

WYDZIAŁ

BIBLI

L. inw.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000267682

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA T. XXXVI.

PODREĆCZNIK STATYKI BUDOWLI

DLA

INŻYNIERÓW, ARCHITEKTÓW I SŁUCHACZÓW SZKÓŁ POLITECHNICZNYCH

Z 427 RYSUNKAMI W TEKSCIE I 6 TABLICAMI.

OPRACOWAŁ

Dr. MAKSYMILIAN THULLIE,

RADCA DWORU, PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE.

=====
WYDANIE TRZECIE.
=====



LWÓW.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GUBRYNOWICZA.

Z I. ZWIĄZKOWEJ DRUKARNI WE LWOWIE, UL. LINDEGO L. 4.

1917.

~~BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW~~

~~III 15.004~~

II- 338578

Akc. Nr.

~~405 148~~

2102/974-F
7-476/2012

Przedmowa do wydania trzeciego.

Przed paru laty wyczerpane zostało już drugie wydanie, wobec tego okazała się nagle potrzebą nowego wydania, które opracowałem i wydrukowałem podczas wojny światowej.

Wykonanie klisz i druk przedstawiały znaczne trudności, a i papier mógł być użytym tylko taki, jaki był do rozporządzenia.

Wydanie trzecie zostało poprawione i nieco rozszerzone, aby je utrzymać na wysokości obecnej nauki. Opuściłem jednak teorię zeskładów żelbetowych, którą wydałem osobno przed rokiem.

Przy tej sposobności podziękować muszę swym asynten-
tom p. Ludwikowi Pazirskiemu, p. Adamowi Kurylle i p. Władysławowi Wislouchowi za wykonanie rysunków, przeliczanie przykładów i pomoc w obliczaniu tablic i korekcie.

Polskich inżynierów proszę, aby przyjęli to wydanie z życzliwością i wyrozumiałością ze względu na czas wojenny.

We Lwowie, w lipcu 1916 r.

Dr. Maksymilian Thullie.

Druk ukończono w sierpniu 1917 r.

W S T Ę P.

Statyka budowli lub zastosowana, zwana także mechaniką budowniczą (n. *Baumechanik*, *Statik der Bauconstructionen*, fr. *mécanique appliquée*, an. *statics applied*, r. строительная механика), jestto nauka o warunkach równowagi i o wytrzymałości zespołów budowlanych, zastosowana do obliczenia ich wymiarów i kształtów. Oczywiście nie możemy tu mówić o teorii wszystkich zespołów budowlanych, lecz omówimy tylko teorią najważniejszych zespołów, gdyż obliczenie mniej ważnych zespołów i szczegółów najlepiej daje się połączyć z opisem ich ustroju, który jest przedmiotem odrębnych nauk, jak n. p. budownictwa wodnego, budowy mostów i t. d. Pominiemy tu także obliczenie mostów, ponieważ odmienny sposób obciążenia robi obliczenie ich tak zawile, że jest ono przedmiotem osobnej nauki, tak zwanej teorii mostów (n. *Theorie der Brücken*), również teorią zeskładów żelbetowych, którą opracowałem osobno*).

Przedmiot nasz podzielimy według tego, czy materiał użyty do zespołu jest mniej lub więcej sprężysty. A więc będziemy mówili najprzód o wytrzymałości materiałów sprężystych drzewa i żelaza, potem bardzo mało sprężystego kamienia, a na koniec o wytrzymałości materiału niesprężystego ziemi.

Jak wiadomo, dwa są główne sposoby rozwiązywania zagadnień mechaniki, sposób analityczny i wykreślny. Będziemy używali jednego i drugiego sposobu naprzemian według tego, który w danym razie prędzej prowadzi do celu; często zaś podamy obliczenie według obydwu sposobów, których wyniki służą wtedy do wzajemnego sprawdzenia.

Naukę o równowadze sił, wyłożoną sposobem wykreślnym, nazywamy statyką wykreślną (n. *graphische Statik*, fr. *statique graphique*, an. *graphic statics*). W dalszym ciągu przy-

*) Thullie. Teoria żelbetu, Lwów 1915.

puszczać będziemy znajomość głównych zasad mechaniki rozumowej. Dla związku i przypomnienia ich czytelnikom wyłożymy je jednak w poszczególnych rozdziałach, ale jak najkrócej i tylko o tyle, o ile one służą za podstawę dalszych praw i twierdzeń, wchodzących w zakres statyki zastosowanej. Główniejsze zasady zaś statyki wykreślnej wyłożymy w pierwszym rozdziale.

Stąd wynika następujący podział przedmiotu:

- A. Wiadomości wstępne ze statyki wykreślnej.
- B. Wytrzymałość zespołów drewnianych i żelaznych.
- C. Teorya sklepień.
- D. Budowle ziemne.
- E. Mury oporowe.

Jako dodatek:

Literatura.

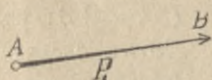


A. Wiadomości wstępne ze statyki wykreślnej.

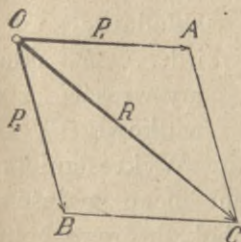
I. Składanie sił.

§. I. Siły, przecinające się w jednym punkcie.

Do oznaczenia siły (n. *Kraft*, fr. *force*, an. *force*, cz. *sila*, r. *сила*) potrzebne są trzy znamiona: jej wielkość (n. *Grösse*, fr. *grandeur*, *intensité*, an. *magnitude*, cz. *velikost*, r. *величина*), kierunek (n. *Richtung*, fr. *direction*, *ligne d'action*, an. *direction*, *line of action*, cz. *směr*, r. *направление*) i punkt zaczepienia lub przyłożenia (n. *Angriffspunkt*, fr. *point d'application*, an. *point of action*, *of application*). Ponieważ punkt zaczepienia w kierunku siły możemy dowolnie przelożyć, wystarczy do oznaczenia siły zamiast punktu zaczepienia położenie siły (n. *Lage*, fr. *position*, an. *position*, r. *положение*), t. j. jeden punkt, przez który kierunek siły przechodzi. Wszystkie te znamiona dadzą się łatwo przedstawić wykreślnie za pomocą linii prostej, której długość zawiera tyle jednostek długości, ile jednostek siły zawiera siła i której kierunek i położenie przedstawia kierunek i położenie siły. Po tej samej linii prostej może siła działać w dwu przeciwnych kierunkach; aby więc określić dokładnie, w którym kierunku działa dana siła, czyli jaki jest jej tok (fr. *sens*), dodajemy strzałkę w odpowiednim kierunku (rys. 1.). Nazywamy siłę albo jedną literą P_1, P_2, \dots , lub też dwiema literami n. p. AB , przyczem porządek liter oznacza tok siły.



rys. 1.



rys. 2.

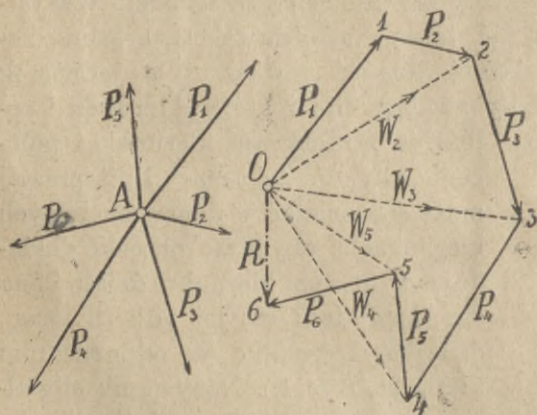
Jeżeli dwie siły P_1 i P_2 (rys. 2.) przecinają się w punkcie O , to możemy je zastąpić jedną siłą R , którą nazywamy wypadkową (n. *Resultirende*, fr. *resultante*, an. *resultant*, cz. *výslednice*, r. *па-*

Resultirende, fr. *resultante*, an. *resultant*, cz. *výslednice*, r. *па-*

виобыйствующая сила), a siły P_1 i P_2 składowemi (n. *Composante*, fr. *composante*, r. составная сила).

Wiemy, że jeżeli dwie siły działają na punkt materyalny, to drogi, które punkt pod działaniem tych sił w jednostce czasu przebiegnie, są proporcjonalne do ich wielkości, a zatem do OA i OB . Jeżeli siły P_1 i P_2 równocześnie działają na punkt O , to ten punkt przy końcu jednostki czasu znajdzie się w punkcie C , gdyż droga spowodowana siłą P_1 jest OA , a siłą P_2 jest AC , względnie OB . Długość OC przedstawia więc siłę, którą punkt O poruszony, znajdzie się w jednostce czasu także w punkcie C , a zatem siłę, zastępującą działanie sił P_1 i P_2 , czyli wypadkową. Z tego wynika następujące prawidło składania dwu sił przecinających się: wykreślamy siłę $P_1 = OA$, z punktu A wykreślamy $AC \parallel OB = P_2$ i łączymy punkt O z punktem C ; prosta OC jest wypadkową. Do punktu C dojdziemy jednak także, wykreśliwszy $P_2 = OB$, a z punktu B $BC \parallel OA = P_1$. A zatem porządek, w którym składamy siły, jest obojętny.

Mając złożyć kilka sił, przecinających się w jednym punkcie (rys. 3.), postępujemy w ten sposób, że składamy najprzód



rys. 3.

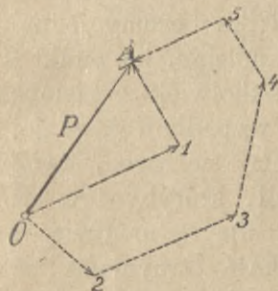
dwie siły P_1 i P_2 , z których wypadkową W_2 składamy następnie z siłą $P_3 = 2\ 3$; wypadkową otrzymaną W_3 składamy z siłą $P_4 = 3\ 4$, te siły dają znowu wypadkową W_4 , którą składamy z siłą P_5 itd... P_n składamy wreszcie z wypadkową W_{n-1} i otrzymujemy wypadkową wszystkich sił R . Wykreślanie prostych W_2, W_3 itd. możemy opuścić, a zatem chcąc znaleźć wypadkową sił P_1, P_2, \dots, P_n , kreślimy wielobok, którego boki są równoległe do wszystkich sił po porządku. Prosta, łącząca początek wieloboku O z końcem jego n (tu 6), daje wielkość i kierunek wypadkowej R .

z których wypadkową W_2 składamy następnie z siłą $P_3 = 2\ 3$; wypadkową otrzymaną W_3 składamy z siłą $P_4 = 3\ 4$, te siły dają znowu wypadkową W_4 , którą składamy z siłą P_5 itd... P_n składamy wreszcie z wypadkową W_{n-1} i o-

Wielobok ten nazywamy wielobokiem sił (n. *Kraft-polygon*, fr. *polygon de forces*, an. *force polygon*, cz. *čara složek*, r. *многоугольникъ силъ*), a może on być płaskim lub przestrzennym, według tego, czy wszystkie siły składowe działają w jednej płaszczyźnie, czy nie. Z rys. 3. wynika, że rzut wypadkowej na jakąkolwiek prostą jest równy algebraicznej sumie rzutów składowych. Porządek, w jakim siły składamy, jest tu obojętny; dla dwu sił udowodniliśmy to powyżej, dla więcej sił zaś, zmieniając porządek dwu po sobie następujących sił, możemy uzyskać dowolny porządek.

Dla równowagi (n. *Gleichgewicht*, fr. *équilibre*, an. *equilibrium*, r. *равновісїе*), tj., aby punkt, na który siły działają, pozostał w spoczynku, wypadkowa R wszystkich sił musi być równą zeru czyli ostatni punkt wieloboku musi przypaść na początkowy punkt wieloboku O , a zatem wielobok musi być zamkniętym. Dla wieloboku w płaszczyźnie musi więc być dla równowagi suma rzutów składowych na dwie przecinające się proste równa zeru.

Rozkładanie (fr. *décomposition*) siły na składowe jest bardzo łatwe. Chcąc rozłożyć siłę P (rys. 4.) na składowe, czynimy ją wypadkową dowolnych sił $O1$ i $1A$, lub też $O2$, 23 ,



rys. 4.

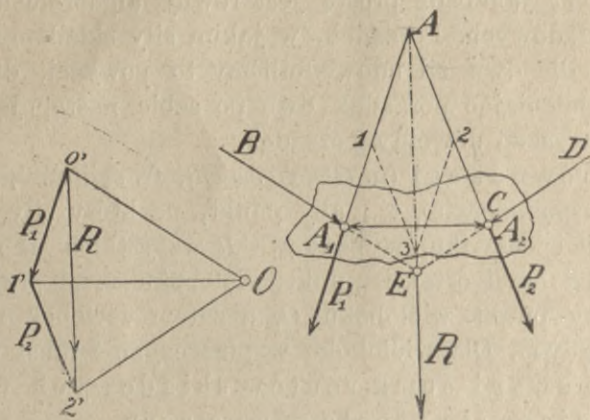
34, 45, 5A. Widzimy, że można znaleźć nieskończoną ilość składowych, dających jako wypadkową siłę P . Aby więc zadanie było oznaczone, muszą być dane pewne warunki. Jeżeli n. p. rozkładamy siłę P na dwie składowe, mogą być dane wielkość i kierunek jednej siły składowej, lub też wielkości albo kierunki obu składowych. Rozwiązanie

podobnych zadań sprowadzamy zatem do wykreślnego rozwiązywania trójkąta z trzech danych elementów.

Kierunek wypadkowej wyznacza nam przytem kierunki sił składowych, jeżeli pamiętać będziemy, że tok sił składowych w wieloboku sił jest przeciwny tokowi wypadkowej, czyli, że wypadkowa jest równą i wprost przeciwną sile, którą dodaćby trzeba, aby wielobok był zamknięty.

§. 2. Siły, działające w płaszczyźnie na układ punktów stale połączonych. Wielobok sznurowy.

Niechaj siły P_1 i P_2 działają na dwa punkty stale połączone A_1 i A_2 (rys. 5.). Przedłużmy kierunki obu sił aż do przecięcia się w punkcie A , to możemy te siły złożyć, jak wyżej.



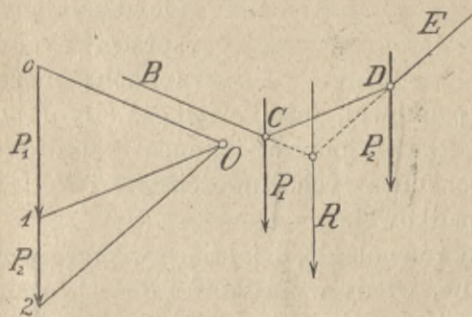
rys. 5.

Jeżeli $A_1 = P_1$ a $A_2 = P_2$, to wykreślmy $A_3 \parallel A_2$, a otrzymamy $A_3 = R$, a zatem położenie, kierunek i wielkość wypadkowej. Tego sposobu składania sił nie możemy jednak użyć w wypadku, gdy siły składowe są równoległe, bo punkt A leży w takim razie w nieskończoności i jakkolwiek z wieloboku sił otrzymalibyśmy wielkość i kierunek wypadkowej, to jej położenie byłoby nam nieznanem. Będziemy się zatem starali znaleźć inny ogólny sposób składania sił, któryby i w tym wypadku dał się zastosować. Rozłożmy siłę P_1 na dwie dowolne składowe A_1B i A_1C , których wielkość otrzymamy z wieloboku sił $O'O$ i $O'1'$. Również rozłożmy siłę P_2 na dwie składowe, z których jedna niech będzie równa i wprost przeciwna sile $A_1C = 1'O$. Z wieloboku sił otrzymamy kierunek i wielkość drugiej składowej $O'2'$, wykreślamy więc $CD \parallel O'2'$. Zamiast sił P_1 i P_2 mamy więc teraz cztery siły, z których dwie jednak A_1C i CA_1 się znoszą tak, że zostają tylko dwie BA_1 i DC . Przez ich punkt przecięcia się E przechodzi więc wypadkowa $R \parallel O'2'$. Kierunki sił A_1B i A_1C obraliśmy dowolnie, siły te przecinają się w O . Jeżeli teraz przyjmujemy inne kierunki sił składowych, przecinające się w innym punkcie O' , to ponieważ

punkty O' i $1'$ w wieloboku sił są stałe, punkt przecięcia się kierunków sił składowych O' określa dokładnie ich kierunki. Możemy więc zamiast tych dowolnych kierunków obrać dowolnie punkt O przecięcia się tych dwu sił w wieloboku sił. Punkt ten nazywamy biegunem (n. *Pol*, fr. *pôle*, an. *pole*, r. полюсь), wielobok BA, CD wielobokiem sznurowym (n. *Seilpolygon*, fr. *polygon funiculaire*, an. *funicular, cord or link polygon*, r. верёвочный многоугольник), bo gdy w miejsce linii matematycznych tego wieloboku pomyślimy sobie sznury, zaś w B i D zaczepimy siły równe OO' i $O2'$, to system ten będzie w równowadze, a proste $OO', O1'$ i $O2'$ będą przedstawiały ciągnięcia (względnie ciśnienia) sznurów. Linie, łączące biegun z wierzchołkami wieloboku sił, nazywamy promieniami (n. *Strahl*, fr. *rayon polaire*, an. *ray*, r. радіусь).

§. 3. Siły równoległe.

Mając złożyć dwie siły równoległe (n. *parallel*, fr. *parallèle*, cz. *rovnoběžné*, r. параллельный), (rys. 6.) P_1 i P_2 , wy-



rys. 6.

R , obieramy dowolnie biegun O , kreślimy promienie, a do nich równoległe boki wieloboku sznurowego. Przecięcie się jego boków skrajnych wyznacza wedle poprzedniego paragrafu położenie wypadkowej, równoległej do składowych.

Jeżeli mamy złożyć dwie siły P_1 i P_2 (rys. 7.) równoległe, ale działające w przeciwnych kierunkach*), postępujemy w ten sam sposób. Wypadkowa jest tu różnicą sił składowych i ma kierunek siły większej. Punkt przecięcia się boków skrajnych C wyznacza położenie wypadkowej.

*) W rys. 7. tok siły P_1 powinien być przeciwnym.

kreślamy wielobok sił $O12$, który tu staje się jedną linią prostą, równoległą do kierunku sił. Wypadkowa R równa się w tym wypadku algebraicznej sumie składowych, więc $R = O2$. Aby otrzymać położenie wypadkowej

Z rysunku widzimy, że trójkąty $O12$ i DAE są podobne, a stąd $AE : AB = P_2 : OO$, zatem

$$AE \cdot OO = P_2 \cdot AB; \dots \dots \dots 1)$$

dalej są także trójkąty ABD i $OO1$ podobne, więc

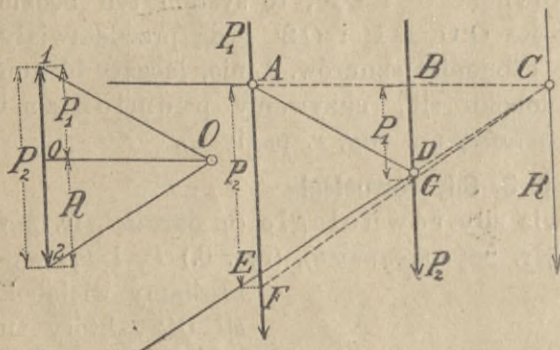
$$BD : AB = P_1 : OO, \text{ a stąd} \\ BD \cdot OO = P_1 \cdot AB \dots \dots \dots 2)$$

Podzieliwszy rów. 2) przez rów. 1), otrzymamy

$$\frac{BD}{AE} = \frac{P_1}{P_2} \dots \dots \dots 3)$$

A zatem jeżeli na kierunkach sił P_1 i P_2 odetniemy $AF = P_2$ i $BG = P_1$, to prosta FG musi przechodzić także przez C .

A więc dla dwu sił równoległych, ale działających w przeciwnych kierunkach, możemy



rys. 7.

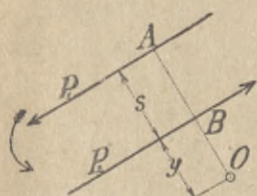
wyznaczyć położenie wypadkowej, jeżeli wielkość siły P_1 odetniemy na kierunku siły P_2 i na odwrót i końce tych długości połączymy. Linie, łączące końce tych długości, AB i FG przetną się na kierunku wypadkowej.

Jeśli jednak dwie siły równoległe, działające w przeciwnych kierunkach, są sobie równe, wtedy wypadkowa $R = 0$, a punkt zaczepienia jej C usuwa się w nieskończoność, bo wtedy bok pierwszy i ostatni są równoległe, a więc wypadkowa takich sił jest nieskończenie małą i działa w oddaleniu nieskończenie wielkim. Dwie siły takie nazywamy parą sił (n. *Kräftepaar*; fr. *couple*, cz. *dvojica sil*). Ponieważ wypadkowa pary sił jest równa zeru, więc działając na system punktów, stale połączonych, nie wywołuje ruchu postępowego, lecz ruch tylko obrotowy w kierunku, wskazanym strzałką (rys. 8).

§. 4. Moment statyczny.

Para sił nie mierzy się wielkością wypadkowej, bo ta równa się zeru, lecz działaniem jej obrotowym, które wyznaczamy

momentem statycznym, (n. *statisches Moment*, *Drehungsmoment*, fr. *moment*, an. *moment*, cz. *statyczny moment*, r. статический моментъ). Moment danej siły ze względu na prostą, około której ruch ma nastąpić, czyli ze względu na oś momentu (n. *Drehungsaxe*, fr. *axe du moment*, r. ось), jestto iloczyn siły



Rys. 8.

przez ramię momentu (n. *Hebelarm*, fr. *bras de levier*, an. *lever arm*) czyli odległość siły od osi momentu. Jeżeli przez ramię momentu i siłę położymy płaszczyznę, to przecina ona oś w środku momentu (n. *Momentpunkt*, fr. *centre du moment*, an. *centre of moment*). Jeżeli więc siły działają w płaszczyźnie, to spuściwszy prostopadłą na kierunek

danej siły z środka momentu, otrzymamy jej ramię momentu. Moment, którego kierunek obrotu jest zgodny z obrotem wskazówki na zegarze, będziemy nazywać dodatnim (n. *positiv*, fr. *positif*, an. *positive*, r. положительный), zaś moment, działający w przeciwnym kierunku, ujemnym (n. *negativ*, fr. *negatif*, an. *negative*, r. отрицательный). Moment pary sił ze względu na dowolny środek momentu O (rys. 8.) nazwijmy M_1 , tedy $P_1 = P_2$,

$$M_1 = -P_1 \cdot OA + P_2 \cdot OB = -P_1 (s + y) + P_2 y = -P_1 s.$$

Ponieważ y znika z rachunku, więc moment pary sił zostaje ten sam dla jakiegokolwiek środka momentu i równy jest jednej sile, pomnożonej przez odstęp obu sił, czyli prostopadłą, spuszczoną z jakiegokolwiek punktu jednej siły na drugą.

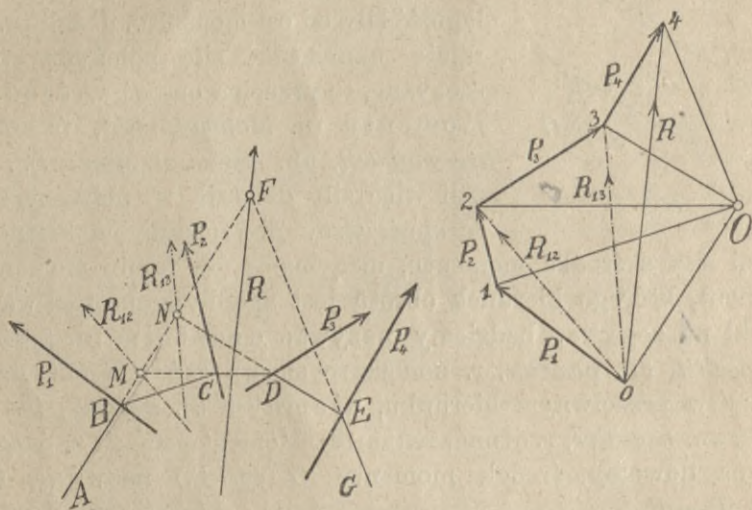
Jeżelibyśmy obie siły pary sił złożyli, otrzymalibyśmy według §. 3. wypadkową nieskończenie małą, działającą w oddaleniu nieskończenie wielkiem; moment jej będzie więc $0 \cdot \infty$,

Dwie pary sił, złożone z sił nierównych, ale mające równy moment statyczny, są równe tak, że możemy jedną zastąpić drugą.

§. 5. Składanie ilukolwiek sił.

Mając złożyc kilka sił P_1, P_2, P_3, P_4 (rys. 9.), składamy najprzód dwie siły P_1 i P_2 , a mianowicie kreślimy wielobok sił $O12$, obieramy dowolnie punkt O , kreślimy promienie $OO, O1, O2$ i równolegle do nich wielobok sznurowy $ABCD$. Przez M ,

punkt przecięcia się boków AB i CD , przechodzi R_{12} wypadkowa tych dwóch sił P_1 i P_2 , wielkość jej jest $O2$. Z tą wypadkową R_{12} złożymy teraz siłę P_3 . Uskuteczmy to, jeżeli w wieloboku sił wykreślimy $23 = P_3$, poprowadzimy z tego samego bieguna O promień $O3$ i wykreślimy wielobok sznurowy. Pierwszym bokiem, równoległym do $O2$, niech będzie prosta AM ,



Rys. 9.

drugim $MD \parallel O2$, trzecim będzie $DE \parallel O3$. R_{13} , wypadkowa sił R_{12} i P_3 , czyli P_1, P_2 i P_3 , będzie więc równa $O3$ i przechodzić przez punkt N przecięcia się boków skrajnych AB i DE . Z siłą R_{13} złożymy dalej siłę P_4 i otrzymamy w ten sam sposób wypadkową wszystkich sił $R=O4$. Przechodzić ona będzie przez punkt F przecięcia się boków skrajnych AB i EG .

Łatwo pojmemy, że jeżeli przy składaniu sił chodzi nam tylko o ostateczną wypadkową R , to możemy tok konstrukcyi uprościć, opuszczając wyznaczenie sił R_{12}, R_{13} itd. A więc wystarczy, jeżeli dla danych sił P_1, P_2, P_3 i P_4 wykreślimy wielobok sił, obierzemy dowolnie biegun O , poprowadzimy promienie i wykreślimy równoległe do tych promieni wielobok sznurowy $ABCDEG$. Wypadkowa $R=O4$ przechodzi przez punkt F przecięcia się boków skrajnych wieloboku sznurowego, jakiegoś to powyżej udowodnili.

Wielobok sił i wielobok sznurowy są figurami odwrotnymi (*n. reciprok*), gdyż, jak widzimy z rys. 9., każdemu bokowi wieloboku sił czyli każdej sile odpowiada wierzchołek kąta w wieloboku sznurowym i odwrotnie. Przy tem samym położeniu bieguna odchylają się dwa po sobie następujące boki wieloboku sznurowego n. p. AB i BC tem więcej, im większa jest odnośna siła P_1 , a więc kąt ABC jest tem większy, im większa jest siła P_1 . Gdyby $P_1=0$, toby i kąt $ABC=0$, t. j. linie AB i BC tworzyłyby jedną prostą. Kąt wieloboku sznurowego pozwala także wnioskować o kierunku siły, dwa boki jego bowiem nachylone są zawsze w kierunku strzałki. Każdy bok wieloboku sznurowego jest równoległy do promienia wieloboku sił, łączącego bieguna z punktem przecięcia się dwóch sił, między którymi bok ten leży. Tak n. p. BC jest równoległym do $O1$, a 1 jest punktem przecięcia się sił P_1 i P_2 w wieloboku sił, między którymi BC leży.

Gdy dodamy do sił P_1, P_2, P_3 i P_4 siłę — R , równą R , mającą to samo położenie, lecz działającą w kierunku przeciwnym, wtedy nastąpi równowaga, to jest dany układ punktów pozostanie w spoczynku. Widzimy więc, że dla równowagi musi się zamknąć nie tylko wielobok sił, ale i wielobok sznurowy, gdyż pierwszy i ostatni jego bok muszą się przecinać na kierunku ostatniej siły.

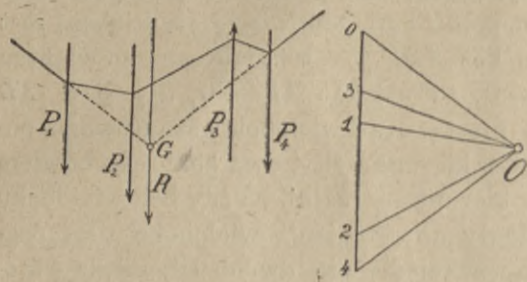
Gdy wielobok sił się zamyka, a wielobok sznurowy nie, wtedy złożony wszystkie siły składowe przócz jednej P_n , otrzymamy wypadkową R_1 i P_n , które muszą być sobie równe i wprost przeciwne, bo z powodu, że wielobok sił się zamyka, $R=R_1+P_n=0$, czyli $R_1=-P_n$, z powodu zaś, że wielobok sznurowy się nie zamyka, położenie R_1 będzie inne, niż P_n ; a zatem po złożeniu wszystkich sił otrzymamy dwie siły równoległe, równe a wprost przeciwne, czyli parę sił, której działanie mierzymy momentem. Układ punktów nie będzie wtedy miał wprawdzie ruchu postępowego (bo $R=0$), lecz będzie miał ruch obrotowy. Analitycznie możemy wyrazić powyższe twierdzenie w ten sposób:

Jeżeli rozłożymy wszystkie siły na składowe, działające w dwu przecinających się kierunkach, to dla równowagi musi być suma składowych wszystkich sił w obydwu kierunkach równa zeru (wielobok sił zamknie-

ty) i suma momentów równa zeru (wielobok sznurowy zamknięty).

Wszystko cośmy powyżej mówili o składaniu sił w ogóle, da się zastosować do sił równoległych (rys. 10.). Chcąc złożyć

siły równoległe P_1, P_2, P_3 i P_4 , kreślimy wielobok sił, który tu przedstawia jedna linia prosta, kreślimy dalej wielobok sznurowy, którego boki skrajne przedłużone przecinają się w punkcie G , wy-



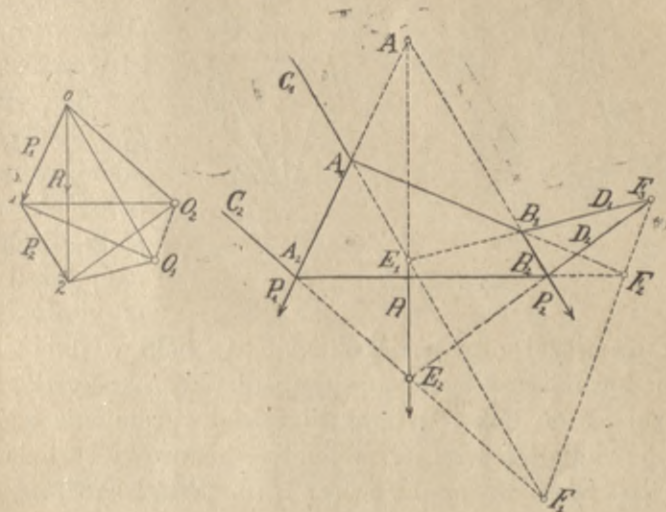
Rys. 10.

znaczającym położenie wypadkowej R . Jej wielkość ($R=O_4$) i kierunek otrzymujemy z wieloboku sił. Składania sił równoległych zapomocą wieloboku sznurowego używamy przy wyznaczeniu środka ciężkości powierzchni złożonych z prostokątów lub trójkątów.

§. 6. Dalsze własności wieloboku sznurowego.

Z poprzedniego widzimy, że przecięcie się dwu skrajnych boków wieloboku sznurowego wyznacza położenie wypadkowej, co odnosi się nie tylko do dwóch, ale i do więcej sił. Ponieważ wypadkowa musi przechodzić także przez punkt przecięcia się sił P_1 i P_2 , więc położenie jej jest AE_1 (rys. 11.), przy czem AE_1 musi być równoległe do O_2 . Ale proste O_2 i AE_1 są szóstymi bokami dwu czworoboków zupełnych (czworoboków wraz z obiema przekątnymi) O_1O_2 i $AA_1E_1B_1$, których pięć boków jest nawzajem równoległych. Zewnętrzne boki czworoboków nawzajem równoległe następują po sobie w obu czworobokach w przeciwnym kierunku. Stwierdza się tu przeto twierdzenie geometryczne, że jeżeli w obu czworobokach zupełnych mamy pięć boków, kolejno w przeciwnym kierunku licząc, nawzajem równoległych, to i szóste boki muszą być równoległe. Jeżeli biegun zmienimy i zamiast punktu O_1 obierzemy punkt O_2 , to otrzymamy inny wielobok sznurowy $C_2A_2B_2D_2$. Przez zmianę bieguna nie zmieniamy wy-

padkowej, bo według §. 2. możemy biegun obrać dowolnie. Z tego wynika, że przecięcie się boków skrajnych E_2 musi znowu leżeć na prostej AE_1 . A więc gdy biegun przesuwa się w jakimkolwiek kierunku po płaszczyźnie, punkt przecięcia się boków skrajnych wieloboku sznurowego porusza się po linii prostej, wyznaczającej kierunek wypadkowej. Z rys. 11. możemy jednak udowodnić jeszcze jedno prawidło. Widzimy mianowi-



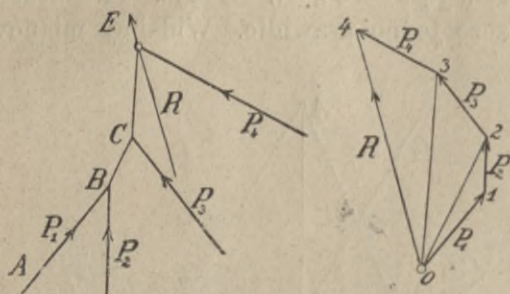
Rys. 11.

cie, że bok O_1O_2 jest szóstym bokiem trzech czworoboków zupełnych $O_1O_2O_1$, $O_1O_2O_2$ i $O_1O_2O_3$, którego odpowiednimi bokami w czworobokach zupełnych $F_1F_2A_1A_2$, $F_2F_3B_1B_2$ i $F_1F_3E_1E_2$ są F_1F_2 , F_2F_3 i F_1F_3 , a których reszta pięć boków jest nawzajem równoległa. Z tego wynika, że i szóste boki są równoległe, a więc boki F_1F_2 , F_2F_3 i F_1F_3 są równoległe do O_1O_2 , a punkty przecięcia się F_1 , F_2 i F_3 muszą leżeć na prostej równoległej do O_1O_2 . Możemy zatem napisać następujące twierdzenie:

Jeżeli biegun posuwa się na płaszczyźnie w linii prostej, to wszystkie boki wieloboku sznurowego obracają się około punktów prostej, równoległej do drogi bieguna.

To samo twierdzenie da się udowodnić i dla więcej sił składowych.

Przypuśćmy teraz, że mamy złożyć siły P_1, P_2, P_3 i P_4 (rys. 12.) i że przyjmiemy biegun w O , w początku pierwszej siły P_1 i wykreślimy wielobok sznurowy $ABCDE$, to widzimy, że promienie wieloboku sił przedstawiają wtedy wielkość i kie-



Rys. 12.

runek wypadkowych, np. $O3$ przedstawia wypadkową sił P_1, P_2 i P_3 , a boki wieloboku sznurowego, równoległe do tych promieni, wyznaczają położenie tych wypadkowych. A zatem, jeżeli biegun przyjmiemy w początku

pierwszej siły wieloboku sił, to boki wieloboku sznurowego wyznaczają położenie wypadkowych wszystkich sił od pierwszej aż do bok ten poprzedzającej, promienie zaś przedstawiają wielkości tych sił. Wielobok sznurowy staje się wtedy wielobokiem wypadkowych (n. *Mittelkraftlinie*, cz. *čára výslednic*).

§. 7. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego.

Mając wyznaczyć sumę momentów statycznych kilku sił P_1, P_2, P_3 i P_4 ze względu na punkt dany A (rys. 13.), składowy te siły w wypadkową R i wyznaczamy moment wypadkowej, który równa się algebraicznej sumie momentów sił składowych, gdyż wypadkowa, zastępując w działaniu wszystkie siły składowe, sprawić musi taki sam moment, jak wszystkie składowe. Jeżeli prostopadłą, spuszczoną z środka momentu A na wypadkową R , nazwiemy r , to suma momentów sił P_1, P_2, P_3 i P_4 , równa momentowi wypadkowej:

$$M = Rr. \dots \dots \dots 4)$$

Poprowadźmy przez punkt A równoległą MN do wypadkowej i nazwijmy odcinek MN tej prostej między bokami skrajnymi y , to otrzymamy dwa trójkąty podobne, a miano-

wicie $EMN \sim O40$, bo wszystkie ich boki są nawzajem równoległe. Stąd wynika, że podstawy obu trójkątów mają się do siebie, jak wysokości, więc

$$y : r = R : b, \text{ a stąd } Rr = by.$$

Wstawivszy wreszcie z rów. 4) $M = Rr$, otrzymamy:

$$M = by. \quad 5)$$

Odległość bieguna od wypadkowej, czyli długość b prostopadłej, spuszczonej z bieguna na wypadkową R , nazywamy

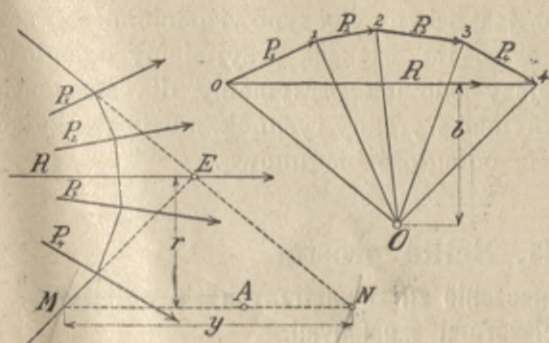
odległością biegunową (n. *Pol-distanz*, fr. *distance polaire*, an. *pole distance*, cz. *vzdalenost polárna*). Możemy więc rów. 5) wyrazić w następujących słowach:

Moment statyczny sił $P_1, P_2, P_3 \dots$ jest równy iloczynowi

wi odcinka y między bokami skrajnymi wieloboku sznurowego równoległej do wypadkowej, przechodzącej przez środek momentu, przez odległość biegunową.

Odległość biegunową możemy uważać też jako siłę, a mianowicie jako składową, prostopadłą do wypadkowej sił, wyrażonych skrajnymi promieniami OO i $O4$. Ponieważ według rów. 5) otrzymujemy moment, mnożąc odcinek y odległością biegunową b , więc dobrze będzie, jeżeli biegun O przyjmiemy tak, aby odległość biegunowa dała się wyrazić według podziałki sił jakąś liczbą całą n. p. 1, 2, 4, 5, 10, 50; to nam ułatwi odczytanie momentu na podziałce.

Moment jest, jak wiemy, iloczynem siły przez długość. Mierzmy więc moment jednostką, powstałą z pomnożenia siły przez jednostkę długości. Jeżeli zatem n. p. mierzmy siły kilogramami, a długości metrami, to jednostkę, którą mierzmy moment, nazywamy kilogrammetrem (*kgm*). Jeżeli odcinek y



Rys. 13.

mierzmy jednostką długości, to musimy wtedy odległość biegunową uważać za siłę i mierzyć jednostką sił i na odwrót.

Chcąc uniknąć mnożenia, możemy wykreślić podziałkę, na której odczytany odcinek y da nam wprost moment w kgm . Aby wyznaczyć tę podziałkę, dość będzie pamiętać o tem, że chcąc odczytać daną długością liczbę b razy większą, musimy jednostkę podziałki wziąć b razy mniejszą. A więc odczytujemy najprzód b na podziałce sił i robimy jednostkę długości b razy mniejszą, a uzyskamy podziałkę dla momentów.

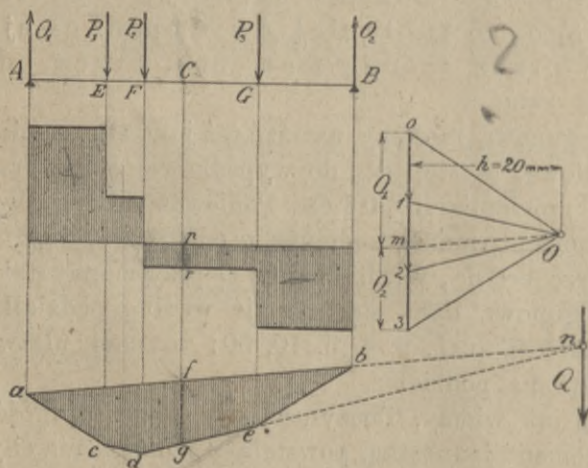
Ponieważ moment jest równy iloczynowi odcinka y przez odległość biegunową, więc im większą przyjmujemy odległość biegunową, tem mniejszy odcinek otrzymamy dla momentu i odwrotnie. Chcąc otrzymać wyraźny rysunek, musimy przyjąć zatem odpowiednio małą odległość biegunową.

II. Belka prosta.

§. 8. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla obciążenia ciężarami skupionymi.

Dotychczas zajmowaliśmy się składaniem sił w płaszczyźnie w ogólności; teraz będziemy mówić o działaniu ich na belkę.

Dźwigarem (n. *Träger*, fr. *poutre*, an. *girder*; *truss*, cz. *trám*, r. *балка*), nazywamy część budowli, służącą do przeniesienia sił na podpory. Linie, łączącą środki ciężkości pojedynczych przekrojów, nazywamy osią dźwigaru (n. *Axe*, fr. *axe*, an. *axis*, cz. *osa* r. *ось*).



Rys. 14.

Na dźwigar AB (rys. 14.), podparty w dwu punktach, działają pionowe siły P_1 , P_2 i P_3 . Gdyby dźwigar

nie był podpartym, nastąpiłby ruch w kierunku wypadkowej; jeżeli zaś dźwigar jest podpartym, to powstają w punktach podparcia czyli podporach (n. *Auflager*, fr. *appui*, an. *support*, r. опора) *A* i *B* siły, utrzymujące cały układ w równowadze. Siły te O_1 i O_2 nazywamy oddziaływaniami podpór (n. *Pfeilerdruck*, *Auflagerdruck*, fr. *réaction des appuis*, an. *supporting force*, *reacting force*, *reaction*, cz. *reakcje podporové*, r. отпоръ).

Naszem zadaniem jest teraz wyznaczenie oddziaływań, które, jak już wspomnieliśmy, muszą utrzymywać dźwigar w równowadze. Kierunek oddziaływań zależy od kształtu i rodzaju łożysk (n. *Lager*, fr. *support*, *coussinet*, an. *support*, *bearing*, r. подушка, подшипникъ), części budowli, na których bezpośrednio dźwigar spoczywa. Jeżeli oddziaływania są pionowe, dźwigar nazywamy wtedy belką prostą, (n. *gerader Träger*, *Balkenträger*, *Balken*, fr. *poutre droite*, an. *straight girder*, *beam*, cz. *trám prostý*, r. прямая балка) i o takich tylko dźwigarach będziemy w tym rozdziale mówić. Chcąc wyznaczyć wielkość oddziaływań O_1 i O_2 , wykreślamy wielobok sił, robiąc $01 = P_1$, $12 = P_2$, $23 = P_3$. Wiemy, że dla równowagi wielobok musi się zamknąć, więc $O_1 + O_2 = 30$. Znamy zatem sumę obu oddziaływań; aby zaś wyznaczyć wielkość każdego oddziaływania z osobna, wykreślamy wielobok sznurowy *acdeb*, kreśląc $ac \parallel 00$, $cd \parallel 01$ itd. Dla równowagi czworobok sznurowy musi być zamknięty. Ostatni bok wieloboku sznurowego, który musimy wykreślić, aby wielobok zamknąć, otrzymamy, łącząc punkty *a* i *b* przecięcia się skrajnych boków z kierunkami oddziaływań, a więc tu z pionowymi przez *A* i *B*.

Prostą *ab* nazywamy z tego powodu linią zamykającą albo zamykającą (n. *Schlusslinie*, fr. *ligne limitante*, *droite de fermeture*, an. *closing line*, cz. *základna strana*, r. замыкающая). Poprowadzimy odnośny promień $Om \parallel ab$, otrzymamy punkt *m*, który podzieli długość 03 na dwie części, $3m = O_2$ i $m0 = O_1$, odpowiadające wierzchołkom *a* i *b* wieloboku sznurowego. Teraz bowiem siły P_1 , P_2 , P_3 , O_2 i O_1 są w równowadze, bo wielobok sił i wielobok sznurowy się zamykają.

Ażeby wyznaczyć moment wszystkich sił, po lewej stronie punktu *C* leżących, ze względu na punkt *C* postępujemy, jakto wskazano w poprzednim paragrafie. Na rys. 14. mamy wykreślony odnośny wielobok sznurowy. Ponieważ wypadkowa jest

pionową, więc spuszczaemy z punktu C pionową, a odcinek $y=fg$ między bokami skrajnymi ab i de , pomnożony przez odległość biegunową h , da moment $M=hy$. Zamiast mnożyć odcinek przez odległość biegunową h , możemy zmienić dla momentów podziałkę długości w stosunku $1:h$, a więc jeżeli stosunek podziałki długości jest $\frac{1\text{ cm}}{a\text{ m}}$, t. j. jeżeli cm w rysunku przedstawia a metrów w naturze, a odległość biegunowa h , jako siła uważana, równa się h tonnom, to stosunek podziałki, na której y odczytujemy wprost jako moment, będzie $\frac{1\text{ cm}}{ah\text{ tm}}$, t. j. 1 centymetr na rysunku będzie przedstawiał ah tonmetrów. Widzimy więc, że przy użyciu tej podziałki wszystkie odcinki pionowe w wieloboku sznurowym $acdgeb$ przedstawiają wprost momenty w odnośnych punktach belki. Powierzchnię, utworzoną tymi odcinkami, $acdgeb$ nazywamy powierzchnią momentów (n. *Momentenfläche*, fr. *surface représentative des moments*, r. *площадь моментов*), gdyż ona okazuje wielkość momentów wzdłuż całej belki przy danem obciążeniu. Ponieważ siły, po lewej stronie przekroju C działające (wraz z oddziaływaniem), starają się belkę tem bardziej zgiąć, im większy ich moment ze względu na punkt C , przeto nazywamy w tym wypadku moment statyczny tych sił także momentem zginającym (n. *Biegunungsmoment*, fr. *moment fléchissant*, an. *bending moment*, cz. *moment ohybu*, r. *момент изгиба*).

Jeżeli dla punktu C utworzymy wypadkową wszystkich sił, po lewej stronie przekroju działających, (wraz z oddziaływaniem) i rozłożymy ją na dwie składowe, jedną prostopadłą do osi w punkcie C , a drugą, działającą w kierunku osi, to składową, prostopadłą do osi w punkcie C , nazywamy siłą poprzeczną (n. *Querkraft*, *Scherkraft*, fr. *effort tranchant*, an. *shearing force*, cz. *сила pŕična*, *posuwajica*, r. *поперечная сила*), bo ona stara się ściąć belkę w kierunku poprzecznym t. j. prostopadłym do osi. Dla belki prostej poziomej i obciążenia pionowego siłą poprzeczną jest suma wszystkich sił, po lewej stronie przekroju działających. Siłę poprzeczną nazywamy dodatnią (n. *positiv*, fr. *positif*, an. *positive*), jeżeli działa w kierunku z dołu do góry na lewą część dźwigaru, w przeciwnym zaś razie ujemną (n. *negativ*, fr. *negatif*, an. *negative*). Oznaczając Q siłę poprzeczną w punkcie C , otrzymamy $Q=O_1-P_1-P_2$, a więc

$Q = m0 - 01 - 12 = m2$. Punkty te m i 2 możemy też otrzymać, poprowadziwszy z bieguna O Om i $O2$, równoległe do przeciętych boków wieloboku sznurowego ab i de . A zatem dla otrzymania siły poprzecznej w danym punkcie C , kreślimy promienie równoległe do boków wieloboku sznurowego, przeciętych pionową przez C , a odcinek $m2$ na wieloboku sił przedstawia siłę poprzeczną. Poprowadziwszy linie poziome z punktów m i 2 , otrzymamy $pr = m2 = Q$.

Jeżeli to samo uczynimy dla innych punktów, t. j. poprowadzimy z punktu m i z punktów $0, 1, 2$ i 3 poziome, otrzymamy linią schodkową, z której widzimy, że siła poprzeczna zmienia się tylko w punkcie, gdzie działa jaka siła, a między dwiema siłami jest stałą.

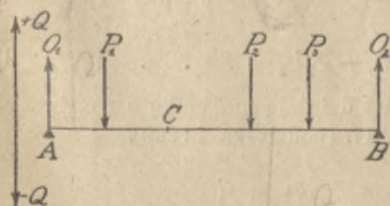
Z rysunku widzimy, że siła poprzeczna zmienia swój znak, a więc tutaj staje się ujemną, pod ciężarem, w obrębie którego leży punkt m . A zatem chcąc wyznaczyć ciężar, pod którym siła poprzeczna zmienia swój znak, należy wykreślić promień Om równoległy do zamykającej. Ciężar, który w wieloboku sił przetnie ten promień, jest ciężarem szukanym. Położenie siły poprzecznej znajdziemy, przedłużając przecięty bok wieloboku sznurowego i zamykającą w punkcie n .

Przykład. Rysunek 14. przedstawia belkę prostą AB o rozpiętości $21,5$ m, na którą działają siły $P_1=9t$, $P_2=9t$, $P_3=7,5t$ w punktach E, F i G . Przyjęliśmy przytem następane podziałki: dla długości $1:500$ czyli $\frac{1 \text{ mm}}{0,5 \text{ m}}$, dla sił $\frac{1 \text{ mm}}{1 t} = \frac{1 \text{ cm}}{10 t}$. Odległość biegunowa $h=20$ mm, więc jako siła uważana, oznacza $20t$; podziałkę dla momentów, wyrażonych odcinkami y , znajdziemy teraz, zmniejszając podziałkę długości w stosunku $1:20$, więc $\frac{1 \text{ mm}}{0,5 \times 20 \text{ tm}} = \frac{1 \text{ mm}}{10 \text{ tm}}$. Dla punktu C otrzymamy z rysunku jako moment

$fg=8$ mm czyli według podziałki momentów 80 tm. Siłę poprzeczną w C przedstawia rzędna pr , więc $Q=-3t$.

Jeżeli wszystkie siły, działające po lewej stronie danego przekroju C (rys. 15.), złożymy w wypadkową Q , to wypadkowa wszystkich sił po prawej stronie przekroju musi być $-Q$,

bo wedle §. 5. suma wszystkich sił pionowych musi być równą zeru. Siła poprzeczna w punkcie C , jest zatem równa wypad-



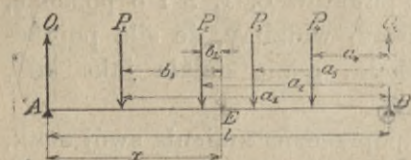
Rys. 15.

kowej wszystkich sił, po lewej stronie przekroju działających, lub też wypadkowej wszystkich sił, po prawej stronie działających, z odmiennym znakiem. Czasem, jeśli np. po prawej stronie mamy tylko jedną siłę, korzystamy z tego ostatniego twierdzenia.

Ponieważ siły O_1 , P_1 , P_2 , P_3 i O_2 , a zatem i siły Q i $-Q$ są w równowadze, więc obie siły Q muszą mieć to samo położenie.

§. 9. Analityczne wyznaczenie sił poprzecznych i momentów.

Jeżeli siły P_1 , P_2 , P_3 i P_4 działają na belkę AB (rys. 16.), a ich odległości od podpory B nazwiemy a_1 , a_2 , a_3 i a_4 , to



Rys. 16.

otrzymamy oddziaływanie O_1 , wyznaczając sumę momentów około punktu B , która dla równowagi ma być równą zeru. Gdyby bowiem suma momentów wszystkich sił, działających na belkę, nie

była równa zeru, to wypadkowy moment sprawiłby obrót belki, co się sprzeciwia założeniu. A zatem:

$$O_1 l - P_1 a_1 - P_2 a_2 - P_3 a_3 - P_4 a_4 = 0,$$

$$\text{a stąd } O_1 = P_1 \frac{a_1}{l} + P_2 \frac{a_2}{l} + P_3 \frac{a_3}{l} + P_4 \frac{a_4}{l} \quad \dots \quad 6)$$

a że suma sił pionowych według §. 5. ma być równą zeru, więc

$$O_2 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - O_1 \quad \dots \quad 7)$$

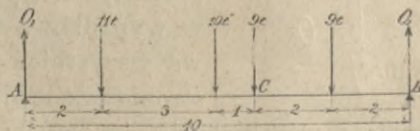
Siłę poprzeczną Q w punkcie E otrzymamy, tworząc sumę sił, po lewej stronie punktu E działających, więc:

$$Q = O_1 - P_1 - P_2 \quad \dots \quad 8)$$

Nareszcie moment zginający uzyskamy, tworząc sumę momentów ze względu na punkt E sił, działających po lewej jego stronie. Zatem:

$$M = O_1 x - P_1 b_1 - P_2 b_2 \quad \dots \quad 9)$$

Przykład. Niechaj siły 11, 10, 9 i 9 t działają na belkę o rozpiętości 10 m w punktach, oznaczonych na rys. 17. (podziałka 1:200).



Rys. 17.

Według równania 6) mamy:

$$O_1 = \frac{1}{10}(11 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 2) = 19,2 \text{ t.}$$

$$O_2 = (11 + 10 + 9 + 9) - 19,2 = 39 - 19,2 = 19,8 \text{ t.}$$

Siła poprzeczna według równania 8) w punkcie *C* po lewej stronie punktu zaczepienia siły 9 jest:

$$Q = 19,2 - 11 - 10 = -1,8 \text{ t.}$$

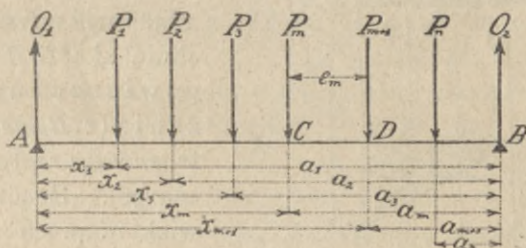
po prawej stronie punktu zaczepienia siły 9 mamy:

$$Q = 19,2 - 11 - 10 - 9 = -10,8 \text{ t.}$$

A zatem siła poprzeczna zmienia się w punkcie *C* o 9 t. — Nareszcie otrzymamy moment w punkcie *C* według równania 9):

$$M = 19,2 \times 6 - 11 \times 4 - 10 \times 1 = 115,2 - 54 = 61,2 \text{ tm.}$$

Jeżeli na belkę *AB* (rys. 18.) działają siły $P_1, P_2, P_3, P_m, P_{m+1}, P_n$, to momenty w punktach zaczepienia sił dadzą się jeszcze wyznaczyć w inny sposób, wskazany przez *Pelletreau* *).



Rys. 18.

Wedle rów. 6) $O_1 = \frac{1}{l} \sum Pa$, a moment w punkcie *C*

$$M_m = O_1 x_m - \sum_{m-1}^1 P(a - a_m).$$

Podobnie otrzymamy dla punktu *D*

$$M_{m+1} = O_1 x_{m+1} - \sum_m^1 P(a - a_{m+1}).$$

A stąd

$$M_{m+1} - M_m = O_1(x_{m+1} - x_m) - (a_m - a_{m+1}) \sum_m^1 P$$

$$\text{albo } \Delta M = M_{m+1} - M_m = e_m (O_1 - \sum_m^1 P)$$

a że $O_1 - \sum_m^1 P = Q_m$, więc

$$\Delta M = e_m Q_m \dots \dots \dots 10)$$

A zatem różnica momentów w dwóch po sobie następujących punktach zaczepienia sił równa się odstępowi tych sił, pomnożonemu przez siłę poprzeczną.

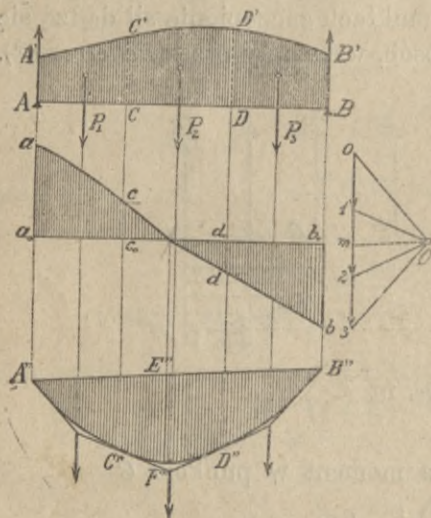
*) *Ann. des ponts et chaus.* 1887.

Przykład. Chcąc wyznaczyć moment w punkcie D (rys. 17.), otrzymamy $\Delta M = 2 \times -10,8 = -21,6 \text{ tm}$, a że w C moment $M = 61,2 \text{ tm}$, więc w D $M_1 = 61,2 - 21,6 = 39,6 \text{ tm}$. Moment w D możemy jeszcze inaczej wyznaczyć, mianowicie $M_1 = O_2 \cdot 2 = 19,8 \times 2 = 39,6 \text{ tm}$.

§. 10. Dowolne obciążenie ciągłe.

Na belkę AB , podpartą w dwu punktach, (rys. 19.) działa ciężar proporcjonalny do powierzchni kreskowej. Ciężar taki nie działający w jednym punkcie, lecz rozłożony na części belki lub też na całej belce, nazywamy obciążeniem ciągłym

(n. *stetige Belastung*, fr. *charge répartie, continue*, an. *distributed load*, cz. *obciążeni spojite*, r. *распределённый груз*). Powierzchnię $AA'B'B$ nazywamy powierzchnią obciążenia (n. *Belastungsfläche*, fr. *surface représentative de charge*). Rzędna jakakolwiek n. p. CC' , pomnożona przez dx , przedstawia wtedy ciężar na długości dx albo, gdy w myśli przyjmiemy ciężar na jednostce długości stały i taki sam, jak w punkcie C , przedstawia rzędna CC' ciężar na jednostkę dłu-



Rys. 19.

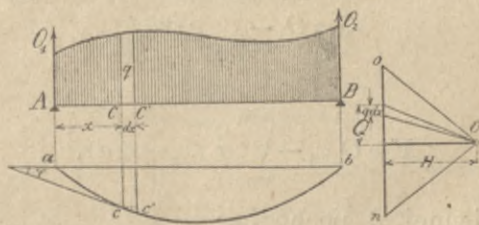
gości czyli ciężar jednostkowy (n. *Belastung für die Längeneinheit*, cz. *poměrne obciążeni*).

Gdybyśmy podzielili powierzchnię obciążenia na niezliczoną ilość pasków, to moglibyśmy uważać je jako ciężary skupione (n. *Einzellast, konzentrirte Last*, fr. *poids concentré*, r. *концентрированный груз*), działające w środkach ciężkości pasków. Postępując dalej w znany sposób, otrzymalibyśmy wielobok sznurowy o bokach nieskończenie małych, a zatem widzimy, że wielobok sznurowy zamienia się tu na krzywą sznurową (n. *Seilcurve*, fr. *courbe funiculaire*, cz. *křivka vý-*

slednie). Ponieważ jednak nie możemy działać nieskończoną ilością sił, więc podzielmy powierzchnię obciążenia na mniejszą ilość pasków, tu n. p. na trzy paski, pionowemi CC' i DD' ; oznaczymy powierzchnie tych pasków i proporcjonalne do nich ciężary P_1 , P_2 i P_3 , które zaczepiają w środku ciężkości pasków. Mamy więc tu trzy siły, dla których wykreślamy wielobok sił i wielobok sznurowy w znany sposób. Przedłużenia stycznych krzywej sznurowej w dwu punktach przecinają się, jak wiemy, w prostej, wyznaczającej kierunek wypadkowej, a więc styczne punktów linii sznurowej, odpowiadających punktom podziału A , C , D , B , przecinają się w pionowych, poprowadzonych przez środki ciężkości odnośnych pasków. Widzimy więc, że boki wieloboku sznurowego są stycznymi do linii sznurowej i że punkty styczności znajdują się w pionowych, przechodzących przez linie podziału. Otrzymawszy w ten sposób dostateczną ilość stycznych i punktów styczności, możemy wykreślić linię sznurową $A''C''D''B''$.

Podobnie otrzymamy i siły poprzeczne. W punkcie A siła poprzeczna równa się oddziaływaniu $O_1 = a_0 a$, w punkcie C $Q = O_1 - P_1 = m_0 - 0_1 = m_1 = c_0 c$. W podobny sposób otrzymamy punkty d i b , a wszystkie łączymy linią krzywą. Im więcej tych punktów wyznaczymy, tem dokładniej możemy wykreślić linię sił poprzecznych.

Równanie linii sznurowej da się w następujący sposób wyznaczyć.



Rys. 20.

W punkcie C (rys. 20.) nazwijmy rzędną linii sznurowej y , to styczna do linii sznurowej w tym punkcie nachylona jest do poziomu pod kątem φ , a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}$$

Dalej mamy
$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = d\left(\frac{Q}{H}\right) = \frac{dQ}{H},$$

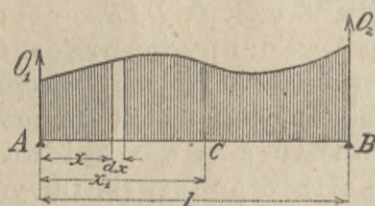
bo H jest stałym, a $dQ = -q dx$, więc

$$H d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -q dx, \text{ czyli}$$

$$H \frac{dy}{dx} = -q \quad \dots \quad 11)$$

Jest to równanie różniczkowe linii sznurowej.

Dla obciążenia ciągłego dowolnego da się także analitycznie



Rys. 21.

dowieść ważne twierdzenie, podane przez Schwedlera. Dla dowolnego obciążenia ciągłego belki AB (rys. 21.) wyznaczmy w powyższy sposób, lub też analitycznie, oddziaływania. Jeżeli

$q = f(x)$ oznacza ciężar jednostkowy, to oddziaływanie O_1 otrzymamy według 6), uważając element $q dx$ jako siłę skupioną,

$$O_1 = \frac{1}{l} \int_0^l q(l-x) dx \quad \dots \quad 12)$$

Wyznamy teraz dla punktu C w odległości x_1 od lewej podpory siłę poprzeczną i moment według 8) i 9), a otrzymamy

$$Q = O_1 - \int_0^{x_1} q dx, \quad \dots \quad 13)$$

zaś

$$M = O_1 x_1 - \int_0^{x_1} q(x_1 - x) dx,$$

a stąd dla zmiennej x_1 pochodną:

$$\frac{dM}{dx_1} = O_1 - \int_0^{x_1} q dx = Q \quad \dots \quad 14)$$

Widzimy zatem, że dla dowolnego obciążenia ciągłego siła poprzeczna w każdym punkcie belki jest pochodną momentu. Z tego wynika bezpośrednio, że

największość (maximum) momentów jest w tym punkcie, gdzie $Q=0$ (rys. 19.).

Z rów. 13) wynika dalej

$$\frac{dQ}{dx} = -q,$$

a zatem

$$q = -\frac{dQ}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2} \dots \dots \dots 15)$$

Stąd widzimy, że obciążenie jednostkowe jest pierwszą pochodną siły poprzecznej a drugą pochodną momentu.

§. 11. Obciążenie jednostajne zupełne.

Gdy ciężar jednostkowy jest stały, wtedy mamy obciążenie jednostajne (n. *gleichmässige Belastung*, fr. *charge uniformément répartie*, an. *uniform load*, cz. *obtížení rovnoměrné*, r. *равномерная нагрузка*).

