208415
II

Inż. A. STRONCZAK-MIŁASZEWSKI.

BELKA CIĄGŁA

NA PODPORACH SPRĘŻYŚCIE UGINALNYCH I OBRACALNYCH.

Praca, przedstawiona 14 grudnia 1927 Politechnice Lwowskiej i przyjęta 3 lutego 1928 jako rozprawa doktorska przez Radę Wydziału Inżynierji Lądowej i Wodnej na wniosek Komisji egzaminu ścisłego, który odbył się 24 lutego 1928. Skład Komisji:

Przewodniczący: Prof. Dr. *A. Wereszczyński*,
Referenci: Prof. Inż. Dr. *J. Bogucki*,
Prof. Inż. Dr. *S. Bryła*,
Prof. Inż. Dr. *M. T. Huber*.

LWÓW — 1928.
ODBITKA Z »CZASOPISMA TECHNICZNEGO« 1928 R.

HECA JAGIELL. BIBL.
DUBLET

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000297804

Odbitka z „Czasopisma Technicznego“ 1928 r.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW
II 31457

Inż. Adam Stronczak-Miłaszewski.

Belka ciągła na podporach sprężyście uginalnych i obracalnych.

Równanie trzech momentów, znane pod nazwą równania Clapeyrona, pozwala rozwiązywać zagadnienia, odnoszące się do belki ciągłej na stałych podporach. Jeżeli podpory są sprężyście uginalne, ilość momentów w równaniu uogólnionem wzrasta do liczby pięciu. Jeżeli pójdziemy dalej w uogólnianiu i przyjmiemy podpory sprężyście uginalne i obracalne, ilość momentów wzrośnie do ośmiu.

Równanie trzech momentów ustawił pierwszy Bertot w r. 1855 [1]). Dopiero w dwa lata później, bo w 1857 r. ogłosił Clapeyron to samo równanie i przez długi czas jego uważano za autora tego ważnego prawa. Rozszerzenie dla nierówno wysokich podpór podał Mohr [2]) w 1860 r.; ten sam autor sprostował błędne mniemanie co do autorstwa Clapeyrona w 2 wydaniu swojego dzieła p. t. „*Technische Mechanik*“ dla różnych sztywności zginania poszczególnych przęseł podał Belangere w 1862 r. [3]). Dla podpór sprężyście uginalnych ustawił prof. H. Czopowski równanie 5 momentów (nie używając jednak tej nazwy) w 1896 r. [4]).

---

[1]) Comptes rendus de la société des Ingenieurs civils 1855, tr.s 278.

[2]) Zeitschr. d. Arch. u. Ing.-Ver. Hannover 1860 str. 323 i 407.

[3]) Theorie de la résistance et de la flexion plane des solides. Paris, 1862.

[4]) H. Czopowski: Belka wieloprzęsłowa na podporach sprężystych. *Przegląd Techn.* 1796, str. 292 i 387.

Akc. Nr. 778/50
D/14

Późniejsze publikacje tyczące się równania 3 i 5 momentów:

M. T. Huber: Z teorji belki ciągłej. *Czasop. Techn.* 1925, str. 17.
„ „ „ Równanie 5 momentów. *Czasop. Techn.* 1927, str. 17.
„ „ „ O nazwach pewnych twierdzeń z teorji belki ciągłej. *Przegl. Techn.* 1927, str. 441.
L. Karasiński: Ogólne równanie 5 momentów. *Przegl. Techn.* 1927, str. 626.
„ „ Ogólne wzory Clerca i Clapeyrona. *Przegl. Techn.* 1927, str. 329.
V. Lewe: Die Berechnung durchlaufender Träger u. mehrst. Rahmen nach der Methode des Zahlenrechtecks. 1916. (Wstęp historyczny).

Celem wyprowadzenia równania 8 momentów dla belki na podporach sprężyście uginalnych i obracalnych, zastosujemy zasadę Castigliano'a [1]).

Założenia: Podatność podpór określa spółczynnik podatności α o wymiarze cm/kg, obracalność podpór — kąt ε o wymiarze $1/kgcm$; jestto kąt, o jaki obraca się sama podpora, jeśli na nią działa moment równy jedności. Podpory w stanie nieobciążonym są w różnych wysokościach.

Praca odkształcenia belki obciążonej dowolnemi siłami prostopadłemi do osi belki przedstawi się następująco:

$$U=\frac{1}{2}\int\frac{M^2}{EI}\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=r}(M_i'-M_i'')^2\,\varepsilon_i+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=r}A_i\,\alpha_i+\frac{1}{2}\int\frac{k\,.\,Q^2}{GF}\,dx \quad 1)$$

Pierwsze wyrażenie przedstawia wpływ momentów, drugie sprężystej obracalności podpór, trzecie sprężystej uginalności podpór, czwarte wpływ sił poprzecznych. F oznacza pole przekroju belki, E moduł sprężystości, I moment bezwładności (inny dla każdego przęsła), G moduł sprężystości postaciowej, k spółczynnik liczbowy zależny od postaci przekroju; M' oznacza moment na lewo, M'' na prawo od i-tej podpory, $\mathfrak{M}$ oznacza moment jak dla belki wolno podpartej, F powierzchnię momentów, a i b odległości środka ciężkości powierzchni momentów od obu podpór.

Uważając momenty podporowe za wielkości statycznie niewyznaczalne, otrzymamy w myśl zasady Castigliano'a:

$$\frac{\partial U}{\partial M_n'}=\vartheta_n-\vartheta_{n+1}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

gdzie $\vartheta_n-\vartheta_{n+1}$ jest wartością uogólnionego przesunięcia [2]).

---

[1]) Por. M. T. Huber: Z teorji belki ciągłej i Równanie 5 momentów.

[2]) Por. Timoszenko-Huber: Kurs wytrzymałości materjałów str. 190 § 110.

