_0$ $- 1,279 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,283 \chi^2}$	
2		$h_{At} = 2,00 h_0$ $- 2,030 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,669 \chi^2}$	$h_{At} = 1,45 h_0$ $- 1,156 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,295 \chi^2}$
4			$h_{At} = 2,08 h_0$ $- 2,495 k' \frac{\chi^3}{1 + 2,152 \chi^2}$
6			
9			
13			

Tablica III.

$$\chi = \frac{h_0}{f}$$

$$M_{At}$$

$$k' = E \varepsilon b f^3 t$$

$z = l : f$			m
8	10	12	
$h_{A1} = 1,04 h_0$ $- 0,625 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,891 \chi^2}$	$h_{A1} = 1,03 h_0$ $- 0,625 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,906 \chi^2}$		$1/3$
			$2/3$
$h_{A1} = 1,12 h_0$ $- 0,726 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,985 \chi^2}$	$h_{A1} = 1,08 h_0$ $- 0,689 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,985 \chi^2}$	$h_{A1} = 1,05 h_0$ $- 0,670 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,957 \chi^2}$	$3/3$
		$h_{A1} = 1,08 h_0$ $- 0,690 k' \frac{\chi^3}{1 + 0,982 \chi^2}$	$4/3$
			2
$h_{A1} = 1,56 h_0$ $- 1,399 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,53 \chi^2}$	$h_{A1} = 1,35 h_0$ $- 1,068 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,289 \chi^2}$		4
$h_{A1} = 1,95 h_0$ $- 2,130 k' \frac{\chi^3}{1 + 2,073 \chi^2}$	$h_{A1} = 1,56 h_0$ $- 1,421 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,821 \chi^2}$	$h_{A1} = 1,38 h_0$ $- 1,123 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,347 \chi^2}$	6
	$h_{A1} = 1,95 h_0$ $- 2,159 k' \frac{\chi^3}{1 + 2,125 \chi^2}$	$h_{A1} = 1,61 h_0$ $- 1,519 k' \frac{\chi^3}{1 + 1,675 \chi^2}$	9
		$h_{A1} = 1,99 h_0$ $- 2,236 k' \frac{\chi^3}{1 + 2,205 \chi^2}$	13

Tablica IV.

$$\chi = \frac{h_0}{f}$$

$$\sigma_{d,g}^{o,t} \text{ (w kluczu)}$$

$$k'' = E \varepsilon t$$

m	z = l : f		
	2	4	6
1/3	$h_A = 1,31 h_0$ $0,937 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,998 \chi}{1 + 0,616 \chi^2}$	$h_A = 1,13 h_0$ $0,937 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,998 \chi}{1 + 0,794 \chi^2}$	$h_A = 1,06 h_0$ $0,937 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,998 \chi}{1 + 0,860 \chi^2}$
2/3	$h_A = 1,71 h_0$ $1,525 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,574 \chi}{1 + 0,916 \chi^2}$	$h_A = 1,26 h_0$ $1,138 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,814 \chi}{1 + 0,928 \chi^2}$	
3/3	$h_A = 2,23 h_0$ $2,530 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,210 \chi}{1 + 1,401 \chi^2}$	$h_A = 1,41 h_0$ $1,386 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,637 \chi}{1 + 1,089 \chi^2}$	$h_A = 1,20 h_0$ $1,115 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,872 \chi}{1 + 1,018 \chi^2}$
4/3		$h_A = 1,58 h_0$ $1,696 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,475 \chi}{1 + 1,283 \chi^2}$	
2		$h_A = 2,00 h_0$ $2,538 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,201 \chi}{1 + 1,669 \chi^2}$	$h_A = 1,45 h_0$ $1,556 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,543 \chi}{1 + 1,295 \chi^2}$
4			$h_A = 2,08 h_0$ $2,891 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,123 \chi}{1 + 2,152 \chi^2}$
6			
9			
13			

Tablica IV.

$$\chi = \frac{h_0}{f}$$

$$\sigma_{d,g}^{\circ t} \text{ (w kluczu)}$$

$$k'' = E \varepsilon t$$

$z = l : f$			m
8	10	12	
$h_A = 1,04 h_0$ $0,937 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,998 \chi}{1 + 0,891 \chi^2}$	$h_A = 1,03 h_0$ $0,937 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,998 \chi}{1 + 0,906 \chi^2}$		$1/3$
			$2/3$
$h_A = 1,12 h_0$ $1,057 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,879 \chi}{1 + 0,984 \chi^2}$	$h_A = 1,08 h_0$ $1,014 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,923 \chi}{1 + 0,985 \chi^2}$	$h_A = 1,05 h_0$ $0,991 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,950 \chi}{1 + 0,957 \chi^2}$	$3/3$
$h_A = 1,16 h_0$ $1,123 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,832 \chi}{1 + 1,028 \chi^2}$		$h_A = 1,08 h_0$ $1,019 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,914 \chi}{1 + 0,982 \chi^2}$	$4/3$
			2
$h_A = 1,56 h_0$ $1,832 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,418 \chi}{1 + 1,53 \chi^2}$	$h_A = 1,35 h_0$ $1,455 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,596 \chi}{1 + 1,289 \chi^2}$		4
$h_A = 1,95 h_0$ $2,65 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,177 \chi}{1 + 2,073 \chi^2}$	$h_A = 1,56 h_0$ $1,857 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,409 \chi}{1 + 1,821 \chi^2}$	$h_A = 1,38 h_0$ $1,518 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,561 \chi}{1 + 1,347 \chi^2}$	6
	$h_A = 1,95 h_0$ $2,681 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,168 \chi}{1 + 2,125 \chi^2}$	$h_A = 1,61 h_0$ $1,992 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,353 \chi}{1 + 1,675 \chi^2}$	9
		$h_A = 1,99 h_0$ $2,767 k'' \frac{\chi^2 \pm 1,149 \chi}{1 + 2,205 \chi^2}$	13

*

Tablica V.

$$\chi = \frac{h_0}{f}$$

$$\sigma_{a,g}^{At}$$

$$k'' = E \varepsilon t$$

m	z = l : f		
	2	4	6
1/3	$h_A = 1,31 h_0$ $k'' \frac{0,320 \chi^2 \pm 2,193 \chi}{1 + 0,616 \chi^2}$	$h_A = 1,13 h_0$ $k'' \frac{0,590 \chi^2 \pm 2,980 \chi}{1 + 0,794 \chi^2}$	$h_A = 1,06 h_0$ $k'' \frac{0,734 \chi^2 \pm 3,320 \chi}{1 + 0,860 \chi^2}$
2/3	$h_A = 1,71 h_0$ $k'' \frac{0,400 \chi^2 \pm 2,309 \chi}{1 + 0,916 \chi^2}$	$h_A = 1,26 h_0$ $k'' \frac{0,639 \chi^2 \pm 3,000 \chi}{1 + 0,928 \chi^2}$	
3/3	$h_A = 2,23 h_0$ $k'' \frac{0,506 \chi^2 \pm 2,424 \chi}{1 + 1,401 \chi^2}$	$h_A = 1,41 h_0$ $k'' \frac{0,693 \chi^2 \pm 3,024 \chi}{1 + 1,089 \chi^2}$	$h_A = 1,20 h_0$ $k'' \frac{0,799 \chi^2 \pm 3,350 \chi}{1 + 1,018 \chi^2}$
4/3		$h_A = 1,58 h_0$ $k'' \frac{0,755 \chi^2 \pm 3,046 \chi}{1 + 1,283 \chi^2}$	
2		$h_A = 2,00 h_0$ $k'' \frac{0,897 \chi^2 \pm 3,045 \chi}{1 + 1,669 \chi^2}$	$h_A = 1,45 h_0$ $k'' \frac{0,897 \chi^2 \pm 3,325 \chi}{1 + 1,295 \chi^2}$
4			$h_A = 2,08 h_0$ $k'' \frac{1,000 \chi^2 \pm 3,239 \chi}{1 + 2,152 \chi^2}$
6			
9			
13			

Tablica V.

$$\chi = \frac{h_0}{f}$$

$$\sigma_{d,g}^{At}$$

$$k'' = E \varepsilon t$$

$z = l : f$			m
8	10	12	
$h_A = 1,04 h_0$ $k'' \frac{0,807 \chi^2 \pm 3,481 \chi}{1 + 0,891 \chi^2}$	$h_A = 1,03 h_0$ $k'' \frac{0,849 \chi^2 \pm 3,570 \chi}{1 + 0,906 \chi^2}$		$1/3$
			$2/3$
$h_A = 1,12 h_0$ $k'' \frac{0,846 \chi^2 \pm 3,486 \chi}{1 + 0,985 \chi^2}$	$h_A = 1,08 h_0$ $k'' \frac{0,874 \chi^2 \pm 3,570 \chi}{1 + 0,985 \chi^2}$	$h_A = 1,05 h_0$ $k'' \frac{0,892 \chi^2 \pm 3,620 \chi}{1 + 0,957 \chi^2}$	$3/3$
		$h_A = 1,08 h_0$ $k'' \frac{0,900 \chi^2 \pm 3,619 \chi}{1 + 0,982 \chi^2}$	$4/3$
			2
$h_A = 1,56 h_0$ $k'' \frac{1,050 \chi^2 \pm 3,439 \chi}{1 + 1,53 \chi^2}$	$h_A = 1,35 h_0$ $k'' \frac{1,004 \chi^2 \pm 3,540 \chi}{1 + 1,289 \chi^2}$		4
$h_A = 1,95 h_0$ $k'' \frac{1,213 \chi^2 \pm 3,350 \chi}{1 + 2,073 \chi^2}$	$h_A = 1,56 h_0$ $k'' \frac{1,105 \chi^2 \pm 3,500 \chi}{1 + 1,821 \chi^2}$	$h_A = 1,38 h_0$ $k'' \frac{1,050 \chi^2 \pm 3,577 \chi}{1 + 1,347 \chi^2}$	6
	$h_A = 1,95 h_0$ $k'' \frac{1,277 \chi^2 \pm 3,407 \chi}{1 + 2,125 \chi^2}$	$h_A = 1,61 h_0$ $k'' \frac{1,160 \chi^2 \pm 3,523 \chi}{1 + 1,675 \chi^2}$	9
		$h_A = 1,99 h_0$ $k'' \frac{1,345 \chi^2 \pm 3,480 \chi}{1 + 2,205 \chi^2}$	13

Ponieważ ani z ani h_A w tej wielkości nie znajdujemy w naszych tablicach, przeto wyliczenie to nastąpić musi za pomocą interpolacji¹⁾:

A. Parcie poziome.

Współczynnik k w tablicy I. dla H_t jest:

$$k E \varepsilon b f t = 210000.0,0000125.100.20.f = \pm 5250 f.$$

Interpolację przeprowadzamy pomiędzy $h_A = h_0 \sec^4 \alpha$ a $h_A = \sec^6 \alpha$ (dla $z=8$) i $h_A = h_0 \sec^6 \alpha$ a $h_A = h_0 \sec^9 \alpha$ (dla $z=10$).

I. Dla $z=8$; $f = \frac{21}{8} = 2,62$; $\chi = \frac{h_0}{f} = \frac{0,45}{2,62} = 0,172$.

a) dla $h_A = h_0 \sec^4 \alpha$, czyli $h_A = 1,56 h_0$:

$$H_t = 1,832 k \frac{\chi^3}{1 + 1,53 \chi^2} = 1,832.5250.262 \frac{0,172^3}{1 + 1,53.0,172^2} = \pm 12,28 t.$$

b) dla $h_A = h_0 \sec^6 \alpha$, czyli $h_A = 1,95 h_0$:

$$H_t = 2,65.5250.262 \frac{0,172^3}{1 + 2,073.0,172^2} = \pm 17,50 t.$$

II. Dla $z=10$; $f = \frac{21}{10} = 2,1$; $\frac{h_0}{f} = \frac{0,45}{2,1} = 0,214$

a) dla $h_A = 1,56 h_0$, czyli $h_A = h_0 \sec^6 \alpha$:

$$H_t = 1,857.5250.210 \frac{0,214^3}{1 + 9,821.0,214^2} = \pm 18,60 t.$$

b) dla $h_A = h_0 \sec^9 \alpha$, czyli $h_A = 1,95 h_0$:

$$H_t = 2,68.5250.210 \frac{0,214^3}{1 + 2,125.0,214^2} = \pm 26,40 t.$$

Interpolując prostolinijnie pomiędzy Ia i Ib dla $h_A = 1,75 h_0$, otrzymamy:

$$H_{t_8} = 12,28 + \frac{0,19}{0,39} (17,50 - 12,28) = \pm 14,82 t,$$

zaś między IIa i IIb:

$$H_{t_{10}} = 18,60 + \frac{0,19}{0,39} (26,40 - 18,60) = \pm 22,40 t.$$

Interpolując wreszcie pomiędzy H_{t_8} a $H_{t_{10}}$ dla $z=9,15$ otrzymamy:

$$H_{t_{9,15}} = 14,82 + \frac{1,15}{2,0} (22,40 - 14,82) = \pm 19,20 t.$$

B. Moment gnący w kluczu łuku.

Podobnie jak dla H_t :

I. dla $z=8$: a) $M_{o,t} = 0,433.5250.262^2 \frac{0,172^3}{1 + 1,53.0,172^2} = \mp 7,60 tm$

b) $M_{o,t} = 0,520.5250.262^2 \frac{0,172^3}{1 + 2,073.0,172^2} = \mp 9,0 tm$

¹⁾ Przy posiadaniu wykresów, interpolacja ta jest znacznie prostsza.

$$\text{II. dla } z=10: a) M_{o,t} = 0,436 \cdot 5250 \cdot 210^2 \frac{0,214^3}{1 + 1,821 \cdot 0,214^2} = \mp 9,20 \text{ tm}$$

$$b) M_{o,t} = 0,522 \cdot 5250 \cdot 210^2 \frac{0,214^3}{1 + 2,125 \cdot 0,214^2} = \mp 10,8 \text{ tm}$$

Interpolując pomiędzy Ia i Ib otrzymamy:

$$M_{o,t_s} = 7,60 + \frac{0,19}{0,39} (9,0 - 7,6) = \mp 8,28 \text{ tm.}$$

Interpolując pomiędzy IIa i IIb otrzymamy:

$$M_{o,t_{10}} = 9,20 + \frac{0,19}{0,39} (10,80 - 9,20) = \mp 9,98 \text{ tm.}$$

Dla $z = 9,15$ zatem:

$$M_{o,t_{9,15}} = 8,28 + \frac{1,15}{2,0} (9,98 - 8,28) = \mp 9,26 \text{ tm.}$$

C. Momenty gnące w wezłowie.

Podobnie jak dla H_t :

$$\text{I. dla } z=8: a) M_{A,t} = -1,399 \cdot 5250 \cdot 2,62^2 \frac{0,172^3}{1 + 1,53 \cdot 0,172^2} = \pm 24,60 \text{ tm}$$

$$b) M_{A,t} = \pm 36,80 \text{ tm}$$

$$\text{II. dla } z=10: a) M_{A,t} = \pm 30,0 \text{ tm}$$

$$b) M_{A,t} = \pm 44,70 \text{ tm.}$$

Przez interpolację jak wyżej otrzymamy:

$$M_{A,t_s} = \pm 30,55 \text{ tm}$$

$$M_{A,t_{10}} = \pm 37,15 \text{ tm,}$$

zatem:

$$M_{A,t_{9,15}} = \pm 34,35 \text{ tm.}$$

W zupełnie analogiczny sposób wyliczyliśmy sobie wartości dla σ w kluczu oraz wezłowie łuku. Aby porównać nasze wyniki z wynikami Melana, musimy, biorąc pod uwagę, że Melan przyjął $E=100\,000$, zredukować nasze wyniki w stosunku $\frac{1,0}{2,1}$, a wtedy otrzymamy następującą porównawczą tabelę C.

W a r t o ś ć	Podług naszych tablic	Podług Melana
Parcie poziome H_t (tony) (zmiana $\pm t_0$)	$\pm 9,15$	$\pm 10,70$
Moment gnący w kluczu $M_{o,t}$ (tm) „	$\mp 4,40$	$\mp 5,09$
„ „ w wezłowie $M_{A,t}$ (tm) „	$\pm 16,35$	$\pm 18,66$
Naprężenie w kluczu górą $\sigma_g^{o,t}$ (at) „	$\mp 11,00$	$\mp 9,83$
„ „ dołem $\sigma_d^{o,t}$ (at) „	$\pm 15,00$	$\pm 13,91$
„ w wezłowie górą $\sigma_g^{A,t}$ (at) „	$\pm 16,78$	$\pm 16,03$
„ „ dołem $\sigma_d^{A,t}$ (at) „	$\mp 14,65$	$\mp 13,81$
Siła poosiowa w fudze u wezłowie (ton)	$\pm 8,37$	$\pm 9,57$

Uwaga: + naprężenie na ściskanie; — naprężenie na rozciąganie.

Nasze wyniki różnią się nieco od wyników Melana. Pochodzi to stąd, że:

1. Melan skraca swoje równanie dla α , β , γ przez Δs , a w naszych wzorach jest przeprowadzenie skrócenia przez Δx , z pozostawieniem $\cos \varphi_n$ w mianowniku, co czyni łuk sztywniejszym.

2. Łuk Melana jest bardzo sztywno zbrojony żelazem, co także przyczynia się do tego, że właśnie te wartości, które razem ze sztywnością łuku wzrastają, jak H i M , u Melana powiększyły się.

Zresztą różnice te nie są znowu tak wielkie, aby liczenia nasze robiły praktycznie iluzorycznymi. Przeciwnie, dużo metod, opartych na innych założeniach, daje wyniki daleko więcej odbiegające od wyżej podanych i od prawdziwych¹⁾. Wydaje nam się zatem, że nasze tablice mogą dla praktycznego liczenia, gdzie więcej chodzi o to, aby nie robić błędów grubych niż liczyć, „dokładnie“, być zupełnie użyteczne.

Tablice takie dla reszty obciążeń łuku, oraz wykresy z nich wynikające, podam z braku tutaj miejsca, przy najbliższej sposobności.

¹⁾ Por. np. Mertens: Statik der Baukonstruktionen, tom II. str. 241 (r. 1904), gdzie H_t jest podane 2,26 t, wynik bezwzględnie błędny.

INŻ. DR. STANISŁAW KUNICKI

Profesor Politechniki Warszawskiej

Zwodzone mosty Astrachański i Buzański przez odnogi delty rzeki Wołgi.

Motto: „On reason build resolve
That column of true majesty
in man’.
Burns.

W 1909 roku latem, zostały oddane do eksploatacji wybudowane na Astrachańskiej kolei żelaznej przez Towarzystwo Riazańsko-Uralskiej drogi żel. dwa duże mosty żelazne, a mianowicie mosty: Astrachański przez odnogę delty rzeki Wołgi pod samem miastem Astrachaniem i Buzański przez przetok Buzan tejże delty.

W obu tych mostach były urządzone zwodzone części, przyczem w moście Astrachańskim dwie takie zwodzone części: na każdym z przetoków, rozdzielonych wyspą, — po jednej, a w moście Buzańskim — jedna zwodzona część.

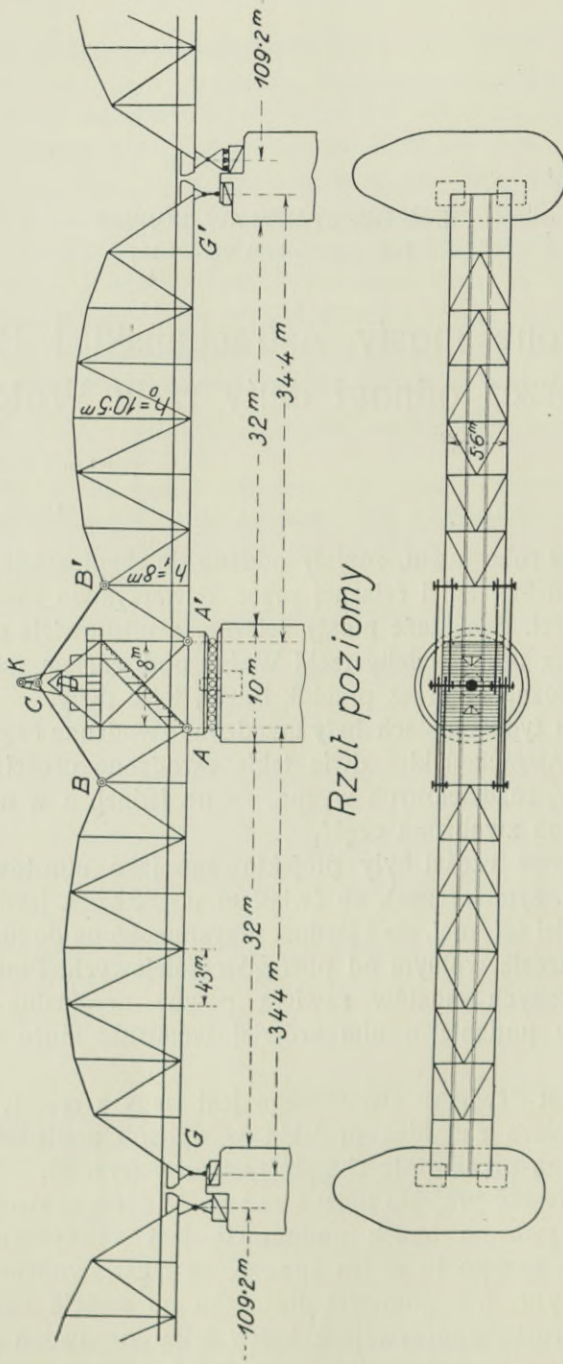
Zwodzone części były projektowane jako obrotowe, równoramienne (t. j. symetryczne), ze światłem po 32 m, z jazdą dołem pod jeden tor kolei żelaznej, ale z jezdnią przysposobioną do ruchu zwykłych wozów w czasie wolnym od pociągów kolejowych. Ponieważ projekt tych zwodzonych mostów zawiera pewne oryginalne myśli, więc uważam, że podanie o nim krótkiej wzmianki może zainteresować techników.

Schemat dźwigaru zwodzonego jest jasny z rys. 1.

Zasadnicza zaś idea projektu w sposób poglądowy może być przedstawiona przez szkic charakterystyczny (rys. 2).

Osobliwość projektu polega na tem, że dźwigar zwodzonej części, choć spoczywa na trzech podporach, jest statycznie wyznaczalny. Osiągnięto to w ten sposób, że most zwodzony w stanie zamkniętym, t. j. gotowym dla ruchu po moście przedstawia dwa dźwigary proste, spoczywające każdy tylko na dwóch podporach G i A , względnie G' i A' , gdyż pręty BC i $B'C$ nie są wówczas na-

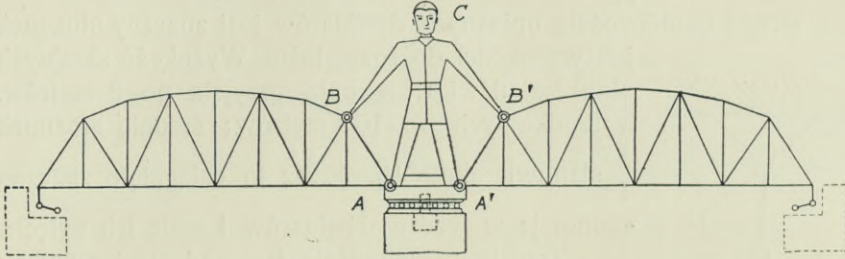
Schemat dźwigara zwodzonego



Rzut poziomy

Rys. 1.

ciągnięte (nie mają w sobie osiowej reakcji), a spoczywają swobodnie, opierając się w punktach B i C , względnie B' i C , na które przenosi się tylko ciężar własny tych prętów.

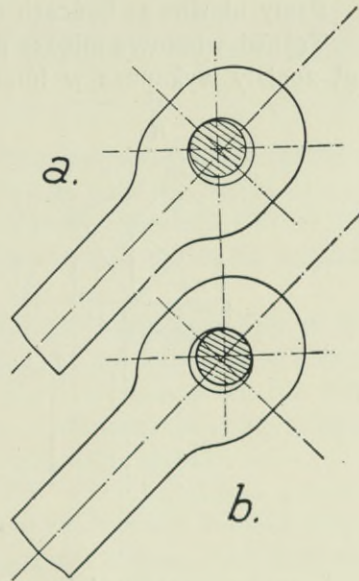


Rys. 2.

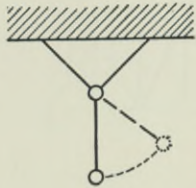
W tym celu otwory, czyli oczy w prętach (eye-bars) BC i $B'C$ w punkcie C mają średnicę większą od średnicy sworznia palca KC (rys. 3 *a* i 3 *b*).

Różnica tych średnic została tak obliczona, aby przy moście zamkniętym tylna powierzchnia oczka nie przylegała do sworznia palca. Przy otwieraniu mostu dla przepuszczenia statków po rzece — przedewszystkiem odchyła się (z pomocą mechanizmów odpowiednich) stopniowo na wewnątrz o pewien kąt kolanko wahacza w punktach G i G' , t. j. w skrajnych podporach dźwigara, jak pokazano schematycznie na rys. 4.

Wskutek tego oba dźwigary obracają się około swoich rzeczywistych przegubów w punktach A i A' , przyczem i punkty B i B' obracają się około punktów A i A' dopóki nie naciągną się pręty BC i $B'C$. Wtedy dźwigary nie opierają się w punktach G i G' , ale zato opierają się w punktach A i C i względnie A' i C i przedstawiają jakby belki zamocowane jednym końcem AC , względnie $A'C$ — w ścianę, t. j. znów belki statycznie wyznaczalne (rys. 5). Określenie w tym wypadku reakcji podpór w punktach A' i B' pokazane jest na tym samym rysunku.

Rys. 3 *a*. Most zamknięty (pręt nie-naciągnięty).Rys. 3 *b*. Most otwarty (pręt naciągnięty).

W ten sposób w obu wypadkach, t. j. jak przy moście zamkniętym, tak i przy moście otwartym, mamy system statycznie wyznaczalny, co daje możliwość łatwego i ścisłego obliczenia i upraszcza znacznie konstrukcję.

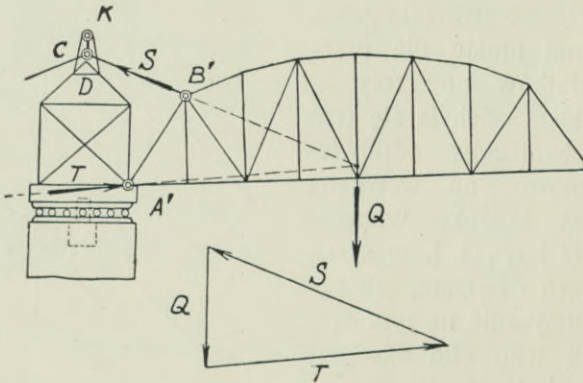


Rys. 4.

Drugą osobiwością opisanych dźwigarów jest znaczny stosunek ich wysokości do rozpiętości. Wysokość skrajnych słupków dźwigarów była przyjęta po 8 metrów, a środkowych po 10·5 metrów; średnio stosunek $\frac{h}{l}$ stanowił około $\frac{1}{4}$. Przez to osiągnięto znaczną ekonomję w wadze dźwigarów i małe ich ugięcie. Trzecią osobiwością jest nadanie wszystkim bez wyjątku częściom dźwigarów (oprócz belek jezdni) przekrojów skrzynkowych, przez co osiągnięto znaczną sztywność prętów; tak potrzebną w mostach zwodzonych, t. j. w mostach-maszynach.

Ramy ukośne na końcach dźwigarów zostały mocno usztywnione.

Tężniki wiatrowe między pasami dźwigarów, w celu zmniejszenia wagi, zostały wykonane w formie litery K.



Rys. 5.

Czwartą osobiwością opisywanych zwodzonych mostów jest scentralizowanie całego ruchu w dziale maszynowym, pomieszczonym nad środkowym filarem w trójkątnej nadbudówce wieży. Dostęp do tego działu urządony jest przez schody, wykonane po linii skosa środkowej wieży z boku tejże. Naokoło pomieszczenia maszynowego urządzona jest dla celów służbowych galeryjka. Zwodzony most obraca się na tarczy obrotowej (turntable). Oś środkowa nie przyjmuje na siebie obciążenia, a ma znaczenie tylko konstrukcyjne (kierownicze).

W punktach A, A', B, B' i C — pomieszczone są rzeczywiste przeguby co przedstawia piątą osobliwość opisywanych zwodzonych mostów.

Podwójne zaciągi oczkowe (eye-bars) BC i $B'C$ — zostały wykonane z niklowej stali z powodu znacznych reakcyj w nich panujących przy moście otwartym i wielkiego ich znaczenia, gdyż wówczas cały most na nich wisi.

Strop maszynowego działu wykonano z betonu na blasze falistej, opartej na żelaznych belkach, wzmocnionych małemi dźwigarkami zastrzałowemi.

Pokrycie maszynowego działu wykonano z blachy falistej.

Jak widać z powyższego do zalet opisanego projektu należą:

- 1) prostota konstrukcji;
- 2) łatwość obliczania;
- 3) mała stosunkowo waga dźwigarów, wskutek znacznego stosunku ich wysokości do rozpiętości;
- 4) znaczna sztywność dźwigarów;
- 5) scentralizowanie wszystkich mechanizmów w jednym punkcie, a mianowicie w górnej trójkątnej części środkowej wieży na średnim okrągłym filarze.

W maszynowym dziale były postawione dwa silniki spalinowe po 15 HP (z których jeden był zapasowym) polskiej fabryki „Ursus“ w Warszawie (na mocy rekomendacji autora projektu). Oprócz tego były ustawione ręczne przyrządy dla poruszania mostu na wypadek zepsucia motorów spalinowych.

W tymże pomieszczeniu działu maszynowego, mającem w planie figurę prostokątną, były postawione na przekątniach w różnych poziomach dwa główne wały (na krzyż), z których jeden dla ruchu obrotowego, a drugi dla opuszczania i podnoszenia końców dźwigarów przy otwieraniu i zamykaniu zwodzonego mostu.

Projekt zwodzonych części mostów Astrachańskiego i Buzańskiego był wykonany przez autora niniejszego artykułu. Projekt stałych części mostu Astrachańskiego, ogólnej długości 469 sąż., był wykonany także przez autora niniejszego artykułu. Projekt zaś stałych części mostu Buzańskiego był wykonany przez ś. p. Prof. M. Belelubskiego.

Przy projektowaniu mechanizmów wielką pomoc znalazł autor w pomysłach naszego znakomitego rodaka Dr. Inż. Ralfa Modrzejewskiego (R. Modjeski), opisanych w dziele Wright'a „The Designing of Draw - Spans“ szczególnie w opisie „Rock - island Bridge“, zaco uważam za swój przyjemny obowiązek złożyć mu na tem miejscu serdeczne podziękowanie, gdyż niniejszy artykuł jest pierwszym w języku polskim opisem mostów zwodzonych Astrachańskiego i Buzańskiego.

Detaliczny projekt z obliczeniami pozostał, wraz z główną częścią technicznej biblioteki autora, w Rosji z powodu przewrotu bolszewickiego. Zatem wyżej przytoczone dane autor powtarza tylko z pamięci, to znaczy w przybliżeniu i bez bliższych szczegółów.

Zwodzone części mostu Astrachańskiego były wykonane przez fabrykę Kołomieńską budowy maszyn i konstrukcyj żelaznych (miasto Kołomna pod Moskwą), zaś zwodzone części mostu Buzańskiego wykonane zostały przez Mikołajewską Fabrykę Budowy Okrętów (Mikołajewsk, miasto na brzegu Czarnego Morza).

W tym przykładzie widzimy jak myśl techniczna polska łączy się z ideami amerykańskimi, aby wyrazić się w nowych konstrukcjach, wykonanych w dalekich stepach południowej Rosji na brzegach morza Kaspijskiego, i dać zastosowanie polskiemu przemysłowi w postaci silników spalinowych Warszawskiej Fabryki „Ursus“.

PROF. A. KURYŁŁO

Konstrukcje żelbetowe podziemia prezbiterjum Katedry Śląskiej w Katowicach.

Ustrojami żelbetowemi części katedry, stanowiącej prezbiterjum, są: 1) fundamenty murów zewnętrznych i części środkowej, 2) schody podziemia, umożliwiające dostęp z zewnątrz do krypty, 3) konstrukcje stropowe podziemia, 4) sklepienia i stropy, oparte na filarach $\sim 14 m$ wysokości.

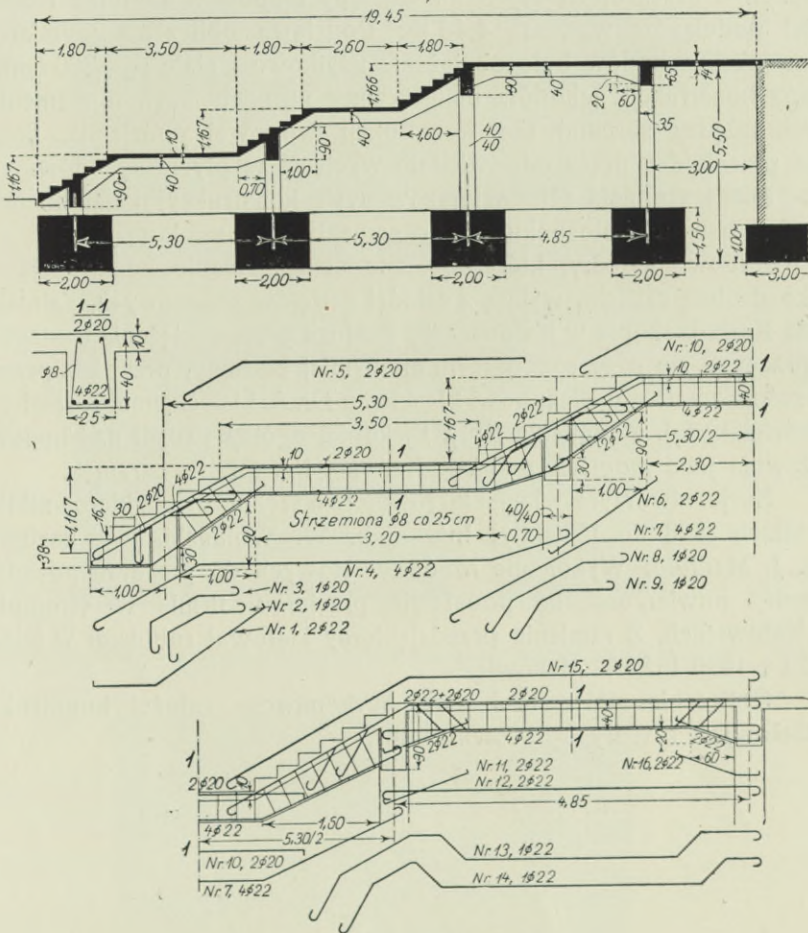
Wymiary fundamentów ustalono dla przyjęcia dopuszczalnego ciśnienia na grunt w wysokości $3 kg/cm^2$. Obciążenia próbne gruntu budowlanego (iłowupki) wykazywały osiadanie do $5 mm$, przy wielkości ciężaru, odpowiadającego jednostkowemu ciśnieniu $9 kg/cm^2$.

Fundamenty murów zewnętrznych, oddzielone w zupełności od innych konstrukcyj, wytworzono w postaci obustronnych wsporników z wkładkami niosącymi $\phi 15 mm$ co $10 cm$ u spodu (tabl. I, ryc. 1); wysokość fundamentów wspornikowych wynosi pod wszystkimi murami $1,00 m$. Tam, gdzie przychodzą w murach otwory, przewidziano ukryte w fundamentach belki żelbetowe, przenoszące przypadające obciążenie od spodu.

Fundamenty części środkowej prezbiterjum stanowią trzy żelbetowe belki poprzeczne o przekroju $1,50/2,00 m$, stężone belką obwodową o takim samym przekroju (rys. 1 i tabl. II, ryc. 3, 4). Wzmocnienie belek w przekrojach niebezpiecznych wynosi: w strefie ciągnionej $20 \phi 40 mm$, w strefie ciśnionej $14 \phi 40 mm$.

Na belkach fundamentowych części środkowej mają spocząć: a) ramy dwuprzegubowe, o rozpiętości $7,30 m$ w odstępach $1,40 m$ i $3,90 m$, b) słupy, podtrzymujące belkowanie schodów podziemia, c) podstawy betonowe o przekroju $1,80/1,80 m$ pod filary sklepień. Filary nad posadzką katedry, przewidziane pierwotnie jako dolomitowe, wykonane będą jako filary żelbetowe, przenoszące ciśnienie osiowe sklepień i stropów górnych prezbiterjum.

Ramy dwuprzegubowe podtrzymują dźwigającą konstrukcję stropową, założoną stosownie do zaprojektowanego przez Arch. Z. Gawlika z Krakowa wnętrza podziemia, które wykazywać ma widoczne od spodu łuki w części środkowej i belki w częściach bocznych. Ramy podtrzymują przedstawione w rys. 1 belkowanie i zawieszoną



Rys. 2. Ustrój schodów podziemia.

zapomocą słupków płytę łukową, o charakterze dekoracyjnym. Dźwigającą konstrukcję stropową obliczono na ciężar użytkowy i stały $p_0 = 800 \text{ kg/m}^2$. Widoczne w częściach bocznych beleczki o przekroju $35/20 \text{ cm}$ wykształcono jako wsporniki, utwierdzone w podciągu, opartym na słupach ram.

Schody podziemia (rys. 2) o zarysie, dostosowanym do założenia architektonicznego, mają ustrój nośny żebrowany, złożony z podciągów w odstępach $5,30\text{ m}$ i belek drugorzędnych w odstępach $2,24\text{ m}$; na belkach drugorzędnych opiera się płyta o grubości 10 cm . Charakterystyczne szczegóły ustroju belki drugorzędnej podaje dolna część rys. 2. Podciągi tworzą belkę ciągłą dwuprzęsłową, opartą na trzech słupach o przekrojach $40/40\text{ cm}$. Odstępy słupów w kierunku rozpiętości podciągów wynoszą $4,48\text{ m}$. Podstawą obliczenia wymiarów konstrukcji schodów było obciążenie użytkowe i stałe $p_0 = 700\text{ kg/m}^2$. Słupy konstrukcji schodów umieszczone są na belkach fundamentowych między słupami ram konstrukcji stropowej podziemia. Słupy ram przechodzą przez odpowiednie wycięcia w płycie schodów.

Dla wykonania scharakteryzowanych konstrukcyj ustalono mieszaninę betonu o stosunku 400 kg cementu na 1 m^3 kruszywa.

Budowę katedry, której opisane schematycznie konstrukcje są tylko drobną częścią, wyjętą z całości ustrojów żelbetowych, zainicjowała Kurja Biskupia w Katowicach. Zasługa przezwyciężenia trudności, piętrzących się przy rozpoczęciu olbrzymiej budowy, przypada przedwcześnie zmarłemu Biskupowi Śląskiemu Dr. A. Lisieckiemu. Z ramienia właściciela t. j. z ramienia Kurji Biskupiej ogólny nadzór nad budową sprawuje jako *magister fabricae* Kanonik Ks. Dr. E. Szramek.

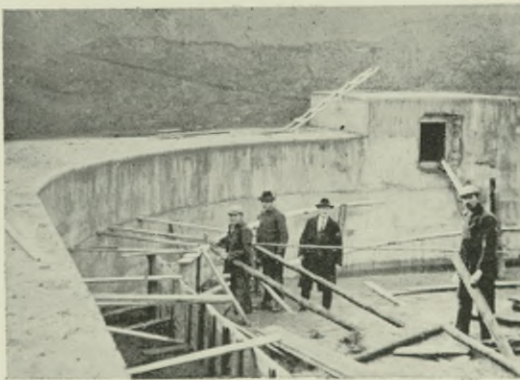
Kurja utworzyła własne kierownictwo techniczne, a kierownikiem w latach 1928 do 1930 był Inż.-arch. W. Wolański, jego zastępcą Inż. J. Margold. Wykonanie robót żelbetowych do poziomu posadzki katedry powierzono, na podstawie przetargu, firmie K. Krompiec w Katowicach. Z ramienia przedsiębiorcy kierował robotami w latach 1929 i 1930 Inż. A. Makowicz.

Obliczenia statyczne i plany wykonawcze całości konstrukcyj żelbetowych katedry opracował autor.

TABLICA I.

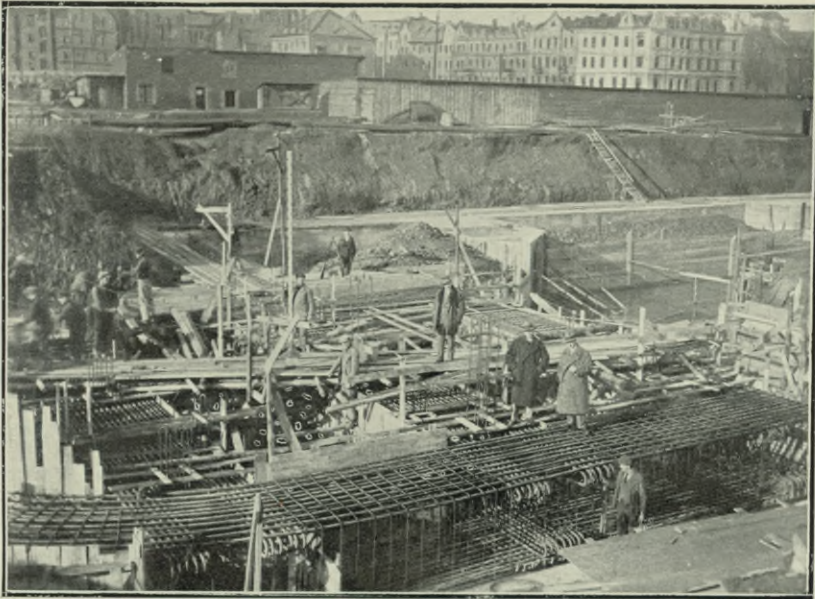


Ryc. 1. Układ wkładek żelaznych fundamentów murów zewnętrznych.

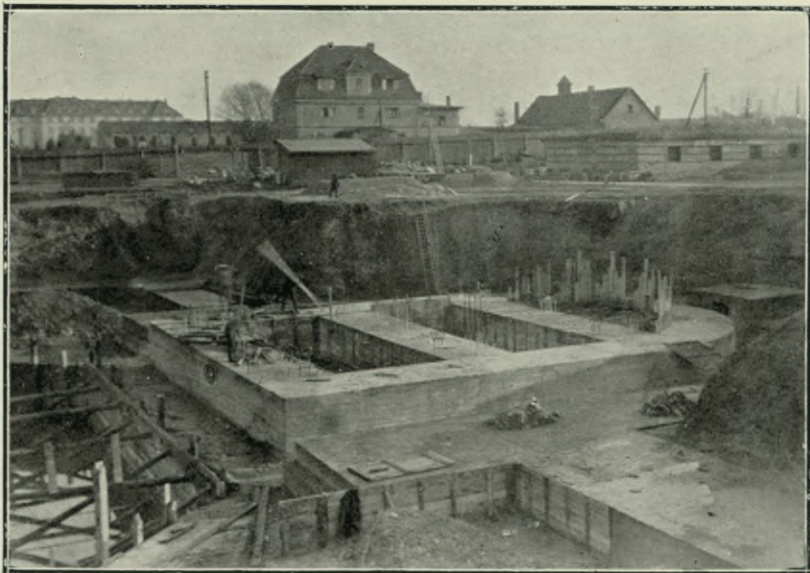


Ryc. 2. Część gotowych fundamentów pod murami zewnętrznymi.

TABLICA II

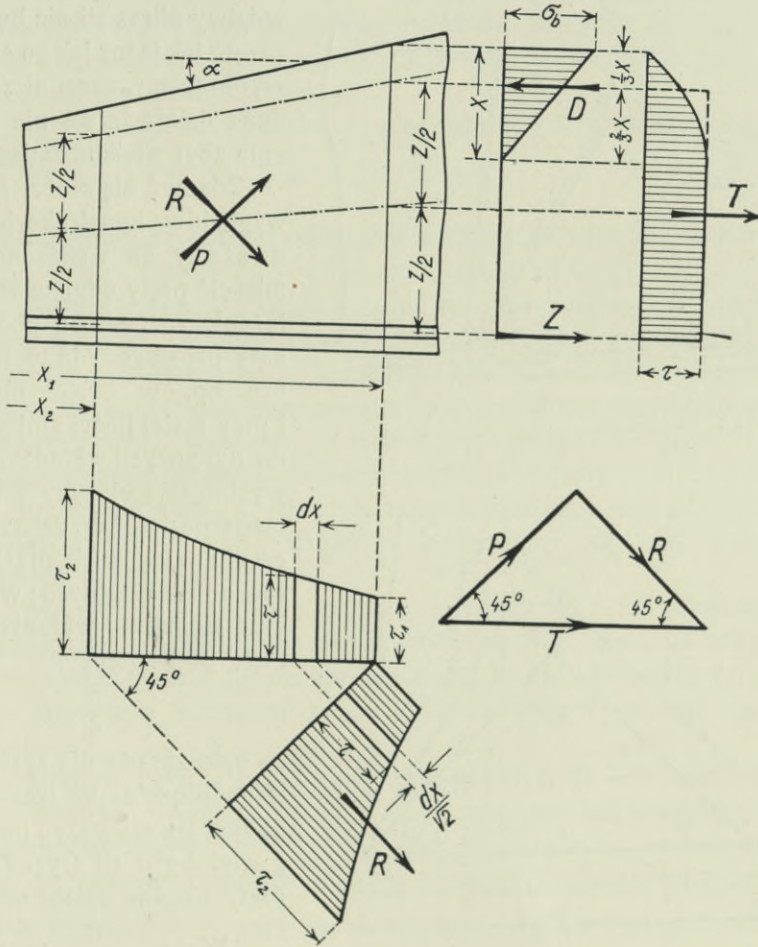


Ryc. 3. Szkielet żelazny środkowej części fundamentów prezbiterjum.



Ryc. 4. Widok ogólny wybetonowanych fundamentów prezbiterjum.

nowym można zauważyć, iż wypadkowa ich leży w połowie ramienia momentu wewnętrznego, zatem i wypadkowa naprężeń głównych leżeć będzie na tej wysokości. Wynika stąd, że dla ciągnięć głównych należy przyjmować jako oś linię łączącą połowy ramion momentu wewnętrznego, czyli leżącą w przybliżeniu w $\frac{4}{9}$ wysokości użytecznej belki. Przyjęcie to sprawdza się dość dobrze z przyjęciem Mörscha



Rys. 1.

osi w połowie żebra belki, ma jednak tę wyższość, że jest teoretycznie uzasadnione i daje się stosować do każdego przekroju, a nie tylko do przekroju żebrowego.

Z chwilą powstania rys ukośnych w belce, ciągnięcia główne przenoszą się w całości na pręty odgięte pod kątem 45° , prostopadłe

zaś do nich działa w betonie ciśnienie P . Jednolita belka żelbetowa zostaje wtedy niejako zastąpiona belką kratową, gdzie rolę pasa ciśnionego spełnia beton w części ciśnionej przekroju, pas ciągniony tworzą wkładki żelazne poziome, krzyżulcami ciągnionymi są pręty ukośne, zaś zastrzały ciśnione zastąpione są przez beton między rysami ukośnymi. Wprawdzie niema w tym przypadku wykształconych węzłów

jak w belce kratowej, prawdziwy obraz sił nie będzie przeto tak jasny jak go sobie wyobrażamy, zasadnicze jednak działanie sił nie ulegnie zbyt wielkim zmianom.

