Dr. STEFAN BANACH
PROFESOR UNIWERSYTETU J. K.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

TOM I.

LWÓW
WYDAWNICTWO ZAKŁADU NARODOWEGO IMIENIA OSSOLIŃSKICH
1929

Dr. STEFAN BANACH
PROFESOR UNIWERSYTETU J. K.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

TOM I.

LWÓW
WYDAWNICTWO ZAKŁADU NARODOWEGO IMIENIA OSSOLIŃSKICH
1929

Z DRUKARNI ZAKŁADU NARODOWEGO IM. OSSOLIŃSKICH WE LWOWIE
POD ZARZĄDEM KAZIMIERZA FIGWERA

PRZEDMOWA.

Książka niniejsza przeznaczona jest do wstępnego studjum rachunku różniczkowego i całkowego. Po przeczytaniu jej czytelnik może z korzyścią przystąpić do dzieł obszerniejszych.

Staraliśmy się podać najważniejsze twierdzenia i to o ile możności z dowodami. Kilka jednak twierdzeń wypowiedzieliśmy bez uzasadnienia; uważaliśmy bowiem, że metody dowodów tych twierdzeń są za trudne do opanowania we wstępnem studjum.

Konieczną jest rzeczą, aby czytelnik przerobił większą liczbę zadań*). W naszej książce ze względu na brak miejsca mogliśmy umieścić niewiele tylko zadań.

Drugi tom poświęcony rachunkowi całkowemu i zastosowaniom jest w druku.

Miło nam jest podziękować p. H. Auerbachowi za pomoc, której użyczył przy pisaniu tej książki.

Autor.

Lwów, dn. 30 stycznia 1929 r.

*) Polecić możemy np. zbiór zadań z rachunku różniczkowego i całkowego Dr. Nikliborca i Dr. Steinhausa, który wkrótce ukaże się nakładem Ossolineum.

WSTĘP.

Podamy tu niektóre definicje i twierdzenia, z których w dalszym ciągu będziemy korzystać.

1. Przedziałem (a, b) nazywamy zbiór liczb x, spełniających jedną z nierówności $a < x < b$, $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Przedziałem zamkniętym nazywamy przedział, określony przez nierówność $a \leqslant x \leqslant b$.

Ze względu na znaną interpretację liczb rzeczywistych na linji liczbowej, nazywamy przedział również odcinkiem, a liczby również punktami.

2. Przypominamy czytelnikowi wzór znany pod nazwą dwumianu Newtona:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n,$$

gdzie $$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Symbole $\binom{n}{k}$ są określone ostatnim wzorem również dla niecałkowitych oraz dla ujemnych wartości n.

Np.
$$\binom{8}{4} = \frac{8 \, . \, 7 \, . \, 6 \, . \, 5}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} = 70,$$

$$\binom{-10}{5} = \frac{-10 \, . -11 \, . -12 \, . -13 \, . -14}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5} = -2002$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right) \ldots \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2} \cdot \ldots \cdot -\frac{2k-1}{2}}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, \ldots \ldots \, k} =$$

$$= (-1)^k \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, \ldots \, (2k-1)}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, \ldots \, 2k},$$

a więc $\binom{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2 \, . \, 4 \, . \, 6} = -\frac{5}{16}$ i t. p.

3. Ze wzoru Newtona wynika natychmiast nierówność $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ dla $x \geqslant 0$.

Kładąc $1 + x = A$,
możemy napisać $A^n \geqslant 1 + n(A - 1)$ dla $A \geqslant 1$.
Obie nierówności są prawdziwe przy wszelkiem naturalnem n.

4. Dla $q \neq 1$ zachodzi tożsamość

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

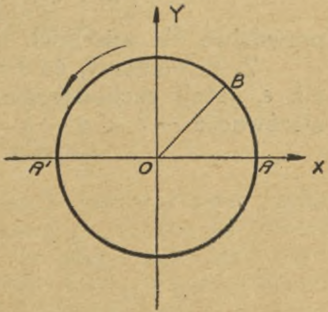
przy wszelkiem naturalnem n. Jest to znany wzór na sumę postępu geometrycznego.

5. Czytelnikowi znane jest z geometrji elementarnej określenie kąta i miary kąta, wyrażonej w stopniach i częściach stopnia.

W matematyce wyższej używa się przeważnie innego określenia miary kąta, mianowicie t. zw. miary łukowej.

Niech k będzie kołem o środku leżącym w początku układu współrzędnych OXY, o promieniu równym jedności.

W płaszczyźnie OXY obieramy pewien kierunek obrotu (zaznaczony strzałką na rysunku), który nazywać będziemy dodatnim; przeciwny kierunek obrotu nazwiemy ujemnym.



Rys. 1.

Niech x będzie dowolną liczbą. Odmierzmy na okręgu koła k (rozpoczynając od A) łuk o długości $|x|$ w kierunku dodatnim lub ujemnym, zależnie od tego, czy $x > o$, lub $x < o$. (Dla $x = o$ łuk redukuje się do punktu A.) Jako punkt końcowy tego łuku otrzymamy pewien ściśle określony punkt B okręgu koła k. Liczbę x nazywamy miarą łukową kąta AOB.

Rzecz jasna, że każdy kąt ma nieskończenie wiele miar łukowych, różniących się między sobą o całkowite wielokrotności obwodu koła czyli o $2n\pi$ (n całkowite). Do zamiany stopni na miarę łukową służy wzór

$$x = \frac{\pi\alpha}{180} + 2n\pi,$$

gdzie x oznacza miarę łukową, α liczbę stopni, zaś n dowolną liczbę całkowitą.

Np. miarą łukową kąta prostego XOY jest ćwiartka okręgu, czyli $\frac{\pi}{2}$ oraz każda liczba kształtu

$\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n całkowite); miarą łukową kąta półpełnego AOA' jest połowa obwodu koła czyli π oraz każda z liczb $\pi + 2n\pi$ (n całkowite), a więc każda nieparzysta wielokrotność liczby π i t. d.

6. Przypominamy znane nierówności

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

$$|a + b| \geqslant |a| - |b|$$

prawdziwe dla wszelkich liczb a, b.

7. Powiadamy, że liczby a, b różnią się o mniej niż ε, jeżeli zachodzi nierówność $|a - b| < \varepsilon$ czyli nierówność $-\varepsilon < a - b < +\varepsilon$.

ROZDZIAŁ I.

Teorja ciągów.

Pojęcie ciągu.

1. Definicja ciągu. Jeżeli mamy prawo, wedle którego każdej liczbie naturalnej przypisana jest pewna liczba, wówczas powiadamy, że mamy dany ciąg liczb.

Przykład. — Prawo, wedle którego każdej liczbie naturalnej przypisujemy liczbę, niechaj będzie następujące: liczbie 1 przypiszmy 1, liczbie 2 przypiszmy $\frac{1}{2}$, liczbie 3 przypiszmy $\frac{1}{3}$ i t. d. — ogólnie liczbie n przypiszmy $\frac{1}{n}$. Wypisując te liczby, widzimy, że ciąg ma kształt:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \text{ i t. d.}$$

Liczbę, przypisaną jedynce, nazywać będziemy wyrazem pierwszym ciągu, liczbę, przypisaną dwójce, wyrazem drugim ciągu i t. d. — liczbę, przypisaną liczbie n, nazwiemy wyrazem n-tym ciągu.

Wyrazy ciągu oznaczać będziemy w sposób następujący: Obierzemy sobie dowolną literę alfabetu, np. a i wyraz pierwszy oznaczymy symbolem a_1, wyraz drugi symbolem a_2 i t. d., ogólnie wyraz n-ty symbolem a_n. Czytać będziemy: a pierwsze lub a ze wskaźnikiem jeden, a drugie lub a ze wskaźnikiem dwa i t. d. — a „n-te" lub a ze wskaźnikiem n. Zauważmy, że jeżeli a_n jest n-tym wyrazem ciągu, wówczas a_{n+1} jest to wyraz następny, a_{n+2} wyraz drugi zkolei po a_n i t. d. — wyraz a_{n+k}, k-ty zkolei po a_n. Podobnie a_{n-1} wyraz poprzedzający a_n, a_{n-2} wyraz poprzedzający a_{n-1} i t. d. Ciąg o wyrazie ogólnym a_n oznaczamy zwykle krótko przez $\{a_n\}$, np. ciąg $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ przez $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Zapytajmy się teraz, w jaki sposób możemy mieć dany pewien ciąg, czyli innemi słowy, w jaki sposób może nam ktoś pewien ciąg określić. W rozmaitych wypadkach rozmaicie się postępuje; niektóre sposoby określania ciągu są następujące.

1. Określamy ciąg formułą, kładąc np. $a_n = 5n$. Stąd odrazu widzimy, że:

$$a_1 = 5,\ a_2 = 5.2 = 10,\ a_3 = 5.3 = 15, \ldots\ a_{20} = \\ = 5.20 = 100 \text{ i t. d.}$$

Podobnie określamy ciąg formułą, kładąc: $a_n = 5n^2 - n + 1$ Wówczas:

$$a_1 = 5,\ a_2 = 19, \ldots\ a_{100} = 49901 \text{ i t. d.}$$

2. Określamy ciąg, mówiąc np., że a_n jest to n-ta cyfra liczby $\sqrt{2}$. Wówczas wiemy, że:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 1, \ldots \text{ i t. d.}$$

Obliczając pierwiastek z dwóch znanym algorytmem, możemy obliczyć cyfrę pierwszą, drugą, trzecią i t. d. Ciąg jest więc określony.

Podobnie określamy ciąg, mówiąc, że a_n jest n-tą cyfrą dziesiętną liczby π.

3. Innym sposobem podania ciągu jest określenie go przez t. zw. rekurencję. Sposób ten polega na tem, że podajemy wyraz pierwszy i sposób wyliczenia wyrazu n-tego przy pomocy poprzednich wyrazów. — Wyjaśnimy to na przykładach.

a) Niech pierwszy wyraz równa się zeru, a każdy inny równa się iloczynowi poprzedniego wyrazuprzez 3, powiększonemu o 2, t. j.

$$a_1 = 0, \; a_n = 3a_{n-1} + 2,$$

a więc: $a_2 = 2, \; a_3 = 8, \; a_4 = 26,$ i t. d.

b) Niech pierwszy wyraz będzie równy jeden, a każdy inny wyraz równy sumie wszystkich poprzednich wyrazów, t. j.:

$$a_1 = 1, \; a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1},$$

a więc: $a_2 = 1, \; a_3 = 2, \; a_4 = 4, \; a_5 = 8,$ i t. d.

c) Niech pierwszy wyraz ma wartość a, zaś każdy inny wyraz niech będzie równy poprzedniemu powiększonemu o pewną liczbę d, t. j.

$$a_1 = a, \; a_n = a_{n-1} + d \text{ (postęp arytmetyczny)},$$

a więc: $a_2 = a + d, \; a_3 = a + 2d$ i t. d.

2. Ciągi monotoniczne. Ciąg nazywamy rosnącym, jeżeli każdy wyraz jest większy od poprzedzającego, t. j. $a_n > a_{n-1}$, malejącym, gdy $a_n < a_{n-1}$, niemalejącym, gdy $a_n \geqslant a_{n-1}$, nierosnącym, gdy $a_n \leqslant a_{n-1}$. Każdy taki ciąg nazywamy monotonicznym. Ciągi malejące i rosnące nazywamy ściśle monotonicznemi.

P r z y k ł a d y:

1. Ciąg liczb naturalnych $\{n\}$ jest rosnący.

2. Ciąg odwrotności liczb naturalnych $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ jest malejący.

3. Ciąg $\{a_n\}$, gdzie a_n oznacza ilość liczb naturalnych podzielnych przez 3 i nie większych od n, jest niemalejący:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3, = 1,\ a_4 = 1,\ a_5 = 1,\ a_6 = 2 \text{ i t. d.}$$

4. Ciąg $\left\{\frac{1}{E(\sqrt{n})}\right\}$[1]) jest nierosnący:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = \frac{1}{2,}\ a_5 = \frac{1}{2} \text{ i t. d.}$$

3. Ciągi ograniczone. Ciąg nazywamy ograniczonym, jeżeli wszystkie wyrazy leżą w pewnym skończonym przedziale $(-M, +M)$ $(M > o)$, innemi słowy, gdy $|a_n| < M$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

P r z y k ł a d y:

1. Ciąg $\{a_n\}$, gdzie a_n jest n-tą cyfrą dziesiętną liczby $\sqrt{2}$, jest ograniczony, bo $|a_n| < 10$.

2. Ciąg $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ jest ograniczony, bo $|a_n| < 1$.

Zauważmy, że ciąg ograniczony niekoniecznie jest monotoniczny i naodwrót. Np. ciąg $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$, t.j.:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1 \quad \text{i t. d.}$$

jest ograniczony, ale nie monotoniczny, zaś ciąg liczb naturalnych $\{n\}$ jest monotoniczny, ale nie ograniczony.

4. Działania na ciągach. Na ciągach określamy działania: mnożenia przez liczbę, dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia w sposób następujący:

---

[1]) $E(x)$ oznacza największą liczbę całkowitą, nie większą od x. Np.:

$$E(5) = 5, \quad E(\pi) = 3, \quad E(log\,2) = 0 \quad \text{i t. d.}$$

Liczba $E(x)$ spełnia nierówność $x - 1 < E(x) \leqslant x$, wynikającą bezpośrednio z definicji.

Ciąg mnożymy przez liczbę, mnożąc każdy wyraz ciągu przez tę liczbę. Np. iloczyn ciągu $(a_1, a_2, \ldots a_n \ldots)$ przez liczbę m jest to ciąg $(ma_1, ma_2, \ldots ma_n \ldots)$.

Dwa ciągi dodajemy, odejmujemy lub mnożymy przez siebie, dodając, odejmując lub mnożąc odpowiednio wyrazy jednego ciągu przez wyrazy drugiego. Np. mając dwa ciągi:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots) \qquad (b_1, b_2, b_3, \ldots b_n \ldots),$$

otrzymujemy na sumę: $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$
na różnicę: $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots)$
na iloczyn: $(a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots a_n b_n \ldots)$

Iloraz możemy zdefinjować tylko z tem zastrzeżeniem, że wyrazy ciągu, przez który dzielimy, są wszystkie różne od zera, gdyż dzielnikiem ilorazu nie może być zero.

Ciąg jeden dzielimy przez drugi, w którym wszystkie wyrazy są różne od zera, dzieląc wyrazy pierwszego przez wyrazy drugiego. T. zn., że mając dwa ciągi

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots,$$

przyczem zawsze $b_n \neq 0$, otrzymujemy na iloraz ciąg:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_n}{b_n}, \ldots$$

Symbolicznie piszemy to:

$$m \{a_n\} = \{ma_n\}$$
$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$
$$\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$$
$$\{a_n\} \, . \, \{b_n\} = \{a_n \, . \, b_n\}$$
$$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

Zadania:

1. Wykazać, że ciąg $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ jest rosnący.

2. Wykazać, że ciąg $\{a_n\}$, gdzie a_n jest n-tą cyfrą dowolnie obranej liczby niewymiernej, nigdy nie jest monotoniczny.

3. Wykazać, że ciąg $\left\{\frac{E(nx)}{n}\right\}$ jest ograniczony przy dowolnie obranem x.

4. Dla jakich x ciąg $\{1 + x + x^2 + \ldots + x^n\}$ jest ograniczony?

Intuicyjne pojęcie granicy ciągu.

5. Granica ciągu monotonicznego. Do pojęcia granicy ciągu możemy dojść intuicyjnie w następujący sposób: Przypuśćmy, że mamy dany ciąg monotoniczny $\{a_n\}$, dajmy na to rosnący. Zdarzyć się mogą dwa wypadki:

1. albo liczby ciągu rosną nieograniczenie, t. zn jakkolwiek dużą liczbę weźmiemy, to wyrazy ciągu $\{a_n\}$, od pewnego począwszy, są wszystkie większe od tej liczby,

2. albo liczby ciągu $\{a_n\}$ nie rosną nieograniczenie; wówczas istnieje jedna jedyna liczba g, zwana granicą ciągu $\{a_n\}$, do której jego wyrazy zbliżają się nieograniczenie, (t. zn., że wziąwszy sobie dowolnie małą liczbę $\varepsilon > 0$, znajdziemy taki wyraz w ciągu, że wszystkie następujące po nim wyrazy różnią się od g o mniej niż ε).

Liczbę g nazywamy granicą ciągu, a piszemy to w sposób następujący: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$. O ciągu $\{a_n\}$ mówimy, że jest zbieżny do g.

Podobne uwagi można wypowiedzieć dla ciągów malejących.

Wypowiedzieliśmy więc następujące

Twierdzenie: Każdy ciąg ograniczony i monotoniczny ma granicę (jest zbieżny).

Przykłady:

1. Ciąg $\{n\}$ jest rosnący, ale nieograniczony. Podobnie ciąg $\{n^2\}$.

2. Ciąg $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ jest rosnący i ograniczony. Ma granicę 1.

3. Ciąg $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ jest ograniczony i malejący, o granicy 0.

4. Ciąg $\left\{\frac{3n+1}{5n-1}\right\}$ czyli $\left\{\frac{3}{5} + \frac{8}{5(5n-1)}\right\}$ jest ograniczony i malejący, o granicy $\frac{3}{5}$.

6. Ogólna definicja granicy ciągu. Jeżeli teraz mamy ciąg $\{a_n\}$ niekoniecznie monotoniczny, to może się zdarzyć, że istnieje liczba g, do której wyrazy ciągu zbliżają się nieograniczenie (t. zn. że obrawszy sobie dowolnie małą liczbę $\varepsilon > 0$, znajdziemy taki wyraz w ciągu, że wszystkie następne różnią się od g o mniej niż ε).

Można udowodnić, że jeżeli liczba taka istnieje, to tylko jedna.

Liczbę g nazywamy granicą ciągu i znaczymy jak poprzednio: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$.

Ciąg $\{a_n\}$ nie posiadający granicy, nazywamy ciągiem rozbieżnym.

Przykłady:

1. Ciąg $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ jest zbieżny i ma granicę zero.

2. Ciąg $\{(-1)^n\}$ jest rozbieżny.

7. Pewne kryterjum zbieżności. Niełatwą jest czasem rzeczą stwierdzić, czy pewien ciąg ma granicę, czy nie. W wielu wypadkach korzystnem okazuje się następujące dość oczywiste

Twierdzenie: Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ da się zamknąć między dwoma ciągami $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$, zbieżnemi do tej samej granicy, wówczas ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do wspólnej granicy ciągów $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$.

Uwaga: Powiadamy, że ciągi $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ zamykają ciąg $\{a_n\}$, jeżeli dla każdego n zachodzi następująca nierówność:

$$b_n \leqslant a_n \leqslant c_n.$$

Przykłady:

1. Ciąg $\left\{\frac{E(nx)}{n}\right\}$ ma granicę x. Jest bowiem

$$nx - 1 < E(nx) \leqslant nx,$$

a więc
$$x - \frac{1}{n} < \frac{E(nx)}{n} \leqslant x,$$

a ponieważ każdy z ciągów $\left\{x - \frac{1}{n}\right\}$, $\{x\}$ jest zbieżny do granicy x, więc to samo stosuje się do ciągu $\left\{\frac{E(nx)}{n}\right\}$ zawartego między niemi.

2. Ciąg $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$, gdzie a_n jest n-tą cyfrą liczby π, ma granicę 0, bo jest zawarty między ciągami $\{0\}$, $\left\{\frac{9}{n}\right\}$, mającemi granicę 0.

8. Działania na ciągach zbieżnych. Jeżeli $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są ciągami zbieżnemi, wówczas można udowodnić następujące

Twierdzenie: Ciągi $\{a_n \pm b_n\}$, $\{c \, . \, a_n\}$, $\{a_n \, . \, b_n\}$ są zbieżne i:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \{a_n \pm b_n\} = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

2) Jeżeli c jest dowolną liczbą, to

$$\lim_{n \to \infty} c \, . \, a_n = c \lim_{n \to \infty} a_n$$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \{a_n \, b_n\} = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \, . \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

Ponadto, jeżeli $b_n \neq 0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} b_n \neq 0$, to ciąg $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ jest zbieżny i:

$$\lim_{n \to \infty} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n}$$

9. Ciągi rozbieżne do $\pm\,\infty$. Wprowadzimy następujący wygodny sposób wyrażania się:

O ciągu $\{a_n\}$ mówimy, że jest rozbieżny do $+\infty$, jeżeli do każdej dowolnie dużej liczby A istnieje taki wyraz w ciągu, że począwszy od niego każdy następujący jest większy od A. Piszemy to: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

Takim ciągiem jest np. $\{n\}$, $\{2^n\}$, $\{n^2 - n\}$ i t. p.

Podobnie mówimy, że ciąg a_n jest rozbieżny do $-\infty$, jeżeli do każdej dowolnie małej (algebraicznie) liczby A istnieje taki wyraz w ciągu, że począwszy od niego każdy następny jest mniejszy od A. Piszemy to: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$.

Przykłady takich ciągów otrzymamy, mnożąc poprzednio podane ciągi przez (-1). Innemi przykładami są: $\{n - n^3\}$ $\{-10^n\}$ i t. p.

Należy zawsze pamiętać o tem, że ciągi rozbieżne do $+\infty$ lub $-\infty$ nie mają granicy i że symbole $+\infty$ i $-\infty$ nie są bynajmniej liczbami, a zostały wprowadzone jedynie dla uproszczenia pisowni.

Uwaga. Jeżeli piszemy $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$, bez dalszego dodatku, to zawsze milcząco zakładamy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny, że więc g jest liczbą rzeczywistą, a nie jednym z symboli $+\infty$, $-\infty$.

10. Twierdzenia o ciągach rozbieżnych do $\pm\infty$. Można udowodnić następujące twierdzenia:

a) Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, a $\lim\limits_{n \to \infty} \{b_n\} = +\infty$, to

$$\lim_{n \to \infty} \{a_n + b_n\} = +\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \{a_n - b_n\} = -\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = 0$$ przy założeniu, że $b_n \neq 0$ dla wszystkich n.

b) Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty$, to

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = +\infty$$

c) Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty$, to

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = -\infty$$

d) Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$, $g \neq 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty$, to

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = +\infty \qquad \text{przy } g > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = -\infty \qquad \text{przy } g < 0$$

e) Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$, $g \neq 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$, $b_n > 0$, to

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \qquad \text{przy } g > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty \qquad \text{przy } g < 0$$

Zadania:

1. Wykazać, że ciąg $\left\{\frac{\sin n x}{n}\right\}$ ma granicę 0, przy dowolnie obranem x.

2. Czy ciąg $\{(-1)^n n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$, lub $-\infty$?

3. Wykazać, że ciąg $\{n^3 - 5n^2 + 3\}$ czyli: $\left\{n^3\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^3}\right)\right\}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

4. To samo dla ciągu $\{3^n - n\}$ przy użyciu nierówności $3^n \geqslant 1 + 2n$. (Por. wstęp 3.)

* Ścisła definicja granicy ciągu.

11. Odcinki ciągu. Jeżeli mamy dany jakiś ciąg $a_1, a_2, \ldots a_n$, wówczas n- tym odcinkiem tego ciągu nazywać będziemy zbiór liczb, otrzymany z danego ciągu przez odrzucenie pierwszych $(n-1)$ wyrazów. Np. odcinkiem szóstym będzie zbiór $a_6, a_7, a_8, \ldots$ odcinkiem setnym $a_{100}, a_{101}, a_{102}, \ldots$. W szczególności, w skład odcinka pierwszego wchodzą wszystkie wyrazy.

Odcinki ciągu znaczyć będziemy symbolami: A_1, A_2, A_3, ... i t. d. — wskaźnik u dołu oznacza, który to jest odcinek. Zatem np. A_6 jest to odcinek szósty.

O odcinkach można wypowiedzieć kilka oczywistych uwag, którą są potrzebne do zrozumienia późniejszych rzeczy.

1. Jasną jest rzeczą, że jeżeli mamy dwa dowolne odcinki, np. A_{50} i A_{100}, to zawsze odcinek późniejszy mieści się we wcześniejszym; w naszym więc wypadku A_{100} mieści się w A_{50}.

2. Jeżeli weźmiemy dowolny odcinek, np. A_{100}, to tylko skończona liczba wyrazów ciągu do odcinka tego nie należy. W naszym wypadku tylko 99 wyrazów pierwszych nie należy do A_{100}, to jest. wyrazy a_1, a_2, ... a_{99}.

3. Naodwrót, jeżeli weźmiemy dowolną skończoną liczbę wyrazów, to istnieje odcinek, który ich nie zawiera (np. każdy odcinek, którego wskaźnik jest większy od wszystkich wskaźników tych wyrazów).

4. Podobnie, jeżeli weźmiemy dwa dowolne odcinki, np. A_{50} i A_{100}, to tylko skończona liczba wyrazów odcinka wcześniejszego nie mieści się w późniejszym. W naszym przykładzie 50 pierwszych wyrazów odcinka A_{50}, a więc wyrazy: a_{50}, a_{51}, a_{52}, ... a_{99} nie mieszczą się w odcinku A_{100}. Wszystkie pozostałe wyrazy odcinka A_{50} mieszczą się w odcinku A_{100}.

12. Ciągi, różniące się tylko porządkiem wyrazów. O dwóch ciągach powiadamy, że różnią się tylko porządkiem wyrazów, jeżeli każda liczba występuje jednakową, skończoną lub nieskończoną ilość razy, w obu ciągach.

Przykłady. Następujące ciągi różnią się tylko porządkiem wyrazów:

1. $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ i $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1 \ldots)$

2. $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ i $(2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots)$

O takich ciągach można wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. Jeżeli dwa ciągi różnią się tylko porządkiem wyrazów, to każdy odcinek jednego, zawiera jakiś odcinek drugiego.

Dowód. Niechaj pierwszym ciągiem będzie a_1, a_2, a_3, ... drugim zaś b_1, b_2. b_3, ... Oba ciągi różnią się tylko porządkiem wyrazów. Weźmy pod uwagę jakiś odcinek ciągu pierwszego, np. A_n. Odcinek A_n nie zawiera tylko wyrazów a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1}. Wyrazy te występują w ciągu b_1, b_2, ... b_n, ... (być może w innym porządku); ponieważ jest ich jednak liczba skończona, więc w ciągu b_1, b_2, ... istnieje taki odcinek, nazwijmy go B_r, który ich nie zawiera. Jasną jest teraz rzeczą, że B_r mieści się w A_n, gdyż każdy wyraz odcinka B_r jest późniejszy od a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1}, a tylko tych wyrazów A_n nie zawiera.

Przykład. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczb naturalnych 1, 2, 3, ... t. zn. $a_n = n$, a $\{b_n\}$ ciągiem: 2, 1, 4, 3, 6, 5, ... t. zn. $b_{2n-1} = 2n$, $b_{2n} = 2n - 1$. Odcinek A_6 jest zawarty np. w B_{10}.

13. Pojęcie przybliżenia. Powiadamy, że jakaś liczba a przybliża liczbę b, z błędem mniejszym niż ε, jeżeli $|a - b| < \varepsilon$. Mówimy również, że a jest wartością przybliżoną liczby b z błędem mniejszym niż ε. Rzeczą jasną jest, że jeżeli a przybliża b z błędem mniejszym od ε, to a przybliża również b z błędem mniejszym od η, gdzie η jest dowolne, ale większe od ε. Gdyby natomiast η było mniejsze od ε, to a może przybliżać b z błędem mniejszym od η lub nie.

Pojęcie wartości przybliżonej jest bardzo ważne, gdyż w praktyce operujemy prawie wyłącznie liczbami przybliżonemi, bądź dlatego, że dokładnych wartości nie znamy (pomiar jest zawsze niedokładny z większym lub mniejszym błędem, zależnie od precyzji narzędzia, którem mierzymy), bądź dlatego, że działania, jakie mamy na danych liczbach wykonać, byłyby bardzo skomplikowane i żmudne, gdybyśmy brali ich wartości dokładne; w rachunkach posługujemy się więc, gorszem lub lepszem, przybliżeniem, zależnie od tego, o jaką dokładność nam chodzi.

Np. 1. Liczba 3·1416 jest przybliżeniem na $\frac{1}{20.000}$ liczby π, to znaczy:

$$|\pi - 3{\cdot}1416| < \frac{1}{20{,}000}.$$

2. Liczba 1·41 jest przybliżeniem $\sqrt{2}$ na $\frac{1}{200}$.

Jeżeli a przybliża b z błędem mniejszym niż ε, to mamy, jak wiemy, $|a - b| < \varepsilon$. Możemy wówczas napisać też:

$$a - \varepsilon \leqslant b \leqslant a + \varepsilon \quad \text{(porównaj wstęp 7).}$$

Powiadamy, że odcinek ciągu przybliża pewną liczbę g z błędem mniejszym niż ε, jeżeli każdy wyraz tego odcinka przybliża g z błędem mniejszym niż ε.

Np. o ciągu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n} \ldots$ możemy powiedzieć, że odcinek A_{1001} przybliża zero z błędem mniejszym niż $\frac{1}{1000}$.

Jeżeli jakiś odcinek ciągu przybliża g z błędem mniejszym niż ε, to każdy odcinek w nim zawarty, czyli każdy późniejszy, przybliża też g z błędem mniejszym niż ε.

Np. w przykładzie poprzednim A_{2000} przybliża też zero z błędem mniejszym niż $\frac{1}{1000}$.

14. Definicja granicy. Powiadamy, że liczba g jest granicą ciągu $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ jeżeli w ciągu tym istnieją odcinki, które przybliżają g z błędem tak małym, jak nam się podoba; innemi słowy, jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje odcinek, który przybliża g z błędem mniejszym niż ε[1]).

Piszemy to: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$, a zamiast mówić, że ciąg ma granicę g, mówimy nieraz, że ciąg jest zbieżny do g, lub że ciąg zmierza do g. Podobnie mówimy nieraz: „ciąg jest zbieżny“, zamiast „ciąg ma granicę“.

Przykłady:

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$

2. Ciąg $\{0{\cdot}6,\ 0{\cdot}66,\ 0{\cdot}666, \ldots\}$ ma granicę równą liczbie $0{\cdot}666\ldots = \frac{2}{3}$.

3. Ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n}{n+1}$ ma jako granicę liczbę 1. Żeby to wykazać, weźmy pod uwagę dowolny odcinek A_N. Jeżeli a_n należy do odcinka A_N, czyli jeżeli $n \geqslant N$, to

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N},$$

a więc odcinek A_N przybliża liczbę 1 z błędem mniejszym niż $\frac{1}{N}$. Jeżeli więc chcemy, żeby błąd był mniejszy od pewnej liczby $\varepsilon > 0 \left(\text{np. } \varepsilon = \frac{1}{1000}\right)$, to wystarczy obrać N tak, abyśmy mieli $\frac{1}{N} < \varepsilon$, czyli $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Każdy więc odcinek rzędu większego niż $\frac{1}{\varepsilon}$ przybliża 1 z błędem mniejszym niż ε. Ponieważ ε jest dowolne, więc

[1]) Jak łatwo widać, def. granicy, podana poprzednio, jest równoważna z powyższą.

istnieją odcinki, które przybliżają 1 z błędem dowolnie małym,

zatem $$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Jest to typowy sposób udowadniania, że jakiś ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g. Zanalizujemy ten dowód.

A więc bierzemy naprzód pod uwagę dowolny odcinek A_N i dowolny wyraz a_n tego odcinka, czyli wyraz, którego wskaźnik jest większy lub równy N. Badamy różnicę $|g - a_n|$ i staramy się, znając N, wyznaczyć jedną liczbę, od której wszystkie $|g - a_n|$ byłyby mniejsze, jeżeli tylko $n \geqslant N$, t. zn. jeżeli tylko a_n należy do A_N. W poprzednim przykładzie liczbą tą było $\frac{1}{N}$. Liczba ta będzie wyznaczona pewnem wyrażeniem, w którem występuje tylko N, a nie występuje n. Następnie staramy się wykazać, że istnieją odcinki, dla których odpowiednia liczba jest dowolnie mała.

Jeżeli zatem ciąg ma granicę g, to do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje w ciągu odcinek A_N, którego wszystkie wyrazy przybliżają g z błędem mniejszym niż ε. Więc jedynie takie wyrazy mogą nie przybliżać g z błędem mniejszym niż ε, które do odcinka A_N nie należą, a tych jest tylko skończona liczba. Możemy zatem powiedzieć:

Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$ i jeżeli $\varepsilon > 0$, to tylko skończona liczba wyrazów ciągu różni się się od g o ε lub o więcej niż ε. Naodwrót: Jeślibyśmy o danym ciągu $\{a_n\}$ wykazali, że istnieje liczba g taka, że przy dowolnie obranem $\varepsilon > 0$ tylko skończona liczba wyrazów tego ciągu różni się od g co najmniej o ε, to możemy wtedy twierdzić, że $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$; obierając bowiem dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, możemy twierdzić, że istnieje w ciągu taki odcinek A_n, który żadnego z tej skończonej liczby wyrazów nie zawiera, a więc, którego wszystkie wyrazy przybliżają g z błędem mniejszym niż ε.

Nieraz powyższe postępowanie łatwo pozwala dowieść, że pewna liczba jest granicą ciągu.

Przykład: Wykazać, że $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n+1}{5n+2} = \frac{3}{5}$.

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i zbadajmy, ile jest wyrazów, różniących się od $\frac{3}{5}$ co najmniej o ε. W tym celu zbadajmy różnicę $\left|\frac{3}{5} - a_n\right|$. Otóż:

$$\left|\frac{3}{5} - a_n\right| = \left|\frac{3}{5} - \frac{3n+1}{5n+2}\right| = \left|\frac{1}{25n+10}\right| = \frac{1}{25n+10}$$

Te więc tylko wyrazy różnią się od $\frac{3}{5}$ co najmniej o ε, dla których $\frac{1}{25n+10} \geqslant \varepsilon$ (n jest tutaj wskaźnikiem badanego wyrazu), lecz stąd:

$$25n + 10 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$$

$$25n \leqslant \frac{1}{\varepsilon} - 10$$

więc:
$$n \leqslant \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 10}{25}$$

Lecz liczb naturalnych, nie większych od pewnej danej liczby jest co najwyżej skończona liczba, a więc w szczególności liczb naturalnych nie większych od $\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 10}{25}$

może wogóle nie być $\left(\text{np. dla } \varepsilon = 5,\ \varepsilon = \frac{1}{20}\right)$, a jeżeli są, to tylko w skończonej liczbie. Widzimy więc, że tylko dla skończonej liczby wyrazów jest $\left|\frac{3}{5} - a_n\right| \geqslant \varepsilon$; a więc $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{5}$.

U w a g a: Przy dowodzie, że dany ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g, t. j. że do k a ż d e g o $\varepsilon > 0$ istnieje odcinek A_n, przybliżający g z błędem mniejszym niż ε, można zawsze przyjąć, że ε jest mniejsze od pewnej dowolnej liczby dodatniej α, np. mniejsze od $\frac{1}{100}$, bo odcinek A_n, przybliżający g z błędem mniejszym od $\varepsilon < \alpha$, przybliża g tem bardziej z błędem mniejszym od dowolnego $\varepsilon \geqslant \alpha$. Z uwagi tej niebawem skorzystamy.

Z a d a n i a :

1. Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$ ma granicę $\frac{1}{2}$.

2. Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{x^n}(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)$ jest dla $x > 1$ zbieżny do granicy $\frac{x}{x-1}$.

3. Wykazać, że ciąg $\left\{\frac{3n^2 - 2n + 6}{7n^2 + 12}\right\}$ ma granicę $\frac{3}{7}$.

4. Wykazać, że ciąg $\left\{\frac{\binom{n}{5}}{n^5}\right\}$ ma granicę $\frac{1}{120}$

* Twierdzenia o granicy ciągów.

15. Zbieżność ciągów o równych wyrazach. Jeżeli wyrazy ciągu $\{a_n\}$ są wszystkie równe tej samej liczbie g, to liczba ta jest granicą ciągu.

Np. ciąg $a_n = \frac{1}{2}$, więc $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$ ma granicę $\frac{1}{2}$.

Dowód wynika z uwagi następującej: Gdy weźmiemy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, to wszystkie wyrazy przybliżają g z błędem mniejszym niż ε, bo z błędem $= 0$:

$$| g - a_n | = | g - g | = 0.$$

16. Niezależność granicy od porządku wyrazów. Granica ciągu zbieżnego nie zależy od porządku wyrazów, t. zn. granica ciągu zbieżnego nie zmieni się, gdy zmienimy w nim porządek wyrazów.

Np. Ciąg $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ma granicę 0. Jeżeli zmienimy porządek wyrazów w ten sposób, że wyraz rzędu parzystego przesuniemy o jedno miejsce wstecz, wyraz zaś rzędu nieparzystego przesuniemy o jedno miejsce wprzód to otrzymamy ciąg $\{b_n\}$ następujący:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Otóż ten nowy ciąg ma też granicę 0.

D o w ó d: Niechaj ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g. Niechaj $\{b_n\}$ będzie to ciąg powstały z ciągu $\{a_n\}$ przez zmianę porządku wyrazów. Ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$, więc jeżeli weźmiemy sobie dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, to istnieje odcinek A_N, który przybliża g z błędem mniejszym niż ε. Lecz na mocy twierdzenia ze str. 16 odcinek A_N zawiera w sobie jakiś odcinek ciągu $\{b_n\}$, powiedzmy odcinek B_k. Jasną jest rzeczą, że odcinek B_k, jako zawarty w odcinku A_N, przybliża g też z błędem mniejszym niż ε. A więc jeżeli obierzemy sobie dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, to znajdziemy w ciągu $\{b_n\}$ odcinek B_k, który przybliża g z błędem mniejszym niż ε, czyli $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = g$.

U w a g a: Z twierdzenia powyższego wynika, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny, to każdy ciąg, różniący się od niego tylko porządkiem wyrazów, jest również rozbieżny.

17. Zbieżność ciągów częściowych. Każdy ciąg częściowy ciągu zbieżnego ma tę samą granicę, co ciąg pierwotny.

U w a g a: Ciąg częściowy otrzymujemy, wyjmując z ciągu danego nieskończoną liczbę wyrazów i przyporządkowując je liczbom naturalnym w tym porządku, w jakim występowały pierwotnie.

P r z y k ł a d: Uważajmy ciąg $a_n = \dfrac{1}{n}$. Wybierzmy z niego wszystkie wyrazy o wskaźnikach nieparzystych. Otrzymamy nowy ciąg $\{b_n\}$:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots,$$

więc $b_n = \dfrac{1}{2n-1}$. Otóż ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, więc $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$.

D o w ó d: Niechaj $\{a_n\}$ będzie ciągiem pierwotnym zbieżnym do granicy g, zaś $\{b_n\}$ jego ciągiem częściowym. Do dowolnego $\varepsilon > 0$, dobierzemy taki odcinek A_N, który przybliża g z błędem mniejszym niż ε.

Lecz jasną jest rzeczą, że odcinek A_N zawiera w sobie jakiś odcinek B_k ciągu $\{b_n\}$, gdyż $\{b_n\}$ jest ciągiem częściowym ciągu $\{a_n\}$. Wobec tego B_k przybliża też g z błędem mniejszym niż ε. A więc wziąwszy sobie dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, znajdziemy odcinek B_k przybliżający g z błędem mniejszym niż ε, t. zn. $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = g$.

Przykład: Ciąg $\left\{\frac{3n+1}{5n+2}\right\}$ jest (str. 21) zbieżny do granicy $\frac{3}{5}$. Zatem ciągi

$$\left\{\frac{3(n^2+n)+1}{5(n^2+n)+2}\right\}, \quad \left\{\frac{3(2n+1)+1}{5(2n+1)+2}\right\} \text{ i } \left\{\frac{5 \cdot 2^{n^2}+1}{5 \cdot 2^{n^2}+2}\right\},$$

które są jego ciągami częściowemi, mają tę samą granicę.

Uwaga: Ważną jest rzeczą pamiętać, że jeżeli ciąg częściowy jest zbieżny, to ciąg pierwotny nie musi być zbieżny.

Np. ciąg $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, \ldots\ldots$ jest rozbieżny, ciąg zaś częściowy: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\ldots$ jest zbieżny do zera.

18. Granica ciągu o wyrazach nieujemnych. Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu zbieżnego są nieujemne, to granica jest również nieujemna.

Dowód wynika z uwagi, że jeżeli μ jest liczbą ujemną, a d zaś liczbą nieujemną, to $|d-\mu| \geqslant |\mu|$. Czyli liczba nieujemna różni się od liczby ujemnej co najmniej o bezwzględną wartość liczby ujemnej. Jeżeli więc mamy jakiś ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach nieujemnych i jakąś liczbę ujemną μ, to żaden odcinek tego ciągu nie przybliża μ z błędem mniejszym niż $|\mu|$. Błąd ten więc nie może być dowolnie mały; zatem μ nie jest granicą naszego ciągu. Ciąg więc ma jako granicę liczbę nieujemną.

19. Granica sumy i różnicy ciągów. Suma dwóch ciągów zbieżnych jest ciągiem zbieżnym do sumy granic tych ciągów.

Przykład: Niechaj ciąg $\{a_n\}$ będzie ciągiem $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$, ciąg $\{b_n\}$, ciągiem $\left\{\frac{3n-1}{5n+1}\right\}$, ciąg $\{c_n\}$, ciągiem $\left\{\frac{3n-1}{5n+1}+1-\frac{1}{n}\right\}=\left\{\frac{8n^2-5n-1}{5n^2+n}\right\}$.

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{5}$, więc $\lim c_n =$ $= 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$.

Dowód: Niechaj $\{a_n\}$ ma granicę a, ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b. Wyrazy ciągu $\{c_n\}$, który jest ich sumą, mają kształt: $c_n = a_n + b_n$. Otóż mamy udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a + b$.

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, więc wziąwszy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, znajdziemy odcinki A_N i B_k, które przybliżają odpowiednio a i b z błędem mniejszym niż ε.

Niechaj R będzie liczbą całkowitą większą od N i od k. Oczywista, że odcinki A_R i B_R, jako zawarte odpowiednio w odcinkach A_N i B_k, też przybliżają a względnie b z błędem mniejszym niż ε. Ponieważ każdy wyraz c_n, należący do C_R, jest kształtu: $(a_n + b_n)$, gdzie a_n i b_n należy do A_R, względnie do B_R więc

$$|a - a_n| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |b - b_n| < \varepsilon, \quad \text{zatem}$$

$$|a + b - c_n| = |a + b - a_n - b_n| = |(a - a_n) + (b - b_n)| \leqslant |a - a_n| + |b - b_n| < 2\varepsilon.$$

A więc odcinek C_R przybliża $(a+b)$ z błędem mniejszym niż 2ε. Gdybyśmy więc chcieli, żeby odcinek C_R przybliżał nam $(a+b)$ z błędem mniejszym niż pewna dowolna liczba $\eta > 0$, wystarczyłoby na początku wziąć takie $\varepsilon > 0$, abyśmy mieli $2\varepsilon < \eta$, czyli wystarczyłoby wziąć $\varepsilon < \frac{\eta}{2}$. A więc wziąwszy sobie dowolną liczbę $\eta > 0$, znajdziemy taki odcinek C_R, który przybliża $(a+b)$ z błędem mniejszym od η, t. zn. $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = a + b$.

P r z y k ł a d: Ciąg

$$\left\{\frac{2n}{n^2-1}\right\} = \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\} + \left\{\frac{1}{n-1}\right\}$$

jest zbieżny do zera.

U w a g a: Twierdzenie powyższe możemy tak napisać: Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są ciągami zbieżnemi, to

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n.$$

Podobne twierdzenie stosuje się do różnicy dwóch ciągów, a więc:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n$$

Dowód jest analogiczny, gdyż:

$$|a - b - c_n| = |a - b - a_n + b_n| =$$
$$= |(a - a_n) - (b - b_n)| \leqslant |a - a_n| + |b - b_n| \leqslant 2\varepsilon.$$

20. Granica iloczynu ciągów. Iloczyn dwu ciągów zbieżnych jest ciągiem zbieżnym, a jego granica równa się iloczynowi granic tych ciągów.

P r z y k ł a d: Niechaj ciąg $\{a_n\}$ będzie ciągiem $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$, ciąg $\{b_n\}$ ciągiem $\left\{\frac{3n-1}{5n-1}\right\}$, ciąg $\{c_n\}$ ciągiem $\{a_n \,.\, b_n\}$. Wówczas:

$$c_n = a_n \,.\, b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{3n-1}{5n-1} =$$
$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3n-1}{5n-1} = \frac{3n^2-4n+1}{5n^2-n},$$

ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \frac{3}{5}$, więc $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = $ $= 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$.

D o w ó d: Niechaj ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a, ciąg $\{b_n\}$ granicę b. Wyrazy ciągu $\{c_n\}$, który jest ich iloczynem, są: $c_n = a_n \,.\, b_n$. Mamy udowodnić, że: $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = a \,.\, b$.

Ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, zaś $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, więc wziąwszy dowolną liczbę dodatnią $\varepsilon < 1$ (por. uwagę str. 22), znajdziemy odcinki A_N i B_k, które przybliżają odpowiednio a i b z błędem mniejszym niż ε. Niechaj R będzie liczbą całkowitą, większą równocześnie od N i k. Odcinki A_R i B_R, jako zawarte odpowiednio w A_N i B_k, też przybliżają odpowiednio a i b z błędem mniejszym niż ε. Zbadajmy, z jakim błędem odcinek C_R przybliża $a \,.\, b$. Każdy wyraz c_n odcinka C_R jest równy $a_n \,.\, b_n$, gdzie a_n i b_n należą do A_R względnie B_R. Ponieważ

$$|a - a_n| < \varepsilon \qquad |b - b_n| < \varepsilon, \quad \text{więc kładąc}$$

$$a_n - a = \alpha_n \qquad b_n - b = \beta_n, \qquad \text{mamy:}$$

$$|a_n b_n - ab| = |(a+\alpha_n)(b-\beta_n) - a.b| = |\alpha_n b - \beta_n a - \alpha_n\beta_n| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_n b| + |\beta_n a| + |\alpha_n \beta_n| = |a_n - a|\,|b| + |b_n - b|\,|a| + |a_n -$$
$$- a|\,|b_n - b| < \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon) < \varepsilon(|a| + |b| + 1).$$

A więc:

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon(|a| + |b| + 1).$$

Cdybyśmy więc chcieli, żeby odcinek C_R przybliżał $a.b$ z błędem mniejszym niż pewna dowolna liczba $\eta > 0$, wystarczyłoby wziąć na początku takie $\varepsilon > 0$, by

$$\varepsilon(|a| + |b| + 1) < \eta \qquad \text{czyli}$$

$$\varepsilon < \frac{\eta}{|a| + |b| + 1}.$$

A więc wziąwszy sobie dowolną liczbę $\eta > 0$, znaleźć możemy taki odcinek C_R, że wszystkie jego wyrazy, przybliżają $a.b$ z błędem mniejszym niż η, t. zn. $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = ab$.

Uwaga: Twierdzenie powyższe możemy tak napisać: Jeżeli $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są ciągami zbieżnemi, to

$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n$$

Przykład: Ciąg

$$\left\{\frac{(2n-1)(3n-2)}{n^2}\right\} = \left\{\frac{2n-1}{n}\right\} \cdot \left\{\frac{3n-2}{n}\right\} = \left\{2 - \frac{1}{n}\right\} \cdot \left\{3 - \frac{2}{n}\right\}$$

jest zbieżny i ma granicę 6.

21. Granica iloczynu ciągu przez liczbę. Jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym do granicy a, zaś m jest dowolną liczbą, to ciąg $\{m.\, a_n\}$ jest zbieżny do granicy $m.\, a$, czyli

$$\lim_{n \to \infty} (m.\, a_n) = m. \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Dowód otrzymamy z poprzedniego twierdzenia, kładąc $b_n = m$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Przykład: Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do granicy g, to ciąg $\{-a_n\}$ ma granicę $-g$.

22. Granica ilorazu ciągów. Iloraz dwu ciągów zbieżnych ma granicę równą ilorazowi granic, pod warunkiem, że wszystkie wyrazy i granica ciągu, przez który dzielimy, są różne od zera.

Np. niechaj będzie:

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{3n+1}{5n+1}$$

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{5n^2+6n+1}{3n^2+n}$$

Ponieważ:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n = 1, \qquad b = \lim_{n \to \infty} b_n = \frac{3}{5}$$

więc:

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 1 : \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$$

Dowód: Postępując podobnie jak w dowodzie o granicy iloczynu, otrzymujemy odcinki A_R i B_R, przyprzybliżające a i b z błędem mniejszym niż ε. Przyjmijmy przytem, że $\varepsilon < \frac{1}{2}|b|$. (Por. uwagę str. 22.)

Zbadajmy teraz, z jakim błędem odcinek C_R przybliża $\frac{a}{b}$.

Dając literom α_n i β_n znaczenie takie jak w dowodzie twierdzenia o iloczynie, mamy:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b\,\alpha_n - a\,\beta_n}{b\,(b+\beta_n)}\right| \leqslant \frac{|b|\;|\alpha_n| + |a|\;|\beta_n|}{|b|\;|b+\beta_n|}$$

Ponieważ: $|\varepsilon| < \frac{1}{2}|b|$, więc:

$$|b+\beta_n| \geqslant |b| - |\beta_n| \geqslant |b| - \varepsilon \geqslant |b| - \frac{1}{2}|b|,$$

zatem: $$|b+\beta_n| \geqslant \frac{1}{2}|b|$$

Na mocy powyższej nierówności możemy napisać:

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{|b|+|a|}{\frac{1}{2}|b|^2}\,\varepsilon$$

Gdybyśmy więc chcieli, żeby odcinek C_R przybliżał $\frac{a}{b}$ z błędem mniejszym, niż pewna dowolna liczba $\eta > 0$, wystarczyłoby wziąć na początku takie $\varepsilon > 0$, by

$$1)\quad \varepsilon < \frac{1}{2}|b|$$

$$2)\quad \frac{|b|+|a|}{\frac{1}{2}|b|^2}\,\varepsilon < \eta$$

Innemi słowy wystarcza wziąć ε dodatnie, mniejsze od liczb $\frac{1}{2}|b|$ i $\dfrac{\frac{1}{2}|b^2|\ \eta}{|a|+|b|}$

A więc wziąwszy sobie dowolną liczbę $\eta > 0$, znaleźć możemy taki odcinek C_R, że wszystkie jego wyrazy przybliżają $\frac{a}{b}$ z błędem mniejszym niż η, t. zn., że

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{a}{b}$$

U w a g a: Twierdzenie powyższe napisać możemy w sposób następujący:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

(przy wymienionych założeniach).