Gdy ciężar jednostkowy jest między granicami x' i x_1 stały $=q_1$, to dla tej długości mamy z rów. 13)

$$Q = -q_1x_1 + C \text{ i } M = Cx_1 - \frac{q_1x_1^2}{2} + C_1 \dots \dots 16)$$

jeżeli C i C_1 oznaczają ilości stałe.

Z rów. 16) widzimy, że jeżeli belka jest na pewnej długości obciążoną jednostajnie, to na tej długości linia sił poprzecznych jest prostą a momentów parabolą.

Jeżeli w rów. 11) q jest stałym, to

$$H \frac{dy}{dx} = -qx + C_1, \text{ a}$$

$$Hy = -q \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

zatem krzywa sznurowa jest na tej długości parabolą.

Jeżeli w rów. 16) zrobimy $q_1=0$, to $Q_1=C$, $M=Cx+C_1$, a zatem jeżeli belka na pewnej długości nie jest wcale obciążoną, to na tej długości linia sił poprzecznych jest równoległą do osi, a linia momentów prostą.

Jeżeli przytem cała belka jest obciążoną, wtedy obciążenie nazywamy jednostajnem zupełnem (n. *totale gleichmässige Belastung*, an. *total uniform load*, r. *полная равно-*

мырная нагрузка) i wtedy poprzednie wzory bardzo się upraszczają.

a) Liczebnie. Ponieważ przy obciążeniu jednostajnym zupełnem belka jest symetrycznie obciążona (rys. 22.), więc dla obciążenia jednostkowego g

$$O_1 = O_2 = \frac{1}{2} g l \quad \dots \quad (17)$$

Silę poprzeczną Q dla dowolnego punktu C otrzymamy:

$$Q = O_1 - gx = \frac{1}{2} gl - gx = \frac{1}{2} g (1 - 2x) \quad \dots \quad (18)$$

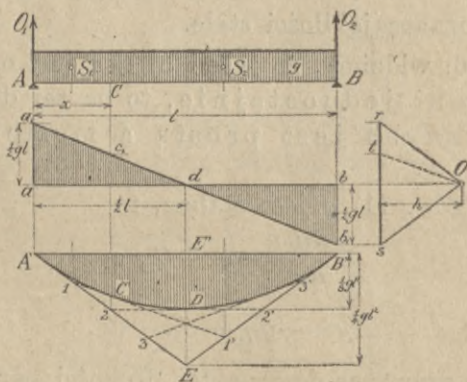
Moment w punkcie C będzie:

$$M = O_1 x - gx \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} glx - \frac{1}{2} gx^2 = \frac{1}{2} gx (1 - x) \quad \dots \quad (19)$$

Równanie 18) jest równaniem linii prostej, a mianowicie otrzymamy:

$$\begin{aligned} \text{dla } x=0 \quad Q &= \frac{1}{2} gl, \\ \text{„ } x=\frac{1}{2} l \quad Q &= 0, \\ \text{„ } x=l \quad Q &= -\frac{1}{2} gl. \end{aligned}$$

Linie sił poprzecznych otrzymamy więc, wykreśliwszy $aa_1 = bb_1 = \frac{1}{2} gl$ i połączywszy punkty a_1 i b_1 . Prosta ta przecina oś w połowie rozpiętości.



Rys. 22.

Równanie 19) dla momentów jest drugiego stopnia i przedstawia parabolę o osi pionowej, przechodzącej przez środek belki. Z równania tego otrzymamy dla $x=0$ $M=0$, dla $x=l$ $M=0$. Chcąc wyznaczyć największy moment, szukajmy, dla którego punktu będzie $Q=0$.

Z rów. 18) widzimy, że $Q=0$ dla $x=\frac{1}{2}l$, a stąd odcinek, dla którego moment jest największością, jest

$$x=\frac{1}{2}l, \text{ a najw } M=\frac{1}{8}gl^2 \quad \dots \quad 20)$$

b) Wykreślnie. Możemy tu postępować według ogólnej metody; jednak wiedząc, że linia sił poprzecznych jest prostą, a linia momentów parabolą, możemy obie te linie bardzo łatwo wykreślić w inny sposób. O linii sił poprzecznych mówiliśmy już powyżej; aby wykreślić linię momentów, kreślimy wielobok sił, robiąc $rs=gl$ i prowadzimy promienie skrajne. Chcąc wykreślić wielobok sznurowy, prowadzimy równoległe do tych promieni $A'E \parallel rO$ i $B'E \parallel Os$. Są to styczne paraboli, którą wyznaczymy najłatwiej następnym znanym sposobem. Dzielimy obie styczne na równą ilość części (tu na 4) i łączymy punkty podziału, równemi oznaczone liczbami. Proste te są stycznymi do paraboli, a punkty styczności mają odcinki dwa razy większe, niż lewy punkt podziału.

Konstrukcya ta da się zresztą łatwo uzasadnić. Pomyślimy bowiem, żeśmy całe obciążenie belki podzielili na dwie części linią pionową, poprowadzoną przez punkt C . Chcąc wykreślić wielobok sznurowy, styczny do linii sznurowej, szukamy środków ciężkości. Widzimy na rysunku, że jeżeli punktowi C odpowiada punkt podziału 2, to środkowi ciężkości S_1 powierzchni obciążenia na długości AC punkt 1, a odnośnemu punktowi S_2 dla długości CB punkt 1'. Styczny wielobok sznurowy będzie wtedy $A'11'B'$, bo w czworoboku tym znamy już z poprzedniego boki $A'1$, $1'B'$, $B'A'$. Czwarty bok ma być równoległy do Ot i przecinać się z bokami sąsiednimi na pionowych przez S_1 i S_2 , musi to więc być prosta $11'$. A zatem prosta $11'$ jest styczną do paraboli w punkcie C' .

Parabolę momentów możemy jednak wykreślić nawet bez wieloboku sił, gdyż opierając się na znanej własności paraboli i rów. 20), wiemy, że $EE' = 2E'D = 2\frac{1}{8}gl^2 = \frac{1}{4}gl^2$. Zrobiwszy więc $EE' = \frac{1}{4}gl^2$, mamy punkt E , kreślimy styczne $A'E$ i $B'E$ i postępujemy dalej, jak wyżej.

Przykład. Obliczyć najw. M i najw. Q dla belek stropowych ($l=4\text{ m}$), umieszczonych w odstępach $1:10\text{ m}$, o obciążeniu 500 kg/m^2 .

Obciążenie na 1 mb będzie $g=1\cdot10 \times 1\cdot00 \times 500=550\text{ kg}$. Według rów. 20):
 Najw. $M=\frac{1}{8} 550 \times 400^2=11000000\text{ kgcm}$. Według równania 18): Największe $Q=\frac{1}{2} 550 \times 400=110000\text{ kg}$.

§. 12. Jednostajne obciążenie częściowe.

Jeżeli belka AB obciążoną jest jednostajnie tylko na długości $AC=x$ (rys. 23.), postępujemy według metody ogólnej i za pomocą wieloboku sił i wieloboku sznurowego otrzymujemy dwie styczne ad' i $d'b$. Na długości $AC=x$ otrzymujemy parabolę adc , a na długości nieobciążonej linia momentów cb jest prostą.

Liczebnie otrzymamy z równania 6) dla ciężaru jednostkowego p

$$O_1 = \frac{1}{l} px \left(l - \frac{x}{2} \right) = \frac{px(2l-x)}{2l},$$

dalej dla dowolnego punktu E między A i C

$$Q = O_1 - px_1 \quad \dots \quad 21)$$

$$M = O_1 x_1 - \frac{1}{2} px_1^2 \quad \dots \quad 22)$$

Równanie 21.) dla sił poprzecznych na długości obciążo-

nej jest równaniem prostej, a rów. 22.)

dla momentów równaniem paraboli.

Z rów. 21.) i 22.)

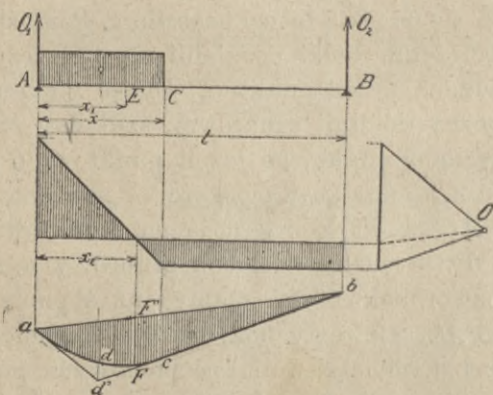
widzimy też, że

kąt nachylenia prostej sił poprzecznych i parametr

paraboli zależne są

tylko od ciężaru jednostkowego p ,

dla tego samego ciężaru jednostkowego p będzie więc



Rys. 23.

prosta sił poprzecznych tak samo do poziomu nachyloną i parametr paraboli będzie ten sam.

Dla punktu C jest $x_1=x$, więc z równania 21.) wynika, że

$$Q = \frac{px(2l-x)}{2l} - px = -\frac{px^2}{2l} \quad \dots \quad 23)$$

Największy moment jest w tem miejscu, gdzie $Q=0$; nazwijmy odnośny odcinek x_2 , to $\frac{px(2l-x)}{2l} - px_2=0$, a stąd $x_2 = \frac{x(2l-x)}{2l}$. Wstawiwszy to w równanie 22.), otrzymamy

$$\text{najw } M = \frac{px(2l-x)}{2l} \cdot \frac{x(2l-x)}{2l} - \frac{1}{2}p \frac{x^2(2l-x)^2}{4l^2}, \text{ czyli}$$

$$\text{najw } M = \frac{px^2(2l-x)^2}{8l^2} \dots \dots \dots 24)$$

Na rysunku 24. przedstawiliśmy momenty i siły poprzeczne dla przypadku, gdy długość CB jest jednostajnie obciążoną. Otrzymamy wtedy liczebnie w zupełnie ten sam sposób, co pierwiej, siłę poprzeczną w punkcie C

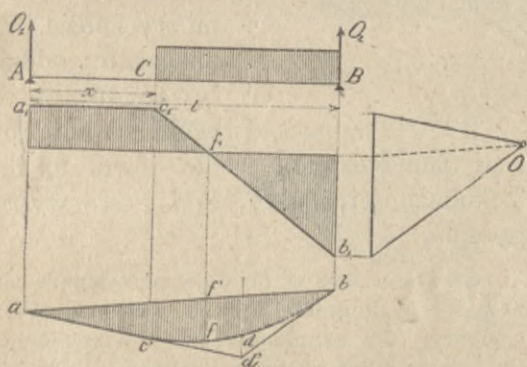
$$Q = + \frac{p(1-x)^2}{2l} \dots \dots \dots 25)$$

Największy moment ff' otrzymamy z rów. 24), wstawivszy $-x$ zamiast x , a więc

$$\text{najw } M = \frac{p}{8l^2}(l-x)^2(l+x)^2 = \frac{p(l^2-x^2)^2}{8l^2} \dots \dots 26)$$

Wartości, które otrzymujemy w punkcie C dla siły poprzecznej z równań 23) i 25) przy obciążeniu częściowym są większe, niż wartość, którą otrzymamy z równania 18) dla obciążenia zupełnego, jeżeli przytem przypuścimy $p=g$.

Przeciwnie momenty w każdym punkcie są największe dla obciążenia zupełnego, jak to widzimy z porównania równań 19) i 24).



Rys. 24.

dla obciążenia zupełnego, jak to widzimy z porównania równań 19) i 24).

Przykład. Obliczyć najw. M i najw. Q dla belek stropowych o rozpiętości 5 m odstępach 1,20 m, obciążeniu jednostajnym na długości 2 m od lewej podpory 450 kg/m² (rys. 23). Obciążenie na 1 mb będzie:

$$p = 1,20 \times 1,00 \times 450 = 540 \text{ kg/m} = 0,54 \text{ t/m.}$$

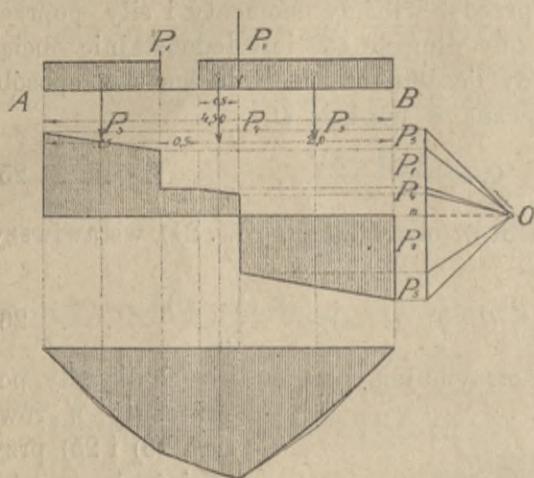
Według równania (24):

$$\text{najw } M = \frac{0,54 \times 2^2 (2,5-2)^2}{8 \times 5^2} = -0,691 \text{ tm,}$$

$$\text{najw } Q = Q_1 = \frac{2 \cdot 0,54 (5-1)}{5} = 0,864 \text{ t.}$$

§. 13. Obciążenie ciągłe i ciężarami skupionymi.

Jeżeli na belce znajdują się oprócz obciążenia ciągłego także ciężary skupione (rys. 25.), postępujemy wedle sposobu ogólnego. Zaczepiamy w środkach ciężkości powierzchni obciążenia ciągłego siły P_3, P_4 i P_5 , kreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy, w który wkreślamy krzywą sznurową, pamiętając, że części poszczególne krzywej są tu parabolami, a punkty podziału są punktami styczności. Wyznaczenie oddziaływań nastąpi liczebnie wedle równ.



Rys. 25.

6) i 7), momentów i sił poprzecznych wedle równ. 9) i 8) z uwzględnieniem tej okoliczności, że P_3, P_4 i P_5 są wypadkowymi obciążenia ciągłego.

Przykład. Na belkę o rozpiętości 4,50 m działają następujące siły. Obciążenie jednostajne 300 kg/m na długości 1,5 m od lewej podpory na długości 2,5 m od prawej podpory. Siły skupione $P_1=1$ w odstępnie 1,5 m od lewej podpory i $P_2=2$ t w odstępnie 2 m od prawej podpory. Wyznaczyć najw. M i najw. Q . Tu jest $P_3=0,45$ t, $P_4=0,15$ t, $P_5=0,6$ t.

Oddziaływanie wyznaczmy z równań:

$$O_1 = (0,45 \cdot 3,75 + 1 \cdot 3 + 0,15 \cdot 2,25 + 2 \cdot 2 + 0,6 \cdot 1) : 4,5 = 2,19 \text{ t}$$

Siła poprzeczna będzie w odstępnie $x=1,5$ $Q=2,19-0,46=1,74$ t

po prawej stronie P_1 $Q=1,74-1=0,74$ t

dla $x=2$ m $Q=0,74$ t

dla $x=2,5$ m $Q=0,74-0,15=0,59$ t

po prawej stronie P_2 $Q=0,59-2=-1,41$

na prawej podporze $Q=-1,41-0,6=-2,01$.

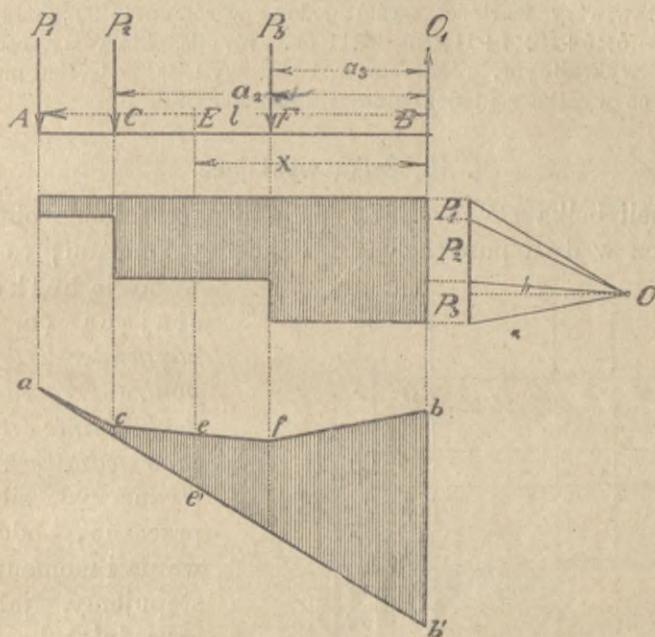
Największy moment jest tam, gdzie $Q=0$, a więc w punkcie zaczepienia siły P_2

$$\text{najw } M = 2,19 \times 2,5 - 0,45 \cdot 1,75 - 1 \cdot 1 - 0,15 \cdot 0,25 = 3,65 \text{ tm,}$$

Na rysunku otrzymujemy dla podziałek $\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$ i $\frac{1 \text{ cm}}{2 \text{ t}}$, $O_1 = 2 \cdot 2$, odległość biegunowa $b = 2,05$ t, najw $M = 3,5$ tm.

§. 14. Belka jednym końcem utwierdzona.

Belka AB (rys. 26.), jednym końcem utwierdzona, obciążoną jest ciężarami skupionymi P_1 , P_2 i P_3 . Chcąc wyznaczyć momenty i siły poprzeczne, wykreślamy, jak zwykle, wielobok sił i wielobok sznurowy $acfb$. Aby otrzymać powierzchnię momentów, musimy na zasadzie §.7. przedłużyć pierwszy i ostatni bok wieloboku sznurowego aż do pionowej przez B . Tu więc



Rys. 26.

nie mamy zamykającej w tem znaczeniu, co dla belki w dwu punktach podpartej. Moment w punkcie E przedstawia wtedy odcinek ee' między przedłużeniem pierwszego boku ab' a wielobokiem sznurowym, pomnożony przez odległość biegunową h . Największy moment otrzymamy dla punktu B .

W rysunku przyjęliśmy stosunek podziałek $\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$ i $\frac{1 \text{ mm}}{2 \text{ t}}$, dalej $P_1=5 \text{ t}$, $P_2=16 \text{ t}$, $P_3=11 \text{ t}$; $l=5 \text{ m}$, $a_2=4 \text{ m}$, $a_3=2 \text{ m}$, $h=40 \text{ t}$.

Z konstrukcyi otrzymaliśmy $bb'=2,8 \text{ m}$, więc

$$\text{najw } M = -bb' \cdot h = -2,8 \cdot 40 = -112 \text{ tm.}$$

Zamiast mnożyć przez h mogliśmy wyznaczyć podziałkę momentów, mianowicie $\frac{1 \text{ cm}}{1,40 \text{ tm}} = \frac{1 \text{ mm}}{4 \text{ tm}}$. Wedle tej podziałki odczytamy moment w B $M = -112 \text{ tm}$.

Liczebnie otrzymamy:

$$O_1 = P_1 + P_2 + P_3, \quad \dots \quad (27)$$

dalej dla punktu E

$$Q = -P_1 - P_2, \quad \dots \quad (28)$$

$$M = -P_1(1-x) - P_2(a_2-x) \quad \dots \quad (29)$$

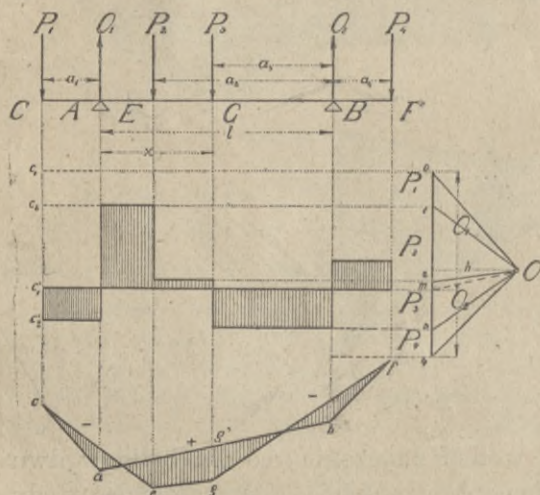
Dla $x=0$, więc dla punktu B , otrzymamy

$$\text{najw } M = -P_1 l - P_2 a_2 - P_3 a_3 \quad \dots \quad (30)$$

Wstawiwszy wartości wyżej podane w równanie 30), otrzymamy *najw* $M = -(5 \times 5 + 16 \times 4 + 11 \times 2) = -111 \text{ tm}$. Wynik, któryśmy otrzymali sposobem wykreślnym, różni się o 1 tm , czyli w podziałce momentu o $\frac{1}{4} \text{ mm}$, co wynika z niedokładności konstrukcyi.

§. 15. Belka wystająca.

Jeżeli belka CF (rys. 27.) podpartą jest nie na obu końcach, lecz w dwu punktach A i B między końcami, to nazywamy ją belką wystającą (n. *überhängender Träger*, fr. *poutre reposant en deux points d'appui intermédiaires*).



Rys. 27.

Chcąc wyznaczyć siły poprzeczne, oddziaływania i momenty, postępujemy, jak poprzednio; kreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy $acegfb$, boki pierwszy ac i ostatni bf przedłużamy aż do przecięcia się z pionowemi podporowemi i punkty przecięcia się a i b łączymy prostą zamykającą ab . Promień $Om \parallel ab$ dzieli długość Oa na dwie części i otrzymujemy $4 m = O_2$, $mO = O_1$.

Na rysunku przyjęliśmy stosunek podziałek $\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$ i $\frac{1 \text{ mm}}{1 \text{ t}}$, dalej $l = 3 \text{ m}$, $a_1 = 0,75 \text{ m}$, $a_2 = 2,3 \text{ m}$, $a_3 = 1,55 \text{ m}$, $a_4 = 0,75 \text{ m}$, $P_1 = 4,5 \text{ t}$, $P_2 = 8 \text{ t}$, $P_3 = 6 \text{ t}$, $P_4 = 3,66 \text{ t}$, $h = 11 \text{ t}$. Otrzymaliśmy $O_1 = 13,77 \text{ t}$, a moment w G $M = gg' \cdot h = = 0,45 \times 11 = 4,95 \text{ tm}$.

Siły poprzeczne wykreślimy, jak poprzednio, tworząc wykres sumę wszystkich sił po lewej stronie przekroju. Chcąc sprowadzić wszystkie siły poprzeczne do jednej osi, zrobimy $e'_1 e'_2 = e_1 e_2$ i zamiast linii kreskowanej poprowadzimy z e'_2 poziomą.

Liczebnie wyznaczymy oddziaływanie O_1 , robiąc sumę momentów około punktu B równą zeru, więc

$$-P_1(a_1+l) + O_1 l - P_2 a_2 - P_3 a_3 + P_4 a_4 = 0,$$

$$\text{zatem } O_1 = \frac{1}{l} [P_1(a_1+l) + P_2 a_2 + P_3 a_3 - P_4 a_4] \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

Znając oddziaływanie, łatwo obliczymy siły poprzeczne i momenty.

Dla naszego przykładu otrzymamy po wstawieniu wartości

$$O_1 = \frac{1}{2} [4,5(0,75+3) + 8 \times 2,3 + 6 \times 1,55 - 3,66 \times 0,75] = 13,94 \text{ t.}$$

Dla punktu G otrzymamy teraz

$$Q = -P_1 + O_1 - P_2 = -4,5 + 13,94 - 8 = +1,44 \text{ t,}$$

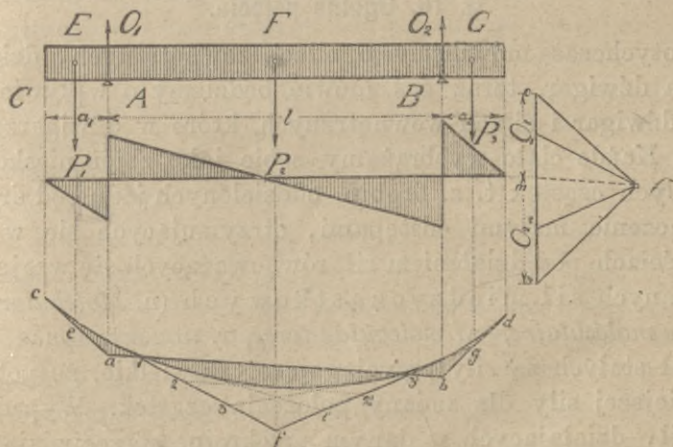
albo, gdy przyjmujemy, że P_3 działa po lewej stronie przekroju,

$$Q = -P_1 + O_1 - P_2 - P_3 = -4,56 \text{ t.}$$

Dalej mamy

$$M = -4,5(0,75+1,45) + 13,94,57 \times 1,45 - 8 \times (2,3 - 1,55) = 4,80 \text{ t.}$$

Jeżeli belka wystająca obciążoną jest ciężarem ciągłym jednostajnym, postępujemy w ten sam sposób. Dzielimy powierzchnię obciążenia na paski, z ich środków ciężkości spu-



Rys. 28.

szczamy pionowe (rys. 28.), kreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy $cefgd$. Styczne końcowe w c i d , równoległe do promieni skrajnych, przedłużamy aż do pionowych podporowych,

punkty przecięcia się a i b łączymy zamykającą. Wykreśliwszy teraz z danych stycznych linię sznurową, która, jak wiemy, jest dla obciążenia jednostajnego parabolą, otrzymujemy powierzchnię momentów w części dodatnią a w części ujemną. Wykreśliwszy $Om \parallel ab$, otrzymamy oddziaływania $\Sigma m = O_2$ i $mO = O_1$, a stąd łatwo siły poprzeczne.

Liczebnie wyznaczymy oddziaływania, robiąc sumę momentów około punktu B równą zeru. A więc dla obciążenia jednostkowego g

$$-ga_1 \left(l + \frac{a_1}{2} \right) + O_1 l - \frac{1}{2} gl^2 + \frac{1}{2} ga_2^2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$O_1 = ga_1 \left(1 + \frac{a_1}{2l} \right) + \frac{1}{2} gl - \frac{1}{2} ga_2 \frac{a_2}{l} \quad \quad 32)$$

Znając oddziaływania, obliczymy łatwo momenty i siły poprzeczne w zwykły sposób.

B. Wytrzymałość zeskładów drewnianych i żelaznych.

III. Wytrzymałość na wyciąganie i ściskanie.

§. 16. Ogólne pojęcia.

Dotychczas mówiliśmy o siłach zewnętrznych, działających na dźwigar, teraz zaś mówić będziemy o wpływie tych sił na dźwigar i siłach wewnętrznych, które w dźwigarze wywołują. Każde ciało wyobrażamy sobie jako zbiór nieskończenie małych cząstek t. z. drobin, oddzielonych jedne od drugich nieskończenie małymi odstępami, utrzymujących się w tych odległościach pod działaniem sił, równoważących się wzajemnie, tak zwanych sił międzycząstkowych (n. *Molekularkraft*, fr. *force moléculaire*, a. *molecular force*, r. молекулярная сила). Dla ciał stałych są siły przyciągające tak wielkie, że potrzeba znaczniejszej siły dla zmiany położenia cząstek. Wypadkowa tych sił, działających w danym przekroju, sprzeciwiająca się przesunięciu drobin, zależną jest od materiału. Własność tę ciał stałych nazywamy spójnością (n. *Cohäsion*, fr. *cohésion*).

Siły zewnętrzne, działające na belkę, sprawiają zmianę kształtu i wymiarów belki czyli odkształcenia (n. *Formänderung*, *Deformation*, fr. *déformation*, r. деформация), które

po ustaniu działania sił zewnętrznych znika całkowicie lub częściowo. Tę własność ciała, która sprawia, że drobiny wracają do pierwotnego położenia po ustaniu działania sił zewnętrznych, nazywamy sprężystością (n. *Elasticität*, fr. *élasticité*, an. *elasticity*, r. упругость).

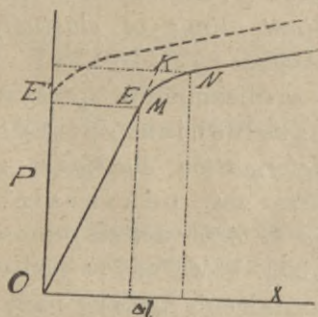
Wszystkie ciała stałe są mniej lub więcej sprężyste; u drzewa odkształcenia są stosunkowo większe, u kruszców zaś bardzo małe. Jeżeli po ustaniu działania sił zewnętrznych ciało przybiera zupełnie pierwotny kształt, to nazywamy je zupełnie sprężystem (n. *vollkommen elastisch*, fr. *parfaitement élastique*, an. *perfectly elastic*), jeżeli zaś odkształcenie nie znika zupełnie, nazywamy je niezupełnie sprężystem (n. *unvollkommen elastisch*, fr. *semi-élastique*). Wszystkie ciała są dla małych obciążeń aż do pewnej granicy zupełnie sprężyste, dla większych obciążeń stają się te ciała niezupełnie sprężystemi. Granicę tę nazywamy granicą sprężystości (n. *Elasticitätsgrenze*, fr. *limite de l'élasticité*, an. *elastic limit*, *limit of elasticity*, r. предѣль упру́гости).

Po jej przekroczeniu ciała te są niezupełnie sprężystemi; część odkształcenia, nazwana odkształceniem sprężystem (n. *elastische Formänderung*, fr. *déformation élastique*) znika po ustaniu sił zewnętrznych, reszta zaś, odkształcenie trwałe (n. *bleibende Formänderung*, fr. *déformation permanente*, an. *permanent set*), pozostaje. Są ciała, które nawet pod wpływem małych sił okazują tylko odkształcenie trwałe, nazywają się one wtedy plastycznymi (n. *plastisch*, *bildsam*, fr. *plastique*, a. *plastic*, r. пластичный).

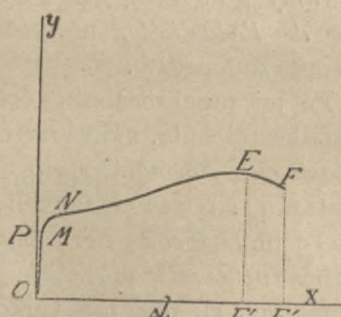
Granica sprężystości wedle powyższego określenia byłaby jednak bardzo nieoznaczoną, bo dokładniejsze przyrządy, zwłaszcza Bauschingera i Martensa przyrząd zwierciadlany, pozwalający odczytywać 0.0001 mm, udowodniły, że prawie wszystkie materiały wykazują przy miernych nawet obciążeniach już odkształcenie trwałe, chociaż nadzwyczaj małe. W przyrodzie niema ciał ani zupełnie sprężystych ani zupełnie plastycznych. Ale doświadczenia te wykazały też, że odkształcenia przy niektórych ważnych technicznie materiałach, jak żelazo spawane, stal, drzewo i innych, są do pewnej granicy proporcjonalne do obciążeń (rys. 29.). Granicę tę nazywamy granicą proporcjonalności (n. *Proportionalitätsgrenze*, fr. *limite d'allongement proportionnel*, r. предѣль пропорциональности). *

Na rys. 29. odcinamy przedłużenie względne Δl , wywołane obciążeniami P , które odcinamy na osi OY . Do punktu M , który tu jest granicą proporcjonalności, otrzymujemy wtedy linię prostą. Gdy obciążenie przekracza tę granicę, odkształcenia przestają być proporcjonalne do obciążeń, rosną mianowicie daleko szybciej, niż obciążenia, linia MN jest przytem styczną do OM . Odcinając także odkształcenia trwałe, otrzymamy drugą krzywą kreskowaną, która się zaczyna w E' . Ponieważ dla obciążeń poniżej granicy proporcjonalności odkształcenia trwałe są tak małe, że je w praktyce uważamy za nieistniejące, różnica między E i M jest bardzo mała, więc też zwykle przyjmujemy, że granica proporcjonalności spada z granicą sprężystości.

Po nagłym usunięciu sił zewnętrznych ciało powraca nagle do swego pierwotnego kształtu, ale wskutek bezwładności



Rys. 29.



Rys. 30.

odkształca się potem w przeciwną stronę i dopiero po kilku drganiach przechodzi w stan spoczynku. Każde nagłe działanie siły lub uderzenie wywołuje takie drgania.

Jeżeli siły zewnętrzne będą po przekroczeniu granicy sprężystości ciągle wzrastały, to po przekroczeniu pewnej granicy (punkt N wykresu) u niektórych materiałów odkształcenia nagle bardzo wzrastają i drobiny przedstawiają już mały opór przesunięciu, jak przy ciałach ciastowatych; bardzo małym obciążeniom odpowiadają wielkie przedłużenia. Granicę tę nazywamy granicą ciastowatości (n. *Fließgrenze*, *Streckgrenze*, fr. *limite de ductibilité*, a. *yield point*, r. начало течения). Przy dalszem wzrastaniu sił zewnętrznych nareszcie prze-

zwyciężą one spójność i nastąpi tak wielka zmiana położenia drobin, że siły międzycząsteczkowe przestają działać, nastąpi więc rozdzielenie drobin i pojedynczych części ciała, a więc przerwanie, zgniecenie lub złamanie, (n. *Bruch*, fr. *rupture*, an. *failure*) ciała. Całą spójność w tej chwili się objawiającą, a więc cały opór, jaki spójność stawia zmianie położenia drobin, nazywamy wytrzymałością (n. *Festigkeit*, fr. *résistance des matériaux*, an. *resistance*, *tenacity*, r. сопротивление).

Na rys. 30. przyjęliśmy dla Δl znacznie mniejszą podziałkę, niż w rys. 29., dlatego też prosta OM spada prawie z osią OY . Punkt N oznacza granicę ciastowatości, EE' przedstawia siłę, która sprawia już przerwanie, chociaż następuje ona nieco później przy FF' .

Ponieważ siły zewnętrzne działają w rozmaity sposób na dźwigar, więc też i wytrzymałość rozmaicie się objawia. Według tego rozróżniamy następujące rodzaje wytrzymałości:

a) wytrzymałość na wyciąganie, (n. *Zugfestigkeit*, fr. *résistance à la traction*, an. *resistance to stretching*, r. сопротивление на разрывъ), jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działa w kierunku osi dźwigaru, starając się przekroje prostopadłe do osi jedne od drugich oddalić;

b) wytrzymałość na ściskanie, (n. *Druckfestigkeit*, fr. *résistance à la compression*, an. *resistance to compression*, r. сопротивление сжатию), jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działa w kierunku osi dźwigaru, starając się przekroje prostopadłe do osi zbliżyć jedne do drugich.

Oba te rodzaje wytrzymałości nazywamy wytrzymałością bezwzględną (n. *absolute Festigkeit*). Dalsze rodzaje wytrzymałości są:

c) wytrzymałość na ścinanie (n. *Schubfestigkeit*, fr. *résistance à cisaillement*, an. *resistance to shearing*, r. сопротивление скалыванию), jeżeli wypadkowe siły zewnętrznych, działających w płaszczyźnie, przez oś położonej, po jednej i po drugiej stronie idealnego przekroju, prostopadłego do osi, starają się przesunąć przekroje, prostopadłe do osi, niezmieniając ich oddalenia;

d) wytrzymałość na zginanie (n. *Biegungsfestigkeit*, fr. *résistance à la flexion*, an. *resistance of flexure*, r. co-

противление изгибу), jeżeli na dźwigar działają siły prostopadłe do osi, starając się go wygiąć, i przekroje prostopadłe do osi tak obrócić, że ich odstęp w rozmaitych punktach jest różny;

e) wytrzymałość na wyboczenie (n. *Knickfestigkeit*, fr. *résistance au flambage*, an. *resistance of crippling*), jeżeli ciało o stosunkowo długiej osi pracuje na ściskanie, a przytem okazuje się wygięcie osi;

f) wytrzymałość na skręcanie (n. *Drehungsfestigkeit*, *Torsionsfestigkeit*, fr. *résistance à torsion*, r. сопротивление скручиванию), jeżeli siły zewnętrzne sprowadzają się do pary sił, działającej w przekroju prostopadłym do osi i dwa przekroje tak jeden względem drugiego skręcają, że ich odległość pozostaje niezmienną.

Często siły działają tak, że równocześnie pracuje belka w rozmaity sposób n. p. na ściskanie i zginanie, na zginanie i ścinanie. Opór, jaki wtedy stawia ciało rozdzielaniu drobin, nazywamy wytrzymałością złożoną (n. *zusammengesetzte Festigkeit*, fr. *résistance composée*).

W tym rozdziale będziemy mówić tylko o wytrzymałości na wyciąganie i ściskanie.

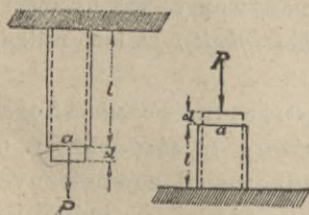
§. 17. Spółczynniki sprężystości.

Jeżeli na graniastosłup o długości l a przekroju F działa siła P (rys. 31.) w kierunku osi, to długość pierwotna l zmienia się o Δl , a mianowicie skraca się, jeżeli siła ciśnie, a przedłuża się, jeżeli siła ciągnie graniastosłup.

Oprócz tego zmieniają się długości innych krawędzi graniastosłupa, a mianowicie krawędzi a i prostopadłej do rysunku b , i to, jeżeli l przedłuża się o Δl , tedy a i b skracają się o Δa i Δb i na odwrót.

Przedłużenie w kierunku osi nazywamy podłużnem (n. *longitudinal*), a w kierunku prostopadłym do osi poprzecznem (n. *transversal*).

Doświadczenia wykazały, że przedłużenia Δl , Δa i Δb są aż do granicy sprężystości wprost proporcjonalne do długości l ,



Rys. 31.

$\Delta l = G \cdot d \cdot l$

$\Delta l = \frac{P}{F} l$

a i *b* i do siły *P*, a odwrotnie do przekroju *F*. Możemy więc napisać:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF} \quad (33)$$

Jeżeli *E* oznacza liczbę stałą, zależną od materyału, którą nazwiemy spółczynnikiem sprężystości (n. *Elasticitätsmodul*, *Elasticitätskoeffizient*, fr. *coefficient d'elasticité*, an. *modulus of elasticity*, r. коэффициент упругости). Jest to tak zwane prawo *Hooka* *).

Poraz $\frac{\Delta l}{l}$, przedstawiający przedłużenie lub skrócenie na jednostkę długości, nazywamy przedłużeniem lub skróceniem jednostkowym (n. *relative Längenänderung*, *Dehnung*, fr. *allongement*, an. *unit strain*). Poraz $\frac{P}{F} = \nu$ oznacza siłę, działającą na jednostkę powierzchni czyli natężenie (n. *Spannung*, fr. *effort*, an. *stress on unit of area*, r. напряжение), jeżeli więc siłę mierzymy w *kg*, powierzchnię w *cm*², to natężenie wyrażać będziemy w kilogramach na centymetr kwadratowy, co oznaczamy *kg cm*² (czytaj *kg* na *cm*²).

Jeżeli natężenie stara się drobiny ciała jedne od drugich oddalić, wtedy nazywamy je ciągnieniem (n. *Zug*, fr. *traction*, an. *tension*, r. напряжение на разрывъ) i oznaczamy znakiem +. Jeżeli zaś natężenie stara się zbliżyć drobiny jedne do drugich, to nazywamy je ciśnieniem (n. *Druck*, fr. *compression*, an. *compression*, r. напряжение на сжатие) i oznaczamy znakiem —.

Równanie 33) możemy więc inaczej napisać

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\nu}{E}, \quad (34)$$

a zatem przedłużenie jednostkowe jest proporcjonalne do natężenia. Jeżeli w równaniu 34 zrobimy $\nu = 1$, to $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} = \alpha$, a zatem współczynnik sprężystości jest odwrotną wartością przedłużenia jednostkowego dla natężenia równego jedności. To przedłużenie jed-

*) Doświadczenia wiedeńskie z belkami żelaznymi okazały, że odkształcenia sprężyste podlegały temu prawu i po za granicą sprężystości, p. *Zeit. d. öst. Ing. u. Arch. Vereines* 1891.

nostkowe a nazywamy współczynnikiem wydłużenia (n. *Dehnungskoeffizient*, fr. *coefficient d'allongement*, a. *coefficient of extension*, r. коэффициент удлинения).

Analogicznie do 34) możemy napisać

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{\nu}{E_1}, \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{\nu}{E_2} \quad \dots \quad 35)$$

Współczynniki E_1 i E_2 nazywamy współczynnikami sprężystości poprzecznej (n. *Koeffizient für Transversalelasticität*, fr. *coefficient d'elasticité transversale*).

Współczynnik sprężystości E jest tylko dla ciał równokierunkowych, których struktura jest zupełnie jednorodna (n. *isotrop*, fr. *isotrope*), we wszystkich kierunkach stałym. Takim ciałem jest n. p. żelazo lane, podczas gdy żelazo spawane i stal mają tę własność tylko w przybliżeniu. Drzewo jest nierównokierunkowe, dlatego musimy tu E wyznaczyć osobno w kierunku włókien, a osobno w kierunku prostopadłym do włókien.

Współczynniki sprężystości poprzecznej są w ciałach równokierunkowych równe, przyczem $E_1 = E_2 = \frac{1}{m} E$. Ilość m nazywamy stałą Poissona (n. *Poissonsche Konstante*). Dla ciał równokierunkowych jest $m=3,3$, dla żelaza spawanego i stali $m=3$ do 4.

Współczynniki sprężystości są dla każdego materiału inne. Wyznaczono je, poddając ciało badane działaniu pewnej znanej siły P i mierząc przedłużenia lub skrócenia Δl . Jednak i dla tego samego materiału nawet współczynnik sprężystości ma wartości bardzo różne n. p. dla żelaza walcowanego otrzymał Bender wartości od 1110000 do 2800000 $\frac{kg}{cm^2}$, a nawet dla żelaza z tej samej fabryki otrzymano według doświadczeń towarzystwa Cincinnati Southern Railway w Ameryce wartości 1350000 do 2430000 $\frac{kg}{cm^2}$, dlatego też wartości, które podajemy poniżej dla rozmaitych materiałów, uważać można tylko jako liczby przeciętne z wielu doświadczeń uzyskane. Różnice wartości współczynnika sprężystości powstają także wskutek niezupełnie jednorodnego materiału.

W tablicy I. zestawiliśmy przeciętne wartości współczynników sprężystości dla materiałów, najbardziej w budownictwie używanych, jakoteż i natężenie przy granicy sprężystości, przyczem podnieść musimy raz jeszcze wielką niepewność granicy sprężystości. Linia *OM* (rys. 29.) nie jest zupełnie prostą, a wyznaczenie punktu styczności *M* zależy od dokładności przyrządów.

Tablica I.

Materiał	Współczynnik sprężystości <i>E</i> w kg/cm^2		Natężenie przy granicy sprężystości <i>K</i> w kg/cm^2		Natężenie przy granicy ciastowatości w kg/cm^2
	rozciąganie	ściskanie	rozciąganie	ściskanie	rozciąganie
Aluminium (glin)	675 000	675 000	—	—	—
Bazalt i porfir	—	50 000	—	—	—
Beton	260 000	200 000	20	50	—
Cement	260 000	250 000	30	60	—
Cynk	950 000	950 000	300	—	—
Cyna	400 000	—	—	—	—
Drzewo miękkie w kierunku włókien	112 000	100 000	600	150	—
Drzewo miękkie prostopadle do włókien	1 100	1 000	—	—	—
Drzewo dębowe w kierunku włókien	115 000	100 000	100	150	—
Drzewo dębowe prostopadle do włókien	1 300	1 300	—	—	—
Granit	150 000	60 000	—	—	—
Konopne liny	10 000	—	—	—	—
Miedź	1 100 000	1 100 000	400	—	—
„ drut	1 200 000	—	1 200	—	—
Mur ciosowy	—	250 000	—	—	—
Mosiądz	640 000	640 000	480	—	—
„ drut	987 000	—	1 330	—	—
Ołów	60 000	60 000	100	—	—
Platyna	1 600 000	1 600 000	2 660	—	—
Rzemień nowy	1 250	—	—	—	—
„ używany	2 250	—	—	—	—
Stal zlewna	2 200 000	2 200 000	2 500 do 6 000	2 500 do 6 000	2 800 i wyżej
„ lana	2 150 000	2 150 000	2 000 i więcej	2 000 i więcej	2 100 i więcej
„ niklowa	2 100 000	2 100 000	3 000	3 000	3 500
Żelazo spawane	2 000 000	2 000 000	1 600	1 600	2 250
„ zlewne	2 150 000	2 150 000	2 200	2 200	2 600
„ lane	900 000	95 000	—	—	—
„ blacha	1 900 000	—	—	1 500	—
„ drut	2 000 000	—	—	2 200	—

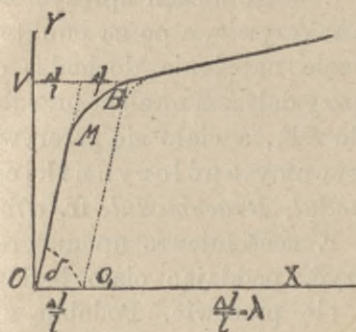
Considére zaproponował, aby oznaczyć jako granicę sprężystości ten punkt linii odkształceń, a właściwie to natężenie, dla którego przedłużenie jest dwa razy tak wielkie, niżby było, gdyby było proporcjonalne do natężeń. W naszym przykładzie byłby to punkt N , a zatem granica sprężystości spadłaby prawie z granicą płynności. W praktyce wyznaczenie granicy płynności jest daleko łatwiejsze i nie wymaga tak doskonałych przyrządów: Z tych więc powodów we Francyi przyjęto regułę Considére'a i dlatego w dziełach francuskich znajdujemy znacznie wyższe wartości podane dla granicy sprężystości, niż w niemieckich i angielskich. My tu trzymać się będziemy naszego określenia granicy sprężystości, pierwiej podanego zgodnie z Bauschingerem.

Jeżeli niepewnemi są wartości, podane powyżej dla współczynników sprężystości, to tem trudniej da się dokładnie wyznaczyć granica sprężystości jeszcze z następnego powodu. Doświadczenia^{*)}, robione z żelazem spawalnem, okazały, że jeżeli granica sprężystości jest przy natężeniu α , a natężymy ciało aż do $\nu_1 > \alpha$, to otrzymamy przedłużenie Δl , które się będzie składać z Δl_1 przedłużenia sprężystego i Δl_2 przedłużenia trwałego; to znaczy, że po ustaniu działania siły Δl_1 zniknie, a Δl_2 zostanie (rys. 32.). Drobiny nie zajmą więc pierwotnego położenia, a zatem mamy właściwie do czynienia z nowem ciałem. Jeżeli teraz będziemy natęzać ciało aż do natężenia ν_1 , to otrzymamy tylko przedłużenie sprężyste tak, że ν_1 będzie teraz granicą sprężystości. Widzimy więc, że granica sprężystości żelaza spawanego powiększa się jednorazowem jej przekroczeniem. — Dla żelaza lanego niema właściwie żadnej granicy sprężystości, pierwsze natężenie pozostawiało bowiem przy doświadczeniach przedłużenie trwałe, poczem aż do tego natężenia zachowywało się żelazo lane, jak sprężyste; granica sprężystości dała się jednak jednorazowem większem natężeniem przesunąć wyżej.

Bauschinger badał też wpływ, jaki na granicę sprężystości wywierają zmiany w natężeniu badanego ciała i doszedł do następujących wyników:

^{*)} P. rozprawkę p. Wehage: „Spannung in verbogenen Körpern w Civilingenieur 1880“.

a) Przez liczne zmiany natężeń między natężeniem równym zeru a największym natężeniem, spadającym z granicą sprężystości albo nieco nad nią wyższym, podnosi się pierwotną granicę sprężystości aż do pewnej granicy;



Rys. 32.

b) Zmiany natężeń w kierunku przeciwnym raz na ściskanie, drugi raz na wyciąganie, które nie wiele przekraczają granicę sprężystości, zniżają granicę sprężystości aż do zera;

c) Powoli wzrastające natężenia dodatnie i ujemne zniżają granicę sprężystości dopiero wtedy, gdy przekraczają pierwotną granicę sprężystości;

d) Granica ta może być znowu podniesioną natężeniami zmiennymi, powoli wzrastającymi, jednak tylko do pewnej granicy, która może leżeć znacznie poniżej pierwotnej granicy sprężystości. Granicę tę nazywa Bauschinger naturalną (n. natürliche).

Przykład. Pręt z żelaza spawalnego 5 m długi o przekroju prostokątnym, którego podstawa $b=2$ cm, wysokość $h=20$ cm, jest ciągnięty siłą $P=25$ t; jakie jest przedłużenie pręta Δl ?

$$\text{Wedle rów. 33) } \Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} = \frac{25000 \cdot 500}{2000000 \cdot 2 \cdot 20} = 0.156 \text{ cm.}$$

$$\text{Natężenie } \nu = \frac{25000}{2 \cdot 20} = 625 \text{ kg/cm}^2.$$

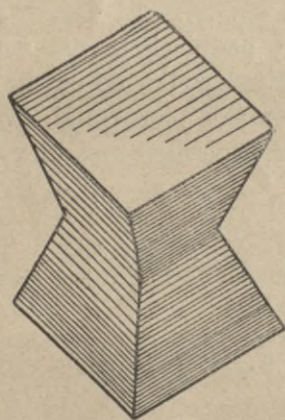
$$\text{Z rów. 34) } \lambda = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\nu}{E} \text{ otrzymamy } E = \frac{\nu}{\lambda}. \text{ Z rys. 32) widzimy, że}$$

$st\delta = \frac{\nu}{\lambda} = E$. Widzimy więc, że współczynnik sprężystości przedstawia w wykresie odkształceń styczne kąta nachylenia z początku prostej OM a potem stycznej geometrycznej do linii odkształceń. Po przekroczeniu granicy sprężystości współczynnik sprężystości maleje.

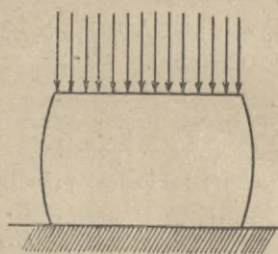
§. 18. Współczynniki wytrzymałości na wyciąganie i ściskanie.

Gdy natężenie przekroczy granicę sprężystości, przedłużenia nie są już wtedy proporcjonalne do natężeń, lecz wzrastają daleko prędzej. Jeżeli natężenia odetniemy na osi odcin-

ków (rys. 30.), a odnośne przedłużenia lub skrócenia jako rzędne, to punkty, wyznaczone temi rzędniemi wyznaczają linią $OMNEF$, która na długości OM t. j. w granicach sprężystości jest prostą. Między M i N linia się zakrzywia, a po za punktem N linia staje się płaską, aż nareszcie natężenia dochodzą do pewnej największości EE' , poczem przy dalszem nagłem przedłużeniu się, natężenie się zmniejsza do FF_1 , a ciało się przerywa. Natężenie to największe EE' nazywamy współczynnikiem wytrzymałości (n. *Festigkeitsmodul*, *Bruchmodul*, fr. *effort de rupture*, an. *ultimate straining*, r. коэффициент прочности). Współczynnik ten możemy wyznaczyć, poddając ciało badane natężeniu tak wielkiemu, aż ciało się przerwie. Podobną zupełnie linię odkształceń otrzymamy dla ciśnienia. Zgniecenie następuje tu przez przesunięcie cząstek ciała badanego na bok,



Rys. 33.



Rys. 34.

a to w dwojaki sposób. Przy ciałach twardych odłupują się cząstki materiału w ten sposób, że zostają dwa ostrosłupy wierzchołkiem do siebie zwrócone (rys. 33.), albo też przy ciałach miększych n. p. ołowiu, następuje wybrzuszenie (rys. 34.). Gdy stosunek wysokości do najmniejszego wymiaru przekroju dosięga pewnej granicy (około 4 do 5 dla metali, 8 dla drzewa), ciało się wygina na bok i łamie. Występuje wtedy wytrzymałość na wyboczenie, o której będziemy mówić później. I tu otrzymujemy jednakże dla tych samych materiałów bardzo

różne wartości z powodu rozmaitej ich jakości tak, że podane poniżej wartości musimy uważać tylko jako przeciętne, otrzymane z wielu doświadczeń.

Tyczy się to w największym stopniu kamieni, bo jeżeli różnice wartości współczynnika wytrzymałości dla kruszców wahają się o kilka lub kilkanaście procent, to dla kamieni dochodzą do 100 i więcej procent. I tak n. p. współczynnik wytrzymałości dla piaskowca szarowakowego wynosi 1270 kg/cm^2 węglowego 500 do 1200, pstrego 250 do 1300, kajprzewego 150 do 1000, jurajskiego 300 do 800, kredowego 100 do 700, zielonego 200 do 400, karpackiego 120 do 650, molasowego 500 do 1500 kg/cm^2 . Średnia wartość 300 kg/cm^2 podana dla piaskowca w tabliczce różni się bardzo od wartości największych i najmniejszych.

I tu okazały doświadczenia, że gdy ciało badane przerwało się przy pierwszej próbie przy natężeniu μ , to, gdy pozostałe części ciała poddano powtórnej próbie, ciało łamało się dopiero przy większym natężeniu μ' . Nie wypika jednak z tego, że kilkakrotnem natężeniem ciała aż do przerywania można wytrzymałość powiększyć. Doświadczenia te dowodzą raczej tylko niejednostajności ciał. Przy pierwszej próbie przerywa się ciało w miejscu najsłabszym już przy natężeniu μ , przy drugiej niema już tego słabego miejsca, więc wytrzymuje większe jeszcze natężenie aż do μ' .

Tablica II.

M a t e r y a ł	Ciężar gatunkowy	Spółczynnik wy- trzymałości μ	
		wyciąganie	ściskanie
	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
Bazalt	3 000	80	1 200
Beton	2 200	20	150
Cegła zwykła	1 500	—	60
„ wypalona	1 800	15	100
Cement	1 400	30	200
Cyna lana	7 200	350	1 000
„ drut	7 300	400	—
Cynk lany	7 290	2 300	—
„ blacha	7 200	2 000	—
Dolomit	2 900	20	800
Drzewo bukowe równoległe do włókien	800	1 000	400

M a t e r y a ł	Ciężar gatunkowy	Spółczynnik wy- trzymałości μ	
		wyciąganie	ściskanie
	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$
Drzewo bukowe prostopadle do włókien	800	70	120
„ dębowe równoległe „ „	1 000	960	400
„ „ prostopadle „ „	1 000	50	120
„ szpilkowe równoległe „ „	790	750	300
„ „ prostopadle „ „	780	48	40
Granit	2 750	40	1 200
Gnejs	2 550	30	500
Glin	2 600	2 030	—
Konopne liny	900	650	—
Kwarcyt	2 650	—	700
Łupek	2 800	—	600
Marmur	2 700	—	350
Miedź lana	8 790	1 340	4 500
„ kuta	8 900	2 400	5 000
„ blacha	8 900	2 200	—
„ drut	8 880	5 000	—
Mosiądz lany	8 400	1 500	750
„ drut	8 540	3 600	—
Mur ceglany na cemencie	1 800	—	90
„ „ „ wapnie	1 800	—	50
Ołów	11 400	125	500
Piaskowiec	2 400	10	300
Platyna kuta	21 300	3 400	—
Porfir	2 600	—	1 200
Rzemień	—	300	—
Spisz	8 040	2 000	—
Srebro	10 500	2 900	—
Syenit	2 750	—	1 100
Stal bardzo miękka	7 860	4 400	5 000
„ miękka	7 860	5 400	5 800
„ twarda	7 860	6 400	7 000
„ bardzo twarda	7 866	7 400	8 000
„ drut	7 860	11 000	—
„ niklowa miękka	7 860	5 000	5 000
„ „ średnia	7 860	7 000	7 000
Szkło lane	2 890	210	1 300
„ dęte	2 640	375	—
Wapień	2 700	27	600
Zaprawa wapienna	1 900	2	60
„ cementowa	1 700	20	100
Żelazo lane	7 500	1 400	7 000
„ spawane	7 800	3 600	3 200
„ zlewne	7 850	4 000	4 000
„ blacha	7 800	3 400	—
„ drut	7 800	6 500	—
Złoto	19 350	2 700	—

Tablica III.

Rozporządzenie minister. austr. o zakładach żelbetowych z r. 1911
przepisuje następujące ciężary właściwe.

Materyał	Ciężar kg/m ³	Materyał	Ciężar kg/m ³
Żelazo spawane	7 800	Beton żuźłowy	1000—1300
„ zlewne	2 850	Korek	330
„ lane	7 300	Zaprawa wapienna	1 520
Stal	7 900	„ cementowa	1 700
Olów	11 400	Beton ubijany	2 200
Miedź walcowana	9 000	Żelbet	2 400
Drzewo dębowe suche	800	Mur ceglany z tynkiem	
„ bukowe „	750	z zwykłych cegieł:	
„ modrzew. „	650	a) na wapie	1 600
„ sosnowe, jodłowe,		b) „ cemencie	1 700
świerkowe suche	600	z cegieł maszynowych:	
Bruk kostkowy	1 100	a) na wapie	1 700
Szkoło	2 600	b) „ cemencie	1 800
Żwir	1 900	z zendrówek na zapr.	
Piasek	1 600	cementowej	1 950
Gruz	1 400	z cegieł pustych na wa-	
Zużel z wielkiego pieca	850	pnie	1 400
Popiół węglowy	750	z cegieł porowatych na	
Asfalt lany	1 200	wapie	1 200
„ „ żwirowy	2 100	Mur z kamieni łamanych,	
„ ubijany	2 040	z piaskowca lub wapienia	2000—2500
Terazzo	2 200	z granitu, bazaltu itd. . .	2 700
Płyty zendrówkowe	2 300	Mur ciosowy z piaskowca	
Bruk kamienny	2000—2500	lub wapienia	2100—2600
„ „ granitowy	2 700	z granitu, bazaltu	2 800
Dyle gipsowe	1 000		

Tablica IV.

Rozp. austr. min. kolei żelaznych dla mostów z 1904 nakazuje przyjmować:

Dla 1 m ³	Ton
Żelaza spawanego	7·80
„ zlewego	7·85
„ surowego lanego	7·30
Stali	7·90
Olówiu	11·40
Drzewa (świerkowego, modrzewiowego, jodłowego, sosnowego)	0·90
„ dębowego i bukowego	1·00
Bruku drewnianego	1·10
Piasku	1·60
Żwiru	1·90
Gliny, ziemi	1·80
Bruku kamiennego wedle gatunku kamienia	2·50—3·00
Asfaltu lanego	1·20
Muru z kamienia ciosowego	2·60
„ „ „ łamanego i to z wapienia	2·40
„ „ „ „ z piaskowca	2·20
„ z cegieł	1·60
„ z zendrówek	1·90
„ z betonu	2·00—2·50

Tablica V.

Rozporządzenie ministerstwa pruskiego z r. 1910.

Materyał	Ciężar kg/m ³	Materyał	Ciężar kg/m ³
Ziemia, piasek, glina mokra	2 100	piaskowca wapiennego . . .	1 800
„ „ „ sucha	1 600	„ sztucznego . . .	2 100
Żwir mokry	2 000	zaprawa cementowa . . .	2 100
„ suchy	1 700	„ cement.-wapienna	1 900
Popiół koksowy	700	„ wapienna	1 700
Piasek pumekсовy	700	„ trasowa	2 000
Mur ciosowy:		gips (lany)	1 000
z granitu, syenitu, porfiru	2 800	beton, żwir, granit itd. . .	2 200
z bazaltu	3 000	żelbet	2 400
z lawy bazalt. zbitej	2 800	beton z cegiel	1 800
„ „ porowatej	1 800	„ z żużla	1 000
z marmuru zbitego	2 500	„ z żwiru pumekсового	1 000
„ „ porowatego	2 000	Pokrycie podłogi:	
z piaskowca ciężkiego	2 700	z cementu	2 200
„ „ lekkiego	2 400	z gipsu	2 100
z tufu, porfiru i zbitego		z terazzo	2 000
wapienia	2 000	asfaltu lanego	1 400
z tufu, pumeksu i luźnego		linoleum	1 200
wapienia	1 400	plyt korkowych	300
z łupku	2 700	ze szkła	2 600
Mur z kamienia łamanego:		Drzewo jodłowe suche . . .	600
z granitu	2 700	„ sosnowe „	650
z wapienia, piaskowca,		„ dębowe	900
piaskowca	2 500	„ świerkowe	550
Mur z:		„ bukowe	750
zendrówek	1 900	Żelazo lane	7 250
cegiel	1 800	„ spawane	7 800
porowatych cegiel	1 100	„ zlewne	7 850
pustych cegiel	1 300	Stal zlewna	7 860
porowatych pustych cegiel		Ołów	11 400
korku	600	Bronz	8 600
		Miedź walcowana	8 900
		Cynk lany	6 900
		„ walcowany	7 200
		Cyna walcowana	7 400

Postanowienie rosyj. ministerstwa komunikacyi z 1905 r.: zatwierdza się normy ciężaru właściwego dla:

żelaza zlewnego 7-85
 „ spawanego 7-77.

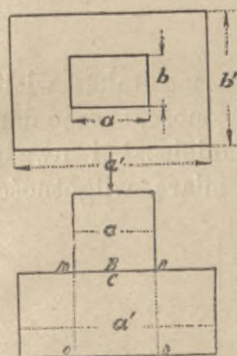
§. 19. Wpływ kształtu ciała, ciepłoty, wilgotności i ciężaru gatunkowego na wytrzymałość.

Mówiliśmy w §. 17., że siła, działająca w osi ciała, sprawia oprócz odkształceń podłużnych także poprzeczne. Dla tych

ostatnich nie jest jednak obojętnym kształt ciała, bo włókna ciągnięte nie mogą każde z osobna zmniejszać swego przekroju, lecz są z innymi połączone i oddziałują na siebie nawzajem. Oddziaływanie to jest jednak różne przy różnych kształtach przekroju, co ma wpływ na wytrzymałość ciała.

Irzeczywiście doświadczenia Kirkaldegó, Bauschingera i Bacha dowiodły dla ciągnięcia małe zmniejszenie się wytrzymałości przy zwiększającej się szerokości żelaza płaskiego, a dla ciśnienia zwiększenie się wytrzymałości przy zwiększeniu się przekroju.

Jeżeli w ogóle w jakikolwiek sposób przeszkadzamy odkształceniu poprzecznemu, zwiększamy przez to współczynnik wytrzymałości. Jeżeli więc ciało *B* (rys. 35.) o mniejszym przekroju ciśnię na ciało *C* o większym przekroju, to ciśnienie przenosi się na graniastosłup *m n o p*, lecz otaczający ten graniastosłup materiał przeszkadza odkształceniu poprzecznemu, dlatego też do zgniecenia potrzebna jest siła nie $P' = \mu a b$, lecz wedle doświadczeń, które Durand-Claye wykonał z kamieniami, a przy których było $a = b$ i $a' = b'$



$$P = \mu a a' \quad . \quad . \quad . \quad 36)$$

Ogólnie możnaby napisać:

$$P = \mu \sqrt{aa' bb'} \quad . \quad . \quad . \quad 37)$$

Bauschinger otrzymał na podstawie swych doświadczeń nieco odmienny wzór, mianowicie

$$P = \mu a b \sqrt[3]{\frac{a' b'}{a b}} \quad . \quad . \quad . \quad 38)$$

Wielki wpływ na wytrzymałość metali ma ciepłota ciała badanego. Żelazo przy bardzo wysokiej ciepłocie 1000° zbliża się do stanu płynnego i współczynnik wytrzymałości spada prawie do zera.

M. Kollman robił w r. 1878 doświadczenia w tym względzie z żelazem spawanem i otrzymał następane wyniki

*) Por. także doświadczenia Genela (Bet. u. Eisen 1910, str. 174).

ciepl. 0 50 100 150 250 350 450 550 650 750 1000° C

sp. wytrzym. na ciąg.