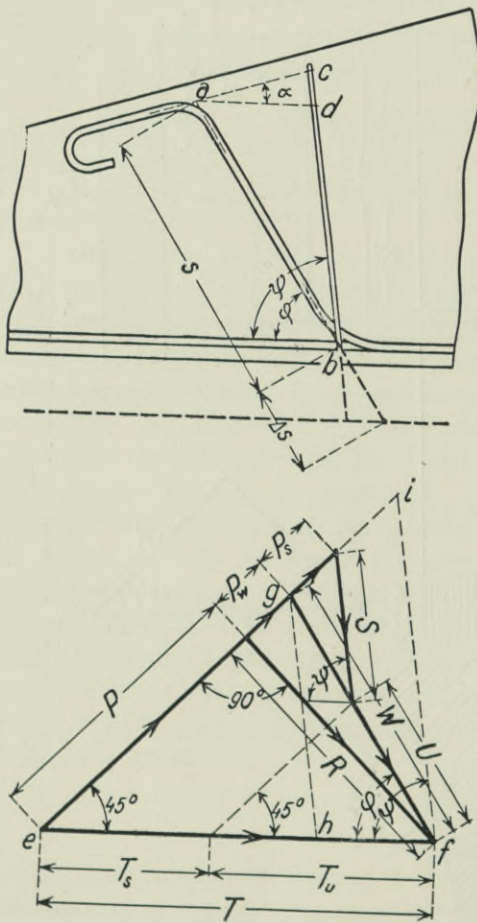
Zdarzyć się może, że ze względów konstrukcyjnych uważamy za wskazane umieścić pręty odgięte w położeniu różnym od połowy kąta prostego. Ma to miejsce np. w belce niskiej i przy małej ilości stojących do dyspozycji wkładek, nie wystarczającej przy odgięciach pod 45° do zabezpieczenia wszystkich przekrojów od rys ukośnych; wówczas stosujemy wkładki odgięte pod kątem

$$\varphi < \frac{\pi}{4}$$

co było zasadą dla systemu Hennebique'a. W tym wypadku, jak zauważyć można z wieloboku sił (rys. 2) na pręty ukośne działa siła

$$W = \frac{R}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} \quad (4a)$$

a więc większa jak siła R . Przeciwnie w belkach wysokich w stosunku do swej rozpiętości zachodzi konieczność przeprowadzenia wkładek pod kątem większym od 45° , a to celem umożliwienia zakotwienia wszystkich prętów odgiętych w części ciśnionej belki i wówczas będzie:



Rys. 2.

W wypadku strzemion pionowych i prętów odgiętych pod 45° , dla belki o zmiennej wysokości wzór (11) upraszcza się do formy

$$A = A_u + A_s \frac{\mu}{\sqrt{2}} \quad \dots \quad (11 a)$$

zaś dla belki równoległej $A = A_u + \frac{A_s}{\sqrt{2}} \quad \dots \quad (11 b)$

Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych we wzorach (9), (10) i (11) może być uciążliwym, przeto zauważa się, że można je odczytać z wieloboku sił, a mianowicie

$$\sin \varphi + \cos \varphi = \frac{\overline{ef}}{\overline{fg}} \quad \dots \quad (13 a)$$

$$\sin \psi + \cos \psi = \frac{\overline{eh}}{\overline{gh}} \quad \dots \quad (13 b)$$

$$\frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\sin \psi + \cos \psi} = \frac{\overline{fg}}{\overline{fi}} \quad \dots \quad (13 c)$$

przyczem prosta \overline{gh} i \overline{fi} są równoległe do kierunku strzemion.

Wkońcu rozważanie nasze zastosujemy do przypadku, gdy w belce pominiemy pręty ukośne, a używamy jedynie strzemion na uzbrojenie przeciw ciągnięciom ukośnym. Przy pionowym położeniu strzemion siła w nich działająca równa się sile ścinającej T . Ponieważ dla belki równoległej siła ścinająca wynosi tyle co siła poprzeczna Q , więc dochodzimy do tego samego wyniku jak Mörsch, a mianowicie że w tym wypadku strzemiona działają jak słupy belki kratowej wielokrotnej, prostokątnej. Jakkolwiek dla przedstawienia całości nadmieniono tu o możliwości określenia sił i przy uzbrojeniu tylko strzemionami, to jednak konstrukcji takiej nie należy uważać za prawidłową i polecenia godną, a to nietylko z powodu nieekonomicznego rozkładu materiału, ale też z uwagi na mniejszą pewność, jaką belki posiadają, a co wykazały doświadczenia.

W praktyce tok obliczenia i projektowania uzbrojenia na ciągnięcia główne będzie następujący:

Po obliczeniu wzorem (1) naprężeń ścinających w kilku przekrojach charakterystycznych, badanej części belki o długości d , narysujemy diagram tych naprężeń na osi prostopadłej do sił pionowych. Powierzchnia tego diagramu posłuży do wyznaczenia siły ścinającej T , a to wedle formuły (2), a w dalszym ciągu do znalezienia z wieloboku sił lub z równania (4) siły ciągnącej W , przyczem należy dążyć do stosowania odgięć pod 45° . W tym wypadku będzie

$$W = R = \frac{T}{\sqrt{2}} \quad \dots \quad (14)$$

M. MATAKIEWICZ

Przepływ przez obszary zalewowe rzek.

(Szkic hydrologiczny).

Przy obliczaniu objętości przepływu największej wielkiej wody rzek i potoków, na podstawie przekroju poprzecznego i spadku, stosujemy wzory empiryczne na średnią prędkość, które, jak wiadomo, dzielą się na dwa rodzaje, a mianowicie dawniejsze z nich posiadają t. zw. współczynnik szorstkości, obierany dowolnie, na podstawie doświadczenia i nowsze, bez takiego współczynnika. Nie będę się tu zastanawiał nad tem, który typ formuł jest odpowiedniejszy, chcę natomiast zaznaczyć, że tak jedne, jak i drugie, opierają się na pomiarach hydrometrycznych, przeprowadzonych prawie wyłącznie we właściwym łożysku rzeki, którego największe wypełnienie stanowi t. zw. woda brzegowa, zwana także zwykłą wielką wodą. O ile przyjąć można, że wszystkie stany znajdujące się jeszcze wewnątrz brzegów mają wpływ na ukształtowanie łożyska i rzeczywiście je kształtują, to natomiast nie można tego powiedzieć o działaniu wielkich wód, występujących ponad brzegi, w odniesieniu do obszarów zalewowych. Na obszarach tych przepływ wody jest rzadkim gościem, nie może ich zatem wykształcić w sposób korzystny dla przepływu. Są one tylko łożyskiem przygodnem, pofałdowaniem, a przytem, z powodu istnienia wegetacji, szorstkiem, które to właściwości wpływać muszą niekorzystnie na efekt przepływu. To zapatrywanie nie wymaga bliższego uzasadnienia o ile chodzi o wpływ wegetacji na zwiększenie szorstkości, jest ono bowiem zupełnie zrozumiałe, że jednak obszary zalewowe, z powodu swego ukształtowania, są mniej gładkie jak właściwe łożysko, wymaga pewnych dowodów. Otóż dowody cyfrowe podane będą w dalszym ciągu, tu tylko narazie powołam skonstatowany wielokrotnie fakt, że jakkolwiek dobrze utrzymane łożyska kanałów sztucznych ziemnych są znacznie gładkie od łożysk naturalnych, czyli rzecznych, o tym samym spadku, to natomiast źle utrzymane

kanały ziemne, lub z osadami piasku i namułu, okazują nieraz dużo większą szorstkość jak łożyska rzeczne.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę ogólną formułę na średnią prędkość:

$$v = 35,4 R^{0,7} I^m,$$

- to 1) dla kanałów ziemnych regularnych i czystych $m = 0,483$
 2) dla rzek $m = 0,493 + 10I$, a więc na przykład przy $I = 0,0002$. . . $m = 0,495$
 3) natomiast dla kanałów ziemnych zaniedbanych $m = 0,505 - 0,515$,

co wpływa wydatnie na zmniejszenie funkcji spadku, a zatem i prędkości przepływu.

Podobnie jak źle utrzymane kanały sztuczne, są także i tereny zalewowe rzek takimi źle utrzymanymi łożyskami.

Dotknęliśmy tu narazie jednego tylko zadania, a mianowicie obliczania objętości przepływu, podobnie zachodzi potrzeba uwzględnienia odrębnych warunków przepływu przez obszary zalewowe w porównaniu z przepływem we właściwym łożysku przy obliczaniu światła mostów, oraz odstępu wałów ochronnych.

W pierwszym wypadku oznaczać należy wysokość ciśnienia $k = \frac{v_0^2}{2g}$ osobno dla terenów zalewowych, a osobno dla właściwego łożyska, w drugim, obliczamy osobno przepływ przez właściwe, głębokie łożysko, a osobno przez tereny zalewowe; w obu wypadkach znajomość warunków przepływu przez obszary zalewowe okazuje się konieczną.

Co się tyczy wpływu roślinności na przepływ, to nie chcę tutaj iść tak daleko, jak to uczynił inżynier Wellner¹⁾, który badał przepływ przez bardzo zarośnięte rowy i potoki i otrzymał współczynnik szorstkości n do wzoru Ganguillet-Kutter'a aż 0,264, względnie współczynnik c wzoru Chézy w pewnym wypadku zaledwie 1,8, — tu badać będziemy odrębność przepływu przez tereny zalewowe tylko w takich profilach, jakie się obiera przy pomiarach, to znaczy profile otwarte, niezarośnięte wikliną, co najwyżej z niską roślinnością.

Nie można zaprzeczyć, że np. przy oznaczaniu odstępu wałów mamy nieraz do czynienia z obszarami o wysokiej roślinności, zmniejszającej naturalny profil przepływu, oraz zmniejszającej prędkości wody, jednak w takim wypadku trudno przeprowadzić jakieś ściśle obliczenia

¹⁾ „Über Rauheitsziffern“, Warszawa 1930. III. Konferencja hydrologiczna państw bałtyckich.

i nie pozostaje nic innego, jak wyłączyć część naturalnego profilu przepływu jako martwą.

Jak już powyżej powiedziano, zbadanie warunków przepływu przez obszary zalewowe posiada wybitną praktyczną wartość, dlatego w dalszym ciągu przeprowadzone będzie badanie, czy i w jakim stopniu stan w jakim przeciętnie znajdują się obszary zalewowe wpływa na zmniejszenie prędkości przepływającej przez nie wody.

* * *

Celem wyjaśnienia powyższego problemu musimy się oprzeć na pomiarach hydrometrycznych, należycie wykonanych, dających rękojmię ścisłości. Metoda badania polegać będzie na tem, że dla obszarów zalewowych, w których przeprowadzono bezpośrednie pomiary prędkości, rachować będziemy prędkość również z formuły empirycznej i porównywać obydwa wyniki. Ponieważ, jak to już powyżej powiedziano, formuły empiryczne opierają się na pomiarach we właściwym łożysku, przeto porównanie takie powinno rzeczywiście wykazać różnicę w warunkach przepływu w łożysku i w obszarach zalewowych i to na niekorzyść tych ostatnich.

Przy przeprowadzeniu badania zastosowano ogólną formułę na prędkość dla łożysk naturalnych:

$$v = f(T) \cdot F(I) = (1,04 T^{0,7}) \cdot (34 I^{0,493+10 I}) = 35,4 T^{0,7} I^{0,493+10 I},$$

która w granicach średnich głębokości od $T = 0,000$ do $T = 4,5 m$ i w granicach spadków od $I = 0,000$ do $I = 0,016$ daje wyniki o zupełnie wystarczającej dokładności. Te granice stosowności formuły wystarczają nawet dla bardzo dużych rzek i bardzo wysokich stanów, jak to w dalszym ciągu zresztą zobaczymy, gdyż trzeba mieć na uwadze, że T oznacza średnią głębokość przekroju przepływu¹⁾.

¹⁾ a) Dla średnich głębokości ponad $4,5 m$, zbadanie licznych pomiarów przy wielkich średnich głębokościach, oraz poszczególnych pionowych pomiaru (ponad $12 m$ głębokości), wykazało, że dla T od $4,5 m - 12 m$ wykładnik n funkcji T^n powinien maleć od $0,7$ do $0,53$, a kształt funkcji głębokości można przyjąć jako prostą. Z tego powodu określono tę funkcję dla $T > 4,5 m$ następująco:

$$f(T) = 3 + 0,125(T - 4,5) = 2,44 + 0,125 T,$$

zatem kształt formuły na prędkość dla $T > 4,5$ będzie:

$$v = (2,44 + 0,125 T) \cdot F(I) = (83 + 4,25 T) I^{0,493+10 I}.$$

Szczegóły w pracy z r. 1925, oraz w pracy z r. 1931, zamieszczonej w „Czasopiśmie Technicznym“.

b) Dla potoków o bardzo znacznych spadkach, od $I = 0,016$ do $I = 0,100$, oznaczono formułę na średnią prędkość w następującym kształcie:

$$v = 2,38 T^{0,7}.$$

(Patrz autora: „Formuła na średnią prędkość dla łożysk naturalnych i wielkich spadków“; Akademia Nauk Technicznych, Warszawa 1931).

1. Pomiar Harlachera na Dunaju w profilu pod Klosterneuburgiem¹⁾.

Rozpoczynamy od tego pomiaru nie z tej przyczyny, jakoby istniała tu możliwość zbadania przepływu przez obszar zalewowy w szerokich granicach, gdyż stan pomiaru nie był jeszcze zbyt wysoki i chyba tylko pionowe pomiaru I, II i XV możnaby uważać jako leżące w terenie zalewowym, lecz raczej aby nabrać zaufania do formuły, która tu jest podstawą metody badania.

Wyniki pomiaru były tu następujące:

$$Q=3632,2 \text{ m}^3/\text{sek}, \quad F=1801,7 \text{ m}^2, \quad B=431 \text{ m}, \quad T=4,12 \text{ m}, \quad v=2,016 \text{ m}, \\ I=0,000486.$$

Z formuły otrzymuje się na podstawie powyższych wartości średnią prędkość $v_f=2,130 \text{ m}$, a zatem w porównaniu z pomierzoną o $0,114 \text{ m}$, czyli o 5% większą. Wynik ten uważać należy jako dobry, gdyż różnica leży w granicach błędów pomiarów.

Szczegółowe wyniki pomiaru (w poszczególnych pionowych) przedstawiają się następująco²⁾:

Pionowa	Głębokość t	Średnia prędkość v_n	$f(t)$ (z formuły)	$F(I) = \frac{v_n}{f(t)}$
I	1,18	0,768	1,17	0,657
II	2,47	1,159	1,96	0,592
III	1,97	1,275	1,67	0,760
IV	1,69	1,309	1,50	0,873
V	1,73	1,318	1,53	0,861
VI	2,27	1,567	1,845	0,850
VII	3,15	1,758	2,325	0,753
VIII	3,09	2,112	2,29	0,923
IX	3,84	1,592	2,67	0,596
X	3,43	1,545	2,465	0,627
XI	6,53 ³⁾	2,113	3,26	0,648
XII	6,92 ³⁾	2,441	3,305	0,738
XIII	7,88 ³⁾	2,440	3,435	0,710
XIV	7,27 ³⁾	2,219	3,35	0,663
XV	1,68	1,016	1,495	0,680

¹⁾ Harlacher: „Die Messungen in der Elbe und Donau“, Lipsk 1881. Pomiar z 25 kwietnia 1878 r.

²⁾ Literą T oznaczono średnią głębokość całego profilu, literą t głębokości w poszczególnych pionowych.

³⁾ Dla tych pionowych, o głębokości większej jak $4,5 \text{ m}$, zastosowano formułę na $f(t)$ powyżej podaną.

Obliczyliśmy tu (w ostatniej kolumnie) wartości funkcji spadku dla poszczególnych pionowych; widać, że jakkolwiek przyjmuje się spadek jednolity dla całego profilu, nie jest on w poszczególnych strugach taki sam, gdyż poszczególne wartości funkcji spadku wahają od 0,592 do 0,923, podczas gdy spadkowi podłużnemu, oznaczonemu przy pomiarze, odpowiada według formuły funkcja:

$$F(I) = F(0,000486) = 0,763.$$

Że spadek w poszczególnych strugach nie jest taki sam, jest rzeczą zupełnie zrozumiałą, przytem, jak widać z powyższego zestawienia średnich prędkości, przy pionowej VIII i między pionowemi XII i XIII wytworzyły się dwa centra największych prędkości, znamionujące położenie strug o najlepszem wyzyskaniu spadku.

Pomimo tego jest to pomiar dla nas bardzo ważny, gdyż jest pomiarem zupełnym, przy którym mierzono prędkości w różnych punktach całego profilu i do tego wykonanym nie przy moście, lecz w profilu na wolnej przestrzeni.

Przyjmując pionowe I i II jako leżące w obszarze zalewowym, otrzymuje się dla nich średnią wartość funkcji spadku $\frac{0,657+0,592}{2}=0,624$, która w porównaniu z funkcją spadku z formuły, $F(I)=0,763$, wykazuje zmniejszenie o 0,139, czyli o 18%, a takie same zmniejszenie odnosi się naturalnie także i do prędkości. Pionowa XV, po drugiej stronie profilu, daje zmniejszenie 11%.

2. Pomiar na Dunaju pod Wiedniem, przy moście w *km* 2,682, wykonany 14—16 września 1897¹⁾.

I ten pomiar nie obejmuje jeszcze właściwej wielkiej wody, pokrywającej tereny zalewowe, jednak podaje się tu jego wyniki w tym samym celu jak wyniki pomiaru poprzedniego. Przytem jest to również pomiar zupełny, przeto dla sprawdzenia formuły przedstawia specjalną wartość²⁾.

Wyniki tego pomiaru są następujące:

$$Q=3233,9 \text{ m}^3/\text{sek}, \quad F=1321,83 \text{ m}^2, \quad B=284,3 \text{ m}, \quad T=4,65 \text{ m}, \quad v=2,446 \text{ m}, \\ I=0,00056.$$

Z formuły otrzymuje się na podstawie powyższych wartości średnią prędkość $v_f=2,446$, a zatem zupełnie zgodną z pomierzoną.

Szczegółowe wyniki pomiaru (w poszczególnych pionowych) przedstawiają się następująco:

¹⁾ „Beiträge zur Hydrographie Österreichs“, III Th. 1897.

²⁾ W opisie na str. 31 stwierdzono przytem, że przepływ odbywał się regu-
larnie i zupełnie prostopadle do mostu.

Pionowa	Głębokość t	Średnia prędkość v_n	$f(t)$ (z formuły)	$F(I) = \frac{v_n}{f(t)}$
I	1,68	0,77	1,495	0,516
II	3,33	1,76	2,41	0,729
III	3,54	1,99	2,525	0,789
IV	3,64	2,07	2,57	0,804
IV <i>a</i>	3,70	2,16	2,60	0,831
IV <i>c</i>	3,90	2,13	2,695	0,790
V	3,30	2,00	2,40	0,833
VI	3,32	2,16	2,41	0,896
VIII	3,12	2,28	2,305	0,991
X	3,33	2,35	2,415	0,973
XI	4,08	2,34	2,78	0,840
XI <i>a</i>	4,39	2,48	2,93	0,846
XI <i>c</i>	4,06	2,38	2,775	0,843
XII	4,46	2,35	2,965	0,793
XIII	5,00	2,42	3,065	0,790
XV	5,85	2,59	3,17	0,817
XVII	6,94	2,57	3,31	0,776
XVIII	7,68	2,64	3,40	0,777
XVIII <i>a</i>	7,42	2,74	3,37	0,813
XVIII <i>c</i>	7,30	2,63	3,35	0,785
XIX	8,15	2,72	3,46	0,786
XX	7,55	2,78	3,385	0,821
XXI	7,50	2,87	3,38	0,849
XXII	8,00	2,71	3,44	0,788
XXIII	8,50	2,65	3,50	0,757
XXIV	3,75	1,36	2,625	0,518
XXIV <i>a</i>	1,25	1,01	1,215	0,830
Średnio \approx 0,800				

Obrachowane tu wartości funkcji spadku dla poszczególnych pionowych nasuwają takie same wnioski jak przy poprzednim pomiarze; wahają one w granicach od 0,516 do 0,991, podczas gdy spadkowi pomierzonemu odpowiada według formuły wartość funkcji

$$F(I) = F(0,00056) = 0,810.$$

Niema tu właściwego terenu zalewowego, dlatego pomiar ten nie daje możliwości do wysnucia dalszych wniosków.

3. Pomiar na Wiśle pod Warszawą, wykonany przy moście Kierbedzia 7 maja 1919 r.

I ten pomiar podajemy tu w tym samym celu jak obydwie pomiary poprzednie, gdyż jakkolwiek wykonany on był przy stanie

bardzo wysokim (476), tylko małą część profilu, po prawej stronie, można uważać jako należącą do obszaru zalewowego.

Wyniki tego pomiaru są następujące:

$$Q=4830 \text{ m}^3/\text{sek}, F=2234 \text{ m}^2, B=455 \text{ m}, T=4,91 \text{ m}, v=2,16 \text{ m}, \\ I=0,000355.$$

Z formuły otrzymuje się na podstawie powyższych wartości średnią prędkość $v_f=2,00 \text{ m}$, a zatem w porównaniu z pomierzoną o 0,16, czyli o 7,8% mniejszą.

Wyniki pomiaru w poszczególnych pionowych są następujące:

Pionowa	Głębokość t	Średnia prędkość v_n	$f(t)$ (z formuły)	$F(I) = \frac{v_n}{f(t)}$
I	3,99	1,015	2,740	0,370
II	5,70	1,695	3,152	0,538
III	4,25	2,220	2,865	0,827
IV	4,25	2,158	2,865	0,753
V	5,48	2,244	3,125	0,718
VI	4,37	2,143	2,890	0,741
VII	4,49	2,243	2,976	0,754
VIII	5,05	1,861	3,071	0,606
IX	3,97	2,387	2,730	0,875
X	3,85	2,383	2,675	0,891
XI	3,87	2,338	2,683	0,871
XII	3,97	2,134	2,730	0,782
XIII	4,12	2,372	2,800	0,848
XIV	4,82	2,331	3,043	0,766
XV	5,70	2,214	3,153	0,739
XVI	6,15	2,373	3,209	0,740
XVII	7,65	2,522	3,396	0,743
XVIII	6,80	2,522	3,290	0,767
XIX	9,95	2,565	3,684	0,696
XX	10,95	2,730	3,809	0,717
XXI	12,25	2,204	3,971	0,555
XXII	4,25	1,622	2,865	0,569
XXIII	3,27	1,412	2,385	0,593
XXIV	2,90	1,349	2,190	0,616
XXV	2,25	1,211	1,835	0,650
XXVI	1,48	0,878	1,370	0,641
XXVII	0,88	0,369	0,951	0,388
Średnio \sim				0,717

Różnicy między wynikiem pomiaru a wynikiem formuły, podanej powyżej na 7,8%, nie należy również uważać za zbyt wielką; jak zawsze, tak i tu pomiar spadku, zwłaszcza przy wielkiej wodzie, jest

trudny, nadto spadek mierzymy tylko przy brzegach, a jak wykazuje powyższe obliczenie, spadki w poszczególnych strugach muszą być różne, kiedy funkcje spadku są różne. Jednak obliczone wartości funkcji spadku dla 12 pionowych (4, 5, 6, 7, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20) bardzo mało się od siebie różnią; średnia ich wartość wynosi 0,743, a odpowiada jej spadek $I = 0,000463$, podczas gdy średniej wartości funkcji spadku dla wszystkich pionowych $F(I) = 0,717$ odpowiada spadek $I = 0,00042$.

Jako leżąca w terenie zalewowym można jedynie uważać tu pionową XXVII; ponieważ spadkowi pomierzonemu $I = 0,000355$ odpowiada $F(I) = 0,655$, zaś dla pionowej XXVII otrzymano $F(I) = 0,388$, stosunek obu wartości wynosi $\frac{0,388}{0,655} = 0,59$, zmniejszenie prędkości zatem 41% .

4. Pomiary na Dunaju pod Wiedniem, wykonane przy moście w *km* 2,682, 2—7 sierpnia 1897 r.

Jest to pięć pomiarów, wprawdzie powierzchniowych, ale bardzo starannie wykonanych i obliczonych¹⁾. Wykonane one zostały przy stanach bardzo wysokich, przy których przepływ odbywał się i przez rozległe obszary zalewowe. Całkowita szerokość zwierciadła wynosiła od 467,8 do 788,9 *m*, powierzchnia przekroju od 1669,4 do 3666,9 *m*², objętość przepływu od 3936,5 do 8896,7 *m*³/*sek*. Wyniki tych pomiarów, w odniesieniu do całego profilu, przedstawiają się następująco:

Pomiar	Data	<i>T</i>	<i>I</i>	v z pomiaru = $\frac{Q}{F}$	v z formuły = $f(I) \cdot F(I)$
1.	3 sierpnia	4,65	0,000580	2,426	2,481
2.	2 „	4,45	0,000582	2,406	2,435
3.	5 „	4,18	0,000590	2,388	2,349
4.	6 „	3,60	0,000602	2,243	2,145
5.	7 „	3,57	0,000592	2,352	2,109

Jak widać, prędkości obliczone z formuły zgadzają się zupełnie dobrze z prędkościami pomierzonymi; odchyłki wynoszą: +0,055 (tj. +2,3%), +0,029 (tj. +1,2%), -0,049 (tj. -2%), -0,072 (tj. -4,4%) i -0,243 (tj. -11,5%), są zatem bardzo nieznaczne, z wyjątkiem ostatniego pomiaru. Przy tym pomiarze odchyłka jest wprawdzie znaczniejsza, jednak przypisać to należy błędowi pomiaru, przy którym średnia prędkość jest zbyt wielka w porównaniu ze średnią prędkością przy pomiarze poprzednim, o prawie identycznych wartościach spadku i głębokości.

Przejdźmy teraz do terenów zalewowych, z których lewy oznaczmy literą *l*, a prawy literą *p*. W cytowanej publikacji znajdujemy

¹⁾ „Beiträge zur Hydrographie Österreichs“, j. w.

pewne udogodnienie, a mianowicie są tam już podane wyniki pomiarów dla całego terenu zalewowego lewego i dla całego prawego. Wyniki te są:

Pomiar	T		I	v (z pomiaru)		v (z formuły)	
	l	p		l	p	l	p
1.	2,85	0,97	0,000580	1,50	0,67	1,786	0,841
2.	2,66	0,77	0,000582	1,37	0,55	1,716	0,718
3.	2,28	0,58	0,000590	1,31	0,68	1,527	0,589
4.	1,32	—	0,000602	1,07	—	0,917	—
5.	0,37	—	0,000592	0,23	—	0,432	—

Stosunek prędkości średnich pomierzonych, do otrzymanych z formuły, a zatem odpowiadających właściwemu łożysku rzeki jest:

Pomiar	$\frac{v \text{ z pomiaru}}{v \text{ z formuły}}$		Średnio	
	l	p	l	p
1.	0,84	0,80	0,83	0,785
2.	0,79	0,77		
3.	0,86	(1,15)		
4.	(1,16)	—		
5.	(0,53)	—		

Pomijając chwiejne wyniki, otrzymane przy płytkim pokryciu terenu zalewowego wodą, otrzymaliśmy dla terenu lewego (o przeciętnej średniej głębokości 2,5 m) zmniejszenie przepływu o 17%, dla terenu prawego (o przeciętnej średniej głębokości 0,90 m) zmniejszenie przepływu o 21,5%.

5. Pomiary na Dunaju pod Wiedniem, wykonane przy moście w km 2,682, w roku 1899¹⁾.

Jest to 14 bardzo cennych pomiarów, przy stanach bardzo wysokich, z których najwyższy dał objętość jeszcze o 108 m³ wyższą, jak najwyższy pomiar z r. 1897. Przy pomiarach tych jednak nie pomierzono spadku, dlatego nie nadają się one już do sprawdzenia formuły, natomiast pragnąc obliczyć przepływ przez obszary zalewowe, musimy zastosować postępowanie odwrotne, a mianowicie z formuły obliczyć spadki, oraz wartości funkcji spadku. Metodę taką stosować będziemy w dalszym ciągu nie tylko w odniesieniu do tych pomiarów, przy których nie pomierzono spadków, ale i do tych, gdzie oznaczenie spadku nie wzbudza zaufania, z powodu nieregularnego profilu podłużnego w miejscu pomiaru.

Wyniki tych pomiarów przedstawiają się następująco:

¹⁾ „Beiträge zur Hydrographie Österreichs“ 1899.

Pomiar	T		v (z pomiaru)			I (z formuły)	v (z formuły)	
	l	p	l	p	cały profil		l	p
1.	3,23	1,11	1,75	0,62	2,49	0,00051	1,85	0,86
2.	3,20	1,01	1,74	0,59	2,49	0,00052	1,85	0,82
3.	3,19	1,07	1,74	0,57	2,48	0,00051	1,836	0,85
4.	2,75	0,66	1,55	0,55	2,41	0,00055	1,70	0,63
5.	2,66	0,63	1,52	0,52	2,39	„	1,66	0,61
6.	2,62	0,60	1,51	0,44	2,38	0,000565	1,66	0,59
7.	2,49	0,55	1,44	0,41	2,36	0,00056	1,60	0,55
8.	2,38	0,51	1,38	0,33	2,33	„	1,55	0,53
9.	2,22	0,41	1,29	0,25	2,31	0,00058	1,50	0,46
10.	2,11	0,29	1,26	0,37	2,29	„	1,44	0,36
11.	2,08	0,27	1,25	0,36	2,29	„	1,43	0,34
12.	1,54	—	1,00	—	2,23	0,00062	1,30	—
13.	1,45	—	0,90	—	2,19	„	1,16	—
14.	1,34	—	0,88	—	2,18	0,00064	1,10	—

Stosunek prędkości średnich pomierzonych, do otrzymanych z formuły, jest:

Pomiar	$\frac{v \text{ z pomiaru}}{v \text{ z formuły}}$		Pomiar	$\frac{v \text{ z pomiaru}}{v \text{ z formuły}}$	
	l	p		l	p
1.	0,94	0,72	8.	0,89	0,63
2.	0,94	0,72	9.	0,86	0,55
3.	0,95	0,67	10.	0,87	1,03
4.	0,91	0,87	11.	0,83	1,06
5.	0,91	0,87	12.	0,80	—
6.	0,91	0,75	13.	0,80	—
7.	0,90	0,75	14.	0,80	—

Średnio $\frac{v \text{ z pomiaru}}{v \text{ z formuły}}$ dla obszaru $\left\{ \begin{array}{l} \text{lewego } 0,88 \text{ (przy przecięt. śred. głęb. } 2,50) \\ \text{prawego } 0,78 \text{ „ „ „ „ } 0,60) \end{array} \right.$

Jak widać, zmniejszenie przepływu wynosi dla terenu zalewowego lewego 12%, dla prawego 22%. Przy terenie lewym zwraca uwagę wzrost zmniejszenia prędkości z maleniem głębokości, a mianowicie przy głębokości 3,23 m zmniejszenie wynosiło tylko 6%, zaś przy głębokościach 1,54, 1,45 i 1,34 m aż 20%. W zgodzie z tem jest teren zalewowy prawy, wykazujący przy głębokości 0,6 m zmniejszenie prędkości o 22%.

6. Pomiary na Sanie pod Jarosławiem ¹⁾.

Wykonano tu w r. 1906 przy wysokich stanach dwa pomiary zupełne (przy stanach 3,60 i 3,98) i jeden powierzchniowy (przy stanie

¹⁾ Wyniki pomiarów 6 i 7 zawdzięczam p. Naczelnikowi Oddziału Hydrograficznego we Lwowie, inż. Tadeuszowi Łowczyńskiemu.

4,02). Z uwagi na małą różnicę stanów dwóch ostatnich pomiarów, pomijamy ostatni, jako mniej pewny.

Wyniki obydwu pomiarów zupełnych są następujące:

Pomiar	Data	F	B	Q	T	I	v z po- miaru	v z for- muły	Spadek I' , sprostowany na podsta- wie formuły
1.	12/VII 1906	758,17	173,1	853,8	4,367	0,000337	1,126	1,876	0,000115
2.	11/VI 1906	658,32	173,1	697,4	3,803	0,000294	1,059	1,602	0,000122

Jak widać, obrachowane z formuły prędkości zupełnie się nie zgadzają z prędkością pomierzoną, a różnica jest tak znaczna, że żadna formuła nie dałaby wyników zgodnych. Wynika z tego, że nie uchwycono tu spadku odpowiadającego średniej prędkości profilu, prawdopodobnie z powodu zbyt wielkich odstępów niwelowanych punktów zwierciadła. Do tego dodać należy, że, zwłaszcza przy pomiarze pierwszym, zwierciadło wody w miejscu pomiaru nie wykazuje wybitnego nagromadzenia spadku, tj. spiętrzenia przy moście, które zresztą musiało być zupełnie nieznaczne, gdyż stany przy których obydwie pomiary wykonano, leżą jeszcze znacznie niżej od stanu absolutnie najwyższego. Z tego powodu, na podstawie formuły obliczono spadki obu pomiarów i według tych sprostowanych spadków I' przeliczono prędkości w terenie zalewowym. Dla wyjaśnienia dodaje się, że istnieje w miejscu pomiaru tylko jeden, tj. prawobrzeżny obszar zalewowy. Most przy którym wykonano pomiary posiada 3 przęsła główne, każde o świetle 42 m i 4 przęsła zalewowe, z tych 3 o świetle po 13 m, a jedno 10 m.

Wyniki pomiarów w poszczególnych pionowych obszarze zalewowego przedstawiają się następująco:

Pomiar 1.					Pomiar 2.				
Pionowa	t	v (z pomiaru)	v' (z formuły)	$\frac{v}{v'}$	Pionowa	t	v (z pomiaru)	v' (z formuły)	$\frac{v}{v'}$
XXVIII	2,20	0,406	0,695	0,58	XXVIII	1,89	0,463	0,650	0,71
XXIX	1,92	0,474	0,631	0,75	XXIX	1,57	0,446	0,571	0,78
XXX	1,63	0,344	0,564	0,61	XXX	1,37	0,318	0,520	0,61
XXXII α	1,30	0,118	0,471	0,25	XXXIII	0,92	0,154	0,393	0,39
XXXIV	1,20	0,175	0,456	0,38	XXXVI	1,15	0,170	0,459	0,36
XXXVI	1,43	0,203	0,656	0,31	XXXVII	1,14	0,193	0,457	0,42
XXXVII	1,43	0,224	0,656	0,34	XXXIX	1,44	0,205	0,537	0,39
XXXIX	1,67	0,269	0,574	0,47	XL	1,35	0,259	0,513	0,50
XL	1,60	0,356	0,556	0,64	XLI	1,30	0,185	0,500	0,37
XLI	1,63	0,270	0,564	0,48					
Średnio	1,60			0,48	Średnio	1,35			0,50

Jak widzimy, prędkości rzeczywiste spadły tu aż do 50⁰/₀, w porównaniu z prędkościami, jakie w normalnych warunkach przy tym samym spadku i tych samych głębokościach powstają. Powodem tego są tu z pewnością nie tylko odrębne i niekorzystne warunki przepływu

w obszarze zalewowym, ale i ciasnota przęseł zalewowych. Spostrzeżenia powyższe potwierdzają wyniki następnego pomiaru.

7. Pomiar na Bugu pod Sokalem.

Pomiar ten wykonano 25 lipca 1913 r., w profilu mostu o 12 przęsłach po 15 m światła, z których 5 po stronie prawej przekracza obszar zalewowy; ostatnie z tych przęseł ma wodę stojącą. Stan pomiaru nie był zbyt wysoki; pomierzona objętość, wynosząca okrągło $100 \text{ m}^3/\text{sek}$, wskazuje, że było to małe wezbranie.

Ponieważ przy moście nie pomierzono spadku podłużnego, przeto zastosujemy znów trochę odrębny sposób postępowania; dla porównania efektu przepływu we właściwym łożysku i w terenie zalewowym, na podstawie pionowych prędkości w łożysku i w terenie zalewowym, a więc na podstawie pomierzonych w poszczególnych pionowych głębokości i średnich prędkości, obliczymy funkcję spadku osobno dla właściwego łożyska, a osobno dla terenu zalewowego, a stosunek tych wartości da nam miarę zmniejszenia przepływu w terenie zalewowym, gdyż stosunek wartości funkcji spadku przy tych samych głębokościach jest zarazem stosunkiem prędkości.

Wyniki są następujące:

a) Łožysko właściwe.

Pionowa	T	v (zmierzone)	$f(T)=1,04 T^{0,7}$	$F(I)=\frac{v}{f(T)}$
I	1,63	0,178	1,46	0,122
II	2,18	0,279	1,79	0,156
III	1,86	0,250	1,60	0,156
IV	2,27	0,425	1,84	0,231
V	2,03	0,569	1,70	0,335
VI	1,84	0,484	1,59	0,305
VII	2,38	0,628	1,91	0,328
VIII	2,27	0,573	1,84	0,311
IX	2,25	0,578	1,83	0,316
X	2,34	0,580	1,88	0,309
XI	2,44	0,616	1,94	0,318
XII	2,06	0,544	1,72	0,316
XIII	2,55	0,497	2,00	0,248
XIV	2,28	0,565	1,85	0,305
XV	2,14	0,418	1,77	0,236
XVI	2,15	0,414	1,775	0,233
XVII	1,97	0,497	1,67	0,298
XVIII	1,88	0,462	1,62	0,285
XIX	1,76	0,322	1,54	0,209
Średnio	2,12			0,264

b) Obszar zalewowy.

Pionowa	T	v (zmierzone)	$f(T)=1,04 T^{0,7}$	$F(I)=\frac{v}{f(T)}$
XX	0,49	0,086	0,63	0,137
XXIII	0,63	0,040	0,75	0,054
XXV	0,70	0,054	0,81	0,067
XXVI	0,78	0,090	0,87	0,104
XXVIII	0,73	0,125	0,63	0,151
XXIX	0,68	0,120	0,79	0,152
XXXI	0,72	0,235	0,83	0,283
XXXII	0,73	0,075	0,835	0,090
XXXIII	0,88	0,086	0,95	0,091
Średnio	0,70			0,126

Z obliczenia tego wynika, że stosunek wartości funkcji spadku w terenie zalewowym, do wartości tej funkcji we właściwym łożysku wynosił tu:

$$0,126 : 0,264 = 0,48 \sim 0,50,$$

a więc zupełnie zgodnie z wynikami poprzedniego pomiaru.

Wyniki te stwierdzają bardzo niekorzystne warunki przepływu w obszarach zalewowych, przegrodzonych ciasnemi przęsłami, przy niskim pokryciu wodą.

8. Pomiar na Dunajcu pod Nowym Sączem ¹⁾.

Pomiar ten wykonano w dniu 1 lipca 1925 r. przy moście; wyniki przedstawiają się następująco:

$$T=1,56 m \quad v=1,63 m \quad I \text{ nie mierzono} \quad F(I)=\frac{v}{f(T)}=1,148 \quad \begin{matrix} I \text{ obliczone=} \\ =0,00125. \end{matrix}$$

Ponieważ spadku przy pomiarze nie oznaczono, obliczono go tu z formuły. Profil pomiarowy, jak na rzekę tej wielkości co Dunajec pod Nowym Sączem, miał stosunkowo znaczną rozległość ($B=275 m$), skutkiem czego mamy tu ośm pionowych w terenie zalewowym (2 w lewym, a 6 w prawym), z których jednak ostatnią wykluczono, z powodu nieprawidłowo wielkiej prędkości ($v=2,43 m$) przy zbyt małej głębokości ($t=1,10 m$) i przy danych warunkach spadku.

¹⁾ Wyniki pomiarów 3, oraz 8—10 zawdzięczam p. Naczelnikowi Centralnego Biura Hydrograficznego w Warszawie, inż. Tadeuszowi Zubrzyckiemu. Pomiarów wielkich wód otrzymałem znacznie większą liczbę, jednak wiele z nich, jak na Wiśle pod Annopolem 28/X 1926, Zawadami 5/XI 1930, Warszawą 4/VII i 7/VII 1925 Płockiem 9/VIII 1926, na Dunajcu pod Czorsztynem 1/VII 1925 i Krościenkiem 2/VII 1925, na Warcie pod Koninem 28/III 1929, na Dniestrze pod Zaleszczykami 14/VII i 23/VII 1913, pod Czajkowicami 13/VII 1929 i Radłowicami 13/VII 1929 i i., nie były dla danego celu przydatne, gdyż nie mają przepływu przez właściwe obszary zalewowe.

Wyniki pomiarów w poszczególnych pionowych obszarze zalewowego przedstawiają się następująco:

Pionowa	t	v (z pomiaru)	v' (z formuły)	$\frac{v}{v'}$
I	0,75	0,350	0,976	0,36
II	1,76	1,285	1,773	0,73
XX	0,80	0,520	1,120	0,47
XXI	0,32	0,480	0,538	0,89
XXII	1,14	0,570	1,311	0,44
XXIII	1,31	0,657	1,443	0,46
XXIV	<u>1,28</u>	0,807	1,418	<u>0,57</u>
Średnio	1,05			0,56

Widać tu zmniejszenie przepływu w terenie zalewowym o 44%, który to wynik jest bardzo zbliżony do wyniku otrzymanego w poprzednich dwu przypadkach.

9. Pomiar na Stryju w Międzybrodach.

Pomiar ten wykonano 1 września 1927 r. na wolnej przestrzeni; dwie pionowe po lewym brzegu leżą w terenie zalewowym,

Wyniki pomiaru są następujące:

$$T=2,12 \text{ m} \quad v=1,75 \text{ m} \quad I \text{ nie mierzono} \quad F(I) = \frac{v}{f(T)} = 0,994 \quad I \text{ obliczone} = 0,00088.$$

Pionowa	t	v (z pomiaru)	v' (z obliczenia)	$\frac{v}{v'}$
I	0,50	0,512	0,637	0,805
II	<u>0,64</u>	0,515	0,756	<u>0,680</u>
Średnio	0,57			0,742

Otrzymaliśmy tu zatem zmniejszenie przepływu w obszarze zalewowym średnio o 25,8%.

10. Pomiary na Warcie pod Poznaniem, wykonane 2 i 4 kwietnia 1929 r.

Są to dwa pomiary zupełne, wykonane przy moście; wyniki ich są następujące:

$$\begin{aligned} \text{Pomiar } 2/\text{IV } 1929 \quad T=1,594 \text{ m} \quad I=0,000270 \quad v=0,90 \text{ m} \quad v \text{ z formuły} &=0,835 \\ \text{„ } 4/\text{IV } 1929 \quad T=1,695 \text{ m} \quad I=0,000173 \quad v=1,06 \text{ m} \quad v \text{ „} &=0,712 \end{aligned}$$

Oznaczenie spadku nie wzbudza tu zaufania, gdyż porównując obydwa pomiary widzimy, że przy pomiarze drugim, przy dużo mniejszym spadku, a głębokości mało co większej, otrzymano prędkość większą. Dlatego musi się tu spadki sprostować, przez obliczenie ich z formuły. Obliczenie to daje następujące wartości:

$$\begin{array}{l} \text{Pomiar 1.} \quad F(I) = \frac{v}{f(T)} = 0,625 \quad I \text{ obliczone} = 0,000315 \\ \text{„ 2.} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad = 0,705 \quad \text{„} \quad = 0,000410 \end{array}$$

Jak widzimy, spadek pierwszy doznał zmiany niewielkiej, drugi stosunkowo znacznej.

Ponieważ przy obu pomiarach przepływ przez obszary zalewowe stanowi znaczną część całego przepływu, postąpimy najwłaściwiej, jeżeli porównywać będziemy przepływ w obszarach zalewowych nie z przepływem w całym łożysku, lecz z przepływem we właściwym łożysku, bez obszarów zalewowych. Wyniki pomiarów w poszczególnych pionowych przedstawiają się następująco :

Pomiar 1.

a) Obszar zalewowy.

Pionowa	t	v	$f(t)$	$F(I) = \frac{v}{f(t)}$
I	0,34	0,07	0,489	0,143
II	0,29	0,19	0,438	0,434
III	0,66	0,21	0,778	0,270
IV	0,54	0,17	0,676	0,252
V	<u>0,25</u>	0,07	0,394	<u>0,178</u>
Średnio	0,42			0,255

b) Właściwe łożysko.

VI	0,48	0,32	0,469	0,682
VII	1,34	0,75	1,275	0,588
VIII	2,72	0,89	2,095	0,430
IX	4,64	1,12	3,045	0,368
X	4,69	1,18	3,065	0,381
XI	5,05	1,19	3,23	0,369
XII	4,10	1,02	2,79	0,366
XIII	1,64	0,74	1,47	0,504
XIV	1,12	0,55	1,125	0,490
XV	1,09	0,46	1,105	0,416
XVI	1,01	0,655	1,050	0,629
XVII	0,73	0,36	0,834	0,432
XVIII	0,42	0,51	0,567	0,900
XIX	<u>0,39</u>	0,34	0,538	<u>0,632</u>
Średnio	2,16			0,513

Pomiar 2.

a) Obszar zalewowy.

Pionowa	t	v	$f(t)$	$F(I) = \frac{v}{f(t)}$
I	0,50	0,00	—	—
II	0,70	0,13	0,811	0,160
III	0,45	0,28	0,595	0,471
IV	1,00	0,17	1,04	0,163
V	0,84	0,26	0,921	0,282
VI	0,25	0,04	0,394	0,102
VII	<u>0,73</u>	0,19	0,834	<u>0,228</u>
Średnio	0,67			0,233

b) Właściwe łożysko.

VIII	0,66	0,50	0,778	0,643
IX	1,50	0,71	1,380	0,515
X	2,74	0,99	2,105	0,470
XI	4,80	1,10	3,120	0,535
XII	5,24	1,15	3,315	0,347
XIII	5,24	1,20	3,315	0,361
XIV	4,34	1,06	2,905	0,365
XV	1,94	0,82	1,655	0,496
XVI	1,34	0,69	1,275	0,540
XVII	1,30	0,57	1,250	0,456
XVIII	1,16	0,63	1,155	0,544
XIX	0,85	0,50	0,928	0,539
XX	0,65	0,50	0,770	0,650
XXI	<u>0,47</u>	0,33	0,614	<u>0,537</u>
Średnio	2,302			0,500

Stosunek średniej wartości funkcji spadku w obszarze zalewowym i we właściwym łożysku, jest tu następujący:

$$\text{Pomiar 1: } \frac{0,255}{0,513} = 0,50 \quad \text{Pomiar 2: } \frac{0,233}{0,500} = 0,47$$

Otrzymaliśmy tu zatem w pierwszym wypadku obniżenie przepływu w terenie zalewowym o 50%, w drugim wypadku o 53%, podobnie jak przy przykładach 5, 6 i 7.

Pozatem pomiary te, a szczególnie pomiar drugi, nasuwają ciekawe refleksje, a mianowicie: Rachując według pomierzonych przy obu pomiarach wartości T , oraz v , funkcję spadku i spadek dla całego profilu z formuły, otrzymaliśmy znacznie wyższe wartości jak otrzymane z pomiaru, rachując natomiast wartości te dla poszczególnych pionowych i biorąc średnią, otrzymujemy wartości znacznie niższe, bardzo zbliżone do wartości otrzymanych z pomiaru. I tak:

1) z pomiaru otrzymano:

$$\begin{array}{ll} \text{pomiar 1} & I=0,000270, \text{ odpowiada mu } F(I)=0,580 \\ \text{„ 2} & I=0,000173, \quad \quad \quad \text{„ „ } F(I)=0,473 \end{array}$$

2) dla właściwego łożyska otrzymano jako średnią z wyników dla poszczególnych pionowych:

$$\begin{array}{ll} \text{pomiar 1} & F(I)=0,513 \quad I=0,00028 \\ \text{„ 2} & F(I)=0,500 \quad I=0,00020 \end{array}$$

3) dla całego profilu otrzymano jako średnią z wyników dla poszczególnych pionowych:

$$\begin{array}{ll} \text{pomiar 1} & F(I)=0,445 \quad I=0,000156 \\ \text{„ 2} & F(I)=0,420 \quad I=0,000135 \end{array}$$

Miarodajne są tu spadki obrachowane dla właściwego łożyska, gdyż, jak to już powyżej zaznaczono, formuły nie są dostosowane do terenów zalewowych. Jak widać, przy rozczłonkowaniu obliczenia na poszczególne pionowe otrzymaliśmy spadki dla obu pomiarów prawie równe i bliskie średniej z obu pomierzonych spadków

$$I_s = \frac{0,000270 + 0,000173}{2} = 0,00022.$$

To zbliżenie wyników pomiaru i obliczenia uzyskaliśmy dzięki starannejszemu uwzględnieniu funkcji głębokości, przez oznaczenie jej dla każdej pionowej i uwzględnienie tych wyników w dalszym rachunku.