Pierwszy człon równ. 1) przedstawia pracę momentów:

$$U_1 = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

pochodna zaś tej pracy:

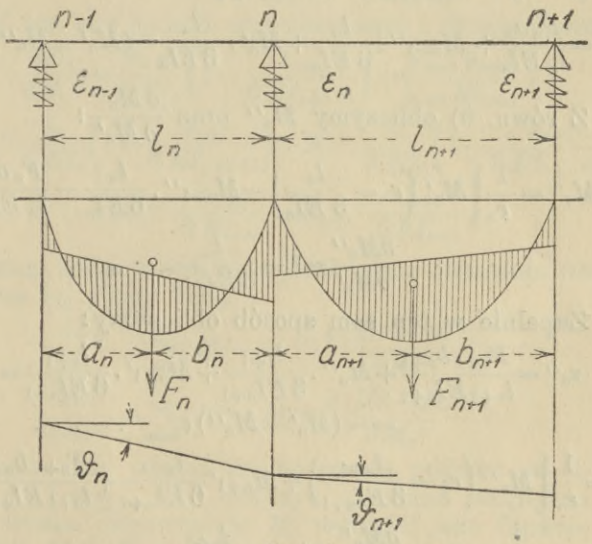
$$\frac{\partial U_1}{\partial M_n'} = \frac{1}{EI}\int M \frac{\partial M}{\partial M_n'}\,dx \quad 4a) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial U_1}{\partial M_n''} = \frac{1}{EI}\int M \frac{\partial M}{\partial M_n''}\,dx \quad 4b)$$

Za M należy wstawić moment w dowolnym punkcie danego przęsła. Moment w n-tem przęśle wynosi:

$$M_{x\,n} = \mathfrak{M}_{x\,n} + M_{n-1}'' \cdot \frac{l_n - x}{l_n} + M_n' \cdot \frac{x}{l_n} \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

w $n+1$ zaś przęśle:

$$M_{x,\,n+1} = \mathfrak{M}_{x,\,n+1} + M_n'' \cdot \frac{l_{n+1} - x}{l_{n+1}} + M_{n+1}' \frac{x}{l_{n+1}} \quad . \quad . \quad 6)$$



Rys. 1.

Pochodne równ. 5) i 6) względem M' oraz względem M'' będą:

$$\frac{\partial M_{x\,n}}{\partial M_n'} = \frac{x}{l_n} \quad . \quad . \quad . \quad 7a) \qquad \frac{\partial M_{x,\,n+1}}{\partial M_n'} = \frac{l_{n+1} - x}{l_{n+1}} \frac{\partial M_n''}{\partial M_n'} \quad . \quad 7b)$$

$$\frac{\partial M_{x\,n}}{\partial M_n''} = \frac{x}{l_n} \frac{\partial M_n'}{\partial M_n''} \quad . \quad 8a) \qquad \frac{\partial M_{x\,n+1}}{\partial M_n''} = \frac{l_{n+1} - x}{l_{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad 8b)$$

Otrzymaliśmy tu wyrażenia: $\frac{\partial M_n''}{\partial M_n'}$ i $\frac{\partial M_n'}{\partial M_n''}$; które musimy obliczyć, co uskutecznimy w następujący sposób:

Pochodna pracy odkształcenia momentów n-tego przęsła względem M' da wyniku kąt τ_n', o jaki skręci się styczna na n-tej podporze; o ten sam kąt skręci się podpora skutkiem działania różnicy momentów $M'-M''$. Możemy zatem napisać:

$$\frac{1}{EI_n}\int_0^{l_n} M_{xn}\frac{\partial M_{xn}}{\partial M_n'}\,dx=\tau_n'=(M_n'-M_n'')\,\varepsilon_n \quad . \quad 8c)$$

Po wstawieniu wartości na M_{xn} i $\frac{\partial M_{xn}}{\partial M_n'}$ w równ. 8c) otrzymamy:

$$\frac{1}{EI_n}\int_0^{l_n}\left(\mathfrak{M}_x+M_{n-1}''\cdot\frac{l_n-x}{l_n}+M_n'\,\frac{x}{l_n}\right)\frac{x}{l_n}\,dx=(M_n'-M_n'')\,\varepsilon_n$$

Po wykonaniu całkowań wypadnie:

$$\tau_n'=\frac{F_n a_n}{l_n EI_n}+M_{n-1}''\cdot\frac{l_n}{6\,EI_n}+M_n'\cdot\frac{l_n}{3\,EI_n}=(M_n'-M_n'')\,\varepsilon_n \quad 9)$$

Z równ. 9) obliczymy M_n'' oraz $\frac{\partial M_n''}{\partial M_n'}$:

$$M_n''=\frac{1}{\varepsilon_n}\left[M_n'\left(\varepsilon_n-\frac{l_n}{3\,EI_n}\right)-M_{n-1}''\cdot\frac{l_n}{6\,EI_n}-\frac{F_n a_n}{l_n EI_n}\right] \quad 10)$$

$$\frac{\partial M_n''}{\partial M_n'}=1-\frac{l_n}{3\,EI_n\,\varepsilon_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

Zupełnie w ten sam sposób obliczymy:

$$\tau_n''=\frac{F_{n+1}b_{n+1}}{l_{n+1}EI_{n+1}}+M_n''\cdot\frac{l_{n+1}}{3\,EI_{n+1}}+M_{n+1}'\cdot\frac{l_{n+1}}{6\,EI_{n+1}}=$$
$$=-(M_n'-M_n'')\,\varepsilon_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$M_n'=\frac{1}{\varepsilon_n}\left[M_n''\left(\varepsilon_n-\frac{l_{n+1}}{3\,EI_{n+1}}\right)+M_{n+1}'\frac{l_{n+1}}{6\,EI_{n+1}}+\frac{F_{n+1}\,b_{n+1}}{l_{n+1}\,EI_{n+1}}\right] \quad (13)$$

$$\frac{\partial M_n'}{\partial M_n''}=1-\frac{l_{n+1}}{3\,EI_{n+1}\,\varepsilon_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

Wstawiając uzyskane wyrażenia w równ. 8a) i 7b), otrzymamy:

$$\frac{\partial M_{xn}}{\partial M_n''}=\frac{x}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3\,EI_{n+1}\,\varepsilon_n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

$$\frac{\partial M_{xn+1}}{\partial M_n'}=\frac{l_{n+1}-x}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\,EI_n\,\varepsilon_n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

Teraz wstawiamy wartości powyżej otrzymane w równ. 4a). Wchodzą tu w grę n-te i $n+1$-sze przęsło, gdyż dla reszty przęseł pochodne momentów są równe zeru.