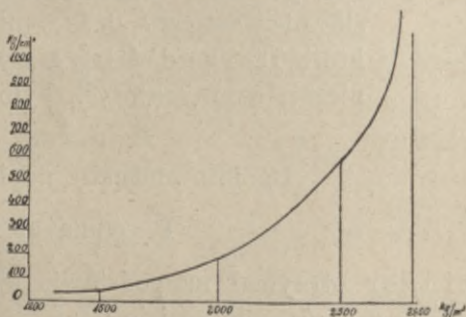
$\mu = 3750, 3750, 3730, 3650, 3500, 3200, 2280, 860, 690, 490, 150 \text{ kg/cm}^2$
 w pro-
 centach 100 100 100 97 93 85 61 23 19 13 4%

Widzimy więc, że do 200° C wytrzymałość żelaza bardzo mało się zmniejsza, szybciej już od 400 do 500°, potem jednak spada nagle, a przy 1000° wynosi tylko 4%.

Bardzo niska ciepłota ma też wpływ na wytrzymałość, jak to okazały doświadczenia Dewara i Steinera *). Wytrzymałość metali była przy bardzo niskiej ciepłocie większą, i tak wynosiła wytrzymałość na ciągnięcie

	przy + 150° C	przy - 182° C
stali miękkiej	3900	6500 kg/cm^2
żelaza	3000	6200 "
miedzi	1900	2800 "

Na wytrzymałość drzew szpilkowych ma także wielki wpływ wilgoć. Bauschinger mierzył wilgotność, susząc dane kawałki drzewa, dopóki ciężar ich się zmniejszył i uważał ubytek wagi, wyrażony w odsetkach jako miarę wilgotności.



Rys. 36.

Otrzymał on n. p. dla modrzewia

dla wilgotności $w = 29.0 \quad 25.3 \quad 14.3 \quad 8.1 \quad 7.7 \quad \%$
 wytrzym. na ciśnienie $\mu = 294 \quad 374 \quad 532 \quad 818 \quad 884 \text{ kg/cm}^2$
 dla świerku

$w = 28.7 \quad 23.5 \quad 14.9 \quad 13.4 \quad 7.6 \quad \%$
 $\mu = 295 \quad 324 \quad 443 \quad 568 \quad 718 \text{ kg/cm}^2$

Wilgotność $w = 15\%$ odpowiada drzewu suszonemu w otwartej szopie. Dla tej wilgotności znalazł Bauschinger, że

*) Por. Schweiz. Bauzeitung 1895, str. 137.

wytrzymałość zmienia się wraz z ciężarem gatunkowym i to w przybliżeniu wedle prawa linii prostej tak, że możemy napisać

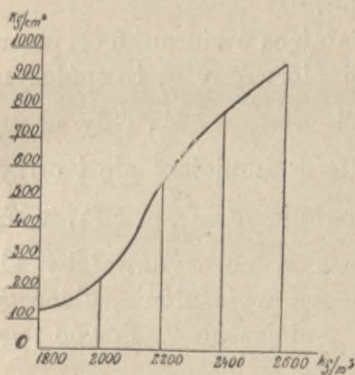
$$\mu = 1000 \gamma - 100 \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 39)$$

Z powyższego wynika, że drzewo mokre ma znacznie mniejszą wytrzymałość od suchego i że przez wysuszenie go w otwartej szopie zwiększyć możemy wytrzymałość jego w dwójnasób.

Co do wytrzymałości wapieni i piaskowców okazały doświadczenia M. Michelota wielką ich zależność od ciężaru gatunkowego. I tak dla wapieni przedstawiają rzędne na rys. 36. współczynniki wytrzymałości a odcinki ciężary gatunkowe. Linia krzywa, przedstawiająca zawisłość współczynnika wytrzymałości od ciężaru gatunkowego,

jest wedle doświadczeń Michelota hyperbolą. Podobnie przedstawia rys. 37. tę zawisłość dla piaskowców.

Wytrzymałość muru na ciągnięcie jest mniejszą, niż jego części składowych, a to z powodu, że przyczepność jest mniejszą od spójności, czasem kamienie są źle oczyszczone, dalej kamienie wapieniste wciągają wodę z zaprawy, przez co wytrzymałość jej się



Rys. 37.

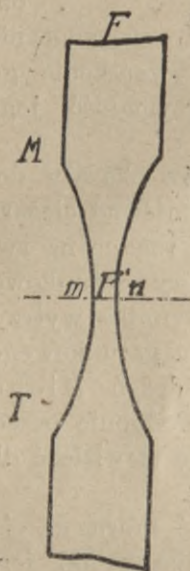
zmniejsza, wreszcie mróz działa w ten sam sposób. Wytrzymałość muru na ciśnienie jest mniejszą niż kamienia, a większą niż zaprawy i ma się odwrotnie do grubości szwów. Jeśli niema wcale zaprawy, a kamienie się dokładnie stykają, wytrzymałość jest większą*).

§. 20. Zjawiska przy przerwaniu.

Jeżeli nateżenie ciała ciągniętego przekroczy granicę płynności N (rys. 30.), to przedłużenia wzrastają bardzo prędko, a przekrój pręta się zmniejsza odpowiednio, aż nareszcie przy pewnym nateżeniu EE_1 , które zależy od natury ciała, występuje nowe zjawisko (rys. 38.). W pewnym miejscu MT , zmiennem

*) Porów. autora „Mosty kamienne“, wyd. II., str. 11.

dla rozmaitych prętów, następuje znaczne zmniejszenie przekroju, które nazywamy zwięzieniem (n. *Kontraktion, Einschnürung*, fr. *striction*), a które się wzmaga, aż nareszcie następuje w części najwęższej *mn* przerwanie ciała. Zwięzieniu temu towarzyszy miejscowe przedłużenie, które osiąga w całości wielkości OF_1 (rys. 30).



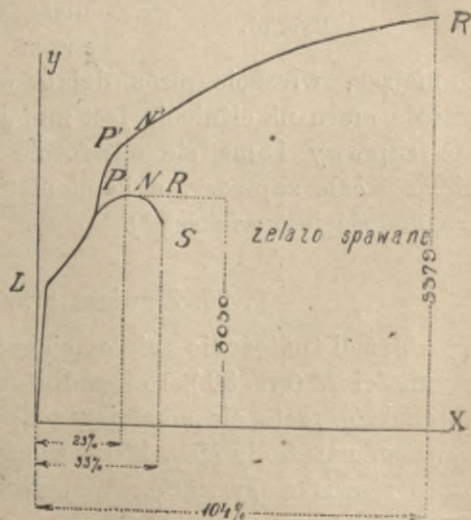
Rys. 38.

Zwięzenie to występuje najbardziej w niektórych metalach ciągliwych (n. *zähe, dehnbar*, fr. *ductile*, a. *ductile*), jak ołów, cyna, miedź, mniej wyraźnie w żelazie i stali miękkiej, prawie wcale nie w drzewie, żelazie łanem i stali twardej.

Jeżeli siła, działająca w kierunku osi prętu, była P a przekrój pierwotny F , to współczynnik wytrzymałości $\mu = \frac{P}{F} = EE_1$. Gdy następuje zwięzenie, siła P zmniejsza się i otrzymujemy dla przerywania $\mu' = \frac{P'}{F} = FF_1$, a że $P' < P_1$ więc i $\mu' < \mu$, co wydawałoby się sprzecznem i wymaga wyjaśnienia, dlaczego

ciało nie przerywa się dla μ , lecz dla mniejszego μ' . Powód tego zjawiska leży w zwięzieniu a więc w mniejszym przekroju, który w chwili przerywania wynosi F' , właściwe więc napięcie przy przerywaniu czyli współczynnik wytrzymałości w zwięzieniu $\mu'' = \frac{P'}{F'} > \mu$. To samo odnosi się zresztą i do innych napięć i aby otrzymać prawdziwą krzywą odkształceń, należałoby uwzględnić rzeczywistą powierzchnię zmniejszoną.

Także i co do przedłużenia musimy rozróżnić prze-



Rys. 39.

dłużenie (n. *Verlängerung*, fr. *allongement*, a. *elongation*, r. удлинение) prętu całkowite między znaczkami, umieszczonymi w pewnym oznaczonym odstępnie, a przedłużeniem w zwężeniu. Przy próbach materiałów mierzy się zwykle przedłużenie całkowite i to uważa się jako znamię ciągliwości, chociaż właściwie należałoby jako takie znamię uważać przedłużenie w zwężeniu.

Na ryc. 39. przedstawiliśmy krzywą odkształceń dla żelaza spawanego wedle Considere'a. Krzywa *OLPNS* jest zwykłą krzywą odkształceń, wyznaczoną ze względu na pierwotną powierzchnię przekroju, *OLP' N' R'* zaś prawdziwą krzywą odkształceń, wyznaczoną z uwzględnieniem zmniejszenia się przekroju, zwężenia i przedłużenia w zwężeniu.

Poniżej podajemy tabliczkę odnoszącą się do tego doświadczenia, przyczem nadmieniamy, że odstęp znaczków wyniósł 200 mm.

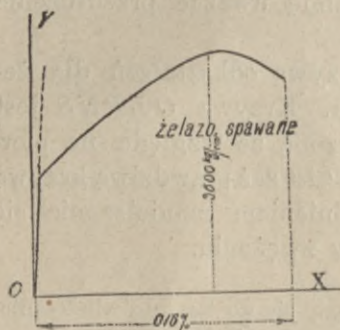
Tablica VI.

Siła ciągnąca <i>S</i>	Przedłużenie między znaczkami w stosunku do 1 m $a:l$	Średnica prętu <i>a</i>	Najmniejsza powierzchnia przekroju <i>F'</i>	Natężenie w najmniejszym przekroju <i>V</i>	Przedłużenie w odsetkach w zwężeniu $a_1:l_1$	Uwaga
<i>kg</i>	%	<i>mm</i>	mm^2	$\frac{kg}{cm^2}$	%	
400	0·010	16·0	200·97	199	0·010	
800	0·020	—	200·95	398	0·020	
1 200	0·030	—	200·93	597	0·030	
1 600	0·040	—	200·91	796	0·040	
2 000	0·050	—	200·89	995	0·050	
2 400	0·060	—	200·87	1 194	0·060	
2 800	0·075	—	200·84	1 394	0·075	
3 200	0·090	—	200·81	1 593	0·090	} granica sprężystości
3 600	1·110	—	200·77	1 793	0·110	
4 000	3·800	—	193·64	2 064	3·800	
4 400	4·800	—	191·79	2 294	4·800	} początek zwężenia
4 800	6·250	—	189·17	2 537	6·250	
5 200	8·250	—	185·68	2 800	8·250	
5 600	11·120	—	180·88	3 095	11·120	} przerwanie
6 000	16·600	—	172·38	3 480	16·600	
6 100	23·250	14·2	158·36	3 851	27·000	
5 900	27·600	13·3	138·92	4 247	44·000	
5 700	30·250	12·5	122·71	4 641	63·000	
5 500	32·000	11·8	109·45	5 025	84·000	
5 300	33·000	11·2	98·52	5 379	104·000	

Granica sprężystości leży tu między 1800 a 2000 kg/cm^2 , współczynnik wytrzymałości $\mu = \frac{6100}{2.01} = 3034 \text{ } kg/cm^2$.

Przedłużenie między znaczkami $\lambda = 33\%$.

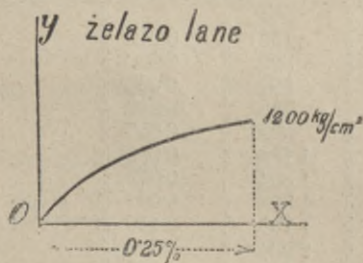
W rzeczywistości skutek zwężenia, a więc zmniejszenia przekroju, przerywa się pręt dopiero przy natężeniu 5379 kg/cm^2 , widzimy więc, że materiał zdoła miejscowo pracować znacznie więcej, niż to współczynnik wytrzymałości wskazuje, ale w praktyce nie możemy przewidzieć dokładnie, o ile przy przzerwaniu przekrój się zmniejszy i wyznaczamy współczynnik wytrzymałości μ ze względu na przekrój pierwotny i przedłużenie całkowite λ . Dlatego też następnie będziemy brali pod uwagę tylko zwykłą krzywą odkształceń.



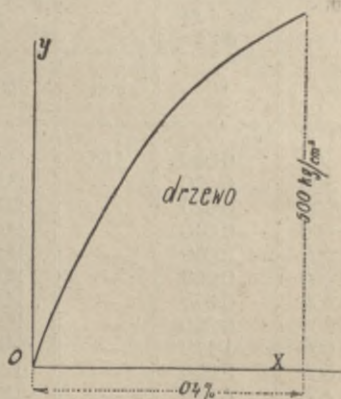
Rys. 40.

Kształt krzywej odkształceń zależy od materiału. Podajemy tu jako przykłady krzywą

odkształceń dla żelaza spawanego (rys. 40.), żelaza lanego (rys. 41.) i drzewa (rys. 42.).



Rys. 41.



Rys. 42.

§. 21. Własności ciał, zależne od krzywej odkształceń, zwężenia i przedłużenia.

Zwykle na zeszkłady działają nietylko siły stałe, lecz zarazem narażone są one na uderzenia i wstrząśnienia, których

siła żywa musi być zniweczona pracą wewnętrzną materiału, proporcjonalną do iloczynu natężeń przez przedłużenia.

Jeżeli na osi OX (rys. 43.) odetniemy przedłużenia na cm długości a na osi OY natężenia ν , to praca przy przedłużeniu prętu o przekroju F jest

$Pdl = F\nu dl$, więc dla przedłużenia od 0 do Δl

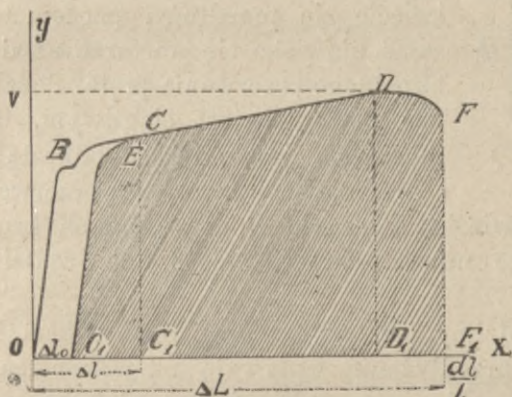
$$L = F \int_0^{\Delta l} \nu dl,$$

a praca jednostkowa na 1 cm długości prętu i cm^2 powierzchni

$$L_1 = \int_0^{\Delta} \nu \frac{dl}{2} \dots \dots \dots 40)$$

Na rysunku 43. przedstawia więc L_1 przy przedłużeniu Δl powierzchnię $OBCC_1$, pracę zaś, którą pręt wykonywa przy przedłużeniu się o ΔL

aż do przerwania, przedstawia więc dla $F=1$ pow. $OBDF_1$. Im większą ta powierzchnia, tem większą jest wytrzymałość prętu na wstrząśnienia i uderzenia, którą nazywamy odpornością materiału (n. *Arbeitskapazität*, fr. *résistance vive de rupture*).



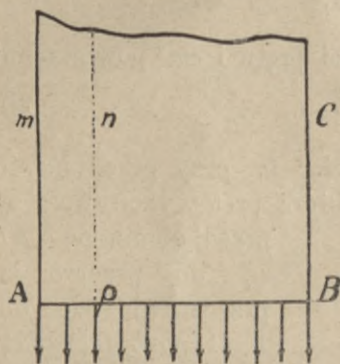
Rys. 43.

Jeżeli przekroczymy granicę sprężystości, to po ustaniu siły otrzymamy odkształcenie trwale OO_1 , przyczem $O_1E \parallel OB$, powierzchnia kreskowana jest jednak teraz mniejszą od całej powierzchni $OBDF_1$, a zatem przez przekroczenie granicy sprężystości zmniejszamy odporność.

Wstrząśnienia działają nagle na zeskład w ten sposób, że w pewnych częściach zeskładu wywołują znaczniejsze miejscowe odkształcenia. Przytem rozchodzi się o to, aby odkształcenia takie nie pociągały za sobą w tem miejscu przerwania. Zależy to od przedłużenia w zwężeniu. Im ciało jakieś przy przerwaniu wykazuje większe zwężenie i przedłużenie, a zatem im

bardziej jest ciągliwym, tem lepiej wytrzymuje wstrząśnienia, tem mniej jest kruchem (n. *spröde*, fr. *fragile*).

Podobnie rzecz się ma, jeżeli pręt pracujący na rozciąganie jest nadpęknięty (rys. 44.). Wszystkie włókna od *pn* do *BC* wydłużają się wskutek siły zewnętrznej, w pasku zaś *Apmn* wydłużenie takie nie jest możliwem z powodu pęknięcia *mn*. Siły, działające na *Ap*, muszą się więc przenieść przez całe



Rys. 44.

włókno *pn*, stąd powstaje w *n* miejscowe odkształcenie większe, niż innych włókien. Jeżeli materiał nie jest ciągliwym i niezdolnym do większych odkształceń, to w *n* natężenie dosięgnie współczynnika wytrzymałości i pęknięcie się przedłuży, poczem to samo zjawisko się powtarza aż do zupełnego przerwania pręta. Jeżeli zaś materiał jest ciągliwym, to możliwem jest większe odkształcenie miejscowe w *n* bez przerwania

pręta i pręt się nie przerwie. Z tego widać, że w ciałach kruchych każde najmniejsze nawet pęknięcie może doprowadzić do przerwania ciała.

Z poprzedniego widzimy, że tak przebieg linii odkształcenia, jak i zwężenie i przedłużenie wpływają na jakość materiału. Z tego powodu próby materiału nie ograniczamy na wyznaczeniu współczynnika sprężystości, lecz staramy się wyznaczyć także zwężenie i przedłużenie. Zwężenie i przedłużenie wyrażamy w odsetkach pierwotnego przekroju i pierwotnej długości między znakami, którą przyjmujemy 20 cm. Warunki dostawcze żelaza i stali zawierają zatem przepisy nie tylko co do najmniejszej wytrzymałości, ale także co do najmniejszego zwężenia i przedłużenia.

Rozporządzenie austr. min. kolei żel. z r. 1904., dotyczące budowy mostów. §. 10.

A. Żelazo spawane.

2. Żelazo spawane przy wytrzymałości na rozciąganie, wynoszącej 3.6 t/cm^2 i wyżej w kierunku walcowania musi posiadać ciągliwość nie mniejszą niż 12%. Przy mniejszej wytrzymałości na rozciąganie musi być stosunkowo większa ciągliwość, która przy dozwolonej jeszcze najniższej

wytrzymałości na rozciąganie, wynoszącej 3·3 ton na centymetr kwadratowy, musi wynosić co najmniej 20%.

3. Gatunki walcowane, które jako przyszlę części dźwigaru mają opierać się siłom, działającym w kilku kierunkach, muszą w kierunku poprzecznym do kierunku walcowania mieć wytrzymałość na rozciąganie, wynoszącą co najmniej 3·0 t/cm^2 i ciągliwość nie mniejszą niż 5%.

4. Żelazo, na nity i śruby użyć się mające, musi przy najmniejszej dozwolonej wytrzymałości na rozciąganie, wynoszącej 3·6 t/cm^2 , posiadać ciągliwość conajmniej 18%.

B. Żelazo zlewne.

5. Wytrzymałość na rozciąganie żelaza zlewne, na dźwigar mostowy użyć się mającego, nie może wynosić mniej niż 3·6 t/cm^2 , a przy żelazie zlewne, wyrabianem w piecu płomiennym, nie więcej niż 4·5, zaś przy żelazie zlewne innego sposobu wyrobu nie więcej niż 4·2 t/cm^2 .

6. Ciągliwość żelaza zlewne musi być tak wielką, ażeby wytrzymałość (w t/cm^2) pomnożona przez ciągliwość (w procentach) dała jako iloczyn przy próbach rozerwania w kierunku walcowania najmniej liczbę 100, a przy takich próbach prostopadle do kierunku walcowania najmniej liczbę 90.

7. Wytrzymałość na rozciąganie żelaza, użyć się mającego na nity i śruby, wynosić musi 3·5 do 4·0 ton, ciągliwość zaś musi ono mieć taką, ażeby wytrzymałość (w t/cm^2) pomnożona przez ciągliwość (w procentach) dała jako iloczyn najmniej liczbę 110.

C. Żelazo lane i stalane.

8. Wytrzymałość na rozciąganie lanego żelaza wynosić musi najmniej 1·2 t/cm^2 , a na ściskanie najmniej 5·0 t/cm^2 .

9. Wytrzymałość na rozciąganie lanej stali dla części łożyskowych mostu wynosić powinna najmniej 5·7 t/cm^2 , a jej ciągliwość nie mniej niż 10%.

§. 11. 9. Ciągliwość mierzyć należy na pręcie próbnym o długości wymierzalnej $\sqrt{80 F}$. F oznacza powierzchnię przekroju poprzecznego prętu, która nie może wynosić więcej niż 6 cm^2 .

Ponieważ, jak widzieliśmy, nietylko współczynnik wytrzymałości $\mu = DD_1$ (rys. 43.) i przedłużenie ΔL mają wpływ na zachowanie się materiału względem wstrząśnień, ale i wielkość pow. $OBDF_1$, więc też Tetmajer uważa tę powierzchnię $F' = OBDF_1$ jako znamię dobroci materiału. Możemy przytem wogóle napisać

$$F' = \eta \mu \Delta L \quad (41)$$

Spółczynnik η , który nazywamy pełnością wykresu (n. *Völligkeitsgrad*) jest dla pewnych materiałów prawie stały, a wtedy jest praca możliwa materiału wprost proporcjonalna do iloczynu ze współczynnika wytrzymałości przez przedłużenie.

Doświadczenia Steinera wykazały, że przy niskiej ciepłocie maleje ciągliwość. I tak n. p. wynosiło przedłużenie przy przerwaniu:

dla	żelaza spawanego	stali Martina	stali Tomasa
przy norm. ciepłocie	18·5	30·5	30·5%
w ciepłocie —110 do —50°	15·0	17	17

A zatem wytrzymałość wprawdzie wzrasta przy bardzo niskiej ciepłocie, ale ciało staje się kruchem. Zwłaszcza uszkodzone żelazo zlewne i niektóre gatunki spawanego stają się przy bardzo niskiej ciepłocie kruche, jak szkło; nieuszkodzone zachowuje się znacznie lepiej.

§. 22. Pewność i natężenie dopuszczalne.

Ponieważ, jak wiemy, współczynnik wytrzymałości nie da się dokładnie wyznaczyć, lecz jest tylko przeciętną wartością współczynników, w praktyce się trafiających, ponieważ wiele pobocznych lub przypadkowych wpływów, działających niekorzystnie na ciało badane, nie da się obliczyć, ponieważ wreszcie wszystkie materiały z wyjątkiem chyba kruszców szlachetnych, podlegają zniszczeniu zwłaszcza pod wpływem wilgoci i powietrza, a więc materiał staje się gorszym lub też przekrój mniejszym wskutek rdzewienia, ponieważ możliwe są błędy w materiale, których nie można uniknąć ani spostrzec, więc z tych powodów nie dozwalamy nigdy w zeskładach budowlanych wzrosnąć natężeniu aż blisko współczynnika wytrzymałości, lecz obliczamy przekroje w ten sposób, aby natężenie było $\frac{1}{n}$ wytrzymałości i nazywamy to natężenie τ natężeniem dopuszczalnym (n. *zulässige Spannung*, fr. *effort de sécurité*, an. *safe stress, strain*, r. допускаемое напряжение), a liczbę n współczynnikiem pewności (n. *Sicherheitsgrad*, fr. *coefficient de sécurité*, an. *factor of safety*, r. коэффициент прочности, запаса), a zatem

$$\tau = \frac{\mu}{n} \quad \dots \quad 42)$$

Spółczynnik pewności n obieramy tem większy, im większym wstrząśnieniom ulega zeskład, im dłużej ma trwać i im mniej dokładnie możemy obliczyć siły działające i wytrzymałość materiału. Obieramy przytem taki współczynnik pewności, aby $\tau = \frac{\mu}{n}$ nie przekraczało granicy sprężystości. Uwzględniając te wszystkie okoliczności obieramy zwykle w praktyce dla współczynnika pewności n następujące wartości:

Tablica VII.

Materiał	Spółczynnik pewności n			
	budowle tymczasowe	zwykle zeskłady w budownictwie	mosty i dachy	maszyny (wielkie wstrząśnienia)
Drzewo	6	7	8	10
Kamień, cegła, mur	4	5	6	7
Beton	—	20	25	30
Liny	—	5	6	7
Szkoło	4	5	6	7
Szkoło	—	4	—	—
Żelazo spawane lub zlewne, blacha i stal	3 do 4	4	5 do 6	7 do 8
Żelazo lane	—	7	8	10

Francuzi w inny sposób wyznaczają natężenie dopuszczalne. Sądzą oni słusznie, że w najniekorzystniejszych warunkach nie powinno natężenie przekraczać granicy sprężystości, bo po jej przekroczeniu występują natężenia trwałe, zmiana układu wzajemnego drobin, która gdyby się częściej powtarzała, mogłaby doprowadzić do przerwania ciała. Dlatego też przyjmują Francuzi natężenie dopuszczalne τ równe m tej części natężenia przy granicy sprężystości α , a więc $\tau = \frac{\alpha}{m}$ 43) i nazywają m współczynnikiem pewności, przyjmując $m = \frac{5}{3}, 2$ lub 3 .

Zarzucić jednak musimy temu sposobowi wyznaczania natężenia dopuszczalnego, że wyznaczenie granicy sprężystości jest bardzo niepewnem, że kilkakrotne nawet przekroczenie granicy sprężystości nie grozi katastrofą, a przy osiągnięciu współczynnika wytrzymałości ciało się przerywa, że nareszcie są ciała, nie mające wcale granicy sprężystości. Dlatego też lepiej przyjmować jako natężenie dopuszczalne $n\alpha$ część współczynnika wytrzymałości, przytem jednak trzeba dobierać takie n , aby to natężenie leżało znacznie niżej granicy sprężystości.

Co do kamieni zwrócić tu musimy uwagę, że na ciśnienie inaczej się zachowują monolity, a inaczej kamienie w murze lub w sklepieniu. Gdy dla monolitów z kamienia bardzo twardego przyjmują nieraz $n=7$, z miększego $n=10$, to dla muru zwykle przyjmuje się $n=20$, a dla sklepień nawet $n=40$ do 60 .

Znając μ i n obliczymy łatwo z równania 42) współczynniki wytrzymałości, które poniżej podajemy dla najważniejszych materiałów, zaokrągliwszy je według tego, jak je zwykle w praktyce obieramy.

Tablica VIII.

M a t e r y a ł	N a t e ̄ z e n i e d o p u s z c z a l n e t w k g / c m ²							
	budowle tymczasowe		zwykłe zeszkłady budowlane		mosty i dachy		maszyny (wielkie wstrząśnienia)	
	rozciąganie	ściskanie	rozciąganie	ściskanie	rozciąganie	ściskanie	rozciąganie	ściskanie
Bazalt	—	200	4	60	—	—	—	—
Beton	—	—	3	25	2	20	—	—
Cegła (wypalona)	—	—	—	8	—	—	—	—
Cement	—	—	4	30	—	—	—	—
Cynk blacha	—	—	200	—	—	—	—	—
Dolomit	—	—	2	40	2	35	—	—
Drzewo bukowe równoleg. do włókien	120	90	100	80	90	75	60	45
" " prostop. " "	30	50	28	45	25	40	20	30
" " dębowe równoleg. " "	120	90	100	80	90	75	60	45
" " prostop. " "	26	50	23	45	20	40	16	30
" " szpilki. równoleg. " "	120	80	100	75	90	70	60	40
" " prostop. " "	25	18	22	15	18	12	15	10
Granit	—	—	5	60	4	40	—	—
Gneis	—	—	5	35	4	30	—	—
Glin	—	—	400	—	—	—	—	—
Konopne liny	100	—	—	—	—	—	—	—
Kwarcyt	—	—	—	35	—	30	—	—

Łupek	—	—	—	35	—	—	—	—	—
Marmur	—	—	3	20	—	—	—	—	—
Miedź lana	—	—	200	—	—	—	—	—	—
" kuta	—	—	400	—	—	—	—	—	—
Mur ceglany na cemencie	—	—	11	—	10	—	—	—	—
" " " wapnie	—	—	7	—	6	—	—	—	—
" kamienny " cemencie	—	—	14	—	13	—	—	—	—
" " " wapnie	—	—	10	—	9	—	—	—	—
Porfir	—	—	—	60	—	—	—	—	—
Syenit	—	—	—	55	—	—	—	—	—
Stal bardzo miękka	—	—	1 100	1 100	1000 do 900	1000 do 900	800	800	800
" miękka	—	—	1 200	1 200	1100 " 1000	1100 " 1000	900	900	900
" twarda	—	—	1 600	1 600	1500 " 1200	1500 " 1200	1 100	1 100	1 100
" bardzo twarda	—	—	—	—	1800 " 1500	1800 " 1500	1 400	1 400	1 400
" niklowa miękka	—	—	—	—	1100 " 1000	1100 " 1000	900	900	900
" " średnia	—	—	—	—	1700 " 1600	1700 " 1600	1 300	1 300	1 300
Szkło dęte	—	—	90	—	—	—	—	—	—
" lane	—	—	55	200	—	—	—	—	—
Wapień	—	—	2	30	1	25	—	—	—
Żelazo lane	200	750	250	700	200	600	130	300	300
" spawane	1 200	1 000	1 000	1 000	800 do 700	800 do 700	550	550	550
" zlewne	1 300	1 100	1 100	1 100	900 " 800	900 " 800	650	650	650
" blacha	1 100	—	950	—	750 " 650	—	500	—	—
" drut	1 400	—	1 200	—	1 000	—	700	—	—

Wyższe liczby dla mostów oznaczają natężenie dopuszczalne dla dźwigarów głównych, a niższe dla części drugorzędnych.

Chcąc według poprzedniego obliczyć potrzebny przekrój części zeskładu, szukamy największej siły P , która działa na tę część zeskładu w najniekorzystniejszym wypadku i otrzymujemy dla natężenia dopuszczalnego τ przekrój

$$F = \frac{\text{najw. } P}{\tau} \dots \dots \dots 44)$$

Normy, wypracowane przez austr. tow. inżynierów i architektów w r. 1902, zawierają następujące natężenia dopuszczalne.

Tablica IX.

A) Żelazo, drzewo i szkło.	Rozciąganie kg/cm ²	Ściskanie kg/cm ²
1. Żelazo spawane i miękkie żelazo zlewne	1 000	1 000
2. „ lane	200	600
3. Drzewo dębowe i bukowe	100	70
4. „ sosnowe, świerkowe, jodłowe, modrzewiowe	80	60
5. Szkło: a) lane	—	70
b) dęte	—	70

B) Ciosy i filary ciosowe.	Ściskanie w kg/cm ²				
	Materyał	klasa muru I.	II a	II b	II c
1. Granit i porfir	100	60	50	25	—
2. Kamienie twarde	70	40	30	—	—
3. „ średnio twarde	50	30	25	—	—
4. „ miękkie	35	20	15	—	—
5. „ bardzo miękkie	15	10	—	—	—

- Klasa I. Pojedyncze kostki albo płyty dla 15-krotnej pewności,
 „ II a Filary i słupy, których najmniejszy wymiar poprzeczny wynosi najmniej 1/4 do 1/8 wysokości,
 „ II b Ciosy, wystawione na zewnątrz, słupy i cieńsze filary obciążone, których najmniejszy wymiar poprzeczny wynosi 1/8 do 1/12 wysokości,
 „ II c Całkiem cienkie słupy i filary obciążone, których średnica lub najmn. wymiar poprzeczny wynosi mniej, niż 1/12 wysokości.

C) Mur ceglany i kamienny.	Ściskanie dopuszczalne w kg/cm ²		
	Rodzaj muru	Klasa muru	a) b) c)
1. Mur ceglany na wapnie		5	2·5 —
2. „ „ „ cemencie romańskim		7·5	5 —
3. „ „ „ portlandzkim		10	7·5 5
4. „ kamienny albo mieszany na wapnie		4	— —
5. „ „ „ „ cemencie romań.		5	— —
6. „ mieszany albo mur z kam. warstw. na cem. portl.		8	— —

Rodzaj muru	Ściskanie dopuszczalne w kg/cm^2			
	Klasa muru	a)	b)	c)
7. Mur kamienny z silnego obrob. kamienia na cemencie portlandzkim	10	—	—	—
8. „ z cegiel szlamowanych lub filarowych na cem. portlandzkim	12	8	6	—
9. „ zendrówek na cem. portl.	20	15	10	—
10. Ławy fundamentowe z betonu (1:5)	5	—	—	—
11. Mury betonowe z cem. portl. o grub. ≥ 45 m w stosunku mieszaniny:				
a) 500 <i>kg</i> na 1 m^3 żwiru i piasku (1:3)	18	—	—	—
b) 325 „ „ „ „ „ (1:4)	12	—	—	—
c) 225 „ „ „ „ „ (1:8)	8	—	—	—
d) 175 „ „ „ „ „ (1:10)	6	—	—	—
a) Mury o grubości ≥ 45 <i>cm</i> jakoteż filary, których najmniejszy wymiar poprzeczny wynosi $\frac{1}{4}$ wysokości.				
b) Mury poniżej 45 <i>cm</i> grubości, jakoteż filary o stosunku wymiaru $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$.				
c) Filary o najmniejszym wymiarze przekroju ≥ 30 <i>cm</i> a stosunku $\frac{1}{8} - \frac{1}{12}$ wysokości.				

D) Schody kamienne.

Przy schodach kamiennych wynosi natężenie dopuszczalne $\frac{1}{6}$ współczynnika na zginanie.

E) Sklepienie ceglane, betonowe i ciosowe.

Rodzaj muru	Dopuszczalne	
	w kg/cm^2	
	ściskanie	rozciąganie
1. Sklepienie ceglane na wapnie	5	0
2. „ „ „ cemencie romańskim	7.5	0
3. „ „ „ „ portlandzkim	10	1
4. „ z cegiel szlamowanych lub filarowych na cem. portlandzkim	12	1
5. „ z zendrówek na cem. portlandzkim	20	—
6. „ betonowe z cemen. portl. (1:3) (500 <i>kg</i> na 1 m^3)	18	3
7. „ betonowe z cem. portl. z wkładkami żelaznymi (1:3)	21	8
8. „ betonowe z cem. portl. (1:5, 325 <i>kg</i> na 1 m^3)	12	2
9. „ z ciosów lepszego gatunku na cemencie portlandzkim	30	1

Uwaga. Przy 1, 2 może być użyty czysty ostry drobnziarnisty piasek kopany, przy 3, 4, 5 i 9 tylko takiż piasek rzeczny. Żwir do betonu czysty o wielkości ziaren < 4 *cm* średnicy.

F) Grunt budowlany.

Ściskanie dopuszczalne
kg/cm²

- | | |
|---|-----|
| 1. Głina i il bardzo wilgotny, miałki piasek w warstwie 1 m grubości, jeżeli zapobieżę się bocznemu wysunięciu do | 1·5 |
| 2. Głina i il średniej zwięzłości, piasek miernie wilgotny, albo ilasty suchy piasek do | 2·0 |
| 3. Opoka, il zbity, piasek suchy nie ilasty do | 4·0 |
| 4. Zbity gruboziarnisty piasek lub żwir do | 6·0 |
| 5. Pulchna ziemia wodnista, fundamentowanie przy użyciu pali na cm ² przekroju pala do | 25 |

Berlińskie prezydyum policji (1881) przyjmuje następujące natężenia dopuszczalne.

Tablica X.

M a t e r y a ł	Natężenie dopuszczalne w kg/cm ²	
	rozciąganie	ściskanie
Żelazo spawane	750	750
„ lane	250	500
Blacha falista żelazna	500	500
„ cynkowa	200	200
Drut żelazny	1 200	—
Drzewo dębowe i bukowe	100	80
„ „ „ bud. tymczasowe	120	90
„ sosnowe	100	60
„ „ bud. tymczasowe	120	70
Granit	—	45
Piaskowiec wedle twardości	—	15 do 30
Wapień Rüdorsdorfski w ciosach	—	25
Mur z wapiennych kamieni na wapień	—	5
Zwykły mur ceglany	—	7
Mur ceglany na cemencie	—	11
Najlepszy mur z zendrówek na cemencie	—	12 do 14
Mur z wapieni porowatych	—	3 „ 6
Dobry grunt budowlany	—	2·5 „ 5

Rozporządzenie min. pruskiego robót publicznych
z r. 1910:

Tablica XI.

M a t e r y a ł	Nacężenie dopuszczalne w kg/cm^2	
	rozciąganie	ściskanie
1. Żelazo zlewne w dźwigarach stropowych i schodowych. Rozpiętość l , odległość między środkami łożysk	1 200	1 200
2. Żelazo zlewne w słupach	1 200	1 200
3. " " przy dokładnem obliczeniu dla najniekorzystniejszych warunków	1 400	1 400
4. Żelazo zlewne w dachach, ścianach, podciągach przy uwzględnieniu ciężaru własnego, zmiennego i śniegu	1 200	1 200
5. Detto przy równoczesnem najniekorzystniejszem działaniu ciężaru własnego, zmiennego, śniegu i wiatru $150 kg/m^2$	1 400	1 400
6. Wyjątkowo dla dachów, gdy zachodzi pewność najściślejszym wymaganiom odpowiadającego obliczenia konstrukcyi i wykonania w warunkach ad 5.	1 600	1 600
7. Żelazo zlewne w kotwach	800	—
8. Dla żelaza spawanego należy wartości obniżyć o 10%. Jeszcze bardziej należy obniżyć przy starym materiale.		
9. Żelazo lane w płytach, łożyskach	—	1 000
10. " " w słupach	—	500
11. Stal kuta	1 400	1 400
12. Drzewo dębowe	100	80
13. " sosnowe	100	60
14. a) Granit w ciosach łożyskowych	—	60
b) " w filarach i sklepieniach	—	45
c) " w bardzo smukłych filarach i słupach	—	25
15. a) Piasek w ciosach łożyskowych	—	30
b) " w filarach i sklepieniach	—	25
c) " w bardzo smukłych filarach i słupach	—	15
16. a) Wapień i marmur w ciosach łożyskowych	—	30
b) Wapień i marmur w filarach i sklepieniach	—	20
c) Wapień i marmur w bardzo smukłych filarach i słupach	—	12
17. Mur z cegieł zwykłych na zaprawie wapiennej 1:3	—	do 7
18. Mur z zendrówek na zapr. hydraulicznej 1:2:7	—	12—15

M a t e r y a ł	Nateżenie dopuszczalne w kg/cm^2	
	rozciąganie	ściskanie
19. Mur z zendrówek na cemencie (1:3) . . .	—	20—30
20. „ z cegiel dziurkowatych	—	3—6
21. „ z piaskowca sztucznego na zapr. wa- piennej	—	do 7
22. „ z piaskowca sztucznego na zapr. hy- draulicznej	—	12—15
23. „ z kamienia łamanego na zapr. wa- piennej	—	do 5
24. a) Ławy fundamentów z betonu nasypa- nego	—	6—8
b) Ławy fundamentów z betonu ubijanego	—	10—15
25. Dobry grunt budowlany	—	3—4

Uwaga. Cyfry wyższe przy l. 18 do 25 odnoszą się do przypadków, w których przeprowadzono ściśle obliczenie statyczne przy przyjęciu możliwie niekorzystnych obciążeń i warunków.

Rozporządzenie min. austriackiego dla mostów kolejowych z r. 1904. §. 8. c. 12. przepisuje następane nateżenia dopuszczalne.

Tablica XII.

Rodzaj muru i betonu	Największe nateżenie dopuszczalne kg/cm^2
<i>Mur na zaprawie ze sztucznego cementu portlandzkiego.</i>	
1. Mur z kamienia ciosowego (z uwzględnieniem postanowień ograniczających następującego ustępu a)	30
2. Ciosy łóżyskowe (z uwzględnieniem postanowień ograniczających następujących ustępów a) i b)	50
3. Mur warstwowy	15
4. Mur z kamienia łamanego (czysty albo obłożony, przy wielkich wysokościach, zaopatrzony także w ciągłe warstwy muru z kamienia ciosowego lub warstwowego) . .	10
5. Mur z cegiel szlamowanych najlepszego gatunku, z tak zwanych cegiel podwójnie szlamowanych lub cegiel filarowych	12
6. Mur z zendrówek najlepszego gatunku	20
7. Beton mieszany w stosunku 500 kg cementu na $1 m^3$ piasku i żwiru (objętościowy stosunek mieszania 1:3)	18
8. Beton mieszany w stosunku 325 kg cementu na $1 m^3$ piasku i żwiru (objętościowy stosunek mieszania 1:5)	12
9. Beton mieszany w stosunku 225 kg cementu na $1 m^3$ piasku i żwiru (objętościowy stosunek mieszania 1:8)	8
10. Beton mieszany w stosunku 175 kg cementu na $1 m^3$ piasku i żwiru (objętościowy stosunek mieszania 1:10)	6

Do tabeli powyższej postanawia się:

a) Ciśnienie na mur z kamienia ciosowego i na ciosy łożyskowe nie może w żadnym razie wynosić więcej, niż $\frac{1}{20}$ część wytrzymałości na ciśnienie odnośnego materiału kamiennego;

b) przy ciosach łożyskowych należy dopuszczalne ciśnienie oznaczyć ze względu na powierzchnię płyty łożyskowej dźwigaru.

Przykłady. 1. Jaką średnicę dać należy prętowi okrągłemu żelaznemu wiązania dachowego, jeżeli największa siła ciągnąca $P=6 t$?

Według tabl. VIII. przyjmujemy $\tau=800 \text{ kg/cm}^2$, a zatem wedle 44)

$$F = \frac{6000}{800} = 7,5 \text{ cm}^2, \text{ a stąd } d = \sqrt{\frac{4 \cdot 7,5}{\pi}} = 3,09 \text{ cm.}$$

Przyjmujemy więc $d=31 \text{ mm}$.

2. Niski słup drewniany o przekroju kwadratowym niesie $15 t$; wyznaczyć wymiary, jeżeli budowla jest tymczasową a drzewo miękkie.

Według tabl. VIII. przyjmujemy $\tau=80 \text{ kg/cm}^2$, a zatem wedle 44)

$$F = \frac{15000}{80} = 187,5 \text{ cm}^2, \text{ stąd bok } b = 13,7 \text{ cm, zamiast czego przyjmujemy } b=14 \text{ cm.}$$

3. Długość boku fundamentu kwadratowego słupa murowanego wynosi $1 m$, jaki ciężar może on przenieść na grunt, dla którego $\tau=2,5 \text{ kg/cm}^2$?

$$P = 100 \cdot 100 \cdot 2,5 = 25000 \text{ kg} = 25 t.$$

§. 23. Doświadczenia Wöhlera i Bauschingera.

Badania nad wytrzymałością materiałów, a mianowicie liczne doświadczenia Wöhlera, urządzone z polecenia pruskiego ministerstwa w latach 1859 do 1870 i późniejsze Bauschingera i Tetmajera, okazały, że jeżeli ciało łamie się przy jednorazowym obciążeniu przy natężeniu μ , to gdy ciało to obciążać będziemy bardzo często, złamie się już przy mniejszym natężeniu. Dalej wykazały doświadczenia, że ciało łamie się tem prędzej, im większą jest różnica między największym i najmniejszym natężeniem i im większą jest największość natężenia. Z tego wynika, że przy obliczaniu przekroju musimy uwzględnić nie tylko najw. P , ale i najmn. P , zwłaszcza jeżeli między temi wartościami jest znaczna różnica i obciążenie często się zmienia. Ten wypadek zachodzi szczególnie przy mostach, gdy przeciwnie w zespołach zwykłych w budownictwie w mniejszym występuje stopniu i wystarcza tam zwykle zachowanie dawnego sposobu uwzględniania tylko najw. P .

Ponieważ jednak czasami, zwłaszcza przy obliczaniu dachów, mamy do czynienia z obciążeniem zmiennem, więc zasta-

nowimy się tu w krótkości nad doświadczeniami Wöhlera, które wykazały następujące prawidła:

1. Gdy w pręcie powstają wiele razy nateżenia, wywołane obciążeniem zmiennem, przerwanie następuje już przy mniejszem nateżeniu, niż gdyby nateżenie było niezmiennem.

2. Jeżeli nateżenie zmienia się między pewnymi granicami najmniejszością i największością, to potrzebną jest tem większa ilość zmian nateżenia do przerwania prętu, im mniejszą jest największość nateżenia.

N. p. przy pewnym szeregu doświadczeń zmieniało się nateżenie osi żelaznej od 0 do ν , a ilość zmian nateżenia potrzebna do przerwania była n .

Doświadczenie wykazało, że

$$\begin{array}{cccc} \text{dla } \nu = & 4500 & 3500 & 2500 & 2200 \text{ kg/cm}^2 \\ n = & 170000 & 450000 & 1500000 & n > 4820000 \end{array}$$

3. Jeżeli największość nateżenia pozostaje niezmienną, to tem większej potrzeba ilości zmian nateżenia do przerwania prętu, im większą jest najmniejszość nateżenia.

Niechaj n. p. ν_0 będzie najmniejsze nateżenie, ν_1 największe nateżenie a n liczba zmian nateżenia potrzebna, aby się pręt przerwał, to doświadczenia okazały dla stali, że

$$\begin{array}{cccc} \text{dla } \nu_0 = & 1210 & 2430 & 3660 & 4820 \text{ kg/cm}^2, \\ \text{a } \nu_1 = & 7300 & 7300 & 7300 & 7300 \text{ " } , \\ \text{potrzeba, aby } n = & 0,06 & 0,15 & 0,40 & n > 19,67 \text{ milionów.} \end{array}$$

4. Jeżeli największość nateżenia przy stałej najmniejszości nie dosięga pewnej granicy, to ciało się nie przerywa, choćby ilość zmian nateżenia była jak największą.

To nateżenie graniczne nazywamy współczynnikiem wytrzymałości ustawicznej (n. *Arbeitsfestigkeitskoeffizient*, fr. *limite de non-rupture*, an. *working stress*), bo nawet dla ustawicznych zmian nateżenia pręt przy tem nateżeniu się nie przerwie.

5. Wytrzymałość ustawiczna jest tem większą, im większą jest najmniejszość nateżenia.

Nazwawszy α_m najmniejszość nateżenia a α współczynnik wytrzymałości ustawicznej, otrzymano z doświadczeń z żelazem spawanem

$$\begin{array}{cccc} \text{dla } \alpha_m = & -1700 & 0 & +1750 & +3290 \text{ kg/cm}^2 \\ \alpha = & +1700 & +2340 & +3200 & +3290 \text{ " } \end{array}$$

Na podstawie tych doświadczeń ustawili uczeni niemieccy wzory, wedle których można dokładnie wyznaczyć wytrzymałość ustawiczną, a przyjmując n tą pewność także nateżenie dopuszczalne z uwzględnieniem największości i najmniejszości nateżenia.

Inżynierowie francuscy nie przyjęli tych wzorów, lecz zarzucają im, że doświadczenia Wöhlera nie były tak liczne, aby można ustawiać na ich podstawie tak dokładne wzory, że zresztą zmiany w nateżeniu następowały zbyt szybko tak, że drobiny nie miały czasu jeszcze wrócić do pierwotnego położenia, a już nastąpiła nowa zmiana nateżenia.

Profesor monachijski Bauschinger robił w tym względzie dalsze doświadczenia z żelazem spawanem i na ich podstawie doszedł do następnego wniosku.

Zmiany nateżenia między nateżeniem równem zeru a nateżeniem przy granicy sprężystości nie sprowadzają nigdy przerwania, jeśli materyał nie posiada błędów i jeżeli granica sprężystości nie została sztucznie podwyższoną.

Wynik ten doświadczeń Bauschingera dostarczył inżynierom francuskim nowego argumentu przeciwko uwzględnianiu przy obliczaniu przekroju nie tylko najw. P ale i najmn. P . Wychodząc z zasady, że nateżenie dopuszczalne ma być n tą częścią nateżenia przy granicy sprężystości, twierdzą oni, że to, co się dzieje poza granicą sprężystości, niema wpływu na nateżenie dopuszczalne. A że zmiany w nateżeniu mają wpływ na wytrzymałość dopiero wtedy, gdy największe nateżenie przekracza granicę sprężystości, więc zdaniem Francuzów nie trzeba ich uwzględniać.

Uznając po części zarzuty inżynierów francuskich za słuszne, pomimo tego wyznaczając nateżenie dopuszczalne wedle wzoru 42) $\tau = \frac{\mu}{n}$ a nie wedle wzoru 43) $\tau = \frac{\kappa}{m}$, uwzględniać powinniśmy zmiany w nateżeniu na podstawie doświadczeń Wöhlera i Bauschingera.

§. 24. Wyznaczenie wymiarów według Winklera.

Stosunek współczynnika wytrzymałości ustawicznej do najmniejszości nateżenia α_m możemy wykreślić przedstawić. Wykreślmy jako rzędne współczynniki wytrzymałości ustawicznej α

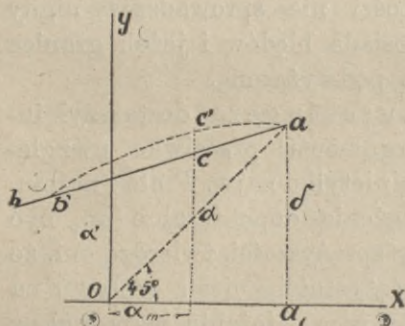
(rys. 45), jako odcinki najmniejszości natężenia α_m , to dla rozmaitych wartości α_m i a otrzymamy rozmaite punkty. Punkty te wszystkie połączone dają linię krzywą, zamiast której przyjmuje Winkler w celu uproszczenia wzorów prostą ab , nachyloną do osi OX . Chociaż prosta ab mało różni się od krzywej $ac'b'$, jednak zawsze wyniki, otrzymane na podstawie prostej ab , musimy uważać tylko jako przybliżone.

Równanie prostej ab będzie

$$a = a' + c \alpha_m \dots \dots \dots 45)$$

jeżeli a' i c oznaczać będą ilości stałe, które na podstawie doświadczeń wyznaczymy. Jeżeli w tem równaniu przyjmiemy $\alpha_m = 0$, to $a = a'$; natężenie to nazywamy współczynnikiem wytrzymałości pierwotnej (n. *Ursprungsfestigkeitskoeffizient*, an. *primitiv safe stress*), bo przyjmujemy, że przed działaniem sił zewnętrznych natężenie pierwotne było równe zeru.

Poprowadźmy z punktu O prostą pod 45° do osi OX , to otrzymamy punkt przecięcia się a tej prostej z prostą ab . Z tego punktu spuścimy prostopadłą aa_1 , to będzie $aa_1 = \delta = Oa_1$, a więc dla $\alpha_m = \delta$ jest $a = Oa_1 = \delta$. Natężenie δ nazywamy współczynnikiem wytrzymałości spoczynkowej (n. *Tragfestigkeitskoeffizient*, an. *statical*



Rys. 45.

breaking strain). Jest to natężenie, przy którym ciało łamie się przy stałym niezmiennem obciążeniu.

Jeżeli za a i α_m podstawimy δ w rów. 45), otrzymamy $\delta = a' + c \delta$ czyli $a' = \delta (1 - c)$. Podstawmy teraz tę wartość za a' w rów. 45), a otrzymamy $a = \delta (1 - c) + c \alpha_m \dots \dots \dots 46)$

Z doświadczeń otrzymano dla żelaza $c = 0,45$, dla stali $c = 0,56$, możemy więc napisać dla żelaza:

$$a = 0,55 \delta + 0,45 \alpha_m \dots \dots \dots 47)$$

Wszystko to odnosi się do wytrzymałości na rozciąganie; dla ściskania otrzymamy podobną linię na dole pod osią OX i równanie podobne jak 45), stałe a' i c będą tylko inne.

Przypuśćmy teraz, że chcemy wyznaczyć przekrój belki, przyjmując n -tą pewność. Jeżeli a jest współczynnikiem wytrzymałości ustawicznej, to według rów. 42) i 44) $\alpha = n \frac{\text{najw. } P}{F}$, gdzie F oznacza przekrój, P siłę, działającą w osi. Również możemy napisać $\alpha_m = n \frac{\text{najmn. } P}{F}$, jeżeli α_m oznacza najmniejszość nateżenia, δ jest współczynnikiem wytrzymałości jednorazowej, więc dla n -tej pewności $\frac{\delta}{n} = \tau$. Podstawmy te wartości w rów. 46), a otrzymamy $\alpha = n \frac{\text{najw. } P}{F} = n \tau (1-c) + c n \frac{\text{najmn. } P}{F}$.

Pomnożmy całe równanie przez F , a podzielmy przez $n \tau (1-c)$, to otrzymamy:

$$F = \frac{\text{najw. } P}{\tau (1-c)} - c \frac{\text{najmn. } P}{\tau (1-c)}.$$

Zastosujmy to do obciążenia zmiennego i nazwijmy siłę, wywołaną ciężarem stałym P_0 , a ciężarem zmiennym P_1 , to $\text{najw. } P = P_0 + P_1$, a $\text{najmn. } P = P_0$, więc $\text{najw. } P - c \text{ najmn. } P = P_0 + P_1$, a stąd $F = \frac{P_0}{\tau} + \frac{P_1}{\tau (1-c)}$.

Jeżeli nateżenie zmienne jest raz dodatnie, drugi raz ujemne i jeśli nazwiemy P_2 największą ujemną siłę, wywołaną ciężarem zmiennym, bez względu na znak, to wtedy $\text{najw. } P = P_0 + P_1$, zaś $\text{najmn. } P = P_0 - P_2$, zatem $\text{najw. } P - c \text{ najmn. } P = P_0 + P_1 - c P_0 + c P_2$,

$$\text{więc } F = \frac{P_0}{\tau} + \frac{P_1}{\tau (1-c)} + \frac{c P_2}{\tau (1-c)}.$$

Nazwijmy $\tau = \tau_0$, a $\tau (1-c) = \tau_1$, to $F = \frac{P_0}{\tau_0} + \frac{P_1}{\tau_1}$, gdy nateżenie nie zmienia znaku, zaś, gdy jest dodatnie i ujemne, to $F = \frac{P_0}{\tau_0} + \frac{P_1}{\tau_1} + \frac{P_2}{\tau_2}$, przyczem $\tau_2 = \frac{\tau (1-c)}{c}$. P_0 jest dodatnie, jeżeli ma znak ten sam, co P_1 , P_2 zaś jest dodatnie, jeżeli ma znak przeciwny.

Wstawmy wartość za c i τ , to otrzymamy dla żelaza, jeżeli przeważa wyciąganie:

$$\left. \begin{array}{l} F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{770} + \frac{P_2}{1700} \text{ cm}^2, \\ \text{zaś jeżeli przeważa ściskanie:} \\ F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{720} + \frac{P_2}{1800} \text{ " } \end{array} \right\} \dots \dots \dots 48)$$

Wzorów tych możemy używać w budownictwie, dla mostów zaś trzeba uwzględnić jeszcze wstrząśnienia, sprawione ciężarem ruchomym, a to robimy w ten sposób, że ciężar ruchomy mnożymy współczynnikiem większym od jedności: 1,3 dla mostów kolejowych 1,2 dla drogowych a 1,1 dla kładek. Wtedy otrzymamy dla mostów kolejowych żelaznych, jeżeli przeważa wyciąganie:

$$\left. \begin{array}{l} F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{590} + \frac{P_2}{1300} \text{ cm}^2, \\ \text{jeżeli zaś przeważa ściskanie:} \\ F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{550} + \frac{P_2}{1380} \text{ " } \end{array} \right\} \dots \dots \dots 49)$$

dla mostów drogowych żelaznych:
jeżeli przeważa wyciąganie:

$$\left. \begin{array}{l} F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{640} + \frac{P_2}{1400} \text{ cm}^2, \\ \text{zaś jeżeli przeważa ściskanie:} \\ F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{600} + \frac{P_2}{1500} \text{ " } \end{array} \right\} \dots \dots \dots 50)$$

dla kładek żelaznych:
jeżeli przeważa wyciąganie:

$$\left. \begin{array}{l} F = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{1550} \text{ cm}^2, \\ \text{zaś jeżeli przeważa ściskanie:} \\ F = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{650} + \frac{P_2}{1640} \text{ " } \end{array} \right\} \dots \dots \dots 51)$$

W A u s t r y i obowiązuje rozporządzenie ministeryalne z r. 1904 dla mostów żelaznych, którego §. 8. odnoszący się do mostów kolejowych brzmi:

Dopuszczalne natężenie materiałów budowlanych i gruntu w fundamencie.

A. Żelazo i stal.

1. Przy mostach kolejowych największe natężenia żelaza i stali w kg/cm^2 przekroju użytecznego, t. j. pozostającego po odtrąceniu dziur

na nity i części niewspółdziałających, nie mogą przekraczać wartości granicznych, podanych w następującej tablicy.

Tablica XIII.

Oznaczenie obciążenia i rodzaj natężenia	Dopuszczalne najwyższe natężenie kg/cm^2	
	Żelazo spawane	Żelazo zlewne
<p>a) Przyjmując obciążenie określone w §. 7 dla mostów kolejowych z wyłączeniem działań, wywołanych przez wiatr, boczne wahania, boczne ciśnienia i hamowanie.</p>		
1. Natężenie przy wyciąganiu lub ściskaniu przy rozpiętościach od 0 m do 10 m według wzoru	700+2 l	750+5 l
" " " 10 " " 20 " " " "	700+2 l	760+4 l
" " " 20 " " 40 " " " "	700+2 l	800+2 l
" " " 40 " " 80 " " " "	720+1,5 l	840+l
" " " 80 " " 120 " " " "	770+l	840+l
" " " " 120 " i wyżej " " "	820+0,5 l	840+l
do najwyższej " " "	900	1000
<p>b) Przyjmując wszystkie obciążenia, określone w §. 7 dla mostów kolei żelaznych.</p>		
5. Natężenie przy wyciąganiu lub ściskaniu	1000	1200

2. Przy mostach na gościńcach, na drogach, przy kładkach, dalej przy zeskładach chodnikowych mostów kolejowych największe natężenia żelaza i stali w kg/cm^2 przekroju użytecznego, t. j. pozostającego po odtrąceniu dziur na nity i części niewspółdziałających, nie mogą przekraczać wartości skrajnych, podanych w następującej tablicy.

Tablica XIV.

Oznaczenie obciążenia i rodzaj natężenia	Dopuszczalne najwyższe natężenie kg/cm^2	
	Żelazo spawane	Żelazo zlewne
<p>a) Przyjmując obciążenia, określone w §. 7 dla mostów drogowych, tudzież dla zeskładów i chodników z wyłączeniem działań, wywołanych przez wiatr.</p>		
1. Natężenie przy wyciąganiu i ściskaniu do najwyższej	750+2 l 900	800+3 l 1050
<p>b) Przyjmując wszystkie obciążenia, określone w §. 7 dla mostów drogowych.</p>		
5. Natężenie przy wyciąganiu lub ściskaniu	1000	1200

Metoda Winklera zaleca się wielką prostotą, nie jest jednak zupełnie ścisłą, jak już to wspomnieliśmy. Dlatego też podajemy poniżej metodę dokładniejszą.

§. 25. Wyznaczenie wymiarów według Launhardta i Weyraucha.

Launhardt przyjmuje jako równanie linii $ac'b'$ (rys. 45).

$$\alpha - \alpha_m = \frac{\delta - \alpha}{\delta - \alpha'} \alpha \dots\dots\dots 52)$$

stąd widzimy, że różnica natężenia (n. *Spannungsdifferenz*) $\alpha - \alpha_m$ jest funkcją drugiego stopnia wytrzymałości ustawicznej α .

Podstawmy w równ. 52) $\alpha_m = 0$, to otrzymamy $\alpha = \alpha'$, dla $\alpha_m = \alpha$ jest $\alpha = \delta$. Dla tych dwóch wartości α_m otrzymujemy więc te same punkty, co w poprzednim paragrafie; dla innych wartości linia krzywa, wyrażona równ. 52), zgadza się dostatecznie z doświadczeniami Wöhlera.

Równanie to możemy inaczej napisać: $\alpha(\delta - \alpha') - \alpha_m(\delta - \alpha') = \alpha(\delta - \alpha)$, albo $\alpha\alpha' = \alpha_m(\delta - \alpha') + \alpha^2$, lub nareszcie

$$\alpha = \alpha' + \frac{\alpha_m}{\alpha}(\delta - \alpha') + \alpha' \left(1 + \frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} \frac{\alpha_m}{\alpha}\right) \dots\dots\dots 53)$$

Jeżeli teraz chcemy obliczyć wymiary belki, na którą działa w kierunku osi siła, zmieniająca się między granicami *najmn. P.* i *najw. P.*, a przypuszczamy *n^{ta}* pewność, to gdy

$$\frac{\alpha_m}{\alpha} = \frac{n \cdot \text{najmn. } P}{n \cdot \text{najw. } P} = \zeta, \dots\dots\dots 54)$$

$$a \quad F = \frac{n \cdot \text{najw. } P}{\alpha} = \frac{\text{najw. } P}{\tau}, \dots\dots\dots 55)$$

równanie 51) możemy napisać:

$$\alpha = \alpha' \left(1 + \frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} \zeta\right).$$

Doświadczenia Wöhlera okazały, że dla żelaza spawanego $\delta = 3290 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha' = 2190 \text{ kg/cm}^2$, więc $\frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} = \frac{3290 - 2190}{2190} = \frac{1}{2}$, a zatem $\alpha = \alpha' (1 + \frac{1}{2} \zeta)$, a gdy $\alpha = n \tau$, $\alpha = n \tau'$, to $\tau = \tau' (1 + \frac{1}{2} \zeta)$.

Dla $n = 3$ otrzymamy stąd

$$\tau = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \zeta\right) \text{ kg/cm}^2 \dots\dots\dots 56)$$

Dla stali miękkiej i bardzo miękkiej możemy przyjąć $\delta = 4500 \text{ kg/cm}^2$, a $\alpha' = 2700 \text{ kg/cm}^2$, więc $\frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} = \frac{4500 - 2700}{2700} = \frac{2}{3}$, a zatem dla $n = 3$ otrzymamy

$$\tau = 900 \left(1 + \frac{2}{3} \zeta\right) \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 57)$$

Dla stali średniotwardej możemy przyjąć $\delta = 6000 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha' = 3000 \text{ kg/cm}^2$, więc $\frac{\delta - \alpha'}{\alpha'} = \frac{6000 - 3000}{3000} = 1$, zatem dla $n = 3$

$$\tau = 1000 (1 + \zeta) \text{ kg/cm}^2 \dots \dots \dots 58)$$

Wzory poprzednie są tylko wtedy ważne, gdy *najw. P* i *najmn. P* mają te same znaki. W przeciwnym razie musimy uwzględnić dalsze doświadczenia Wöhlera nad wytrzymałością dwustronną α_1 (n. *Schwingungsfestigkeit*, an. *vibration safe strength*), t. j. wytrzymałością ustawiczną, dla której *najmn.* natężenia równa jest większości natężenia, lecz ma znak przeciwny.

Jeżeli natężenie jest naprzemian dodatnie i ujemne i waha się między wartościami α'' i α , przyczem α'' ma znak przeciwny znakowi α , a bez względu na znak $\alpha > \alpha''$, to analogicznie do rów. 52) da się tu według Weyrauch'a ustawić następne równanie, zgadzające się dostatecznie z wynikami doświadczeń:

$$\alpha = \frac{\alpha' - \alpha_1}{2\alpha' - \alpha_1 - \alpha} (\alpha + \alpha''), \dots \dots \dots 59)$$

przyczem wszystkie wartości brać należy bez względu na znak.

Jeżeli w tem równaniu podstawimy $\alpha'' = 0$, to $\alpha = \alpha'$,
a dla $\alpha'' = \alpha$ jest $\alpha = \alpha_1$.