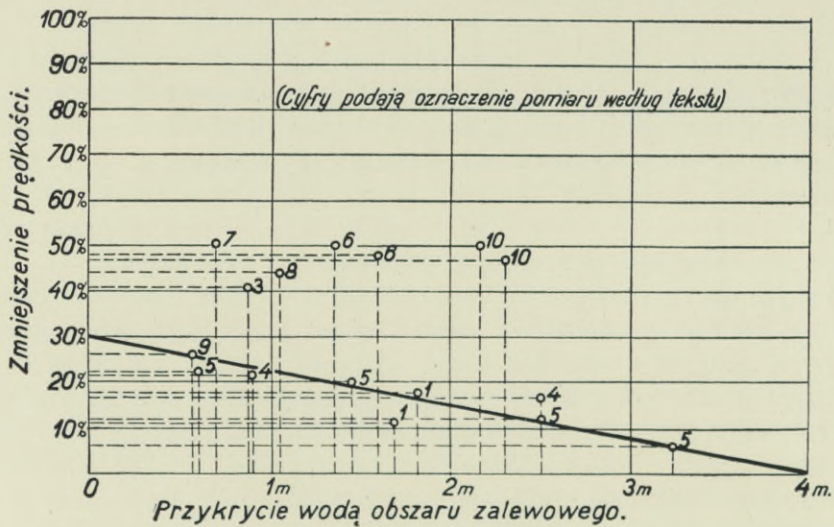
Wynika stąd wniosek, że jeżeli ma się obliczać objętość przepływu na podstawie zdjęcia profilu poprzecznego i spadku lokalnego,

to należy obliczenie średnich prędkości przeprowadzić dla każdej średniej głębokości charakterystycznych pasków profilu, a nie ograniczyć się tylko do obliczenia średniej prędkości dla całego profilu na podstawie jego średniej głębokości i spadku, gdyż takie postępowanie prowadzi do błędów.

* * *

Reasumując otrzymane wyniki stwierdzić należy, że przepływ w obszarach zalewowych rzek odbywa się niekorzystniej jak we właściwym łóżysku, obejmującym małą, średnią i zwykłą wielką wodę,

Zmniejszenie prędkości w obszarze zalewowym.



Rys. 1.

co się objawia zmniejszeniem prędkości w tych obszarach, w porównaniu z prędkościami w łóżysku właściwym, przy tym samym spadku i tej samej głębokości. Zmniejszenie to jest różne, zależnie od stopnia nieregularności tych obszarów, maleje jednak ze wzrostem głębokości przykrycia wodą. Jak widać z rysunku, praktycznie, w zwykłych warunkach, można przyjąć dla przykrycia o głębokości $t = 0$ zmniejszenie 30%, dla przykrycia $t = 4 m$ zmniejszenie 0, a dla przypadków pośrednich należy interpolować według prostej.

W wypadkach wyjątkowych, gdy obszar zalewowy jest bardziej pofałdowany, posiada wybitniejszą roślinność, wreszcie przy przepływie przez mosty zalewowe o ciasnych przesłach, zmniejszenie prędkości dochodzi do 50%, jak świadczy szereg przeliczonych tu przykładów, których wyniki uwidocznił również na rysunku¹⁾.

¹⁾ Poza głównym celem tej pracy, określonym na wstępie, celem ubocznym było również wykazanie, że formuła empiryczna, podająca związek między v , T , oraz I , może służyć za podstawę do sprawdzania i porównywania pomiarów.

INŻ. DR. ALEKSANDER PAREŃSKI

Kryteria dla wyznaczenia prędkości wód płynących w łożyskach przyrodzonych.

Praktyka inżynierska, w miarę jej postępu i rozrostu, domaga się od nauki rozwiązania wielu technicznie ważnych zagadnień. Po między innymi rozrost budowli i urządzeń wodnych w ostatnim okresie, domagał się od nauki ścisłej opisanie praw ruchu cieczy rzeczywistych — a wskutek niemożności dania takiego opisu — spowodował rozwój nowej gałęzi nauki, czysto empirycznej, mianowicie hydrauliki.

Dotychczas bowiem, zjawiska ruchu cieczy rzeczywistych, nie udało się ująć analizą matematyczną, z wyjątkiem najprostszych przypadków tego ruchu, wobec czego zastąpiono je ruchem cieczy doskonałej t. j. zupełnie fikcyjnej, której zjawiska występują w warunkach idealnych odbiegających od rzeczywistości. Zjawiskami takimi zajmuje się hydromechanika cieczy doskonałej, która przyjmując nieściśliwość oraz zupełny brak lepkości cieczy — co jest równoznacznem z doskonałą ruchliwością — umożliwia wyciąganie wniosków określających własności wszelkich istniejących (nawet doświadczalnie nie zbadanych) zjawisk wchodzących w jej zakres.

O wiele trudniejsze zadanie ma hydromechanika cieczy rzeczywistych, która bada wiernie zjawiska ruchu cieczy rzeczywistych. Obszar jej przedmiotu aczkolwiek znaczny, pozostał dotychczas w szczytłych ramach, ponieważ udało się jedynie najprostsze przypadki ruchu zapomocą jej metod rozwiązać.

Nowożytny konstruktor urządzeń i budowli wodnych wymaga jednak od nauki szybkiego dostarczenia przynajmniej takich kryteriów ruchu cieczy, któreby mogły tworzyć podstawę do oznaczenia wymiarów jego konstrukcji bez naruszenia ciągłości rozwoju tak teoretycznych podstaw, jakoteż samego budownictwa wodnego, względnie jego urządzeń.

Ta konieczna potrzeba stała się główną przyczyną rozwoju hydrauliki, nauki, która jest zbiorem formuł empirycznych i wysnutych, na ich podstawie, teorii hydraulicznych.

Formuły empiryczne umożliwiają opisywanie tylko takich zjawisk dynamicznych cieczy rzeczywistych, które ustalono szeregiem doświadczeń; są one zatem formułami interpolacyjnymi, których ekstrapolacja nie da się przeprowadzić drogą matematyczną a jakakolwiek inna droga ekstrapolacji np. doświadczalna w zmniejszonej lub zwiększonej skali, wymaga ogromnej ostrożności.

O te formuły empiryczne opierają się teorie hydrauliczne, których sprawność zależną jest od wartości czy to podstawowej czy też wtrąconej w toku rozważań formuły empirycznej.

Nauka to stosunkowo młoda a jej rozkwit idzie niemal równoległe z rozwojem budownictwa wodnego i jego urządzeń. W tej dziedzinie techniki teoria nie wyprzedziła praktyki natomiast praktyka zmusza — w pewnych granicach — teorię do dotrzymywania jej kroku.

W zakres hydrauliki wchodzi opisywanie: 1) ruchu w przewodach zamkniętych, 2) ruchu równomiernego w korytach otwartych, 3) ruchu nierównomiernego w korytach otwartych, 4) ruchu spowodowanego budowlami piętrzącymi, 5) uderzenia wodnego i oddziaływania hydrodynamicznego, 6) oporu ośrodka, wreszcie 7) ruchu wód wgłębnych.

Z powyższych zagadnień ważnymi dla budowy mostów są: ruch wody równomierny w korytach otwartych przyrodzonych i sztucznych, na podstawie którego oznaczamy sekundową objętość przepływu i ruch nierównomierny w korytach otwartych, w którym powierzchnia swobodna ulega spiętrzeniu wskutek zwężenia swobodnego przepływu przez filary i przyczółki mostowe (budowle zmniejszające swobodny przekrój przepływu). W tym przypadku rozkład prędkości jaki panuje przy ruchu równomiernym zostaje rozburzony wstrzymaniem płynącej masy wody (zmniejszeniem jej prędkości i spiętrzeniem), która po przebyciu przeszkody, względnie podczas jej przebywania, zwiększa swą prędkość. Te objawy charakteryzują ruch wody nierównomierny. Ruch ten pojawia się także w łożyskach przyrodzonych (bez budowli zwężających swobodny przepływ) na odcinkach rzek o znacznych i zmiennych spadach prowadzących rumowisko. Ruch wody jest tu przyspieszony na szypotach a opóźniony na głębinach.

Poza tem ważnym dla budowy mostów a szczególnie dla fundamentów jest ruch wód wgłębnych.

Ponieważ szczupłe ramy tej notatki nie pozwalają omówić całości kształtu tych zagadnień, ograniczono się tylko do omówienia ruchu równomiernego oraz częściowo nierównomiernego, o ile ten ostatni występuje w łożyskach przyrodzonych.

Zagadnienie zwężenia swobodnego przepływu wody przez budowle mostowe zostało ostatnio omówione w Polsce przez prof. Rybczyńskiego¹⁾ i inż. Żbikowskiego²⁾.

Przed tem zagadnieniem musimy jednak — w budowie mostów — rozwiązać inne zagadnienie, mianowicie oznaczyć maksymalny przepływ sekundowy wody w miejscu projektowanego mostu.

Do tego celu służą rozmaite metody: *a)* bezpośredni pomiar, *b)* użycie wzorów empirycznych dla wyznaczenia przepływu objętości wielkiej wody, wreszcie *c)* wyznaczenie tej objętości spadem i przekrojem.

Bezpośrednim pomiarem nie rozporządzamy prawie nigdy, ponieważ — pomijając trudności pomierzenia kulminacyjnych wodostanów — ani stan wody ani objętość przepływu nie są wartościami stałymi. Są one zależnymi od rozmaitych zmiennych czynników naturalnych i sztucznych, jak np. od zmian kształtu przekroju łożyska spadu, kultury dorzecza, klimatu, zmienności jezior, budowli regulacyjnych i t. p. Ta metoda, zatem jest najtrudniejszą w zastosowaniu.

Drugą metodą są formuły empiryczne dla przepływu wielkiej wody, ułożone przeważnie na podstawie najniekorzystniejszych warunków, jakie się wogóle zdarzyć mogą w danym dorzeczu i istniejących stosunkach hydrologicznych. Otrzymujemy tu zwykle objętość nieco większą od rzeczywistej, asekurując się tem samem od błędów ujemnych.

W formułach tych dla większych dorzeczy wprowadzone są czynniki mające wpływ na objętość przepływu wielkiej wody np. jak powierzchnia dorzecza (w potędze pierwszej lub wykładnikiem różnym od jedności), długość dorzecza, współczynniki charakteryzujące topografię, wysokość opadu i t. p.

Do rozpowszechnionych w praktyce należą formuły: Adams'a, Brix'a, Bürkli-Ziegler'a, Craig'a, Dickens'a, Dredge'a, Fanning'a, Fuller'a, Iszkowskiego, Köstlin'a, Klunzinger'a (metoda wykreślna), Kreśnika, Lauterburg'a, Mairich'a, Pascher'a, Pfeifer'a, Specht'a, Van Kooten'a i formuła autora.

Metody używane dla małych dorzeczy, wydane przeważnie przez władze (Min. robót publicznych, Min. komunikacji czy kolei i t. p. w różnych państwach) ograniczają się do podania spływu wielkiej wody z 1 km^2 na podstawie danych topograficznych, opadowych i roślinności. (Metody te używa się dla bardzo małych mostów i przepustów).

¹⁾ M. Rybczyński: „Kryterjum dla obliczania światła mostów“. Czasopismo Techniczne 1926.

²⁾ St. Żbikowski: „Le problème du remous produit par un pont“. III-cia Konfer. Hydr. Państw Bałtyckich 1930.

Ostatnio, podjął próbę, zbudowania formuły dla małych dorzeczy prof. Rożański³⁾ uwzględniając przytem natężenie, zasięg i czas trwania opadów nawalnych.

Trzeci wreszcie sposób wyznaczenia objętości przepływu wody wogóle (nie tylko największej), polega na pomierzeniu powierzchni przekroju łożyska rzeki w przekroju badanym lub w pobliżu przekroju badanego oraz jemu i napełnieniu odpowiadającego spadku, wreszcie obliczenia objętości przepływu wzorami empirycznymi określającymi średnią sekundową prędkość wody, wyrażoną dwoma zmiennymi t. j. spadem I oraz głębokością średnią T względnie promieniem hydraulicznym R danego przekroju.

Średnia sekundowa prędkość wody v w przekroju A jest wartością matematyczną a nie rzeczywistą, otrzymujemy ją bowiem z relacji

$$Q = A \cdot v \text{ m}^3/\text{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

z czego

$$v = \frac{Q}{A} \text{ m/s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

przyczem ogólny kształt formuły na prędkość jest funkcją uwikłaną, składającą się zwykle z iloczynu lub ilorazu funkcji zmiennych niezależnych występujących w potęgach różnych od jedności

$$v = F[\varphi(I), \psi(T)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Jeżeli przyjmiemy jeszcze osobny czynnik niezależny, występującą tu funkcję szorstkości łożyska $\varrho(S)$, to wzór (3) przybiera kształt

$$v = F_0[\varphi_0(I), \psi_0(T), \varrho(S)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

przyczem jednak musimy mieć na uwadze, że funkcja ϱ współczynnika szorstkości łożyska S jest wprost zależną od czynników głównych I i T (względnie R), czyli:

$$\varrho(S) = \varrho[\varphi_1(I), \psi_1(T)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

a wówczas wedle (3a) będzie:

$$v = F_0[\varphi_0(I), \psi_0(T), \varphi_1(I), \psi_1(T)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3c)$$

Jeżeli jednak zrobimy

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1) \text{ a } \psi = (\psi_0, \psi_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3d)$$

co pod względem matematycznym nie przedstawia większych trudności i podstawimy (3d) we wzór (3c), otrzymamy z powrotem dotychczas używaną formę (3).

Szczegółowy kształt tej formuły występuje w hydraulicce w rozmaitych postaciach np.

$$v = \alpha \cdot I^m \cdot \beta \cdot T^n = \varkappa \cdot I^m \cdot T^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

³⁾ A. Rożański: „Oznaczenie przepływu wielkiej wody w potokach“. Pamiętnik I. Zjazdu Hydr. 1929.

a może być także

$$v = \frac{\varphi(I)}{\psi(T)} = \frac{\alpha I^m}{\beta T^n} = \kappa \frac{I^m}{T^n} \dots \dots \dots (5)$$

lub wreszcie jak u Prof. Matakiewicza, druga formuła⁴⁾

$$v = \frac{\alpha \cdot I^{\varphi(I)}}{\beta + T^{\psi(T)}} \cdot T \dots \dots \dots (6a)$$

oraz trzecia formuła^{4) 5)} $v = c \cdot T^n \cdot I^{\varphi(I)} \dots \dots \dots (6b)$

w czem α , β , κ i c są wartościami stałymi.

Zauważyć tu należy, że forma (5) z ujemnym wykładnikiem jednego z czynników głównych aczkolwiek matematycznie poprawna nie jest chętnie przez hydrologów używaną, natomiast forma (4) $v = \varphi(I) \cdot \psi(T)$ nawet z rozwinięciem obydwóch głównych funkcji znalazła w hydraulice obszerne zastosowanie.

Nim przystąpimy do pobieżnego chronologicznego omówienia poszczególnych wzorów hydraulicznych na prędkość średnią używanych w Polsce, musimy w krótkości uzasadnić przyczynę, z powodu której hydromechanika cieczy rzeczywistych nie miała dotychczas możliwości (jako nauka ścisła) rozwiązania zagadnienia ruchu wody w łożyskach przyrodzonych.

Podstawa hydromechaniki cieczy rzeczywistych sięga drugiej połowy XVII wieku i związaną jest z nazwiskiem Newtona, który w „Principiach“ ustalił poglądy na istotę cieczy rzeczywistych i ustawił hipotezę oporów występujących przy ruchu cieczy lepkich.

Następnie G. G. Stokes opierając się o wyniki teoretyczne L. Navier'a i S. D. Poisson'a oraz B. de Saint Venant'a, określił matematycznie ruchy ślizgowe, odbywające się w przestrzeni euklidesowej.

Równania Stokes'a niedomagają jednak teoretycznie ponieważ występuje w nich wielkość naprężenia normalnego p w trzech składowych, które na podstawie elementarnego prawa Newtona określamy równaniem o charakterze empirycznym.

Stokes określił analitycznie cechy ruchu ślizgowego (ruch taki prawie nie występuje w przyrodzie), którego równania pozostają w zgodności z doświadczeniem tylko wówczas, gdy ściany łożyska są bardzo gładkie a średnia prędkość jest niewielką.

Przepływ cieczy rzeczywistych w rzekach i kanałach oraz w przewodach zamkniętych, przy charakterze burzliwym usuwa się z pod rygoru prawa Newtona.

⁴⁾ M. Matakiewicz: „Pomiary wodne“. Podr. Bryły.

⁵⁾ M. Matakiewicz: „Ogólna formuła na średnią chyżość przepływu w łożyskach rzecznych i kanałowych“. 1925, Zesz. Nr. 2. Wydawn. Akad. Nauk Techn.

Ten dział zjawisk bowiem, w którym bezwładność i lepkość cieczy występują jako wielkości równorzędne, jest narazie dostępny tylko dla metod doświadczalnych. Graniczne (skrajne) obszary badań przepływu cieczy rzeczywistych t. zn. obszary, w których albo zupełnie zanika wpływ lepkości cieczy wobec wielkości sił bezwładności, albo odwrotnie, w których wpływ lepkości — wobec wielkości sił bezwładności — przeważa, są dostępne dla opisanego nauką ścisłą, natomiast obszar środkowy, w którym oba te czynniki są wielkościami równorzędnymi starano się udostępnić teoretycznym badaniom zapomocą doświadczeń.

Wyniki tych doświadczeń streścił Reynolds miarą stosunku wielkości sił bezwładności do sił tarcia w postaci wzoru empirycznego

$$R = \frac{r \cdot v \cdot l}{\mu} \quad \dots \quad (7)$$

w którym r oznacza gęstość cieczy, v prędkość w badanym miejscu, μ współczynnik lepkości cieczy a l charakterystyczny wymiar liniowy. Liczbę R nazwano prędkością zredukowaną a jej wartość liczbową, według autora, liczbą Reynolds'a. Liczba ta wskazuje jakim prawom wolno nam badany przypadek hydrodynamiczny podporządkować, należy ona zatem do kryterjów mechanicznego podobieństwa przebiegów hydrodynamicznych.

Na podstawie wyników badań Stokes'a i Reynolds'a zajął się H. A. Lorentz ujęciem matematycznym ruchu burzliwego, wychodząc z podstawowej myśli ruchu złożonego z ruchów głównego i pobocznego. Najprostszą formą matematyczną tej myśli są równania:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \bar{v}_x + v'_x \\ v_y &= \bar{v}_y + v'_y \\ v_z &= \bar{v}_z + v'_z \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \right\} \dots \quad (8)$$

w których \bar{v}_x , \bar{v}_y , \bar{v}_z i \bar{p} oznaczają składowe prędkości względnie ciśnienia ruchu głównego a v'_x , v'_y , v'_z i p' także składowe ruchu pobocznego.

Jednakowoż, na tej podstawie zbudowane równania różniczkowe, pozostały tylko formą matematyczną, której się nie udało scałkować nawet w najprostszych przypadkach a tem samem nie można sprawdzić ich zgodności z doświadczeniami.

W Polsce zajął się, matematycznym opisaniem ruchu burzliwego M. Broszko⁶⁾ 16), rozpoczynając pracę od najprostszych przypadków, przyczem wyniki jego badań pokrywają się naogół z dotychczasowymi

⁶⁾ A. T. Troskoleński: „Hydromechanika“, Lwów 1925.

¹⁶⁾ A. T. Troskoleński: „Najnowsze prądy w hydromechanice“, Lwów 1923.

wynikami badań nad rozkładem prędkości w rzekach, prowadząc do rozkładu prędkości według paraboli trzeciego stopnia. Pewna rozbieżność zachodzi tylko w najbliższym sąsiedztwie powierzchni swobodnej.

Z powyższego wynika, że dorobek hydromechaniki cieczy rzeczywistych jest nieznaczny, bo obok kryterjum Reynolds'a mamy równania Stokes'a, które tylko w nielicznych przypadkach są zgodne z doświadczeniami, następnie Lorentz'a, o których wyżej mowa i badania Broszki.

Poza tem dorobek ten nie może mieć pretensji do ścisłej i wolnej od niedomagań dyscypliny naukowej ponieważ u podstaw swoich oparty jest o elementarne prawo Newton'a, które jest prawem empirycznym z zasadniczemi uproszczeniami.

Również niewystarcza, nowoczesnemu hydrotechnikowi obecny obszar i wynik badań hydromechaniki, a szczególnie w dziedzinie ruchu wody w łożyskach przyrodzonych, na podstawie którego określamy objętość przepływu.

Ruch ten opisuje hydraulika zapomocą całego szeregu wzorów empirycznych na prędkość średnią, opartych o wzór klasyczny (3).

Praktyczną formę, temu wzorowi nadał pierwszy de Chezy, co niektórzy przypisują także Tadini'emu i Eytelwein'owi⁷⁾. Według tego wzoru średnia prędkość przepływu w korytach otwartych wyraża się równaniem

$$v = c \sqrt{R \cdot I} \quad \dots \quad (9)$$

w czem $I = \frac{H}{l}$ = spad zwierciadła wody, $R = \frac{A}{U}$ = promień hydrauliczny (A = przekrój, U = obwód zwilżony), wreszcie c = stała. Wzór ten został przekształcony na następujący:

$$v = K \cdot R^\alpha \cdot I^\beta \quad \dots \quad (10)$$

w czem α , β i K są stałemi wyznaczalnemi na podstawie doświadczeń.

Ostatnio dla łożysk przyrodzonych wielkość promienia hydraulicznego R , zastąpiono głębokością średnią $T = \frac{A}{B}$, w czem B = szerokość zwierciadła wody, wówczas:

$$v = K \cdot T^\alpha \cdot I^\beta \quad \dots \quad (11)$$

Ponieważ ogólny wzór (3), względnie z niego wypływające wzory (9), (10) i (11) należą do typu funkcji uwikłanych, matematycznie nierozwiązalnych, usiłowało szereg autorów, posługując się dotychczasowymi wynikami hydromechaniki cieczy rzeczywistych (liczbą Reynolds'a) oraz wynikami doświadczeń, ustalić związek funkcjonalny czy to między funkcjami zasadniczemi czy też między temi z jednej, a szorstkością łożyska z drugiej strony.

⁷⁾ M. T. Huber: „Refleksje na temat hydrauliki“. Czas. Techn. 1926.

Obrazowo można tę zależność funkcjonalną dla pierwszego przypadku przedstawić geometrycznie w przestrzeni euklidesowej, w układzie prostokątnym (v, I, T) zapomocą powierzchni powstałej z dwóch krzywych $v = \varphi(I)$ oraz $v = \psi(T)$ ślizgających się jedna po drugiej, pod kątem prostym. Wówczas dla danego v musiałyby być $\varphi(I) = \psi(T)$, gdzie jednak sam kształt tych krzywych jest nie znany i matematycznie nie wyznaczalny.

I tak: W. Soldan⁸⁾ podaje przekształcenie i związek matematyczny dla przewodów zamkniętych, zapomocą liczby Reynolds'a, między wykładnikami potęgowymi równań (9) i (10) przyczem spólczynnik stały c został również przekształcony na wartość

$$c = K \left(\frac{v \cdot l}{\mu} \right)^m \dots \dots \dots (12)$$

Ta wartość podstawiona w równaniu (9) daje szczegółowy kształt

$$v = K^{\frac{1}{1-m}} \cdot R^{\frac{0,5+m}{1-m}} \cdot I^{\frac{0,5}{1-m}} \dots \dots \dots (14)$$

równania (10), przyczem między wykładnikami poszczególnych członów istnieje związek matematyczny. Wyrugowawszy z równań

$$\alpha = \frac{0,5 + m}{1 - m} \dots \dots \dots (14)$$

i

$$\beta = \frac{0,5}{1 - m} \dots \dots \dots (15)$$

wartość m otrzymujemy związek między wykładnikami członów głównych równania (10), mianowicie:

$$\beta = \frac{1 + \alpha}{3} \text{ oraz } \alpha = 3\beta - 1, \dots \dots \dots (16)$$

z którego wynika wzajemna zależność funkcjonalna wykładników obydwóch głównych czynników R i I tak wzoru klasycznego (9) jak i pochodnego (10), o rozbudowie którego będzie później mowa.

Również Welikanow⁹⁾ z wyników doświadczeń pulsacji wód płynących dochodzi do wniosku, że wartość spólczynnika burzliwości Navier-Stokes'a jest wprost proporcjonalną do liczby Reynolds'a. Jeżeli bowiem szorstkość łożyska wpływa na burzliwość prądu, to liczba wyrażająca tę szorstkość musi stać w stosunku funkcjonalnym do liczby Reynolds'a.

Z myślami przewodnimi Soldan'a i Welikanowa zbiegają się poniekąd także wyniki badań Augusta Wellnera¹⁰⁾, który wyjaśnia

⁸⁾ W. Soldan: „Über Geschwindigkeitsformeln“. III-cia Hydr. Konferencja Państw Bałtyckich 1930.

⁹⁾ Journal of the Scientific Institute of Amelioration Nr. XIX, 1929. Bulletin de l'Institut Hydrologique Nr. 23, Leningrad.

¹⁰⁾ A. Wellner: „Über Rauigkeitsziffern“. III-cia Hydr. Konferencja Państw Bałtyckich 1930.

stosunek wartości charakteryzujących szorstkość łożysk c wzoru de Chezy'ego, n wzoru Ganguillet-Kutter'a oraz k wzoru Stricklera — do liczby Reynolds'a.

Oprócz wymienionych zajmowali się tem zagadnieniem także Eidoux, Flamant, von Miseses, Pöschl i Parry, których prace oparte są o teoretyczną spójność kryterjum Reynolds'a od szorstkości łożyska.

Z tego powodu nasuwa się tu pewna doniosła uwaga mianowicie: Wyniki badań Reynolds'a, ujęte w kryterjum przedstawiające geometryczne podobieństwo przebiegów linii prądów czyli pól hydrodynamicznych uwarunkowanych mechanicznem podobieństwem układów sił¹¹⁾ — należą nietylko do ważnych momentów rozwoju hydrodynamiki cieczy rzeczywistych lecz także do takich momentów rozwoju hydrauliki tembardziej, że prace i poglądy Reynolds'a na istotę przebiegów burzliwych zapoczątkowały cały szereg badań doświadczalnych mających podstawowe znaczenie dla hydrauliki.

Z postępem rozwoju instrumentów mierniczych a szczególnie hydrometrów rozwijała się także hydraulika, otrzymując coraz obfitszy i dokładniejszy materiał pomiarowy. Szczególnie znaczny postęp należy zaznaczyć w rozbudowie formuł empirycznych opisujących średnią prędkość przepływu.

Dla łożysk przyrodzonych, można tu zanotować trzy grupy badaczy. Pierwszą, która uwzględnia współczynnik szorstkości, dobierany w obliczeniach doświadczalnie, drugą w której nowsi autorowie usiłują zbudować wzory niezawierające dowolnie dobieralnych współczynników. Formułom tym jednak brak ciągłości. Wreszcie trzecią grupę najnowszych autorów, która zasadniczo przyjmuje ciągłość formuły.

W ostatnich czasach występuje wśród hydrologów tendencja porzucenia ciągłości formuły i szukania nowej drogi rozwiązania szczególnie dla większych spadów, a to z powodów następujących.

Wyniki pomiarów hydrometrycznych wykazały, że dla większych spadów, od 10‰ w górę, punkty funkcji spadu w zależności od samego spadu (podobnie jak na rys. 2a) są bardzo rozrzucone i leżą na powierzchni płaskiej, której średnia wartość linearna nie da się wyznaczyć. Z tego jednak powodu nie wynika, że prawa ruchu wody przy spadzie wyżej 10‰ miałyby ulec zmianom nie dającym się przewidzieć lecz dzieje się to z tej prostej przyczyny, że w łożyskach przyrodzonych przy znaczniejszych spadach, prowadzących rumowisko jest wyjątkowo rzadkim odcinek z ruchem jednostajnym. Z reguły jest to ruch zmienny, na szypotach przyspieszony a na głębinach opóźniony,

¹¹⁾ Z. Fuchs: „Kilka uwag do dynamiki cieczy“. Czas. Techn. 1927.

ponadto istnieją tu przejścia odskokiem z ruchu podkrytycznego w nadkrytyczny.

Zmierzony zatem spad zwierciadła wody nie ma nic wspólnego ze zmierzoną średnią prędkością wody. Gdyby można było zmierzyć spad linii energii, okazałoby się niewątpliwie ściśle prawo zależności spadku od kwadratu prędkości. Wobec nierównomiernego rozłożenia prędkości w przekroju, zmierzenie spadku linii energii także jest niemożliwe¹²⁾.

Przejście bowiem z wielkiej prędkości na małą, z niskiego poziomu na wysoki, a zatem z małej głębokości na wielką jest zarazem przejściem z jednej formy ruchu w drugą a mianowicie z ruchu podkrytycznego w nadkrytyczny. Podstawą tego rozumowania są: *a)* prawo zachowania energii t. j. prawo Bernoulli'ego, oraz *b)* prawo zachowania linearnej ilości ruchu, które ustala, iż w systemie cząsteczek uważanych jako jedną całość, ilość ruchu nie może się zmienić wskutek samego tylko przeniesienia się jednych cząsteczek ponad drugie, lecz że zmiana w ilości ruchu może nastąpić jedynie wskutek działania siły zewnętrznej. Prawo to zatem wymaga odwrotnie, aby w jednostce czasu siła była równą zmianie w ilości ruchu w tym czasie, czyli, aby się równała masie mnożonej przez przyspieszenie. Główna charakterystyka obydwóch ruchów występuje w prędkości, mianowicie: prędkości przy stanach niższych jak krytyczne są większe niż prędkości przenoszenia się fali, zaś powyżej głębokości krytycznej są od niej mniejsze¹³⁾.

Rozumowanie to o ruchu nierównomiernym, jest ważnem do pewnej granicy głębokości średniej T , którą możnaby określić stosunkiem powierzchni pasa obwodu zwilżonego, wywołującego ruch burzliwy, do całej powierzchni przekroju. Jeżeli ten stosunek jest równy lub mniejszy od takiego stosunku dla spadów mniejszych jak $10^0/00$, to w takim razie warunki ogólnego przepływu i zależności funkcji spadku od samego spadku pozostają niezmienione, to jest takie same jak dla małych spadów. Warunki takie mogą zaistnieć przy nabrzmiałych rzekach górskich.

Rozwój formuł empirycznych na średnią prędkość wody (których jest około 450 a omówione będą tylko z nich, używane w Polsce) — w pierwszej grupie badaczy zaznaczył się tem, że wielkość e z klasycznego wzoru (9) początkowo uważana przez Eytelwein'a i Dupuit'a za stałą o wartości 50,93, okazała się zmienną i zależną od zasadniczych czynników I , T względnie R (wzór 3 *b*).

¹²⁾ K. Pomianowski: „O ruchu burzliwym podkrytycznym“. Przegląd Techniczny 1922.

¹³⁾ K. Pomianowski: „O ruchu podkrytycznym i zniszczeniu energii na odskoku Bidone'a“. Pamiętnik I-go Zjazdu Hydrotechnicznego.

Ganguillet i Kutter znaleźli na podstawie doświadczeń:

$$c = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{I}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \dots \dots \dots (17)$$

Jeżeli wielkość stałą we wzorze (17) nazwiemy

$$p = 23 + \frac{0,00155}{I}$$

to wówczas
$$n = \frac{\sqrt{R}}{cp} \left[\left(\frac{p-c}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{p-c}{2} \right)^2 + \frac{cp}{\sqrt{R}}} \right] \dots \dots \dots (18)$$

a jeżeli oznaczymy
$$a = 23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{I}$$

$$b = \left(23 + \frac{0,00155}{I} \right) n$$

to
$$c = \frac{a}{1 + \frac{b}{\sqrt{R}}} = \frac{a\sqrt{R}}{b + \sqrt{R}}$$

Tym sposobem powstał mały wzór Kutter'a, dla którego

$$c = \frac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} \dots \dots \dots (19)$$

Ponieważ wpływ spadku I ponad $0,2\text{‰}$ jest mniejszy jak prawdopodobne błędy wzoru, uprościł Frank wzór (17) do kształtu

$$c = \frac{(23+1)\sqrt{R}}{(23n + \sqrt{R})^n} \dots \dots \dots (20)$$

Do tych klasycznych kształtów formuł można zaliczyć jeszcze formuły Bazin'a, starą (Darcy-Bazin)

$$c = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{b}{R}}} \dots \dots \dots (21)$$

i nową
$$c = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \dots \dots \dots (22)$$

a przez porównanie z formułą Kutter'a otrzymano:

$$\gamma = 0,87m - 0,13\sqrt{R} \dots \dots \dots (23)$$

Krytykę tych formuł ogłosili Biegeleisen i Bukowski (Gesundheitsing 1914), Rümlein (Wie bewegt sich fließendes Wasser?, Drezno 1913), Lueger i Brinkhaus (Hnbch der Ingwiss.), Möller

(Grundriss des Wasserbaues), Gravelius (Z. f. Gewässerkunde Bd. I) i wielu innych jak Schoklitsch, Rühlmann, Bindemann i t. d.

Krytyka ta głównie tanguje dowolnie dobieralne (zależnie od intuicji i czucia hydraulicznego rachującego temi formułami inżyniera) współczynniki szorstkości koryta, którą to dobieralność nie ujęto dotychczas żadnem odpowiedniem wyrażeniem matematycznym. Na obliczenie tych współczynników (zależnych od spadu I) wpływa w wysokim stopniu błąd popełniony przy pomiarze tego spadu. Jeżeli ten na długości np. 100 m wynosi a m to zamiast prawdziwej wielkości współczynnika

$$c = v : \sqrt{R \cdot I}$$

otrzymujemy błędną wartość

$$c = v : \sqrt{R \left(I + \frac{a}{100} \right)}. \quad \dots \quad (24)$$

nie licząc błędów z powodu nieumiejętnego dobrania wartości n , γ i t. d.

Wartość błędu z formuły (24) jest odwrotnie proporcjonalną do wartości prędkości średniej v . Jeżeli bowiem pomierzono za wielki spad to otrzymana prędkość średnia będzie mniejszą od rzeczywistej i odwrotnie.

Również przeciw użyciu, we formułach dla łożysk przyrodzonych, promienia hydraulicznego $R = A : U$ podniesiono zarzuty, ponieważ wartość tego promienia w dwóch różniących się wymiarami, przekrojach matematycznie niewyraźalnych może być jednaka, przeto wartość promienia hydraulicznego nie charakteryzuje dostatecznie przekroju¹⁴⁾.

Powierzchnię pola dowolności doboru współczynnika szorstkości dla stałej wartości promienia hydraulicznego przedstawiono graficznie (rys. 1), z którego wynika, że do każdej wartości spadu I można dobrać w pewnych granicach (np. prof. Matakiewicz określa wartość tę wzorem empirycznym $n = 0,0235 + 0,0019 I^{0/100}$)⁴⁾ dowolną wartość współczynnika n a tem samym średnia prędkość w przekroju dla stałego spadu nie będzie jednoznacznie określoną. Występują tu znaczne różnice zależne od wielkości spadu. To samo tyczy drugiej niezależnej t. j. promienia hydraulicznego.

Druga grupa badaczy nowszych usiłuje opisać średnią prędkość przekroju w łożyskach przyrodzonych jednoznacznie t. j. unikając wyżej podanych nieściśłości.

W tym celu promień hydrauliczny R zastępują inną wielkością bardziej charakteryzującą przekrój łożyska przyrodzonego, mianowicie głębokością średnią T a niektórzy także szerokością zwierciadła wody B wreszcie eliminują zupełnie nieokreślony współczynnik szorstkości.

¹⁴⁾ R. Weyrauch: „Hydraulisches Rechnen“. Stuttgart 1921.

Do tych badaczy należą głównie Siedek, Hermanek, Prof. Matakiewicz (pierwszy wzór), Christen, Lindboe i Gröger.

Formuły Siedeka nie są wprawdzie wygodnymi w użyciu lecz ważnymi ze względu na to, że zapoczątkowały cały szereg nowszych badań i spowodowały zmianę zapatrywań w kierunku dążności opisanego średniej prędkości w sposób jednoznaczny, eliminując dobieralność współczynnika szorstkości,

Wzory te ze względu na ich kształt są w praktyce rzadko używane. Christen określa średnią prędkość w łożyskach rzecznych wzorem

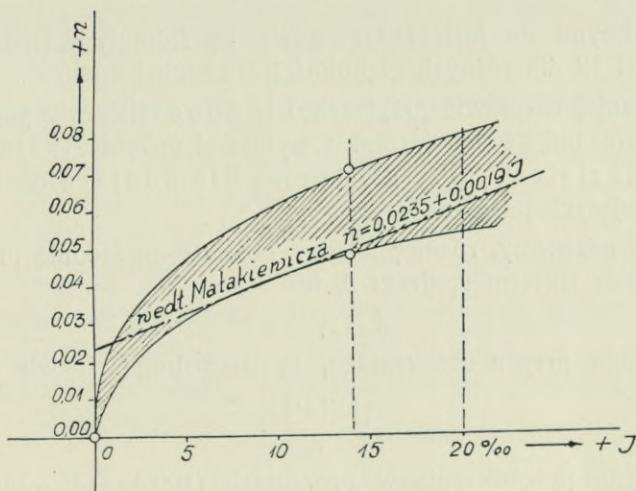
$$v = m \sqrt{T \cdot I} \sqrt[8]{B/2} \dots \dots \dots (25)$$

a dla potoków prowadzących żwir i rumowisko

$$m = \frac{6,31}{\sqrt[6]{T \cdot I}}$$

czyli

$$v = 6,31 \sqrt[3]{T \cdot I} \sqrt[8]{0,5 B} \dots \dots \dots (26)$$



Rys. 1.

Według Hermanka średnią prędkość obliczyć należy wzorem:

$$v = K \sqrt{T I} \dots \dots \dots (27)$$

w czym dla łożysk przyrodzonych

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } T < 1,5 \text{ m} & - K = 30,7 \sqrt{T} \\ 1,5 < T < 6,0 \text{ m} & - K = 34 \sqrt[4]{T} \\ T > 6,0 \text{ m} & - K = 50,2 + 0,5 T \end{aligned} \right\} \dots \dots (27 a)$$

Jest to pierwszy wzór eliminujący szerokość zwierciadła wody B.

Prof. Matakiewicz w pierwszym swoim wzorze⁴⁾ przyjmuje zasadniczą formę

$$v = a \cdot I^m T^n$$

i określa z doświadczeń wykładniki

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } I < 2^0_{/00} \quad - \quad m = 0,50 \\ I = \text{do } 2,5^0_{/00} \quad - \quad m = 0,51 \\ I = \text{do } 3,5^0_{/00} \quad - \quad m = 0,52 \\ I = \text{do } 4,5^0_{/00} \quad - \quad m = 0,53 \end{array} \right\} \dots (28)$$

wreszcie

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } T < 1 \quad m - n = 1 - T \\ T > 1 \quad m - n = 0,75 \end{array} \right\} \dots (28a)$$

Gröger na podstawie pomiarów wykonanych w dorzeczu Dunaju ustawił następujące formuły, ważne jednak w szczyptych granicach, mianowicie:

Jeżeli $B_{min} = 10 \text{ m}, \quad T = F : B, \quad I_{max} = 0,005$

to wówczas dla $0,2 < T < 2,0 \text{ m} - v = 23,781 T^{0,776} \cdot I^{0,458}$

$$\left. \begin{array}{l} T > 2,0 \text{ m} - v = 22,11 T^{0,58} \cdot I^{0,43} \end{array} \right\} \dots (29)$$

Podobnymi do formuł Gröger'a są formuły Lindboe'go, których jest 12 dla różnych głębokości średnich i spadów.

W swojej rozprawie przytacza Lindboe ciekawe porównanie między wynikami swoich formuł a wynikami formuł Bazin'a, Siedek'a i Christen'a, przy użyciu prac Blomquist'a dochodzi on do następujących porównań¹⁴⁾.

Jeżeli nazwiemy, różnicę między pomierzoną średnią prędkością v a obliczoną wzorem v_1 przez Δ , to

$$\Delta = v_1 - v$$

a średni błąd przy n obliczeniach, tą samą drogą, będzie wówczas równy

$$\sqrt{\frac{\Sigma[\Delta^2]}{n}}$$

czyli dla jednego obliczenia w procentach $(100 \Delta : v) \%$, otrzymamy procentowy błąd dla n obliczeń

$$\frac{\Sigma \left[\frac{100 \Delta}{v} \right]}{n} \%$$

Stosując to rozumowanie obliczył Lindboe sumy dodatnich i ujemnych błędów formuł Bazin'a, Siedek'a, Christen'a i swoich, dochodząc do wniosku, że wartość $\gamma = 1,30$ używana przy obliczeniach formułą Bazin'a jest za małą, ponieważ różnica między sumą błędów dodatnich a sumą błędów ujemnych jest znaczną, wynosi bowiem 25,33 przy

$$\Sigma(+\Delta) = 28,05 \quad \text{i} \quad \Sigma(-\Delta) = 2,72.$$

Podobnie wykazuje formuła Christen'a dla łożysk rzecznych
 $\Sigma(+\Delta) = 45,82$ i $\Sigma(-\Delta) = 36,81$.

Najkorzystniejsze wyniki otrzymał Lindboe przy swoich i Siedek'a formułach. Odnośnie zatem do najmniejszego błędu średniego w stosunku do wyników pomiarów hydrometrycznych dochodzi on do następującego uszeregowania formuł pod względem najmniejszości błędu: 1. Lindboe, 2. Siedek, 3. Bazin a 4. Christen.

Kryterjum użyte przez Lindboe'go do oceny dobroci wyników formuł, nie uwzględnia jednak wagi spostrzeżeń, przyczem należy tu zauważyć, że ze zbioru dowolnej ilości wyników pomiarów hydrometrycznych (choćby ze wszystkich dotychczas wykonanych), można zawsze wybrać taki szereg, który dla danej formuły empirycznej, w porównaniu z wynikami pomiarowemi tego szeregu da — w pewnych granicach — najmniejszość błędu. Nie trzeba przytem także zapominać, że pomiary hydrometryczne odbywają się często w warunkach niekorzystnych, oraz przy pomocy przyrządów mierniczych, których wskazania nie zawsze budzą zaufanie.

Wszystkim dotychczas omówionym formułom brak ciągłości.

Pierwszą ciągłą formułą na średnią prędkość w łożyskach przyrodzonych zbudował Prof. Matakiewicz w r. 1910⁴⁾.

Formuła ta

$$v = \frac{116 \cdot I^{0,493+10 I}}{2,2 + T^{\frac{2}{3} + \frac{0,15}{T^2}}} \cdot T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

nazwana przez jej autora „drugą“, jest wprawdzie niewygodną w praktycznym użyciu, jednak liczenie nią ułatwiają tabele.

Dla bardzo małych głębokości średnich np. żłobów górskich wystarczy według prof. Matakiewicza zamiast formuły (30) użyć wyrażenia skróconego

$$v = 52,7 T \cdot I^{0,493+10 I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30 a)$$

Wzór ten został w r. 1925 zmodyfikowany na „trzeci wzór“ kształtu

$$v = 35,4 I^{0,493+10 I} T^{0,7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

używany w praktyce przez hydrotektów polskich⁵⁾.

Praktyczny ciągły wzór — do podręcznego użycia bez pomocy logarytmów i tablic — ogłosił w roku 1926 autor¹⁵⁾.

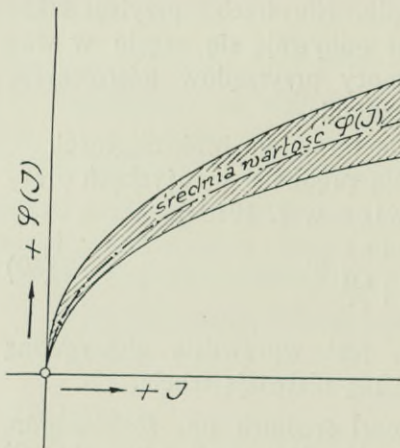
Wzór ten o prostym kształcie

$$v = (4 T - 12 + \sqrt{144 + 1667 T}) \sqrt{I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

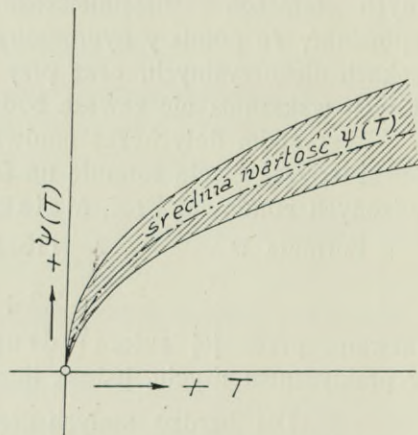
pomimo, że oparto go o wielką ilość zbiorów dotychczasowych doświadczeń, nie ma pretensji do ścisłości. Wyniki tego wzoru są jednak w szerokich granicach zgodne z wynikami pomiarów hydrometrycznych.

¹⁵⁾ A. Pareński: „Zur Berechnung der mittleren Quergeschwindigkeit in natürlichen Flussbetten“. Der Bauing 1926.

Wzory (30), (31) i (32) aczkolwiek uwzględniają ciągłość funkcji spadku i głębokości średniej nie są jeszcze doskonałymi. Zbudowano je na założeniu ruchu równomiernego, gdy tymczasem w rzeczywistości ruch taki w łóżyskach przyrodzonych nie istnieje a to wskutek ciągłych zmian przekroju i spadku, zmian po sobie następujących. Oprócz tego szorstkość dna i ścian łóżysk, nawet o tym samym spadzie, jest rozmaita zależnie od charakteru rzeki. Na prędkość sekundową wody wpływa także strata części siły żywej, płynącej wody, zużytej na poruszanie żwiru i rumowiska. Stratę tę także trudno pomierzyć a następnie opisać analizą matematyczną. Następną trudność opisanie prędkości średniej w łóżyskach przyrodzonych polega na tem, że opory ruchu wody wywołane szorstkością łóżyska, przy bardzo niskich stanach — nawet przy ruchach klasycznie równomiernych — są zu-



Rys. 2 a.



Rys. 2 b.

pełnie różne od takich oporów przy wyższych wodostanach a wartość stosunku wielkości powierzchni pasa przyściennego wywołującego swą szorstkością ruch burzliwy, do wielkości powierzchni całego przekroju jest dla różnych wodostanów, różną (odwrotnie proporcjonalną do wysokości stanu wody).

Te i tem podobne trudności są przyczyną dlaczego nie tylko hydromechanika ale i nauka czysto empiryczna, jaką jest hydraulika nie dała dotychczas zadowalniającej odpowiedzi na postawione jej przez praktykę inżynierską pytanie: Jak opisać ruch wody w łóżyskach przyrodzonych uwzględniając prawa jakim ruch ten podlega?

Ostatnie formuły (30) do (32) zbudowane na wartościach średnich (rys. 2 a i 2 b) szeregu wybranych spostrzeżeń hydrometrycznych, prędkości średniej a więc wielkości czysto matematycznej, są wzorami

interpolacyjnymi. Dają one w wyniku wartości jednoznaczne zależne od dwóch głównych czynników t. j. spadu I i głębokości średniej T .

Z powyższego przedstawienia sprawy wynika, że ujęcie i odtworzenie przepływów w łożyskach przyrodzonych, których kontur jest matematycznie niewyraźnym, możliwym jest dotychczas tylko w grubym przybliżeniu, metodami tylko empirycznymi. W praktyce używanie tych empirycznych wzorów a szczególnie wzorów ze stałym współczynnikiem prowadzi do wyników nie zawsze ścisłych i jest dopuszczalne tylko przy wstępnych przybliżonych obliczeniach.

Na zakończenie nasuwa się pytanie: Czy kiedykolwiek będzie możliwe opisywanie drogą teoretyczną przepływów o charakterze burzliwym w szorstkich łożyskach przyrodzonych o matematycznie niewyraźnym przekroju poprzecznym?

Na to pytanie szereg badaczy hydrotektów odpowiedziało przecząco, zaś hydromechanicy nie tracą w tym kierunku nadziei czego przykładem jest odpowiedź Troskolańskiego⁶⁾,¹⁶⁾.

„Jasnym jest, że dokładne odtworzenie przepływów w łożyskach o nieprawidłowych a więc matematycznie niewyraźnych, geometrycznych kształtach jest nieosiągalne, albowiem nie można nawet myśleć o ścisłym analitycznym ujęciu takich zjawisk, w których obok niezmiennych praw przyrodniczych grają rolę czynniki, wyłamujące się z pod wszelkiej prawidłowości. Możemy jednak z dokładnością dość znaczną opisać te zjawiska, zastępując nieprawidłowy kontur przekroju poprzecznego, zbliżonym do niego konturem o matematycznie wyraźnym kształcie; ponieważ błędy stąd płynące są zawsze jednokierunkowe, bo spowodowane niedocenieniem strat energetycznych, przeto wprowadzając odpowiednie poprawki, możemy opisać powyższe zjawiska z dokładnością bez porównania większą, niż tą, jaką dają nam formuły empiryczne“.