$$\frac{\partial U_1}{\partial M_n'}=\frac{1}{EI_n}\int_0^{l_n}\left(\mathfrak{M}_{xn}+M_{n-1}''\cdot\frac{l_n-x}{l_n}+M_n'\frac{x}{l_n}\right)\frac{x}{l_n}\,dx+$$

$$+\frac{1}{EI_{n+1}}\int_0^{l_{n+1}}\left(\mathfrak{M}_{xn+1}+M_n''\cdot\frac{l_{n+1}-x}{l_{n+1}}+\right.$$

$$\left.+M_{n+1}'\cdot\frac{x}{l_{n+1}}\right)\frac{l_{n+1}-x}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3EI_n\varepsilon_n}\right).dx.$$

Po wykonaniu całkowań otrzymamy:

$$\frac{\partial U_1}{\partial M_n'}=\frac{F_n a_n}{l_n EI_n}+\frac{F_{n+1}b_{n+1}}{l_{n+1}EI_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3EI_n\varepsilon_n}\right)+M_{n-1}''\cdot\frac{l_n}{6EI_n}+$$

$$+M_n'\cdot\frac{l_n}{3EI_n}+M_n''\frac{l_{n+1}}{3EI_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3EI_n\varepsilon_n}\right)+$$

$$+M_{n+1}'\frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3EI_n\varepsilon_n}\right)\quad.\quad.\quad.\quad(17)$$

W ten sam sposób wyprowadzimy i drugie równanie:

$$\frac{\partial U_1}{\partial M_n''}=\frac{F_n a_n}{l_n EI_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3EI_{n+1}\varepsilon_n}\right)+\frac{F_{n+1}b_{n+1}}{l_{n+1}EI_{n+1}}+$$

$$+M_{n-1}''\frac{l_n}{6EI_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3EI_{n+1}\varepsilon_n}\right)+M_n'\cdot\frac{l_n}{3EI_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3EI_{n+1}\varepsilon_n}\right)+$$

$$+M_n''\cdot\frac{l_{n+1}}{3EI_{n+1}}+M_{n+1}'\cdot\frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}}\quad.\quad.\quad.\quad 18)$$

Drugi człon równ. 1) wyraża pracę obrócenia podpór. Pochodne tej pracy będą:

$$\frac{\partial U_2}{\partial M_n'}=\sum(M_i'-M_i'')\frac{\partial(M_i'-M_i'')}{\partial M_n'}\varepsilon_i\quad.\quad.\quad 19)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial M_n''}=\sum(M_i'-M_i'')\frac{\partial(M_i'-M_i'')}{\partial M_n''}\varepsilon_i\quad.\quad.\quad 20)$$

Znak sumy odnosi się do trzech podpór: $n-1$-szej, n-tej i $n+1$-szej. Aby obliczyć pochodne względem M_n' i M_n'', trzeba odpowiednie M_i wyrazić jako funkcję M_n' względnie M_n''. Ponieważ suma kątów, jakie tworzy styczna do linji ugięcia z osią belki po obu stronach każdej podpory jest równa zeru, zatem:

$$\tau_{n-1}'+\tau_{n-1}''=0;\qquad \tau_n'+\tau_n''=0;\qquad \tau_{n+1}'+\tau_{n+1}''=0.$$

Dla n-tej podpory obliczyliśmy te kąty poprzednio. W ten sam sposób obliczymy kąty dla $n-1$ i $n+1$ podpory. Dla $n-1$-szej podpory otrzymamy:

$$\tau_{n-1}'+\tau_{n-1}''=M_{n-2}''\frac{l_{n-1}}{6EI_{n-1}}+M_{n-1}'\cdot\frac{l_{n-1}}{3EI_{n-1}}+\frac{F_n b_n}{EI_n l_n}+$$

$$+M_{n-1}''\cdot\frac{l_n}{3EI_n}+M_n'\cdot\frac{l_n}{6EI_n}=0\quad.\quad.\quad.\quad 21)$$

Z tego równania obliczymy M_{n-1}':

$$M_{n-1}' = -M_n' \cdot \frac{l_n I_{n-1}}{2 I_n l_{n-1}} - M_{n-2}'' \cdot \frac{l_n I_{n-1}}{2 I_n l_{n-1}} -$$

$$- M_{n-1}'' \cdot \frac{l_n I_{n-1}}{I_n l_{n-1}} - \frac{F_n b_n}{E I_n l_n} = 0.$$

Pochodna względem M_n' będzie:

$$\frac{\partial M_{n-1}'}{\partial M_n'} = -\frac{l_n I_{n-1}}{2 I_n l_{n-1}}.$$

Podobnie obliczymy $\frac{\partial M_{n-1}''}{\partial M_n'}$:

$$\frac{\partial M_{n-1}''}{\partial M_n'} = -\frac{l_n}{6 E I_n} \cdot \frac{3 E I_n}{l_n} = -\frac{1}{2}.$$

Dalej otrzymamy:

$$\frac{\partial (M_{n-1}' - M_{n-1}'')}{\partial M_n'} = \frac{\partial M_{n-1}'}{\partial M_n'} - \frac{\partial M_{n-1}''}{\partial M_n'} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{l_n I_{n-1}}{l_{n-1} I_n}\right) \quad 22)$$

Pochodne względem M_n'' będą:

$$\frac{\partial M_{n-1}'}{\partial M_n''} = -\frac{l_n I_{n-1}}{2 I_n l_{n-1}} \cdot \frac{\partial M_n'}{\partial M_n''}; \qquad \frac{\partial M_{n-1}''}{\partial M_n''} = -\frac{1}{2} \frac{\partial M_n'}{\partial M_n''}.$$

Potrzebne wyrażenia na $\frac{\partial M_n'}{\partial M_n''}$ obliczymy, biorąc pod uwagę kąty na środkowej podporze. Ze względu na to, że przebieg wyprowadzeń jest zupełnie taki sam, jak na n—1-szej podporze, opuszczamy je podając jedynie wyniki.