Z rów. 59) otrzymamy

$$\alpha = \alpha' + (\alpha_1 - \alpha') \frac{\alpha''}{\alpha} = \alpha' \left(1 - \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} \frac{\alpha''}{\alpha}\right),$$

a ponieważ

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{\text{najmn. } P}{\text{najw. } P} = \zeta, \text{ to}$$

$$\alpha = \alpha' \left(1 - \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} \zeta'\right) \dots \dots \dots 60)$$

Dla żelaza spawanego otrzymał Wöhler

$$\alpha_1 = 1170 \text{ kg/cm}^2, \text{ więc } \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \frac{2190 - 1170}{2190} = \frac{1}{2},$$

a zatem dla $n=3$:

$$\tau = 700 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\text{najmn. } P}{\text{najw. } P} \right) = 700 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta' \right) \text{ kg/cm}^2. \quad (61)$$

Dla stali miękkiej i bardzo miękkiej możemy przyjąć $\alpha_1 = 1350 \text{ kg/cm}^2$, więc $\frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \frac{2700 - 1350}{2700} = \frac{1}{2}$, zatem dla $n=3$

$$\tau = 900 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta' \right) \text{ kg/cm}^2. \quad (62)$$

Dla stali średnio twardej możemy przyjąć

$\alpha_1 = 1500 \text{ kg/cm}^2$, więc $\frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \frac{3000 - 1500}{3000} = \frac{1}{2}$, zatem dla $n=3$ otrzymamy

$$\tau = 1000 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta' \right) \text{ kg/cm}^2. \quad (63)$$

Wstrząśnienia możemy uwzględnić, jak w poprzednim paragrafie, mnożąc dla wyznaczenia *najmn. P* i *najw. P* ciężar współczynnikami 1,3, 1,2 lub 1,1.

Przykłady.

Na pręt żelazny działa w osi siła ciągnąca $P_0 = 1t$, spowodowana własnym ciężarem zeskładu, ciężar zmienny wywołuje siłę $P_1 = 15t$. Jaką powierzchnię przekroju trzeba nadać temu prętowi:

Według metody Winklera otrzymamy z rów. (48):

$$F = \frac{1000}{1400} + \frac{15000}{770} = 0,71 + 19,48 = 20,2 \text{ cm}^2,$$

a według Weyraucha otrzymamy z rów. (56):

$$\tau = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1+15} \right) = 722 \text{ kg/cm}^2,$$

a z rów. (53)

$$F = \frac{16000}{722} = 2,22 \text{ cm}^2,$$

2. Ciężar staly sprawia w danym pręcie żelaznym ciągnienie 2,8 t, ciężar zmienny zaś *najw. P* = + 10 t, *najmn. P* = - 5 t. Jak wielki przekrój musi mieć ten pręt?

Według Winklera otrzymamy z rów. (48):

$$F = \frac{2800}{1400} + \frac{10000}{770} + \frac{5000}{1700} = 17,9 \text{ cm}^2,$$

a według Weyraucha z rów. (56):

$$\tau = 700 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{5000 - 2800}{10000 + 2800} \right) = 640 \text{ kg/cm}^2,$$

a z rów. (53)

$$F = \frac{12800}{640} = 20 \text{ cm}^2.$$

Z obu tych przykładów widzimy, że wymiary, otrzymane według wzorów Weyraucha, są większe, że więc Weyrauch przyjmuje mniejsze natężenia dopuszczalne, niż Winkler. Że wzory Weyraucha odpowiadają lepiej doświadczeniom Wöhlera, mówiliśmy już poprzednio.

Prócz tego Tetmajer ustanowił inne równania, odcinając ζ jako odcinki, a α jako rzędne i przyjmując, że krzywa α jest parabolą. Wpływ wyrazu z ζ^2 jest jednak tak mały*), że wystarczy używać dwu wyrazów, a wtedy otrzymujemy wzory Weyraucha.

§. 26. Natężenie dopuszczalne dla drzewa.

Doświadczenia Wöhlera ograniczały się tylko na żelazo i stal. Drzewa nie badano w ten sposób, jednak analogicznie przypuszczać możemy, że zmiany w natężeniu i tu będą miały podobny wpływ na wytrzymałość. Przy drzewie uwzględniać będziemy jednak wpływ ciężaru ruchomego tylko dla mostów, w budownictwie obliczać będziemy wymiary według dawnego sposobu.

Dla mostów uwzględniamy wedle Winklera wstrząśnienia i zmiany w natężeniu w ten sposób, że mnożymy ciężar ruchomy, który jest przyczyną wstrząśnień i zmian w natężeniu, pewnym współczynnikiem większym od jedności, a mianowicie:

	przy obciążeniu pośrednim bezpośrednim	
dla kładek	$\eta = 1,1$	1,2
„ mostów drogowych i kolejowych drugorzędnych	$\eta = 1,2$	1,3
„ mostów kolei głównych	$\eta = 1,3$	1,4

Nazwijmy P_0 siłę, działającą wskutek ciężaru stałego, a P_1 wskutek ciężaru ruchomego, to otrzymamy przekrój:

$$F = \frac{P_0 + \eta P_1}{\tau_1} \dots \dots \dots 64)$$

Zamiast tego możemy obliczać wymiary w zwykły sposób, jeśli odpowiednio przyjmiemy natężenie dopuszczalne τ , więc

$$F = \frac{P_0 + P_1}{\tau} = \frac{P_0 + \eta P_1}{\tau_1}, \text{ a stąd:}$$

*) Porów. II. wydanie str. 70.

$$\tau = \tau_1 \frac{1 + \frac{P_0}{P_1}}{\eta + \frac{P_0}{P_1}} \dots \dots \dots 65)$$

Natężenie τ_1 możemy przyjąć według następującej tabliczki:

Tablica XV.

Rodzaj natężenia	mosty stałe		mosty tymczasowe	
	natężenie τ_1 dla drzewa			
	miękkiego	twardego	miękkiego	twardego
	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$	$\frac{kg}{cm^2}$
Rozciąganie	105	120	120	140
Ściskanie	70	80	80	95

Rozporz. austr. min. dla mostów z r. 1904. §. 8. B. ust. 8. Przy mostach... natężenie, spowodowane działaniem wszystkich pionowych obciążeń (z wyłączeniem sił pionowych, spowodowanych przez wiatr) nie może przekraczać $80 kg/cm^2$ przy wyciąganiu lub ściskaniu w kierunku włókien... Przy działaniu wszystkich obciążeń (a więc także i sił poziomych) dopuszcza się powiększenia tych wartości skrajnych aż do $90 kg/cm^2$.

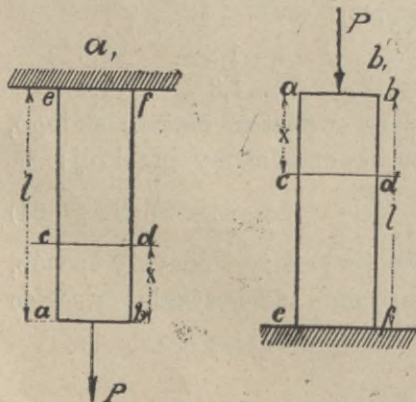
10. Dla mostów drewnianych tymczasowych, które nie mają być dłużej używane, niż 6 miesięcy, dopuszczalne jest przy działaniu wszystkich ciężarów (z wyłączeniem sił pionowych, spowodowanych przez wiatr) natężenie przy wyciąganiu lub ściskaniu w kierunku włókien, wynoszące $120 kg/cm^2$, jeżeli zaś mostów używa się dłużej i to aż do dwu lat, w takim razie należy powyżej oznaczoną granicę natężenia zniżyć, co najmniej do $100 kg/cm^2$.

§. 27. Pręty o stałym przekroju.

Jeżeli siła P działa w kierunku osi na pręt o stałym przekroju (rys. 46.) i uwzględnimy przytem ciężar własny prętu, to w przekroju cd działa siła $P' = P + F\gamma x$, jeżeli F oznacza przekrój a γ ciężar gatunkowy. Siła ta P' jest największą dla przekroju ef , gdzie $x=l$, więc:

najw. $P' = P + F\gamma l$. 66)

Jeżeli natężenie dopuszczalne jest τ , najw. $P' = P + F\gamma l = F\tau$, a stąd:



Rys. 46.

$$P = F(\tau - \gamma l) \dots \dots \dots 67)$$

albo

$$F = \frac{P}{\tau - \gamma l} \dots \dots \dots 68)$$

Jeżeli ciężar własny prętu jest bardzo małym w stosunku do ciężaru P , to możemy go nie uwzględniać i otrzymamy:

$$P = F\tau, \quad F = \frac{P}{\tau} \dots \dots \dots 69)$$

Przykład. Jaką średnicę d ma mieć żelazne ścięgno okrągłe 16 m długie dla ciągnięcia $P=3,2 t$, natężenia dopuszczalnego

$$\tau = 800 \frac{kg}{cm^2} \text{ a } \gamma = 7,8 \frac{t}{m^3} = 7800 \frac{kg}{m^3} = 0,0078 \frac{kg}{cm^3}?$$

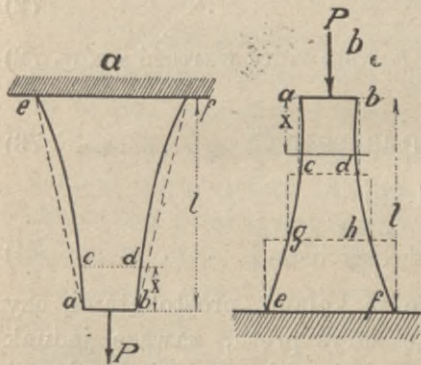
Według rów. (68.) mamy:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{3200}{800 - 0,0078 \cdot 16000} = \frac{3200}{800 - 124,8} = \frac{3200}{675,2} = 4,74 \text{ cm}^2, \text{ a stąd:}$$

$$d = \sqrt{\frac{4,74 \times 4}{\pi}} = 2,46 \text{ cm} = 25 \text{ mm}.$$

§. 28. Pręty o stałym natężeniu.

Jak to widzieliśmy poprzednio, natężenie w pręcie o stałym przekroju jest najmniejszym u końca, w którym zaczepia siła, a największym u drugiego końca. Jeżeli więc natężenie



Rys. 47.

największe jest równe natężeniu dopuszczalnemu, to natężenie w innych przekrojach jest mniejsze, a więc materiał nie został należycie wykorzystany. Chcąc materiał lepiej wykorzystać, szukamy takiego kształtu, aby natężenie było wszędzie równe natężeniu dopuszczalnemu. Jeżeli na taką belkę działa w kierunku osi siła P (rys. 47), to w przekroju cd

jest, jak wiemy, $P' = P + C$, jeżeli C oznacza ciężar prętu $abcd$ na długości x , a natężenie $\frac{P}{F} = \tau$ według założenia, a zatem $F\tau = P + C$.

Różniczkując to równanie, otrzymamy $\tau dF = dC$, a ponieważ $dC = \gamma F dx$, jeżeli γ oznacza ciężar jednostki sześciennego materiału, więc $\tau dF = F \gamma dx$, a stąd $dx = \frac{\tau}{\gamma} \frac{dF}{F}$.

Scałkowawszy to równanie, otrzymamy:

$$x = \frac{\tau}{\gamma} \int_0^x \frac{dF}{F} = \frac{\tau}{\gamma} \log \text{nat. } F \Big|_0^x,$$

a więc $x = \frac{\tau}{\gamma} (\log \text{nat. } F - \log \text{nat. } F_0)$, jeżeli F_0 oznacza przekrój dla $x=0$. Inaczej możemy to napisać:

$$x = \frac{\tau}{\gamma} \log \text{nat. } \frac{F}{F_0},$$

a stąd otrzymamy:

$$\frac{F}{F_0} = e^{\frac{\gamma x}{\tau}}, \quad \dots \dots \dots 70)$$

gdzie e jest zasadą logarytmów naturalnych.

Ponieważ $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots$, więc

$$F = F_0 \left(1 + \frac{\gamma x}{\tau} + \frac{\gamma^2 x^2}{2 \tau^2} + \dots \right) \quad \dots \dots \dots 71)$$

Przekrój ab wyznaczmy zaś według rów. 44), więc

$$F_0 = \frac{P}{\tau} \quad \dots \dots \dots 72)$$

Dla wyznaczenia przekroju F wstawimy wartość z rów. 72) w rów. 70) i otrzymamy

$$\log F = \log \frac{P}{\tau} + 0,434 294 5 \frac{\gamma x}{\tau} \quad \dots \dots \dots 73)$$

albo na podstawie równań 71) i 72)

$$F = \frac{P}{\tau} \left(1 + \frac{\gamma x}{\tau} + \frac{\gamma^2 x^2}{2 \tau^2} + \dots \right) \quad \dots \dots \dots 74)$$

Według tego, czy przekroje są kołami, prostokątami, czy też innymi figurami, zmienia się zarys prętu, zawsze jednak pręt taki ograniczony jest powierzchniami krzywymi. Ponieważ w praktyce ciągle zmiana przekroju napotykałaby często na trudności, więc zamiast powierzchni krzywych przyjmujemy często płaszczyzny np. zamiast ace na rys. 47. przyjmujemy ae albo składamy pręt taki z kilku części graniastosłupowych (rys. 47 b), których przekrój równa się największemu przekrojowi gh prętu o stałym natężeniu w danej części.

Przykład. Na filar murowany (rys. 48) działa P w kierunku osi. Obliczyć mamy przekrój u podstawy filaru tak, aby natężenie w F_0 i F_1 było równe τ .

Według rów. 72) mamy $P = \tau F_0$, siła, działająca na F_1 , jest w przybliżeniu

$$P' = P + \gamma h \frac{F_0 + F_1}{2},$$

a według założenia ma być $P' = \tau F_1$; więc

$$\tau F_1 = \tau F_0 + \gamma h \frac{F_0 + F_1}{2},$$

a stąd

$$F_1 = F_0 \frac{2\tau + \gamma h}{2\tau - \gamma h} \dots \dots \dots 75)$$

Jeżeli mamy dane następujące wartości:

$$\gamma = 2,2 \text{ t/m}^3, \quad P = 300 \text{ t}, \quad \tau = 6 \text{ kg/cm}^2 = 60\,000 \text{ kg/m}^2 = 60 \text{ t/m}^2, \quad h = 9 \text{ m}, \quad \text{to } F_0 = \frac{300}{60} = 5 \text{ m}^2,$$

$$F_1 = 5 \frac{2 \times 60 + 2,2 \times 9}{2 \times 60 - 2,2 \times 9} = 6,98 \text{ m}^2.$$

Zwykle jednak ze względów konstrukcyjnych górny przekrój filaru przyjmujemy większy, a przynajmniej 2m szeroki, wtedy natężenie jest w górnej części filaru mniejsze, niż τ . W praktyce inżynierskiej zwykle nie spotykamy się z prętami lub filarami o stałym natężeniu i mamy do czynienia tu tylko z kształtami przybliżonymi.

§. 29. Liny konopne i druciane i łańcuchy.

Chociaż poprzednie wywody o wytrzymałości na rozciąganie zastosować się dadzą także do lin i łańcuchów, jednak zrobimy tu w tym względzie jeszcze kilka uwag szczegółowych.

a) Liny konopne (n. *Hanfseil*) składają się z włókien konopij europejskich lub też manilijskich. Pewna ilość włókien skręca się i tworzy wiązkę (n. *Litze*), kilka wiązek skręca się potem w linę, jądro liny nazywa się duszą (n. *Seilseele*). Lina może być albo nieskręcaną albo też skręcaną. Przez skręcanie jednak samo powstają już natężenia w wiązkach; doświadczenia *) okazały, że należy tylko o tyle liny skręcać, aby się skróciły o $\frac{1}{4}$ długości, gdyż dalsze skręcanie zniżyłoby za bardzo wytrzymałość liny. Liny mokre lub omazone są także mniej wytrzymałe od suchych, a to w stosunku 3:4. Wilgoć bowiem wsiąkając w linę, zgrubia i zarazem skraca włókna,

*) Tetmajera ogłoszone w „Schw. Eisenbahn“ 1881, t. XV, N. 4.

wskutek czego powstają nateżenia, zmniejszające wytrzymałość liny.

Spółczynnik wytrzymałości $\mu=500$ do 800 kg/cm^2 , możemy więc przyjąć nateżenie dopuszczalne $\tau=100 \text{ kg/cm}^2$. Jednak uwzględnić musimy także tę okoliczność, że wiązki w przekroju nie wypełniają całej powierzchni koła opisanego, lecz w przybliżeniu tylko 0,9 powierzchni koła, więc możemy napisać:

$$P = F\tau = 0,9 \frac{d^2 \pi}{4} \tau = 0,7 d^2 \tau, \quad 76)$$

jeżeli d oznacza średnicę liny, a P siłę wyciągającą linę. Stąd wynika

$$d = \sqrt{\frac{4P}{0,9 \tau \pi}} = 1,19 \sqrt{\frac{P}{\tau}} \quad 77)$$

Jeżeli w rów. 76) i 77) wstawimy $\tau=100 \text{ kg/cm}^2$, to otrzymamy

$$P = 70 d^2 \text{ kg} \text{ i } d = 0,119 \sqrt{P} \text{ cm} \quad 78)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ciężar własny liny suchej wynosi } g = 0,065 d^2 \text{ kg/m} \\ \text{a mokrej } g = 0,078 d^2 \text{ } n \end{array} \right\} 79)$$

jeżeli d wyrazimy w cm .

Najmniejszy promień tarczy linowej przyjmujemy $r=4d$.

Przykład. Jeżeli $P=900 \text{ kg}$, obliczyć grubość liny.

Z rów. 78) otrzymamy:

$$d = 0,119 \sqrt{900} = 3,57 \text{ cm}, \text{ a ciężar tej liny } g = 0,078 \times 3,6^2 = 1,0 \text{ kg/m}.$$

b) Liny druciane (n. *Drathseil*, fr. *cable en fil de fer*, a. *cable of iron wire*, r. проволочный канатъ) są albo skręcane albo nieskręcane. Skręcane używają się wszędzie tam, gdzie przechodzą przez krążki, gdyż przy nieskręcanych zewnętrzne wiązki muszą się więcej przedłużać od wewnętrznych, więc pracują od nich więcej na rozciąganie, bo przy skręcanych każda wiązka jest raz na zewnętrznej, drugi raz na wewnętrznej stronie, a zatem ciągnięcie rozdziela się jednostajnie na wszystkie wiązki. Nieskręcanych (n. *Bündelseil*) używamy tylko wtedy, jeżeli nie przechodzą przez krążki, a więc n. p. przy mostach wiszących. Jeżeli np. przyjmujemy dla drutu żelaznego $\tau=1500 \text{ kg/cm}^2$ i nazwiemy n ilość drutów, z których się lina składa, a średnicę drutu d_1 , to

$$P = \frac{n d_1^2 \pi}{4} \tau = \frac{n d_1^2 \pi}{4} 1500, \text{ a stąd } d_1 = 0,029 \sqrt{\frac{P}{n}} \text{ cm} \quad . 80)$$

Znając ilość i grubość drutów, możemy obliczyć średnicę liny w przybliżeniu z równania $d = 1,3 d_1 \sqrt{n}$. Wstawivszy w to równanie wartość z 80), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} d &= 0,0378 \sqrt{P} \text{ cm} , \\ a \text{ stąd } P &= 696 d^2 \text{ kg} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 81)$$

Przy skręcanych linach, które przechodzą przez krążki, uwzględnić musimy oprócz ciągnięcia podłużnego także natężenie, wywołane wskutek zginania przy przejściu przez krążek, a natężenie to, zależne od promienia krążka, jest często bardzo znaczne.

W przybliżeniu możemy obliczać liny druciane, przyjąwszy z powodu przejścia przez krążki tylko natężenie dopuszczalne mniejsze, więc $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$, a zatem

$$\left. \begin{aligned} P &= 800 n \frac{d_1^2 \pi}{4} = 628 n d_1^2 \\ a \text{ stąd } d_1 &= 0,04 \sqrt{\frac{P}{n}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 82)$$

a że średnica liny da się obliczyć w przybliżeniu z równania $d = 1,59 d_1 \sqrt{n}$, więc wstawivszy tę wartość w równanie 82), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} P &= 247 d^2 \\ d &= 0,0636 \sqrt{P} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 83)$$

Jako ciężar własny liny drucianej możemy przyjąć

$$g = 0,8 n d_1^2 \text{ kg/m} \dots \dots \dots 84)$$

jeżeli d_1 wyrazimy w *cm*.

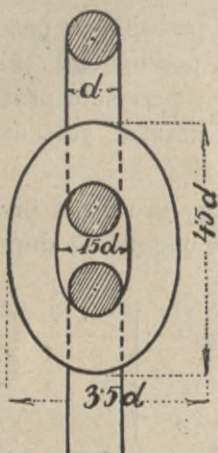
Przykład. Z szybu 150 m głębokiego mamy wyciągnąć ciężar 1000 *kg*. Ciężar własny przyrządu do wyciągania oprócz liny waży 700 *kg*. Jak grube mają być druty, jeżeli $n=90$?

Jeżeli ciężar własny liny wynosi na 1 m $0,8 n d_1^2$, to na 150 m wynosić będzie $120 n d_1^2 \text{ kg}$, a zatem cały ciężar $P = 1000 + 700 + 120 \times 90 d_1^2 = = 1700 + 10800 d_1^2$, zaś według równania 82) $P = 628 n d_1^2 = 628 \times 90 d_1^2 = = 56520 d_1^2$. A więc $1700 + 10800 d_1^2 = 56520 d_1^2$, a stąd $d_1^2 = 0,037 \text{ cm}^2$, a $d_1 = 0,192 \text{ cm}$, zaś $d = 2,9 \text{ cm} = 29 \text{ mm}$.

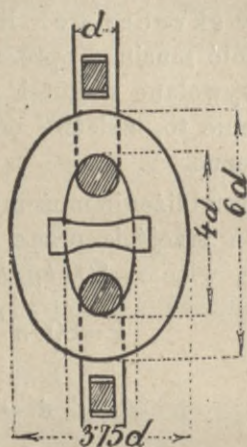
Ponieważ zmiany w natężeniu lin są znaczne, usprawiedliwionem jest tu zastosowanie doświadczeń Wöhlera *).

*) p. Hermann Emil, Berechnung der Förderseile. Zeits. d. öster. Ing. u. Arch.-Verein. 1889 str. 22 i II wydanie Statyki str. 79.

c) Łańcuchy (n. *Kette*, fr. *chaîne*, a. *chain*, r. *цепь*).
 Rozmaite rodzaje łańcuchów są w używaniu, my tu mówić
 będziemy jednak tylko o łańcuchu najbardziej używanym t. j.
 angielskim, którego kształt i wymiary przedstawia rys. 49.



Rys. 49.



Rys. 50.

Jak widzimy, łańcuch pracuje tu nietylko na rozciąganie, lecz
 i na zginanie eliptycznych ogni. Oprócz tego zależna jest
 wytrzymałość łańcucha od dobrego spawania ogni. Zamiast
 jednak obliczać wytrzymałość łańcucha na zginanie, możemy
 obliczać go tylko na rozciąganie, korzystając z doświadczeń
 admiralicyi angielskiej, z których się okazało, że wytrzymałość
 łańcucha ma się do wytrzymałości żelaza okrągłego o tej sa-
 mej średnicy d nie jak 2:1, lecz tylko, właśnie wskutek zgi-
 nania, jak 11:9. Przyjąwszy więc $\tau = 1000 \text{ kg/cm}^2$, otrzymamy

$$P = \frac{11}{9} 1000 \frac{d^2 \pi}{4} = 960 d^2 \text{ kg} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots 85)$$

a stąd $d = 0,032 \sqrt{P} \text{ cm.}$

Ciężar łańcucha możemy przyjąć w przybliżeniu

$$g = 2,33 d^2 \text{ kg/m}, \dots \dots \dots 86)$$

jeżeli d wyrażone w cm . Jeżeli ogniwa wzmocnimy szczeblem
 (rys. 50), to otrzymamy łańcuch szczeblowy (n. *Stegkette*) nieco
 wytrzymalszy. Doświadczenia admiralicyi angielskiej wykazały,

że wytrzymałość łańcucha szczeblowego jest $\frac{9}{7}$ razy większą, otrzymamy zatem

$$P = \frac{9}{7} 960 d^2 = 1234 d^2 \text{ kg} \left\{ \dots \dots \dots 87) \right.$$

a stąd $d = 0,0285 \sqrt{P} \text{ cm}$

Nowsze doświadczenia Tetmajera wykazały, że wytrzymałość łańcuchów jest jeszcze mniejszą. Należałoby więc przyjąć siłę P o 10% mniejszą, a zatem otrzymamy zamiast 85)

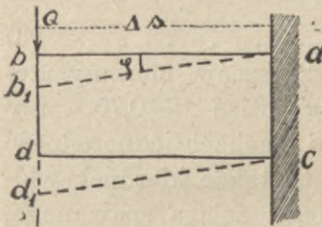
$$P = 874 d^2 \text{ kg} \left\{ \dots \dots \dots 88) \right.$$

a stąd $d = 0,033 \sqrt{P} \text{ cm}$

IV. Wytrzymałość na ścinanie.

§. 30. Spółczynnik wytrzymałości i natężenie dopuszczalne.

Ciało pracuje na ścinanie, jeżeli wypadkowe sił zewnętrznych, działających w płaszczyźnie, przez oś położonej, po jednej i drugiej stronie idealnego przekroju prostopadłego na oś, starają się przesunąć drobiny w płaszczyźnie przekroju.



Rys. 51.

Siła Q , działająca w odstępnie Δs od przekroju ac (rys. 51), sprawia przesunięcie przekroju bd względem ab .

Przesunięcie to bb_1 zależne jest od momentu $Q \Delta \sigma$ i od przekroju F . Możemy napisać

$$bb_1 = \frac{Q \Delta \sigma}{F \cdot E_1} = \frac{v_1 \Delta \sigma}{E_1} \dots 89)$$

$v_1 = \frac{Q}{F}$ jest wtedy natężeniem na ścinanie. Mamy wtedy

$$\frac{bb_1}{\Delta \sigma} = \frac{v_1}{E_1} \dots \dots \dots 90)$$

analogicznie do równ. 35) przy wyciąganiu i ściskaniu.

$\frac{bb_1}{\Delta \sigma} = \text{st } \varphi$ jest to przesunięcie jednostkowe poprzeczne (n. *spezifische Querverschiebung*), zaś E_1 jest współczynnik sprężystości poprzecznej, o którym już mówiliśmy*).

*) Por. str. 40.

Bach nazywa $\alpha_1 = \frac{1}{E_1}$ współczynnikiem przesunięcia (n. *Schubkoeffizient*).

Jeżeli w przekroju działa wyłącznie siła poprzeczna, a niema sił podłużnych ani zginających, to wtedy

$$\nu_1 = \frac{Q}{F} \dots \dots \dots 91)$$

W praktyce wypadek taki zachodzi przy ścinaniu nitów i sworzni, zresztą prawie nigdy; zawsze występuje równocześnie i zginanie, a wtedy natężenie ν_1 jest większem, jak o tem później będziemy mówić.

Przesunięcie jednostkowe poprzeczne jest aż do granicy sprężystości tak, jak wyciąganie, proporcjonalne do natężenia ścinającego, czyli E_1 jest stałem. Jeżeli nazwiemy Q siłę zewnętrzną, działającą prostopadle do osi, μ_1 współczynnik wytrzymałości na ścinanie a F powierzchnię przekroju, to możemy napisać

$$P = F \mu_2 \dots \dots \dots 92)$$

Teoretycznie da się udowodnić dla ciał jednorodnych, że μ_1 wynosi $\frac{4}{5}$ współczynnika wytrzymałości na ciągnięcie (μ^*), ogólnie możemy więc napisać

$$\mu_1 = \alpha \mu \dots \dots \dots 93)$$

Doświadczenia wykazały, że dla kruszców możemy rzeczywiście w przecięciu przyjąć $\mu_1 = \frac{3}{4} \mu$, więc $\alpha = 0,75$, przy kruszczach jednak kutyh, walcowanych i blachach jednorodność nie jest zupełną i musimy uwzględnić tu także kierunek włókien i walcowania. I tak np. dla pewnego żelaza spawanego, którego kierunek włókien oznacza strzałka W (rys. 52), była wytrzymałość na ścinanie w kierunku

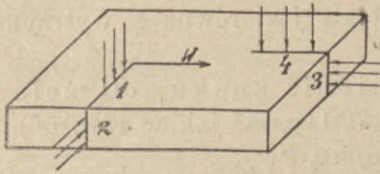
1	2	3	4
$\mu_1 = 3440$	3590	3060	2836

kg/cm².

Przeciętnie możemy przyjąć następujące wartości dla α : żelazo lane 0,625, spawane 0,8, zlewne 0,86, stal twarda 0,7, miękka 0,77, bardzo miękka 0,8, blacha w kierunku 3 i 4: 0,70, 1 i 2: 0,85. Dla drzewa jest wytrzymałość na ścinanie w kierunku włókien bardzo mała, $\mu_1 = 0,24 \mu'$, gdy μ' oznacza wytrzymałość na ciśnienie, a nawet i mniejsza, w kierunku prostopadłym do włókien jest wytrzymałość około 4 razy większa.

*) Kluger. Wykład wytrzymałości materiałów str. 296.

I tu, jak w poprzednim rozdziale, przyjmujemy przy obliczaniu wymiarów jakiś współczynnik pewności, mianowicie dla kruszców 5, dla drzewa 7 do 10, dla kamieni 20, a stąd otrzymamy natężenie dopuszczalne na ścinanie τ_1 . Poniżej podajemy wartości μ_1 i τ_1 dla materiałów najbardziej używanych w budownictwie.



Rys. 52.

Tablica XVI.

M a t e r y a ł	Spółczynnik wytrzymałości	Natężenie dopuszczalne
	μ_1	τ_1
na ścinanie w kg/cm^2		
Beton	25	4,5
Cegła	20	1
Drzewo bukowe równoległe do włókien . .	80	15
„ „ prostopadłe	300	40
„ dębowe równoległe	75	15
„ „ prostopadłe	270	40
„ miękkie równoległe	50	8
„ „ prostopadłe	260	30
Granit	90	3
Miedź lana	1000	200
„ kuta	1900	380
„ blacha	1700	340
Mosiądz	950	190
Mur ceglany na cemencie	4	0,2
„ „ „ zaprawie wapiennej	0,5	—
Ołów	100	20
Piaskowiec	20	1
Platyna	2700	540
Spiż	2000	400
Stal bardzo miękka	3500	700
„ miękka	4100	820
„ twarda	4700	940
Wapień	40	2
Zelazo lane	1000	200
„ spawane nitowe	3000	600
„ zlewne	3300	700
„ blacha w kierunku walcowania . .	2400	500
„ „ prostopadłe do kierunku walcowania	2900	600

Przekrój wyznaczamy dla stałego natężenia według wzoru

$$F = \frac{P}{\tau_1} \quad \quad 94)$$

Dla zmiennego natężenia możemy obliczać wymiary, uwzględniając doświadczenia Wöhlera, chociaż odnośnych osobnych doświadczeń na ścinanie nie robiono. Ze względu na to, że wytrzymałość na ścinanie dla metali jest równa $\frac{1}{5}$ wytrzymałości na ciągnięcie, otrzymamy:

a) jeżeli natężenie nie zmienia znaku, dla żelaza $\tau_1 = \frac{1}{5} \tau (1 + \frac{1}{2} \zeta)$, a wstawiwszy $\tau = 700 \text{ kg/cm}^2$ jak w rów. 56)

$$\tau_1 = 560 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\text{najmn. P}}{\text{najw. P}} \right) \text{ kg/cm}^2 \quad . \quad . \quad . \quad 95)$$

Dla stali zaś otrzymamy z rów. 57)

$$\tau_1 = 720 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\text{najmn. P}}{\text{najw. P}} \right) \text{ kg/cm}^2 \quad . \quad . \quad . \quad 96)$$

b) Jeżeli natężenie zmienia znak, otrzymamy podobnie z równania 61) dla żelaza

$$\tau_1 = 560 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\text{najmn. P}'}{\text{najw. P}} \right) \text{ kg/cm}^2 \quad . \quad . \quad . \quad 97)$$

a dla stali z równania 62)

$$\tau_1 = 720 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\text{najmn. P}'}{\text{najw. P}} \right) \text{ kg/cm}^2 \quad . \quad . \quad . \quad 98)$$

Rozporządzenie ministeryjne austriackie, dotyczące się budowy mostów z r. 1904 §. 8.A. ust. 1:

a) Przyjmując obciążenie pionowe, z wyłączeniem działań, wywołanych przez wiatr, boczne wahanie itd.:

	Natężenie dopuszczalne <i>kg/cm²</i>	
	żelazo spawane	żelazo zlewne
2. Natężenie przy ścinaniu, wyjąwszy nity	500	600
3. „ nitów przy ścinaniu:		
α) tylko w jednym kierunku	600	700
β) we więcej kierunkach	500	600

b) Przyjmując wszystkie obciążenia, określone

w §. 7 dla mostów kolei żelaznych

7. Natężenie przy ścinaniu, wyjąwszy nity	600	700
8. „ nitów przy ścinaniu	700	800

Przy mostach drogowych przepisano takie same natężenie dopuszczalne.

B. Drzewo ust. 8:

10 *kg/cm²* przy ścinaniu równoległym do kierunku włókien, a prostopadle do kierunku włókien 20 *kg/cm²*. Przy działaniu wszystkich obciążeń (a więc także i sił poziomych) dopuszcza się powiększenie tych wartości aż do 15 i 30 *kg/cm²*.

10. Dla mostów drewnianych tymczasowych jako dopuszczalne najwyższe natężenie przy ścinaniu równoległym lub prostopadłym do kie-

runku włókien przyjąć należy — w obydwu przypadkach trwania używania — 15 kg/cm^2 względnie 30 kg/cm^2 .

Normy wypracowane przez austr. tow. inżynierów i architektów w r. 1902:

	nat. dopuszcz. τ , kg/cm^2	
Żelazo spawane i zlewne	800	
„ lane	200	
	// do włók.	⊥ do włók.
Drzewo dębowe	15	30
„ bukowe	15	30
„ miękkie	10	20

Normy pruskiego ministerstwa z 1910:

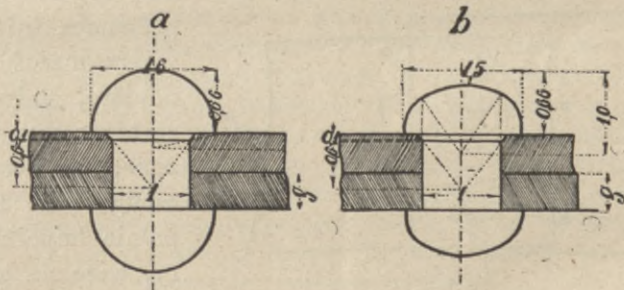
	nat. dopuszcz. τ , kg/cm^2	
Żelazo zlewne	1000	
„ lane	200	
	// do włók.	⊥ do włók
Drzewo dębowe	15	80
„ sosnowe	10	60

Rozporząd. minist. pruskiego dla mostów z 1910:

Jako natężenie dopuszczalne dla nitów należy najwyżej przyjąć natężenie na rozciąganie, przepisane dla żelaza spawanego bez uwzględnienia wiatru.

§. 31. Nitowanie pojedyncze.

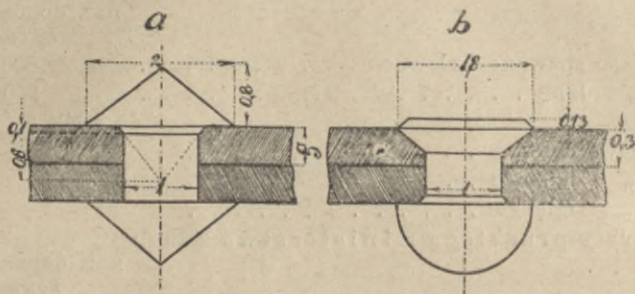
Nity (n. *Niet*, fr. *rivet*, a. *rivet*, r. заклепка) służą do połączenia stałego blach i kształtówek i składają się ze sworznia (n. *Bolzen*, *Schaft*, fr. *tige*, a. *rivet bar*, *spindle*, r. шворень),



Rys. 53.

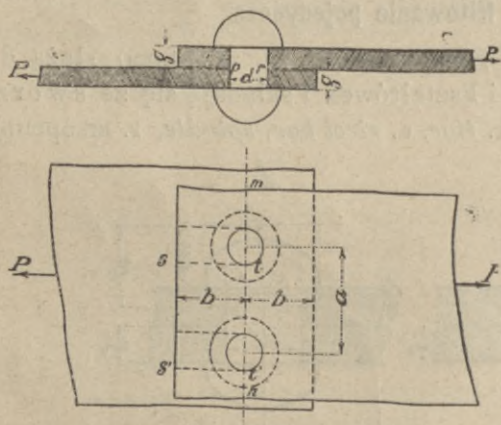
głównki (n. *Setzkopf*, fr. *tête de rivet*, a. *rivet head*) (rys. 53) gotowej przed użyciem nitu, i nakówki (n. *Schliesskopf*, fr. *rivure*), która powstaje z występującej części sworznia przez naklepanie i ma kształt sferoidalny (rys. 53 b) lub też stożkowy

(54a); ten ostatni jednak jest niepraktyczny z powodu za małej wytrzymałości brzegów, dlatego też zupełnie prawie go zaniedbano. Rysunek 54b przedstawia nit wpuszczony (n,



Rys. 54.

versenkt), którego się używa tam, gdzie niema miejsca na nakówkę. Dla utworzenia nakówki trzeba, aby nit był rozżarzony. Tylko bardzo cienkie, mniej niż 10 mm grube nity, wstawia się na zimno. Po ostygnięciu ściągają się sworzeń, a wskutek tego ściska blachy i wywołuje silne tarcie. Jeżeli więc siła P ma (rys. 55) połączenie rozerwać, to musi przewyciężyć naprzód



Rys. 55.

tarcie, a potem wytrzymałość nitu na ścinanie. Ponieważ jednak tarcie i wytrzymałość nie działają równocześnie, lecz wytrzymałość działa dopiero, gdy tarcie zostanie przewyciężone, bo sworzeń po ostygnięciu nie wypełnia zupełnie dziury, więc na tarcie liczyć nie możemy przy obliczaniu wytrzyma-

łości połączenia nitami. Considère przyjmuje tarcie, wynoszące 800 do 1000 kg/cm^2 przekroju *).

*) Doświadczenia nad wytrzymałością nitów bardzo ciekawe wykonał znany inżynier francuski M. Dupuy z polecenia rządu

Jak wiadomo wytrzymałość na ścinanie jest mniejszą od wytrzymałości na rozciąganie w stosunku 4:5, więc $\tau_1 = 0,8 \tau$. Wielu jednak autorów przyjmuje przy obliczeniu nitów τ większe, a to z powodu, że do nitów używamy najlepszego żelaza, którego wytrzymałość na ciągnięcie jest 1,1 lub więcej razy większa od wytrzymałości żelaza zwykłego, więc $\tau = 0,88$ do $0,96 \tau$. Jednak ze względu na to, że siła nie rozdziela się zupełnie jednostajnie na nity i niektóre nity pracują wskutek tego daleko więcej, niż z obliczeń wypada, lepiej jest przyjąć natężenie niższe, to jest zostawić $\tau_1 = 0,8 \tau^*$). Dziury na nity możemy robić w dwojaki sposób, albo przebijaniem (n. *Stanzen*, fr. *poinçonnage*, a. *punching*, r. пробивка), albo wierceniem (n. *Bohren*, fr. *perforation*, a. *drilling*, r. сверлитъ). Przebijanie dziur pozostawia natężenia w blasze, które zniżają wytrzymałość do 20%⁰ **). Jednak zaradzić się da temu przez

francuskiego. Autor opisał te doświadczenia w *Annales des ponts et chaussées* (1895 str. 1). Gdy natężenie prętu żelaznego przekroczy granicę sprężystości, powstaje oprócz odkształcenia sprężystego także odkształcenie trwałe. Pręt taki nazywamy wyciągniętym (fr. *étiré*). Doświadczenia okazały, że granica sprężystości prętu wyciągniętego zgadza się prawie z natężeniem, które wywołało wyciągnięcie. Nity są to pręty wyciągnięte, pracujące powyżej pierwotnej granicy sprężystości. Nie wypełniają one zupełnie dziur, ale ściskają mocno blachy, przez co wywołują bardzo znaczne tarcie. Tarcie to jest tem większe, im wyższą jest granica sprężystości nitu. Tarcie to jest bardzo zmienne i zależy od ciepłoty wkładania nitu, ciepłoty przy końcu wkładania i sposobu nitowania. Można jednak liczyć na następane tarcia: nity żelazne, granica sprężystości (według sposobu oznaczania francuskiego) 1800 kg/cm^2 , nitowanie ręczne, tarcie 400 kg/cm^2 ; gr. sprężystości 2100 kg/cm^2 , tarcie 470 kg/cm^2 . Dla nitowania maszynowego a gr. spręż. 1800 kg/cm^2 tarcie 500 kg/cm^2 , gr. spręż. 2100 kg/cm^2 tarcie 580 kg/cm^2 . Nity stalowe przy nitowaniu ręcznym gr. spręż. 2100 kg/cm^2 , tarcie 450 kg/cm^2 ; gr. spręż. 2300 kg/cm^2 tarcie 660 kg/cm^2 . Jeżeli natężenie jest mniejsze od tarcia, to nity nie pracują wcale na ścinanie; w chwili, gdy tarcie zostanie przezwyciężone, blachy się przesuwają, poczem nit pracuje na ścinanie. Następnie dziury na nity stają się owalne, a w końcu połączenie zostaje przerwane w szwie.

*) Natężenie dopuszczalne przepisane w Austrii i Prusiech podaliśmy w poprzednim paragrafie.

**) Według doświadczeń Tetmajera (*Mittheilungen IV. zeszyt 1890*) wynosiła n. p. wytrzymałość dla dziur:

	wierconych	przebijanych
żelaza zlewnego	4460 do 4780	3280 do 3740 kg/cm^2
„ spawanego	3190 „ 3340	2720 „ 2880 „

wyżarzenie lub wywiercenie cienkiego pierścienia (a. *annealing*), przez co możemy znowu przywrócić pierwotną wytrzymałość *).

Rysunek 55. przedstawia tak zwane nitowanie pojedyncze (n. *einfache Nietung*, fr. *simple rivure*, an. *single riveting*, r. одиночное склёпывание), przy którym nity urządzone są w jednym rzędzie. Jeżeli średnica nitu wynosi d , to obliczamy w ten sposób odstęp a i b , aby materyał jak najwięcej wyzyskać, a zatem, aby była jednakowa pewność przeciw przerwaniu blachy w linii mn , przeciw ścięciu nitów w płaszczyźnie pr i wyrwaniu blachy przed nitami w prostych st i $s't'$. Musimy także uważać, aby ciśnienie nitu na ściankę dziury w blasze nie przechodziło dozwolonej granicy. Możemy więc napisać następane równania, jeżeli grubość blachy nazwiemy g :

dla n -tej pewności przeciw przerwaniu blachy w linii mn , licząc tak siłę P , jak i wytrzymałość, na szerokość a ,

$$P = (a - d) g \tau; \quad \dots \quad \alpha)$$

przeciw ścięciu nitu

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \tau_1, \quad \dots \quad \beta)$$

przeciw wyrwaniu blachy przed nitami

$$P = 2bg \frac{4}{5} \tau = \frac{8}{5} bg \tau. \quad \dots \quad \gamma)$$

Z porównania równań α) i β) otrzymamy:

$$(a - d) \tau = \frac{\pi d^2}{4} \tau_1, \text{ a stąd}$$

$$\frac{a}{g} = \frac{\pi \tau_1}{4 \tau} \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} \quad \dots \quad 99)$$

Dla $\tau_1 = \frac{4}{5} \tau$ otrzymamy stąd

$$\frac{a}{g} = \frac{\pi}{5} \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} = 0,63 \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g}. \quad \dots \quad 100)$$

Z doświadczeń Kennedy'ego wynikałoby $\frac{a}{g}$ nieco mniejsze, bo otrzymał on zamiast współczynnika 0,63 tylko 0,56.

Z równań β) i γ) otrzymamy dalej:

$$\frac{\pi d^2}{4} \tau_1 = \frac{8}{5} bg \tau, \text{ a stąd}$$

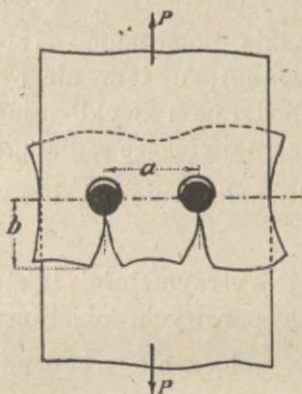
$$\frac{b}{g} = 0,49 \frac{\tau_1}{\tau} \left(\frac{d}{g} \right)^2 \quad \dots \quad 101)$$

*) Rozporz. austr. min. kolei z 1911 §. 12. c. ust. 8 brzmi: Wszystkie dziury na nity i śruby muszą być wiercone.

Dla $\tau_1 = \frac{4}{3} \tau$ otrzymamy:

$$\frac{b}{g} = 0,39 \left(\frac{d}{g} \right)^2. \quad 102)$$

Wartości dla b , obliczone z równania 102), okazują się jednak w praktyce za małe, zwłaszcza ze względu na robienie dziur. Tetmajer wykazuje, że w praktyce następuje przerwanie w sposób wskazany w rys. 56., wobec tego należałoby w rów. γ) opuścić współczynnik 2 i otrzymalibyśmy $P = \frac{4}{3} b g \tau$,



Rys. 56.

a więc $\frac{4}{3} b g \tau = \frac{\pi d^2}{4} \tau$, a stąd

$$\frac{b}{g} = 0,785 \frac{\tau_1}{\tau} \left(\frac{d}{g} \right)^2. \quad . 103)$$

Zamiast tego przyjmujemy z Tetmajerem b wedle wzoru praktycznego

$$b = 1,9 d. \quad 104)$$

Jeżeli nazwiemy współczynnik mocy (*f. module de force du rivetage*)

t. j. stosunek wytrzymałości w szwie do wytrzymałości pełnej blachy v , to wytrzymałości te na rozciąganie mają się jak przekroje, więc

$$v = \frac{(a-d)g}{ag} = \frac{a-d}{a},$$

a wstawivszy wartość za a z równania 100)

$$v = \frac{\frac{\pi d^2}{d g}}{\frac{\pi d^2}{5 g} + d} = \frac{1}{1 + \frac{5g}{\pi d}}. \quad 105)$$

Z równań 100) i 105) obliczyliśmy dla wartości $\frac{d}{g} = 1$ aż do 3 następną tabliczką:

Tablica XVII.

$\frac{d}{g} = 1$	1,5	2	2,5	3
$\frac{a}{g} = 1,63$	2,91	4,51	6,42	8,05
$v = 0,39$	0,49	0,56	0,61	0,65

Widzimy więc, że im większych używamy nitów w stosunku do grubości blachy, tem większą jest wytrzymałość po-

łączenia, a zarazem nity są tem bardziej oddalone, a przez to połączenie jest tem mniej szczelnem. Stosunek $\frac{d}{g}$ obieramy więc wedle tego, jaki cel ma połączenie.

Jeżeli chodzi przedewszystkiem o szczelność połączenia n. p. dla zbiorników, kadzi, okrętów, wtedy obieramy $\frac{d}{g}=1$ lub 1,5, aby nity były gęste i nazywamy takie połączenie nitowaniem szczelnem (n. *Dichtungsnietung*); o tem nie będziemy tutaj mówić. W budownictwie chodzi nam zwykle o jak najmniejsze osłabienie blachy, a więc o jak największe v , dlatego obieramy $\frac{d}{g}=2,5$ lub 3 i nazywamy to połączenie nitowaniem mocnem (n. *Kraftnietung*).

Tam, gdzie potrzeba obok wielkiej wytrzymałości także połączenia szczelnego n. p. przy kotłach parowych, obieramy dla $\frac{d}{g}$ średnią wartość 2 i nazywamy połączenie nitowaniem szczelnem i mocnem (szczelnomocnem, n. *kombinierte Kraftnietung*).

Ze względu na wykonanie nie możemy używać za grubych nitów, dlatego najw. d przyjmujemy równe 28 mm, zwykle $d=10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26$ mm, a w praktyce zwykle wedle Tetmajera dla grubości

$$\left. \begin{array}{l} g < 12 \text{ mm} \\ d = g + 10 \text{ „} \end{array} \right\} \begin{array}{l} g > 12 \text{ mm} \\ d = 0,5g + 16 \text{ „} \end{array} \cdot \cdot \cdot 106)$$

Grubość blachy wynosi w budownictwie zwykle 5 do 12 mm, w budowie mostów 8 do 20 mm. Rzadko używamy blach jeszcze grubszych, gdyż w grubych blachach częstsze są błędy w materyale, powstałe z bąbli, które w grubych blachach zostają pomimo walcowania.

Zastanowić się tu także musimy nad ciśnieniem, jakie nit wywiera na ściankę dziury. Dopóki nit nie jest rozchełtanym, niema ciśnienia na ściankę dziury, bo tarcie wystarcza do przeniesienia siły, ale musimy liczyć także na wypadek, gdy się rozchełta, wtedy ciśnienie on na ściankę dziury*). Gerber i Tetmajer robili w tym względzie doświadczenia, Gerber doszedł do wyniku, że ciśnienie τ_2 na ściankę dziury

*) Por. *Consideré Ann. du ponts et chauss.* 1886.

nie powinno w żadnym wypadku przekraczać dwukrotnego natężenia dopuszczalnego τ na ciągnięcie. Tetmajer sądzi, że ciśnienie to może wzrosnąć bez szkody aż do granicy ciastowości, a więc około 2200 kg/cm^2 dla żelaza spawanego a 2500 kg/cm^2 dla zlewnego. Unwin dochodzi do wniosku, że najw. $\tau_2 \leq 2,8 \tau$. Mehrrens przyjmuje $\tau_2 = 2\tau$.

Ze względu na to, że należy przyjąć choćby mały współczynnik pewności, to natężenie dopuszczalne τ_2 musi być znacznie niższem, a zwłaszcza nie powinno osiągać granicy sprężystości. Obliczmy τ_2 , ciśnienie na ściankę dziury, a otrzymamy

$$P = d g \tau_2 \dots \dots \dots 107)$$

Porównawszy to równanie z równaniem β), otrzymamy:

$$\frac{\pi}{4} d^2 \tau_1 = d g \tau_2,$$

$$\begin{array}{l} \text{a stąd} \\ \text{a dla} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \tau_2 = \frac{\pi d}{4 g} \tau_1 \\ \tau_1 = \frac{4}{5} \tau, \quad \tau_2 = \frac{\pi d}{5 g} \tau \end{array} \right\} \dots \dots \dots 108)$$

Z równania tego otrzymamy dla:

$$\begin{array}{l} \frac{d}{g} = 2 \quad 2,5 \quad 3 \\ \frac{\tau_2}{\tau} = 1,26 \quad 1,57 \quad 1,88 \end{array}$$

Widzimy stąd, że $\tau_2 = 2\tau$ dopiero przy $\frac{d}{g} = 3,2$, jednak lepiej jest nie dopuszczać do tak wielkiego ciśnienia i przyjmować najwięcej $\frac{d}{g} = 2,5$, wtedy $\tau_1 = 1,57\tau$, które to natężenie dopuścić możemy jeszcze bez szkody materiału.

Dla większego $\frac{d}{g}$ mamy wedle równań a) i 107):

$$P = (a - d) g \tau = d g \tau_2, \text{ a stąd:} \\ a = d \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau} \right) \dots \dots \dots 109)$$

n. p. dla $\tau_2 = 1600$, $\tau = 1000 \text{ kg/cm}^2$, otrzymamy $a = 2,6 d$.

Obliczywszy a z rów. 100) i 109), przyjmujemy zawsze mniejszą wartość.

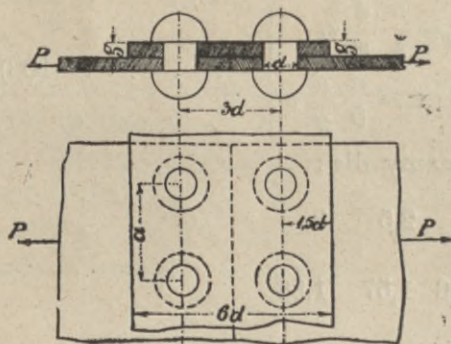
Rozporządzenie austr. minist. handlu z r. 1904 §. 8. ust. 1. Przyjmując obciążenia z wyłączeniem działań, wywołanych przez wiatr itd.:

	Napięcie dopuszczalne <i>kg/cm²</i>	
	żel. spawane	żel. zlewne
4. Ciśnienie na ściankę dziury nitów (średnica nitu pomnożona przez grubość blach)	1400	1600
Przyjmując wszystkie obciążenia:		
8. Ciśnienie na ściankę dziury nitów	1600	1800

Rozporządzenie pruskiego min. rob. publicz. z r. 1910 przyjmuje $\tau_2 = 2000 \text{ kg/cm}^2$.

Rozporządzenie pruskie dla mostów z r. 1903, dopuszcza $\tau_2 \geq \tau_1$.

Zupełnie tak samo, jak nitowanie pojedyncze, obliczamy także nitowanie z przykładką (n. *einfache Laschennietung*, fr. *couvre-joint*, an. *rivetted butt joint*, r. склепывание с накладкой) (rys. 57).



Rys. 57.

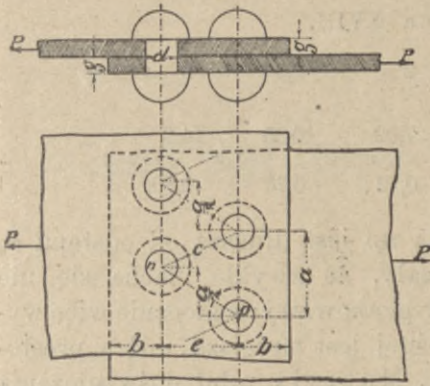
Nitowanie pojedyncze ma tę niedogodność, że siły P nie działają w jednej płaszczyźnie (rys. 55), wskutek czego powstaje moment $M = Pg$, który działa niekorzystnie na blachę i nity, zginając blachy. Według doświadczeń Tetmajera

zmniejsza się wskutek tego wytrzymałość połączenia około 8%. Ponieważ moment Pg rośnie z grubością blachy, więc używamy nitowania pojedynczego tylko dla blach cienkich ($g \leq 10 \text{ mm}$).

§. 32. Nitowanie podwójne.

Przy nitowaniu pojedynczym użyteczny przekrój n. *nutzbarer Querschnitt*, f. *section utile*) blachy t. j. przekrój po odciągnięciu dziur na nity jest bardzo mały, v wynosi, jak wiemy, najwięcej 0,65. Chcąc uzyskać większy użyteczny przekrój, używamy nitowania podwójnego (n. *doppelte oder*

Kettennietung, fr. *double rivure*, an. *double rivettet joint*, r. двойное склёпывание), urządzaając dwa rzędy nitów (rys. 58.) i przedstawiając nity tak, aby nit w jednym rzędzie przypadł na środek między nitami drugiego rzędu. Jeżeli nazwiemy odstęp nitów jednego rzędu a , średnicę nitu d a grubość blachy g , to z doświadczeń okazuje się, że odstęp skrajnego szwu nitów (n. *Nietennath*) od krawędzi blachy powinien być $b=1,5d$, odstęp nitów dwu rzędów $a=3d$, a Kennedy znalazł, że największą jest wytrzymałość połączenia, jeżeli



Rys. 58.

Jeżeli nazwiemy odstęp nitów jednego rzędu a , średnicę nitu d a grubość blachy g , to z doświadczeń okazuje się, że odstęp skrajnego szwu nitów (n. *Nietennath*) od krawędzi blachy powinien być $b=1,5d$, odstęp nitów dwu rzędów $a=3d$, a Kennedy znalazł, że największą jest wytrzymałość połączenia, jeżeli

znalezł, że największą jest wytrzymałość połączenia, jeżeli

$$c = \frac{2}{3} a + \frac{d}{3}, \text{ a wtedy } e \leq \frac{a}{2}.$$

Chcąc mieć tę samą pewność przeciw przerwaniu blachy i przeciw ścięciu nitów, możemy napisać:

$$P = 2 \frac{\pi}{4} d_2 \tau_1 \dots \dots \dots \alpha)$$

przeciw ścięciu nitów i

$$P = (a-d) g \tau \dots \dots \dots \beta)$$

przeciw przerwaniu blachy w szwie, a więc:

$$\frac{3}{4} \pi d^2 \tau_1 = (a-d) g \tau, \text{ a stąd:}$$

$$\frac{a}{g} = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_1}{\tau} \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} \dots \dots \dots 110)$$

$$\text{dla } \tau_2 = \frac{4}{5} \tau \quad \frac{a}{g} = \frac{2\pi}{5} \left(\frac{d}{g} \right)^2 + \frac{d}{g} \dots \dots \dots 111)$$

Stosunek wytrzymałości szwu do wytrzymałości blachy pełnej jest podobnie, jak pierwej, dla $\tau_1 = \frac{4}{5} \tau$

$$v = \frac{a-d}{a} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2\pi} \frac{g}{d}} \dots \dots \dots 112)$$

Jeżeli porównamy tę wartość z wartością dla v wedle równania 105), poznamy, że tu v jest większem, niż przy nito-

waniu pojedynczym, co zresztą także widzimy z następnej tabliczki, obliczonej na podstawie równań 110 i 112).

Tablica XVIII.

$\frac{d}{g} = 1$	1,5	2	2,5	3
$\frac{a}{g} = 2,26$	4,82	7,02	10,35	14,3
$v = 0,56$	0,65	0,72	0,76	0,80.

Chociaż linia zygzakowata *np* jest dłuższą od odstepu *a*, to przecież doświadczenia okazały, że zwykle blacha się nie przerywa w szwie, lecz po linii zygzakowatej; widocznie więc wytrzymałość w płaszczyźnie ukośnej jest mniejszą, niż w prostopadłej do kierunku walcowania. Moberly robił doświadczenia i przekonał się, że złom był zygzakowaty, dopóki powierzchnia zygzakowata była $\leq 1,33$ razy powierzchni w linii prostej. Stąd wynika, że długość $2c$ powinna być $\frac{4}{3}$ razy większą niż *a*, zatem

$$c = \frac{2}{3} a, \text{ skąd można obliczyć najmn } e = \sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}} = 0,44 a.$$

Gdybyśmy urządzili więcej rzędów nitów, mielibyśmy wedle ilości rzędów nitowanie potrójne, poczwórne i t. d., a stosunek *v* byłby coraz korzystniejszym. Jednak potrzebowalibyśmy także coraz więcej nitów i tracilibyśmy też coraz więcej blachy na zakładkę (n. *Überplattung*, fr. *rivetage à recouvrement*, a. *lap joint*), t. j. część blachy, zachodzącą na drugą blachę. Przy większej ilości rzędów nitów siła nie rozdziela się też równo na wszystkie nity, a mianowicie nity w skrajnych rzędach będą więcej nateżone, niż nity w średnich rzędach.

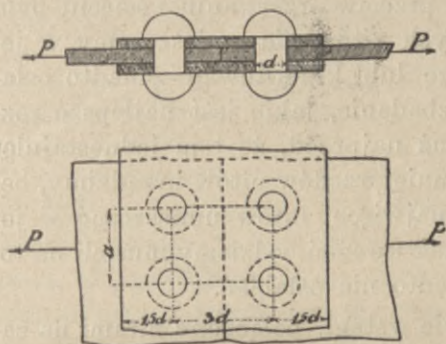
Dlatego też w praktyce rzadko używamy więcej rzędów, niż dwu, i my więc nie będziemy mówić o nitowaniu potrójnem i t. d., a zresztą w danym razie moglibyśmy zupełnie w podobny sposób, jak dla dwu rzędów, obliczyć wytrzymałość nitowania i odstepy nitów.

Tak samo też obliczać będziemy nitowanie pojedyncze z dwiema przykładkami (n. *einfache Nietung mit Doppelaschen*, fr. *rivetage à double couvre joint*, a. *butt joint with cover plates*) (rys. 59). Nazwawszy, jak dawniej, grubość nitu *d*, blachy *g* a odstep nitów *a*, otrzymamy przeciw przerwaniu blachy w szwie $P = (a - d) g \tau$. Dla przerwania połączenia przez ścięcie

nitów musiałyby być nity ścięte w dwu płaszczyznach, więc otrzymamy przeciw ścięciu

$$P = 2 \frac{\pi d^2}{4} \tau_1.$$

Widzimy tu, że dwa te równania są zupełnie takie same, jak dla nitowania podwójnego, otrzymamy więc te same wartości dla a i v , co w równaniach 110) i 112).



Rys. 59.

Nity, jak już wspomnieliśmy, są tu narażone na ścięcie w dwu płaszczyznach, dlatego nazywamy je dwucięte (n. *doppelschnittig*, fr. *rivet à double coupe*, a. *rivet in double shear*), w przeciwieństwie

do nitów raz ciętych (n. *einschnittig*, fr. *rivet à simple coupe*, a. *rivet in single shear*).

Nitowanie pojedyncze z dwiema przykładkami ma tę główną korzyść, że tu siły przenoszą się w tej samej płaszczyźnie i że niema żadnego momentu, któryby działał szkodliwie na blachę i nity.

Grubość przykładek może być wedle teorii równą połowie grubości blachy, zwykle jednak robimy je nieco grubsze ze względów praktycznych, a czasem nawet dajemy im grubość równą grubości blachy.

Jeżeli blachy, które mamy nitować, pracują na ściskanie, to przy nitowaniu na zakładkę urządzamy nity w ten sam sposób, co pierwej. Gdy blachy stykają się bezpośrednio w jednej płaszczyźnie, to właściwie nie potrzeba nitowania, bo siły przenoszą się wprost, jednak ze względu na przypadkowe przesunięcie blach dajemy przykładki i urządzamy nity, jak dla blach ciągnionych.

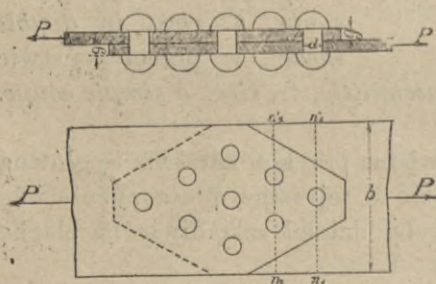
§. 33. Nitowanie wstęg i kształtówek.

Wstęga czyli żelazo płaskie (n. *Flacheisen*, fr. *fer plat*, *fer méplat*, a. *flat iron*, r. *плоское железо*) jestto blacha

wąska a długa o przekroju prostokątnym, kształtówka (n. *Façoneisen*, fr. *fer special*, a. *special iron*, r. фигурное железо) zaś jestto żelazo walcowane o przekroju wielobocznym lub złożonym n. p. w kształcie litery T, I, krzyża i t. p.

Przy nitowaniu wstęg i kształtówek obliczamy połączenie znów tak, aby wytrzymałość przeciw przerwaniu i ścięciu była równą. Wszystkich potrzebnych nitów nie umieszczamy w jednym rzędzie, boby to wstęgę lub kształtówkę zanadto osłabiło; dlatego chodzi nam o zbadanie, jakie jest najlepsze rozmieszczenie nitów. Wiemy już najprzód, że tem jednostajniej siła rozłoży się na nity, im mniej rzędów nitów urządzimy, będziemy się więc starać, jak najwięcej nitów umieszczać w jednym rzędzie, przyczem jednak uważać będziemy musieli na to, aby wstęgę i kształtówek zanadto nie osłabiać.