Zadania:

1. Wykazać, że ciąg $\left\{\dfrac{3n^2+18}{\frac{1}{2}n^3+1}\right\}$ ma granicę zero.

2. Wykazać, że ciąg $\left\{\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}\right\}$ ma granicę $\dfrac{1}{k!}$

3. Wykazać, że ciąg $\left\{\dfrac{5n^2+2}{7n-9}\left(1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{7n-1}{14n^2+3}\right)\right\}$ ma granicę $\dfrac{5}{7}$.

4. Wykazać, że jeżeli ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mają tę samą granicę, to ciąg $\{a_n - b_n\}$ ma granicę zero.

* Kryterja zbieżności.

23. Zbieżność ciągów monotonicznych i ograniczonych. Zapytajmy się teraz, w jaki sposób można stwierdzić, czy dany ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny. Otóż już poprzednio wypowiedzieliśmy twierdzenie następujące:

Każdy ciąg ograniczony i monotoniczny jest zbieżny.

Dowód tego twierdzenia pomijamy jako trudniejszy.

Zauważmy jednak, że jest ono bardzo oczywiste. Np. ciąg pól 2^n boków umiarowych wpisanych w koło jest rosnący, ograniczony (bo wszystkie leżą np. w kwadracie na kole opisanym) i, jak już to było intuicyjnie jasne dla Archimedesa, ma jako granicę pole koła.

Nie każdy jednak ciąg zbieżny jest monotoniczny. Np. ciąg $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ nie jest monotoniczny, a jak łatwo widzieć, ma granicę 1.

24. Warunek Cauchy'ego. Powiadamy, że ciąg $\{a_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jeżeli istnieje prawo, przypisujące każdej liczbie dodatniej ε odcinek, którego dwa jakiekolwiek wyrazy różnią się od siebie o mniej niż ε.

T w i e r d z e n i e: Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego (t. j. warunek Cauchy'ego jest dla zbieżności konieczny).

P r z y k ł a d: Ciąg $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, który, jak wiemy (str. 19) jest zbieżny do granicy 1, spełnia warunek Cauchye'go. Mamy bowiem:

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| = \frac{|n-m|}{(n+1)(m+1)} \leqslant \frac{n+m}{n.\, m} = \\ = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Jeżeli więc $m > N$, $n > N$, to

$$|a_n - a_m| < \frac{2}{N}.$$

Dla $N > \frac{2}{\varepsilon}$, $m > N$, $n > N$ jest więc:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

D o w ó d: Niechaj $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Jeżeli η jest dowolną liczbą dodatnią, to istnieje odcinek A_N, który przybliża a z błędem mniejszym niż η. Niechaj a_m i a_p będą wyrazami odcinka A_N. Zatem

$$|a_m - a| < \eta$$
$$|a_p - a| < \eta.$$

Ponieważ:

$$|a_m - a_p| = |a_m - a + a - a_p| \leqslant |a_m - a| + |a - a_p|,$$

więc:

$$|a_m - a_p| < 2\eta.$$

Jeżeli teraz ε będzie dowolną liczbą dodatnią, to biorąc $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, widzimy, że dwa dowolne wyrazy a_m i a_p odcinka A_N różnią się od siebie o mniej niż $2\eta = \varepsilon$. Ciąg nasz spełnia więc warunek Cauchy'ego.

Można również udowodnić twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie. Każdy ciąg, spełniający warunek Cauchy'ego, jest zbieżny (t. j. warunek Cauchy'ego jest dla zbieżności dostateczny).

Zbierając oba ostatnie twierdzenia, możemy powiedzieć:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym dla zbieżności ciągu jest to, by ciąg spełniał warunek Cauchy'ego.

25. Ograniczoność ciągów zbieżnych. Jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym do granicy g, to wszystkie wyrazy, od pewnego począwszy, spełniają nierówność $|a_n - g| < 1$, czyli $-1 < a_n - g < +1$, lub $g - 1 < a_n < g + 1$. Z tej nierówności, oraz z uwagi na to, że pozostałych wyrazów jest tylko liczba skończona, wynika, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony.

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie: Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Odwrócenie tego twierdzenia jest fałszywe, jak widać na przykładzie ciągu $\{(-1)^n\}$, ograniczonego i rozbieżnego.

26. Zbieżność ciągu, zawartego między dwoma innemi. Jeżeli mamy dane trzy ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ spełniające następujące warunki:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = g$

2) $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$),

to ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = g$.

Dowód: Niechaj ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieją takie odcinki A_N i B_N, które przybliżają g z błędem mniejszym niż ε. Wykażemy, że i odcinek C_N przybliża g z błędem mniejszym niż ε. Jeżeli bowiem c_n należy do odcinka C_N, wówczas na mocy założenia

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n,$$

więc:

$$g - b_n \leqslant g - c_n \leqslant g - a_n,$$

ale wyrazy a_n względnie b_n należą do odcinka A_N względnie B_N, więc:

$$-\varepsilon < g - b_n$$
$$g - a_n < \varepsilon.$$

Stąd otrzymamy nierówność:

$$-\varepsilon < g - c_n < \varepsilon$$

czyli:

$$|g - c_n| < \varepsilon.$$

Więc każdy wyraz odcinka C_N przybliża g z błędem mniejszym niż ε. Ponieważ ε było liczbą dowolnie obraną, więc $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = g$

Przykład. Niech

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Mamy wtedy

$$n\,\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant c_n \leqslant n\,\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

a ponieważ

$$\sqrt{n^2+n} < n+1, \qquad \sqrt{n^2+1} > n,$$

więc tem bardziej:

$$\frac{n}{n+1} \leqslant c_n \leqslant n\,\frac{1}{n} = 1.$$

Kładąc $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $b_n = 1$, mamy, jak wiadomo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

Stąd
$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

Zadania:

1. Wykazać, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g, to ciąg $\{a_n^2\}$ ma granicę g^2.

2. Wykazać, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g, to ciąg $\{5a_n^3 + 18a_n - 1\}$ ma granicę $(5g^3 + 18g - 1)$. Uogólnić to.

3. Wykazać, że ciąg $\{E(n\sqrt{2})\}$ jest rosnący i ograniczony.

4. Wykazać, że ciąg $\{a_n\}$, określony w sposób następujący:

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 1, \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \qquad (n > 2),$$

a więc ciąg:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{11}{16},\ \frac{31}{32},\ \cdots$$

ma tę własność, że:

$$a_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \qquad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

a więc jest zbieżny do granicy $\frac{2}{3}$. (Dowód przez indukcję.)

5. Wykazać, że ciąg

$$\left\{\frac{a_0\, n^k + a_1\, n^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\, n + a_k}{b_0\, n^k + b_1\, n^{k-1} + \cdots + b_{k-1}\, n + b_k}\right\} = \\ = \left\{\frac{a_0 + a_1\,\frac{1}{n} + \cdots + a_{k-1}\,\frac{1}{n^{k-1}} + a_k\,\frac{1}{n_k}}{b_0 + b_1\,\frac{1}{n} + \cdots + b_{k-1}\,\frac{1}{n^{k-1}} + b_k\,\frac{1}{n^k}}\right\}$$

jest zbieżny do granicy $\frac{a_0}{b_0}$ przy założeniach:

$$b_0 \neq 0, \quad b_0\, n^k + b_1\, n^{k-1} + \cdots + b_k \neq 0$$

dla wszystkich n.

6. Wykazać, że jeżeli ciąg $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b_n > 0)$ jest monotoniczny, to ciąg $\left\{\frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{b_1 + b_2 + \cdots b_n}\right\}$ jest również monotoniezny.

7. Wykazać, że ciąg $\left\{\frac{E(x) + E(2x) + \cdots + E(nx)}{n^2}\right\}$ ma granicę $\frac{x}{2}$.

8. Niech

$$a_1 = \sqrt{x},\ a_{n+1} = \sqrt{x + a_n} \qquad (x > 0),$$

a więc:

$$a_2 = \sqrt{x + \sqrt{x}},\ a_3 = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \quad \text{i t. d.}$$

Wykazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i że $a_n < x + 1$ (przez indukcję). Ciąg $\{a_n\}$ jest więc zbieżny.

9. Opierając się na wynikach zadania 8 i na wzorze:

$$a^2_{n+1} = x + a_n,$$

wykazać, że oznaczając przez g granicę ciągu $\{a_n\}$, mamy:

$$g^2 = x + g,$$

a stąd

$$g = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x}.$$

10. Wykazać, że każdy ciąg, zawierający nieskończenie wiele zer i jedynek, jest rozbieżny.

11. Wykazać, że ciąg, którego wszystkie wyrazy są liczbami całkowitemi, jest wtedy i tylko wtedy zbieżny, jeżeli wszystkie wyrazy, od pewnego począwszy, mają tę samą wartość.

12. Wykazać, że granica g ciągu zbieżnego $\{a_n\}$, którego wyrazy spełniają nierówność:

$$A \leqslant a_n \leqslant B,$$

spełnia tą samą nierówność.

Obliczenie pewnych granic. Liczba e.

27. Wyznaczenie niektórych granic. Udowodnimy teraz dwa twierdzenia, z których w dalszym ciągu będziemy korzystać.

T w i e r d z e n i e: Oznaczając przez $\{\alpha_n\}$ dowolny ciąg liczb naturalnych rozbieżny do $+\infty$, mamy:

$$1^0. \lim_{n\to\infty} A^{\alpha_n} \begin{cases} = +\infty & \text{dla } A > 1 \\ = 1 & \text{„ } A = 1 \\ = 0 & \text{„ } 0 \leqslant A < 1 \end{cases}$$

$$2^0. \lim_{n\to\infty} \sqrt[\alpha_n]{A} = 1 \qquad \text{dla } A > 0$$

D o w ó d:

1^0. Istotnie, jeżeli $A > 1$, to na podstawie znanej nierówności (wstęp 3) jest

$$A^{\alpha_n} \geqslant 1 + \alpha_n (A - 1).$$

Oznaczmy przez M dowolną liczbę dodatnią. Ponieważ ciąg $\{\alpha_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$, więc istnieje w nim wyraz α_N, od którego począwszy jest $\alpha_n > \dfrac{M-1}{A-1}$, czyli $1 + \alpha_n (A - 1) > M$. Dla $n > N$ mamy zatem $A^{\alpha_n} > M$, czyli, wobec dowolności M, $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\alpha_n} = +\infty$.

Jeżeli $A = 1$, to $A^{\alpha_n} = 1$ przy każdem n, a więc i $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\alpha_n} = 1$; podobnie, jeżeli $A = 0$, to $A^{\alpha_n} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, a więc i $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\alpha_n} = 0$.

Wreszcie, jeżeli $0 < A < 1$, to $\dfrac{1}{A} > 1$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{A}\right)^{\alpha_n} = +\infty$. Ponieważ $A^{\alpha_n} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{A}\right)^{\alpha_n}}$, więc z uwagi na podane twierdzenie (str. 14) otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty} A^{\alpha_n} = 0$.

2^0. Załóżmy najpierw, że $A \geqslant 1$. Wówczas również $\sqrt[\alpha_n]{A} \geqslant 1$. Kładąc więc $\sqrt[\alpha_n]{A} = 1 + \varepsilon_n$ ($\varepsilon_n \geqslant 0$), mamy $A = (1 + \varepsilon_n)^{\alpha_n} \geqslant 1 + \alpha_n \varepsilon_n$ (por. wstęp 3), a więc $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{A-1}{\alpha_n}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A-1}{\alpha_n} = 0$ (por. str. 14). Ciąg $\{\varepsilon_n\}$ jest więc zawarty między ciągami $\{0\}$, $\left\{\frac{A-1}{\alpha_n}\right\}$ zbieżnemi do zera. Stąd na podstawie znanego twierdzenia (str. 35) wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$; a więc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[\alpha_n]{A} = 1$.

Jeżeli $0 < A < 1$, to $\frac{1}{A} > 1$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[\alpha_n]{\frac{1}{A}} = 1$. Ponieważ $\sqrt[\alpha_n]{A} = \frac{1}{\sqrt[\alpha_n]{\frac{1}{A}}}$, więc również i w tym wypadku mamy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[\alpha_n]{A} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[\alpha_n]{\frac{1}{A}}} = 1.$$

Udowodniliśmy więc w zupełności nasze twierdzenie.

Twierdzenie: Przy dowolnie obranem x jest $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Dowód: Niech x będzie dowolną liczbą. Obierzmy liczbę naturalną k, spełniającą nierówność $|x| < k$. Oznaczając przez ϑ liczbę $\frac{|x|}{k}$, mamy:

$$\frac{|x|}{k+1} \leqslant \vartheta, \frac{|x|}{k+2} \leqslant \vartheta, \ldots$$

a więc przy $n > k$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x^k|}{k!} \cdot \frac{|x|}{k+1} \cdot \frac{|x|}{k+2} \cdot \ldots \frac{|x|}{n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|x^k|}{k!} \vartheta^{n-k} = \frac{|x^k|}{\vartheta^k k!} \vartheta^n.$$

Ponieważ $0 < \vartheta < 1$, więc ϑ^n zmierza do zera, gdy n rośnie nieograniczenie (por. twierdzenie poprzednie), zatem i $\frac{x^n}{n!}$ zmierza do zera, czyli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

28. Liczba e = 2·71828... W matematyce wyższej ma wielkie znaczenie pewna szczególna liczba, którą oznacza się symbolem e. Liczbę tę można zdefinjować jako granicę ciągu $\{a_n\}$, którego n-ty wyraz jest określony wzorem:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

to znaczy:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Żeby definicję tę usprawiedliwić, trzeba wykazać, że ciąg, określony w powyższy sposób, jest ciągiem zbieżnym. Wykażemy to, udowadniając, że ciąg ten jest monotoniczny i ograniczony.

D o w ó d: Na mocy wzoru Newtona na potęgę dwumianu otrzymujemy:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\cdot\frac{1}{n^2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2.1}{1.\ 2.\ 3.\ \cdots n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Biorąc pod uwagę np. czwarty wyraz powyższego rozwinięcia, możemy go przedstawić w postaci następującej:

$$\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.\ 2.\ 3.}.$$

Postępując w ten sposób ze wszystkiemi wyrazami począwszy od trzeciego, otrzymujemy wzór:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1.\ 2.} + \\ + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.\ 2.\ 3.} + \ldots + \\ + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\frac{1}{n}}{1.\ 2.\ 3.\ \cdots .n}.$$

Podobnie postępując, otrzymamy również wzór następujący:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{1.\ 2.} + \\ + \frac{1\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{1.\ 2.\ 3.} + \ldots +$$

$$+\frac{1\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\frac{1}{n+1}}{1.\quad 2.\quad\quad 3.\quad\cdots\quad(n+1)}.$$

Zauważmy teraz, że licznik każdego ułamka, występującego w powyższych rozwinięciach, jest mniejszym od jedności, gdyż jest iloczynem liczb mniejszych od jedności. O mianownikach zauważmy rzecz następującą:

$$1.\ 2 = 2^1$$

$$1.\ 2.\ 3 > 1.\ 2.\ 2 = 2^2$$

$$1.\ 2.\ 3.\ 4 > 1.\ 2.\ 2.\ 2 = 2^3$$

— — — — — — — —

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\cdots n > 1.\ 2.\ 2.\ 2.\cdots.2 = 2^{n-1}$$

Wobec tego:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Stosując formułę na sumę postępu geometrycznego, (por. wstęp 4), otrzymujemy:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{\frac{1}{2}}$$

więc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Udowodniliśmy więc, że ciąg jest ograniczony.

Wykażemy teraz, że ciąg jest monotoniczny.

Zauważmy przedewszystkiem, że w rozwinięciu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ występuje $n+1$ wyrazów, w rozwinięciu

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ występuje $n+2$ wyrazów, a więc o jeden wyraz więcej. Łatwo widzieć, że:

$$1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}$$
$$1-\frac{2}{n}<1-\frac{2}{n+1}$$
$$1-\frac{3}{n}<1-\frac{3}{n+1}$$

i t. d. — ogólnie:

$$1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1}.$$

Wobec tego:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right),$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)<$$
$$<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)$$

i t. d. Widzimy więc, że wyrazy rozwinięcia pierwszego, począwszy od wyrazu trzeciego, są mniejsze od odpowiednich wyrazów rozwinięcia drugiego i że ponadto w rozwinięciu drugiem jest o jeden wyraz więcej. A więc:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ jest więc monotonicznym i ograniczonym, a zatem posiada granicę.

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

Twierdzenie: Jeżeli w ciągu $\{r_n\}$ wszystkie liczby są do modułu większe od 1 i jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} |r_n| = + \infty$, wówczas:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = e.$$

Dowód: Załóżmy narazie, że liczby ciągu r_n są liczbami całkowitemi, dodatniemi. Mając dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, możemy znaleźć takie N, aby dla każdego $n > N$ (n liczba naturalna) zachodziła nierówność:

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \varepsilon.$$

Ponieważ wedle założenia liczby r_n są liczbami naturalnemi spełniającemi warunek $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = + \infty$, zatem możemy twierdzić, że począwszy od pewnego wyrazu wszystkie r_n są większe od N, że więc dla tych liczb wyrażenie $\left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n}$ różni się od e o mniej niż ε. Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, więc

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = e. \tag{1}$$

Przejdźmy teraz do wypadku ogólnego. Oznaczmy przez α_n największą z liczb naturalnych, spełniających nierówność:

$$\alpha_n \leqslant | r_n | .^{1})$$

Zauważmy teraz, że jeżeli r_n jest liczbą dodatnią większą

---

[1]) Jasną jest rzeczą, że $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = + \infty$.

od 2 (liczb r_n co do modułu niewiększych od dwóch jest tylko skończona ilość, gdyż $\lim\limits_{n \to \infty} |r_n| = \infty$), a więc jeżeli $\alpha_n > 1$, to:

$$\frac{1}{\alpha_n - 1} \geqslant \frac{1}{r_n} \geqslant \frac{1}{\alpha_n + 1},$$

stąd:

$$1 + \frac{1}{\alpha_n - 1} \geqslant 1 + \frac{1}{r_n} \geqslant 1 + \frac{1}{\alpha_n + 1},$$

więc:

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha_n - 1}\right)^{\alpha_n - 1} \geqslant \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} \geqslant \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n} \quad (2).$$

Wykażemy teraz, że formuła powyższa jest ważna i w wypadku, gdy r_n jest ujemne, co do modułu większe od dwóch. W wypadku tym

$$\left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{|r_n|}}\right)^{|r_n|} = \left(\frac{|r_n|}{|r_n| - 1}\right)^{|r_n|},$$

a ponieważ:

$$\frac{|r_n|}{|r_n| - 1} = \frac{|r_n| - 1 + 1}{|r_n| - 1} = 1 + \frac{1}{|r_n| - 1},$$

więc:

$$\left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = \left(1 + \frac{1}{|r_n| - 1}\right)^{|r_n|} \quad (3).$$

Zauważmy teraz że:

$$\alpha_n \leqslant |r_n| < \alpha_n + 1,$$

więc: $$\alpha_n - 1 \leqslant |r_n| - 1 < \alpha_n,$$

czyli: $$\frac{1}{\alpha_n - 1} \geqslant \frac{1}{|r_n| - 1} > \frac{1}{\alpha_n} > \frac{1}{\alpha_n + 1},$$

stąd: $1+\frac{1}{\alpha_n-1}\geqslant 1+\frac{1}{|r_n|-1}>1+\frac{1}{\alpha_n-1}$

A więc otrzymujemy wkońcu:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)^{\alpha_n+1}\geqslant\left(1+\frac{1}{|r_n|-1}\right)^{|r_n|}>$$
$$>\left(1+\frac{1}{\alpha_n+1}\right)^{\alpha_n}$$

Stąd, opierając się na wzorze (3), otrzymujemy nierówność (2), która jest więc ważną dla wszystkich r_n co do modułu większych od dwóch. Ponieważ pozostałych wyrazów r_n jest tylko skończona liczba, więc możemy je przy rozważaniu granicy pominąć.

Obliczymy teraz granice wyrażeń:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)^{\alpha_n+1}\text{ i }\left(1+\frac{1}{\alpha_n+1}\right)^{\alpha_n}$$

Mamy:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)^{\alpha_n+1}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)^{\alpha_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)^2$$

Zauważmy, że na mocy (1) i ponieważ α_n są liczbami naturalnemi rozbieżnemi do $+\infty$, mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)^{\alpha_n-1}=e.$$

O drugim czynniku wiemy, że:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)^2=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)\right]^2=1,$$

a więc:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)^{\alpha_n+1}=e \tag{4}$$

Podobnie postępując, otrzymujemy:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}}\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n + 1} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)} = e . 1;$$

więc: $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n} = e \tag{5}$$

Zatem na mocy (2), (4), (5) i tw. str. (35)

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = e.$$

ROZDZIAŁ II.

Funkcje jednej zmiennej.

1. Przykłady funkcyj. Pojęcie funkcji. Do pojęcia funkcji możemy dojść, badając stosunki zachodzące pomiędzy rozmaitemi wielkościami. Zdarzyć się może, że dwie wielkości, przy pewnych warunkach, są tak ze sobą związane, iż każdej wartości pierwszej wielkości odpowiada ściśle określona wartość drugiej wielkości. Jeżeli taki fakt ma miejsce, to powiadamy, że wielkość druga jest funkcją wielkości pierwszej.

Przykłady:

1. Cena cukru w pewnem mieście i w pewnym okresie czasu jest określona przez podanie ilości cukru, t. j. jego ciężaru. A więc cena cukru jest funkcją ciężaru cukru.

2. Cena biletu kolejowego III kl. jest funkcją długości drogi, na jaką ten bilet został wystawiony, gdyż bilety, wystawione na równe drogi, mają równe ceny.

3. Badając ruch jakiegoś ciała, zauważymy, że droga przebyta od chwili, w której zaczęliśmy ruch obserwować, jest funkcją czasu, jaki od tej chwili upłynął, np.: Droga przebyta przez pociąg od chwili ruszenia jest funkcją czasu, który od tej chwili upłynął.

4. Doświadczenie uczy, że ta sama masa gazu

w stałej temperaturze ma w równych objętościach równe prężności, więc: Prężność tej samej masy gazu w stałej temperaturze jest funkcją jego objętości.

5. Ponieważ w każdym momencie dnia temperatura jest określona, więc możemy powiedzieć, że temperatura jest funkcją czasu.

6. Doświadczenie uczy, że dany pręt metalowy ma w każdej temperaturze określoną długość, więc długość uważanego pręta jest funkcją jego temperatury.

7. Dwa koła o równych promieniach mają równe powierzchnie, więc powierzchnia koła jest funkcją jego promienia.

2. Oznaczenia. Jeżeli wielkość Y jest funkcją wielkości X, to wielkość X nazywamy zmienną niezależną, wielkość Y zmienną zależną. Zależność funkcyjną znaczyć będziemy symbolem:

$$Y = F(X)$$

Piszemy również $B = F(A)$, jeżeli B oznacza nam tę szczególną wartość wielkości Y, która odpowiada w powyższej zależności funkcyjnej pewnej szczególnej wartości A wielkości X. (Zamiast litery F używamy nieraz liter f, φ, ψ, i t. p.).

3. Ścisła definicja pojęcia funkcji. Możemy pojęcie funkcji zdefinjować jeszcze w inny sposób, abstrahując od pojęcia wielkości. Mianowicie: Jeżeli dane jest prawo, na mocy którego każdej liczbie pewnego zbioru Z liczb odpowiada jedna i tylko jedna liczba rzeczywista, wówczas powiadamy, że w zbiorze Z określona jest funkcja[1]). Podobnie, jak poprzednio, odpowiedniość tę znaczyć będziemy symbolem

$$y = f(x)$$

---

[1]) Dokładnie mówiąc, funkcja jednej zmiennej w odróżnieniu od funkcyj wielu zmiennych, o których będzie mowa później.

gdzie x jest znakiem dowolnej liczby zbioru Z, zaś y znakiem liczby przyporządkowanej liczbie x. Jeżeli x_0 jest pewną szczególną liczbą zbioru Z, to symbol $f(x_0)$ oznaczać nam będzie liczbę jej przyporządkowaną.

Zbiorem Z jest zazwyczaj jakiś przedział (a, b).

4. Różne rodzaje określenia funkcyj. Zastanówmy się teraz, w jaki sposób może być podana funkcja. Wedle poprzedniej definicji trzeba, by każdej wartości x danego zbioru Z odpowiadała ściśle określona liczba y. Zachodzi to w szczególności wtedy, gdy to podporządkowanie jest określone pewnym wzorem, np.

$$y = x^2 + 2x + 3, \text{ dla } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Istnieją jednak określenia funkcyj, podpadające również pod powyższą definicję, przy których nie podajemy wzoru. Jeżeli np. każdej liczbie wymiernej przedziału (0, 1) podporządkujemy liczbę 0, każdej liczbie niewymiernej liczbę 1, to przez to określamy w zupełności pewną funkcję w tym przedziale, jakkolwiek nie podajemy wzoru.

Zbiór Z nazywamy obszarem zmienności zmiennej x.

W dalszym ciągu będziemy często określać funkcję wzorem, nie podając przytem wyraźnie obszaru zmienności. Przyjmujemy milcząco w takich wypadkach, że obszar zmienności jest zbiorem tych wszystkich liczb x, dla których podany wzór ma sens. Np. dla $f(x) = \frac{1}{x}$, do zbioru Z należy każde $x \neq 0$.

5. Sposoby przedstawiania funkcyj. Tablice. W praktyce jest potrzebne przedstawienie funkcji, pozwalające w łatwy sposób znajdować wartość y odpowiadającą danemu x. Do tego celu służą: 1° Tablice, 2° Wykresy.

Tablicę wartości funkcji otrzymujemy, pisząc obok wartości zmiennej x odpowiednie wartości zmiennej y. Tablica zawiera oczywiście zawsze skończoną liczbę wartości x i odpowiednich wartości y, przyczem zwykle wartości zmiennej x tworzą postęp arytmetyczny.

Np. tablicą funkcji $y = x^2 + 2x + 3$ jest

x	0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1
y	3	3·21	3·44	3·69	3·96	4·25	4·56	4·89	5.24	5·61	6

Innym przykładem jest tablica, podająca ciśnienie barometryczne w pewnym dniu, w odstępach np. godzinnych.

Tablica określa nam funkcję tylko w pewnym zbiorze częściowym zbioru Z, zawierającym skończoną liczbę wartości.

Np. funkcja $y = x^2 + 2x + 3$ jest określona w całym przedziale (01), a w tablicy podaliśmy tylko 11 wartosci. Ciśnienie barometryczne w każdej chwili posiada pewną wartość, tablica podaje tylko wartości co godzinę i t. p.

Funkcje występujące w praktyce mają tę właściwość, że małym zmianom zmiennej x odpowiadają w przybliżeniu do nich proporcjonalne, małe zmiany zmiennej y. Jeżeli więc odstępy zmiennej x z tablicy są dostatecznie małe, to z tablicy widać ogólny przebieg funkcji też dla wartości pośrednich, a nawet można z dużą dokładnością obliczać wartości funkcji dla wartości pośrednich (interpolacja).

Tablice funkcyj powstają bądź w ten sposób, że z danego wzoru oblicza się wartości zmiennej (tablice matematyczne), bądź też otrzymuje się wartości zmiennej y zapomocą pomiarów fizykalnych, chemicznych i t. p. (tablice empiryczne).

Do pierwszej kategorji należą tablice logarytmiczne, trygonometryczne i t. p., do drugiej — tablice prężności pary wodnej nasyconej w różnych temperaturach, tablice podające temperaturę wrzenia wody w zależności od ciśnienia i t. p.

Należy zresztą zauważyć, że tablice, zarówno matematyczne jak empiryczne, podają wartości funkcji tylko z pewnem przybliżeniem zależnem od tego, do jakiego celu ma służyć tablica, a przy tablicach empirycznych jeszcze od tego, jaką dokładność można było osiągnąć w pomiarach.

6. Wykresy. Drugim sposobem przedstawienia funkcji jest wykres. Niech OXY będzie dowolnym układem współrzędnych. Wykresem funkcji $y = f(x)$ nazywamy zbiór wszystkich punktów o współrzędnych $(x, f(x))$. Więc np. wykresem funkcji linjowej $y = 2x + 3$ jest linja prosta, wykresem funkcji $y = x^2$ — parabola i t. p.

Wykres wykonujemy bądź zapomocą specjalnych przyrządów (linjał, cyrkiel, elipsograf i t. p.), bądź też, najczęściej w sposób następujący:

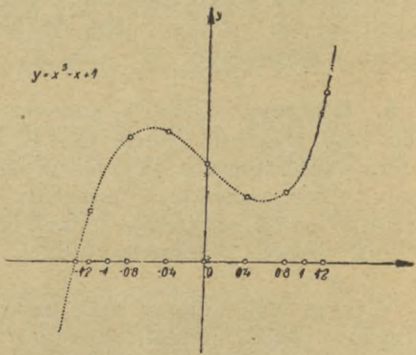
Mając tablicę wartości funkcji, wyznaczamy odpowiednie punkty w układzie OXY. W ten sposób dostajemy tylko skończoną liczbę punktów wykresu. Jeżeli funkcja zmienia się w sposób regularny (por. wyżej) i jeżeli punkty otrzymane leżą dość gęsto, to już z tego niezupełnego wykresu widzimy przebieg funkcji i łącząc otrzymane punkty odręcznie, otrzymujemy linję krzywą, będącą wykresem funkcji.

Z przyczyn podanych przy opisie tablic, do których się dołączają jeszcze: niedokładność przyrządów rysunkowych, fakt, że każda krzywa narysowana ma pewną grubość, i t. p. wynika, że i wykres nie jest zupełnie dokładnym obrazem funkcji.

U w a g a: Przy kreśleniu wykresu obiera się nagół ze względów praktycznych różne jednostki na osiach OX, OY.

Przykład: Niech $f(x) = x^3 - x + 1$. Aby wykonać wykres dla $-1{\cdot}6 \leqslant x \leqslant 1{\cdot}6$, obliczamy tablicę np. w odstępach 0·2. Otrzymujemy poniższą tablicę z dokładnością na jedno miejsce dziesiętne (dalsze miejsca dla wykresu w tych rozmiarach są obojętne).

x	y
$-1{\cdot}6$	$-1{\cdot}5$
$-1{\cdot}4$	$-0{\cdot}3$
$-1{\cdot}2$	$+0{\cdot}9$
$-1{\cdot}0$	$+1{\cdot}0$
$-0{\cdot}8$	$+1{\cdot}3$
$-0{\cdot}6$	$+1{\cdot}4$
$-0{\cdot}4$	$+1{\cdot}3$
$-0{\cdot}2$	$+1{\cdot}2$
$0{\cdot}0$	$+1{\cdot}0$
$+0{\cdot}2$	$+0{\cdot}8$
$+0{\cdot}4$	$+0{\cdot}7$
$+0{\cdot}6$	$+0{\cdot}6$
$+0{\cdot}8$	$+0{\cdot}7$
$+1{\cdot}0$	$+1{\cdot}0$
$+1{\cdot}2$	$+1{\cdot}5$
$+1{\cdot}4$	$+2{\cdot}3$
$+1{\cdot}6$	$+3{\cdot}5$



Rys. 2.

Zadania: Wykonać tablice i wykresy następujących funkcyj:

1. $y = 2x + 3$
2. $y = \sqrt{1 - x^2}$ $\qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$
3. $y = \dfrac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ $[y = 1$, dla $x = 0]$
4. $y = x^2 - 1$ $\qquad 1 \leqslant x \leqslant 2$
   $y = x^3 - 1$ $\qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$
5. $y = x^5$ $\qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$
6. $y = \sqrt{x}$ $\qquad 0 \leqslant x \leqslant 10$

7. Funkcje ograniczone. Funkcje monotoniczne. Funkcję $y = f(x)$ określoną w zbiorze Z nazywamy ograniczoną, jeżeli istnieje liczba $M > 0$ taka, że

$$|f(x)| < M$$

dla wszystkich x zbioru Z.

Funkcję $y = f(x)$ określoną w przedziale (a, b) nazywamy:

rosnącą, gdy nierówność: $x_1 < x_2$, pociąga $f(x_1) < f(x_2)$
malejącą, „ „ „ „ $f(x_1) > f(x_2)$
niemalejącą „ „ „ „ $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
nierosnącą „ „ „ „ $f(x_1) \geqslant f(x_2)$
dla każdej pary liczb x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, należących do przedziału (a, b).

Każdą taką funkcję nazywamy funkcją monotoniczną. Funkcje rosnące i malejące nazywamy ściśle monotonicznemi.

Funkcje, występujące w praktyce, są bądź monotoniczne w całym przedziale, w którym są określone, bądź też można podzielić ten przedział na skończoną liczbę przedziałów takich, że w każdym z nich funkcja jest monotoniczna.

Istnieją jednak funkcje niemonotoniczne w żadnym przedziale.

Przykłady:

1. Funkcja $y = x$ jest rosnąca w każdym przedziale.

2. Funkcja $y = \cos x$ jest malejąca w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Funkcja $y = E(x)$ jest niemalejąca w każdym przedziale.

4. Funkcja $y = E\left(\frac{1}{x}\right)$ jest nierosnąca w przedziale (0,1).

5. Funkcja $y = x^2$ jest malejąca w przedziale $(-1,0)$, rosnącą w przedziale (0,1).

ROZDZIAŁ III.

Granica funkcji.

Definicja i własności granic.

1. Definicja granicy funkcji. Przypuśćmy, że mamy daną funkcję $y = f(x)$, określoną w otoczeniu [1]) pewnego punktu x_0 z wyjątkiem może samego punktu x_0; nie czynimy więc żadnych hipotez co do tego, czy uważana funkcja jest określona w punkcie x_0 czy nie.

Powiadamy, że g jest granicą funkcji, gdy x zmierza do x_0, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do x_0 o wyrazach jednak różnych od x_0, odpowiedni ciąg $\{f(x_n)\}$ wartości funkcji zbieżny jest do g, t. zn. że, jeżeli tylko $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ $(x_n \neq x_0)$, wówczas $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$.

Dla zaznaczenia, że g jest granicą funkcji, gdy x dąży do x_0, pisać będziemy: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$.

Przykłady:

1. Niech $y = x \cos \frac{1}{x}$ w przedziale $(-1, +1)$

---

[1]) Otoczeniem punktu x_0 nazywamy każdy przedział, zawierający w swem wnętrzu punkt x_0.

z wyjątkiem punktu 0, w którym funkcji nie określamy. Mamy tu: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Istotnie, jeżeli $\{x_n\}$ $(x_n \neq 0)$ jest ciągiem zbieżnym do zera, to

$$|f(x_n)| = |x_n| \left| \cos \frac{1}{x_n} \right| \leqslant |x_n| \,.\, 1$$

Ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, więc $\lim\limits_{x_n \to 0} f(x_n) = 0$.

2. Niech $y = \cos \frac{1}{x}$ w tym samym zbiorze co poprzednio. W tym wypadku nie istnieje granica w punkcie zero. Kładąc bowiem $x_n = \frac{1}{n\pi}$, otrzymujemy ciąg zbieżny do zera, odpowiedni zaś ciąg $\{f(x_n)\}$ jest identyczny z rozbieżnym ciągiem $-1, +1, -1, +1, \ldots$

2. Działania na granicach. Z definicji granicy funkcji i odpowiednich twierdzeń z teorji granic ciągów wynikają natychmiastowo twierdzenia następujące:

Jeżeli:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = g_1 \text{ i } \lim_{x \to x_0} f_2(x) = g_2,$$

to:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = g_1 + g_2$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} [f_1(x) \,.\, f_2(x)] = g_1 \,.\, g_2$
3. jeżeli m jest liczbą rzeczywistą, to

$$\lim_{x \to x_0} [m\, f_1(x)] = m g_1$$

4. przy założeniu dodatkowem, że $g_2 \neq 0$ i $f_2(x) \neq 0$,, otrzymujemy:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1}{g_2}.$$

P r z y k ł a d: Niech $f_1(x) = x \cos \frac{1}{x}$, $f_2(x) = x+1$, w przedziale $(-1, +1)$ z wyłączeniem zera. Jak wiemy, $\lim f_1(x) = 0$. Jeżeli $\{x_n\}$ $(x_n \neq 0)$ jest ciągiem zbieżnym do zera, to ciąg

$$\{f_2(x_n)\} = \{1 + x_n\}$$

jest zbieżny do granicy $1 + 0 = 1$. A zatem

$$\lim_{x \to x_0} \left(x \cos \frac{1}{x} + 1 + x\right) = 1$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[x \cos \frac{1}{x} (1 + x)\right] = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x \cos \frac{1}{x}}{1 + x} = 0,$$

co łatwo również sprawdzić bezpośrednio.

Udowodnimy np. twierdzenie pierwsze. Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0)$ zbieżny do x_0. Ponieważ

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = g_1 \qquad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = g_2,$$

więc na mocy definicji granicy otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} f_1(x_n) = g_1$$

$$\lim_{n \to \infty} f_2(x_n) = g_2.$$

Stąd na mocy odpowiedniego twierdzenia z teorji granic ciągów mamy:

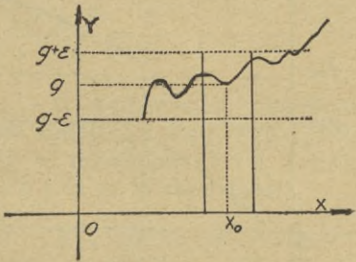
$$\lim_{n \to \infty} [f_1(x_n) + f_2(x_n)] = g_1 + g_2.$$

Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ jest dowolny, byleby tylko spełniał warunki wyżej podane, więc

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = g_1 + g_2.$$

3. Warunek istnienia granicy. Ważnem jest w zastosowaniach twierdzenie następujące:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym nato, by liczba g była granicą funkcji $y = f(x)$, gdy x zmierza do x_0 jest to, by istniało prawo, które każdej liczbie $\varepsilon > 0$ przyporządkowuje takie otoczenie punktu x_0, w którem wartości funkcji dla wszystkich liczb tego otoczenia (z wyjątkiem, być może, samego x_0) przybliżają g z błędem mniejszym od ε.



Rys. 3.

Inaczej mówiąc, nato by $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$, potrzeba i wystarcza, by wartościom $x \neq x_0$ dostatecznie mało różniącym się od x_0 odpowiadały wartości funkcji $f(x)$ dowolnie mało różne od g.

Twierdzenie to możemy obrazowo przedstawić następująco:

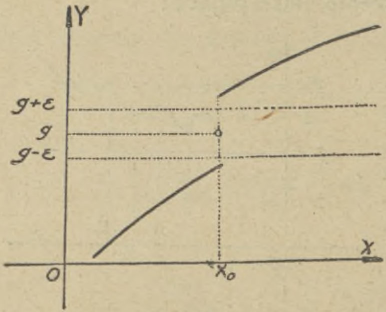
Obierzmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i na osi y-ów zaznaczmy odcinek o końcach: $g - \varepsilon$, $g + \varepsilon$. Wykreślmy z końców tego odcinka proste równoległe do osi x-ów. Otrzymamy w ten sposób pasek o szerokości 2ε. Zbadajmy teraz, czy istnieje taki odcinek δ położony na osi x-ów i zawierający x_0 w swojem wnętrzu, by ta część krzywej, która leży nad odcinkiem δ, [z wyjątkiem być może punktu $(x_0, f(x_0))$], znajdowała się całkowicie w pasku poprzednio wyznaczonym.

Otóż twierdzenie nasze powiada:

1. jeżeli g jest granicą, to dla każdego $\varepsilon > 0$ taki odcinek znajdziemy,

2. jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$, taki odcinek znajdziemy, to g jest granicą.

W wypadku przedstawionym rysunkiem 4, g nie jest granicą, gdyż wziąwszy pasek taki, jaki zaznaczony jest na rysunku, nie znajdziemy odpowiedniego odcinka δ. Mimo to są paski, dla których odpowiedni odcinek δ istnieje.



Rys. 4.

Zanim przejdziemy do dowodu tego twierdzenia, pokażemy jego zastosowanie na kilku przykładach.

1. $$\lim_{x \to 1} (5x^2 - 7x + 6) = 4.$$

D o w ó d: liczbie $\varepsilon > 0$ przypiszmy przedział $(1 - \eta, 1 + \eta)$, gdzie η jest równe mniejszej z dwu liczb: $1, \frac{1}{8}\varepsilon$. Jeżeli teraz x jest dowolnym punktem tegoż przedziału, to

$$x = 1 + h$$

gdzie $|h| \leqslant \eta$. Więc

$$|(5x^2 - 7x + 6) - 4| = |[5(1+h)^2 - 7(1+h) + 6] - 4| = \\ = |3h + 5h^2| = |h|\,|3 + 5h|$$

ponieważ $$|h| \leqslant \eta \leqslant 1,$$

więc $$|(5x^2 - 7x + 6) - 4| \leqslant |h| \,.\, 8,$$

ponieważ jednak $|h| \leqslant \eta \leqslant \frac{1}{8}\varepsilon$,

więc $|(5x^2 - 7x + 6) - 4| \leqslant \varepsilon$.

Widzimy więc, że wartości funkcji wewnątrz przedziału $(1 - \eta, 1 + \eta)$ różnią się od 4 o mniej niż ε, a więc 4 jest granicą funkcji, gdy x dąży do 1.

2. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{5}$$

Dowód: liczbie $\varepsilon > 0$ przypiszmy przedział $(2 - \eta, 2 + \eta)$, gdzie η jest mniejszą z dwu liczb 1, 5ε. Jeżeli teraz $x \neq 2$ mieści się w przedziale $(2 - \eta, 2 + \eta)$, to $x = 2 + h$, gdzie $0 < |h| \leqslant \eta$. Wobec tego:

$$f(2+h) - \frac{1}{5} = \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 2}{(2+h)^2 + 2 + h - 6} - \frac{1}{5} =$$
$$= \frac{h + h^2}{5h + h^2} - \frac{1}{5} = \frac{1+h}{5+h} - \frac{1}{5} = \frac{4h}{25 + 5h},$$

ponieważ $|h| < 1$,

więc $25 + 5h \geqslant 25 - 5|h| \geqslant 25 - 5 . 1 = 20$,

więc

$$\left| f(2+h) - \frac{1}{5} \right| \leqslant \frac{4|h|}{|25 + 5h|} \leqslant \frac{4|h|}{20},$$

ponieważ zaś $|h| \leqslant 5\varepsilon$, więc

$$\left| f(2+h) - \frac{1}{5} \right| \leqslant \frac{4 . 5\varepsilon}{20} = \varepsilon.$$

A więc $\frac{1}{5}$ jest granicą funkcji, gdy x dąży do 2.

3. $$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Dowód: weźmy pod uwagę przedział o krańcach $(2 - \eta, 2 + \eta)$, gdzie η jest pewną liczbą dodatnią, zresztą dowolną. Jeżeli x jest punktem przedziału $(2 - \eta, 2 + \eta)$, to $|x - 2| \leqslant \eta$. Wartość funkcji naszej w punkcie x jest x^2. Lecz

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2),$$

stąd

$$|x^2 - 4| = |x - 2|\,|x + 2|,$$

więc

$$|x^2 - 4| \leqslant \eta\,\{|x| + |2|\} \leqslant \eta\,\{2 + \eta + 2\},$$

czyli

$$|x^2 - 4| \leqslant \eta\,(4 + \eta).$$

Nierówność powyższa ważna jest dla wszystkich $\eta > 0$. Dla wartości dodatnich na η, ale nie większych od 1, otrzymamy nierówność następującą:

$$|x^2 - 4| \leqslant 5\eta.$$

Nierówność powyższa wykazuje, że każdej dodatniej liczbie ε możemy przypisać przedział $(2 - \eta, 2 + \eta)$ taki, że jeżeli x jest dowolnym punktem tego przedziału, to mamy:

$$|x^2 - 4| \leqslant \varepsilon.$$

Wystarczy w tym celu obrać za η mniejszą z liczb; $\frac{1}{5}\varepsilon$, 1.

Przystąpimy teraz do dowodu naszego twierdzenia. Udowodnimy naprzód, że warunek podany jest warunkiem koniecznym. Poprowadzimy dowód nie wprost. Przyjmijmy więc, że g jest granicą, a funkcja warunku podanego nie spełnia. Wobec tego nie dla każdego $\varepsilon > 0$, znajdziemy odpowiednie otoczenie. Obierzmy sobie więc $\varepsilon > 0$, dla którego takie otoczenie nie istnieje; jakikolwiek zatem odcinek δ

obierzemy, zawierający w swojem wnętrzu punkt x_0, to zawsze znajdziemy w nim taki punkt, $\xi \neq x_0$, że wartość funkcji w tym punkcie różnić się będzie od g co najmniej o ε, czyli, że

$$|f(\xi) - g| \geqslant \varepsilon.$$

Obierzmy sobie teraz dowolny ciąg odcinków $\delta_1, \delta_2, \ldots$, zawierających w swojem wnętrzu x_0 takich jednak, by ich długości zmierzały do zera. Oznaczmy przez ξ_n dowolny punkt odcinka δ_n, różny od x_0 i spełniający nierówność

$$|f(\xi_n) - g| \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Na mocy tego, cośmy poprzednio powiedzieli, punkt taki w każdym odcinku δ_n istnieje. Ponieważ $|\xi_n - x_0|$ jest niewiększe od długości odcinka δ_n, więc

$$\lim_{n \to \infty} |\xi_n - x_0| = 0,$$

a więc

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n = x_0.$$

Na mocy zaś nierówności

$$|f(\xi_n) - g| \geqslant \varepsilon$$

ciąg $\{f(\xi_n)\}$ nie zdąża do granicy g, co jest sprzecznem z założeniem, że funkcja ma granicę g w miejscu x_0.

A więc wykazaliśmy, że warunek jest koniecznym.

Wykażemy teraz dostateczność.

Załóżmy więc, że funkcja spełnia podany w twierdzeniu warunek. Niechaj $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do x_0, przyczem $x_n \neq x_0$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$.

W tym celu obierzmy sobie dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Wedle założenia istnieje otoczenie punktu x_0 takie, że każdy punkt $\xi \neq x_0$ tego otoczenia spełnia nierówność

$$|f(\xi) - g| < \varepsilon. \tag{2}$$

Ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, więc począwszy od pewnego wyrazu (oznaczmy go przez x_N) wszystkie następne leżą w obranem otoczeniu. A więc każdy wyraz x_n późniejszy od x_N spełnia nierówność (2), t. zn.

$$|f(x_n) - g| < \varepsilon.$$

Ponieważ ε obraliśmy dowolnie, więc

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g,$$

a więc:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$

4. Granica jednostronna. Powiadamy, że g jest granicą lewostronną funkcji, gdy $x \to x_0$, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do x_0 o wyrazach mniejszych od x_0, odpowiedni ciąg $\{f(x_n)\}$ wartości funkcji zmierza do g, t. zn., że jeżeli tylko

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \qquad (x_n < x_0),$$

to

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

Piszemy to w ten sposób:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = g.$$

Podobnie określamy granicę prawostronną i piszemy:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = g.$$

Przykład. Niech $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ dla $x \neq 0$. W punkcie $x = 0$ funkcji nie określamy. Mamy oczywiście dla

$x > 0$, $f(x) = +1$, dla $x < 0$, $f(x) = -1$. Jeżeli $\{x_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich, zbieżnym do zera, to $f(x_n) = +1$ przy każdem n, a więc

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = +1$$

Stąd

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 1$$

Analogicznie:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -1$$

Funkcja ma więc granicę prawostronną $+1$, lewostronną -1, natomiast granica $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nie istnieje.

Z definicji granicy łatwo wynika, że jeżeli funkcja ma granicę, to istnieje granica lewostronna i prawostronna i obie są równe granicy funkcji. Z istnienia jednak granicy np. lewostronnej nie możemy nic wnioskować o granicy funkcji, ani o granicy prawostronnej.

Przykład. Niech $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ dla $x < 0$, i $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ dla $x > 0$. Z poprzednio podanych przykładów wynika istnienie granicy lewostronnej $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = 0$ oraz nieistnienie granicy prawostronnej.

Nawet z równoczesnego istnienia granicy lewo- i prawostronnej nie możemy wnioskować o istnieniu granicy (por. przedostatni przykład), łatwo można jednak wykazać, że jeżeli istnieją granice lewostronna i prawostronna i są sobie równe, to istnieje też granica funkcji i jest równa ich wspólnej wartości.

Przy odpowiednich zmianach twierdzeń, odnoszących się do granicy, otrzymamy twierdzenia, odnoszące się do granicy lewostronnej względnie prawostronnej.

Np. jeżeli:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f_1(x) = g_1, \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f_2(x) = g_2$$

to

$$\lim_{x \to x_0 - 0} [f_1(x) + f_2(x)] = g_1 + g_2, \qquad \text{i t. p.}$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym nato, by liczba g była granicą lewostronną funkcji $y = f(x)$, gdy x zmierza do x_0, jest to, by istniało prawo, przypisujące każdej liczbie $\varepsilon > 0$ przedział, którego prawym końcem jest x_0, taki, że wartość funkcji w dowolnym punkcie tego przedziału różnym od x_0 przybliża g z błędem mniejszym niż ε. Podobne twierdzenia odnoszą się do granic prawostronnych.