PROF. WAŁAW PASZKOWSKI

Wyznaczanie odstępów przerw skurczowych w sztywnych ustrojach żelbetowych.

Skurcz jako zjawisko molekularne, któremu podlega beton w pierwszym okresie swego istnienia, powoduje w ciągłej konstrukcji sztywnej powstawanie naprężeń dodatkowych.

Rozpatrzmy ustrój, składający się z szeregu słupów połączonych belką poziomą prostą (rys. 1), przy czym słupy są sztywno osadzone w swoich podstawach oraz sztywno połączone z belką; wysokości poszczególnych słupów oraz ich momenty bezwładności mogą być różne lecz zakładamy, że są rozłożone symetrycznie w stosunku do środka d ustroju. To samo dotyczy poszczególnych rozpiętości oraz przekrojów belki.

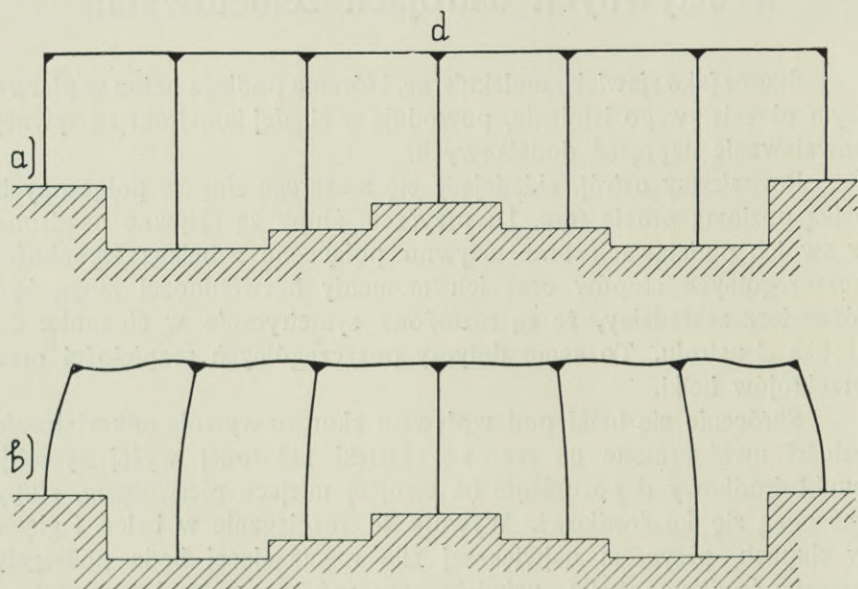
Skrócenie się belki pod wpływem skurczu wywoła odkształcenie całości uwidocznione na rys. 1 *b*. Dzięki założonej wyżej symetrii punkt środkowy d pozostanie na swoim miejscu pierwotnym, słupy zaś ugną się ku środkowi. Wywoła to rozciąganie w belce i gięcie w słupach, przy czym największej sile rozciągającej będą podlegały przęsła środkowe belki, największemu zaś momentowi gnącemu — krańcowe słupy. Ponadto sztywność połączenia belki ze słupami spowoduje powstanie dodatkowych momentów gnących zarówno w belce jak i w słupach. Jeżeli narazie dla uproszczenia te ostatnie pozostawimy na uboczu, to zjawisko sprowadzi się w swoich głównych zarysach do powstających wskutek skurczu rozciągań w belce i gięć w dolnych przekrojach słupów.

Jest oczywiście, że im ustrój jest dłuższy oraz im jest sztywniejszy tem większe będą te dodatkowe siły i wynikające stąd naprężenia. To też w celu uniknięcia nadłamania słupów lub naderwania belek dzielimy ustroje tego rodzaju, gdy są zbyt długie, na oddzielne krótsze elementy z pomocą przerw skurczowych¹⁾.

¹⁾ Zwanych może niezupełnie słusznie „dylatacyjnymi“ gdyż nie o dylatację czyli rozszerzanie się tu chodzi, a właśnie o zjawisko odwrotne: skurcz.

Przepisy omawiające to zagadnienie rozprawiają się z niem w ten sposób, że wyznaczają poprostu największy dopuszczalny odstęp pomiędzy przerwami; w szczególności przepisy Min. Rob. Publ. granicę tę określają na 50 m. Jest to jednak załatwienie zbyt sumaryczne, gdyż jest oczywistem, że wielkość naprężeń powstających wskutek skurczu w tym wypadku zależy od sztywności i od przekrojów słupów i belek, wszelki więc przepisany zgóry stały odstęp może być albo za duży albo za mały.

Poniżej podana przybliżona metoda obliczania pozwala wejrzeć bliżej w istotę zjawiska i zorientować się w wielkościach naprężeń, a przeto umożliwia znalezienie uzasadnienia dla właściwego odstępu



Rys. 1 a, b.

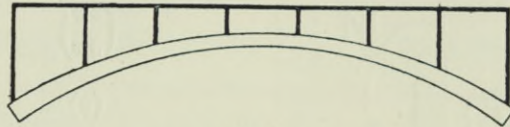
podziałów skurczowych w każdym konkretnym przypadku. Należy zaznaczyć, że wydłużenie belki pod wpływem rozciągania jest tu wartością tego samego rzędu co sam skurcz i dlatego musi być wzięte w rachubę. Istotnie wydłużenie betonu rozciąganego, naprzykład naprężeniem 24 kg/cm^2 wynosi $24 : 140000 = 0,00017$, zaś skurcz przyjmujemy zwykle równoznaczny z ochłodzeniem na 15°C czyli

$$s = 0,00012 \times 15 = 0,00018.$$

Przyjmujemy pozatem następujące założenia: że skurcz nie wpływa na słupy, co niema znaczenia gdy ich wysokości są jednakowe, jednak powoduje zmianę poziomu podpór w wypadkach wskazanych, naprzykład na rys. 1 i rys. 2, oraz, że skurcz w przekrojach żelbeto-

wych odbywa się jak w tworzywie jednorodnym, co odbiega od prawdy szczególnie w przekrojach zbrojonych niesymetrycznie, w tym wypadku bowiem powstaje dodatkowe zginanie.

Wyodrębnijmy w omawianym ustroju przy pomocy przegubów umieszczonych w środkach rozpiętości belek, element składający się

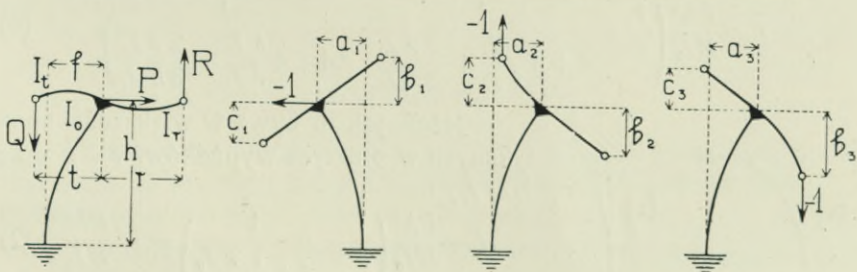


Rys. 2.

ze słupa utwierdzonego w podstawie, oraz ze sztywno z nim połączonych dwóch odcinków sąsiednich belek (rys. 3).

Przyjmijmy, że przeguby mogą się przesuwac jedynie poziomo, zaś siła P , powodująca ugięcie słupa, jest przyczepiona w punkcie połączenia słupa z belką. Zależność pomiędzy tą siłą, ugięciem f oraz wartościami wyrażającymi sztywność poszczególnych części układu, można wyprowadzić przy pomocy zasady wzajemności przesunięć¹⁾. Będziemy mieli poniżej wskazany układ sił i odpowiadających im przesunięć:

	Stan 0	Stan I	Stan II	Stan III
Siła	P, R, Q	1, 0, 0	0, 1, 0	0, 0, 1
Przesunięcie	$f, 0, 0$	a_1, b_1, c_1	a_2, b_2, c_2	a_3, b_3, c_3



Rys. 3.

oraz następujące równania:

$$- P a_1 + R b_1 + Q c_1 = - f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$P a_2 - R b_2 - Q c_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$P a_3 - R b_3 - Q c_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

¹⁾ Por. Timoszenko-Huber: Kurs Wytrzymałości Materiałów, str. 205 i n.

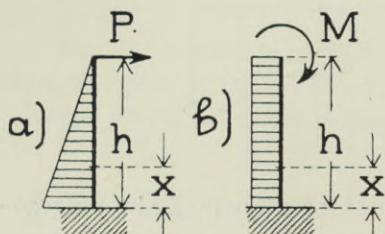
z których otrzymamy

$$R = P \frac{a_2 c_3 - a_3 c_2}{b_2 c_3 - b_3 c_2} \dots \dots \dots (4)$$

$$Q = -P \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{b_2 c_3 - b_3 c_2} \dots \dots \dots (5)$$

Zaznaczając, że dla układów wskazanych na rys. 4 mamy:

dla układu rys. 4 a



$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=h} = \frac{Ph^2}{2EI}$$

$$(y)_{x=h} = \frac{Ph^3}{3EI}$$

dla układu rys. 4 b

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=h} = \frac{Mh}{EI}$$

$$(y)_{x=h} = \frac{Mh^2}{2EI}$$

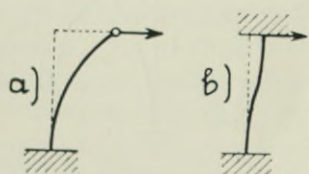
Rys. 4 a i 4 b.

otrzymamy następujące wyrazy przesunięć:

$a_1 = \frac{h^3}{3EI_0}$	$a_2 = \frac{h^2 t}{2EI_0}$	$a_3 = \frac{h^2 r}{2EI_0}$
$b_1 = \frac{h^2 r}{2EI_0}$	$b_2 = \frac{h t r}{EI_0}$	$b_3 = \frac{h r^2}{EI_0} + \frac{r^3}{3EI_r}$
$c_1 = \frac{h^2 t}{2EI_0}$	$c_2 = \frac{h t^2}{EI_0} + \frac{t^3}{3EI_t}$	$c_3 = \frac{h t r}{EI_0}$

Gdy powyższe wyrazy wstawimy do równań (4) i (5), a następnie do równania (1) otrzymamy wyraz dla ugięcia:

$$f = \frac{Ph^3}{EI_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4 + 4 \frac{r I_t}{t I_r} + \frac{2 r I_0}{3 h I_r}} - \frac{1}{4 + 4 \frac{t I_r}{r I_t} + \frac{2 t I_0}{3 h I_t}} \right) \dots (6)$$



Rys. 5 a i 5 b.

Jeżeli, jak to bywa w większości spotykanych w praktyce wypadków, $t = r$ oraz $I_t = I_r$, to

$$f = \frac{Ph^3}{EI_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4 + \frac{1}{3} \frac{r I_0}{h I_r}} \right) = W \frac{Ph^3}{EI_0} \quad (7)$$

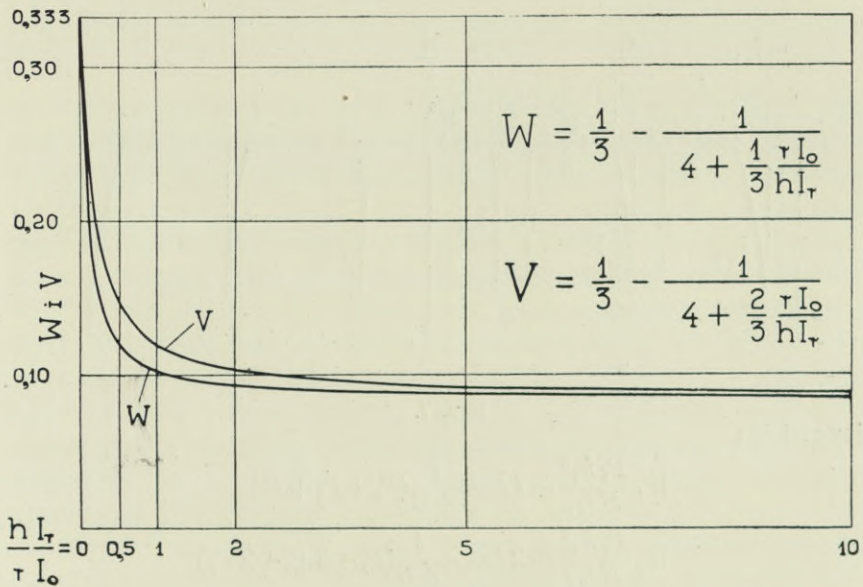
Gdy belka jest jednostronna, jak to ma miejsce w słupach krańcowych, to przyjąwszy w równaniu (6), że wiotkość jednej z belek jest bardzo duża, a więc na przykład t jest bardzo duże i I_t jest bardzo małe (t. zn., że wyraz trzeci w nawiasie oraz wyraz $4 \frac{r I_t}{t I_r}$ zamieniają się w zero)

otrzymamy:

$$f = \frac{Ph^3}{EI_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4 + \frac{2}{3} \frac{r I_0}{h I_r}} \right) = V \frac{Ph^3}{EI_0} \quad (8)$$

Jest oczywiste, że krańcowe znaczenia współczynników W i V wahają się od $\frac{1}{3}$, gdy belki są bardzo wiotkie (rys. 5 a) do $\frac{1}{12}$, gdy belki są bardzo sztywne (rys. 5 b).

Zmienność współczynników W i V jest wskazana na rys. 6, gdzie na odciętych znajdują się wartości $\frac{h}{r} \cdot \frac{I_r}{I_0}$. W ten sposób dla każdego słupa naszego układu przedstawionego na rys. 1 możemy wyznaczyć wartość współczynnika W względnie V .



Rys. 6.

Przechodzimy teraz do ułożenia właściwych równań celem wyznaczenia sił $P_1, P_2 \dots$ (rys. 7), które powstaną wskutek skurczu s zachodzącego w belce. Siły te spowodują ugięcia $f_1, f_2 \dots$ słupów oraz, rozpatrywane w kierunku odwrotnym do narysowanego, będą rozciągały poszczególne przęsła belki. Niech $A_1, A_2 \dots$ będą pola przekrojów belki w kolejnych przęsłach. Rozpatrując punkt 1, znajdujący się w odległości l_1 od osi dd symetrii ustroju, możemy wyrazić jego przesunięcie f_1 ze względu na słup oraz ze względu na skurcz i wydłużenie belki jak następuje:

$$f_1 = W_1 \frac{P_1 h_1^3}{EI_{01}} = l_1 s - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{A_1 E} l_1.$$

Dla punktu 2 w podobny sposób otrzymamy:

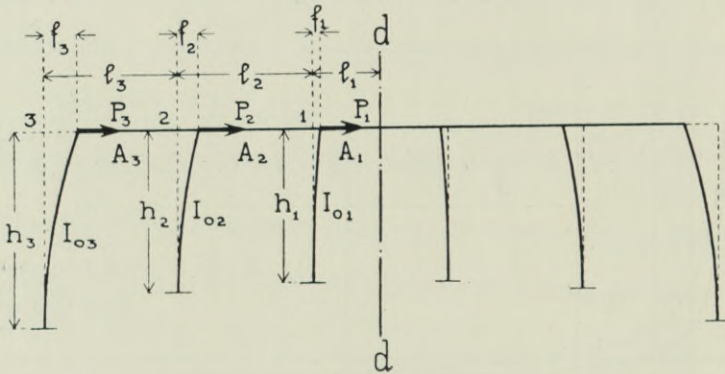
$$f_2 = W_2 \frac{P_2 h_2^3}{E I_{02}} = s(l_1 + l_2) - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{A_1 E} l_1 - \frac{P_2 + P_3}{A_2 E} l_2.$$

Dla punktu 3 w podobny sposób będzie:

$$f_3 = V_3 \frac{P_3 h_3^3}{E I_{03}} = s(l_1 + l_2 + l_3) - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{A_1 E} l_1 - \frac{P_2 + P_3}{A_2 E} l_2 - \frac{P_3}{A_3 E} l_3.$$

Jest oczywiste, że zawsze ustawimy tyle równań ile jest sił niewiadomych P a przeto będziemy mogli je wyznaczyć. Szczególnie prostą postać przyjmują te wzory gdy

$$l_1 = l_2 = l_3 \dots \quad \text{oraz} \quad A_1 = A_2 = A_3 \dots$$



Rys. 7.

mianowicie:

$$W_1 \frac{P_1 h_1^3}{E I_{01}} = l s - \frac{l}{A E} (P_1 + P_2 + P_3)$$

$$W_2 \frac{P_2 h_2^3}{E I_{02}} = 2 l s - \frac{l}{A E} (P_1 + 2 P_2 + 2 P_3)$$

$$V_3 \frac{P_3 h_3^3}{E I_{03}} = 3 l s - \frac{l}{A E} (P_1 + 2 P_2 + 3 P_3).$$

Znalezienie wartości sił P pozwoli na wyznaczenie naprężeń powstających od skurczu, a w szczególności dodatkowych naprężeń rozciągających w belkach oraz naprężeń od gięcia u podstawy słupów.

PROF. DR. K. POMIANOWSKI

Krzywe czasów trwania jako krzywa prawdopodobieństwa w odniesieniu do zjawisk hydrologicznych.¹⁾

Uporządkowawszy daty hydrograficzne (sumy opadów, stany wody, ilości przepływu i t. d.) podług wielkości oraz liczby ich powtarzania się w zamkniętym okresie czasu obserwacji, otrzymamy krzywą częstości. Biorąc kolejno sumy wypadków powtarzania się poszczególnych wartości z krzywej częstości, otrzymamy krzywą czasów trwania. Obie te krzywe pozwalają określić liczbę wypadków powtarzania się pewnej wartości, lub sumę wypadków pojawiania się wszystkich wyższych wartości aż do pewnej danej, lecz tylko w okresie czasu obserwacji. Ekstrapolacja na okres dłuższy niż obserwacji rzeczywistych, byłaby możliwa tylko w tym wypadku, gdyby było znane prawo określające równaniem matematycznym krzywą częstości, względnie po jej scałkowaniu, krzywą czasów trwania. Gdy nasze obserwacje hydrologiczne ograniczają się do krótkiego naogół czasu obserwacji, zaś ważność, koszt i czas trwania obiektów, które na zasadzie owych danych hydrologicznych budujemy, wymagają znajomości prawdopodobnych wartości na owe zjawiska w znacznie dłuższym okresie czasu, wynika z tego, że dla rozwiązania praktycznych zadań techniki jest rzeczą niezmiernie ważną określić ze stosunkowo krótkiego czasu obserwacji, prawdopodobieństwo pojawiania się pewnych wartości hydrologicznych w znacznie dłuższym okresie.

Krzywa częstości musi mieć równanie spełniające dwa warunki a mianowicie: dla pewnej skończonej wartości rzędnej musi odcięta osiągnąć wartość maksymalną (która określa wypadki najczęściej się powta-

¹⁾ Alden Foster: Theoretical Frequency Curves. Transactions Am. S. C. E. 1924. Goodrich: Straight Line Plotting of Skew Frequency Data. Proceed. Am. S. C. E. 1926 August.

Allen Hazen: Probability Paper Transact. 1914,

Allen Hazen: Flood Flows.

rzające), a zatem: $\frac{dx}{dy} = 0$ dla $y > 0$, oraz w górnym końcu krzywa musi być styczną do osi y a zatem: $\frac{dx}{dy} = 0$ dla $x = 0$. Tym warunkom odpowie krzywa o równaniu różniczkowym:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(y+a)}{f(y)} \dots \dots \dots (1)$$

Rozwijając w szereg funkcję: $f(y)$ otrzymamy:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{y+a}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots}$$

Po scałkowaniu, równanie to przedstawi szereg krzywych symetrycznych, asymetrycznych (w odniesieniu do x max.), ograniczonych na jednym lub obu ramionach, lub też nieograniczonych, a zatem asymptotycznych obustronnie do osi y .

Rozpatrując zjawiska hydrologiczne dojdziemy do przekonania, że prawie wszystkie one dają krzywe częstości, asymetryczne, t. j. że istnieje większa liczba wypadków stanów lub opadów wysokich, niż liczba wypadków stanów czy opadów niskich. Gdy w teorii błędów przyjmuje się że liczba wypadków za niskich czy za wysokich w stosunku do przeciętnej jest ta sama, czyli że przeciętna i maksymalna leżą na tej samej rzędnej, wykres częstości prawo to przedstawia zatem symetryczną krzywą, dla zjawisk hydrologicznych prawo to jest odmienne i wyraża się krzywą asymetryczną. Krzywa częstości dla zjawisk hydrologicznych jest zawsze w dolnym swem ramieniu ograniczona t. j. dla pewnego $y > 0$. jest $x = 0$; gdyż np. stany wód nie mogą spaść poniżej poziomu dna rzeki, suma opadów poniżej zera i t. d., natomiast górne ramię może być przyjęte jako asymptotyczne do osi Y , t. j. możnaby przypuścić, że w nieskończeniu krótkim czasie mógłby się pojawić nieskończenie duży opad, stan i t. d., lub też, co jest może bardziej prawdopodobnem, założyć że nawet w nieskończeniu krótkim okresie czasu stan czy opad nie może przekroczyć pewnej maksymalnej wartości, a zatem że dla $x = 0$ będzie $y = C$ gdzie $C < \infty$. W równaniach Pearsona krzywa ze skończonym górnem i dolnym ramieniem jest nazwana krzywą Typu I., ze skończonym dolnem, asymptotycznym górnem, krzywą Typu III.

Równania krzywej Typu III.

Elderton dowodzi, że dla krzywej tego typu, stałe równania różniczkowego: $B_2, B_3 \dots$ są równe zeru, wobec czego równanie upraszcza się do:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{y+a}{b_0 + b_1 y} \dots \dots \dots (2)$$

Po scałkowaniu i wstawieniu granic otrzymamy równanie krzywej częstości

$$x = x_0 \cdot e^{-\gamma y \left[1 + \frac{y}{a}\right]^{\gamma a}} \dots \dots \dots (3)$$

gdzie γ i a są stałymi, zaś a ma inną wartość niż w równaniu (1).

Jeśli założymy, że krzywa jest symetryczna i oba ramiona asymptotyczne do rzędnej Y , otrzymamy równanie normalne z teorii błędów:

$$x = x_0 e^{-\frac{y^2}{c}} \dots \dots \dots (4)$$

Równanie ogólne (3) da się przedstawić w prostszym kształcie podstawiając następujące wartości: $p = \gamma a$; $z = \gamma(a + y)$; $z = p + \gamma y$; $N =$ polu pod krzywą, czyli liczbie wypadków względnie spostrzeżeń. Równanie (3) przechodzi na:

$$x = \frac{x_0 \cdot e^p}{p^p} \cdot z^p \cdot e^{-z}$$

zaś nazywając: $c = \frac{x_0 e^p}{p^p}$ otrzymamy ostatecznie:

$$x = c \cdot z^p \cdot e^{-z} \dots \dots \dots (5)$$

Nazywając następnie przez μ_1 , μ_2 , μ_3 następujące wyrazy:

$$\mu_1 = \frac{\int_{-a}^{\infty} y \cdot x \cdot dy}{\int_{-a}^{\infty} x \cdot dy} \quad (\text{moment statyczny dzielony przez pole}) \dots \dots (6)$$

$$\mu_2 = \frac{\int_{-a}^{\infty} y^2 \cdot x \cdot dy}{\int_{-a}^{\infty} x \cdot dy} \quad (\text{moment bezwładności przez pole}) \dots \dots (7)$$

$$\mu_3 = \frac{\int_{-a}^{\infty} y^3 \cdot x \cdot dy}{\int_{-a}^{\infty} x \cdot dy} \quad (\text{trzeci moment przez pole}) \dots \dots \dots (8)$$

możemy uważać μ_2 jako kwadrat współczynnika zmienności (coeff. of variation)

$$\mu_2 = (cv)^2$$

i obliczyć współczynnik asymetrii, (cs), (coeff. of skew), z równania:

$$(cs) = \frac{\mu_3}{(cv)^3}.$$

Stałe równania (5) możemy wyrazić teraz współczynnikami (cv) i (cs), przyczem d jest odległością pionową odciętej max. x od środka ciężkości pola pod krzywą:

$$\gamma = \frac{2}{(cs)(cv)}; \quad d = \frac{1}{\gamma} = \frac{(cs)(cv)}{2}; \quad p = \frac{4}{(cs)^2} - 1; \quad a = \frac{p}{\gamma};$$

$$c = \frac{N \cdot \gamma}{\Gamma(p+1)}; \quad a + d = \frac{2(cv)}{(cs)}.$$

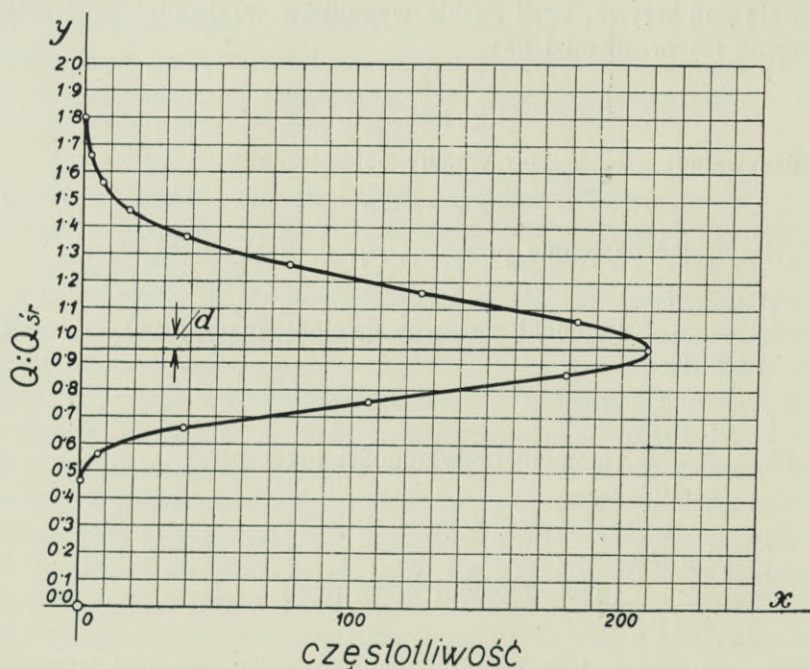
Funkcja Gamma charakteryzuje się tem, że:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p(p-1)\Gamma(p-1) \text{ i t. d.}$$

i da się wyczytać z tablic zawartych w podręcznikach matematycznych.

Obliczywszy dla szeregu spostrzeżeń współczynniki zmienności (ev) i asymetrii (es), i wstawiając w równanie stałych powyżej podanych, wyznaczmy w ten sposób równanie krzywej częstości (5) odpowiadające danemu szeregowi spostrzeżeń (rys. 1).

Dla różnych obliczeń technicznych ważną jest znajomość nie tyle krzywej częstości, co czasów trwania. Rzędne równania tej ostatniej



Rys. 1.

otrzymamy całkując pole pod krzywą częstości t. j. wyraz $x \cdot dy$ w granicach od $y = \infty$ do $y = -a$. Da się to jednak wykonać tylko dla stałej p będącej liczbą całkowitą. Dla ułamkowych p mogą być użyte tylko wartości rzędnych przybliżone, najprościej w drodze interpolacji (rys. 2).

Dalsza analiza równania dowodzi że dla pewnego (es) rzędne krzywej czasów trwania są wprost proporcjonalne do (ev) tak, że mając obliczone tabele rzędnych dla (ev) = 1, oraz pewnych (es), można obliczyć rzędne teoretyczne krzywej, mnożąc wartości z tabeli, przez (ev) znalezione dla danego szeregu spostrzeżeń.

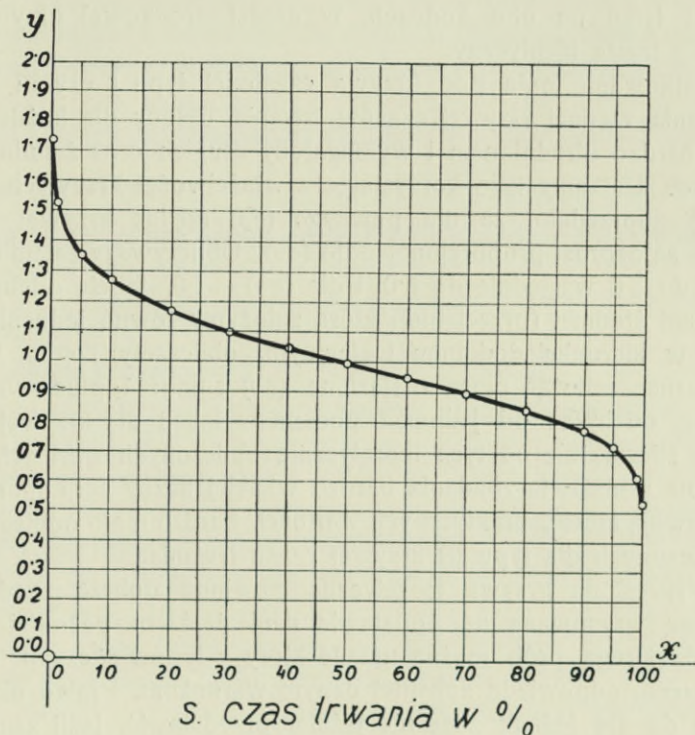
Krzywa Typu I. asymetryczna i obustronnie ograniczona.

Kształt równania tej krzywej jest następujący:

$$x = x_0 \left(1 + \frac{y}{a_1}\right)^{m_1} \cdot \left(1 - \frac{y}{a_2}\right)^{m_2}$$

przyczem stosunek m_1 do m_2 jest równy stosunkowi a_1 do a_2 , oraz podobnie jak dla Typu III:

$$(cv)^2 = \mu_2; \quad (cs) = \frac{\mu_3}{(cv)^3}.$$



Rys. 2.

Po pewnym uproszczeniu można wyrazić współczynniki m i a następującymi wzorami:

$$m_2 = 2 + \frac{6(cs)}{\sqrt{4(cs)^2 + 7}}; \quad a_2 = (cv) [\sqrt{4(cs)^2 + 7} - 3(cs)]$$

$$m_1 = 2 - \frac{6(cs)}{\sqrt{4(cs)^2 + 7}}; \quad a_1 = (cv) [\sqrt{4(cs)^2 + 7} + 3(cs)]$$

Rzędna dla max. x jest równa rzędnej przeciętnego (średniego) x pomniejszonej o iloczyn $(cv) \cdot (cs)$. Stała a_1 jest odległością x max. od

początku układu współrzędnych, odległość średniej (przeciętnej) od początku będzie równa sumie:

$$a_1 + d = (ev) [\sqrt{4(es)^2 + 7} - 2(es)].$$

Po obliczeniu stałych równania, ze znalezionych (ev) i (es) dla danego szeregu spostrzeżeń, można określić równanie teoretycznej krzywej częstości typu I. odpowiadającej owym spostrzeżeniom.

Dla celów praktycznych kształt krzywej częstości ma małe znaczenie, właściwie dla nas jedynie ważną rzeczą jest poznanie kształtu krzywej czasów trwania. Kształt ten odbiega od kształtu krzywej typu III tylko na obu końcach, w części środkowej krzywej jest prawie z tamtą identyczny.

Całkowanie pola pod krzywą częstości typu I czy III w celu otrzymania rzędnej krzywej czasów trwania byłoby dla każdego wypadku bardzo utrudnionem i wymagałoby długich oraz żmudnych rachunków. Unikamy tego korzystając z właściwości krzywych, wspomnianej poprzednio, że dla pewnego (es) rzędne krzywej czasów trwania są wprost proporcjonalne do (ev) . Obliczywszy zatem dla (es) od 0:0 do 3:0 względnie do 6:0 i dla $(ev) = 1:0$, tabelę odchyłek od absolutnej średniej (przeciętnej) którą założymy równą jednostce, odchyłek w kierunku dodatnim i ujemnym, obliczamy rzędną krzywej teoretycznej, mnożąc przez znalezione (ev) sumę: 1 plus, względnie 1 minus, odchyłka od jedności podana w tabeli dla krzywej typu I lub III. Niezależnie od tych teoretycznie obliczonych wartości, Allen-Hazen na podstawie zbadania bardzo wielkiej liczby serji spostrzeżeń podał swoją tabelę, praktycznych wartości, bardzo mało odbiegających od obliczonych dla typu III krzywej czasu trwania.

Wykreślona krzywa teoretyczna powinna dobrze zgodzić się z krzywą wrysowaną na podstawie naniesienia bezpośrednich spostrzeżeń. Drogą prób można ustalić który z typów I czy III czy też typ Hazena, odpowiada najlepiej danym warunkom. Prawo określone krzywą da się jednak znacznie jaśniej przedstawić, jeśli zamiast za pomocą krzywej, wyznaczymy je prostą naniesioną w odpowiednio zmienionej podziałce. Dla każdej wartości na (es) możemy wyznaczyć taką podziałkę na osi $X - X$, aby rzędne krzywej leżały na linii prostej. Wprowadzamy pozatem dalsze uproszczenie, a mianowicie kładziemy liczbę wypadków, względnie pole pod krzywą częstości, równe 100% i wyrażamy położenie każdej rzędnej w procentach owej sumy. Zgodnie z rachunkiem prawdopodobieństwa, jeśli mamy N spostrzeżeń, M -ty punkt obserwacyjny kładziemy w odległości $\frac{2M-1}{2N}$. Np. dla 10-ciu spostrzeżeń położenie pierwszego punktu będzie: $(2-1):20 = 5\%$, drugiego: 15% i t. d.

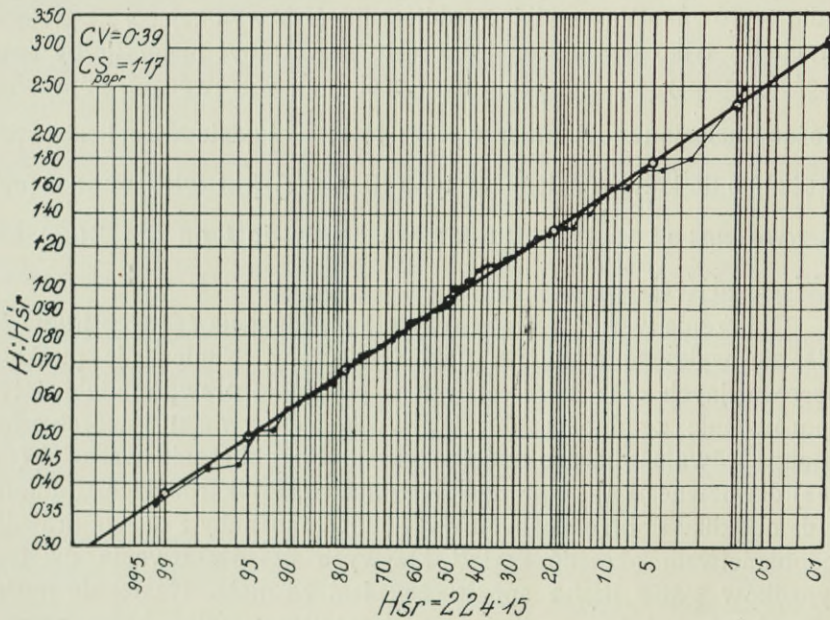
Przedstawienie krzywych czasów trwania linjami prostymi wymagałoby w praktyce przygotowania tylu podziałek, wiele różnych (es) znaleziono dla pewnych serji spostrzeżeń. Praktyka dowodzi jednak, że nawet dla wysokich współczynników (es) można przedstawić krzywą czasów trwania w podziałce dla (es) = 0, t. j. w podziałce normalnego prawa błędów, przyczem oczywiście nie otrzymamy prostej lecz krzywą, o krzywiznach jednak bardzo łagodnych i dających się z łatwością wyrównać. W praktyce stosujemy zatem naogół jedną tylko podziałkę na osi odciętych, odpowiadającą (es) = 0, na osi rzędnych podziałkę arytmetyczną lub logarytmiczną, która to ostatnia często lepiej odpowiada przebiegowi krzywych dla (es) > 0. Wkońcu trzeba zaznaczyć, że dla wyrównania pomyłki w obliczeniu (es) wynikającej ze wzięcia w rachubę tylko ograniczonej i często nawet zbyt małej liczby spostrzeżeń, należy w obliczenie wartości (es) wprowadzić poprawkę, mnożąc znalezione (es) przez wyraz: $\left(1 + \frac{8.5}{N}\right)$ gdzie N jest liczbą spostrzeżeń, o ile krzywa należy do typu III a (es) jest większe od $2(ev)$, zaś wyrazem: $\left(1 + \frac{6}{N}\right)$, o ile krzywa należy do typu I, i $2(ev)$ jest mniejsze od (es).

Obliczenie wartości (ev) i (es) nie przedstawia żadnych trudności i da się wykonać niedużym nakładem pracy. Naniesienie punktów obserwacyjnych oraz teoretycznych w podziałkę prawdopodobieństwa i porównanie zgodności obu krzywych, rzeczywistej i teoretycznej, wymaga również bardzo małego czasu. Po obliczeniu wartości (ev) i (es) dla pewnego np. typu rzek, Karpackich, Podkarpackich, Pomorza i t. d. dla kilku dobrze znanych wypadków, możnaby z dużem prawdopodobieństwem określić kształt krzywych czasów trwania dla tych wypadków gdzie liczba spostrzeżeń jest za mała. Następnie można przewidzieć z dużem prawdopodobieństwem granice które osiągną pewne zjawiska w okresie czasu znacznie dłuższym niż okres obserwacyjny, wkońcu można się zorientować czy wyjątkowy jakiś wypadek z pewnej serji obserwacji należy do danego okresu czasu, czy do okresu dłuższego. Tak np. w przykładzie niżej podanym, stan na Sanie w Postołowie z roku 1867, najwyższy znany i nigdy dotychczas nie przekroczony, naniesiony na odciętej 0.83% czasu, należy do dłuższej serji, gdyż jego właściwe położenie byłoby na około 0.55%. Dowodzi to, że stan, który był tak wysokim że był nawet podawany w wątpliwość, może istotnie się zdarzyć i to w przeciętnym okresie czasu około raz na 180 lat.

Poniżej podaję jako przykład obliczenie krzywej czasów trwania dla najwyższych każdorocznych stanów wody na Sanie w Postołowie,

za okres czasu 1867 do 1927, z opuszczeniem tylko jednego roku wojennego. Tok obliczenia jest następujący:

Porządkujemy daty podług wielkości, sumujemy stany i podzieliwszy przez liczbę lat 60, otrzymamy stan średni: $13.499 : 60 = 224.15$. Obliczamy stosunek obserwowanych stanów do średniego, t. j. przyrównujemy stan średni do jedności i obliczamy wielokrotność stanu obserwowanego w stosunku do średniego. Odejmując od obliczonych stosunków jedynkę, otrzymujemy odchyłkę od średniej przyrównanej do jedności, następnie obliczamy drugie i trzecie potęgi tych odchyłek. Wkońcu obliczamy położenie poszczególnych punktów krzywej w pro-



Rys. 3.

centach czasu: $P = \frac{2M-1}{120} \cdot 100$. Współczynniki zmienności (cv) i asymetrii obliczamy z wzorów:

$$(cv) = \sqrt{\frac{\sum v^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{8.966}{59}} = 0.39; \quad (cs) = \frac{\sum v^3}{(N-1)(cv)^3} = \frac{5.060 - 1.478}{59 \times 0.39^3} = 1.023$$

obliczony wsp. (cs) poprawiamy ze względu na liczbę lat obserwacji:

$$(cs)_{\text{popr.}} = (cs)_{\text{obl.}} \times \left(1 + \frac{8.5}{60}\right) = 1.023 \times 1.142 = 1.17.$$

Z tabeli podanej przez Allen-Hazena w dziele: Flood Flows, wyszukujemy dla różnych procentów czasu i (cs) = 1.17 odpowiednie

wartości odchyłek dla $(ev)=1$, mnożymy przez znalezione $(ev) = 0\cdot39$, dodajemy jednostkę i nanosimy wartości znalezione oraz teoretyczne na wykres (rys. 3), w którym podziałka długości jest podziałką prawdopodobieństwa dla normalnego rozkładu błędów t. j. $(es)=0$, podziałka wysokości jest arytmetyczną. Jak z wykresu widać, połączone punkty teoretyczne leżą prawie na prostej i bardzo dobrze zgadzają się z wykresem rzeczywistych obserwacji.

I. Tabela obliczenia stanów, odchyłek i współczynników (ev) i (es) .

L. p.	Rok	Stan max.	max. śred.	max. śred. $-1=v$	v^2	v^3		%/ czasu
						+	-	
1	1867	553	2·467	+1·467	2·152	3·157		0·83
2	1897	400	1·785	+0·785	0·616	0·484		2·50
3	1869	379	1·691	+0·691	0·477	0·330		4·17
4	1872	379	1·691	+0·691	0·477	0·330		5·83
5	1884	350	1·561	+0·561	0·315	0·177		7·50
6	1893	350	1·561	+0·561	0·315	0·177		9·17
7	1882	340	1·517	+0·517	0·267	0·138		10·83
8	1913	311	1·387	+0·387	0·150	0·058		12·50
9	1927	311	1·387	+0·387	0·150	0·058		14·17
10	1889	290	1·294	+0·294	0·086	0·025		15·83
11	1925	290	1·294	+0·294	0·086	0·025		17·50
12	1894	290	1·294	+0·294	0·086	0·025		19·17
13	1874	284	1·267	+0·267	0·071	0·019		20·83
14	1895	280	1·249	+0·249	0·062	0·015		22·50
15	1887	280	1·249	+0·249	0·062	0·015		24·17
16	1922	270	1·205	+0·205	0·042	0·009		25·83
17	1926	263	1·173	+0·173	0·030	0·005		27·50
18	1891	260	1·160	+0·163	0·026	0·004		29·17
19	1906	258	1·151	+0·151	0·023	0·003		30·83
20	1871	253	1·129	+0·129	0·017	0·002		32·50
21	1890	250	1·115	+0·115	0·013	0·001		34·17
22	1900	250	1·115	+0·115	0·013	0·001		35·83
23	1910	250	1·115	+0·115	0·013	0·001		37·50
24	1921	245	1·093	+0·093	0·009	0·001		39·17
25	1877	240	1·071	+0·071	0·005	0·000		40·83
26	1880	230	1·026	+0·026	0·001	0·000		42·50
27	1896	230	1·026	+0·026	0·001	0·000		44·17
28	1870	221	0·986	-0·014	0·000		0·000	45·83
29	1886	220	0·981	-0·019	0·000		0·000	47·50
30	1892	220	0·981	-0·019	0·000		0·000	49·17
31	1907	203	0·906	-0·094	0·009		0·001	50·83
32	1883	200	0·892	-0·108	0·012		0·001	52·50
33	1888	200	0·892	-0·108	0·012		0·001	54·17
34	1899	200	0·892	-0·108	0·012		0·001	55·83
35	1924	193	0·861	-0·139	0·019		0·003	57·50
36	1909	192	0·857	-0·143	0·020		0·003	59·17
37	1912	191	0·852	-0·148	0·022		0·003	60·83
38	1885	190	0·848	-0·152	0·023		0·003	62·50
39	1881	180	0·803	-0·197	0·039		0·008	64·17
40	1903	180	0·803	-0·197	0·039		0·008	65·83
Do przeniesienia		$\Sigma=10,676$		$\Sigma=+7\cdot630$	$\Sigma=5\cdot772$	$\Sigma=+5\cdot060$	$\Sigma=-0\cdot032$	

L. p.	Rok	Stan max.	max. śred.	max. śred. $-1=v$	v^2	v^3		% czasu
						+	-	
Z przeniesienia		$\Sigma=10.676$		$\Sigma=+7.630$	$\Sigma=5.772$	$\Sigma=+5.060$	$\Sigma=-0.032$	
41	1873	174	0.776	-0.224	0.050		0.011	67.50
42	1916	173	0.772	-0.228	0.052		0.012	69.17
43	1879	170	0.758	-0.242	0.059		0.014	70.83
44	1919	165	0.736	-0.264	0.070		0.018	72.50
45	1908	163	0.727	-0.273	0.075		0.020	74.17
46	1902	162	0.723	-0.277	0.077		0.021	75.83
47	1875	158	0.705	-0.295	0.087		0.026	77.50
48	1878	150	0.669	-0.331	0.110		0.036	79.17
49	1898	150	0.669	-0.331	0.110		0.036	80.83
50	1920	141	0.629	-0.371	0.138		0.051	82.50
51	1905	140	0.625	-0.375	0.141		0.053	84.17
52	1876	135	0.602	-0.398	0.158		0.063	85.83
53	1901	132	0.589	-0.411	0.169		0.069	87.50
54	1911	129	0.576	-0.424	0.180		0.076	89.17
55	1868	126	0.562	-0.438	0.192		0.084	90.83
56	1914	115	0.513	-0.487	0.237		0.115	92.50
57	1918	115	0.513	-0.487	0.237		0.115	94.17
58	1923	98	0.437	-0.563	0.317		0.178	95.83
59	1904	96	0.428	-0.572	0.327		0.187	97.50
60	1917	81	0.361	-0.639	0.408		0.261	99.17
		$\Sigma=13.449$		$\Sigma=+0.000$	$\Sigma=8.966$	$\Sigma=+5.060$	$\Sigma=-1.478$	

II. Tabela obliczenia rzędnych krzywej.

Procent czasu	99 ^a	95	80	50	20	5	1	0.1	0.01
Odchyłki dla $(cs) = 1.17, (cv) = 1.0$	-1.58	-1.29	-0.83	-0.18	+0.74	+1.93	+3.29	+5.33	+7.53
Wartość odchyłki dla $(cv) = 0.39$	-0.62	-0.50	-0.32	-0.07	+0.29	+0.75	+1.28	+2.08	+2.94
Stan wody w stosunku do średn.	0.38	0.50	0.68	0.93	1.29	1.75	2.28	3.08	3.94

Obliczenie belek ciągłych podtrzymujących płyty krzyżowo zbrojone.

Jedną z zasadniczych kwestyj, przy obliczaniu konstrukcyj żelazno-betonowych żebrowych, jest sposób przenoszenia obciążenia z płyt na belki i podciągi.

Jak wykazały prace wykonane w ciągu ostatnich lat, przez Prof. Hubera, Dr. Marcus'a i innych — obciążenie z płyt, przenosząc się na belki, rozkłada się według schematu podanego na rys. 1, — mianowicie: *a)* krótsze boki płyty i dwusieczne przylegających kątów tworzą trójkąty, obciążenie których przenosi się na belki jednego kierunku i *b)* dłuższe boki płyty wraz z dwusiecznymi i linią środkową — tworzą trapezy, przenoszące pozostałą część obciążenia na belki drugiego kierunku.

Przy ścisłym liczeniu należy w obydwóch wypadkach uwzględnić poprawkę, zależną od momentów skręcających, powstałych w płycie, na wartość których wpływa stosunek boków płyty, oraz sposób oparcia, względnie utwierdzenia na krawędziach.

Wyżej podany podział obciążenia wyraża się przez następujące wzory (rys. 2):

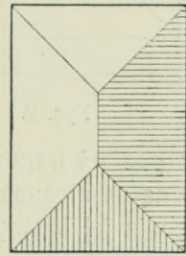
$$A_x = 2 \cdot \left(ab - \frac{a^2}{2} \right) + Q_{ix}$$

$$A_y = 2 \cdot \frac{a^2}{2} + Q_{iy}$$

gdzie Q — całkowite obciążenie pola

Q_i — wyżej wspomniana poprawka

A_x względnie A_y — część obciążenia przenosząca się na krawędź płyty.

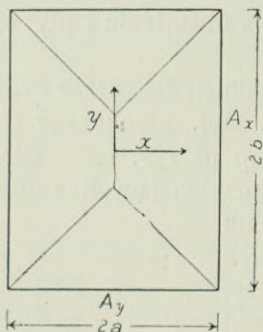


Rys. 1.

Obliczenie płyt na powyższych zasadach może być przeprowadzone przy użyciu tablic Löser'a (Bemessungsverfahren), dla obliczania zaś belek ciągłych — podają tablice opracowane na podstawie wyżej wymienionych prac Prof. Hubera i Dr. Marcus'a.

Jak wynika z powyższego, obciążenie z płyt przenoszące się na belki, ma kształt trójkątów i trapezów, wobec czego belki ciągle należałoby obliczać na tego rodzaju obciążenie. Niżej podane tablice I i II zawierają gotowe wzory momentów zginających i reakcyj podporowych przy obciążeniu w postaci trójkątów i trapezów i odpowiadają zwykle używanym przy obciążeniu równomiernem tablicom Winkler'a. Wzory są wyprowadzone dla belek 2, 3 i 4-przęsłowych o równych przęsłach i jednakowych momentach bezwładności, przy jednakowym, względnie najniekorzystniejszym dla momentów oraz reakcyj obciążeniu.

