



AKADEMJA NAUK TECHNICZNYCH

Inż. Dr. MAKSYMILJAN THULLIE
PROFESOR HONOROWY POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

Inż. Dr. ALFONS CHMIELOWIEC

NAPRĘŻENIA DRUGORZĘDNE W BELKACH KRATOWYCH

(LES EFFORTS SECONDAIRES DANS LES POUTRES À TREILLIS)

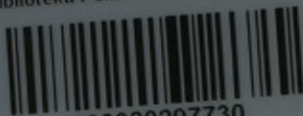
(Z 21 RYSUNKAMI W TEKŚCIE)

PRACA, WYGŁOSZONA W STRESZCZENIU NA POSIEDZENIACH
AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH WE LWOWIE DNIA 9 KWIETNIA
i 14 CZERWCA 1927 R.

LWÓW 1928

Z Drukarni Zakładu Narodowego imienia Ossolińskich
pod zarządem Kazimierza Figwera

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297730

AKADEMJA NAUK TECHNICZNYCH

Inż. Dr. MAKSYMILJAN THULLIE
PROFESOR HONOROWY POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

i

Inż. Dr. ALFONS CHMIELOWIEC

NAPRĘŻENIA DRUGORZĘDNE W BELKACH KRATOWYCH

(Z 21 RYSUNKAMI W TEKŚCIE)

PRACA, WYGŁOSZONA W STRESZCZENIU NA POSIEDZENIACH
AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH WE LWOWIE DNIA 9 KWIETNIA
I 14 CZERWCA 1927 R.

*nr 650
8/11/29
D)
Jim.*

LWÓW 1928

Z Drukarni Zakładu Narodowego imienia Ossolińskich
pod zarządem Kazimierza Figwera

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

~~II. 1549~~



II - 347808

Akc. Nr. 475/48

BPK-0442/2016

RÉSUMÉ.

Pour la poutre en treillis (fig. 4) sous la charge uniformément répartie sur toute la longueur on a calculé les efforts secondaires (conséquence des assemblages rigides) d'après la méthode la plus exacte de Manderla et celle de Ritter. On a trouvé, que :

1. La rigidité théorique des noeds n'a pas d'influence sur ses déplacements, c'est à dire que la figure de Williot est applicable non seulement pour la poutre en treillis avec des articulations dans tous les noeds, mais aussi pour celle avec des noeds rigides, rivées. On l'a prouvé aussi théoriquement (v. page 12 et 13).

2. Pour un état donné des déplacements des noeds on peut négliger l'influence des tensions longitudinales dans les barres sur la grandeur des moments fléchissants (de même sur les efforts secondaires), c'est à dire on peut appliquer l'équation (1) au lieu de l'éq. (2).

3. Dans la poutre avec triangulation du système **N** (avec des poteaux et des diagonales tendues) les efforts secondaires dans les membrures n'atteignent que 5% des efforts primaires non compris les barres extrêmes, dont les efforts secondaires sont plus grands. (I partie).

Le calcul approché des efforts secondaires dans les membrures, envisagées comme des poutres continues, dont les appuis s'abaissent, néglige l'encastrement partiel des extrémités. Au contraire nous en tenons compte, en regardant la toute circonférence de la poutre en treillis, comme une pièce continue. Nous y cherchons les moments fléchissants, en supposant que le treillis en est relié par des articulations. Sur base de déformations de la dite circonférence nous calculons les moments fléchissants dans les poteaux et diagonales et enfin nous trouvons l'influence des ces derniers sur les moments fl. dans les membrures et les poteaux extrêmes. Exemple numérique donne les valeurs des efforts secon-

dares peu différents des celles, obtenues d'après la méthode exacte. (Partie II).

Par la méthode simplifiée (nous en avons donné trois) on a construit la ligne d'influence d'effort secondaire ν_{II} dans le poteau 44' de la poutre fig. 18 et par comparaison avec celle d'effort primaire ν_I on a trouvé, que la position de la surcharge, la plus dangereuse pour l'effort primaire est presque identique avec celle pour l'effort secondaire. Ce dernier atteint dans le cas de la position dangereuse de la surcharge circa 30% d'effort primaire. En tenant compte de la charge constante totale et la surcharge partielle, on obtient pour effort secondaire ca 40% de l'effort primaire (Partie III).

LITERATURA, WYMIENIONA W TEKŚCIE.

Liczba z gwiazdką * oznacza odnośnik do jednego z poniższych dzieł.

1. Thullie: Podręcznik Teorji Mostów t. I. Cz. I. Wydanie trzecie 1922.
 2. — Podręcznik Teorji Mostów t. I. Cz. II.
 3. Bażant: Influence du système de triangulation sur les efforts secondaires Prague 1923.
 4. — Podružná napětí prutových soustav. Praha 1926.
 5. Manderla: Die Berechnung der Secundärspannungen. Allgem. Bztg. 1880.
 6. Landsberg: Beitrag zur Theorie der Fachwerke. Ztschr. der Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover 1885.
 7. Handbuch der Ing. Wissenschaft. II. Band, II. Abt. II. Auflage 1890 J.
 8. Mohr: Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen, Zivilingenieur 1892.
 9. Müller-Breslau: Graphische Statik II. Band II. Abt.
 10. Gehler: Die Ermittlung der Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken, Berlin 1910.
 11. Roš: Nebenspannungen infolge vernieteter Knotenpunktverbindungen. (Bericht der Gruppe V. der Technischen K. V. S. B.) Schw. Bztg. 1922.
 12. Hartmann: Zeitschrift des Ing. u. Arch. Vereines 1923. str. 85.
 13. Melan: Der Brückenbau. III. Band, I. Heft, str. 350.
 14. Grimm: Secondary Stresses in Bridge trusses N. Y. 1908.
 15. Timoszenko-Huber: Wytrzymałość materiałów.
 16. Paton: Rasczot fiern s žostkimi uzłami 1901.
 17. — Beitrag zur Berechnung der Nebenspannungen. Zeitschrift für Arch. u. Ing. Wesen 1902.
 18. Pareński: Wyniki badań naprężeń drugorzędnych. Przegląd Techniczny 1923.
 19. Bryła: Naprężenia drugorzędne w belkach kratowych. Podręcznik Inżynierski t. II. 1928, str. 1249.
 20. Chmielowiec: Projektowanie przekroju pasów kratownicy z uwzględnieniem naprężeń drugorzędnych. Przegląd Techn. 1927.
-

WSTĘP.

Rosnąca wciąż drożyzna żelaza, zmusza do najoszczędniejszego projektowania konstrukcyj żelaznych, czyli do możliwie najlepszego wyzyskania tego cennego materiału. — Należałoby więc zwiększyć naprężenia dopuszczalne. Nie może się to jednak odbyć kosztem bezpieczeństwa. Stąd dążność do gruntowniejszego poznania naprężeń rzeczywistych. Te ostatnie różnią się zwykle znacznie od naprężeń, jakie wykazuje się rachunkiem, a to z powodu nieuwzględnienia różnych wpływów. Jednym z najważniejszych czynników, które się przy obliczaniu pomija, jest sztywność węzłów w belkach kratowych, która powoduje t. zw. naprężenia drugorzędne.

Profesor politechniki praskiej Z. Bażant w swojej pracy ogłoszonej w języku czeskim i francuskim p. t. Wpływ rodzaju kraty na naprężenia drugorzędne (3*) wykreślił linie ugięcia pasa dolnego (pomost dołem) sześciu belek kratowych, różniących się rodzajem kraty, a obciążonych na całej długości w sposób ciągły i jednostajny. Z kształtu tych linii wywnioskował o wielkości naprężeń II-rzędnych danych belek i znalazł, że naprężenia te w procentach naprężeń I-rzędnych dochodzą do wartości: dla belki o kracie prostokątnej (**N**) 5%, o kracie równoramiennej (**V**) ze słupami 28%, o kracie **N** z drugorzędnym podparciem 33%; krata **V** z drugorzędnym podparciem wykazuje 44%, krata **K** 4%, krata **N** dwukrotna 86%.

Bażant uważa pas dolny za belkę ciągłą o poddających się podporach (którymi są węzły) i z równań 3 momentów znajduje momenty podporowe, a z tych oblicza naprężenia drugorzędne. To samo czynił Landsberg (6*) i Müller Breslau (9*). Sposób ten byłby ścisłym, gdyby krzyżulce, nie wyłączając narożników, były przytwierdzone do ciągłych lub nitowanych pasów zapomocą przegubów beztarciowych (por. Müller Breslau 9*). Słusznie zauważa

Bażant, że w miarę zbliżania się do środka belki kratowej sztywność pasów z reguły rośnie, krzyżulców zaś i słupów maleje, zatem i w przypadku nitowanych połączeń wpływ środkowych prętów kraty na naprężenia drugorzędne w pasach jest niewielki. — Również zgodzimy się z prof. Bażantem, że wpływ tęgich prętów kraty, znajdujących się w pobliżu podpór, na naprężenia drugorzędne w pasie jest wprawdzie znaczny, ale maleje szybko w miarę zbliżania się ku środkowi belki. — Prof. Bażant twierdzi jednakże, iż z reguły naprężenia drugorzędne rosną ku środkowi pasów, i że największe, więc miarodajne dla nas są naprężenia drugorzędne pasów w pobliżu ich środka. Twierdzenie to wydaje nam się wątpliwe. Dla jego sprawdzenia obliczyliśmy sposobem dokładnym wykreślnym Rittera i jeszcze dokładniejszym analitycznym Manderli, pierwszy przykład z pracy Bażanta.

Ponieważ dokładne obliczenie naprężeń drugorzędnych jest żmudne i wskutek tego rzadko stosowane, podano poniżej wyniki jego, aby zwiększyć materiał do oceny, czy dany typ belki jest stosowny z uwagi na naprężenia drugorzędne.

Pozatem interesujące jest porównanie wyników, otrzymanych metodą Rittera i Manderli, gdyż rzuca światło na kwestję, czy należy uwzględniać w dokładnem obliczeniu naprężeń drugorzędnych wpływ sił osiowych na wygięcie prętów, jak to czyni Manderla, czy też wolno go pominąć, jak to czynią Ritter, Mohr i in. Obliczenie analityczne przytoczono w całej rozciągłości, obliczenie zaś metodą wykreślną Rittera pominięto, ograniczono się tylko do podania jego wyników.

Sposób wykreślny Rittera opisał prof. Thullie w podręczniku Teorii Mostów, Tom I, Część II (2*). Przykład liczbowy poprzedziliśmy opisem dokładnych metod analitycznych i ich uzasadnieniem (Część I). W dalszym ciągu, nawiązując do prac Bażanta (3*) i (4*), opisaliśmy nowy sposób przybliżony wyznaczenia naprężeń drugorzędnych. O jego dokładności świadczy porównanie wyników obliczonych tym sposobem i sposobami dokładnymi (Część II). Wreszcie dla zbadania, jak wielki może być stosunek naprężeń drugorzędnych do naprężeń głównych w krzyżulcach i słupach belki kratowej, obliczyliśmy go dla pewnego pręta przy pomocy linii wpływowej i podaliśmy mniej i więcej dokładne sposoby jej wykreślenia (Część III).

I. Dokładna teoria naprężeń drugorzędnych.

Węzły belki kratowej zmieniają wskutek obciążenia swoje położenie. Kąty pomiędzy kierunkami, idącymi od dowolnego węzła do węzłów sąsiednich, doznają zatem zmiany (wogóle mówiąc doznają pewnych przyrostów dodatnich lub ujemnych). W belkach nitowanych węzły są sztywne.

W teorii naprężeń drugorzędnych przyjmujemy doskonałą sztywność węzłów, która na tem polega, że przy jakimkolwiek odkształceniu belki kąty pomiędzy stycznymi, poprowadzonymi z danego węzła do odkształconych prętów, schodzących się w nim, pozostają niezmienione. Pomiedzy temi stycznymi a cięciwami prętów (t. j. kierunkami od danego węzła m do węzłów sąsiednich $n_1, n_2, n_3 \dots$) powstają odchyłki, t. j. kąty odchylenia stycznych od cięciw (dodatnie, jeżeli w kierunku wskazówek zegara). Dowolny pręt wygina się w jedną stronę (gdy kąty odchylenia są różnego znaku) lub esowato. Znajduje się on więc nie tylko pod działaniem siły osiowej (jak w belce idealnej), ale i momentów, działających na jego końce t. j. momentów węzłowych.

Niech dla pręta mn (rys. 1) będzie:

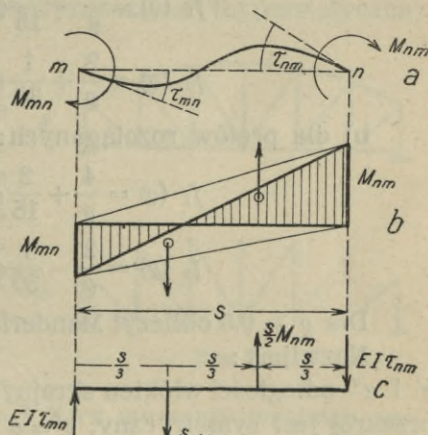
s długość,

J moment bezwładności przekroju względem osi ciężkości, prostopadłej do płaszczyzny belki,

τ_{mn} kąt odchylenia stycznej w punkcie m od cięciwy mn , analogicznie τ_{nm} ,

M_{mn} moment, działający na koniec m , analogicznie M_{nm} (znakowanie Mohra).

Gdyby pręt mn był pod działaniem wyłącznie tylko momentów, to związek między kątami odchylenia a momentami węzłowymi otrzymalibyśmy na zasadzie Mohra z równowagi belki, obciążonej wedle rys. 1 *c*. Równanie momentów względem punktu zaczepienia siły $\frac{s}{2}M_{nm}$ jest:



Rys. 1.

$$\frac{s}{2} M_{mn} \cdot \frac{s}{3} = EJ r_{mn} \cdot 2 \frac{s}{3} + EJ r_{nm} \cdot \frac{s}{3}$$

stąd
$$M_{mn} = 2 \frac{EJ}{s} (2 r_{mn} + r_{nm}) \dots \dots \dots (1)$$

Analogicznie M_{nm} . Ritter przyjął to równanie.

Manderla uwzględnił także wpływ siły osiowej S i znalazł:

$$M_{mn} = K r_{mn} + L r_{nm}, \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{gdzie, } K = f_1(\varrho) \cdot \sqrt{EJS}, L = f_2(\varrho) \cdot \sqrt{EJS} \dots \dots (2a)$$

f_1 i f_2 są to bardzo zawile funkcje (złożone z funkcji hyperbolicznych lub trygonometrycznych) zmiennej

$$\varrho = \sqrt{\frac{Ss^2}{EJ}} \dots \dots \dots (2b)$$

które można zastąpić szeregami zbieżnymi:

a) dla prętów ściskanych:

$$f_1(\varrho) = \frac{4}{\varrho} - \frac{2}{15} \varrho - \frac{11}{6300} \varrho^3 \dots \dots$$

$$f_2(\varrho) = \frac{2}{\varrho} + \frac{1}{30} \varrho + \frac{13}{12600} \varrho^3$$

b) dla prętów rozciąganych:

$$f_1(\varrho) = \frac{4}{\varrho} + \frac{2}{15} \varrho - \frac{11}{6300} \varrho^3$$

$$f_2(\varrho) = \frac{2}{\varrho} - \frac{1}{30} \varrho + \frac{13}{12600} \varrho^3$$

Dla $\varrho > 0.5$ obliczył Manderla tabliczkę wartości K i L (ob. 7*).

Nazwijmy:

e' i e'' odległości włókien skrajnych przekroju od osi ciężkości (gdy przekrój jest symetryczny, $e' = e''$), to z czterech wartości:

$$v = \frac{M_{mn}}{J} e', \frac{M_{mn}}{J} e'', \frac{M_{nm}}{J} e', \frac{M_{nm}}{J} e'' \dots \dots (3)$$

dwie są tego samego znaku, co siła osiowa. Z tych bezwzględnie większa jest miarodajnym naprężeniem drugorzędem w pręcie mn .

W przypadku (zresztą rzadkim), gdy momenty węzłowe wyginają ściskany pręt w jedną stronę i są sobie równe, to moment w środku pręta M_s jest większy od momentów węzłowych o bardzo małą wartość $S \cdot f$, gdzie S = siła osiowa, f strzałka ugięcia pręta.

Wtedy naprężenie drugorzędne jest to wartość $\frac{M_s \cdot e}{J}$. Wyjawszy ten przypadek, zagadnienie naprężeń drugorzędnych sprowadza się

zawsze do znalezienia momentów węzłowych, względnie kątów odchylenia. — Zresztą i w powyższym wyjątkowym przypadku, o ile pręt nie jest zbyt smukły, wolno z dostateczną dokładnością moment w środku pręta zastąpić momentem węzłowym.

W belce, posiadającej p prętów i w węzłów jest $2p$ momentów węzłowych. Między nimi możemy ustawić w równań. Dla każdego bowiem węzła w przypadku połączeń centrycznych musi być dla równowagi:

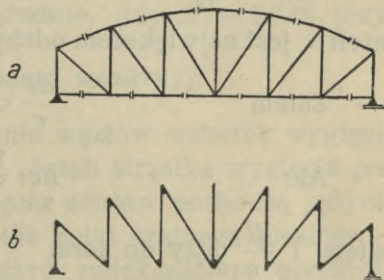
$$\Sigma M = 0 \quad (4)$$

w przypadku zaś połączeń mimośrodkowych

$$\Sigma M = \Sigma Se \quad (4a)$$

(Moment Se jest dodatni, jeżeli działa na węzeł w kierunku wskazówek zegara). — Mamy tedy $(2p - w)$ niewiadomych. Dla belki wolno podpartej, która jako idealna jest statycznie wyznaczalna (izostatyczna), jest $p = 2w - 3$. Zatem w przypadku węzłów sztywnych jest ona statycznie niewyznaczalna (hyperstatyczna) $(2p - w) = (3w - 6)$ -krotnie.

Do tego samego wniosku dojdziemy również przez opuszczenie lub przecięcie w każdym trójkącie belki jednego pręta, przezco powstaje belka łamana wolno podparta stat. wyznaczalna. Np. przez opuszczenie obu pasów w belce kratowej, prostokątnej (rys. 2) powstaje belka zygzakowata z jednym prętem wystającym.



Rys. 2.

Ponieważ w każdym przecięciu są 3 niewiadome: siła osiowa i dwa momenty węzłowe, podobnie w każdym przekroju: siła osiowa, siła poprzeczna i moment, przeto gdy belka kratowa o węzłach sztywnych posiada f trójkątów (lub innych figur zamkniętych), jest hyperstatyczną $3f$ -krotnie. Dla belki idealnej stat. wyznaczalnej jest $f = w - 2$, więc wskutek sztywności węzłów staje się ona $3f = 3w - 6$ -krotnie statycznie niewyznaczalna.

Tyleż należałoby ustawić równań sprężystości np. równań czterech momentów i łącznie z równaniami węzłów rozwiązywać system równań $2p = 4w - 6$ niewiadomych, co byłoby praktycznie niewykonalne. Jeżeli jednak przyjmiemy, że położenie węzłów belki odkształconej, a zatem i kąty między cięciwami są znane, to niewiadomych będzie w t.j. tyle, ile równań. Pierwszy uczynił to

Manderla (5*). Przyjął on, że przesunięcie węzłów belki kratowej nitowanej jest takie same jak belki idealnej, że zatem wykres Williota i wzory na przyrost kąta w trójkącie belki kratowej, wyprowadzone dla belki idealnej, są ważne i dla belki nitowanej. Doświadczenia potwierdzają to przyjęcie (11*). O jego prawdziwości przekonamy się również na przykładzie. Teoretyczne uzasadnienie tego przyjęcia, którego nie podaje, zdaje się, żaden autor, mogłoby być następujące.

Skoro zaniedbamy znikomy wpływ sztywności węzłów na wielkość sił osiowych w prętach, pozostaje do zbadania wpływ momentów, które powodują wygięcie prętów. Z powodu zakrzywienia końce pręta się zbliżają. Jednakże, jeżeli odchyłki ε kierunku osi pręta od jego cięciwy są wielkościami małymi I rzędu, to zbliżenie się końców pręta czyli różnica długości pręta i jego cięciwy jest wielkością małą wyższego rzędu. Różnica ta dla pręta o długości l

$$dl = \int_0^l (1 - \cos \varepsilon) dx < \int_0^l (1 - \cos \tau) dx = l (1 - \cos \tau),$$

jeżeli τ jest największym odchyleniem kierunku stycznej od cięciwy.

Zatem
$$\frac{dl}{\tau} < l \frac{1 - \cos \tau}{\tau}$$

Ale
$$\lim_{\tau=0} \frac{1 - \cos \tau}{\tau} = 0$$

zatem i $\frac{dl}{\tau}$ dąży do zera.

A że strzałka wygięcia f jest małą tego samego rzędu co τ , więc i

$$\lim_{f=0} \frac{dl}{f} = 0.$$

Niech np. odkształcony pręt o długości $2s$ przyjmie postać zakrzywioną łuku koła, względnie łańcuszkowej o cięciwie $2l$ i strzałce f . Nazwijmy promień koła r , parametr łańcuszkowej a . Niech $s : r = \alpha$, $l : a = \xi$ (por. Chmielowiec: Łańcuszkowa i jej zastosowanie. Życie Techniczne 1926. Listopad — grudzień). Wówczas będzie:

	dla koła	dla łańcuszkowej
$f =$	$r (1 - \cos \alpha)$	$a (\cos h \xi - 1)$
$s - l =$	$r (\alpha - \sin \alpha)$	$a (\sin h \xi - \xi)$
$\lim_{f=0} \frac{s - l}{f} =$	$\lim_{\alpha=0} \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = 0$	$\lim_{\xi=0} \frac{\sin h \xi - \xi}{\cos h \xi - 1} = 0$

W obu wypadkach otrzymujemy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$.

Przez dwukrotne różniczkowanie licznika i mianownika otrzymamy

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \lim_{\alpha=0} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha=0} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$$

$$\lim_{\xi=0} \frac{\sin h \xi - \xi}{\cos h \xi - 1} = \lim_{\xi=0} \frac{\cos h \xi - 1}{\sin h \xi} = \lim_{\xi=0} \frac{\sin h \xi}{\cos h \xi} = 0.$$

Zatem w obu wypadkach jest

$$\lim_{f=0} \frac{s-l}{f} = 0, \text{ a że } dl = 2(s-l), \text{ więc i } \lim_{f=0} \frac{dl}{f} = 0.$$

W zestawieniu powyższem rzuca się w oczy dziwna analogja funkcj trygonometrycznych \sin i \cos , z funkcjami hyperbolicznemi $\sin h$ i $\cos h$. Przypadek koła zachodzi ściśle, gdy oba momenty węzłowe są sobie arytmetycznie równe i wyginają pręt w tę samą stronę, a siła osiowa $S = 0$. Jeżeli $S < 0$ to linja ugięcia zbliża się do łańcuszkowej i staje się nią dokładnie, gdy $M_0 = \sqrt{EJS}$, przy-

czem parametr $a = \sqrt{\frac{EJ}{s}}$, ($M_0 =$ moment węzłowy).