Rys. 60 przedstawia dwie wstęgi, połączone nitami na zakładkę.



Rys. 60.

Jeżeli w pierwszym rzędzie jest n_1 , w drugim n_2 nitów, to, jeśli ciągnięcie w pierwszym szwie τ, n_1' ma być τ ,

$$P = \tau(F - n_1 dg),$$

przyczem F oznacza przekrój wstęgi, d średnicę nitu, a g grubość blachy.

Jeżeli wstęga ma się przerwać w drugim szwie

$n_2 n_2'$ i połączenie ma się rozerwać, to muszą być równocześnie ścięte nity w pierwszym rzędzie, więc:

$$P = \tau(F - n_2 dg) + \tau' n_1 \frac{d^2 \pi}{4}.$$

Dla jednakowej pewności przeciw przerwaniu w pierwszym i drugim szwie musi być $P = P'$, zatem

$$\tau(F - n_1 dg) = \tau(F - n_2 dg) + \frac{\pi d^2 \tau' n_1}{4}, \text{ a stąd}$$

$$n_2 = \frac{n_1 \left(dg + \frac{d^2 \pi \tau'}{4 \tau} \right)}{dg} = n_1 \left(1 + \frac{\pi d \tau'}{4 g \tau} \right) \dots \dots 113)$$

Dla stosunków $\frac{d}{g}$, używanych w budownictwie, otrzymamy, gdy $\frac{\tau'}{\tau} = 0,8$, dla

$$\frac{d}{g} = 2 \quad 2,5 \quad 3$$

$$\frac{n_2}{n_1} = 2,2 \quad 2,6 \quad 2,9,$$

a więc $3 > \frac{n_2}{n_1} > 2$.

Jeżeli zatem chcemy, aby pewność w dalszych rzędach nie była mniejszą, niż w pierwszym, to liczba nitów w następnym rzędzie może być dwa razy większą, niż w poprzednim, ale gdybyśmy liczbę nitów potroili, to pewność byłaby już mniejszą. Jeżeli więc $n_2 < 2n_1$, to przekrój niebezpieczny t. j. ten, w którym przerwanie najłatwiej może nastąpić, jest w pierwszym rzędzie i według niego obliczamy wymiary, a więc

$$F - n_1 dg = \frac{P}{\tau} \quad \dots \quad 114)$$

Chcąc jak najmniej osłabić przekrój, dajemy w pierwszym rzędzie mało nitów, a mianowicie jeden lub dwa najwięcej.

Dla wyznaczenia ilości wszystkich nitów potrzebnych n mamy równanie dla nitów raz ciętych:

$$P = n \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1 \quad \dots \quad 115)$$

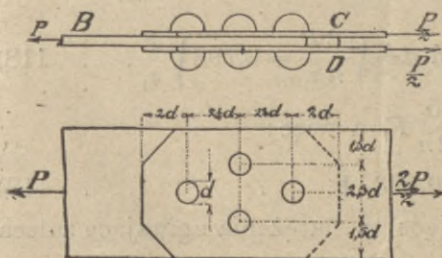
dla nitów dwuciętych $P = 2n \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1 \quad \dots \quad 116)$

z którychto równań obliczamy n . Przy nitach dwuciętych musi być też

$$P < n dg \tau_2 \quad \dots \quad 117)$$

Odstęp nitów jednego rzędu od nitów drugiego robimy najmniej $2,5d$ do $3d$.

Przykład. Wstęgę B należy połączyć nitami z dwiema wstęgami C i D (rys. 61). Niech będzie siła $P = 13t$. Jeżeli grubość wstęgi B jest $g = 12 \text{ mm}$ a średnica nitu $d = 20 \text{ mm}$, dalej $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$, $\tau_1 = 600 \text{ kg/cm}^2$, to ilość potrzebną nitów otrzy-



Rys. 61.

mamy z rów. 116) $\frac{2n \cdot 2^2 \pi}{4} 600 = 13000$, zatem $n = \frac{13000}{2\pi \cdot 600} = 3,5$, zamiast czego przyjmiemy $n=4$.

Jeżeli jeden nit znajdować się będzie w pierwszym rzędzie, to według (114) $F - 1 \cdot 2 \cdot 1,2 = \frac{13000}{800}$, a stąd $F = 16,25 + 2,4 = 18,65 \text{ cm}^2$, zatem gdy $g = 1,2 \text{ cm}$, $b = 15,54 \text{ cm}$, zamiast czego przyjmiemy $b = 160 \text{ mm}$. Zbadajmy jeszcze ciśnienie na ściankę dziury nitu. Otrzymamy wtedy:

$$4 \cdot 2 \cdot 1,2 \nu_2 = 13000, \text{ zatem } \nu_2 = \frac{13000}{9,6} = 1397 \text{ kg/cm}^2,$$

a zatem mniejsze, niż dopuszczalne.

§. 34. Połączenia przegibne.

Żelazne części budowli dadzą się połączyć nie tylko nitowaniem, lecz także w inny sposób, a mianowicie za pomocą połączeń przegibnych czyli sworzniowych (n. *Gelenkverbindung*, *Bolzenverbindung*, fr. *construction articulée*) lub za pomocą śrub. Najprzód będziemy mówić o połączeniach przegibnych i obliczymy niektóre wymiary oka przy połączeniu przegibnem dwu prętów, z których jeden jest podwójnym (rys. 62).

Jeżeli siła P działa w kierunku osi prętu, to, jak wiemy,

$$P = \tau F, \quad \dots \dots \dots \alpha)$$

jeżeli F oznacza przekrój prętu n. p. przy przekroju prostokątnym $F = bc$, zatem $P = \tau bc$.

Jeżeli sworzeń (n. *Bolzen*, fr. *tige*, an. *bar pin*, r. *шпindel*) jest, jak tutaj, dwa razy cięty, otrzymamy dla ścięcia jego

$$P = \tau_1 \frac{2d^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{2} d^2 \tau_1, \quad \dots \dots \dots \beta)$$

$$\text{a jeżeli } \tau_1 = \frac{4}{5} \tau, \quad P = \frac{2\pi}{5} d^2 \tau,$$

przyczem d oznacza średnicę przekroju sworznia. Z równań $\alpha)$ i $\beta)$ otrzymamy:

$$P = \frac{\pi}{2} d^2 \tau_1 = \tau F, \text{ a stąd } d = \sqrt{\frac{2P}{\pi \tau_1}} = 0,798 \sqrt{\frac{P}{\tau_1}}. \quad \dots \quad 118)$$

Jeżeli $\tau = \frac{4}{5} \tau_1$, to $d^2 = \frac{5}{2\pi} F$, a więc:

$$d = 0,893 \sqrt{F}. \quad \dots \dots \dots 119)$$

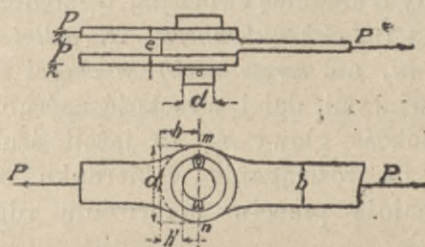
Ze względu na występujące tu natężenia zginające zaleca się przyjąć τ_1 o 15% niższe.

Dla sworznia raz ciętego otrzymamy zamiast rów. β)

$$P = \tau_1 \frac{d^2 v}{4} = \frac{\pi}{5} d^2 \tau, \text{ więc}$$

$$\frac{\pi}{5} d^2 \tau = \tau F, \text{ a stąd } d = 1,26 \sqrt{F}, \dots 120)$$

jeżeli sworzeń i pręt są z jednego materiału. Jeżeli zaś pręt jest żelazny a sworzeń stalowy, wtedy wzory te się zmieniają, gdyż za τ_1 musimy inną wartość podstawić.



Rys. 62.

Aby oko nie przerwało się w linii mn , musi być $F_1 = F$, jeżeli F_1 oznacza użyteczny przekrój prętu w przekroju mn . Abyśmy jednak w miejscu, gdzie siła zaczepia, t. j. w oku, mieli większą pewność,

a także ze względu na nateżenia zginające, przyjmujemy, opierając się na doświadczeniach amerykańskich *) większą jeszcze powierzchnię przekroju, niż teoretycznie potrzebna, a mianowicie:

Tablica XIX.

dla $\frac{d}{c} = < 1$	1	1,15	1,5	1,75	2	
$\frac{F_1}{F} =$	1,4	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75

Inne wymiary oka przyjmujemy zwykle następane

$$e \geq c, \quad d = 0,5 b, \quad d_1 = \frac{3}{8} b + d, \quad h = \frac{1}{2} b + \frac{5}{8} d.$$

Rozumie się, że i tu musimy się starać, aby ciśnienie na ściankę dziury nie było za wielkiem, a więc ponieważ

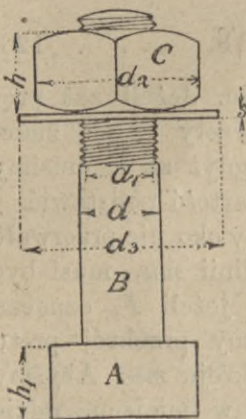
$$\tau_2 = \frac{P}{de} = \frac{F}{de} \tau, \text{ zatem } e = \frac{P}{d \tau_2}. \dots 121)$$

§. 35. Obliczenie śrub.

Śruba (n. *Schraube*, fr. *vis*, an. *screw*, r. болтикъ) składa się ze sworznia B (n. *Schraubenspindel*, *Schraubenbolzen*,

*) P. Steiner. *Über Brückenbauten in den Vereinigten Staaten von Nordamerika* 1878 str. 85, artykuł p. Lekoew *Allg. Bauzeitung* 1882, Jay du Bois. *The strains in framed structures* 1888 i Fidler *A treatise on bridge construction* 1893.

fr. *tige de boulon*, an. *bar*, r. шпindelъ) (rys. 63), na którym nacięte są gwinty czyli skręty (n. *Schraubengewinde*, fr. *filet de vis*, an. *worm of a screw*, r. винтовая нарезка), głowy śruby *A* (n. *Schraubekopf*, fr. *tête de vis*, an. *head*, r. головка) i naśrubka *C* (n. *Schraubemutter*, fr. *écrou*, an. *matrize*, r. гайка). Nazwijmy d średnicę sworznia, d_1 średnicę rdzenia (n. *Schraubekern*, fr. *collet de vis*, *noyau*, an. *screw neck*) w części naciętej gwintami, dalej wysokość naśrubka h a wysokość głowy h_1 , to jeżeli śruba pracuje na rozciąganie w kierunku osi, wytrzymałość przeciw przerwaniu rdzenia będzie:



Rys. 63.

$$P = \mu \frac{d_1^2 \pi}{4},$$

przeciw ścięciu głowy $P' = d \pi h_1 \frac{4}{5} \mu$, więc dla jednakiej pewności $P = P'$, a zatem:

$$\frac{\mu d_2^2 \pi}{4} = d \pi h_1 \frac{4}{5} \mu, \text{ a stąd:}$$

$$h_1 = \frac{5}{16} \frac{d_1^2}{d}.$$

Dalej otrzymujemy wytrzymałość przeciw ścięciu naśrubka

$$P'' = d_1 \pi h \frac{4}{5} \mu, \text{ a więc gdy } P = P'',$$

$$d_1 \pi h \frac{4}{5} \mu = \mu d_1^2 \frac{\pi}{4}, \text{ a stąd } h = \frac{5}{16} d_1.$$

W praktyce jednak przyjmujemy większe wartości dla h i h_1 zwłaszcza, że gwinty nie zawsze wypełniają zupełnie naśrubka, a więc nie wszystkie gwinty pracują równocześnie;

$$h = d, \quad h_1 = 0,7d. \quad 122)$$

Grubość naśrubka sześciobocznego czyli średnicę koła wpisanego (otwór klucza) zwykle przyjmujemy

$$d_2 = 1,4d + 0,5 \text{ cm} \quad 123)$$

wymiary zaś podkładki

na twardym materiale	na drzewie	} . . . 124)
$d_2 = 2,0d + 0,5 \text{ cm}$	$2,4 d + 1,0 \text{ cm}$	
$s = 0,1d + 0,3 \text{ cm}$	$0,12d + 0,5 \text{ cm}$	

Wymiary gwintów są używane powszechnie prawie według systemu Widwortha, według którego krok śruby (n. *Schraubenganghöhe*, fr. *pas de vis*, a. *pitch*, r. шагъ винта).

$$\left. \begin{aligned} s &= 0,08 d + 0,1 \text{ cm} \\ d_1 &= 0,872 d - 0,16 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 125)$$

Śruby grubsze niż 4 cm używane przy mostach i dachach, mają gwinty płaskie, dla tych jest:

$$\left. \begin{aligned} s &= 0,9 d + 0,2 \text{ cm} \\ d &= 1,1 d_1 + 0,22 \text{ cm} \\ h_1 &= 1,5 d \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 126)$$

Jeżeli śruba pracuje na rozciąganie, a P jest siłą, działającą w kierunku osi, to

$$P = \frac{d_1 \pi}{4} \tau, \text{ a stąd } d = 1,128 \sqrt{\frac{P}{\tau}} \dots \dots \dots 127)$$

Natężenie dopuszczalne τ przyjąć należy mniejsze ze względu na skręcenie przy naciąganiu naśrubka, a więc dla żelaza zlewnego $\tau = 600 \text{ kg/cm}$, dla stali $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$. Francuzi przyjmują nawet jeszcze mniejsze natężenie $\tau = 400 \text{ kg/cm}^2$ *).

Z rów. 125) i 128) otrzymamy:

$$d = 1,29 \sqrt{\frac{P}{\tau}} + 0,18 \text{ cm} \dots \dots \dots 128)$$

Jeżeli płyty kruszcowe lub kształtówki łączymy śrubami tak, że śruby narażone są na ścięcie, to obliczamy je zupełnie tak samo, jak przy połączeniu nitowanem lub sworzniowem.

Przykład. W moście drewnianym układu Howe'a siła, działająca w słupie wiszącym, składającym się z dwu śrub, jest 29,5 t. Jakie wymiary mamy śrubom, jeżeli natężenie dopuszczalne $\tau = 760 \text{ kg/cm}^2$. Wedle założenia na jedną śrubę wypada $P = \frac{29,5}{2} = 14,75 \text{ t}$.

Z rów. 127) otrzymamy:

$$d_1 = 1,128 \sqrt{\frac{14750}{760}} = 4,97 \text{ cm} = 50 \text{ mm}.$$

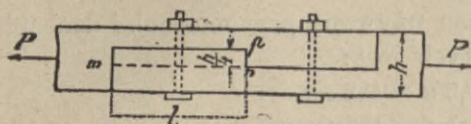
§. 36. Połączenia belek drewnianych.

W poprzednich paragrafach poznaliśmy obliczenie niektórych połączeń blach i kształtówek żelaznych, tu przejdziemy kilka przykładów, jak się obliczają połączenia belek drewnianych.

*) P. Résal J. *Construction métalliques*, str. 624.

1. Zamek prosty (n. *das gerade Hackenblatt*, fr. *en-tement à double patte*, an. *tabled scarf*, r. *прямой замок*).

Jeżeli h i b oznaczają wysokość i szerokość dwu belek drewnianych (rys. 64.), połączonych zamkiem prostym i jeżeli



Rys. 64.

siła P , działająca w osi, stara się to połączenie rozerwać, to w płaszczyźnie np powstaje ciśnienie, które nie powinno być większem, niż τ . Połączenie może być także

$$b \frac{h}{4} \tau = bl \tau'$$

rozerwane, gdy belka zostanie ściętą w płaszczyźnie mn . Ażeby pewność przeciw ścięciu i zgnieceniu była jednakową, musi być

$$l = \frac{h}{4} \frac{\tau}{\tau'}$$

Wstawiwszy $\tau = 70 \text{ kg/cm}^2$ i $\tau_2 = 10 \text{ kg/cm}^2$, otrzymamy:

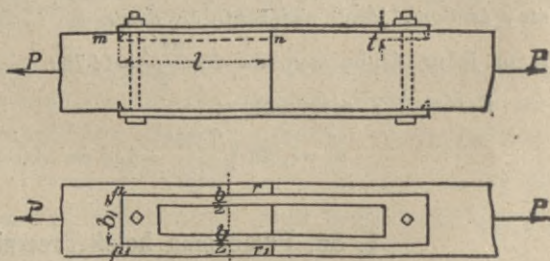
$$l = \frac{h}{4} \frac{70}{10} = 1,78h. \quad \dots \quad (129)$$

Rozumie się, że przytem musi być

$$P < \frac{bh\tau}{4}$$

2. Zetknięcie proste z łubkami (n. *Verlaschung*, fr. *éclissage*, *éclicement*, an. *fishing*, r. *связь*).

Jeżeli większe siły działają w kierunku osi, wtedy używamy do połączenia belek drewnianych płyt żelaznych, tak zwanych łubków (n. *Laschenplatte*, fr. *éclisse*, a. *fish-plate*)



Rys. 65.

(rys. 65.). Jeżeli siła P , działająca w osi, stara się połączenie rozerwać, to najprzód, aby łubki się nie przerwały, musi być

$$P = 2bg\tau,$$

jeżeli g oznacza grubość łubków, a τ natężenie dopuszczalne na ciągnięcie dla żelaza. Jeżeli przyjmiemy

$$\tau = 1000 \frac{kg}{cm^2}, \text{ to } P = 2000 bg, \text{ więc } bg = \frac{P}{2000}. \quad (130)$$

Widzimy dalej, że siła P spowodowuje ciśnienie drzewa na żebra, white do głębokości t , i że nareszcie połączenie może być zniszczonem przez ścięcie drzewa w płaszczyznach mn , pr i $p_1 r_1$. A więc mamy najprzód:

$$\text{dla ściskania } P = 2 \tau' b_1 t,$$

$$\text{a dla ścinania } P = 2 \tau_1 l (b_1 + 2t),$$

jeżeli τ' i τ_1 oznaczają natężenia dopuszczalne dla drzewa na ściskanie i ścinanie. Przyjmijmy:

$$\tau' = 70 \frac{kg}{cm^2}, \tau_1 = 10 \frac{kg}{cm^2}, \text{ to } b_1 = \frac{P}{140t}. \quad (131)$$

$$\text{a } l = \frac{P}{20(b_1 + 2t)} \quad (132)$$

w cm i kg .

Przykład. Niech będzie $P = 4000 kg$, $g = 0,5 cm$, to otrzymamy z równania 130) $b = \frac{4000}{2000 \times 0,5} = 4 cm$, więc $\frac{b}{2} = 2 cm$. Dla $t = 2 cm$ otrzymamy dalej z równania 131) $b_1 = \frac{4000}{140 \times 2} = 14,3 cm$, a z równania 132)

$$l = \frac{4000}{20(14,3 + 4)} = 19,3 cm.$$

3. Połączenie czopowe (n. *Verzapfung*).

Dwie belki prostopadłe A i B (rys. 66.) łączymy za pomocą czopa (n. *Zapfen*, fr. *tenon*, an. *tenon*, r. *шипъ*). Siła P stara się ściąć czop w płaszczyźnie mn , więc dla natężenia dopuszczalnego τ_1 $P = a h \tau_1$.

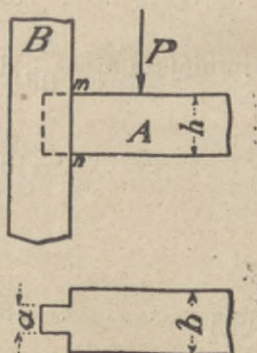
Dla drzewa prostopadłe do włókien przyjmujemy $\tau = 20 kg/cm^2$, więc

$$a = \frac{P}{20h} \quad (133)$$

w kg i cm .

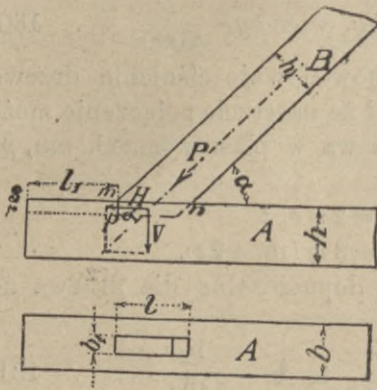
4. Czop ukośny (n. *schiefer Zapfen*, *Schrägzapfen*, fr. *tenon biais*, an. *sloped tenon*).

Jeżeli dwie belki mamy połączyć pod kątem ostrym (rys. 67), a przytem belka B wywiera znaczne ciśnienie P , używamy



Rys. 66.

wtedy czopa ukośnego. Ciśnioną belkę ukośną B nazywamy zastrzałem (n. *Strebe*, fr. *contrefiche*, an. *strut*, r. *подкосъ*).



Rys. 67.

Siła P da się rozłożyć na dwie składowe: H w kierunku poziomym i V w kierunku pionowym. Z rysunku widzimy, że $H = P \text{ dost } \alpha$, $V = P \text{ wst } \alpha$,

$$h_1 = l \text{ wst } \alpha, \text{ więc } l = \frac{h_1}{\text{wst } \alpha}.$$

Siła H usiłuje ściskać czop w płaszczyźnie mn , więc $H - lb_1 \tau_2 = 15 lb_1$, jeżeli $\tau_2 = 15 \text{ kg/cm}^2$ jest natężeniem dopuszczalnym na ścinanie ukośnie do włókien. Czop usiłuje dalej wysunąć część drzewa przed czopem $mprs$, więc $H =$

$= l_1 (b_1 + 2t) \tau_1$, jeżeli τ_1 jest natężeniem dopuszczalnym na ścinanie w kierunku równoległym do włókien.

Porównawszy oba te równania i przyjąwszy $\tau_1 = 10 \text{ kg/cm}^2$, otrzymamy $15 b_1 l = 10 l_1 (b_1 + 2t)$, a stąd

$$l_1 = \frac{15 b_1 l}{10 (b_1 + 2t)} \quad \dots \quad 134)$$

Szerokość czopa b_1 możemy obliczyć z równania

$$b_1 = \frac{H}{15 l} \quad \dots \quad 135)$$

Zwykle przyjmujemy $t = \frac{h}{3}$, zaś najmniejsze $b_1 = \frac{b}{3}$, dla tych wartości będzie:

$$\frac{5 bl}{10 \left(\frac{b}{3} + \frac{2}{3} h \right)} = \frac{3 bl}{2 (b + 2h)} \quad \dots \quad 136)$$

Dla $b_1 = b$ byłoby

$$l_1 = \frac{15 bl}{10 \left(b + \frac{2}{3} h \right)} = \frac{9 bl}{2 (3b + 2h)} \quad \dots \quad 137)$$

Przykład. Przyjmijmy $P = 10 t$, $\alpha = 30^\circ$, $b = 20 \text{ cm}$, $h = 20 \text{ cm}$, $h_1 = 20 \text{ cm}$ wtedy $l = \frac{20}{\text{wst } \alpha} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40 \text{ cm}$, dalej $H = P \text{ dost } \alpha = 10 \times 0,866 t$. Z rów. 135) otrzymamy $b_1 = \frac{8660}{15 \times 40} = 14,4 \text{ cm}$, przyjmiemy więc $b_1 = b = 20 \text{ cm}$, a wtedy

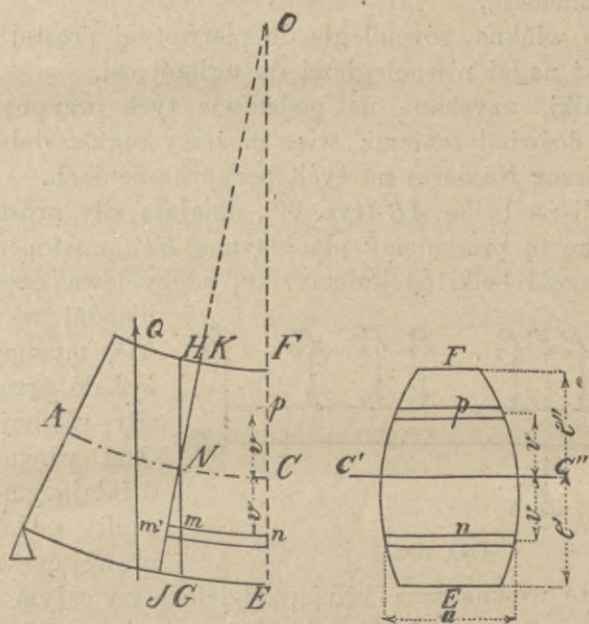
z równania 137) otrzymamy dla $t = \frac{h}{3} = 7 \text{ cm}$:

$$l_1 = \frac{9 \times 20 \times 40}{2(3 \times 20 + 2 \times 20)} = \frac{7200}{200} = 36 \text{ cm.}$$

V. Wytrzymałość na zginanie.

§. 37. Związek między siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi.

Jeżeli na belkę o osi prostej działają prostopadle do osi siły zewnętrzne, będące między sobą w równowadze, i jeżeli one leżą wszystkie w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś, wtedy siły wyginają belkę t. j. skracają włókna między dwoma



Rys. 68.

pierwotnie równoległymi przekrojami EF i GH (rys. 68) po stronie wklęsłej, a przedłużają je po stronie wypukłej. Rozumie się, że między włóknami przedłużonemi a skróconemi leżeć musi warstwa NC włókien, które zachowały swą pierwotną długość. Warstwę tę nazywamy warstwą obojętną (*n. neutrale Faserschichte*, fr. *ligne des fibres neutres*), jej przecięcie

się $C' C''$ z płaszczyzną przekroju, prostopadłą do osi, nazywamy osią obojętną (n. *neutrale Axe*, fr. *axe neutre*, an. *neutral axis*, r. нейтральная ось), a przecięcie się AC z płaszczyzną, w której działają siły zewnętrzne, linią ugięcia lub sprężystą (n. *elastische Linie*, fr. *ligne élastique*, an. *elastic line*, r. линия изгиба).

Chcąc wyznaczyć natężenia, powstałe w innych włóknach wskutek zginania, musimy zrobić niektóre przypuszczenia:

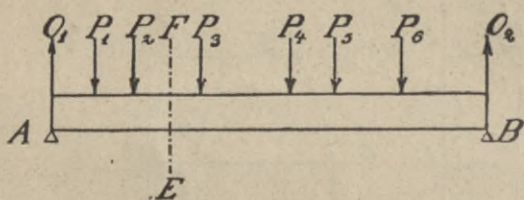
1. że zginanie jest tak małym, że natężenia pozostają w granicach sprężystości,

2. że przekroje EF i GH pozostają po ugięciu płaskimi i prostopadłymi do ugiętej osi, co zresztą stwierdził doświadczalnie Considère,

3. że włókna, równoległe do pierwotnej prostej osi belki, pozostają i nadal równoległymi do ugiętej osi.

Wyniki, uzyskane na podstawie tych przypuszczeń, są zgodne z doświadczeniami, więc możemy oprzeć dalszą teorię (podaną przez Naviera) na tych przypuszczeniach.

Jeżeli na belkę AB (rys. 69), działają siły prostopadłe do osi, a belkę tę przetniemy płaszczyzną EF , prostopadłą do osi, i prawą część belki odejmiemy, to, ażeby lewa część została



Rys. 69.

i nadal w równowadze, musimy przyłożyć do przekroju EF siły, równające się siłom wewnętrznym, działającym w EF , czyli oddziaływania prawej części belki na EF . Siły te wewnętrzne będą rozdzielone na całym przekroju i będą w części wypukłej dodatnie czyli ciągnienia, w części wklęsłej ujemne, czyli ciśnienia. One to sprawiają przedłużenia lub skrócenia włókien, a stąd wynika bezpośrednio, że natężenie w warstwie obojętnej jest równe zeru.

Jeżeli przekroje po ugięciu belki pozostają płaskimi, to przekrój GH (rys. 68) przejdzie w położenie JK , czyli obróci się około osi obojętnej o kąt JNG . Widzimy więc, że przedłużenia i skrócenia włókien, a zatem i natężenia, będą proporcjonalne do odległości ich do osi obojętnej.

an. *moment of inertia*, cz. *moment setrvačnosti*, r. моментъ инерціи) i oznaczymy ją I , to możemy napisać:

$$M = \frac{vI}{v}, \text{ albo } vI = Mv \quad . \quad . \quad . \quad 141)$$

Jeżeli za v wstawimy wartość e' i e'' i chcemy, aby w włóknach skrajnych były natężenia dopuszczalne τ' i τ'' , to otrzymamy: $\tau'I = Me'$ i $\tau''I = Me''$ 142)

Opuściwszy znaczki, możemy ogólnie napisać:

$$\tau'I = Me. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 143)$$

Piszemy tutaj τ , bo wymiary belki tak obliczamy, aby natężenie w włóknie skrajnem było równa natężeniu dopuszczalnemu. Ażeby natężenie było równocześnie w obu włóknach skrajnych równe natężeniom dopuszczalnym, musi być według 142)

$$\frac{\tau'}{e'} = \frac{\tau''}{e''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 144)$$

jeżeli τ' i τ'' oznaczają natężenia dopuszczalne na rozciąganie i ściskanie. Jeżeli $\tau' = \tau''$, to powinno być $e' = e''$ i odwrotnie,

$$\text{jeżeli } \tau' > \tau'', \quad " \quad " \quad " \quad e' > e''.$$

Dla drzewa, żelaza spawanego i zlewego i stali jest $\tau' = \tau''$, będziemy więc obierali takie przekroje, aby środek ciężkości był w połowie wysokości przekroju; dla żelaza lanego zaś, gdzie $\tau'' > \tau'$ obierać będziemy przekroje niesymetryczne, aby równ. 144) było choć w przybliżeniu wypełnione.

Z równ. 141) wynika, że natężenie v włókien jest tem mniejsze, im mniejsze jest v , a więc im bliżej leżą one osi obojętnej. Stąd wynika dalej, że chcąc materyał jak najbardziej wyzyskać, będziemy obierali takie przekroje belek, aby jak najwięcej materyału było jak najdalej od osi obojętnej.

Z rys. 68. widzimy, że $Nmm' \sim ONC$, więc $ds : v = NC : NO$. Nazwijmy r promień krzywizny linii ugięcia, to $OC = r$, a ponieważ $NC = mn = s$, więc $ds : v = s : r$, a stąd $r = v \frac{s}{ds}$. Według

równ. 34) jest $\frac{ds}{s} = \frac{v}{E}$, więc $r = v \cdot \frac{E}{v}$, a ponieważ według równ.

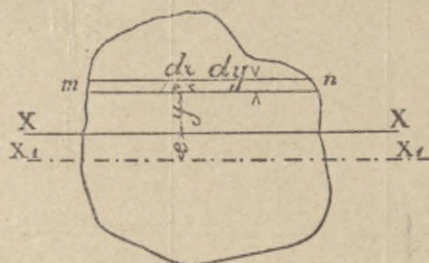
$$141) \frac{v}{v} = \frac{I}{M}, \text{ więc } r = \frac{IE}{M}, \text{ a zatem:}$$

$$EI = Mr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 145)$$

Wszystkie te wzory ważne są tylko na mocy złożenia do granicy sprężystości. O natężeniach zginających po przekroczeniu granicy sprężystości powiemy później.

§. 38. Moment bezwładności.

W równaniach zasadniczych 141) i 145) widzimy moment bezwładności I powierzchni przekroju belki ze względu na środek ciężkości. Moment bezwładności powierzchni jest, jak wiemy,



Rys. 70.

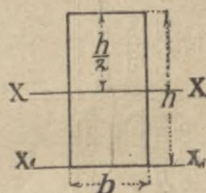
całką iloczynów elementów powierzchni przez kwadraty ich odległości od danej osi. Elementem powierzchni niech będzie prostokąt o powierzchni $d^2 F = dx dy$ (rys. 70), odległość jego od osi XX , przechodzącej przez środek ciężkości S jest y , to

$$I = \iint d^2 F y^2 = \iint dx dy y^2 \quad . \quad . \quad . \quad 146)$$

Jako przykład wyznaczmy moment bezwładności prostokąta (rys. 71). Wstawiawszy granice w równ. 146), otrzymamy:

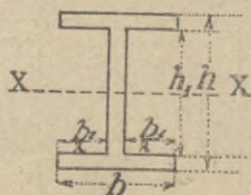
$$I = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy, \quad \text{a stąd: } I = \frac{bh^3}{12} \quad . \quad . \quad . \quad 147)$$

Podobnie wyznacza się w mechanice rozumowej analitycznie według równ. 146. momenty bezwładności rozmaitych figur geometrycznych. Tu ograniczymy się więc tylko na podaniu wyników i wspomnimy, że dla wyznaczenia momentu bezwładności figur złożonych używamy twierdzenia,



Rys. 71.

wynikającego z równ.



Rys. 72.

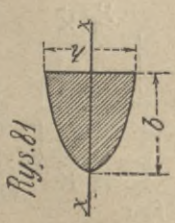
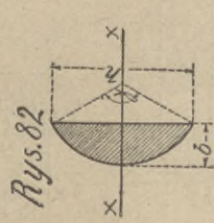
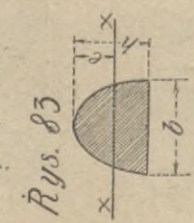
146., że moment bezwładności powierzchni dla danej osi równy jest sumie momentów bezwładności jej części ze względu na tę samą oś. Momenty bezwładności poniżej podane są wszystkie obliczone ze względu na oś poziomą, przechodzącą przez środek ciężkości przekroju.

Przykład. Moment bezwładności przekroju wykreślonego na rys. 72. ze względu na oś XX będzie:

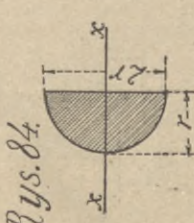
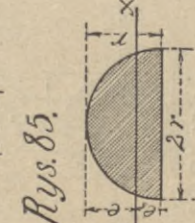
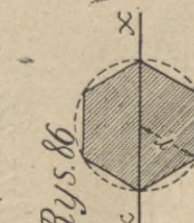

$$I = \frac{1}{12} bh^3 - 2 \frac{1}{12} \frac{b_1}{2} h_1^3 = \frac{1}{12} (bh^3 - b_1 h_1^3).$$

Tablica XX.

Licz. porządk.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	F' powierzchnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładności
1	Dwa prostokąty	<i>Rys. 73.</i> 	$\frac{h}{2}$	$b(h-h_1)$	$\frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3)$	$\frac{1}{6} \frac{b}{h} (h^3 - h_1^3)$	$\sqrt{\frac{h^2 + h h_1 + h_1^2}{12}}$
2	Kwadrat o podstawie poziomej	<i>Rys. 74.</i> 	$\frac{1}{2} a$	a^2	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{a}{\sqrt{12}} = 0,2889 a$
3	Kwadrat, jeżeli oś jest przekątnią	<i>Rys. 75.</i> 	$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{h}{2}$	$\frac{bh}{a^2} = \frac{2}{a}$	$\frac{a^4}{12} = \frac{bh^3}{24}$	$0,1178 a^3 = \frac{bh^2}{24}$	$0,2889 a$
4	Romb, romboid, trójkąt	<i>Rys. 76.</i> 	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{48}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{h}{\sqrt{24}} = 0,204 \frac{h}{\sqrt{24}}$
5	Elipsa	<i>Rys. 77.</i> 	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi b h}{4}$	$\frac{\pi b h^3}{64} = 0,0491 b h^2$	$\frac{\pi}{32} b h^2 = 0,0982 b h^2$	$\frac{d}{4}$
6	Koło	<i>Rys. 78.</i> 	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64} = 0,0491 d^4$	$\frac{\pi}{32} d^3 = 0,0982 d^3$	$\frac{d}{4}$
7	Trójkąt ze względu na oś równoległą do podstawy	<i>Rys. 79.</i> 	$\frac{2h}{3}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{86}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{h}{\sqrt{18}} = 0,2857 \frac{h}{\sqrt{18}}$
8	Odcinek paraboliczny stojący	<i>Rys. 80.</i> 	$\frac{3}{5} \frac{h}{5}$	$\frac{2}{3} \frac{bh}{3}$	$\frac{8}{175} b h^3 = 0,04576 h^3$	$\frac{8}{105} b h^2 = 0,0762 b h^2$	$0,2619 h$

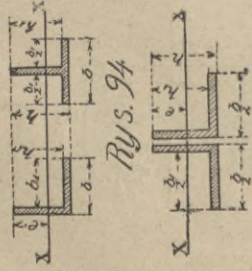
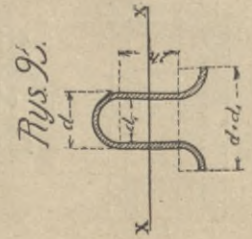
Licz. porządk.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	F powierz- chnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładno- ści
9	Odcinek paraboliczny leżący		$\frac{h}{2}$	$\frac{2}{3} bh$	$\frac{1}{30} bh^3$	$\frac{1}{15} bh^2$	$\frac{h}{\sqrt{5}} = 0,2236 h$
10	Odcinek koła		$\frac{h}{2} = r \text{ wst } \gamma$	$\frac{1}{2} r^2 (\gamma - \text{wst } \gamma)$	$\frac{r^4}{64} (16\gamma - 8 \text{ wst } \gamma + \text{wst } 2\gamma)$	$\frac{r^3}{64} (16\gamma - 8 \text{ wst } \gamma + \text{wst } 2\gamma) \frac{1}{\text{wst } \frac{\gamma}{2}}$	—
11	Półowa elipsy		0,5756 h	$\frac{\pi}{4} bh$	0,0549 bh ³	0,0955 bh ²	0,2647 h

*) $b = r \left(1 - \text{dost } \frac{\gamma}{2}\right)$.


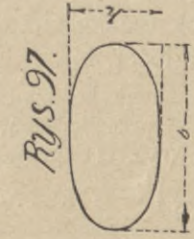
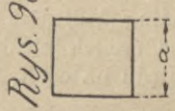
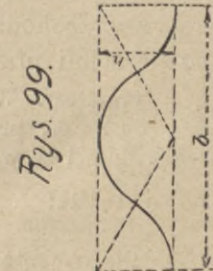
12	Półkole stojące		r	$\frac{r^2 \pi}{2}$	0,3927 r ⁴	0,3927 r ³	0,458 r
13	Półkole leżące		0,5756 r	$\frac{r^2 \pi}{2}$	0,1098 r ⁴	0,1908 r ³	0,2647 r
14	Sześciobok w koło wpi- sany od dwóch bokach poziomych		0,886 r	2,5981 r ²	0,5413 r ⁴	0,025 r ³	0,4564 r
15	Sześciobok w koło wpi- sany od dwóch bokach pio- nowych		r	2,5981 r ²	0,5413 r ⁴	0,5413 r ³	0,4564 r

Licz. porząd.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	F powierzchnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładności
16	Trapez	<i>Rys. 88.</i> 	$\frac{2b+b_1}{b+b_1} \frac{h}{3}$	$\frac{b+b_1}{2} h$	$\frac{b^2+4bb_1+b_1^2}{b+b_1} \frac{h^3}{36}$	$\frac{1}{12} \frac{b^2+4bb_1+b_1^2}{2b+b_1} h^2$	$\frac{h}{b+b_1} \sqrt{\frac{b^2+2bb_1+b_1^2}{18}}$
17	Pierścień kołowy	<i>Rys. 89.</i> 	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4} (d^2-d_1^2)$	$\frac{\pi}{4} (d^4-d_1^4) = 0,0491 (d^4-d_1^4)$	$\frac{\pi}{32} \frac{d^4-d_1^4}{d} = 0,0982 \frac{d^4-d_1^4}{d}$	$\frac{1}{4} \sqrt{d^2+d_1^2}$
18	Pierścień eliptyczny	<i>Rys. 90.</i> 	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{4} (bh-b_1h_1)$	$0,0491 (bh^3-b_1h_1^3)$	$\frac{\pi}{32} \frac{(bh^2-b_1h_1^2)}{d} = 0,0982 (bh^2-b_1h_1^2)$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{bh^2-b_1h_1^2}{bh-b_1h_1}}$

19	Przekroje U, I, Z	<i>Rys. 91.</i> 	$\frac{h}{2}$	$bh-b_1h_1$	$\frac{1}{12} (bh^3-b_1h_1^3)$	$\frac{bh^3-b_1h_1^3}{6h}$	$0,289 \sqrt{\frac{bh^3-b_1h_1^3}{bh-b_1h_1}}$
20	Przekrój złożony belki blaszanej	<i>Rys. 92.</i> 	$\frac{h}{2}$	$bh-b_1h_1-b_2h_2-b_3h_3$	$\frac{1}{12} (bh^3-b_1h_1^3-b_2h_2^3-b_3h_3^3)$	$\frac{bh^3-b_1h_1^3-b_2h_2^3-b_3h_3^3}{6h}$	-
21	Leżąca tówka i przekrój krzyżowy	<i>Rys. 93.</i> 	$\frac{h}{2}$	$gh+bg_1$	$\frac{1}{12} (gh^3+bg_1^3)$	$\frac{1}{6} \frac{gh^3+bg_1^3}{h}$	$0,289 \sqrt{\frac{gh^3+bg_1^3}{gh+bg_1}}$

Licz. porząd.	Nazwa przekroju	Rysunek przekroju	e odstęp skrajnej warstwy od osi obojętnej	F powierz- chnia przekroju	I moment bezwładności	$\frac{I}{e}$ moment oporu	a promień bezwładno- ści
22	Przekrój T lub kątownik		$\frac{1}{2} \frac{bh^2 - b_1h_1^2}{bh - b_1h_1}$	$bh - b_1h_1$	$\frac{1}{3} (bh^3 - b_1h_1^3) +$ $-\frac{1}{4} \frac{(bh^2 - b_1h_1^2)^2}{bh - b_1h_1}$	$\frac{2}{3} \frac{(bh^3 - b_1h_1^3)(bh - b_1h_1)}{bh^2 - b_1h_1^2} +$ $-\frac{1}{2} (bh^2 - b_1h_1^2)$	—
23	Przekrój falisty		$\frac{d}{h + \frac{d}{2}}$	$2h(d - d_1) + \frac{(d^2 - d_1^2)\pi}{4}$	$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) +$ $+\frac{h^2\pi}{4} (d^2 - d_1^2) +$ $+\frac{h}{3} (d^3 - d_1^3) +$ $+\frac{2}{3} (d - d_1)h^3$	$\frac{1}{h + \frac{d}{2}} \left[\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) + \frac{h^2\pi}{4} (d^2 - d_1^2) + \frac{h}{3} (d^3 - d_1^3) + \frac{2}{3} (d - d_1)h^3 \right]$	—

Wzory przybliżone dla przekrojów próżnych o bardzo małej grubości ścian g

24	Kolo		$\frac{d}{2}$	πdg	$\frac{\pi d^3 g}{8}$	$\frac{\pi d^2 g}{4}$	$\frac{d}{\sqrt{8}} = 0,3536d$
25	Elipsa		$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{2} \pi (b+h)g$	$\frac{1}{92} \pi h^2 g (3b+h)$	$\frac{\pi}{16} hg (3b+h)$	$\frac{h}{4} \sqrt{\frac{3b+h}{b+h}}$
26	Kwadrat		$\frac{a}{2}$	$4ag$	$\frac{2}{3} a^3 g$	$\frac{4}{3} a^2 g$	$\frac{a}{\sqrt{6}} = 0,4083a$
27	Przekrój falisty		$\frac{h}{2}$	$1,5 \left(h + \frac{b}{2} \right) g$	$\frac{h^3 g}{20} (3b+2h)$	$\frac{hg}{10} (3b+2h)$	—

§. 39. Wyznaczenie momentu bezwładności ze względu na oś równoległą do danej.

Znając moment bezwładności I ze względu na oś przez środek ciężkości powierzchni przechodzącą, możemy łatwo znaleźć moment bezwładności I_1 ze względu na oś X_1X_1 (rys. 70) równoległą do osi XX , w następujący sposób: Nazwawszy moment bezwładności elementu powierzchni d^2I , ze względu na oś XX , względnie d^2I_1 ze względu na oś X_1X_1 , otrzymamy:

$$d^2I = d^2Fy^2,$$

$$d^2I_1 = d^2F(y+e)^2 = d^2Fy^2 + 2d^2Fey + d^2Fe^2, \text{ a stąd}$$

$$I_1 = I + 2e \iint d^2Fy + e^2 \iint d^2F.$$

Jeżeli wykonamy jedno całkowanie, naznaczone w drugim wyrazie $2e \iint d^2Fy$, między granicami m i n , to otrzymamy pasek mn o powierzchni $\int_m^n d^2F = dF$, a więc drugi wyraz będzie równy $2e \int dFy$. Ale dFy jest momentem statycznym paska mn ze względu na oś XX , a więc $\int dFy$ jest momentem statycznym powierzchni przekroju, który jest ze względu na środek ciężkości $= 0$. W trzecim wyrazie jest $\iint d^2F = F$, więc

$$I_1 = I + Fe^2 \dots \dots \dots 148)$$

A zatem moment bezwładności powierzchni F ze względu na oś, odległą o długość e od środka ciężkości, jest równy momentowi bezwładności ze względu na oś, równoległą do osi danej, a przechodzącą przez środek ciężkości, więcej iloczynowi powierzchni przez kwadrat odległości e .

Przykłady. Według 148) jest moment bezwładności prostokąta ze względu na oś, przez środek ciężkości przechodzącą, $I = \frac{1}{12}bh^3$. Moment bezwładności ze względu na oś X_1X_1 (rys. 71), przechodzącą przez podstawę, będzie:

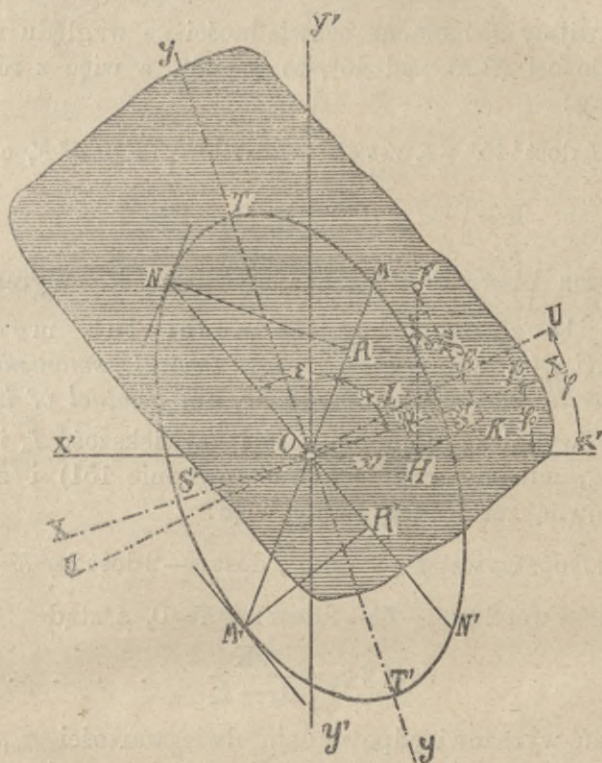
$$I_1 = \frac{1}{12}bh^3 + bh \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}bh^3 \dots \dots \dots 149)$$

Dla trójkąta mamy $I = \frac{1}{36}bh^3$, a ze względu na oś X_1X_1 (rys. 78), przechodzącą przez podstawę,

$$I_1 = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{12}bh^3 \dots \dots \dots 150)$$

§. 40. Promień i elipsa bezwładności.

Znając moment bezwładności ze względu na dwie prostopadłe osie $X'X'$ i $Y'Y'$ (rys. 100), przecinające się w punkcie O , możemy znaleźć moment bezwładności danej powierzchni ze względu na oś UU , nachyloną do $X'X'$ pod kątem φ .



Rys. 100.

Niech będzie moment bezwładności danej powierzchni I_x ze względu na oś $X'X'$, I_y ze względu na oś $Y'Y'$, a I_u ze względu na oś UU . Zauważmy element powierzchni d^2F w punkcie F , którego rzędne niech będą x' i y' . Spuścimy z punktu F prostopadłą na UU i nazwijmy ją $FE=y_u$, to widzimy z rysunku, że $y_u = FK - EK = y' \text{ dost } \varphi - HL = y' \text{ dost } \varphi - x' \text{ wst } \varphi$.

Wiemy, że $I_u = \iint d^2F y_u^2$, więc

$$I_u = \iint (y' \operatorname{dost} \varphi - x' \operatorname{wst} \varphi)^2 d^2 F = \iint y'^2 \operatorname{dost}^2 \varphi d^2 F + \\ + \iint x'^2 \operatorname{wst}^2 \varphi d^2 F - \iint 2x' y' \operatorname{dost} \varphi \operatorname{wst} \varphi d^2 F,$$

czyli nareszcie:

$$I_u = I_x \operatorname{dost}^2 \varphi + I_y \operatorname{wst}^2 \varphi - \operatorname{wst} 2 \varphi \iint x' y' d^2 F \quad . \quad 151)$$

Nazwijmy I_s moment bezwładności ze względu na oś, nachyloną do osi $X' X'$ pod 45° , to $\varphi = 45^\circ$, a więc z równ. 151) otrzymamy:

$$I_s = I_x \operatorname{dost}^2 45^\circ + I_y \operatorname{wst}^2 45^\circ - \operatorname{wst} 90^\circ \iint x' y' d^2 F, \text{ a stąd}$$

$$K = \iint x' y' d^2 F = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - I_s, \quad . \quad . \quad 152)$$

jeżeli wyraz $\iint x' y' d^2 F$ oznaczymy literą K . Wyraz ten nazywamy iloczynem bezwładności lub momentem zboczenia (n. *Zentrifugalmoment*, *Deviationsmoment*, fr. *produit d'inertie*, *moment rectangulaire*, an. *product of inertia*).

Aby wynaleźć najmniejszość i największość I_u i odnośny kąt $\varphi = \varphi_0$, musimy zróżniczkować równanie 151) i zrobić pochodną równą zeru. Otrzymamy więc:

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = -2 I_x \operatorname{dost} \varphi \operatorname{wst} \varphi + 2 I_y \operatorname{wst} \varphi \operatorname{dost} \varphi - 2 \operatorname{dost} 2 \varphi K = 0, \text{ czyli}$$

$$\operatorname{wst} 2 \varphi (I_y - I_x) - 2 \operatorname{dost} 2 \varphi K = 0, \text{ a stąd}$$

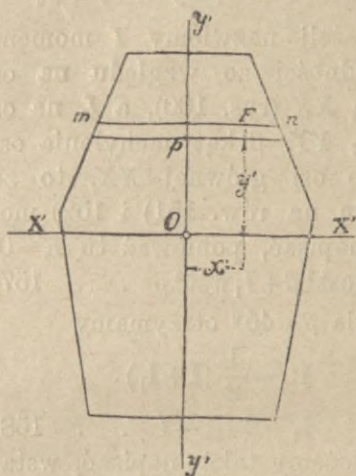
$$\operatorname{st} 2 \varphi_0 = \frac{2K}{I_y - I_x} \quad . \quad . \quad . \quad 153)$$

Temu wyrazowi odpowiadają dwie wartości φ_0 , różniące się o 90° , a więc φ_0 i $\varphi_0 + 90^\circ$. Różniczkując raz jeszcze, łatwo się możemy przekonać, że raz otrzymamy drugą pochodną dodatnią, drugi raz ujemną, a więc kąty φ_0 i $\varphi_0 + 90$ wyznaczają osie, dla których I_u jest największe i najmniejsze. Osie te, stojące jedna na drugiej prostopadle, nazywamy osiami głównymi bezwładności (n. *Hauptträgheitsaxe*, fr. *axe principal d'inertie*, an. *principal axis of inertia*).

Przyjęte dowolnie osie $X' X'$ i $Y' Y'$ stają się osiami głównymi, gdy $\varphi_0 = 0$, a więc gdy

$$K = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 154)$$

Jeżeli oś $Y'Y'$ (rys. 101) jest osią symetrii przekroju, to chcąc obliczyć $K = \iint x' y' d^2 F$ i całkując naprzód w pasku mn ,



Rys. 101.

którego środkiem ciężkości jest p , możemy wyłączyć y' , jako stałą, a $\int x' d^2 F$ równa się momentowi statycznemu powierzchni tego paska ze względu na jego środek ciężkości, zatem $=0$. To samo zrobimy dla innych pasków, zobaczymy, że $K=0$, a zatem ze względu na 154) możemy powiedzieć, że gdy przez O może być położoną oś symetrii, oś ta jest zarazem osią główną bezwładności, oś zaś prostopadła do niej jest drugą osią główną.

Jeżeli przez dany punkt nie da się poprowadzić oś symetrii, to moment zboczenia K należy wyznaczyć z rów. 152). Czasem łatwiej jednak dojdziemy do końca w następujący sposób, podany przez Müllera Breslaua.

Przypuśćmy, że chcemy wyznaczyć moment zboczenia przekroju ze względu na osie $O_1 X_1$ i $O_1 Y_1$, przechodzących przez środek ciężkości przekroju O_1 (rys. 102).

$$\text{Wedle 152) } K = \iint (x_1 + x_0)(y_1 + y_0) d^2 F$$

$$\text{albo } K = \iint x_1 y_1 d^2 F + x_0 \iint y_1 d^2 F + y_0 \iint x_1 d^2 F + x_0 y_0 \iint d^2 F$$

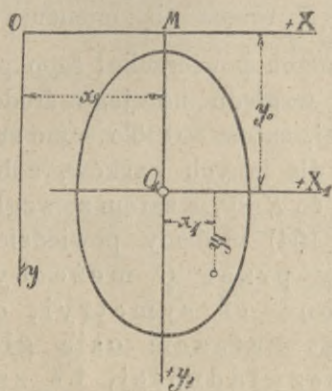
Nazwijmy K_1 moment zboczenia ze względu na osie $O_1 X_1$ i $O_1 Y_1$, to $K_1 = \iint x_1 y_1 d^2 F$. Dalej mamy ze względu, że O_1 jest środkiem ciężkości $x_0 \iint y_1 d^2 F = 0$ i $y_0 \iint x_1 d^2 F = 0$, zatem

$$K = K_1 + x_0 y_0 F \quad \dots \dots \dots 155)$$

Jeżeli osie $O_1 X_1$ i $O_1 Y_1$ są osiami głównymi bezwładności, to $K_1=0$, więc

$$\mathbf{K} = x_0 y_0 \mathbf{F} \dots \dots \dots 156)$$

przyczem uwzględnić zawsze należy znak rzędnych x_0 i y_0 .



Rys. 102.

Jeżeli nazwiemy I moment bezwładności ze względu na oś główną XX (rys. 100), a I_1 na oś główną YY , β kąt nachylenia osi UU do osi głównej XX , to ze względu na rów. 151) i 152) możemy napisać, ponieważ tu $K=0$, $I_u = I \text{ dost}^2 \beta + I_1 \text{ wst}^2 \beta \dots \dots \dots 157)$

Dla $\beta = 45^\circ$ otrzymamy

$$I_{45} = \frac{1}{2} (I + I_1)$$

$$I_1 = 2 I_{45} - I \dots \dots 158)$$

Możemy także napisać, wstawiając w 157) $\beta = -\varphi_0$,

$$I_x = I \text{ dost}^2 (-\varphi_0) + I_1 \text{ wst}^2 (-\varphi_0) = I \text{ dost}^2 \varphi_0 + I_1 \text{ wst}^2 \varphi_0,$$

$$I_y = I \text{ wst}^2 \varphi_0 + I_1 \text{ dost}^2 \varphi_0, \text{ a zatem}$$

$$I = \frac{I_x}{\text{dost}^2 \varphi_0} - I_1 \text{ st}^2 \varphi_0, \text{ a więc } I_y = I_x \text{ st}^2 \varphi_0 - I_1 \text{ wst}^2 \varphi_0 \text{ st}^2 \varphi_0 + I_1 \text{ dost}^2 \varphi_0, \text{ czyli}$$

$$I_y \text{ dost}^2 \varphi_0 - I_x \text{ wst}^2 \varphi_0 = I_1 \text{ dost}^4 \varphi_0 - I_1 (1 - \text{dost}^2 \varphi_0)^2 = I_1 (2 \text{ dost}^2 \varphi_0 - 1),$$

$$I_1 = \frac{I_y \text{ dost}^2 \varphi_0 - I_x \text{ wst}^2 \varphi_0}{2 \text{ dost}^2 \varphi_0 - 1} \dots \dots \dots 159)$$

Dodawszmy wartości I_x i I_y , otrzymamy

$$I_x + I_y = I(\text{dost}^2 \varphi_0 + \text{wst}^2 \varphi_0) + I_1(\text{wst}^2 \varphi_0 + \text{dost}^2 \varphi_0) = I + I_1, \dots \dots 160)$$

$$\text{a więc } I = I_x + I_y - I_1 \dots \dots \dots 161)$$

Moment bezwładności wogóle możemy inaczej jeszcze wyrazić, mianowicie równaniem $I = F a^2$, $\dots \dots \dots 162)$ którebyśmy otrzymali, skupiwszy całą powierzchnię F w jednym punkcie i umieściwszy ją w oddaleniu a od osi. Iloczyn $F a^2$ równałby się momentowi bezwładności I . Długość a nazywamy promieniem bezwładności (n. *Trägheitsradius*, fr. *rayon de giration*, an. *radius of gyration*, cz. *poloměr setrvačnosti*).

Pomyślmy, żeśmy obliczyli dla dowolnej ilości osi, przez O przechodzących, momenty bezwładności i odetnijmy na każdej z tych osi długość odwrotnie proporcjonalną do pierwiastku

momentu bezwładności (rys. 100) tak, że n. p. $OM = \frac{c}{\sqrt{I_m}}$, gdy c

jest dowolną ilością stałą, a I_m momentem bezwładności ze względu na OM , to $I_m = \frac{c^2}{OM^2}$. Jeżeli rzędne punktu M , odniesione do osi głównych, są $OP = x$ i $PM = y$, to

dost $\alpha = \frac{x}{OM}$, a wst $\alpha = \frac{y}{OM}$, a więc ze względu na 157)

$$I_m = I \frac{x^2}{OM^2} + I_1 \frac{y^2}{OM^2}. \text{ Wstawiwszy wartości za } OM, \text{ otrzymamy}$$

$I_m = II_m \frac{x^2}{c^2} + I_1 I_m \frac{y^2}{c^2}$, a więc $c^2 = Ix^2 + I_1 y^2$.

Wstawmy teraz $I = Fa^2$ i $I_1 = Fa_1^2$, a otrzymamy $c^2 = Fa^2 x^2 + Fa_1^2 y^2$, albo

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{c^2}{Fa^2 a_1^2} \quad \dots \quad 163)$$

Jest to równanie elipsy, którą nazywamy elipsą bezwładności (n. *Trägheitsellipse*, fr. *ellipse d'inertie*, an. *ellipse of inertia*). Jeżeli przytem przyjmiemy $c^2 = Fa^2 a_1^2$, to rów. 163) możemy napisać

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a^2} + 1 \quad \dots \quad 164)$$

Jestto równanie elipsy bezwładności, której połowy osi głównych są a i a_1 , promieniami bezwładności głównych momentów bezwładności. W tym wypadku jest

$$OM^2 = \frac{c^2}{I_m} = \frac{Fa^2 a_1^2}{Fa_m^2}, \text{ więc } a_m = \frac{aa_1}{OM}.$$

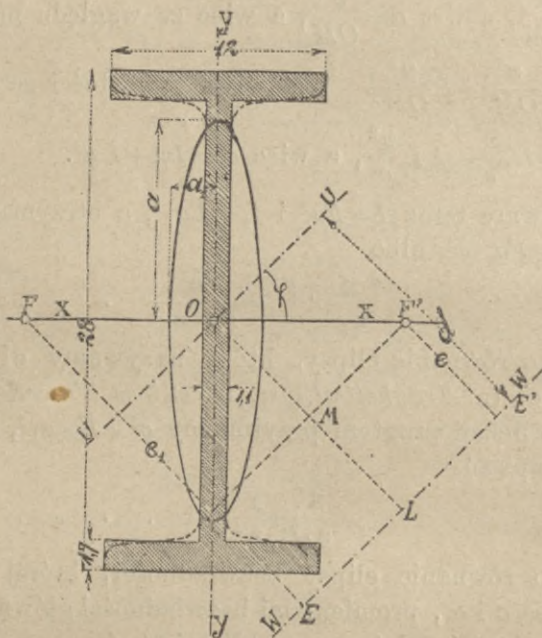
Jeżeli MM' i NN' są osiami sprzężonymi elipsy bezwładności, a kąt między nimi zawarty ε , to na mocy znanej własności elipsy jest

$$aa_1 = ON \cdot OM \text{ wst } \varepsilon, \text{ więc } a_m = \frac{ON \cdot OM \cdot \text{wst } \varepsilon}{OM} = ON \cdot \text{wst } \varepsilon = NR.$$

Widzimy więc, że jeżeli do elipsy bezwładności wykreślimy styczną, równoległą do danej osi, odstęp tej stycznej od osi jest równy promieniowi

bezwładności ze względu na daną oś. Elipsa bezwładności będzie więc obwiedną prostych, równoległych do danych osi, poprowadzonych w odstępie równym promieniowi bezwładności. A zatem będzie, jak to już wiemy, $OT=OT'=a$, $OS=OS'=a_1$, której to własności elipsy bezwładności możemy użyć do jej wykreślenia.

Jeżeli punkt O jest środkiem ciężkości przekroju, elipsa bezwładności nazywa się wtedy elipsą środkową (n. *Zentralellipse*, fr. *ellipse centrale*, an. *central ellipse*).



Rys. 103.

Mając elipsę bezwładności wykreśloną, łatwo wyznaczyć możemy moment bezwładności dla jakiegokolwiek osi n. p. NN' , przechodzącej przez punkt O . Poprowadźmy styczną do elipsy, równoległą do NN' , a odległość obu linii $M'R'=a_n$ jest promieniem bezwładności, więc $I_n=Fa_n^2$.

Z równ. 157) wynika, że jeżeli $I=I_1$, to $I_m=I$ ($\text{dost}^2\beta + \text{wst}^2\beta=I$), a więc, gdy momenty bezwładności dla osi głównych są równe, to także i moment ze względu na jaką-

kolwiek oś, przechodzącą przez środek ciężkości jest równy momentowi ze względu na oś główną, czyli wszystkie momenty bezwładności, ze względu na osie, przechodzące przez punkt O , są równe; elipsa bezwładności staje się kołem.

Przykłady.

1) Wyznaczyć elipsę środkową przybliżonego przekroju $I I$. 28, wykreślonego na rys. 103. Przekrój jest symetryczny, więc oś symetrii YY' jest jedną osią główną, drugą zaś oś $XX' \perp YY'$, przechodząca przez środek ciężkości.

Obliczmy najprzód I i I_1 , a otrzymamy

$$I = \frac{1}{12}(12 \times 28^3 - (12 - 1,1)(28 - 3,4)^3) = \frac{1}{12}(263\,424 - 162\,266) = 8\,429,8 \text{ cm}^4,$$

$$I_1 = \frac{1}{12}(2 \times 1,7 \times 12^3 + (28 - 3,4)1,1^3) = \frac{1}{12}(5\,865,2 - 32,7) = 486,0 \text{ cm}^4.$$

Powierzchnia przekroju $F = 2 \times 12 \times 1,7 + (28 - 3,4)1,1 = 67,86 \text{ cm}^2$, więc połowy osi głównych elipsy środkowej będą

$$a = \sqrt{\frac{8\,429,8}{67,86}} = 11,145 \text{ cm}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{486,0}{67,86}} = 2,676 \text{ cm}.$$

2) Dla przybliżonego przekroju kątowniki $\frac{50,75}{8}$ o wymiarach, poda-

nych na rys. 104, obliczyć wielkość i położenie osi głównych środkowej elipsy bezwładności.