Ponieważ rachunkowa robota przy wyprowadzeniu wzorów podanych w tablicach I i II, jest dość żmudna, przeto została opuszczona.



Rys. 2.

Nakońcu podaję przykład liczbowy uwidoczniający sposób korzystania z tablic. Przykład ten wykazuje pozatem, że podany sposób liczenia daje możliwość osiągnięcia oszczędności około 20% w porównaniu ze zwykłym sposobem liczenia.

Tablice III i IV dają możliwość natychmiastowego określenia części obciążenia przypadającego na krawędź płyty, przyczem tablica III odpowiada krawędzi krótszej, t. j. obciążeniu w postaci trójkąta, zaś tablica IV odpowiada krawędzi dłuższej t. j. obciążeniu

w postaci trapezu. Tablice III i IV uwzględniają także poprawkę zależną od stosunku boków płyty oraz sposobu parcia, względnie utwierdzenia jej krawędzi.

Część całkowitego obciążenia przypadająca na krawędź płyty może być wyrażona przez wzory:

$$\text{(dłuższy bok)} \quad A_x = V_x + Q_i = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{l_x}{2l_y} \right) \alpha_x$$

$$\text{(krótszy bok)} \quad A_y = V_y + Q_i = \frac{Q}{2} \cdot \frac{l_x}{2l_y} \cdot \alpha_y$$

- gdzie Q — obciążenie całkowite pola,
 V_x — obciążenie płaszczyzny trapezu,
 V_y — obciążenie płaszczyzny trójkąta,
 l_x — krótszy bok płyty,
 l_y — dłuższy bok płyty,
 Q_i — poprawka wymieniona wyżej.

Q_i — może być zastąpione dodatkowym obciążeniem i wprowadzone do obciążenia zasadniczego jako współczynnik α , który może być przedstawiony w postaci¹⁾:

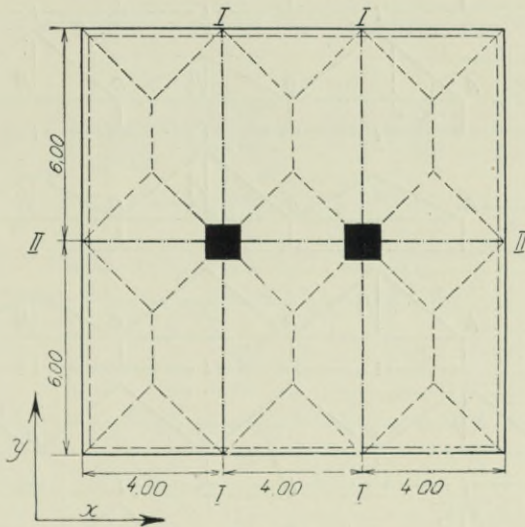
$$\alpha_x = 1 + \frac{16}{15} \cdot \frac{l_y}{2l_y - l_x} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot \nu \cdot \frac{l_x^3 \cdot l_y^2}{l_x^4 + l_y^4}$$

$$\alpha_y = 1 + \frac{16}{15} \cdot \frac{l_y}{l_x} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot \nu \cdot \frac{l_x^2 \cdot l_y^2}{l_x^4 + l_y^4}$$

gdzie l_x i l_y — długości boków płyty,

m — współczynnik Poisson'a,

ν — współczynnik zależny od sposobu oparcia względnie utwierdzenia krawędzi.



Rys. 3.

Współczynnik α jest względnie nie mały i Q_i waha się naprzykład dla płyty o stosunkach boków — $l_y:l_x=1$ i $l_y:l_x=2$ — dla płyty wolnoopartej — od 0,0598. Q do 0,0388. Q .

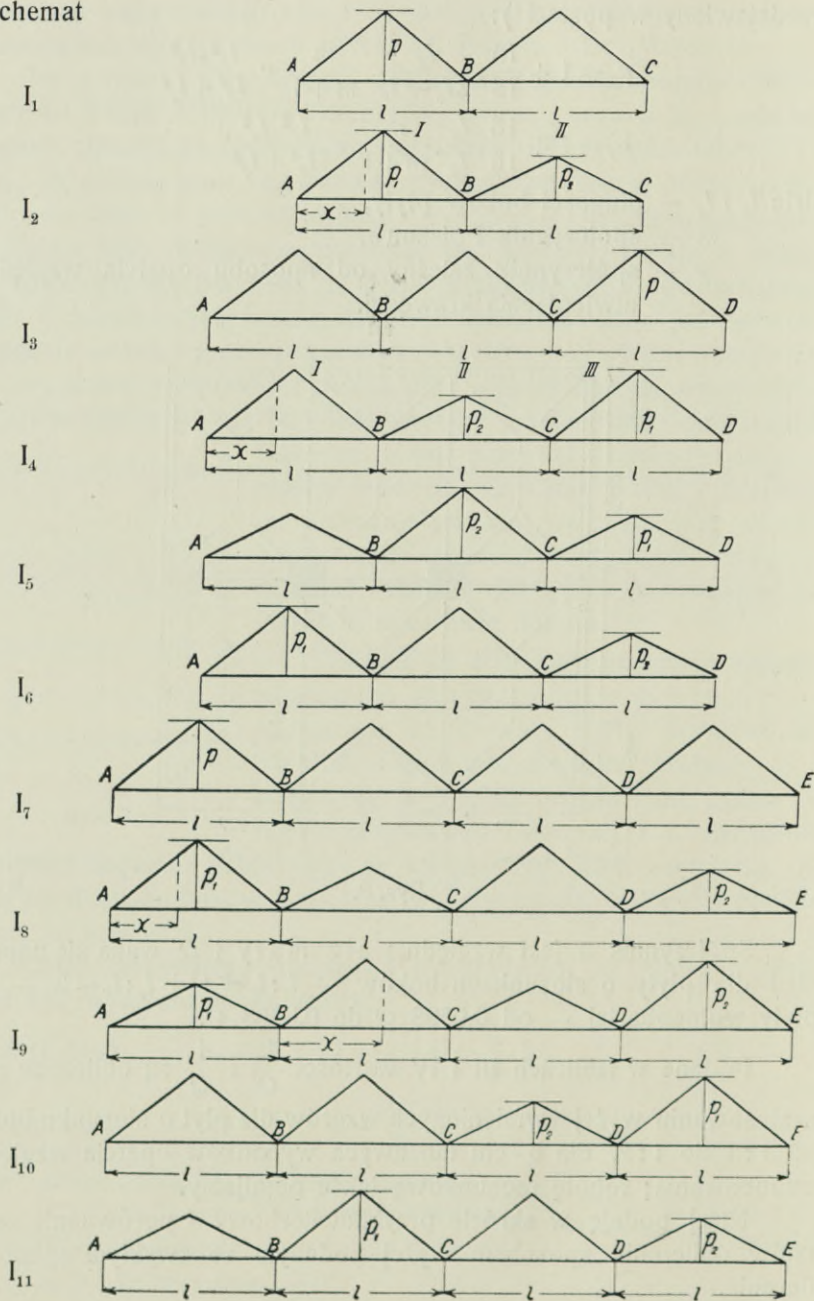
Podane w tablicach III i IV wartości $\frac{A_x}{Q}$ i $\frac{A_y}{Q}$ są obliczone przy zastosowaniu wyżej wymienionych wzorów dla płyt o stosunku boków od 1:1 do 1:2, dla 6-ciu możliwych wypadków oparcia względnie zamocowania; robotę rachunkową także pomijamy.

Niżej podaję w skrócie przykład liczbowy i porównanie rezultatów obliczenia sposobem wyżej podanym ze zwykłym sposobem liczenia.

¹⁾ Marcus: „Die Vereinfachte Berechnung biegsamer Platten“.

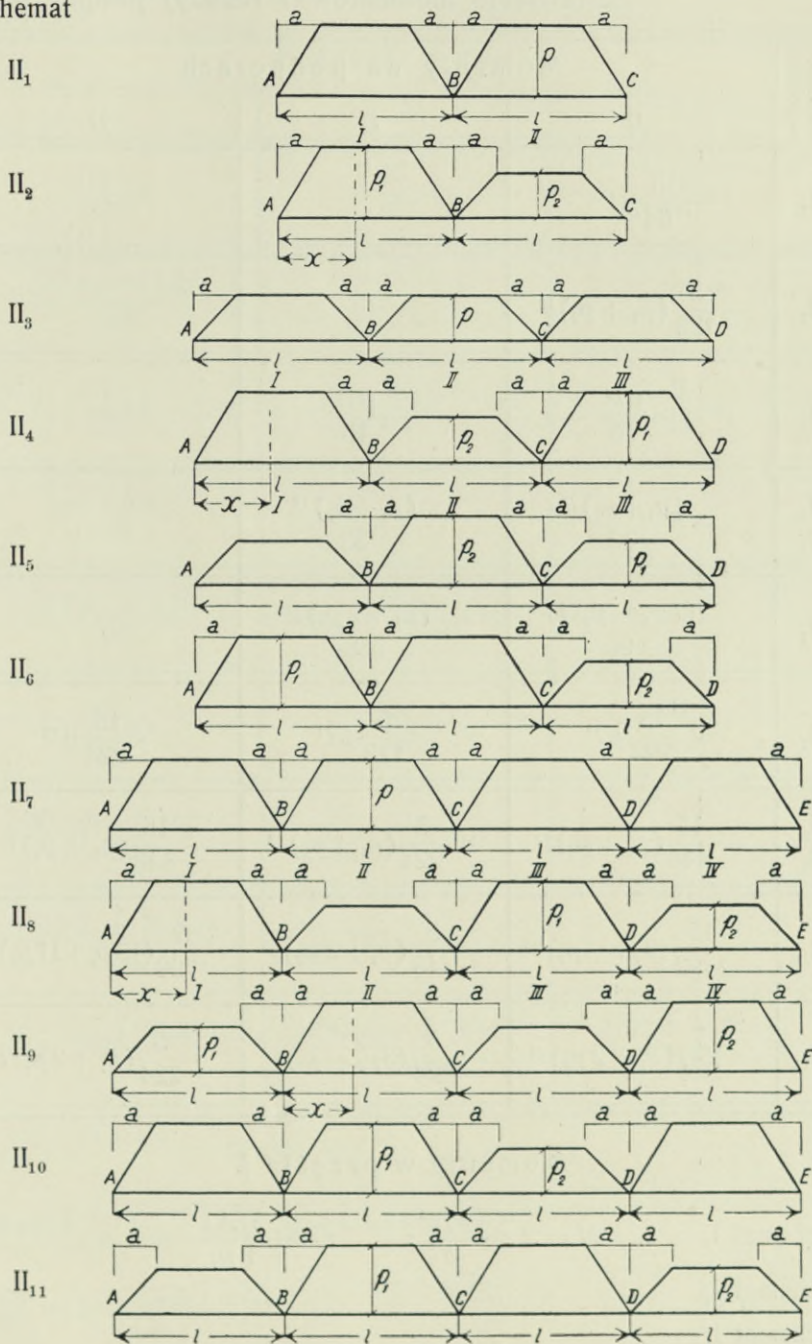
Schematy obciążenia do tablicy I.

Schemat



Schematy obciążenia do tablicy II.

Schemat



*

Tablica I.
Zestawienie momentów i reakcyj podpór dla

Schemat obciążenia	Momenty na podporach		
	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
I_1	$-\frac{5}{64} p l^2$		
I_2	$-\frac{5}{128} (p_1 + p_2) l^2$		
I_3	$-\frac{p l^2}{16}$	$-\frac{p l^2}{16}$	
I_4 I_5	$-\frac{(p_1 + p_2) l^2}{32}$	$-\frac{(p_1 + p_2) l^2}{32}$	
I_6	$-\frac{(7 p_1 - p_2) l^2}{96}$	$-\frac{(p_1 + 2 p_2) l^2}{48}$	
I_7	$-\frac{15}{224} p l^2$	$-\frac{5}{112} p l^2$	$-\frac{15}{224} p l^2$
I_8 I_9	$-\frac{15}{448} (p_1 + p_2) l^2$	$-\frac{5}{224} (p_1 + p_2) l^2$	$-\frac{15}{448} (p_1 + p_2) l^2$
I_{10}	$-\frac{15}{1792} (9 p_1 - p_2) l^2$	$-\frac{5}{448} (p_1 + 3 p_2) l^2$	$-\frac{5}{1792} (13 p_1 + 11 p_2) l^2$
I_{11}	$-\frac{5}{224} (p_1 + 2 p_2) l^2$	$-\frac{5}{224} (3 p_1 - p_2) l^2$	$-\frac{5}{224} (p_1 + 2 p_2) l^2$


Momenty w przęśle I.

Schemat I_2 $M = A x - \frac{p_1 x^3}{3 l}; \quad x = \pm \sqrt{\frac{A l}{p_1}}$

Schemat I_4 " "

Schemat I_5 " "

Tablica I.

belek ciągłych przy obciążeniu w postaci 

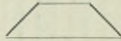
Reakcje podpór		
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
$\frac{11}{64}pl$	$\frac{21}{32}pl$	$\frac{11}{64}pl$
$\frac{(27p_1 - 5p_2)l}{128}$		
$\frac{3}{16}pl$	$\frac{9}{16}pl$	$\frac{3}{16}pl$
$\frac{(7p_1 - p_2)l}{32}$		
$\frac{(17p_1 + p_2)l}{96}$	$p_1l - \frac{(6p_1 + p_2)l}{16}$	
$\frac{41}{224}pl$	$\frac{33}{56}pl$	$\frac{51}{112}pl$
$\frac{(97p_1 - 15p_2)l}{448}$	$\frac{33}{112}(p_1 + p_2)l$	
$\frac{(313p_1 + 15p_2)l}{1792}$	$\frac{3}{896}(191p_1 - 15p_2)l$	
$\frac{(-5p_1 + 46p_2)l}{224}$	$\frac{(51p_1 + 81p_2)l}{224}$	$\frac{3(22p_1 - 5p_2)l}{112}$

Momenty w przęśle II.

Schemat I₅ $M = \frac{(-3p_1 + 5p_2)l^2}{96}$

Sche-
mat I₉ $M = \frac{P_2}{12l}(l-x)[3l^2 - 4(l-x)^2] + \frac{M_c(3l-x)}{2l}; \quad (l-x) = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + \frac{2M_c}{p_2}}$

Tablica II.

przy obciążeniu w postaci  $N = [a^3 - 2a^2l + l^3]$

Reakcje podpór		
A	B	C
$\frac{(l-a)p}{2} + \frac{M_b}{l}$	$(l-a)p - \frac{2M_b}{l}$	
$\frac{(l-a)}{2}p_1 + \frac{M_b}{l}$		
$\frac{l-a}{2}p + \frac{M_b}{l}$	$(l-a)p - \frac{M_b}{l}$	
$\frac{(l-a)}{2}p_1 + \frac{M_b}{l}$	$\frac{(l-a)}{2}(p_1+p_2) - \frac{M_b}{l}$	
$\frac{(l-a)}{2}p_1 + \frac{M_b}{l}$	$(l-a)p_1 + \frac{M_c - 2M_b}{l}$	
$\frac{l-a}{2}p + \frac{M_b}{l}$	$(l-a)p - \frac{2M_c}{l}$	$(l-a)p + \frac{M_c}{l}$
$\frac{(l-a)p_1}{2} + \frac{M_b}{l}$	$\frac{(l-a)}{2}(p_1+p_2) - \frac{2M_c}{l}$	
$\frac{(l-a)}{2}p_1 + \frac{M_b}{l}$	$(l-a)p_1 + \frac{M_c - 2M_b}{l}$	
$\frac{(l-a)}{2}p_1 + \frac{M_b}{l}$	$\frac{(l-a)}{2}(p_1+p_2) + \frac{M_c - 2M_b}{l}$	$(l-a)p_1 + 2\frac{M_b - M_c}{l}$

Momenty w przęśle II.

$$\text{Schemat II}_5 \quad M = \frac{p_2}{2} \left[\frac{l^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right] + M_b$$

$$\text{Schemat II}_9 \quad M = \frac{p_2}{2} \left[lx - x^2 - \frac{a^2}{3} \right] - \frac{M_c}{2l}(x-3l); \quad x = \frac{l}{2} - \frac{M_c}{2p_2 l}$$

Tablica III.

$$A_y = V_y + Q_i = \frac{Q}{2} \times \frac{l_x}{2l_y} \times \alpha_y$$

— zwyczaj. oparcie
 utwierdzenie



l_x	l_y	α_{ya}	$\frac{A_{ya}}{Q}$	α_{yb}	$\frac{A_{yb}}{Q}$	α_{yc}	$\frac{A_{yc}}{Q}$	α_{yd}	$\frac{A_{yd}}{Q}$	α_{ye}	$\frac{A_{ye}}{Q}$	α_{yf}	$\frac{A_{yf}}{Q}$	
1,0	1,0	1,2393	0,3098	1,3533	0,3383	1,3126	0,3282	1,3533	0,3383	1,3141	0,3285	1,3462	0,3365	
1,0	1,1	1,2618	0,2868	1,3827	0,3143	1,3473	0,3062	1,3895	0,3158	1,3412	0,3049	1,3792	0,3135	
1,0	1,2	1,2812	0,2669	1,4013	0,2919	1,3718	0,2857	1,4126	0,2942	1,3600	0,2833	1,4008	0,2918	
1,0	1,3	1,2968	0,2494	1,4106	0,2713	1,3866	0,2666	1,4244	0,2739	1,3714	0,2637	1,4123	0,2716	
1,0	1,4	1,3082	0,2336	1,4127	0,2523	1,3934	0,2489	1,4274	0,2549	1,3767	0,2459	1,4158	0,2529	
1,0	1,5	1,3155	0,2193	1,4096	0,2350	1,3940	0,2324	1,4242	0,2374	1,3772	0,2296	1,4134	0,2356	
1,0	1,6	1,3193	0,2061	1,4030	0,2191	1,3903	0,2172	1,4168	0,2213	1,3742	0,2147	1,4070	0,2198	
1,0	1,7	1,3200	0,1942	1,3940	0,2051	1,3836	0,2035	1,4067	0,2069	1,3686	0,2013	1,3980	0,2056	
1,0	1,8	1,3185	0,1831	1,3836	0,1922	1,3749	0,1910	1,3952	0,1938	1,3612	0,1891	1,3875	0,1927	
1,0	1,9	1,3151	0,1733	1,3724	0,1809	1,3651	0,1799	1,3828	0,1823	1,3527	0,1783	1,3760	0,1814	
1,0	2,0	1,3104	0,1638	1,3608	0,1701	1,3547	0,1693	1,3702	0,1713	1,3435	0,1679	1,3642	0,1705	
Sposób oparcia płyty		α		b		c		d		e		f		

Tablica IV.

$$A_x = V_x + Q_x = \frac{Q}{2} \times \left(1 - \frac{l_x}{2l_y}\right) \times \alpha_x$$

— zwyczaj. oparcie
 utwierdzenie



l_x	l_y	$\alpha_{x,a}$	$\frac{A_{x,a}}{Q}$	$\alpha_{x,b}$	$\frac{A_{x,b}}{Q}$	$\alpha_{x,c}$	$\frac{A_{x,c}}{Q}$	$\alpha_{x,d}$	$\frac{A_{x,d}}{Q}$	$\alpha_{x,e}$	$\frac{A_{x,e}}{Q}$	$\alpha_{x,f}$	$\frac{A_{x,f}}{Q}$
1,0	1,0	1,2393	0,3098	1,3533	0,3383	1,2730	0,3183	1,3153	0,3288	1,3141	0,3285	1,3343	0,3336
1,0	1,1	1,2182	0,3322	1,3190	0,3597	1,2570	0,3428	1,2948	0,3531	1,2844	0,3503	1,3062	0,3562
1,0	1,2	1,2009	0,3503	1,2866	0,3753	1,2396	0,3616	1,2716	0,3709	1,2571	0,3667	1,2783	0,3729
1,0	1,3	1,1855	0,3648	1,2566	0,3867	1,2211	0,3757	1,2473	0,3838	1,2322	0,3791	1,2513	0,3850
1,0	1,4	1,1712	0,3764	1,2293	0,3951	1,2024	0,3865	1,2235	0,3932	1,2093	0,3887	1,2259	0,3940
1,0	1,5	1,1578	0,3859	1,2049	0,4016	1,1843	0,3947	1,2013	0,4004	1,1887	0,3962	1,2028	0,4009
1,0	1,6	1,1451	0,3937	1,1832	0,4068	1,1673	0,4013	1,1809	0,4060	1,1701	0,4023	1,1818	0,4063
1,0	1,7	1,1334	0,4000	1,1642	0,4108	1,1518	0,4065	1,1627	0,4103	1,1536	0,4071	1,1633	0,4105
1,0	1,8	1,1225	0,4053	1,1476	0,4144	1,1378	0,4109	1,1466	0,4140	1,1390	0,4113	1,1470	0,4142
1,0	1,9	1,1126	0,4097	1,1331	0,4172	1,1252	0,4143	1,1324	0,4169	1,1260	0,4146	1,1327	0,4171
1,0	2,0	1,1035	0,4138	1,1203	0,4201	1,1140	0,4178	1,1199	0,4200	1,1145	0,4179	1,1200	0,4200
Sposób oparcia płyty													

Przykład.

Obliczenie płyt (rys. 3).

Obciążenie stałe: ciężar własny płyty $0,12 \times 2400 = 288 \text{ kg/m}^2$	
podłoga, tynk	62 „
Razem	350 kg/m^2
Obciążenie zmienne	400 „

(według Lösera: Bemessungsverfahren, tablica 26).

$$q' = 350 + \frac{400}{2} = 550 \text{ kg/m}^2; \quad q'' = \frac{400}{2} = 200 \text{ kg/m}^2.$$

Momenty:

Pole narożne:

$$\left. \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} M_x = l_x^2 \left(\frac{q'}{\varphi_{4x}} \pm \frac{q''}{\varphi_{1x}} \right) = 4^2 \cdot \left(\frac{550}{20,62} \pm \frac{200}{13,87} \right) = \left\{ \begin{array}{l} + 657 \text{ kgm/m} \\ + 196 \quad \text{„} \end{array} \right.$$

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = 1,5; \quad \varphi_{4x} = 20,62; \quad \varphi_{1x} = 13,87$$

$$\left. \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} M_y = l_y^2 \cdot \left(\frac{q'}{\varphi_{4y}} \pm \frac{q''}{\varphi_{1y}} \right) = 6^2 \cdot \left(\frac{550}{104,38} \pm \frac{200}{70,22} \right) = \left\{ \begin{array}{l} + 292 \text{ kgm/m} \\ + 87 \quad \text{„} \end{array} \right.$$

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = 1,5; \quad \varphi_{4y} = 104,38; \quad \varphi_{1y} = 70,22$$

Dla kierunku x — $\max M = +657 \text{ kgm/m}$ jest miarodajny; $\sigma = 1200/38$; $h = 10,5 \text{ cm}$; grubość płyty — 12 cm ; $f_c = 5,4 \text{ cm}^2$; $\phi 8 \text{ co } 9 \text{ cm} = 5,5 \text{ cm}^2$.

Przy zwykłym sposobie liczenia: dla $l_y : l_x = 1,5$, obciążenie się rozkłada w stosunku 0,834 i 0,166.

Dla krótszego kierunku

$$g = 0,834 \times 350 = 292 \text{ kg/m}^2$$

$$p = 0,834 \times 400 = 334 \quad \text{„}$$

(nie uwzględniając pogrubienia płyty).

Moment w przęśle skrajnym:

$M = + (0,080 \times 292 + 0,101 \times 334) \times 4^2 = + 914 \text{ kgm/m}$; $\sigma = 1200/38$;
 $h = 13 \text{ cm}$; grubość płyty 15 cm ; $f_c = 6,7 \text{ cm}^2$; $\phi 8 \text{ co } 7 \text{ cm} = 6,8 \text{ cm}^2$.

W porównaniu z poprzednim:

betonu — więcej o 25⁰/₀żelaza — „ o 24⁰/₀.

Obliczenie belki I—I.

Całkowite obciążenie pola płyty:

$$\max Q = 4 \times 6 \times 750 = 18000 \text{ kg}$$

$$\min Q = 4 \times 6 \times 350 = 8400 \quad \text{„}$$

Obciążenie jednego przęsła belki ciągłej 2-przęsłowej o $l=6,00\text{ m}$ (nie uwzględniając dla uproszczenia ciężaru własnego belki)

$$\begin{aligned} \text{od pola skrajnego: } & \begin{cases} 0,3962 \times 18000 = 7132 - \text{max.} \\ 0,3962 \times 8400 = 3328 - \text{min.} \end{cases} \\ \text{„ „ } \text{środkowego: } & \begin{cases} 0,4009 \times 18000 = 7216 - \text{max.} \\ 0,4009 \times 8400 = 3368 - \text{min.} \end{cases} \end{aligned}$$

Spółczynniki 0,3962 i 0,4009 otrzymujemy z tabl. IV dla $l_y : l_x = 1,5$ i wypadków e i f . Obciążenie w postaci trapezów otrzymujemy uwzględniając długość podstawy trapezu 6 m , środkowej linii $\frac{6+2}{2}=4\text{ m}$; skąd

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{7132+7216}{4} = 3587\text{ kg/mb} - \text{maximum} \\ p_2 &= \frac{3328+3368}{4} = 1674\text{ kg/mb} - \text{minimum.} \end{aligned}$$

Zgodnie z tablicą II — współczynnik

$$N = [a^3 - 2a^2l + l^3] = [2^3 - 2 \times 2^2 \times 6 + 6^3] = 176.$$

Momenty:

$$\text{na podporze} - \text{max. } M_b = -\frac{pN}{8l} = -\frac{3587 \times 176}{8 \times 6} = -13152\text{ kgm.}$$

Moment w przęśle obliczamy, określając poprzednio moment podporowy przy maksymalnym obciążeniu jednego z przęsał

$$\begin{aligned} M_b &= -\frac{(p_1+p_2)}{16} \cdot \frac{N}{l} = -\frac{(3587+1674)}{16} \times \frac{176}{6} = -9645\text{ kgm} \\ x &= \frac{l}{2} + \frac{M_b}{p_1 l} = \frac{6}{2} - \frac{9645}{3587 \times 6} = 2,55\text{ m} \end{aligned}$$

max. moment w polu:

$$\begin{aligned} M_1 &= +\frac{p_1}{2} \left[l \cdot x - x^2 - \frac{a^2}{3} \right] + \frac{M_b x}{l} = \frac{3587}{2} \times \left[6 \times 2,55 - 2,55^2 - \frac{2^2}{3} \right] - \\ &\quad - \frac{9645 \times 2,55}{6} = +9298\text{ kgm.} \end{aligned}$$

Przy zwykłym sposobie liczenia:

Obciążenie na 1 m^2 stropu:

stałe: płyta	$0,15 \times 2400 =$	360 kg/m^2
podłoga, tynk	$\frac{62}{2} =$	31 „
		422 kg/m^2
zmiennie		400 „

Reakcja na belkę I—I:

$$\begin{aligned} \text{max } R &= (1,10 \times 422 + 1,20 \times 400) \times 4 = 3777\text{ kg/mb} \\ \text{min } R &= 1,10 \times 422 \times 4 = \dots \frac{1857}{2} = \\ &\quad \text{1920 kg/mb} \end{aligned}$$

Momenty:

na podporze: $M = -0,125 \times 3777 \times 6^2 = -16997 \text{ kgm}$

w przęśle: $M = + (0,070 \times 1857 + 0,096 \times 1920) \times 6^2 = +11315 \text{ kgm}$.

Zwiększenie w porównaniu z poprzedniem:

momentu na podporze — o 29⁰/₀

„ w przęśle — o 22⁰/₀

Obliczenie belki II—II.

Obciążenie przęsła belki ciągłej 3-przęsłowej od obydwóch sąsiednich pól:

skrajnego: max $18000 \times 0,2296 \times 2 = 8266 \text{ kg}$

„ min $8400 \times 0,2296 \times 2 = 3857 \text{ „}$

(spółczynnik 0,2296 — z Tabl. III dla $l_y : l_x = 1,5$ wypadek *e*)

środkowego: max $18000 \times 0,2356 \times 2 = 8482 \text{ kg}$

„ min $8400 \times 0,2356 \times 2 = 3958 \text{ „}$

(spółczynnik 0,2356 — z Tabl. III dla $l_y : l_x = 1,5$, wypadek *f*).

Przy obciążeniu w postaci trójkąta o podstawie 4,00 m, otrzymujemy wysokość obciążenia trójkątnego p dzieląc podane wyżej całkowite obciążenia przez $\frac{4}{3} = 2$, t. j.:

dla przęsła skrajnego: $\begin{cases} \max p = 4133 \text{ kg/m} \\ \min p = 1929 \text{ „} \end{cases}$

„ „ „ środkowego: $\begin{cases} \max p = 4241 \text{ „} \\ \min p = 1979 \text{ „} \end{cases}$

Momenty obliczamy zgodnie z tablicą I:

na podporze max $M = -\frac{(p_1 + p_2)}{32} \cdot l^2 = -\frac{(4133 + 4241) \times 4^2}{32} = -4187 \text{ kgm}$.

Dla określenia max M w przęśle skrajnym, obliczamy poprzednio na podstawie tablicy I — reakcję A :

$$A = \frac{(7p_1 - p_2)l}{32} = \frac{(7 \times 4133 - 4241)}{32} \times 4 = 3086 \text{ kg}$$

$$x = \sqrt{\frac{Al}{p_1}} = \sqrt{\frac{3086 \times 4}{4133}} = 1,73 \text{ m}$$

maksymalny moment w przęśle skrajnym:

$$M = A \cdot x - \frac{p_1 \cdot x^3}{3l} = 3086 \times 1,73 - \frac{4187 \times 1,73^3}{3 \times 4} = +3532 \text{ kgm}$$

Przy zwykłym sposobie liczenia belka II—II byłaby niewyzyskana.

INŻ. KAROL STADTMÜLLER

Słowiańskie słownictwo techniczne a prace naszych uczonych, w szczególności Prof. Thulliego.

Oprócz dotrzymania kroku w nauce, uczeni nasi mieli do pokonania trudności terminologiczne, zdaje mi się dotychczas przez ogół naszych techników mało uwzględniane.

Szczególnie na tem polu zasłużył się Prof. Thullie. Terminologia techniczna wprowadzona przez niego jest tak ogólnie znaną, że przypuszczam, nie potrzebuje przytaczania jej na tem miejscu. Prace techniczne i terminologiczne Prof. Thulliego zaczęły się rozwijać równocześnie z ogłaszaniem prac podstawowych tak przez uczonych zagranicznych jak i naszych. Oczywiście, że prace uczonych zagranicznych objęte są pracami Prof. Thulliego. Wobec rozwoju nauk, musieli obcy uczeni wprowadzać do swych prac nowe terminy techniczne, które wymagały u nas urobienia polskich odpowiedników. Równocześnie z ogłaszaniem prac obcych, rozpoczął się i u nas okres prac naukowych, który wpłynął również i na rozwinięcie się naszej terminologii technicznej. Prace Prof. Thulliego ogłaszane były nie tylko w różnych językach obcych, ale co dla nas ciekawsze, omawiały także dorobek naukowy ogłaszany i w innych językach słowiańskich np. czeskim, rosyjskim i t. d. Zatem już dla tych prac musiał Prof. Thullie trudzić się przekładem ich na nasz język. Te prace techniczne pisane w językach słowiańskich, nie zostały jednak tak utrwalone, jakby to sobie najprawdopodobniej i sam Autor życzył, oraz jakbyśmy to sami sobie życzyli. Terminologję techniczną języków słowiańskich, stosowane w pracach Prof. Thulliego nie weszły jednak w skład jakiegoś słowiańskiego słownika technicznego, bo takiego wydawnictwa dotychczas nie było, a znając ówczesne stosunki polityczne, natrafić by mogło podobne wydawnictwo techniczne, przy przeprowadzeniu tej pracy, na różne trudności. Obecnie po oswo-
dzeniu się Słowian, konieczne jest zestawienie takiego słownika technicznego języków słowiańskich.

Sprawa słowiańskiego słownika technicznego sprowadza się w głównej mierze do ustalenia programu polskiego słownictwa technicznego (P. S. T.), gdyż z chwilą, gdybyśmy zdołali ustalić jakąkolwiek większą czy mniejszą, część naszego słownictwa technicznego, możemy niem służyć dalej naszym braciom Słowianom. W sprawie tego programu pracy, między dotychczasową uchwałą Kom. słownictwa techn. Akad. Nauk Techn. w Warszawie (A. N. T.) a moim poglądem na program tej pracy zachodzi różnica, którą obecnie pragnę przedstawić.

Najpierw przedstawię stan obecny kwestji ustalania słownictwa technicznego.

Według uchwał narad wstępnych w tej sprawie, oraz „odezwy“, ogłoszonej w „Wiadomościach“ nr. 19, 1930 r., mają być utworzone dwie komisje główne a mianowicie: Pierwsza komisja, złożona z przedstawicieli Akad. Nauk Techn., Związku P. Z. T. z moim udziałem, ma za zadanie kierowanie pracami pod względem rzeczowym, t. zn. co do schematu i układu słownika, instrukcji, wzorów formularzy, wszelkich kwestyj językowych (równoznaczników i t. d.), kolejności wydawnictwa poszczególnych części słownika i t. d. Druga komisja, wyłoniona ze Związku P. Z. T. z moim udziałem, ma kierować wydawnictwem pod względem finansowym i technicznym (finansowanie, zbieranie materiałów, drukowanie, sprzedaż i t. d.) i pozostawać w stałym kontakcie ze Związkami Narodowymi Inżynierów Słowiańskich, należących do Federacji, a to celem równoległego wydawnictwa słowników w innych językach słowiańskich. Dalej mają być utworzone t. zw. Komisje słownikowe lokalne, przy wszystkich Stow. Techn. (zatem około 26 komisyj), których zadaniem ma być zbieranie materiałów do pol. S. T., przekazywanych na moje ręce, zaś po ich rozpatrzeniu, materiał ma być przesłany Kom. A. N. T., która podała również swój program pracy jak i instrukcje dla współpracowników.

Następnie, czego żądać należy od programu pracy przy wydaniu słowiańskiego słownictwa technicznego (S. S. T.)?

Ze względu na przeciąganie się terminu wydania S. S. T. uważam, że owocność tej pracy zależy od 2 warunków: 1) przede wszystkim powinien być wydany słownik ogólnych terminów technicznych, oraz 2) wydanie tego słownika powinno nastąpić w czasie możliwie najkrótszym np. w ciągu najbliższych 2 lat.

Czy program Kom. A. N. T. odpowiada naszemu zadaniu?

Program Kom. A. N. T., dla którego wszyscy jesteśmy z najwyższym uznaniem, jako dla pracy pomyślanej oryginalnie i systematycznie, lecz zakreślonej na największą skalę (brak tylko rysunków, natomiast wprowadzono definicje) nie odpowiada programowi S. S. T. z tej prostej przyczyny, że praca ujęta w sposób programu A. N. T.

musi trwać przynajmniej jedno pokolenie t. j. około 30 lat. Okres ten nie jest bynajmniej za długi, gdyż obecne XVI tomowe wydawnictwo firmy Oldenbourg w Monachjum, 6-językowych słowników technicznych (niem. - franc. - ang. - włosk. - hiszp. - ros.) zaczęło wychodzić w r. 1906, praca zaś nad przygotowaniem materiałów musiała być przecież rozpoczęta przynajmniej kilka lat wcześniej. Nadto, program tego wydawnictwa nie jest dotychczas wyczerpany, pozostają bowiem jeszcze do opracowania działy: lotnictwa, żeglarstwa i górnictwa, jakoteż dalsze działy „przędzalnictwa i tkactwa“, które mają obejmować: pończosznicstwo, hafciarstwo, maszyny do szycia, jakoteż wykończenie tkanin t. j. bielnictwo (blicharstwo), farbiarstwo, drukarstwo i apreturę. Uwzględniając nawet nadzwyczajną pomoc dla nas z tego wydawnictwa, należałoby przyjąć okres 30-letni dla ustalenia polsk. słown. techn., według programu A. N. T. za minimalny.

Jakie trudności zachodzić muszą przy przeprowadzeniu pracy według programu Kom. słown. A. N. T.?

I. Rozdział referatów w między poszczególne Komisje, a to szczególnie ze względu na powtarzanie się wielkiej ilości słów w różnych działach techniki np. dział hutnictwa, obejmujący między innymi sprawami także wyrób rur, może mieć zastosowanie nie tylko w samym hutnictwie a więc: walcownictwie i odlewnictwie, ale także: w gazownictwie, przy wodociągach, górnictwie, nafiarsztwie (szczególnie przy przesyłaniu ropy na dalekie odległości), ogrzewnictwie, kolejnictwie (przy wyposażeniu wagonów i lokomotyw), przemyśle fermentacyjnym (gorzelnictwie i piwowarstwie) i t. d. Takich przykładów możnaby przytoczyć kilkanaście (np. powtarzanie się elementów maszyn, jak śrub, klinów, dalej łożysk, przeróżnych narzędzi i t. d.). Podobnie rzecz się ma z rzemiosłami, które wchodzi jako części różnych działów techniki np. w kolejnictwie: ślusarstwo, kowalstwo, blacharstwo, stolarstwo, tapicerstwo, szklarstwo, malarstwo i t. d., nie mówiąc oczywiście o wprowadzeniu w ostatnich czasach radja a nawet telefonów do pociągów.

II. Wybór terminów, t. zn. rozstrzygnięcie, które terminy techniczne zaliczyć należy do danej pracy, a w szczególności do danego działu. Jest to sprawa w danym zadaniu najtrudniejsza, o czym można się przekonać przy układaniu podobnego słownika. Jako charakterystyczny przykład, jak podobne prace nie zgadzają się ze sobą, podaję porównanie 2 najnowszych słowników z tej samej dziedziny a mianowicie radjotechniki: Hörig, Radio-Lexikon, Berlin 1924 i Günther, Fünfsprachenwörterbuch für Radioamateure, Stuttgart 1924. Pierwszy słownik posiada około 600 terminów (z objaśnieniami), do którego przybyło około 100 terminów podanych mi łaskawie przez Centr. Kom.

Słown. Elektr. przy Stow. Elektr. w Warszawie przy sposobności przeglądania mojego niem.-pol. słownika radjowego (pozostał on w rękopisie, ponieważ nie znalazłem nakładcy), razem zatem około 700 terminów, zaś drugi słownik posiada około 1.100 słów. Z porównania tych dwu słowników okazało się, że ilość terminów powtarzających się w obu słownikach wynosi 128 słów, co stanowi około 11%. Dziwnie mały ten % ma poczęści swoje usprawiedliwienie w tem, że zarówno w tej nowej gałęzi techniki, jak zresztą i w innych działach niema tego „ustalenia“ terminów, do którego my dążymy! Być może nawet, że ten % powtarzających się słów w tych 2 słownikach jest większy, lecz w takim razie nie użyto tych samych słów, lecz synonimów. Jest to zatem już dla nas wskazówką do następnego punktu.

III. Wybór synonimów. Podzieliłbym je na 5 grup: 1 grupa, słowa pochodzące z języków klasycznych (wzgl. ze świata starożytnego i t. d.) np. spirytus (łac.) i alkohol (arab.), oprócz tego jest jeszcze polski: wyskok; 2 grupa, słowa pochodzące z języków klasycznych i polskiego np. wentyl (łac.) i zawór, termometr (grec.) i ciepłomierz; 3 grupa, oba słowa polskie np. natężenie i naprężenie, czułek i czujnik (P. N.) (niem. Tastenzirkel); 4 grupa, słowa polskie i gwarowe (używane przeważnie w rzemiośle) np. imadło i śrubsztak, tarnik i raszpla, pilnik i fajla; 5 grupa, słowa polskie przedstawiające kwestje czysto językowe np. kwas mleczny czy mlekowy (P. N.), wydłużenie linijne, czy linearne, czy linjowe (niem. lineare Ausdehnung), moment skręcający czy skręcenia (niem. Drehmoment) i t. d. Otóż z powyższych 5 grup słów, o 3 pierwszych grupach mogłaby decydować Kom. A. N. T., w czwartej grupie słów wybór padnie oczywiście na termin polski, zaś piąta grupa słów mogłaby być zadecydowaną wspólnie z Kom. A. N. T. przy udziale delegata Kom. językowej Akad. Umiej. w Krakowie.

IV. Ekonomja pracy. Materiał słownikowy, zbierany przez Kom. lokalne, ma stanowić materiał podstawowy dla prac Kom. A. N. T. Jednakże, o ile Kom. A. N. T. będą również zbierały ten sam materiał, wówczas praca ta będzie przeprowadzana zupełnie niepotrzebnie dwa razy! Z drugiej jednak strony, Kom. A. N. T. nie może w zupełności polegać i poprzestać na dostarczaniu jej tych materiałów terminologicznych przez Kom. lokalne, gdyż bardzo możliwy jest wypadek, że materiały te nie zostaną jej dostarczone!

V. Efekt pracy. Po dostarczeniu tych materiałów przez Kom. lokalne do moich rąk, przeglądnięciu ich, oraz przesłaniu następnie Kom. A. N. T., będą te Kom. lokalne — z czasem — żądały ogłoszenia dostarczonych materiałów, ażeby ich prace nie okazały się daremne! W razie zebrania się jednak większej ilości tych materiałów może prze-

glądanie ich i ostateczne ustalenie przez Kom. A. N. T. natrafić na poważne przeszkody (brak czasu, trudności finansowe i t. d.), co znowu może wpłynąć na „ostudzenie zapału“ tych Kom. lokalnych do dalszych prac.

Gdzie zatem szukać należy rozwiązania programu S. S. T.?

Mimo niezaprzeczonych zalet programu A. N. T., nie widzę sposobu uniknięcia trudności, o których wspomniałem. To też po długich rozważaniach, przyszedłem jednak do przekonania, że wszystkie wyżej wspomniane trudności, a szczególnie wybór terminów (p. III) zostałyby zupełnie usunięte, gdybyśmy się przyłączyli do obecnie rozpoczętego wydawnictwa międzynarodowych słowników technicznych firmy Oldenbourg w Monachjum, którego pierwsza część obejmuje „Zasadnicze pojęcia techniki“ a więc właśnie te słowa, na których nam w danej pracy najwięcej zależeć powinno! Program tego wydawnictwa jest bardzo prosty. Każdy język posiada dla siebie osobny tom, bez żadnego ograniczenia co do ilości przyjąć się mających języków, co w innych wydawnictwach jest nie do pomyślenia. Narazie wydano pierwszą część w 3 językach, oczywiście każdy język w osobnym tomie a mianowicie w niem., franc. i ang. Każdy tom opracowany jest według tego samego programu (typu) a mianowicie składa się z 2 części: 1) alfabetycznej z numerami i 2) numerowej, ułożonej częściowo systemem rzeczowym. W ten sposób terminy we wszystkich językach, w części numerowej, wzajemnie sobie odpowiadają t. zn. jeżeli w części np. niem. (oczywiście alfabetycznej) szukam odpowiednika w obcym języku, na niem. słowo „Keil“ i znajdę obok numer 3622, wówczas pod tym samym numerem 3622 znajdę w danym obcym słowniku odpowiednik na słowo „Keil“, zatem dla franc. *coin, cale, clavette*.

Jakie są zatem zalety tego wydawnictwa?

1) Odpada rozdzielanie referatów; 2) odpada wybór terminów i 3) cała praca może być przeprowadzona przez jedną osobę, zatem osiąga się maximum ekonomii pracy (p. IV) a tem samym efekt pracy (p. V) może być najlepszy; natomiast pozostaje do zrobienia: 1) podanie odpowiedników polskich, oraz 2) ustalenie najodpowiedniejszego z pośród nich terminu technicznego (referat Kom. A. N. T.).

Konieczność wydania S. S. T. zadecydował już II. Kongres F. I. S'a w Zagrzebiu w r. 1927, a do tej pory nie zrobiono jeszcze nic konkretnego. Wobec uchwalenia mojego wniosku na XI Zjeździe Del. P. Z. T. dołożę starań oczywiście pod pewnymi warunkami, by opracowanie odpowiedników polskich do wspomnianego słownika Oldenbourga, możliwie najprędzej doprowadzić do skutku. 26 lat nieprzerwanej pracy nad słownictwem technicznym, daje bądź co bądź pewną rękojmię przeprowadzenia tej trudnej pracy! Po wydaniu pierwszej

części ogólnej, o ileby się nie ukazały dalsze części tego wydawnictwa Oldenbourga, zawsze możnaby jeszcze przystąpić do wykonania programu A. N. T., który wobec ustalenia zasadniczych terminów technicznych, byłby już łatwiejszy do przeprowadzenia.

Reasumując zatem powyższe wywody, uważam ze względu na znaczne korzyści i wielkie ułatwienie w pracy przy ustaleniu pol. słown. techn. za najprostsze jej rozwiązanie przyłączenie się do powyższego wydawnictwa, przez uzupełnienie go językiem polskim. Z przeprowadzonej korespondencji z tą firmą wynika, że niema ona nic przeciwko użyciu tych materiałów w dany sposób.

Na podstawie opinii autorytetu w sprawie prawa autorskiego Prof. Zoll'a, uważam dla nas za niedopuszczalne korzystanie z 6-cio językowego słownika Scelomanna w sposób wskazany w instrukcji A. N. T., natomiast przypuszczam, że firma Oldenbourg, wydająca te słowniki, zgodziłaby się na korzystanie z tych prac, gdybyśmy przystąpili do uzupełnienia międzynarodowych słowników tej firmy językiem polskim. Celem wyjścia z tej sytuacji, możnaby stworzyć „junctim“ między naszym przystąpieniem do tego międzynarodowego słownika technicznego Oldenbourga a korzystaniem z jego 6-cio językowego słownika technicznego.

Zanim przystąpię do postawienia wniosku w sprawie S. S. T. pozwalam sobie zwrócić uwagę na fakt, że firma Oldenbourg drukuje dwa wydawnictwa słowników technicznych a mianowicie: 1) 6-cio językowy ilustrowany słownik techniczny (dotychczas wyszło XVI tomów) oraz 2) rozpoczęła wydawnictwo międzynarodowych słowników technicznych, którego pierwszy tom obejmuje: „Zasadnicze pojęcia techniki“.

Wobec powyższego postawiłem wówczas następujący wniosek:

„Celem przyspieszenia prac około ustalenia polskiego słownictwa technicznego, a tem samem dostarczenia podstaw do ustalenia słownictwa technicznego innych narodów słowiańskich, XI Zjazd Delegatów Zrzeszeń Techn. w Warszawie uznaje za najodpowiedniejsze przystąpienie nasze do (nowego) wydawnictwa międzynarodowych słowników technicznych firmy Oldenbourg w Monachjum, a celem uzyskania autorytetu prac, zwraca się do Kom. A. N. T. z prośbą o podjęcie się decyzji wyboru polskich terminów technicznych.

Dla przeprowadzenia tych prac konieczne jest uzyskanie odpowiednich kredytów“.

Uwzględniając zatem nadzwyczajne zasługi Prof. Thulliego, tak na polu nauki jak i na polu polskiego i słowiańskiego słownictwa technicznego przypuszczam, że winien on wziąć w pierwszym rządzie udział w programie ustalenia słowiańskiego słownictwa technicznego.

INŻ. DR. JÓZEF TAUB

O łączeniu wkładek w budownictwie żelbetowem ze szczególnem uwzględnieniem spawania elektrycznego.

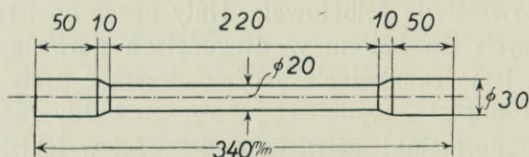
Stosowanie coraz większych rozpiętości przy budowie hal oraz przy budowie mostów, powoduje konieczność łączenia wkładek żelaznych w budownictwie żelbetowem. Huty nasze dostarczają bowiem wkładek żelaznych do betonu w długościach normalnych do 12 *m* i tylko na specjalne zamówienie można otrzymać pręty o większych długościach za dopłatą, wynoszącą 0·5% za każdy rozpoczęty metr ponad długość normalną; największe długości w jakich nasze huty wyrabiają żelazo na wkładki wynoszą przy prętach cieńszych o średnicy 5—29 *mm* najwyżej 40 *m*, zaś przy prętach grubszych o średnicy 30—50 *mm* najwyżej 18 *m*; dostawa prętów o tych długościach wymaga jednak dłuższego czasu, a także i przewóz ich przedstawia pewne trudności. Stąd powstaje konieczność łączenia wkładek żelaznych w konstrukcjach żelbetowych.