$$\frac{\partial (M_{n-1}' - M_{n-1}'')}{\partial M_n''} = \frac{1}{2}\left(\frac{l_{n+1} I_{n-1}}{l_{n-1} I_{n+1}} - \frac{l_{n+1} I_n}{l_n I_{n+1}}\right) \quad . \quad . \quad 23)$$

$$\frac{\partial (M_n' - M_n'')}{\partial M_n'} = 1 + \frac{l_n I_{n+1}}{l_{n+1} I_n}; \quad . \quad . \quad . \quad 24\,a)$$

$$\frac{\partial (M_n' - M_n'')}{\partial M_n''} = -\left(1 + \frac{l_{n+1} I_n}{l_n I_{n+1}}\right); \quad . \quad . \quad . \quad 24\,b)$$

$$\frac{\partial (M_{n+1}' - M_{n+1}'')}{\partial M_n'} = \frac{1}{2}\left(\frac{l_n}{I_n} \cdot \frac{I_{n+1}}{l_{n+1}} - \frac{l_n I_{n+2}}{I_n l_{n+2}}\right); \quad 25\,a)$$

$$\frac{\partial (M_{n+1}' - M_{n+1}'')}{\partial M_n''} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{l_{n+1} I_{n+2}}{l_{n+2} I_{n+1}}\right) \quad . \quad . \quad 25\,b)$$

Wstawiając wartości poprzednio obliczone w równ. 19) i 20), otrzymamy:

$$\frac{\partial U_2}{\partial M_n'}=(M_{n-1}'-M_{n-1}'')\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}\left(1-\frac{l_n I_{n-1}}{l_{n-1} I_n}\right)+$$

$$+(M_n'-M_n'')\,\varepsilon_n\left(1+\frac{l_n I_{n+1}}{l_{n+1} I_n}\right)+$$

$$+(M_{n+1}'-M_{n+1}'')\frac{\varepsilon_{n+1}}{2}\left(\frac{l_n I_{n+1}}{l_{n+1} I_n}-\frac{l_n I_{n+2}}{l_{n+2} I_n}\right) \quad . \quad . \quad 26)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial M_n''}=(M_{n-1}'-M_{n-1}'')\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}\left(\frac{l_{n+1} I_{n-1}}{l_{n-1} I_{n+1}}-\frac{l_{n+1} I_n}{l_n I_{n+1}}\right)-$$

$$-(M_n'-M_n'')\,\varepsilon_n\left(1+\frac{l_{n+1} I_n}{l_n I_{n+1}}\right)-$$

$$-(M_{n+1}'-M_{n+1}'')\frac{\varepsilon_{n+1}}{2}\left(1-\frac{l_{n+1} I_{n+2}}{l_{n+2} I_{n+1}}\right) \quad . \quad . \quad 27)$$

Trzeci wyraz równ. 1) obejmuje wpływ podatności podpór:

$$U_3=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=n} A_i^2\,\alpha_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 28)$$

(A_i oznacza oddziaływanie rzeczywiste, $\mathfrak{A}_i$ oddziaływanie jak dla belki wolnopodpartej, podobnie Q_i oznacza siłę poprzeczną rzeczywistą a $\mathfrak{Q}_i$ siłę poprzeczną jak dla belki wolnopodpartej).

Pochodne zaś będą:

$$\frac{\partial U_3}{\partial M_n'}=\sum A_i\frac{\partial A_i}{\partial M_n'}\,\alpha_i\,; \quad 29) \qquad \frac{\partial U_3}{\partial M_n''}=\sum A_i\frac{\partial A_i}{\partial M_n''}\,\alpha_i \quad . \quad 30)$$

Aby można było obliczyć pochodne względem M_n' i M_n'', musimy wyrazić A_i jako funkcję M_n' i M_n'':

$$A_{n-1}=Q_{n-1}-Q_n \quad =\frac{\partial M_{xn-1}}{\partial x}-\frac{\partial M_{xn}}{\partial x}$$

$$A_n \quad =Q_n \quad -Q_{n+1}=\frac{\partial M_{xn}}{\partial x}-\frac{\partial M_{xn+1}}{\partial x}$$

$$A_{n+1}=Q_{n+1}-Q_{n+2}=\frac{\partial M_{xn+1}}{\partial x}-\frac{\partial M_{xn+2}}{\partial x}$$

$$M_{xn-1}=\mathfrak{M}_{xn-1}+M_{n-2}''\cdot\frac{l_{n-1}-x}{l_{n-1}}+M_{n-1}'\,\frac{x}{l_{n-1}}$$

$$M_{xn} \quad =\mathfrak{M}_{xn} \quad +M_{n-1}''\cdot\frac{l_n-x}{l_n}+M_n' \quad \frac{x}{l_n}$$

$$M_{xn+1}=\mathfrak{M}_{xn+1}+M_n'' \quad \cdot\frac{l_{n+1}-x}{l_{n+1}}+M_{n+1}'\cdot\frac{x}{l_{n+1}}$$

$$M_{xn+2}=\mathfrak{M}_{xn+2}+M_{n+1}''\cdot\frac{l_{n+2}-x}{l_{n+2}}+M_{n+2}'\,\frac{x}{l_{n+2}}$$

$$\frac{\partial M_{xn-1}}{\partial x}=\frac{\partial \mathfrak{M}_{xn-1}}{\partial x}+\frac{M_{n-1}'-M_{n-2}''}{l_{n-1}}=\mathfrak{Q}_{r-1}+\frac{M_{n-1}'-M_{n-2}''}{l_{n-1}}$$

$$\frac{\partial M_{xn}}{\partial x}=\frac{\partial \mathfrak{M}_{xn}}{\partial x}+\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}=\mathfrak{Q}_n+\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}$$

$$\frac{\partial M_{xn+1}}{\partial x}=\frac{\partial \mathfrak{M}_{xn+1}}{\partial x}+\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}=\mathfrak{Q}_{n+1}+\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}$$

$$\frac{\partial M_{xn+2}}{\partial x}=\frac{\partial \mathfrak{M}_{xn+2}}{\partial x}+\frac{M_{n+2}'-M_{n+1}''}{l_{n+2}}=\mathfrak{Q}_{n+2}+\frac{M_{n+2}'-M_{n+1}''}{l_{n+2}}$$