Z powyższego widać, że zbliżenie węzłów wskutek wygięcia prętów jest praktycznie równe zeru, jeżeli strzałka wygięcia jest mała. — Zatem wzajemne przesunięcia węzłów pochodzą jedynie od sił osiowych, są więc takie, jak dla belki kratowej idealnej. — Ewentualne odchyłki należy tłumaczyć zwiększeniem przekroju prętów w pobliżu matematycznych węzłów (zmniejszenie ugięć), osłabieniem przez nity prętów ciągnionych (wpływ odwrotny), zastosowaniem nieco innych przekrojów niż w projekcie (warunki dostawy dopuszczają odchyłki kilkuprocentowe), niedokładnością przyjęcia modułu sprężystości E , niedokładnością wykonania, błędami materiału i t. p., a dopiero na ostatniem miejscu sztywnością teoretyczną węzłów, która, zmieniając nieco wielkość sił osiowych, zmniejsza nieznacznie ugięcie.

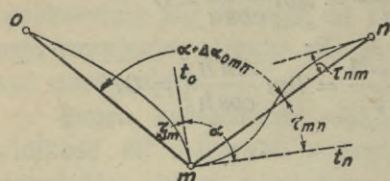
Dla każdego węzła znamy tedy stałe kąty α między stycznemi do prętów zbiegających się w tym węźle, tudzież kąty $\alpha + \Delta\alpha$ między cięciwami tych prętów. W trójkącie o bokach a, b, c , przyrost kąta α , leżącego naprzeciw pręta a , jest wedle 1*

$$E \Delta\alpha = (v_a - v_b) \cotg \gamma + (v_a - v_c) \cotg \beta \dots (5)$$

We wzorze powyższym $v_a =$ naprężenie w pręcie „ a “ (+ jeżeli

ciągnięcie). Przyrosty $\Delta\alpha$ można też wyznaczyć z planu Williota (por. niżej równ. 19). Na podstawie 5) można $E\Delta\alpha$ też wykreślić otrzymać (2*) (por. przykład 1, str. 18).

Wzajemną orientację dwu pęków promieni t. j. pęku stycznych i pęku cięciw ustala kąt odchylenia stycznej od cięciwy jednego



Rys. 3.

z prętów ($m - o$) (rys. 3), zbiegających się w danym węźle m . Manderla nazwał go ζ_m (Stellungswinkel des Knotens ($\tau_{mo} = \zeta_m$)) i wprowadził jako niewiadomą, przez którą da się wyrazić kąt odchylenia τ_{mn} każdego innego pręta mn przechodzącego przez węzeł m . Jeżeli bowiem α_{omn} jest to kąt, jaki pręty mo i mn tworzyły przed odkształceniem (czyli kąt między stycznymi¹⁾, zaś $\alpha_{omn} + \Delta\alpha_{omn}$, ten sam kąt po odkształceniu (między cięciwami), to (por. rys. 3)

$$\alpha_{omn} + \Delta\alpha_{omn} + \tau_{mn} = \zeta_m + \alpha_{omn}$$

czyli

$$\tau_{mn} = \zeta_m - \Delta\alpha_{omn} \dots \dots \dots (6)$$

Jeżeli pręty mo i mn przedzielone są innymi prętami np. ($m 1$) ($m 2$), to α_{omn} jest sumą kilku kątów

$$\alpha_{omn} = \alpha_{om1} + \alpha_{1m2} + \alpha_{2mo},$$

z których każdy należy do pewnego trójkąta, zaś

$$\Delta\alpha_{omn} = \Delta\tau_{om1} + \Delta\alpha_{1m2} + \Delta\alpha_{2mn} \dots \dots \dots (7)$$

Wstawiając (6) w (2) i (2) w (4) i rozwiązując (4) względem ζ_m , otrzymamy

$$\zeta_m = \frac{\sum K \Delta\alpha_{mn}}{\sum K} + \frac{\sum L \Delta\alpha_{mn}}{\sum K} - \frac{\sum L \zeta_n}{\sum K} \dots \dots \dots (8)$$

Sumy rozciągają się na wszystkie pręty, schodzące się w węźle m . Ponieważ wartości K są około 2 razy większe niż wartości L (z porównania r. 1 i 2 wynika, że dla $s = 0$ t. j. w przypadku zaniedbania sił osiowych jest dokładnie $K = 2L$), przeto najlepiej rozwiązać system w równań (jest ich tyle ile węzłów; w przypadku symetrycznego obciążenia jest ich $w : 2$) drogą kolejnych przybliżeń. Opuszczając ostatni człon r. (8), otrzymamy pierwsze przybliżenie (por. 7*, 14*)

¹⁾ Na rys. 3 zamiast α_{omn} jest α .

$$\zeta'_m = \frac{\sum K \Delta \alpha_{mn}}{\sum K} + \frac{\sum L \Delta \alpha_{mn}}{\sum K} \dots \dots \dots (9)$$

dla wszystkich węzłów, a więc i dla węzłów sąsiednich, t. j. ζ'_n .

Podstawiając za ζ_n w równ. (8) ζ'_n otrzymamy drugie przybliżenie ζ''_m i t. d. Powtarzamy tę czynność tak długo, aż różnice pomiędzy $\zeta^{(r-1)}$ a $\zeta^{(r)}$ staną się dowolnie małe. W przykładzie 1, wartości ζ^{VI} i ζ^{VII} są prawie takie same. Z porównania wartości ζ^{VII} i ζ' i $\frac{\sum K \Delta \alpha_{mn}}{\sum K}$ zauważyliśmy, że ta ostatnia wogóle bardziej się zbliża do ζ^{VII} , niż ζ' . Stąd wniosek, że należałoby jako pierwszą wartość przybliżoną przyjmować

$$\zeta'_m = \frac{\sum K \Delta \alpha_{mn}}{\sum K} \dots \dots \dots (10)$$

Ma ona znaczenie konkretne.

Gdyby węzeł badany m był sztywny, zaś węzły sąsiednie były idealnie przegubowe, to z równ. 2.

$$M_{mn} = K \tau_{mn} + L \tau_{nm}$$

$$M_{nm} = L \tau_{mn} + K \tau_{nm} = 0$$

otrzymalibyśmy:

$$\tau_{nm} = -\frac{L}{K} \tau_{mn},$$

$$M_{mn} = \tau_{mn} \left(K - \frac{L^2}{K} \right) = (\zeta_m - \Delta \alpha_{mn}) \left(K - \frac{L^2}{K} \right),$$

zatem z równ. (4)

$$\sum M_m = 0 = \zeta_m \sum \left(K - \frac{L^2}{K} \right) - \sum \Delta \alpha_{mn} \left(K - \frac{L^2}{K} \right)$$

wynika dla $K = 2L$ równ. (10).

Przykład 1. Belka górnoparaboliczna (rys. 4) niezbieżna. Rozpiętość $l = 12a = 43,2 m$, odstęp poprzecznic $a = 3,6 m$. Obciążenie jednostajnie rozłożone $q = 2,663 t/m$, zatem obciążenie jednego węzła dolnego $P = aq = 9,6 t$. Tablica prętów (Tablica I) podaje wszystko, co się odnosi do prętów. Długość s cm, przekrój F cm², siłę osiową S ton i moment bezwładności J cm⁴ wzięto z pracy Bażanta (3*, str. 9). Wedle równania 2 b obliczono ϱ (rubryka 6). Dla $\varrho > 0,5$ wzięto z tablic Manderli przez interpolację wartości $f_1(\varrho)$ i $f_2(\varrho)$ (rubryka 7 i 8), a według równ. 2 a) obliczono K i L (rubr. 10 i 11). Dla $\varrho < 0,5$ można siły osiowej nie uwzględniać, więc wedle równ. 1 $K = 2L = 4 \frac{EJ}{s}$.

W tablicy II (t. kierunków str. 20—23) każdy pręt wpisano dwa razy, gdyż w pręcie rozróżniamy dwa kierunki. Z powodu symetrii badamy tylko połowę belki. Dla każdego węzła jakokierunek zasa-

TABL. I.

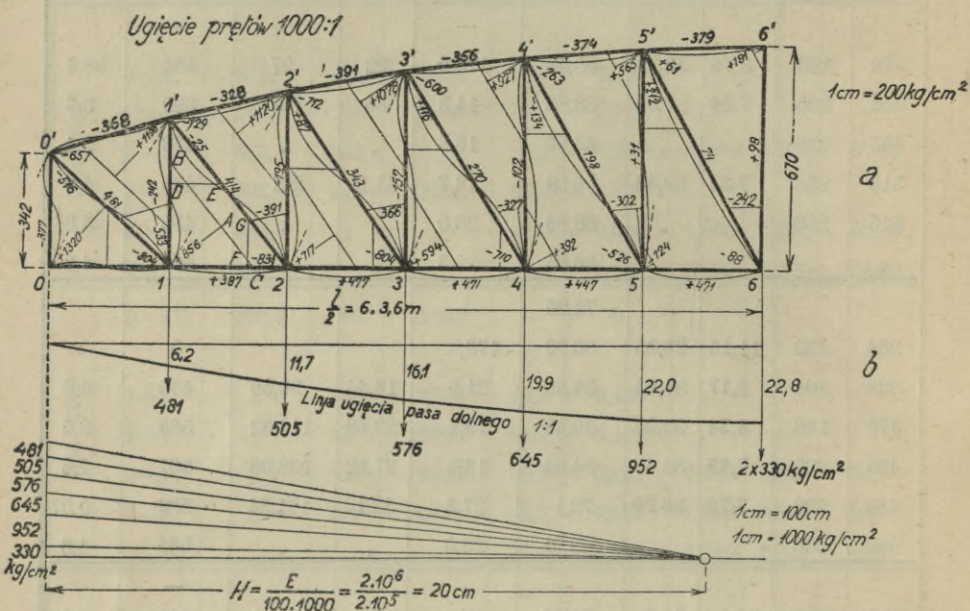
TABLICA

Pręt	s cm	F cm ²	J cm ⁴	S t	$\sqrt{\frac{Ss^2}{EJ}}$	$f_1(\rho)$	$f_2(\rho)$	$\frac{\sqrt{EJS}}{1,000.000}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
pas górny	0'—1'	375,9	120	15595	44,1	0,447			
	1'—2'	369,7	203	20910	66,5	0,466			
	2'—3'	365,3	203	20910	79,4	0,503	7,893	3,997	57,65
	3'—4'	362,4	245	23413	87,3	0,495			
	4'—5'	360,8	"	"	91,6	0,505	7,866	3,984	65,50
	5'—6'	360,1	"	"	92,9	0,507	7,839	3,971	66,00
pas dolny	0—1	360,0	80	11881	0	0			
	1—2	"	109	14769	42,2	0,430			
	2—3	"	137	16903	64,7	0,499			
	3—4	"	166	18752	78,3	0,521	7,789	3,842	54,3
	4—5	"	194	20476	86,7	0,524	7,750	3,822	59,5
	5—6	"	"	"	91,4	0,538	7,565	3,729	61,1
słupy	0—0'	342	140	4793	52,8	0,802	4,881	2,521	22,41
	1—1'	450	126	3264	30,5	0,971	3,998	2,097	14,11
	2—2'	534	95	1759	18,5	1,221	3,113	1,682	8,05
	3—3'	596	67	1391	10,5	1,158	3,303	1,771	5,3
	4—4'	638	42	894	4,3	0,990	3,911	2,056	2,78
	5—5'	662	"	"	+1,3	0,565	7,208	3,548	1,525
	6—6'	670	"	"	+4,1	1,015	4,078	1,940	2,71
krzyżulce	0'—1	496,6	121	3542	58,3	1,429	2,987	1,355	20,3
	1'—2	576,3	87	1286	36,0	2,160	2,144	0,873	9,63
	2'—3	644,0	71	835	24,3	2,46	1,936	0,748	6,37
	3'—4	696,3	60	692	16,2	2,38	1,991	0,780	4,74
	4'—5	732,6	48	551	9,5	2,15	2,150	0,877	3,23
	5'—6	753,5	42	498	3,1	1,33	3,184	1,463	1,757

PRETÓW.

$K: 10^6$	$L: 10^6$	e'	e''	M_{mn} M_{nm}	ν kg/cm^2	N cm^2	F_o	$\nu_I = \frac{S}{F_o}$ kg/cm^2	$\frac{100\nu}{\nu_I}$ %
		cm							
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
332	166	8,75	32,75	83,48	175,0	22	97	454	38,6
452	226	7,69	37,01	38,88	14,3	36	167	399	3,6
455	230	"	"	43,90	16,3	"	"	476	3,4
516	258	7,84	38,46	56,08	18,7	43,15	201	435	4,3
515	260	"	"	68,66	23,0	"	"	455	5,06
"	"	"	"	66,85	22,3	"	"	462	4,8
				-72,25	+			+	
264	132	11,15	28,85	66,00	176,			0	∞
328	164	9,17	31,93	34,83	21,6	18,44	90,56	466	4,6
376	188	8,24	33,96	40,45	19,7	22,68	114,32	566	3,5
423	209	7,83	35,47	34,64	14,5	27,92	138,08	567	2,6
460	228	7,70	36,70	72,1	27,2	32,16	161,84	536	5,07
462	230	"	"	68,91	26,0	"	"	565	4,6
109	56,5	14,0	14,0	72,25	212	11,4	127,4	415	51,1
56	29,7	12,0	12,0	43,3	159	12,3	114,3	266	59,8
25	13,6	10,0	10,0	17,33	98	11,4	85,8	215	45,5
17,5	9,4	9,5	9,5	11,17	76	10,5	57,0	185	41,0
10,85	5,7	11,5	11,5	5,64	58	4,4	37,6	119	48,8
11,00	5,4	"	"	2,08	26,8	"	"	+ 34	79,0
11,00	5,3	"	"	0	0	"	"	+108	0
								+	
60,5	27,5	13	13	18,7	69	10,6	110	530	13,0
20,6	8,4	9	9	11,9	83	11,4	75,8	475	17,5
12,3	4,75	8	8	6,95	67	10,6	61	400	16,7
9,45	3,70	8	8	4,98	58	8,8	51,6	320	18,1
7,0	2,84	8	8	2,50	36	7,0	42,2	226	15,9
5,6	2,57	3,11	7,89	0,48	3	4,4	38,0	82	3,7

dniczy ($m-o$) obieramy lewy pręt obwodu belki, patrząc od zewnątrz. Np. dla węzła 3 kierunek 3—2, dla węzła 3' kierunek 3'—4'. (Manderla przyjmuje prawy pręt pasa jako kierunek zasadniczy i musi z tego powodu obliczać τ_{mn} innym równaniem dla pasa górnego (r. 6) a innym dla dolnego, stąd łatwo o pomyłkę (por. 7*).



Rys. 4. Skale wypisane na rys. 4, dotyczą oryginału, na którym $H = 20\text{ cm}$. Rzędne linii ugięcia podane są w milimetrach. Sprostowanie: zamiast „Ugięcie prętów” ma być: kąty odchylenia, zamiast $2,10^5$ ma być 10^5 .

Przyrosty $E \Delta \alpha$, znaleziono wykreślnie (rys. 4a) sposobem, opisanym w Podręczniku Teorii Mostów (Cz. I. T. II, str. 140) Thulliego (2*). Naprzykład w trójkącie $121'$ kreślimy $1A \perp 1'2'$, $1A = \nu_{21}' = \frac{S}{F} =$ naprężenie w pręcie $21' = \frac{36000}{87} = 414\text{ kg/cm}^2$. (Naprężenia prętów wypisane są na nich w kg/cm^2). Przez punkt A kreślimy $BC \parallel 1'2'$ aż do przecięcia się z bokami $11'$ i $12'$. Wtedy $AB = 1A \cotg 1BA = \nu_{21}' \cdot \cotg 11'2'$. Podobnie $AC = \nu_{21}' \cdot \cotg 121'$. Odcinając $1'D = \nu_{12}$ i $2'F = -\nu_{11}'$ (gdyż $\nu_{11}' < 0$), otrzymamy $DE = \nu_{12} \cotg 1'21$ i $FG = -\nu_{11}' \cdot \cotg 11'2'$.

Według równ. (5) będzie zatem

$$E \Delta \alpha_{112} = BC - DE + FG = + 856 \text{ kg/cm}^2$$

$$E \Delta \alpha_{112} = DE - AC = - 25 \quad "$$

$$E \Delta \alpha_{121} = - FG - AB = - 831 \quad "$$

$$\text{Kontrola} = 0 \text{ kg/cm}^2$$

Z przyrostów $E \Delta \alpha$, wpisanych w rysunek 4a obliczono wartości $E \Delta \alpha_{on}$ (II 4)¹⁾ dla każdego kierunku według równ. 7, np. dla kierunku 33' t. j. dla $m = 3$, $n = 3'$ jest $E \Delta \alpha_{33'} = E \Delta \alpha_{232'} + E \Delta \alpha_{233'} = - 804 - 366$ ²⁾ = - 1170.

W rubryce II 3 przepisano K z rubryki I 10, rubr. II 5 podaje iloczyny $K \Delta \alpha$, których sumy wpisano do tablicy III (tablicy węzłów)³⁾ (III 3) np. dla $m = 5'$ jest $0,4 + 3,0 + 431,5 = 434,9$. Rubr. III 2 podaje ΣK np. $515 + 6 + 11 + 515 = 1047$, rubryka III 4 $\Sigma K \Delta \alpha : \Sigma K$, pierwszy wyraz prawej strony równ. 8, np. $10^9 \cdot 6$. $434,9 : 1047 = 415$. Podobnie przy pomocy rubryk II 6, 7, 8 i III 5 znaleziono drugi wyraz równ. (8) (III 6), a z równ. (9) ζ' (III 7) np. $415 + 85 = 500$.

W rubryce 9 tablicy II wpisano wartości ζ'_n z kolumny 7 III np. dla węzła 3 $\zeta'_2 = - 442$, $\zeta'_{2'} = + 334$, $\zeta'_{3'} = + 449$, $\zeta'_4 = - 484$. Rubryka 10 II podaje $L \zeta'_n$, III 8 $\Sigma L \zeta'_n$, III 9 $\Sigma L \zeta'_n : \Sigma K$, wreszcie (III 10) = $\zeta'' = \zeta' -$ (III 9) wedle równ. 8) np. dla $m = 5'$ $500 - 187 = + 313$. Podobnie przez kolejne użycie tablic II i III znaleziono wartości ζ''' , ζ'''' ... aż do ζ'''''' . Rubryka II 21 = $\tau_{mn} = \zeta'''''' - \Delta \alpha_{on}$ (równ. 6). W rysunek 4a wkreślono styczne do prętów we węzłach, przyjmując dla $tg \tau_{mn}$ powiększenie 1000-krotne. Według tych stycznych wkreślono od ręki linje ugięcia prętów. Rubryka II 22 podaje iloczyny $K \tau_{mn}$, podzielone przez 10^9 np. $515 \cdot 10^6$. $351 = 181 \cdot 10^9$, II 23 = τ_{nm} , II 24 = $L \tau_{nm}$, wreszcie II 25 = $K \tau_{mn} + L \tau_{nm} = M_{mn}$ (równ. 2). Ponieważ dla obliczenia ζ i τ użyto wartości $E \Delta \alpha$ (rubryka II 4) zamiast $\Delta \alpha$, przeto wszystkie wartości w rubrykach dalszych aż do rubryki 25 II są pomnożone przez E . Rubryka 26 II podaje momenty węzłowe w tc_m . Otrzymano ją z rubr. 25 II, dzieląc przez $E = - 2.10^6 \text{ kg/cm}^2$ np. $(134.10^9) : (2.10^6) = 67.000 \text{ kg cm} = 67 \text{ tc}_m$. Warunek $\Sigma M = 0$ (równ. 4) daje kontrolę rachunku; ewentualne odchyłki należy wyrównać, stąd $M_{6/6}' = 66,85 \text{ tc}_m$ zamiast 67. W tablicy I 14 wpisano tę wartość z pośród dwu wartości II 26, która daje (równ. 3) miarodajne naprężenie drugorzędne. Odpowiednia wartość e (rubr. I 12 i 13) jest oznaczona tłustym drukiem.

¹⁾ Cyfra rzymska oznacza tablicę, cyfra arabska kolumnę, czyli rubrykę, więc II 4 = druga tablica, czwarta rubryka.

²⁾ Na rys. 4 a, zamiast 366 przy węźle 3 ma być - 366.

³⁾ str. 24 - 26.

TABL. II.