Pozatem jest jeszcze drugi powód łączenia wkładek żelaznych, a mianowicie: przedsiębiorstwa budowlane sprowadzają z reguły na skład żelazo w długościach normalnych, przyczem w miarę wyrabiania tego żelaza pozostają odpadki o mniejszych lub większych długościach. Wprawdzie podają przepisy ministerjalne, że wkładki żelazne winny być o ile możności z jednego kawałka, jednak przedsiębiorstwa budowlane stosują niejednokrotnie z powyższych powodów łączenie tych wkładek.

Przepisy ministerjalne podają dozwolone sposoby łączenia wkładek żelaznych, a mianowicie postanawiają, że jeżeli łączenie wkładek z dwóch lub więcej części jest nieuniknione z powodu wielkiej długości, wtedy należy zetknięte części przedłużyć poza teoretyczny punkt zetknięcia o tyle, ażeby siły wewnętrzne nie mogły wkładek przesunąć, a na całej długości zetknięcia łączone wkładki związać drutem. Punkty łączenia wkładek nie powinny przytem znajdować się w miejscu naj-

większego naprężenia żelaza, ani też być skupione w jednym przekroju belki.

Powyższy sposób łączenia wkładek żelaznych przez przedłużenie ich poza teoretyczny punkt zetknięcia nie jest jednak odpowiedni w pewnych wypadkach i np. przepisy niemieckie dopuszczają go tylko dla wkładek o największej średnicy 20 mm i tylko dla konstrukcyj, pracujących na zginanie, a nie na czyste ciągnięcie (ścięgien, słupów wiszących); w tych wypadkach przepisują one łączenie wkładek przy pomocy zamków z mufami o przeciwnych gwintach. Pozatem pozwalają one również na spawanie wkładek żelaznych, jednak z tem, że jeżeli naprężenie żelaza w miejscu łączenia wkładek wynosi więcej aniżeli 50% największego naprężenia, należy ułożyć obok miejsca spawania dodatkową wkładkę, zaopatrzoną obustronnemi hakami. Także i nasze rozporządzenie ministerjalne pozwala na łączenie wkładek przy pomocy spawania z zastrzeżeniem przeprowadzenia odpowiednich prób podczas budowy.



Rys. 1.

Chcąc porównać dobroć wyżej wspomnianych sposobów łączenia wkładek, przeprowadzono w ubiegłym roku na skutek inicjatywy Okręgowej Dyrekcji Robót Publicznych w Krakowie szereg doświadczeń, a mianowicie badano wytrzymałość na rozerwanie prętów z żelaza okrągłego, łączonych w rozmaity sposób.

Próby rozerwania przeprowadzono pod kierunkiem Prof. Łoskiewicza w Laboratorium Metalurgicznym Akademii Górniczej w Krakowie, a program doświadczeń został ułożony przez autora niniejszej rozprawy.

Pręty miały kształt wyżej podany (rys. 1), a mianowicie główce prętów posiadały średnicę 30 mm, przekrój zaś w miejscu badania posiadał średnicę 20 mm i powstał przez otoczenie części środkowej prętów do tej grubości. Ten kształt został wybrany przez Prof. Łoskiewicza celem lepszego utwierdzenia prętów w maszynie.

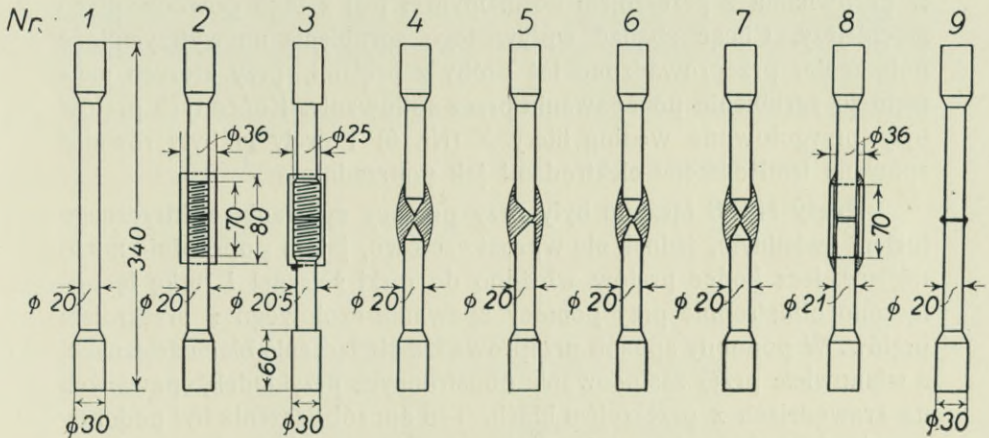
Doświadczenia obejmowały próby rozerwania prętów zwykłych t. j. przechodzących bez łączenia w jednym kawałku, następnie prętów łączonych ze sobą przy pomocy zamków z mufami i prętów spawanych, a to zarówno gazowo jak i elektrycznie. W poniższej tabeli A zestawione są różne stosowane sposoby łączenia prętów, które następnie poddano badaniom.

Do poniższej tabeli *A* dodajemy następujące bliższe objaśnienia:

Pręty Nr. 1 przechodziły bez łączenia w jednym kawałku. Gatunek tych prętów, jak również i następnych prętów aż do Nr. 8 włącznie, odpowiadał naszemu zwyczajnemu żelazu handlowemu.

Pręty Nr. 2 łączone były przy pomocy zamków z mufami o przeciwnych gwintach. Średnica zewnętrzna gwintowania prętów wynosiła 20 mm; zamki zrobione były z żelaza okrągłego o średnicy 36 mm, przyczem przekrój zamków był większy aniżeli przekrój prętów łączonych, aby rozerwanie nie nastąpiło w obrębie zamków. Połączenie to miało tę wadę, że przekrój prętów był osłabiony w miejscu nacięcia na nich gwintu i dlatego zastosowano przy następnej grupie doświadczeń odpowiednie wzmocnienie przekroju prętów w miejscu gwintowania.

Tabela *A*. Stosowane sposoby łączenia prętów.



Pręty Nr. 3 łączone były również przy pomocy zamków z mufami o przeciwnych gwintach; pręty te posiadały średnicę 20 mm, a końce ich zgrubiono w ogniu na długości nagwintowania do 25 mm; średnica zewnętrzna gwintowania prętów wynosiła więc 25 mm, zaś średnica wewnętrzna gwintów równą była grubości prętów poza miejscem łączenia. Również i główce prętów zostały wyrobione na długości 60 mm przez odpowiednie zgrubienie ich w ogniu do 30 mm; grubość samych prętów powiększyła się przez zgrubienie do 20¹/₂ mm.

Pręty Nr. 4 łączone były przy pomocy spawania gazowego (acetylenem). Końce prętów, obrobione konicznie, ułożono czołowo naprzeciw siebie i wypełniono przestrzeń wolną między nimi materiałem żelaza, pochodzącym ze stopienia specjalnego drutu t. zw. drutu szwedzkiego.

Pręty Nr. 5—7 łączone były przez spawanie elektryczne łukiem świetlnym. Spawanie przeprowadzono przy pomocy maszyny fabrykatu

firmy „Elin“, wytwarzającej prąd stały o odpowiednim napięciu i natężeniu. Przy spawaniu łukiem świetlnym układa się pręty, mające być połączone, obok siebie i wypełnia się przestrzeń wolną między nimi materiałem żelaza, pochodzącym ze stopienia specjalnego drutu t. zw. elektrody. Do spawania prętów użyto elektrod amerykańskich i szwedzkich, powleczonych specjalną masą, oraz zwyczajnego niepowlezonego drutu szwedzkiego, jakiego używa się przy spawaniu gazowem.

Ponieważ pręty były spawane czołowo, przeto końce ich odpowiednio przygotowano, a mianowicie obrobiono je, podobnie jak się to robi przy spawaniu blach, według litery *V* (pręty Nr. 5), według litery *X* (pręty Nr. 6), względnie otoczono je konicznie, jak przy spawaniu gazowem (pręty Nr. 7).

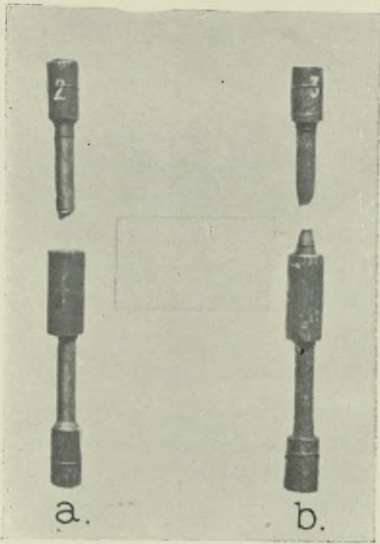
Przy łączeniu prętów zapomocą spawania elektrycznego łukiem świetlnym przekrój prętów w miejscu spawania jest nieco zgrubiony w porównaniu z przekrojem normalnym i jest z tego powodu nieco mocniejszy. Chcąc zbadać wpływ tego zgrubienia na wytrzymałość połączenia, przeprowadzono też próby z prętami, przy których usunięto to zgrubienie po spawaniu przez spiłowanie. Końce tych prętów były przygotowane według litery *X* (Nr. 6) i pręty te były również spawane temi samymi elektrodami jak poprzednio.

Pręty Nr. 8 łączone były przy pomocy spawania elektrycznego łukiem świetlnym, jednak nie wprost czołowo, jak to poprzednio miało miejsce, lecz końce prętów włożono do rurki żelaznej i rurkę tę połączono obustronnie przy pomocy spawania czołowego z przekrojem prętów. W podobny sposób przeprowadza się łączenie blach żelaznych, a mianowicie przez zastosowanie obustronnych przykładek, spawanych na krawędziach z przekrojem blach. Ten sposób łączenia był podobny zresztą do połączenia prętów przy pomocy zamka z mufami, tylko że zamiast gwintowania zastosowano spawanie elektryczne. Połączenie to miało jeszcze tę zaletę, że pręty były ułożone zupełnie osiowo. Średnica zewnętrzna rurki wynosiła 36 mm, a jej przekrój użyteczny był większy aniżeli przekrój prętów, aby rozerwanie nie nastąpiło w obrębie rurki. Przekrój części środkowej prętów wynosił 21 mm.

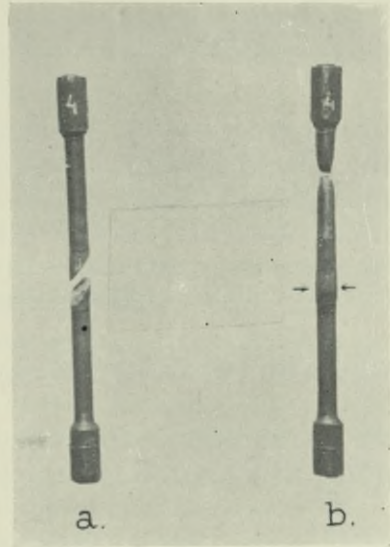
Pręty Nr. 9 łączone były przy pomocy spawania elektrycznego na styk systemem oporowym z nadpalaniem. Żelazo tych prętów było pochodzenia niemieckiego i gatunek jego odpowiadał warunkom przepisów niemieckich dla „St. 37“.

Spawanie przeprowadzono na maszynie fabrykatu Powszechnego Towarzystwa Elektrycznego. Przy spawaniu na styk systemem oporowym przepływa prąd elektryczny wprost przez pręty, mające być połączone, przyczem natężenie prądu przyjmuje się tak wielkie, że końce prętów rozgrzewają się w bardzo krótkim czasie aż do temperatury

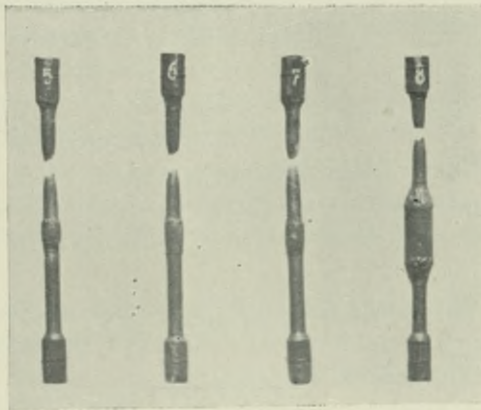
TABLICA I.



Ryc. 1 a, b.



Ryc. 2 a, b.



Ryc. 3.

spawania. Przez kilkakrotne zbliżanie i oddalanie końców prętów, powierzchnie stykowe stapiają się i gdy są równomiernie rozgrzane, wtedy ściska się je silnie ku sobie; płynne i spalone części metalu zostają przytem wyciśnięte, tworząc rodzaj pierścienia wokoło miejsca spawanego.

Chcąc zbadać wpływ tego pierścienia na wytrzymałość połączenia, przeprowadzono też próby z prętami średnicy 30 mm, przy których otoczono część środkową po przeprowadzeniu spawania do 20 mm, tak że miały one potem ten sam kształt jak pręty badane poprzednio. Przy jednym z tych prętów zauważono po otoczeniu z jednej strony drobną skazę w miejscu spawania.

Wyżej opisane pręty zostały poddane próbom rozerwania w maszynie systemu Amsler-Laffon, przyczem przeprowadzono dla wszystkich stosowanych sposobów łączenia prętów po dwie próby, zaś dla prętów, łączonych przy pomocy spawania łukiem świetlnym, po trzy próby (każda inną elektrodą, jak wyżej podano). Przy próbach badano siłę przy granicy ciastowatości oraz wytrzymałość na rozerwanie.

Wyniki tych doświadczeń, jako średnie z kilku prób, zostały zestawione w tabeli *B*.

W poniższej tabeli *B* obliczono też naprężenia prętów przy granicy ciastowatości oraz wytrzymałość na rozerwanie. W uwadze zaznaczono, w którym miejscu nastąpiło rozerwanie.

Z doświadczeń tych wynika przedewszystkiem, że wytrzymałość na rozerwanie naszego zwyczajnego żelaza handlowego była naogół mniejszą od wymaganej w myśl naszych przepisów.

Przy prętach łączonych na zamek z mufami o przeciwnych gwintach (pręty Nr. 2, kolumna 3) nastąpiło rozerwanie w pierwszym gwincie, co było do oczekiwania (tabl. I, ryc. 1 *a*). Jeżeli zgrubiono przekrój prętów w miejscu gwintowania tak, że średnica wewnętrzna gwintu równą była średnicy pręta poza miejscem łączenia (pręty Nr. 3, kolumna 4), wówczas rozerwanie nastąpiło poza obrębem połączenia (tabl. I, ryc. 1 *b*).

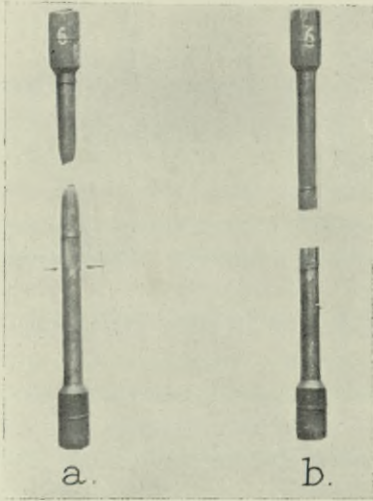
Przy prętach spawanych gazowo (pręty Nr. 4, kolumna 5 i 6) nastąpiło w jednym wypadku rozerwanie w miejscu spawania (tabl. I, ryc. 2 *a*), w drugim zaś wypadku, w którym przekuto miejsce spawania na gorąco młotkiem, nastąpiło rozerwanie poza miejscem spawania (tabl. I, ryc. 2 *b*). Okazuje się z tego, że jakość połączenia została ulepszona przez przekucie miejsca spawania. Objawy rozerwania pierwszego pręta były też odmienne od objawów normalnych, a mianowicie rozerwanie nastąpiło nagle, według linii ukośnej, bez poprzedniego wydłużenia pręta i zwężenia jego przekroju.

Tabela B. Wyniki prób rozerwania prętów.

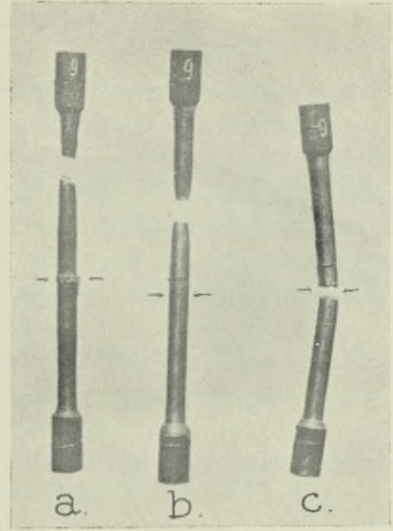
L. porz.	Nr. 1.	Nr. 2.	Nr. 3.	Nr. 4.	Nr. 5.	Nr. 6.	Nr. 7.	Nr. 8.	Nr. 9.
Sposób łączenia prętów	Pręt zwykły nie łączony	Końce nagwinowane i łączone na zamek	Końce zgrubione w ogniu i łączone na zamek	Pręty spawane gazowo	Pręty spawane elektrycznie łukiem świetlnym	Pręty spawane elektrycznie systemem oporowym			
				Miejsce spawania przekuto młotkiem	Usunięto zgrubienie wokół miejsca spawania	Pręt otoczony po spawaniu			
Granica	$P =$	7875	8300	8200	9010	7650	8400	8840	9300
	$t =$	2510 ¹⁾ (3920 ¹⁾)	2520	2610	2865	2440	2670	2815	2960
Wytrzymałość na rozerwanie	$P =$	9800	12935	10600	11620	11025	10730	11910	12100
	$t =$	3120 ¹⁾ (4870 ¹⁾)	3920	3370	3700	3510	3410	3790	3860
UWAGI	Normalne objawy rozerwania	Rozzerwano nastąpiło w pierwszym gwincie	Rozzerwano nastąpiło poza miejscem łączenia	Rozzerwano nie ukośne w miejscu spawania	Rozzerwano nastąpiło poza miejscem spawania	Rozzerwano nastąpiło nagle w miejscu spawania	Rozzerwano nastąpiło poza miejscem spawania	Rozzerwano nastąpiło w miejscu spawania	

1) Przekrój liczony według zewnętrznej średnicy gwintu, zaś w nawiasie według wewnętrznej średnicy gwintu.

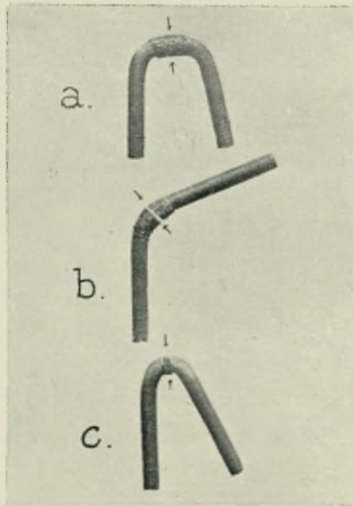
TABLICA II.



Ryc. 4 a, b.



Ryc. 5 a, b, c.



Ryc. 6 a, b, c.

Pręty spawane elektrycznie łukiem świetlnym (pręty Nr. 5—7, kolumna 7—11) okazały pełną wytrzymałość, gdyż we wszystkich wypadkach nastąpiło rozerwanie poza miejscem spawania (tabl. I, ryc. 3).

Przy prętach, przy których usunięto zgrubienie w miejscu spawania przez opiłowanie (pręty Nr. 6, kolumna 9, 10), rozerwanie nastąpiło w dwóch wypadkach, a mianowicie w wypadku spawania elektrodami amerykańskimi i szwedzkimi, poza miejscem spawania (tabl. II, ryc. 4 *a*), zaś przy pręcie spawanym zwykłym niepowleczo-nym drutem szwedzkim (którego nie używa się zresztą do spawania elektrycznego) nastąpiło rozerwanie w miejscu spawania (tabl. II, ryc. 4 *b*). Objawy rozerwania tego pręta były też inne aniżeli normalnie, a mianowicie rozerwanie nastąpiło nagle z hukiem bez wydłużenia pręta i bez zwężenia przekroju; wytrzymałość tego pręta nie była jednak mniejszą od wytrzymałości innych prętów.

Przy prętach, łączonych zapomocą rurki spawanej elektrycznie obustronnie z przekrojem prętów (pręt Nr. 8, kolumna 12) nastąpiło rozerwanie poza miejscem spawania (tabl. I, ryc. 3).

Pręty spawane na styk systemem oporowym (pręty Nr. 9, kolumna 13) okazały pełną wytrzymałość i rozerwanie nastąpiło poza miejscem spawania (tabl. II, ryc. 5 *a*). Wytrzymałość tych prętów była ze względu na wyższą jakość żelaza znacznie większą aniżeli prętów poprzednio badanych. Przy prętach, które po przeprowadzeniu spawania otoczono w części środkowej do średnicy 20 *mm*, nastąpiło w jednym wypadku rozerwanie poza miejscem spawania (tabl. II, ryc. 5 *b*), zaś w drugim wypadku (pręt Nr. 9, kolumna 14), w którym poprzednio zauważono skazę, jak wyżej już zaznaczyliśmy, nastąpiło rozerwanie w miejscu spawania; nie było przytem zwężenia przekroju, lecz pręt wydłużył się ze strony, z której była wyżej wspomniana skaza więcej aniżeli z przeciwnej strony i wyglądał jakgdyby był zgięty (tabl. II, ryc. 5 *c*).

Oprócz wyżej opisanych prób wytrzymałości połączeń na rozerwanie przeprowadzono też z szeregiem prętów, łączonych przy pomocy spawania elektrycznego, próby wytrzymałości żelaza na zginanie, jakich żądają nasze przepisy ministerjalne. Próby te powinny być przeprowadzone przez nawinięcie na walcu o średnicy równej dwukrotnej grubości prętów. W naszym wypadku przeprowadzono gięcie w pojedynczy sposób na imadle, wskutek czego nie można było ściśle dotrzymać powyższego warunku.

Przy prętach, spawanych łukiem świetlnym, miejsce spawania było sztywniejsze od przekrojów sąsiednich pręta z powodu zgrubienia przekroju w tem miejscu i zgięcie nastąpiło przeważnie w prze-

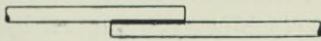
krojach sąsiednich. Wyniki prób gięcia na zimno prętów spawanych łukiem świetlnym były częściowo dodatnie (tabl. II, ryc. 6 a), częściowo zaś ujemne (tabl. II, ryc. 6 b).

Pręty, spawane na styk oporowo, nie okazywały żadnych objawów pęknięć przy gięciu na zimno, jakkolwiek średnica gięcia była mniejszą od przepisanej podwójnej grubości pręta (tabl. II, ryc. 6 c).

W związku z powyżej omawianymi doświadczeniami, przeprowadzonymi w laboratorium Akademii Górniczej w Krakowie, opiszemy też krótko doświadczenia, które przeprowadził Prof. Saliger z polecenia firmy „Elin“ we Wiedniu z prętami spawanymi przy pomocy łuku świetlnego.

Do doświadczeń tych użyto stali miękkiej o wytrzymałości 3700 — 4400 kg/cm^2 , częściowo zaś stali wysokowartościowej o wytrzymałości 4800 — 5600 kg/cm^2 . Wytrzymałość więc tych prętów była znacznie wyższą aniżeli prętów, użytych do naszych doświadczeń.

Prof. Saliger przeprowadził próby rozerwania prętów z żelaza okrągłego, średnicy 7—40 mm, z których okazało się, że pręty spawane czołowo nie osiągnęły naogół pełnej wytrzymałości; im większą była średnica prętów, tem większem było zmniejszenie ich wytrzymałości.



Rys. 2.

Pręty średnicy 7 mm osiągnęły 94%, średnicy 10—15 mm osiągnęły 82%, średnicy 20 mm osiągnęły 85%, zaś pręty 28—40 mm osiągnęły 79% pełnej wytrzymałości. Przy prętach ze stali wysokowartościowej zmniejszenie wytrzymałości z rosnącą średnicą prętów było jeszcze większe. Przez spiłowanie zgrubienia w miejscu spawania zmniejszenie wytrzymałości było tylko nieznaczne.

Prof. Bryła zastosował przy budowie Domu Akademickiego w Warszawie łączenie wkładek ścięga podciągu rozporowego o długości 12,50 m, dźwigającego siedm pięter przy pomocy spawania elektrycznego, przez co uzyskał oszczędność prawie 50% w stosunku do poprzednio projektowanego ścięga z wstęp nitowanych. Przy próbach, wykonanych poprzednio przez niego, okazało się, że na siedm próbek tylko jedna przerwała się w miejscu spojenia, wszystkie inne poza tem miejscem.

Prof. Saliger przeprowadził również szereg doświadczeń z prętami z żelaza okrągłego, które były łączone w ten sposób, że zetknięte części przedłużono odpowiednio poza punkt zetknięcia, a na długości zetknięcia przeprowadzono spawanie łukiem świetlnym (rys. 2); końce prętów nie wymagają w tym wypadku żadnej obróbki.

Z doświadczeń tych okazało się, że w ten sposób da się uzyskać pełną wytrzymałość prętów, przyczem długość zetknięcia zależną jest

od grubości prętów. Stosunek długości zetknięcia do średnicy prętów rośnie z grubością prętów i wynosi 4—7, aby uzyskać pełną wytrzymałość prętów. Zważywszy, że przy zwykłym łączeniu prętów w konstrukcjach żelbetowych długość zetknięcia, potrzebna dla przeniesienia sił wewnętrznych, łącznie z hakami, równą jest 40- do 50-ciokrotnej średnicy pręta, widzimy, jakie oszczędności można uzyskać przez stosowanie spawania elektrycznego.

Odmienny sposób łączenia prętów z żelaza okrągłego przez zetknięcie i spawanie łukiem świetlnym na pewnej długości poddano próbom w Stacji Doświadczalnej Politechniki w Stuttgarcie. Chodziło o zbadanie wytrzymałości łączenia prętów, ułożonych na deskowaniu, przy których spawanie możliwem było tylko od górnej strony, z powodu braku dostępu do dolnej strony prętów.

Pręty średnicy 40 *mm* spawane były z jednej strony łukiem świetlnym, przyczem długość zetknięcia równą była 10-ciokrotnej grubości żelaza t. j. 40 *cm*. Przy przeprowadzonych dwóch próbach rozerwanie nastąpiło w obu wypadkach poza miejscem spawania.

Wszelkie wyżej omówione doświadczenia odnosiły się do czystych prób wytrzymałości na rozerwanie. Dla wytrzymałości konstrukcyj żelbetowych miarodajnem jest jednak naprężenie żelaza przy granicy ciastowatości i dlatego należałoby osobno przeprowadzić doświadczenia z belkami żelbetowemi, aby zbadać wpływ łączenia wkładek na wytrzymałość tych belek.

Tego rodzaju doświadczenia przeprowadził Prof. Saliger, a mianowicie badał on belki żelbetowe, przy których wkładki żelazne łączone były przy pomocy spawania elektrycznego łukiem świetlnym (p. „Beton und Eisen“, rok 1930, zeszyt 17). Uzbrojenie belek wynosiło 0·9% i składało się z dwóch prętów średnicy 25 *mm* lub z trzech prętów średnicy 20 *mm* lub wreszcie z sześciu prętów średnicy 14 *mm*. Oprócz tego przeprowadzono kilka doświadczeń z belkami żelbetowemi, których uzbrojenie wynosiło 0·4% i składało się z sześciu prętów średnicy 10 *mm*. Belki były narażone na zginanie dwiema siłami skupionemi, działającymi w jednej trzeciej rozpiętości.

Wytrzymałość belek przy czołowym spawaniu wkładek w środku rozpiętości była w wypadku uzbrojenia dwiema wkładkami średnicy 25 *mm* taka sama jak przy prętach przechodzących bez łączenia, zaś w wypadku uzbrojenia dwiema wkładkami średnicy 20 *mm* o 12% mniejszą; przy prętach spawanych czołowo nie w środku rozpiętości, lecz w miejscu odgięcia wkładek, nastąpiło złamanie belek przy naprężeniu żelaza o 7·2% wyższem od granicy ciastowatości żelaza, przyczem spawanie nie uległo żadnemu uszkodzeniu. Przy prętach średnicy 25 *mm*, spawanych przez boczne zetknięcie, była wytrzymałość

belek o 7·6%₀ mniejszą, aniżeli przy prętach przechodzących bez łączenia. Belki uzbrojone prętami okrągłymi średnicy 14 mm i 10 mm okazały pełną wytrzymałość.

Na zakończenie zreassumujemy wyniki naszych wywodów, a mianowicie:

Badaliśmy powyżej różne sposoby łączenia wkładek w budownictwie żelbetowem. Łączenie wkładek przy pomocy zamka z mufami o przeciwnych gwintach okazało pełną wytrzymałość tego sposobu łączenia; rozumie się, że gięcie wkładek, łączonych na zamek, w miejscu łączenia nie jest możliwem.

Pręty łączone przy pomocy spawania elektrycznego łukiem świetlnym okazały przy zastosowaniu naszego żelaza handlowego pełną wytrzymałość, przy zastosowaniu zaś stali o większej wytrzymałości wyzyskanie wytrzymałości wkładek było mniejsze, a to w zależności od grubości prętów. Natomiast pręty spawane łukiem świetlnym okazały mniejszą wytrzymałość przy próbach zginania żelaza na zimno.

Pręty spawane na styk systemem oporowym okazały pełną wytrzymałość tego sposobu połączenia. Pręty te zachowywały się również korzystnie przy próbach zginania żelaza na zimno.

Okazuje się z tego, że łączenie wkładek żelaznych przy pomocy spawania elektrycznego daje bardzo dobre wyniki. Spawanie systemem oporowym posiada tę zaletę, że materiał jest zupełnie jednorodny, podczas gdy przy spawaniu łukiem świetlnym wchodzi w miejsce łączenia materiał obcy elektrod, który posiada nieco inne właściwości aniżeli materiał prętów łączonych; dlatego też wytrzymałość prętów spawanych na styk oporowo jest większą aniżeli prętów spawanych łukiem świetlnym, zarówno na rozerwanie, jakoteż na zginanie. Przy spawaniu systemem oporowym nie jest się tak zależnym od spawacza i ten sposób spawania jest tańszy przy masowych spawaniach.

Natomiast spawanie łukiem świetlnym posiada tę zaletę, że instalacja spawania jest tańszą, że można je przeprowadzić wprost na miejscu użycia żelaza, np. na deskowaniu.

Oba systemy spawania elektrycznego posiadają wielką przyszłość w budownictwie żelbetowem.

K. F. VETULANI

Wzór przybliżony dla projektowania nakładek belki blaszanej.

Prof. Dr. M. Thullie podaje wzór¹⁾ na obliczenie grubości d nakładki dla belki blaszanej:

$$d = \frac{M}{b' h_1 \tau} - \frac{2 I_1}{b' h_1 (h_1 + 2 d)} \quad \dots \quad (1)$$

gdzie M oznacza moment sił zewnętrznych, τ natężenie dopuszczalne na zginanie, h_1 wysokość ścianki, I_1 moment bezwładności ścianki i kątownek po odciągnięciu dziur na nity pionowe, a wreszcie b' projektowaną szerokość nakładki po odciągnięciu dziur na nity.

Z wzoru (1) oblicza się d metodą iteracji nazywaną tu także sposobem kolejnych przybliżeń, a mianowicie przyjąwszy po prawej stronie równości (1) $d = 0$, oznacza się wartość lewej strony dla tego przyjęcia przez d_1 i uważa się ją za pierwszą wartość przybliżoną; wstawiając teraz po prawej stronie (1) za d tę wartość d_1 oblicza się odpowiednią wartość lewej strony wyrażenia (1) oznaczając ją przez d_2 i uważając za drugą wartość przybliżoną i t. d.

Jako słuchacz politechniki przy obliczeniu belki blaszanej (1909) spostrzegłem, że drugie przybliżenie prowadzi do wzoru przejrzystego i wygodnego w praktyce, który obecnie podaję (6). Wzór taki, przy niewielkiej wprawie w projektowaniu daje wyniki dostatecznie dokładne, jak to z łatwością sprawdzić się dało.

Oznaczmy przez W_p potrzebny moment oporu belki to mamy:

$$W_p = \frac{M}{\tau} \quad \dots \quad (2)$$

podobnie oznaczmy przez W_{sk} moment oporu wybranego zestawienia ścianki i kątownek z uwzględnieniem wskazanych potrąceń; wielkość

¹⁾ Mosty blaszane, Lwów 1905, str. 4, wzór (5).

Także M. Thullie: Statyka budowli. II wyd. str. 174.

tą otrzymuje się zwykle z tablic podawanych przez związki hutnicze; mamy tu przy oznaczeniach jak we wzorze (1):

$$W_{sk} = \frac{I_1}{\frac{1}{2}h_1} \cdot \dots \dots \dots (3)$$

Uwzględniając (2) i (3) otrzymamy w pierwszym przybliżeniu z wzoru (1)

$$b' h_1 d_1 = W_p - W_{sk}; \dots \dots \dots (4)$$

wstawiając zaś wartość d_1 z (4) w (1) i uwzględniając przyjęte oznaczenia otrzymuje się drogą wskazaną przez Prof. Thulliego:

$$d_{(2)} = \frac{W_p}{b' h_1} - \frac{W_{sk}}{b' h_1 + 2 \frac{W_p - W_{sk}}{h_1}} \dots \dots \dots (5)$$

Do więcej skupionego i jeszcze wygodniejszego dla projektowania wzoru przybliżonego na grubość nakładki dochodzi się zwyczajną metodą matematyczną rozwijając na szereg wyrażenie:

$$\frac{1}{1 + 2 \frac{d}{h_1}} = 1 - \frac{2d}{h_1} + \dots \text{ i t. d. } \dots$$

i zatrzymując tylko dwa wyrazy tego rozwinięcia.

Z wzoru początkowego (1) otrzymuje się tym sposobem na odpowiednią wartość przybliżoną \underline{d} równanie linjowe:

$$\underline{d} = \frac{W_p}{b' h_1} - \frac{W_{sk}}{b' h_1} \left(1 - \frac{2\underline{d}}{h_1} \right),$$

z którego wypada:

$$\underline{d} = \frac{W_p - W_{sk}}{b' h_1 - 2 \frac{W_{sk}}{h_1}} \dots \dots \dots (6)$$

Podkreślić wypada, że b' i d , a także W_{sk} dobiera się przy projektowaniu odpowiednio, co przy użyciu wzoru (6) daje się z łatwością osiągnąć.

Nietrudno się przekonać, że wartość $d_{(2)}$ ze wzoru (5) wypada zawsze nieco mniejsza, a wartość \underline{d} ze wzoru (6) nieco większa od wartości dokładnej, którą można otrzymać rozwiązując równanie (1) jako równanie drugiego stopnia ze względu na niewiadomą d .

Przykład ustroju kratowego dopuszczającego układ nieokreślonych sił wewnętrznych.

Już A. F. Moebius w swojej statyce (1837) poświęca cały rozdział¹⁾ ustrojom chwiejnym i daje piękne analityczne rozwiązania dla wielu przypadków ustrojów prętowych mające znaczenie dla badania ustrojów płaskich, a w szczególności także dla pierścieni podstawowych kopuł kratowych.

Szczególłą uwagę zwrócono na ustroje chwiejne, gdy Crofton w *Proceedings of Royal Society* 1872²⁾ pokazał, że znany od czasów starożytnych „sześciobok tajemniczy“³⁾ nazywany później sześciobokiem Pascal'a może podlegać napięciom wewnętrznym bez działania sił zewnętrznych. Sześciobok taki ma 6 węzłów (przegubów) oraz $2 \cdot 6 - 3 = 9$ prętów, które stanowią jego boki i przekątne; węzły jego leżą na krzywej rzędu drugiego, a każde trzy pary prętów nieschodzących się w jednym węźle („przeciwległych“) przecinają się w punktach leżących na odpowiedniej prostej Pascal'a.

Osobliwość przykładu Crofton'a polega na tem, że — jak wiadomo — sześciobok podobnie zbudowany (izomorficzny), o ile tylko węzły jego nie leżą na krzywej rzędu drugiego (normalnej czy też zdegenerowanej) stanowi ustrój kratowy izostatyczny sztywny, który przez usunięcie jednego dowolnie wybranego pręta przechodzi w połączenie ruchome o jednym stopniu swobody przekształcenia⁴⁾.

¹⁾ Werke. t. 3. wyd. przez F. Klein'a 1886. *Lehrbuch der Statik* (1837) II. Teil. V. Kap. Von der unendlichen kleinen Beweglichkeit.

²⁾ Według M. Lévy, *Statique graphique*, IV. P. 1926. Paris, Appendice à la Note I. (1888) pag. 331 sq.

Późniejsze prace Crofton'a patrz także E. I. Routh: *Statyka teoretyczna*, przekł. Z. Straszewicza. Warszawa, Wende 1916, str. 199—201.

³⁾ G. Veronese: *Nuovi teoremi sull' Hexagrammum Mysticum*, *Atti d. R. Accad. dei Lincei* (Memorie). Ser. III. vol. I. 1877.

⁴⁾ To znaczy, że położenie wszystkich innych prętów względem jednego z pośród nich jako układu odniesienia może być opisane za pomocą jednej zmiennej niezależnej (parametru).

Jak wiadomo Maurice Lévy¹⁾ podał bardzo prosty sposób tworzenia także ustrojów kratowych ruchomych, czyli posiadających pewną ilość stopni swobody, przekształcenia, a pomimo tego dopuszczających układ nieokreślonych sił wewnętrznych. Wystarczy obrać n prostych (przekątni) i na każdej z nich — zresztą dowolnie — dwie siły równe i przeciwne, a następnie dla takiego układu sił (równoważnego z założenia zeru) nakreślić wielobok sznurowy tak aby jego kolejne wierzchołki leżały na różnych prostych; na podstawie znanego twierdzenia statyki wielobok taki zamknąć się musi. Zastępując teraz obrane przekątnie oraz kolejne boki wieloboku sznurowego prętami i uważając wierzchołki tego wieloboku za węzły (przeguby), otrzymamy ustrój kratowy dopuszczający układ sił wewnętrznych proporcjonalnych do obranych na początku i do promieni wieloboku sił odpowiadających bokom wieloboku sznurowego. Ponieważ współczynnik proporcjonalności jest nieokreślony więc i wielkość absolutna sił wewnętrznych w tak otrzymanym ustroju kratowym jest nieokreślona. Natomiast określony jest stosunek wzajemny wielkości tych sił dodatkowych. Przypadki tym sposobem otrzymane można uważać na ogół za trywialne, gdyż z reguły otrzymujemy tak ustroje hipostatyczne czyli posiadające mniej prętów niż potrzeba do usztywnienia wzajemnego położenia węzłów, z wyjątkiem osobliwym np. przypadku Crofton'a.

A. Föppl²⁾ i Müller-Breslau³⁾ rozważali znany bardzo prosty ustrój wyjątkowy, który można uważać za szczególny przypadek łuku trójp przegubowego, którego trzy przeguby leżą na jednej prostej. W ich schemacie obie części łuku zastąpiono równymi i jednakowymi prętami. Zwrócili oni uwagę, że skoro się obciążą taki ustrój siłą zaczepiającą w środkowym przegubie i prostopadłą do prostej łączącej przeguby, to uwzględniając odkształcenie elastyczne prętów (wydłużenie) otrzymuje się na siły wewnętrzne w nich działające wartości zupełnie określone⁴⁾.

¹⁾ Według M. Lévy, *Statique graphique*, IV. P. 1926. Paris, Appendice à la Note I. (1888) pag. 331 sq.

²⁾ Otto Mohr z. 80. Geburtstag. Berlin, Ernst, 1916, artykuł A. Föppla: Beitrag zur Berechnung des Ausnahme-Fachwerks. S. 63—87.

Podam tu jeszcze dotyczącą cokolwiek odmiennego zagadnienia pracę:

F. Jasiński: *Graphische Methode zur Berechnung des Fussrings räumlicher Fachwerke*. Schweiz. Bauztg. 1900, Bd. 35, S. 189.

³⁾ *Die Neueren Methoden*. 3 wyd. Lipsk 1904, rozdz. 1, str. 17—20.

⁴⁾ Porówn. L. Karasiński. C. R. Accad. d. Sc. Paris 1921, t. 173, Nr. 3 z 18/VI. *Przegl. Techn.* str. 294 z r. 1921. Z poprzedniemi porówn.: R. v. Mises u. Ratzersdorfer, Knicksicherheit der Fachwerke. *Ztschr. f. ang. Math. u. Mech.* 1925, Bd. 5, H. 3, str. 221—222, równ. (9') i (10), a także str. 223 i 224 ryc. 3.

Odnosnie do tego ostatniego rezultatu nasuwa się pewna uwaga. Ustrój taki przybierze pod wpływem przyjętej siły P_0 pewną postać równowagi; przegub środkowy obniży się o y_0 , a pręty wydłużą się skutkiem elastyczności o wielkości δ , odpowiednie do wartości siły P_0 , którą możemy obrać dowolnie małą, ale od zera większą. Utwórzmy teraz ustrój znajdujący się w „elastycznym sąsiedztwie“ poprzedniego, chwiejnego — to znaczy taki, którego pręty mają w stanie nieobciążonym siłą P_0 długości większe niż poprzednio właśnie o wielkość δ (może się to także zdarzyć mimo naszej wiedzy i woli, czy to przez odpowiedni wzrost temperatury, czy też skutkiem niedokładności montażu); nie zmieniając odległości przegubów skrajnych możemy ten ustrój (sąsiedni) zmontować podwyższając przegub środkowy o $-y_0$ ponad prostą łączącą przeguby skrajne. Jeżeli ten elastycznie sąsiedni ustrój obciążymy siłą niemniejszą niż P_0 , to mamy pewność, że równowaga nie nastąpi dla żadnego położenia przegubu średniego dla którego wychylenie y byłoby zawarte w przedziale:

$$-y_0 < y \leq y_0,$$

a dopiero dla jakiegoś położenia y_1 takiego że:

$$y_1 > y_0.$$

Nastąpi więc ruch, który można rozłożyć na fazy: I, $-y_0 < y < 0$, w której działać będzie dana siła P_0 i mniejsza od niej wypadkowa sił elastycznych w prętach zwrócona w stronę przeciwną; II, $y = 0$, w którym to punkcie wypadkowa sił elastycznych będzie równa zeru; III, $0 < y < y_0$, kiedy wypadkowa sił elastycznych będzie działać w tym samym kierunku (przyśpieszająco) co dane obciążenie P_0 , wywołując przez to dodatkowo gwałtowne przejście ustroju na przeciwną stronę prostej łączącej przeguby skrajne oraz — IV, szereg drgań około¹⁾ położenia y_1 , w którym nakoniec — skutkiem sił rozpraszających (tarcie i t. p.) — równowaga się ustali; — mówiąc po prostu: pod wpływem obciążenia $\geq P_0$ przegub środkowy ustroju elastycznie sąsiedniego ustrojowi chwiejnemu przeskoczy na stronę przeciwną (można obliczyć dokładną granicę $P'_0 < P_0$ — nieco — dla której to nastąpi). Wielkość tego niebezpiecznego y_0 przy którym zjawisko powyższe zajść może zależy oczywiście od wielkości siły zewnętrznej P , jakiej można się spodziewać.

Tak więc pojęcie chwiejności i nieokreśloności nie traci swojego ogólnego znaczenia nawet przy uwzględnieniu elastyczności prętów. W miejsce określonego położenia chwiejnego, pod założeniem prętów sztywnych, mamy tu do czynienia z całym otoczeniem elastycznym tego

¹⁾ T. Levi-Civita: O wysiłku dynamicznym. Przegląd Techn. 1930. Najw. dynam. $y^* > y_1!$ — § 6 i 7.

położenia, a wielkość tego otoczenia jest zależna od wielkości siły jakiej można się spodziewać.

Także do więcej skomplikowanego przykładu rozważanego przez A. Föppl'a¹⁾, jak również do przykładu Crofton'a i innych można zasadę powyższego rozumowania zastosować.

Tem bardziej wydaje mi się rzeczą wartą trudu znaleźć przykłady ustrojów chwiejnych wyróżniające się postacią — że rozważanie takich nasunąć może myśli przydatne dla tłumaczenia zjawisk — nie tylko techniki lecz także przyrody organicznej, — pozornie zupełnie odrębnych.

Kierując się podanymi względami różnego rodzaju podaję przykład 13-boku stężonego prętami przekątnymi izostatycznie, to jest posiadającego 13 przegubów (węzłów):

$$a = 13$$

oraz 23 prętów

$$t = 23,$$

tak, że spełnia się warunek

$$t = 2a - 3.$$

Ustrój ten płaski posiada jedną oś symetrii, a przeguby jego leżą na intuicyjnie wyrysowanej krzywej wypukłej mającej kształt przekroju podłużnego kurzego jaja²⁾.

Proste i odrębne postępowanie wykreślne, oparte tylko na zasadzie statycznej wieloboku sił, daje taką szczególną postać opisanego ustroju, która jest chwiejna i dopuszcza układ sił wewnętrznych, nieokreślony co do absolutnej wielkości. Załączony rysunek (rys. 1) przedstawia tę właśnie szczególną postać oraz plan sił wewnętrznych w prętach, jakie mogą działać bez jakiegokolwiek wpływu sił zewnętrznych; (plan ten jest narysowany prawie do połowy — należy go sobie w myśli uzupełnić od dołu częścią symetryczną względem prostej Ol). Różnoimienne napięcia w prętach (t. j. ciągnięcia względnie ciśnienia) rozróżnione są w tym planie sił przez charakter odpowiednich linii kropkowanych czy też pełnych.

Sposób postępowania jest następujący. Obieramy oś symetrii przechodzącą pionowo przez węzeł 1 oraz przyjmujemy położenie symetrycznych par wierzchołków: 13,2; 12,3; 11,4; 10,5; 9,6; kreślimy pręty przekątne parami symetryczne 1—11, 1—4; 2—12, 13—3; 2—5, 13—10; 3—6, 12—9 oraz przyjmujemy parę prostych symetrycznych (4...7), (11...8) dla prętów przekątnych na których mają leżeć węzły 7, 8.

Zakładamy, że układ sił wewnętrznych w ustroju kratowym złożonym z prętów obwodu (1,2...13,1) oraz wymienionych prętów przekątnych ma być także symetryczny to jest, że odpowiednie siły

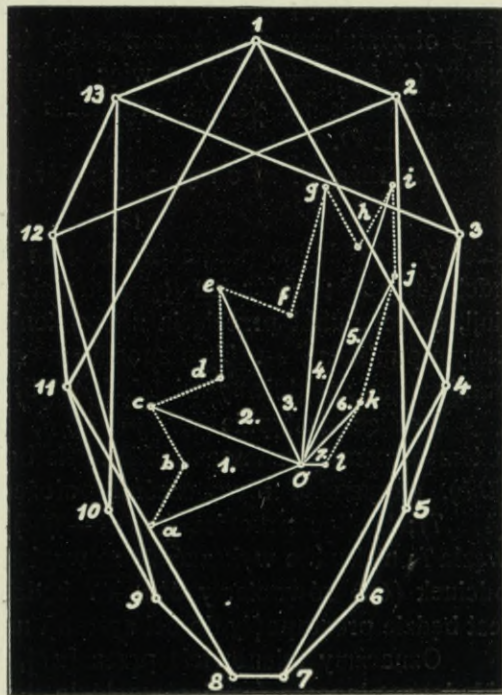
¹⁾ jak wyżej str. 2 [288] pod ²⁾.

²⁾ Zwrócić tu można uwagę jak czasem na pierwsze wejrzenie poczucie statyczne może w błąd wprowadzić.

w prętach symetrycznych mają być symetryczne. Skutkiem tego założenia węzły 7, 8 muszą wypaść symetrycznie, a bok zamykający $\overline{7-8}$ prostopadły do osi symetrii, która przejdzie środkiem między węzłami 7 i 8; także więc boki $\overline{6-7}$, $\overline{9-8}$ — których kierunków jeszcze nie znamy — muszą wypaść symetrycznie względem tej osi.