$$A_{n-1}=\mathfrak{Q}_{n-1}-\mathfrak{Q}_n+\frac{M_{n-1}'-M_{n-2}''}{l_{n-1}}-\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}=$$

$$=\mathfrak{A}_{n-1}+\frac{M_{n-1}'-M_{n-2}''}{l_{n-1}}-\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n} \quad . \quad . \quad 31)$$

$$A_n=\mathfrak{Q}_n-\mathfrak{Q}_{n+1}+\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}-\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}=$$

$$=\mathfrak{A}_n+\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}-\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad 32)$$

$$A_{n+1}=\mathfrak{Q}_{n+1}-\mathfrak{Q}_{n+2}+\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}-\frac{M_{n+2}'-M_{n+1}''}{l_{n+2}}=$$

$$=\mathfrak{A}_{n+1}+\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}-\frac{M_{n+2}'-M_{n+1}''}{l_{n+2}} \quad . \quad . \quad 33)$$

$$\frac{\partial A_{n-1}}{\partial M_n'}=-\frac{1}{l_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34)$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial M_n'}=\frac{1}{l_n}+\frac{\partial M_n''}{\partial M_n'}\cdot\frac{1}{l_{n+1}}=\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\,EI_n\,\varepsilon_n}\right) \quad . \quad 35)$$

$$\frac{\partial A_{n+1}}{\partial M_n'}=-\frac{1}{l_{n+1}}\,\frac{\partial M_n''}{\partial M_n'}=\frac{1}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\,EI_n\,\varepsilon_n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 36)$$

$$\frac{\partial A_{n-1}}{\partial M_n''}=-\frac{1}{l_n}\,\frac{\partial M_n'}{\partial M_n''}=-\frac{1}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3\,E\,I_{n+1}\,\varepsilon_n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 37)$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial M_n''}=-\frac{1}{l_n}\,\frac{\partial M_n'}{\partial M_n''}+\frac{1}{l_{n+1}}=\frac{1}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3\,EI_{n+1}\,\varepsilon_n}\right)+\frac{1}{l_{n+1}} \quad . \quad 38)$$

$$\frac{\partial A_{n+1}}{\partial M_n''}=-\frac{1}{l_{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 39)$$

Wracając do równ. 29) i 30), otrzymamy po wstawieniu wartości z równań 31—39):

$$\frac{\partial U_3}{\partial M_n'}=-\left(\mathfrak{A}_{n-1}+\frac{M_{n-1}'-M_{n-2}''}{l_{n-1}}-\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}\right)\frac{\alpha_{n-1}}{l_n}+$$

$$+\left(\mathfrak{A}_n+\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}-\right.$$

$$\left.-\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}\right)\left[\frac{1}{l_n}+\frac{1}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\,EI_n\,\varepsilon_n}\right)\right]\alpha_n-$$

$$-\left(\mathfrak{A}_{n+1}+\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}-\frac{M_{n+2}'-M_{n+1}''}{l_{n+2}}\right)\left(1-\frac{l_n}{3\,EI_n\,\varepsilon_n}\right)\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}} \quad 40)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial M_n''}=-\left(\mathfrak{A}_{n-1}+\frac{M_{n-1}'-M_{n-2}''}{l_{n-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}\right)\frac{\alpha_{n-1}}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3\,EI_{n+1}\,\varepsilon_n}\right)+$$

$$+\left(\mathfrak{A}_n+\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}-\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}\right)\left[\frac{1}{l_{n+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3\,EI_{n+1}\,\varepsilon_n}\right)\right]\alpha_n-$$

$$-\left(\mathfrak{A}_{n+1}+\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}-\frac{M_{n+2}'-M_{n+1}''}{l_{n+2}}\right)\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad 41)$$

Czwarty i ostatni wyraz równ. 1) wyrażający wpływ sił poprzecznych będzie:

$$U_4=\frac{1}{2}\int\frac{k.Q^2}{GF}.dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42)$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial M_n'}=\frac{k}{GF}\int Q\,\frac{\partial Q}{\partial M_n'}\,dx;\quad 43)\qquad \frac{\partial U_4}{\partial M_n''}=\frac{k}{GF}\int Q\,\frac{\partial Q}{\partial M_n''}\,dx \quad 44)$$

$$Q_n=\frac{\partial M_{xr}}{\partial x}=\mathfrak{Q}_n+\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n};$$

$$Q_{n+1}=\frac{\partial M_{xn}}{\partial x}=\mathfrak{Q}_{n+1}+\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}$$

$$\frac{\partial Q_n}{\partial M_n'}=\frac{1}{l_n};\quad \frac{\partial Q_{n+1}}{\partial M_n'}=-\frac{1}{l_{n+1}}.\frac{\partial M_n''}{\partial M_n'}=-\frac{1}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\,EI_n\,\varepsilon_n}\right).$$

$$\frac{\partial Q_n}{\partial M_n''}=\frac{1}{l_n}\,\frac{\partial M_n'}{\partial M_n''}=\frac{1}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3\,EI_{n+1}\,\varepsilon_n}\right);\quad \frac{\partial Q_{n+1}}{\partial M_n''}=-\frac{1}{l_{n+1}}$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial M_n'}=\frac{k}{FG}\left\{\int_0^{l_n}\left(\mathfrak{Q}_r+\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_r}\right)\frac{dx}{l_r}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{l_{n+1}}\left[\mathfrak{Q}_{n+1}+\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\,EI_n\,\varepsilon_n}\right)\right]\frac{dx}{l_{n+1}}\right\}$$

$$\int_0^{l_n}\mathfrak{Q}_n\,dx=\int_0^{l_n}\frac{\partial\,\mathfrak{M}_x}{\partial x}=0\qquad \int_0^{l_{n+1}}\mathfrak{Q}_{n+1}\,dx=0$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial M_n'}=\frac{k}{FG}\left[\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}-\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\,EI_n\,\varepsilon_n}\right)\right] \quad 45)$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial M_n''}=\frac{k}{FG}\left[\frac{M_n'-M_{n-1}''}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3\,EI_{n+1}\,\varepsilon_n}\right)-\frac{M_{n+1}'-M_n''}{l_{n+1}}\right] \quad 46)$$