5. Granice niewłaściwe. Powiadamy, że funkcja dąży do $+\infty$, gdy $x \to x_0$, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do x_0 o wyrazach r ó ż n y c h o d x_0, odpowiedni ciąg $\{f(x_n)\}$ wartości funkcji jest rozbieżny do $+\infty$, t. zn. że, jeżeli tylko

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \qquad (x_n \neq x_0),$$

wówczas

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$$

Na oznaczenie powyższej granicy używać będziemy symbolu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Podobnie definjujemy granicę $-\infty$, której symbolem jest

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Można udowodnić następujące twierdzenia, opierając się na odpowiednich twierdzeniach z teorji granic. Jeżeli:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = a, \quad \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = +\infty,$

to

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = +\infty$$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = a, \quad \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = +\infty,$

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = a > 0, \quad \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = 0, \quad f_2(x) > 0$

w otoczeniu punktu x_0, to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = +\infty$$

4. $m > 0, \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$

to

$$\lim_{x \to x_0} [m f(x)] = +\infty$$

5. Warunkiem koniecznym i dostatecznym nato, by funkcja $y = f(x)$ zmierzała do $+\infty$, gdy x zmierza do x_0, jest to, by istniało prawo, które każdej liczbie $M > 0$ przypisuje otoczenie punktu x_0 takie, że wartość funkcji w każdym punkcie tego otoczenia różnym od x_0 jest większa od M.

Zupełnie podobnie, jak poprzednio, określa się pojęcie granicy nieskończonej lewostronnej i prawostronnej.

Przypuścimy, że mamy daną funkcję $y = f(x)$, określoną dla wszystkich wartości na x większych od pewnej liczby a.

Powiadamy, że funkcja dąży do granicy g, gdy x zmierza do $+\infty$, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ rozbieżnego do $+\infty$, odpowiedni ciąg $\{f(x_n)\}$ wartości funkcji zbiega do g, t. zn. że jeżeli tylko

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty,$$

to

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Piszemy to w sposób następujący:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g$$

Łatwo podać definicję następujących symboli:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = g$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Podobnie jak poprzednio można wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym nato, by liczba g była granicą funkcji gdy x zmierza do $+\infty$, jest to, by istniało prawo, które każdej liczbie $\varepsilon > 0$ przypisuje liczbę $M > 0$ taką, że dla wszystkich liczb większych od M odpowiednie wartości funkcji przybliżają g z błędem mniejszym od ε.

U w a g a. Jeżeli mamy

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = g,$$

to piszemy krótko

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g.$$

6. Twierdzenie. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada dla x dążącego do x_0 dodatnią granicę g, albo jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, to istnieje taka liczba $\alpha > 0$, że w każdym punkcie $x \neq x_0$ pewnego otoczenia punktu x_0 jest $f(x) > \alpha > 0$.

Istotnie dla wartości x dostatecznie bliskich x_0 mamy, w pierwszym wypadku nierówność

$$| f(x) - g | < \frac{g}{2},$$

a więc:

$$-\frac{g}{2} < f(x) - g,$$

czyli

$$f(x) > \frac{g}{2} = \alpha > 0,$$

w drugim zaś wypadku, obierając dowolną liczbę $M > 0$, mamy nierówność

$$f(x) > M = \alpha > 0$$

Podobne twierdzenie zachodzi dla g ujemnego lub $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, oraz dla granic jednostronnych.

7. Obliczenie niektórych granic.

A) $$\lim_{h \to 0} a^h = 1 \qquad (a > 0)$$

B) $$\lim_{r \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e$$

C) $$\lim_{h \to 0} \sin h = 0, \quad \lim_{h \to 0} \cos h = 1, \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

A) Przyjmujemy najpierw, że $a \geqslant 1$. Niech h_n będzie ciągiem spełniającym warunki:

$$\lim_{n \to \infty} h_n = 0, \qquad h_n \neq 0 \tag{1}$$

Połóżmy:

$$\alpha_n = E\left(\frac{1}{|h_n|}\right)$$ [1]

α_n jest więc liczbą całkowitą, nieujemną, spełniającą nierówność:

$$\alpha_n \leqslant \frac{1}{|h_n|} < \alpha_n + 1 \tag{2}$$

Z warunku (1) i nierówności (2) wynika, że

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = +\infty \tag{3}$$

Liczby α_n są więc od pewnego n począwszy dodatnie. W dalszym ciągu przyjmujemy stale, że $\alpha_n > 0$, co jest dozwolone, bo przytem pomijamy tylko skończoną liczbę wyrazów.

Jeżeli $h_n > 0$, to według (2) i założenia $a \geqslant 1$, jest

$$a^{h_n} \leqslant a^{\frac{1}{\alpha_n}},$$

a ponieważ oczywiście

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha_n}}} \leqslant 1 \leqslant a^{h_n},$$

więc zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha_n}}} \leqslant a^{h_n} \leqslant a^{\frac{1}{\alpha_n}} \tag{4}$$

Ta nierówność zachodzi również dla $h_n < 0$, mamy bowiem wtedy $(-h_n) > 0$, zatem na mocy (4):

---

[1] Por. str. 8.

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha_n}}} \leqslant a^{-h_n} \leqslant a^{\frac{1}{\alpha_n}},$$

czyli:

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha_n}}} \leqslant \frac{1}{a^{h_n}} \leqslant a^{\frac{1}{\alpha_n}},$$

co po przejściu do odwrotności daje znowu nierówność (4).

Ponieważ jak wiadomo (str. 39) $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{\alpha_n}} = 1$, zatem $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha_n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{\alpha_n}}} = 1$, więc z nierówności (4) na podstawie znanego twierdzenia (str. 35) wynika, że

$$\lim_{n \to \infty} a^{h_n} = 1,$$

a stąd:

$$\lim_{h \to 0} a^h = 1$$

Udowodniliśmy więc, że, jeżeli $a \geqslant 1$, to:

$$\lim_{h \to 0} a^h = 1$$

Jeżeli teraz $0 < a < 1$, to $\frac{1}{a} > 1$, zatem

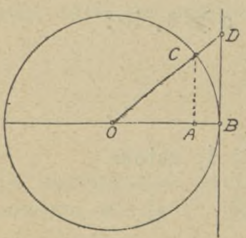
$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^h = 1$$

Ale
$$a^h = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^h},$$

więc
$$\lim_{h \to 0} a^h = \frac{1}{\lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^h} = 1$$

Tem samem ukończyliśmy dowód relacji A).

B) Poprzednio wykazaliśmy (str. 45), że jeżeli $\{r_n\}$ jest ciągiem spełniającym warunki:
$$r_n \neq 0, \quad \lim_{n \to \infty} |r_n| = +\infty,$$
to ciąg $\left\{\left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n}\right\}$ jest zbieżny do pewnej granicy, którą oznaczyliśmy przez e. W szczególności dla
$$r_n \neq 0 \ \text{ i } \lim_{n \to \infty} r_n = +\infty$$
mamy zawsze:
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = e,$$
czyli w myśl definicji granicy funkcji
$$\lim_{r \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e$$



Rys. 5.

C) Wykreślmy koło o promieniu $OB = 1$ i obierzmy dowolną średnicę EB. Niechaj Prosta BD będzie styczną do koła w punkcie B. Jeżeli teraz $BC = h$, będzie dowolnym łukiem, to oznaczając przez A rzut punktu C na OB, zaś przez D punkt przecięcia prostej OC z wyżej wspomnianą styczną, otrzymamy na mocy definicji funkcyj trygonometrycznych:

$$AC = |\,sin\,h\,|$$
$$OA = |\,cos\,h\,|$$
$$BD = |\,tg\,h\,|$$

Jeżeli $-\frac{\pi}{2} < h < \frac{\pi}{2}$, to, jak łatwo z rysunku odczytać,

$$|\,sin\,h\,| \leqslant |\,h\,| \qquad (1)$$

$$|\,cos\,h\,| \geqslant 1 - |\,sin\,h\,| \qquad (2)$$

Pierwszą nierówność otrzymujemy z uwagi, że łuk BC jest większy niż cięciwa BC, a ta znów jest większa niż AC. Drugą nierówność odczytujemy z trójkąta OCA, opierając się na twierdzeniu, że bok trójkąta jest większy od różnicy dwu pozostałych.

Z nierówności pierwszej łatwo odczytujemy, że

$$\lim_{h \to 0} sin\,h = 0$$

Z nierówności (2) i z uwagi, że $cos\,h \leqslant 1$, otrzymujemy

$$\lim_{h \to 0} cos\,h = 1$$

Z figury otrzymujemy następującą nierówność:

Pole $OAC \leqslant$ pole wycinka $OBC \leqslant$ pole OBD,

więc:

$$\frac{1}{2}\,cos\,h\,|\,sin\,h\,| \leqslant \frac{1}{2}\,|\,h\,| \leqslant \frac{1}{2}\,|\,tg\,h\,|$$

stąd, z uwagi, że

$$\frac{sin\,h}{h} = \frac{|\,sin\,h\,|}{|\,h\,|},$$

gdyż: $-\frac{\pi}{2} < h < \frac{\pi}{2}$, otrzymujemy:

$$\cos h \leqslant \frac{h}{\sin h} \leqslant \frac{1}{\cos h},$$

a więc:

$$\frac{1}{\cos h} \geqslant \frac{\sin h}{h} \geqslant \cos h,$$

a ponieważ

$$\lim_{h \to 0} \cos h = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos h} = 1,$$

więc:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Zadania. Wykazać że:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0} a^{\sin x} = 1 \qquad a > 0$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = 1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = k$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x\,(1 + \cos x)} = 0$

6. $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{|x|} = +1, \quad \lim\limits_{x \to -0} \frac{\sin x}{|x|} = -1$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ nie istnieje

8. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

9. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1} = \frac{5}{4}$ (podzielić licznik i mianownik przez $(x-1)$)

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 8x - 1}{x^3 - 1000x} = 0$

11. $\lim\limits_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty, \lim\limits_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0.$

ROZDZIAŁ IV.

Ciągłość funkcji.

1. Definicja. Niechaj funkcja $y = f(x)$ będzie określona w otoczeniu punktu x_0. Powiadamy, że funkcja jest ciągła dla $x = x_0$ jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Inaczej mówiąc: Funkcja $f(x)$ określona w otoczeniu punktu x_0 jest w tym punkcie ciągłą, jeżeli $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Podobnie, jak granicę lewostronną i prawostronną, określamy ciągłość lewostronną i prawostronną. Mianowicie: Funkcja $f(x)$ określona w punkcie x_0 oraz w pewnym przedziale, którego prawym końcem jest x_0, jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0, jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$,

czyli $\lim\limits_{h \to -0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Analogicznie określa się

ciągłość prawostronną.

Uwaga. Przy pojęciu granicy było rzeczą obojętną, czy funkcja jest określona dla $x = x_0$, czy nie. Żeby jednak funkcja była ciągłą w punkcie x_0, koniecznem jest, by była w tym punkcie określona.

Jak łatwo widzieć, funkcja $f(x)$, ciągła w punkcie x_0, jest w nim również lewo- i prawostronnie ciągła i naodwrót.

Przykłady:

1. Funkcja $y = x^2$ jest ciągła dla wszystkich wartości zmiennej x, gdyż $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x^2_0$.

2. $y = 3x^2 - 2x + 3$ jest również zawsze ciągła.

3. $y = E(x)$ jest zawsze ciągłą z wyjątkiem wartości całkowitych zmiennej x, dla których jest tylko prawostronnie ciągła.

4. Funkcja: $y = \sin\dfrac{1}{x}$ dla $x \neq 0$

$$y = 0 \qquad \text{dla } x = 0$$

jest funkcją nieciągłą w punkcie $x = 0$, gdyż biorąc ciąg $\{x_n\}$, gdzie $x_n = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$, otrzymamy ciąg odpowiednich wartości funkcji w postaci $-1, 1, -1, 1\ldots$

Powiadamy, że funkcja $f(x)$, określona w przedziale zamkniętym (a, b), jest w tym przedziale ciągła, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału i jeżeli jest prawostronnie ciągła w punkcie a, zaś lewostronnie ciągła w punkcie b.

Ilekroć mówimy o funkcji ciągłej, nie podając bliższego określenia, mamy zawsze na myśli funkcję ciągłą w pewnym przedziale zamkniętym.

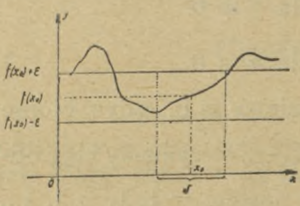
2. Warunek konieczny i dostateczny dla ciągłości funkcji. Opierając się na odpowiednich twierdzeniach z teorji granic, możemy wygłosić następujące:

Twierdzenie. Warunkiem koniecznym i wystarczającym nato, by funkcja określona w otoczeniu punktu x_0 była ciągła w tym punkcie, jest to, by wartościom x, dostatecznie mało różniącym się od x_0, odpowiadały wartości funkcji dowolnie mało się różniące od $f(x_0)$, t. j. innemi słowy, by do każdej liczby $\varepsilon > 0$

znaleźć można było takie otoczenie punktu x_0, aby wartości funkcji w dowolnym punkcie tego otoczenia różniły się od wartości funkcji dla $x = x_0$ o mniej niż ε. Podobne twierdzenie zachodzi dla ciągłości prawostronnej i lewostronnej.

3. Interpretacja geometryczna. Pojęcie ciągłości możemy zilustrować podobnie jak pojęcie granicy.

Chcąc zbadać, czy funkcja jest ciągła w punkcie x_0, obieramy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i kreślimy dwie proste równoległe do osi x, jedną w wysokości $f(x_0)+\varepsilon$, drugą w wysokości $f(x_0)-\varepsilon$. Otrzymamy w ten sposób pasek o szerokości $2\,\varepsilon$. Badamy teraz, czy znajdziemy taki odcinek δ położony na osi x-ów, a zawierający x_0 w swojem wnętrzu, by część krzywej odpowiadającej odcinkowi δ leżała całkowicie w powyżej wspomnianym pasku.



Rys. 6.

Otóż jeżeli funkcja jest ciągła, odcinek taki zawsze znajdziemy i naodwrót: jeżeli odcinek taki zawsze znajdziemy przy dowolnym obiorze liczby $\varepsilon > 0$, to funkcja jest ciągła w punkcie x_0.

4. Działania na funkcjach ciągłych. Z definicji ciągłości i odpowiednich twierdzeń z teorji granic łatwo otrzymujemy następujące:

T w i e r d z e n i e: Suma, różnica, iloczyn dwu funkcyj ciągłych w pewnym punkcie jest funkcją również ciągłą w tym punkcie; iloraz jest ciągłym wówczas, gdy funkcja, przez którą dzielimy, jest w otoczeniu tego punktu różną od zera.

Przykłady:

1. Ponieważ funkcja $y = x$ jest funkcją wszędzie ciągłą, więc funkcje: $x^2 = x \,.\, x$, $x^3 = x \,.\, x \,.\, x$, ... x^n (n — liczba naturalna) są funkcjami ciągłemi.

2. Funkcja $a\,x^n$ (n — liczba naturalna, a — liczba rzeczywista) jest funkcją wszędzie ciągłą, gdyż może być uważaną za iloczyn funkcji x^n i funkcji stałej przybierającej wartość a, oczywiście ciągłej.

3. Wielomian $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\; a_n x^n$ jest funkcją wszędzie ciągłą.

4. Z twierdzenia (str. 68) wynika natychmiast:

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 i jeżeli $f(x_0) > 0$, to istnieje taka liczba $\alpha > 0$, że w pewnem otoczeniu punktu x_0 jest $f(x) > \alpha > 0$.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla $f(x) < 0$ oraz dla funkcyj jednostronnie ciągłych.

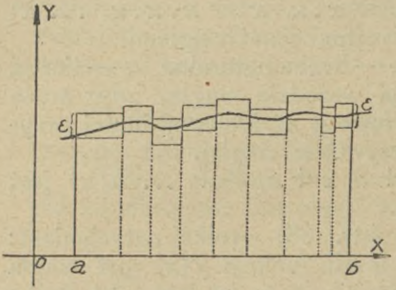
5. Funkcja wymierna, t. j. funkcja równa ilorazowi dwu wielomianów, jest ciągła we wszystkich punktach, w których jest określona.

Jednostajna ciągłość.

6. Definicja. Powiadamy, że funkcja $f(x)$ określona w przedziale (a, b) jest jednostajnie ciągła w tym przedziale, jeżeli obrawszy sobie dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, możemy podzielić przedział (a, b) na skończoną liczbę odcinków w ten sposób, że wartości funkcji w dwu dowolnych punktach tego samego odcinka różnią się od siebie o mniej niż ε.

7. Interpretacja geometryczna. Definicję tę możemy uzmysłowić sobie geometrycznie w sposób następujący:

Chcąc przekonać się, czy funkcja jest jednostajnie ciągłą, obieramy sobie dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i badamy, czy uda nam się przedział (a, b) podzielić na skończoną liczbę odcinków $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$ w ten sposób, by każda część krzywej, odpowiadająca któremukolwiek odcinkowi, dała się zamknąć w prostokącie o wysokości ε, a o podstawie równej długości odpowiedniego odcinka. Jeżeli operacja ta uda się nam dla każdego $\varepsilon > 0$, to funkcja jest jednostajnie ciągła.



Rys. 7.

8. Ciągłość funkcyj jednostajnie ciągłych. Oznaczmy przez η długość najmniejszego z odcinków $\delta_1, \delta_2 \ldots$ Jasną jest rzeczą, że jeżeli dwa dowolne punkty x_1 i x_2 różnią się o mniej niż η, to albo oba leżą w jednym z odcinków $\delta_1, \delta_2, \ldots$ albo leżą w odcinkach sąsiednich.

W wypadku pierwszym wartości funkcji w tych punktach różnią się od siebie o mniej niż ε; w drugim wypadku wartości funkcji w tych punktach różnią się o mniej niż ε od wartości funkcji we wspólnym końcu sąsiednich odcinków, zawierających punkty x_1 i x_2, a więc: $| f(x_2) - f(x_2) | < 2\,\varepsilon$.

W obu więc wypadkach możemy powiedzieć, że wartości funkcji w dwu punktach różniących się od siebie o mniej niż η, różnią się od siebie o mniej niż $2\,\varepsilon$.

Zauważmy dalej, że jeżeli x_0 jest dowolnym punktem wewnętrznym przedziału (a, b), to istnieje odcinek o długości mniejszej od η, zawierający w swem wnętrzu punkt x_0. Lecz na mocy tego, cośmy wyżej powiedzieli, wartości funkcji w dowolnym punkcie tego odcinka różnią się od $f(x_0)$ o mniej niż 2ε. Ponieważ liczba 2ε jest dowolną liczbą dodatnią (gdyż ε jest dowolną liczbą dodatnią), więc funkcja jest ciągła w punkcie $x = x_0$.

Podobną uwagę można wypowiedzieć dla liczb a i b (o ile należą do przedziału).

Udowodniliśmy więc następujące ważne

Twierdzenie: Funkcja jednostajnie ciągła w przedziale (a, b) jest w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału ciągła, a w punktach a, b ciągła prawostronnie względnie lewostronnie, o ile te punkty należą do przedziału.

Przykłady:

1. Funkcja $y = x^2$ jest w przedziale $(0, 1)$ jednostajnie ciągła. Żeby to wykazać, obierzmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i weźmy pod uwagę dwa dowolne punkty przedziału $(0, 1)$: x i $x + h$. Wartości funkcji w tych punktach są odpowiednio: x^2 i $(x + h)^2$. Mamy:

$$|(x+h)^2 - x^2| = |2xh + h^2| = |h| . |2x + h| = |h| . |x + x + h|.$$

Ponieważ $0 \leqslant x \leqslant 1$ i $0 \leqslant x + h \leqslant 1$, więc:

$$|(x^2 + h)^2 - x^2| \leqslant 2|h|$$

obierając $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$, otrzymujemy

$$|(x + h)^2 - x^2| < \varepsilon.$$

Widzimy więc, że jeżeli podzielimy przedział $(0, 1)$ na skończoną liczbę odcinków o długości mniejszej niż $\frac{\varepsilon}{2}$, to wartości funkcji w dwu dowolnych punktach tego samego odcinka różnić się będą o mniej niż ε.

Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, więc funkcja jest jednostajnie ciągła w przedziale (0, 1).

2. Funkcja $y = \dfrac{2x+1}{3x+1}$ jest jednostajnie ciągła w przedziale (0, 2).

Postępując podobnie jak w przykładzie poprzednim, otrzymujemy:

$$\left|\frac{2(x+h)+1}{3(x+h)+1} - \frac{2x+1}{3x+1}\right| = \frac{|h|}{|[3(x+h)+1][3x+1]|}$$

Ponieważ: $0 \leqslant x+h \leqslant 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, więc:

$$|3(x+h)+1| \geqslant 1$$

$$|3x+1| \geqslant 1,$$

stąd

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant |h|.$$

Jeżeli więc $|h| < \varepsilon$, to

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon.$$

Jeżeli zatem podzielimy przedział (0, 2) na odcinki o długości mniejszej niż ε, to wartości funkcji w dwu dowolnych punktach tego samego odcinka różnić się będą o mniej niż ε. np. [Jeżeli np. $\varepsilon = \frac{1}{10}$, to wystarczy odcinek (0, 2) podzielić na 21 równych części].

3. Funkcja $y = \cos\frac{1}{x}$ nie jest jednostajnie ciągła w przedziale (0, 1).

Istotnie, w przeciwnym bowiem razie możnaby przedział (0, 1) podzielić na skończoną liczbę przedziałów tak, by wartości funkcji w dwu punktach tego samego przedziału różniły się o mniej niż $\varepsilon = 1$. Możnaby było następnie obrać taką liczbę n, by punkty $\frac{1}{n\pi}$ i $\frac{1}{(n+1)\pi}$ leżały w pierwszym z tych przedziałów. Lecz łatwo widać, że odpowiednie wartości funkcji w tych punktach różniłyby się o 2 t. j. więcej niż $\varepsilon = 1$. Przyjmując więc, że funkcja jest jednostajnie ciągła, doszliśmy do sprzeczności.

Zadania. Wykazać, że następujące funkcje są jednostajnie ciągłe.

1. $y = x$ w przedziale (1, 2)
2. $y = 2x^2 - 3x$ w przedziale (1, 3)
3. $y = \dfrac{x}{1+x}$ w przedziale (0, 5)

9. Podamy teraz (bez dowodu) kilka podstawowych twierdzeń o funkcjach ciągłych w przedziale zamkniętym.

Twierdzenie. Funkcja ciągła w przedziale zamkniętym (a, b) jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.

Twierdzenie. Funkcja ciągła w przedziale zamkniętym (a, b) jest w tym przedziale ograniczona.

Twierdzenie. Jeżeli funkcja ciągła w przedziale zamkniętym (a, b) w jednym końcu tego przedziału jest dodatnia, w drugim ujemna, to istnieje wewnątrz przedziału (a, b) co najmniej jeden punkt, w którym funkcja przybiera wartość 0.

Przykłady:

1. Każdy wielomian nieparzystego stopnia

$$f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} \quad (a_0 \neq 0)$$

posiada przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Aby to wykazać, napiszmy nasz wielomian w następujący sposób:

$$f(x) = x^{2n+1}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{2n}}{x^{2n}} + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)$$

i załóżmy, że np. $a_0 > 0$. Wyrażenie w nawiasie dla x dążącego do $+\infty$ lub $-\infty$ ma granicę a_0. Istnieje więc liczba $M > 0$ taka, że dla $|x| > M$ wyrażenie w nawiasie jest dodatnie (por. str. 00). Stąd wynika, że

$$f(M+1) > 0 \text{ natomiast } f(-M-1) < 0.$$

Ponieważ funkcja $f(x)$ jest ciągła, więc istnieje w przedziale $(-M-1, M+1)$ co najmniej jeden punkt, w którym $f(x)=0$.

2. Równanie: $x = \cos x$ posiada w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ przynajmniej jeden pierwiastek. Istotnie, funkcja ciągła[1]: $f(x) = x - \cos x$ ma w punkcie $x = 0$ wartość $-1 < 0$, zaś w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$ wartość $\frac{\pi}{2} > 0$.

Twierdzenie. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale zamkniętym (a, b), to istnieje w tym przedziale przynajmniej jeden punkt, w którym funkcja przybiera wartość największą, i przynajmniej jeden punkt, w którym funkcja przybiera wartość najmniejszą.

Inaczej mówiąc: W przedziale (a, b) istnieją dwa punkty x_1, x_2 takie, że $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ dla każdego x należącego do (a, b).

Twierdzenie. Funkcja ciągła w przedziale zamkniętym (a, b) przybiera w tym przedziale wszystkie wartości zawarte między wartością najmniejszą i największą.

Przykłady:

1. Funkcja $y = \sin x$[1]) przybiera w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ każdą wartość zawartą między 0 a 1, co jest geometrycznie oczywiste (patrz rys. 12).

2. Funkcja $f(x)$ ciągła w przedziale (a, b) i przybierająca w różnych punktach przedziału różne wartości, jest w tym przedziale (ściśle) monotoniczna.

Istotnie, w przeciwnym razie istniałyby w przedziale (a, b) liczby α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ takie, że liczba $f(\beta)$ nie leżałaby między $f(\alpha)$ a $f(\gamma)$. Niech np. $f(\gamma) > f(\alpha) > f(\beta)$. Wedle naszego twierdzenia istnieje w przedziale (β, γ) punkt ϑ, w którym funkcja $f(x)$

---

[1]) Ciągłość funkcyj $y = \sin x$, $y = \cos x$ niebawem wykażemy.

przybiera wartość $f(\alpha)$. Przytem $\vartheta \neq \alpha$, bo α nie należy do przedziału (β, γ). Mamy więc $f(\vartheta) = f(\alpha)$ przy $\vartheta \neq \alpha$, co jest sprzeczne z założeniem. A więc funkcja $f(x)$ jest monotoniczna.

Funkcje złożone.

10. Definicja. Nieraz się zdarza, że mamy trzy zmienne, x, y, u, tak ze sobą związane, że y jest funkcją u, zaś u jest funkcią x, t. zn.

$$y = f(u) \qquad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta)$$

$$u = \varphi(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

Jeżeli wartości przyjmowane przez funkcję $\varphi(x)$ są zawarte w przedziale (α, β), to możemy zmienną y uważać za zależną od zmiennej x, gdyż każdej liczbie x przedziału (a, b) odpowiada pewna wartość zmiennej u, zawarta w przedziale (α, β), tej ostatniej zaś odpowiada pewna wartość zmiennej y; ostatecznie każdej wartości zmiennej x z przedziału (a, b) odpowiada pewna wartość zmiennej y. W tym wypadku powiadamy, że zmienna y jest funkcją złożoną zmiennej x za pośrednictwem zmiennej u. Oznaczamy funkcję tę symbolem $f(\varphi(x))$, zależność zaś funkcyjną napiszemy w postaci

$$y = f(\varphi(x)).$$

Przykłady:

$$y = u^3, \quad u = x^2 - 3x$$

$$y = (x^2 - 3x)^3$$

11. Ciągłość funkcji złożonej. O funkcjach złożonych możemy wygłosić następujące

Twierdzenie: Jeżeli dla $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$ funkcja $y = f(u)$ jest funkcją ciągłą, i jeżeli dla $a \leqslant x \leqslant b$ funkcja $u = \varphi(x)$ jest funkcją ciągłą i spełniającą nierówność $\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta$, to funkcja złożona $y = f(\varphi(x))$

jest ciągła dla wszystkich wartości na x z przedziału $a \leqslant x \leqslant b$.

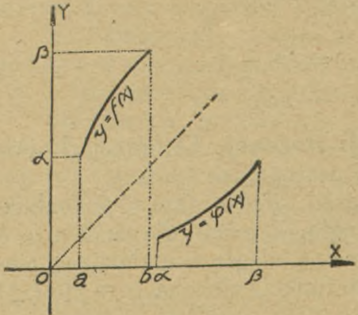
D o w ó d. Żeby twierdzenie powyższe udowodnić, zauważmy, że jeżeli ciąg x_n zdąża do pewnej wartości x, to odpowiedni ciąg $y_n = f(\varphi(x_n))$ zdąża do $f(\varphi(x))$. Na mocy bowiem ciągłości funkcji $\varphi(x)$, ciąg $\varphi(x_n) = u_n$ zdąża do $u = \varphi(x)$. Na mocy zaś ciągłości funkcji $f(u)$ ciąg $y_n = f(u_n)$ zdąża do $y = f(u) = f(\varphi(x))$.

Funkcje odwrotne.

12. Definicja. Niech dana będzie funkcja $y = f(x)$ ciagła i ściśle monotoniczna w przedziale (a, b). Połóżmy $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Wobec ciągłości funkcji zmienna y przybiera wszystkie wartości zawarte między α i β. Ponieważ nadto funkcja jest ściśle monotoniczna, więc każda wartość zmiennej y z przedziału (α, β) odpowiada jednej i tylko jednej wartości zmiennej x z przedziału (a, b). Wobec tego uważać możemy zmienną x za funkcję zmiennej y. Oznaczając tę funkcję symbolem $\varphi(y)$, możemy napisać:

$$x = \varphi(y).$$

Funkcję $x = \varphi(y)$ nazywamy funkcją odwrotną do $y = f(x)$.



Rys. 8.

13. Interpretacja geometryczna. Obraz geometryczny funkcji $y = \varphi(x)$ otrzymamy w sposób następujący:

O b r ó ć m y płaszczyznę $x\,y$, około dwusiecznej kąta

$$\sphericalangle(+x, +y),$$

wówczas nowe położenie obrazu funkcji $y = f(x)$ będzie obrazem funkcji $y = \varphi(x)$.

14. Ciągłość funkcji odwrotnej.

Twierdzenie. Funkcja odwrotna funkcji ściśle monotonicznej i ciągłej jest ściśle monotoniczna i ciągła.

Dowód. Przypuśćmy dla ustalenia myśli, że funkcja $f(x)$ jest funkcją rosnącą. Gdyby teraz funkcja odwrotna $x = \varphi(y)$ nie była ściśle rosnącą, to istniałyby dwie pary odpowiednich wartości (x_1, y_1) i (x_2, y_2), spełniające następujące nierówności:

$$x_1 < x_2,$$

$$y_1 > y_2,$$

to jednak jest sprzeczne z przypuszczeniem, że funkcja $f(x)$ jest ściśle rosnąca. Podobniebyśmy postępowali, gdyby funkcja $f(x)$ była ściśle malejąca.

Żeby teraz udowodnić ciągłość funkcji $x = \varphi(y)$ dla dowolnego punktu $y = y_0$ $(\alpha < y_0 < \beta)$, postąpimy w sposób następujący: Niechaj ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Połóżmy: $x_0 = \varphi(y_0)$ i obierzmy dwie dowolne liczby x_1 i x_2 takie, by

1. $$a < x_1 < x_0 < x_2 \leqslant b$$

2. $$0 < x_2 - x_1 < \varepsilon.$$

Kładąc teraz $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, widzimy, że dla każdego y, zawartego między y_1, a y_2, odpowiednia wartość x zawarta jest między x_1, a x_2, a więc różni się od x_0 o mniej niż ε. Funkcja $x = \varphi(y)$ jest więc ciągła dla $y = y_0$. Podobnie udowadniamy ciągłość dla $y = \alpha$ i $y = \beta$.

Ciągłość i wykresy zasadniczych funkcyj.

15. Funkcja $y = x^n$.

1. n jest liczbą naturalną.

W wypadku tym wzór powyższy określa nam funkcję dla wszystkich wartości na x. Funkcja ta jest ciągłą dla wszystkich wartości zmiennej x, gdyż, jak to wynika z twierdzeń o iloczynie ciągów, jeżeli

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x,$$

to

$$\lim_{k \to \infty} x^n{}_k = x^n$$

2. $n = 0$, z warunkiem, że dla $x = 0$, $y = 1$.

Wzór $y = x^n$ określa nam wtedy funkcję, która dla wszystkich wartości na x przyjmuje wartość 1. Funkcja ta jest więc ciągła.

3. n jest liczbą całkowitą ujemną.

Kładąc $n = -r$ $(r > 0)$, widzimy, że funkcja nasza przedstawia się w postaci $y = \frac{1}{x^r}$ i jako iloraz dwu funkcyj wszędzie określonych i ciągłych: $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x^r$ jest funkcją określoną i ciągłą wszędzie z wyjątkiem $x = 0$.

4. n jest odwrotnością liczby całkowitej.

Kładąc $n = \frac{1}{r}$ (r liczba całkowita), mamy $y = \sqrt[r]{x}$ (bierzemy pod uwagę tylko pierwiastek nieujemny). Funkcja jest dla wszystkich $x > 0$ określoną; w wypadku, gdy r jest liczbą nieparzystą, wzór powyższy określa funkcję też dla wszystkich $x < 0$. Dla $x = 0$ funkcja jest określona tylko w wypadku, gdy r jest liczbą dodatnią; funkcja przyjmuje wówczas wartość 0.

Ciągłość udowodnimy w sposób następujący: Gdy r jest liczbą parzystą, dodatnią, wówczas funkcja odwrotna $x = y^r$ jest ściśle rosnąca i ciągła dla wszystkich $y \geqslant 0$, z tego zaś wynika, na mocy twierdzeń o funkcjach odwrotnych, ciągłość funkcji $y = \sqrt[r]{x}$ dla $x \geqslant 0$. Podobnie postępujemy w wypadku, gdy r jest liczbą nieparzystą dodatnią. W wypadku tym funkcja $x = y^r$ jest ściśle rosnąca i ciągła dla wszystkich wartości na y, a więc funkcja $y = \sqrt[r]{x}$ jest również ciągła dla wszystkich wartości na x. W wypadku, gdy r jest całkowitą liczbą ujemną, łatwo wykażemy ciągłość dla wszystkich x, dla których $\sqrt[r]{x}$ istnieje, jeżeli zauważymy, że $\sqrt[r]{x} = \frac{1}{\sqrt[-r]{x}}$.

5. n jest liczbą wymierną.

Kładąc $n = \frac{p}{q}$ (p i q całkowite), widzimy, że funkcja jest określona dla wszystkich $x > 0$. Gdy $n > 0$, wówczas funkcja jest również określona dla $x = 0$, mianowicie przyjmuje wartość zero.

Funkcję $y = x^{\frac{p}{q}}$ możemy uważać za złożoną z funkcyj:

$$y = u^p$$

$$u = x^{\frac{1}{q}}.$$

Ponieważ obie funkcie są ciągłe dla tych wartości, dla których są określone, więc na mocy twierdzenia o funkcjach złożonych, funkcja $y = x^{\frac{p}{q}}$ jest również ciągła dla tych wartości, dla których jest określona.

6. n jest liczbą niewymierną.

W wypadku tym funkcja jest określona dla wszystkich $x > 0$. Dla $x = 0$ wzór $y = x^n$ ma sens tylko przy $n > 0$; mamy wtedy $y = 0$.

Funkcja jest ciągła dla wszystkich x, dla których jest wzorem $y = x^n$ określona.

Istotnie, obierając sobie liczbę a dodatnią, różną od jedności, poza tem dowolną, mamy dla $x > 0$: $y = a^{n \log_a x}$, czyli $y = a^u$, przyczem $u = n \log_a x$.

Ponieważ, jak wykażemy w ust. 16 i 17, funkcja a^u jest ciągła dla każdego u, zaś funkcja $\log_a x$ jest ciągła dla każdego $x > 0$, więc na podstawie twierdzenia o ciągłości funkcji złożonej (str. 85), funkcja $y = x^n$ jest ciągła dla każdego $x > 0$.

Jeżeli $n > 0$, to możemy udowodnić, że funkcja $y = x^n$ jest ciągła prawostronnie w punkcie $x = 0$, t. j. że $\lim\limits_{x \to +0} x^n = 0$. W tym celu obieramy dowolną liczbę wymierną r spełniającą nierówność $0 < r < n$. Dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ mamy $0 \leqslant x^n \leqslant x^r$. Funkcja x^r jest, jak wiemy, prawostronnie ciągła dla $x = 0$, a więc $\lim\limits_{x \to +0} x^r = 0$. Wobec ostatniej nierówności, to samo odnosi się do funkcji $y = x^n$.

Zbierając to wszystko, możemy powiedzieć, że funkcja $y = x^n$ jest ciągła dla wszystkich wartości na x, dla których jest określona.

Przykłady: Funkcje $\sqrt[3]{x^5}$, $\sqrt{x^3 + 8x - 9}$ i t.p. są ciągłe we wszystkich punktach, w których są określone. Ogólnie, każda potęga wielomianu jest ciągła we wszystkich punktach, w których jest określona.

16. Funkcja $y = a^x$ $a > 0$.

Ciągłość funkcji $y = a^x$ udowodnimy bardzo łatwo w sposób następujący. Niechaj x_0 będzie dowolną wartością zmiennej x. Według znanego twierdzenia jest:

$$\lim_{h \to 0} a^{x_0 + h} = \lim_{h \to 0} (a^{x_0} . a^h) = a^{x_0} \lim_{h \to 0} a^h.$$

Lecz, jak udowodniliśmy (str. 69): $\lim\limits_{h \to 0} a^h = 1$, więc:

$$\lim_{h \to 0} a^{x_0 + h} = a^{x_0}.$$

Więc granica funkcji dla każdej wartości na x istnieje i równa się wartości funkcji w punkcie x. Funkcja jest więc ciągła, dla każdej wartości na x.

17. Funkcja $y = \log_a x$. $a > 0$, $a \neq 1$.

Funkcja określona jest tylko dla $x > 0$. Ponieważ funkcja odwrotna $x = a^y$ jest ściśle monotoniczną i ciągłą, więc (por. str. 87) funkcja $y = \log_a x$ jest ciągłą dla wszystkich wartości dodatnich na x.

18. Funkcje trygonometryczne.

$y = \sin x$, $y = \cos x$.

Niechaj x_0 będzie pewną wartością zresztą dowolną zmiennej x. Wówczas z uwagi na to, że:

$$\lim_{h \to 0} \sin h = 0, \quad \lim_{h \to 0} \cos h = 1 \quad \text{(por. str. 69)},$$

mamy:

$$\lim_{h \to 0} \sin (x_0 + h) = \lim_{h \to 0} [\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h] = \sin x_0$$

$$\lim_{h \to 0} \cos (x_0 + h) = \lim_{h \to 0} [\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h] = \cos x_0.$$

Więc funkcje: $y = \sin x$, $y = \cos x$ są ciągłe dla wszystkich wartosci x.

$y = tg\, x$.

Ponieważ $tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, więc funkcja jest określona i ciągła dla wszystkich wartości na x, dla których $\cos x \neq 0$. Wartościami wyjątkowemi są wartości:

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$$

ogólnie $x = \pm \frac{(2n-1)\pi}{2}$, gdzie n jest liczbą naturalną.

$y = ctg\, x.$

Ponieważ $ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$, więc funkcja jest określona i ciągła dla wszystkich wartości na x, dla których $\sin x \neq 0$. Wartościami wyjątkowemi są:

$$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

ogólnie $x = \pm n\pi$, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$

$y = \sec x.$

Ponieważ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, więc funkcja jest określona i ciągła dla wszystkich wartości na x, dla których $\cos x \neq 0$.

$y = cosec\, x.$

Ponieważ $cosec\, x = \frac{1}{\sin x}$, więc funkcja jest określona i ciągła dla wszystkich wartości na x, dla których $\sin x \neq 0$.

19. Funkcje cyklometryczne.

$y = arc \sin x.$

Funkcja powyższa jest określona w przedziale $(-1, +1)$ w sposób następujący: $arc \sin x$ jest to kąt y zawarty w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, spełniający równanie: $x = \sin y$. Łatwo widać, że istnieje jeden tylko kąt spełniający powyższe równanie. Widzimy więc, że funkcja nasza, tak określona, jest funkcją odwrotną funkcji $x = \sin y$, zakładając, że $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ponieważ w tym przedziale $\sin y$ jest funkcją ściśle rosnącą i ciągłą, więc funkcja $y = arc\sin x$ jest funkcją ciągłą i ściśle rosnącą.

y = arc cos x.

Funkcję tę określamy podobnie jak poprzednią dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$ w sposób następujący: $arc\cos x$ jest to kąt y, zawarty w przedziale $(0, \pi)$, spełniający równanie: $x = \cos y$. Istnieje tylko jeden kąt spełniający powyższe warunki. Funkcja $y = arc\cos x$ jest więc odwrotnością funkcji $x = \cos y$ przy założeniu, że $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Ponieważ w tym przedziale $\cos y$ jest funkcją ciągłą i ściśle malejącą, więc funkcja $y = arc\cos x$ jest funkcją ciągłą i ściśle malejącą.

y = arc tg x.

Określamy funkcję tę dla wszystkich wartości na x w sposób następujący: $arc\,tg\, x$ jest to kąt y zawarty w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, spełniający równanie $tg\, y = x$. Funkcja $arc\,tg\, x$ jest więc funkcją odwrotną funkcji $x = tg\, y$ przy założeniu, że $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ponieważ w tym przedziale $x = tg\, y$ jest funkcją ściśle rosnącą i ciągłą, więc $arc\,tg\, x$ jest funkcją ściśle rosnącą i ciągłą.

y = arc ctg x.

Określamy funkcję tę dla wszystkich wartości na x w sposób następujący: $arc\,ctg\, x$ jest to kąt y zawarty w przedziale $(0, \pi)$, spełniający równanie: $ctg\, y = x$. Funkcja $arc\,ctg\, x$ jest więc funkcją odwrotną funkcji $x = ctg\, y$, dla $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Ponieważ w tym przedziale $ctg\, y$ jest funkcją ściśle malejącą i ciągłą, więc $arc\,ctg\, x$ jest funkcją ściśle malejącą i ciągłą.

y = arc sec x.

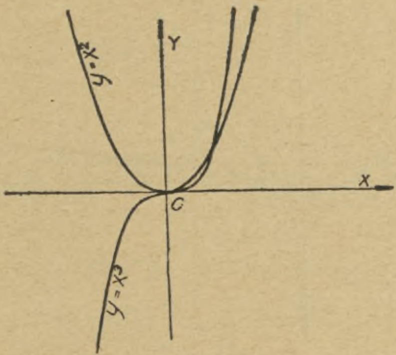
Określamy funkcję tę dla wszystkich wartości na x, dla których $|x| \geqslant 1$, w sposób następujący: $arc\sec x$ jest to kąt y zawarty w przedziale $(0, \pi)$, spełniający równanie $x = sec\, y$. Więc dla $x \geqslant 1$ funkcja $arc\, sec\, x$ jest funkcją odwrotną funkcji $x = sec\, y$, przy założeniu, że $0 \leqslant y < \frac{\pi}{2}$. Ponieważ w tym przedziale funkcja $x = sec\, y$ jest ściśle rosnąca i ciągła $\left(\text{z wyjątkiem } y = \frac{\pi}{2}\right)$, więc funkcja $arc\, sec\, x$ jest dla $x \geqslant 1$ ściśle rosnąca i ciągła.

Dla $x \leqslant -1$ funkcja $arc\, sec\, x$ jest funkcją odwrotną funkcji $x = sec\, y$, przy założeniu, że $\frac{\pi}{2} < y \leqslant \pi$. Ponieważ w tym przedziale funkcja $sec\, y$ jest ściśle rosnąca i ciągła $\left(\text{z wyjątkiem } y = \frac{\pi}{2}\right)$, więc funkcja $arc\, sec\, x$ jest dla $x \leqslant -1$ funkcją ściśle rosnącą i ciągłą.

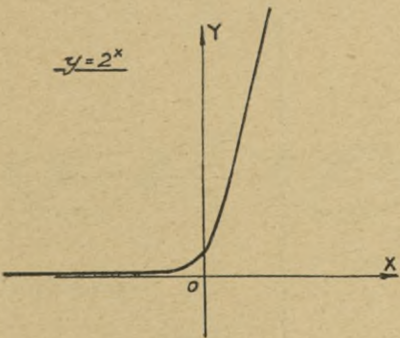
$y = arc\, cosec\, x$.

Określamy funkcję tę dla tych wartości na x, dla których $|x| \geqslant 1$ w sposób następujący: $arc\, cosec\, x$ jest to kąt y zawarty w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, spełniający równanie $cosec\, y = x$. Więc dla $x \geqslant 1$ funkcja $arc\, cosec\, x$ jest funkcją odwrotną funkcji $x = cosec\, y$ jezeli założymy, że $0 < y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ponieważ w tym przedziale funkcja $cosec\, y$ jest ściśle malejącą i ciągłą (z wyjątkiem $y = 0$), więc funkcja $y = arc\, cosec\, x$ jest funkcją dla $x \geqslant 1$ ściśle malejącą i ciągłą.

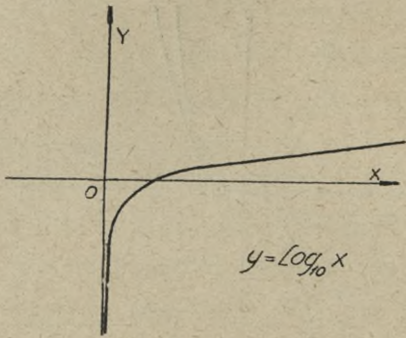
Dla $x \leqslant -1$ funkcja $arc\, cosec\, x$ jest funkcją odwrotną funkcji $x = cosec\, y$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant y < 0\right)$. Ponieważ w tym przedziale funkcja $cosec\, y$ jest funkcją ściśle malejącą i ciągłą (z wyjątkiem $y = 0$), więc funkcja $y = arc\, cos\, x$ jest dla $x \leqslant -1$ funkcją ściśle malejącą i ciągłą.



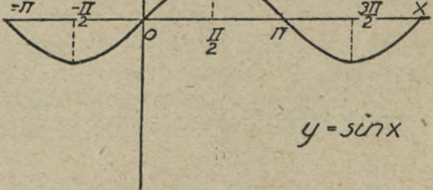
Rys. 9.



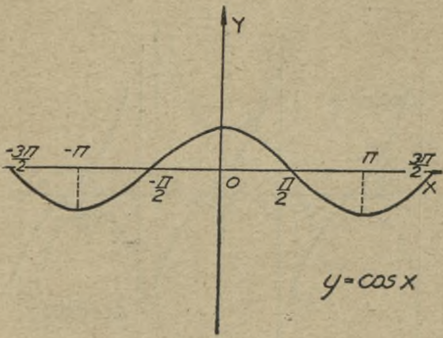
Rys. 10.



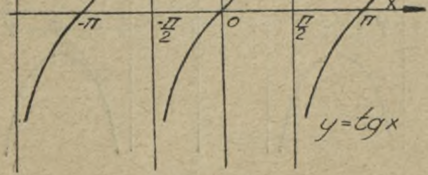
Rys. 11.



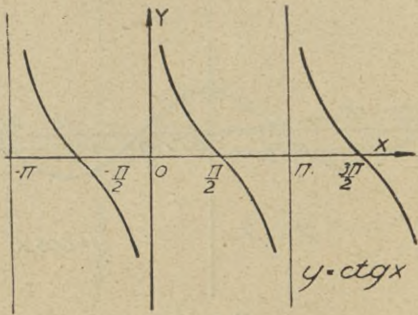
Rys. 12.



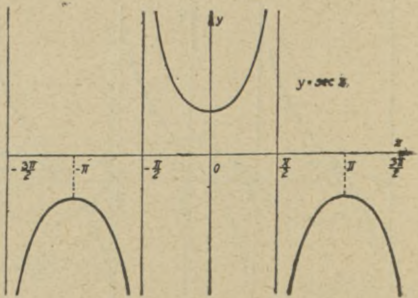
Rys. 13.



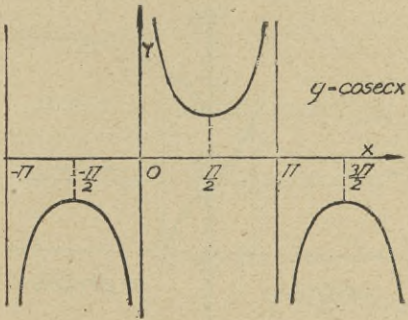
Rys. 14.


Y
X
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
y = ctgx

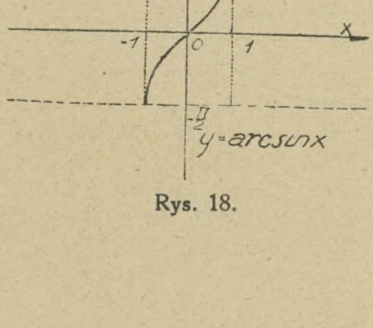
Rys. 15.


y
y = sec x
x
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$

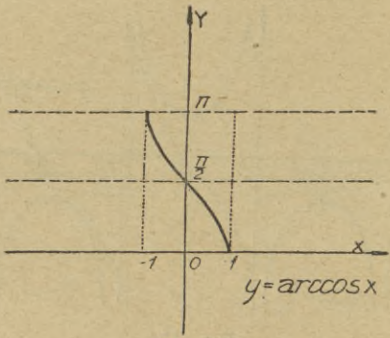
Rys. 16.



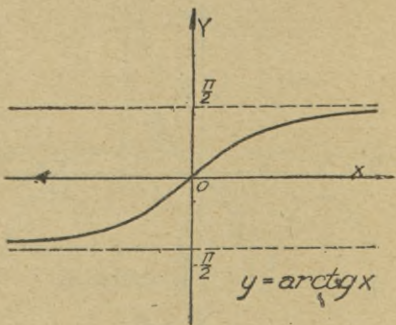
Rys. 17.