TABLICA

m	n	$\frac{K}{10^6}$	$E\Delta\alpha$	$\frac{K\Delta\alpha}{10^9}$	$\frac{L}{10^6}$	$\Delta\alpha_{nm}$	$\frac{L\Delta\alpha_{nm}}{10^9}$
1	2	3	4	5	6	7	8
6'	5'	515			260	+ 838	+ 218
	6	11	+ 181	+ 2,0	5,3	- 330	1,7
	5'	515	+ 362	+ 186,2	260		
5'	6'	515			260	+ 362	+ 94,1
	6	6	+ 61	+ 0,4	2,6	- 88	- 0,2
	5	11	+ 273	+ 3,0	5,4	- 828	- 4,5
	4'	515	+ 838	+ 431,5	260		
4'	5'	515			260	+ 838	+ 218
	5	7	- 263	- 1,8	2,8	- 526	- 1,5
	4	11	- 129	- 1,4	5,7	- 1037	- 5,9
	3	516	+ 798	+ 411,0	258		
3'	4'	516			258	+ 798	+ 205,8
	4	9	- 600	- 5,4	3,7	- 710	- 2,6
	3	18	- 484	- 8,7	9,4	- 1170	- 11,0
	2'	455	+ 594	+ 270,0	230		
2'	3'	455			230	+ 594	+ 136,2
	3	12	- 712	- 8,6	4,8	- 804	- 3,9
	2	25	- 625	- 15,6	13,6	- 1222	- 16,7
	1'	452	+ 495	+ 223,9	226		
1'	2'	452			226	+ 495	+ 112,0
	2	21	- 729	- 15,3	8,4	- 831	- 7,0
	1	56	- 754	- 42,3	29,7	- 1337	- 39,8
	0'	332	+ 436	+ 144,8	166		
0'	1'	332			166	+ 436	+ 72,5
	1	61	- 657	- 40,0	27,5	- 804	- 22
	0	109	- 1173	- 128,0	56,5		
0	0'	109			56,5	- 1173	- 66,4
	1	264	+ 1320	+ 348	132		
1	0	264			132	+ 1320	+ 174,5
	0'	61	- 804	- 49	27,5	- 657	- 18,1
	1'	56	- 1337	- 75	29,7	- 754	- 22,4
	2	328	- 481	- 158,0	164		
2	1	328			164	- 481	- 79
	1'	21	- 831	- 17,6	8,4	- 729	- 6,1
	2'	25	- 1222	- 30,5	13,6	- 625	- 8,5
	3	376	- 505	- 189,9	188		
3	2	376			188	- 505	- 95
	2'	12	- 804	- 9,7	4,8	- 712	- 3,4
	3'	18	- 1170	- 21,0	9,4	- 484	- 4,5
	4	423	- 576	- 243,8	209		
4	3	423			209	- 576	- 120
	3'	9	- 710	- 6,4	3,7	- 600	- 2,2
	4'	11	- 1037	- 11,4	5,7	- 129	- 0,7
	5	460	- 645	- 296,5	228		
5	4	460			228	- 645	- 147
	4'	7	- 526	- 3,7	2,8	- 263	- 0,7
	5'	11	- 828	- 9,1	5,4	+ 273	+ 1,5
6	6	462	- 952	- 439,5	230		
	5	462			230	- 952	- 219
	5'	6	- 88	- 0,5	2,6	+ 61	+ 0,2
	6'	11	- 330	- 3,6	5,3	+ 181	+ 1,0

KIERUNKÓW.

ζ_n^I	$\frac{L\zeta_n^I}{10^9}$	ζ_n^{II}	$L\zeta_n^{II}$	ζ_n^{III}	$L\zeta_n^{III}$	ζ_n^{IV}	$L\zeta_n^{IV}$
9	10	11	12	13	14	15	16
		- 330 + 313					
+ 181 - 330 - 637 + 590	+ 47,0 - 0,9 - 3,4 + 153,1	+ 181 - 330 - 443 + 360	+ 47 - 1 - 2 + 94	+ 181 - 330 - 505 + 458	+ 47 - 1 - 3 + 119	181 330 482 424	+ 47 - 1 - 3 + 110
+ 500 - 637 - 484 + 449	+ 130,0 - 1,8 - 2,8 + 116	+ 313 - 443 - 224 + 225	+ 82 - 1 - 1 + 58	+ 368 - 505 - 320 + 315	+ 96 - 1 - 2 + 81	345 482 284 278	+ 90 - 1 - 2 + 72
+ 590 - 484 - 456 + 334	+ 152,1 - 1,8 - 4,3 + 76,8	+ 360 - 224 - 241 + 191	+ 93 - 1 - 2 + 44	+ 458 - 320 - 337 + 249	+ 118 - 1 - 3 + 57	424 284 303 214	+ 109 - 1 - 3 + 49
+ 449 - 456 - 442 + 177	+ 103,0 - 2,2 - 6,0 + 40,0	+ 225 - 241 - 290 + 146	+ 52 - 1 - 4 + 33	+ 315 - 337 - 334 + 208	+ 73 - 2 - 5 + 47	278 303 301 197	+ 64 - 1 - 4 + 45
+ 334 - 442 - 209 - 234	+ 75,0 - 3,7 - 6,2 - 38,8	+ 191 - 290 - 246 - 366	+ 43 - 2 - 7 - 61	+ 249 - 334 - 294 - 365	+ 56 - 3 - 9 - 61	214 301 294 389	+ 48 - 3 - 9 - 65
+ 177 - 209 + 757	+ 29,4 - 5,8 + 42,9	+ 146 - 246 + 866	+ 24 - 7 + 49	+ 208 - 294 + 902	+ 35 - 8 + 51	197 294 918	+ 33 - 8 + 52
- 234 - 209	- 13,2 - 27,6	- 366 - 246	- 21 - 33	- 365 - 294	- 21 - 39	389 294	- 22 - 39
+ 757 - 234 + 177 - 442	+ 100,0 - 6,4 + 5,3 - 72,5	+ 866 - 366 + 146 - 290	+ 114 - 10 + 4 - 48	+ 902 - 365 + 208 - 334	+ 119 - 10 + 6 - 55	918 389 197 301	+ 121 - 11 + 6 - 49
- 209 + 177 + 334 - 456	- 34,3 + 1,5 + 4,5 - 85,8	- 246 + 146 + 191 - 241	- 40 + 1 + 3 - 45	- 294 + 208 + 249 - 337	- 48 + 2 + 3 - 63	294 197 214 303	- 48 + 2 + 3 - 57
- 442 + 334 + 449 - 484	- 83,2 + 1,6 + 4,5 - 101,0	- 290 + 191 + 225 - 224	- 55 + 1 + 2 - 47	- 334 + 249 + 315 - 320	- 63 + 1 + 2 - 67	301 214 278 284	- 57 + 1 + 2 - 60
- 456 + 449 + 590 - 637	- 95,5 + 1,8 + 3,4 - 145,1	- 241 + 225 + 360 - 443	- 50 + 1 + 2 - 101	- 337 + 315 + 458 - 505	- 70 + 1 + 3 - 115	303 278 424 482	- 63 + 1 + 2 - 110
- 484 + 590 + 500 - 330	- 110,4 + 1,7 + 2,7 - 76,0	- 224 + 360 + 313 - 330	- 51 + 1 + 2 - 76	- 320 + 458 + 368 - 330	- 73 + 1 + 2 - 76	284 424 345 330	- 65 + 1 + 2 - 76
- 637 + 500 + 181		- 443 + 313 + 181					

TABL. II.

TABLICA

ζ_n^V	$L\zeta_n^V$	ζ_n^{VI}	$L\zeta_n^{VI}$	τ_{mn}	$\frac{K\tau_{mn}}{10^9}$	τ_{nm}
17	18	19	20	21	22	23
				+ 181		
				- 181	- 93	351
181	+ 47	181	+ 47	+ 351	+ 181	181
330	- 1	330	- 1	+ 290	+ 1,62	242
490	- 3	488	- 3	+ 78	+ 0,86	339
438	+ 114	433	+ 113	- 487	- 250	434
354	+ 92	350	+ 91	+ 434	+ 223	487
490	- 1	488	- 1	+ 697	+ 4,85	37
296	- 2	289	- 2	+ 563	+ 6,11	745
295	+ 76	288	+ 75	- 364	- 188	291
438	+ 113	433	+ 112	+ 291	+ 150	364
296	- 1	289	- 1	+ 891	+ 8,40	418
319	- 3	316	- 3	+ 775	+ 13,60	852
224	+ 52	217	+ 50	- 303	- 138	219
295	+ 68	288	+ 66	+ 219	+ 100	303
319	- 1	316	- 1	+ 931	+ 11,53	486
309	- 4	302	- 4	+ 844	+ 21	920
211	+ 48	206	+ 47	- 276	- 125	209
224	+ 51	217	+ 49	+ 209	+ 94	276
309	- 3	302	- 3	+ 938	+ 19,4	529
304	- 9	302	- 9	+ 963	+ 54,0	1032
387	- 64	391	- 65	- 227	- 75	389
211	+ 35	206	+ 34	- 389	- 129	227
304	- 8	302	- 8	+ 268	+ 16,2	499
921	+ 52	923	+ 52	+ 787	+ 85	923
387	- 22	391	- 22	+ 923	+ 100	784
304	- 40	302	- 40	- 397	- 105	305
921	+ 122	923	+ 122	- 305	- 80	397
387	- 11	391	- 11	+ 499	+ 30	268
211	+ 6	206	+ 6	+ 1032	+ 58	963
309	- 51	302	- 50	+ 176	+ 58	302
304	- 50	302	- 50	- 302	- 99	176
211	+ 2	206	+ 2	+ 529	+ 10,93	938
224	+ 3	217	+ 3	+ 920	+ 23,0	844
319	- 60	316	- 60	- 203	+ 76	318
309	- 58	302	- 57	- 318	- 119	203
224	+ 1	217	+ 1	+ 486	+ 6,00	931
295	+ 3	288	+ 3	+ 852	+ 15,00	775
296	- 62	289	- 61	+ 258	+ 109	292
319	- 67	316	- 66	- 292	- 123	258
295	+ 1	288	+ 1	+ 418	+ 3,95	891
438	+ 2	433	+ 2	+ 745	+ 8,10	563
490	- 112	488	- 111	+ 353	+ 162	489
296	- 67	289	- 66	- 489	- 225	353
438	+ 1	433	+ 1	+ 37	+ 0,27	697
354	+ 2	350	+ 2	+ 339	+ 3,74	78
330	- 76	330	- 76	+ 463	+ 214	330
				- 330	- 152	463
				- 242	- 1,36	290

KIERUNKÓW (d. c.)

$\frac{L \tau_{nm}}{10^9}$	$\frac{EM_{mn}}{10^9}$ kg/cm ²	M t cm	Ritter t cm	ΔM t cm	%
24	25	26	27	28	29
+ 91	- 2	- 1	- 1,19	0,19	19
- 47	+ 134	+ 66,85	+ 69,24	2,39	3,6
- 0,63	+ 0,99	+ 0,48	+ 0,46	0,02	4,0
+ 1,82	+ 2,68	+ 1,33	+ 1,38	0,05	3,8
+ 113	- 137	- 68,66	- 71,10	2,20	3,1
- 127	+ 96	+ 48,35	+ 51,18	2,80	5,6
+ 0,10	+ 4,95	+ 2,50	+ 2,16	0,34	13,6
+ 4,25	+ 10,36	+ 5,23	+ 5,22	0,01	0,2
+ 75	- 113	- 56,08	- 58,56	2,48	5,0
- 94	+ 56,2	+ 28,10	+ 26,58	1,52	5,5
+ 1,55	+ 9,95	+ 4,98	+ 4,32	0,66	13
+ 8,04	+ 21,64	+ 10,82	+ 11,16	0,34	3,1
+ 50	- 88	- 43,90	- 42,06	0,84	2,3
- 70	+ 30	+ 15,05	+ 17,34	2,29	14
+ 2,34	+ 13,87	+ 6,95	+ 6,06	0,89	14
+ 12,56	+ 33,66	+ 16,88	+ 17,28	0,40	2,3
+ 47	- 78	- 38,88	- 40,68	1,80	4,5
- 62	+ 32	+ 16	+ 14,82	1,18	7,5
+ 4,45	+ 23,85	+ 11,9	+ 10,80	1,1	10,0
+ 30,6	+ 84,6	+ 42,2	+ 42,90	0,70	1,7
- 65	- 140	- 70,1	- 68,52	1,58	2,3
- 38	- 167	- 83,48	- 86,88	3,40	4,0
+ 13,8	+ 29,92	+ 14,96	+ 14,70	0,26	1,8
+ 52	+ 137	+ 68,52	+ 72,18	3,66	5,2
+ 44	+ 144	+ 72,25	+ 75,6	3,35	4,5
- 40	- 145	- 72,25	- 75,6	3,35	4,5
- 52	- 132	- 66	- 66,54	0,54	0,8
+ 7,40	+ 37,40	+ 18,7	+ 18,80	0,10	0,6
+ 28,6	+ 86,60	+ 43,3	+ 43,5	0,20	0,5
- 50	+ 8	+ 4	+ 4,2	0,20	5
+ 29	- 70	- 34,83	- 38,1	3,30	9
+ 7,9	+ 18,83	+ 9,45	+ 8,8	0,65	8
+ 11,5	+ 34,50	+ 17,33	+ 18,3	0,03	6
- 60	+ 16	+ 8,05	+ 11,0	2,95	32
+ 38	- 81	- 40,45	- 38,9	1,55	4
+ 4,49	+ 10,49	+ 5,25	+ 4,8	0,45	9
+ 7,30	+ 22,30	+ 11,17	+ 11,5	0,2	2,7
- 61	+ 48	+ 24,03	+ 22,7	1,3	5,6
+ 54	- 69	- 34,64	- 33,5	1,14	3,3
+ 3,30	+ 7,25	+ 3,60	+ 3,3	0,30	9
+ 3,22	+ 11,32	+ 5,64	+ 5,5	0,14	2,5
- 111	+ 51	+ 25,40	+ 24,7	0,7	3
+ 81	- 144	- 72,1	- 72,7	0,6	8,4
+ 1,96	+ 2,23	+ 1,11	+ 1,14	0,03	3
+ 0,42	+ 4,16	+ 2,08	+ 2,1	0,02	0
- 76	+ 138	+ 68,91	+ 69,4	0,50	0,7
+ 106	- 46	- 23	- 20,5	2,50	11
+ 0,76	- 0,60	- 0,30	- 0,20	0,20	30
		0	0		

m	$\frac{\Sigma K}{10^6}$	$\frac{\Sigma K \Delta \alpha_n}{10^9}$	$\frac{\Sigma K \Delta \alpha}{\Sigma K}$	$\frac{\Sigma L \Delta \alpha}{10^9}$	$\frac{\Sigma L \Delta \alpha}{\Sigma K}$	ζ'	$\frac{\Sigma L \zeta'_n}{10^9}$
1	2	3	4	5	6	7	8
6'						+ 181	
5'	1047	+ 434,9	+ 415	+ 89,4	+ 85	+ 500	+ 195,9
4'	1049	+ 407,9	+ 389,5	+ 210,6	+ 201	+ 590	+ 241,4
3'	998	+ 255,9	+ 256	+ 192,2	+ 193	+ 449	+ 222,8
2'	944	+ 199,7	+ 211,6	+ 115,6	+ 122,5	+ 334	+ 134,8
1'	861	+ 87,2	+ 101	+ 65,2	+ 75,7	+ 177	+ 26,8
0'	502	- 168,0	- 335	+ 50,5	+ 100,6	- 234	+ 66,5
0	373	+ 348,1	+ 935	- 66,4	- 177,6	+ 757	- 40,8
1	709	- 282	- 398	+ 134,0	+ 189,3	- 209	+ 26,4
2	750	- 238	- 317	- 93,6	- 125	- 442	- 114,1
3	829	- 274,5	- 332	- 102,9	- 124	- 456	- 178,1
4	903	- 314,3	- 348	- 122,9	- 136	- 484	- 235,4
5	940	- 452,3	- 481	- 146,2	- 155,5	- 637	- 182,0
6						- 330	

Wreszcie otrzymujemy I 15 $\nu = \frac{Me}{J}$. Rubr. I 18 podaje naprężenie pierwszorzędne ν_1 kg/cm^2 , zaś I 19 wartość naprężenia drugorzędного w procentach naprężenia pierwszorzędного t. j. $100 \frac{\nu}{\nu_1}$. Rubryka II 27 podaje wartości momentów węzłowych, otrzymanych wykreślną metodą Rittera w trzecim przybliżeniu. Odchyłki od wyników, otrzymanych analitycznie, zestawiono w rubr. II 28, zaś odchyłki procentowe w rubr. II 29. Ponieważ naprężenia drugorzędne są proporcjonalne do momentów węzłowych (r. 3), przeto wystarczy porównać momenty węzłowe.

Z porównania wyników, otrzymanych sposobem Manderli (II 26) i Rittera (II 27), wynika zadowalająca zgodność obu sposobów. Gdzie różnice są znacznie większe liczebnie (II 28), tam są one znikome procentowo (II 29) i nawzajem. Zgodność ta jest tem więcej uderzająca, że obie metody są metodami kolejnych przybliżeń, że więc nie mogą one dać wartości zupełnie dokładnych. Ponieważ Ritter opiera się na równ. (1) zaś Manderla na równ. (2)

WEZŁÓW

$\frac{\sum L \zeta_n^I}{\sum K}$	ζ_{II}	$\frac{\sum L \zeta_n^{II}}{10^9}$	$\frac{\sum L \zeta_n^{II}}{\sum K}$	ζ_{III}	$\frac{\sum L \zeta_n^{III}}{10^9}$	$\frac{\sum L \zeta_n^{III}}{\sum K}$	ζ_{IV}	$\frac{\sum L \zeta_n^{IV}}{10^9}$
9	10	11	12	13	14	15	16	17
	+ 181			+ 181			+ 181	
+ 187	+ 313	+ 138	+ 132	+ 368	+ 162	+ 155	+ 345	+ 153
+ 230	+ 360	+ 138	+ 132	+ 458	+ 174	+ 166	+ 424	+ 159
+ 223,5	+ 225	+ 134	+ 134	+ 315	+ 171	+ 171	+ 278	+ 154
+ 142,8	+ 191	+ 80	+ 85	+ 249	+ 113	+ 120	+ 214	+ 104
+ 31,1	+ 146	- 27	- 31	+ 208	- 17	- 20	+ 197	- 29
+ 132,2	- 366	+ 66	+ 131	- 365	+ 78	+ 155	- 389	+ 77
- 109,2	+ 866	- 54	- 145	+ 902	- 60	- 161	+ 918	- 61
+ 37,2	- 246	+ 60	+ 85	- 294	+ 60	+ 85	- 294	+ 67
- 152,1	- 290	- 81	- 108	- 334	- 106	- 141	- 301	- 100
- 214,5	- 241	- 99	- 119	- 337	- 127	- 153	- 303	- 114
- 260,0	- 224	- 148	- 164	- 320	- 181	- 200	- 284	- 170
- 193,6	- 443	- 124	- 132	- 505	- 146	- 155	- 482	- 138
	- 330			- 330			- 330	

i obaj dochodzą do tych samych prawie wartości liczebnych dla momentów węzłowych, przeto wnioskujemy, że wpływ siły osiowej na wygięcie pręta wolno zaniedbać wobec wpływu momentów węzłowych. Nie warto więc stosować skomplikowanych równań 2 do obliczenia naprężeń drugorzędnych, gdyż równ. 1 prowadzi prędzej do celu.

Uproszczony sposób Manderli. Podstawmy

$$R = \frac{J}{s} \quad (11)$$

Gdyby tylko węzeł m był sztywny, to zamiast ζ_m byłoby ζ'_m . Z równania

$$M_{nm} = 2 RE (2 \tau_{nm} + \tau_{mn}) = 0 \text{ wynika}$$

$$\tau_{nm} = - \frac{1}{2} \tau_{mn}, \text{ zaś z równ. 1.}$$

$$M_{nm} = 3 RE \tau_{mn} = 3 RE (\zeta'_m - \Delta \alpha_m)$$

Z równ. (4) $\sum M = 0$ otrzymalibyśmy

$$\zeta'_i = \frac{\sum R \Delta \alpha_m}{\sum R} \quad (12)$$

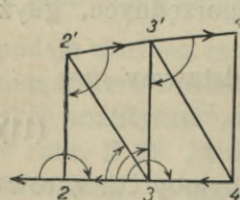
Będzie to pierwsza wartość przybliżona. Podstawiając (11) i (6) w (1), a następnie sumując wedle (4), otrzymamy z uwagi na (12)

TABL. III (c. d.)

$\frac{\sum L \zeta_n^{IV}}{\sum K}$	ζ^V	$\frac{\sum L \zeta_n^V}{10^9}$	$\frac{\sum L \zeta_n^V}{\sum K}$	ζ^{VI}	$\frac{\sum L \zeta_n^{VI}}{10^9}$	$\frac{\sum L \zeta_n^{VI}}{\sum K}$	ζ^{VII}
18	19	20	21	22	23	24	25
	+ 181			+ 181			+ 181
+ 146	+ 354	+ 157	+ 150	+ 350	+ 156	+ 149	+ 351
+ 152	+ 438	+ 165	+ 157	+ 433	+ 163	+ 156	+ 434
+ 154	+ 295	+ 161	+ 161	+ 288	+ 158	+ 158	+ 291
+ 110	+ 224	+ 111	+ 117	+ 217	+ 108	+ 115	+ 219
- 34	+ 211	- 25	- 29	+ 206	- 28	- 32	+ 209
+ 153	- 387	+ 79	+ 157	- 391	+ 78	+ 155	+ 389
- 164	+ 921	- 62	- 166	+ 923	- 62	- 166	+ 923
+ 95	- 304	+ 66	+ 93	- 302	+ 67	+ 96	- 305
- 133	- 309	- 105	- 140	- 302	- 105	- 140	- 302
- 137	- 319	- 116	- 140	- 316	- 114	- 138	- 318
- 188	- 296	- 176	- 195	- 289	- 174	- 192	- 292
- 147	- 490	- 140	- 149	- 488	- 139	- 148	- 489
	- 330			- 330			- 330

$$\zeta'_m = \zeta'_m + \frac{\sum R \Delta \alpha_n}{2 \sum R} - \frac{\sum R \zeta_n}{2 \sum R}, \quad (13)$$

przyczem dla węzła 3 np. jest



Rys. 5.

$$\sum R \Delta \alpha_m = R_{32} \Delta \alpha_{232} + R_{32}' \Delta \alpha_{232}' +$$

$$+ R_{33}' \Delta \alpha_{233}' + R_{34} \Delta \alpha_{234}, \text{ zaś}$$

$$\sum R \Delta \alpha_n = R_{32} \Delta \alpha_{123} + R_{32}' \Delta \alpha_{3'2'2} +$$

$$+ R_{33}' \Delta \alpha_{4'3'3} + R_{34} \Delta \alpha_{343} \text{ (rys. 5)}$$

$$\text{Oczywiście jest } \Delta \alpha_{232} = \Delta \alpha_{343} = 0$$

Używając równań 13 zamiast 8 i 1 zamiast 2, otrzymalibyśmy momenty węzłowe takie same, jak metodą Rittera. Byłby to uproszczony sposób analityczny Manderli (10*).