Musimy najprzód znaleźć współrzędne środka ciężkości O . W tym celu korzystać będziemy z równania $S = Fe$, gdy S oznacza moment statyczny powierzchni przekroju ze względu na dolną podstawę AB , F powierzchnię przekroju, a e odległość środka ciężkości O od prostej AB . Możemy więc napisać

$$e = \frac{S}{F} \dots \dots \dots 165)$$

Wstawiwszy wartość, otrzymamy

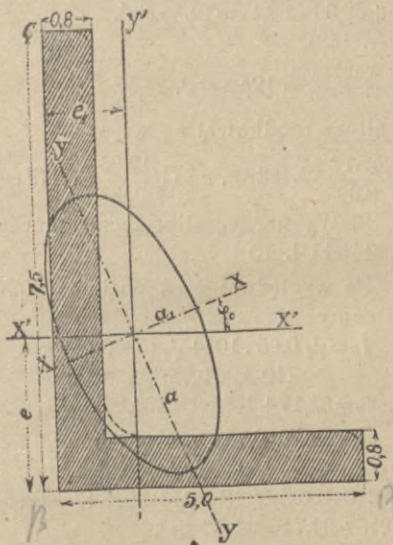
$$e = \frac{7,5 \cdot 0,8 \cdot 3,75 + (5 - 0,81)0,4}{7,5 \cdot 0,8 + (5 - 0,8)0,8} = \frac{23,844}{9,36} = 2,55 \text{ cm}.$$

Jeżeli S_1 i e_1 oznaczać będą moment statyczny ze względu na

pionową BC , względnie odległość środka ciężkości O od BC , to

$$e_1 = \frac{S_1}{F} = \frac{5,0 \cdot 0,8 \cdot 2,5 + (7,5 - 0,8) \cdot 0,4}{9,36} = \frac{12,14}{9,36} = 1,30 \text{ cm}.$$

Teraz obliczamy moment bezwładności I_x ze względu na oś $X'X'$ i I_y ze względu na oś $Y'Y'$. Dla wyznaczenia tych momentów rozłożymy



Rys. 104.

przekroje na prostokąty i korzystając będziemy z wzorów 147) i 149). Nazwawszy b i g podstawę i wysokość prostokąta, mamy mianowicie momenty bezwładności ze względu na podstawę $I_1 = \frac{1}{3} bh^3$. Nazwawszy dalej I_c moment bezwładności ze względu na oś BC , I_a ze względu na BA , otrzymamy

$$I_c = \frac{1}{3} (0,8 \cdot 5^3 + (7,5 - 0,8) 0,8^3) = 34,48 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_c - Fe_1^2 = 34,48 - 9,36 \cdot 1,30^2 = 18,66 \text{ cm}^4.$$

Dalej mamy $I_a = \frac{1}{3} (0,8 \cdot 7,5^2 + (5 - 0,8) 0,8^2) = 113,22 \text{ cm}^4$

$$I_x = I_a - Fe^2 = 113,22 - 9,36 \cdot 2,55^2 = 52,36 \text{ cm}^4.$$

Teraz obliczymy moment zbroczenia K wedle równ. 152) i otrzymamy

$$K = -(1,30 - 0,4)(3,75 - 2,55) 7,5 \cdot 0,8 - (2,5 - 1,3)(2,55 - 0,4)(5 - 0,8) 0,8$$

$$K = -6,48 - 8,67 = -15,15 \text{ cm}^4,$$

a ze względu na równanie 153)

$$\text{st } 2 \varphi_0 = \frac{2(-15,15)}{18,66 - 52,36} = \frac{30,30}{33,70} = 0,8991$$

a stąd

$$2 \varphi_0 = 41^\circ 57' 28''$$

$$\varphi_0 = 20^\circ 58' 34''.$$

Teraz obliczymy I na podstawie równania 151)

$$I = I_x' \text{dost}^2 \varphi_0 + I_y' \text{wst}^2 \varphi_0 - \text{wst } 2 \varphi K$$

$$\text{albo } I = 52,36 \text{dost}^2 \varphi + 18,66 \text{wst}^2 \varphi + \text{wst}^2 \varphi 15,15 = 45,65 + 2,39 + 10,13$$

$$I = 58,17 \text{ cm}^4,$$

a dalej wedle 161) $I_1 = 18,36 + 52,36 - 58,17 = 12,85 \text{ cm}^4$.

I_1 mogliśmy też obliczyć z rów. 159)

$$I_1 = \frac{18,66 \text{dost}^2 \varphi_0 - 52,36 \text{wst}^2 \varphi_0}{2 \text{dost}^2 \varphi_0 - 1} = 12,85 \text{ cm}^4.$$

Długości połówek osi głównych elipsy środkowej są więc;

$$a = \sqrt{\frac{58,17}{9,36}} = 2,493 \text{ cm}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{12,85}{9,36}} = 1,172 \text{ cm}.$$

3) Wyznaczyć elipsę bezwładności dla zetówki l. 10 (rys. 105).

Ze względu na oś poziomą $X_1 X_1$ otrzymamy

$$I_x = \frac{1}{12} 0,65 \cdot 10^3 + \frac{1}{12} (5 - 0,65) (10 - 2 \cdot 0,95)^3$$

$$I_x = 54,17 + 169,82 = 223,99 \text{ cm}^4.$$

Ze względu na oś pionową $Y Y_1$ mamy

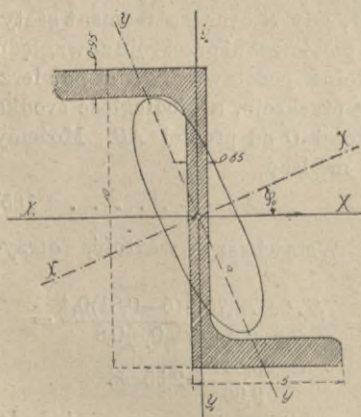
$$I_y = \frac{1}{12} (10 - 0,95) 0,65^3 + \frac{1}{12} (0,95(5 + 5 - 0,65))^3$$

$$I_y = 0,16 + 64,71 = 64,87 \text{ cm}^4.$$

Dalej mamy moment zbroczenia

$$K = 0 - 2 \cdot 5 \cdot 0,95 (5 - 0,475) \times (2,5 - 0,325)$$

$$K = 93,50 \text{ cm}^4.$$



Rys. 105.

Wedle rów. 153) mamy teraz

$$\text{st } 2 \varphi = \frac{-2 \cdot 93,5}{64,87 - 223,99} = 1,1745$$

$$\text{stąd } 2 \varphi_0 = 49^\circ 35' 17''$$

$$\text{a } \varphi_0 = 24^\circ 47' 38''.$$

Teraz obliczmy I na podstawie rów. 151)

$$I = 223,99 \text{ dost}^2 z + 64,87 \text{ wst}^2 z + \text{wst } 2z \cdot 93,5 = 184,60 + 11,41 + 71,19$$

$$I = 267,20 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = 64,97 + 223,99 - 267,20 = 21,66 \text{ cm}^4.$$

Długość połówek osi głównych elipsy bezwładności otrzymamy

$$a = \sqrt{\frac{267,2}{14,77}} = 4,25 \text{ cm}, \quad b = \sqrt{\frac{21,66}{14,77}} = 1,21 \text{ cm}.$$

4) Przekrój eliptyczny.

Moment bezwładności ze względu na oś poziomą XX jest

$$I = \frac{\pi}{64} bh^3.$$

Nazwijmy połowy osi elipsy a' i b' , to

$$a' = \frac{h}{2}, \quad b' = \frac{b}{2}, \quad \text{mamy więc } I = \frac{\pi}{4} b'a'^3,$$

a stąd połowa osi głównej elipsy środkowej

$$a = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{4} b'a'^3}{a'b'\pi}} = \frac{1}{2} a'.$$

Podobnie otrzymamy $b = \frac{1}{2} b'$

Elipsa środkowa jest więc podobną do danej elipsy, a jej osie równają się połowom osi danej elipsy. To samo odnosi się do koła.

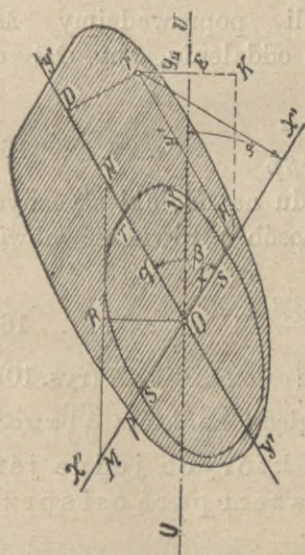
§. 41. Elipsa bezwładności ze względu na osie ukośne.

Jeżeli istnieje w przekroju tylko oś symetrii ze względu na osie ukośne, to w takim razie możemy użyć tych osi do wykreślenia elipsy bezwładności. Przyjmijmy w O (rys. 106) parę osi ukośnych $X'X'$ i $Y'Y'$, z których ostatnia jest zarazem ukośną osią symetrii. Niech ukośne rzędne punktu danego F będą y' i x' , odstęp punktu F od dowolnej osi UU , nachylonej do $X'X'$ pod kątem φ , niech będzie

$$EF = y_u = y' \text{ dost } \gamma - x' \text{ wst } \varphi.$$

Moment bezwładności przekroju ze względu na oś UU będzie

$$I_u = \iint (y' \text{ dost } \gamma - x' \text{ wst } \varphi)^2 d^2 F = \\ = \text{dost}^2 \gamma \iint y'^2 d^2 F +$$



Rys. 106.

$$+ \text{wst}^2 \varphi \int \int x'^2 d^2 F - 2 \text{dost} \gamma \text{wst} \varphi \int \int x' y' d^2 F.$$

Ponieważ wedle założenia $\int \int x' y' d^2 F = 0$ z powodu symetrii, więc

$$I_u = \text{dost}^2 \gamma \int \int y'^2 d^2 F + \text{wst}^2 \varphi \int \int x'^2 d^2 F \quad . \quad . \quad 166)$$

Z rysunku widzimy, że $FL = y' \text{wst} \beta$ i $FD = x' \text{wst} \beta$, więc

$$I_{x'} = \text{wst} \beta \int \int y'^2 d^2 F, \quad I_{y'} = \text{wst}^2 \beta \int \int x'^2 d^2 F.$$

Wstawivszy to w rów. 166), otrzymamy

$$I_u = \frac{\text{dost}^2 \gamma}{\text{wst}^2 \beta} \cdot I_{x'} + \frac{\text{wst}^2 \varphi}{\text{dost}^2 \beta} I_{y'} \quad . \quad . \quad . \quad 167)$$

Wstawmy teraz w rów. 167)

$$I_{x'} = F \cdot a'^2, \quad I_{y'} = F \cdot a_1'^2, \quad I_u = F a_u^2$$

$$\text{to } a_u^2 = \frac{\text{dost}^2 \gamma}{\text{wst}^2 \beta} a'^2 = \frac{\text{wst}^2 \varphi}{\text{wst}^2 \beta} a_1'^2.$$

Poprowadźmy $MN \parallel OU$ i nazwijmy odcinki na osiach $OM = p$, $ON = q$, to

$$\text{dost} \gamma = \frac{OR}{q}, \quad \text{wst} \varphi = \frac{OR}{p}, \quad \text{więc}$$

$$a_u^2 = \frac{OR^2 a^2}{\text{wst}^2 \beta q^2} + \frac{OR^2 a_1'^2}{\text{wst}^2 \beta p^2}.$$

Jeżeli poprowadzimy MN w takim oddaleniu, aby $OR = a_u$, to

$$1 = \frac{a'^2}{\text{wst}^2 \beta q^2} + \frac{a_1'^2}{\text{wst}^2 \beta p^2} \quad . \quad . \quad . \quad 168)$$

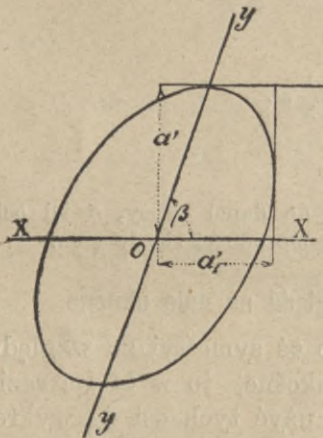
Jestto równanie elipsy ze względu na odcinki stycznych q i p i da się wyznaczyć w znany sposób*) równanie obwiednej stycznych MN

$$\frac{x'^2 \text{wst}^2 \beta}{a'^2} + \frac{y'^2 \text{wst}^2 \beta}{a_1'^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad 169)$$

równanie elipsy ze względu na sprzężone osie OX' i OY' (rys. 107).

A zatem każda para osi, ze względu na którą $\int \int xy d^2 F$ jest zerem, czyli każda para osi, z których jedna jest osią ukośną symetrii, jest zarazem parą osi sprzężonych elipsy bezwładności.

*) p. Keck. Vorträge über Elastizitätslehre, str. 28.

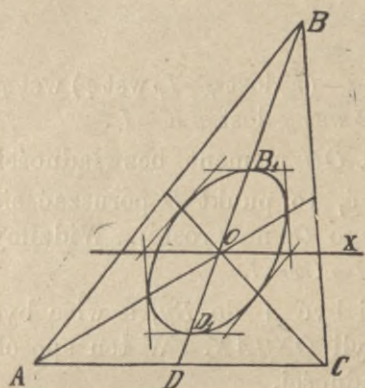


Rys. 107.

Przykład. W trójkącie ABC (rys. 108) zróbmy $AD=DC$, to DB jest ukośną osią symetrii, a zatem BD i OX osiami sprzężonymi elipsy.

Wiemy, że $I_x = \frac{1}{36}bh^3$, $F = \frac{1}{2}bh$, więc $a^2 = \frac{1}{18}h^2$, $a = 0,236h$. Zróbmy

więc $D_1O = OB_1 = 0,236BD$, to D_1 i B_1 są to punkty elipsy bezwładności, w których styczne są poziome. To samo zrobić możemy ze względu na drugie dwa boki trójkąta AB i BC .

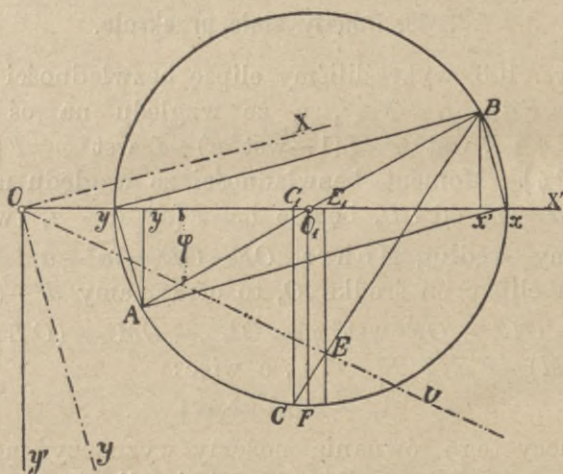


Rys. 108.

§. 42. Koło bezwładności.

Zmiana momentu bezwładności przekroju dla osi, przechodzących przez ten sam punkt a rozmaicie nachylonych, da się jeszcze inaczej przedstawić według Müllera-Breslaua.

Niechaj $Ox' = I_{x'}$ (rys. 109) a $Oy' = I_{y'}$, przyczem przypuścimy, że $I_{x'} > I_{y'}$. Wystawmy w x' i y' prostopadłe na OX' , mianowicie $Bx' = -K$ i $Ay' = +K$. Zatoczmy teraz na średnicy



Rys. 109.

AB koło, to posłuży nam ono do wyznaczenia momentu bezwładności ze względu na dowolną oś.

I tak dla dowolnej osi OU , nachylonej do OX' pod kątem φ , wykreślmy $BE \perp OU$, przedłużmy BE do C , wykreślmy $CC' \perp OX'$, to

$$OC' = OE' - E'C' = OE \operatorname{dost} \varphi - EC \operatorname{wst} \varphi,$$

$$OE = I_{x'} \operatorname{dost} \varphi - K \operatorname{wst} \varphi,$$

$$EC = K \operatorname{dost} \varphi - I_{y'} \operatorname{wst} \varphi, \text{ więc}$$

$$OC' = (I_{x'} \operatorname{dost} \varphi - K \operatorname{wst} \varphi) \operatorname{dost} \varphi - (K \operatorname{dost} \varphi - I_{y'} \operatorname{wst} \varphi) \operatorname{wst} \varphi.$$

$$OC' = I_{x'} \operatorname{dost}^2 \varphi + I_{y'}^2 \operatorname{wst}^2 \varphi - 2 \operatorname{wst} \varphi \operatorname{dost} \varphi K = I_u.$$

A zatem OC' przedstawia dla osi OU moment bezwładności.

Jeśli kąt φ będziemy zmieniać, to punkt C poruszać się będzie po obwodzie koła, a rzut jego C' na prostą. Widzimy stąd, że najmn. $I = Oy = I_1$, najw. $I = Ox = I$.

Dla najmn. $I = I_1$ oś OY musi być \perp do By , a więc być równoległą do yA , zaś $OX \perp Bx$ czyli $OX \parallel AX$. W ten sposób wyznaczyliśmy osie główne bezwładności.

Z rysunku wynika, że $CC' = K'$ jest momentem zboczenia dla osi OU . Moment zboczenia jest zerem dla osi głównych i rośnie do pewnej największości OF . Z rysunku też widzimy, że $I_{x'} + I_{y'} = I + I_1$, co zgadza się z rów. 161).

§. 43. Punkty stałe przekroju.

Na rys. 103 wykreśliliśmy elipsę bezwładności środkową, a więc $I = Fa^2$, $I_1 = Fa_1^2$, a ze względu na oś U będzie $I_u = I \operatorname{dost}^2 \varphi + I_1 \operatorname{wst}^2 \varphi = I(1 - \operatorname{wst}^2 \varphi) + I_1 \operatorname{wst}^2 \varphi = F[a^2 - (a^2 + a_1^2) \operatorname{wst}^2 \varphi]$. Moment bezwładności ze względu na oś WW , odległą o $d = OL$ od UU , będzie $I_w = F[a^2 - (a^2 - a_1^2) \operatorname{wst}^2 \varphi + d^2]$.

Zróbmy według Mohra $OF = OF' = \sqrt{a^2 - a_1^2} =$ odległości ogniska elipsy od środka O , to otrzymamy $d^2 - (a^2 - a_1^2) \times \times \operatorname{wst}^2 \varphi = \overline{OL^2} - \overline{OF^2} \operatorname{wst}^2 \varphi = \overline{OL^2} - \overline{OM^2} = (OL + OM) \times \times (OL - OM) = FE \cdot F'E' = e_1 e_2$, a więc:

$$I_w = F[a^2 + e_1 e_2]. \quad \dots \quad 170)$$

Na mocy tego równania możemy wyznaczyć moment bezwładności ze względu na dowolną oś, jeżeli znamy elipsę środkową przekroju, albo przynajmniej a i punkty F i F' .

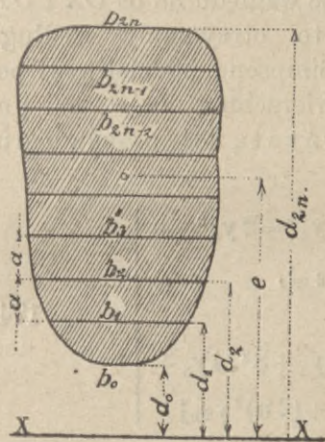
Jeżeli dana oś przechodzi przez punkt F lub F' , to e_1 lub e_2 staje się równem zeru, wtedy moment bezwładności równa się stałej ilości Fa^2 . Ze względu na tę własność nazy-

wamy punkty F i F' punktami stałymi (n. *Fixpunkte*). Elipsy bezwładności są dla tych punktów kołami. Jeżeli $a=a_1$, to punkty stałe przypadają na punkt O .

§. 44. Analityczne wyznaczenie momentu bezwładności dla figur nieregularnych.

Dla figur nieregularnych wyznaczamy moment bezwładności analitycznie najlepiej za pomocą znanej metody Simpsona, której udowodnienie należy do mechaniki rozumowej.

W celu wyznaczenia momentu bezwładności przekroju nieregularnego (rys. 110) ze względu na oś XX dzielimy przekrój prostymi równoległymi do XX na parzystą ilość równo grubych paszków. Nazwawszy długości tych prostych $b_0, b_1, b_2 \dots b_{2n}$, ich odstępów od XX $d_0, d_1, d_2 \dots d_{2n}$, a grubość paszków a , otrzymamy moment bezwładności ze względu na XX :



Rys. 110.

$$I_1 = \frac{a}{3} [b_0 d_0^2 + b_{2n} d_{2n}^2 + 4(b_1 d_1^2 + b_3 d_3^2 + \dots + b_{2n-1} d_{2n-1}^2) + 2(b_2 d_2^2 + b_4 d_4^2 + \dots + b_{2n-2} d_{2n-2}^2)] \quad (171)$$

Znając I_1 możemy wyznaczyć moment bezwładności ze względu na środek ciężkości według znanego równania $I = I_1 + - F e^2$.

Długość e otrzymamy z równania 165) $e = \frac{S}{F}$, przyczem moment statyczny S powierzchni przekroju ze względu na XX jest według Simpsona:

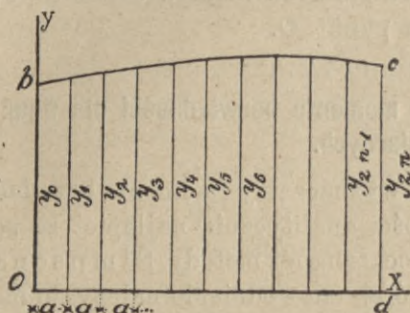
$$S = \frac{a}{3} [b_0 d_0 + b_{2n} d_{2n} + 4(b_1 d_1 + b_3 d_3 + \dots + b_{2n-1} d_{2n-1}) + 2(b_2 d_2 + b_4 d_4 + \dots + b_{2n-2} d_{2n-2})] \quad (172)$$

a powierzchnia:

$$F = \frac{a}{3} [b_0 + b_{2n} + 4(b_1 + b_3 + \dots + b_{n-1}) + 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{n-2})] \quad (173)$$

Wzór 171) jest jednak niedogodnym w praktyce, bo musimy wykonać $2n-1$ mnożeń, dlatego też używamy innych wzorów, które zaraz podamy.

Jeżeli mamy wyznaczyć moment bezwładności powierzchni *Obed* (rys. 111) ze względu na oś *OX* i *OY*, to otrzymamy według Simpsona, podzieliwszy powierzchnię znów na parzystą ilość pasków o grubości a , ze względu na oś *OX*:



Rys. 111.

Podobnie otrzymamy powierzchnię:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \frac{a}{9} [y_0^3 + 4y_1^3 + 2y_2^3 + 4y_3^3 + 2y_4^3 + \dots + 4y_{2n-1}^3 + y_{2n}^3], \\ I_y &= \frac{a^3}{3} [0^2 y_0 + 1^2 \cdot 4y_1 + 2^2 \cdot 2y_2 + 3^2 \cdot 4y_3 + \dots + (2n-1)^2 4y_{2n-1} + (2n)^2 y_{2n}] \end{aligned} \right\} \quad 174)$$

Podobnie otrzymamy powierzchnię:

$$F = \frac{a}{3} [y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})] \quad 175)$$

i moment statyczny ze względu na oś *OX*:

$$S_x = \frac{a}{6} [y_0^2 + y_{2n}^2 + 4(y_1^2 + y_3^2 + \dots + y_{2n-1}^2) + 2(y_2^2 + y_4^2 + \dots + y_{2n-2}^2)] \quad 176)$$

zaś ze względu na oś *OY*:

$$S_y = \frac{a^2}{3} [0 \cdot y_0 + 2ny_{2n} + 4(1 \cdot y_1 + 3y_3 + \dots + (2n-1)y_{2n-1}) + 2(2y_2 + 4y_4 + \dots + (2n-2)y_{2n-2})] \quad 177)$$

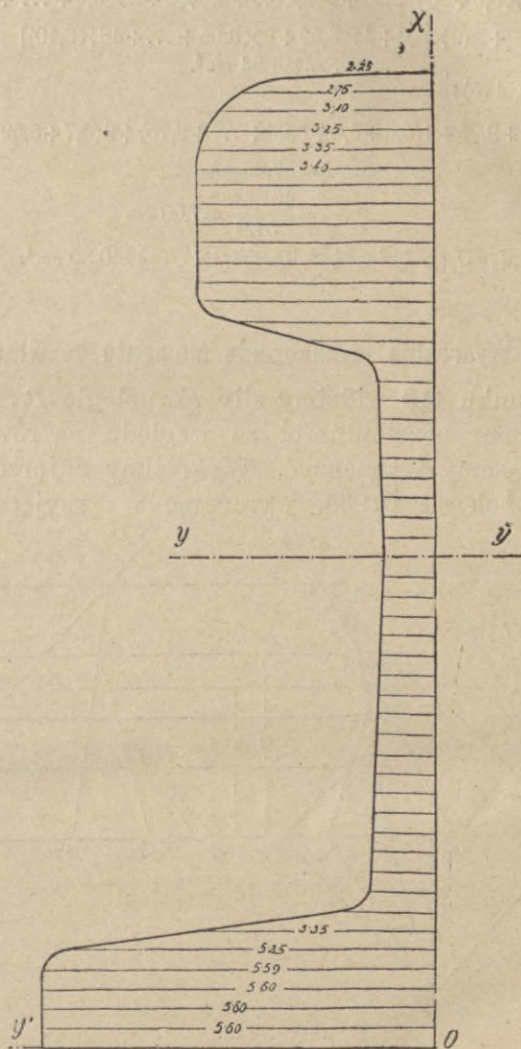
Wzory te są o tyle dla praktyki korzystniejsze, że kwadraty i sześciiany możemy wziąć z tablic, a przez to znacznie sobie ułatwić rachunek.

Przykład. Obliczyć moment bezwładności szyny austriackich kolei pierwszorzędnych (rys. 112). Z powodu symetrii liczymy moment dla połowy szyny i dzielimy ją na 50 pasków o grubości 0,28 cm.

Z wzorów 174) otrzymujemy:

$$\frac{I_x}{2} = \frac{0,28}{9} [5,6^3 + 4 \times 5,6^3 + 2 \times 5,6^3 + 4 \times 5,6^3 + 2 \times 5,59^3 + \dots + 4 \times 2,75^3 + 2,25^3]$$

$$I_x = 272,94 \text{ cm}^4.$$



Rys. 112.

$$\frac{I_{y'}}{2} = \frac{0,28^3}{3} [0^2 \times 5,6 + 1^2 \times 4 \times 5,6 + 2^2 \times 2 \times 5,6 + \dots + 49^2 \times 4 \times 2,75 + 50^2 \times 2,25]$$

$$I_{y'} = 4143,10 \text{ cm}^4.$$

Moment $I_{y'}$ sprowadźmy na oś ciężkości YY . W tym celu wyznaczamy odległość środka ciężkości z wzoru $e = \frac{S}{F}$. Moment statyczny S otrzymamy z wzoru 177):

$$\frac{S}{2} = \frac{0,28^2}{3} [0 \times 5,6 + 50 \times 2,25 + 4(1 \times 5,6 + 3,5 \times 6 + 5 \times 5,6 + \dots + 49 \times 2,75) + 2(2 \times 5,6 + 4 \times 5,59 + 6 \times 3,35 + \dots + 48 \times 3,10)]$$

$$S = 401,54 \text{ cm}^3.$$

Z wzoru 175):

$$\frac{F}{2} = \frac{0,28}{3} [5,6 + 2,25 + 4(5,6 + 5,6 + 5,25 + \dots + 2,75) + 2(5,7 + 5,59 + 3,35 + 3,10)]$$

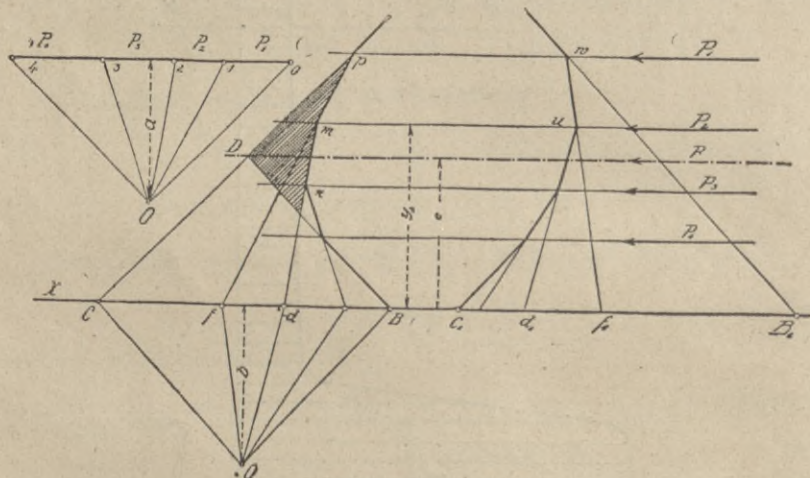
$$F = 57,2 \text{ cm}^2$$

$$e = \frac{401,54}{57,2} = 7,00 \text{ cm}$$

$$I_y = I_{y'} - Fe^2 = 4143,10 - 57,2 \times 7^2 = 1440,30 \text{ cm}^4.$$

§. 45. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności.

Na rysunku 113 widzimy siły równoległe P_1, P_2, P_3 i P_4 , których moment bezwładności ze względu na równoległą do nich oś XX mamy wyznaczyć. Wykreślmy najprzód w znany sposób wielobok sił 01234, wyrażając w przyjętej podziałce



Rys. 113.

$\frac{1 \text{ cm}}{x \text{ kg}}$ siły długościami, obierzmy dowolny biegun O , poprowadźmy zeń promień i wykreślmy wielobok sznurowy $pnmB$.

Punkt D przecięcia się przedłużeń boków skrajnych wyznacza położenie wypadkowej R . Przedłużmy boki pm i mn

wieloboku sznurowego do osi XX , to otrzymamy trójkąt $mf d \sim O12$, a stąd $fd : y_2 = 12 : a$. Długość $12 = P_2$, więc

$$fd = \frac{P_2 y_2}{a} \quad \dots \quad (178)$$

A więc moment statyczny dowolnej siły jest proporcjonalnym do długości fd , odciętej przedłużeniami odnośnych boków wieloboku sznurowego, co zresztą wynika wprost z §. 7. Jeżeli to samo zrobimy ze wszystkimi siłami, to

$$CB = \Sigma \frac{Py^2}{a} = \frac{S_1}{a}, \quad \dots \quad (179)$$

a stąd moment statyczny $S_1 = a \cdot CB$.

Uważajmy teraz odcinki fd jako siły, to CB będzie wielobokiem sił. Przyjmijmy drugi biegun O' , poprowadźmy promienie i wykreślmy drugi wielobok sznurowy $wu C_1$. Wtedy otrzymamy:

$$ud_1 f_1 \sim O_1 fd, \text{ a stąd } d_1 f_1 = \frac{fd \cdot y_2}{b}.$$

Wstawiwszy za fd wartość z równ. 178), otrzymamy:

$$d_1 f_1 = \frac{P_2 y_2^2}{ab} \quad \dots \quad (180)$$

A zatem $C_1 B_1 = \Sigma \frac{Py^2}{ab} = \frac{I_1}{ab}$, więc

$$I_1 = C_1 B_1 a b, \quad \dots \quad (181)$$

jeżeli I_1 oznacza moment bezwładności sił P_1, P_2, P_3, P_4 ze względu na oś XX .

Sposób ten wyznaczania momentu bezwładności podał Culmann. Według niego więc prosta $C_1 B_1$, odcięta na osi przedłużeniem boków skrajnych drugiego wieloboku sznurowego, jest proporcjonalną do momentu bezwładności. $C_1 B_1$ odczytujemy w podziałce sił, odległości biegunowe a i b w podziałce długości.

Możemy jednak i w inny sposób wyznaczyć moment bezwładności. Według równ. 178) $fd = \frac{P_2 y_2}{a}$, a więc $P_2 y_2 = a \cdot fd$, a stąd:

$$P_2 y_2^2 = a \cdot fd \cdot y_2 = 2 a \Delta f m d.$$

Jeżeli to samo zrobimy dla innych sił, to powierzchnia

$$CpB = \frac{\Sigma Py^2}{2a} = \frac{I_1}{2a}, \text{ a stąd:}$$

$$I_1 = 2 a \text{ pow. } CpB. \quad \dots \quad (182)$$

A więc moment bezwładności według tego sposobu, po-
danego przez Mohra, jest równy powierzchni ograniczonej
osią, wielobokiem sznurowym i przedłużeniami boków skraj-
nych, pomnożonych przez podwójną odległość biegunową a ,
wyrażoną w podziale sił.

Gdy mamy obliczyć moment bezwładności po-
wierzchni nieregularnej, dzielimy ją na paski prostymi ró-
wnoległymi do danej osi, szukamy środków ciężkości tych pa-
sków i uważamy powierzchnie tych pasków jako siły równo-
ległe, zaczepiające w środkach ciężkości pasków. Dalszy tok
konstrukcyi jest zupełnie ten sam, co dla sił P_1, P_2, P_3, P_4 ,
tylko że zamiast sił wchodzi tu w rachunek powierzchnie. Po-
wierzchnie pasków wyznaczyć możemy w rozmaity sposób,
a mianowicie zamieniając je na powierzchnie czworoboków
o danej podstawie lub też za pomocą linii całkowej. Zawsze
otrzymamy powierzchnię jako iloczyn dwóch długości, a mia-
nowicie długości 01, 12 i t. d., pomnożonej przez pewną dłu-
gość c , wspólną wszystkim paskom. Zamiast odczytywać dłu-
gość CB lub a w podziale powierzchni, możemy więc odczy-
tywać je w podziale długości i pomnożyć przez c . Otrzy-
mamy zatem z równ. 181) według Culmanna:

$$I_1 = C_1 B_1 a \cdot b \cdot e \quad 183)$$

a z równ. 182) według Mohra:

$$I_1 = 2 a \cdot c \text{ pow. } C p B. \quad 184)$$

Chcąc wyznaczyć I , moment bezwładności sił P_1, P_2, P_3, P_4
ze względu na oś, położoną przez punkt D w kierunku wypad-
kowej R , otrzymamy z równ. 179):

$$CB = \frac{S_1}{a} = \frac{Re}{a},$$

gdzie e oznacza odstęp wypadkowej od osi XX . Dalej otrzymamy

$$\Delta CDB = \frac{Re^2}{2a}, \text{ a więc:}$$

$$Re^2 = 2a \Delta CDB.$$

Wiemy, że $I = I_1 - Re^2 = 2aF - 2a \cdot \Delta CDB$, jeżeli
 $F = \text{pow. } C p B$, stąd:

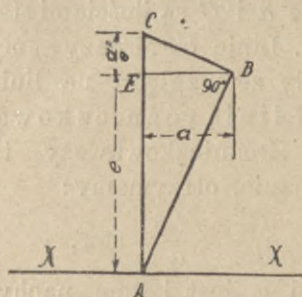
$$I = 2a(F - CDB) = 2aF_0, \quad 185)$$

jeżeli $F_0 = \text{pow. } D p m n B$.

Analogicznie otrzymamy dla momentu bezwładności powierzchni ze względu na oś ciężkości:

$$I = 2 a \cdot c \cdot F_0 \dots \dots \dots 186)$$

Licząc dokładniej sposobem Culmanna, musimy uwzględnić tę okoliczność, że moment bezwładności danego paska jest



Rys. 114.

według równ. 148) ze względu na daną oś XX , odległą od środka ciężkości paska o długość e (rys. 114) $I_1 = I + Fe^2$, podczas gdyśmy dotychczas przyjmowali w przybliżeniu $I_1 = Fe^2$. Jeżeli paski są dość wąskie, moment bezwładności I paska ze względu na jego środek ciężkości jest mały i możemy go opuścić.

Jeżeli zaś paski są większe i chcemy dokładnie wyznaczyć moment bezwładności, to przesuwamy, rysując drugi wielobok sznurowy,

kierunki sił (t. j. tu momentów statycznych S). Mamy bowiem $I_1 = I + Fe^2 = F(a^2 + e^2)$, jeżeli $a = \sqrt{\frac{I}{F}}$ oznacza promień bezwładności. Moment statyczny $S = Fe$, więc

$$\frac{I_1}{S} = \frac{a^2 + e^2}{e} = e + \frac{a^2}{e} = e_1.$$

Robimy więc poprawkę, przyjmując zamiast długości e długość e_1 , a zatem oddalając punkt zaczepienia momentu statycznego

S dla drugiego wieloboku o $(e_1 - e) = \frac{a^2}{e}$. Długość $\frac{a^2}{e}$ znajdujemy

łatwo wykreślić, kreśląc prostopadle do ramienia e $EB = a$, promieniowi bezwładności*), łącząc punkt A w osi XX z punktem B i kreśląc $BC \perp AB$. Wtedy $EC \cdot AE = a^2$, więc $EC = \frac{a^2}{e}$, zatem C jest punktem zaczepienia momentu statycznego.

§. 46. Linia całkowa.

Mówiliśmy, że powierzchnie pasków możemy wyznaczyć za pomocą linii całkowej. Otóż zastanowimy się teraz nieco nad istotą linii całkowej i nad sposobem jej wykreślenia.

*) Dla prostokąta $a = 0,288 h$, jeżeli h wysokość paska.

Rzędne linii całkowej *SPM* (rys. 115) są funkcjami rzędnych danej linii *EFN*, wyrażonych równaniem $y=f(x)$.

Dla linii całkowej będzie

$$Y = \int \frac{f(x)}{a} dx + C,$$

gdzie a i C są ilościami stałymi. Linie *EFN* nazywamy wtedy ze względu na linię *SPM* liniami różniczkową.

Zróżniczkowawszy to równanie, otrzymamy:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{f(x)}{a} = \text{st } \varphi,$$

jeżeli φ jest kątem nachylenia stycznej *PH* linii całkowej w *P* do poziomu.

Poprowadźmy *FC* \parallel *NB*, a *CO* \parallel *PH*, to

$$\sphericalangle COB = \varphi, \text{ a więc } \text{st } \varphi = \frac{f(x)}{a} = \frac{y}{OB}, \text{ a stąd } OB = a.$$

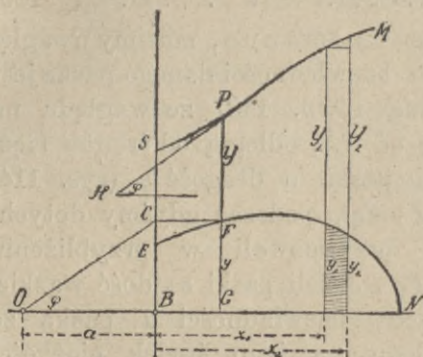
Długość a nazywamy odległością biegunową a O biegunem.

Chcąc wyznaczyć powierzchnię, zawartą między linią różniczkową, osią i rzędnymi y_1 i y_2 , mamy:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = (Y_2 - C)a - (Y_1 - C)a = (Y_2 - Y_1)a, \quad . \quad 187)$$

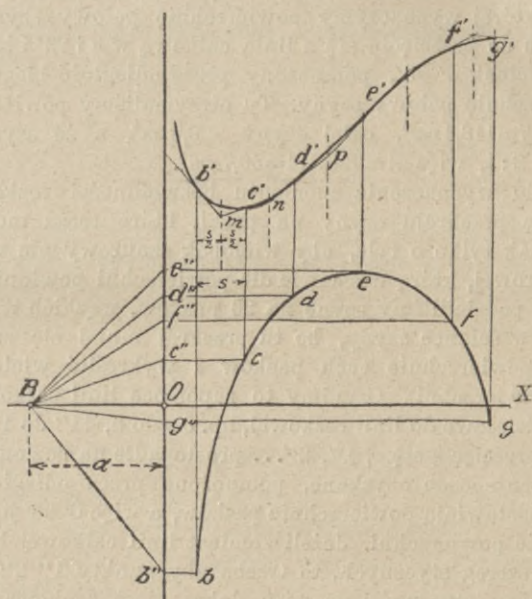
a więc powierzchnia ta równa się różnicy rzędnych linii całkowej, pomnożonej przez odległość biegunową a .

Aby dla danej linii różniczkowej wykreślić linię całkową, postępujemy w następujący sposób: Dzielimy linię różniczkową, *befg* (rys. 116) na części tak krótkie, że je uważać możemy jako proste. Z punktów podziału *b, c, d, e, f, g*, kreślimy równoległe do osi *OX* aż do *OY* i łączymy punkty *b'', c'', d'', e'', f'', g''*, z biegunem *B*. Promienie *Bb'', Bc'', Bd''...* będą równoległe do stycznych linii całkowej w odnośnych punktach *b', c', d', e', f', g'*. Jeżeli *bc, cd, de...* są proste, to odnośne części linii całkowej będą liniami drugiego rzędu, a mianowicie parabolami. Jeżeli zaś *b'c'* jest parabolą, to styczne w *b'* i *c'* przecinają się w *m*, jak wiemy z matematyki, w połowie szerokości pasków. Ta własność parabol posłuży nam do wykreślenia linii całkowej.



Rys. 115.

Obrawszy dowolny punkt b' , kreślimy $b'm \parallel Bb''$, $mn \parallel Bc''$, $np \parallel Bd''$ i t. d., przyczem punkty mnp leżą w liniach połowiających paski. W ten sposób otrzymujemy szereg stycznych, a że znamy tu punkty styczności b' , c' , d' i t. d., więc wykreślenie linii całkowej nie przedstawia już żadnej trudności. Jeżeli paski były dość wąskie, to styczne zastąpią linią całkową.



Rys. 116.

Jeżeli wyznaczymy powierzchnię pasków, na które podzieliśmy powierzchnię przekroju, za pomocą linii całkowej, to odległość biegunowa a jest wspólną odległością, którąśmy oznaczyli jako c w równ. 183, 184, 185 i 186.

§. 47. Przykład. Moment bezwładności szyny kolejowej.

Tok konstrukcyi wyjaśnimy najlepiej na przykładzie, wyznaczając wykreślnie moment bezwładności szyny kolejowej (tabl. I).

Dzielimy lewą połowę szyny na paski, tak, aby linię zarysu na szerokość paska można przyjąć jako prostą*) i wykreślamy dla tej po-

*) Około 30 pasków. Podział ten po wykreśleniu linii całkowej wymazaliśmy dla większej wyrazistości rysunku.

lowy szyny według poprzedniego paragrafu linię całkową. Gdy odległość biegunową przyjmujemy wielką, to linia całkową będzie płaską i na odwrót; tu przyjęliśmy odległość biegunową od podstawy $c=7\text{ cm}$. Z punktów przecięcia się prostych podziałowych z zarysem szyny spuszczaamy prostopadłe na podstawę n. p. pp' i łączymy spodki tych prostopadłych z biegunem O . Promienie te n. p. Op' są równoległe do stycznych linii całkowej, które kreślimy po kolei do prostych, połowiących szerokość pasków. W ten sposób otrzymamy linię całkową $a\ 1'', 2'', 3'' \dots c$, za pomocą której wyznaczymy powierzchnię połowy szyny, kreśląc z O i 23 poziome do przecięcia się z linią całkową w a i $23'$ i kreśląc pionową przez a . Odcinek $a' 23'$, pomnożony przez odległość biegunową OO daje nam powierzchnię połowy szyny. Tu otrzymaliśmy powierzchnię połowy szyny $16,2.7=113,4\text{ cm}^2$, całej szyny $226,8\text{ cm}^2$, a że szyna wykreślona w podziałce 2:1, więc $A=226,8:4=56,7\text{ cm}^2$.

W celu wyznaczenia momentu bezwładności rozkładamy znowu powierzchnię przekroju szyny na paski, które teraz mogą być trochę szersze, jednak tylko o tyle, aby wielobok sznurowy nie wiele się różnił od linii sznurowej, którą właściwie dla powierzchni powinniśmy otrzymać. Na rysunku podzieliliśmy szynę na 23 pasków, wąskich w głowie i nóżce, a szerszych w ścianie szyny, bo tu przekrój mniej się zmienia. Mamy wyznaczyć powierzchnie tych pasków i wykreślić wielobok sił (czyli właściwie powierzchni). Czynimy to zapomocą linii całkowej, przedłużając linie podziałowe do linii całkowej, np. Oa do a , $11''$ do $1''$, i spuszczaając z punktów przecięcia się a , $1''$, $2'' \dots$ prostopadłe na poziomą $a' 1' 2' \dots 23'$. Odcinki w ten sposób uzyskane, pomnożone przez odległość biegunową $c=6\text{ cm}$, przedstawiają powierzchnie pasków, a więc $O' 23'$ jest wielobokiem sił, względnie powierzchni. Jeżeli zamiast linii całkowej krzywej wykreśliliśmy tylko szereg stycznych, to trzeba aby punkty $1'' 2'' 3'' \dots$ przypadły na punkty styczności, a więc dobrze jest zachować te same linie podziału, co pierwej. Gdybyśmy przyjęli inne linie podziału, to punkty te nie wypadłyby na punktach styczności, a wtedy należałoby do konstrukcyi użyć linii całkowej krzywej, a nie stycznych.

Następnie wyznaczamy środki ciężkości poszczególnych pasków i zaczepiamy w nich siły równoległe poziome, względnie powierzchnie pasków. Dalej przyjmujemy biegun O'' w odległości $a'=10\text{ cm}$ od prostej $a' 23'$ i kreślimy promienie. Równoległe do tych promieni dają pierwszy wielobok sznurowy $s 9 l$. Skrajne boki wieloboku sznurowego przedłużone przecinają się w punkcie D , przez który przechodzi wypadkowa. Pozioma D przecina oś szyny w środku ciężkości S . Przedłużywszy boki wieloboku sznurowego aż do osi, przechodzącej przez środek ciężkości, otrzymamy punkty, oznaczone cyframi od 1... 23. Jestto drugi wielobok sił względnie powierzchni, dla którego obieramy biegun O' w odległości $b=10\text{ cm}$ i kreślimy promienie. Następnie prowadzimy równoległe do tych promieni drugi wielobok sznurowy $m w z$. Skrajne boki wieloboku przedłużamy aż do przecięcia się z osią ciężkości w punktach B i C . Długość $BC=20,6\text{ cm}$ jest według Culmanna proporcjonalną do momentu bezwładności, który otrzymamy według równ. 183), gdy pomnożymy BC przez a , b i c .

Jeżeli zauważymy, że $\overline{BC} . a_1 . b . c$ przedstawia moment bezwładności połowy szyny, to chcąc otrzymać moment całego przekroju szyny, musimy pomnożyć wynik przez 2. Ponieważ szynę wykreśliliśmy w podwójnej podziałce (2:1), więc wszystkie długości są dwa razy większe, a zatem, aby otrzymać moment bezwładności rzeczywistego przekroju, musimy wynik podzielić przez $2^4=16$. A więc

$$I_1 = \frac{20,6 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{16} = 1442 \text{ cm}^4.$$

Według Mohra zaś otrzymamy, splanimetrowawszy powierzchnię s 9 i $D=103,6 \text{ cm}^2$,

$$I_2 = \frac{103,6 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{16} = 1450 \text{ cm}^4.$$

Jako ostateczny wynik przyjmujemy średnią arytmetyczną:

$$I_x = \frac{1442 + 1450}{2} = 1446 \text{ cm}^4.$$

Jeżeli chcemy wyznaczyć teraz promień bezwładności wykreślnie, to możemy to zrobić wedle Müllera Breslaua w następujący sposób:

Dla połowy szyny jest wedle Culmanna, gdy odcinek BC nazwiemy z , $I = a_1 b c z$, $F = n c$, więc

$$a^2 = \frac{I}{F} = \frac{a_1 b c z}{n c} = \frac{a_1 b z}{n}.$$

Odetnijmy $23' G = b$ i zróbmy $GH \parallel O'23'$, to $HL = b$. Z podobieństw trójkątów mamy $b : n = O'E : a_1$, więc $O'E = \frac{a_1 b}{n}$, zatem $a^2 = O'E \cdot z$. Zróbmy $O'K = z$, zatoczmy półkole na EK , to

$$\overline{O'F}^2 = O'E \cdot z = a^2, \text{ zatem } a = O'F.$$

Dla całej szyny niech będzie moment bezwładności I' , powierzchnia F' , to $I' = 2I$, $F' = 2F$, stąd

$$a'^2 = \frac{I'}{F'} = \frac{2I}{2F} = \frac{I}{F} = a^2, \text{ zatem } a' = a.$$

Promień bezwładności jest więc dla całej szyny ten sam, co dla połowy.

§. 48. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności powierzchni sposobem Nehlsa.

Aby wyznaczyć wykreślnie moment bezwładności powierzchni danej cm_1 , $d_1 b = F$ (rys. 117) ze względu na oś OX , kreślimy najprzód prostą $pr \parallel OX$ w odległości a . Badajmy teraz element powierzchni, t. j. prostą mm_1 o grubości nieskończenie małej dy , zróbmy $m_1 m' \parallel mO$, połączmy O z m' , przedłużmy tę prostą do m_2 , to otrzymamy $Om : mm_2 = a : pm'$, a stąd, ponieważ $pm' = mm_1$, będziemy mieli $y : mm_2 = a : mm_1$, więc

$$mm_2 = \frac{mm_1}{a} y.$$

Zróbmy to samo z innymi elementami, a otrzymamy

$$\int mm_2 dx = \text{pow. } bcm_2 d_2 = F_1 = \int \frac{mm_1 y dx}{a} = \frac{S}{a}, \quad (188)$$

przyczem wyraz

$\int mm_1 y dx = S$ przedstawia moment statyczny powierzchni F ze względu na OX .

Zróbmy teraz $m_2 m'' // mO$ i wykreślmy Om'' aż do m_3 , a otrzymamy podobnie $pm'' : a = mm_3 : y$, a zważywszy, że $pm'' = mm_2$,

$$mm_3 = \frac{mm_2 y}{a}, \text{ stąd}$$

$$mm_3 dx = \frac{mm_2 y dx}{a} =$$

$$= \frac{mm_1 y^2 dx}{a^2}, \text{ a zatem}$$

$$\int mm_3 dx = \int \frac{mm_1 y^2 dx}{a^2} = \text{pow. } bcm_3 d_3 = F_2, \text{ więc}$$

$$F_2 = \frac{I}{a^2}, \quad (189)$$

przyczem wyraz $\int mm_1 y^2 dx = I$ przedstawia moment bezwładności powierzchni F ze względu na oś OX .

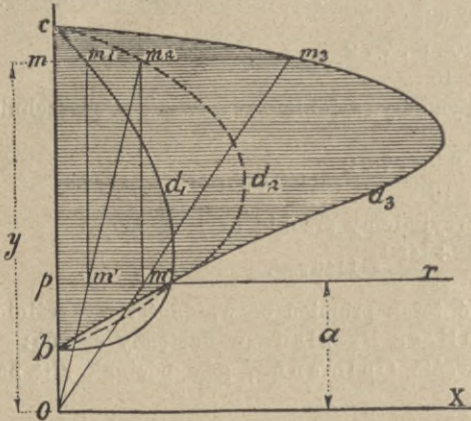
Po prawej stronie rysunku na tablicy I wyznaczaliśmy według tego sposobu, podanego przez Nehlsa, moment bezwładności szyny ze względu na oś pionową i to osobno dla górnej części szyny, a osobno dla dolnej. Długość a przyjęliśmy dla górnej części szyny 5 cm , dla dolnej większą $a_1 = 6 \text{ cm}$, aby rysunek nie wypadł za papier. Splanimetrowawszy F_N , otrzymaliśmy dla górnej części $F''_N = 29,2 \text{ cm}^2$, a dla dolnej $F'_N = 35,2 \text{ cm}^2$, a więc

$$I' = (F''_N a^2 + F'_N a_1^2) \frac{2}{16} = (29,2 \cdot 5^2 + 35,2 \cdot 6^2) \frac{2}{16} = 249,6 \text{ cm}^2.$$

Nareszcie otrzymamy promienie bezwładności

$$a = \sqrt{\frac{I_x}{F}} = \sqrt{\frac{1446}{56,7}} = 5,05 \text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{249,6}{56,7}} = 2,10 \text{ cm}.$$



Rys. 117.

Możemy teraz wykreślić elipsę bezwładności, znając promienie bezwładności dla obu osi głównych.

Zrobić tu jeszcze musimy uwagę, że jeżeliśmy do wykreślenia linii cm_3d_3b z linii cm_1d_1b użyli nie prostej pr (rys. 117)

w odległości a , lecz innej prostej w odległości n. p. a' , to zamiast równ. 189) otrzymalibyśmy $F_2 = \frac{I}{aa'}$, jak tego łatwo dowieść można.

Moment bezwładności powierzchni możemy także wyznaczyć za pomocą bardzo zmyślnego przyrządu, mianowicie planimetru Amslera, którego teorię i opis podał Dr. Winkler w czasopiśmie Austriackiego Towarzystwa Inżynierów i Architektów w r. 1870 *).

Powierzchnia F_1 (rys. 117), wyrażająca moment statyczny powierzchni, ma jeszcze inne znaczenie, które zaraz wyjaśnimy.

Według rów. 138)

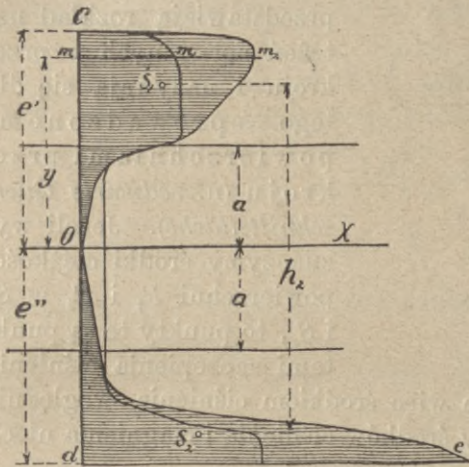
$\frac{v}{v} = \zeta$. Jeżeli oś OX przyjmiemy w środku ciężkości przekroju, to $v=y$, więc $v = \zeta y$ (rys. 118).

Na pasek powierzchni $mm_1 dy$ działa siła

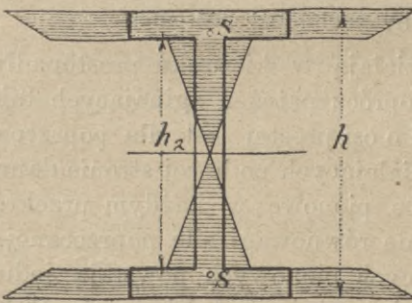
$mm_1 dy v = mm_1 dy \zeta y = mm_2 a \zeta dy$. Jeżeli scałkujemy siły, działające w przekroju powyżej osi obojętnej, to otrzymamy

$$C' = \int_0^{e'} mm_2 dy a \zeta = a \zeta \cdot F_1$$

*) p. także Ott: *Vorträge über Baumechanik. II. Theil.* str. 124 i nast.

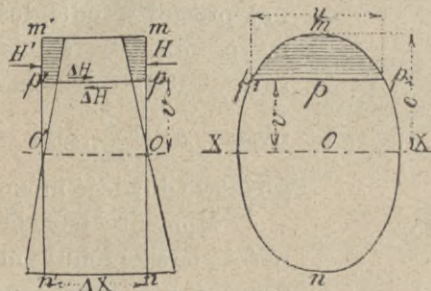


Rys. 118.



Rys. 119.

jeżeli $F_1 = \text{pow. } Ocm_2$, a podobnie wypadkowa nateżeń poniżej osi obojętnej $C'' = a\zeta F_2$, jeżeli $F_2 = \text{pow. } Oed$, przyczem $C' = C''$. Siły normalne, działające w paskach powierzchni przekroju są proporcjonalne do mm_2 , powierzchnie zatem kreskowane F_1 i F_2



Rys. 120.

przedstawiają rozkład nateżeń normalnych w przekroju i nazywają się dla tego sprowadzonymi powierzchniami przekroju (n. *reducirte Querschnittsfläche*). Jeżeli wyznaczymy środki ciężkości powierzchni F_1 i F_2 w S_1 i S_2 , to punkty te są punktami zaczepienia ciśnienia

i ciągnięcia, nazywamy je więc środkiem ciśnienia względnie ciągnięcia. Odstęp pionowy środków ciśnienia i ciągnięcia niech będzie h_2 , to

$$C \cdot h_2 = M \dots \dots \dots 190)$$

Na rys. 118. widzimy powierzchnię sprowadzoną przekroju I i środki ciśnienia i ciągnięcia. Widzimy, że tu odstęp środków nateżenia h_2 jest nie o wiele mniejszy od h , w przybliżeniu możemy przyjąć $h_2 = 0,9 h$.

§. 49. Obliczenie siły ścinającej poziomej.

Siły zginające belkę działają w kierunku prostopadłym do osi belki, więc wywołują oprócz nateżeń zginających także nateżenia ścinające. Dla belki o osi prostej jest siła poprzeczna wypadkową wszystkich sił, działających po lewej stronie danego przekroju, nateżenia ścinające pionowe w każdym przekroju muszą więc być równe w stanie równowagi sile poprzecznej Q .

Oprócz nateżeń ścinających pionowych powstają jednak w belce, pracującej na zginanie, nateżenia także w innych kierunkach. Najprzód zastanawiać się będziemy nad nateżeniami ścinającymi poziomymi (n. *horizontale Schubspannung*, fr. *effort rasant*, *force de glissement longitudinal*, an. *horizontal shearing stress*).

W celu wyznaczenia tej siły wytnijmy z danej belki część jej o długości Δx (rys. 120) płaszczyznami prostopadłymi

do osi i dla równowagi zaczepmy natężenia, które przed przecięciem w belce istniały. Zbadajmy teraz siły, działające w warstwie pp' , równoległej do osi, a odległej od niej o v . Na części belki $mm'p'p$ działają po prawej i po lewej stronie natężenia normalne, które, jak wiadomo, zmieniają się według prawa linii prostej. Natężenia te dadzą się złożyć na siły H i H' , które z powodu, że Δx jest bardzo małe, możemy obie przyjąć jako poziome. Dadzą one wypadkową $\Delta H = H' - H$, działającą w kierunku siły większej. Siły działające na część belki $pp'n'n'$, muszą dać jako wypadkową także ΔH , lecz działającą w kierunku przeciwnym, bo warstwa pp' jest w równowadze.

Według równ. 141) jest $v = \frac{M}{I} v$, a więc siła, działająca na pasek $p_1 p_2$ o długości u a grubości dv , jest $\frac{M}{I} v u dv$, a stąd

$$H = \int_v^e v u dv = \frac{M}{I} \int_v^e u v dv.$$

Podobnie otrzymamy $H' = \frac{M'}{I} \int_v^e u v dv$, jeżeli przekrój belki pozostał ten sam; a więc

$$\Delta H = H' - H = \frac{M' - M}{I} \int_v^e u v dv = \frac{\Delta M}{I} \int_v^e u v dv.$$

Jeżeli przekroje oberzemy bardzo blisko, to możemy napisać

$$dH = \frac{dM}{I} \int_v^e u v dv.$$

Siła ścinająca pozioma dH działa na długości dx , na jednostkę długości wypada więc

$$\sigma = \frac{dH}{dx} = \frac{dM}{dx \cdot I} \int_v^e u v dv.$$

Z równania 14) wiemy, że $\frac{dM}{dx} = Q$ t. j. sile poprzecznej,

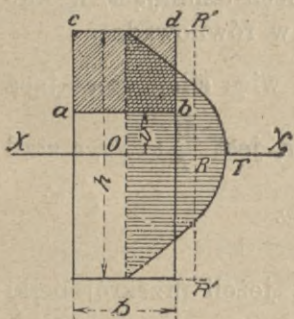
całka zaś $\int_v^e u v dv$ wyraża moment statyczny powierzchni $p_1 m p_2$ ze względu na środek ciężkości przekroju O , nazwijmy go S , to $S = \int_v^e u v dv$, a więc

$$\sigma = \frac{QS}{I} \dots \dots \dots 191)$$

Natężenie ścinające poziome σ_1 na jednostkę powierzchni będzie

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{u} = \frac{QS}{Iu} \quad \dots \quad 192)$$

Z równania 191) widzimy, że ponieważ Q i I są dla danego przekroju i obciążenia stałe, więc σ zmienia się proporcjonalnie do S , a zatem siła ścinająca jest największą w osi, a w warstwie skrajnej równą zero, bo tam $S=0$. Dla przekroju prostokątnego (rys. 121) mamy



$$S = \left(\frac{h}{2} - v\right) b \frac{\frac{h}{2} + v}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - v^2\right),$$

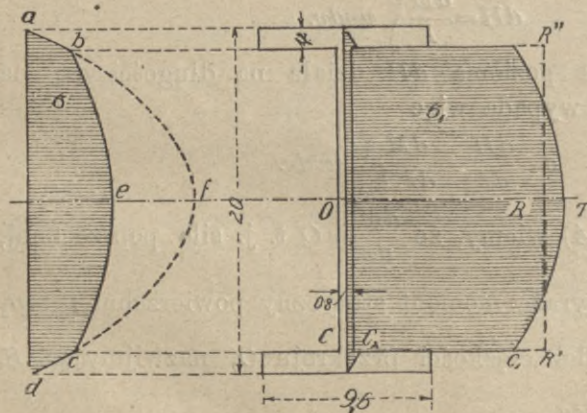
$$\sigma = \frac{Qb}{2 \frac{1}{12} bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - v^2\right) =$$

$$= \frac{6Q}{h} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{v}{h}\right)^2 \right] \quad \dots \quad 193)$$

Największe σ będzie w osi dla $v=0$

$$\text{najw } \sigma = \frac{3}{2} \frac{Q}{h} \quad \dots \quad 194)$$

Widzimy więc, że dla zmiennej v siła ścinająca σ i natężenie ścinające poziome σ_1 zmieniają się



Rys. 122.

w przekroju prostokątnym wedle paraboli. W przekroju I (rys. 122) zmienia się siła ścinająca σ wedle paraboli ab i cd w stopie i głowie, zaś według innej paraboli bec w ścianie.

Z równania 192) widzimy, że natężenie ścinające poziome σ_1 zmienia się proporcjonalnie do

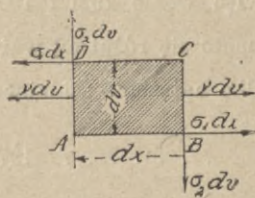
$\frac{S}{u}$. Jeżeli więc szerokość przekroju u nagle się zmienia, to i σ_1 zmienia się nagle odwrotnie proporcjonalnie do u .

Przy przejściu więc ze ścianki w stopę w C następuje nagle zmiana natężenia ścinającego. Z rysunku 122. widzimy, że natężenia ścinające są bardzo małe w stopie i głowie, możemy więc je pominąć, a przenoszą się prawie w całości na ściankę. Na odwrót wedle rysunku 119. natężenia normalne w belkach o przekroju I działają przeważnie w stopie i głowie, a mało co w ściance.

§. 50. Natężenia ścinające pionowe.

Wiemy już z poprzedniego, że suma natężeń ścinających pionowych (fr. *effort tranchant*) w każdym przekroju pionowym belki o osi prostej równą jest sile poprzecznej Q . Zachodzi teraz pytanie, jak siła poprzeczna rozdziela się w przekroju.

Wytnijmy z belki (rys. 123) dwiema płaszczyznami poziomymi w odstępzie dv i dwiema płaszczyznami pionowymi w odstępzie dx graniastostup o podstawie $ABCD$ a wysokości $=1$, to w płaszczyznach DC i AB działają siły ścinające poziome $\sigma_1 dx$, w płaszczyznach zaś pionowych siły $\sigma_2 dv$, a oprócz tego równoległe do osi działają siły $v dv$, które się znoszą.



Rys. 123.