Okazuje się, że przy powyższych założeniach możemy jeszcze wyznaczyć położenie węzła 7 na danej prostej (4...7) (a tem samem i punktu 8) tak aby otrzymany ustrój dopuszczał układ nieokreślonych sił wewnętrznych w prętach, albo, jak się to inaczej mówi, mógł pozostawać w stanie samonapężenia; przy założonej izostaticzności jest to równoznaczne naogół¹⁾ z powiedzeniem, że ustrój, który mamy otrzymać będzie chwiejny.

Zgodnie z założeniami przyjmujemy w przekątniach węzła 1 siły wewnętrzne symetryczne, a więc o wartościach bezwzględnych równych (zresztą dowolnie obranej wielkości) i kreśliemy dla węzła 1 wielobok sił 1. Skutkiem przyjętych warunków symetrii prosta przez punkty b i O będzie osią symetrii wieloboku 1., w którym (bc) jest siłą wewnętrzną w przecię $\overline{1-4}$ przy węźle 1 i podobnie (ab) w $\overline{1-11}$, (eO) w $\overline{1-2}$ oraz (Oa) w $\overline{1-13}$. Z punktu O kreślimy pęk promieni równoległych do danych boków obwodu naszego ustroju tak, że promień $(i, i+1)$ oddzielający pole i . od pola $i+1$. jest równoległy do pręta łączącego węzeł i z węzłem $i+1$; położenie jednego promienia $(6, 7) \parallel \overline{6-7}$ (względnie jemu symetrycznego) pozostanie narazie nieokreślone.



Rys. 1.

¹⁾ W szczególnie wyjątkowych przypadkach można otrzymać nawet ustroje izostaticzne ruchome np. szczególny przypadek sześcioboku Pascal'a, gdy odpowiednie wierzchołki przystających i odpowiednio równoległych trójkątów są połączone zapomocą trzech prętów równej długości i równoległych.

Z warunku równowagi węzła 2 wynika w tych okolicznościach, że skoro tylko przyjmiemy wielkość odcinka (cd) oznaczającego siłę w przecie $\overline{2-12}$ to już przez to pozostałe boki odpowiedniego wieloboku sił 2. zostaną określone; przyjmujemy tedy na wielkość odcinka (cd) kolejno różne wartości (cd_1), (cd_2)... (cd_m); przyjąwszy jednak (cd_m) otrzymujemy ($d_m e_m$), a ze względu na symetrię także dalej dla węzła 3 odcinek ($e_m f_m$), którego wielkość bezwzględna $|e_m f_m| = |cd_m|$, a kierunek symetryczny; w następstwie tego otrzymamy ($f_m g_m$) a więc wielobok 3. dla węzła 3; przystępując teraz do węzła 4 mamy już ($g_m h_m$) = - (bc); kreśląc ($h_m i_m$) $\parallel \overline{4-7}$ aż do przecięcia z ($O i_m$) $\parallel \overline{5-6}$ otrzymujemy ($h_m i_m$) oraz ($O i_m$) to jest wielobok 4.; dla węzła 5 mamy ($i_m j_m$) = - ($d_m e_m$), a więc położenie punktu j_m , które nie wypadnie jednak naogół na promieniu ($\overline{5. 6.}$) równoległym do boku $\overline{5-6}$ przez O .

Dla różnych m otrzymamy zbiór punktów $\{j_m\}$:

$$j_1, j_2 \dots j_m$$

zależny od jednego parametru, którym jest obierana dowolnie długość odcinka (cd_m); zbiór ten $\{j_m\}$ będzie więc naogół leżał na pewnej linii, której punkt przecięcia z promieniem ($\overline{5. 6.}$) będzie właśnie szukanym punktem j —. Tym sposobem za pomocą podanego tu procesu granicznego znajdujemy wielobok sił 5. dla węzła 5 —.

Kreśląc następnie (jk) = - (fg) otrzymujemy promień ($\overline{6. 7.}$), a tem samem wyznaczamy kierunek boku $\overline{6-7} \parallel \overline{6. 7.}$ to jest do (Ok), otrzymując równocześnie położenie węzła 7 na danej prostej ($\overline{4...7}$); kreśląc nakoniec (kl) = - (hi) dostajemy wielobok sił 7. dla węzła 7; nietrudno wykazać, że ze względu na przyjęte warunki symetrii odcinek (Ol) równoległy do $\overline{8-7}$ będzie należał do prostej (bO), to jest będzie prostopadły do osi symetrii ustroju kratowego czyli poziomy.

Oznaczmy mianowicie przez $[ab]$, $[bc]$, $[cd]$ i t. d. odpowiednio składowe pionowe (czyli równoległe do osi symetrii ustroju) sił (ab), (bc), (cd) i t. d., to na podstawie przyjętych założeń symetrii i warunków równowagi (t. j. planu sił) mamy:

$$\begin{aligned} [kl] &= - [hi], & [jk] &= - [fg], & [ij] &= - [de], \\ [gh] &= - [bc], & [ef] &= - [cd], \end{aligned}$$

a skutkiem tego:

$$\begin{aligned} [bc] + [cd] + [de] + [ef] + [fg] + [gh] + [hi] + [ij] + [jk] + [kl] = \\ = [bl] \equiv 0, \end{aligned}$$

a więc punkty b , O , l leżą na jednej prostej prostopadłej do osi symetrii ustroju; ze względu na przyjętą symetrię układu sił wewnętrznych prosta pozioma przez punkty b , O , l , jest znowu osią symetrii planu sił.

Przesuwając miejsce węzła 6 (obrane poprzednio zgóry) na prostej stałej (3...6), a więc zmieniając jeszcze kierunek $\overline{5-6}$ || (5. 6.) (oraz czyniąc to samo z węzłem symetrycznym 9) i powtarzając podaną konstrukcję, otrzymamy cały pęk odpowiednich ustrojów chwiejnych, którego szczególnym przypadkiem jest właśnie ustrój przedstawiony na rysunku.

Ustrój otrzymamy oprócz tej osobliwości, że — chociaż izostyczny — dopuszcza układ nieokreślonych sił wewnętrznych, posiada jeszcze inną — wprawdzie nieosobliwą ale — skądinąd interesującą cechę, a mianowicie nie trudno zauważyć, że stosunek wielkości bezwzględnej siły wewnętrznej (Ol) w pręcie $\overline{8-7}$ do wielkości bezwzględnej siły wewnętrznej (Oi) w pręcie $\overline{4-5}$ względnie (Og) w $\overline{3-4}$ jest liczbą stosunkowo niewielką. Wywołując tedy niewielkie napięcie w pręcie $\overline{8-7}$ możemy już przekroczyć ewentualnie granicę wytrzymałości prętów $\overline{4-5}$ względnie $\overline{3-4}$, jeżeli ich wymiary nie są odpowiednio silniejsze.

Przypuśćmy, że wykonaliśmy rzeczywiście taki ustrój w ten sposób, że pręt $\overline{8-7}$ sporządzony został z materiału pęczniącego, to jest zwiększającego znacznie swoją długość gdy się znajdzie w środowisku wilgotnym, a oczka przegubów tego pręta zrobiliśmy wydłużone, aby kurcząc się nie wywoływał pociągnięcia przegubów 7 i 8 ku sobie, zaś inne pręty niech będą sporządzone z materiału nie posiadającego właściwości pęcznienia — to tak wykonany ustrój pozostawiony wpływowi pogody, jak długo będzie sucho pozostanie cały niejako zamknięty. Gdy jednak nastąpi czas wilgotny, pręt $\overline{7-8}$ pęczniąc wywoła stan wewnętrznej napięcia, które w odpowiedniej chwili pociągnie za sobą pęknięcie prętów wielokrotnie więcej wyężonych jak np. $\overline{4-5}$, $\overline{11-10}$ względnie $\overline{3-4}$, $\overline{12-11}$, jeżeli ich rozmiary poprzeczne (moc) odpowiednio w tym celu były dobre.

Nasuwa się tu obraz z dziedziny przyrody organicznej. Wiele osłon nasion, rzuconych ręką siewcy w ziemię, osłania mocno tkwiące wewnątrz nasienie; jednak gdy deszcz i wilgoć stworzą odpowiednie dla rozwoju warunki osłona pęka pozwalając nasieniu, w odpowiedniej chwili, szybko rozwinąć korzenie i pędy. —

Już staroegipska opowieść o kwiecie lotosu zawiera myśl podobną!

Przedstawienie zmiany naprężeń skrajnych podczas powstawania wyboczenia.

Niechaj σ_m , σ_w oznaczają naprężenia normalne we włóknach skrajnych pręta, a P niech oznacza (dodatnią) wartość siły ściskającej osiowo ten pręt z tym ograniczeniem, że nie może ona zbyt przewyższać oznaczonej wartości $\min P$, przy której może dopiero rozpocząć się wyboczenie t. j. boczne wygięcie pręta.

Założmy że

$$\sigma_m \leq \sigma_w,$$

przyczem nierówność zachodzić będzie, gdy już nastąpiło wyboczenie; gdyby jednak pręt pozostawał prosty (t. j. strzałka $f=0$) zachodzić ma równość:

$$\sigma_m = \sigma_w, \quad (f=0).$$

Gdy wartość siły P zmieniać się będzie, będą się zmieniać odpowiednio także wartości naprężeń powyższych, tak, że możemy je uważać za funkcje wartości tej siły to jest:

$$\sigma_m = \sigma_m(P), \quad \sigma_w = \sigma_w(P).$$

Gdybyśmy chcieli badać zmiany któregokolwiek z powyższych naprężeń zanim wyboczenie nastąpiło, to powinniśmy porównywać wartości tych naprężeń odpowiadające różnym P'_1 , P'_2 wartościom siły P spełniającym relację:

$$P'_1 < P'_2 \leq \min P.$$

Gdybyśmy przeciwnie chcieli badać te zmiany w obszarze, w którym wyboczenie może się objawić, to musielibyśmy porównywać wartości naprężeń odpowiadające różnym wartościom P''_1 , P''_2 spełniającym relację:

$$\min P < P''_1 < P''_2.$$

Skoro nam jednak chodzi o zbadanie jakim zmianom ulegają naprężenia podczas powstawania wyboczenia, to wówczas interwał zmienności siły P musi zawierać wartość $\min P$; inaczej mówiąc wartości P_1 , P_2 , którym odpowiadające naprężenia mamy

teraz porównywać, muszą spełniać relację:

$$P_1 < \min P < P_2 \dots \dots \dots (1)$$

ze względu na to że interwał

$$\overline{dP} = P_2 - P_1$$

musi wobec (1) obejmować wartość $\min P$, nazywamy odpowiadającą mu zmianę naprężeń $\overline{d\sigma_m}$: zmianą ostateczną.

Przedstawienie, o które tu chodzi odnosi się właśnie do tego ostatniego przypadku.

Oznaczając

$$d_1 P = \min P - P_1 > 0, \quad d_2 P = P_2 - \min P > 0 \dots \dots (2)$$

zresztą — narazie — dowolnie małe, mamy

$$\overline{dP} = d_1 P + d_2 P > 0 \dots \dots \dots (3)$$

gdzie kreska pozioma nad znakiem dP zaznacza, że nie mamy tu do czynienia ze symbolem różniczkowym w zwyczajnym sensie t. j. z (dowolnie małym) interwałem w dowolnym miejscu obszaru zmienności P , lecz przeciwnie z symbolem różniczkowym lokalnym, a w szczególności z interwałem, który zresztą dowolnie zmniejszać możemy, pod warunkiem (1), (2), (3), aby obejmował (wewnątrz) zupełnie określoną wartość siły P , a mianowicie $\min P^1$.

Odpowiadającą \overline{dP} ostateczną zmianę naprężeń $\overline{d\sigma_m}$ charakteryzujemy wartością stosunku

$$\frac{\overline{d\sigma_m}}{\overline{dP}},$$

zachowującego sens, dla dowolnie małego \overline{dP} , przyczem według poprzedniego:

$$\overline{d\sigma_m} = \sigma_m(\min P + d_2 P) - \sigma_m(\min P - d_1 P).$$

W przypadku, w którym — po przekroczeniu wartości $\min P$ — dopuszczamy wyboczenie, wyżej określona zmiana naprężeń (obliczona po Navier'owsku) charakteryzuje się zapomocą znanego wzoru ²⁾:

$$(94 \text{ w.}) \quad \frac{\overline{d\sigma_m}}{\overline{dP}} = \frac{1}{A} (+) 2\xi \frac{e_m}{i} \sqrt{\frac{2E}{A}}, \quad \text{gdzie} \quad \xi = \frac{\sqrt{d_2 P}}{\overline{dP}},$$

¹⁾ Oczywiście także $d_1 P$, $d_2 P$ posiadają charakter lokalny.

²⁾ K. F. Vetulani: W sprawie wyboczenia. Czas. Techn. 1930, 10 i 25 lipca, str. 233—256, Lwów. Wzory stamtąd przytoczone oznaczone są literą (w) .

Jeżeli chcemy obliczyć dalszy przebieg naprężeń przy małej strzałce wyboczenia \bar{j} , to możemy wziąć wartość \bar{j} ze wzoru (54) (tamże) przy danym \overline{P} nie wiele większym od $\min P$, rachując jak przy ekscentrycznym ściskaniu.

przy oznaczeniach:

A — pole przekroju normalnego w chwili $\min P$.

i — ramię bezwładności tegoż przekroju.

e_m — odpowiednie odstępów włókien skrajnych od środka pola przekroju A .

$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ w miejscu $\sigma = \frac{\min P}{A}$, gdzie ε oznacza skrócenie jednostkowe dla tego σ .

Niech będzie ξ określenia (wielkość dodatnia)

$$(95 \text{ w.}) \quad \xi_0 = \frac{1}{2} \frac{i}{e_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{2EA}}$$

tą wartością szczególną ξ przy której prawa strona wyrażenia (94 w.) staje się równą zero to wówczas

$$(96 \text{ w.}) \quad \text{przy } 0 \leq \xi < \xi_0 \text{ mamy } \frac{\overline{d\sigma_m}}{dP} > 0.$$

Założmy dla prostoty

$$e_m = e_w = e \quad \dots \quad (4.1)$$

wówczas wzór (94 w.) napisany w postaci równowartej:

$$\overline{d\sigma_m} = \frac{1}{A} (d_1 P + d_2 P) (\overline{+}) 2 \frac{e}{i} \sqrt{\frac{2E}{A}} \cdot \sqrt{d_2 P} \quad \dots \quad (4.2)$$

dopuszcza dla tej ostatniej postaci (4.2) w układzie prostokątnym (P, σ) przedstawienie wykresne za pomocą prostej QR i paraboli pRp , jak to pokazano na załączonym rys. 1. Elementarne uzasadnienie słuszności tego przedstawienia można pominąć.

W szczególności część QR prostej ss , której równaniem jest:

$$\sigma = \frac{P}{A},$$

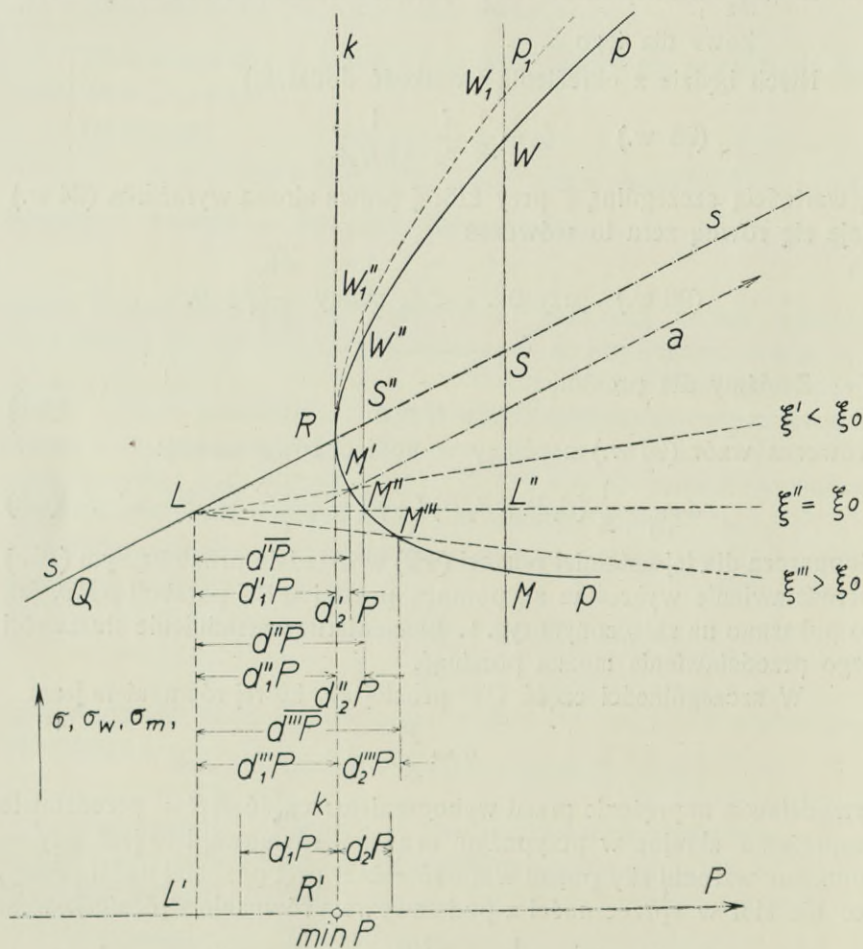
przedstawia naprężenia przed wybozczeniem; część $RS \rightarrow$ przedstawia naprężenia skrajne w przypadku meta — równowagi to jest, gdy — pomimo wzrostu siły ponad wartość $\min P$ pręt pozostał nadal prosty, co nie stoi w sprzeczności z podstawowem równaniem różniczkowem

$$(3 \text{ w.}) \quad \frac{1}{\rho} = - \frac{Py}{EI}, \text{ gdzie } I = Ai^2,$$

posiadającym całkę $y = 0$ dla wszelkich wartości P . Pozatem — obierając za początek układu $(\overline{dP}, \overline{d\sigma})$ punkt L o współrzędnych: $(\min P - d_1 P), \sigma(\min P - d_1 P)$ — osiągamy to, że prosta ss przedstawia nam w tym układzie $(\overline{dP}, \overline{d\sigma})$ człon pierwszy prawej strony wyrażenia (4.2); człon drugi przedstawiają rzędne (półśrednice) SM względnie SW paraboli pRp mierzone od prostej ss w kierunku osi σ ,

a mianowicie ujemnemu znakowi odpowiada gałąź dolna RMp przedstawiająca σ_m względnie $d\sigma_m$, dodatniemu zaś część górna RWp przedstawiająca (pod założeniem 4.1) σ_w względnie $d\sigma_w$ — gdy wyoczenie dopuszczamy.

Przypuśćmy teraz, że porzucamy założenie upraszczające (4.1) oraz, że dolna część paraboli pRp (pod prostą ss) wykreślona była



Rys. 1.

j. w. dla $e = e_m$; wtedy gałąź dolna RMp nie przestanie nadal przedstawiać σ_m ; chcąc teraz jednak przedstawić przebieg naprężenia σ_w , gdy $e_w \neq e_m = e$ musimy rzędne SW paraboli pRp względem prostej ss zmienić w stałą stosunku:

$$\frac{e_w}{e_m};$$

otrzymamy w ten sposób zamiast RWp nową gałąź RW_1p_1 paraboli (innej), której punkty W_1 będą określone zapomocą związku

$$SW_1 = \frac{e_w}{e_m} SW, \text{ gdzie } |SW| = |SM| \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nie trudno wykazać, że gałąź RW_1p_1 i parabola pRp mają w punkcie R wspólną styczną, a mianowicie prostą $kk || \sigma$.

Różnica rzędnych punktów M' , M'' , M''' i punktu L przedstawia ostateczną zmianę naprężenia σ_m odpowiednio gdy $\xi < \xi_0$, albo $\xi = \xi_0$ względnie $\xi > \xi_0$ przy dowolnie zgóry obranem d_1P to jest

$$d'_1P = d''_1P = d'''_1P.$$

Z położenia wzajemnego prostej ss i gałęzi parabolicznej RMp [zgodnie z (4.2) względnie (94 w.)] otrzymuje się wniosek, że podobne punkty M'_r , M''_r , M'''_r dla których ξ spełnia zadane związki można wyznaczyć dla każdej dowolnie małej wartości d_1P , której będzie odpowiadał jakiś punkt L_r o rzędnej $L'_r L_r < R'R = \frac{\min P}{A}$.

Gdy chcemy doświadczalnie badać powstawanie wyboczenia, to musimy zwiększyć siłę od jakiejś wczesniejszej wartości $P_1 < \min P$, odpowiadającej jakiemuś punktowi L ryciny aż do późniejszej wartości $P_2 > \min P$, odpowiadającej jakiemuś punktowi M .

Przy każdym jednak eksperymencie tego rodzaju — jakkolwiek małą obralibyśmy odległość punktów LR (a więc i $d_1P > 0$) zanim dojdziemy do punktu w rodzaju M''' , — któremu odpowiada $\xi > \xi_0$ — musimy przedtem przejść przez punkt w rodzaju M' — któremu odpowiada $\xi < \xi_0$; w granicy otrzymamy jakiś punkt M'_{gr} dostatecznie bliski punktowi R .

Atoli punkty M odpowiadają fizycznemu stanowi pręta, który to stan jest następstwem (w czasie) i skutkiem tego, że wyboczenie już się rozpoczęło było; nie można przeto ewentualnych odmiennych właściwości fizycznych materiału jakieby mogły się objawić jako charakterystyczne dla tego późniejszego stanu — a więc np. zmiany modułu E przez odciążenie włókien skrajnych e_m — brać za warunek powstania (który to moment wyprzedza ów stan) wyboczenia, zaczynającego się już w punkcie R , któremu odpowiada wartość siły mniejsza i wczesniejsza niż jakiegokolwiek z punktów M .

Postępując przeciwnie¹⁾ — to jest zaliczając pojawienie się różnych wartości modułu włókien e_m od modułu włókien e_w , które może charakteryzować stan fizyczny pręta wyboczonego po przekro-

¹⁾ Porównaj K. F. Vetulani: W sprawie wyboczenia II. Czasopismo Techn., Łwów 1931, str. 65—67.

czeniu granicy sprężystości, między przyczyny warunkujące moment powstania wyboczenia (obliczenie wartości $\min P$), który poprzedza następujący stan wyboczenia — postępujemy wbrew zasadzie przyczynowości orzekającej, że przyczyna poprzedza skutek — i otrzymujemy sprzeczność zasadniczą.

Bez popadnięcia w sprzeczność z poprzednim rozumowaniem można na podstawie dotychczasowych danych o zachowaniu się ciał przy czystym ściskaniu w otoczeniu punktu kulminacyjnego siły ściskającej (t. j. w którym siłę ściskającą poprzednio wzrastającą zaczynamy bez przerwy w dalszym ciągu zmniejszać) przewidywać, że po przekroczeniu granicy sprężystości przez $\sigma = \frac{\min P}{A}$ dalszy przebieg naprężeń skrajnych w stanie wyboczenia już w najbliższej (dodatniej) okolicy poza punktem R t. j. przy $d_2 P > 0$ choćby bardzo małym może odbiegać od obrazu przedstawionego na rysunku¹⁾. Tego bowiem zjawiska, które nastąpiło już po powstaniu wyboczenia nie mamy podstawy wiązać z przyczynami z których mamy wyprowadzić warunek do oznaczenia momentu powstania wyboczenia.

Wydaje mi się, że badania roentgenograficzno- strukturalne będą w stanie tą sprawę w niedługim czasie przedstawić w bardziej określonej niż dotychczas postaci. Można przypuszczać, że naświetlanie wiązką bardzo silną²⁾ promieni Roentgena — padających pod ostrym kątem na płaszczyzny włókien skrajnych pręta tylko ściskanego raz przed kulminacją siły, drugi raz po kulminacji (t. j. podczas zmniejszania siły), a w obu wypadkach przy tych samych wartościach skrócenia jednostkowego ε — pozwoli przez oznaczenie struktury w każdym z tych wypadków oznaczyć odpowiednie wartości naprężenia σ oraz modułu E i wyznaczyć tem samem dokładny przebieg obu zależności między σ a ε w okolicy punktu kulminacyjnego siły t. j. zależności $C(\sigma, \varepsilon) = 0$ dla rosnących wartości siły (obciążenie) oraz zależności $D(\sigma, \varepsilon)$ dla malejących wartości siły (odciążenie).

Rozumowanie tutaj przeprowadzone na początku tego ustępu nakazuje przewidywać pewną określoną cechę, jaką rezultat wskazanych ostatnio badań roentgenograficzno- strukturalnych posiadać powinien; cechą tą jest: styczna wspólna dla obu krzywych: $C(\sigma, \varepsilon) = 0$

¹⁾ Porównaj str. 2 [296] pod ²⁾.

²⁾ Aby przez krótkotrwałość zdjęcia uchylić wpływ relaksacji, który w przeciwnym wypadku wywołałyby zatarcie się obrazu Laue'go. Ewentualnie wypadnie wykonywać zdjęcia momentalne z obrazu na ekranie fluoryzującym. Porównaj ostatni ustęp pracy cytowanej na str. 2 [296] pod ²⁾, a także str. 7 [149] w pracy Prof. M. T. Hubera w tej księdze.

Literatura dotycząca patrz: Z. f. Kristallogr. 61, str. 389–424, r. 1925. Porównaj także Z. f. Metallk. ost. roczn. prace Czochralskiego, Schiebold'a i innych.

i $D(\sigma, \varepsilon) = 0$ w punkcie σ_k, ε_k odpowiadającym punktowi kulminacyjnemu siły ściskającej. Mając rezultaty takich eksperymentów będziemy — przypuszczalnie — mogli metodą porównawczą oznaczyć doświadczalnie przebieg naprężeń skrajnych w dalszym stadium właściwego wybozczenia także wtedy, gdy ono następuje po przekroczeniu granicy sprężystości.

Zupełnie inaczej przedstawia się sprawa, gdy chcemy zbadać możliwość zniknięcia wybozczenia już wywołanego; tutaj możemy zgóry zgodnie z uznaniami właściwościami materiałów przewidzieć wynik: jak długo nie przekroczyliśmy granicy sprężystości pręt powróci do pierwotnej prostej postaci gdy $P_2 > \min P$ zmniejszymy do wartości niewiększej niż $\min P$; skoro jednak raz granica sprężystości została przekroczona i wygięcie posiada część plastyczną to, pomimo zupełnego odciążenia, pręt pozostanie wybozczony t. j. krzywy i do postaci prostej nie wróci; zjawiska wygięcia bowiem po przekroczeniu granicy sprężystości stają się nieodwracalne pomimo zupełnego odciążenia. Badając optycznie (w świetle spolaryzowanym) pręt który pozostał wybozczony — po odciążeniu — możemy wykryć granicę między obszarem który uległ zmianom plastycznym, a obszarem który ewentualnie takim zmianom nie uległ, co może zajść gdy materiał posiada wybitną (ostrą) granicę sprężystości i wybozczenie rozpoczęło się właśnie przy wartości siły odpowiadającej tej granicy. Przy prętach nieprzezroczystych użycie zwykłego światła jest tu wykluczone. Rezultat, który mi się udało znaleźć już podczas druku tej książki, a mianowicie¹⁾ że

$$\left. \begin{array}{l} \text{gdy } \bar{P} = \min P + d_2 P > \min P, \\ \text{to } N_1 = \min P - 7 d_2 P - \dots < \min P \end{array} \right\} \dots \dots (6)$$

(gdzie N_1 wyraża wartość siły podłużnej: $\bar{P} \cos \bar{\alpha}$ na końcach pręta, albo w punktach przegięcia przy wybozczeniu wielokrotnym, a \bar{P} jest oczywiście równe sile podłużnej w środku, względnie w miejscach największego wygięcia pręta), pozwala przewidzieć ogólną postać obszaru, który ulegnie zmianom plastycznym w ostatnim przypadku. Jeżeli po wykonaniu odnośnego eksperymentu przekroimy pręt wzdłuż w płaszczyźnie w której przebiegało wybozczenie (wygięcie) i przekrój ten odpowiednio potraktujemy (np. wytrawimy) to powinniśmy ujrzeć wewnątrz takiego przekroju wijącą się wstęgę obszaru zmienionego, która dotykać będzie brzegów podłużnych przekroju tam gdzie były przy zgięciu miejsca największej wklęsłości i w ich sąsiedztwie.

¹⁾ K. F. Vetulani: Wartość siły podłużnej podczas powstawania wybozczenia. Warszawa 1931, Przegląd Techniczny, str. 257, (4).

INŻ. DR. K. WEIGEL
Profesor Politechniki Lwowskiej

Przyczynek do tyczenia łuków kołowych metodą obwodową.

Przy tyczeniu łuków kołowych metodą obwodową (biegunową) w terenie górskim lub podgórskim należy do rzadkości, aby można było wytyczyć cały łuk z jednego punktu jego obwodu; natomiast znacznie łatwiej można to uczynić z punktów, leżących wewnątrz lub zewnątrz pola koła. Okoliczność ta nasuwa myśl tyczenia łuków powyżej zaznaczoną metodą z punktów nieleżących na obwodzie koła.

Dla zrealizowania tego zadania podaję dwa sposoby w zależności od tego, czy stanowisko, z którego tyczymy, znajduje się *a)* bliżej obwodu, czy też *b)* bliżej środka koła.

Zarazem zaznaczam, że wszystkie wzory, podane przeze mnie są z wyjątkiem pierwszego (1) i ósmego (8) tak ułożone, aby je można było obliczać w polu przy pomocy tablic do tyczenia łuków i tablic, zawierających naturalne wartości funkcji trygonometrycznych kątów (sec. cosec. tg. ctg.), kwadraty liczb i t. p.

a)

Pierwszą czynnością w obu przypadkach *a)* i *b)* jest ustalenie położenia obranego jako stanowisko przyrządu O' względem jednego z głównych punktów łuku P i stycznej w nim poprowadzonej.

Ustalenie położenia punktu O' następuje najprościej przy użyciu odległownic nowych typów np. Bosshardta lub Wilda, przez zmierzenie optyczne odległości $PO' = r_0$ i kąta φ , zawartego między styczną w punkcie P , a kierunkiem PO' , jak to uwidoczniło na rys. 1.

Z trójkąta $PO'O$ oblicza się $e = O'P'$, najkrótszą odległość punktu O' od obwodu (p. P') wzorem:

$$e = r_0 \frac{\sin\left(\varphi - \frac{\psi}{2}\right)}{\cos \frac{\psi}{2}} \dots \dots \dots (1)$$

a następnie obliczamy przy pomocy rachunkowo łatwego wzoru różnicę $\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha'}{2}\right)$: $\text{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha'}{2}\right) = 2 \frac{r}{e} \text{tg} \frac{\alpha}{2} - \text{tg} \frac{\alpha'}{2}, \dots (5)$

przyczem $\frac{\alpha'}{2}$ należy, uwzględniając znak, odciąć od kierunku $O'N$ prostopadłego do $O'P'$ (jak to uwidoczniło na rys. 1).

Stacjonowanie łuku przebiega zatem od punktu P' zaś tyczenie od kierunku $O'N$ (dla którego $\frac{\alpha'}{2} = 0$).

Dla zbadania dokładności powyższej metody w porównaniu z normalną, należy zrobić pochodną $\frac{d\alpha}{d\alpha'}$ względnie jej odwrotność $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$; pochodna ta pouczy nas, jaki wpływ będzie miał błąd, popełniony przy odcięciu kąta $\frac{\alpha'}{2}$ na kąt $\frac{\alpha}{2}$, (którybyśmy wytyczyli wprost metodą normalną).

Różniczkując wzór (5) otrzymujemy:

$$-\frac{d\alpha - d\alpha'}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)} = \frac{2r - e}{e} \frac{d\alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \dots (6)$$

$$d\alpha' = \left\{ 1 + \frac{2r - e}{e} \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right\} d\alpha,$$

a ponieważ $1: \sin^2\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right) = 1 + \text{ctg}^2\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right) = 1 + \left(\frac{2r - e}{e}\right)^2 \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$, przeto ostatecznie:

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 1 + \frac{\frac{2r - e}{e}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{2r - e}{e}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \dots (7)$$

Poniżej zestawiono wartości $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ i $\frac{d\alpha}{d\alpha'}$ dla kilku specjalnych wartości $\frac{\alpha}{2}$. (Tabela 1).

Okazuje się tedy, że — o ile popełnimy przy wytyczaniu kąta $\frac{\alpha'}{2}$ błąd $d\alpha'$ — powstanie przez to w kącie obwodowym (którybyśmy wytyczali metodą normalną) błąd $d\alpha$, wynoszący dla $\frac{\alpha}{2}$ bliskiemu zeru $\dots \frac{e}{2r} d\alpha'$, dla $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} \dots \frac{1}{2} d\alpha'$, zaś dla $\frac{\alpha}{2}$ bliskiemu 90° , błąd $d\alpha = \left(1 - \frac{e}{2r}\right) d\alpha'$.

Tabela 1.

$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha'}{2}$	$\frac{\alpha - \alpha'}{2}$	$\frac{d\alpha'}{d\alpha}$	$\frac{d\alpha}{d\alpha'}$	UWAGA
0°	$270^\circ = -90^\circ$	90°	$\frac{2r}{e}$	$\frac{e}{2r}$	$(\alpha_0$ jest kątem środkowym dla łuku $P'N$)
$\frac{\alpha_0}{2}$	0°	$\frac{\alpha_0}{2}$	2	$1/2$	
90°	90°	0°	$\frac{2r}{2r-e}$	$1 - \frac{e}{2r}$	

Metoda ta jest zatem korzystniejszą od metody normalnej, o ile tylko kierunek $P'N$, wytyczono dokładnie, co wymaga, aby długość r_0 była przynajmniej około 20 do 30 m. W praktyce da się to osiągnąć i wówczas, gdy punkt P nie jest dostatecznie oddalony od punktu O' przez nawiązanie się kierunkowe na punkcie O' nie do kierunku $O'P$, ale do kierunku, łączącego O' z dość odległym punktem kierunkowym na stycznej w P . (Naturalnie, że wymaga to pewnych dodatkowych obliczeń jednak stosunkowo bardzo prostych).

Nakoniec zaznaczam, że kąty należy liczyć w kierunku posuwania się wskazówek zegarów, aby podawane wzory były zawsze ważne.

b)

Omówmy teraz przypadek drugi, t. j. gdy stanowisko przyrządu O' znajduje się bliżej środka niż obwodu koła.

Nasamprzód obliczamy ψ z wzoru (2) i wytyczamy kierunek $O'P'$. Następnie należy wyrachować odległość

$$OO' = m = r_0 \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} = r \frac{\cos \varphi}{\cos(\psi - \varphi)}, \quad \dots \quad (8)$$

którą, o ile nie wypadnie w równych metrach, zmienia się tak (przez przesunięcie punktu O' w kierunku $O'P'$), aby stosunek $\frac{r}{m}$ wyrażał się liczbą całkowitą.

Długość łuku PP' otrzymujemy jak poprzednio z tablic dla argumentu ψ .

Przy wytyczaniu poszczególnych punktów należy użyć najlepiej wzoru, określającego różnicę kątów α' i α :

$$\operatorname{ctg}(\alpha' - \alpha) = \frac{r - m \cos \alpha}{m \sin \alpha} = \frac{r}{m} \operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha \quad \dots \quad (9)$$

Poniżej uwidoczniła tabela 2, uwzględniająca pewne charakterystyczne przypadki, poucza nas w tej sprawie następująco:

Tabela 2.

α	α'	$\alpha' - \alpha$	$\frac{d\alpha'}{d\alpha}$	$\frac{d\alpha}{d\alpha'}$	UWAGA
0°	0°	0°	$\frac{r}{r-m}$	$1 - \frac{m}{r}$	Kąty małe ($\alpha' - \alpha$) dla małych α należy liczyć wedle wzoru $\operatorname{ctg}(\alpha' - \alpha) = \frac{r - m \cos \alpha}{m \sin \alpha}$ lub bardzo małe z wzoru $\alpha' = \frac{r}{r-m} \alpha$.
α_0	90°	$90^\circ - \alpha_0$	1	1	(por. uwagi na str. 5 oraz przykład na str. 8).
90°	α'_0	$\alpha'_0 - 90^\circ$	$\frac{r^2}{r^2 + m^2}$	$1 + \left(\frac{m}{r}\right)^2$	α_0 jest kątem środkowym dla łuku $P'N$.
180°	180°	0°	$\frac{r+m}{r}$	$1 + \frac{m}{r}$	$\operatorname{tg} \alpha'_0 = -\frac{m}{r}$

Widzimy, że i w przypadku *b*) tyczenie łuku na części łuku $P'N$ jest korzystniejsze, niż gdyby to miało miejsce ze środka koła (teoretycznie punktu najkorzystniejszego przy wytyczaniu łuków o małych promieniach, w praktyce jednak nadającego się do powyższego celu tylko w bardzo wyjątkowych warunkach).

Tyczenie z punktu mimośrodkowego O' części łuku poza punktem N jest wprawdzie nieco mniej korzystne niż tyczenie tego samego łuku ze środka koła, różnice dokładności są tu jednak minimalne dla praktyki. W każdym razie widać, że tyczenie łuku z punktu znajdującego się wewnątrz pola koła jest zawsze korzystniejsze, niż tyczenie tego samego łuku z obwodu.

Na zakończenie podaję dwa przykłady dla lepszego zaznajomienia się z praktyczną stroną podanej tu metody. Przykład *a*) odnosi się do sposobu podanego pod *a*), przykład *b*) do sposobu opisanego pod *b*).

$$a). \quad r = 100 \cdot 0 \text{ m}, \quad r_0 = 40 \cdot 0 \text{ m}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

Z wzoru (2) obliczamy

$$\operatorname{ctg} \psi = 2 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 7320 = 3 \cdot 2680, \quad \psi = 17^\circ 0' 49'', \quad \frac{\psi}{2} = 8^\circ 30' 24'' \cdot 5,$$

następnie z wzoru (1)

$$e' = \frac{\sin 51^\circ 29' 35'' \cdot 5}{\cos 8^\circ 30' 24'' \cdot 5} 40 = 31 \cdot 75 \text{ m}.$$

Dla ustalenia kierunku $O O'$ wytyczamy punkt M (poza obwodem koła) odmierzając od kierunku $O'P$ kąt $90^\circ + \psi - \varphi = 47^\circ 0' 49''$. Od

punktu O' odmierzamy w kierunku do M $1.75 m$, skracając długość e' do $e = 30 m$.

W ten sposób otrzymujemy właściwe stanowisko przyrządu (O'), z którego nastąpi tyczenie łuku.

Założmy, że punkt P leży $3220.18 m$ od początku trasy, natenczas punkt P' będzie leżał dalej o długość łuku PP' , którą otrzymujemy — jak zazwyczaj — z tablic dla argumentu ψ :

$$PP' = 100 \cdot 0.29695 = 29.70 m.$$

Zatem P' leży $3249.88 m$ od początku trasy.

Następnie należy jeszcze wyznaczyć położenie punktu N , odcinając na kierunku wytyczonym w (O') pod kątem prostym długość [wedle (3)]: $(O')N = \sqrt{30.170} = 71.414 m$.

Ze wzoru (4) otrzymujemy dalej $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{71.414}{90} = 0.7935$, $\alpha_0 = 38^\circ 26'$ oraz łuk $PN = PP' + P'N = 100 \cdot 0.96773 = 96.77 m$. Zatem punkt N leży $3316.95 m$ od początku trasy.

Teraz następuje tyczenie pośrednich punktów łuku. Założmy, że mamy wytyczyć punkty łuku: $3.2 km + 60.0 m$, $+ 70.0 m$, $+ 80.0 m$ i t. d.

Nasamprzód należy obliczyć kąty środkowe względnie obwodowe i cięciwy, odpowiadające długościom łuku $10.12 m$ i $10.0 m$ (z tablic).

Dla $10.12 m$ wynosi $\frac{\alpha}{2} = 2^\circ 53' 56''$, $\alpha = 5^\circ 47' 52''$, $d = 10.116 m^1$,

zatem $\operatorname{ctg} \frac{\alpha - \alpha'}{2} = 2 \frac{10}{3} 0.05064 - 0.05064 = 0.28696$

$$\frac{\alpha - \alpha'}{2} = 73^\circ 56', \quad \frac{\alpha'}{2} = -71^\circ 02' \text{ (zaokr.)}$$

Zwracamy zatem lunetę o $71^\circ 02'$ od kierunku do N w sensie przeciwnym posuwania się wskazówek zegarów, lub dodajemy do kierunku ($O')$ M kąt $18^\circ 58'$ otrzymując kierunek do punktu 1. Tyczenie punktów następnych odbywa się następująco. Długości łuku $10.0 m$ odpowiada kąt obwodowy $2^\circ 51' 53''$, środkowy $5^\circ 43' 46''$, $d = 9.996 m^1$, natomiast $\frac{\alpha}{2} = 2^\circ 53' 56'' + 2^\circ 51' 53'' = 5^\circ 45' 49''$,

zatem $\operatorname{ctg} \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{20}{3} 0.10075 - 0.10075 = 0.57085$,

$$\frac{\alpha - \alpha'}{2} = 60^\circ 17', \quad \frac{\alpha'}{2} = -54^\circ 31' \text{ (w zaokr.)}$$

¹⁾ Zamiast obliczać d przy pomocy tablic, przyczem trzeba nieraz dokonać interpolacji, która dokonywana w polu może się stać powodem błędu, można długość d obliczyć bardzo dokładnie z różnicy:

$$l - d = \frac{l}{24} \left(\frac{l}{r}\right)^2 = 0.0417 l \left(\frac{l}{r}\right)^2.$$

Patrz: Podręcznik Inżynierski, Lwów-Warszawa 1926, zeszyt 8, str. 445, „Wytyczenie punktów pośrednich łuków kołowych“ przez autora.

Tyczenie punktów dalszych jest analogiczne do tyczenia punktu ostatniego.

Kontrola, obliczonych wzorem (5) kątów $\frac{\alpha'}{2}$, polega na spełnieniu warunku:

$$\frac{r-e}{r} = \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\alpha'}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha'}{2}},$$

który dla ostatniego punktu opiewa $0.7 = \approx 0.6995$, jest zatem dostatecznie dokładnie spełniony.

$$b) \quad r = 100.0 \text{ m}, \quad r_0 = 60.0 \text{ m}, \quad \varphi = 75^\circ 31' 20''.$$

$$\text{ctg } \psi = \frac{10}{6} \cdot 4 - 3.8729 = 2.7937; \quad \psi = 19^\circ 41' 40'',$$

$$m' = 60 \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} = 100 \frac{\cos \varphi}{\cos(\psi - \varphi)} = 44.54 \text{ m}.$$

Następuje wytyczenie kierunku $O'P'$ przez dodanie do kierunku $O'P$ kąta $90^\circ - \varphi + \psi$ i odmierzenie na nim długości $r - m' = 55.46 \text{ m}$ t. j. ustalenie położenia punktu P' . Teraz należy m' zmienić na dogodniejsze do rachunku $m = 40.0 \text{ m}$ przez przesunięcie punktu O' o 4.54 m w kierunku do O , t. j. do punktu (O'), z którego nastąpi wytyczenie punktów pośrednich łuku. Długość łuku $PP' = r \frac{\pi}{180^\circ} \psi = 34.37_3 \text{ m}$. Postępowanie dalsze jak w przypadku $a)$. Załóżmy, że pierwszy punkt łuku ma być 10 m odległy od P' . Łukowi o długości 10 m odpowiada dla $r = 100 \text{ m}$ kąt środkowy $\alpha = 5^\circ 43' 46''$, $d = 9.996 \text{ m}$, $\text{ctg}(\alpha' - \alpha)$ obliczamy ze względu na mały kąt α z wzoru

$$\frac{r - m \cos \alpha}{m \sin \alpha} = 15.05, \quad \alpha' - \alpha = 3^\circ 48', \quad \alpha' = 9^\circ 31' 46''.$$

Dla wytyczenia drugiego punktu odległego od P' o 20 m , obliczamy

$$\alpha = 11^\circ 27' 32'', \quad \text{ctg}(\alpha' - \alpha) = \frac{10}{4} 5.0337 - 4.9260 = 7.660,$$

$$(\alpha' - \alpha) = 7^\circ 27', \quad \alpha' = 18^\circ 53' 32'' \text{ i t. d.}$$

Kontrola dla ostatnio wytyczonego punktu $\frac{m}{r} = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin \alpha}$ daje: $0.4 = \approx 0.3996$, zatem zgodność zadawalniająca.

Reasumując raz jeszcze zalety i ujemne strony obu tu przytoczonych metod, należy zaznaczyć, że metoda $a)$ nadaje się lepiej dla praktyki, tak ze względu na mniejszą odległość między inżynierem i figurantem (łatwiejsze porozumienie), jak i fakt, że nie potrzeba tu zwracać uwagi na bardzo małe kąty α , co ma miejsce przy metodzie $b)$ i może okazać się czasem kłopotliwym.

jednorodnej funkcji sił drugiego stopnia:

$$V = \Sigma k \cdot P_i^2 + \Sigma k_1 \cdot P_i P_j \dots \dots \dots (2)$$

gdzie współczynniki k i k_1 nie są zależne od sił.

Z drugiej strony, ilość energii sprężystej nagromadzonej w danej konstrukcji, wyrazić możemy zapomocą wzoru:

$$V = \int V_1 dx dy dz \dots \dots \dots (3)$$

gdzie V_1 wyraża ilość energii nagromadzonej w sześcianie o krawędzi równej 1, wyjętym z odkształconego ciała, a wielkości dx , dy , dz wyrażają długości krawędzi nieskończenie małego prostopańdłocianu.

Równanie (3) wypływa bezpośrednio z określenia energii sprężystej jednostkowej i z przyjętego naogół w statyce, a omówionego wyżej, sposobu wzrastania sił P i wobec tego właściwie nie należy do grupy omawianych tu równań. Łącznie jednak z równaniem Clapeyron'a, przez zestawienie dwóch różnych wyrażań dla energii sprężystej, daje ono możność łatwego obliczenia odkształceń w razie, gdy te ostatnie odpowiadają siłom zaczepionym w danych punktach konstrukcji, t. zn. gdy np. mamy do wyznaczenia przesunięcie w punkcie zaczepienia i w kierunku działania siły skupionej, lub gdy mamy do wyznaczenia obrót w punkcie zaczepienia momentu. Zestawienie dwóch wspomnianych wyrażań dla energii sprężystej przedstawia właściwie tylko odmienną formę równania Clapeyron'a¹⁾.

Do wyznaczenia odkształceń służy nam najczęściej twierdzenie Castigliano'a:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = c \dots \dots \dots (4)$$

Do wyznaczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych korzystamy z twierdzenia Menabréa'i

$$\frac{\partial V}{\partial P} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

lub też z twierdzenia Betti'ego, zwanego twierdzeniem o wzajemności przesunięć:

$$\Sigma P' e_{,,} = \Sigma P'' e, \dots \dots \dots (6)$$

gdzie wielkości P' i e , odpowiadają jednemu, zaś P'' i $e_{,,}$ drugiemu układowi sił, zaczepionych do tej samej konstrukcji²⁾.

Szczególny wypadek twierdzenia Betti'ego, odpowiadający jednej sile, nazywamy, jak wiadomo, twierdzeniem Maxwell'a.

¹⁾ M. G. Lamé: Leçons sur la theorie mathematique de l'élasticité des corps solides, 1852, str. 80.

²⁾ Ustawiając wzory statyczne dla ramownicy czteroprześłowej, miałem możność przekonać się, że przy obliczaniu układów złożonych stosowanie twierdzenia Betti'ego jest mniej kłopotliwe, niż stosowanie twierdzenia Menabréa'i (vide Przegląd Techniczny, 1930, Nr. 46).

W razie sprężystego utwierdzenia podpór może być, przy wyznaczeniu wielkości statycznie nadliczbowych, również użyteczne i twierdzenie Castigliano'a.

Równania (1) — (6) dotyczą w równej mierze układów pełnych, jak i kratowych.

Nie wdając się w historję powstawania omawianych tu równań, zauważyć jednak należy, iż niektóre z nich zostały pierwotnie ustawione dla układów kratowych, następnie zaś rozpowszechnione i na układy pełne (np. twierdzenie Menabré'a¹⁾) inne zaś naodwrot, udowodniane były z początku dla układów pełnych, później zaś dopiero były zastosowane i do układów kratowych (np. twierdzenie Clapeyron'a).