Jeśli zbierzemy razem równania: 17, 26, 40, 45 oraz 18, 27, 41 i 46, uporządkujemy według momentów i przeniesiemy wyrazy zależne od obciążenia na prawą stronę, otrzymamy w ostatecznym wyniku dwa następujące równania:

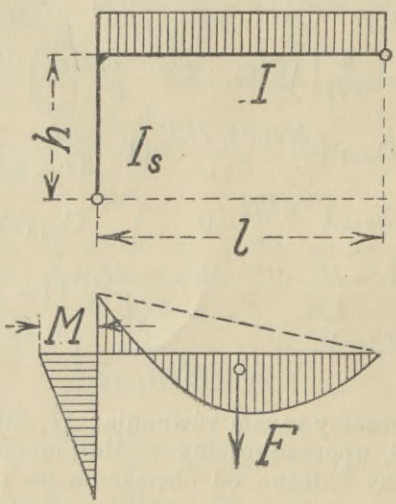
1. $A_n M_{n-2}'' + B_n M_{n-1}' + C_n M_{n-1}'' + D_n M_n' + E_n M_n'' +$
$+ F_n M_{n+1}' + G_n M_{n+1}'' + H_n M_{n+2}' = N_n$
2. $H_n' M_{n-2}'' + G_n' M_{n-1}' + F_n' M_{n-1}'' + E_n' M_n' + D_n' M_n'' +$
$+ C_n' M_{n+1}' + B_n' M_{n+1}'' + A_n' M_{n+2}' = N_n'$

Wartości spółczynników przy momentach są zestawione w tablicy I i II. Tablice są tak ułożone, że pod 1 mamy wyrażony wpływ momentów, pod 2 wpływ obracalności podpór, pod 3 wpływ uginalności podpór, pod 4 wpływ sił poprzecznych. Biorąc zatem pod uwagę jedynie 1 rubrykę, otrzymamy równanie 3 momentów (w tym wypadku $\varepsilon = \infty$ a M' i M'' są równe. Dla 1 i 2 uzyskamy równanie zawierające 6 momentów dla belki na podporach sprężyście obracalnych (ramy), dla 1 i 3 wypadnie równanie 5 momentów (przy założeniu $\varepsilon_i = \infty$, wobec tego wszystkie $M_i' = M_i''$). Dla 1, 2, i 3 otrzymamy równanie 8 momentów.

Równaniami powyższemi możemy rozwiązywać także zagadnienia z działu ram wieloprzęsłowych bez uwzględnienia wpływu przesunięcia poziomego. Musimy wtedy kąt ε wyznaczyć stosownie do ustroju słupa w zależności od dolnego jego umocowania. Sposób stosowania równań objaśniają podane przykłady.

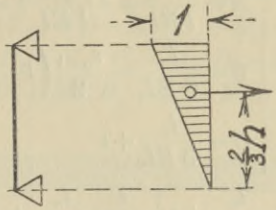
Przykład 1.

Obliczyć wielkość momentu podporowego dla ramy jednosłupowej. Wymiary podane na rys. 2.



Rys. 2.

Jest to belka oparta na lewej podporze sprężyście obracalnej a prawej stałej. Kąt ε, o jaki skręci się sama podpora, obliczymy z rys. 3:



Rys. 3.

$$\varepsilon=\frac{F}{EI_s}\cdot\frac{2h}{3h}=\frac{2F}{3EI_s} \qquad F=\frac{1h}{2}=\frac{h}{2}$$

$$\varepsilon=\frac{h}{2EI_s}\cdot\frac{2}{3}=\frac{h}{3EI_s}.$$

Stosując równ. 2, otrzymamy:

$$M_n''.D'=N' \quad \text{stąd:}$$

$$M_n''=\frac{N'}{D'}.$$

W tablicy 2 w rubryce 1 znajdziemy:

dla $n=1$ $$N=-\frac{Fb}{lEI}$$

$$F=\tfrac{1}{8}ql^2\frac{2}{3}l=\frac{1}{12}ql^3$$

$$N=\frac{1}{12}ql^3\cdot\frac{l}{2}\frac{1}{lEI}=\frac{1}{24}ql^3$$

D' weźmiemy z rubryki 1 i 2:

$$D'=\frac{l}{3EI}+\left(1+\frac{l_2I}{lI_2}\right)\varepsilon=\frac{l}{3EI}+\varepsilon$$

$$M_n''=\frac{N'}{D'}=\frac{\frac{1}{24}ql^3}{\frac{l}{3EI}+\varepsilon}=\frac{ql^3}{8l+24\varepsilon}=\frac{ql^3}{8l+24\frac{h}{3EI_s}}=\frac{ql^2}{8\left(l+\frac{hI}{lI_s}\right)}.$$

Wzór zgodny z wzorem w Kleinlogla „Rahmenformeln“ wyd. IV, str. 3.

Przykład 2.

Obliczyć momenty M_1 i M_2 dla ramy przedstawionej na rys. 4.

Jest to belka na podporach sprężyście obracalnych. Ponieważ obciążenie jest symetryczne, oba momenty podporowe będą równe. Kąty ε jak w poprzednim przykładzie.

$$M_{n-1}''C+M_n'D=N \qquad M=\frac{N}{C+D}$$

$$M_1''C+M_2'D=N \qquad N=\frac{F.\,{}^{l}/_{2}}{l\,EI}=\frac{\frac{1}{12}ql^3\,{}^{l}/_{2}}{l\,EI}=\frac{ql^3}{24\,EI}$$

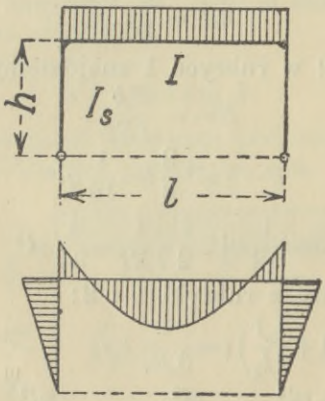
$$M_1''=M_2'=M \qquad C=\frac{l_n}{6\,EI_n}-\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}\left(1-\frac{l_n\,I_{n-1}}{l_{n-1}\,I_n}\right)=\frac{l_n}{6\,EI_n}-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$M(C+D)=N \qquad D=\frac{l_n}{3\,EI_n}+\varepsilon$$

$$C+D=\frac{l_n}{6\,EI}+\frac{l_n}{3\,EI}+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{l_n}{2\,EI}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$M=\frac{N}{C+D}=-\frac{ql^3}{24\,EI}\cdot\frac{1}{\frac{l}{2\,EI}+\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{ql^3}{12\,(l+\varepsilon)}$$

$$\varepsilon=\frac{h}{3\,EI_s}; \quad M=\frac{ql^2}{12\left(1+\frac{\varepsilon}{l}\right)}=\frac{ql^2}{4\left(3+\frac{2hI}{I_s\,l}\right)}.$$



Rys. 4.