Mamy tu więc dwie pary sił, dla równowagi musi być suma ich momentów równa zeru, więc

$$-\sigma_1 dx \cdot dv + \sigma_2 dv \cdot dx = 0, \text{ a zatem}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \dots \dots \dots 195)$$

Widzimy więc, że natężenia ścinające pionowe σ_2 są w każdym punkcie przekroju poprzecznego równe natężeniom ścinającym poziomym σ_1 , w tym punkcie działającym.

Ze względu na równanie 192) możemy więc napisać

$$\sigma_2 = \frac{QS}{Iu},$$

a zatem natężenia ścinające pionowe zmieniają się proporcjonalnie do $\frac{S}{u}$.

Jeżeli siła poprzeczna Q działa na przekrój F , to gdyby natężenia rozdzielały się na przekrój jednostajnie (prosta $R'R'$ w rys. 121), toby największe natężenie było $\sigma = \frac{Q}{F}$.

Dla przekroju prostokątnego jest największe natężenie wedle 195) dla $v=0$

$$OT = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} = \frac{3}{2} OR \quad \dots \quad 196)$$

Największe natężenie na ścinanie jest więc dla przekroju prostokątnego $\frac{3}{2}$ razy większem, niż przeciętne dla równego rozdzielenia siły.

Dla przekroju $I OT$ będzie także nieco większem niż OR (rys. 122), jeżeli jednak siłę Q rozdzielimy tylko na ściankę równo, to będzie się mało co różniło od OR .

Przykład. Dla kształtówki I wykreślonej na rys. 122. niech będzie $Q=20t$. Dla przekroju tego jest $I=2402 \text{ cm}^2$, więc przeciętne natężenie ścinające w ściance $\sigma_0 = \frac{20000}{0,8 \times 17,6} = 1421 \text{ kg/cm}^2$.

Obliczmy teraz OT . W tym celu wyznaczamy najprzód S dla $v=0$, zatem $S=9,6 \times 1,2 \times 9,4 + 0,8 \times 8,8 \times 4,4 = 141,15 \text{ cm}^3$, więc wedle 192) i 195)

$OT = \frac{20000 \times 141,15}{2402 \times 0,8} = 1469 \text{ kg/cm}^2$. Wartość ta tak mało się różni od wartości poprzedniej, że często w praktyce liczymy tylko natężenie ścinające średnie

$$\sigma_0 = \frac{Q}{b'h'} \quad \dots \quad 197)$$

jeżeli b' oznacza grubość a h' wysokość ścianki.

Obliczmy jeszcze natężenie ścinające w C , a otrzymamy

$$S = 9,6 \times 1,2 \times 9,4 = 110,2 \text{ cm}^3, \text{ więc } CC_1 = \frac{20000 \times 110,2}{2402 \times 0,8} = 1168 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{a } CC_2 = \frac{2000 \times 110,2}{2402 \times 9,6} = 97 \text{ kg/cm}^2.$$

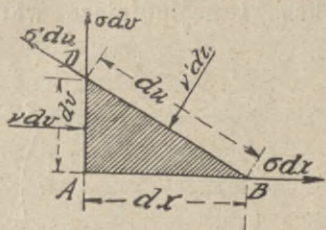
§. 51. Natężenia w kierunkach ukośnych. Linie największych natężeń.

Na graniastosłup, którego podstawa jest prostokątem (rys. 123) działa w stanie równowagi sześć sił, jeżeli zaś przetniemy go według przekątni DB (rys. 124) to w stanie równowagi działa 5 sił na ten element, mianowicie $v dv$, σdv , σdx , $v' du$, $\sigma' du$. Stosunek tych sił się nie zmienia, jeżeli wszystkie podzielimy przez dv , wtedy otrzymamy siły

$$v, \sigma, \sigma \frac{dx}{dv}, v' \frac{du}{dv}, \sigma' \frac{du}{dv}$$

(rysunek 125).

Jeżeli siły te są w równowadze, to wielobok sił i sznurowy muszą się zamknąć. Co do wielkości i kierunku znamy tylko v i σ , co do kierunku resztę sił. Przypuśćmy, że $abfeda$ jest wielobokiem sił i że biegun obierzemy w punkcie a . Wykreślmy



Rys. 124.

promienie, a równoległe do nich wielobok sznurowy. Pierwszy promień aa jest tu zerem, drugi ad , kreślimy więc równoległą do ad przez punkt m do siły $\sigma' \frac{du}{dv}$, przyczem $Cm = mB$.

Dalej kreślimy $mn \parallel ae$, $nr \parallel af$, $rm \parallel ab$ aż do punktu m , ponieważ wielobok sznurowy musi się zamknąć. Z rysunku widzimy, że $aef \sim mnr$, więc $mr : Ar = ef : bf$, czyli

$$\frac{1}{2} dx : \frac{1}{2} dv = ef : \sigma, \text{ stąd} \\ ef = \sigma \frac{dx}{dv}.$$

Dalej widzimy, że $efc \sim ABC$, więc

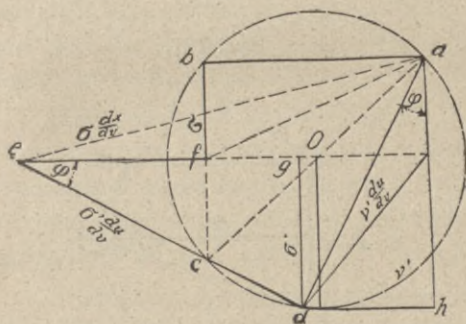
$$\sigma \frac{dx}{dv} : fc = dx : dv, \text{ a stąd}$$

$$fc = \sigma \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \sigma = bf.$$

Ponieważ z rysunku także wynika, że $\angle abc = \angle adc = 90^\circ$, więc punkty a, b, c i d leżą na okręgu

koła. Na tej podstawie możemy teraz wielobok sił łatwo wykreślić w następujący sposób: kreślimy $v = ab$, $bf = \sigma$ i przedłużamy tę prostą do c tak, aby $fc = bf$. Zataczamy koło przez a, b, c , prowadzimy $ad \parallel v' \frac{du}{dv}$ czyli $ad \perp BC$ i dc przedłużamy aż do poziomej przez f .

Z trójkątów $egd \sim ABC$ mamy $\sigma' \frac{du}{dv} : dg = du : dv$, a stąd

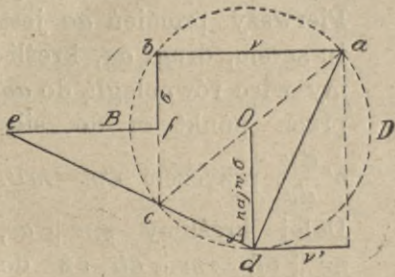


Rys. 125.

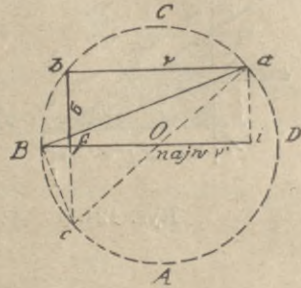
$dg = \sigma'$. Podobnie otrzymamy z trójkątów $adh \sim ABC$

$$v' \frac{du}{dv} : dh = du : dv, \text{ więc } dh = v'.$$

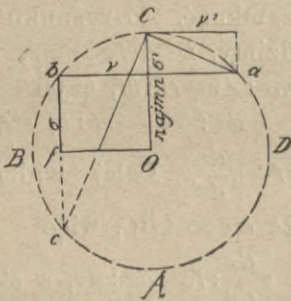
Łatwo możemy teraz znaleźć kierunki sił v' i σ' , dla których v' i σ' przybierają największe i najmniejsze wartości.



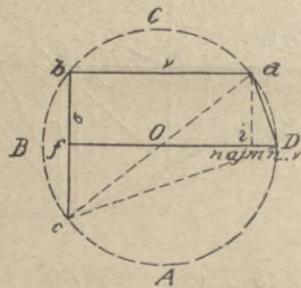
Rys. 126.



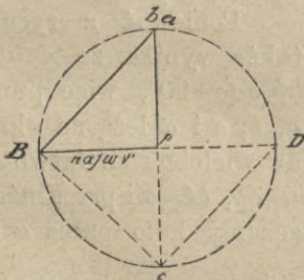
Rys. 127.



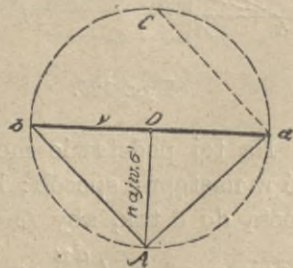
Rys. 128.



Rys. 129.



Rys. 130.



Rys. 131.

Dla największego σ' musi być płaszczyzna, w której działa σ' , równoległa do Ac (rys. 126), a v' działać w prostej aA , przyczem

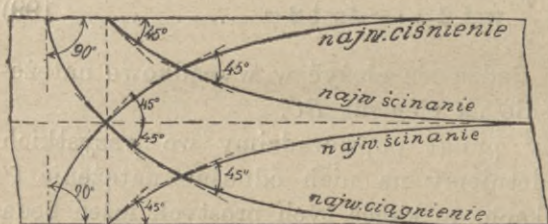
punkt d wpada na punkt A , znajdujący się w pionowej pod O . Jeżeli płaszczyznę tę obrócimy o 45° , kierunki te zmieniają się na cB i aB (rys. 127), wtedy $\sigma' = 0$, a ν' jest największem. Po dalszym obrocie o 45° zmieniają się te kierunki na cC i aC (rys. 128), a wtedy σ' dosięga swej najmniejszości. Gdy nareście jeszcze obrócimy te płaszczyzny o 45° (rys. 129), to otrzymamy kierunki cD i aD , a wtedy ν' jest najmniejszością, a $\sigma = 0$.

Widzimy więc, że płaszczyzny, dla których σ' jest najmniejszością i największością stoją na sobie prostopadle, zaś płaszczyzny, dla których ν' jest najmniejszością i największością stoją także na sobie prostopadle i tworzą z powyższymi płaszczyznami kąty 45° .

Dla osi obojętnej jest, jak wiadomo, $\nu = 0$, więc płaszczyzny, dla największych i najmniejszych ν' , cB i cD są nachylone pod 45° do osi belki (rys. 130), a dla największych i najmniejszych σ' równoległe do osi.

Dla włókna skrajnego jest, jak wiadomo, $\sigma = 0$, więc płaszczyzny, dla których ν' jest największe i najmniejsze, są równoległe i prostopadle, do osi, zaś płaszczyzny, dla których σ' jest najmniejszością i największością aA i aC (rys. 131), nachylone są pod kątem 45° do osi.

Jeżeli w pewnym punkcie belki wyznaczymy kierunki płaszczyzn dla największych i najmniejszych ν' lub σ' , potem



Rys. 132.

w punktach sąsiadnych, leżących w tych kierunkach, wyznaczymy znów kierunki płaszczyzn dla największości i najmniejszości ν' lub σ' i tak dalej postępować będziemy, to otrzymamy linie krzywe, których styczne wyznaczają w danym punkcie kierunki wyżej wspomnianych płaszczyzn. Linie te największych nateżeń (n. *Spannungstrajektorie*, an. *tractory*) wykreśliłszy na rysunku 132 na podstawie powyższych twierdzeń dla belki o stałej szerokości.

Widzimy, że linie największego ciągnięcia i ciśnienia wychodzą pionowo z włókien skrajnych, są nachylone do pionu

pod kątem 45° w osi i kończą się stycznie do włókien skrajnych. Linie największego ścinania wychodzą z włókien skrajnych nachylone pod 45° , stają się coraz więcej płaskie i kończą się stycznie do osi.

§. 52. Natężenia główne.

Z rysunku 126 możemy otrzymać dwa równania, jeżeli utworzymy sumy składowych wszystkich sił w kierunkach ad i ed i zrobimy je równe zeru ze względu na to, że siły te są w równowadze.

Tworząc sumę najprzód w kierunku ad , otrzymamy:

$$\nu' \frac{du}{dv} = \nu \text{wst } \varphi + 2 \sigma \text{dost } \varphi,$$

albo, ponieważ

$$\frac{dv}{du} = \text{wst } \varphi, \quad \nu' = \nu \text{wst}^2 \varphi + 2 \sigma \text{wst } \varphi \text{dost } \varphi,$$

lub nareście $\nu' = \frac{\nu}{2} (1 - \text{dost } 2 \varphi) + \sigma \text{wst } 2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad 198)$

Tworząc zaś sumę składowych w kierunku ed , otrzymamy

$$\sigma' \frac{du}{dv} = \nu \text{dost } \varphi - \sigma \text{wst } \varphi + \sigma \frac{dx}{dv} \text{dost } \varphi, \text{ lub ponieważ } \frac{dx}{dv} = \text{dot } \varphi,$$

$\sigma' = \nu \text{wst } \varphi \text{dost } \varphi + \sigma (\text{dost}^2 \varphi - \text{wst}^2 \varphi)$, albo wreście

$$\sigma' = \frac{\nu}{2} \text{wst } 2 \varphi + \sigma \text{dost } 2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad 199)$$

Natężenia ν' i σ' dadzą się złożyć w wypadkowe natężenie ζ' , działające ukośnie na element BC .

Jeżeli przez dany punkt poprowadzimy we wszystkich kierunkach proste i odetniemy na nich odnośne natężenia ζ' we właściwych kierunkach, to końce tych prostych leżeć będą na elipsie, jak się tego dowodzi w mechanice rozumowej. Elipsę tę nazywamy elipsą natężeń (n. *Spannungsellipse*). Osie główne tej elipsy są to natężenia, stojące prostopadle na odnośnych elementach, a więc *najw.* i *najmn.* ν' , gdyż wtedy $\sigma' = 0$ (rys. 128 i 130).

Aby wynaleść *najw.* i *najmn.* ν' , a więc osie główne elipsy natężeń, możemy postępować analitycznie na podstawie równań 198) i 199), albo też możemy użyć do tego wyników, do których doszliśmy wykreślnie.

Z rys. 126 i 128 widzimy, że jeżeli nazwiemy $OA=PB=OC=OD=r$, to

$$\text{najw. } \pm \sigma' = \pm r = \pm \frac{1}{2} \sqrt{v^2 + 4 \sigma^2} 200)$$

Również widzimy z rys. 127 i 129, że

$$\text{najw. } \pm v' = i O \pm r = \frac{v}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{v^2 + 4 \sigma^2} 201)$$

Z rys. 126 i 128 widzimy też, że dla położenia płaszczyzny elementu, dla którego otrzymujemy *najw* $\pm \sigma'$,

$$v' = \frac{v}{2} 202)$$

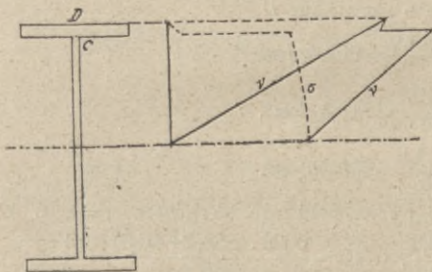
Wartości *najw* $\pm v'$ nazywamy natężeniami głównymi (n. *Hauptspannung*, an. *maximum stress*), a wartości *najw* $\pm \sigma'$ natężeniami głównymi ścinającymi (n. *Hauptschubspannung*).

Przy obliczaniu wymiarów musimy uważać, aby natężenie główne normalne i natężenie główne ścinające w żadnym punkcie belki nie przekraczały dozwolonej granicy.

Powiedzieliśmy wyżej, że *najw* ($\pm v$) jest zawsze w warstwie skrajnej, tam zaś jest $\sigma=0$. Jeżeli wstawimy w rów. 201)

$\sigma=0$, to otrzymamy *najw* $\pm v' = v$. Dlatego przy obliczaniu wymiarów na podstawie wzoru 143) $\tau I = Me$ uwzględniamy tylko natężenie podłużne v warstwy skrajnej, robiąc je równem natężeniu dopuszczalnemu τ .

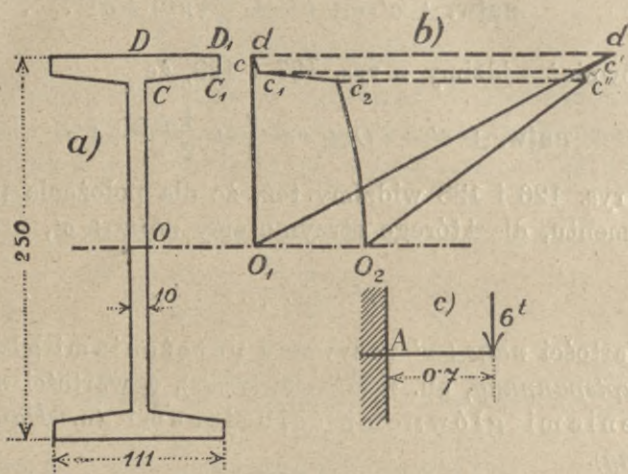
Jeżeli szerokość przekroju zmienia się nagle, jak n. p. w kształtówce *I* (rys.



Rys. 133.

133), to w *C*, gdzie kształtówka przechodzi w ściankę, jest natężenie normalne v dość wielkiem a także i natężenie ścinające σ , natężenie więc główne normalne v' może być większem od natężenia w włóknie skrajnem *D*. Aby temu zapobiedz zaokrągła się przekrój w *C* i pochyla stopki, przezco zmniejsza się natężenie główne.

Przykład. Niechaj siła 6 t działa na końcu belki jednym końcem wmurowanej 0,7 m długiej. Jakie będzie napięcie główne w przekroju przy ścianie w C, jeżeli belka ma przekrój wedle rys. 134?



Rys. 134.

Moment największy wynosi $6 \times 0,7 = 4,2 \text{ tm} = 420000 \text{ kgcm}$. Dla kształtówki I jest $F = 25 \times 1 + 2 \times (11,5 - 1) 1,5 = 55,3 \text{ cm}^2$

$$I = \frac{1}{12} (11,1 \times 25^3 - 10,1 \times 22^3) = 5491 \text{ cm}^4.$$

Napięcie normalne w włóknie skrajnym D

$$v = \frac{420000 \times 12,5}{5491} = 957 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{w } C \quad v = \frac{957 \cdot 10,7}{12,5} = 819 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{w } C_1 \quad v = \frac{957 \cdot 11,3}{12,5} = 865 \text{ kg/cm}^2.$$

Napięcie ścinające otrzymamy w włóknie skrajnym $\sigma = 0$, w C_1

$$\sigma = \frac{QS}{Iu} = \frac{6000 \cdot (11,1 \cdot 1,2 \cdot 11,9)}{5491 u} = \frac{172,8}{u}, \quad \text{w } C \quad \sigma = \frac{6000 \cdot (158,5 + 40,3)}{5491 u} = \frac{217}{u}$$

$$\text{w } C_1 \text{ jest } u = 11,1, \text{ więc } \sigma = \frac{172,8}{11,1} = 15,6 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{w } C \text{ jest } u = 1, \text{ więc } \sigma = \frac{217}{1} = 217 \text{ kg/cm}^2.$$

Zatem napięcie główne normalne w warstwie skrajnej:

$$v' = v = 957 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{w } C_1 \quad v' = \frac{865}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{865^2 + 4 \cdot 15,6^2} = 865,3 \text{ kg/cm}^2, \text{ analogicznie w } C = 873 \text{ kg/cm}^2$$

Tu więc jest jeszcze napięcie główne w C mniejsze niż w warstwie skrajnej, lecz gdyby przy tej samej sile długość 0,7 się zmniejszyła,

zmniejszyłby się moment, a stąd v , podczas gdy σ pozostałoby to samo i możliwymby było, że $cc'' > dd''$.

Z przykładu powyższego widzimy jednak, że wypadek taki byłby zupełnie wyjątkowy i zdarzyć się może wogóle tylko tam, gdzie i natężenia normalne i ścinające są wielkie, że zwykle jednak dostatecznym jest obliczenie natężenia normalnego w warstwie skrajnej.

Jeżeli $v=0$, to według 200) $najw \pm \sigma' = \pm \sigma$. Przekrój belki więc w dwu punktach podparte obliczamy na podporze (gdzie $M=0$) według σ . Jeżeli belka jest drewnianą o przekroju prostokątnym, to według 194) otrzymamy natężenie na jednostkę długości dla $v=0$ tj. w osi obojętnej $\frac{3}{2} \frac{Q}{h}$, a na jednostkę powierzchni $\sigma = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}$.

Jeżeli belka jest jednostajnie obciążoną, to według rów. 18) $Q = \frac{1}{2} ql$, więc $\sigma = \frac{3}{4} \frac{ql}{bh}$. Największy zaś moment w środku jest według 20) $M = \frac{1}{8} ql^2$, więc największe natężenie podłużne:

$$v = \frac{Me}{I} = \frac{\frac{1}{8} ql^2 \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} bh^3} = \frac{3}{4} \frac{ql^2}{bh^2}.$$

Jeżeli dla drzewa miękkiego przyjmiemy $\tau' = 10 \text{ kg/cm}^2$, $\tau = 80 \text{ kg/cm}^2$ i obliczymy wymiary tak, że $v = \tau$, to

$$\sigma : \tau = \frac{3}{4} \frac{ql}{bh} : \frac{3}{4} \frac{ql^2}{bh^2} = h : l, \text{ więc } \sigma = \tau \cdot \frac{h}{l} = \frac{80h}{l}.$$

Jeżeli więc $\sigma \leq \tau'$, to $\frac{80h}{l} \leq 10$, czyli

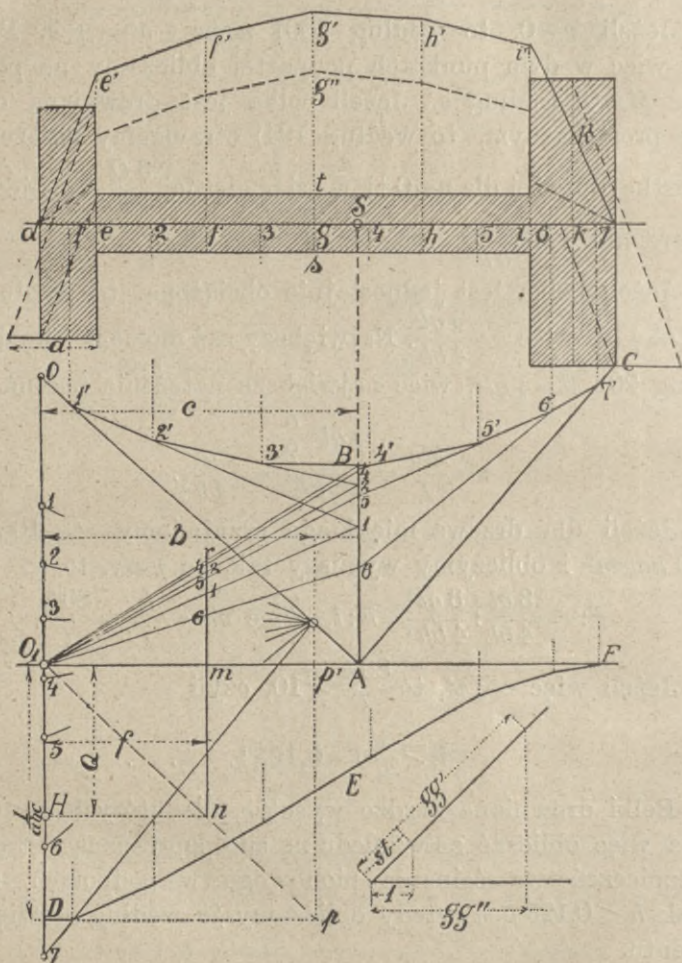
$$h \leq \frac{1}{8} l = 0,125 l. \quad \dots \dots \dots 203)$$

Belki drewniane bardzo wysokie, dla których $h < 0,125 l$, trzeba więc obliczać ze względu na siłę poprzeczną Q z powodu niebezpieczeństwa ścinania pionowego w podporach, zwykle jednak $h < 0,125 l$, a wtedy obliczamy je według największego momentu.

§. 53. Wykreślne wyznaczenie siły ścinającej poziomej.

Siłę ścinającą σ możemy wyznaczyć także wykreślnie, jak to na przykładzie (rys. 135) dla przekroju I okazemy według Culmanna. Dzielimy najprzód przekrój na pewną ilość pasków (tu na 7), wyznaczamy środki ciężkości tych pasków i zache-

piamy w nich siły proporcjonalne do powierzchni pasków. W tym celu sprowadzamy wszystkie prostokąty do wspólnej podstawy a , przeto wysokości, uzyskanych w ten sposób, prostokątów będą proporcjonalne do powierzchni. Kreślimy teraz



Rys. 135.

wielobok sił $0, 1, 2, \dots, 7$, odcinając po kolei wysokości czworoboków, przyjmujemy punkt O w odległości b , kreślimy promienie i pierwszy wielobok sznurowy OBC . Dalej przedłużamy boki skrajne, które przecinają się w A , kreślimy przez A pio-

nową i otrzymujemy środek ciężkości S . Przedłużamy resztę boków do linii AB , którą uważamy za wielobok sił, obieramy drugi biegun O_1 w odległości e na prostej O_7 , prowadzimy promienie i kreślimy drugi wielobok sznurowy DEF . Jak wiemy, będzie więc $O_1 D = \frac{I}{abc}$.

Poprowadźmy z pierwszego bieguna $Op \parallel O_1 D$ i połączmy O_1 z p , odetnijmy dalej $O_1 H = Q$ i poprowadźmy $Hn \parallel O_1 F$ i pionową nm , to $mn = Q$, a $O_1 nm \sim Q_1 p'p$, więc $pp' : b = mn : O_1 m$, a zatem, gdy $O_1 m = f$, $\frac{I}{abc} : b = Q : f$, a stąd $f = \frac{b Q abc}{I} = \frac{ab^2 c Q}{I}$.

Długość AB przedstawia moment statyczny powierzchni pierwszych trzech pasków ze względu na środek ciężkości przekroju, więc $AB = \frac{S_{1,3}}{ab}$. Przedłużmy mn aż do r , to $mr : f = \frac{S_{1,3}}{ab} : c$, a stąd $mr = \frac{S_{1,3} f}{abc}$, a wstawivszy wartość za f ,

$$mr = \frac{S_{1,3} Q ab^2 c}{I abc} = \sigma_{1,3} \cdot b \quad . \quad . \quad . \quad 204)$$

Widzimy więc, że odcinek mr proporcjonalny jest do siły ścinającej w warstwie g . Wykreślmy $gg' = 2mr$, dalej $ee' = 2 \cdot m 1$, $ff' = 2 \cdot m 2$, $hh' = 2 \cdot m 4$, $ii' = 2 \cdot m 5$, $kk' = 2 \cdot m 6$, to rzędne te podzielone przez $2b$ przedstawiają siłę ścinającą w tych warstwach. Wierzchołki tych rzędnych połączone dają linię sił ścinających, (an. *curve of shearing stress*).

Jeżeli chcemy mieć natężenie ścinające σ_1 , czyli siłę ścinającą na jednostkę powierzchni, to musimy siłę ścinającą σ w każdej warstwie np. g podzielić przez szerokość warstwy st . Na rysunku zrobiliśmy to zapomocą kąta proporcjonalnego i połączyli końce odnośnych rzędnych linią kreskowaną. W warstwach, gdzie szerokość przekroju nagle się zmienia, zmienia się też nagle i natężenie ścinające.

§. 54. Obliczenie przekroju kształtówek I , pracujących na zginanie.

Kształtówki w kształcie I używamy często jako belki, pracującej na zginanie. Znając moment sił zewnętrznych, działających na belkę, obliczamy jej wymiary według równania

$$\tau I = M e, \text{ a stąd: } \quad \frac{M}{\tau} = \frac{I}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 205)$$

Wyraz $\frac{I}{e} = W$ zależny tylko od przekroju belki nazywamy momentem oporu (n. *Widerstandmoment*, fr. *module de flexion, de section*).

Austryackie Towarzystwo inżynierów i architektów w Wiedniu wyznaczyło wymiary dla pewnej ilości kształtówek I , które fabryki żelaza wyrabiają na zapas i których zatem każdego czasu dostać można. Wymiary te, ciężar kształtówek na jednostkę długości i moment oporu zestawiliśmy w następującej tabliczce.

Znając M i τ , wyznaczamy iloraz $\frac{M}{\tau}$, który ma być równy momentowi oporu kształtówki. Szukamy więc z tabliczki w kolumnie $\frac{I}{e} = I : \frac{h}{2}$ wartość najbardziej zbliżoną, a nie mniejszą od $\frac{M}{e}$ i obieramy odnośną liczbę kształtówki.

Kształtówki I (n. *I Eisen*, fr. *fer en I*, a. *I-iron*, r. *двутавровое железо*),

zestawione wedle norm austryackiego Towarzystwa inżynierów i architektów z r. 1915, obliczone dokładnie z uwzględnieniem zaokrągleń i nachyleń (rys. 136 a).

Normalne:

$$\text{dla } h \leq 160 \text{ mm} : b = 0,4 h + 20 \text{ mm}$$

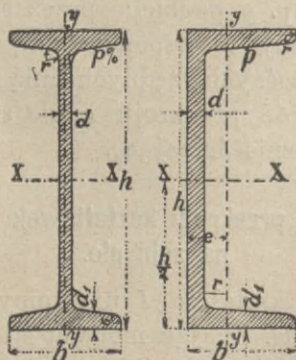
$$d = 0,03 h + 1,6 \text{ mm}, \quad d_1 = 1,5 d$$

$$\text{dla } h > 160 \text{ mm} : b = 0,3 h + 36 \text{ mm}$$

$$d = 0,4 h, \quad d_1 = 1,5 d$$

$$r = 1,2 d, \quad r_1 = 0,6 d, \quad \text{ciężar gatunkowy } \gamma = 7,85$$

pochyłość wewnętrzna boków stopy i głowy $p\% = 0,02h + 7, h$ w mm.



a Rys. 136. b

Wyjątki co do b przy kształtówkach szerokostopowych l. 18 a, 22 a, 24 a i 28 a.

Tablica XXI.
Kształtówki I. (przekr. norm. austr.).

Liczba kształtówki	Wymiary w milimetrach						nachylenie wnątrz boków stopy p %	prze-kroj F cm^2	ciężar g kg/m	ze względu na oś XX			ze względu na oś YY		
	h	b	d	d_1	r_1	r				J_x cm^4	$J_x : h$ cm^3	promień bezwła-dności α cm	J_y cm^4	moment bezwła-oporu $J_y : \frac{b}{2}$ cm^3	promień bezwła-dności a_1 cm
8	80	52	4,0	6,0	2,4	4,8	8,6	9,08	7,13	97,1	24,3	3,27	12,7	4,90	1,18
10	100	60	4,5	7,0	2,7	5,4	9,0	12,42	9,75	207,9	41,6	4,09	22,8	7,59	1,35
12	120	68	5,0	8,0	3,1	6,2	9,4	16,28	12,78	392,7	65,4	4,91	37,8	11,1	1,52
13	130	72	5,5	8,5	3,3	6,6	9,6	18,68	14,06	524,0	80,6	5,30	47,6	13,2	1,60
14	140	76	6,0	8,5	3,5	7,0	9,8	20,55	16,13	659,5	94,2	5,67	55,6	14,6	1,64
15	150	80	6,0	9,0	3,6	7,2	10,0	22,58	17,73	840,3	112,0	6,10	68,5	17,1	1,74
16	160	84	6,5	9,5	3,9	7,8	10,2	25,43	19,96	1068	133,5	6,48	83,6	19,9	1,81
18	180	90	7,0	11,0	4,2	8,4	10,6	31,21	24,50	1663	184,7	7,30	119,7	26,6	1,96
18 α	180	135	7,0	11,0	4,2	8,4	10,6	41,11	32,27	2364	262,6	7,58	380,7	56,4	3,04
20	200	96	8,0	12,0	4,8	9,6	11,0	37,58	29,50	2429	242,9	8,04	158,3	33,0	2,05
21	210	99	8,5	12,5	5,1	10,2	11,2	40,99	32,18	2899	276,1	8,41	180,8	36,5	2,10
22	220	102	9,0	13,0	5,4	10,8	11,4	44,55	34,79	3434	312,2	8,78	205,5	40,3	2,15
22 α	220	135	9,0	13,0	5,4	10,8	11,4	53,13	41,71	4346	395,1	9,04	457,8	67,8	2,94
23	230	105	9,0	14,0	5,5	11,0	11,6	48,17	37,81	4099	356,4	9,22	242,1	46,1	2,24
24	240	108	9,5	14,5	5,7	11,4	11,8	52,00	40,82	4785	398,8	9,59	272,9	50,5	2,29
24 α	240	135	9,5	14,5	5,7	11,4	11,8	59,33	46,97	5774	481,2	9,82	517,0	76,6	2,94
25	250	111	10,0	15,0	6,0	12,0	12,0	56,00	43,96	5556	444,5	9,96	306,1	55,2	2,34
26	260	114	10,5	15,5	6,3	12,6	12,2	60,15	47,22	6117	493,6	10,33	342,6	60,1	2,39
28	280	120	11,0	17,0	6,6	13,2	12,6	68,70	53,93	8527	609,1	11,14	439,0	73,2	2,53
28 α	280	150	11,0	17,0	6,6	13,2	12,6	78,90	61,94	10279	734,2	11,41	831,2	110,8	3,25
30	300	126	12,0	18,0	7,2	14,4	13,0	78,02	61,25	11002	733,5	11,88	537,2	85,3	2,62
32	320	132	13,0	19,0	7,8	15,6	13,4	87,96	69,05	13982	873,1	12,61	650,9	98,6	2,72
35	350	141	14,0	21,0	8,4	16,8	14,0	103,64	81,36	19693	1125,3	13,79	876,8	124,4	2,91
40	400	156	16,0	24,0	9,6	19,2	15,0	132,86	104,30	32709	1635,5	15,69	1354	173,6	3,19
45	450	171	18,0	27,0	10,8	22,6	16,0	165,67	130,05	51284	2279,3	17,59	2001	234,0	3,48

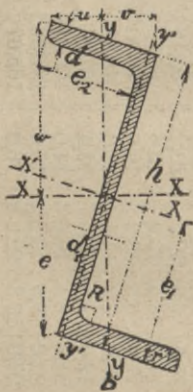
Przykłady. Na belkach żelaznych spoczywają sklepienia płaskie jako powała. Belki żelazne o rozpiętości 5,5 m kładziemy w odstępach 1,2 m. Ciężar własny powały wraz z obciążeniem tłumem ludzi jest 750 kg/m^2 . Jakie mają być wymiary kształtówki I?

Na jeden metr bieżący kształtówki przypada powierzchnia powały $1,2 \text{ m}^2$, a więc ciężar na 1 cm bieżący $q = \frac{1,2 \cdot 750}{100} = 9 \text{ kg/cm}$. Moment największy dla obciążenia zupełnego jest w środku belki $M = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} 9 \cdot 550^2 = 340312 \text{ kg/cm}^2$. Jeżeli więc przyjmiemy $\tau = 1000 \text{ kg/cm}^2$, to $\frac{M}{\tau} = 340,3 \text{ cm}^3$, a więc obieramy kształtówkę I. 23, dla której $\frac{I}{e}$ równa się $356,4 \text{ cm}^3$.

2. Balkon wystający na 1,2 m podparty jest kształtówkami I w odstępach 1,25 m. Ciężar własny balkonu równo rozdzielony wynosi 390 kg/m^2 , ciężar ruchomy stanowi tłum ludzi, który przyjmujemy 400 kg/m^2 , ciężar poręczy wynosi 300 kg/m .

Każdy ze średnich dźwigarów jest obciążony ciężarem jednostajnie rozdzielonym $(390 + 400)1,25 = 987,5 \text{ kg/m}$ i skupionym, działającym na końcu, $300 \times 1,25 = 375 \text{ kg}$, zatem wedle 30) najw. $M = -q l \cdot \frac{1}{2} l - P \cdot l = -\frac{1}{2} q l^2 - P l = -\frac{1}{2} 0,988 \cdot 1,2^2 - 0,375 \cdot 1,2 = -0,711 - 0,450 = -1,161 \text{ tm}$, a dla $\tau = 1000 \text{ kg/cm}^2$ $\frac{M}{\tau} = \frac{116100}{1000} = 116,1 = \frac{I}{e}$.

A zatem przyjmiemy kształtówkę I. 16, dla której $\frac{I}{e} = 133,5 \text{ cm}^3$.



Rys. 137.

Dźwigary skrajne niosą ciężar jednostajnie rozdzielony $(390 + 400) \times \frac{1,25}{2} + 300 = 794 \text{ kg/m}$ i skupiony na końcu $300 \times \frac{1,25}{2} = 188 \text{ kg}$, zatem $M = -\frac{1}{2} 0,794 \cdot 1,2^2 + -0,188 \cdot 1,2 = -0,572 - 0,225 = -0,797 \text{ tm}$.

$$\text{Zatem } \frac{M}{\tau} = \frac{I}{e} = \frac{79700}{1000} = 79,7 \text{ cm}^3.$$

Moglibyśmy więc przyjąć dla dźwigarów skrajnych kształtówki I. 13.

Poniżej podajemy też tablicę XXII. według norm niemieckich, wedle których długości normalne 4–10 m, najw. długość 14 m, $r = d$, $r_1 = 0,6 d$, pochylenie stopek $p = 14\%$, ($\gamma = 7,8$), jakoteż tabl. XXIII. dla kształtówek szerokostopowych.

§. 55. Inne kształtówki.

Towarzystwo inżynierów i architektów w Wiedniu ustanowiło pewne wymiary także dla innych kształtówek, które poniżej podajemy zestawione w tablicach wraz z odległościami środka ciężkości od podstawy i momentami i promieniami bezwładności. Ciężar gatunkowy dla żelaza zlewego przyjęty $\gamma = 7,85$.

Tablica XXII.

Kształtówki I (przechr. norm. niemieckie).

Liczba	Wymiary w milimetrach						Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
	h	b	d	d ₁	F	g	I _x	W _x	a	I _y	W _y	a ₁
							cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
8	80	42	3,9	5,9	7,58	5,95	77,8	19,5	3,21	6,29	3,00	0,91
9	90	46	4,2	6,3	8,99	7,07	117	26,0	3,61	8,78	3,82	0,99
10	100	50	4,5	6,8	10,6	8,32	171	34,2	4,02	12,2	4,88	1,07
11	110	54	4,8	7,2	12,3	9,66	230	43,5	4,32	16,2	6,00	1,15
12	120	58	5,1	7,7	14,2	11,15	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
13	130	62	5,4	8,1	16,1	12,64	436	67,1	5,20	27,5	8,87	1,31
14	140	66	5,7	8,6	18,2	14,37	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,39
15	150	70	6,0	9,0	20,4	16,01	735	98,0	6,00	43,9	12,5	1,47
16	160	74	6,3	9,5	22,8	17,90	935	117	6,40	54,7	14,8	1,54
17	170	78	6,6	9,9	25,2	19,78	1166	137	6,80	66,6	17,1	1,62
18	180	82	6,9	10,4	27,9	21,90	1446	161	7,20	81,3	19,8	1,71
19	190	86	7,2	10,8	30,5	24,02	1763	186	7,60	97,4	22,7	1,79
20	200	90	7,5	11,3	33,4	26,30	2142	214	8,01	117	26,0	1,87
21	210	94	7,8	11,7	36,3	28,57	2563	244	8,40	138	29,4	1,95
22	220	98	8,1	12,2	39,5	31,09	3060	273	8,80	162	33,1	2,02
23	230	102	8,4	12,6	42,6	33,52	3607	314	9,20	189	37,1	2,12
24	240	106	8,7	13,1	46,1	36,19	4246	354	9,60	221	41,7	2,19
25	250	110	9,0	13,6	49,7	39,01	4966	397	10,00	256	46,5	2,27
26	260	113	9,4	14,1	53,3	41,92	5744	442	10,38	288	51,0	2,32
27	270	116	9,7	14,7	57,1	44,90	6626	491	10,77	326	56,2	2,39
28	280	119	10,1	15,2	61,0	47,96	7587	542	11,15	364	61,2	2,44
29	290	122	10,4	15,7	64,8	50,95	8636	596	11,54	406	66,6	2,50
30	300	125	10,8	16,2	69,0	54,24	9800	653	11,90	451	72,2	2,56
32	320	131	11,5	17,3	77,7	61,07	12510	782	12,69	555	84,7	2,67
34	340	137	12,2	18,3	86,7	68,14	15695	923	13,45	674	98,4	2,79
36	360	143	13,0	19,5	97,0	76,22	19605	1089	14,22	818	114	2,91
38	380	149	13,7	20,5	107	84,00	24012	1264	14,98	975	131	2,99
40	400	155	14,4	21,6	118	92,63	29213	1461	15,73	1158	149	3,13
42,5	425	163	15,3	23,0	132	103,62	36973	1740	16,73	1437	176	3,29
45	450	170	16,2	24,3	147	115,40	45852	2037	17,66	1725	203	3,43
47,5	475	178	17,1	25,6	163	127,96	56481	2378	18,61	2088	235	3,58
50	500	185	18,0	27,0	179	141,30	68738	2750	19,59	2478	268	3,72
55	550	200	19,0	30,0	213	167,21	99184	3607	21,42	3488	349	4,02

Tablica XXIII.

Kształtówki I szerokostopowe Greya

wyrabiane przez tow. niemiecko-luksemburskie (Differdingen)
 pochyłość stopki $p=9\%$, $r=d$, $r_1=0,6d$.

Liczba	h	b	d	d ₁	F		Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
					cm ²	kg/m	I _x	W _y	a	I _y	W _y	a ₁
							cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
18 B	180	180	8,5	12,9	59,9	47,0	3512	390	7,66	1073	119	4,23
20 B	200	200	8,5	13,8	70,4	55,3	5171	517	8,57	1568	157	4,72
22 B	220	220	9	14,7	82,6	64,8	7379	671	9,45	2216	201	5,18
24 B	240	240	10	15,7	96,8	76,0	10260	855	10,30	3043	254	5,61
25 B	250	250	10,5	16,3	105,1	82,5	12066	965	10,71	3575	286	5,83
26 B	260	260	11	17,3	115,6	90,7	14352	1104	11,14	4261	328	6,07
27 B	270	270	11,3	17,8	123,2	96,7	16529	1224	11,58	4920	365	6,32
28 B	280	280	11,5	18,4	131,8	103,4	19052	1361	12,02	5671	405	6,56
29 B	290	290	12	19	141,1	110,8	21866	1508	12,45	6417	443	6,74
30 B	300	300	12,5	20,3	152,1	119,4	25201	1680	12,85	7494	500	7,02
32 B	320	300	13	20,6	160,7	126,2	30119	1882	13,69	7867	524	7,08
34 B	340	300	13,4	21,1	167,4	131,4	35241	2073	14,51	8097	540	7,00
36 B	360	300	14,2	22,6	181,5	142,5	42479	2360	15,30	8793	586	6,96
38 B	380	300	14,8	23,4	191,2	150,1	49496	2605	16,07	9175	612	6,93
40 B	400	300	15,5	24,6	203,6	159,8	57834	2892	16,85	9721	648	6,91
42½ B	425	300	16	25,4	213,9	167,0	68249	3212	17,86	10078	672	6,86
45 B	450	300	17	26,7	229,3	180,0	80887	3595	18,78	10668	711	6,82
47½ B	475	300	17,6	27,7	242,0	190,0	94811	3992	19,79	11142	743	6,78
50 B	500	300	19,4	28,9	261,8	205,5	111283	4451	20,62	11718	781	6,69
55 B	550	300	20,6	30,8	288,0	226,1	145957	5308	22,51	12582	839	6,61
60 B	600	300	20,8	31,0	300,6	236,0	179303	5977	24,43	12672	845	6,49
65 B	650	300	21,1	31,3	314,5	246,9	217402	6690	26,29	12814	854	6,38
70 B	700	300	21,1	31,3	325,2	255,3	258106	7374	28,17	12818	854	6,28
75 B	750	300	21,1	31,3	335,7	263,4	302560	8068	30,02	12823	855	6,18
80 B	800	300	21,5	32,3	354,9	278,6	360486	9012	31,86	13269	885	6,11
85 B	850	300	21,5	32,3	365,6	287,0	414887	9762	33,68	13274	885	6,02
90 B	900	300	21,5	32,3	376,4	295,5	473964	10533	35,48	13279	885	5,94
95 B	950	300	21,9	33,3	396,2	311,0	550974	11600	37,29	13727	915	5,89
100 B	1000	300	21,9	33,3	407,2	319,7	621287	12425	39,06	13732	915	5,81

Таблица XXIV.

I. Kształtówka U (n. U Eisen, fr. fer à U, an. U-iron, r. коробчатое железо) (rys. 136b) (przek. norm. austr.).

Dla przekroi normalnych jest $b = 0,25 h + 25 mm$ (zaokrąglone na $5 mm$)

$d = 0,025 h + 4 mm$ (zaokrąglone na $0,5 mm$)

$d_1 = 1,5 d,$

$r_1 = 0,6 d,$

$r = 1,5 d,$

$p = (0,01 h + 7) \%$

Liczba kształtówek	Wymiary w milimetrach						Nachylenie wewn. boków $\rho \%$	Przekrój f'	Ciężar g	Odstęp środka ciężkości e	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
	h	b	d	d_1	r_1	r					moment		pro-mień bez-wład-ności a	moment		pro-mień bez-wład-ności a_1
											bez-władno-ści J_x	oporu $J_x : 2$		bez-władno-ści J_y	oporu $J_y : (b-e)$	
6	60	40	5,5	8,0	3,3	8,0	9,01	7,07	1,44	48,0	16,0	2,31	13,0	5,1	1,20	
8	80	45	6,0	9,0	3,6	9,0	12,06	9,47	1,54	116,1	29,0	3,10	21,9	7,4	1,35	
10	100	50	6,5	9,5	3,9	9,5	15,08	11,80	1,62	227,1	45,4	3,89	33,3	9,8	1,49	
12	120	55	7,0	10,5	4,2	10,5	18,81	14,77	1,74	409,7	68,3	4,67	50,1	13,3	1,63	
13	130	60	7,0	10,5	4,2	10,5	20,56	16,14	1,87	538,4	82,1	5,09	65,3	15,8	1,78	
14	140	60	7,5	11,0	4,5	11,0	22,40	17,58	1,82	662,2	94,6	5,44	69,9	16,7	1,77	
16	160	65	8,0	12,0	4,8	12,0	26,90	21,12	1,95	1038	129,8	6,21	98,2	21,5	1,91	
18	180	70	8,5	12,5	5,1	12,5	31,13	24,44	2,03	1514	168,2	6,97	130	26,1	2,04	
20	200	75	9,0	13,5	5,4	13,5	36,35	28,54	2,16	2182	218,2	7,75	173	32,5	2,18	
22	220	80	9,5	14,0	5,7	14,5	41,21	32,35	2,25	2979	270,9	8,50	221	38,4	2,32	
24	240	85	10,0	15,0	6,0	15,0	47,15	37,01	2,38	4058	338,2	9,28	285	46,5	2,46	
26	260	90	10,5	15,5	6,3	15,5	52,63	41,32	2,47	5294	407,2	10,03	352	53,8	2,59	
28	280	95	11,0	16,5	6,6	16,5	59,30	46,55	2,60	6920	494,3	10,80	441	63,9	2,73	
30	300	100	11,5	17,0	6,9	17,0	65,41	51,35	2,69	8727	581,8	11,55	533	72,8	2,85	

II. Kształtki Z, Zetówki (n. Z Eisen, fr. fer en E, a. Z-iron, r. Z-образное желѣзо) (rys. 137)
(przek. norm. austr).

$$R = d, \quad r = 0,4 d, \quad p = 0\%$$

Liczba kształtki	Wymiary w milimetrach						Przekrój F cm ²	Ciężar jednostkowy g kg/m	Odstęp środk ciężko- ści		Ze względu na osi			Ze względu na osi główną									
	h	b	d ₁	d	r	R			e ₁	e ₂	Ze względu na osi			XX		YY							
											X'X'	Y'Y'	moment bez- władności	I	$\frac{I}{w}$	a	I'	$\frac{I}{v}$	a ₁				
6	60	40	5,5	8,0	3,3	8,0	9,0	7,06	30	37,3	48,4	27,1	0,694	13,5	19,4	47,0	22,7	62,9	13,4	2,64	12,6	6,5	1,18
8	80	45	6,0	9,0	3,6	9,0	12,1	9,50	40	42,0	116,7	43,7	0,550	17,6	21,9	55,3	33,6	147,6	26,7	3,49	13,7	6,3	1,06
10	100	50	6,5	9,5	3,9	9,5	15,1	11,9	50	46,8	226,7	63,7	0,461	21,5	23,9	65,0	44,0	270,5	41,6	4,33	19,8	8,3	1,15
12	120	55	7,0	10,5	4,2	10,5	18,9	14,8	60	51,5	411,3	94,2	0,399	25,6	25,5	74,8	54,4	467,2	62,5	4,97	37,2	14,6	1,40
14	140	60	7,5	11,0	4,5	11,0	22,5	17,7	70	56,3	666,7	128,5	0,360	29,2	27,2	84,9	64,6	746,8	88,0	5,76	48,4	17,6	1,47
16	160	65	8,0	12,0	4,8	12,0	27,0	21,2	80	61,0	1046	179,4	0,335	32,4	29,2	95,2	74,6	1161	121,9	6,56	69,4	22,0	1,54
18	180	70	8,5	12,5	5,1	12,5	31,3	24,5	90	65,8	1524	233,4	0,313	35,8	31,1	10,6	84,6	1664	157,6	7,29	93,0	30,0	1,72
20	200	75	9,0	13,5	5,4	13,5	35,5	27,9	100	70,5	2197	310,9	0,299	38,9	33,0	11,6	94,5	2383	205,4	8,19	125,2	37,9	1,88

III. Kształtówki T, Tówki (n. T Eisen, fr. fer en T, a. T-iron, r. T-образное железо) (rys. 138) (przek. norm. austr.).

Dla przekroi normalnych jest $d_1 = d = 0,1b + 1 mm$, $h = 0,77b$,
 $r_1 = 0,2d$, $r_2 = 0,4d$, $R = 0,8d$,
 $p = 4 \frac{0}{10}$, $p' = 0 \frac{0}{10}$

dla przekroi wysokościennej wymiary jak dla kształtówek I, z których są zrobione.

Liczba kształtówki	Wymiary w milimetrach				Nachylenie boków	Przekrój F	Ciężar g	Odstęp środka ciężkości e	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY				
	promienie zaokrągleń		moment bezwładności						promień bezwładności a	moment oporu		promień bezwładności a_1				
	r_1	r_2	R	J_x						$J_x:(h-e)$	J_y		$J_y: \frac{b}{2}$	cm^4	cm^3	cm^4
3	30	23	4	0,8	1,6	3,2	0	1,99	1,56	0,62	0,84	0,50	0,65	0,89	0,59	0,67
4	40	31	5	1,0	2,0	4,0	0	3,30	2,60	0,85	2,43	1,08	0,85	2,64	1,32	0,89
5	50	39	6	1,2	2,4	4,8	0	5,04	3,95	1,04	5,80	2,03	1,07	6,18	2,47	1,11
6	60	46	7	1,4	2,8	5,6	0	7,01	5,50	1,19	11,1	3,27	1,26	12,5	4,15	1,34
7	70	54	8	1,6	3,2	6,4	0	9,38	7,36	1,39	20,5	5,1	1,48	22,6	6,5	1,55
8	80	62	9	1,8	3,6	7,2	0	12,09	9,49	1,59	34,5	7,5	1,69	38,0	9,5	1,77
9	90	69	10	2,0	4,0	8,0	0	15,06	11,82	1,76	53,9	10,5	1,89	60,1	13,4	2,00
10	100	77	11	2,2	4,4	8,8	0	18,46	14,49	1,96	82,1	14,3	2,11	90,7	18,1	2,22
12	120	92	13	2,6	5,2	10,4	0	26,14	20,52	2,34	169,0	24,6	2,54	185,2	30,9	2,66
15	150	116	16	3,2	6,4	12,8	0	40,44	31,71	2,93	408,4	47,1	3,18	446,0	59,5	3,32
1. Przekroje normalne.																
20/2	96	97	8	2,4	4,8	9,6	0	18,52	14,54	2,39	141,5	19,3	2,76	79,8	16,4	2,08
22/2	102	107	9	2,7	5,4	10,8	0	21,98	17,25	2,73	209,7	26,3	3,09	102,8	20,2	2,16
24/2	108	117	9,5	2,8	5,7	11,4	0	25,66	20,14	2,96	290,6	33,3	3,37	136,5	25,3	2,31
26/2	114	127	10,5	3,1	6,3	12,6	0	29,71	23,32	3,29	404,7	43,0	3,69	171,4	30,1	2,40
27/2	120	137	11	3,3	6,6	13,2	0	33,95	26,65	3,50	533,9	52,3	3,97	219,7	36,6	2,54
2. Przekroje wysokościenne.																

IV. Kątówki (n. *Winkelleisen*, fr. *cornière*, fer *cornière*,

A. Równoramienne


$$r=d, r_1=0,5 d$$

Liczba kątówki	Wymiary w mm				Prze- krój <i>F</i>	Cieżar <i>g</i>	Polożenie osi głównych i środka ciężkości			Moment bez- władności ze względem na podstawę <i>I_{ab}</i>
	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>r₁</i>	<i>r</i>			<i>w</i>	<i>e</i>	<i>v</i>	
	4 ^{1/2}	45	5	6,0			3,0	4,29	3,37	
45		6	6,0	3,0	5,08	3,99	3,18	1,88	3,17	18,2
45		7	6,0	3,0	5,85	4,59	3,18	1,92	3,14	21,4
5	50	5	6,0	3,0	4,79	3,76	3,54	1,99	3,59	20,6
	50	6	6,0	3,0	5,68	4,46	3,54	2,05	3,55	24,9
	50	7	6,0	3,0	6,55	5,14	3,54	2,11	3,51	29,2
5 ^{1/2}	55	6	7,0	3,5	6,29	4,94	3,89	2,26	3,93	32,9
	55	7	7,0	3,5	7,26	5,70	3,89	2,28	3,89	38,7
	55	8	7,0	3,5	8,21	6,44	3,89	2,33	3,85	44,5
6	60	6	7,5	3,7	6,90	5,42	4,24	2,39	4,31	42,6
	60	7	7,5	3,7	7,97	6,26	4,24	2,45	4,27	50,1
	60	8	7,5	3,7	9,02	7,08	4,24	2,50	4,23	57,6
	60	9	7,5	3,7	10,05	7,89	4,24	2,56	4,19	65,1
6 ^{1/2}	65	6	8,0	4,0	7,51	5,90	4,60	2,57	4,68	53,9
	65	7	8,0	4,0	8,68	6,81	4,60	2,62	4,65	63,3
	65	8	8,0	4,0	9,83	7,72	4,60	2,67	4,60	72,8
	65	9	8,0	4,0	10,96	8,60	4,60	2,73	4,57	82,4
	65	10	8,0	4,0	12,07	9,47	4,60	2,77	4,54	92,1
7	70	7	8,5	4,2	9,39	7,37	4,95	2,80	5,02	79,1
	70	8	8,5	4,2	10,64	8,35	4,95	2,84	4,99	90,9
	70	9	8,5	4,2	11,87	9,32	4,95	2,90	4,95	102,7
	70	10	8,5	4,2	13,08	10,27	4,95	2,97	4,90	114,6
7 ^{1/2}	75	8	10,0	5,0	11,47	9,00	5,30	3,01	5,37	110,9
	75	9	10,0	5,0	12,80	10,05	5,30	3,07	5,33	125,5

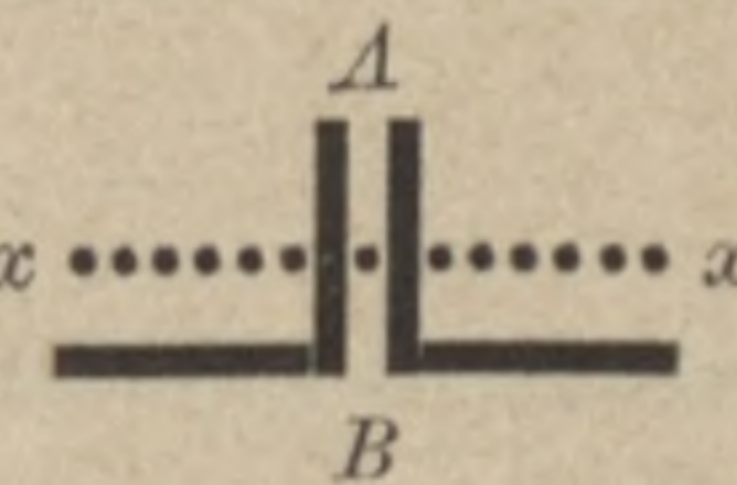
an. *angle iron*, r. угловое желѣзо) (przekr. norm. austr.)