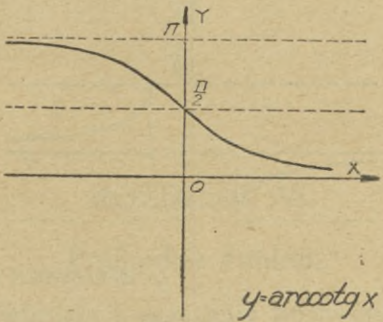
Rys. 18.



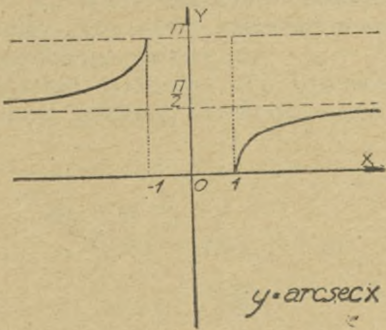
Rys. 19.



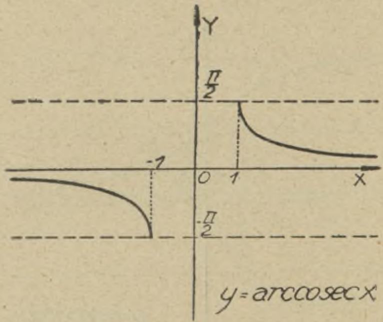
Rys. 20.



Rys. 21.



Rys. 22.



Rys. 23.

ROZDZIAŁ V.

Pochodna funkcji.

Definicja i znaczenie pochodnej.

1. Definicja pochodnej. Niechaj funkcja $y = f(x)$ będzie określoną w otoczeniu punktu x_0. Weźmy pod uwagę punkt x_1 tego otoczenia, różny od x_0. Różnicę $x_1 - x_0$, którą znaczymy symbolem Δx, nazywać będziemy przyrostem zmiennej niezależnej. Podobnie odpowiednią różnicę $y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$ oznaczać będziemy symbolem Δy i nazwiemy ją przyrostem zmiennej zależnej. Zachodzą więc następujące związki:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x).$$

Ponieważ:

$$y_0 = f(x_0),$$

więc:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Iloraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

nazywać będziemy ilorazem różnicowym.

Wyrażenie $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (przyjmując, że x_0 ma pewną stałą wartość), możemy uważać za funkcję przyrostu Δx. Możemy też badać, czy istnieje granica tego wyrażenia, gdy Δx dąży do zera.

Jeżeli granica tego wyrażenia istnieje, gdy Δx dąży do zera, to nazywać ją będziemy pochodną funkcji $y = f(x)$ względem x w miejscu x_0. Pochodną oznaczać będziemy symbolem $f'(x_0)$ lub y'_x lub krótko y'. Często używa się również dla oznaczenia pochodnej symbolu $\frac{dy}{dx}$. Symbol ten przypomina, że pochodna jest granicą ilorazu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

A więc:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = y'_x = y' = \frac{dy}{dx}$$

Pochodną określoną w powyższy sposób nazywamy dokładniej pierwszą pochodną funkcji $y = f(x)$, dla odróżnienia od pochodnych wyższych rzędów (o których będzie mowa później).

P r z y k ł a d y:

1. $\boldsymbol{y = x}$. Oznaczając przez Δx dowolny przyrost zmiennej x, zaś przez Δy odpowiedni przyrost zmiennej y, mamy

$$y + \Delta y = x + \Delta x.$$

Stąd

$$\Delta y = \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

a więc $y'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$

A zatem pochodna funkcji $y = x$ jest równa jedności, przy każdem x.

2. $y = x^2$. Obliczymy pochodną dla $x = 2$.

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2,$$

a więc:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

stąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Przechodząc do granicy, otrzymujemy:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x.$$

A więc dla $x = 2$, $y'_x = 4$.

3. $y = \frac{2x+1}{3x+1}$ — obliczymy pochodną dla $x=1$.

$$y + \Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + 1}{3(x + \Delta x) + 1},$$

a więc:

$$\Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + 1}{3(x + \Delta x) + 1} - \frac{2x+1}{3x+1} =$$

$$= - \frac{\Delta x}{[3(x + \Delta x) + 1][3x + 1]},$$

stąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{[3(x + \Delta x) + 1][3x + 1]},$$

więc

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(3x+1)^2},$$

zatem dla $x = 1$

$$y'_x = -\frac{1}{16}.$$

4. $y = 2 + 3x - x^2$. Obliczymy pochodną dla $x = 0$.

$$f(0) = 2$$

$$f(0 + \Delta x) = f(\Delta x) = 2 + 3\Delta x - \Delta x^2,$$

więc

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = 3\Delta x - \Delta x^2,$$

stąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 - \Delta x,$$

a więc

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.$$

2. Pochodne jednostronne. Podobnie jak przy pojęciu granicy, możemy określić pochodną lewostronną i prawostronną jako $\lim\limits_{h \to -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$ względnie $\lim\limits_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

W szczególności w punktach końcowych przedziału (a, b), w którym funkcja jest określona, możemy mówić tylko o pochodnej jednostronnej, t. j. o prawostronnej w punkcie a i o lewostronnej w punkcie b. Podobne uwagi, jakie wypowiedzieliśmy o granicach jednostronnych, można wypowiedzieć o pochodnych jednostronnych, w szczególności z istnienia pochodnej wynika istnienie obu pochodnych jednostronnych, z istnienia i równości pochodnych jednostronnych wynika istnienie pochodnej.

3. Istnienie pochodnej, a ciągłość. Jasną jest rzeczą, że nato, by stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ miał granicę, konieczną jest rzeczą, żeby $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, czyli, żeby funkcja była ciągła w punkcie x_0. Jednak, jak później pokażemy, ciągłość nie wystarcza do istnienia pochodnej.

4. Pochodna jako funkcja. Jeżeli funkcja posiada w każdym punkcie przedziału (a, b) pochodną [w końcach przedziału ewentualnie pochodne jednostronne], wówczas pochodną tę uważać możemy za nową funkcję zmiennej x. Funkcję tę nazywać będziemy funkcją pochodną funkcji pierwotnej $y = f(x)$. Ilekroć mówimy, że funkcja $f(x)$ posiada pochodną, bez bliższego określenia przedziału, to, przyjmujemy milcząco, że pochodna istnieje w każdym punkcie przedziału, w którym funkcja $f(x)$ jest określona (na końcach przedziału tylko pochodna jednostronna).

5. Interpretacje pochodnej w geometrji i fizyce. Mając daną krzywą $y = f(x)$, łatwo widzimy, że iloraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ równa się tangensowi kąta α, jaki dodatni kierunek siecznej, przechodzącej przez punkty A i B (odpowiadające punktom x i $x + \Delta x$), tworzy z dodatnim kierunkiem osi x-ów[1]). Jeżeli teraz przyrost Δx będzie zmierzał do zera, to punkt B będzie zmierzał do A, kąt α będzie zmierzał do kąta σ, jaki dodatni kierunek stycznej tworzy z dodatnim kierunkiem osi x-ów, zaś $tg\ \alpha$ będzie zmierzał do $tg\ \sigma$, a więc:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \sigma\ ^{2)}.$$

Możemy więc powiedzieć: Pochodna równa się tangensowi kąta, jaki dodatni kierunek stycznej w od-

---

[1]) Przytem za dodatni kierunek siecznej uważamy kierunek od A do B, t. j. ten kierunek, w którym x rośnie.

[2]) Przytem znowu za dodatni kierunek stycznej uważamy ten kierunek, w którym x rośnie.

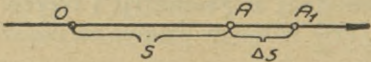
powiednim punkcie krzywej tworzy z dodatnim kierunkiem osi x-ów.

U w a g a. Znając więc pochodną, możemy łatwo wykreślić styczną do krzywej przedstawionej wykresem. Łatwo widać, że jeśli $y' = 0$, to $tg\,\sigma = 0$, a więc styczna jest równoległa do osi x-ów. Zauważyć trzeba, że jednem z zagadnień, które doprowadziły do pojęcia pochodnej, było szukanie stycznych do krzywych.

Obok tej geometrycznej interpretacji bardzo wiele przykładów do zilustrowania pochodnej znajdujemy w fizyce.

P r z y k ł a d y:

1. Niechaj punkt materjalny A porusza się po linji prostej. Obierając sobie pewien kierunek na tej prostej i dowolny punkt 0, będziemy mogli dokładnie podać pozycję punktu A jedną liczbą s, której bezwzględna wartość będzie się równała długości odcinka OA, zaś znak jej będzie $+$ lub $-$, zależnie od tego, czy kierunek wektora $\overline{OA}$ jest zgodny z obranym na prostej kierunkiem, czy nie.



Rys. 24.

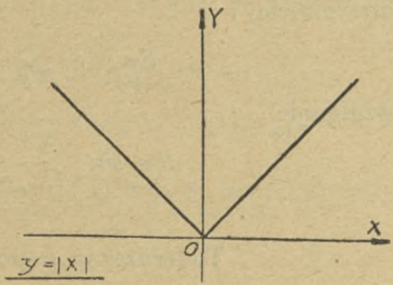
Jasną jest rzeczą, że każdemu momentowi czasu t, odpowiada pewna pozycja punktu A, a co za tem idzie, pewna liczba s. A więc możemy powiedzieć, że s jest funkcją zmiennej t, czyli:

$$s = f(t).$$

Weźmy pod uwagę jakiś moment czasu t i oznaczmy przez Δt dowolny jego przyrost, a przez Δs odpowiedni przyrost zmiennej s. Jeżeli ruch jest jednostajny, t. j. jeżeli punkt A w równych, dowolnie małych okresach czasu przebywa równe drogi, to prędkość ciała określamy jako stosunek $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, który jest w tym wypadku stały. Jeżeli ruch jest niejednostajny, to prędkość określamy, jako $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, czyli: Prędkość jest to pierwsza pochodna drogi względem czasu.

2. Podobnie określamy przyśpieszenie, jako pierwszą pochodną prędkości względem czasu.

6. Jak już poprzednio zaznaczyliśmy, funkcja ciągła nie musi mieć koniecznie pochodnej. Jako przykład może służyć funkcja $y = |x|$. Dla $x = 0$ pochodna nie istnieje. Pochodne prawostronna i lewostronna równają się odpowiednio $+1$ względnie -1.



Rys. 25.

Przykładem funkcji ciągłej, nie mającej ani pochodnej prawostronnej ani lewostronnej, jest funkcja $y = x \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$, $y = 0$ dla $x = 0$. Dla $x = 0$ otrzymujemy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Lecz wyrażenie $\sin \frac{1}{\Delta x}$ nie posiada granicy prawostronnej ani lewostronnej, kładąc bowiem $\Delta x_n = \frac{1}{n\pi}$, otrzymujemy:

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{\Delta x_n} = \lim_{n \to \infty} \sin n\pi = 0.$$

Kładąc: $\varDelta x_n = \dfrac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$, otrzymujemy:

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{\varDelta x_n} = \lim_{n \to \infty} \sin (4n+1)\frac{\pi}{2} = 1.$$

Kładąc zaś $\varDelta x_n = \dfrac{-1}{n\pi}$ względnie $\varDelta x_n = \dfrac{-1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$,

otrzymujemy:

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{\varDelta x_n} = 0,$$

względnie

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{\varDelta x_n} = -1.$$

Twierdzenia o pochodnej.

7. Pochodna funkcji stałej jest zerem. Twierdzenie to jest oczywiste, gdyż przy każdem $\varDelta x$ mamy $\varDelta y = 0$. A więc $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x} = 0$, czyli:

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = 0.$$

8. Pochodna funkcji $y = x^n$ (n całkowite dodatnie) wyraża się wzorem

$$y'_x = n x^{n-1}.$$

Wzór ten jest ważny przy $n > 1$ dla wszystkich x, zaś przy $n = 1$ dla $x \neq 0$. Dla $n = 1$, $x = 0$ wzór ten traci sens (bo 0^0 nie ma znaczenia); w tym wypadku, jak wiemy (str. 104), pochodna jest równa jedności.

Dowód: jeżeli przez Δx oznaczymy przyrost zmiennej x, zaś przez Δy odpowiedni przyrost zmiennej y, to

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n,$$

więc

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n.$$

Stosując dwumian Newtona, otrzymujemy:

$$\Delta y = \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n,$$

więc, przy założeniu, że $n > 1$ (por. wyżej):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}$$

Ponieważ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 0$, ... $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^n = 0$,

więc:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1}$$

9. T w i e r d z e n i e. Jeżeli:

$$y = a\, f(x),$$

przyczem a jest liczbą stałą, zaś $f(x)$ ma pochodną w punkcie x, to funkcja y posiada również w punkcie x pochodną

$$y' = a\, f'(x).$$

P r z y k ł a d. $\quad y = 5 x^2.$

Możemy położyć: $a = 5$, $f(x) = x^2$. Ponieważ:

$$f'(x) = 2x,$$

więc:

$$y'_x = 10 x.$$

Dowód:

$$y + \Delta y = a\, f(x + \Delta x),$$

stąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\, \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

więc:

$$y'_x = a\, f'(x).$$

10. Pochodna sumy, iloczynu, ilorazu.

Twierdzenie. Jeżeli funkcje $f(x)$, $\varphi(x)$ posiadają pochodną w pewnym punkcie x, to ich suma oraz ich iloczyn również posiadają pochodną w tym punkcie, a mianowicie:

1. Pochodną sumy: $y = f(x) + \varphi(x)$ jest

$$y' = f'(x) + \varphi'(x).$$

2. Pochodną iloczynu: $y = f(x) \,.\, \varphi(x)$ jest

$$y' = f(x)\, \varphi'(x) + f'(x)\, \varphi(x).$$

Przy dodatkowem założeniu $\varphi(x) \neq 0$ istnieje również

3. pochodna ilorazu $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, a mianowicie:

$$y' = \frac{\varphi(x)\, f'(x) - f(x)\, \varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

Dowód.

1. Jeżeli przez Δx i Δy oznaczymy odpowiednio przyrosty zmiennych x i y, to otrzymamy ze związku

$$y = f(x) + \varphi(x)$$

związek

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x),$$

odejmując górne równanie od dolnego, mamy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) + \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Stąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

Więc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} +$$
$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

czyli:

$$u'_x = f'(x) + \varphi'(x).$$

Przykład. $y = x^2 + x^3$.

Tutaj możemy położyć:

$$f(x) = x^2, \qquad \varphi(x) = x^3.$$

Ponieważ

$$f'(x) = 2x, \qquad \varphi'(x) = 3x^2,$$

więc

$$y'_x = 2x + 3x^2.$$

2. $y + \Delta y = f(x + \Delta x) \,.\, \varphi(x + \Delta x)$

stąd

$$\Delta y = f(x + \Delta x) \,.\, \varphi(x + \Delta x) - f(x) \,.\, \varphi(x).$$

Odejmując i dodając do prawej strony równania powyższego $f(x) \,.\, \varphi(x + \Delta x)$, otrzymamy:

$$\Delta y = [f(x + \Delta x) - f(x)]\, [\varphi(x + \Delta x)] +$$
$$+ f(x)\, [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)],$$

więc na mocy twierdzeń o granicach sumy i iloczynu mamy:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot$$

$$\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x};$$

ponieważ funkcje $f(x)$, $\varphi(x)$ w miejscu x są ciągłe więc:

$$y' = f'(x)\,\varphi(x) + f(x)\,\varphi'(x)$$

Przykład: $y = (x^2 + x^3)\, 5\, x^2$

Jeżeli położymy:

$$f(x) = x^2 + x^3, \qquad \varphi(x) = 5\, x^2,$$

to

$$f'(x) = 2\,x + 3\,x^2, \qquad \varphi'(x) = 10\,x,$$

więc

$$y' = (2\,x + 3\,x^2)\, 5\,x^2 + (x^2 + x^3)\, 10\,x = 20\,x^3 + 25\,x^4.$$

3. Dla dostatecznie małych Δx jest jak wiemy (por. str. 79)

$$\varphi(x + \Delta x) \neq 0.$$

Możemy zatem napisać:

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

więc

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)\,\varphi(x) - \varphi(x+\Delta x)\, f(x)}{\varphi(x+\Delta x)\,\varphi(x)}.$$

Odejmując i dodając do licznika $\varphi(x)\, f(x)$, otrzymamy

$$\Delta y = \frac{\varphi(x)\,[f(x+\Delta x) - f(x)] - [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] f(x)}{\varphi(x+\Delta x)\,.\,\varphi(x)},$$

stąd
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\varphi(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} f(x)}{\varphi(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(x + \Delta x)},$$

więc:
$$y' = \frac{\varphi(x) f'(x) - f(x) \varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$$

Przykłady:

1. $y = \dfrac{1}{\varphi(x)}$;

w wypadku tym $f(x) = 1$, $f'(x) = 0$, więc
$$y' = \frac{-\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

2. $y = x^{-5}$ dla $x \neq 0$

czyli
$$y = \frac{1}{x^5},$$

stąd
$$y' = \frac{-5x^4}{x^{10}} = -5x^{-6}.$$

3. $y = \dfrac{x^2 + 5}{1 + x^3}$

kładąc: $f(x) = x^2 + 5$, $\varphi(x) = 1 + x^3$, w każdym punkcie $x \neq -1$ otrzymujemy
$$y' = \frac{(1 + x^3)\, 2x - 3x^2 (x^2 + 5)}{(1 + x^3)^2} = \frac{2x - 15x^2 - x^4}{(1 + x^3)^2}.$$

Zadania. Obliczyć pochodne następujących funkcyj:

1. $y = 7$ $\qquad y' = 0$

2. $y = x^6$ $\quad y' = 6x^5$

3. $y = 2x^3$ $\quad y' = 6x^2$

4. $y = x^4 + 1$ $\quad y' = 4x^3$

5. $y = 3x^2 + 2x - 6$ $\quad y' = 6x + 2$

6. $y = \frac{x^5 + 5x^3}{3} = \frac{1}{3}(x^5 + 5x^3)$ $\quad y' = \frac{1}{3}(5x^4 + 15x^2)$

7. $y = (5 + 6x)(4 - 3x)$ $\quad y' = 9(1 - 4x)$

8. $y = 2x^3(8x + 11)$ $\quad y' = 64x^3 + 66x^2$

9. $y = \frac{3}{4x^3}$ $\quad y' = -\frac{9}{4x^4}$

10. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}$ $\quad y' = \frac{-16 + 4x + 4x^2}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

11. $y = \frac{3 + 2x}{3 - 2x}$ $\quad y' = \frac{12}{(3 - 2x)^2}$

12. $y = \frac{5}{x^3}$ $\quad y' = -\frac{15}{x^4}$

13. $y = 9x^6 + \frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^{11}}$ $\quad y' = 54x^5 - \frac{12}{x^5} + \frac{22}{x^{12}}$

11. Pochodna funkcji złożonej. Jeżeli funkcja $y = f(\varphi(x))$ jest funkcją złożoną z funkcyj $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ ciągłych i mających pochodne ciągłe, to pochodna funkcji złożonej istnieje i oznaczając ją symbolem y'_x, mamy wzór:

$$y'_x = f'(u) \, . \, u'_x,$$

czyli

$$y'_x = f'(\varphi(x)) \, \varphi'(x).$$

Przykład: $y = (5 + 2x - 3x^2)^5$.

Kładąc $\qquad u = 5 + 2x - 3x^2,$

mamy $\qquad y = u^5,$

zatem $\qquad y' = 5u^4 \cdot u'$

i ostatecznie $y' = 5(5 + 2x - 3x^2)^4 \cdot (2 - 6x).$

Udowodnimy na razie powyższe twierdzenie przy założeniu, że, gdy $\Delta x \neq 0$, to

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \neq 0.$$

Kładąc $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$, mamy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, więc

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Zatem: $\qquad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$

Dowód w wypadku ogólnym podany jest na str. 162.

12. Pochodna funkcji odwrotnej. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ściśle monotoniczna posiada dla pewnej wartości na x pochodną różną od 0, to funkcja odwrotna $x = \varphi(y)$ posiada w odpowiednim punkcie y pochodną $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

D o w ó d. Oznaczając przez Δy przyrost zmiennej y, zaś przez Δx odpowiedni przyrost zmiennej x, mamy:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}},$$

więc:

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Ponieważ $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$, więc:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

a więc:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Przykłady:

1. $$y = f(x) = \sqrt{x}$$

Podnosząc do kwadratu, otrzymujemy

$$y^2 = x.$$

Funkcją odwrotną jest więc:

$$x = \varphi(y) = y^2.$$

Ponieważ:

$$\varphi'(y) = 2y,$$

więc

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. $$y = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$$

Mamy tu

$$y^2 = \frac{x+1}{x+2},$$

stąd

$$x = \varphi(y) = \frac{1 - 2y^2}{y^2 - 1}$$

Stosując do $\varphi(y)$ twierdzenie o pochodnej ilorazu, mamy:

$$\varphi'(y) = \frac{(y^2 - 1)(-4y) - (1 - 2y^2) \,.\, 2y}{(y^2 - 1)^2} = \frac{2y}{(y^2 - 1)^2},$$

a więc:

$$y' = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{(y^2 - 1)^2}{2y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x + 2)^2} \sqrt{\frac{x + 2}{x + 1}}$$

Moglibyśmy również obliczyć tę pochodną, opierając się na przykładzie poprzednim i twierdzeniu o pochodnej funkcji złożonej. Kładąc:

$$u = \frac{x + 1}{x + 2},$$

otrzymujemy:

$$y = \sqrt{u}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x + 2}{x + 1}} \, \frac{(x + 2) 1 - (x + 1) \,.\, 1}{(x + 2)^2},$$

a więc znowu:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x + 2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x + 2}{x + 1}}.$$

Różniczka funkcji.

13. Definicja różniczki. Załóżmy, że funkcja $y = f(x)$ posiada ciągłą pochodną. Oznaczmy przez Δx pewien dowolny przyrost zmiennej niezależnej x, zaś przez Δy odpowiedni przyrost zmiennej zależnej y.

Wyrażenie

$$f'(x)\ \Delta x$$

oznaczać będziemy symbolami $d_x y$, $d_x f(x)$ i nazywać różniczką zmiennej y ze względu na zmienną x w punkcie x. Pisząc la symetrji $d_x x$ zamiast Δx, otrzymujemy następując formułę:

$$d_x y = f'(x)\, d_x x, \tag{1}$$

stąd

$$\frac{d_x y}{d_x x} = f'(x), \tag{2}$$

Zauważymy jeszcze, ż różniczki $d_x y$ i $d_x x$ są funkcjami zmiennej x, przyczem $d_x x$ jest funkcją przybierającą wartość stałą Δx.

14. Różniczka funkcji złożonej. Przypuśćmy teraz, że x jest funkcją innej zmiennej t, t. zn. że

$$x = \varphi(t).$$

Załóżmy nadto, że funkcja $\varphi(t)$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną. Niechaj dla $t = t_1$ będzie $x = x_1$. Podobnie jak poprzednio otrzymamy formułę:

$$d_t x = \varphi'(t_1)\, d_t t. \tag{3}$$

Zmienną y możemy uważać za zależną od t, a mianowicie

$$y = f(x) = f(\varphi(t)) = \psi(t).$$

I teraz otrzymamy związek:

$$d_t y = \psi'(t)\, d_t t. \tag{4}$$

Lecz na mocy twierdzenia o pochodnych funkcji złożonej wiemy, że

$$\psi'(t) = f'(x)\ \varphi'(t).$$

Wstawiając to wyrażenie w formułę (4), otrzymujemy

$$d_t y = f'(x_1)\ \varphi'(t_1)\ d_t t,$$

stąd zaś na mocy formuły (3)

$$d_t y = f'(x_1)\ d_t x. \tag{5}$$

Porównując formułę (1) z formułą (5), widzimy, że możemy je symbolicznie napisać w postaci:

$$dy = f'(x)\ dx. \tag{6}$$

Formułę (1) względnie (5) otrzymujemy z formuły (6), pisząc d_x względnie d_t zamiast d.

Symbole dy i dx są symbolami niezupełnemi. W wielu wypadkach jednak, gdy pomyłka będzie wykluczona, będziemy ich używać zamiast symboli $d_x y$, $d_x x$ względnie $d_t y$, $d_t x$.

Znaczenie formuły (6) uwydatni się, gdy zwrócimy uwagę na to, że przy szukaniu pochodnej mieliśmy dwie formuły służące do wyznaczenia pochodnej y ze względu na x. Mianowicie, gdy zmienna y była dana jako bezpośrednio zależna od x, wówczas

$$y'_x = f'(x),$$

gdy zaś zmienna y była dana, jako zależna od x za pośrednictwem pewnej funkcji u, wówczas

$$y'_x = f'(u)\,.\,u'_x.$$

Szukając jednak różniczki, otrzymamy w obu wypadkach podobną formułę:

$$d_x y = f'(x)\ d_x x$$

$$d_x y = f'(u)\ d_x u,$$

czyli

$$dy = f'(x)\ dx$$

$$dy = f'(u)\ du.$$

15. Różniczka sumy, iloczynu i ilorazu. Na mocy twierdzeń o pochodnych sumy i iloczynu otrzymujemy podobne wzory na różniczkę sumy, iloczynu i ilorazu. Załóżmy, że u i v są funkcjami zmiennej x:

$$u = f(x), \qquad v = \varphi(x),$$

mającemi ciągłe pochodne. Jeżeli teraz przyjmiemy, że

$$y = u + v,$$

wówczas

$$y'_x = u'_x + v'_x,$$

stąd

$$y' \, dx = u' \, dx + v'_x \, dx,$$

więc

$$dy = du + dv,$$

czyli

$$d(u + v) = du + dv.$$

Podobnie:

$$d(c \,.\, u) = c \,.\, du,$$

gdzie c jest liczbą stałą,

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

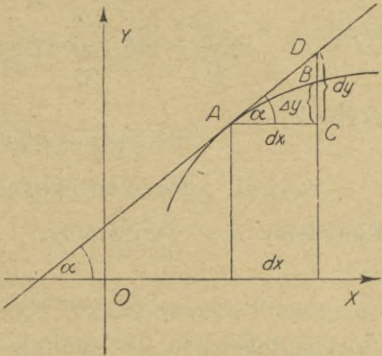
Uwaga. W praktyce dogodniej jest często rachować różniczkami, a następnie dzieląc przez różniczkę zmiennej niezależnej, zamieniać je na pochodne.

16. Interpretacja geometryczna różniczki. Geometrycznie możemy różniczkę przedstawić w następujący sposób:

Jak łatwo widać z rysunku, mamy:

$$dy = f'(x)\ dx = tg\,\alpha\, dx = CD.$$

Różniczka dy różni się w ogólności od Δy, ale różnica ta: BD jest bardzo małą w porównaniu z dx, dla bardzo małych dx, gdyż



$$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y - dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} \left[\frac{\Delta y}{dx} - \frac{dy}{dx}\right] = f'(x) - f'(x) = 0.$$

W praktyce więc, gdy nam chodzi tylko o przybliżone wartości, możemy dla małych przyrostów dx położyć

$$\Delta y = dy = f'(x)\ dx.$$

Pochodne funkcyj zasadniczych.

17. $y = x^n \qquad y'_x = n\, x^{n-1} \qquad (x \neq 0).$
Poprzednio wykazaliśmy tę formułę w przypadku, gdy n jest liczbą całkowitą nieujemną. Przejdziemy teraz pozostałe wypadki, a mianowicie gdy

n jest liczbą całkowitą ujemną

n jest liczbą wymierną

n jest dowolną liczbą rzeczywistą

n jest liczbą całkowitą ujemną. Kładąc $n = -r$, $(r > 0)$, otrzymamy funkcję w postaci

$$y = \frac{1}{x^r} \qquad (x \neq 0).$$

Na mocy twierdzenia o ilorazie

$$y'_x = \frac{x^r \,.\, 0 - r\,x^{r-1}}{x^{2r}},$$

czyli

$$y'_x = \frac{-\,r\,x^{r-1}}{x^{2r}} = -\,r\,x^{-r-1},$$

czyli

$$y'_x = n\,x^{n-1}$$

n jest odwrotnością liczby całkowitej. Kładziemy $n = \frac{1}{r}$ i mamy:

$$y = x^{\frac{1}{r}}.$$

Funkcją odwrotną jest funkcja

$$x = y^r,$$

więc

$$x'_y = r\,y^{r-1}.$$

Stąd na mocy twierdzeń o funkcjach odwrotnych

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{r\,y^{r-1}} \quad \text{(dla } y \neq 0, \text{ t. zn. } x \neq 0).$$

Ponieważ

$$y^{r-1} = \left(x^{\frac{1}{r}}\right)^{r-1} = x^{1-\frac{1}{r}} = x^{-\left(\frac{1}{r}-1\right)},$$

więc

$$y'_x = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{x^{-\left(\frac{1}{r}-1\right)}}$$

czyli

$$y'_x = \frac{1}{r}\,x^{\frac{1}{r}-1},$$

a więc

$$y'_x = n\,x^{n-1} \qquad (\text{dla } x \neq 0).$$

Dla $x = 0$ pochodna nie istnieje.

n liczbą wymierną. Kładąc $n = \frac{p}{q}$, możemy funkcję

$$y = x^{\frac{p}{q}} \qquad (x \geqslant 0)$$

uważać za funkcję złożoną z funkcyj:

$$y = u^p \quad \text{i} \quad u = x^{\frac{1}{q}}.$$

Więc na mocy twierdzenia o pochodnych funkcyj złożonych dla $x \neq 0$ jest:

$$y'_x = y'_u \,.\, u'_x$$

$$y'_x = p\,u^{p-1} \cdot \frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$y'_x = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$y'_x = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}$$

czyli:

$$y'_x = n\,x^{n-1}.$$

n liczbą niewymierną. Funkcję możemy w takim wypadku uważać za funkcję złożoną z funkcyj

$$y = e^u, \qquad u = n \log x.$$

Wówczas, opierając się na ust. 19 (str. 129), mamy dla $x \neq 0$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot \frac{n}{x}.$$

Stąd, ponieważ

$$e^u = y = x^n$$

więc
$$y'_x = x^n \cdot \frac{n}{x} = n\,x^{n-1}.$$

Gdy $n > 1$, to można udowodnić, że dla $x = 0$, $y'_x = 0$.

Gdy $n < 1$, to pochodna dla $x = 0$ nie istnieje.

Przykłady:

1. $$y = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}},$$

a więc

$$y' = \frac{3}{5}\,x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}\,x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}\,\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}.$$

2. $$y = x^{\sqrt{2}}$$

$$y' = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}.$$

3. $$y = \sqrt{x+a} = (x+a)^{1/2},$$

zatem

$$y' = \frac{1}{2}(x+a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+a}}.$$

Korzystaliśmy przytem z twierdzenia pochodnej o funkcji złożonej ($u = x + a$).

Zadania.

1. $y = \sqrt[3]{3x - 2x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{3 - 4x}{3\sqrt[3]{3(x - 2x^2)^2}}$

2. $y = 7x\sqrt{1 + 2x}$ $\qquad y' = \dfrac{7(1 + 3x)}{\sqrt{1 + 2x}}$

3. $y = \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$ $\qquad y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})^2}$.

18. $\boldsymbol{y = \log_a x \quad y'_x = \dfrac{1}{x}\log_a e}$ (dla $a > 0, a \neq 1$)

$$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x),$$

stąd

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x,$$

więc

$$\Delta y = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

zatem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}, \qquad (1)$$

Kładąc: $\dfrac{x}{\Delta x} = r$, otrzymujemy:

$$\lim_{\Delta x \to 0} |r| = \infty,$$

więc

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{r \to \infty}\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e.$$

Na mocy (1) mamy:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Ponieważ logarytm jest funkcją ciągłą, więc

$$y'_x = \frac{1}{x} \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e\,.$$

W szczególności, jeżeli $y = \log_e x$, to $y'_x = \frac{1}{x}$.

Jeżeli więc zasadą logarytmów jest liczba e, to pochodna przyjmuje najprostszą postać $\frac{1}{x}$. Logarytmy o zasadzie e nazywamy logarytmami naturalnemi. Ilekroć piszemy $\log x$ bez podania zasady, mamy na myśli logarytm naturalny liczby x.

Przykłady:

1. $y = \log_{10} x \qquad y' = \frac{1}{x} \log_{10} e = \frac{1}{x}\, 0{\cdot}4342945\ldots$

2. $y = \log f(x) \quad (f(x) > 0)$.

Kładąc

$$u = f(x),$$

mamy

$$y = \log u \qquad y' = \frac{1}{u}\, u' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

3. $y = \log \sqrt{10\,x - x^2} = \frac{1}{2} \log (10\,x - x^2)$.

Mamy tu: $f(x) = 10\,x - x^2$, zatem wedle poprzedniego przykładu:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 - 2\,x}{10\,x - x^2} = \frac{5 - x}{10\,x - x^2}.$$

Zadania:

1. $y = log\ 8x \qquad y' = \frac{1}{x}$

2. $y = log \frac{5+4x}{3+7x} = log\,(5+4x) - log\,(3+7x)$

$$y' = \frac{-23}{(3+7x)\ (5+4x)}$$

3. $y = log\ (log\ x) \qquad y' = \frac{1}{x\ log\ x}$

19. $y = a^x$, $y' = a^x\ log\ a$; $y = e^x$, $y' = e^x$

Odwrotną funkcją do $y = a^x$ jest funkcja $x = log_a y$. Więc

$$x'_y = \frac{1}{y}\ log_a e,$$

lecz na mocy twierdzenia o pochodnych funkcyj odwrotnych i z uwagi, że $x'_y \neq 0$, otrzymujemy:

$$y' = \frac{1}{x'_y} = \frac{y}{log_a\ e} = a^x\ log\ a.$$

W szczególności, gdy $a = e$, to $log\ a = 1$, więc, gdy $y = e^x$, wówczas $y'_x = e^x$.

Funkcja $y = e^x$ ma więc tę ciekawą własność, że jest równa swej pochodnej.

Przykłady:

1. $\quad y = 5^x \qquad y' = 5^x\ log\ 5$
2. $\quad y = e^{x^2}$.

Kładąc $u = x^2$, otrzymujemy

$y = e^u \qquad y' = e^u\ u' = 2\,x\,e^{x^2}$

3. $\quad y = e^{\sqrt{1+2x+3x^2}}$

Kładąc $u = \sqrt{1 + 2x + 3x^2} = (1 + 2x + 3x^2)^{\frac{1}{2}}$, mamy znowu

$$y = e^u \qquad\qquad y' = e^u\, u'$$

u' obliczamy stosując ponownie twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej, a więc kładąc $v = 1 + 2x + 3x^2$, dostajemy:

$$u = v^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad u' = \tfrac{1}{2}\, v^{-\frac{1}{2}} v'$$

zatem:

$$u' = \tfrac{1}{2}\, \frac{2 + 6x}{\sqrt{1 + 2x + 3x^2}},$$

a stąd

$$y' = \frac{1 + 3x}{\sqrt{1 + 2x + 3x^2}} \,.\, e^{\sqrt{1 + 2x + 3x^2}}$$

Zadania:

1. $y = (7^{2x} + 3)^5 \qquad\qquad y' = 10\,(7^{2x} + 3)^4\, 7^{2x} \log 7$
2. $y = \log\,(11\, e^x + 2) \qquad\qquad y' = \dfrac{11\, e^x}{11\, e^x + 2}$
3. $y = x^3 e^x \qquad\qquad y' = e^x\,(x^3 + 3x^2).$

20. Funkcje trygometryczne.

$$y = \sin x \qquad\qquad y' = \cos x$$

$$y + \Delta y = \sin\,(x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\,(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\,\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x},$$

więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \,.\, \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Kładąc $\frac{\Delta x}{2} = h$, otrzymujemy wobec ciągłości funkcyj *sin* i *cos*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} h = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{(por. str. 72)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{h \to 0} \cos(x + h) = \cos x,$$

a więc

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$$

$$\boldsymbol{y = \cos x,\ y' = -\sin x}$$

Zauważmy, że $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; a więc funkcję $y = \cos x$ uważać możemy za funkcję złożoną z funkcyj:

$$y = \sin z \text{ i } z = \frac{\pi}{2} - x.$$

Wobec tego, na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy:

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x,$$

lecz

$$y'_z = \cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

zaś

$$z'_x = -1,$$

więc

$$y'_x = -\sin x$$

$$\boldsymbol{y = \operatorname{tg} x,\ y'_x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Ponieważ $y = tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, więc na mocy twierdzenia o pochodnej ilorazu otrzymujemy:

$$y'_x = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

a więc

$$y'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boldsymbol{y = ctg\, x,\ y'_x = \frac{-1}{\sin^2 x}}.$$

Podobnie jak poprzednio $y = \frac{\cos x}{\sin x}$, więc

$$y'_x = \frac{\sin x.\,(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\boldsymbol{y = sec\, x,\ y' = sec\, x\ tg\, x}$$

$$y = \frac{1}{\cos x},$$

więc

$$y'_x = \frac{\cos x.\,0 - 1\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

więc:

$$y'_x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = sec\, x\ tg\, x$$

$$\boldsymbol{y = cosec\, x,\ y' = -\, cosec\, x\ ctg\, x}$$

$$y = \frac{1}{\sin x},$$

więc

$$y'_x = \frac{(\sin x) \,.\, 0 - 1\ (\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x},$$

stąd

$$y'_x = -\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x.$$

Przykłady:

1. $y = \sin 4x$. Kładąc $u = 4x$, mamy $y = \sin u$
$y' = \cos u.\ u'$, a więc $y' = 4 \cos 4x$.
2. $y = tg\, x^2$. Połórzmy: $u = x^2$; mamy wówczas $y = tg\, u$
$y' = \frac{1}{\cos^2 u}\, u'$ zatem $y' = \frac{1}{\cos^2 x^2}\, 2x$.
3. $y = \cos^{10} x$ Kładąc $u = \cos x$, mamy $y = u^{10}$
$y' = 10\, u^9.\, u'$, a więc $y' = -10 \cos^9 x \sin x$.

Zadania:

1. $y = 2 \cos x + 5 \sin x$ $\quad y' = -2 \sin x + 5 \cos x$
2. $y = \cos 2x + 1$ $\quad y' = -2 \sin 2x$
3. $y = \sin^2 x$ $\quad y' = 2 \sin x \cos x$
4. $y = ctg\,(x + e^x)$ $\quad y' = \frac{-1}{\sin^2 (x + e^x)}\,(1 + e^x)$

21. Funkcje cyklometryczne.

$$y = \operatorname{arc} \sin x,\ y'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ |x| \neq 1$$

Funkcją odwrotną jest $x = \sin y$, więc

$$x'_y = \cos y$$

stąd, na mocy twierdzenia o pochodnych funkcyj odwrotnych, otrzymujemy:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}.$$

Oczywiście $y \mp \pm \frac{\pi}{2}$, co odpowiada wartościom $x \mp \pm 1$.

Ponieważ

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

(znak pierwiastka jest dodatni, gdyż $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$), więc

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2},$$

stąd

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

U w a g a. Można wykazać, że dla $x = \pm 1$ pochodna nie istnieje.

$$\boldsymbol{y = arc\ cos\ x,\ y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ (|x| \mp 1)}$$

Dowód podobny jak poprzednio.

$$\boldsymbol{y = arc\ tg\ x,\ y'_x = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Funkcją odwrotną jest $x = tg\ y$, więc

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$$

(ponieważ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ więc x'_y zawsze istnieje i jest różne od zera). Stąd:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

lecz

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + tg^2\, y = 1 + x^2,$$

więc

$$y'_x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boldsymbol{y = arc\ ctg}\ x \qquad y'_x = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Dowód analogiczny do poprzedniego.

$$\boldsymbol{y = arc\ sec\ x} \qquad \boldsymbol{y'_x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}}$$

Funkcją odwrotną jest: $x = sec\ y$, więc

$$x'_y = sec\ y\ tg\ y$$

(z wyjątkiem $y = 0$, $y = \pi$, co odpowiada wartościom $x = +1, x = -1$), stąd

$$y'_x = \frac{1}{sec\ y\ \ tg\ y}.$$

Dla $x > 1$ jest $0 < y < \frac{\pi}{2}$

$$sec\ y = x = |x|,$$

$$tg\ \ y = \sqrt{sec^2\ y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Znak pierwiastka bierzemy dodatni, gdyż w tym wypadku $tg\ y$ jest dodatni. A więc dla $x > 1$ jest:

$$y'_x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Dla $x < -1$ jest $\frac{\pi}{2} < y < \pi$, więc $tg\ y < 0$,

wobec tego:

$$tg\ y = -\sqrt{sec^2\ y - 1} = -\sqrt{x^2 - 1},$$

więc

$$y'_x = \frac{1}{-x\sqrt{x^2-1}},$$

ponieważ $x < -1$, więc $|x| = -x$, i znowu

$$y'_x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\boldsymbol{y = arc\ cosec\ x,\ y'_x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}}\ |x| \neq 1.$$

Dowód przeprowadza się podobnie, jak poprzednio.

Przykłady:

1. $$y = arc\ sin\ \sqrt{x^3}.$$

Kładąc

$$u = x^{\frac{3}{2}},$$

mamy

$$y = arc\ sin\ u$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u',$$

zatem

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

2. $$y = arc\ tg\ \frac{1-x}{1+x}$$

Połóżmy:

$$u = \frac{1-x}{1+x},$$

wówczas

$$y = arc\ tg\ u$$

$$y' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

Ale

$$u' = \frac{(1+x).(-1)-(1-x).1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2},$$

więc

$$y' = -\frac{2}{(1+x)^2} \cdot \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

3.
$$y = arc\ ctg\ \sqrt{x}$$
Niech będzie
$$u = \sqrt{x}.$$
Otrzymujemy:
$$y = arc\ ctg\ u$$

$$y' = -\frac{1}{1+u^2}u' = -\frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Zadania:

1. $y = arc\ ctg\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{2\,(x+1)\sqrt{x}}$

2. $y = arc\ sin\ 2\,x\sqrt{1-x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $y = x\ arc\ sin\ x + \sqrt{1-x^2}$ $\qquad y' = arc\ sin\ x$

22. Pochodna logarytmiczna. Weźmy pod uwagę funkcję
$$y = \{f(x)\}^{\varphi(x)},$$

gdzie funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są ciągłe, przyczem $f(x)$ jest funkcją stale dodatnią. Biorąc logarytmy naturalne obu stron, otrzymujemy:

$$log\ y = \varphi(x)\ log\ f(x).$$

Uważajmy *log y* za funkcję złożoną zmiennej x i wyznaczmy jej pochodną. A więc:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x)\ log\ f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (1).$$

Wyrażenie $\frac{y'}{y}$ nazywamy pochodną logarytmiczną. Równość (1) z uwagi, że $y = \{f(x)\}^{\varphi(x)}$ daje nam:

$$y' = \{f(x)\}^{\varphi(x)} \left[\varphi'(x) \log f(x) + \varphi(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

W ten sposób, zapomocą pochodnej logarytmicznej, wyznaczyliśmy pochodną funkcji $y = \{f(x)\}^{\varphi(x)}$.

Przykłady:

1. Wyznaczyć pochodną funkcji $y = x^x$ $(x > 0)$.

$$\log y = x \log x,$$

więc

$$\frac{y'}{y} = 1 \,.\, \log x + x \frac{1}{x} = \log x + 1,$$

stąd

$$y' = x^x (\log x + 1).$$

2. Wyznaczyć pochodną funkcji $y = (\sin x)^{\cos x}$ $(0 < x < \pi)$

$$\log y = \cos x \log \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \log \sin x + \cos x \frac{\cos x}{\sin x}$$

więc

$$y' = (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right].$$

Zadania:

1. $y = x^{\log x}$ $\qquad y' = 2\, x^{\log x - 1} \log x$
2. $y = (\log x)^x$ $\qquad y' = (\log x)^{x-1} \{1 + \log x \,.\, \log(\log x)\}$
3. $y = \left(\frac{x}{e}\right)^x$ $\qquad y' = \left(\frac{x}{e}\right)^x \log x$

23. Pochodne wyższych rzędów. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ posiada pierwszą pochodną, to pochodną tej pochodnej, jeżeli istnieje, nazywamy drugą pochodną funkcji $f(x)$.

Podobnie pochodną drugiej pochodnej nazywamy trzecią pochodną i t. d. — Symbolicznie pochodne wyższych rzędów przedstawiać będziemy w sposób następujący:

$$\begin{array}{lllllll}
y'_x & y''_x & y'''_x & y^{(4)}_x & y^{(5)}_x & \ldots\; y^{(n)}_x & \text{albo} \\
y' & y'' & y''' & y^{(4)} & y^{(5)} & \ldots\; y^{(n)} & \text{albo} \\
f'(x) & f''(x) & f'''(x) & f^{(4)}(x) & f^{(5)}(x) & \ldots\; f^{(n)}(x) & \text{albo też} \\
\frac{dy}{dx} & \frac{d^2 y}{dx^2} & \frac{d^3 y}{dx^3} & \frac{d^4 y}{dx^4} & \frac{d^5 y}{dx^5} & \ldots\; \frac{d^n y}{dx^n} &
\end{array}$$

Przykłady:

1. Wyznaczyć pochodne funkcji $y = a^x$

$$\begin{aligned}
y' &= a^x \log a \\
y'' &= a^x (\log a)^2 \\
y''' &= a^x (\log a)^3 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n)} &= a^x (\log a)^n.
\end{aligned}$$

Jeżeli $y = e^x$, to $y^{(n)} = e^x$.

2. Wyznaczyć pochodne funkcji $y = x^k$

$$\begin{aligned}
y' &= k\, x^{k-1} \\
y'' &= k\, (k-1)\, x^{k-2} \\
y''' &= k\, (k-1)\, (k-2)\, x^{k-3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n)} &= k\, (k-1)\, (k-2). \;\ldots\; (k-(n-1))\, x^{k-n}
\end{aligned}$$

Jeżeli k jest liczbą naturalną, to:

$y^{(k)} = k\, (k-1)\, (k-2). \;\ldots\; (k-(k-2)).\, 1 = k!$

$y^{(k+1)} = 0.$

3. Wyznaczyć pochodne funkcji $y = log\, x$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 \frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \frac{1.\,2}{x^3} = (-1)^2 \frac{1.\,2}{x^3}$$

$$y^{(4)} = -\frac{1.\,2.\,3.}{x^4} = (-1)^3 \frac{1.\,2.\,3.}{x^4}$$

. . . .

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

4. Wyznaczyć pochodne funkcji $y = sin\, x$

$$y' = cos\; x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\,sin\; x = sin\;(x + \pi) = sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -\,cos\; x = sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(\cdot)} = sin\; x = sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . .

$$y^{(n)} = sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Podobnie, jeżeli $y = cos\, x$, to

$$y^{(n)} = cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Zadania:

1. $y = e^{3+4x}$, $y'' = 16e^{3+4x}$, $y''' = 64e^{3+4x} \ldots$, $y^{(n)} = 4^n e^{3+4x}$

2. $y = sin\ 5x$, $\quad y^{(n)} = 5^n sin\left(5x + n\frac{\pi}{2}\right)$

3. $y = \frac{1 - cos\ x}{sin\ x}$ $\quad y'' = \frac{tg\ \cdot \frac{x}{2}}{2\ cos^2 \frac{x}{2}}$

4. $y = log\ f(x)$ $\quad y'' = \frac{f(x)\ f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}$

5. $y = \sqrt{x}$ $\quad y''' = \frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt{x^5}}$.

24. Formuła Leibnitza. Niechaj $y = uv$, gdzie u i v są funkcjami zmiennej x. Otóż:

$$y' = u'v + v'u$$
$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + v''u = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
$$y^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$

Widzimy więc, że współczynniki występujące w powyższych formułach są te same, co przy rozwinięciu dwumianu $(a + b)^n$ wedle wzoru Newtona. Zapomocą indukcji zupełnej można łatwo udowodnić prawdziwość wzoru analogicznego do formuły Newtona, a mianowicie:

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

Wzór ten nosi nazwę formuły Leibnitza.

Przykłady:

1. Wyznaczyć n-tą pochodną funkcji: $y = xe^x$. — Kładąc $u = e^x$ $v = x$, otrzymujemy ze wzoru Leibnitza:

$$y^{(n)} = x\,e^x + n\,e^x$$

2. Formuła Leibnitza pozwala nam wyznaczyć nieraz łatwo wartość n-tej pochodnej dla pewnej szczególnej wartości na x. Wyjaśnimy to na przykładach:

Wyznaczyć wartość n-tej pochodnej funkcji, $f(x) = arc\ tgx$ dla $x = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

stąd

$$f'(x).\,(1+x^2) = 1.$$

Biorąc teraz n-tą pochodną według formuły Leignitza, otrzymujemy:

$$\cancel{f^{(n)}(x)\,(1+x^2) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x).\,2\,x + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x).\,2 = 0.}$$

$$f^{(n+1)}(x)(1+x^2) + \binom{n}{1} f^{(n)}(x) \cdot 2x + \binom{n}{2} f^{(n-1)}(x) \cdot 2 = 0$$

Kładąc $x = 0$, otrzymujemy:

$$\cancel{f^{(n)}(0) + n\,(n-1)\,f^{(n-2)}(0) = 0,}$$

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1)\,f^{(n-1)}(0) = 0$$

a więc:

$$\cancel{f^{(n)}(0) = -\,n\,(n-1)\,f^{(n-2)}(0) \qquad [n \neq 1]}$$

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)\,f^{(n-1)}(0) \qquad n > 0$$

Otrzymaliśmy dogodny wzór redukcyjny na wartość n-tej pochodnej dla $x = 0$.