Sposób Mohra. Podobny do niego jest sposób Mohra (8*) dzięki Gehlerowi (10*) najpopularniejszy. Mohr wprowadza jako niewiadomą skręt węzła φ_m , a zamiast przyrostów $\Delta \alpha$, skręty prętów ψ z planu przesunąć Williota (dodatnie, jeżeli w kierunku

wskazówek zegara). Z rys. 6, w którym $m n$ jest pierwotne położenie pręta zaś $m' n'$ nowe położenie, czytamy

$$\left. \begin{aligned} \tau_{m n} &= \varphi_m - \psi_{m n} \\ \tau_{n m} &= \varphi_n - \psi_{m n} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Zatem równ. 1. przyjmie postać

$$M_{m n} = 2 R E (2 \varphi_m + \varphi_n - 3 \psi_{m n}) \quad (15)$$

Wprowadźmy jako pierwszą wartość przybliżoną

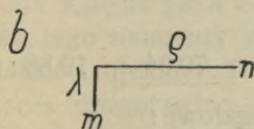
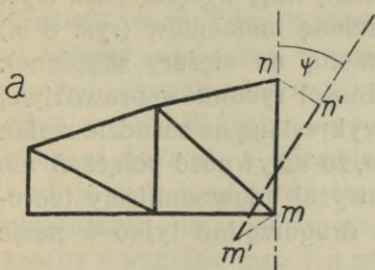
$$\varphi'_m = \frac{\Sigma R \psi}{\Sigma R}, \quad (16)$$

(jestto wartość φ_m w przypadku, gdy wszystkie $M_{n m} = 0$)

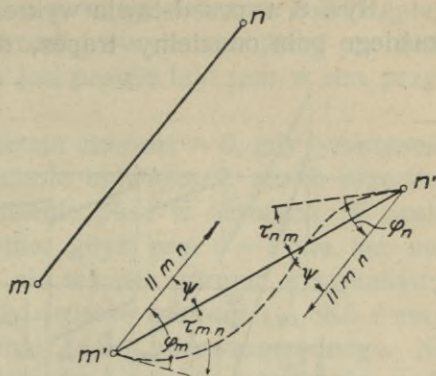
to z równ. 4 i 15 otrzymamy

$$\varphi_m = \frac{2}{3} \varphi'_m - \frac{\Sigma R \varphi_n}{2 \Sigma R} \quad (17)$$

Niewiadome φ_m obliczamy drogą kolejnych przybliżeń, jak wyżej. Można je też doświadczalnie pomierzyć przy pomocy np. czułej libeli (10*).



Rys. 7.



Rys. 6.

Mohr pierwszy zastosował plan Williota do obliczania naprężeń drugorzędnych. W planie Williota (rys. 7) każdemu prętowi belki odpowiada kolanko t. j. dwa odcinki $\lambda =$ wydłużenie pręta i $\varphi =$ względne przesunięcie obu jego końców w kierunku prostopadłym do pręta. Zatem skręt pręta o długości s

$$\psi = \varphi : s \quad (18)$$

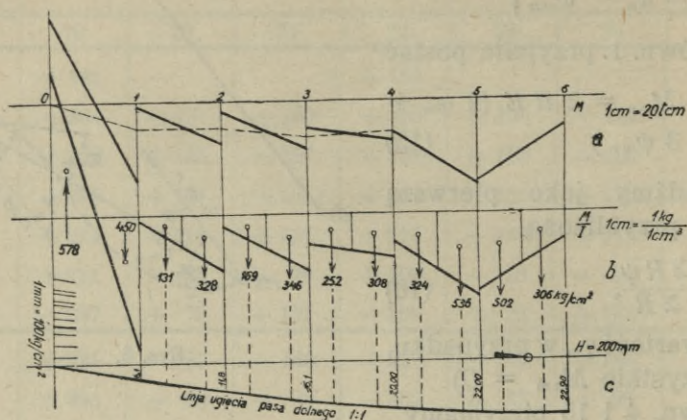
i jest dodatni, jeżeli w kierunku wskazówek zegara. Można by również zastosować plan Williota przy sposobie Manderli na zasadzie równania

$$\Delta \alpha_{n m r} = \psi_{m r} - \psi_{m n} \quad (19)$$

Wadą sposobu Mohra jest, że w wyrażeniu dla $M_{m n}$ (równ. 15) występują kąty odchylenia jako różnice bardzo małych wielkości, więc należałoby kąty φ i ψ obliczyć bardzo dokładnie, aby dla

τ i M otrzymać dokładność żadaną, tymczasem z planu przesunięć trudno o dokładne wartości ψ .

Rys. 8. a. przedstawia wykres momentów w pasie dolnym (dla każdego pola oddzielny trapez, dla pola skrajnego dwa trójkąty).



Rys. 8.

Podziałki, wypisane obok rysunku, dotyczą oryginału, w którym biegunowa H (rys. c) wynosi 20 cm . Rzędne linii ugięcia podane są w milimetrach.

Na zasadzie Mohra znaleziono prawdziwą linię ugięcia pasa (rys. 8 c.), przyjmując sprowadzoną powierzchnię momentów (rys. 8 b.) jako powierzchnię obciążenia (zamienioną na ciężary skupione). Zupełna zgodność w granicach dokładności rysunków prawdziwej linii ugięcia z linią ugięcia (rys. 4 b), wykreśloną na zasadzie zmian kątów w belce idealnej, dowodzi jasno, że sztywność połączeń nie ma wpływu na ugięcie pasów, co powyżej udowodniliśmy teoretycznie. — Bażant oblicza naprężenia drugorzędne tylko w pasie dolnym. Otrzymał on we węzłach:

0	1	2	3	4	5	6
momenty podporowe w $t\text{ cm}$.						
0	22,31	22,95	30,96	26,16	<u>70,94</u>	19,88;

sposobem dokładnym znaleźliśmy momenty węzłowe:

$$-72,25 + 66,0 + 34,83 + 40,45 + 34,64 + 72,10 + 23,00$$

Znak +, jeżeli ciągnienie w warstwie dolnej, jak dla belki wolno podpartej. Linia kreskowana na rys. 8 a, przedstawia momenty belki ciągłej o poddających się podporach (według Bażanta).

Z porównania wartości Bażanta i dokładnych wyników, że

- 1) Prawdziwe najw. wartości momentów we wszystkich prętach pasa dolnego są większe, niż momenty podporowe belki ciągłej.
- 2) Różnica ta maleje ku środkowi pasa i największy moment w pobliżu środka (węzeł 5) jest prawie taki sam w obu przypadkach.
- 3) Przy narożniku przyjmuje Bażant moment $= 0$, gdy tymczasem tam występuje moment liczebnie największy, znaku przeciwnego, co odpowiada utwierdzeniu pasa w narożach. W pasie dolnym jest nam to obojętne, gdyż pręt 0—1 nie ma naprężenia pierwszorzędowego, ale w pasie górnym otrzymaliśmy we węźle O' moment ujemny jeszcze większy ($- 83.5 t cm$), który spowodował naprężenie 38,6% pierwszorzędowego. Na szczęście pas górny jest ciśniony i zwykle jest w nim nadmiar materiału. W każdym razie pamiętać o tem należy przy projektowaniu przekroju dla skrajnego pręta pasa.

Przyczyną małych wartości naprężeń drugorzędnych w pasach (prócz przedziałów skrajnych) jest nie tyle mała wartość momentów węzłowych, ile raczej duży moduł przekroju pasów teowych. Z powodu rosnącej ku środkowi ilości nakładek zbliża się oś ciężkości przekroju ku tym nakładkom, a naprężenia drugorzędne tego samego znaku, co siła osiowa, są w obu pasach znacznie mniejsze, niż naprężenia przeciwnego znaku. Stąd wynika, że kształt teowy pasów i rosnąca ku środkowi ilość nakładek są korzystne u belek, w których pas dolny wygina się łagodnie ku dołowi (krata pojedyncza, równoramienna i prostokątna i krata półprzekątniowa **K**), gdyż w belkach tych mamy na całej długości pasów (prócz naroży) moment dodatni, a miarodajny moduł przekroju jest wielki i powoduje małe naprężenia drugorzędne. Natomiast w belkach o kracie równoramiennej ze słupami wiszącymi (bardzo popularnej w Niemczech) a wskutek tego i u nas często używanej), w belkach z drugorzędem zawieszeniem poprzecznic i belkach o kracie wielokrotnej linja ugięcia pasa dolnego doznaje załamań w obie strony, wskutek tego momenty węzłowe są znacznie większe i naprzemian dodatnie i ujemne. Te ostatnie zwłaszcza powodują wielkie naprężenia drugorzędne, dlatego należałoby w takich belkach unikać pasów teowych, tylko używać przekrojów symetrycznych względem osi prostopadłej do płaszczyzny belki, gdyż pasy teowe dla momentów ujemnych są mało odporne. Z drugiej strony jednak przekroje symetryczne kształtu I, lub][są bardzo sztywne w płaszczyźnie belki i powodują wielkie momenty węzłowe, a w następ-

stwie tego także i wielkie naprężenia drugorzędne, jak to dowodzi przykład w podręczniku budowy mostów Melana (13 *). Najlepiej zatem byłoby tego rodzaju kraty unikać.

Aby sobie jasno zdać sprawę z czynników, które wywierają wpływ na naprężenia drugorzędne, podstawmy w równaniu (3) równanie (1), to naprężenie drugorzędne

$$\nu = \frac{2e}{s} (2E\tau_{mn} + E\tau_{nm}) \quad (20)$$

Wyrażenie w nawiasie zależy głównie od rodzaju kraty t. j. od kształtu linii ugięcia pasów : w pasie lekko zakrzywionym ku dołowi będzie oczywiście znacznie mniejsze, niż w pasie załamany naprzemian w obie strony. Poza to zależy naprężenie drugorzędne od stosunku $\frac{s}{e}$, który możnaby nazwać smukłością drugorzędną w odróżnieniu od smukłości na wyboczenie $s : i$. W przypadku symetryczności jest $h = 2e$, czyli $\frac{s}{2e} = \frac{s}{h}$.

Z r. (20) widać, że im większa smukłość $\frac{s}{e}$, tem mniejsze naprężenie drugorzędne. Należy się więc starać o możliwie lekki wygląd belki w jej płaszczyźnie; zwłaszcza krótkie pręty powinny być możliwie wąskie. W pasach, ku dołowi regularnie ugiętych, o smukłości decyduje nie szerokość pasów, tylko odległość osi ciężkości od skrajnej zewnętrznej warstwy, więc smukłość pasów teowych jest znaczna nawet przy dość okazałej szerokości. Inaczej przy pasie nieregularnie ugiętym; tu miarodajne jest naprężenie w warstwie wewnętrznej z powodu momentu ujemnego, a naprężenie w warstwie zewnętrznej z powodu momentu dodatniego, zatem przekrój powinien być raczej symetryczny.

Na podstawie gruntownych badań teoretycznych i wielu doświadczeń doszedł Związek szwajcarskich fabryk (11 *, 18 *) do wniosku, że „przy jasnym ukształtowaniu kraty, centrycznem połączeniu prętów, smukłości $\frac{s}{e} = 60 - 40$ i niezbyt małej sztywności

prętów $\frac{l}{s}$ i dobrze rozwiązanych konstrukcyjnie węzłach naprężenia drugorzędne osiągają maximum 15 — 20 % zwykłych dziś

naprężeń pierwszorzędnych". Słusznie jednak zauważa Hartmann (12*), że smukłość 60 — 40 jest trudna do pomyślenia. W przypadku symetryczności wynikałaby szerokość pasa dla $s = 4 m$, $h = 2 e = 14 - 20 cm$. Więc ostateczny wniosek doświadczeń szwajcarskich, że wpływ naprężeń drugorzędnych wolno zaniedbać, jest zbyt optymistyczny.

Z tablicy I (rubryka 15 i 19) widać, że naprężenia drugorzędne w pasach są niewielkie (prócz skrajnego przedziału) i dochodzą zaledwie do wartości 5.07% naprężeń pierwszorzędnych a więc prawie zgodnie z Bażantem. Większe są w krzyżulcach (18,1 %) a największe w słupach 79%. Najważniejsze są wartości, otrzymane dla narożnika (51.1%) i dla krzyżulca O' — 1 (13%), gdyż przy całkowitem obciążeniu belki pręty te posiadają największe naprężenie pierwszorzędne. Na szczęście narożnik obliczamy na wyboczenie, a esowate wygięcie narożnika (rys. 4 a) działa korzystnie, gdyż zmniejsza długość wolną, która sięga od węzła do punktu przegięcia (gdyby nawet nie uwzględnić utwierdzenia we węźle).

Natomiast dla innych prętów kraty otrzymane wartości naprężeń drugorzędnych nie są miarodajne, gdyż największe naprężenie pierwszorzędne występuje pod obciążeniem częściowem. Gdybyśmy wyrazili otrzymane wartości naprężeń drugorzędnych w procentach największych naprężeń pierwszorzędnych, to zmniejszyłyby się one tem więcej, im bliżej środka belki. Z drugiej strony jednak jest możliwe, że i naprężenia drugorzędne w prętach kraty są większe przy obciążeniu częściowem. Sprawę miarodajnych naprężeń drugorzędnych w kracie rozstrzygnąć można tylko przy pomocy linii wpływowych dla naprężeń drugorzędnych.

II. Sposób przybliżony wyznaczenia naprężeń drugorzędnych.

Z przykładu powyższego widać, że sposób dokładny obliczenia naprężeń drugorzędnych jest bardzo żmudny. To też należy się postarać o sposób przybliżony, któryby prędzej prowadził do celu, a jednak dawał wystarczającą dokładność co do wszystkich prętów 1).

1) Sposób przybliżony Hartmanna (12*) odnosi się tylko do pasów ze słupami drugorzędnymi i daje dokładność bardzo małą. Taksamo niewystarczającą dokładność dają sposoby przybliżone dla słupów, podane w 19*, str. 1255. Sposób przybliżony podany w 20* odnosi się tylko do środkowych prętów pasów belek o kracie N, V i K. Dla pasa prostego podano tamże wzór (12),

$$\rho = \nu_{II} \max : \nu_I = 2 \mu \lambda (1 + K) \frac{e}{h},$$

Traktowanie pasa jako belki ciągłej, daje jak widzieliśmy dość dokładne wyniki tylko w środku pasów. Wnioski Bażanta co do wpływu rodzaju kraty na naprężenia drugorzędne, otrzymane tą drogą, pokrywają się też z dokładnymi obliczeniami Patona, który dobitnie wykazywał, że używane często w Rosji systemy wielokrotne są niekorzystne (16* i 17*). Natomiast fałszywe wyniki daje sposób powyższy w pasach blisko naroży i nie daje żadnego wyobrażenia o wielkości naprężeń drugorzędnych w kracie. A przekonał się już na przykładzie całkowitego obciążenia i zobaczymy jeszcze na przykładzie obciążenia częściowego przy pomocy linii wpływowej, że zwłaszcza w słupach i narożnikach naprężenia te osiągają wartość poważną ponad 40% naprężeń pierwszorzędnych w belce prostokątnej, w której sposób powyższy nie wykazuje nawet 5%.

W najnowszej swej pracy (4*) wykazuje Bażant, że momenty węzłowe, znalezione w pasie jako belce ciągłej, można poprawić

w którym oznacza

$$K = A : A', \lambda = A_u : A$$

A przekrój pasa rozciąganego, A' przekrój pasa ściskanego, A_u przekrój użyteczny z potrąceniem osłabienia przez nity, e odstęp włókien skrajnych od osi ciężkości pasa, H wysokość belki, h wysokość belki w badanym miejscu, l rozpiętość belki, μ współczynnik, który wynosi

dla belki równoległej		parabolicznej
dla $l : H = 12, 10, 8, 7,$		8, 7, 6,
$\mu = 1,2 \quad 1,27 \quad 1,37 \quad 1,4$		1,2 1,25 1,3

Zastosujemy ten wzór do prętów 4-5 i 5-6 pasa dolnego belki (rys. 4).

$$\text{Tu } l : H = 43,2 : 6,7 = 6,45$$

Dla belki równoległej byłoby $\mu = 1,43$

„ „ parabolicznej $\mu = 1,28$

„ „ półparabolicznej przyjmujemy wartość pośrednią $\mu = 1,35$.

W obu prętach jest (por. Tabl. I)

$$\lambda = 161,84 : 194 = 0,835, \quad K = A : A' = 194 : 245 = 0,792$$

$$e = 7,7 \text{ cm.}$$

$$\text{Stąd } \rho h = 2 \cdot 1,35 \cdot 0,835 (1 + 0,792) \cdot 7,7 = 31,15 \text{ cm.}$$

W obrębie pręta 4-5 jest średnia wysokość belki $h = \frac{1}{2} (638 + 662) = 650 \text{ cm.}$

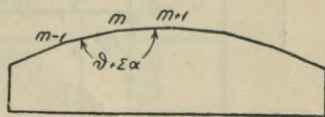
zaś w obrębie pręta 5-6, $h = \frac{1}{2} (662 + 670) = 666 \text{ cm.}$

Zatem dla pręta 4-5 $100 \nu_{II} : \nu_I = \frac{3115}{650} = 4,78 (5,07)$, zaś dla pręta 5-6 $\frac{3115}{666} = 4,67 (4,60)$.

W nawiasie wartości dokładne z Tabl. I. rubr. 19. Odpowiednie wartości wedle Bażanta (3* str. 17) są 5 i 5.

uwzględniając wpływ sztywnego połączenia kraty, a zarazem znaleźć momenty zgięcia w samej kratce. Pręty kraty można bowiem rozpatrywać niezależnie od pasów znowu jako belkę ciągłą łamaną, która posiada tyle podpór, ile jest węzłów (por. rys. 2). Jeżeli znaleźliśmy momenty podporowe w belce ciągłej obu pasów i w belce ciągłej międzypasowej, uważając skrajne podpory jako wolne, to rozłożyliśmy niejako kratownicę na trzy elementy ciągłe (dwa pasy i kratę), połączone ze sobą we węzłach przegubowo. Aby stan naprężeń był identyczny ze stanem w kratownicy jednolitej bezprzegubowej, trzeba w każdym węźle n zaczepić dwa momenty M_n i $-M_n$, z których jeden działałby na pręty kraty a drugi na pręty pasa, schodzące się w danym węźle i któreby zmienionemu kątowni pomiędzy stycznymi do krzyżulca i pręta pasowego przywróciły jego pierwotną wartość. Otrzymamy więc znowu tyle niewiadomych M , ile jest węzłów. — Warunek stałości kąta, zawartego pomiędzy stycznymi do dwu prętów, schodzącymi się w jednym węźle, (a z których jeden należy do kraty a drugi po pasa) wyraża równanie czterech momentów, t. j. obu momentów węzłowych jednego i obu momentów węzłowych drugiego pręta. Ale każdy moment węzłowy składa się z dwu części: z momentu podporowego belki ciągłej, do której dany pręt należy i z części zależnej od momentów M . Ponieważ dowolny moment M^n wpływa na wszystkie węzły kratownicy, przeto w każdym równaniu czterech momentów wystąpią równocześnie wszystkie niewiadome. Zatem system równań nie jest prostszy od systemów, jakie mamy przy sposobach Manderli i Mohra, pomimo, żeśmy już sobie zadali dużo trudu dla znalezienia momentów podporowych w 3 belkach ciągłych. To też przykład liczebny obliczenia naprężeń drugorzędnych tą metodą zajmuje we wspomnianym dziele 47 stron druku.

Prędzej dojdziemy do celu, uważając obwód belki t. j. pasy i narożniki jako jeden ciągły element (rys. 9), dla którego znajdziemy momenty wskutek przesunięcia węzłów, a następnie obliczymy wpływ utwierdzenia kraty wewnętrznej dodatkowo w przybliżeniu.



Rys. 9.

A. Obwód belki.

Dla danego obciążenia obliczyć możemy przyrosty ϑ kątów wewnętrznych obwodu belki. Jeżeli kąt pierwotny był $\Sigma \alpha$, to

$$\vartheta = \Sigma \Delta \alpha, \quad (21)$$

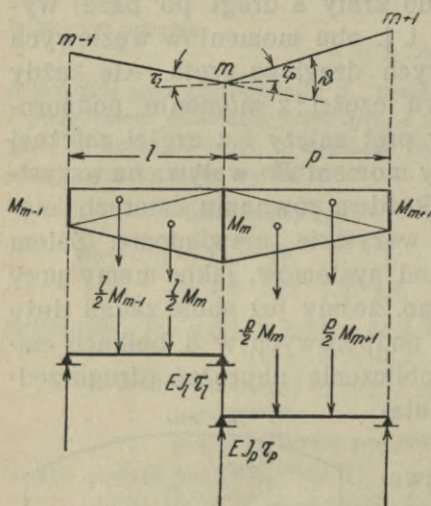
przyczem $\Delta\alpha$ jest przyrostem kąta w trójkącie wedle równ. (5). Kąt wewnętrzny po odkształceniu będzie więc $\vartheta = \Sigma\alpha$ (rys. 9). Moment niech będzie dodatni, jeżeli wygina dany element obwodu wypukłością ku wnętrzu obwodu (zwykle w pasie górnym). W dalszym ciągu możemy dla znalezienia momentów podporowych w obwodzie belki obrać sposób analityczny lub wykreślny.

Sposób analityczny.

Jeżeli styczna linii ugięcia we węzle m tworzy z lewą cięciwą $(m-1, m)$ kąt τ_l , z prawą τ_p , przyczem τ jest dodatnie, jeżeli styczna odchyła się od cięciwy ku wnętrzu obwodu, to

$$\vartheta = \tau_l + \tau_p \quad (22)$$

Wpływ ewentualnego pierwotnego załamania eliminuje się. Według zasady Mohra jest $E J_l \tau_l$ prawem oddziaływaniem belki l , obciążonej trapezem momentów M_{m-1}, M_m (rys. 10), więc



Rys. 10.

$$E \tau_l = \frac{1}{6} \left[\frac{l}{J_l} M_{m-1} + 2 \frac{l}{J_l} M_m \right].$$

Wprowadźmy pewną wygodną wartość J_o (np. J średnie) tudzież długości sprowadzone

$$l' = l \frac{J_o}{J_l}, \quad p' = p \frac{J_o}{J_p}, \quad (23)$$

to będzie

$$E J_o \tau_l = \frac{1}{6} l' (M_{m-1} + 2 M_m)$$

podobnie

$$E J_o \tau_p = \frac{1}{6} p' (M_{m+1} + 2 M_m) \quad (24)$$

Z (22) i (24) otrzymamy równanie trzech momentów (por. 9*)

$$M_{m-1} l' + 2 M_m (l' + p') + M_{m+1} p' = 6 E J_o \vartheta_m \quad (25)$$

Jeżeli oba przęsła mają stały moment bezwładności $J_l = J_p = J_o$, to w równ. (25) zamiast l' i p' będzie odpowiednio l i p ¹⁾. Momenty podporowe belki ciągłej, której przekrój jest inny w każdym przęśle, są takie same, jak w belce o stałym momencie bezwład-

¹⁾ Poniżej przez l i p należy już rozumieć długości sprowadzone l' i p' .

ności J_0 i sprowadzonych długościach pręseł (równ. 23). Będziemy więc badać belkę ciągłą o stałym przekroju.