Wzór zgodny z Kleinlogla „Rahmenformeln“ wyd. IV, str. 55.

Przykład 3.

Obliczyć momenty M_0, M_1 i M_2 dla ramy trójsłupowej jak na rys. 5.

Jest to belka na trzech podporach sprężyście obracalnych.

Dla $n=1$ wypada równanie:

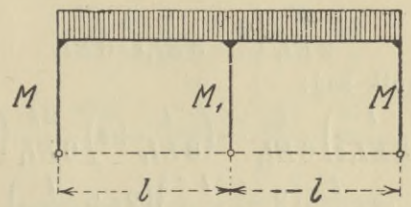
$$M_0''C_1+M_1'D_1+M_1''E_1+M_2'F_1=N_1$$

$$M_0''=M_2'=M_0 \qquad M_1'=M_1''=M_1$$

$$M_0(C_1+F_1)+M_1(D_1+E_1)=N_1$$

$$M_1'B_2+M_1''C_2+M_2'D_2=N_2$$

$$M_0D_2+M_1(B_2+C_2)=N_2$$



Rys. 5.

$$1)\ M_0(C_1+F_1)+M_1(D_1+E_1)=N_1$$

$$2)\ M_0D_2 \qquad +M_1(B_2+C_2)=N_2$$

$$M_0=\frac{\begin{vmatrix} N_1 \cdot & D_1+E_1 \\ N_2 & B_2+C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1+F_1 & D_1+E_1 \\ D_2 & B_2+C_2 \end{vmatrix}}; \qquad M_1=\frac{\begin{vmatrix} C_1+F_1 & N_1 \\ D_2 & N_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1+F_1 & D_1+E_1 \\ D_2 & B_2+C_2 \end{vmatrix}}$$

$$\left.\begin{aligned} C_1&=\frac{l}{6EI_1}-\frac{\varepsilon_0}{2} \\ F_1&=\frac{l}{6EI_2}\left(1-\frac{l}{3EI_1\varepsilon_1}\right)+\frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned}\right\} C_1+F_1=\frac{l}{6EI_1}\left(2-\frac{l}{3EI_1\varepsilon_1}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} B_2&=0 \\ C_2&=\frac{l}{6EI_1} \end{aligned}\right\} B_2+C_2=\frac{l}{6EI_1}$$

$$D_2=\frac{l}{3EI_1}+\varepsilon$$

$$\left.\begin{aligned} D_1&=\frac{l}{3EI_1}+\varepsilon \\ E_1&=\frac{l}{3EI_1}\left(1-\frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right)-2\varepsilon= \\ &=\frac{l}{3EI_1}\left(1-\frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right)-2\varepsilon \end{aligned}\right\} D_1+E_1=\frac{1}{3EI_1}\left(2-\frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right)$$

$$N_1 = -\frac{Fa}{lEI_1} - \frac{Fb}{lEI_1}\left(1 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right) = -\frac{F}{2EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI\varepsilon}\right)$$

$$N_2 = \frac{Fa}{lEI_1} = -\frac{F}{2EI_1}.$$

Licznik będzie:

$$-\frac{F}{2EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right)\frac{l}{6EI_1} + \frac{F}{2EI_1}\,\frac{l}{3EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{F}{2EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right)\frac{l}{6EI_1}.$$

Mianownik zaś:

$$-\frac{l}{6EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right)\frac{l}{6EI_1} - \left(\frac{l}{3EI_1} + \varepsilon\right)\frac{2l}{6EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{l}{6EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right)\left(2\varepsilon + \frac{l}{2EI_1}\right)$$

$$M_0 = \frac{\frac{F}{2EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right)\frac{l}{6EI_1}}{\left(2\varepsilon + \frac{l}{2EI_1}\right)\left(2 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right)\frac{l}{6EI_1}} = \frac{\frac{F}{2EI_1}}{2\varepsilon + \frac{l}{2EI_1}} =$$

$$= \frac{F}{4EI_1\varepsilon + l} = \frac{\frac{1}{12}ql^3}{\frac{4EI_1h}{3EI_s} + 1} = \frac{ql^2}{4(4k_1 + 3)}$$

gdzie: $k_1 = \frac{I_1 h}{I_s l_1}$

$$M_1 = \frac{\frac{F}{2EI_1}\,\frac{l}{6EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right) - \frac{F}{2EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI\varepsilon}\right)\left(\frac{l}{3EI_1} + \varepsilon\right)}{\frac{l}{6EI_1}\left(2 - \frac{l}{3EI_1\varepsilon}\right)\left(2\varepsilon + \frac{l}{2EI_1}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{F}{2EI_1}\left(\frac{l}{6EI_1} - \frac{2l}{6EI_1} - \varepsilon\right)}{\frac{l}{6EI_1}\left(2\varepsilon + \frac{l}{2EI_1}\right)} =$$

$$= \frac{F(6EI_1\varepsilon + l)}{3l_1(4EI_1\varepsilon + l)} = \frac{ql^2(2k_1 + 1)}{4(4k_1 + 3)}.$$

Wzory zgodne z wzorami Kleinlogla w „Mehrstielige Rahmen“ str. 167.

Tablica I.