Ponieważ $f'(0) = 1$, zaś $f''(x) = -\dfrac{2\,x}{(1+x^2)^2}$, więc $f''(0) = 0$, — otrzymujemy z wzoru redukcyjnego, kładąc $n = 3, 4, 5, \ldots$

$$f'''(0) = \cancel{-\,3.\,2 = -\,6} \qquad -2 \cdot 1 = -2$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(0) = \cancel{-\,5.\,4.\,-6 = 120} \qquad \text{i. t. d.}$$

$$-4 \cdot 3 \cdot -2 = 24$$

3. Wyznaczyć wartość n-tej pochodnej funkcji:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+1},$$

dla $x = 0$.

Mamy: $$f(x)\,(x^2-3x+1) = 2x+1.$$

Biorąc n-tą pochodną ($n > 2$), otrzymujemy:

$$f^{(n)}(x)\,(x^2-3x+1) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x)\,(2x-3) +$$

$$+ \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) . 2 = 0.$$

Kładąc $x = 0$, mamy:

$$f^{(n)}(0) - 3n\,f^{(n-1)}(0) - n\,(n-1)\,f^{(n-2)}(0) = 0,$$

stąd

$$f^{(n)}(0) = 3n\,f^{(n-1)}(0) - n\,(n-1)\,f^{(n-2)}(0) \quad (n>2)$$

Wyznaczając wprost pierwszą i drugą pochodną, otrzymujemy:

$$f'(0) = 5,\; f''(0) = 28,$$

następnie z formuły rekurencyjnej, kładąc $n = 3, 4, 5, \ldots$ wyznaczamy wyższe pochodne.

Zadania:

1. $y = e^x(3x^2-4)$ $y^{(n)} = e^x[3x^2+6n\,x+3n(n-1)-4]$
2. $y = x \log x$ $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n\,(n-2)!}{x^{n-1}}$
3. $y = x^2 \sin x$ $y^{(n)} = x^2 \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) +$

$$2\,n\,x \sin\left[x + (n-1\frac{\pi}{2}\right] + n\,(n-1) \sin\left[x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right]$$

4. $f(x) = (arc\ sin\ x)^2 \quad (1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$

$f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad f^{(2n)}(0) = 2.\ 2^2.\ 4^2.\ 6^2 \ldots (2n-2)^2$

5. $f(x) = e^{sin\ x} \quad f'(x) = f(x)\ sin\ x$

$$f^{(n+1)}(0) = f^{(n)}(0) - \binom{n}{2} f^{(n-2)}(0) + \binom{n}{4} f^{(n-4)}(0) - \ldots$$

stąd:

$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = -3$ i t. d.

25. Funkcje dane przedstawieniem parametrycznem. Przypuśćmy, że mamy dane dwie funkcje

$$x = f(t) \quad y = \varphi(t)$$

jednej zmiennej t, obie określone i ciągłe w tym zamym przedziale zmienności t. Jeżeli funkcja $x = f(t)$ jest funkcją ściśle monotoniczną, to istnieje jej funkcja odwrotna: $t = \psi(x)$, ciągła i ściśle monotoniczna. Możemy wobec tego uważać zmienną y, jako zależną od zmiennej x za pośrednictwem zmiennej t. Kładąc

$$y = \varphi\ (\psi(x)) = F(x),$$

widzimy, że funkcja $y = F(x)$ jest funkcją ciągłą. Mówimy o niej, że daną jest parametrycznie za pośrednictwem zmiennej t.

Przykłady:

1. $$\begin{aligned} x &= r\ cos\ t \\ y &= r\ sin\ t \end{aligned} \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi)$$

Ponieważ funkcja $x = r\ cos\ t$ jest ściśle malejącą dla $0 \leqslant t \leqslant \pi$, więc wyznaczając z pierwszego równania t i wstawiając w drugie, otrzymamy żądaną funkcję zmiennej x.

Dojdziemy prościej do celu, jeżeli zauważymy że:

$$x^2 + y^2 = r^2\ (cos^2\ t + sin^2\ t) = r^2$$

stąd

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Obieramy znak pierwiastka dodatni, gdyż funkcja $y = r \sin t$ jest dla $0 \leqslant t \leqslant \pi$ nieujemna.

Przyjmując, że $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$, otrzymujemy:

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Widzimy więc, że gdy t zmienia się od 0 do 2π, to wzory

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

definjują nam dwie funkcje zmiennej x, których obrazy geometryczne tworzą całe koło.

2. Przedstawienie parametryczne ma szczególne znaczenie przy badaniu ruchu punktu. Jeżeli punkt porusza się po płaszczyźnie, to jego współrzędne x, y są funkcjami czasu t. Podając te funkcje:

$$x = f(t) \quad y = \varphi(t),$$

określamy ruch punktu w zupełności. W każdym okresie czasu, w którym funkcja $f(t)$ jest ściśle monotoniczną, możemy, postępując jak poprzednio, wyznaczyć funkcję $y = F(x)$, której obrazem geometrycznym będzie krzywa, zakreślona w tym okresie czasu przez punkt ruchomy. — W poprzednim przykładzie funkcje określały ruch jednostajny po kole.

Przypuśćmy teraz, że funkcje

$$x = f(t) \text{ i } y = \varphi(t)$$

posiadają pochodne ciągłe w otoczeniu pewnej wartości t i że nadto dla tej wartości: $f'(t) \neq 0$. Niechaj funkcja $t = \psi(x)$ będzie funkcją odwrotną (w otoczeniu punktu t) funkcji $x = \varphi(t)$. Ponieważ funkcja $\psi(x)$ ma pochodną, wyrażającą się wzorem.

$$\psi'(x) = \frac{1}{f'(t)},$$

więc na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej funkcja $y = F(x) = \varphi(\psi(x))$ ma pochodną

$$y'_x = \varphi'(\psi(x)) \, . \, \psi'(x),$$

czyli:

$$y'_x = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}.$$

Wykazaliśmy więc, że pochodna funkcji, przedstawionej parametrycznie, wyraża się wzorem:

$$y'_x = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)},$$

o ile $f'(t) \neq 0$.

P r z y k ł a d. Biorąc pod uwagę funkcję określoną w przykładzie 1), otrzymujemy:

$$y'_x = \frac{r \cos t}{-r \sin t} = -\operatorname{ctg} t \qquad (t \neq 0, \pi).$$

Łatwo możemy wyznaczyć pochodne wyższych rzędów, o ile założymy, że funkcje $f(t)$ i $\varphi(t)$ mają odpowiednie pochodne.

Pochodną drugą otrzymamy w sposób następujący: Zauważmy, że funkcja y'_x jest przedstawiona parametrycznie funkcjami

$$y'_x = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)} = \varphi_1(t)$$

$$x = f(t).$$

Stąd:

$$y''_x = \frac{\varphi'_1(t)}{f'(t)},$$

a więc

$$y''_x = \frac{f'(t)\ \varphi''(t) - f''(t)\ \varphi'(t)}{[f'(t)]^3}.$$

Podobnie, kładąc $y''_x = \varphi_2(t)$ otrzymujemy:

$$y''_x = \frac{\varphi'_2(t)}{f'(t)},$$

a więc:

$$y'''_x = \{[f'(t)]^2 \varphi'''(t) - f'(t) f'''(t) \varphi'(t) - \\ -3 f'(t) f''(t) \varphi''(t) + 3 [f''(t)]^2 \varphi'(t)\} \frac{1}{[f'(t)]^5}$$

Postępując w ten sposób dalej, możemy wyznaczyć pochodne dowolnego rzędu.

Zadania:

1. $y = at$ $\quad x = a(1-t)$ $\qquad y' = -1$

2. $y = sin^2 t$ $\quad x = sin\ 2t$ $\qquad y' = \frac{1}{2}\ tg\ 2t$

3. $y = sin\ t - t\ cos\ t$ $\quad x = cos\ t + t\ sin\ t$ $\qquad y' = tg\ t$

4. $y = \frac{1}{2} t^2$ $\quad x = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3}$ $\qquad y' = \sqrt{\frac{t}{2}}$

26. Różniczki wyższych rzędów. Jak już poprzednio wspomnieliśmy, różniczka

$$d_x y = f'(x)\, d_x x$$

jest funkcją zmiennej x. Wobec tego możemy mówić o różniczce różniczki. Połóżmy:

$$d_x(d_x y) = d_x^2 y$$
$$d_x(d_x^2 y) = d_x^3 y$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$d_x(d_x^{n-1} y) = d_x^n y$$

Wyrażenie $d_x{}^n y$ nazywać będziemy n-tą różniczką lub różniczką n-ego rzędu.

Na mocy twierdzeń o różniczce iloczynu otrzymujemy:

$$d_x{}^2 y = d_x [f'(x)\, d_x x] = d_x f'(x)\, d_x x + f'(x)\, d_x{}^2 x.$$

Ponieważ

$$d_x f'(x) = f''(x)\, d_x x,$$

zaś

$$d_x{}^2 x = 0$$

(bo $d_x x$ jest funkcją stałą), więc

$$d_x{}^2 y = f''(x)\, (d_x x)^2.$$

Podobnie otrzymamy:

$$d_x{}^3 y = f'''(x)\, (d_x x)^3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$d_x{}^n y = f^{(n)}(x)\, (d_x x)^n$$

Stąd:

$$f''(x) = \frac{d_x{}^2 y}{(d_x x)^2},\ f'''(x) = \frac{d_x{}^3 y}{(d_x x)^3},\ \ldots\ f^{(n)}(x) = \frac{d_x{}^n y}{(d_x x)^n}$$

Pisząc d zamiast d_x i dx^n zamiast $(d_x x)^n$, otrzymujemy:

$$\frac{d y}{d x} = f'(x)$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f''(x)$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = f'''(x)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = f^{(n)}(x)$$

Trzeba jednak pamiętać, że w formułach tych różniczki występują ze względu na zmienną x.

Przypuśćmy teraz, że y i x są funkcjami zmienej t. Wobec tego otrzymamy:

$$\begin{aligned} d_t y &= f'(x)\, d_t x \\ d_t^2 y &= f''(x)\, (d_t x)^2 + f'(x)\, d_t^2 x \\ d_t^3 y &= f'''(x)\, (d_t x)^3 + 2 f''(x)\, d_t x\, d_t^2 x + \\ &\quad + f''(x)\, d_t x\, d_t^2 x + f'(x)\, d_t^3 x \end{aligned}$$

(Ponieważ $d_t x$ nie jest obecnie funkcją stałą, więc nie możemy opuścić $d_t^2 x$), a więc

$$d_t^3 y = f'''(x)\, (d_t x)^3 + 3 f''(x)\, d_t x\, d_t^2 x + f'(x)\, d_t^3 x.$$

Używając teraz symboli niekompletnych, mamy:

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)\, dx \\ d^2 y &= f''(x)\, dx^2 + f'(x)\, d^2 x \\ d^3 y &= f'''(x)\, dx^3 + 3 f''(x)\, d^2 x\, dx + f'(x)\, d^3 x \end{aligned}$$

i t. d

Zauważmy, że formuły powyższe pozostają również ważne, gdy zamiast d będziemy pisali d_x, gdyż:

$$d_x^2 x = 0, \ d_x^3 x = 0 \qquad \text{i t. d.}$$

Podobnie jak poprzednio będziemy i teraz używali symboli niekompletnych w wypadkach, gdy pomyłka będzie wykluczona.

2. Jeżeli mamy daną funkcję $y = F(x)$ przedstawioną parametrycznie zapomocą funkcyj

$$x = f(t) \quad y = \varphi(t),$$

to biorąc różniczki według zmiennej t, otrzymamy:

$$dy = F'(x)\, dx = y'_x\, dx$$

stąd

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)\, dt}{f'(t)\, dt} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}.$$

Biorąc znowu różniczkę według zmiennej t, mamy

$$dy'_x = d\frac{dy}{dx},$$

a więc:

$$y''_x \; dx = \frac{dx\; d^2y - dy\; d^2x}{dx^2},$$

czyli

$$y''_x = \frac{dx\; d^2y - dy\; d^2x}{dx^3}.$$

Kładąc

$$\begin{aligned} d\,x &= f'(t)\; dt \\ d^2x &= f''(t)\; dt^2 \\ d\,y &= \varphi'(t)\; dt \\ d^2y &= \varphi''(t)\; dt^2 \end{aligned}$$

dostajemy formułę, otrzymaną na str. 146. Podobnie

$$d\,y''_x = d\frac{dx\; d^2y - dy\; d^2x}{dx^3}$$

$$y'''_x = \frac{dx^2\, d^3y - dx\, d^3x\, dy - 3\,dx\, d^2x\, d^2y + 3\,dx^2\, dy}{dx^5}.$$

Stąd otrzymujemy łatwo formułę ze str. 147.

3. Niechaj funkcja $y = f(x)$ posiada funkcję odwrotną $x = \varphi(y)$. Wyznaczymy pochodne funkcji $\varphi(y)$ zapomocą pochodnych funkcji $f(x)$.

Zauważmy, że biorąc różniczkę względem zmiennej y, mamy:

$$d^2y = d^3y = \ldots = 0,$$

$$\begin{aligned} d\,x &= x'_y\; dy = \varphi'(y)\, dy \\ d^2x &= x''_y\; dy^2 = \varphi''(y)\, dy^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d^nx &= x^{(n)}_y\; dy^n = \varphi^{(n)}(y)\, dy^n \end{aligned}$$

Stąd:

$$dy = f'(x)\,dx = f'(x)\,.\,x'_y\,dy$$
$$d^2y = 0 = f''(x)\,(x'_y)^2\,dy^2 + f'(x)\,x''_y\,dy^2$$
$$d^3y = 0 = f'''(x)\,(x'_y)^3\,dy^3 + 3f''(x)\,x'_y\,x''_y\,dy^3 + \\ + f'(x)\,x'''_y\,dy^3$$

i t. d. Zatem:

$$x'_y = \frac{1}{f'(x)}$$

$$x''_y = -\frac{f''(x)\,(x'_y)^2}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

$$x'''_y = \frac{3\,[f''(x)]^2 - f'(x)\,f'''(x)}{[f'(x)]^5}$$

Możemy również otrzymać ten sam wynik inną metodą. Mianowicie, jak wiemy:

$$\varphi'(y) = x'_y = \frac{1}{f'(x)}.$$

Biorąc pochodną względem y i uważając $f'(x)$ za funkcję złożoną zmiennej y za pośrednictwem zmiennej x, otrzymamy:

$$x''_y = -\frac{f''(x)\;x'_y}{[f'(x)]^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

$$x'''_y = -\frac{[f'(x)]^3 . f'''(x) . x'_y - f''(x) . 3\,[f'(x)]^2 . f''(x) . . x'_y}{[f'(x)]^6},$$

a więc:

$$x'''_y = \frac{3\,[f''(x)]^2 - f'(x)\,f'''(x)}{[f'(x)]^5}$$

ZADANIA

1. $y = 11$ $\qquad y' = 0$

2. $y = 4x + 7$ $\qquad y' = 4$

3. $y = 9x^4$ $\qquad y' = 36x^3$

4. $y = a + 2bx + cx^2$ $\qquad y' = 2b + 2cx$

5. $y = \dfrac{2}{x^4} = 2x^{-4}$ $\qquad y' = -\dfrac{8}{x^5}$

6. $y = \dfrac{1}{5\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{1}{5}x^{-\frac{3}{4}}$ $\qquad y' = -\dfrac{3}{20}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$

7. $y = (a+bx)(a-bx)$ $\qquad y' = -2b^2x$

8. $y = \dfrac{x^2+2x+1}{x^3-1}$ $\qquad y' = -\dfrac{x^4+4x^3+3x^2+2x+2}{(x^3-1)^2}$

9. $y = \dfrac{x^3+ax^2+ax+1}{x+1}$ $\qquad y' = 2x+a-1$

10. $y = (2+3x)(8+7x)$ $\qquad y' = 38+42x$

11. $y = (a+x^2)^3$ $\qquad y' = 6x(a+x^2)^2$

12. $y = \left(6x^2 - \dfrac{1}{5}x^5\right)^4$ $\qquad y' = 4x^7(12-x^3)\left(6-\dfrac{1}{5}x^3\right)^3$

13. $y = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{(1-x)^3}$ $\qquad y' = -\dfrac{4}{x^3} + \dfrac{9}{(1-x)^4}$

14. $y = \sqrt{1+5x}$ $\qquad y' = \dfrac{5}{2\sqrt{1+5x}}$

15. $y = \sqrt[4]{(2x^2-x^3)^3}$ $\qquad y' = \dfrac{3x(4-3x)}{4\sqrt[4]{2x^2-x^3}}$

16. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $\qquad y' = \dfrac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$

17. $y = \left(\dfrac{2}{27x} - \dfrac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x + x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{2x^2\sqrt{3x + x^2}}$

18. $y = \dfrac{(8x^4 + 4x^2 + 3)\sqrt{x^2 - 1}}{15x^5}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x^6\sqrt{x^2 - 1}}$

19. $y = \log\ (2 + 5x)$ $\qquad y' = \dfrac{5}{2 + 5x}$

20. $y = \log\ x^n$ $\qquad y' = \dfrac{n}{x}$

21. $y = \log\left(\dfrac{a}{a + x}\right)$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{a + x}$

22. $y = \log\dfrac{x}{1 - x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{1 + x^2}{x(1 - x^2)}$

23. $y = \dfrac{1}{x}\log x$ $\qquad y' = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

24. $y = x\sqrt{a^2 + x^2} + \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ $\qquad y' = \dfrac{2x^2 + a^2 + 1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

25. $y = \log\dfrac{2a + bx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$ $\qquad y' = \dfrac{(b^2 - 4ac)\,x}{2(2a + bx)(a + bx + cx^2)}$

26. $y = e^x\ x^n$ $\qquad y' = e^x\ x^{n-1}(x + n)$

27. $y = a^{2x^3 - 3x^2}$ $\qquad y' = 6x\ (x - 1)\, a^{2x^3 - 3x^2}\log a$

28. $y = a\, e^{\frac{x}{a}}$ $\qquad y' = e^{\frac{x}{a}}$

29. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $\qquad y' = \dfrac{2\,e^x}{(e^x + 1)^2}$

30. $y = log\,(e^{mx} + e^{-mx})$ $\qquad y' = \dfrac{m\,(e^{mx} - e^{-mx})}{e^{mx} + e^{-mx}}$

31. $y = sin\;12\,x$ $\qquad y' = 12\;cos\;12\,x$

32. $y = sin\;(p\,x + q)$ $\qquad y' = p\;cos\;(p\,x + q)$

33. $y = x\;cos\;x$ $\qquad y' = cos\;x - x\;sin\;x$

34. $y = x^3 sin\,x + 3x^2 cos\,x - 6\,x\,sin\,x - 6\,cos\,x$ $\qquad y' = x^3\,cos\,x$

35. $y = tg\,x - cotg\,x - 2\,x$ $\qquad y' = tg^2\,x + cotg^2\,x$

36. $y = x - sin\,x\,cos\,x$ $\qquad y' = 2\;sin^2\,x$

37. $y = 3\;tg\,x + tg^3\,x$ $\qquad y' = \dfrac{3}{cos^4\,x}$

38. $y = \dfrac{sin\,x}{a + b\;cos\,x}$ $\qquad y' = \dfrac{a\;cos\;x + b}{(a + b\;cos\;x)^2}$

39. $y = log\;sin\,x$ $\qquad y' = ctg\,x$

40. $y = log\;cos\,x$ $\qquad y' = -\,tg\,x$

41. $y = log\;tg\,x$ $\qquad y' = \dfrac{2}{sin\;2\,x}$

42. $y = arc\,sin\;a\,x$ $\qquad y' = \dfrac{a}{\sqrt{1 - a^2\,x^2}}$

43. $y = arc\;cos\;(a - x)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (a - x)^2}}$

44. $y = arctg\;a\,x$ $\qquad y' = \dfrac{a}{1 + a^2\,x^2}$

45. $y = x^3 \ arc \ sin \dfrac{1}{x}$ $\qquad y' = x^2 \left(3 \ arc \ sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

46. $y = arc \ tg \dfrac{2x}{1-x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{2}{1+x^2}$

47. $y = arc \ sin \ 2x\sqrt{1-x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

48. $y = arc \ tg \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{2\,(1+x^2)}$

49. $y = arc \ cos \ \sqrt{1-x}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

50. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2} -$
$-\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right) arc \ tg \sqrt{1-x^2}$ $\qquad y' = x \ arc \ tg \ \sqrt{1-x^2}$

51. $y = t^2 + 8t - 1$
$x = t^5 + 2t$ $\qquad y' = \dfrac{2t+8}{5t^4+2}$

52. $y = arc \ tg \ (2t+1)$
$x = e^{-t^2}$ $\qquad y' = \dfrac{-e^{t^2}}{2t(2t^2+2t+1)}$

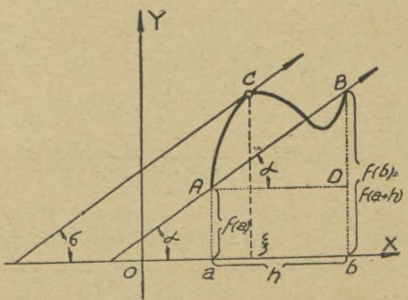
53. $y = a \ sin \ t + b \ cos \ t$
$x = 4 \ tg^2 \dfrac{t}{2}$ $\qquad y' = \dfrac{(a \cos t - b \sin t) \cos^3 \dfrac{t}{2}}{4 \ sin \dfrac{t}{2}}$

54. $y = arc \ sin \ (t^2 - 1)$
$x = arc \ cos \ 2t$ $\qquad y' = -\sqrt{\dfrac{1-4t^2}{2-t^2}}$

ROZDZIAŁ VI.

Twierdzenie Rolle'a. Twierdzenie o wartości średniej. Wzór Taylora.

1. Twierdzenie o wartości średniej. Załóżmy, że funkcja $y = f(x)$, określona i ciągła w przedziale zamkniętym (a, b), posiada pochodną w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału. Wykreślmy cięciwę AB, łączącą punkty krzywej, odpowiadające krańcom przedziału (a, b). Niechaj α oznacza kąt jaki cięciwa ta tworzy z osią x-ów. Intuicyjnie jest rzeczą jasną, że na krzywej istnieje jeden conajmniej punkt C różny od A i B, taki, że w nim styczna jest równoległa do cięciwy AB.



Rys. 27.

Oznaczmy przez ξ odciętą punktu C, przez σ kąt, jaki styczna w punkcie C tworzy z osią x-ów, a przez

h długość przedziału $(a\ b)$. Na mocy więc tego, cośmy poprzednio powiedzieli, mamy:

$$tg\,\alpha = tg\,\sigma \tag{1}$$

lecz z trójkąta ADB otrzymujemy:

$$tg\,\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{2}$$

Ponieważ $a < \xi < a+h = b$, więc $\xi = a + \theta h$, gdzie θ jest jakąś liczbą spełniającą nierówność: $0 < \theta < 1$. — Z uwagi, że

$$tg\,\sigma = f'(\xi) = f'(a+\theta h)$$

otrzymujemy na mocy (1) i (2)

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\theta h) \qquad 0 < \theta < 1.$$

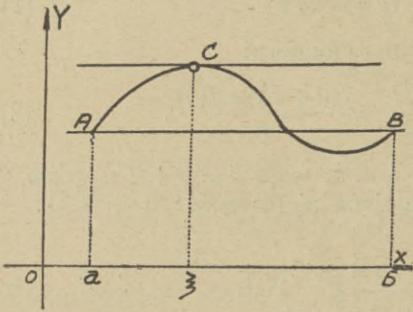
Twierdzenie to znane jest pod nazwą twierdzenia o wartości średniej i może być wypowiedziane w sposób następujący:

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ciągła w przedziale zamkniętym (a, b) posiada pochodną w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału, to istnieje liczba θ, spełniająca nierówność $0 < \theta < 1$, taka, że:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'[a+\theta(b-a)].$$

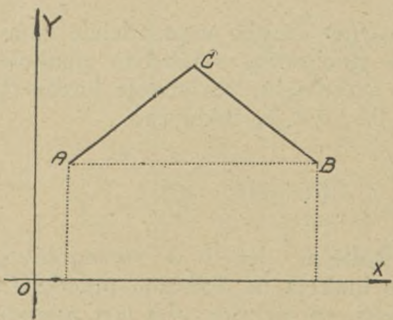
2. Twierdzenie Rolle'a. Jeżeli w szczególnym przypadku założymy, że funkcja na końcach przedziału przybiera równe wartości, to cięciwa AB jest równoległa do osi x-ów, a zatem i styczna w punkcie C, jest równoległa do osi x-ów; pochodna w punkcie ξ jest więc równa zeru. Możemy zatem wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. Jeżeli funkcja, ciągła w przedziale zamkniętym (a, b) i posiadająca w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału pochodną, przyjmuje na krańcach równe wartości, to co najmniej w jednym punkcie wewnętrznym przedziału (a, b) pochodna się zeruje.



Rys. 28.

Uwaga. Zauważmy, że w twierdzeniu Rolle'a nie zakładamy ani, że funkcja posiada pochodną na krańcach przedziału (a, b) ani, że pochodna jest wszędzie wewnątrz (a, b) ciągła. Założenie jednak istnienia pochodnej wewnątrz (a, b) jest istotne. Jeżeli tylko w jednym punkcie wewnętrznym przedziału (a, b) niema pochodnej, to pochodna może się nigdy nie zerować. Przykładem tego jest funkcja przedstawiona na rys. 29, która tylko w jednym punkcie, pochodnej nie posiada.



Rys. 29.

Twierdzenie Rolle'a orzeka, że na pewno w jednym chociaż punkcie wewnętrznym pochodna jest równa zeru; a zatem, gdyby pochodna była na końcu przedziału równą zeru, to mimo to możemy być pewni, że jeszcze w jakimś punkcie wewnętrznym będzie także równa zeru.

Twierdzenie Rolle'a jest jednem z najważniejszych twierdzeń w rachunku różniczkowym.

3. Dowód twierdzenia Rolle'a. Jeżeli nasza funkcja w całym przedziale (a, b) przyjmuje stałą wartość, to jej pochodna w każdym punkcie wewnętrznym przedziału jest równa zeru. Twierdzenie jest więc w tym wypadku prawdziwe. Jeśli założymy teraz, że funkcja nasza nie jest stałą, to z uwagi na to, że funkcia ciągła przyjmuje swoją wartość największą i najmniejszą (por. str. 84) twierdzić możemy, że jedną przynajmniej z tych wartości przyjmuje w jakimś punkcie wewnętrznym przedziału (a, b). Przypuśćmy np. że w punkcie ξ $(a<\xi<b)$ funkcja przyjmuje wartość największą. A więc dla każdej wartości na h jest

$$f(\xi+h) \leqslant f(\xi).$$

Udowodnimy teraz, że:

$$f'(\xi) = 0.$$

Zauważmy, że jeżeli:

$$1) \quad h > 0, \text{ to } \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \leqslant 0,$$

$$2) \quad h < 0, \text{ to } \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \geqslant 0.$$

Jeżeli więc h dąży do zera przez wartości dodatnie to otrzymujemy

$$f'(\xi) = \lim_{h \to +0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \leqslant 0.$$

Jeżeli zaś h dąży do zera przez wartości ujemne to otrzymujemy

$$f'(\xi) = \lim_{h \to -0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geqslant 0,$$

a więc:

$$0 \leqslant f'(\xi) \leqslant 0,$$

czyli

$$f'(\xi) = 0.$$

A więc udowodniliśmy twierdzenie Rolle'a.

4. Dowód twierdzenia o wartości średniej. Połóżmy

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \omega \tag{1}$$

a więc

$$f(a+h) - f(a) - h\omega = 0.$$

Określmy funkcję $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant h)$ kładąc:

$$\varphi(t) = f(a+t) - f(a) - t\omega,$$

widzimy, że

$$1) \quad \varphi(0) = \varphi(h) = 0,$$

$$2) \quad \varphi'(t) = f'(a+t) - \omega. \tag{2}$$

Wobec tego na mocy twierdzenia Rolle'a istnieje taki punkt ξ $(0 < \xi < h)$, że $\varphi'(\xi) = 0$. A więc na mocy (2) otrzymujemy:

$$\varphi'(\xi) = f'(a+\xi) - \omega = 0;$$

zatem

$$\omega = f'(a+\xi).$$

Kładąc $\xi = \theta h$, $(0 < \theta < 1)$ otrzymamy na mocy (1)

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h).$$

A więc udowodniliśmy twierdzenie o wartości średniej.

5 Wnioski z twierdzenia o wartości średniej. Jeżeli funkcja ciągła w zamkniętym przedziale (a, b) ma wewnątrz tego przedziału wszędzie pochodną równą zeru, to ma w tym przedziale stałą wartość.

D o w ó d. Niech x_0 i $x_0 + h$ będą dwoma dowolnemi punktami przedziału (a, b). Na mocy twierdzenia o wartości średniej mamy:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h).$$

Lecz na mocy założenia $f'(x_0 + \theta h) = 0$, a więc:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0,$$

czyli
$$f(x_0 + h) = f(x_0).$$

A zatem funkcja posiada w (a, b) stałą wartość.

T w i e r d z e n i e. Jeżeli funkcja ciągła, posiada w przedziale wszędzie pochodną dodatnią (względnie ujemną), to jest w tym przedziale ściśle rosnącą (wzgl. ściśle malejącą).

D o w ó d. Jeżeli x_0 i $x_0 + h$ $(h > 0)$ są dowolnemi punktami przedziału (a, b), to na mocy twierdzenia o wartości średniej mamy:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h),$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h);$$

ponieważ $h > 0$, $f'(x_0 + \theta h) > 0$, więc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0,$$

czyli
$$f(x_0 + h) > f(x_0).$$

Funkcja jest więc ściśle rosnąca. — Podobnie postępujemy, gdy pochodna jest stale ujemna.

6. Pochodna funkcji złożonej. Opierając się na twierdzeniu o średniej wartości, udowodnimy twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej, wypowiedziane poprzednio (str. 116) bez dowodu.

Niech $y = f[\varphi(x)]$ będzie funkcją złożoną z funkcyj $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, ciągłych i mających pochodne ciągłe. Oznaczmy przez Δx dowolny przyrost zmiennej x, zaś zaś przez Δu, Δy odpowiednie przyrosty zmiennych u, y.

Mamy wtedy:

$$y + \Delta y = f(u + \Delta u),$$

$$y = f(u);$$

zatem

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Ostatnią równość możemy na podstawie twierdzenia o średniej wartości napisać w następujący sposób:

$$\Delta y = f'(u + \theta \Delta u) \,.\, \Delta u. \qquad 0 < \theta < 1$$

Stąd mamy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u + \theta \Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Jeżeli teraz Δx dąży do zera, to wobec ciągłości funkcji $u = \varphi(x)$, przyrost Δu, a więc i $\theta \,.\, \Delta u$ zdąża do zera, zaś $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ dąży do pochodnej u'_x. Przechodząc do granicy, otrzymujemy więc:

$$y'_x = f'(u)\, u'_x.$$

7. Wzór Taylora. Załóżmy, że funkcja $y = f(x)$, ciągła w przedziale zamkniętym (a, b), posiada pochodne aż do rzędu $(n-1)$ włącznie również ciągłe w tym przedziale zamkniętym; o pochodnej rzędu n-tego załóżmy, że istnieje w każdym punkcie wewnętrznym przedziału (a, b). Jeżeli teraz punkty x i $x + h$ należą do przedziału (a, b), to zachodzi wzór, zwany wzorem Taylora:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots +$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n(x, h).$$

$R_n(x, h)$ nosi nazwę reszty wzoru Taylora. — Na tę resztę mamy dwa wyrażenia. Jedno podane przez Lagrange'a:

$$R_n(x, h) = \frac{h^n}{n!} f^n (x + \theta h)$$

przyczem o θ wiemy tylko to, że $0 < \theta < 1$ i drugie podane przez Cauchy'ego

$$R_n(x, h) = \frac{h^n}{(n-1)!} (1 - \theta')^{n-1} f^n(x + \theta' h),$$

gdzie znowu $0 < \theta' < 1$.

Jeżeli w szczególności przedział (a, b) zawiera liczbę 0, to pisząc we wzorze Taylora 0 zamiast x, zaś x zamiast h, otrzymujemy t. zw. wzór Mac-Laurina.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots +$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n(x);$$

$R_n(x)$ ma postać:

Reszta Lagrange'a

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)} (\theta x). \qquad (0 < \theta < 1)$$

Reszta Cauchy'ego

$$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1!)} (1 - \theta')^{n-1} f^{(n)}(\theta' x). \qquad (0 < \theta' < 1)$$

U w a g a. Obie reszty (Lagrange'a i Cauchy'ego) są oczywiście równe, a różnią się tylko kształtem. Przy badaniu wzoru Taylora danej funkcji używamy jednej lub drugiej formy reszty, zależnie od tego, która w rozważanym wypadku jest dogodniejsza.

8. Dowód wzoru Taylora. Niechaj α i β ($\beta \neq \alpha$) oznaczają dwa dowolne punkty przedziału (a, b) zaś p niech będzie dowolną liczbą naturalną $\geqslant 1$. Połóżmy:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha) - \frac{\beta-\alpha}{1!} f'(\alpha) - \frac{(\beta-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) - \ldots -}{(\beta-\alpha)^p}$$

$$\frac{- \frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha)}{(\beta-\alpha)^p} = \omega. \tag{1}$$

Określmy funkcję $\varphi(t)$ w następujący sposób:

$$\varphi(t) = f(\beta) - f(t) - \frac{\beta - t}{1!} f'(t) - \frac{(\beta-t)^2}{2!} f''(t) - \ldots -$$

$$- \frac{(\beta-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) - \omega(\beta - t)^p.$$

Zauważmy, że kładąc $t = \beta$, otrzymamy $\varphi(\beta) = 0$, kładąc zaś $t = \alpha$ mamy na mocy (1) $\varphi(\alpha) = 0$.

Wyznaczmy $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \frac{\beta - t}{1!} f''(t) + f'(t) - \frac{(\beta-t)^2}{2!} f'''(t) +$$

$$+ \frac{\beta - t}{1!} f''(t) - \ldots - \frac{(\beta-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) +$$

$$+ \frac{(\beta-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(t) + \omega p (\beta - t)^{p-1},$$

a więc:

$$\varphi'(t) = \omega p (\beta - t)^{p-1} - \frac{(\beta-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t). \tag{2}$$

Ponieważ, jak wyżej wspomnieliśmy:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0,$$

więc na mocy twierdzenia Rolle'a istnieje punkt ξ, zawarty między α i β, w którym pochodna funkcji $\varphi(t)$ się zeruje. A więc na mocy (2)

$$\varphi'(\xi) = \omega p\,(\beta - \xi)^{p-1} - \frac{(\beta - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) = 0.$$

Stąd:

$$\omega = \frac{(\beta - \xi)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi). \qquad (\alpha < \xi < \beta)$$

Wstawiając w (1) wartość na ω otrzymujemy po przekształceniu:

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \ldots + \\ + \frac{(\beta - \alpha)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha) + R_n, \qquad (3)$$

gdzie

$$R_n = \frac{(\beta - \alpha)^p (\beta - \xi)^{n-p}}{p\,(n-1)!} f^{(n)}(\xi);$$

ξ jest liczbą zawartą między α i β, a więc

$$\xi = \alpha + \theta(\beta - \alpha) \qquad (0 < \theta < 1)$$

kładąc teraz $\beta = x + h$, zaś $\alpha = x$, mamy:

$$\beta - \alpha = h$$
$$\xi = x + \theta h$$
$$\beta - \xi = h(1 - \theta).$$

Podstawiając te wyrażenia we wzorze (3), mamy:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

gdzie

$$R_n = \frac{h^p \, . \, h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(x+\theta h),$$

czyli

$$R_n = \frac{h^n}{p(n-1)!}(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(x+\theta h).$$

Ponieważ p jest dowolną liczbą naturalną $\geqslant 1$, więc kładąc raz $p=n$, drugi raz $p=1$, otrzymujemy resztę Lagrange'a względnie resztę Cauchy'ego. Ponieważ we wzorze powyższym liczba θ zależy od p, więc dla $p=n$ i $p=1$, otrzymujemy w ogólności różne wartości na θ; dlatego drugą z nich, występującą w reszcie Cauchy'ego, oznaczyliśmy przez θ'.

Przykłady:

1. $f(x) = e^x$.

Mamy:

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x,$$

stąd

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1.$$

Stosując wzór Mac Laurina, mamy:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}.$$

Dla $a > 0$, otrzymujemy z tego wzoru, zastępując x przez $x \log a$:

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{x^2 \log^2 a}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1} \log^{n-1} a}{(n-1)!} + \\ + \frac{x^n \log^n a}{n!} a^{\theta x}.$$

2. $f(x) = \sin x$. Mamy: $f(0) = 0$,

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \text{ (por. str. 140).}$$

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2}.$$

Jeżeli $n = 2k$, to $f^{(n)}(0) = f^{(2k)}(0) = \sin k\pi = 0$.
Jeżeli $n = 2k - 1$,

to $f^{(n)}(0) = f^{(2k-1)}(0) = \sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{k+1}$.

Otrzymujemy więc, dla $n = 2k$:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \\ + \frac{x^{2k}}{(2k)!}\sin(\theta x + k\pi),$$

zaś dla $n = 2k - 1$:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k}\frac{x^{2k-3}}{(2k-3)!} + \\ + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\sin\left(\theta x + \frac{2k-1}{2}\pi\right).$$

3. $f(x) = \cos x$. Mamy: $f(0) = 1$,

$$f^{n}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{(pòr. str. 140).}$$

$$f^{n}(0) = \cos n\frac{\pi}{2}.$$

Jeżeli $n = 2k$, to $f^{(n)}(0) = f^{(2k)}(0) = (-1)^k$,
Jeżeli $n = 2k - 1$, to $f^{(n)}(0) = f^{(2k-1)}(0) = 0$,

a więc, dla $n = 2k$ mamy

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \\ + \frac{x^{2k}}{2k!}\cos(\theta x + k\pi),$$

zaś dla $n = 2k - 1$, mamy:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} +$$
$$+ \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \cos\left(\theta x + (2k-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

4. $f(x) = \log(1+x)$. Mamy tu $f(0) = 0$.

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \text{ (por. str. 140)}$$

zatem

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Otrzymujemy więc:

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \quad \ldots \quad (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n} = (-1)^{n+1} \frac{(1-\theta')^{n-1}}{(1+\theta' x)^n} x^n.$$

5. $f(x) = (1+x)^p$ (p dowolne). Uwzględniając, że

$$f^{n)}(x) = p(p-1)\ldots(p-n+1)(1+x)^{p-n} =$$
$$= \binom{p}{n} n!\,(1+x)^{p-n},$$

otrzymujemy:

$$f(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = \binom{p}{n} n!$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{p}{n},$$

a więc:

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{3} x^3 + \ldots +$$

$$+ \binom{p}{n-1} x^{n-1} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \binom{p}{n} (1+\theta x)^{p-n} x^n =$$

$$= \binom{p}{n} n(1-\theta')^{n-1}(1+\theta' x)^{p-n} x^n.$$

W przykładach powyższych liczby θ, θ' spełniają nierówności:

$$0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta' < 1.$$

Zadania.

1. Dla wielomianu $f(x)$ stopnia n-ego mamy:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

2. Jak wiemy (str. 84, przykład 2), równanie $x = \cos x$ ma w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ przynajmniej jeden pierwiastek. Wykazać, że w tym przedziale nie istnieje więcej niż jeden pierwiastek, opierając się na tem, że funkcja $f(x) = x - \cos x$ ma pochodną dodatnią w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2.4} x^2 +$$

$$+ \frac{1.3}{2.4.6} x^3 - \ldots + R_n(x),$$

$$R_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{1.3.\ldots.(2n-3)}{2.4.\ldots.2n} \cdot$$

$$\cdot \frac{x^n}{(1+\theta x)^{n-\frac{1}{2}}} = \qquad (0<\theta<1)$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1.3.5.\ldots(2n-3)}{2.2.4.6\ldots2(n-1)} \frac{(1-\theta')^{n-1}}{(1+\theta' x)^{n-\frac{1}{2}}} x^n. \ (0<\theta'<1)$$

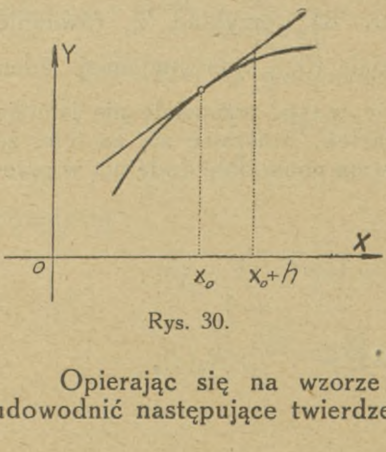
4. Wykazać, opierając się na zadaniu poprzedniem, że dla $0 \leqslant x \leqslant 0{\cdot}01$ mamy:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x,$$

z błędem mniejszym niż $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10^4}$, a więc z dokładnością na cztery miejsca dziesiętne. Np. $\sqrt{1{\cdot}0046} = 1{\cdot}0023$.

9. Wypukłość. Powiadamy, że krzywa, która jest obrazem funkcji $y = f(x)$, jest dla $x = x_0$ wypukła ku górze, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu x_0, że dla każdego punktu $x_0 + h$ tego otoczenia, zachodzi nierówność:

$$f(x_0+h) < f(x_0) + hf'(x_0).$$



Rys. 30.

Geometrycznie warunek ten powiada, że część krzywej odpowiadającej temu otoczeniu leży poniżej stycznej wykreślonej w punkcie $x = x_0$.

Podobnie definjujemy wypukłość wdół.

Opierając się na wzorze Taylora można łatwo udowodnić następujące twierdzenie:

Jeżeli funkcja ciągła $y = f(x)$ ma wewnątrz przedziału (a, b) pochodną stale ujemną (wzgl. dodatnią), to w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału obraz tej funkcji jest zwrócony wypukłością ku górze, (względnie wdół).

Dowód. Jeżeli x_0 i $x_0 + h$ $(h \neq 0)$ leżą wewnątrz przedziału (a, b), to na mocy wzoru Taylora mamy:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0 + \vartheta h), \quad (0 < \vartheta < 1)$$

a ponieważ $h^2 > 0$, więc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0) > 0 \quad \text{przy} \quad f''(x) > 0,$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0) < 0 \quad \text{„} \quad f''(x) < 0.$$

Przykład.

1. $y = x^3 - ax^2 + bx + c$; $(a > 0)$ $y'' = 6x - 2a$.

Krzywa jest więc dla $x > \frac{a}{3}$ zwrócona wypukłością nadół, gdyż wówczas druga pochodna jest dodatnia.

2. $y = \sin x$, $y'' = -\sin x$.

Jeżeli $y > 0$ to $y'' < 0$ zatem sinusoida jest nad osią x-ów zwrócona wypukłością do góry.

3. $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2$

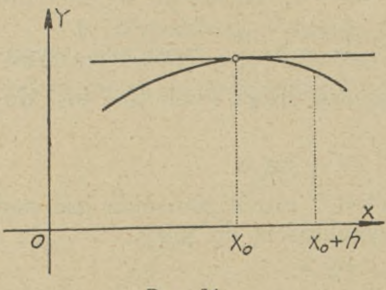
$$y'' = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x - 1)(x - 2).$$

Krzywa jest więc zwrócona wypukłością nadół dla $x < 1$, do góry dla $1 < x < 2$, nadół dla $x > 2$.

ROZDZIAŁ VII.

Maxima i minima; punkty przegięcia.

1. Definicja extremum. Powiadamy, że funkcja przyjmuje w pewnym punkcie maximum (rys. 31), jeżeli w otoczeniu tego punktu wartości funkcji są nie większe od wartości funkcji w tym punkcie.



Rys. 31.

Podobnie określamy minimum. (rys. 32).

Jeżeli funkcja w pewnym punkcie przyjmuje maximum albo minimum, to powiadamy, że w punkcie tym występuje extremum.

Możemy więc powiedzieć, że jeżeli dla funkcji $y = f(x)$, w punkcie $x = x_0$ występuje extremum, to dla każdego h mniejszego co do modułu od pewnej liczby $\varepsilon > 0$ jest:

$f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant 0$ jeżeli występuje maximum (1)

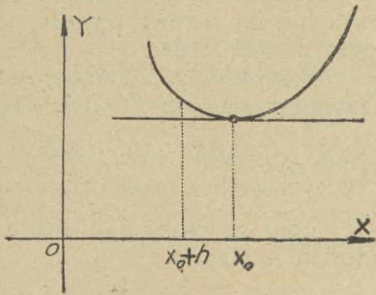
$f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant 0$ „ „ minimum (2)

W obu więc wypadkach różnica $f(x_0 + x) - f(x_0)$ nie zmienia znaku dla dostatecznie małych wartości na h.

Uwaga. Jeżeli w pewnym punkcie x_0 mamy dla każdego $h \neq 0$, spełniającego warunek $|h| < \varepsilon$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0,$$

to powiadamy, że w punkcie tym występuje maximum właściwe.



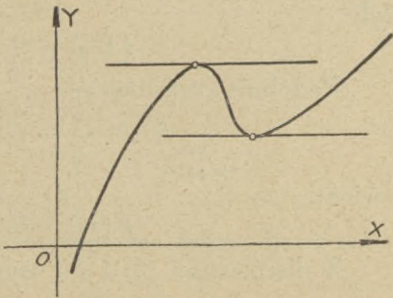
Rys. 32.

Podobnie definjujemy minimum właściwe.

Należy pamiętać o tem, że maximum nie jest koniecznie największą wartością, jaką funkcja przyjmuje. Poza badanem otoczeniem może funkcja przyjmować wartości większe. (Por. rys 33.)

Również jasną rzeczą jest, że funkcja może przyjmować kilka razy minimum albo maximum.

Np. funkcja $y = \sin \frac{1}{x}$ przyjmuje nieskończenie wiele razy maximum równe jedności, dla $x = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \ldots \frac{2}{(4n+1)\pi}$.



Rys. 33.

2. Warunek konieczny dla istnienia extremum. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ dla $x = x_0$ przyjmuje extremum, to pochodna w tym punkcie, o ile istnieje, jest równa zeru. Innemi słowy: styczna, jeżeli istnieje, jest równoległa do osi x-ów.

Przypuśćmy, że dla $x = x_0$ występuje maximum. Przypuszczając, że $f'(x_0)$ istnieje, mamy:

$$f'(x) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Lecz na mocy (1), dla dostatecznie małych, dodatnich h mamy:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0,$$

a więc

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0,$$

czyli

$$f'(x_0) \leqslant 0. \tag{3}$$

Podobnie otrzymujemy

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0,$$

a więc

$$f'(x_0) \geqslant 0. \tag{4}$$

Z nierówności (3) i (4) wynika

$$f'(x_0) = 0.$$

U w a g a. Nie należy sądzić, że jeżeli w pewnym punkcie pochodna się zeruje, to występuje w nim extremum. Np. funkcja $y = x^3$, której pochodna $y' = 3x^2$ zeruje się dla $x = 0$, nie posiada extremum w punkcie $x = 0$, gdyż:

$$\begin{array}{lll} \text{dla} & x > 0 & \text{jest } y > 0, \\ \text{dla} & x < 0 & \text{jest } y < 0, \\ \text{zaś dla} & x = 0 & \text{jest } y = 0. \end{array}$$

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ posiada w pewnym przedziale (a, b) pochodną, to możemy na mocy powyższego twierdzenia być pewni, że extrema, które występują wewnątrz przedziału (a, b) zachodzić mogą tylko w tych punktach, w których pochodna się zeruje. Wystarczy więc wyznaczyć wszystkie wartości na x przedziału (a, b), dla których $f'(x) = 0$ i zbadać, w których z nich występuje extremum. — Odpada zaś badanie pozostałych wartości na x.

P r z y k ł a d. Dla jakich wartości na x funkcja $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ może przyjmować extremum?

$$y' = x^3 - 2x^2 - 3x$$

Jak łatwo widać, równanie

$$y' = 0,$$

czyli

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0,$$

ma tylko 3 pierwiastki:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -1.$$

A więc extremum może występować tylko dla $x = 0$, 3, -1.

3. Warunek wystarczający dla istnienia extremum. Następujące twierdzenie pozwala nam w wielu wypadkach rozstrzygnąć, czy w pewnym punkcie występuje maximum czy minimum.

T w i e r d z e n i e. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ w otoczeniu punktu $x = x_0$ posiada pierwszą i drugą pochodną ciągłą i jeżeli $f'(x_0) = 0$, to dla $x = x_0$ występuje maximum właściwe, gdy $f''(x_0) < 0$, minimum właściwie, gdy $f''(x_0) > 0$.

Jeżeli zaś $f''(x_0) = 0$, to nie możemy bez dalszego badania nic orzec.

D o w ó d. Na mocy wzoru Taylora mamy

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \vartheta h).$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

Ponieważ według założenia

$$f'(x_0) = 0,$$

więc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \vartheta h).$$

Jeżeli przypuścimy teraz, że $f''(x_0) < 0$, to ponieważ na mocy założenia druga pochodna jest ciągłą, więc istnieje takie otoczenie punktu $x = x_0$, w którem $f''(x) < 0$.

Oczywiście więc, że jeżeli $x_0 + h$ $(h \neq 0)$ będzie do tego otoczenia należeć, to

$$f''(x_0 + \vartheta h) < 0,$$

a ponieważ $h^2 > 0$, więc

$$\frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \vartheta h) = f''(x_0 + h) - f(x_0) < 0,$$

a więc dla $x = x_0$ występuje maximum właściwe.

Podobnie postępując, przy założeniu, $f''(x_0) > 0$, udowodnimy, że dla $x = x_0$ występuje minimum właściwe.