Dla każdego węzła mamy równanie (25). Rozwiązanie układu n równań (n węzłów) byłoby bardzo mozolne, dlatego wskazana jest tu metoda kolejnych przybliżeń. Ponieważ współczynnik przy M_m jest co najmniej dwa razy większy aniżeli przy M_{m-1} i M_{m+1} , przeto jeżeli za M_{m-1} i M_{m+1} , przyjmiemy wartość przybliżoną, to M_m z równ. (25) nie wiele się zmieni.

Przyjmijmy w tym celu, że:

$$M_{m-1} : M_m : M_{m+1} = \mathcal{I}_{m-1} : \mathcal{I}_m : \mathcal{I}_{m+1},$$

to jako pierwszą wartość przybliżoną otrzymamy z r. 25.

$$M'_m = 6 E J_0 \mathcal{I}_m : A_m, \quad (26)$$

$$\text{przyczem } A_m = l \frac{\mathcal{I}_{m-1}}{\mathcal{I}_m} + 2(l+p) + p \frac{\mathcal{I}_{m+1}}{\mathcal{I}_m} \quad (26a)$$

W ten sam sposób otrzymamy M'_{m-1} i M'_{m+1} . Podstawiając je w r. (25) za M_{m-1} i M_{m+1} , otrzymamy drugą wartość przybliżoną

$$M''_m = \frac{6 E J_0 \mathcal{I}_m - l M'_{m-1} - p M'_{m+1}}{2(l+p)} \quad (27)$$

Podstawiając w r. (27) za M'_{m-1} i M'_{m+1} wartości M''_{m-1} i M''_{m+1} , otrzymamy M'''_m i t. d. zależnie od żądanej dokładności.

Przykład 2a: Obliczmy momenty M_m dla obwodu kratownicy (rys. 4) dla obciążenia, jak w przykładzie 1. Z powodu symetrii badamy tylko połowę belki. Długości sprowadzone prętów s' , znalezione z równ. 23. dla $J_0 = 10.000 \text{ cm}^4$ podaje tablica IV.

TABLICA IV.

Pręt		J cm^4	s cm	$s' = s \frac{J_0}{J}$ cm
pas dolny	6 5	20476	360	175
	5 4	20476	"	175
	4 3	18752	"	192
	3 2	16903	"	212
	2 1	14769	"	244
	1 0	11881	"	303
	0 0'	4793	342	715
pas górny	0' 1'	15595	376	241
	1' 2'	20910	370	177
	2' 3'	"	365	174,5
	3' 4'	23413	362	154,5
	4' 5'	"	361	154
	5' 6'	"	360	154

TABLICA V.

węzeł <i>m</i>	1) $E \vartheta_m$ kg/cm^2 2) $6 E J_o \vartheta_m : 10^5$ $kg cm^2$	1) l 2) $l + p$ 3) p cm	1) $l \vartheta_m - 1/\vartheta_m$ 2) $2(l + p)$ 3) $p \vartheta_m + 1/\vartheta_m$ cm	A_m cm	M' $t cm$	1) $l M'_{m-1}$ 2) Σ 3) $p M'_{m+1}$ $10^2 t cm^2$
1	2	3	4	5	6	7
6	- 660 - 396	350 175	+ 252 + 700 + 252	+1204	- 32,9	- 213 - 106,5
5	- 952 - 571,2	350 175	+ 121 + 700 + 119	940	- 60,9	- 57,6 - 115,7 - 58,1
4	- 645 - 387	367 192	+ 258 + 734 + 172	1164	- 33,2	- 106,5 - 161,5 - 55,0
3	- 576 - 345,6	404 212	+ 215 + 808 + 186	1209	- 28,6	- 63,9 - 110,3 - 46,4
2	- 505 - 303	456 244	+ 242 + 912 + 232	1386	- 21,85	- 60,6 - 196,5 - 135,9
1	- 481 - 288,6	547 303	+ 256 +1094 - 831	519	- 55,7	- 53,4 + 132,4 + 185,8
0	+1320 + 792	1018 715	- 110 +2036 - 636	1290	+ 61,4	+ 168,5 - 658,0 - 489,5
0'	-1173 - 703,8	956 241	- 805 +1912 - 90	1017	- 69,4	+ 438 + 601 + 163
1'	+ 436 + 261,6	418 177	- 649 + 836 + 200	387	+ 67,6	- 167,0 - 117,8 + 49,2
2'	+ 495 + 297	352 174,5	+ 156 + 704 + 210	1070	+ 27,8	+ 119,8 + 181,3 + 61,5
3'	+ 594 + 356,4	329 154,5	+ 146 + 658 + 208	1012	+ 35,2	+ 48,5 + 131,3 + 82,8
4'	+ 798 + 478,8	309 154	+ 115 + 618 + 162	895	+ 53,5	+ 54,5 + 148,0 93,5
5'	+ 838 + 502,8	308 154	+ 147 + 616 + 66,5	830	+ 60,6	+ 82,5 + 116,9 + 34,4
6'	+ 362 + 217,2	308	+ 358 + 616 + 358	1332	+ 16,3	+ 93,5 + 187

TABLICA V.

licznik równania (27) $10^2 t \text{ cm}^2$	M'' $t \text{ cm}$	1) $l M''_{m-1}$ 2) Σ 3) $p M''_{m+1}$	licznik równania (27)	M''' $t \text{ cm}$
8	9	10	11	12
- 183	- 26,2	- 114,1 - 228,2 - 114,1	167,8	- 24,0
- 455,5	- 65,1	- 45,8 - 99,6 - 53,8	471,6	- 67,4
- 225,5	- 30,7	- 114,1 - 170,0 - 55,9	217,0	- 29,6
- 235,3	- 29,1	- 59,0 - 83,7 - 24,7	261,9	- 32,4
- 106,5	- 11,7	- 61,7 - 155,5 - 93,8	147,5	- 16,2
- 421,0	- 38,4	- 28,4 + 187,6 + 216,0	476,2	- 43,5
+1450,0	+ 71,4	- 116,2 - 604,2 - 488,0	1396,2	+ 68,6
-1304,8	- 68,2	+ 510 + 622 + 112	1325,8	- 69,2
+ 389,4	+ 46,5	- 164,2 - 135,2 + 29,0	396,8	+ 47,5
+ 115,7	+ 16,4	+ 82,3 + 141,9 + 59,6	155,1	+ 22,5
+ 225,1	+ 34,2	+ 28,6 + 118,6 + 90,0	237,8	+ 36,0
+ 330,8	+ 58,2	+ 52,8 + 149,3 + 96,5	329,5	+ 53,3
+ 385,9	+ 62,6	+ 89,8 + 97,4 + 7,6	405,4	+ 65,7
+ 30,2	+ 4,9	+ 96,5 + 193,0 + 96,5	24,2	+ 3,9

Całe dalsze obliczenie zawarte jest w tablicy V (str. 36 i 37).

W rubryce 2 mamy wartość $E \mathcal{J}_m$ w kilogramach na cm^2 z przykładu 1. Zaś pod nią wartość $6 E J_0 \mathcal{J}_m : 10^5$ do równania 26. Np. dla węzła 4 (rys. 4 a) jest $E \mathcal{J} = -710 - 327 + 392 = -645 \text{ kg/cm}^2$. Zaś $-6 \cdot 645 \cdot 10^4 : 10^5 = -387 \text{ kg/cm}^2$. W rubryce 3 pomiędzy wartościami l i p (z tabeli 4. rubr. 4) znajduje się ich suma $\Sigma = l + p$. W rubryce 4. wypisano wszystkie człony wyrażenia dla A_m . W rubryce 5 jest A_m . W rubryce 6 jest pierwsza wartość przybliżona M' w tcm . Rubryka 7 zawiera drugi i trzeci wyraz licznika równ. 27 i ich sumę. Rubryka 8 — licznik równ. 27. Rubryki 9 i 12 podają drugą i trzecią wartość przybliżoną momentów M_m . Np. dla węzła 4 jest $l = 175$, $p = 192$, $l + p = 367 \text{ cm}$ (rubr. 3), $E \mathcal{J}_{m-1} = -952$, $E \mathcal{J}_m = -645$, $E \mathcal{J}_{m+1} = -576 \text{ kg/cm}^2$,
 $l \frac{\mathcal{J}_{m-1}}{\mathcal{J}_m} = 175 \frac{-952}{-645} = +258 \text{ cm}$, $2(l + p) = 2 \cdot 367 = 734 \text{ cm}$,
 $p \frac{\mathcal{J}_{m+1}}{\mathcal{J}_m} = 192 \frac{-576}{-645} = +172 \text{ cm}$ (rubr. 4). $A_m = +258 + 734 + 172 = +1164 \text{ cm}$ (rubr. 5). $M' = -387 \cdot 10^5 \text{ kg cm}^2 : 1164 \text{ cm} = -33200 \text{ kg cm} = -33,2 \text{ tcm}$ (rubr. 6).

Dla węzła lewego ($m = 5$) (patrzac od wnętrza obwodu) jest $M'_5 = -60,9 \text{ tcm}$, zaś dla prawego $M'_3 = -28,6 \text{ tcm}$.

Zatem $l M_{m-1} = 175 (-60,9) = -10650 = -106,5 \cdot 10^2 \text{ tcm}^2$
 podobnie $p M_{m+1} = 192 (-28,6) = -5500 = -55 \cdot 10^2$

$$\Sigma = -161,5 \cdot 10^2 \text{ tcm}^2$$

(rubr. 7). Licznik równ. 27, będzie $-387 \cdot 10^5 \text{ kg cm}^2 - (-161,5 \cdot 10^2) \text{ tcm}^2 = (-387 + 161,5) \cdot 10^2 \text{ tcm}^2 = -225,5 \cdot 10^2 \text{ tcm}^2$ (rubr. 8). Według równ. 27 jest $M'' = -22550 \text{ tcm}^2 : 734 \text{ cm} = -30,7 \text{ tcm}$ (rubr. 9). Zupełnie w ten sam sposób znaleziono $M''_4 = -29,6 \text{ tcm}$ (rubr. 12).

Z przykładu tego widać, że już pierwsza wartość przybliżona M' daje naogół wcale dobry obraz przebiegu linii momentów, można też często na niej, względnie na drugiej wartości przybliżonej M'' poprzestać. Jeżeli chodzi o większą dokładność, to zamiast szukać dalszych przybliżeń powyższym rachunkiem lepiej obrać sposób wykreslny.

Sposób wykreslny.

Równanie (25) odnosi się zarówno do belek ciągłych prostych, jak i do belek ciągłych załamanych na podporach. Będziemy tedy badać belkę ciągłą o stałym przekroju, której podpory leżą w je-

dney prostej. Czyli możemy obwód belki kratowej zredukować. Niech będą (rys. 11 a) $m - 1$, m , $m + 1$ trzy sąsiednie węzły belki ciągłej o przekroju stałym, leżące przed odkształceniem na jednej prostej. Po odkształceniu kąt pomiędzy cięciwami $(m - 1) m$ i $m (m + 1)$ jest ϑ_m (rys. 11 a). Styczna do linii ugięcia w m tworzy z cięciwami kąty τ_l i τ_p . W punkcie L lewego pręta linia ugięcia jest równoległa do cięciwy $(m - 1) m$. Podobnie w punktach P i L_{m+1} prawego pręta linia ugięcia jest równoległa do $m (m + 1)$.

Z równania linii ugięcia

$$E J_o y'' = M$$

otrzymamy przez całkowanie w granicach od m do L

$$E J_o \tau_l = \int_0^\lambda M dx = \lambda y_l, \quad (28)$$

jeżeli y_l jest średnim momentem na długości $\lambda = Lm$, czyli momentem w odległości $\frac{\lambda}{2}$ od węzła m . Podobnie

$$E J_o \tau_p = \int_0^\pi M dx = \pi y_p \quad (28 a)$$

Zatem linia momentów ma tę własność, iż jej rzędna w połowie

długości λ wynosi:
$$y_l = \frac{E J_o \tau_l}{\lambda} \quad (28 b)$$

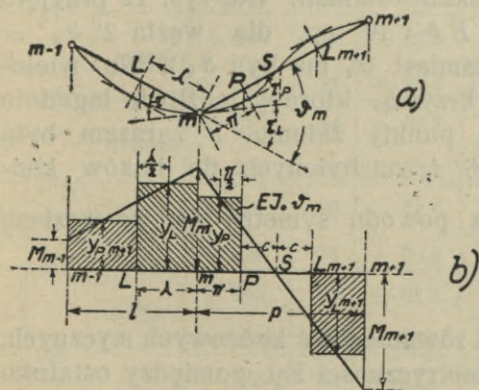
zaś w połowie długości π

$$y_p = \frac{E J_o \tau_p}{\pi} \quad (28 c)$$

Pomnóżmy równ. (22) przez $E J_o$ i podstawmy (28) i (28 a) to

$$\lambda y_l + \pi y_p = E J_o \vartheta_m \quad (29)$$

To samo otrzymalibyśmy, całkując równanie linii ugięcia w granicach od L do P . Zatem powierzchnia obu prostokątów zakreskowanych na rys. 11 przy węźle m o podstawach λ i π i wysokościach odpowiednio y_l i y_p równa się załamaniu w tymże węźle ϑ_m (t. j. odchyleniu kierunku $m m + 1$ od przedłużenia kierunku $m - 1 m$), pomnożonemu przez sztywność przekroju $E J_o$.



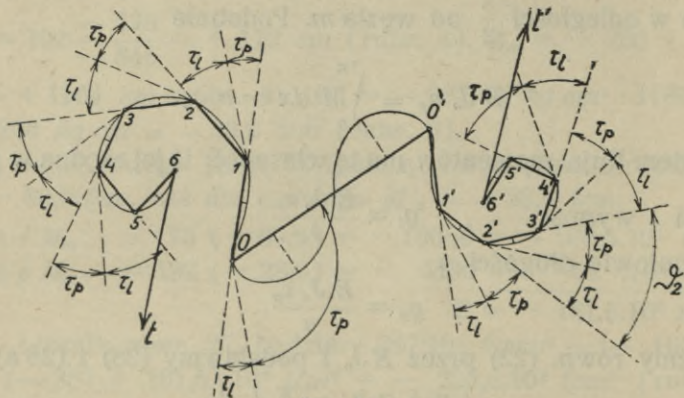
Rys. 11.

W pręcie esowato wygiętym ($m, m + 1$ na rys. 11) punktowi przegięcia S odpowiada punkt zerowy linii momentów. Ponieważ momenty w równych odstępach od punktu zerowego są równe, lecz przeciwnego znaku, przeto linja ugięcia jest biegunowo symetryczna względem punktu przegięcia, zatem

$$SP = SL_{m+1},$$

tj. punkt zerowy połowi odcinek pomiędzy punktami P i L danego przęsła.

Przykład 2 b. Powyższe własności linii momentów wyzyskamy dla jej wykreślenia w obwodzie belki kratowej, obliczonej powyżej analitycznie. Tablica VI podaje w rubryce 2 długości sprowadzone s prętów obwodu belki kratowej, wzięte z tabl. IV. Rubryka 3 podaje wielkości $E \vartheta$ w kg/cm^2 , obliczone w przykładzie 2 a (tabl. V, rubr. 2). Na podstawie wartości s i $E \vartheta$ możemy wykreślić wielobok cięciw (rys. 12) zrektyfikowanego obwodu



Rys. 12.

kratownicy w przesadzonej skali załamania. (Na rys. 12 przyjęto w stopniach kątowych $\vartheta = E \vartheta : 10$ np. dla węzła $2' \vartheta_2' = = 495 : 10 = 49,5^\circ$, na rys. zamiast ϑ_2 ma być ϑ_2'). Na wieloboku tym opiszmy od ręki krzywą, któraby możliwie łagodnie przechodziła przez wszystkie punkty załomu, a zarazem była styczną do prostych $6t$ i $6't$, nachylonych do boków końcowych pod kątem $\frac{\vartheta_6}{2}$ i $\frac{\vartheta_6'}{2}$ (z powodu symetrii jest we węzłach 6 i $6' \tau_l = \tau_p = \frac{\vartheta}{2}$).

Kontrolę wykresu stanowi równoległość końcowych stycznych, $6t \parallel 6't$. W przypadku niesymetryczności kąt pomiędzy ostatnim a pierwszym bokiem łamanego ciągu cięciw równa się w przyjętej

TABLICA VI.

Obwód belki.

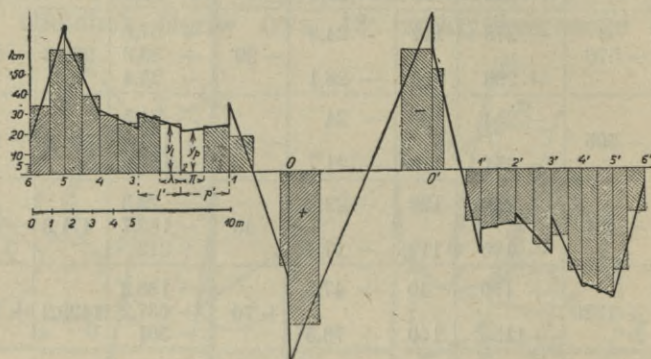
węzeł	s cm	$E \delta$ kg/cm ²	$E \tau_l$ $E \tau_p$ kg/cm ³	λ π cm	y_l y_p t cm	M wykr. t cm	$l M_{m-1}$ - Σ $p M_{m+1}$	licznik równ. 7.	M popr. t cm	$E \tau_l$ $E \tau_p$ popr.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6	175	- 330,2	- 330	98	- 33,7	- 20	- 124,2	147,6	- 21,1	- 330
			- 330	98	- 33,7		+ 248,4			- 124,2
5	175	- 952	- 477	77	- 62	- 71	- 35	483,7	- 69,1	- 465
			- 475	80	- 59,5		+ 87,5			- 52,5
4	192	- 645	- 365	95	- 38,4	- 30	- 124,2	208,2	- 28,4	- 411
			- 280	96	- 29,2		+ 179,8			- 55,6
3	212	- 576	- 278	112	- 24,8	- 29	- 57,6	262,6	- 32,5	- 334
			- 298	106	- 28,1		+ 83,0			- 25,4
2	244	- 505	- 254	106	- 24	- 12	- 61,5	131,6	- 14,4	- 195
			- 251	116	- 21,7		+ 171,4			- 109,9
1	303	- 481	- 286	128	- 22,3	- 45	- 29,3	471,3	- 43,1	- 395
			- 195	112	- 17,4		- 182,7			+ 212
0	715	+ 1320	+ 190	40	+ 47,5	+ 70	+ 136,2	1429,2	+ 70,4	+ 475
			+ 1130	150	+ 76,5		+ 637,2			- 501
0'	241	- 1173	- 948	150	- 63	- 70,2	+ 500	1321,8	- 69,1	- 843
			- 225	50	- 50		- 618			+ 118
1'	177	+ 436	+ 181	72	+ 25,1	+ 49	- 169	398,7	+ 47,6	+ 89
			+ 255	88	+ 28,9		+ 137,1			+ 31,9
2'	174,5	+ 495	+ 245	89	+ 27,5	+ 20,5	+ 85,6	150,4	+ 21,4	+ 265
			+ 250	91	+ 27,4		- 146,6			+ 61
3'	154,5	+ 594	+ 317	84	+ 37,7	+ 35	+ 31,4	237,5	+ 36	+ 258
			+ 277	84	+ 33,0		- 118,9			+ 87,5
4'	154	+ 798	+ 362	70	+ 51,6	+ 56,3	+ 54,1	327,6	+ 53	+ 365
			+ 436	74	+ 58,8		- 151,2			+ 97,1
5'	154	+ 838	+ 490	80	+ 61,2	+ 63	+ 87,4	406,7	+ 66	+ 498
			+ 348	69	+ 50,5		- 96,1			+ 8,7
6'		+ 2.181	+ 181	85	+ 21,3	+ 5,5	+ 97,1	23,0	+ 3,7	+ 181
			+ 181	85	+ 21,3		- 194,2			+ 97,1

skali kątowni ϑ we węzle, w którym obwód przecinamy, aby go wyprostować. We węzle tym styczna jest wspólna, zatem bez względu na obroną skalę dla ϑ muszą być styczne, początkowa i końcowa, do siebie równoległe.

Na krzywej (rys. 12), przedstawiającej linię ugięcia naszej belki obwodowej, wyznaczmy styczne podporowe, tudzież punkty P i L największego oddalenia krzywej od odpowiedniej cięciwy. Rubryka 4 tabl. VI. podaje wartości $E v_l$ i $E v_p$, odczytane kątomierzem z rys. 12, zaś rubr. 5 odległości λ i π punktów L i P od odpowiednich węzłów, również odczytane z rys. 12. Z równ. 28 b i c obliczono y_l i y_p (rubr. 6) np. dla węzła 5.

$$E v_l = -477 \text{ kg/cm}^2, \lambda = 77 \text{ cm, więc}$$

$$y_l = -477 \cdot 10^4 : 77 = -62000 \text{ kg} \cdot \text{cm} = -62 \text{ t cm.}$$

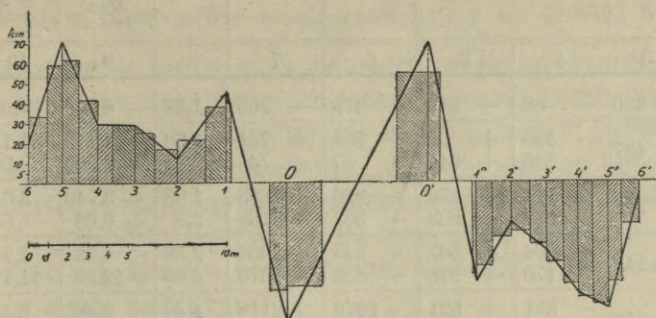


Rys. 13.

Teraz możemy wykreślić po dwa prostokąty dla każdego węzła λy_l i πy_p (rys. 13.). Przez środki boków λ i π , równoległych do osi, wykreślamy proste, jak na rys. 11.

Jednak z powodu karykaturalnej skali kątów ϑ i dowolnego wkreślenia linii ugięcia na rys. 12 znalezione prostokąty λy_l i πy_p nie są ściśle, zatem proste linii momentów nie przetną się wogóle na pionowych podporowych, a punkty zerowe nie będą połowyły odstępów pomiędzy prostokątami. Należy tedy wykres 13 poprawić tak, aby powyższe warunki się spełniły. Można przytem zmieniać zarówno kształt jak i wielkość prostokątów, byle tylko suma ich przy danym węzle była niezmienną (równ. 29). Rys. 14. przedstawia wykres momentów poprawiony wraz z poprawionymi prostokątami $E J_0 \tau$. Z rys. 14. odczytano wartości M (rubr. 7) i dla sprawdzenia wstawiono je w równ. 27. (rubr. 8 i 9) i otrzymano wartości poprawione, rubr. 10. tabl. VI.