1. $A_n M_{n-2}'' + B_n M_{n-1}' + C_n M_{n-1}'' + D_n M_n' + E_n M_n'' + F_n M_{n+1}' + G_n M_{n+1}'' + H_n M_{n+2}' = N_n.$

	1. Momenty	2. Obracalność podpór	3. Uginalność podpór	4. Siły poprzeczne
A_n	—	—	$\frac{\alpha_{n-1}}{l_{n-1}\, l_n}$	—
B_n	—	$\left(1-\frac{l_n I_{n-1}}{l_{n-1} I_n}\right)\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$	$-\frac{\alpha_{n-1}}{l_{n-1}\, l_n}$	—
C_n	$\frac{l_n}{6\, EI_n}$	$-\left(1-\frac{l_n I_{n-1}}{l_{n-1} I_n}\right)\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$	$-\frac{1}{l_n}\left[\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{l_n}+\frac{\alpha_n}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)\right]$	$-\frac{k}{F\, G\, l_n}$
D_n	$\frac{l_n}{3\, EI_n}$	$\left(1+\frac{l_n I_{n+1}}{l_{n+1} I_n}\right)\varepsilon_n$	$\frac{1}{l_n}\left[\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{l_n}+\frac{\alpha_n}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)\right]$	$\frac{k}{F\, G\, l_n}$
E_n	$\frac{l_{n+1}}{3\, EI_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)$	$-\left(1+\frac{l_n I_{n+1}}{l_{n+1} I_n}\right)\varepsilon_n$	$\frac{1}{l_{n+1}}\left[\frac{\alpha_n}{l_n}+\frac{\alpha_n+\alpha_{n+1}}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)\right]$	$\frac{k}{FG\, l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)$
F_n	$\frac{l_{n+1}}{6\, E\, I_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)$	$\left(\frac{l_n I_{n+1}}{l_{n+1} I_n}-\frac{l_n I_{n+2}}{I_n\, l_{n+2}}\right)\frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$	$-\frac{1}{l_{n+1}}\left[\frac{\alpha_n}{l_n}+\frac{\alpha_n+\alpha_{n+1}}{l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)\right]$	$-\frac{k}{F\, G\, l_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)$
G_n	—	$-\left(\frac{l_n I_{n+1}}{l_{n+1} I_n}-\frac{l_n I_{n+2}}{I_n\, l_{n+2}}\right)\frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$	$-\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}\, l_{n+2}}\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)$	—
H_n	—	—	$\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}\, l_{n+2}}\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)$	—
N_n	$-\frac{F_n\, a_n}{l_n\, E\, I_n}-$ $-\frac{F_{n+1}\, b_{n+1}}{l_{n+1} EI_{n+1}}\left(1-\frac{l_n}{3EI_n\, \varepsilon_n}\right)$	—	$\frac{1}{l_n}(\mathfrak{A}_{n-1}\, \alpha_{n-1}-\mathfrak{A}_n\, \alpha_n)+$ $-\frac{1}{l_{n+1}}(\mathfrak{A}_n\, \alpha_n-\mathfrak{A}_{n+1}\, \alpha_{n+1})\left(1-\frac{l_n}{3\, EI_n\, \varepsilon_n}\right)$	— Wpływ nierównej wysokości podpór $\vartheta_n-\vartheta_{n+1}$

Tablica II.

2. $H_n' M_{n-2}'' + G_n' M_{n-1}' + F_n' M_{n-1}'' + E_n' M_n' + D_n' M_n'' + C_n' M_{n+1}' + B_n' M_{n+1}'' + A_n' M_{n+2}' = N_n'$.

S. 61

	1. Momenty	2. Obracalność podpór	3. Uginalność podpór	4. Siły poprzeczne
H_n'	—	—	$\frac{\alpha_{n-1}}{l_{n-1} l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)$	—
G_n'	—	$\left(\frac{l_{n+1} I_{n-1}}{l_{n-1} I_{n+1}}-\frac{l_{n+1} I_n}{l_n I_{n+1}}\right)\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$	$-\frac{\alpha_{n-1}}{l_{n-1} l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)$	—
F_n'	$\frac{l_n}{6 E I_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)$	$-\left(\frac{l_{n+1} I_{n-1}}{l_{n-1} I_{n+1}}-\frac{l_{n+1} I_n}{l_n I_{n+1}}\right)\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$	$-\frac{1}{l_n}\left[\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)+\frac{\alpha_n}{l_{n+1}}\right]$	$-\frac{k}{F G l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)$
E_n'	$\frac{l_n}{3 E I_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)$	$-\left(1+\frac{l_{n+1} I_n}{l_n I_{n+1}}\right)\varepsilon_n$	$\frac{1}{l_n}\left[\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)+\frac{\alpha_n}{l_{n+1}}\right]$	$\frac{k}{F G l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)$
D_n'	$\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1}}$	$\left(1+\frac{l_{n+1} I_n}{l_n I_{n+1}}\right)\varepsilon_n$	$\frac{1}{l_{n+1}}\left[\frac{\alpha_n}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)+\frac{\alpha_n+\alpha_{n+1}}{l_{n+1}}\right]$	$\frac{k}{F G l_{n+1}}$
C_n'	$\frac{l_{n+1}}{6 E I_{n+1}}$	$-\left(1-\frac{l_{n+1} I_{n+2}}{l_{n+2} I_{n+1}}\right)\frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$	$-\frac{1}{l_{n+1}}\left[\frac{\alpha_n}{l_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)+\frac{\alpha_n+\alpha_{n+1}}{l_{n+1}}\right]$	$-\frac{k}{F G l_{n+1}}$
B_n'	—	$\left(1-\frac{l_{n+1} I_{n+2}}{l_{n+2} I_{n+1}}\right)\frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$	$-\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1} l_{n+2}}$	—
A_n'	—	—	$\frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1} l_{n+2}}$	—
N_n'	$-\frac{F_n a_n}{l_n E I_n}\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)$ $-\frac{F_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} E I_{n+1}}$	—	$\frac{1}{l_n}(\mathfrak{A}_{n-1} \alpha_{n-1}-\mathfrak{A}_n \alpha_n)\left(1-\frac{l_{n+1}}{3 E I_{n+1} \varepsilon_n}\right)-$ $-\frac{1}{l_{n+1}}(\mathfrak{A}_n \alpha_n-\mathfrak{A}_{n+1} \alpha_{n+1})$	— Wpływ nierównej wysokości podpór $\vartheta_n-\vartheta_{n+1}$

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
II
L. inw. 31457
Kdn. Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000297804

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
II-31457

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000297804