P r z y k ł a d. Wyznaczyć maxima i minima funkcji.

$$y = \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2.$$

Pierwsza pochodna zeruje się dla

$$x = 0,\ 3,\ -1$$

$$y'' = 3x^2 - 4x - 3$$

$f''(0) = -\ 3 < 0$ więc dla $x = 0$, $y = 2$ mamy maxim.

$f''(3) = 12 \quad > 0$ „ „ $x = 3, y = -9\frac{1}{4}$ „ minim.

$f''(-1) = 4 \quad > 0$ „ „ $x = -1, y = 1\frac{5}{12}$ „ minim.

4. Ogólniejszy warunek wystarczający. W wypadku wątpliwym, gdy $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$, posługujemy się następującem ogólniejszem twierdzeniem:

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ posiada w otoczeniu punktu $x = x_0$ pochodne ciągłe, aż do n-ego rzędu $(n > 1)$ włącznie, i jeżeli

$$f'(x_0) = f''(x_0) \ldots\ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

a natomiast

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

to, gdy n jest liczbą nieparzystą, w punkcie $x = x_0$ nie występuje extremum, gdy zaś n jest liczbą parzystą, występuje maximum właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$

minimum właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

D o w ó d. Na mocy wzoru Taylora otrzymujemy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h) \qquad 0 < \theta < 1.$$

Jeżeli założymy, że n jest liczbą parzystą, dowód przeprowadza się podobnie, jak przy twierdzeniu poprzedniem.

Przypuśćmy, że n jest liczbą nieparzystą i załóżmy, że

$$f^{(n)}(x_0) > 0.$$

Łatwo widać, że istnieje takie otoczenie punktu $x = x_0$, w którem

$$f^{(n)}(x) > 0.$$

Biorąc więc na h wartości dodatnie, dostatecznie małe, mamy

$$f^{(n)}(x_0 + \theta h) > 0 \text{ i } h^n > 0,$$

więc
$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$$

czyli
$$f(x_0 + h) > f(x_0).$$

Biorąc zaś na h wartości ujemne, dostatecznie małe co do modułu, mamy

$$f^{(n)}(x_0 + \theta h) > 0 \text{ i } h^n < 0$$

więc
$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$$

czyli
$$f(x_0 + h) < f(x_0).$$

Wobec tego, że w dowolnem otoczeniu istnieją wartości większe i mniejsze od $f(x_0)$, w punkcie $x = x_0$ nie występuje extremum.

Podobnie postępujemy, gdy $f^{(n)}(x) < 0$.

Przykłady.

1.
$$\begin{aligned} y &= x^3 - 6x^2 + 12x - 3 \\ y' &= 3x^2 - 12x + 12 \\ y'' &= 6x - 12 \\ y''' &= 6 \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć extrema, rozwiązujemy równanie $y' = 0$ czyli

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Otrzymujemy jeden pierwiastek $x = 2$. Druga pochodna w punkcie $x = 2$ jest zerem, a ponieważ trzecia pochodna jest dodatnia, więc dla $x = 2$ nie występuje extremum.

$$2.\ y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$$

$$y' = \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}$$

$$y'' = \frac{6(x+3)}{(x+2)^4}$$

$$y''' = -\frac{6(3x+10)}{(x+2)^5}.$$

Jako pierwiastki równania $y' = 0$ otrzymujemy $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Dla pierwszej z tych wartości druga pochodna jest dodatnia, dla drugiej równa zeru. Dla $x = 0$ mamy więc minimum. Podstawiając x_2 w trzeciej pochodnej otrzymujemy $y''' = 6 \neq 0$. Dla $x_2 = -3$ nie występuje extremum.

$$3.\ y = x^4 (x-1)^3 + 1$$
$$y' = x^3 (x-1)^2 (7x-4).$$

Pochodna zeruje się w punktach

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{4}{7}$$

$$y'' = x^2 (x-1)(42x^2 - 48x + 12)$$

$$f''(x_1) = 0 \qquad f''(x_2) = 0 \qquad f''(x_3) > 0$$

a więc dla $x = \frac{4}{7}$ wypada minimum

$$y''' = x\left[(3x-2)\ \varphi(x) + x(x-1)\ \varphi'(x)\right],$$

gdzie $\varphi(x) = 42x^2 - 48x + 12,$

więc $f'''(x_1) = 0 \qquad f'''(x_2) = \varphi(1) = 6$

A więc dla $x = x_2$ nie występuje extremum.

Kładąc:

$$\left[(3x-2)\,\varphi(x)+x(x-1)\,\varphi'(x)\right]=\psi(x),$$

mamy:

$$y^{(4)}=\psi(x)+x\psi'(x),$$

więc

$$f^{(4)}(x_1)=\psi(0)=-2.\varphi(0)=-24<0,$$

a więc dla $x=0$ wypada maximum.

3. $y=\dfrac{x^2-2x-21}{6x+14}$

$$y'=\frac{6x^2+27x+98}{(6x+14)^2}.$$

W tym przykładzie pierwsza pochodna nie znika dla żadnej wartości x, lecz jest stale dodatnia. Funkcja nie ma więc extremum w żadnym punkcie i stale rośnie.

5. Punkt przegięcia. Powiadamy, że punkt $x=x_0$ jest dla funkcji $y=f(x)$ punktem przegięcia, jeżeli dla dostatecznie małych h wyrażenie:

$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0) \qquad (1)$$

zmienia swój znak wraz ze zmianą znaku h, innemi słowy, jeżeli istnieje taka liczba $\varepsilon>0$, iż wyrażenie (1) albo
dla $\varepsilon>h>0$ jest stale dodatnie, zaś
dla $-\varepsilon<h<0$ stale ujemne;
albo dla $\varepsilon>h>0$ jest stale ujemne, zaś
dla $-\varepsilon<h<0$ stale dodatnie.

Geometrycznie znaczy to, że część krzywej odpowiadająca dodatniemu h jest po przeciwnej stronie stycznej (wykreślonej w punkcie odpowiadającym wartości $x=x_0$), niż część krzywej, odpowiadająca h ujemnemu. Por. rys. 34 i 35.

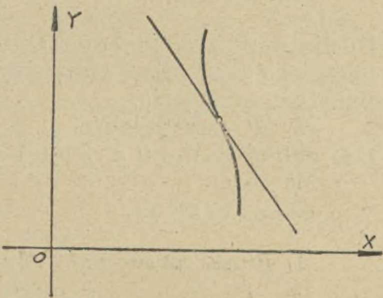
Stosując twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy:

$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)=hf'(x_0+\theta h)-hf'(x_0)=$$
$$=h\left[f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)\right] \qquad (0<\theta<1).$$

Załóżmy że pierwsza pochodna ma w punkcie x_0 extremum właściwe; wyrażenie: $f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)$ będzie więc dla dostatecznie małych wartości na h (różnych od 0) stale jednego znaku, a zatem wyrażenie:

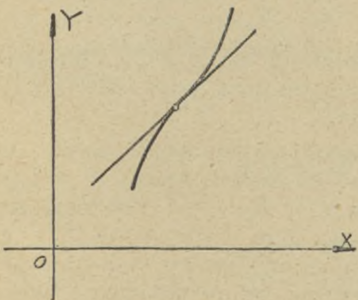
$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)=h\left[f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)\right]$$

będzie zmieniało znak wraz ze zmianą znaku h. Na mocy więc określenia, punkt x_0 jest punktem przegięcia. Wykazaliśmy więc.



Rys. 34.

Twierdzenie: Jeżeli pierwsza pochodna funkcji $y=f(x)$ przyjmuje dla $x=x_0$ extremum właściwe, to punkt $x=x_0$ jest dla funkcji $y=(x)f$ punktem przegięcia. — Wyznaczając więc punkty, w których pierwsza pochodna ma extremum otrzymujemy (w praktyce naogół wszystkie) punkty przegięcia funkcji $y=f(x)$.



Rys. 35.

Twierdzenie odwrotne nie jest jednak prawdziwe. Może się np. zdarzyć, że punkt

x_0 jest punktem przegięcia, a dla punktów $x \neq x_0$ pochodna nie istnieje, tak, że nie może być mowy o extremum pochodnej w punkcie x_0.

Opierając się na odpowiednich twierdzeniach z teorji extremów, możemy wygłosić następujące twierdzenia:

1. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ posiada w otoczeniu punktu x_0 pochodne ciągłe aż do n-tego rzędu ($n \geqslant 2$) włącznie i jeżeli

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots . f^{(n-1)}(x_0) = 0, \; f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

to dla n parzystego punkt $x = x_0$ nie jest punktem przegięcia, zaś dla n nieparzystego punkt $x = x_0$ jest punktem przegięcia.

2. W szczególności $x = x_0$ jest punktem przegięcia, gdy $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$.

P r z y k ł a d y.

1. $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 1,$
$y' = 3x^2 - 12x + 2,$
$y'' = 6x - 12,$
$y''' = 6.$

Druga pochodna zeruje się dla $x = 2$. Ponieważ trzecia pochodna jest różna od zera, więc dla $x = 2$ występuje punkt przegięcia.

2. $y = x^3 (x^2 - 5x + \frac{20}{3}),$
$y' = 5x^2 (x^2 - 4x + 4),$
$y'' = 20x (x^2 - 3x + 2),$
$y''' = 20 (3x^2 - 6x + 2).$

Druga pochodna ma pierwiastki $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Ponieważ dla tych wartości trzecia pochodna jest różna od zera, więc powyższe punkty są punktami przegięcia.

6. Extrema funkcyj przedstawionych parametrycznie.

Niechaj dane będą dwie funkcje

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

ciągłe w pewnym przedziale (α, β) i posiadające w nim pierwsze i drugie pochodne, również ciągłe. Załóżmy ponadto, że funkcja $x = f(t)$ jest w tym przedziale ściśle monotoniczną. Równania powyższe określają nam wówczas (por. str. 144) y jako funkcję zmiennej x. Pochodne tej funkcji są dane wzorami:

$$y_x' = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$$

$$y_x'' = \frac{f'(t)\,\varphi''(t) - f''(t)\,\varphi'(t)}{[f'(t)]^3}$$

(przy założeniu, że w badanym punkcie $f'(t) \neq 0$).

Celem wyznaczenia extremów tej funkcji postępujemy w ten sam sposób, jak poprzednio. A więc wyznaczamy najpierw punkty, w których $y_x' = 0$, t. j. w których

$$\varphi'(t) = 0 \quad \text{zaś } f'(t) \neq 0.$$

Jeżeli t_0 jest takim punktem, to z uwagi na to, że $\varphi'(t_0) = 0$, druga pochodna y_x'' wyraża się następującym wzorem:

$$y_x'' = \frac{\varphi''(t_0)}{[f'(t_0)]^2}.$$

Występuje więc minimum, gdy $\varphi''(t_0) > 0$, maximum gdy $\varphi''(t_0) < 0$. Jeżeli $\varphi''(t) = 0$ to trzeba badać pochodne rzędu wyższego. Punkty, w których $f'(t) = 0$, wymagają specjalnego badania.

P r z y k ł a d y.

1. $$x = r\cos t,\ y = \tfrac{1}{4} r \sin 2t \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi \quad r > 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin t;\ \frac{dy}{dt} = \tfrac{1}{2} r\cos 2t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -r\cos t;\ \frac{d^2y}{dt^2} = -r\sin 2t.$$

Dla $t \neq 0$ mamy:

$$\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}\frac{\cos 2t}{\sin t};\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t}{r\,(\sin t)^3}.$$

Licznik pierwszej pochodnej ma pierwiastek $t = \frac{\pi}{4}$, dla której to wartości mianownik nie znika. Druga pochodna dla $t = \frac{\pi}{4}$ przyjmuje wartość $-\dfrac{2}{r\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2} < 0.$

A wię dla $t = \frac{\pi}{4}$ występuje maximum właściwe.

2. $$x = t^4 + 1,\ y = t^3 - 2t - 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 4t^3,\quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 12t^2,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = 6t.$$

Dla $t \neq 0$ jest więc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 2}{4t^3},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t^3 . 6t - (3t^2 - 2) . 12t^2}{64t^9}.$$

Licznik pierwszej pochodnej ma pierwiastki $t_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $t_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, dla których mianownik nie znika. Wstawiając je w wyrażenie na drugą pochodną, otrzymujemy dla $t = t_1$ wartość dodatnią, dla $t = t_2$ wartość ujemną. Dla $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$ zachodzi więc minimum, dla $t = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ maximum.

Zadania.

1. $y = x(a-x)^2$, $(a > 0)$; $x = \frac{a}{3}$ max. $x = a$ minim.
2. $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$; $x=2$ maximum, $x = 1, 3$ minimum.
3. $y = \frac{2^x}{x}$ $\quad x = \frac{1}{log\, 2}$ minimum.
4. $y = x^x$ $\quad x = \frac{1}{e}$ minimum.
5. $y = e^x\, sin\, x$ $\quad x = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi$ max. dla n parzystych min. „ „ nieparzyst.
6. Wpisać w kulę o danym promieniu r stożek o możliwie największej objętości.
   $\left(\text{Odległość podstawy od środka kuli} = \frac{r}{3}\right)$.
7. Wykazać, że z pośród wszystkich trójkątów o danej podstawie i obwodzie, największe pole ma trójkąt równoramienny.
8. Znaleźć punkt mający tę własność, że suma kwadratów jego odległości od wierzchołków trójkąta jest możliwie najmniejsza. (Środek ciężkości trójkąta.)
9. Wykazać, że najkrótsza cięciwa paraboli $y^2 = 2px$ przecinająca ją pod kątem prostym ma długość $3p\sqrt{3}$.
10. Wpisać w kulę a) walec, b) stożek o możliwie największej powierzchni.

Wysokość walca wynosi $r\sqrt{2\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$,

stożka $\frac{r}{16}\left(23-\sqrt{17}\right)$.

11. $y=t^2+8t-1$
$x=t^5+2t$ $\qquad t=-4$ minimum.

12. $y=arctg(2t+1)$
$x=e^{-t^2}$ $\qquad$ Niema extremum.

Symbole nieoznaczone.

Symbole nieoznaczone: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. W ustępie tym zajmiemy się badaniem granicy stosunku $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, w wypadku, gdy licznik i mianownik dążą do zera lub nieskończoności. Wypadki te oznaczać będziemy symbolami $\frac{0}{0}$ wzgl. $\frac{\infty}{\infty}$.

Twierdzenie. Jeżeli dla funkcyj $f(x)$ i $g(x)$, posiadających pierwszą pochodną w otoczeniu punktu $x=a$ (z wyjątkiem samego być może punktu a), zachodzi związek: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, to, jeżeli istnieje $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje również $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ i

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga: Rzecz jasna, że milcząco przyjęliśmy, że funkcje $g(x)$ i $g'(x)$ nigdzie w otoczeniu punktu a, poza samym być może punktem a, nie zerują się.

Dowód: Niechaj x będzie pewną wartością zmiennej x różną od a. Połóżmy:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\omega \tag{1}$$

i określmy funkcję $\varphi(t)$ zmiennej t, kładąc:

$$\varphi(t) = f(t) - \omega g(t).$$

Łatwo widać, że $\varphi(a) = \varphi(x) = 0$.

Wobec tego na mocy twierdzenia Rolle'a istnieje taki punkt ξ zawarty między a i x (różny od a), iż $\varphi'(\xi) = 0$. Ponieważ: $\varphi'(t) = f'(t) - \omega g'(t)$, zatem $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \omega g'(\xi)$, więc:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \omega = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{2}$$

Zauważymy, że gdy x zmierza do a, to i ξ zmierza do a. Jeżeli więc założymy, że $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ istnieje, to ze związku (2) otrzymujemy istnienie granicy $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i równość

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Przykłady:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 5}{2x - 3} = -1.$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1.$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1.$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^4}{3x^2} = \dfrac{5}{3}.$

Uwaga: Jeżeli okaże się, że $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, to jak łatwo widać z dowodu, również $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.

Przykłady:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{3 . x^2} = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{tg x - \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x} = +\infty$.

Twierdzenie. Jeżeli dla funkcyj $f(x)$ i $g(x)$ posiadających pierwszą pochodną wszędzie w otoczeniu punktu $x = a$ (z wyjątkiem samego punktu a) zachodzi związek

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty,$$

to, jeżeli istnieje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (wzgl. jest $\pm\infty$), to istnieje również $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (wzgl. jest $\pm\infty$) i zachodzi związek:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dowód tego twierdzenia jako trudniejszy pomijamy.

Przykłady:

1. $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +0} (-x) = 0$.

$$2.\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{tg\,3x}{tg\,5x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x} =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2 = \frac{3}{5}\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{5\sin 5x}{3\sin 3x}\right)^2 = \frac{5}{3}$$

Uwagi: Gdyby okazało się, że $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \lim\limits_{x \to a} g'(x) = 0$ (wzgl. $\pm\infty$) to badanie granicy stosunku $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ sprowadzamy na podstawie tych samych twierdzeń do badania granicy stosunku $\frac{f''(x)}{g''(x)}$. Jak łatwo widać, postępowanie to można uogólnić.

Przykłady:

$$1.\ \lim_{x \to 1} \frac{ax^2 - 2ax + a}{bx^2 - 2bx + b} = \lim_{x \to 1} \frac{2ax - 2a}{2bx - 2b} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}.$$

$$2.\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$3.\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty.$$

Twierdzenia nasze zachodzą również wtedy, gdy x zmierza do ∞, zaś $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ (lub $\pm\infty$). W wypadku tym należy założyć, że dla wszystkich x większych od pewnej liczby A funkcje f i g posiadają pochodną.

Przykłady:

$$1.\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

$$2.\ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

$$3.\ \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x}{\frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1\,.$$

Symbole nieoznaczone $0.\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

1. Jeżeli $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, zaś $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, to badanie granicy iloczynu $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$ sprowadzamy do badania granicy $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ lub $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, które przedstawiają się w postaci symbolu $\frac{0}{0}$ wzgl. $\frac{\infty}{\infty}$.

Przykłady:

$$1.\ \lim_{x \to 0} x \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0.$$

$$2.\ \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

2. Jeżeli $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, to badanie granicy różnicy $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x))$ sprowadzamy do badania granicy $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$, która przedstawia się w postaci symbolu $\dfrac{0}{0}$.

Przykłady:

$$1.\ \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x} = \frac{1}{2}.$$

$$2.\ \lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x - x^2 - 1}{(x^2-1)(x-1)} = -\frac{1}{2}.$$

$$3.\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = 0.$$

3. Symbole 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} sprowadzamy do symbolu $0 \,.\, \infty$ opierając się na identyczności:

$$\{ f(x) \}^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \log f(x)}.$$

Zakładamy, rzecz jasna, że $f(x) > 0$.

Przykłady:

$$1.\ \lim_{x \to +0} x^{x} = \lim_{x \to +0} e^{x \log x};$$

$$\lim_{x \to +0} x \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = 0,$$

więc $\lim\limits_{x \to +0} x^{x} = e^{0} = 1.$

$$2.\ \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x} \log x};$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \log x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0,$$

więc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1.$

$$3.\ \lim_{x \to 0} (1 + mx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \log (1 + mx)};$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log (1 + mx) = \lim_{x \to 0} \frac{\log (1 + mx)}{x} = m;$$

więc $\lim\limits_{x \to 0} (1 + mx)^{\frac{1}{x}} = e^{m}.$

Zadania:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \log\dfrac{a}{b}$.

2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3a}} = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2x\, tg\, x}\right) = \dfrac{1}{6}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\log x}\right) = \dfrac{1}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-1}}{\cot x} = 1$.

7. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\, tg\,\dfrac{\pi}{2}x = \dfrac{2}{\pi}$.

8. $\lim\limits_{x\to +0} x^n \log x = 0 \ (n > 0)$.

9. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to +0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\, x} = 1$.

11. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{\frac{1}{2}h^2} = f''(a)$.

12. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$.

ROZDZIAŁ VIII.

Szeregi.

Szeregi o wyrazach stałych.

1. Definicja szeregu. Szeregi zbieżne. Przypuśćmy, że dany jest ciąg liczb $\{a_n\}$. Połóżmy:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Jeżeli ciąg $\{s_n\}$ ma granicę S, wówczas piszemy to symbolicznie:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

albo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Liczbę S nazywamy sumą szeregu:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Powiadamy wtedy również, że szereg:

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots$$

jest zbieżny do S. Liczby

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots$$

nazywamy wyrazami szeregu. — Szereg, który nie jest zbieżnym, nazywamy rozbieżnym.

Przykłady:

1) $a_n = a q^{n-1} \quad |q| < 1$ (Szereg geometryczny).

Mamy jak wiadomo (por. wstęp 4).

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}.$$

Ponieważ $|q| < 1$, więc (str. 39) $\lim\limits_{n \to \infty} |q^n| = 0$, zatem

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

czyli

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

lub

$$\frac{a}{1-q} = \sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}, \qquad |q| < 1.$$

Np. $\quad 1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$

czyli

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$2) \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

więc

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

czyli

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

stąd

$$S = \lim_{n \to \infty} s_n = 1,$$

zatem:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

3) Niechaj $\lim_{n \to \infty} b_n = g$, wówczas kładąc

$$a_1 = b_1$$
$$a_n = b_n - b_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

mamy

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + (b_2 - b_1) + \\ + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_n - b_{n-1}),$$

a więc

$$s_n = b_n,$$

a zatem

$$\lim_{n \to \infty} s_n = g,$$

czyli

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n).$$

Np. jeżeli

$$b_n = \frac{2n+1}{3n-1},$$

to
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{3};$$
a zatem
$$\frac{2}{3} = b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{9n^2+3n-2}.$$

2. Konieczny warunek zbieżności. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Widać to łatwo, gdy zauważymy, że
$$a_n = s_n - s_{n-1},$$
więc
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0.$$

Warunek ten pozwala często przekonać się w prosty sposób o rozbieżności danego szeregu. Np. znany nam już szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ jest rozbieżny przy $a \neq 0$ i $|q| \geqslant 1$, bo $|a_n| = |a| . |q^{n-1}| \geqslant |a|$.

Nie należy jednak sądzić, że naodwrót gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Przykładem tego jest szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

W rzeczy samej
$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log 1 = 0.$$

Z drugiej jednak strony:

$$log\left(1+\frac{1}{n}\right)=log\,\frac{n+1}{n}=log\,(n+1)-log\,n\,,$$

a więc

$$s_n=(log\,2-log\,1)+(log\,3-log\,2)+\ldots+$$
$$+(log\,(n+1)-log\,n)\,,$$

czyli

$$s_n=log\,(n+1).$$

Zatem ciąg s_n jest rozbieżny do $+\infty$; szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ jest więc rozbieżny.

Innym przykładem szeregu rozbieżnego o wyrazach dążących do zera jest t. zw. szereg harmoniczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Istotnie, gdyby ten szereg był zbieżny, to, oznaczając jego sumę przez S, mielibyśmy $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}-\lim\limits_{n\to\infty}s_n=S-S=0$. Ale $s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+$ $+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$. Prawą stronę zmniejszymy, zastępując każdy wyraz przez $\frac{1}{2n}$. Zatem $s_{2n}-s_n>n\,\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$. Nie może więc być $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=0$.

3. Szeregi ograniczone. Powiadamy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest ograniczony, jeżeli ciąg $\{s_n\}$ jest ograniczony.

Jeżeli szereg jest zbieżny, czyli, jeżeli ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny, to na mocy, odpowiedniego twierdzenia o ciągach (por. str. 34) możemy twierdzić, że ciąg $\{s_n\}$ jest ograniczony, czyli że szereg Σa_n jest ograniczony.

Nie możemy jednak twierdzenia tego odwrócić. Przykładem tego jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+1 \dots$$

Tutaj mamy:

$$s_1 = -1,\ s_2 = 0,\ s_3 = -1,\ s_4 = 0,\ \dots s_n = \frac{-1+(-1)^n}{2}.$$

Widzimy więc, że:

$$|s_n| \leqslant 1,$$

jednak ciąg $\{s_n\}$ nie ma granicy, więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ jest rozbieżny.

O szeregu ograniczonym, którego wyrazy są nieujemne, można wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Szereg ograniczony o wyrazach nieujemnych jest zbieżny.

Dowód jest natychmiastowy jeżeli zauważymy, że przy powyższych założeniach, ciąg $\{s_n\}$ jest ciągiem niemalejącym, ograniczonym, a więc zbieżnym (por. str. 32).

Przykład:

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $(s > 1)$ jest szeregiem zbieżnym. Opierając się bowiem na twierdzeniu o wartości średniej, mamy:

$$(x+h)^{-s+1} - x^{-s+1} = (-s+1)\, h\, (x+\vartheta h)^{-s},$$

kładąc $x = n$, $h = -1$ otrzymamy dla $n > 1$

$$\frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} = (s-1)\frac{1}{(n-\vartheta)^s}.$$

Ponieważ $\qquad 0 < \vartheta < 1,$

zatem
$$\frac{1}{(n-\vartheta)^s} \geqslant \frac{1}{n^s}.$$

Więc
$$\frac{1}{n^s} \leqslant \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right).$$

Zatem
$$s_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} \leqslant 1 + \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{1^{s-1}} - \frac{1}{2^{s-1}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{3^{s-1}}\right) + \ldots + \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right),$$
stąd
$$s_n \leqslant 1 + \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{n^{s-1}}\right).$$

Ponieważ $s > 1$ więc $\frac{1}{n^{s-1}} < 1$, więc
$$s_n \leqslant 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}.$$

Widzimy więc, że szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $(s > 1)$ jest szeregiem ograniczonym, zatem zbieżnym.

5. Szeregi bezwzględnie zbieżne. Powiadamy, że szereg jest absolutnie (bezwzględnie) zbieżny, jeżeli szereg utworzony z bezwzględnych wartości jego wyrazów jest zbieżny.

Przykład:

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ jest absolutnie zbieżny, gdyż szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

jest zbieżny.

T w i e r d z e n i e. Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny zwyczajnie i sumę jego otrzymamy, dodając do sumy jego wyrazów dodatnich sumę jego wyrazów ujemnych.

U w a g a. Sumą wyrazów dodatnich szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy sumę (jeżeli istnieje) szeregu powstałego z szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ przez zastąpienie wyrazów ujemnych zerami. Podobnie definjujemy sumę wyrazów ujemnych.

Twierdzenie nasze powiada, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to oznaczając przez T sumę wyrazów dodatnich, zaś przez W sumę wyrazów ujemnych mamy:

$$S = T + W.$$

D o w ó d. Oznaczmy przez t_n (wzgl. w_n) n-tą sumę częściową szeregu wyrazów dodatnich (względnie ujemnych). Jasną jest rzeczą, że ciągi $\{t_n\}$ i $\{w_n\}$ są ciągami monotonicznemi i ograniczonemi, gdyż:

$$|t_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$$|w_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

A zatem $\{t_n\}$ i $\{w_n\}$ są ciągami zbieżnemi. Połóżmy:

$$T = \lim_{n \to \infty} t_n$$

$$W = \lim_{n \to \infty} w_n,$$

T jest więc sumą wyrazów dodatnich, W sumą wyrazów ujemnych. Zauważmy teraz, że

$$s_n = t_n + w_n$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} t_n + \lim_{n \to \infty} w_n .$$

Zatem $$S = T + W,$$

a więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i suma jego równa się sumie wyrazów dodatnich powiększonej o sumę wyrazów ujemnych.

6. Twierdzenie. Suma szeregu bezwzględnie zbieżnego nie zależy od porządku wyrazów.

U w a g a. Podobnie jak przy ciągach mówimy, że dwa szeregi różnią się tylko porządkiem wyrazów, jeżeli każdy wyraz występuje w obu szeregach tę samą (skończoną lub nieskończoną) ilość razy.

D o w ó d. Oznaczmy przez s'_n sumę n pierwszych wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ powstałego z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ przez zmianę porządku wyrazów.

Przyjmijmy na razie, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ składa się z samych wyrazów nieujemnych. Zauważmy, że jeżeli obierzemy sobie dowolną liczbę m, to ponieważ wszystkie wyrazy sumy s'_m występują w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, więc istnieje taka liczba N, że s_N zawiera w sobie wszystkie wyrazy s'_m (i może ponadto jeszcze inne). Zatem

$$s'_m \leqslant s_N,$$

ale $$s_N \leqslant S,$$

a więc $$s'_m \leqslant S. \tag{1}$$

Ciąg $\{s'_m\}$ jest zatem ciągiem niemalejącym, ograniczonym, a więc zbieżnym. Kładąc

$$S' = \lim_{n \to \infty} s'_n$$

mamy na mocy (1)

$$S' \leqslant S. \tag{2}$$

Podobnie postępując, możemy wykazać, że:

$$S' \geqslant S. \tag{3}$$

Możemy bowiem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uważać za szereg powstały z szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ przez zmianę porządku wyrazów.

Z nierówności (2) i (3) otrzymujemy:

$$S = S'.$$

Podobnie postępowalibyśmy w wypadku, gdyby wyrazy szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ były niedodatnie.

Przechodząc teraz do wypadku ogólnego (t. zn. nie zakładając, że wyrazy szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ są tego samego znaku), zauważmy, że szeregi, które otrzymamy z szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ przez zastąpienie w nich wyrazów ujemnych (wzgl. dodatnich) zerami, różnią się tylko porządkiem wyrazów, a więc na mocy tego, cośmy poprzednio wykazali, mają równe sumy. A więc w obu szeregach sumy wyrazów dodatnich i sumy wyrazów ujemnych są odpowiednio równe, a zatem (na mocy poprzedniego twierdzenia) oba szeregi mają równe sumy.

7. Szeregi warunkowo zbieżne. Szereg zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżnym nazywa się warunkowo zbieżnym.

Przykład.

Szereg:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots$$

jest szeregiem zbieżnym, mamy bowiem

$$s_1 = 1,\ s_2 = 0,\ s_3 = \frac{1}{2},\ s_4 = 0 \dots s_{2n} = 0,\ s_{2n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Zatem $$\lim_{n \to 0} s_n = 0.$$

Szereg ten nie jest jednak bezwzględnie zbieżnym, gdyż szereg

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots$$

jest rozbieżny. Mamy bowiem

$$s_{2n} = 2\left\{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right\}.$$

Ponieważ wyrażenie w nawiasie zawarte jest n-sumą szeregu harmonicznego, (por. str. 198) zatem $\lim\limits_{n \to \infty} s_{2n} = \infty$.

Uwaga. O szeregach warunkowo zbieżnych można udowodnić, że możemy z każdego z nich przez zmianę porządku wyrazów otrzymać szereg zbieżny do dowolnej liczby, zgóry obranej. A więc, jeżeli suma jakiegoś szeregu zbieżnego nie zależy od porządku jego składników, wówczas szereg ten jest bezwarunkowo zbieżny.

8. Warunek konieczny i dostateczny dla zbieżności szeregu. Podobnie jak w teorji ciągów, (str. 34), możemy podać warunek konieczny i wystarczający na to, by szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ był szeregiem zbieżnym.

Zauważmy, że jeżeli $p > 0$, to:

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}.$$

A więc (twierdzenie Cauchy'ego):

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by szereg Σa_n był szeregiem zbieżnym jest to, by do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można było znaleźć takie N, żeby dla każdego $p > 0$ i $n > N$ było:

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \quad \text{czyli} \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Przykład.

Niechaj ciąg $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem o wyrazach dodatnich, malejącym, zdążającym do zera. Wykażemy, że szereg:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

jest szeregiem zbieżnym.

Mamy:

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots \pm a_{n+p}. \qquad (p > 0).$$

Załóżmy że n jest nieparzyste. Łatwo widać, że

$$s_{n+p} - s_n \leqslant a_{n+1},$$

mamy bowiem

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + (-a_{n+2} + a_{n+3}) + (-a_{n+4} + a_{n+5}) + \ldots$$

a wyrażenia w nawiasach są oczywiście niedodatnie.

Zauważmy jeszcze, że

$$0 \leqslant s_{n+p} - s_n.$$

Mamy bowiem

$$s_{n+p} - s_n = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \ldots,$$

a wyrażenia w nawiasach są nieujemne.

Podobnie można wykazać, że jeżeli n parzyste, wówczas

$$-a_n \leqslant s_{n+p} - s_n \leqslant 0.$$

Widzimy zatem, że dla każdego n i $p > 0$ mamy:

$$|s_{n+p} - s_n| \leqslant a_n.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, więc do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać takie N, że dla każdego $n > N$ jest

$$a_n < \varepsilon;$$

zatem dla każdego $n > N$ i $p > 0$ zachodzi nierówność

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

Szereg nasz spełnia więc warunek Cauchy'ego jest zatem zbieżny.

Przykładem takiego szeregu są np. szeregi:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots.$$

Kryterja zbieżności.

9. Porównywanie szeregów. Niezawsze łatwo jest zbadać, czy dany szereg jest zbieżny, czy nie. W wielu wypadkach posługujemy się twierdzeniem następującem:

Jeżeli w szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, począwszy od pewnego wyrazu, wszystkie następne są nie większe, co do modułów, od wyrazów o tym samym wskaźniku szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n \geqslant 0)$, to ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, zaś z rozbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

D o w ó d. Niechaj a_N będzie tym wyrazem, od którego począwszy, każdy wyraz następny a_n $(n > N)$ spełnia nierówność:

$$|a_n| \leqslant b_n.$$

Łatwo widać, że kładąc

$$s_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$
$$s'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

mamy:

$$s_n \leqslant s_N + s'_n. \tag{1}$$

Jeżeli teraz przypuścimy, że szereg Σb_n jest zbieżny, to kładąc

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

mamy

$$s'_n \leqslant S',$$

a stąd na mocy (1):

$$s_n \leqslant s_N + S'.$$

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest więc ograniczony, a więc zbieżny. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zatem bezwzględnie zbieżny.

Gdybyśmy założyli, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ musiałby oczywiście być szeregiem również rozbieżnym, gdyż w przeciwnym wypadku, na mocy tego, cośmy przed chwilą wykazali, zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ pociągałaby zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Przykłady:

1. Szereg $1+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\ldots$ jest szeregiem zbieżnym, gdyż wyrazy jego są mniejsze od wyrazów szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (str. 199).

2. Szereg $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$ jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym dla każdego $-1<x<1$; bezwzględne bowiem wartości wyrazów tego szeregu są mniejsze od wyrazów szeregu geometrycznego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^n$.

3. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $(s\leqslant 1)$ jest szeregiem rozbieżnym, gdyż wyrazy tego szeregu są niemniejsze od wyrazów szeregu harmonicznego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

10. Kryterjum Cauchy'ego. Jeżeli wyrazy szeregu Σa_n są nieujemne, to możemy wypowiedzieć następujące twierdzenia:

1) Jeżeli istnieje liczba nieujemna $q<1$, taka, że począwszy od pewnego wyrazu a_N wszystkie następne spełniają nierówność:

$$\sqrt[n]{a_n}\leqslant q \qquad (n>N),$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2) Jeżeli istnieje liczba $q \geqslant 1$ taka, że począwszy od pewnego wyrazu a_N wszystkie następne spełniają nierówność

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant q \qquad (n > N),$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

D o w ó d. W wypadku pierwszym mamy:

$$a_n \leqslant q^n \qquad (n > N).$$

Ponieważ szereg Σq^n jest szeregiem geometrycznym zbieżnym $(0 \leqslant q < 1)$, więc na mocy twierdzenia poprzedniego, szereg Σa_n jest szeregiem zbieżnym.

W wypadku drugim mamy:

$$a_n \geqslant q^n \qquad (n > N).$$

Ponieważ szereg Σq^n jest rozbieżny $(q \geqslant 1)$, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem rozbieżnym.

W zastosowaniach jest przydatne często twierdzenie następujące, które łatwo wynika z poprzednich.

Jeżeli wyrazy szeregu Σa_n są n i e u j e m n e i jeżeli istnieje $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$, to

gdy $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$ szereg jest zbieżny,

gdy $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$ szereg jest rozbieżny,

gdy $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$ nie możemy nic powiedzieć o zbieżności szeregu.

Dowód. Połóżmy:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l;$$

obierając dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, możemy znaleźć taki wskaźnik N, że dla $n > N$, jest

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - l\right| < \varepsilon,$$

czyli

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon.$$

Jeżeli założymy, że $l < 1$, to kładąc: $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$, $q = l + \varepsilon$, mamy:

$$q < 1, \quad \sqrt[n]{a_n} < q, \quad \text{dla } n > N.$$

Na mocy twierdzenia poprzedniego szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest więc zbieżny.

Gdy $l > 1$, wówczas kładąc:

$$\varepsilon = \frac{l-1}{2}, \quad q = l - \varepsilon,$$

mamy:

$$q > 1, \quad \sqrt[n]{a_n} > q, \quad \text{dla } n > N.$$

A więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

P r z y k ł a d y:

1. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ jest szeregiem zbieżnym, mamy bowiem $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$

2. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\log n}}$ jest dla $0 \leqslant x < 1$ zbieżny, mamy bowiem $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{2^{\log n}}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x}{2^{\frac{\log n}{n}}} = \frac{x}{2^0} = x.$

3. Kryterjum Cauchy'ego nie rozstrzyga zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$; mamy bowiem

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^s}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^s = 1.$$

Wiemy jednak (str. 208), że dla $s \leqslant 1$ szereg jest rozbieżny, dla $s > 1$ (str. 199) zbieżny.

11. Kryterjum d'Alemberta. Załóżmy, że wyrazy szeregu Σa_n są wszystkie dodatnie (a więc różne od zera).

Można wypowiedzieć następujące twierdzenia, znane pod nazwą kryterjum d'Alemberta:

1) Jeżeli istnieje liczba nieujemna $q < 1$, taka, że począwszy od pewnego wyrazu a_N, wszystkie następne spełniają nierówność:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q \qquad (n > N),$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2) Jeżeli istnieje liczba $q \geqslant 1$ taka, że począwszy od pewnego wyrazu a_N, wszystkie następne spełniają nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q \qquad (n > N),$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem rozbieżnym.

Dowód. Zauważmy, że w wypadku pierwszym

$$a_{n+1} \leqslant a_n q \qquad (n > N),$$

a więc, kładąc:

$$n = N+1,\ N+2,\ N+3,\ \ldots\ N+p \quad (p > 0),$$

otrzymujemy:

$$a_{N+2} \leqslant a_{N+1}\, q$$
$$a_{N+3} \leqslant a_{N+2}\, q \leqslant a_{N+1}\, q^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{N+p} \leqslant a_{N+1}\, q^{p-1}$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{N+1}\, q^{p-1}$ jest szeregiem zbieżnym ($q < 1$), więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest również zbieżny.

Podobnie postąpimy w wypadku drugim.

Z twierdzeń powyższych wynikają twierdzenia następujące:

Jeżeli wyrazy szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie i jeżeli istnieje $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, to

gdy $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, szereg jest zbieżny,

gdy $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, szereg jest rozbieżny.

W wypadku, gdy $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, nie możemy niczego powiedzieć o zbieżności szeregu.

Dowód przeprowadza się podobnie, jak na str. 209 i 210.

Przykłady.

1) Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest dla każdego x zbieżny.

Mamy bowiem $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x}{n+1} = 0.$

2) Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ jest dla $0 \leqslant x < 1$ zbieżny.

Mamy bowiem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}:\frac{x^n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}x=x.$ Jeśli więc $0\leqslant x<1$, szereg jest zbieżny, jeżeli $x>1$, szereg rozbieżny.

3) Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,n!}{n^n}$ jest zbieżny, natomiast szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\,n!}{n^n}$ jest rozbieżny. Mamy bowiem w pierwszym wypadku $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{e}<1$, zaś w drugim wypadku $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{e}>1$.

Zadania. Wykazać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n},$$

zaś rozbieżność szeregów: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+5}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$.

Granice i szeregi funkcyj.

12. Definicja zbieżności. Przypuśćmy, że mamy dany ciąg funkcyj $\{f_n(x)\}$, określonych w przedziale (a, b). Powiadamy, że funkcja $f(x)$, określona w przedziale (a, b), jest w tym przedziale granicą ciągu funkcyj $\{f_n(x)\}$, jeżeli dla każdego punktu x_0 przedziału (a, b)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Jeżeli $f(x)$ jest granicą ciągu $\{f_n(x)\}$ w przedziale (a, b), to piszemy:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Podobnie określamy co to znaczy, że funkcja $S(x)$ jest sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Przykłady:

1) $f_n(x) = \frac{\sin n x}{n}$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, bo $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$.

2) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = e^x$.

Mamy bowiem $\lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{m}{z}\right)^z$ [1] $= \lim_{z \to \infty} e^{z \log\left(1 + \frac{m}{z}\right)}$.

Lecz $\lim_{z \to \infty} z \log\left(1 + \frac{m}{z}\right)$ [2] $= \lim_{z \to \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{m}{z}\right)}{\frac{1}{z}} = m$.

Więc $\lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{m}{z}\right)^z = e^m$, czyli $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

3) $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$ $\qquad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = x$.

Mamy bowiem $\lim_{z \to \infty} z \sin \frac{m}{z}$ [3] $= \lim_{z \to \infty} \frac{\sin \frac{m}{z}}{\frac{1}{z}} = m$,

więc $\lim_{n \to \infty} n \sin \frac{x}{n} = x$.

4) Ponieważ $\lim_{z \to 0} \frac{a^z - 1}{z} = \log a$, więc jeżeli

$f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$, to $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \log x \qquad (x > 0)$.

---

[1] 1^{∞}. [2] $0 . \infty$. [3] $\infty . 0$.

13. Zbieżność jednostajna. Mówimy, że dwie funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ różnią się od siebie w przedziale (a, b) o mniej niż ε ($\varepsilon > 0$), jeżeli dla każdego x przedziału (a, b) zachodzi:

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Powiadamy, że ciąg funkcyj $\{f_n(x)\}$ zbiega jednostajnie w przedziale (a, b) do funkcji $f(x)$, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$, znajdziemy w naszym ciągu taką funkcję $f_N(x)$, że począwszy od niej, wszystkie następne różnią się od $f(x)$ o mniej niż ε, t. zn.

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad n > N.$$

Przykłady. 1) Ciąg $\left\{\frac{\sin n x}{n}\right\}$ zdąża jednostajnie do zera. Mamy bowiem $\left|0 - \frac{\sin n x}{n}\right| < \frac{1}{n}$; zatem dla $n > \frac{1}{\varepsilon}$ mamy $\left|0 - \frac{\sin n x}{n}\right| < \varepsilon$.

Uwaga. Oczywistą jest rzeczą, że ciąg funkcyj jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $f(x)$ jest również zbieżny w poprzednio przyjętem znaczeniu. Nie możemy jednak twierdzić odwrotnie.

Weźmy bowiem pod uwagę ciąg:

$$f_n(x) = x^n \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Ciąg ten jest zbieżny w przedziale $(0, 1)$ do funkcji $f(x)$, określonej następująco:

$$f(x) = 0 \qquad \text{dla } 0 \leqslant x < 1$$
$$f(x) = 1 \qquad \text{dla } x = 1.$$

Zauważmy jednak, że obierając sobie dowolną dodatnią liczbę $\varepsilon < 1$ i dowolną funkcję naszego ciągu $f_n(x) = x^n$, mamy równość:

$$f_n(\sqrt[n]{\varepsilon}) = \varepsilon,$$

a więc $$|f_n(x) - f(x)| = \varepsilon,$$

dla $x = \sqrt[n]{\varepsilon}$. A zatem żadna funkcja ciągu nie różni się od $f(x)$ o mniej niż ε, ciąg więc nie jest jednostajnie zbieżny do $f(x)$.

14. Działania na jednostajnie zbieżnych ciągach funkcyj. Warunek konieczny i wystarczający jednostajnej zbieżności. Porównując definicję zbieżności ciągów z definicją jednostajnej zbieżności ciągów funkcyj, widzimy, że ta ostatnia jest naturalnem uogólnieniem pierwszej.

Bardzo też wiele twierdzeń z teorji ciągów liczb da się z łatwością uogólnić na jednostajnie zbieżne ciągi funkcyj.

1) Jeżeli ciągi funkcyj: $\{f_n(x)\}$ i $\{\varphi_n(x)\}$ zbiegają jednostajnie w (a, b) odpowiednio do $f(x)$ i $\varphi(x)$, wówczas:

1. ciąg $\{f_n(x) + \varphi_n(x)\}$ zbiega jednostajnie do $f(x) + \varphi(x)$;

2. ciąg $\{f_n(x) \,.\, \varphi_n(x)\}$ zbiega jednostajnie do $f(x) \,.\, \varphi(x)$;

3. Jeżeli istnieje liczba $\alpha > 0$ taka, że dla każdego x przedziału (a, b)

$$|\varphi_n(x)| > \alpha,$$

to ciąg

$$\left\{\frac{f_n(x)}{\varphi_n(x)}\right\} \text{ zbiega jednostajnie do } \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

2) Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby ciąg funkcyj $\{f_n(x)\}$ był zbieżny jednostajnie do jakiejś funkcji jest, by do każdej liczby $\varepsilon > 0$ wyznaczyć można było w ciągu taką funkcję $f_N(x)$, żeby jakiekolwiek dwie następne różniły się od siebie w przedziale (a, b) o mniej niż ε, t. zn.:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \qquad \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b, \; p, q > N.$$

Warunek ten jest koniecznym, bo zakładając, że ciąg $\{f_n(x)\}$ zbiega jednostajnie do $f(x)$ w (a, b) możemy (na mocy definicji jednostajnej zbieżności), obierając sobie dowolną liczbę $\varepsilon' > 0$, wyznaczyć taką funkcję w ciągu $f_N(x)$, że:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon' \quad \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b,\ n > N \qquad (1)$$

Biorąc więc dwie dowolne funkcje $f_p(x)$ i $f_q(x)$ występujące w ciągu po $f_N(x)$ mamy:

$$|f_p(x) - f_q(x)| = |(f_p(x) - f(x) + f(x) - f_q(x))| \leqslant$$
$$\leqslant |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)|.$$

Stąd na mocy (1) mamy:

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant 2\varepsilon' \quad \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b,\ p, q > N \qquad (2)$$

Kładąc teraz $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, widzimy, że warunek nasz jest warunkiem koniecznym.

Jest on też dostateczny. Załóżmy, że ciąg nasz spełnia ten warunek. Wówczas, jak łatwo widać, ciąg ten jest zbieżny dla każdego $a \leqslant x \leqslant b$; wynika to bezpośrednio z twierdzenia Cauchy'ego o ciągach.

Połóżmy:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Niechaj ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Na mocy hipotezy istnieje w ciągu taka funkcja $f_N(x)$, że:

$$|f_p(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b,\ p > N,\ n > N \qquad (3)$$

lecz

$$\lim_{p \to \infty} |f_p(x) - f_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

więc na mocy (3)

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b,\ n > N.$$

Widzimy więc, że ciąg $\{f_n(x)\}$ jest jednostajnie zbieżny.

15. Twierdzenie. Jednostajnie zbieżny ciąg funkcyj ciągłych zbiega do funkcji ciągłej.

D o w ó d. Przypuśćmy, że ciąg $\{f_n(x)\}$ funkcyj ciągłych w przedziale (a, b) zbiega w tym przedziale jednostajnie do funkcji $f(x)$. Obierzmy sobie dowolną liczbę $\varepsilon' > 0$. Na mocy założenia istnieje w ciągu funkcja $f_n(x)$ różniąca się od $f(x)$ o mniej niż ε', t. zn.:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon' \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1}$$

Niechaj x_0 będzie dowolnym punktem wewnętrznym przedziału (a, b). Ponieważ $f_n(x)$ jest wedle założenia funkcją ciągłą, więc istnieje takie otoczenie punktu x_0, że dla każdego punktu x' tego otoczenia zachodzi nierówność:

$$|f_n(x') - f_n(x_0)| < \varepsilon'. \tag{2}$$

Lecz:

$$|f(x') - f(x_0)| =$$
$$= |f(x') - f_n(x') + f_n(x') - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

stąd

$$|f(x') - f(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Na mocy (1) i (2) jest więc

$$|f(x') - f(x_0)| < \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' = 3\varepsilon'.$$

Kładąc: $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$ widzimy, że dla każdego punktu x' pewnego otoczenia punktu x_0, mamy:

$$|f(x') - f(x_0)| < \varepsilon,$$

a więc funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $x = x_0$. Podobnie udowadniamy ciągłość dla $x = a$ i $x = b$. Funkcja $f(x)$ jest więc w przedziale (a, b) ciągła.

Uwaga. Łatwo można okazać, że ciąg funkcyj ciągłych, zbieżny (nie jednostajnie) nie musi zbiegać do funkcji ciągłej: Kładąc $f_n(x) = x^n$, widzimy, że:

$$\lim_{n \to \infty} x^n = 0 \qquad \text{dla } 0 \leqslant x < 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} x^n = 1 \qquad \text{dla } x = 1.$$

Funkcja graniczna nie jest więc ciągła dla $x = 1$.

16. Jednostajna zbieżność szeregów. Pojęcie jednostajnej zbieżności ciągu funkcyj łatwo można uogólnić na szeregi funkcyj. — Powiadamy, że szereg funkcyj $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale (a, b), jeżeli odpowiedni ciąg $\{s_n(x)\}$ sum częściowych jest w tym przedziale jednostajnie zbieżny.

Aby zbadać czy dany szereg funkcyj jest jednostajnie zbieżny, co jest często rzeczą bardzo ważną, wystarcza w wielu wypadkach następujące twierdzenie:

Jeżeli mamy dany szereg funkcyj $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych, i jeżeli począwszy od pewnej funkcji $f_N(x)$ mamy zawsze:

$$|f_n(x)| \leqslant a_n \qquad \text{dla } n > N,\ a \leqslant x \leqslant b,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest w przedziale (a, b) jednostajnie zbieżny.