Z podobieństwa rubryk 7 i 10 widać, że sposób opisany jest dokładny. Prowadzi on prędko do celu, jest przejrzysty i nie wymaga wiele liczenia. Trzeba tylko obliczyć długości sprowadzone



Rys. 14.

(równ. 3) i wysokości prostokątów y_l i y_p (równ. 28 b i c). Można to jednak zrobić wykreślnie, zarówno jak i zamianę prostokąta na inny o tej samej powierzchni. Kąty ϑ możemy zamiast z równ. 21 i 5 obliczyć z planu Williota jako różnicę skrętów obu pręseł, więc

$$\vartheta = \psi_l - \psi_p \quad (\text{por. równ. 19}).$$

B. Momenty węzłowe w prętach kraty.

Znajdziemy je z równ. (1) str. 10.

$$M_{mn} = 2 \frac{EJ}{s} (2 \tau_{mn} + \tau_{rm}) = 2 \frac{J}{s} E \eta.$$

Kąt odchylenia stycznej od cięciwy dodatni, jeżeli w kierunku wskazówek zegara, znajdziemy z równ. 6 (por. rys. 3. i rys. 15).

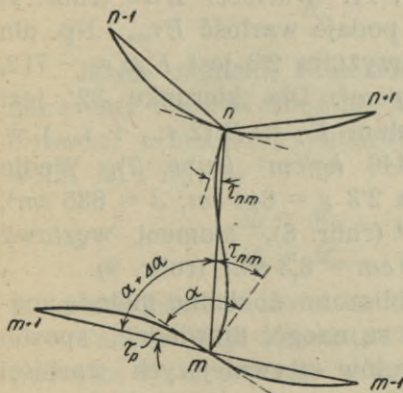
$$\tau_{mn} = \zeta_m - \Delta \alpha_{mn}.$$

Z uwagi na niewielką sztywność prętów kraty w stosunku do prętów obwodu belki możemy przyjąć

$$\zeta_m = \tau_{pm},$$

przyczem τ_{pm} weźmiemy z rysunku 14, z równania $EJ_o \tau_{pm} = \pi_m y_{pm}$, względnie z tabl. VI rubr. 11, jeżeli momenty węzłowe w obwodzie znaleziono sposobem wykreślnym, jeżeli zaś sposobem analitycznym, to z równania (24).

Tablica VII podaje całkowite



Rys. 15.

<i>m</i>	<i>n</i>	$E\zeta_m$	$E\Delta\alpha_{mn}$	$E\tau_{mn}$	$E\tau_{nm}$	$E\eta$	$2J:s$	M <i>tc</i>	Manderla <i>tc</i>	Różn. %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6	5'	- 330	- 88	- 242	+ 279	- 205	1,32	- 0,368	0,3	23
5	4'	- 487	- 526	+ 39	+ 696	+ 744	1,50	+ 1,112	1,11	2
	5'	- 487	- 828	+ 341	+ 67	+ 749	2,68	+ 2,005	2,08	3,7
4	3'	- 234	- 710	+ 476	+ 936	+ 1888	1,98	+ 3,740	3,6	3,9
	4'	- 234	- 1037	+ 803	+ 562	+ 2168	2,8	+ 6,08	5,64	7,8
3	2'	- 242	- 804	+ 562	+ 942	+ 2066	2,58	+ 5,33	5,25	1,5
	3'	- 242	- 1170	+ 928	+ 820	+ 2676	4,68	+ 12,50	11,17	11,9
2	1'	- 310	- 831	+ 521	+ 1076	+ 2118	4,46	+ 9,46	9,45	0,1
	2'	- 310	- 1222	+ 912	+ 855	+ 2679	6,60	+ 17,70	17,33	2,1
1	0'	- 86	- 804	+ 718	+ 327	+ 1763	14,28	+ 25,20	18,7	34,8
	1'	- 86	- 1337	+ 1251	+ 1101	+ 3603	14,52	+ 52,50	43,3	21,0
0'	1	- 330	- 657	+ 327	+ 718	+ 1372	14,28	+ 19,60	14,96	31,0
1'	2	+ 347	- 729	+ 1076	+ 521	+ 2663	4,46	+ 11,86	11,9	0,03
	1	+ 347	- 754	+ 1101	+ 1251	+ 3453	14,52	+ 50,15	42,2	18,8
2'	3	+ 230	- 712	+ 942	+ 562	+ 2446	2,58	+ 6,30	6,95	9,4
	2	+ 230	- 625	+ 855	+ 912	+ 2622	6,60	+ 17,31	16,88	2,55
3'	4	+ 336	- 600	+ 936	+ 476	+ 2348	1,98	+ 4,65	4,98	6,6
	3	+ 336	- 484	+ 820	+ 928	+ 2768	4,68	+ 12,75	10,82	17,8
4'	5	+ 433	- 263	+ 696	+ 39	+ 1431	1,50	+ 2,15	2,50	14,0
	4	+ 433	- 129	+ 562	+ 803	+ 1927	2,80	+ 5,40	5,23	3,3
5'	6	+ 340	+ 61	+ 279	- 242	+ 316	1,32	+ 0,418	0,48	13,0
	5	+ 340	+ 273	+ 67	+ 341	+ 475	2,68	+ 1,272	1,33	4,4

obliczenie momentów węzłowych w słupach i krzyżulcach belki, której obwód obliczyliśmy powyżej (tabl. VI). Rubryka 3 podaje wartości $E\zeta_m$ wzięte z tabl. VI rubr. 11. Wartości $E\Delta\alpha$ (rubr. 4) wzięto z tabl. II rubr. 4. Rubryka 5 podaje wartość $E\tau_{mn}$. Np. dla węzła 2' mamy $E\zeta_m = + 230$. Dla krzyżulca 2'3 jest $E\Delta\alpha = - 712$, $E\tau_{mn} = + 230 - (- 712) = + 942 \text{ kg/cm}^2$. Dla kierunku 32' jest $E\tau_{nw} = + 562 = E\tau_{nm}$ (rubr. 6). Zatem $E\eta = E(2\tau_{mn} + \tau_{nm}) = 2 \cdot 942 + 562 = 1884 + 562 = 2446 \text{ kg/cm}^2$ (rubr. 7). Wedle tablicy I rubr. 2 i 4 jest dla pręta 2'3 $s = 644 \text{ cm}$; $J = 835 \text{ cm}^4$, więc $2J:s = 2 \cdot 835 : 644 = 2,58 \text{ cm}^3$ (rubr. 8). Moment węzłowy $M = 2,58 \text{ cm}^3 \cdot 2446 \text{ kg/cm}^2 = 6300 \text{ kg cm} = 6,3 \text{ tcm}$ (rubr. 9).

Rubryka 10 podaje wartości, obliczone dokładną metodą analityczną (tabl. II rubr. 26). Różnice są naogół niewielkie, sposób przybliżony daje zwłaszcza dla prętów sztywniejszych wartości nieco zawielkie. Rubryka 11 podaje różnice w procentach wartości dokładnej. Tylko w prętach 0'1 i 11' różnice te są dość

znaczne. Możemy je poprawić, uwzględniając zmniejszenie kąta $\zeta_m = \tau_p$ wskutek momentów węzłowych kraty.

C. Wpływ momentów węzłowych kraty na obwód belki.

Znalezione w ten sposób momenty węzłowe krzyżulców należy uważać jako dodatkowe obciążenie naszej belki obwodowej, zrektyfikowanej i sprowadzonej na stały moment bezwładności. Ponieważ jednak wpływ momentu, działającego na belkę w pewnym miejscu maleje szybko z odległością od tegoż miejsca, możemy w przybliżeniu wpływ ten na inne węzły pominąć, zarówno jak i wpływ sprężystego utwierdzenia sąsiednich węzłów na momenty we węźle badanym.

Jeżeli suma momentów w obu prętach kraty przy węźle badanym jest Z , dodatkowy moment (z powodu sztywnego umocowania prętów kraty) w lewym pręcie $\Delta M_{n, n-1} = K_l$, zaś w prawym $\Delta M_{n, n+1} = K_p$ (Z , K_l i K_p dodatnie, jeżeli w kierunku wskazówek zegara, „lewy“ zaś i „prawy“ — dla patrzącego od wnętrza obwodu), to warunek równowagi dyktuje:

$$K_l + K_p + Z = 0. \quad (30)$$

Uważając węzły $n - 1$ i $n + 1$ jako przegubowe, a tylko węzeł n jako sztywny, otrzymamy:

$$K_l : K_p = p : l. \quad (31)$$

Z obu ostatnich równań wyływa

$$\left. \begin{aligned} K_l &= -Z \frac{p}{l+p} \\ K_p &= -Z \frac{l}{l+p} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Jeżeli moment, znaleziony dla obwodu niezależnie od kraty nazwiemy teraz \mathfrak{M} (dodatni, jeżeli wygina wypukłością ku wnętrzu obwodu) a momenty całkowite przy węźle n w obu prętach obwodu M_l i M_p , to

$$\left. \begin{aligned} M_l &= M_{n, n-1} = -\mathfrak{M}_n + K_l \\ M_p &= M_{n, n+1} = +\mathfrak{M}_n + K_p \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

dodatnie, jeżeli w kierunku wskazówek zegara.

Tablica VIII przedstawia obliczenie momentów węzłowych (rubryka 6) w prętach obwodu na podstawie wartości Z , jako sum momentów, wziętych z tabl. VII. rubr. 9, tudzież wartości \mathfrak{M} , wziętych z rysunku 14. względnie tablicy VI. rubr. 7. np. dla mo-

TABLICA VIII.

Poprawione momenty w obwodzie belki.

m	l Σ $p \text{ cm}$	Z $tc \text{ n}$	K_l K_p tcm	\mathfrak{M} tcm	M_l M_p tcm	Manderla	Różnica %
1	2	3	4	5	6	7	8
6	350			- 20		- 23	14
	175						
5	350	+ 3,117	- 1,559	- 71	+ 69,44 - 72,56	+ 68,91 - 72,1	0,77 0,64
	175						
4	367	+ 9,820	- 5,14 - 4,68	- 30	+ 24,86 - 34,68	+ 25,4 - 34,64	2,12 0
	192						
3	404	+ 17,83	- 9,35 - 8,48	- 29	+ 19,65 - 37,48	+ 24,03 - 40,45	18 7,5
	212						
2	456	+ 27,16	- 14,5 - 12,66	- 12	- 2,5 - 24,66	+ 8,05 - 34,83	29
	244						
1	547	+ 77,7	- 43,0 - 34,7	- 45	+ 2,0 - 79,7	+ 4,0 - 66,0	21,0
	303						
0	1018	0,0	0,0	+ 70	- 70 + 70	- 72,25 + 72,25	3,2 3,2
	715						
0'	956	+ 19,60	- 5,0 - 14,60	- 70	+ 65 - 84,60	+ 68,52 - 83,48	5,3 1,3
	241						
1'	418	+ 62,01	- 26,2 - 35,8	+ 49	- 75,2 + 13,2	- 70,1 + 16	5,1 17
	177						
2'	351,5	+ 23,61	- 11,7 - 11,9	+ 20,5	- 32,2 + 8,6	- 38,88 + 15,05	16 43
	174,5						
3'	329	+ 17,40	- 8,16 - 9,24	+ 35	- 43,16 + 25,76	- 43,9 + 28,1	2 8,3
	154,5						
4'	308,5	+ 7,55	- 3,77 - 3,78	+ 56,3	- 60,07 + 52,52	- 56,08 + 48,35	7,1 8,6
	154						
5'	308	+ 1,69	- 0,845	+ 63	- 63,845 + 62,155	- 68,66 + 66,85	7 7
	154						
6'	308			+ 5	- 5,0	- 1,0	

mentu lewego w węźle 4 (patrząc od wnętrza obwodu belki), t. j. dla M_{45} mamy $l = 175$, $p = 192$, $l + p = 367 \text{ cm}$ (rubr. 2), $Z = 3,74 + 6,08 = + 9,82 \text{ tcm}$ (rubr. 3 por. VII. 9).

Wedle równ. 32 jest

$$K_l = - 9,82 \frac{192}{367} = - 5,14 \text{ tcm (rubr. 4).}$$

Z tabl. VI. rubr. 7 jest dla węzła 4

$$M \text{ wykr.} = \mathfrak{M} = - 30 \text{ tcm (rubr. 5).}$$

Zatem wedle równ. 33

$$M_l = M_{45} = + 30 - 5,14 = + 24,86 \text{ tcm (rubr. 6).}$$

Rubryka 7. podaje momenty, obliczone sposobem dokładnym (por. tabl. II. rubr. 26). Rubryki 6 i 7 są naogół bardzo podobne, różnice numeryczne względnie procentowe (rubr. 8) są niewielkie. Szczególnie dobrze uchwycone są momenty liczebnie największe, a o to głównie chodzi w obliczeniu naprężeń drugorzędnych.

Całkowite obliczenie momentów węzłowych obejmuje prócz obliczenia zmian kątów ϑ (które wzięto z przykładu 1):

1) Obliczenie momentów podporowych w zrektyfikowanym i sprowadzonym obwodzie kratownicy (tablica IV i V lub też rys. 12, 13 i 14 i tablica IV. i VI.

2) Obliczenie momentów węzłowych w prętach kraty (tabl. VII).

3) Obliczenie wpływu kraty na obwód (tabl. VIII). Należy zwrócić uwagę, że tabliczki IV do VIII. są bardzo skromne w porównaniu do tablic I., II. i III. w przykładzie dokładnym, co daje dostateczne pojęcie o korzyści sposobu przybliżonego.

Pozatem niektóre rubryki w tabelkach VI, VII i VIII są wspólne, niektóre są wogóle w praktyce niepotrzebne, a dodane w naszym przykładzie dla wykazania ich stopnia przybliżenia, tak, iż łączna ilość pracy, potrzebna do znalezienia przybliżonych momentów węzłowych opisanym sposobem, jest o wiele mniejsza, niż przy którymkolwiek sposobie dokładnym. Naprężenia drugorzędne otrzymamy z momentów węzłowych z równania $\nu = \frac{Me}{J}$, dlatego dla opisanego metody przybliżonej wystarczy podać obliczenie momentów węzłowych.

III. Linje wpływowe naprężeń drugorzędnych.

Powyżej (str. 31) zauważyliśmy, że sprawę miarodajnych naprężeń drugorzędnych w kracie rozstrzygnąć można tylko przy pomocy linii wpływowych. Jeżeli chcemy wykreślić linje wpływowe wszystkich momentów węzłowych, względnie naprężeń drugorzędnych we wszystkich prętach (po dwie dla każdego), to musimy kolejno zaczepiać w każdym węźle pasa pomostowego ciężar $P = 1$ (jeżeli belka jest symetryczna, to tylko we węzłach jednej połowy belki) i dla każdego przypadku przeprowadzić dokładne obliczenie jednym z powyżej podanych sposobów. Ponieważ, gdy tylko jeden węzeł jest obciążony, siły wewnętrzne we wszystkich prętach są proporcjonalne do jednego z oddziaływań, przeto wystarczy wogóle wykreślić dwa plany Cremony dla $A = 1$ i dla $B = 1$. Jeżeli belka jest symetryczna, to tylko jeden plan

jest potrzebny. Dla dowolnego A należy siły wewn. z planu $A = 1$, pomnożyć przez A . W trójkącie, którego wszystkie pręty posiadają siły wewnętrzne proporcjonalne do A , także zmiany kątów są do A proporcjonalne. Skoro więc wyznaczyliśmy je dla $A = 1$, wystarczy je znów tylko pomnożyć przez A . Tylko w jednym trójkącie, w którym nie wszystkie pręty posiadają naprężenia proporcjonalne do jednego tylko oddziaływania, należy dla znalezienia przyrostów $\Delta\alpha$ zastosować równanie (5):

$$E \Delta\alpha = (v_a - v_b) \cot \gamma + (v_a - v_c) \cot \beta.$$

Na podstawie zmian $\Delta\alpha$ oblicza się kąty odchylenia τ , momenty węzłowe M i naprężenia drugorzędne v_{II} .

Znając moment węzłowy (wzgl. naprężenie drugorzędne) w pewnym przecię kratownicy dla każdego położenia siły $P = 1$, możemy wykreślić rzędną linii wpływowej w każdym węźle pasa pomostowego, a łącząc końce rzędnych prostymi (gdyż linia wpływowa pomiędzy poprzecznicami jest prosta), otrzymamy żadaną linię wpływową.

Dla bezpieczeństwa konstrukcji miarodajna jest suma naprężenia I i II-rzędnego. Zatem dla pasów, narożników i przekątni w polach skrajnych nie potrzebujemy linii wpływowych naprężeń drugorzędnych, gdyż niekorzystne jest tu obciążenie zupełne, które powoduje największe naprężenia główne. Wystarczy przeto obliczyć naprężenia drugorzędne w tych prętach dla obciążenia zupełnego. Natomiast dla krzyżulców i słupów w polach środkowych interesuje nas naprężenie II-rzęd. wskutek obciążenia częściowego. Dla tych prętów możemy potrzebować linii wpływowych. Jeżeli zaś chcemy wykreślić linie wpływowe tylko niewielu prętów albo tylko jedną linię wpływową (czy to któregoś momentu węzłowego, czy też naprężenia drugorzędnego jednego tylko pręta na jednym jego końcu), to zastosujemy równanie Mohra (15). Podstawiając:

$$\eta = 2 \varphi_m + \varphi_n - 3 \psi_{mn}, \quad (34)$$

otrzymamy

$$M_{mn} = 2 \frac{JE}{s} \eta \quad (35)$$

$$i \quad v = M_{mn} \frac{e}{J} = 2 \frac{e}{s} E \eta. \quad (36)$$

Ciężar P , działający w dowolnym punkcie p pasa pomostowego, wywoła pewien skręt φ_m węzła m (rys. 16 a). Moment zaś

M_m , działający na węzeł m (rys. 16 b), wywoła przesunięcie pionowe δ punktu p . Zasada wzajemności przesunięć (E. Betti) (15* str. 205) daje równanie

$$P \cdot \delta = M_m \cdot \varphi_m,$$

stąd

$$\varphi_m = \frac{\delta}{M_m} \cdot P \quad (37)$$

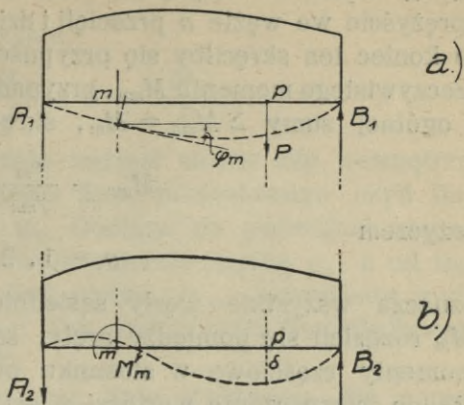
Zatem linja ugięcia pasa pomostowego wskutek momentu M_m we węźle m , będzie linją wpływową skrętu φ_m , skoro jej rzędne δ podzielimy przez M_m . Podobnie znajdziemy linję wpływową dla φ_n .

Siła P , działająca w punkcie p , wywoła obrót ψ pręta mn (rys. 17 a), natomiast para sił o wartości μ , zaczepiająca we węzłach m i n , wywoła pionowe ugięcie δ punktu p (rys. b) tak, że $P \cdot \delta = \mu \cdot \psi$, skąd:

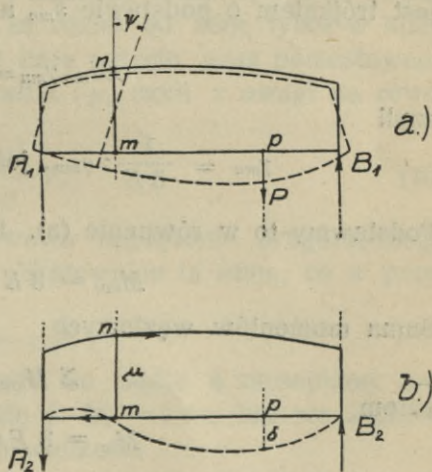
$$\psi = \frac{\delta}{\mu} P. \quad (37 a)$$

Zatem linja ugięcia pasa AB z powodu pary sił μ , jak na rys. 17 b, jest linją wpływową obrotu ψ w skali $1:\mu$. Mając linje wpływowe dla φ_m , φ_n i φ_{mn} , możemy na zasadzie superpozycji wykreślić linję wpływową dla η , a więc i dla M_{mn} i v_{mn} .

Para sił, zaczepiających w węzłach m i n , wywołuje pewne oddziaływania A i B i siły wewnętrzne w prętach, które można otrzymać z planu Cremony, zatem wykreślenie linji ugięcia nie przedstawia trudności. Natomiast dokładne wyznaczenie linji ugięcia w przypadku, gdy na węzeł m działa moment M_m , jest praktycznie niemożliwe, bo nie wiemy, jak się ten moment



Rys. 16.



Rys. 17.

rozkłada na pręty, schodzące się w m . Moment M_m wywoła skręt $\varepsilon_m M_m$ węzła m . Gdybyśmy koniec m pręta mn , utwierdzonego sprężystością we węźle n przecięli i działali nań momentem $M_{mn} = 1$, to koniec ten skrzyłby się przypuścimy o kąt γ_{mn} . Pod wpływem rzeczywistego momentu M_{mn} , przypadającego na dany pręt w udziale z ogólnej sumy $\Sigma M_{mn} = M_m$, skrzył się on o kąt $M_{mn} \cdot \gamma_{mn}$ czyli

$$M_{mn} = \frac{\varepsilon_m}{\gamma_{mn}} \cdot M_m, \quad (a)$$

przyczem

$$n = 1, 2 \dots$$

oznacza wszystkie węzły sąsiednie węzłowi m . Zatem moment M_m rozdzieli się pomiędzy pręty, schodzące się we węźle m , na momenty częściowe w stosunku odwrotnym do wartości γ . Dokładne wyznaczenie wartości γ jest praktycznie niemożliwe. Wyznacza się je tylko w ustrojach ramowych najwyżej kilkakrotnie hyperstatycznych. Jeżeli jednak przyjmiemy, że tylko węzeł m jest sztywny, a wszystkie inne są przegubowe, to dla dowolnego pręta mn $EJ_{mn} \gamma_{mn}$ jest (wedle zasady Mohra) oddziaływaniem podpory m w belce mn , obciążonej powierzchnią momentów, która jest trójkątem o podstawie s_{mn} a wysokości $M_{mn} = 1$. Więc

$$EJ_{mn} \gamma_{mn} = \frac{2}{3} \frac{1}{2} s_{mn}$$

czyli

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{3E} : \varrho_{mn}, \text{ jeżeli } \varrho_{mn} = J_{mn} : s_{mn}. \quad (b)$$

Podstawmy to w równanie (a), to będzie:

$$M_{mn} = 3E \varepsilon_m M_m \varrho_{mn}. \quad (c)$$

Suma momentów węzłowych

$$\Sigma M_{mn} = M_m$$

zatem

$$M_m = 3E \varepsilon_m M_m \Sigma \varrho_{mn}. \quad (d)$$

Z równań c) i d) otrzymamy

$$M_{mn} = \frac{\varrho_{mn}}{\Sigma \varrho_{mn}} M_m \quad (38)$$

Zatem moment M_m rozkłada się pomiędzy pręty, schodzące się we węźle m , proporcjonalnie do sztywności prętów ϱ .