Uzasadnienie twierdzeń, dotyczących energii sprężystej dla ciał pełnych, opiera się przedewszystkiem na równaniach ogólnych teorii sprężystości, wyprowadzenie zaś tych równań dla kratownic odbywa się na podstawie tak zw. metody Maxwell'a i Mohr'a, opartej na zasadzie prac wirtualnych, która w danym razie może być zresztą wyprowadzona i bezpośrednio z teorii kratownicy²⁾.

Z dydaktycznego punktu widzenia wyprowadzenie równań energii sprężystej dla ciał pełnych jest znacznie bardziej złożone, niż uzasadnienie tych samych równań w zastosowaniu do układów kratowych, tak iż w starszych podręcznikach mechaniki, gdzie te twierdzenia były traktowane, ze względu na ich znaczenie teoretyczne w nauce o sprężystości ciał stałych, z wielką precyzją, zajmowały one wiele miejsca. W nowszych podręcznikach natomiast, ze względu na konieczność zapoznania współczesnego inżyniera z bardzo licznymi nowymi zagadnieniami współczesnej statyki budowlanej, wyprowadzenie tych równań jest traktowane raczej schematycznie, przyczem główny nacisk kładzie się na sposoby ich stosowania.

Zmierając do uproszczenia wykładu równań energii sprężystej dla ciał pełnych, autorowie współczesnych podręczników statyki idą w dwóch kierunkach: jedni, mianowicie, upraszczają bezpośrednio uzasadnienia pierwotne, odrzucając pewne subtelności w rozumowaniu i dbając raczej o algebraiczną poprawność dowodzenia, drudzy korzystają i w danym wypadku z wywodów, przeznaczonych dla układów kratowych.

Pierwsi nie odbiegają, wprawdzie, lub przynajmniej nie odbiegają pozornie od schematu statycznego ciała pełnego, zmuszeni jednak ze

¹⁾ Por. M. Levy: *La Statique Graphique*, 1888, str. 220, również B. de Fontviolant: *Les methodes modernes de Résistance de Matériaux*, 1920.

²⁾ Por. W. Wierzbicki: *Geometryczne uzasadnienie wzoru na przesunięcia węzłów kratownicy*. Przegląd Techniczny, 1930.

względu na brak miejsca do niedomówień, decydują się nieraz na pewne niejasności wykładu.

Drudzy, idąc za przykładem Mohr'a¹⁾ i wyrzekając się niejako przy wyprowadzaniu równań energii sprężystej schematu ciała pełnego na korzyść kratownicy, uogólniają następnie swe wywody drogą twierdzenia, iż każde ciało pełne może być uważane za kratownicę przestrzenną o nieskończenie wielkiej liczbie prętów nadliczbowych i że wobec tego równania energii sprężystej, wyprowadzone dla kratownicy, mogą być bez dalszych dowodów rozpowszechnione i na konstrukcje pełne.

To ostatnie twierdzenie oparte jest na przedstawieniu ciała sprężystego, jako zbioru punktów materialnych, między którymi działają siły, proporcjonalne do zbliżania się wzajemnego tych punktów i skierowane wzdłuż łączących je prostych. W ten sposób pomyślany schemat ciała sprężystego nie przeczy wprawdzie prawu Hooock'a, nie spełnia jednak charakterystycznego dla pracy sprężystego ciała pełnego warunku, mianowicie nie odpowiada mu, co do liczby stałych sprężystości.

Chodzi o to, że w razie przyjęcia dla ciała sprężystego schematu kratownicy, mamy do czynienia z jedną tylko stałą sprężystą, z liczbą E , współczynnikiem sprężystości przy wyciąganiu (lub ściskaniu), w danym razie charakteryzującym zależność między rozsuwaniem się węzłów kratownicy a siłami, działającymi między nimi. W przeciwieństwie do tego, w ciele sprężystym pełnym, a więc uważanym za pewne sprężyste continuum mamy do czynienia z dwiema wielkościami stałymi, a więc, poza współczynnikiem E , jeszcze z liczbą Poisson'a μ .

Pogląd na ciało sprężyste, jako na zbiór punktów materialnych, a więc pogląd, doprowadzający do schematu kratownicy, czyli do tak niekiedy zwanego modelu Navier'a²⁾, jest obecnie poglądem przestarzałym, gdyż wszystkie nowoczesne badania naukowe w zakresie teorii sprężystości oparte są już na założeniu sprężystego continuum czyli modelu Cauchy'ego.

Stąd wypływa nie dający się, w zasadzie, odeprzeć zarzut niewspółczesności, jaki możnaby postawić sposobom wyprowadzenia równań energii sprężystej, opartym na teorii kraty.

Nie wydawałoby się też tu narazie słusznem odpieranie tego zarzutu przez powoływanie się na najnowsze badania w zakresie

¹⁾ O. Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik, 1914, str. 431.

²⁾ Por. Prof. Inż. Dr. M. T. Huber: Kryterja stałości równowagi, 1926, str. 24 oraz M. Navier: Résumé des leçons sur l'application de la Mecanique, 1833, str. 1 i 102.

budowy materji, gdyż badania te stoją jeszcze dość daleko od potrzeb praktycznej teorii sprężystości.

Z drugiej strony, proste a jednak ściśle i pozbawione niedomówień uzasadnienie wzorów (1) — (6), tak nieraz użytecznych w pracy inżyniera, jest koniecznością dydaktyczną.

Z tego powodu należy się zastanowić nad tem, czy nie możnaby było w ten sposób praktycznie ograniczyć obszaru stosowalności równań, dotyczących energii sprężystej, aby w tym obszarze, wyprowadzenie ich na podstawie teorii kratownicy było zgodne z ogólnie przyjętymi założeniami mechaniki budowli.

Ograniczenia, o których mowa, dotyczą po pierwsze, typu odkształceń, po wtóre, rodzaju naprężeń i po trzecie, sposobu zaczepienia sił zewnętrznych.

Zestawiając wyszczególnione na początku niniejszej pracy przypadki, gdy równania energii sprężystej znajdują zastosowanie, z rodzajami konstrukcyj pełnych, dla których to zastosowanie jest korzystne, łatwo spostrzegamy, że wchodzi tu w grę przedewszystkiem przypadki zginania, zarówno elementów konstrukcyjnych prostolinjowych, jak i krzywolinjowych. Mamy tu więc przedewszystkiem na widoku belki proste, na które żadne siły podłużne nie działają, następnie rami, w których obliczeniu rzadko tylko siły podłużne brane są pod uwagę, wreszcie łuki, w których, wprawdzie siły podłużne zwykle uwzględniamy, w których jednak wpływ decydujący na naprężenia mają zwykle momenty zginające.

Co do naprężeń, należy stwierdzić, iż w wyjątkowych tylko wypadkach przy wyznaczeniu odkształceń konstrukcyj budowlanych, lub też wielkości statycznie niewyznaczalnych, uwzględniamy wpływ na obliczane wielkości naprężeń stycznych, czyli liczymy się z przesuwaniem wewnątrz ciał odkształczanych.

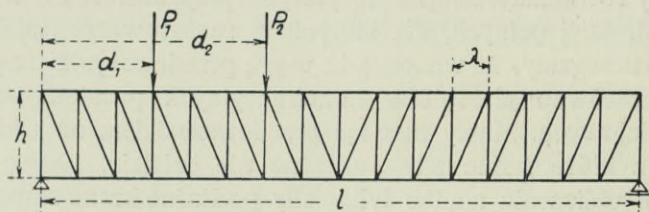
Wreszcie, ogromną większość konstrukcyj budowlanych i wszystkie niemal konstrukcje mostowe rozkładamy zwykle w obliczeniu statycznym na elementy płaskie. W obliczeniach zaś, dotyczących konstrukcyj przestrzennych, zwykle wymagania, co do ściśłości obliczeń statycznych, bywają niezbyt surowe (np. w obliczeniu kopuły).

Twierdzić można z całą śmiałością, iż poza ograniczonym w ten sposób zakresem zagadnień pozostaje już tylko bardzo niewiele praktycznych zadań statyki pełnych konstrukcyj zginanych, zaś zagadnienia o charakterze badawczym nie bywają prawie zapomocą równań energii sprężystej rozwiązywane, zresztą, nie te zagadnienia ma się na widoku, dążąc do uproszczeń w wyprowadzeniu omawianych równań.

Ponieważ ograniczyliśmy nasze rozważania do układów płaskich, nie mamy potrzeby trwać tu przy opisanym wyżej modelu ciała sprężystego, jako kratownicy przestrzennej, lecz możemy przejść do prostszego schematu kratownicy płaskiej, co znacznie ułatwi dalsze rozważania.

Dla uproszczenia przeróbek matematycznych, nie wzbudzających w danym zadaniu większego zainteresowania naukowego, obszerniej omawiamy tu tylko najprostsz, lecz zarazem i najważniejszy schemat kratownicy o pasach równoległych, przedstawiający niejako model pełnej belki pryzmatycznej w dwóch punktach swobodnie podparte, względnie belki utwierdzonej w jednym końcu i swobodnej na drugim.

Kratownicę tę będziemy uważali w dalszym ciągu za statycznie wyznaczalną, posiadającą np. kratę w rodzaju przedstawionej na rys. 1, choć bardzo gęstą. Przez podobne przyjęcie oddalamy się jeszcze bardziej od modelu Navier'a, w którym każdy węzeł powinien być



Rys. 1.

połączony ze wszystkimi innymi węzłami; powstający w ten sposób nowy model lub schemat statyczny, aczkolwiek bardziej znacznie ograniczony, co do swej ogólności, nadaje się jednak z powodzeniem do obliczenia ugięć belki pełnej.

Stosując dalsze rozważania do belki w dwóch punktach swobodnie podparte lub belki utwierdzonej w jednym końcu i swobodnej w drugim, zauważamy przedewszystkiem, iż wszystkie równania energii sprężystej, wyszczególnione na początku tej pracy, można ująć w jedno równanie symboliczne:

$$F(P, e, V) = 0 \dots \dots \dots (7)$$

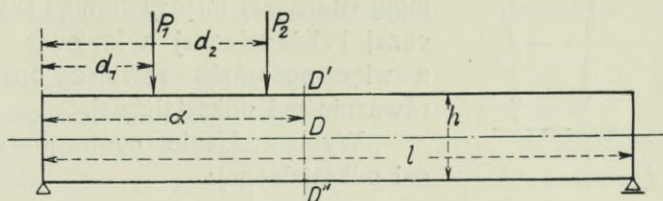
w którym zresztą wielkość V nie zawsze występuje w sposób wyraźny.

Aby uzasadnić stosowanie kratownicy, jako modelu statycznego belki pełnej, ustalimy przedewszystkiem warunki, którym odpowiadać powinna kratownica, przedstawiona na rys. 1, aby te same wartości P , e i V czyniły zadość równaniu (7), zarówno w razie, gdyby zostało ono ustawione dla tej właśnie kratownicy, jak i wówczas gdyby dotyczyło belki pełnej o tej samej rozpiętości i o tym samym sposobie

podparcia (rys. 2). Zakładamy tu, oczywiście, że funkcja F zachowuje ten sam kształt w obydwóch wypadkach.

Kratownicę przedstawioną na rys. 1 uważamy za przegubową oraz odpowiadającą wszystkim założeniom teorii krat i zaczepiamy do niej, np. do jej górnych węzłów szereg sił P , działających prostopadłe do osi pasów i oddalonych od lewej podpory belki o odległości d . Z drugiej strony, na górnej powierzchni belki pełnej, przedstawionej na rys. 2 i wykonanej z tego samego materiału, ustawiamy siły równe omówionym siłom P i ustawione od lewej podpory belki w tych samych odległościach d , co i tamte. Dwa tego rodzaju obciążenia obydwóch belek możemy uważać za identyczne, gdyż zarówno wykresy momentów zginających, jak i wykresy sił poprzecznych w obydwóch wypadkach są tu te same. Ma to miejsce w danym razie niezależnie od kształtu i wymiarów poprzecznych obydwóch belek.

Przyjmujemy, że belka pełna wykonana jest z materiału jednorodnego i ma np. przekrój poprzeczny prostokątny o szerokości a



Rys. 2.

i wysokości h (rys. 1). W belce kratowej przyjmujemy szerokość pasów i krzyżulców oraz długość przegubów cylindrycznych za równą a , zaś odległość osi podłużnych obydwóch pasów, o wymiarach poprzecznych tych samych, przyjmujemy za równą h (rys. 2).

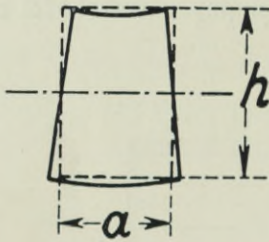
Należy zauważyć, iż wobec odrzucenia wpływu na zginanie naprężeń stycznych, kształt przekroju poprzecznego belki pełnej, o której mowa, pozostaje właściwie bez znaczenia dla dalszych rozważań.

Siły P , wywołując zginanie omawianej belki kratowej oraz belki pełnej, powodują zniekształcenie ich przekrojów poprzecznych, względnie przekrojów ukośnych. W belce kratowej, mianowicie, wyciągane krzyżulce i pasy doznają zwężeń poprzecznych, zaś ściskane krzyżulce i pasy poprzecznych rozszerzeń. Z drugiej strony, belka o przekroju pełnym doznaje odkształcenia poprzecznego, przedstawionego na rys. 3. Oba te rodzaje odkształcenia mogą oczywiście wystąpić tylko w tym wypadku, gdy współczynnik Poisson'a μ różny jest od zera.

W myśl jednak zasady zeszywnienia ani w obliczeniu statycznym kratownic, ani też w obliczeniu belek pełnych nigdy nie bierzemy pod uwagę wpływu odkształceń poprzecznych na naprężenia normalne, nie mamy więc powodu uwzględniać go też i przy obliczaniu energii sprężystej, nagromadzonej w tych konstrukcjach.

Pomijając zaś powyższe odkształcenia, przyjmujemy tem samem, że liczba Poisson'a, jedna z dwóch stałych sprężystości, równa się tu 0 w obydwóch wypadkach. Możemy to zrobić tylko w belkach o małej szerokości i nie powinniśmy tego stosować w szerszych płytach, gdzie wielkość współczynnika μ wywiera wpływ wyraźny na naprężenia.

Obliczenie ugięcia belki pełnej w pewnym punkcie D (rys. 2), czyli prostopadłego do osi belki przesunięcia punktu D (przesunięcia $e = v_D$), leżącego na osi belki, odbywa się naogół (poza omawianemi tu metodami, opartemi na równaniach energii sprężystej) zapomocą równania osi odkształconej, lub też sposobem momentów wtórnych, opartym na analogji, istniejącej między formą osi odkształconej belki zginanej a krzywą sznurową, a więc pośrednio również opartym na równaniu osi odkształconej.



Rys. 3.

Wprowadzenie ogólnego równania osi odkształconej:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

opiera się między innymi na dwóch założeniach następujących:

1. na założeniu, że równoległe do siebie warstwy belki pełnej nie wywierają wzajemnie na siebie nacisku w kierunku prostopadłym do osi belki, nie odkształcają się więc w tym kierunku,

2. na założeniu, że wspomniane warstwy nie przesuwiają się względem siebie, co odpowiada tak zwanemu założeniu płaskich przekrojów; wobec tego, że między naprężeniami stycznymi a przesunięciami jednostkowymi istnieje zależność:

$$\tau = G \cdot \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

(gdzie G oznacza współczynnik sprężystości przy przesuwaniu, a β przesunięcie jednostkowe), założenie to odpowiada przyjęciu, iż stała sprężystości G równa się tu nieskończoności ($G = \infty$).

W konsekwencji powyższych założeń uważamy, iż punkt D' na górnej i punkt D'' na dolnej powierzchni belki, leżąc na prostej prostopadłej do osi (normalnej) i przechodzącej przez punkt D , nie zmienia,

po odkształceniu, odległości swej od tego punktu, ani w kierunku stycznym do osi, ani w kierunku prostej D' , D'' . Mamy więc, że

$$v_{D'} = v_{D''} = v_D \dots \dots \dots (10)$$

W belce kratowej rolę punktów D' , D'' i D odgrywają punkt N , położony w środku wysokości kratownicy, oraz węzły N' i N'' , których odległości od lewej podpory belki odpowiadają odległościom tamtych punktów. Powstaje tu pytanie, jakim warunkom odpowiadać powinna belka kratowa, aby wzajemna nieprzesuwalność węzłów N' i N'' , odpowiadająca nieprzesuwalności punktów D' i D'' belki pełnej, była zabezpieczoną.

Otóż założenie nieprzesuwalności punktów D' i D'' w kierunku normalnej do osi odkształconej może tu być zastąpione w sposób dostateczny przez warunek nieodkształcalności słupów kratownicy, który nie pozwoli węzłom N' i N'' przesunąć się względem siebie.

Przyjęcie, iż stała sprężystości G równa się nieskończoności, jest równoznaczne z odrzuceniem wpływu sił poprzecznych na wyginanie się belek pełnych, natomiast w przypadku kratownicy pominięcie wpływu sił poprzecznych na przesuwanie się węzłów może być wyrażone przez przyjęcie nieodkształcalności podłużnej prętów kraty, w szczególności zaś krzyżulców. Tłumaczy się to w ten sposób, iż w kratownicy o pasach równoległych siły w prętach kraty są wprost proporcjonalne do sił poprzecznych, tak, iż przyjmując, że pręty te nie ulegają ani wydłużeniu, ani skrótowi, czyli, że ich współczynnik sprężystości równa się $E_{kr} = \infty$, odrzucamy tem samym wpływ sił poprzecznych na wyginanie się belek kratowych.

Innymi słowy, założenie nieodkształcalności prętów kraty, przy jednoczesnem założeniu, że oba pasy kratownicy mają te same wymiary i są wykonane z tego samego materiału, całkowicie zabezpiecza nieprzesuwalność węzłów N' i N'' w kierunku normalnej oraz stycznej do osi belki i odgrywa tu rolę założenia, że $G = \infty$ przy obliczeniu ugięć belki pełnej.

Przy obliczeniu odkształceń porównywanych ze sobą belek, pełnej i kratowej, przyjmujemy więc, w myśl powiedzianego wyżej po pierwsze, że siły zewnętrzne P są w obydwóch wypadkach zaczepione jednako, po wtóre, że $\mu = 0$ i po trzecie, że siły poprzeczne w obydwóch wypadkach nie mają wpływu na odkształcenia, czyli że $G = \infty$, względnie $E_{kr} = \infty$.

Stosując do wyznaczenia ugięcia belki pełnej w punkcie D sposób momentów wtórnych otrzymujemy:

$$v_D = \frac{\mathfrak{M}_D}{EI} \dots \dots \dots (11)$$

gdzie M_D wyraża moment wtórny w przekroju D belki, t. j. moment zginający od obciążenia ciągłego, zmieniającego się według wykresu momentów zginających od rzeczywistego obciążenia belki, a EI oznacza iloczyn współczynnika sprężystości przy wyciąganiu i zginaniu przez moment bezwładności przekroju poprzecznego belki.

Z drugiej strony, obliczając dla belki kratowej przesunięcie punktu D w kierunku prostym do osi belki, równe przesunięciu punktów N' i N'' , otrzymujemy na podstawie wzoru opartego na zasadzie prac wirtualnych, czyli według t. zw. metody Maxwell'a i Mohr'a, iż

$$v_N = \sum \frac{ZS\lambda}{EA} \dots \dots \dots (12)$$

gdzie S oznacza siły w poszczególnych prętach kratownicy, Z siły, które działałyby w tych prętach, gdyby w węzle N' była zaczepiona siła 1, mająca kierunek przesunięcia v_N , wreszcie EA — iloczyn współczynnika sprężystości przez pole przekroju poprzecznego pasa i λ — długość jednego przedziału pasa. Wobec tego, że słupy i krzyżulce kratownicy uważamy za nieskończenie sztywne, czyli za nieodkształcające się, sumowanie dotyczy tu tylko obydwóch pasów, obejmując wszystkie przedziały belki kratowej.

Oznaczamy przez M_x momenty zginające, wywołane przez rzeczywiste obciążenie zewnętrzne w poszczególnych węzłach kratownicy k'' , oddalonych od lewej podpory o odległości x , i przedstawiamy na rys. 4c wykres tych momentów. Wówczas siły podłużne, powstające w położonych naprzeciwko węzłów k'' poszczególnych przedziałach mk' pasów belki kratowej, wyrażą się zapomocą wzoru:

$$S = \frac{M_x}{h} \dots \dots \dots (13)$$

Ciężar równy $1t$, zaczepiony nad punktem N (w odległości a od podpory), którego przesunięcie wyznaczamy, wywołuje zarówno w rozpatrywanej belce kratowej, jak i w odpowiedniej belce pełnej, momenty zginające, zmieniające się według wykresu momentów, przedstawionego na rys. 4b.

Oznaczając przez M'_x rzędne wykresu 4b w punktach oddalonych o x od lewej podpory belki kratowej, otrzymujemy dla siły wywołanej w przedziale mk' pasa przez siłę 1, zaczepioną w węzle N , wielkość:

$$Z_m = \frac{M'_x}{h} \dots \dots \dots (14)$$

W związku z tem wzór (12) przybiera postać następującą:

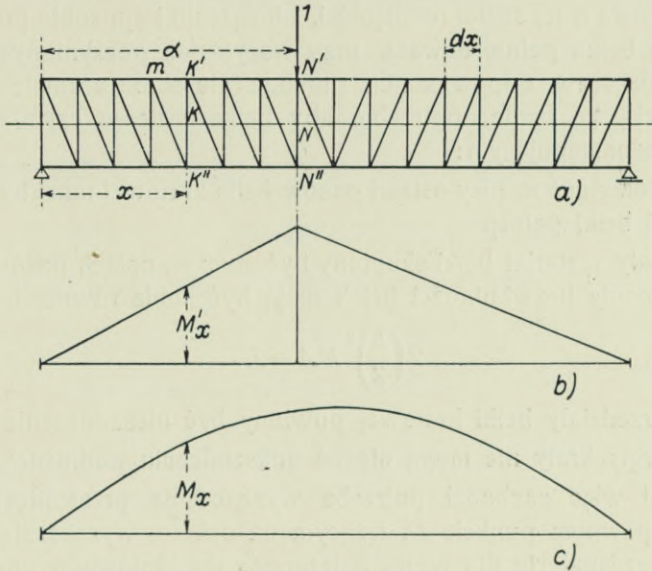
$$v_N = 2 \sum \frac{M_x}{h} \cdot \frac{M'_x}{h} \cdot \frac{\lambda}{EA} \dots \dots \dots (15)$$

Sumowanie dotyczy tu, jak wyżej, dwóch pasów kratownicy, każdy o długości l .

Przyjmujemy dalej, że przedziały belki kratowej maleją w sposób nieograniczony, czyli że zakładamy $\lambda = dx$. W związku z tem suma (15) przekształca się w całkę następującą:

$$v_N = 2 \int_0^l \frac{M_x}{h} \cdot \frac{M'_x}{h} \cdot \frac{dx}{EA} \dots \dots \dots (16)$$

Wracając do wykresu 4 b, obliczamy rzędną jego dla punktu N . Ponieważ ciężar 1 wywołuje reakcje belki równe $1 - \frac{\alpha}{l}$ oraz $\frac{\alpha}{l}$, więc



Rys. 4 a, b, c.

moment zginający, wywołany przez ten ciężar w punkcie N , wynosi:

$$\eta_N = 1 \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) \alpha \dots \dots \dots (17)$$

Wyrażenie dla η_N , jak widać, przedstawia pomnożoną przez 1 rzędną linii wpływowej momentu zginającego w punkcie N dla belki w dwóch punktach swobodnie podpartej.

Wobec tego, że wykres 4 b jest linią wpływową momentu zginającego w punkcie D (o rzędnych $\eta = M'_x$) i wobec tego, że wykres 4 c dla momentów M_x uważać możemy za wykres obciążenia wtórnego $q_x = M_x$, powinniśmy dla wyznaczenia momentu wtórnego \mathfrak{M} w punkcie N wykonać całkowanie:

$$\mathfrak{M}_D = \mathfrak{M}_N = \int_0^l q_x \cdot M'_x dx = \int_0^l M_x M'_x dx \dots \dots \dots (18)$$

Ze wzorów (16) i (18) otrzymujemy więc:

$$v_N = 2 \cdot \frac{\mathfrak{M}_N}{h^2 EA} = \frac{\mathfrak{M}_N}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (19)$$

Iloraz $2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA = I_1$ wyraża moment bezwładności belki, której cały materiał został skupiony na osiach dwóch jej równoległych do siebie pasów.

Z zestawienia wzorów (11) i (19) wynika więc, iż na to, aby belka kratowa o tej samej rozpiętości, obciążeniu i sposobie podparcia, co pewna belka pełna, dawała, przy wszystkich poczynionych wyżej zastrzeżeniach, w odpowiednich punktach te same normalne do osi przesunięcia, co tamta, potrzeba, aby belka kratowa czyniła zadość warunkom następującym:

1. Odległość między osiami pasów belki kratowej musi być równa wysokości belki pełnej.
2. Cały materiał belki skupiony być musi na osiach pasów, przy-
czem momenty bezwładności belek mają być sobie równe, t. j.

$$2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA = I.$$

3. Przedziały belki kratowej powinny być nieskończenie małe.
4. Pręty kraty nie mogą ulegać odkształceniu podłużnemu.

Jeżeli więc zachodzi potrzeba wyznaczenia przesunięcia belki pełnej w pewnym punkcie D , leżącym na osi, to, wyznaczając odpowiednie przesunięcie dla węzła należącego do kratownicy, odpowiadającej tylko co wymienionym warunkom, a położonego w tej samej odległości od początku belki, co punkt D , otrzymamy wynik identyczny z poszukiwanym.

Założenia upraszczające, poczynione wyżej jak to zostało udowodnione, mają ten sam sens fizyczny dla belki kratowej, co i dla pełnej, w jednakowym więc a naogół w dopuszczalnym tylko stopniu wpływają one na dokładność obliczeń statycznych.

Ponieważ przedziały omawianej wyżej belki kratowej uważamy za nieskończenie małe, możemy więc siły zewnętrzne zaczepiać do tej belki we wszystkich punktach jej długości, nie będąc przez to w sprzeczności z teorią kraty i mogąc dzięki temu rozpowszechnić wszystko powyższe i na obciążenia ciągłe. Nie mamy tu potrzeby robić żadnych zastrzeżeń co do obciążenia momentowego, gdyż co do kształtu wykresu rys. 4e nie robiliśmy żadnych ograniczeń.

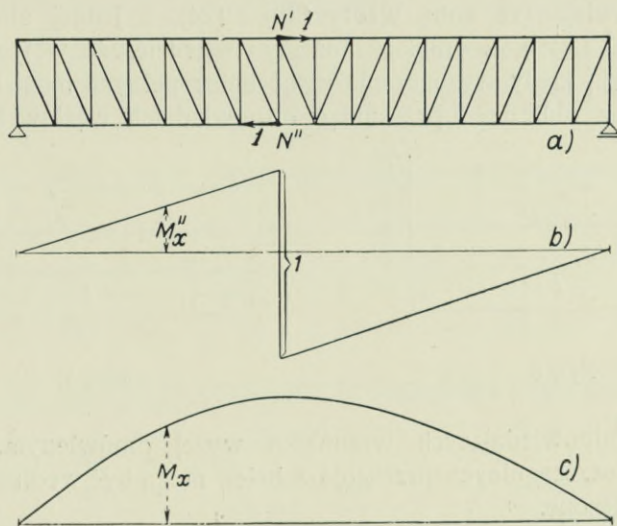
Przechodząc do wyznaczenia obrotów sprężystych poszczególnych przekrojów belki pełnej, ustawiamy dla obrotu jej pewnego przekroju D wzór następujący:

$$\varphi_D = \frac{\mathfrak{X}_D}{EI} \quad \dots \quad (20)$$

gdzie \mathfrak{X}_D oznacza siłę poprzeczną w przekroju D belki, wywołaną przez obciążenie wtórne $q_x = M_x$ (rys. 2).

Wyznaczenie obrotu przekroju D belki kratowej wyznaczamy z omówionego wyżej wzoru:

$$\varphi_N = 2 \sum_0^l \frac{Z \cdot S \cdot \lambda}{EA} \quad \dots \quad (21)$$



Rys. 5 a, b, c.

w którym S , λ i EA ma to samo znaczenie, co wyżej we wzorze (12), zaś Z oznacza siły, powstające w poszczególnych prętach pasów kratownicy pod działaniem momentu równego 1 i zaczepionego w przekroju D , którego obrót obliczamy (rys. 5).

Moment, równy 1, zaczepiony w przekroju N belki, wywołuje momenty zginające M''_x , których wykres przedstawiony jest na rys. 5 b. W związku z tem siły Z , powstające w poszczególnych przedziałach pasa kratownicy, wyrażają się wzorem:

$$Z = \frac{M''_x}{h} \quad \dots \quad (22)$$

analogicznym do wzoru (14), zaś siły S zapomocą wzoru (13).

*

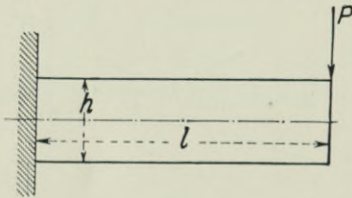
Wykres, przedstawiony na rys. 5 b przedstawia, jak widać, z drugiej strony, linię wpływową dla siły poprzecznej w przekroju N dla belki swobodnie podpartej. Wobec tego możemy tu dokonać przekształcenia wzoru (21), analogicznego do wyżej omówionego przekształcenia wzoru (12). Siła poprzeczna $\mathfrak{F}_D = \mathfrak{F}_N$ od obciążenia wtórnego w punkcie N będzie się tu równała, mianowicie:

$$\mathfrak{F}_N = \int_0^l q \cdot M''_x dx = \int_0^l M_x \cdot M''_x dx \quad \dots \quad (23)$$

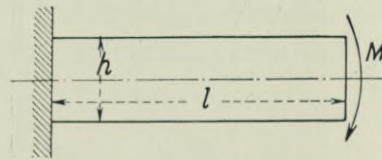
wobec czego dla kąta obrotu φ_D otrzymamy:

$$\varphi_N = \frac{\mathfrak{F}_N}{2\left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \quad \dots \quad (24)$$

Zestawiając ze sobą wzory (20) i (24), z jednej strony, oraz wzory (11) i (19), z drugiej, możemy twierdzić, że w tych samych przypadkach, kiedy wyznaczenie ugięć belek pełnych może być zastąpione przez obliczenie przesunięć odpowiednich węzłów belek kra-



Rys. 6.



Rys. 7.

towych, odpowiadających warunkom wyżej omówionym, również i obroty poszczególnych przekrojów belek mogą być według tej samej reguły obliczone.

Dalej można również twierdzić, że reguła ta znajdzie zastosowanie i dla belek prostych statycznie niewyznaczalnych, gdyż obliczenie tych ostatnich sprowadza się, w rezultacie, do wyznaczenia pewnych ugięć i obrotów.

Poza belką w dwóch punktach swobodnie podpartą, w obliczeniach statycznych i konstrukcyj, złożonych z elementów zginanych, spotykamy się stale z odkształceniem belki w jednym końcu utwierdzonej, a w drugim swobodnej. Łatwo jest uzasadnić, że i w tym wypadku omówiona reguła obliczenia odkształceń znajduje zastosowanie. Wyznaczenie odkształceń belki utwierdzonej sprowadza się właściwie do wyznaczenia przesunięcia i obrotu swobodnego końca belki pod działaniem siły skupionej i momentu, zaczepionych w tym końcu. Inne rodzaje odkształceń są już tylko geometrycznym dodaniem tamtych.

Dla belki pełnej mamy dla obciążenia przedstawionego na rys. 6:

$$v = \frac{Pl^3}{3EI} \quad \varphi = \frac{Pl^2}{2EI} \quad \dots \quad (25)$$

oraz dla obciążenia przedstawionego na rys. 7 mamy odpowiednio:

$$v = \frac{Ml^2}{2EI} \quad \varphi = \frac{Ml}{EI} \quad \dots \quad (26)$$

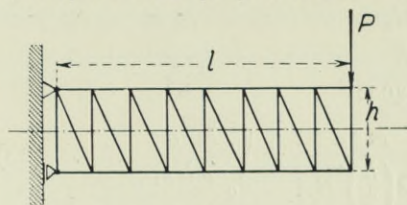
Do obliczenia odkształceń kratownicy stosujemy tu, jak wyżej, wzory (12) i (21), mając na uwadze, że momenty M_x od obciążenia rzeczywistego wyrażają się w przypadku, przedstawionym na rys. 8, wzorem:

$$M_x = P \cdot x$$

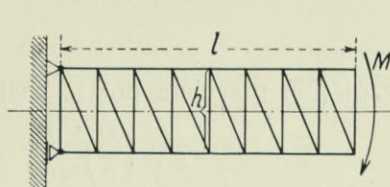
oraz w przypadku, przedstawionym na rys. 9, wzorem:

$$M_x = M.$$

Przy obliczaniu przesunięć v zaczepiamy do końca belki siłę równą $1 t$ oraz przy obliczaniu obrotu zaczepiamy tu moment równy



Rys. 8.



Rys. 9.

1 *tm.* W ten sposób otrzymujemy w przypadku przedstawionym na rys. 8:

$$v = 2 \sum_0^l \frac{SZ\lambda}{EA} = 2 \int_0^l \frac{Px}{hEA} \cdot \frac{1}{h} dx = \frac{Pl^3}{3} \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \quad (27)$$

$$\varphi = 2 \sum_0^l \frac{SZ\lambda}{EA} = 2 \int_0^l \frac{Px}{hEA} \cdot \frac{1}{h} dx = \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \quad (28)$$

W przypadku, przedstawionym na rys. 9, mamy odpowiednio:

$$v = 2 \sum_0^l \frac{SZ\lambda}{EA} = 2 \int_0^l \frac{M}{hEA} \cdot \frac{1}{h} dx = \frac{Ml^2}{2 \cdot 2 \left(\frac{h}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{EA} \quad (29)$$

$$\varphi = 2 \sum_0^l \frac{SZ\lambda}{EA} = 2 \int_0^l \frac{M}{hEA} \cdot \frac{1}{h} dx = \frac{Ml}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 EA} \quad (30)$$

Zestawienie wzorów (27) — (30) ze wzorami (25) i (26) dowodzi tego, co miało być wykazane.

W sposób równie prosty, jak poprzednio, można wykazać, że energia sprężysta, nagromadzona przy zginaniu belki pełnej, wyraża się zapomocą tego samego wzoru, co energia sprężysta nagromadzona w kratownicy, odpowiadającej warunkom, omówionym wyżej.

Dla belek pełnych o dowolnym sposobie podparcia energia sprężysta wyraża się, jak wiadomo, równaniem:

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \quad \dots \quad (31)$$

Dla odpowiedniej belki kratowej, mamy równanie następujące:

$$V = 2 \int_0^l \frac{S^2 dx}{2EA} \quad \dots \quad (32)$$

gdzie $\lambda = dx$ oznacza długość przedziału pasa kratownicy.

Wobec tego, że siły S w poszczególnych prętach pasa wyrażają się, w zależności od momentu zginającego, wzorem:

$$= \frac{M_x}{h}$$

wzór (32) przybiera postać następującą:

$$V = 2 \int_0^l \left(\frac{M}{h} \right)^2 \frac{dx}{EA} = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 EA} = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI_1} \quad \dots \quad (33)$$

to znaczy postać równania (31).

Wszystko, co było powiedziane o odkształceniu belek w dwóch punktach podpartych i belek w jednym końcu utwierdzonych, a na drugim swobodnych, może być zastosowane bez żadnych zastrzeżeń i do innych układów, złożonych z prostych elementów zginanych, a więc do konstrukcyj ramowych przedewszystkiem.

Ponieważ zostało tu dowiedzione, że dla belek pełnych odkształcenia i nagromadzająca się w czasie tych odkształceń energia sprężysta mają te same wyrażenia, co dla belek kratowych o równych momentach bezwładności, możemy twierdzić, że o ile równania (1) — (6) zostaną wyprowadzone dla pewnej konstrukcji złożonej z szeregu zginanych elementów kratowych, to pozostaną one słusznymi w tym samym stopniu, co do dokładności, i dla konstrukcji, w której elementy kratowe będą zastąpione przez elementy pełne o równych momentach bezwładności.

Stosowanie schematu kratownicy płaskiej do wyprowadzenia równań (1) — (6) dla układów płaskich nie może być uważane za nawrót do dawnych poglądów na budowę ciał sprężystych przedewszystkiem dlatego, że przy tym wyprowadzeniu brane są pod uwagę

w sposób pośredni lub bezpośredni obie stałe sprężystości w tej formie, w jakiej wchodzi w zadania płaskie wogóle.

Omawiana w tej pracy kratownica płaska odgrywa w danym razie mniej może rolę modelu płaskiego ciała sprężystego, niż przybliżonego schematu, służącego do obliczenia tak złożonego układu statycznie niewyznaczalnego, jakim jest pod względem rozkładu naprężeń belka pełna, a którego innym uproszczeniem, ogólnie przyjętym, jest belka, odpowiadająca założeniu płaskich przekrojów. Wyżej już było wykazane, że wymienione tu oba schematy upraszczające zapewniają ten sam stopień dokładności ostatecznych obliczeń.

Uzasadnienie słuszności stosowania schematu belki kratowej przy wyprowadzeniu równań energii sprężystej i wzajemności przesunięć dla płaskich belek pełnych mogłoby być z łatwością rozpowszechnione i na układy złożone z elementów zginanych o przekroju zmiennym w sposób ciągły¹⁾. Nie wydaje się to jednak potrzebnem w granicach panowania utartych wzorów mechaniki budowlanej dlatego, iż przy obliczaniu konstrukcyj złożonych z prętów o przekroju zmiennym



Rys. 10.

w sposób ciągły, albo zgoła zmienność ta nie bywa brana pod uwagę, albo też bywa uwzględniona tylko w ten sposób, że we wzorach wyprowadzonych dla belek o przekroju stałym wielkość stała I bywa zastępowana przez wielkość zmienną $I = f(x)$, co może być zastosowane z tą samą słusznością i w przypadkach omawianych w tej pracy.

Przy stosowaniu belek o przekroju zmiennym w sposób nieciągły (rys. 10) wyobrażamy sobie niejako, że odcinki belki o różnych momentach bezwładności stykają się ze sobą podług pewnych nieodkształcalnych płaszczyzn normalnych do osi belki. Nic nie stoi nam w danym razie na przeszkodzie zastąpić tu odcinki pełne o zmiennym przekroju przez odpowiednie odcinki kratowe (rys. 10), odpowiadające omówionym wyżej warunkom i na ten więc wypadek możemy bez zastrzeżeń rozpowszechnić wypowiedziane tu twierdzenia.

Zakrzywione pręty zginane o stałym przekroju poprzecznym mogą być rozpatrywane, jako złożone z nieskończenie małych elementów prostych, podpadają więc one pod rozważania powyższe. Prętów zaś o przekroju zmiennym dotyczy uwaga, uczyniona nieco wyżej.

¹⁾ Por. M. Levy, op. cit.

Pozostaje jeszcze podkreślić, iż w myśl zasady superpozycji odkształcenia, wywołane przez działanie na pręty sił podłużnych mogą być dodawane do odkształceń, wywołanych przez momenty zginające, i że energia sprężysta nagromadzona w elementach konstrukcyjnych zginano-ściskanych, obliczanych na podstawie równań energii sprężystej, nieomal zawsze bywa wyznaczana ze wzoru:

$$V = \int \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2EA} \right) dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

gdzie część jej, wywołana przez zginanie, może być obliczona niezależnie od części wywołanej przez ściskanie.

Możemy więc ostatecznie przyjąć, iż zastosowanie do wyprowadzenia równań energii sprężystej (1) — (6), dotyczących belki pełnej, schematu kratownicy płaskiej o tym samym momencie bezwładności, należy uważać, przy zachowaniu zwykłej dokładności obliczeń statycznych, za słuszne dla wszystkich układów sprężystych, mogących uchodzić za płaskie¹⁾.

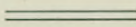
¹⁾ Samo wyprowadzenie równań energii sprężystej na podstawie teorii kraty znaleźć można np. w pracy: W. Wierzbicki: *Mechanika budowli*, 1929, str. 432 i następane, lub w cytowanym wyżej dziele O. Mohr'a.



SPIS RZECZY.

	Str.
Komitet redakcyjny	IV
Przedmowa	V
Biografia	IX
Spis prac Prof. M. Thulliego	XV
1. Bessaga Mieczysław: Zastosowanie zasady Castigliana do wyznaczenia reakcyj belek ciągłych	1
2. Bratro Emil: Załomy spadków drogowych w sąsiedztwie mostów	17
3. Bryła Stefan: Wzmocnianie kratowych konstrukcyj nitowanych przy pomocy spawania	27
4. Brzozowski Stanisław: Ogólna metoda wyznaczania kształtu mostów łukowych z konstrukcją pachwinową	41
5. Burzyński Włodzimierz: Z teorii łuku bezprzegubowego	83
6. Chmielowiec Alfons: Jeszcze jeden sposób badania belki ciągłej	105
7. Chróścielewski Aureljusz: Jedenaście prześel mostowych dla Jugosławji	119
8. Groch Leon: O drewnianych ustrojach kratowych	135
9. Huber M. T.: O wyboczeniu niesprężystem	143
10. Kluz Tomasz: Rama prostokątna dwuprzegubowa	157
11. Kłóś Czesław: Zamocowane łuki paraboliczne o zmiennym przekroju pod wpływem działania zmiany temperatury	167
12. Kunicki Stanisław: Zwodzone mosty Astrachański i Buzański przez odnogi delty rzeki Wołgi	185
13. Kuryłło A.: Konstrukcje żelbetowe podziemia prezbiterjum Katedry Śląskiej w Katowicach	191
14. Łazoryk Emil: Uzbrojenie na ciągnięcia główne w belkach żelbetowych	195
15. Matakiewicz M.: Przepływ przez obszary zalewowe rzek	203
16. Pareński Aleksander: Kryterja dla wyznaczenia prędkości wód płynących w łożyskach przyrodzonych	221
17. Paszkowski Wacław: Wyznaczanie odstępów przerw skurczowych w sztywnych ustrojach żelbetowych	239
18. Pomianowski K.: Krzywe czasów trwania jako krzywa prawdopodobieństwa w odniesieniu do zjawisk hydrologicznych	245
19. Radłow Waldemar: Obliczenie belek ciągłych podtrzymujących płyty krzyżowo zbrojone	255

20. Stadtmüller Karol: Słowiańskie słownictwo techniczne a prace naszych uczonych, w szczególności Prof. Thulliego	Str. 269
21. Taub Józef: O łączeniu wkładek w budownictwie żelbetowym ze szczególnem uwzględnieniem spawania elektrycznego	275
22. Vetulani K. F.: Wzór przybliżony dla projektowania nakładek belki blaszanej	285
— Przykład ustroju kratowego dopuszczającego układ nieokreślonych sił wewnętrznych	287
— Przedstawienie zmiany naprężeń skrajnych podczas powstawania wyboczenia	295
23. Weigel K.: Przyczynek do tyczenia łuków kołowych metodą obwodową	303
24. Wierzbicki Witold: O zastosowaniu teorii kraty do wyprowadzenia równań energii sprężystej	311
Spis rzeczy	329
Omyłki druku i uzupełnienia	331



Omyłki druku i uzupełnienia.

Str. 3 wiersz 2 od dołu, zamiast: $\frac{\partial M}{\partial A_i}$, ma być: $\frac{\partial U}{\partial A_i}$;

współczynniki $A_0, 1, 2 \dots$ w układzie równań (III) mają być podzielone przez EI .

Str. 9 wiersz 12 od góry, zamiast: Postępują, ma być: Postępując

„ 43 „ 6 „ „ „ dają, ma być: daje

„ 80 „ 2 „ dołu, „ w którym, ma być: w których

„ 82 „ 2 „ „ „ nie zamieszcza, ma być: opuszcza

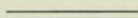
„ 136 „ 7 „ góry, „ z drewnianą kratą, ma być: z drewnianym pomostem

„ 138 „ 2 „ dołu, „ 4 przęsła, ma być: 5 przęseł

„ 142 „ 4 „ góry, „ pod Martynowem, ma być: pod Żurawnem

„ 194 „ 2 „ dołu, „ konstrukcy, ma być: konstrukcyj

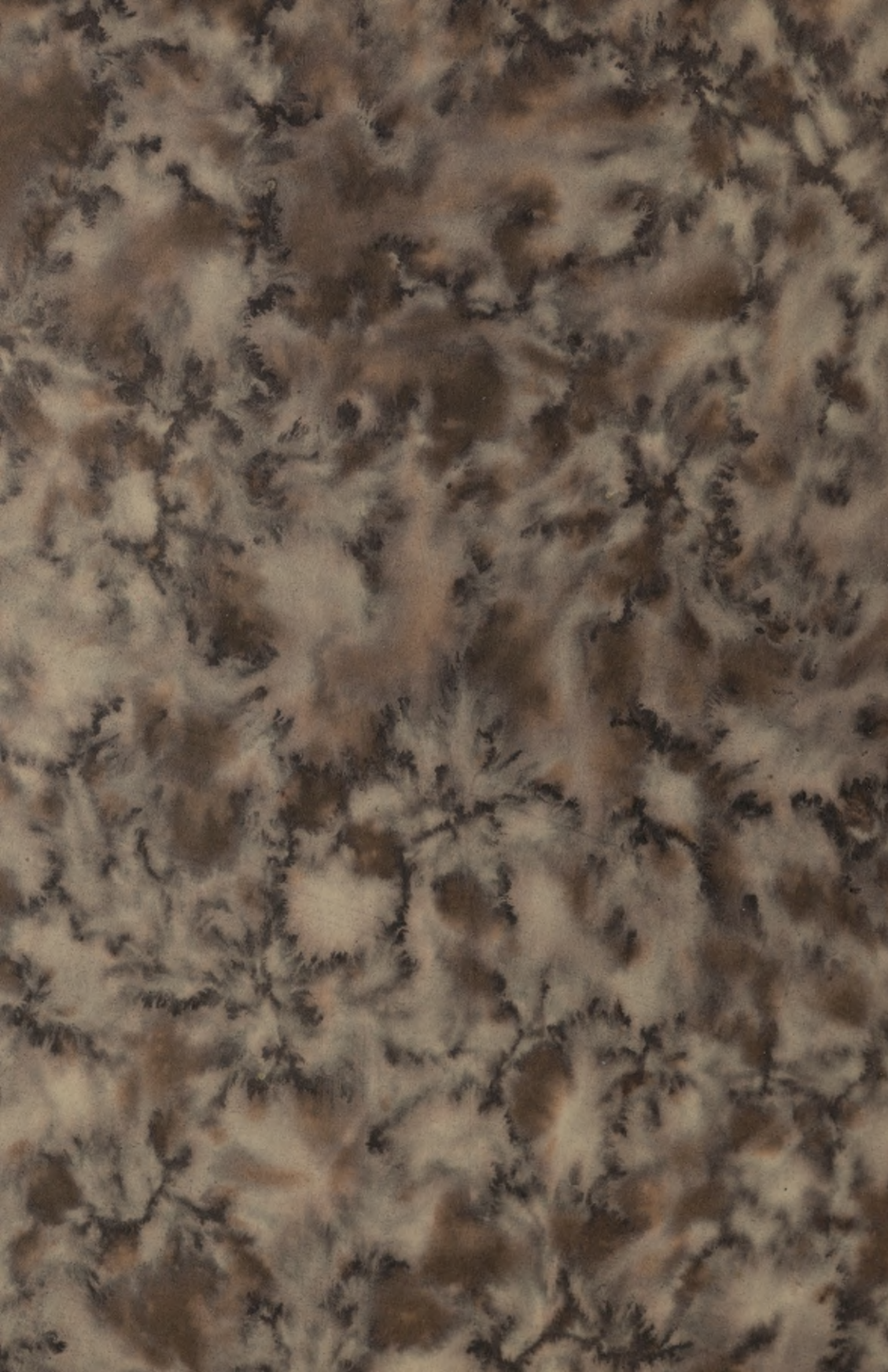
Pracę Inż. L. Grocha uzupełniono tabl. IV.



~~60.~~

60.

100

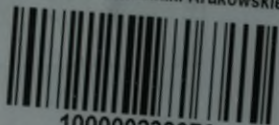


MARYAN A. TERLECKI
ARTYSTYCZNO - GALANTERYJNA
INTROLIGATORNIA
LWÓW, UL. PODWALE 7

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Krakowskiej

34908

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000233976