Dowód. Zauważmy, że jeżeli $p > q > N$, to kładąc:

$$s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x),$$

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n,$$

mamy:

$$| s_p(x) - s_q(x) | = | f_{q+1}(x) + f_{q+2}(x) + \ldots + f_p(x) |$$

a więc:

$$| s_p(x) - s_q(x) | \leqslant | f_{q+1}(x) | + | f_{q+2}(x) | + \ldots + | f_p(x) |.$$

Zatem na mocy założenia:

$$| s_p(x) - s_q(x) | \leqslant a_{q+1} + a_{q+2} + \ldots + a_p,$$

czyli:

$$| s_p(x) - s_q(x) | \leqslant s_p - s_q \quad \text{dla } a \leqslant x \leqslant b,\ p > q > N \quad (1)$$

Ponieważ założyliśmy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, czyli ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny, więc możemy na mocy twierdzenia Cauchy'ego wyznaczyć taki wskaźnik N', że jeżeli $p > N'$ i $q > N'$, to

$$s_p - s_q < \varepsilon. \qquad (2)$$

Obierając teraz dowolną liczbę N'' większą równocześnie od N i N', mamy na mocy (1) i (2)

$$| s_p(x) - s_q(x) | < \varepsilon \quad \text{dla } a \leqslant x \leqslant b,\ p > q > N''.$$

Zatem ciąg $\{s_n(x)\}$, a więc i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny.

Przykład. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ jest w przedziale $(-h, h)$ jednostajnie zbieżny, pod warunkiem, że $| h | < 1$.

Mamy bowiem $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leqslant \frac{|h|^n}{n} \leqslant |h|^n$; szereg zaś geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} |h|^n$ jest zbieżny.

17. Zbieżność bezwzględnie jednostajna szeregów funkcyj. Powiadamy, że szereg funkcyj $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie bezwzględnie (absolutnie) zbieżny w przedziale (a, b), jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest jednostajnie zbieżny w tym przedziale. Łatwo widać, że jeżeli szereg jest jednostajnie absolutnie zbieżny to jest i jednostajnie zbieżny. Twierdzenie odwrotne nie jest jednak prawdziwe.

18. Różniczkowanie ciągów i szeregów. Jeżeli funkcje ciągu $\{f_n(x)\}$ są ciągłe i mają pierwsze pochodne ciągłe w przedziale (a, b) i jeżeli ciągi $\{f_n(x)\}$ i $\{f'_n(x)\}$ są w tym przedziale jednostajnie zbieżne, wówczas, kładąc

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

możemy twierdzić, że funkcja $f(x)$ posiada pochodną i że

$$\lim_{n \to \infty} f'_n(x) = f'(x).$$

D o w ó d. Połóżmy

$$\lim_{n \to \infty} f'_n(x) = \varphi(x).$$

Niechaj x_0 będzie dowolnym punktem wewnętrznym przedziału (a, b).

Opierając się na twierdzeniu o wartości średniej, możemy napisać:

$$\left|\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}-\varphi(x_0)\right|=|f_n'(x_0+\vartheta h)-\varphi(x_0)|=$$
$$=|f'_n(x_0+\vartheta h)-\varphi(x_0+\vartheta h)+\varphi(x_0+\vartheta h)-\varphi(x_0)|\leqslant$$
$$\leqslant|f'_n(x_0+\vartheta h)-\varphi(x_0+\vartheta h)|+|\varphi(x_0+\vartheta h)-\varphi(x_0)| \quad (1)$$

Niechaj ε będzie dowolną liczbą dodatnią.

Ponieważ ciąg $\{f'_n(x)\}$ zbiega jednostajnie do $\varphi(x)$, zatem istnieje taki wskaźnik N, że dla każdego $n>N$ i każdego x zachodzi nierówność

$$|f'_n(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Wynika stąd, że dla $n>N$ i każdego h, mamy

$$|f'_n(x_0+\vartheta h)-\varphi(x_0+\vartheta h)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad (2)$$

Ponieważ funkcja $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą, gdyż jest granicą ciągu jednostajnie zbieżnego funkcyj ciągłych, zatem istnieje taka liczba $\eta>0$, że dla każdego x', spełniającego nierówność $|x-x_0|<\eta$ mamy

$$|\varphi(x')-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Jeżeli więc $|h|<\eta$, to z uwagi na to, że $0<\theta<1$, możemy napisać

$$|\varphi(x_0+\vartheta h)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ze związków (1), (2), (3) wynika nierówność:

$$\left|\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}-\varphi(x_0)\right|<\varepsilon, \quad . \quad . \quad (4)$$

dla każdego $n>N$ i $|h|<\eta$.

Jeżeli założymy, że n dąży do nieskończoności, to z nierówności (4) otrzymujemy nierówność

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\varphi(x_0)\right| \leqslant \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Udowodniliśmy więc, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$ dobierzemy takie $\eta > 0$, że dla każdego $0 < |h| < \eta$ spełniona będzie nierówność (5). Możemy więc napisać

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \varphi(x_0) \quad \text{czyli}$$

$$f'(x_0) = \varphi(x_0).$$

Podobnie przedstawia się dowód dla $x_0 = a$ lub $x_0 = b$.

U w a g a 1. Jeśli ciąg pochodnych nie jest zbieżny jednostajnie, wówczas twierdzenie nie musi być prawdziwe. Np. ciąg $\left\{\frac{\sin n x}{n}\right\}$ zdąża jednostajnie do zera, ciąg zaś pochodnych $\{\cos n x\}$ nie zdąża do zera, bo np. dla $x = 0$ otrzymujemy jako granicę 1.

U w a g a 2. Analogiczne twierdzenie można wygłosić dla szeregów. Jeżeli funkcje $\{u_n(x)\}$ są ciągłe i mają pochodne ciągłe w (a, b), jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ i $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ są jednostajnie zbieżne, wówczas kładąc:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

mamy

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

19. Szeregi potęgowe. Szeregiem potęgowym nazywamy szereg kształtu: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jest to więc szereg funkcyj o wyrazach:

$$f_n(x) = a_n x^n.$$

Przykłady. 1) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

2) $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + \ldots$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Twierdzenie. Jeżeli szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla $x = R \neq 0$, to w każdym przedziale zamkniętym, położonym wewnątrz przedziału $(-R, R)$, jest bezwzględnie jednostajnie zbieżny.

Dowód. Weźmy pod uwagę przedział zamknięty $(-h, h)$ $(h > 0)$ położony wewnątrz przedziału $(-R, R)$. Niechaj x będzie dowolnym punktem przedziału $(-h, h)$, a zatem $|x| \leqslant h$. Zauważmy, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ jest szeregiem zbieżnym, więc $\lim\limits_{n \to \infty} a_n R^n = 0$, a zatem ciąg $\{a_n R^n\}$ jako ciąg zbieżny jest ograniczony. Istnieje więc liczba $M > 0$ taka, że dla każdego n mamy:

$$|a_n R^n| < M.$$

Ponieważ $a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$, więc

$$|a_n x^n| = |a_n R^n| \left|\frac{x}{R}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x}{R}\right|^n. \tag{1}$$

Ponieważ $0 < h < |R|$, więc szereg geometryczny $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{h}{R}\right|^n$ jest szeregiem zbieżnym, a zatem szereg

$\sum\limits_{n=0} |a_n x^n|$ jest jednostajnie zbieżny dla $|x| \leqslant h$, gdyż wyrazy jego na mocy (1) są mniejsze co do modułu od odpowiednich wyrazów szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{h}{R}\right|^n$, a to na mocy twierdzenia str. 219 wystarcza do stwierdzenia jednostajnej zbieżności.

20. Promień zbieżności szeregu potęgowego. Z twierdzenia poprzednio udowodnionego wynika, że, jeżeli dla pewnego $x = L$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest rozbieżny, to dla każdego x takiego, że $|x| > |L|$, szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest rozbieżny. Stąd na podstawie teorji liczb niewymiernych wynika, że jeżeli szereg nie est zbieżny dla wszystkich x, to zbiór wartości x, dla których szereg jest zbieżny, jest przedziałem o środku w punkcie $x = 0$.

Oznaczając przez R prawy koniec tego przedziału widzimy, że jeżeli $|x| < R$, szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny, a jeżeli $|x| > R$, szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest rozbieżny.

Można więc wypowiedzieć następujące twierdzenia: Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nie jest zbieżny dla wszystkich wartości na x, to istnieje liczba $R \geqslant 0$ taka, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny względnie rozbieżny, zależnie od tego, czy $|x| < R$, czy $|x| > R$.

Dla $x = \pm R$ szereg może być zbieżny lub rozbieżny.

Liczbę R nazywamy promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest zawsze zbieżny, to powiadamy, że jego promień zbieżności jest $+\infty$.

19. Ciągłość sumy szeregu potęgowego. Ponieważ szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżnym, w każdym przedziale zamkniętym, położonym całkowicie wewnątrz przedziału $(-R, R)$, więc:

Suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą dla wszystkich wartości na x mniejszych co do modułu od promienia zbieżności.

U w a g a. Jeżeli szereg potęgowy jest wszędzie zbieżny, to suma jego jest funkcją wszędzie ciągłą.

20. Wyznaczanie promienia zbieżności. Do wyznaczania promieni zbieżności wystarczają często następujące dwa twierdzenia:

1. Jeżeli istnieje $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$, to promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest $R = \frac{1}{g}$ dla $g \neq 0$. Dla $g = 0$, $R = +\infty$.

2. Jeżeli istnieje $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$, to promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest $R = \frac{1}{g}$ dla $g \neq 0$. Dla $g = 0$, $R = +\infty$.

Dowód twierdzenia pierwszego wynika odrazu z kryterjum Cauchy'ego (str. 209). W rzeczy samej

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = g|x|;$$

szereg: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ jest więc zbieżny, gdy $g|x| < 1$

$\left(\text{a więc dla } |x| < \frac{1}{g}\right)$ rozbieżny, gdy $g|x| > 1$ $\left(\text{a więc dla } |x| > \frac{1}{g}\right)$. Widzimy zatem, że $\frac{1}{g}$ jest promieniem zbieżności. Gdy $g = 0$, to $g|x| = 0 < 1$, a więc szereg jest zawsze zbieżny.

Podobnie, opierając się na kryterjum d'Alemberta (str. 212) można udowodnić twierdzenie 2.

21. Różniczkowanie szeregu potęgowego. Różniczkując wyraz po wyrazie szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, otrzymujemy nowy szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Otóż można udowodnić, że promienie zbieżności obu szeregów są równe i nadto, że suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ jest pochodną sumy szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ dla wszystkich wartości na x mniejszych co do modułu od promienia zbieżności.

To samo odnosi się oczywiście do szeregów otrzymanych przez dalsze różniczkowanie.

Dowód. Załóżmy, że R jest promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Niechaj
$$0 < |x| < R.$$

Obierzmy dowolną liczbę α, spełniającą nierówność
$$|x| < \alpha < R.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, zatem istnieje takie N, że dla każdego $n > N$
$$\sqrt[n]{n} < \frac{\alpha}{|x|},$$

zatem

$$|a_n|\,|\sqrt[n]{n}\,x|^n \leqslant |a_n|\,\alpha^n.$$

Ponieważ wyrazy szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\,|\sqrt[n]{n}\,x|^n$ są niewiększe od wyrazów szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\,\alpha^n$ [1]), więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^n$ jest bezwzględnie zbieżnym. Dzieląc ten szereg przez x, widzimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$ jest również bezwzględnie zbieżnym dla każdego $|x| < R$.

Załóżmy teraz, że $|x| > R$. Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\,|x|^n$ jest szeregiem rozbieżnym, a wyrazy jego są mniejsze od wyrazów szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n|\,|x^n|$, więc ten ostatni szereg jest także rozbieżny. Wynika stąd, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n|\,|x^{n-1}|$ jest szeregiem rozbieżnym dla $|x| > R$. A więc R jest również promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$.

Jeżeli $0 < r < R$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$ jest w przedziale $(-r, r)$ szeregiem jednostajnie zbieżnym, zatem na mocy twierdzenia o różniczkowaniu szeregów (str. 221) przedstawia pochodną sumy szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ponieważ r może być dowolną liczbą dodatnią byleby mniejszą od R, więc suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

---

[1]) Szereg jest zbieżny bo $0 < \alpha < R$.

ma wewnątrz przedziału $(-R, R)$ wszędzie pochodną, która jest sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Przykład:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}, \ |x| < 1.$$

zatem

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + n x^{n-1} + ... = \frac{1}{(1-x)^2}, \ |x| < 1,$$

$$2 + 3.2x + 4.3x^2 + ... + n(n-1)x^{n-2} + ... =$$
$$= \frac{2}{(1-x)^3}, \ |x| < 1.$$

22. Szereg Taylora. Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale zamkniętym (a, b) i posiadającą pochodne wszystkich rzędów, również ciągłe w tym przedziale. Oznaczając przez x_0, $x_0 + h$ dwa dowolne punkty przedziału (a, b), a przez n dowolną liczbę naturalną, mamy wedle wzoru Taylora (str. 162):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) +$$
$$+ R_n(x_0, h),$$

przyczem:

$$R_n(x_0, h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h) =$$
$$= \frac{h^n}{(n-1)!} (1 - \theta')^{n-1} f^{(n)}(x_0 + \theta' h).$$
$$0 < \theta < 1, \qquad 0 < \theta' < 1,$$

Może się zdarzyć, że gdy n rośnie nieograniczenie, wyrażenie $R_n(x_0, h)$ zmierza do zera, t. j. że:

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x_0, h) = 0.$$

W tym wypadku szereg nieskończony:

$$f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\ldots$$

jest zbieżny do granicy $f(x_0+h)$. Mamy więc:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\ldots$$

Szereg po prawej stronie nazywamy szeregiem Taylora. Udowodniliśmy więc:

Twierdzenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ i jej pochodne wszystkich rzędów są ciągłe w przedziale zamkniętym (a, b), to, oznaczając przez x_0, x_0+h dwa dowolne punkty tego przedziału, mamy:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\ldots=$$
$$=f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}f^{(n}(x_0),$$

przy założeniu, że reszta wzoru Taylora $R_n(x_0, h)$ zmierza do zera, gdy n rośnie nieograniczenie.

Uwaga. Jeżeli przedział (a, b) zawiera punkt $x=0$, to zastępując w szeregu Taylor'a x_0 przez 0, a h przez x, otrzymujemy:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots=$$
$$=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0),$$

przy założeniu, że: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(0, x)=0$.

Jest to t. zw. szereg Maclaurina.

Twierdzenie powyższe ma znaczenie podstawowe.

Pozwala ono rozwinąć funkcję $f(x)$ w szereg potęgowy, jeśli reszta $R_n(x_0, h)$ zmierza do zera.

W szczególności reszta zmierza do zera, gdy pochodne funkcji $f(x)$ są wspólnie ograniczone w przedziale (a, b), t. j. gdy $|f^{(n)}(x)| < M$, przy każdem naturalnem n i każdem x należącem do tego przedziału. Istotnie mamy wówczas

$$|R_n(x_0, h)| = \left|\frac{h^n}{n!} f^{(n}(x + \theta h)\right| < M \frac{|h|^n}{n!},$$

a ponieważ:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|h|^n}{n!} = 0 \qquad \text{(por. str. 40)},$$

więc

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x_0, h) = 0.$$

Przykłady:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

dla każdego x.

2. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

dla każdego x.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

dla każdego x.

4. $\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots$

dla $-1 < x \leqslant +1$.

5. $(1 + x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \ldots + \binom{p}{n} x^n + \ldots$

dla $|x| < 1$ i dowolnego p.

Dowód. 1. Funkcja e^x jest ciągła w przedziale zamkniętym $(-A, +A)$, (A dowolna liczba dodatnia), jak również jej pochodne wszystkich rzędów, które są z nią identyczne. A więc wszystkie pochodne są wspólnie ograniczone, mianowicie $|f^{(n)}(x)| \leqslant e^A$ przy każdem naturalnem n i każdem x z przedziału $(-A, +A)$. Zatem wedle poprzedniej uwagi szereg Taylora jest zbieżny dla $-A \leqslant x \leqslant +A$, czyli przy każdem x, gdyż A jest liczbą dowolną.

2., 3. To samo odnosi się do funkcyj $\sin x$, $\cos x$, ponieważ ich pochodne wszystkich rzędów są ciągłe i nie większe, co do modułu, od jedności.

4. Funkcja $\log(1+x)$ jest ciągła w każdym przedziale zamkniętym, nie zawierającym punktu $x = -1$, jak również jej pochodne wszystkich rzędów. Na resztę wzoru Maclaurina otrzymaliśmy (str. 168) wzór:

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n} = (-1)^{n+1} \frac{(1-\theta')^{n-1}}{(1+\theta' x)^n} x^n,$$

przyczem $\quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta' < 1.$

Zakładając, że $0 \leqslant x \leqslant 1$, mamy:

$$|R_n(x)| = \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n} \leqslant \frac{1}{n},$$

a więc

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Jeżeli zaś $-\varepsilon \leqslant x \leqslant 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$, to kładąc $-x = u$, mamy:

$$|R_n(x)| = \frac{(1-\theta')^{n-1}}{(1+\theta' x)^n} |x^n| = \frac{(1-\theta')^{n-1}}{(1-\theta' u)^n} u^n =$$
$$= \left(\frac{1-\theta'}{1-\theta' u}\right)^{n-1} \frac{u^n}{1-\theta' u}.$$

Ponieważ $\quad 0 \leqslant \theta' u \leqslant \theta' < 1,$

więc $\quad 0 < 1 - \theta' \leqslant 1 - \theta' u, \quad$ zatem $\quad 0 < \dfrac{1-\theta'}{1-\theta' u} \leqslant 1.$

Z tych nierówności otrzymujemy:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{u^n}{1-\theta' u} \leqslant \frac{u^n}{1-u} \leqslant \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}.$$

Ponieważ $0 < \varepsilon < 1$, więc $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon^n = 0$ a zatem i $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.

Ponieważ ε jest dowolną liczbę dodatnią mniejszą od jedności, więc udowodniliśmy prawdziwość wzoru Maclaurina dla $-1 < x \leqslant 1$.

Dla $x = -1$ otrzymalibyśmy szereg:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots,$$

jak wiadomo rozbieżny (por. str. 198).

5. Funkcja $(1+x)^p$ jest ciągła w każdym przedziale zamkniętym, nie zawierającym punktu $x = -1$, jak również jej pochodne wszystkich rzędów.

Na resztę wzoru Maclaurina otrzymaliśmy (str. 168):

$$R_n(x) = \binom{p}{n} (1+\theta x)^{p-n} . x^n =$$
$$= \binom{p}{n} n (1-\theta')^{n-1} (1+\theta' x)^{p-n} . x^n,$$
$$0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta' < 1.$$

Jeżeli: $0 \leqslant x < \varepsilon < 1$, to korzystając z pierwszej formy reszty, otrzymujemy:

$$R_n(x) = \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{1.2. \dots n} \cdot \frac{x^n}{(1+\theta x)^{n-p}},$$

a więc, dla $n > p$

$$|R_n(x)| \leqslant \left|\frac{px}{1}\right| . \left|\frac{(p-1)x}{2}\right| \dots . \left|\frac{(p-n+1)x}{n}\right|.$$

Ponieważ:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(p-k)\,x}{k} = -x,$$

więc

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{(p-k)\,x}{k} \right| = x < \varepsilon.$$

Istnieje więc takie K, że dla $k > K$ mamy:

$$\left| \frac{(p-k)x}{k} \right| < \varepsilon.$$

Zakładając, że $n > p$ i $n > K$, otrzymujemy:

$$|\, R_n(x) \,| \leqslant \left| \frac{p\,x}{1} \right| . \left| \frac{(p-1)\,x}{2} \right| . \ldots \left| \frac{(p-K)\,x}{K} \right| \varepsilon^{n-K-1},$$

a ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon^{n-K-1} = 0,$$

więc

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Jeżeli $-\varepsilon < x \leqslant 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$, to kładąc $x = -u$ i korzystając, z drugiej formy reszty, otrzymamy:

$$R_n(x) = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.\,2.\,\ldots\,(n-1)} (1-\theta')^{n-1} (1+\theta' x)^{p-n}\, x^n,$$

czyli:
$$R_n(x) =$$
$$= \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.\,2.\,\ldots\,(n-1)} \left(\frac{1-\theta'}{1-\theta' u} \right)^{n-1} (1-\theta' u)^{p-1} (-u)^n,$$

a stąd $|\, R_n(x) \,| = |\, pu \,| \left| \frac{(p-1)\,u}{1} \right| . \left| \frac{(p-2)\,u}{2} \right| . \ldots$

$$\ldots . \left| \frac{(p-n+1)\,u}{n-1} \right| (1-\theta' u)^{p-1} \left(\frac{1-\theta'}{1-\theta' u} \right)^{n-1}.$$

Ponieważ $(1-\theta' u)^{p-1}$ jest zawarte między 1 a $(1-\varepsilon)^{p-1}$, zaś $\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta' u}\right)^{n-1}$ jest, jak wiemy, nie większe od jedności (por. str. 232), więc wystarczy okazać, że:

$$\lim_{n\to\infty} |pu| \left|\frac{(p-1)u}{1}\right| . \left|\frac{(p-2)u}{2}\right| . \dots . \left|\frac{(p-n+1)u}{n-1}\right| = 0.$$

Dowodzi się tego podobnie jak poprzednio.

Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią mniejszą od jedności, więc udowodniliśmy prawdziwość wzoru Maclaurina dla $-1 < x < 1$.

U w a g a. Jako zastosowanie ostatniego rozwinięcia otrzymujemy szeregi:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} . \frac{x^2}{4} + \frac{1.3}{2.4} . \frac{x^3}{6} - \dots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2.4} x^2 - \frac{1.3}{2.4.6} x^3 + \dots$$

zbieżne dla $-1 < x < 1$.

Z a d a n i a:

1. Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

$$\sin^2 x = \frac{(2x)^2}{2.2!} - \frac{(2x)^4}{2.4!} + \dots (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n}}{2.n!} + \dots$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$(1+e^x)^2 = 4 + (2+2)\frac{x}{1!} + \dots + (2+2^n)\frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$(1+x^2)^{-} = 1 - x^2 + x^4 \dots \dots (-1)^n x^{2n} + \dots \qquad |x|<1$$

$$arc\,tg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \text{ [1]} \qquad |x|<1$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{x^6}{6} - \dots \qquad |x|<1$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6 + \dots \quad |x|<1$$

$$arc\,sin\,x =$$

$$= x + \frac{1}{2\,.\,3}x^3 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,.\,\frac{x^7}{7} + \dots \text{ [1]} \qquad |x|<1$$

2. Funkcja $tg\,x$ ma rozwinięcie zbieżne dla $\frac{\pi}{2} < |x| < \frac{\pi}{2}$:

$$tg\,x = \frac{B_1\,2^2\,(2^2-1)}{2!}x + \frac{B_3\,2^4\,(2^4-1)}{4!}x^3 + \dots +$$
$$+ B_{2n-1}\frac{2^{2n}\,(2^{2n}-1)}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots$$

Wyznaczyć stałe B_1, B_3, B_5 zwane liczbami Bernoulliego.

3. Wyprowadzić następujące rozwinięcia:

$$sin\,(x+h) = sin\,x + \frac{cos\,x}{1!}h - \frac{sin\,x}{2!}h^2 + \dots$$

$$cos\,(x+h) = cos\,x - \frac{sin\,x}{1!}h - \frac{cos\,x}{2!}h^2 + \dots$$

$$log\,(x+h) = log\,x + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3 + \dots \quad |h|<|x|$$

---

[1] Sprawdź przez różniczkowanie szeregu.

4. Jeżeli mamy rozwiązać równanie $f(x) = 0$, to oznaczając przez x_0 przybliżoną wartość pierwiastka (otrzymaną np. przez próbę), a przez $x_0 + h$ szukany pierwiastek, mamy:

$$0 = f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \dots$$

Jeżeli h jest dość małe, to opuszczając wyrazy zawierające h^2, h^3 i t. d., otrzymujemy

$$0 = f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0),$$

stąd
$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Nową więc wartością przybliżoną szukanego pierwiastka jest

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Przy pomocy otrzymanej wartości przybliżonej, możemy, postępując jak poprzednio, obliczyć nową wartość przybliżoną i t. d. Powyższa metoda została podana przez Newtona.

Rozwiązać w ten sposób równania:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\sin x = x$$

$$\log x = x.$$

ROZDZIAŁ VIII.

Funkcje dwu zmiennych.

1. Zbiory płaskie. Obszary. Zbiór punktów nazywa się zbiorem płaskim, jeżeli punkty tego zbioru leżą na jednej płaszczyźnie.

Zbiór płaski nazywamy ograniczonym, jeżeli istnieje koło, zawierające go w swem wnętrzu. Odcinek, trójkąt i t. p. są zbiorami ograniczonemi. Linja prosta nie jest zbiorem ograniczonym.

Otoczeniem punktu P nazywamy wnętrze każdego koła o środku P. Jeżeli jakiś punkt danego zbioru ma tę własność, że istnieje pewne jego otoczenie całkowicie należące do zbioru, to punkt ten nazywamy punktem wewnętrznym danego zbioru. — Zbiór złożony z samych punktów wewnętrznych nazywa się obszarem otwartym, lub krótko obszarem. Najprostszemi obszarami są: wnętrze trójkąta, wieloboku, koła, elipsy i t. p.

Obszar nazywa się obszarem spójnym, jeżeli dwa dowolne jego punkty dadzą się połączyć linją łamaną[1]), całkowicie leżącą w danym obszarze. — Obszarami spój-

---

[1]) Jeżeli na płaszczyźnie mamy daną skończoną liczbę punktów A_1, A_2, A_3, ... A_n, to zbiór odcinków: $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ... $A_{n-1} A_n$, nazywamy linją łamaną, łączącą punkty A_1 i A_n.

nemi są obszary wyżej wymienione; natomiast obszar, złożony z wnętrz 2 kół nie mających punktów wspólnych, jest niespójny. Obszarem niespójnym jest również zbiór, który otrzymamy, wyrzucając z koła obwód i jedną średnicę.

2. Punkty brzegowe. Obszary domknięte. Punkt, nie należący do obszaru, nazywa się punktem brzegowym, jeżeli w każdem jego otoczeniu istnieją punkty, należące do obszaru. Zbiór wszystkich punktów brzegowych obszaru nazywa się brzegiem obszaru. Brzegami wnętrz wieloboków, koła, elipsy i t. d. są ich obwody.

Zbiór, utworzony przez obszar wraz z brzegiem, nazywamy obszarem domkniętym.

3. Obszary określone przez nierówności. Często spotykamy obszary określone w następujący sposób:

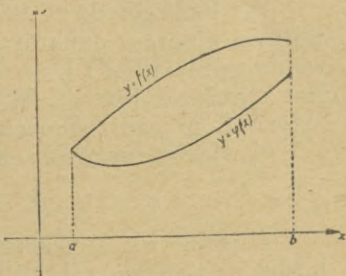
Przypuśćmy, że mamy dane dwie funkcje, określone i ciągłe, w przedziale zamkniętym (a, b)

$$y = f(x) \qquad y = \varphi(x).$$

Załóżmy nadto, że:

$$\varphi(x) < f(x) \quad \text{dla } a < x < b,$$

t. zn., że obraz funkcji $f(x)$ znajduje się stale nad obrazem funkcji $\varphi(x)$ (z wyjątkiem być może końców przedziału, w których ewentualnie $f(x) = \varphi(x)$).



Rys. 35.

Zbiór punktów (x, y) spełniających nierówność

$$a < x < b,$$

$$\varphi(x) < y < f(x)$$

tworzy obszar spójny, którego brzeg tworzą obrazy funkcyj $f(x)$ i $\varphi(x)$ i odcinki prostolinijne, łączące odpowiednie końce tych krzywych. Oczywiście w niektórych wypadkach odcinki te mogą redukować się do punktów.

Zadanie: Wyznaczyć obszary określone nierównościami:

1) $-1 < x < 1 \quad -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}$
2) $0 < x < 1 \quad x^3 < y < x^2+1$
3) $1 < x < 3 \quad 3-\sqrt{4x-x^2-3} < y < 3+\sqrt{4x-x^2-3}$
4) $-1 < x < 1 \quad 0 < y < 1-|x|$
5) $0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, |x-y| > \frac{1}{2}$.

Uwaga. Bardzo często będziemy się spotykać z obszarem domkniętym określonym nierównościami:

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad a' \leqslant y \leqslant b'.$$

Jest to oczywiście prostokąt o wierzchołkach $(a\ a')$, $(a\ b')$, (b, a'), (b, b').

4. Funkcje dwu zmiennych. Niech E będzie dowolnym zbiorem punktów, leżących w płaszczyźnie osi współrzędnych (XY). — Powiadamy, że w zbiorze E jest określona funkcja, jeżeli każdemu punktowi (x, y) zbioru E przyporządkowana jest liczba rzeczywista z.

Związek funkcyjny oznaczamy jak poprzednio

$$z = f(x, y), \qquad z = \varphi(x, y) \quad \text{i t. p.}$$

Liczby x, y nazywamy zmiennemi niezależnemi, liczbę z, zmienną zależną; o funkcji $f(x, y)$ mówić będziemy, że jest funkcją dwu zmiennych niezależnych x, y, określoną w zbiorże E. Zbiorem E jest zwykle obszar otwarty, lub obszar domknięty.

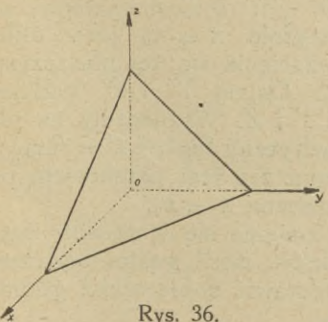
Przykłady funkcyj dwu zmiennych:

1. $z = x^2 + y^2$ dla wszystkich x, y.
2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ dla $x^2 + y^2 \leqslant 1$.
3. $z = \dfrac{1}{(x-1)(y-2)}$ dla $0 < x < 1$, $1 < y < 2$.

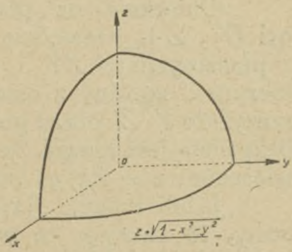
Jeżeli funkcja $f(x, y)$ określona jest tylko wzorem, to milcząco przyjmujemy, że zbiór E obejmuje te i tylko te punkty (x, y), dla których wzór określa wartość funkcji.

5. Geometryczne przedstawienie funkcyj dwu zmiennych. Obierzmy w przestrzeni układ współrzędnych XYZ. Obrazem funkcji $z = f(x, y)$, określonej w zbiorze E, nazywamy zbiór wszystkich punktów o współrzędnych (x, y, z), gdzie x i y są współrzędnemi punktów zbioru E, a $z = f(x, y)$.

Przykłady: 1. $z = 1 - x - y$ (rys. 36).



Rys. 36.



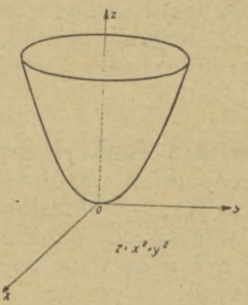
Rys. 37.

Obrazem geometrycznym jest płaszczyzna przechodząca przez punkty (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0).

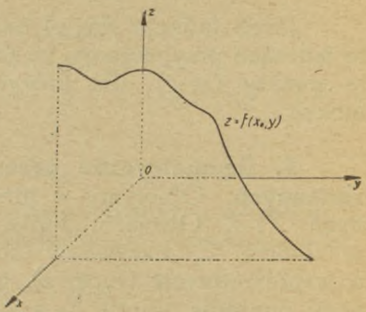
2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ dla $x^2 + y^2 \leqslant 1$ (półkula) (rys. 37).

3. $z = x^2 + y^2$ (paraboloida obrotowa) (rys. 38).

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest określona w prostokącie $a < x < b$, $a' < y < b'$, to kładąc $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$, możemy wyrażenie $z = f(x_0, y)$ uważać za funkcję jednej zmiennej y, określoną w przedziale (a', b').



Rys. 38.



Rys. 39.

Obierzmy na płaszczyźnie $x = x_0$ jako układ osi (Y', Z'), krawędzie przecięcia się tej płaszczyzny z płaszczyznami XY i XZ. Osiom Y' i Z' nadajmy kierunek zgodny z osiami Y i Z. Wyznaczmy na płaszczyźnie $Y'\,Z'$ obraz geometryczny funkcji $z' = f(x_0\,y')$; oczywistą jest rzeczą, że obraz ten jest przekrojem powierzchni $z = f(x, y)$ płaszczyzną $x = x_0$.

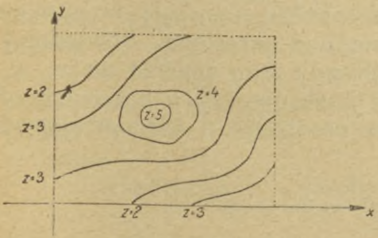
Jeżeli funkcja $f(x, y)$ zmienia się w sposób regularny, to tworząc te przekroje dość gęsto, będziemy mogli dość dokładnie przedstawić sobie obraz geometryczny funkcji $z = f(x, y)$.

Możemy także badać przekroje płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XZ. Oczywiście, nie jest konieczne założenie, że funkcja określona jest w prostokącie; podobnie można badać funkcje, określone w dowolnych zbiorach płaskich.

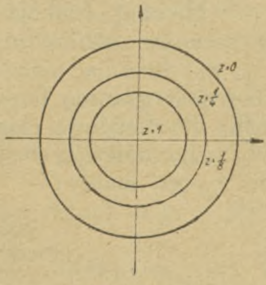
P r z y k ł a d y: Zbadać przekroje następujących powierzchni płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XZ i YZ:

1. $z = xy$ (przekroje są linjami prostemi).
2. $z = x^2 - y^2$ (przekroje są parabolami).
3. $z = xy^2$ (przekroje płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XZ są prostemi, przekroje zaś płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny YZ są parabolami).

6. Warstwice. Warstwicą powierzchni $z = f(x, y)$ nazywamy rzut na płaszczyznę (X, Y) przekroju tej powierzchni płaszczyzną równoległą do płaszczyzny poziomej. Innemi słowy: warstwicą nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y), w których funkcja przyjmuje tę samą wartość. — Kreśląc szereg warstwic i zaznaczając, jakie wartości funkcja na nich przyjmuje, otrzymujemy pewien mniej lub więcej dokładny pogląd na przebieg funkcji. (Rys 40.)



Rys. 40.



Rys. 41.

Z a d a n i a: Wyznaczyć warstwice powierzchni:

1. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Warstwice są kołami z wyjątkiem warstwicy $z = 1$, która redukuje się do punktu. (Rys. 41.)

2. $z = 3x^2 + 2y^2$ (elipsy współogniskowe).
3. $z = xy$ (hiperbole).

Granica i ciągłość funkcji.

7. Definicja granicy. Powiadamy, że ciąg punktów o współrzędnych $\{x_n, y_n\}$ zdąża do punktu (x_0, y_0), jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$.

Jeżeli przez d_n oznaczymy odległość punktu (x_n, y_n) od punktu (x_0, y_0), to ponieważ

$$d_n = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2},$$

więc

$$\lim_{n \to \infty} d_n = 0.$$

Naodwrót, jeśli $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = 0$, wówczas ciąg punktów $\{x_n, y_n\}$ zdąża do punktu x_0, y_0.

Niechaj funkcja $z = f(x, y)$ będzie określoną w pewnem otoczeniu k punktu (x_0, y_0); w punkcie (x_0, y_0) funkcja może nie być określoną. Powiadamy, że g jest granicą funkcji, gdy x, y zmierza do x_0, y_0, jeśli, dla każdego ciągu punktów $\{x_n, y_n\}$ różnych od (x_0, y_0), należących do otoczenia k i zmierzających do x_0, y_0, mamy:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = g.$$

Granicę oznaczamy:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = g.$$

Uwaga. Czytelnik łatwo domyśli się znaczenia symboli:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(xy) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(xy) = g; \quad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(xy) = +\infty \quad \text{i.t.p.}$$

Przykłady:

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (x^2 - y^2) = -3.$ 2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{1 - xy}{x^2 + y^2} = 1.$

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1}{x^2 + y^2} = +\infty.$ 4. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{1}{x^2 + y^2} = 0.$

8. Twierdzenia o granicach. Dla funkcyj dwóch zmiennych można udowodnić wiele twierdzeń analogicznych do twierdzeń, otrzymanych dla funkcyj jednej zmiennej. Dowody są podobne.

Twierdzenie. Warunkiem koniecznym i wystarczającym nato, by liczba g była granicą funkcji $z = f(x, y)$, gdy (x, y) zmierza do (x_0, y_0), jest to, by wartości funkcji w punktach dostatecznie bliskich punktowi (x_0, y_0) dowolnie mało się różniły od g; innemi słowy: by do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można było znaleźć takie otoczenie punktu (x_0, y_0), żeby wartość funkcji w dowolnym punkcie tego otoczenia (różnym jednak od (x_0, y_0)) różniła się od g o mniej niż ε.

Dla funkcyj dwóch zmiennych można udowodnić twierdzenia o granicy sumy, iloczynu i ilorazu, analogiczne do odpowiednich twierdzeń dla funkcyj jednej zmiennej.

Twierdzenie: Jeżeli $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = g$ i jeżeli $g > 0$, to istnieje takie otoczenie punktu (x_0, y_0), że w każdym jego punkcie (z wyjątkiem być może samego punktu (x_0, y_0)) zachodzi nierówność:

$$f(x, y) > \alpha > 0.$$

9. Ciągłość. Ciągłość jednostajna. Powiadamy, że funkcja $z = f(x, y)$ jest ciągłą w punkcie (x_0, y_0), jeżeli jest określoną w tym punkcie i w jego otoczeniu i jeżeli

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Przykłady: Funkcje $z = x + y$; $z = x^2 - y^2$ są funkcjami wszędzie ciągłemi.

Uwaga. Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ jest określoną w zbiorze E, to powiadamy, że jest w punkcie (x_0, y_0) zbioru E ciągłą ze względu na zbiór E, jeżeli dla każdego ciągu punktów $\{x_n, y_n\}$ należących do E, zbieżnego do (x_0, y_0), mamy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0).$$

Jeżeli funkcja jest ciągła w każdym punkcie zbioru E, ze względu na zbiór E, to powiadamy krótko, że jest ciągła w E.

Jeżeli więc np. funkcja jest ciągłą w obszarze domkniętym Ω, to w punktach wewnętrznych jest ciągłą w zwyczajnem znaczeniu, w punktach zaś brzegowych jest ciągłą ze względu na Ω.

Możemy wypowiedzieć definicje i twierdzenia, podobne do tych, jakie wygłosiliśmy dla funkcyj ciągłych jednej zmiennej, np. twierdzenia odnoszące się do ciągłości sumy, iloczynu i ilorazu dwóch funkcyj ciągłych.

a) Jeżeli założymy, że funkcja $f(x, y)$ jest określona w obszarze Ω i że punkt $(x_0\ y_0)$ należy do Ω, to warunkiem koniecznym i wystarczającym nato, by funkcja była w punkcie (x_0, y_0) ciągła ze względu na Ω jest to, by wartości funkcji dla punktów dostatecznie bliskich punktowi (x_0, y_0) (należących do Ω) dowolnie mało różniły się od wartości funkcji w punkcie (x_0, y_0); innemi słowy, by do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można było dobrać takie otoczenie punktu (x_0, y_0), by wartość funkcji w każdym punkcie tego otoczenia (należącym do Ω) różniły się od $f(x_0, y_0)$ o mniej niż ε.

b) Funkcja określona w dowolnym zbiorze Z jest w nim jednostajnie ciągła, jeżeli wartości funkcji w dostatecznie bliskich punktach tego zbioru dowolnie mało się różnią od siebie, czyli, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$ znaleźć możemy taką liczbę $\eta > 0$, że wartości funkcji w dwu dowolnych punktach zbioru Z odległych od siebie o mniej niż η, różnią się o mniej niż ε.

c) Jeżeli funkcja jest określona i ciągła w obszarze Ω ograniczonym i domkniętym, to:

1) jest w tym obszarze ograniczona i jednostajnie ciągła;

2) przyjmuje co najmniej w jednym punkcie obszaru Ω wartość największą i przynajmniej w jednym punkcie wartość najmniejszą.

3) Jeżeli założymy, że zbiór punktów wewnętrznych obszaru Ω jest obszarem spójnym, to funkcja przybiera każdą wartość zawartą między jej wartością największą i najmniejszą.

d) Jeżeli funkcja ciągła w obszarze domkniętym Ω jest w pewnym punkcie tego obszaru dodatnia, to stnieje takie otoczenie tego punktu i taka liczba $\alpha > 0$, że w każdym punkcie tego otoczenia (należącym do Ω) zachodzi nierówność:

$$f(x, y) > \alpha.$$

Pochodne cząstkowe.

10. Definicja pochodnych cząstkowych. Niech funkcja $z = f(x, y)$ będzie ciągła w otoczeniu pewnego punktu (x, y). Oznaczmy przez Δx przyrost zmiennej x.

Połóżmy:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Granicę (o ile istnieje) stosunku $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, gdy Δx

zmierza do zera, nazywamy pierwszą pochodną cząstkową względem x. Oznaczać ją będziemy symbolami:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ albo } f'_x(x, y).$$

A więc:

$$f'_x(x, \quad = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Podobnie określamy:

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Przykłady:

1) $z = 5x^2 + 8xy^2 + y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 10x + 8y^2,$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 16xy + 3y^2.$$

2) $z = \frac{xy}{x + y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x + y)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{(x + y)^2}.$

3) $z = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}.$$

4) $z = \log \frac{x + y}{x - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{x^2 - y^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 - y^2}.$$

5) $z = y \sin x + \cos (x - y),$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos x - \sin (x - y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x + \sin (x - y).$$

6) $z = arc\,tg\,\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$

7) $z = xy\,e^{x+2y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+2y}\,y\,(1+x),$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+2y}\,x\,(1+2y).$$

11. Pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Jeżeli założymy, że funkcje f'_x i f'_y istnieją w otoczeniu punktu (x, y), to może się zdarzyć, że każda z nich posiada pochodne cząstkowe względem x i y. Te pochodne cząstkowe będziemy oznaczać symbolami:

$$\frac{\partial f'_x}{\partial x} = f''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial f'_y}{\partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial f'_x}{\partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial f'_y}{\partial y} = f''_{y^2} = \frac{{}^2 z}{\partial y^2}.$$

Przykłady:

1) $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$. Mamy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x,$$

a więc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y.$$

2) $z = \sin x\ \cos y.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x\ \cos y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin x\ \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\cos x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

W obu przykładach otrzymujemy $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Jak zaraz udowodnimy, własność tę posiada każda funkcja $z(x, y)$ spełniająca pewne ogólne warunki.

12. Twierdzenie. Jeżeli w otoczeniu punktu (x, y) pochodne $f''_{x,y}$, $f''_{y,x}$ istnieją i są ciągłe, to są sobie równe w tym punkcie.

Dowód. Weźmy pod uwagę wyrażenie:

$$u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x, y),$$

gdzie Δx, Δy mają pewne wartości stałe. Wyrażenie

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

możemy uważać za funkcję zmiennych x i y. Połóżmy więc:

$$\varphi(x, y) = f(x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

stąd

$$\varphi(x+\Delta x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)$$

A zatem: $u = \varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y)$.

Uważając y za stałe, otrzymamy na mocy twierdzenia o wartości średniej:

$$u = \Delta x \, \varphi'_x(x+\theta\Delta x, y),$$

lecz $\varphi'_x(x, y) = f'_x(x, y+\Delta y) - f'_x(x, y)$.

Wstawiając więc zamiast x wyrażenie $x+\theta\Delta x$, mamy:

$$u = \Delta x [f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y) - f'_y(x+\theta\Delta x, y)].$$

Stosując teraz do wyrażenia w nawiasie znowu twierdzenie o wartości średniej, mamy:

$$u = \varDelta x \varDelta y f''_{xy}(x + \theta \varDelta x, y + \theta' \varDelta y). \qquad (1)$$

Kładąc na początku

$$\varphi(x, y) = f(x + \varDelta x, y) - f(x, y)$$

i podobnie postępując, otrzymamy:

$$u = \varDelta x \varDelta y f''_{yx}(x + \theta_1 \varDelta x, y + \theta'_1 \varDelta y). \qquad (2)$$

Ze związków (1) i (2) otrzymujemy, przez porównanie obu wartości u, po podzieleniu przez wspólny czynnik $\varDelta x \varDelta y$, związek:

$$f''_{xy}(x + \theta \varDelta x, y + \theta' \varDelta y) = f''_{yx}(x + \theta_1 \varDelta x, y + \theta'_1 \varDelta y),$$

gdzie θ, θ', θ_1, θ'_1 są liczbami dodatniemi mniejszemi od 1. Jeżeli teraz $\varDelta x$ i $\varDelta y$ dążą do zera, to na mocy ciągłości funkcyj f''_{xy}, f''_{yx} otrzymamy:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Zadania. Wykazać przez wyliczenie, że związek

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

zachodzi dla funkcyj:

1) $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$,

2) $z = \dfrac{x - y}{x + y}$,

2) $z = e^x y + y x^2$,

4) dla funkcyj podanych w zadaniach ust. 10.

13. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów. W podobny sposób, jak pochodne cząstkowe drugiego rzędu, określamy pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Pochodna cząstkowa rzędu n-ego jest więc wynikiem n po sobie następujących różniczkowań ze względu na zmienne x i y. Pochodną cząstkową rzędu n-ego, którą otrzymamy, biorąc p razy pochodną cząstkową względem x, a z otrzymanej w ten sposób funkcji q razy pochodną względem y, oznaczać będziemy symbolem:

$$\frac{\partial^n x}{\partial x^p \partial y^q} = f_{x^p, y^q}(x, y). \qquad (p + q = n)$$

Przykład. $z = x^4 - 4x^2y^2 + y^4$;

wyznaczymy: $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -16xy$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -16x.$$

Wynik ostateczny nie będzie zależał od porządku, w jakim wyliczamy pochodne cząstkowe, o ile wszystkie pochodne cząstkowe aż do rzędu n-ego włącznie są ciągłe. Na mocy bowiem ostatnio udowodnionego twierdzenia możemy zamienić porządek dwu po sobie następujących różniczkowań. Ponieważ w ten sposób postępując, możemy z każdego porządku wyliczania pochodnych dojść do każdego innego, więc wynik końcowy będzie dokładnie wyznaczony, jeżeli tylko podamy liczbę różniczkowań względem x i y. A zatem symbole $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q}$ $(p + q = n)$ są wystarczające do oznaczenia wszystkich pochodnych cząstkowych rzędu n-ego, pod warunkiem, że są one ciągłe w otoczeniu punktu (x, y).

Przykład: $z = arc\,tg \dfrac{yx}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{15xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3} = 15\,\frac{1-5(x^2+y^2)+51\,x^2y^2-6\,(x^4+y^4)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{11}{2}}}.$$

14. Funkcje złożone. Przypuśćmy, że mamy daną funkcję zmiennych u, v:

$$z = f(u, v)$$

ciągłą wraz z pierwszemi pochodnemi cząstkowemi w prostokącie $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, $\alpha' \leqslant v \leqslant \beta'$. Niechaj zmienne u, v będą funkcjami zmiennych x, y, t. zn.:

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

Załóżmy, że funkcje $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ są ciągłe wraz z pierwszemi pochodnemi cząstkowemi w prostokącie $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant y \leqslant b'$ i że nadto

$$\alpha \leqslant \varphi(x, y) \leqslant \beta, \quad \alpha' \leqslant \psi(x, y) \leqslant \beta'.$$

Przy tych założeniach możemy zmienną z uważać za funkcję zmiennych (x, y), a mianowicie:

$$z = f(\varphi(x, y),\ \psi(x, y)) = F(x, y).$$

Funkcję $z = F(x, y)$ nazywać będziemy funkcją złożoną za pośrednictwem zmiennych u, v. Przy założeniach powyższych można łatwo wykazać, że funkcja $F(x, y)$ jest ciągła w prostokącie $(a \leqslant x \leqslant b,\ a' \leqslant y \leqslant b')$.