Wskutek momentów M_{mn} powstają w prętach mn siły poprzeczne, a we węzłach oddziaływania poprzeczne

$$P_n = \frac{M_{mn}}{s_{mn}} = \frac{q_{mn}}{\Sigma q} \frac{M_m}{s_{mn}} \quad (39)$$

zaś na podporach oddziaływania

$$A = - \frac{M_m}{l} \quad \text{i} \quad B = \frac{M_m}{l}.$$

Wykreślnie lub analitycznie znaleźć można siły wewnętrzne we wszystkich prętach i ugięcie pasa pomostowego czyli linię wpływową dla q_m . Podobnie q_n . Dodając do podwójnej rzędnej linii wpływowej dla q_m w pewnym punkcie rzędną q_n , a od tego odejmując trzykrotną rzędną linii wpływ. ψ_{mn} , otrzymamy wedle równ. 34. linię wpływową dla η . Tak postępowała Komisja Szwajc. Związku fabryk (11*, 12*, 18*).

Łatwo zauważyć, że tę samą linię wpływową dla η znajdziemy odrazu, obciążając belkę równocześnie momentami $M_m = 2\mu$, $M^n = \mu$ i parą sił we węzłach m i n o wielkości $= -3\mu$. Wtedy suma momentów, działających na belkę, jest równa:

$$2\mu + \mu - 3\mu = 0,$$

więc belka jest w równowadze i oddziaływania A i B są równe zeru. Siły wewnętrzne osiowe są różne od zera tylko w kilku prętach blisko węzłów m i n , a linia ugięcia pasa pomostowego jest linią wpływową dla η w skali $1 : \mu$, czyli z uwagi na równ. 37 i równ. 34:

$$\eta = \frac{\delta}{\mu} \cdot P. \quad (40)$$

Przykład 3. Linja wpływowa naprężenia drugorzędowego we węźle 4, pręta 44' (rys. 18). Kratownica ta sama, co w przykładzie 1. i 2.

$$v_{mn} = v_{44'}.$$

Przyjmujemy $\mu = 1 \text{ tm}$, czyli we węźle 4 zaczepiamy moment $M_m = M_4 = 2 \text{ tm}$, we węźle 4' $M_{4'} = 1 \text{ tm}$, zaś we węzłach 4 i 4' zaczepiamy siły poziome o wielkości

$$3 \text{ tm} : s_{44'} = 3 \text{ tm} : 6,38 \text{ m} = 470 \text{ kg}$$

tak, iż moment ich wynosi -3 tm (rys. 18 a).

Suma wszystkich tych momentów $= 0$, więc oddziaływania $A = 0$ i $B = 0$.

Sztywności prętów, zbiegających się we węźle 4, są w prętach:

	43	43'	44'	45
$q = I : s =$	52	0.99	1.4	57 cm^3 ,

zatem $\Sigma \varrho = 111 \text{ cm}^3$. Moment $M_4 = 2 \text{ tm}$ rozłoży się prawie wyłącznie pomiędzy pręty pasa dolnego 43 i 45 i będzie:

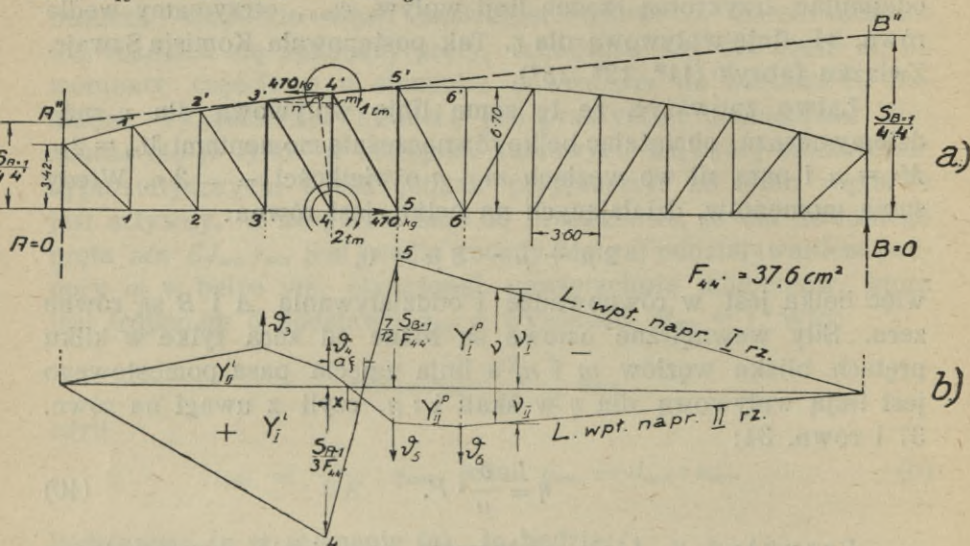
$$M_{43} = \frac{\varrho_{43}}{\Sigma \varrho} M_4 = \frac{52}{111} \cdot 2 = 0.94 \text{ tm}$$

$$M_{45} = \frac{\varrho_{45}}{\Sigma \varrho} M_4 = \frac{57}{111} \cdot 2 = 1.06 \text{ tm}$$

Siła poprzeczna w przęcie 43:

$$T_{43} = \frac{M_{43}}{s_{43}} = \frac{0.94 \text{ tm}}{3.6 \text{ m}} = 260 \text{ kg},$$

zaś $T_{45} = 1.06 : 3.6 = 295 \text{ kg}$.



Rys. 18.

Oddziaływania we węzłach będą:

$$P_3 = -260 \text{ kg}, P_6 = +295 \text{ kg}, P_4 = -(P_3 + P_6) = -35.$$

Znak $-$ oznacza kierunek z dołu do góry.

Podobnie moment $M_4' = 1 \text{ tm}$ rozkłada się między pręty pasa górnego (kratę można znowu pominąć) 4'3' i 4'5', których ϱ jest odpowiednio 64,6 i 64,9 cm^3 , $\Sigma \varrho = 64,6 + 64,9 = 129,5 \text{ cm}^3$, zaś naciski we węzłach z powodu sił poprzecznych prostopadłe do pręta 3'4'

$$P_{3'} = \frac{\varrho_{4'3'}}{\Sigma \varrho} M_4' : s_{4'3'} = \frac{64,6}{129,5} \cdot \frac{1 \text{ tm}}{3,62 \text{ m}} = -138 \text{ kg}$$

zaś prostopadłe do pręta 4'5':

$$P_{6'} = \frac{\varrho_{4'5'}}{\Sigma \varrho} \frac{M_4'}{s_{4'5'}} = \frac{64,9}{129,5} \frac{1 \text{ tm}}{3,61 \text{ m}} = +138,6 \text{ kg}.$$

Wskutek sił P we węzłach 3, 3', 4, 4', 5 i 5' powstaną w ośmiu prętach, oznaczonych grubo na rys. 18 a, pewne siły wewnętrzne S . I tak:

$$S_{33'} = -P_3 = -260 \text{ kg}$$

$$S_{55'} = -P_5 \cdot \frac{s_{4'5'}}{s_{45}} = -139 \frac{360,8}{360} = -139,31 \text{ kg}$$

$$S_{4'5'} = P_5 \cdot \frac{s_{55'} - s_{44'}}{s_{45}} = 139 \frac{24}{360} = +9,3 \text{ kg}$$

$$S_{55'} + P_5 = 139,3 + 295 = 434,3 \text{ kg}$$

$$S_{45} = -434,3 \frac{360}{638} = -239 \text{ kg}$$

$$S_{4'5} = +434,3 \frac{733}{638} = +485,3 \text{ kg}$$

$$S'_{3'4'} = +S_{33'} \frac{3'4'}{44'} = -260 \frac{362,4}{638} = -147 \text{ kg}$$

$$S'_{3'4} = -S_{33'} \frac{3'4}{44'} = 260 \frac{696,3}{638} = +283 \text{ kg.}$$

Niech $4n \perp 4'3'$ i $3'm \perp 44'$ (rys. 18 a)

to $\triangle 4n4' \sim \triangle 3'm4'$

stad $4n = 3'm \frac{44'}{3'4'} = 360 \frac{638}{362,4} = 633 \text{ cm}$

$$4'n = 4'm \frac{44'}{3'4'} = (638 - 596) \frac{638}{362,4} = 74 \text{ cm}$$

$$3'n = 3'4' - n4' = 362,4 - 74 = 288,4 \text{ cm}$$

$$S''_{3'4'} = -P_3 \frac{3'n}{4n} = -138 \frac{288}{633} = -50,5 \text{ kg}$$

$$S''_{3'4} = +P_3 \frac{3'4}{4n} = +138 \frac{696,3}{633} = +152 \text{ kg}$$

$$S_{3'4'} = S'_{3'4'} + S''_{3'4'} = -147 - 50,5 = -197,5 \text{ kg}$$

$$S_{3'4} = S'_{3'4} + S''_{3'4} = 283 + 152 = +435 \text{ kg.}$$

Równanie sił pionowych w węzle 4.

$$P_4 + S_{44'} + S_{43'} \frac{4m}{43'} = 0$$

$$S_{44'} = -P_4 - 435 \frac{596}{696,3} = -25 - 373 = -398 \text{ kg.}$$

Dla kontroli weźmy równanie sił poziomych w węźle 4.

$$470 \text{ kg} + S_{45} - S_{43} \frac{360}{696,3} = 0$$

$$S_{45} = 435 \frac{360}{696,3} - 470 = -245 \text{ kg}$$

zamiast -239 kg , jak wyżej; dokładność wystarczająca, zupełna być nie może bośmy zaniedbali pary sił $M_{43'}$ i $M_{44'}$. Dzielać siły wewnętrzne S przez przekroje F (rubryka 3 tablicy I) otrzymamy naprężenia $\nu = S : F$, por. tablica IX.

Tablica IX.

Pręt	S kg	F cm^2	ν kg/cm ²
33'	-260	67	-3863
44'	-398	42	-9545
55'	-139	42	-3320
43'	+435	60	+7333
54'	+485	48	+10120
4' 3'	-197	245	-0859
4' 5'	+93	245	+0038
45	-239	184	-1232

Wskutek naprężeń ν powstaną zmiany kątów, które znajdziemy wedle równ. (5).

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{33'4} &= (\nu_{33'} - \nu_{43'}) \text{ctg } \alpha_{33'4} = (-3,863 - 7,333) \frac{596}{360} = \\ &= -11,196 \cdot 1,658 = -18,525. \end{aligned}$$

Podobnie

$$\Delta\alpha_{454'} = -19,665 \cdot 1,772 = -34,820$$

$$\Delta\alpha_{55'6} = -3,320 \cdot 1,840 = -6,105$$

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{33'4} &= (\nu_{34} - \nu_{3'4}) \text{ctg } \alpha_{33'4} = (0 - 7,333) \frac{360}{596} = \\ &= -7,333 \cdot 0,603 = -4,425. \end{aligned}$$

Podobnie

$$\Delta\alpha_{44'5} = -11,352 \cdot 0,564 = -6,400$$

$$\Delta\alpha_{55'6} = 0 \cdot 0,544 = 0$$

$$\Delta\alpha_{433'} = -(\Delta\alpha_{343} + \Delta\alpha_{33'4}) = 18,525 + 4,425 = 22,950.$$

Podobnie

$$\Delta\alpha_{544'} = 34,820 + 6,400 = +41,220$$

$$\Delta\alpha_{655'} = 6,105 + 0 = +6,105$$

$$\Delta\alpha_{2'33'} = (\nu_{2'3'} - \nu_{2'3}) \operatorname{ctg} \alpha_{3'2'3} + (\nu_{2'3'} - \nu_{33'}) \operatorname{ctg} \alpha_{2'3'3} = 0 \cdot 0,450 + 3,863 \cdot 0,172 = 0 + 0,665 = + 0,665.$$

Podobnie

$$\Delta\alpha_{3'44'} = - 8,204 \cdot 0,458 + 8,686 \cdot 0,1167 = - 3,750 + 1,010 = - 2,740$$

$$\Delta\alpha_{4'55'} = - 10,082 \cdot 0,479 + 3,558 \cdot 0,0666 = - 4,825 + 0,224 = - 4,601.$$

Ze zmian kątów obliczymy ciężary sprężyste \mathcal{J} :

$$\mathcal{J}_3 = - (\Delta\alpha_{232'} + \Delta\alpha_{2'33'} + \Delta\alpha_{3'34}) = 0 - 0,665 - 22,950 = - 23,615 \quad \dots \quad 23,615$$

$$\mathcal{J}_4 = + 18,525 + 2,740 - 41,220 = - 19,955 \quad \dots \quad 43,570$$

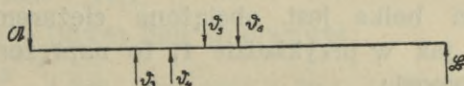
$$\mathcal{J}_5 = + 34,820 + 4,601 - 6,105 = + 33,316$$

$$\mathcal{J}_6 = + 6,105 + 0 + 0 = + 6,105 \quad \dots \quad 39,421$$

$$\Sigma \mathcal{J} = - 4,149$$

Wielkości $\Delta\alpha$ i \mathcal{J} są już pomnożone przez moduł Younga w kg/cm^2 dla skrócenia zamiast $E\Delta\alpha$ piszemy $\Delta\alpha$
 „ $E\mathcal{J}$ „ „ \mathcal{J} .

Rzędne δ linii ugięcia równe są momentom zginającym w belce wolno podpartej AB (rys. 19) obciążonej ciężarami sprę-



Rys. 19.

żystymi $E\mathcal{J}$ (Mohr). Z warunku równowagi względem \mathcal{B} otrzymamy $\mathcal{U} \cdot 12 = 6(\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_5 + \mathcal{J}_6) + 3\mathcal{J}_3 + 2\mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_6$.

$$\text{Stąd } \mathcal{U} = - \frac{6}{12} 4,149 - \frac{3}{12} 23,615 - \frac{2}{12} 19,955 + \frac{1}{12} 33,316 = - (2,075 + 5,904 + 3,326) + 2,776 = - 8,529$$

$$\mathcal{B} = - \mathcal{U} + \Sigma \mathcal{J} = + 8,529 - 4,149 = + 4,380 \text{ kg/cm}^2.$$

Znowu dla skrócenia piszemy \mathcal{U} , \mathcal{B} , \mathcal{J} zamiast $E\mathcal{U}$, $E\mathcal{B}$ i $E\mathcal{J}$.

$$\frac{E}{a} \delta_3 = \mathcal{U} \cdot 3 = - 25,587 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\frac{E}{a} \delta_4 = \mathcal{U} \cdot 4 - \mathcal{J}_3 = - 34,116 + 23,615 = - 10,501$$

$$\frac{E}{a} \delta_5 = \mathcal{U} \cdot 5 - 2\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_4 = - 42,645 + 47,230 + 19,955 = + 24,540$$

$$\frac{E}{a} \delta_6 = 6\mathcal{B} = + 26,28 \text{ kg/cm}^2.$$

Jeżeli napiszemy $\nu = y \cdot P$

to y jest rzędną linii wpływowej dla ν w punkcie zaczepienia ciężaru P i z uwagi na równ. 36 i 40 jest

$$y = \frac{2ea}{s\mu} \frac{E\delta}{a} = \frac{23.360 \text{ cm}}{638.1 \text{ tm}} \frac{E\delta}{a} = 0,13 \cdot 10^{-3} \frac{E\delta}{a \text{ kg}}$$

Dla węzła	3	4	5	6
jest $E\delta : a = -$	25,587	- 10,501	+ 24,540	+ 26,28 kg/cm^2
$10^3 y =$	- 3,32	- 1,365	+ 3,19	+ 3,42 cm^{-2} .

Punkt obojętny znajduje się w odstępnie x na prawo od węzła 4 (rys. 18 b) wedle równania:

$$x : 10,501 = (a - x) : 24,5. \text{ Podstawmy } x : a = \xi,$$

$$\text{to } 24,5 \xi = 10,501 (1 - \xi), \text{ stąd } \xi = 0,3.$$

Powierzchnia ujemna (lewa) linii wpływowej

$$Y_{II}^l = a \cdot 10^{-3} \left(3,32 \cdot 2 + 1,365 \cdot \frac{1+0,3}{2} \right) = 7,53 a \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2}.$$

Powierzchnia dodatnia (prawa)

$$Y_{II}^p = a \cdot 10^{-3} \left(3,19 \cdot \frac{1,7}{2} + 3,42 \cdot \frac{7}{2} \right) = 14,67 \cdot a \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2}.$$

Algebraiczna powierzchnia całkowita $Y_{II} = \frac{7,14 a \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2}}{}$.

Jeżeli cała belka jest obciążona ciężarem jednostajnym $q = 2,663 \text{ t/m}$, jak w przykładzie 1, to naprężenie drugorzędne w słupie 4 4' wynosi:

$$\nu_{II} = Y_{II} \cdot q = q a \cdot 10^{-3} \cdot 7,14 = 9,6 \text{ kg } 7,14 \text{ cm}^{-2} = 68,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Dokładnie obliczono

$$\nu_{II} = 58$$

(por. tabl. I. rubr. 15).

Zgodność wyników jest zadowalająca, jeśli się zważy, że dla obliczenia linii wpływowej wyrażen φ_m i φ_n uwzględniono sztywność tylko jednego węzła, a wszystkie inne przyjęto jako przegubowe.

Wykreślmy linię wpływową naprężenia pierwszorzędnego $\nu_I = S_{A'} : F_{u A'}$. Jeżeli belkę obciążymy na prawo od węzła 5 tak, iż oddziaływanie $A = 1$, to siła wewn. w pręcie 4 4' niech wynosi $S_{A=1}$. Analogicznie $S_{B=1}$.

Gdybyśmy od prostej poziomej AB odmierzyli pionowo $AA' = S_{A=1} : F_u$, to prosta BA' byłaby linią wpływową ν_I na długości $B-5$ (metoda Müllera Breslau'a, por. 1* str. 121). Podobnie na długości $A-4$ linią wpływową byłaby prosta AB' , przyczem $BB' = S_{B=1} : F_u$. Przedłużmy pręt 3'4' (rys. 18 a) na obie strony, to otrzymamy na pionowych podporowych odcinki AA'' i BB'' . Siły, działające na lewą część belki odciętą przekro-

jem przez pręty 3'4', 4'4 i 45, są proporcjonalne do boków czworoboku 44' A'' A (Culmann).

Zatem $AA'' : 44' = - S_{A=1}$,
podobnie $BB'' : 44' = + S_{B=1}$.¹⁾

Nazwijmy Δh przyrost wysokości belki w obrębie pola 3-4, a więc

$$\Delta h = 44' - 33' = 638 - 596 = 42 \text{ cm}$$

to $AA'' = 44' - 4 \Delta h = 638 - 168 = 470 \text{ cm}$

$$BB'' = 44' + 8 \Delta h = 638 + 336 = 974 \text{ cm}.$$

Rzędna linii wpływowej v_I w punkcie 4.

$$y_4 = \frac{4}{12} BB'' = \frac{4}{12} \frac{S_{B=1}}{F_u} = \frac{4}{12} \frac{BB''}{44'} = \frac{4}{12} \frac{974}{638} : 37,7 = 10^{-3} \cdot 13,5 \text{ cm}^{-2}$$

Rzędna w punkcie 5 (rys. 18 b).

$$y_5 = \frac{7}{12} AA' = \frac{7}{12} \frac{S_{A=1}}{F_u} = - \frac{7}{12} \frac{470}{638} \frac{1}{37,6 \text{ cm}^2} = - 11,4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2}.$$

Punkt obojętny jest w odstępnie $a \cdot \xi$ od węzła 4. przyciem

$$13,5 : \xi = 11,4 : (1 - \xi)$$

$$\text{stad } \xi = \frac{13,5}{13,5 + 11,4} = 0,502, \quad 1 - \xi = 0,498.$$

Pole dodatnie (lewe) linii wpływowej:

$$Y_I^l = \frac{a}{2} \cdot 4,502 \cdot 13,5 \cdot 10^{-3} = 30,4 \cdot 10^{-3} a \text{ cm}^{-2}.$$

Pole ujemne (prawa gałąź) linii wpływowej:

$$Y_I^p = \frac{a}{2} \cdot 7,498 \cdot 11,4 \cdot 10^{-3} = 42,8 \cdot 10^{-3} a \text{ cm}^{-2}.$$

Algebraiczna powierzchnia linii wpływowej:

$$Y_I = Y_I^l - Y_I^p - a \cdot 10^{-3} (30,4 - 42,8) = a \cdot 10^{-3} \cdot 12,4 \text{ cm}^{-2}.$$

Pod obciążeniem całkowitem $q = 2,663 \text{ t/m}$ naprężenie pierwszorzędne w pręcie 44' wynosi:

$$v_{Iq} = Y_I \cdot q = - a q \cdot 10^{-3} \cdot 12,4 = - 9,6 \text{ kg} \cdot 12,4 \text{ cm}^{-2} = - 119 \text{ kg/cm}^2$$

(por. tabl. I. rubr. 18).

Ponieważ oś ciężkości przekroju pręta 44' jest równo oddalona od włókien skrajnych lewych i prawych, przeto w każdym przekroju tegoż pręta wystąpią naprężenia drugorzędne we włók-

¹⁾ Na rys. 18 a zakotowano mylnie odcinek AA'' i BB'' . Ma być 44 $S_{A=1}$ zamiast $\frac{S_{A=1}}{44'}$ Podobnie zamiast $\frac{S_{B=1}}{44'}$ ma być 44' $S_{B=1}$.

nach skrajnych równe lecz przeciwnego znaku. Zatem pod obciążeniem prawej części belki wystąpią w całym przekroju ciśnienia główne, a w jednej z krawędzi pręta 44' w przekroju 4 wystąpią ciśnienia drugorzędne. Ponieważ punkty obojętne linii wpływowych Y_I i Y_{II} są blisko siebie (por. rys. 18 b), przeto stosunek największego ciśnienia drugorzędnego do najw. ciśnienia głównego z powodu obciążenia ruchomego częściowego równa się prawie stosunkowi obu prawych gałęzi, —

$$\text{czyli} \quad \nu_{II} : \nu_I = Y_{II}^p : Y_I^p = 14,67 : 42,8 = 0,343.$$

Więc w przypadku obciążenia częściowego, niebezpiecznego dla pręta 44', naprężenie drugorzędne wynosi 34,3% naprężenia głównego.

Wprawdzie należałoby dla ścisłości wykreślić jeszcze linię wpływową naprężeń drugorzędnych w pręcie 44' w przekroju 4'. Jednak z uwagi na podobieństwo warunków jest prawdopodobne, że rzędne tej linii miałyby się różnić od linii dla przekroju 4. Otrzymana linia wpływ. dla przekroju 4 jest niekorzystna nie tylko z powodu wielkości rzędnych ale i dlatego, że jej punkt obojętny schodzi się prawie z punktem obojętnym linii wpływowej dla ν_I .

Pozatem dla obciążenia całkowitego otrzymaliśmy (por. tabl. II. rubr. 26)

$$M_{4,4'} = 5,64 \text{ t cm}, \quad M_{4',4} = 5,23 \text{ t cm}$$

czyli $M_{4,4'} > M_{4',4}$ więc jest prawdopodobne, że najw. naprężenie w przekroju 4 jest większe niż w przekroju 4'. Trzeba mianowicie wziąć jeszcze pod uwagę równoczesne obciążenie belki ciężarem własnym g na 1 mb całkowitym i ciężarem ruchomym p na 1 mb, częściowym. Wówczas stosunek naprężeń $\nu_{II} : \nu_I$ będzie:

$$x = \frac{g Y_{II} + p Y_{II}^p}{g Y_I + p Y_I^p} = \frac{7,14 K + 14,67}{12,4 K + 42,8},$$

jeżeli $K = \frac{g}{p}$. Przy rozpiętości belki $l = 43,2 \text{ m}$ przyjmijmy $K = 0,8$, to $x = 20,38 : 52,7 = 0,387$.

Więc miarodajne naprężenie drugorzędne wynosi blisko 40% naprężenia głównego.

Dla narożnika znaleźliśmy w przypadku obciążenia całkowitego ¹⁾ (dla narożnika obciążenie całkowite jest najniekorzystniejsze) $\nu_{II} = 0,511 \nu_I$ czyli 51,1%. Zatem wogóle dla słupów na-

¹⁾ Por. przykład 1. Tabl. I. rubr. 19.

prężenie drugorzędne jest poważne w belce, która w pasach wykazuje zaledwie 5% (prócz pól skrajnych). Widzimy więc, że optymistyczne wnioski prof. Bażanta i innych, dotyczące wpływu niektórych systemów krat na naprężenia drugorzędne odnoszą się tylko do środkowej części pasów, ale nie do ich końców ani też do kraty.

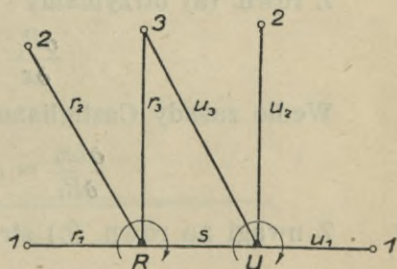
Sposób dokładniejszy.

Powyżej przyjęliśmy, że moment M_m , działający na węzeł „ m ” rozkłada się pomiędzy pręty, schodzące się w tym węźle, proporcjonalnie do ich sztywności $\varrho = J:s$. Takby było, gdyby tylko węzeł m był sztywny. Rozkładając atoli i moment M_n proporcjonalnie do sztywności prętów, schodzących się we węźle n , założyliśmy, że węzeł n jest sztywny, zatem oba przyjęcia są sprzeczne i powodują błąd tem większy, im sztywniejszy jest pręt $m n$ w stosunku do innych prętów. Dla pręta pasowego okazał się też sposób powyższy bardzo niedokładny (por. niżej).

Dokładniejszą linię wpływową otrzymamy, przyjmując, że oba węzły m i n są sztywne a wszystkie inne węzły są przegubowe. Wtedy rozkład momentów M_m i M_n będzie inny.

Niech na oba węzły sztywne m i n ustroju ramowego wedle rys. 20 działają momenty R i U .

Sztywność $\frac{J}{s}$ pręta $m n$ nazwijmy s , sztywność innych prętów węzła m nazwijmy r_1, r_2, r_3 , zaś węzła n u_1, u_2, u_3 . Momenty węzłowe niech będą



Rys. 20.

$$M_{m1} = R_1, M_{m2} = R_2, M_{m3} = R_3$$

$$M_{nn} = x, M_{nm} = y, M_{n1} = U_1, M_{n2} = U_2, M_{n3} = U_3,$$

to będzie $R = R_1 + R_2 + R_3 + x = \Sigma R_i + x$,

podobnie $U = \Sigma U_i + y$.

Moment $R - x = \Sigma R_i$ rozkłada się pomiędzy pręty m_1, m_2 i m_3 proporcjonalnie do ich sztywności, więc

$$R_1 : R_2 : R_3 = r_1 : r_2 : r_3,$$

stąd

$$R_i = R_1 \frac{r_i}{r_1}$$

zaś
$$\Sigma R_i = R - x = R_1 \frac{\Sigma r}{r_1}. \quad (a)$$

Jeżeli energję potencjalną pręta r_i nazwiemy Lr_i i odpowiednio Ls , Lu_i , to energia potencjalna całego układu

$$L = \Sigma Lr_i + Ls + \Sigma Lu_i. \quad (b)$$

Niewiadome x i y znajdziemy na zasadzie najmniejszości energii potencjalnej, t. j. z warunku $L = \min$,

czyli
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \quad (c)$$

Z uwagi na (b) jest

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \Sigma \frac{\partial Lr_i}{\partial x} + \frac{\partial Ls}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial Lu_i}{\partial x}. \quad (d)$$

Ale
$$\frac{\partial Lu_i}{\partial x} = \frac{\partial Lr_i}{\partial y} = 0, \quad (e)$$

gdyż przyjąwszy $y = \text{const}$ otrzymamy Lu_i niezależne od x , zaś dla $x = \text{const}$ jest Lr_i niezależne od y .

Zaś
$$\frac{\partial Lr_1}{\partial x} = \frac{\partial Lr_1}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial x}. \quad (f)$$

Z równ. (a) otrzymamy

$$\frac{\partial R_1}{\partial x} = - \frac{r_1}{\Sigma r}. \quad (g)$$

Wedle zasady Castigliano'a

$$\frac{\partial Lr_1}{\partial R_1} = \tau_{m1}, \quad \frac{\partial Ls}{\partial x} = \tau_{mn}.$$

Z uwagi na równ. (b) str. 50 jest

$$\tau_{m1} = \frac{R_1}{3 Er_1},$$

zaś wedle równ. (24) jest

$$\tau_{mn} = \frac{2x - y}{6 Es},$$

zatem
$$\frac{\partial Lr_1}{\partial R_1} = \frac{R_1}{3 Er_1}, \quad (h)$$

$$\frac{\partial Ls}{\partial x} = \frac{2x - y}{6 Es}. \quad (i)$$

Wstawmy (h) i (g) w (f), to

$$\frac{\partial Lr_1}{\partial x} = - \frac{R_1}{3 Er_1} \frac{r_1}{\Sigma r} = - \frac{R_1}{3 E \Sigma r},$$

$$\text{zaś} \quad \Sigma \frac{\partial L r_i}{\partial x} = - \frac{\Sigma R_i}{3 E \Sigma r} = - \frac{R - x}{3 E \Sigma r}. \quad (k)$$

Wstawmy (e), (i), (k) w (d), to z uwagi na (c)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{R - x}{3 E \Sigma r} + \frac{2 x - y}{6 E s} = 0.$$

Czyli $- 2 s (R - x) + \Sigma r (2 x - y) = 0.$

Zamieniając R na U , r na u , x na y otrzymamy

$$- 2 s (U - y) + \Sigma u (2 y - x) = 0.$$

Z obu tych równań wypływa:

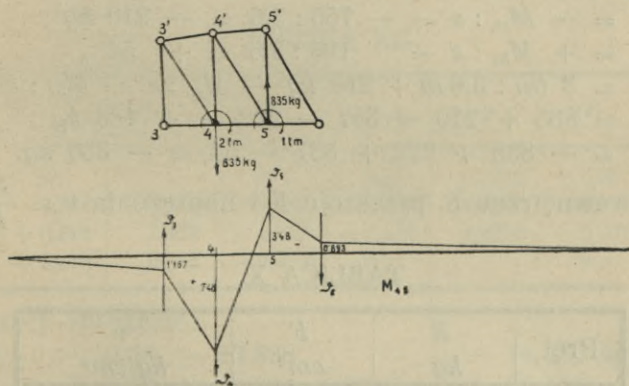
$$x = R_s = 2 s \frac{C_r}{A}, \quad y = U_s = 2 s \frac{C_u}{A}, \quad (41)$$

przyczem

$$\left. \begin{aligned} C_r &= 2 R (s + \Sigma u) + U \Sigma r \\ C_u &= 2 U (s + \Sigma r) + R \Sigma u \\ A &= 4 (s + \Sigma r) (s + \Sigma u) - \Sigma r \cdot \Sigma u \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Przykład 4. Linja wpływowa dla M_{45} , belka ta sama, co w przykładach powyższych. Tu będzie

$$R = M_4 = 2 \text{ tm}, \quad U = M_5 = 1 \text{ tm}, \quad 3 \text{ tm} : 3,6 \text{ m} = 835 \text{ kg (rys. 21)}$$



Rys. 21.

$$\begin{aligned} \Sigma r &= q_{43} + q_{43'} + q_{44'} = 52 + 1 + 1,4 = 54,4 \\ s &= q_{45} = \dots \dots \dots 57,0 \\ \Sigma r + s &= \dots \dots \dots 111,4 \\ \Sigma u &= q_{56} + q_{55'} + q_{54'} = 57 + 1,34 + 0,75 = 59,09 \\ s &= \dots \dots \dots 57 \\ \Sigma u + s &= \dots \dots \dots 116,09 \end{aligned}$$

$$A = 4 \cdot 111,4 \cdot 116,09 - 54,4 \cdot 59,09 = 51920 - 3220 = 48700$$

$$C_4 = 2 \cdot 2 \cdot 116,09 + 1 \cdot 54,4 = 464,36 + 54,40 = 518,76$$

$$C_5 = 2 \cdot 1 \cdot 111,4 + 2 \cdot 59,09 = 222,8 + 118,18 = 340,98 \quad (\text{równ. 42})$$

$$x = M_{45} = 2 \cdot 57 \frac{518,76}{48700} = 1,212 \text{ tm} \quad (\text{równ. 41})$$

$$M_4 - M_{45} = 2 - 1,212 = 0,788 \text{ tm. Podobnie}$$

$$y = M_{54} = 2 \cdot 57 \frac{340,98}{48700} = 0,800 \text{ tm.}$$

$$M_5 - M_{54} = 1 - 0,800 = 0,200 \text{ tm.}$$

Przyjęcie zatem równoczesne sztywności węzłów 4 i 5 powoduje, że momenty M_4 i M_5 działają głównie na pręt 4—5, zaczem we węzłach 4 i 5 powstają największe siły poprzeczne.

Dalej mamy:

$$M_{43} = 0,788 \frac{Q_{43}}{\sum r} = 0,788 \frac{52}{54,4} = 0,755 \text{ tm.} \quad (\text{z równ. a})$$

$$M_{56} = 0,200 \frac{Q_{56}}{\sum u} = 0,200 \frac{57}{59,09} = 0,193 \text{ „}$$

Momenty węzłowe w kracie można zaniedbać jak w przykładzie 3.

Długość prętów 34, 45 i 56 wynosi $a = 3,6 \text{ m}$.

Oddziaływania we węzłach

$$P_3 = - M_{43} : a = - 755 : 3,6 = - 210 \text{ kg}$$

$$F_6 = + M_{56} : a = 193 : 3,6 = + 54 \text{ „}$$

$$P_4 = 3 \text{ tm} : 3,6 \text{ m} + 210 \text{ kg} - M_{45} : a - M_{54} : a =$$

$$= 835 + 210 - 337 - 222 = + 486 \text{ kg}$$

$$P_5 = - 835 + 222 + 337 - 54 = - 330 \text{ kg.}$$

Siły wewnętrzne S , przekroje F i naprężenia $\nu = \frac{S}{F}$ podaje tablica X.

TABLICA X.

Pręt	S kg	F cm ²	ν kg/cm ²
3'4'	- 119	245	- 0.486
4'5'	+ 30		+ 0.123
4 5	+ 118	194	+ 0.609
5 6	- 29		- 0.149
3 3'	- 210	67	- 3.140
4 4'	+ 287	42	+ 6.84
5 5'	- 56	42	- 1.33
3'4	+ 230	60	+ 3.84
4'5	- 311	48	- 6.49
5'6	+ 62	42	+ 1.475

W trójkącie prostokątnym np. 44'5 nazwijmy słupek 44' v , pas dolny 4 5 d przekątnię 4'5 e , $E\Delta\alpha_{454'} = V_d$, $E\Delta\alpha_{544'} = E_d$, $E\Delta\alpha_{44'5} = D$, $\cotg \alpha_{454'} = v$, naprężenie w słupie v_v i t. d. to otrzymamy tabelarycznie wedle równ. (5) przyrosty $\Delta\alpha$ (tablica XI).

TABLICA XI.

trójkąt	$v_e - v_d$	$\cotg v$	$-D$	$v_e - v_v$	$\cotg d$	$-V_d$	E_d
33'4	+ 3,84	+ 0,603	+ 2,318	+ 6,98	1,658	+ 11,57	+ 13,888
44'5	- 7,099	+ 0,564	- 4,000	- 13,33	1,772	- 23,65	- 27,65
55'6	+ 1,624	+ 0,544	+ 0,884	+ 2,805	1,840	+ 5,155	+ 6,039

W trójkącie 4'55' nazwijmy pręt 4'5' a zarazem kąt 4'55' c , zaś jego przyrost C to

$$C = (1) + (2), \text{ gdzie } (1) = (v_c - v_e) \cotg v, (2) = (v_c - v_v) \cotg e.$$

Znowu tabelarycznie znajdziemy C (tablica XII).

TABLICA XII.

trójkąt	$v_c - v_e$	$\cotg v$	(1)	$v_c - v_v$	$\cotg e$	(2)	C
2'33'	0		0	+ 3,14	0,1720	+ 0,54	+ 0,54
3'44'	- 4,326	0,458	- 1,980	- 7,326	0,1167	- 0,855	- 2,835
4'55'	+ 6,613	0,479	+ 3,172	+ 1,456	0,0660	+ 0,097	+ 3,269
5'66'	- 1,475	0,515	- 0,760	0		0	- 0,760

Ciężary sprężyste:

$$E\mathcal{J}_3 = - 0,54 - 13,888 = - 14,428 \text{ kg/cm}^2$$

$$E\mathcal{J}_4 = + 11,57 + 2,835 + 27,65 = + 42,055 \text{ ,,}$$

$$E\mathcal{J}_5 = - 23,65 - 3,269 - 6,039 = - 32,958 \text{ ,,}$$

$$E\mathcal{J}_6 = + 5,155 + 0,76 = + 5,915 \text{ ,,}$$

$$\Sigma E\mathcal{J} = + 0,584 \text{ kg/cm}^2.$$

Oddziaływania belki, obciążonej ciężarami sprężystymi niech będą \mathcal{A} (lewe) i \mathcal{B} (prawe), to

$$12 \mathcal{A} = 6 \cdot 0,584 - 14,428 \cdot 3 + 42,055 \cdot 2 - 32,958$$

$$\mathcal{A} = 0,292 - 3,607 + 7,009 - 2,747 = + 0,947$$

$$\Sigma E\mathcal{J} = + 0,584$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \Sigma E\mathcal{J} = - 0,363 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\frac{E}{a} \delta_3 = 3 \mathfrak{A} = 2,841 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{E}{a} \delta_4 = 4 \mathfrak{A} - \mathfrak{B}_3 = 3,788 + 14,428 = + 18,216$$

$$\frac{E}{a} \delta_5 = 7 \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_6 = -2,541 - 5,915 = - 8,456$$

$$\frac{E}{a} \delta_6 = 6 \mathfrak{B} = - 2,178$$

Z uwagi na (35) i (40) jest $M_{mn} = 2 \varrho \frac{E\delta}{\mu} P = y \cdot P$

przyczem $y = \frac{2 \varrho a}{\mu} \cdot \frac{E\delta}{a} = \frac{2,57 \cdot 3,6}{1 \text{ tm}} \frac{E\delta}{a} = 0,41 \frac{E\delta}{a} \text{ cm.}$

$$y_3 = 1,167 \text{ cm}, \quad y_4 = 7,48 \text{ cm}, \quad y_5 = -3,48 \text{ cm}, \quad y_6 = -0,893 \text{ cm.}$$

Linję wpływową dla momentu węzłowego M_{45} przedstawia rys. 21.

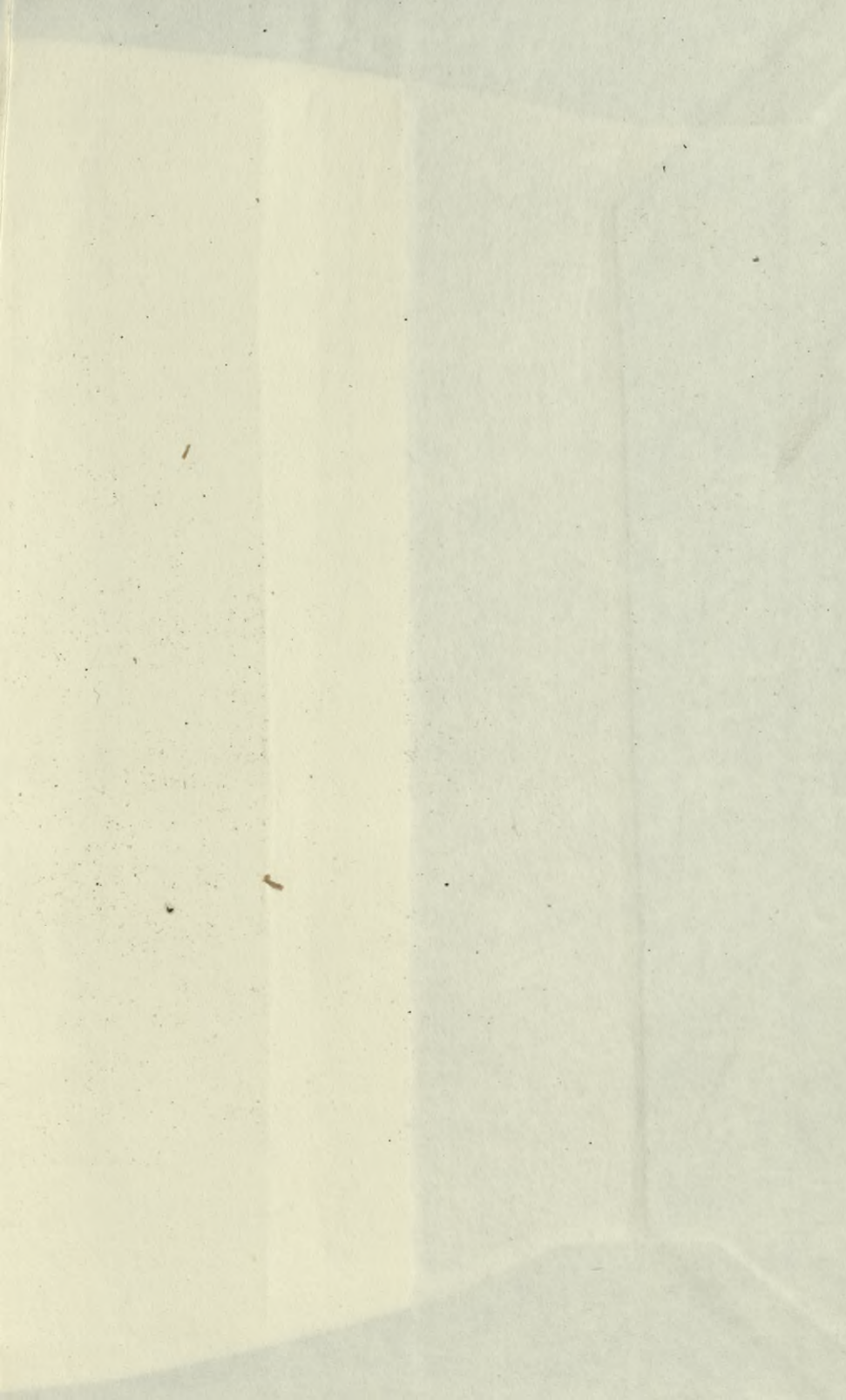
Całkowita algebraiczna powierzchnia linii wpływowej

$$Y = \frac{a}{2} (4y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 7y_6) = a (2,334 + 7,48 - 3,48 - 3,125) = \\ = a \cdot 3,209 \text{ cm.}$$

Dla $q = 2,663 \text{ t/m}$ jest $M_{45} = aq \cdot Y_q = 9,6 \text{ t} \cdot 3,209 \text{ cm} = \\ = 30,8 \text{ t cm.}$

Metodą Manderli otrzymaliśmy 25,4 " (por. Tabl. II. rubr. 26 i 27).
" Rittera 24,7 "

Licząc jak w przykładzie 3, t. zn. rozkładając momenty M_4 i M_5 proporcjonalnie do sztywności prętów, otrzymaliśmy linię wpływową podobną kształtem, lecz o tyle różną, że powierzchnia dodatnia i ujemna są prawie równe, wskutek czego wypadło $aqY_q = 1,43 \text{ t cm}$, a więc wynik wcale niezgodny. Stąd wniosek, że dla prętów o znacznej sztywności $J: s$ należy przy rozkładzie momentów R i U stosować równania 41 i 42 tj. używać sposobu dokładniejszego, który też jest ogólnym. Można go było użyć i w przykładzie poprzednim, wynik byłby nieco dokładniejszy, ale niewiele różny, a to z powodu bardzo małej sztywności pręta 44' w porównaniu do sztywności prętów pasowych. Linję wpływową dla ν_{45} otrzymamy mnożąc rzędne linii wpływowej rys. 21 przez $\frac{e}{J}$.



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-347808

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297730