15. Pochodne cząstkowe funkcyj złożonych. Aby wyznaczyć pochodną cząstkową względem x, oznaczmy przez Δx przyrost zmiennej x, zaś przez Δu, Δv, Δz odpowiednie przyrosty zmiennych u, v, z. A zatem:

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)$$

$$\Delta v = \psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y)$$

$$\Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

Wyrażenie na Δz przekształcimy w sposób następujący

$$\Delta z = [f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)] + \\ + [f(u, v + \Delta v) - f(u, v)].$$

Stosując teraz do każdego z nawiasów twierdzenie o wartości średniej, uważając przytem za stałe w nawiasie pierwszym $v + \Delta v$, w drugim u, otrzymujemy.

$$\Delta z = f'_u(u + \theta \Delta u, v + \Delta v) \Delta u + f'_v(u, v + \theta' \Delta v) \Delta v,$$

stąd

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'_u(u + \theta \Delta u, v + \Delta v) \frac{\Delta u}{\Delta x} + f'_v(u, v + \theta' \Delta v) \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Jeżeli Δx zmierza do zera, to otrzymujemy w granicy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u \varphi'_x + f'_v \psi'_x,$$

czyli

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Podobnie

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2}$$

Przykłady.

$$z = (3x^2 + y^2)^{4x+2y} = u^v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v u^{v-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u^v \log u \frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$= (4x + 2y)(3x^2 + y^2)^{4x+2y-1} . 6x +$$
$$+ (3x^2 + y^2)^{4x+2y} . 4 \log (3x^2 + y^2).$$

2) Jeżeli przypuścimy, że u i v są funkcjami tylko zmiennej x, a więc

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x),$$

to $$z = f(u, v) = f(\varphi(x), \psi(x)) = F(x).$$

A zatem z jest funkcją złożoną zmiennej x za pośrednictwem zmiennych u i v. Na mocy (1) i z uwagi, że w tym wypadku $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx}$, otrzymamy:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Np. $$x = \{\varphi(x)\}^{\psi(x)} = u^v,$$
więc
$$\frac{dz}{dx} = v u^{v-1} u' + u^v \log u . v' =$$
$$= \psi(x) \{\varphi(x)\}^{\psi(x)-1} \varphi'(x) + \{\varphi(x)\}^{\psi(x)} \log \varphi(x) . \psi'(x).$$

3) Jeżeli $z = f(x, y)$, zaś $y = \psi(x)$, otrzymujemy:

$$z = f(x, \psi(x)) = F(x).$$

Stosując formułę (1) przy założeniu, że $u = x$, $v = y$, mamy:

$$\frac{dz}{dx} = f'_x + f'_y y'_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

np. $$z = x^2 + 3y^2 x + 4y, \quad y = 2x^2 + 1,$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 3y^2 + (6yx + 4)\,4x.$$

Zadania:

1) $$z = log\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} = log\frac{u + v}{u - v},$$

$$\frac{z}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

2) $$z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}, \; y = 2x - 3, \; \frac{dz}{dx} = \frac{4x(x-3)}{(x^2 + 2x - 3)^2}.$$

3) $$z = log\sqrt{\frac{ax + by}{ax - by}} = log\sqrt{\frac{u}{v}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{aby}{a^2x^2 - b^2y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{abx}{a^2x^2 - b^2y^2}.$$

4) Wykazać, że nie istnieje funkcja $z = f(xy)$, której pochodne cząstkowe wyrażałyby się wzorami:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x.$$

Oprzeć się na tem, że taka funkcja miałaby pochodne drugiego rzędu $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ciągłe, a więc równe.

Funkcje uwikłane.

16. Definicja funkcji uwikłanej. Załóżmy, że funkcja $z = F(x, y)$ jest określona i ciągła w pewnym obszarze. Zdarzyć się może, że istnieje funkcja ciągła

$y = f(x)$ taka, że odpowiednie pary (x, y) spełniają związek

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

W wypadku tym związek (1) nazywamy uwikłaną postacią funkcji $f(x)$; o samej zaś funkcji $f(x)$ mówimy, że jest funkcją uwikłaną spełniającą związek (1).

Przykłady.

Uwikłaną postacią funkcji

1. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ jest $xy + x + y - 1 = 0$.

2. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ jest $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

3. $y = x + \sqrt{1 - 2x^2}$ jest $3x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$.

Nie należy sądzić, że jeżeli dany jest związek (1), to już przez to jest określona funkcja uwikłana. Może bowiem nie istnieć żadna funkcja ciągła, która spełnia związek (1), lub może istnieć kilka takich funkcyj.

Przykłady.

1. Nie istnieje funkcja spełniająca związek:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

2. Funkcje $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$ spełniają ten sam związek, a mianowicie: $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

17. Twierdzenie o istnieniu funkcji uwikłanej. Jeżeli funkcja $z = F(x, y)$ ciągła wraz z pierwszemi pochodnemi cząstkowemi w otoczeniu punktu (a, b) spełnia warunki:

1) $F(a, b) = 0$,

2) $F'_y(a, b) \neq 0$,

to istnieje jedna i tylko jedna funkcja $y = f(x)$ określona i ciągła w otoczeniu punktu $x = a$ taka, że

1) $f(a) = b$.

2) $F[x, f(x)] = 0$.

Dowód tego twierdzenia, jako trudniejszy, pomijamy.

Przykład.

$$F(x, y) = xy + x + y - 1.$$

Mamy: $\qquad F'_y = x + 1.$

Obierając $a=2$, $b=-\frac{1}{3}$, otrzymujemy $F\left(2, -\frac{1}{3}\right)=0$, $F'_y\left(2, -\frac{1}{3}\right) = 3 \neq 0$. Na podstawie naszego twierdzenia istnieje więc jedna i tylko jedna funkcja $y = f(x)$ ciągła w otoczeniu punktu $x = 2$, przybierająca w tym punkcie wartość $-\frac{1}{3}$ i spełniająca związek $F(x, y) = 0$.

To samo stosuje się do każdego innego punktu (a, b) spełniającego warunki $ab + a + b - 1 = 0$, $a + 1 \neq 0$. W naszym przykładzie możemy szukaną funkcję wyznaczyć, obliczając y z równania $F(x, y) = 0$.

18. Pochodne funkcji uwikłanej. Przypuśćmy, że funkcja $y = f(x)$ ciągła w otoczeniu pewnego punktu $x = a$, dana jest w postaci uwikłanej $F(x, y) = 0$. Załóżmy nadto, że funkcja $z = F(x, y)$ jest ciągła wraz z pierwszemi pochodnemi cząstkowemi w otoczeniu punktu $[x = a,\ y = f(a) = b]$ i że $F'_y(a, b) \neq 0$.

Oznaczmy przez Δx dowolny przyrost zmiennej x. Połóżmy:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a);$$

mamy więc:

$$F(a+\Delta x,\ b+\Delta y) - F(a, b) = 0.$$

Postępując podobnie jak na str. 254, możemy napisać:

$$F(a+\Delta x,\ b+\Delta y) - F(a, b) = F'_x(a+\theta\Delta x,\ b+\Delta y)\,\Delta x + \\ + F'_y(a, b+\theta_1\Delta y)\,\Delta y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ponieważ $F'_y(x, y)$ jest funkcją ciągłą i ponieważ $F'_y(a, b) \neq 0$, więc dla dość małego przyrostu Δy, mamy również

$$F'_y(a, b+\theta_1\Delta y) \neq 0.$$

Dla dość małych przyrostów Δx i Δy mamy więc na mocy (1)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(a+\theta\Delta x, b+\Delta y)}{F'_y(a, b+\theta_1\Delta y)} \quad . \quad . \quad (2)$$

Gdy Δx dąży do zera, to, na mocy ciągłości funkcji $y = f(x)$, przyrost Δy również dąży do zera. Prawa strona równości (2) ma więc granicę

$$-\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)}.$$

Zatem

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)}.$$

Otrzymaliśmy więc następujące

Twierdzenie: Jeżeli funkcja ciągła $y = f(x)$, dana jest w postaci uwikłanej $F(x, y) = 0$ i jeżeli F'_x i F'_y są funkcjami ciągłemi, to funkcja $y = f(x)$ ma pochodną dla każdej wartości na x, dla której $F'_y(x, f(x)) \neq 0$ i pochodna ta wyraża się wzorem:

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem drugiej pochodnej funkcji uwikłanej.

Pochodną y' możemy uważać, jako funkcję złożoną z funkcji ciągłej $-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ i funkcji ciągłej $y = f(x)$.

Jeżeli do poprzednich założeń dodamy jeszcze założenie, że funkcja $F(xy)$ posiada drugie cząstkowe pochodne ciągłe, wówczas, z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej i na mocy (3), wynika że y'' istnieje. Stosując formułę (4) str. 255, mamy:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{F'_x}{F'_y}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{F'_x}{F'_y}\right\} y'.$$

Więc

$$y'' = -\frac{F'_y F''_{x^2} - F'_x F''_{xy}}{(F'_y)^2} -$$

$$-\frac{F'_y F''_{xy} - F'_x . F''_{y^2}}{(F'_y)^2} . \left\{-\frac{F'_x}{F'_y}\right\}.$$

Stąd

$$y'' = -\frac{(F'_y)^2 F''_{x^2} - 2F''_{xy} F'_x F'_y + (F'_x)^2 . F''_{y^2}}{(F'_y)^3}.$$

lub

$$y'' = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

W podobny sposób otrzymujemy wzory na pochodne wyższych rzędów, dość jednak skomplikowane.

U w a g a. Należy pamiętać o tem, że w otrzymanych wzorach na pochodne symbol y oznacza funkcję zmiennej x określoną przez związek $F(x, y) = 0$; prawe więc strony tych wzorów są funkcjami jednej zmiennej, t. j. zmiennej x, a nie dwu zmiennych x, y, jakby się na pierwszy rzut oka zdawało.

P r z y k ł a d y:

1) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$

Mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Zatem $y' = -\dfrac{x}{y}$; $y'' = -\dfrac{1}{y^3}$.

Różniczkując drugą pochodną i uważając ją jako funkcję złożoną, otrzymujemy

$$y''' = \frac{3y^2 y'}{y^6} = -\frac{3x}{y^5}.$$

2. $F(x, y) = y - xe^y + x = 0.$

Mamy $F'_x = -e^y + 1, \quad F'_y = 1 - xe^y,$

więc
$$y' = \frac{e^y - 1}{1 - xe^y}.$$

3. $\sin(x + y) - y = 0.$

$$y' = -\frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y) - 1}; \quad y'' = \frac{\sin(x+y)}{[\cos(x+y) - 1]^3}.$$

19. Maxima i minima funkcyj uwikłanych. Niechaj funkcja $z = F(x, y)$ będzie ciągła wraz z pochodnemi cząstkowemi aż do rzędu drugiego włącznie w obszarze Ω. Postawmy sobie zadanie wyznaczyć extrema funkcyj, które dadzą się przedstawić w postaci uwikłanej

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Podamy najprostsze warunki wystarczające.

Wyznaczmy w tym celu punkty $(x\, y)$, które spełniają warunki

$$F(x, y) = 0.$$

$$F'_x(x, y) = 0.$$

$$F'_y(x, y) \neq 0.$$

Jeżeli istnieje punkt (x_0, y_0), który te warunki spełnia, to, na mocy poprzednich twierdzeń (str. 257 i dalsze), istnieje funkcja $y = f(x)$, ciągła wraz z pochodnemi pierwszego i drugiego rzędu, spełniająca związek (1) w otoczeniu punktu $x = x_0$ i przyjmująca dla $x = x_0$ wartość $y = y_0$.

Zauważmy dalej, że

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = 0.$$

Ponieważ $F'_x(x_0, y_0) = 0$, więc stosując wzór na drugą pochodną funkcji uwikłanej (str. 260), otrzymujemy

$$f''(x_0) = -\frac{F''_{x^2}(x_0\, y_0)}{F'_y(x_0\, y_0)}.$$

Jeżeli więc $F''_{x^2}(x_0\, y_0) \neq 0$, to dla funkcji $y = f(x)$ występuje w punkcie $x = x_0$ extremum i to maximum lub minimum właściwe, zależnie od tego, czy

$$F''_{x^2}(x_0, y_0) \quad \text{i} \quad F'_y(x_0, y_0)$$

są tego samego znaku, czy przeciwnego. Jeżeli $F''_{x^2}(x_0, y_0) = 0$, to trzeba badać wyższe pochodne.

Przykład: $F(x,y) = y^3 - 3yx + x^3 = 0$.

$$F'_x = -3y + 3x^2;\quad F'_y = 3y^2 - 3x.$$

Rozwiązując równania $F(x,y) = 0$ i $F'_x(x,y) = 0$, otrzymujemy dwa rozwiązania

$$x_1 = 0,\quad y_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 = \sqrt[3]{2},\quad y_2 = \sqrt[3]{4}.$$

Mamy $F'_y(x_1, y_1) = 0$, $F'_y(x_2, y_2) = 3\sqrt[3]{2}$.

Widzimy stąd, że pierwsze rozwiązanie odpada.

$$F''_{x^2}(x_2, y_2) = 6x_2 = 6\sqrt[3]{2}.$$

Ponieważ $F''_{x^2}(x_2, y_2)$ i $F'_y(x_2, y_2)$ są tego samego znaku, więc występuje maximum właściwe.

Zadania:

1. $F(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax+By+D}{Bx+Cy+E},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{(Bx+Cy+E)^3}.$$

2. $F(x,y) = x^3 - 3cxy + y^3 = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{cy - x^2}{cx - y^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c^3xy}{(cx-y^2)^3}.$$

3. $F(x,y) = y^x - x^y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2(\log x - 1)}{x^2(\log y - 1)}$.

4. $F(x,y) = e^y + ax^2e^{-y} - 2bx = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$.

Sprawdzić wynik, wyznaczając y z równania $F(x,y) = 0$.

5. Wykazać, że funkcja uwikłana dana równaniem $F(x, y) = y^4 - 4a^2xy + x^4 = 0$ ma extrema dla $x = \pm a\sqrt[8]{3}$, $y = \pm a\sqrt[8]{27}$. Zbadać, czy zachodzi minimum, czy maximum.

6. Zbadać extrema dla funkcyj uwikłanych zadania 1, 2.

7. Wykazać, że z pomiędzy wszystkich trójkątów o danej wysokości w i danem polu P najmniejszy obwód ma trójkąt równoramienny o podstawie $\dfrac{2P}{w}$ i wysokości w.

ROZDZIAŁ X.

Wzór i szereg Taylora. Maxima i minima. Różniczki funkcyj dwu zmiennych.

1. Wzór Taylora. Niechaj funkcja $f(x, y)$ będzie ciągła wraz z wszystkiemi pochodnemi cząstkowemi aż do n-ego rzędu włącznie w otoczeniu pewnego punktu (x, y). Niechaj punkt $(x+h,\ y+k)$ należy do tego otoczenia. – Przyjmując x, y, h, k, za liczby stałe, możemy wyrażenie $f(x+ht,\ y+kt)$ uważać za funkcję zmiennej t. Połóżmy więc:

$$\varphi(t) = f(x+ht,\ y+kt). \tag{1}$$

Wyznaczymy pochodne funkcji $\varphi(t)$, opierając się na twierdzeniu o pochodnej funkcji złożonej (str. 255). Połóżmy w tym celu:

$$u = x + ht$$

$$v = y + kt$$

a więc $$\varphi(t) = f(u, v).$$

Stąd: $$\varphi'(t) = f'_u(u, v)\frac{du}{dt} + f'_v(u, v)\frac{dv}{dt},$$

a więc $$\varphi'(t) = f'_u(u, v)\,h + f'_v(u, v)\,k;$$

wprowadzając poprzednie znakowanie, mamy:

$$\varphi'(t) = hf'_x(x+ht,\ y+kt) + kf'_y(x+ht,\ y+kt).$$

Podobnie, otrzymujemy:

$$\varphi''(t) = h^2 f''_{x^2}(x+ht,\ y+kt) +$$
$$+ 2hkf''_{xy}(x+ht,\ y+kt) + k^2 f''_{y^2}(x+ht,\ y+kt),$$

symbolicznie napiszemy tę pochodną w postaci:

$$\varphi''(t) = [hf'_x(x+ht,\ y+kt) + kf'_y(x+ht,\ y+kt)]^{(2)}.$$

Obliczając dalszą pochodną, mamy:

$$\varphi'''(t) = h^3 f'''_{x^3}(x+ht,\ y+kt) + 3h^2 k f'''_{x^2 y}(x+ht,\ y+kt) +$$
$$+ 3hk^2 f'''_{xy^2}(x+ht,\ y+kt) + k^3 f'''_{y^3}(x+ht,\ y+kt),$$

symbolicznie:

$$\varphi'''(t) = [hf'_x(x+ht,\ y+kt) + kf'_y(x+ht,\ y+kt)]^{(3)}.$$

Przez indukcję otrzymujemy:

$$\varphi^{(n)}(t) = [hf'_x(x+ht,\ y+kt) + kf'_y(x+ht,\ y+kt)]^{(n)}.$$

Zauważmy teraz, że stosując do funkcji $\varphi(t)$ wzór Maclaurina i kładąc $t = 1$, otrzymamy:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + R_n.$$

Pisząc resztę w postaci Lagrange'a, mamy:

$$R_n = \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta), \qquad (0 < \theta < 1).$$

Lecz $\varphi(1) = f(x+h, y+k)$

$$\varphi(0) = f(x, y)$$

$$\varphi'(0) = hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)$$

$$\varphi''(0) = h^2 f''_{x^2}(x, y) + 2hkf''_{xy}(x, y) + k^2 f''_{y^2}(x, y) = \\ = [hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)]^{(2)} \text{ i t. d.},$$

ogólnie

$$\varphi^{(n)}(0) = [hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)]^{(n)},$$

a więc:

$$f(x+h,\ y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!}[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)] + \\ + \frac{1}{2!}[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)]^{(2)} + \ldots + \\ + \frac{1}{(n-1)!}[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)]^{(n-1)} + R_n;$$

na resztę R_n mamy wzór:

$$R_n = \frac{1}{n!}[hf'_x(x+\theta h, y+\theta k) + kf'_y(x+\theta h, y+\theta k)]^{(n)} \\ (0 < \theta < 1).$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór Taylora dla funkcji dwu zmiennych.

Jeżeli przyjmiemy w szczególności, że $x = 0$, $y = 0$, to kładąc we wzorze Taylora $x = 0$, $y = 0$ i pisząc następnie x, y, zamiast h, k, otrzymujemy wzór Maclaurina dla funkcji dwu zmiennych w postaci:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}[xf'_x(0, 0) + yf'_y(0, 0)] + \\ + \frac{1}{2!}[xf'_x(0, 0) + yf'_y(0, 0)]^{(2)} + \ldots + \\ + \frac{1}{(n-1)!}[xf'_x(0, 0) + yf'_y(0, 0)]^{(n-1)} + R_n,$$

gdzie:

$$R_n = \frac{1}{n!}\,[xf'_x(\theta x, \theta y) + yf'_y(\theta x, \theta y)]^{(n)}.$$

Uwaga. Ze wzoru Taylora, kładąc $n = 1$, otrzymujemy twierdzenie o wartości średniej dla funkcji dwu zmiennych:

$$f(x+h,\ y+k) - f(x, y) = hf'_x(x+\theta h,\ y+\theta k) + \\ + kf'_y(x+\theta h,\ y+\theta k). \qquad (0 \leq \theta < 1)$$

2. Szereg Taylora i Maclaurina. Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła wraz z pochodnemi cząstkowemi wszystkich rzędów w otoczeniu pewnego punktu (x, y). Oznaczając przez $(x+h,\ y+k)$ dowolny punkt tego otoczenia, a przez n dowolną liczbę naturalną, mamy wedle ustępu poprzedniego:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!}\,[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)] + \\ + \frac{1}{2!}\,[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)]^{(2)} + \ldots + \\ + \frac{1}{(n-1)!}\,[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)]^{(n-1)} + R_n.$$

Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$, to otrzymujemy rozwinięcie naszej funkcji w szereg zbieżny:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!}\,[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)] + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}\,[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)]^{(n)} + \ldots$$

zwany szeregiem Taylora.

Jeżeli w szczególności położymy $x = 0,\ y = 0$

a zamiast h i k będziemy pisać x, y, to otrzymamy szereg Maclaurina:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}[xf'_x(0, 0) + yf'_y(0, 0)] + \dots +$$
$$+ \frac{1}{n!}[xf'_x(0, 0) + yf'_y(0, 0)]^{(n)} + \dots$$

Przykłady.

1. $$e^{x+y} = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \dots$$

2. $$\sin x \sin y = \frac{1}{2!} 2xy - \frac{1}{4!}(4x^3y + 4xy^3) +$$
$$+ \frac{1}{6!}(6x^5y + 20x^3y^3 + 6xy^5) + \dots$$

3. $$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+h}{y+k} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + \frac{1}{1!}\left[\frac{y}{x^2+y^2} h - \frac{x}{x^2+y^2} k\right] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} h^2 + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} hk + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} k^2\right] + \dots$$

Maxima i minima funkcyj dwu zmiennych.

3. Definicja extremum. Powiadamy, że funkcja $z = f(x, y)$ przyjmuje w pewnym punkcie maximum, jeżeli w każdym punkcie pewnego otoczenia wartość funkcji jest niewiększa niż w danym punkcie. — Zastępując w poprzedniej definicji wyrażenie „niewiększa“ przez wyrażenie „mniejsza“, otrzymujemy definicję maximum właściwego.

Z definicyj poprzednich otrzymujemy przez odpowiednią zmianę definicje minimum.

Jeżeli więc w punkcie x', y' występuje maximum, to istnieje takie otoczenie punktu (x', y'), że dla każdego punktu $(x'+h,\ y'+k)$ należącego do tego otoczenia zachodzi nierówność:

$$f(x'+h,\ y'+k) \leqslant f(x'\ y');$$

w wypadku maksimum właściwego mamy oczywiście:

$$f(x'+h,\ y'+k) < f(x', y'),$$

jeżeli h i k nie są równocześnie zerami. Odwrotne nierówności występują przy minimum.

W obu więc wypadkach możemy powiedzieć, że przy extremum wyrażenie $f(x'+h,\ y'+k) - f(x', y')$ ma stały znak, dla dostatecznie małych h i k. Gdy występuje extremum właściwe, to powyższe wyrażenie, dla dostatecznie małych h, k, jest różne od zera, z wyjątkiem $h = k = 0$.

4. Warunki konieczne dla istnienia extremum. Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ posiada w otoczeniu punktu $(x'\ y')$, w którym występuje extremum, ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

Z określenia extremum wynika, że funkcja $f(x, y)$, uważana za funkcję jednej zmiennej x, posiada dla $x = x'$ również extremum. Zatem

$$f'_x(x', y') = 0.$$

Podobnie otrzymujemy

$$f'_y(x', y') = 0.$$

Udowodniliśmy więc:

Twierdzenie. Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ ciągła wraz z pierwszemi pochodnemi cząstkowemi w otoczeniu punktu (x', y') przyjmuje w tym punkcie extremum, to obie pierwsze pochodne cząstkowe zerują się w tym punkcie.

5. Warunek dostateczny dla istnienia extremum. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ciągła wraz z pochodnemi cząstkowemi pierwszego i drugiego rzędu w otoczeniu punktu (x', y'), spełnia warunki

$$f'_x(x', y') = 0, \quad f'_y(x', y') = 0,$$

to kładąc:

$$\Delta = f''_{x^2}(x', y') f''_{y^2}(x', y') - [f''_{xy}(x', y')]^2,$$

możemy twierdzić, że

a) dla $\Delta > 0$ w punkcie (x', y') występuje ekstremum właściwe, a to:

maksimum właściwe, jeżeli: $f''_{x^2}(x', y') < 0$
minimum „ „ $f''_{x^2}(x', y') > 0$

b) dla $\Delta < 0$ nie występuje w punkcie (x', y') ekstremum.

c) dla $\Delta = 0$ ekstremum może zachodzić, lub nie.

Uwaga: W wypadku *a*) pochodne $f''_{x^2}(x', y')$ i $f''_{y^2}(x', y')$ są różne od zera i mają ten sam znak, bo inaczej byłoby $\Delta \leqslant 0$.

Dowód.

a) Załóżmy, że $\Delta > 0$. Stosując wzór Taylora z uwzględnieniem założenia

$$f'_x(x', y') = f'_y(x', y') = 0,$$

otrzymujemy:

$$f(x' + h, y' + k) - f(x', y') = \frac{1}{2!}[h^2 r + 2hks + k^2 t], \quad (1)$$

gdzie

$$r = f''_{x^2}(x' + \theta h, y' + \theta k)$$
$$s = f''_{xy}(x' + \theta h, y' + \theta k)$$
$$t = f''_{y^2}(x' + \theta h, y' + \theta k).$$

Ostatni wzór, możemy napisać w następującej postaci:

$$f(x'+h, y'+k) - f(x', y') =$$
$$= \frac{1}{2!}\,\frac{1}{r}\,[(hr+ks)^2 + (rt-s^2)k^2] \quad . \quad . \quad (2)$$

Przypuśćmy narazie, że $f''_{x^2}(x'\,y') > 0$. Z ciągłości drugich pochodnych cząstkowych wynika

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} r = f''_{x^2}(x'\,y') > 0$$

oraz

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} (rt - s^2) = \Delta > 0.$$

Zatem dla dostatecznie małych h i k

$$r > 0, \quad rt - s^2 > 0.$$

A więc na mocy (2):

$$f(x'+h, y_{,}+k) - f(x', y') \geqslant 0.$$

Równość ma miejsce tylko wtedy, gdy $h = k = 0$. W punkcie x', y' występuje więc minimum właściwe.

W dowodzie założyliśmy, że $f''_{x^2}(x', y') > 0$; zakładając $f''_{x^2}(x', y') < 0$ i postępując tak samo, wykazalibyśmy, że w punkcie (x', y') występuje maximum właściwe.

b) załóżmy, $\Delta < 0$ i połóżmy:

$$r_0 = f''_{x^2}(x', y')$$
$$s_0 = f''_{xy}(x', y')$$
$$t_0 = f''_{y^2}(x', y').$$

Zauważmy, że wielomian

$$r_0 + 2s_0 x + t_0 x^2$$

nie jest stałego znaku, bo wyróżnik $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$.

Istnieją zatem dwie wartości β_1 i β_2 takie, że

$$r_0 + 2 s_0 \beta_1 + t_0 \beta^2{}_1 > 0,$$

$$r_0 + 2 s_0 \beta_2 + t_0 \beta^2{}_2 < 0.$$

Oczywistem jest, że na mocy ciągłości drugich pochodnych cząstkowych

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} (r + 2 s \beta_1 + t \beta^2{}_1) = r_0 + 2 s_0 \beta_1 + t_0 \beta^2{}_1 > 0$$

Istnieje więc takie otoczenie (δ) punktu (x', y'), że, jeżeli $(x' + h,\ y' + k)$ należy do (δ), to:

$$r + 2 s \beta_1 + t \beta^2{}_1 > 0. \tag{3}$$

Obierając teraz dowolnie małe otoczenie (δ') punktu (x', y'), możemy zawsze dobrać tak małą liczbę ϱ, by punkt $(x' + \varrho,\ y' + \varrho\beta_1)$ należał do δ' i do δ. Lecz kładąc:

$$h = \varrho, \quad k = \varrho \beta_1,$$

mamy na mocy (1) i (3):

$$f'(x' + h, y' + k) - f(x', y') = \frac{1}{2!} \varrho^2 [r + 2 s \beta_1 + t \beta^2{}_1] > 0.$$

W każdem więc otoczeniu punktu (x', y'), istnieje taki punkt $(x' + h,\ y' + k)$, że:

$$f(x' + h, y' + k) - f(x', y') > 0.$$

Postępując tak samo z wartością β_2, wykażemy, że w każdem otoczeniu punktu (x', y') istnieje punkt $(x' + h,\ y' + k)$ taki, że:

$$f(x' + h, y' + k) - f(x', y') < 0.$$

A więc w punkcie (x', y') nie występuje extremum.

c) $\Delta = 0$. W wypadku tym zauważymy, że dla funkcyj

$$z = x^4 + y^4$$
$$\text{i} \quad z = x^3 + y^3$$

mamy w punkcie (0, 0), $\Delta = 0$. Pierwsza z tych funkcyj posiada w punkcie (0, 0) minimum, druga zaś nie posiada w nim extremum.

Przykłady.

1) $z = x^2 + xy + y^2 - mx - ny$.

Mamy tu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - m, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - n,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1,$$

$$\Delta = 2 . 2 - 1^2 = 3.$$

Aby znaleźć punkty, w których ewentualnie występuje extremum, rozwiązujemy układ równań $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, czyli

$$2x + y - m = 0$$
$$x + 2y - n = 0.$$

Otrzymujemy $x' = \frac{1}{3}(2m - n)$, $y' = \frac{1}{3}(2n - m)$ jako jedyne rozwiązanie tego układu. Ponieważ $\Delta = 3 > 0$, więc w punkcie (x', y') występuje extremum. Ponieważ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$, więc w punkcie $x' = \frac{1}{3}(2m - n)$, $y' = \frac{1}{3}(2n - m)$ funkcja nasza ma minimum.

2) $z = Ax^2y + Bxy^2 - Cxy \quad (A, B, C \neq 0)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2Axy + By^2 - Cy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2Ay, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2Bx.$$

$$\frac{z}{\partial y} = Ax^2 + 2Bxy - Cx, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2Ax + 2By - C,$$

$$\Delta = 4ABxy - (2Ax + 2By - C)^2.$$

Rozwiązujemy równania $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, czyli

$$(2Ax + By - C)y = 0,$$
$$(Ax + 2By - C)x = 0.$$

Otrzymujemy stąd następujące cztery rozwiązania:

$$x = 0,\ y = 0; \quad x = \frac{C}{A},\ y = 0; \quad x = 0,\ y = \frac{C}{B};$$

$$x = \frac{C}{3A},\ y = \frac{C}{3B}.$$

Odpowiednie wartości na Δ są:

$$-C^2,\ -C^2,\ -C^2,\ \frac{1}{3}C^2.$$

Pierwsze trzy rozwiązania nie dają extremum ponieważ $\Delta < 0$. Dla $x = \frac{C}{3A}$ $y = \frac{C}{3B}$ mamy extremum. Podstawiając te wartości w $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, otrzymujemy $\frac{2AC}{3B}$. Zachodzi więc maximum lub minimum, zależnie od tego, czy $\frac{AC}{B} < 0$ lub $\frac{AC}{B} > 0$.

Zadania.

1. $z = \frac{1}{2} xy + (47 - x - y) \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$

$(x = 21,\ y = 20\ max.).$

2. $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$

$(x = 3,\ y = 2\ max.).$

3. $z = a^2 x^2 + 2bxy + c^2 y^2 - ex - gy$
przy założeniu $a^2 c^2 > b^2$.

$$\left(x = \frac{c^2 e - bg}{2(a^2 c^2 - b^2)},\ y = \frac{a^2 g - be}{2(a^2 c^2 - b^2)}\ min.\right).$$

4. $z = x^3 + y^3 + 3xy$

$(x = -1,\ y = -1\ max.).$

5. $z = e^{-x^2 - y^2}(x^2 + 2y^2)$

$(x = 0,\ y = 0\ min.,\ x = 0,\ y = \pm 1\ max.).$

6. $z = x^3 + xy^2 + 3axy \quad (a > 0)$

$$\left(x = \frac{a}{2}\sqrt{3}\ y = \frac{3a}{2},\ min.,\ x = -\frac{a}{2}\sqrt{3},\ y = \frac{3a}{2}\ max.\right).$$

7. Znaleźć trójkąt o danym obwodzie $2s$ i o możliwie największej powierzchni P.

(Oprzeć się na wzorze $P = \sqrt{s(s-x)(s-y)(x+y-s)}$; x i y oznaczają dwa boki trójkąta.)

Różniczka funkcji dwu zmiennych.

6. Definicja różniczki. Załóżmy, że funkcja $z = f(x, y)$ jest ciągła wraz z pierwszemi pochodnemi cząstkowemi, w otoczeniu punktu (x, y). Oznaczmy przez Δx, Δy dowolne przyrosty zmiennych x i y. Wyrażenie

$$f'_x(x, y)\, \Delta x + f'_y(x, y)\, \Delta y$$

nazywać będziemy różniczką zupełną funkcji $z = f(x, y)$, ze względu na zmienne x, y. Różniczkę zupełną oznaczamy symbolem $d_{xy} z$. — Pisząc zamiast Δx, Δy symbole $d_{xy} x$, $d_{xy} y$, mamy:

$$d_{xy} z = f'_x(x, y)\, d_{xy} x + f'_y(x, y)\, d_{xy} y. \tag{1}$$

7. Różniczka funkcji złożonej. Przypuśćmy teraz, że zmienne x, y są funkcjami ciągłemi innych zmiennych u, v, a więc

$$x = \varphi(u, v)$$

$$y = \psi(u, v).$$

Załóżmy jeszcze, że funkcje φ i ψ posiadają ciągłe cząstkowe pochodne pierwszego rzędu. Wobec tego możemy zmienną z uważać za funkcję złożoną zmiennych u, v. A więc:

$$z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = F(u, v).$$

Zatem:

$$d_{uv} z = F'_u(u, v)\, d_{uv} u + F_v(u, v)\, d_{uv} v. \tag{2}$$

Na mocy twierdzenia o pochodnych funkcyj złożonych mamy:

$$F'_u(u, v) = f'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} + f'_y \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$F'_v(u, v) = f'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial v} + f'_y \frac{\partial y}{\partial v},$$

Wstawiając te wyrażenia w formułę (2), otrzymamy:

$$d_{uv} z = \left[f'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} + f'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}\right] d_{uv} u +$$
$$+ \left[f'_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial v} + f'_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial v}\right] d_{uv} v,$$

zatem:

$$d_{uv} z = f'_x(x, y) \left[\frac{\partial x}{\partial u} d_{uv} u + \frac{\partial x}{\partial v} d_{uv} v\right] +$$
$$+ f'_y(x, y) \left[\frac{\partial y}{\partial u} d_{uv} u + \frac{\partial y}{\partial v} d_{uv} v\right].$$

Ponieważ wyrażenia w nawiasach są różniczkami:

$$d_{uv} x \quad d_{uv} y,$$

więc: $$d_{uv} z = f'_x(x, y)\, d_{uv} x + f'_y(x, y)\, d_{uv} y \tag{3}$$

8. Założmy, że zmienne x, y są funkcjami ciągłemi jednej zmiennej t, posiadającemi pierwsze pochodne ciągłe. Zatem

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t).$$

Zmienną z możemy więc uważać za funkcję złożoną zmiennej t

$$z = f(\varphi(t), \psi(t)) = F(t).$$

Stąd: $$d_t z = F'(t)\, d_t t.$$

Na mocy twierdzenia o pochodnych funkcyj złożonych mamy:

$$F'(t) = f'_x(x, y)\, x'_t + f'_y(x\, y)\, y'_t,$$

zatem

$$d_t z = f'_x(x, y)\, x'_t\, d_t t + f'_y(x, y)\, y'_t\, d_t t.$$

Ponieważ

$$x'_t d_t t = d_t x, \quad y'_t d_t t = d_t y,$$

więc $$d_t z = f'_x(x, y)\, d_t x + f'_y(x, y)\, d_t y. \tag{4}$$

9. Załóżmy wreszcie, że zmienna y jest funkcją ciągłą zmiennej x, posiadającą pierwszą pochodną ciągłą. Zatem

$$x = \varphi(t).$$

Zmienną z możemy uważać za funkcję złożoną zmiennej x:

$$z = f(x, \varphi(x)) = F(x),$$

a więc:
$$d_x z = F'_x(x)\, d_x x.$$

Na mocy twierdzenia o pochodnych funkcyj złożonych mamy:

$$F'_x(x) = f'_x(x\, y) + f'_y(x\, y)\, y'_x,$$

zatem

$$d_x z = f'_x(x, y)\, d_x x + f'_y(x, y)\, y'_x\, d_x x.$$

Ponieważ
$$d_x y = y'_x\, d_x x,$$

więc
$$d_x z = f'_x(x, y)\, d_x x + f'_y(x, y)\, d_x y. \qquad (5)$$

Porównując wzory (1), (3), (4), (5), widzimy, że symbolicznie możemy je wszystkie przedstawić w jednej postaci:

$$dz = f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy$$

lub
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Symbole dx, dy, dz, są symbolami niezupełnemi, lecz wzory (1), (3), (4), (5) otrzymujemy z (6), pisząc zamiast d wszędzie d_{xy}, d_{uv}, d_t, d_x.

10. Różniczki cząstkowe. Jeżeli zmiennej y nadamy pewną stałą wartość, wówczas wyrażenie

$$f'_x(x\, y)\, dx$$

jest różniczką funkcji $f(x\, y)$, uważanej za funkcję zmiennej x. Wyrażenie $f'_x(xy)\,dx$ nazywać będziemy różniczką cząstkową ze względu na zmienną x. Analogicznie, wyrażenie $f'_y(xy)\,dy$ nazwiemy różniczką cząstkową ze względu na zmienną y. Możemy więc powiedzieć: Różniczka zupełna jest sumą różniczek cząstkowych.

11. Różniczka, a przyrost funkcji. Zwróćmy teraz uwagę na związek jaki zachodzi między różniczką zupełną, a prawdziwym przyrostem $\varDelta z$ zmiennej z. Otóż:

$$\varDelta z = f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x,y),$$

na mocy twierdzenia o wartości średniej (str. 268) mamy:

$$\begin{aligned}\varDelta z = f'_x(x+\theta\varDelta x, y+\theta\varDelta y)\,\varDelta x + \\ + f'_y(x+\theta\varDelta x, y+\theta\varDelta y)\,\varDelta y,\end{aligned}$$

stąd

$$\begin{aligned}\varDelta z - dz = [f'_x(x+\theta\varDelta x, y+\theta\varDelta y) - f'_x(x,y)]\,\varDelta x + \\ + [f'_y(x+\theta\varDelta x, y+\theta\varDelta y) - f'_y(x,y)]\,\varDelta y.\end{aligned}$$

Wyrażenia w nawiasach zdążają do zera, bo pierwsze pochodne są ciągłe. A ponieważ

$$\frac{|\varDelta x|}{\sqrt{\varDelta x^2+\varDelta y^2}} \leqslant 1 \quad \frac{|\varDelta y|}{\sqrt{\varDelta x^2+\varDelta y^2}} \leqslant 1,$$

jeżeli tylko $\varDelta x$ i $\varDelta y$ nie są równocześnie zerami, więc:

$$\lim_{\substack{\varDelta x \to 0 \\ \varDelta y \to 0}} \frac{\varDelta z - dz}{\sqrt{\varDelta x^2+\varDelta y^2}} = 0.$$

W praktycznych rachunkach, o ile nam chodzi tylko o wartości przybliżone, możemy dla dostatecznie małych $\varDelta x$ i $\varDelta y$ przyjmować $\varDelta z = dz$.

Zadania:

1) Zakładając, że zmienne u i v są funkcjami ciągłemi zmiennych x y, posiadającemi ciągłe pierwsze pochodne, wykazać, że:

1) $d(u+v) = du + dv.$

2) $d(uv) = u\,dv + v\,du.$

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $\qquad (v \neq 0).$

Udowodnimy np. formułę 2)

$$d(uv) = \frac{\partial(uv)}{\partial x}dx + \frac{\partial(uv)}{\partial y}dy.$$

$$d(uv) = \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy,$$

zatem

$$d(uv) = u\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right),$$

a więc

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

2) Obliczyć różniczki następujących funkcyj:

$$z = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3,$$

$$dz = 3(3x - 2y)^2(3\,dx - 2\,dy),$$

$$z = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}, \qquad dz = -\frac{4(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2)^3},$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}, \qquad dz = \frac{-\sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy}{2\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2},$$

$$z = \log tg \frac{x}{y}, \qquad dz = \frac{2(y\,dx - x\,dy)}{y^2 \sin \frac{2x}{y}},$$

$$z = \operatorname{arc\,cos} \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}}, \quad dz = \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2}.$$

12. Różniczki wyższych rzędów. Jeżeli założymy, że dx i dy są wielkościami stałemi, to dz jest funkcją zmiennych x, y. Możemy więc mówić o różniczce różniczki.

Drugą różniczką, lub różniczką drugiego rzędu, nazywać będziemy różniczkę z różniczki; podobnie definjujemy różniczki wyższych rzędów. Symbolicznie oznaczamy je w sposób następujący:

$$\begin{aligned} d\,dz &= d^2 z \\ d\,d^2 z &= d^3 z \\ &\cdots\cdots \\ d\,d^{n-1} z &= d^n z. \end{aligned}$$

Przykłady:

1) Wyznaczyć różniczki (ze względu na x, y) wyższego rzędu funkcji $z = f(x, y)$ ciągłej wraz z pochodnemi cząstkowemi aż do n-tych włącznie.

W wypadku tym uważamy dx, dy, za liczby stałe, zatem

$$d^2 x = d^3 x = \ldots = d^n x = 0$$

$$d^2 y = d^3 y = \ldots = d^n y = 0,$$

a więc

$$dz = f'_x\,dx + f'_y\,dy$$

$$d^2 z = [f''_{x^2}\,dx + f''_{xy}\,dy]\,dx + [f''_{xy}\,dx + f''_{y^2}\,dy]\,dy$$

czyli

$$d^2 z = f''_{x^2}\,dx^2 + 2 f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{y^2}\,dy^2.$$

Podobnie:

$$d^3 z = f'''_{x^3}\, d^3x + 3 f'''_{x^2 y}\, dx^2\, dy + 3f'''_{x y^2}\, dx\, dy^2 + f'''_{y^3}\, dy^3$$

. . . .

$$d^n z = f^{(n)}_{x^n}\, dx^n + \binom{n}{1} f^{(n)}_{x^{n-1} y}\, dx^{n-1}\, dy + \ldots + f^{(n)}_{y^n}\, dy^n.$$

Symbolicznie piszemy:

$$d^n z = (f'_x\, dx + f'_y\, dy)^{(n)}.$$

Uwaga. Gdybyśmy założyli, że x, y są funkcjami zmiennych (u, v), to nie moglibyśmy przyjąć, że $d^2_{uv} x = 0$, lub $d^2_{uv} y = 0$. W tym wypadku otrzymalibyśmy formuły bardziej skomplikowane. Np.:

$$d^2 z = [f''_{x^2}\, dx + f''_{xy}\, dy]\, dx + [f'_x\, d^2 x] + [f''_{xy}\, dx + \\ + f''_{y^2}\, dy]\, dy + [f'_y\, d^2 y],$$

zatem:

$$d^2 z = f'_{x^2}\, dx + 2 f''_{xy}\, dx\, dy + f''_{y^2}\, dy^2 + f'_x\, d^2 x + f'_y\, d^2 y.$$

Zadania.

1. $z = \sin x \cos y$

$$dz = \cos x \cos y\, dx - \sin x \sin y\, dy$$
$$d^2 z = -\sin x \cos y\, dx^2 - 2 \cos x \sin y\, dx\, dy - \\ - \sin x \cos y\, dy^2$$
$$d^3 z = -\cos x \cos y\, dx^3 + 3 \sin x \sin y\, dx^2\, dy - \\ - 3 \cos x \cos y\, dx\, dy^2 + \sin x \sin y\, dy^3.$$

2. $z = y \log x$

$$dz = \frac{y}{x}\, dx + \log x\, dy$$
$$d^2 z = -\frac{y}{x^2}\, dx^2 + \frac{2}{x}\, dx\, dy$$
$$d^3 z = \frac{2y}{x^3}\, dx^3 - \frac{3}{x^2}\, dx^2\, dy.$$

3. Obliczyć różniczki drugiego i trzeciego rzędu funkcyj podanych w zadaniu 2, str. 281.

ROZDZIAŁ XI.

Funkcje wielu zmiennych.

1. Obszary. Punktem przestrzeni trójwymiarowej nazywać będziemy trójkę liczb (x, y, z). Punktem przestrzeni czterowymiarowej nazywać będziemy czwórkę liczb (x, y, z, t). Podobnie określamy punkt w przestrzeni wielowymiarowej.

Uwaga 1. Trójkę liczb (x, y, z) możemy uważać jako współrzędne pewnego punktu przestrzeni, w której obraliśmy trzy osie X, Y, Z, wzajemnie prostopadłe. Ta interpretacja geometryczna nie jest już możliwa dla czwórek liczb (x, y, z, t).

Otoczeniem punktu $P(x_0 y_0 z_0)$ przestrzeni trójwymiarowej nazywać będziemy wnętrze każdej kuli o środku P. Otoczeniem więc punktu P jest zbiór punktów (x, y, z), spełniających nierówność

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 < r^2,$$

gdzie r jest dowolną, zgóry obraną liczbą. Analog;cznie otoczeniem punktu $P(x_0 y_0 z_0 t_0)$ nazwiemy zbiór p unktów $(x y z t)$, spełniających nierówność

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+t-t_0)^2 < r^2 \quad (1).$$

Uwaga 2. Zbiór punktów (x, y, z), spełniających nierówność

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (t - t_0)^2 = r^2,$$

nazywać będziemy kulą w przestrzeni czterowymiarowej, o środku $(x_0\, y_0\, z_0\, t_0)$. Zbiór punktów spełniających nierówność (1) nazwiemy wnętrzem tej kuli.

Obszary i punkty brzegowe w przestrzeniach wielowymiarowych określamy podobnie jak w przestrzeni dwuwymiarowej. Należy tylko pojęcie otoczenia przestrzeni dwuwymiarowej zastąpić pojęciem otoczenia przestrzeni wielowymiarowej.

Przykłady:

1. Obszarami trójwymiarowemi są wnętrza sześcianu, prostopadłościanu, kuli i t. p. Brzegiem tych obszarów jest, odpowiednio, powierzchnia sześcianu, prostopadłościanu, kuli.

2. Zbiór punktów $(x\,y\,z\,t)$ spełniających nierówności: $a \leqslant x \leqslant a'$, $b \leqslant y \leqslant b'$, $c \leqslant z \leqslant c'$, $d \leqslant t \leqslant d'$, jest obszarem czterowymiarowym domkniętym i nazywa się przedziałem.

3. Zbiór punktów $(x\,y\,z)$ spełniających nierówności:

$$-1 < x < 1, \quad -1 < y < 1,$$

$$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

jest obszarem (wnętrzem kuli $x^2 + y^2 + z^2 = 1$).

2. Funkcje wielu zmiennych. Niechaj E będzie dowolnym zbiorem przestrzeni trójwymiarowej. Powiadamy, że w zbiorze E jest określona funkcja, jeżeli każdemu punktowi (x, y, z) zbioru E przyporządkowana jest liczba rzeczywista t. Związek funkcyjny oznaczamy jak poprzednio:

$$t = f(x, y, z).$$

Liczby x, y, z nazywamy zmiennemi niezależnemi, liczbę z zmienną zależną. Analogicznie określamy funkcje wielu zmiennych.

Przykłady funkcyj wielu zmiennych:

1. $t = x^2 + y^2 + z^2$ dla wszystkich x, y, z.
2. $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ „ „ x, y, z, t.
3. $w = \dfrac{x+y+z}{t-1}$ dla $t \neq 1$ i wszystkich x, y, z.

3. Granica. Ciągłość. Powiadamy, że ciąg punktów $\{x_n\ y_n\ z_n\}$ zdąża do punktu $(x_0\ y_0\ z_0)$, jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y_0, \quad \lim_{n \to \infty} z_n = z_0.$$

Analogicznie określamy granicę w przestrzeni cztero- i więcejwymiarowej. Mając pojęcie granicy ciągu, określamy pojęcie granicy i ciągłość funkcji wielu zmiennych podobnie jak dla funkcyj dwu zmiennych. Twierdzenia wypowiedziane w ust. 8, 9 rozdziału IX stosują się również (z odpowiedniemi zmianami) do funkcyj wielu zmiennych.

4. Pochodne cząstkowe. Jeżeli funkcja $t = f(x, y, z)$ określona jest w otoczeniu punktu $(x\ y\ z)$, wówczas granicę

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h},$$

jeśli istnieje, nazywamy pierwszą pochodną cząstkową względem x i oznaczamy symbolami:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{lub} \quad f'_x(x, y, z).$$

Podobnie określamy pochodne cząstkowe względem innych zmiennych, jako też pochodne funkcyj wielu zmiennych.

Przykłady:

1. $t = 3x^2 - 2xy + z^2$.

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 6x - 2y; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -2x; \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 2z.$$

2. $u = 2x - 3y + zt + 2t^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = t; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = z + 4t.$$

Wyrażenie

$$\frac{\partial^n t}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \qquad p + q + r = n \quad . \; . \; . \; (1)$$

oznacza nam funkcję, jaką otrzymamy, biorąc p razy pochodną względem x, następnie q razy pochodną względem y, wreszcie r razy pochodną względem z.

Ponieważ, jak wiemy dwa po sobie następujące różniczkowania możemy zamienić, zatem pochodna cząstkowa będzie określona, jeśli podamy liczbę różniczkowań, względem każdej zmiennej zosobna (pod założeniem, że wszystkie pochodne cząstkowe są ciągłe).

Przykłady:

1. $u = y^2 x^3 + t^2 y^3 x z^2$.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 6t^2 y^2 z; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = 6x^2 + 6t^2 y z^2.$$

2. $z = \frac{xyt}{1 + t^2}$.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}.$$

5. Wzór i szereg Tylore'a. Jeżeli funkcja $t = f(xyz)$ ma w otoczeniu punktu (xyz) pochodne, aż do n-tego rzędu ciągłe, wówczas postępując podobnie jak dla funkcyj dwóch zmiennych (str. 265), otrzymamy wzór

Tylore'a, względnie Maclaurine'a. W wypadku, gdy reszta dąży do zera, otrzymamy rozwinięcie naszej funkcji na szereg Tylore'a wzgl. Maclaurine'a.

P r z y k ł a d y:

1. $$e^{x+y+z} = 1 + \frac{x+y+z}{1!} + \frac{(x+y+z)^2}{2!} + \ldots + \\ + \frac{(x+y+z)^n}{n!} + \ldots$$

2. $$log \frac{1+x+y}{1+z} = \frac{x+y-z}{1} - \frac{(x+y)^2 - z^2}{2} + \\ + \frac{(x+y)^3 - z^3}{3} \ldots + (-1)^n \frac{(x+y)^{n-1} - z^{n-1}}{n} + R_n;$$

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\frac{(x+y)^n}{(1+\theta x + \theta y)^n} - \frac{z^n}{(1+\theta z)^n} \right], \quad 0 < \theta < 1.$$

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ II.

Funkcje jednej zmiennej.

ROZDZIAŁ III.

Granica funkcji.

ROZDZIAŁ IV.

Ciągłość funkcji.

ROZDZIAŁ V.

Pochodna funkcji.

ROZDZIAŁ VI.

Twierdzenia Rolle'a. Twierdzenie o wartości średniej. Wzór Taylora.

ROZDZIAŁ VII.

Maxima i minima; punkty przegięcia.

ROZDZIAŁ VIII.

Szeregi.

ROZDZIAŁ IX.

Funkcje dwu zmiennych.

ROZDZIAŁ X.

Wzór i szereg Taylora. Maxima i minima. Różniczki funkcyj dwu zmiennych.

ROZDZIAŁ XI.

Funkcje wielu zmiennych.