(n. *gleichschenkelig*) (rys. 139).

$$p=0\%$$

Ze względu na oś <i>X₁X₁</i>			Ze względu na oś główną <i>XX</i>			Ze względu na oś główną <i>YY</i>			Dwie znitowane  kątówki			
moment			moment			moment			ze względu na oś <i>AB</i>		ze względu na oś <i>XX</i>	
bezład- ności <i>I_{x₁}</i>	oporu <i>I_{x₁}:v</i>	promień bez- władności <i>a₃</i>	bezład- ności <i>I_x</i>	oporu <i>I_x:w</i>	promień bez- władności <i>a</i>	bezład- ności <i>I_y</i>	oporu <i>I_y:e</i>	promień bez- władności <i>a₄</i>	moment	promień	moment	promień
<i>cm⁴</i>	<i>cm³</i>	<i>cm</i>	<i>cm⁴</i>	<i>cm³</i>	<i>cm</i>	<i>cm⁴</i>	<i>cm³</i>	<i>cm</i>	bezładności	bezładności	bezładności	bezładności
									<i>2 I_{ab}</i>	<i>a_{ab}</i>	<i>2 I_{xx}</i>	<i>a_{xx}</i>
7,86	2,45	1,35	12,5	3,94	1,71	3,19	1,75	0,86	30,0	1,87	15,7	1,35
9,17	2,89	1,34	14,6	4,59	1,69	3,75	1,99	0,86	36,3	1,89	19,3	1,34
10,54	3,36	1,34	16,5	5,20	1,68	4,56	2,38	0,88	42,7	1,91	21,1	1,34
11,2	3,11	1,53	17,5	4,95	1,91	4,84	2,43	1,01	41,1	2,07	22,3	1,53
12,9	3,64	1,51	20,5	5,78	1,90	5,41	2,64	0,98	49,8	2,09	25,9	1,51
14,7	4,20	1,50	23,2	6,56	1,88	6,14	2,91	0,97	58,5	2,11	29,4	1,50
17,4	4,43	1,66	27,6	7,09	2,09	7,21	3,19	1,07	65,8	2,29	34,8	1,66
19,9	5,11	1,65	31,4	8,07	2,08	8,31	3,64	1,07	77,3	2,31	39,7	1,65
22,1	5,75	1,64	35,0	9,00	2,07	9,27	3,98	1,05	89,0	2,33	44,3	1,64
22,9	5,31	1,82	36,3	8,56	2,29	9,54	3,99	1,18	85,2	2,48	45,8	1,82
26,2	6,14	1,81	41,4	9,77	2,28	11,0	4,49	1,17	100,1	2,51	52,4	1,81
29,3	6,93	1,80	46,3	10,9	2,27	12,3	4,93	1,17	115,1	2,53	58,6	1,80
32,2	7,69	1,79	50,9	12,0	2,25	13,6	5,29	1,16	130,3	2,55	64,4	1,79
29,0	6,20	1,97	46,6	19,1	2,49	11,4	4,44	1,23	107,8	2,68	58,0	1,97
33,6	7,23	1,97	53,3	11,6	2,48	13,9	5,31	1,27	127,7	2,70	67,2	1,97
37,3	8,11	1,95	59,7	13,0	2,46	14,9	5,58	1,23	145,7	2,72	74,6	1,95
41,6	9,10	1,95	65,7	14,3	2,45	17,5	6,41	1,26	164,8	2,74	83,2	1,95
45,7	10,07	1,95	71,5	15,5	2,43	19,9	7,18	1,28	184,1	2,76	91,4	1,95
42,3	8,42	2,12	67,3	13,6	2,68	17,3	6,18	1,36	158,2	2,90	84,6	2,12
47,9	9,60	2,12	75,5	15,2	2,66	20,3	7,12	1,38	181,7	2,92	95,8	2,12
52,8	10,7	2,11	83,3	16,8	2,65	22,3	7,99	1,37	205,4	2,94	105,6	2,11
56,9	11,6	2,09	90,7	18,3	2,63	23,1	7,78	1,33	229,2	2,96	113,8	2,09
58,9	11,0	2,27	93,3	17,6	2,85	24,5	8,14	1,46	221,8	3,11	117,8	2,27
65,2	12,2	2,26	103,2	19,5	2,84	27,2	8,86	1,46	250,9	3,13	130,4	2,26

Liczba kątówki	Wymiary w mm				Prze- krój <i>F</i> <i>cm</i> ²	Cieżar <i>g</i> <i>kg/m</i>	Położenie osi głównych i środka ciężkości			Moment bez- władności ze względem na podstawę <i>I_{ab}</i> <i>cm</i> ⁴
	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>r</i> ₁	<i>r</i>			<i>w</i>	<i>e</i>	<i>v</i>	
7½	75	10	10,0	5,0	14,11	11,08	5,30	3,13	5,29	140,1
	75	11	10,0	5,0	15,40	12,09	5,30	3,18	5,24	154,9
	75	12	10,0	5,0	16,67	13,09	5,30	3,24	5,21	169,9
8	80	8	10,0	5,0	12,27	9,63	5,66	3,18	5,75	134,6
	80	9	10,0	5,0	13,70	10,75	5,66	3,24	5,71	152,2
	80	10	10,0	5,0	15,11	11,86	5,66	3,31	5,66	169,9
	80	11	10,0	5,0	16,50	12,95	5,66	3,35	5,63	187,8
	80	12	10,0	5,0	17,87	14,03	5,66	3,41	5,59	205,9
9	90	9	11,5	5,5	15,52	12,18	6,36	3,59	6,46	215,9
	90	10	11,5	5,5	17,13	13,45	6,36	3,65	6,42	240,9
	90	11	11,5	5,5	18,72	14,70	6,36	3,70	6,38	266,1
	90	12	11,5	5,5	20,29	15,93	6,36	3,76	6,34	291,4
	90	13	11,5	5,5	21,84	17,14	6,36	3,80	6,31	316,9
10	100	10	12,0	6,0	19,16	15,04	7,07	3,99	7,18	327,0
	100	11	12,0	6,0	20,95	16,45	7,07	4,04	7,14	361,3
	100	12	12,0	6,0	22,72	17,84	7,07	4,10	7,10	395,8
	100	13	12,0	6,0	24,47	19,21	7,07	4,17	7,05	430,5
	100	14	12,0	6,0	26,40	20,72	7,07	4,20	7,03	465,3
12	120	11	13,0	6,5	25,37	19,92	8,49	4,74	8,64	626,3
	120	12	13,0	6,5	27,54	21,62	8,49	4,79	8,61	684,3
	120	13	13,0	6,5	29,69	23,31	8,49	4,86	8,56	744,7
	120	14	13,0	6,5	31,82	24,98	8,49	4,90	8,53	804,2
	120	15	13,0	6,5	33,93	26,64	8,49	4,96	8,49	864,0
14	140	13	14,5	7,2	34,93	27,39	9,90	5,57	10,06	1178
	140	14	14,5	7,2	37,46	29,41	9,90	5,61	10,03	1272
	140	15	14,5	7,2	39,97	31,38	9,90	5,66	10,00	1366
	140	16	14,5	7,2	42,46	33,33	9,90	5,73	9,95	1460
16	160	15	16,5	8,2	46,04	36,14	11,31	6,35	11,51	2030
	160	16	16,5	8,2	48,93	38,44	11,31	6,41	11,47	2170
	160	17	16,5	8,2	51,80	40,66	11,31	6,48	11,42	2310
	160	18	16,5	8,2	54,65	42,90	11,31	6,52	11,39	2451

Ze względu na oś <i>X₁X₁</i>			Ze względu na oś główną <i>XX</i>			Ze względu na oś główną <i>YY</i>			Dwie znitowane <i>x</i>  <i>x</i> kątówki			
moment			moment			moment			ze względu na oś <i>AB</i>		ze względu na oś <i>XX</i>	
bezwład- ności <i>I_{x1}</i>	oporu <i>I_{x1}:v</i>	promień bez- władności <i>a₀</i>	bezwład- ności <i>I_x</i>	oporu <i>I_x:w</i>	promień bez- władności <i>a</i>	bezwład- ności <i>I_y</i>	oporu <i>I_y:e</i>	promień bez- władności <i>a₁</i>	moment	pro- mień	moment	pro- mień
<i>cm</i> ⁴	<i>cm</i> ³	<i>cm</i>	<i>cm</i> ⁴	<i>cm</i> ³	<i>cm</i>	<i>cm</i> ⁴	<i>cm</i> ³	<i>cm</i>	<i>2 I_{ab}</i>	<i>a_{ab}</i>	<i>2 I_{xx}</i>	<i>a_{xx}</i>
71,8	13,6	2,26	112,5	21,2	2,82	31,1	9,94	1,48	280,3	3,15	143,6	2,26
76,9	14,7	2,23	121,7	22,9	2,81	32,1	10,1	1,44	309,8	3,17	153,8	2,23
82,5	15,8	2,22	130,3	24,6	2,80	34,7	10,7	1,44	339,8	3,19	165,0	2,22
72,5	12,6	2,43	114,6	20,2	3,06	30,4	9,56	1,57	269,2	3,31	145,0	2,43
80,4	14,1	2,42	126,9	22,4	3,04	33,9	10,5	1,57	304,5	3,33	160,8	2,42
87,2	15,4	2,40	138,6	24,5	3,03	35,8	10,8	1,54	339,9	3,35	174,4	2,40
95,1	16,9	2,40	149,9	26,5	3,01	40,3	12,0	1,56	375,5	3,37	190,2	2,40
102,1	18,3	2,39	160,7	28,4	3,00	43,5	12,7	1,56	411,7	3,39	204,2	2,39
115,8	17,9	2,73	183,8	28,9	3,44	47,8	13,3	1,75	431,7	3,73	231,6	2,73
126,9	19,8	2,72	201,2	31,6	3,43	52,6	14,4	1,75	481,8	3,75	253,8	2,72
137,6	20,6	2,71	218,1	34,3	3,41	57,1	15,4	1,75	532,2	3,77	275,2	2,71
147,8	23,3	2,70	234,3	36,8	3,40	61,3	16,3	1,74	582,9	3,79	295,6	2,70
158,9	25,2	2,70	250,0	39,3	3,38	67,8	17,8	1,76	633,9	3,81	318,8	2,70
174,6	24,3	3,02	280,3	39,0	3,83	68,9	17,3	1,90	654,1	4,13	349,2	3,02
189,9	26,6	3,01	304,3	43,0	3,81	75,5	18,7	1,90	722,7	4,15	379,8	3,01
204,7	28,8	3,00	327,6	46,3	3,80	81,8	19,9	1,90	791,6	4,17	409,4	3,00
217,6	30,9	2,98	350,1	49,5	3,78	85,1	20,0	1,87	860,9	4,19	435,2	2,98
232,4	33,1	2,97	371,8	52,6	3,75	93,0	22,2	1,88	930,6	4,20	464,8	2,97
339,9	39,3	3,66	547,1	64,4	4,64	132,7	28,0	2,28	1253	4,97	679,8	3,66
367,8	42,7	3,65	589,7	69,5	4,63	145,9	30,5	2,30	1369	4,99	735,6	3,65
393,4	46,0	3,64	631,3	74,4	4,61	155,5	32,0	2,29	1489	5,01	786,8	3,64
421,1	49,4	3,64	671,6	79,1	4,59	170,6	34,8	2,32	1608	5,03	842,2	3,64
446,0	52,5	3,62	710,8	83,7	4,58	181,2	36,5	2,31	1728	5,05	892,0	3,62
636	63,2	4,27	1015	102,6	5,39	256	46,0	2,71	2356	5,81	1271	4,27
681	67,9	4,26	1083	109,4	5,38	280	49,9	2,74	2544	5,83	1363	4,26
726	72,6	4,26	1149	116,1	5,36	303	53,5	2,75	2732	5,85	1453	4,26
764	76,8	4,24	1214	122,6	5,35	314	54,8	2,72	2921	5,87	1528	4,24
1102	95,7	4,89	1747	154,3	6,15	457	72,0	3,15	4060	6,64	2203	4,89
1166	101,6	4,88	1848	163,4	6,14	484	75,5	3,15	4340	6,66	2332	4,88
1224	107,2	4,86	1947	172,2	6,13	501	77,3	3,11	4621	6,68	2448	4,86
1291	113,3	4,86	2044	180,7	6,12	538	82,5	3,14	4903	6,77	2582	4,86

B. Nierównoramienne (n. ungleich-
r = d,

Liczba przekroju	Wymiary w milimetrach					Powierzchnia przekroju F	Ciężar jednostkowy g	Odstęp środka ciężkości w cm		Położenie osi głównej YY	Odstępy od osi głównych cm w centymetrach			
	b	b_1	d	r	r_1			cm^2	kg/m		e	e_1	$st \alpha$	w
5 7½	50	75	7	7,5	3,7	8,32	6,53	2,47	1,24	0,430	5,11	3,76	2,62	2,12
	50	75	8	7,5	3,7	9,42	7,39	2,52	1,29	0,428	5,08	3,78	2,60	2,18
6 9	60	90	8	9,0	4,5	11,45	9,00	2,96	1,50	0,431	6,14	4,51	3,13	2,55
	60	90	9	9,0	4,5	12,78	10,03	3,00	1,52	0,430	6,11	4,53	3,12	2,58
	60	90	10	9,0	4,5	14,09	11,06	3,04	1,55	0,428	6,09	4,54	3,12	2,62
7 10½	70	105	9	10,0	5,0	15,05	11,81	3,44	1,71	0,436	7,16	5,27	3,66	2,94
	70	105	10	10,0	5,0	16,61	13,04	3,48	1,75	0,433	7,14	5,28	3,66	2,99
	70	105	11	10,0	5,0	18,15	14,25	3,59	1,79	0,430	7,12	5,29	3,65	3,04
8 12	80	120	10	11,0	5,5	19,13	15,02	3,92	1,95	0,435	8,19	6,01	4,24	3,35
	80	120	11	11,0	5,5	20,92	16,42	3,96	1,99	0,432	8,17	6,02	4,23	3,40
	80	120	12	11,0	5,5	22,69	17,81	4,00	2,02	0,430	8,15	6,03	4,21	3,44
9 13½	90	135	11	12,0	6,0	23,70	18,60	4,40	2,18	0,435	9,21	6,76	4,77	3,75
	90	135	12	12,0	6,0	25,72	20,19	4,44	2,22	0,433	9,20	6,77	4,77	3,80
	90	135	13	12,0	6,0	27,72	21,76	4,48	2,26	0,431	9,18	6,78	4,76	3,85
10 15	100	150	12	13,0	6,5	28,72	22,56	4,89	2,42	0,436	10,22	7,51	5,26	4,18
	100	150	13	13,0	6,5	30,99	24,33	4,93	2,46	0,435	10,21	7,53	5,27	4,22
	100	150	14	13,0	6,5	33,22	26,08	4,97	2,50	0,434	10,20	7,55	5,27	4,27
11 16½	110	165	13	14,0	7,0	34,27	26,90	5,38	2,66	0,437	11,25	8,26	5,81	4,59
	110	165	14	14,0	7,0	36,75	28,85	5,41	2,69	0,435	11,24	8,28	5,82	4,63
	110	165	15	14,0	7,0	39,21	30,79	5,45	2,73	0,433	11,23	8,29	5,82	4,68
6 8	60	80	7	8,0	4,0	9,38	7,36	2,51	1,53	0,545	5,55	4,34	2,92	2,55
	60	80	8	8,0	4,0	10,63	8,34	2,55	1,56	0,544	5,54	4,36	2,93	2,59
	60	80	9	8,0	4,0	11,86	9,31	2,59	1,60	0,542	5,52	4,38	2,93	2,64
8 10	80	100	8	10,0	5,0	13,87	10,88	3,03	2,04	0,626	6,99	5,72	3,69	3,34
	80	100	9	10,0	5,0	15,50	12,17	3,07	2,08	0,624	6,98	5,73	3,69	3,39
	80	100	10	10,0	5,0	17,11	13,43	3,11	2,12	0,622	6,97	5,74	3,69	3,44
	80	100	11	10,0	5,0	18,70	14,68	3,15	2,16	0,620	6,96	5,75	3,70	3,49
9 12	90	120	10	11,0	5,5	20,13	15,80	3,75	2,27	0,547	8,32	6,52	4,40	3,79
	90	120	11	11,0	5,5	22,02	17,29	3,79	2,31	0,545	8,31	6,53	4,40	3,84
	90	120	12	11,0	5,5	23,89	18,75	3,83	2,35	0,543	8,30	6,54	4,40	3,89
9 13	90	130	11	12,0	6,0	23,15	18,17	4,20	2,22	0,469	8,91	6,68	4,64	3,79
	90	130	12	12,0	6,0	25,11	19,71	4,24	2,26	0,467	8,89	6,69	4,64	3,84
	90	130	13	12,0	6,0	27,07	21,25	4,27	2,29	0,464	8,88	6,70	4,65	3,88
10 12	100	120	12	12,0	6,0	23,15	18,17	3,63	2,64	0,679	8,41	7,14	4,43	4,22
	100	120	13	12,0	6,0	25,11	19,71	3,67	2,68	0,677	8,40	7,15	4,44	4,28
	100	120	14	12,0	6,0	27,07	21,25	3,71	2,72	0,676	8,39	7,15	4,45	4,33
10 14	100	140	12	13,0	6,5	27,54	21,62	4,47	2,50	0,496	9,65	7,34	5,07	4,22
	100	140	13	13,0	6,5	29,69	23,31	4,51	2,54	0,495	9,63	7,36	5,07	4,25
	100	140	14	13,0	6,5	31,82	24,98	4,55	2,57	0,494	9,61	7,37	5,07	4,28

schenkelig) (rys. 140) (przekr. norm. austr.).
 $r_1 = \frac{1}{2} d$.

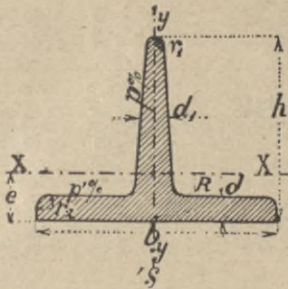
Moment bezwładności w cm^4 ze względu na krawędź zewn. krótkiego ramienia	Ze względu na oś								
	$X_1 X_1$		$Y_1 Y_1$		XX		YY		
	I'	a'	I_1'	a_1'	I	a	I_1	a_1	
	cm^4	cm	cm^4	cm	cm^4	cm	cm^4	cm	
97,4	29,3	46,6	2,37	16,5	1,41	53,4	2,53	9,7	1,08
111,7	33,9	51,9	2,35	18,2	1,39	59,5	2,51	10,6	1,06
192,0	57,6	91,7	2,83	31,9	1,67	105,3	3,03	18,3	1,28
216,7	65,4	101,7	2,82	35,7	1,68	116,7	3,02	20,7	1,27
241,4	73,4	111,2	2,81	39,5	1,67	127,5	3,01	23,2	1,27
343,1	102,9	165,0	3,32	58,9	1,98	189,9	3,55	34,0	1,50
382,3	115,2	181,1	3,31	64,3	1,97	208,0	3,54	37,4	1,50
421,6	127,7	196,7	3,29	69,5	1,96	225,6	3,53	40,6	1,50
569,5	170,6	275,5	3,80	97,9	2,26	317,0	4,07	56,8	1,72
627,9	138,9	299,8	3,79	106,1	2,25	344,2	4,05	61,7	1,72
686,4	207,4	323,4	3,78	114,8	2,25	368,0	4,03	67,5	1,72
892,2	267,2	433,4	4,28	154,6	2,55	498,4	4,58	89,6	1,94
975,3	293,1	468,4	4,26	166,3	2,54	538,0	4,57	96,7	1,94
1058,5	319,3	502,2	4,25	177,6	2,53	576,2	4,56	103,5	1,93
1335,7	399,9	648,5	4,75	231,5	2,84	747,0	5,10	134,0	2,16
1449,6	435,3	696,5	4,74	247,8	2,83	801,0	5,08	143,4	2,15
1563,7	471,1	743,2	4,73	263,5	2,82	854,0	5,07	153,0	2,15
1926,3	576,3	934,5	5,22	333,7	3,12	1076,3	5,60	191,9	2,37
2077,8	623,5	1002,1	5,22	357,4	3,12	1152,4	5,60	207,1	2,37
2229,7	671,1	1065,2	5,21	379,0	3,11	1223,8	5,59	220,3	2,37
118,0	50,1	58,9	2,51	28,2	1,73	71,9	2,77	15,2	1,27
135,3	57,7	66,2	2,50	31,9	1,73	80,8	2,76	17,3	1,27
152,8	65,4	73,2	2,48	35,0	1,72	89,2	2,74	19,1	1,27
262,8	134,9	135,5	3,13	77,2	2,36	172,9	3,53	39,7	1,69
296,6	152,8	150,6	3,12	85,6	2,35	192,0	3,52	44,2	1,69
330,7	170,6	165,2	3,11	93,8	2,34	210,4	3,51	48,6	1,68
364,7	188,7	179,2	3,10	101,4	2,33	227,9	3,49	52,7	1,68
569,9	241,9	286,9	3,78	138,2	2,62	350,4	4,17	74,7	1,93
628,5	267,0	312,3	3,77	149,9	2,61	380,9	4,16	81,3	1,92
687,3	293,1	336,8	3,75	161,2	2,60	410,4	4,14	87,6	1,91
796,7	267,0	388,3	4,10	152,9	2,57	454,6	4,43	86,6	1,92
871,0	292,8	419,5	4,09	164,5	2,56	491,0	4,42	93,5	1,93
945,5	319,0	452,0	4,09	177,2	2,56	527,4	4,41	101,8	1,94
627,1	364,4	322,0	3,73	203,0	2,96	423,6	4,28	101,4	2,09
685,9	399,2	347,7	3,72	218,9	2,95	456,8	4,27	109,8	2,09
744,9	434,3	372,4	3,71	234,0	2,94	488,8	4,25	117,6	2,08
1085,9	399,2	535,7	4,41	227,1	2,87	636,2	4,81	126,6	2,14
1178,7	434,5	574,8	4,40	243,0	2,86	681,2	4,79	136,0	2,14
1271,8	470,2	613,1	4,39	260,2	2,86	727,1	4,78	146,3	2,14

V. Zoresówki czyli złobkówki (n. *Belageisen*) (rys. 141), (przekr. norm. austr.) $r = g$.

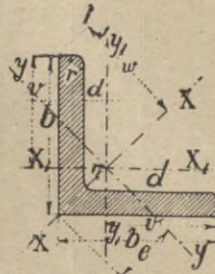
Liczba porządk.	Wymiary w milimetrach										Prze- krój F	Ciężar jed- nost- kowy g	Odstęp środka ciężkości od		Moment bezwład- ności ze względem na pod- stawę I_x	Ze względu na oś poziomą XX				Ze względu na oś pionową YY			
	pod- stawy		e	e_1	moment		pro- mien bezwł.		moment				bez- oporu wład.			pro- mien bezwł.							
	e	e_1			I/e	I/e_1	a	I'	I'/e_1	a'			I'	I'/e_1		a'							
	b'	d'	h	b	d	d_1	g	cm	cm^4	cm^3			cm	cm^4		cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm			
11	110	60	35	25	4	7,52	5,90	1,76	1,74	12,3	35,7	60,3	12,06	2,99									
16	160	100	55	30	4	10,84	8,51	2,66	2,84	45,5	122,2	233,6	29,20	4,64									
18	180	112	63	34	5	13,90	10,91	3,08	3,22	78,6	210,6	366,3	41,08	5,13									
21	210	135	75	37,5	4	19,32	15,17	3,70	3,80	152,0	416,2	722,6	68,82	6,11									
24	240	156	87	42	5,5	25,39	19,93	4,32	4,38	270,7	744,7	124,4	103,6	7,00									
26	260	170	95	45	6	30,20	23,71	4,74	4,76	382,8	1061,8	173,6	133,6	7,58									

VI. Ówierćkolówki (n. *Viertelkreiseisen, Quadranteisen*) (rys. 142), (przekr. norm. austr.).

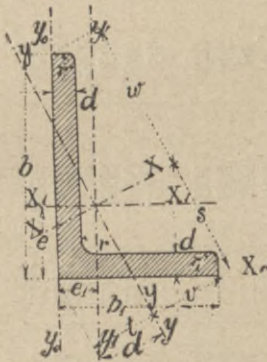
Liczba kształtów.	Wymiary w milimetrach										Cztery kształtówki													
	średnica średnia		średnica zewnętrzna		szerokość		grubość		Wy- sokość		Za- okrą- glenie		Moment bezwładno- ści ze wzgle- du na oś				Dwa przekroje zniętowane ze względu na XX				dla osi CC'			
	D	R	R'	d	b	h_1	h_2	r_1	r_2	r_3	I_x	I_y	I_x	I_y	I_x	I_y	I_x	I_y	I_x	I_y	I_x	I_y	I_x	I_y
	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4
10	100	52	48	39	6	87	64,5	3	6	7,34	5,76	3,44	5,26	56,5	112,9	21,5	2,74	572,7	65,8	4,42	572,7	88,8	4,42	
15	150	78	72	46	8	118	87,0	5	5	13,47	10,57	4,93	6,87	184,0	367,9	53,6	3,70	2046	173,4	6,09	2046	235,1	6,09	
20	200	104	96	53	10	149	109,9	6	11	21,57	16,98	6,46	8,45	359,9	719,7	108,9	4,62	5434	364,7	7,94	5434	494,3	7,94	
25	250	130	120	60	12	180	132,9	7	13	31,64	24,84	8,00	10,01	591,0	1182,0	142,1	5,54	11973	665,2	9,73	11973	901,1	9,73	
30	300	156	144	67	14	211	155,8	8	15	43,67	34,28	9,54	11,56	825,0	1650,0	215,1	6,46	23213	1100	11,5	23213	1490	11,5	



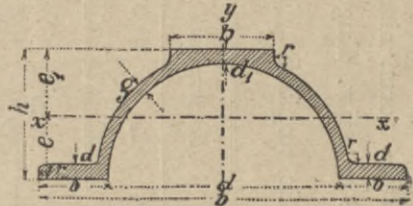
Rys. 138.



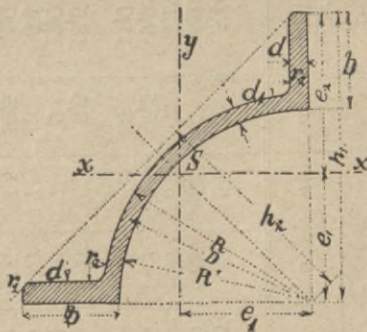
Rys. 139.



Rys. 140.



Rys. 141.



Rys. 142.

Podajemy tu także tablice dla kształtówek wedle norm niemieckich.

I a Kształtówki U (przekr. norm. niemieckie).

Długości normalne 4 do 8 m najw. długość 12 m.

$r = d_1$, $r_1 = \frac{d_1}{2}$ pochylenie stopki 8% (1:12,5).

Liczba	Wymiary w mm				F cm ²	G kg/m	Odstęp środką otętko- ści e mm	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
	h	b	d	d ₁				I _x cm ⁴	W _x cm ³	a cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	a ₁ cm
3	30	33	5	7	5,44	4,27	13,1	6,39	4,26	1,08	5,33	2,68	0,99
4	40	35	5	7	6,21	4,87	13,3	14,1	7,05	1,51	6,68	3,08	1,04
5	50	38	5	7	7,12	5,59	13,7	26,4	10,6	1,93	9,12	3,75	1,13
6 ^{1/2}	65	42	5,5	7,5	9,03	7,09	14,2	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25
8	80	45	6	8	11,0	8,64	14,5	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33
10	100	50	6	8,5	13,5	10,6	15,5	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47
12	120	55	7	9	17,0	13,35	16,0	364	60,7	4,63	43,2	11,1	1,59
14	140	60	7	10	20,4	16,01	17,5	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75
16	160	65	7,5	10,5	24,0	18,84	18,4	925	116	6,21	85,3	18,3	1,88
18	180	70	8	11	28,0	21,98	19,2	1354	150	6,95	114	22,4	2,02
20	200	75	8,5	11,5	32,2	25,28	20,1	1911	191	7,70	148	27,0	2,14
22	220	80	9	12,5	37,4	29,36	21,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,30
24	240	85	9,5	13	42,3	33,21	22,3	3598	300	9,22	248	39,6	2,42
26	260	90	10	14	48,3	37,92	23,6	4823	371	9,99	317	47,7	2,56
28	280	95	10	15	53,3	41,84	25,3	6276	448	10,84	399	57,2	2,74
30	300	100	10	16	58,8	46,16	27,0	8026	535	11,73	495	67,8	2,91

II a Kształtówki Z (przekr. norm. niemieckie).

Długość normalna 4 do 8 m, najw. długość 12 m

$$r = d, \quad r_1 = \frac{d}{2}.$$

Liczba	Wymiary w mm				F cm ²	G kg/m	Ze względu na oś			Położenie osi głównej st α	Ze względu na oś główną				
	h	b	d ₁	d			X'X'		Y'Y'		XX		YY		
							I _x	I _y	I _x		I _y	I	W	α	I ₁
					cm ⁴		cm ⁴		cm ⁴		cm ³		cm		
3	30	38	4	4,5	4,32	3,39	5,94	13,7	1,655	18,1	4,69	2,05	1,54	1,11	0,60
4	40	40	4,5	5	5,43	4,23	13,4	17,6	1,181	28,0	6,72	2,27	3,05	1,83	0,75
5	50	43	5	5,5	6,77	5,28	25,7	24,4	0,939	44,9	9,76	2,58	5,23	2,76	0,88
6	60	45	5	6	7,91	6,17	44,0	30,8	0,779	67,2	13,5	2,91	7,60	3,73	0,98
8	80	50	6	7	11,1	8,67	108	48,7	0,588	142	24,4	3,58	14,7	6,44	1,15
10	100	55	6,5	8	14,5	11,3	220	74,5	0,492	270	39,8	4,31	24,6	9,26	1,30
12	120	60	7	9	18,2	14,2	400	108	0,433	470	60,6	5,08	37,7	12,5	1,44
14	140	65	8	10	22,9	17,4	671	154	0,385	768	88,0	5,79	56,4	16,6	1,57
16	160	70	8,5	11	27,5	21,5	1055	209	0,357	1184	121	6,56	79,5	21,4	1,70
18	180	75	9,5	12	33,3	26,0	1594	275	0,329	1759	164	7,27	110	27,0	1,82
20	200	80	10	13	38,7	30,2	2289	367	0,313	2509	213	8,05	147	33,4	9,95

III a Kształtówki T (przek. norm. niemieckie).

Długości normalne 4 do 8 m, najw. długości 12 m.

I. Przekroje normalne $h = \frac{b}{2}$, $R = d = d_1$, $r_2 = \frac{R}{2}$, $r_1 = \frac{R}{4}$

$$p = 4\text{‰}, p' = 2\text{‰}$$

II. Przekroje wysokościenne $h = b$, $R = d = d_1$, $r_2 = \frac{R}{2}$, $r_1 = \frac{R}{4}$

$$p = 2\text{‰}, p' = 2\text{‰}.$$

Liczba	Wymiary w mm			Przekrój F cm^2	Ciężar g kg/m	Odstęp środka ciężkości e cm	Ze względu na oś XX			Ze względu na oś YY		
	b	h	$d = d_1$				I cm^4	W cm^3	a cm	I_1 cm^4	W_1 cm^3	a_1 cm
I. Przekroje normalne.												
6/8	60	30	5,5	4,64	3,64	0,67	2,58	1,11	0,75	8,62	2,87	1,36
7/8 ^{1/2}	70	35	6	5,94	4,66	0,77	4,49	1,65	0,87	15,1	4,32	1,59
8/4	80	40	7	7,91	6,21	0,88	7,81	2,50	0,99	28,5	7,13	1,90
9/4 ^{1/2}	90	45	8	10,2	8,01	1,00	12,7	3,63	1,24	46,1	10,2	4,52
10/5	100	50	8,5	12,0	9,42	1,09	18,7	4,78	1,56	67,7	13,5	5,64
12/6	120	60	10	17,0	13,35	1,30	38,0	8,09	2,24	137	22,8	8,06
14/7	140	70	11,5	22,8	17,90	1,51	68,9	12,6	3,02	258	36,9	11,3
16/8	160	80	13	29,5	23,16	1,72	117	18,6	3,97	422	52,9	14,3
18/9	180	90	14,5	37,0	29,05	1,93	185	26,1	5,00	670	74,4	18,1
20/10	200	100	16	45,4	35,64	2,14	277	35,3	6,10	1000	100	22,0
II. Przekroje wysokościenne.												
2/2	20	20	3	1,12	0,88	0,58	0,38	0,27	0,34	0,20	0,20	0,18
2 ^{1/2} /2 ^{1/2}	25	25	3,5	1,64	1,29	0,73	0,87	0,49	0,53	0,43	0,34	0,26
3/3	30	30	4	2,26	1,77	0,85	1,72	0,80	0,76	0,87	0,58	0,38
3 ^{1/2} /3 ^{1/2}	35	35	4,5	2,97	2,33	0,99	3,10	1,23	1,04	1,57	0,90	0,53
4/4	40	40	5	3,77	2,96	1,12	5,28	1,84	1,40	2,58	1,29	0,68
4 ^{1/2} /4 ^{1/2}	45	45	5,5	4,67	3,67	1,26	8,13	2,51	1,78	4,01	1,78	0,86
5/5	50	50	6	5,66	4,44	1,39	12,1	3,36	2,14	6,06	2,42	1,07
6/6	60	60	7	7,94	6,23	1,66	23,8	5,48	3,00	12,2	4,07	1,54
7/7	70	70	8	10,6	8,32	1,94	44,5	8,79	4,20	22,1	6,32	2,08
8/8	80	80	9	13,6	10,68	2,22	73,7	12,8	5,42	37,0	9,25	2,72
9/9	90	90	10	17,1	13,42	2,48	119	18,2	6,96	58,5	13,0	3,42
10/10	100	100	11	20,9	16,41	2,74	179	24,6	8,57	88,3	17,7	4,23
12/12	120	120	13	29,6	23,24	3,28	366	42,0	12,36	178	29,7	6,01
14/14	140	140	15	39,9	31,32	3,80	660	64,7	16,54	330	47,2	8,27

IV a Kątówki (przekr. norm. niemieckie).

A. Równoramienne.

Długości normalne 4 do 8 m, najw. długość 12 m

$$r_1 = 0,5 \text{ (najw } d + \text{ najmn } d), r = \frac{1}{2} r_1, b - v = \frac{1}{4} b + 0,36 d.$$

Liczba	Wymiary w mm		F cm ²	g kg/m	b-v cm	I _{ab} cm ⁴	Z e w z g l ę d u n a o s ь						Dwie znit. kątówki						
	b	d					X ₁ X ₁		XX		YY		ze wzgl. na AB		ze wzgl. na X ₁ X ₁				
							I _{x₁}	W _{x₁}	a _{x₁}	I	W	a	I ₁	W ₁	a ₁	2 I _{ab} cm ⁴	a _{ab} cm	2 I _{xx} cm ⁴	a _{xx} cm
1 1/2	15	8	0,82	0,64	4,8	0,38	0,15	0,14	0,43	0,24	0,28	0,54	0,06	0,08	0,27	0,66	0,63	0,30	0,43
		4	1,05	0,82	5,1	0,46	0,18	0,18	0,41	0,29	0,28	0,53	0,08	0,10	0,28	0,92	0,66	0,36	0,41
2	20	8	1,12	0,88	6,0	0,78	0,38	0,27	0,58	0,62	0,44	0,74	0,15	0,17	0,36	1,56	0,88	0,76	0,58
		4	1,45	1,14	6,4	1,07	0,48	0,35	0,58	0,77	0,55	0,73	0,19	0,21	0,36	2,14	0,86	0,96	0,58
2 1/2	25	8	1,42	1,12	7,3	1,58	0,79	0,44	0,75	1,27	0,72	0,95	0,31	0,30	0,47	3,06	1,04	1,58	0,75
		4	1,85	1,45	7,6	2,08	1,00	0,57	0,70	1,61	0,91	0,93	0,40	0,37	0,46	4,16	1,06	2,00	0,70
3	30	4	2,27	1,78	8,9	3,5	1,80	0,85	0,89	2,85	1,35	1,12	0,76	0,61	0,58	7,00	1,24	3,60	0,89
		6	3,27	2,57	9,6	5,5	2,48	1,20	0,87	3,91	1,84	1,09	1,06	0,78	0,57	11,0	1,30	4,96	0,87
3 1/2	35	4	2,67	2,10	10,0	5,6	2,96	1,18	1,19	4,68	1,90	1,49	1,24	0,88	0,77	11,2	1,63	5,92	1,19
		6	3,87	3,04	10,8	8,6	4,13	1,70	1,17	6,50	2,63	1,46	1,77	1,15	0,76	17,2	1,68	8,26	1,17
4	40	4	3,08	2,42	11,2	8,3	4,47	1,55	1,20	7,09	2,50	1,52	1,86	1,17	0,78	16,6	1,64	8,94	1,20
		6	4,48	3,52	12,0	12,8	6,35	2,26	1,90	9,98	3,52	1,49	2,67	1,57	0,77	25,6	1,69	12,70	1,19
		8	5,80	4,55	12,8	17,4	7,90	2,90	1,17	12,4	4,88	1,46	3,38	1,81	0,76	34,8	1,73	15,8	1,17

Liczba	Wymiary w mm		F' cm ²	g kg/m	b-v cm	I _{ob} cm ⁴	Ze względu na oś				Dwie znit. kątowniki				
	b	d					X ₁ X ₂		YY		ze wzgl. na AB		ze wzgl. na X ₁ X ₂		
							I _{x1}	W _{x1}	α _{x1}	I ₁	W ₁	α ₁	2 I _{ob} cm ⁴	α _{ob} cm	2 I _{xx} cm ⁴
4 1/2	5	4,80	3,88	12,8	14,9	7,85	2,43	1,35	3,25	1,80	0,80	29,9	1,87	15,7	1,35
	7	5,86	4,60	13,6	21,2	10,4	3,31	1,34	4,39	2,28	0,88	42,5	1,91	20,9	1,34
	9	7,34	5,76	14,4	27,8	12,6	4,12	1,31	5,40	2,65	0,86	55,6	1,95	25,2	1,31
5	5	4,80	3,77	14,0	20,4	11,0	3,05	1,58	4,59	2,32	0,98	40,9	2,07	22,1	1,58
	7	6,56	5,15	14,9	29,0	14,5	4,15	1,50	6,02	2,85	0,96	58,1	2,11	29,0	1,50
	9	8,24	6,47	15,6	38,0	17,9	5,19	1,44	7,67	3,47	0,97	76,0	2,14	35,8	1,44
5 1/2	6	6,31	4,95	15,6	32,8	17,3	4,39	1,66	7,24	3,27	1,07	65,7	2,29	34,7	1,66
	8	8,23	6,46	16,4	44,2	22,1	5,7	1,64	9,35	4,08	1,05	88,5	2,33	44,3	1,64
	10	10,07	7,90	17,2	56,0	26,3	6,9	1,62	11,27	4,64	1,06	112,0	2,37	52,6	1,62
6	6	6,91	5,42	16,9	42,5	22,7	5,3	1,82	9,43	3,95	1,18	85,1	2,48	45,5	1,82
	8	9,03	7,09	17,7	57,5	29,2	6,9	1,80	12,1	4,85	1,17	115,1	2,53	58,5	1,80
	10	11,07	8,69	18,5	72,8	34,8	8,4	1,77	14,6	5,58	1,20	145,6	2,56	69,8	1,77
6 1/2	7	8,7	6,83	18,5	63	33,4	7,2	1,97	13,8	5,25	1,27	126	2,70	66,9	1,97
	9	11,0	8,62	19,3	82	41,3	9,0	1,95	17,2	6,31	1,26	164	2,74	82,7	1,95
	11	13,2	10,34	20,0	101	48,7	10,8	1,91	20,7	7,30	1,25	202	2,77	97,4	1,91
7	7	9,4	7,38	19,7	79	42,3	8,4	2,12	17,6	6,29	1,36	158	2,90	84,6	2,12
	9	11,9	9,34	20,5	102	52,5	10,6	2,11	22,0	7,57	1,37	205	2,94	105	2,11
	11	14,3	11,23	21,3	126	62,0	12,7	2,08	26,0	8,65	1,35	256	2,99	124	2,08
7 1/2	8	11,5	9,03	21,3	111	59,0	10,9	2,27	24,4	8,11	1,46	222	3,11	118	2,27
	10	14,1	11,07	22,1	140	71,0	13,4	2,26	29,8	9,54	1,48	280	3,15	143	2,26
	12	16,9	13,11	22,9	170	82,5	15,8	2,22	34,7	10,71	1,44	340	3,19	165	2,22

8	8	12,3	9,66	22,6	135	72,0	12,5	2,43	29,6	9,25	1,57	270	3,31	145	2,43
	10	15,1	11,86	23,4	170	87,5	15,4	2,40	35,9	10,8	1,54	340	3,35	175	2,40
	12	17,9	14,05	24,1	206	102	18,2	2,39	43,0	12,6	1,56	412	3,39	204	2,39
9	9	15,5	12,17	25,4	216	116	17,9	2,73	47,8	13,3	1,75	482	3,73	232	2,73
	11	18,7	14,68	26,2	266	138	21,5	2,71	57,1	15,4	1,75	532	3,77	275	2,71
	13	21,8	17,11	27,0	317	158	25,0	2,70	65,9	17,3	1,76	634	3,81	317	2,70
10	10	19,2	15,07	28,2	329	177	24,6	3,02	73,3	18,4	1,90	658	4,13	354	3,02
	12	22,7	17,82	29,0	398	207	29,1	3,00	86,2	21,0	1,90	796	4,17	414	3,00
	14	26,2	20,57	29,8	468	235	33,5	2,97	98,3	23,4	1,88	986	4,20	470	2,97
11	10	21,2	16,64	30,7	438	239	30,1	3,36	98,6	22,7	2,16	876	4,54	478	3,36
	12	25,1	19,70	31,5	529	280	35,7	3,34	116	26,1	2,15	1068	4,59	560	3,34
	14	29,0	22,75	32,1	621	319	40,9	3,32	133	29,2	2,14	1242	4,63	638	3,32
12	11	25,4	19,94	33,6	626	340	39,4	3,66	140	29,4	2,28	1252	4,97	680	3,66
	13	29,7	23,31	34,4	745	393	46,0	3,64	162	33,4	2,29	1490	5,01	787	3,64
	15	33,9	26,61	35,1	864	445	52,5	3,62	186	37,5	2,31	1728	5,05	891	3,62
13	12	30,0	23,55	36,4	869	472	50,5	3,97	194	37,8	2,54	1738	5,38	944	3,97
	14	34,7	27,24	37,2	1020	540	58,0	3,95	223	42,4	2,54	2010	5,41	1080	3,95
	16	39,3	30,85	38,0	1171	604	65,5	3,92	251	46,7	2,53	2342	5,46	1208	3,92
14	13	35,0	27,48	39,2	1175	638	63,5	4,27	262	47,3	2,71	2350	5,81	1276	4,27
	15	40,0	31,40	40,0	1363	723	72,5	4,26	298	52,6	2,75	2726	5,85	1446	4,26
	17	45,0	35,33	40,8	1554	805	81,0	4,23	334	58,0	2,72	3108	5,88	1610	4,23
15	14	40,3	31,64	42	1556	845	78,5	4,58	347	58,3	2,93	3112	6,22	1690	4,58
	16	45,7	35,87	43	1790	949	88,5	4,56	391	64,4	2,92	3580	6,26	1898	4,56
	18	51,0	40,04	44	2039	1052	99,0	4,52	438	71,1	2,93	4078	6,30	2104	4,52
16	15	46,1	36,19	45	2027	1099	95,5	4,89	453	71,3	3,15	4154	6,64	2198	4,89
	17	51,8	40,66	46	2308	1225	107	4,86	506	78,4	3,11	4616	6,68	2450	4,86
	19	57,5	45,14	46	2590	1348	118,5	4,84	558	84,8	3,11	5180	6,71	2696	4,84

B. Nierównoramienne.

Długości normalne 4 do 8 *m*, najw. długość 12 *m*.

$$r = 0,5 \text{ (najw. } d + \text{ najmn. } d), r_1 = \frac{1}{2} r.$$

Liczba przekr.	Wymiary w mm		<i>F</i> cm ²	<i>g</i> kg/m	Odstęp środką ciężkości		Polożenie osi YY <i>st α</i>	Ze względu na oś								
	<i>b</i>	<i>b</i> ₁			<i>d</i>	X ₁ X ₁		Y ₁ Y ₁		XX		YY				
						<i>I'</i>		<i>a'</i>	<i>I'</i> ₁	<i>a'</i> ₁	<i>I</i> _x	<i>a</i> _x	<i>I</i> _y	<i>a</i> _y		
2/3	20	30	3	1,42	1,11	9,9	4,9	0,422	1,25	0,94	0,45	0,56	1,42	1,00	0,28	0,44
			4	1,85	1,45	10,3	5,4	0,421	1,60	0,93	0,55	0,55	1,82	0,99	0,33	0,42
3/4 1/2	30	45	4	2,87	2,25	14,8	7,4	0,433	5,77	1,42	2,05	1,68	6,63	1,52	1,19	0,64
			5	3,53	2,77	15,2	7,8	0,429	6,99	1,41	2,46	1,14	8,01	1,51	1,44	0,64
4/6	40	60	5	4,79	3,76	19,5	9,7	0,432	17,3	1,90	6,20	1,14	19,8	2,03	3,66	0,88
			7	6,55	5,14	20,4	10,5	0,428	22,8	1,87	7,99	1,11	26,3	2,00	4,63	0,84
5/7 1/2	50	75	7	8,33	6,54	24,7	12,4	0,430	46,3	2,37	16,4	1,41	53,1	2,53	9,58	1,08
			9	10,5	8,24	25,6	13,2	0,427	57,2	2,33	20,1	1,41	65,4	2,50	11,9	1,06
6 1/2 / 10	65	100	9	14,2	11,15	33,1	15,9	0,410	140	3,14	46,6	1,81	160	3,36	26,8	1,37
			14	17,1	13,42	34,0	16,7	0,407	167	3,12	55,3	1,80	189	3,32	32,9	1,37

Stosunek ramion 2:3

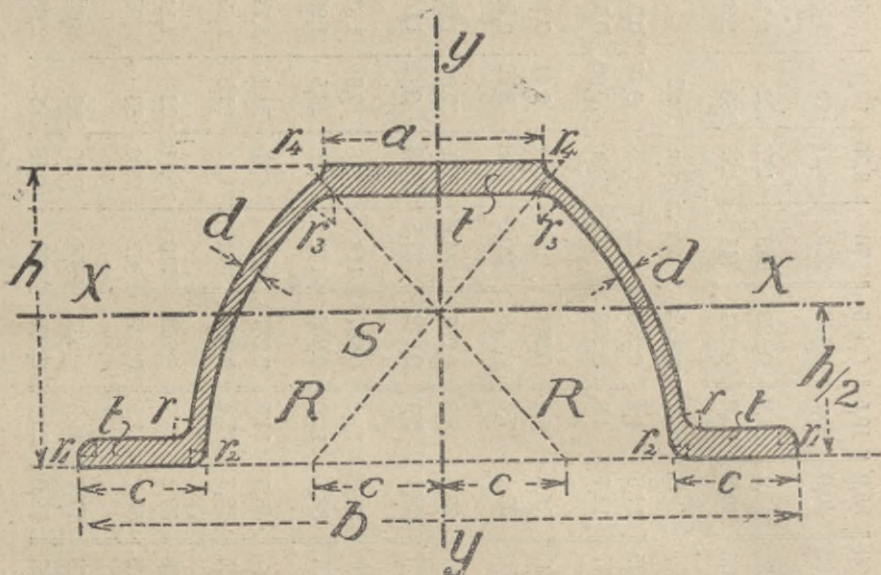
8/12	80	120	10	19,1	14,99	39,2	19,5	0,435	276	3,80	97,9	2,26	317	4,07	56,8	1,72
			12	22,7	17,82	40,0	20,2	0,430	323	3,78	115	2,25	370	4,03	67,5	1,72
10/15	100	150	12	28,7	22,53	48,9	24,2	0,436	649	4,75	232	2,84	747	5,10	134	2,16
			14	33,2	26,06	49,7	25,0	0,434	744	4,73	263	2,82	854	5,07	153	2,15
Stosunek ramion 1:2																
2/4	20	40	3	1,72	1,35	14,3	4,4	0,258	2,81	1,28	0,46	0,58	2,96	1,31	0,31	0,42
			4	2,25	1,77	14,7	4,8	0,253	3,58	1,26	0,60	0,52	3,78	1,30	0,40	0,42
3/6	30	60	5	4,29	3,37	21,5	6,8	0,254	15,6	1,91	2,61	0,78	16,5	1,96	1,71	0,63
			7	5,85	4,59	22,4	7,6	0,248	20,6	1,88	3,42	0,76	21,8	1,93	2,28	0,62
4/8	40	80	6	6,89	5,41	28,5	8,8	0,257	44,9	2,55	7,66	1,05	47,6	2,63	4,99	0,85
			8	9,01	7,07	29,4	9,6	0,252	57,5	2,53	9,62	1,04	60,8	2,60	6,41	0,84
5/10	50	100	8	11,5	9,03	35,9	11,2	0,267	116	3,18	19,6	1,31	123	3,27	12,8	1,04
			10	14,1	11,07	36,7	12,0	0,266	141	3,16	23,5	1,29	150	3,27	14,6	1,02
6 1/2 / 13	65	130	10	18,6	14,6	46,5	14,5	0,257	320	4,15	54,4	1,71	339	4,27	35,4	1,35
			12	22,1	17,35	47,5	15,3	0,255	374	4,11	62,8	1,69	395	4,23	41,3	1,37
8/16	80	160	12	27,5	21,59	57,2	17,7	0,269	719	5,11	122	2,11	762	5,26	79,4	1,70
			14	31,8	24,96	58,1	18,5	0,268	822	5,08	139	2,09	875	5,25	86,0	1,64
10/20	100	200	14	40,3	31,64	71,2	21,8	0,261	1654	6,40	282	2,65	1754	6,60	182	2,13
			16	45,7	35,87	72,0	22,6	0,259	1863	6,38	315	2,63	1973	6,57	205	2,12

Va Zoresówki (przechr. nor. niemieckie), (rys. 143).

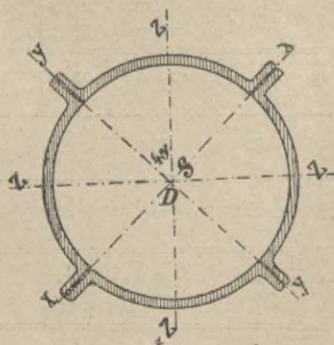
Długości normalne 4–8 m, najw. długość 12 m.

$$r_1 = d, r_2 = d - 0,5, r_3 = t, r_4 = 0,6 d + 1,3.$$

Liczba przekroju	Wymiary w mm						F cm ²	g kg/m	L _c cm ⁴	W _x cm ³	I _y cm ⁴	W _y cm ³
	h	b	a	c	d	t						
5	50	120	33	21	3	5	6,74	5,29	23,3	9,27	86,4	14,4
6	60	140	38	24	3,5	6	9,34	7,32	47,3	15,6	164	23,4
7½	70	170	45,5	28,5	4	7	13,2	10,36	107	28,1	347	40,8
9	90	200	53	33	4,5	8	17,9	14,05	207	46,1	651	65,1
11	110	240	63	39	5	9	24,1	19,00	420	75,9	1272	106



Rys. 143.



Rys. 144.

VI. Ówierkołowki (przechr. nor. niemieckie), (rys. 144).
 Długości normalne 4 do 8 m, najw. długość 12 m.
 $r_1 = 0,03 D$, $r_2 = 0,06 D$.

Liczba przekroju	Wymiary w mm				Dla 4 ówierkołówek, więc pełnej rury				
	D średnica rury	b	d_1	d	F cm^2	g kg/m	I cm^4	$W_x = W_y$ cm^3	W_2 cm^3
5	100	35	4	6	29,8	23,39	576	66,2	89,3
			8	8	48,0	37,68	906	102	135
7 $\frac{1}{2}$	150	40	6	8	54,9	43,10	2068	175	237
			10	10	80,2	62,96	2982	248	331
10	200	45	8	10	88,1	69,16	5511	370	501
			12	12	120	94,20	7478	495	663
12 $\frac{1}{2}$	250	50	10	12	129	101,27	12161	676	917
			14	14	169	132,67	15788	867	1157
15	300	35	12	14	179	140,52	23637	1120	1515
			18	17	249	195,47	32738	1530	2051

§. 56. Dźwigary blaszane.

Dla większych rozpiętości lub ciężarów, gdy największe kształtówki I nie wystarczają, używamy dźwigarów blaszanych (n. *Blechträger*, fr. *poutre en tôle*, an. *wrought-iron girder*, cz. *nosnik plechowy*).

Belka blaszana (rys. 145) składa się ze ścianki A (n. *Blechwand*, *Stehblech*, fr. *âme*, a. *web*, cz. *stoina*), czterech kątovek B i nakładek C (n. *Lamelle*, *Deckplatte*, fr. *plate-bande*, a. *flange-plate*, cz. *pásnica*, r. *накладка*). Zwykle przyjmujemy wymiary ścianki, kątovek i szerokości b nakładek, a obliczamy grubość ich d . Grubość ścianki przyjmujemy zwykle w budownictwie 7 do 8 mm, przy mostach większą, a mianowicie w przybliżeniu

$$g = 8,5 + 0,15 l \text{ mm} \quad . \quad . \quad 206)$$

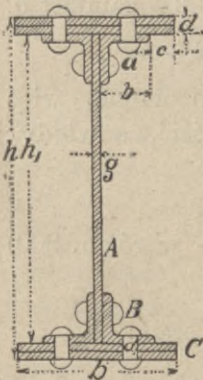
jeżeli l oznacza rozpiętość w m. Szerokość kątovek możemy przyjąć w budownictwie według wzoru

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 0,21 + 5 \text{ cm} \\ a \text{ nakładki} &= 0,41 + 16 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 207)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{przy mostach zaś} & b_2 = 0,41 + 6 \text{ cm} \\ \text{a nakładki} & b = 0,81 + 18 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 208)$$

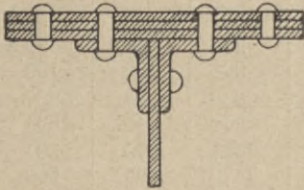
jeżeli l oznacza rozpiętość w m.

Wysokość belek h obieramy zwykle w budownictwie równą $\frac{1}{12}$ do $\frac{1}{16}$ rozpiętości, w budowie mostów $\frac{1}{8}$ do $\frac{1}{12}$ rozpiętości.



Rys. 145.

Wzory te podaliśmy tylko jako wskazówkę, jakie mniej więcej mamy obierać wymiary ścianki, kątownek i szerokości nakładek, ale ściśle trzymać się ich nie potrzebujemy, bo jeśli przyjmujemy mniejsze wymiary kątownek lub węższe nakładki, to za to wypadną nam nakładki grubsze i na odwrót. Wszystkie



Rys. 146.

te części składowe belki łączymy nitami w jedną całość, przyczem różniamy nity poziome i pionowe. Ostatnie urządzamy w dwu rzędach. Jeżeli nakładki wystają o długość $e \geq 6,5 \text{ cm}$, (rys. 145) wtedy musimy połączyć nakładki jeszcze dwoma rzędami nitów skrajnych (n. *Randnieten*), (rys. 146).

Średnicę nitów przyjmujemy zwykle 16 18 20 do 24 mm dla szerokości kątownek do 60 70 80 i wyżej mm.

§. 57. Obliczenie przekroju belki blaszanej.

Belki blaszane obliczamy także według rów. $\tau I = Me$. Moment bezwładności I rozłożymy tu na dwie części tak, że

$$I = I_1 + I_2, \dots \dots \dots 209)$$

przyczem I_1 jest momentem bezwładności kątownek i ścianki, który zaraz możemy obliczyć z danych wymiarów, zaś I_2 momentem bezwładności nakładek. Z poprzedniego widzimy, że

$$(rys. 145) \quad I_2 = \frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3) \dots \dots \dots 210)$$

Z rysunku zaś widzimy, że $h = h_1 + 2d$. Wstawmy tę wartość i po odcignięciu dziur na nity pionowe $b' = b - 2d$ zamiast b , a otrzymamy $I_2 = \frac{1}{12} b' (h_1^3 - 6h_1^2 d + 12d^2 h_1 + 8d^3 - h_1^3)$.

Ponieważ d w stosunku do h_1 jest bardzo małym, więc możemy wyraz $8d^3$ wobec wyrazu $6h_1^2 d$ opuścić, a wtedy:

$$I_2 = \frac{b' h_1 d}{2} (h_1 + 2d).$$

Wstawmy tę wartość za I_2 i $e = \frac{h_1 + 2d}{2}$ w równ. 209) i 143), a otrzymamy:

$$\tau I_1 + \frac{b' h_1 d \tau}{2} (h_1 + 2d) = M \frac{1}{2} (h_1 + 2d), \text{ a stąd:}$$

$$d = \frac{M}{b' h_1 \tau} - \frac{2 I_1}{b' h_1 (h_1 + 2d)} \dots \dots \dots 211)$$

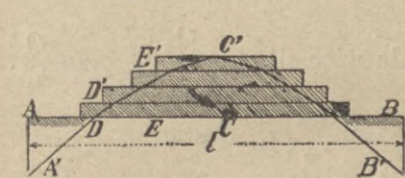
W drugim wyrazie tego równania po prawej stronie widzimy jednak w mianowniku ilość d , której nie znamy. Musimy więc obliczyć d naprzód w przybliżeniu, wstawivszy w równ. 211) $d=0$. Tak otrzymamy przybliżoną wartość dla d

$$d = \frac{M}{b' h_1 \tau} - \frac{2I}{b' h_1^2}, \dots \dots \dots 212)$$

Wartość tę wstawiamy w równ. 211) po prawej stronie i otrzymujemy dokładną wartość d .

W równania te wchodzi M , które się zmienia według położenia przekroju. Dlatego obliczamy naprzód przekrój dla którego M jest największe, n. p. w belce, w dwu punktach podpartej, jednostajnie obciążonej, dla $x = \frac{l}{2}$. Grubość d rozdzielamy w danym razie na kilka nakładek, przyjmując grubość pojedynczej nakładki 8 do 15 mm.

Potem obliczamy dla innych punktów belki odnośne d według tych samych równań, wstawiając tylko odnośne wartości za M . Długość nakładek wyznaczamy najlepiej wykreślnie (rys. 147). Obliczmy grubość nakładki d w środku belki i zróbmy $d = CC'$. Dla punktów A i B jest $M=0$, więc z równ. 211) wynika, że grubość d będzie tu ujemną, równą $AA' = BB'$. Wykreśliwszy odnośne grubości także w kilku punktach pośrednich



Rys. 147.

D i E , łączymy punkty $A'D'$, $E'E'$... linią krzywą, lub, jeśli punkty te są dość bliskie, prostymi, a powierzchnia między tą linią a osią AB przedstawia teoretyczną grubość nakładki. CC' dzielimy na odpowiednią ilość nakładek i kreślimy poziome, których przecięcia się z linią $A'C'B'$ wyznaczają końce nakładek. W rysunku 147. widzimy w środku belki cztery nakładki potem trzy, dwie, jedną, a nareszcie widzimy, że niedaleko podpór nie potrzeba wcale nakładek. Ze względów ustrojowych przedłużamy nieco nakładki poza linią $A'D'E'C'$, jak na rysunku uwidoczniiono.

Przy obliczeniu momentu bezwładności I_1 trzeba ewentualnie uwzględnić osłabienie przekroju przez nitowanie. Ścianka osłabia się wskutek spajania przykładkami, gdy bowiem dłu-

gość jednej blachy nie wystarcza, musimy dwie lub więcej blach spajać.

Jeśli przy spajaniu uwzględnimy nity (ϕd_1) w odległości pionowej a i nazwiemy $v = \frac{a-d_1}{a}$, to osłabienie ścianki uwzględnimy biorąc w rachunek zamiast grubości ścianki g grubość vg . W przybliżeniu możemy przyjąć $v = 0,77$, więc przyjmujemy zamiast g tylko $0,77g$ do $0,8g$. Przykładki dajemy zawsze z obu stron ścianki, grubość ich mogłaby być połową grubości ścianki, nie używamy jednak cieńszych przykładek niż 6 mm .

Co do obliczenia odległości nitów w przykładce, to dla przekrojów niedaleko podpór, gdzie siła poprzeczna Q jest wielka, możemy ją obliczać w następujący sposób. Siła poprzeczna, jak wiemy z §. 49., nie rozdziela się jednostajnie w przekroju, lecz jest w osi obojętnej największą, a mianowicie wynosi według 19) na jednostkę długości $\sigma = \frac{QS}{I}$, a więc na długości a , równej odstępowi nitów, działa $a \frac{QS}{I}$. Dla warstwy obojętnej możemy w przybliżeniu przyjąć:

$$S = \frac{A}{2} \cdot \frac{h_2}{2} \text{ zaś } I = 2 \frac{A}{2} \left(\frac{h_2}{2} \right)^2,$$

jeżeli $\frac{h_2}{2}$ oznacza odstęp środka ciężkości połowy przekroju od

osi obojętnej. Na długości a działa więc siła $a \frac{Q \frac{A}{2} \cdot \frac{h_2}{2}}{2 \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{h_2}{2} \right)^2} = a \frac{Q}{h_2}$.

Przyjmijmy $h_2 = 0,9h$, to $a \frac{Q}{0,9h} = 2 \frac{\pi d^2}{4} \tau_1$, a stąd

$$a = \frac{9 \pi d^2 h \tau_1}{20 Q} = 1,41 \frac{d^2 h \tau_1}{Q} \dots \dots \dots 213)$$

Równanie to jest ważnem wtedy, gdy po obu stronach szwu przytwierdzimy przykładki jednym rzędem nitów. Jeżeli, jak zwykle, znajduje się po dwa rzędy nitów, to

$$a = \frac{18 \pi d^2 h \tau_1}{20 Q} = 2,83 \frac{d^2 h \tau_1}{Q} \dots \dots \dots 214)$$

W pobliżu środka belki jest Q bardzo małe, a że tu moment wielki, więc obliczamy nity przykładek ze względu na moment.

Niechaj f oznacza odstęp skrajnych nitów a S siłę działającą we wszystkich nitach. Moment M da się rozdzielić na

M' , działający na ściankę i M'' na kątówki i nakładki. Jeżeli nazwiemy odnośne momenty bezwładności I' i I'' , to $M':M'' = =I':I''$ i $M+M''=M$, a stąd:

$$M' = \frac{MI'}{I'+I''} = \frac{MI'}{I}.$$

M' przenieść się musi przez nity, więc

$$M' = \frac{1}{2} S \times \frac{2}{3} f = \frac{Sf}{3}, \text{ więc } S = \frac{3M'}{f}.$$

Jeżeli siła działająca w nicie odległym, a od osi obojętnej jest P , to w drugim rzędzie będzie $2P$, w n -tym rzędzie nP , a więc gdy mamy dwa rzędy nitów po obu stronach zetknięcia będzie:

$\frac{1}{2}S = 2(P+2P+\dots P) = P(1+n)n$, zatem $P = \frac{S}{2n(1+n)}$, a więc siła w nicie najwyższego rzędu $nP = \frac{3M'}{2f(1+n)}$, a że z rysunku mamy $f = 2na$, więc

$$uP = \frac{3M'}{2f\left(1+\frac{f}{2a}\right)} = \frac{2d^2\pi}{4}\tau_1, \text{ a stąd:}$$

$$a = \frac{d^2\pi\tau_1 f^2}{6M' - 2\pi d^2\tau_1 f}$$

Ze względu na ciśnienie na ściankę dziury jest:

$$\frac{3M'}{2f\left(1+\frac{f}{2a}\right)} = dg\tau_2, \text{ a stąd:}$$

$$a = \frac{dg\tau_2 f^2}{3M' - 2dg\tau_2 f}$$

Z tych dwu równań przyjmujemy a mniejsze.

§. 58. Obliczenie grubości ścianki belki blaszanej.

Wiemy, że siła ścinająca w osi ciężkości jest największą, że tę więc wyznaczyć musimy dla obliczenia grubości ścianki belki blaszanej. Jeżeli siłę ścinającą poziomą nazwiemy σ , to wiemy, że według równ. 191) $\sigma = \frac{QS}{I}$.

Wyrazy S i I obliczamy w przybliżeniu, jak w poprzednim paragrafie; dla warstwy przez środek przechodzącej będzie więc

$$\sigma = \frac{Q \frac{F}{2} \cdot \frac{h_2}{2}}{2 \frac{F}{2} \left(\frac{h_2}{2}\right)^2}$$

A więc na jednostkę długości działa siła $\sigma = \frac{Q}{h_2}$ na ściankę, jeżeli zatem natężenie dopuszczalne na ścinanie blachy jest $\tau' = \frac{5}{8} \tau$, a powierzchnia ścięcia $1 \cdot g = g$ (rys. 145), to $g \frac{5}{8} \tau = \frac{Q}{h_2}$, a stąd $g = \frac{8}{5} \frac{Q}{\tau h_2}$.

W przybliżeniu przyjmiemy według Weyraucha, jak pierwiej, $h_2 = 0,9 h$, więc

$$g = \frac{10,8 Q}{9,5 \tau h} = \frac{16 Q}{9 \tau h} = 1,8 \frac{Q}{\tau h} \quad \dots \quad 215)$$

Wzór ten nie uwzględnia jednak natężeń ukośnych, które w belce blaszanej mogą być większe, niż $\sigma = \frac{Q}{h_2}$. Dla warstwy obojętnej jest wprawdzie $\nu = 0$, lecz w tem miejscu przekroju, gdzie przekrój się nagle rozszerza, t. j. w punkcie a , gdzie się znajdują poziome ramiona kątówek, natężenia ukośne mogą być, jak wiemy z §. 52, większe. Tu bowiem natężenie ścinające nie jest o wiele mniejsze, niż w środku, a i natężenie ν jest tu prawie $= \tau$. Jeżelibyśmy przyjęli $\nu = \sigma$, to według równ. 201) najw. $\nu' = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 + 4\sigma^2} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \sqrt{1+4} = \frac{\sigma}{2} (1 + \sqrt{5})$. Jeżeli więc chcemy, aby

$$\text{najw. } \nu' = \tau, \text{ to } \tau = \frac{1+2,23}{2} \sigma = 1,625 \sigma, \text{ więc } \sigma = \frac{\tau}{1,62}$$

Ze względu jednak na mniejszą wytrzymałość blachy na ścinanie w kierunku włókien przyjmiemy $\sigma = \frac{\tau}{1,8}$. Zatem będzie

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{1,8} g &= \frac{Q}{h_2} = \frac{10 Q}{9 h}, \text{ a stąd} \\ g &= \frac{10 Q}{9 h} \cdot \frac{1,8}{\tau} = 2,0 \frac{Q}{\tau h} \quad \dots \quad 216) \end{aligned}$$

Dla belek zwykłych, w budownictwie używanych, otrzymujemy często z wzoru tego bardzo małą grubość g , w praktyce

jednak przyjmujemy najmniej $g=6$ do 8mm . Dla belek mostowych, gdzie siły są większe, da się wzór ten z pożytkiem użyć.

Przykład. Dla belki głównej mostu blaszanego o rozpiętości 10m niech będzie obciążenie $q=5,5\text{ t/m}$, zatem na podporze

$$\text{najw. } Q = \frac{1}{2} ql = \frac{1}{2} 5,5 \times 10 = 27,5 \text{ t.}$$

Niech będzie dalej $h=100\text{ cm}$, $\tau=720\text{ kg/cm}^2$, to $g=2 \cdot \frac{27500}{720 \cdot 100} = 0,76\text{ cm}$.

Przyjmujemy więc $g=8\text{ mm}$.

§. 59. Obliczenie nitów belki blaszanej.

a) Obliczenie nitów poziomych.

Nity łączące belkę blaszaną w jedną całość, narażone są na ścięcie wskutek siły ścinającej poziomej, której wielkość na jednostkę długości jest σ , a zatem, jeżeli nity urządzimy w odstępach a (rys. 149), na długość a siła ta wynosi σa . Ponieważ nity poziome są dwucięte, więc

$$\sigma a = 2 \frac{d^2 \pi}{4} \tau, \quad \tau = \frac{QS}{I} a$$

a stąd

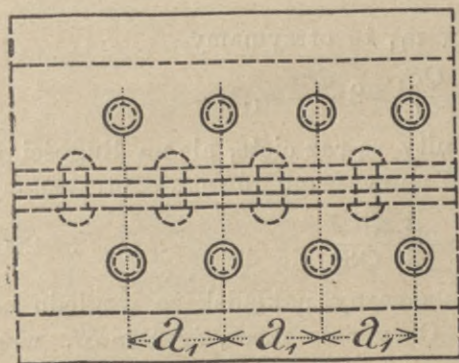
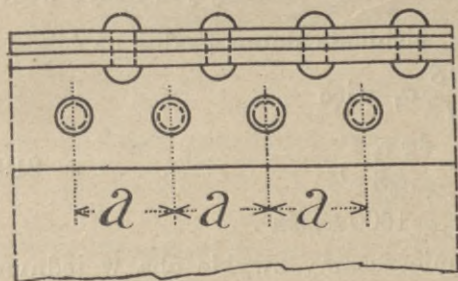
$$a = \frac{\pi \tau d^2 I}{2 QS} \quad (217)$$

gdzie S oznacza moment statyczny powierzchni przekroju nad nitem poziomym, a więc nakładek i części kątołek ze względu na oś obojętną, a d średnicę nitu.

Z równ. 217) widzimy, że im większą jest siła Q , tem mniejsze muszą być odstępy nitów a i odwrotnie.

A zatem ponieważ siła Q

przy podporach jest największa, więc tam muszą być nity najgęściej umieszczone, w środku zaś belki, gdzie siła poprzeczna jest bardzo mała, nity mogą być rzadsze.



Rys. 149 i 150.

Zbadajmy także ciśnienie na ściankę dziury. Jeżeli ciśnienie to nazwiemy ν_2 , będzie $\sigma a = dg \nu_2$, przyczem g oznacza grubość ścianki; a więc

$$dg \nu_2 = 2 \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1, \text{ a stąd } \nu_2 = \frac{\pi d}{2 g} \tau_1. \quad (218)$$

Stąd otrzymamy dla

$\frac{d}{g} = 1$	1,5	2	2,5
$\frac{\nu_2}{\tau_1} = 1,57$	2,35	3,14	3,92

Widzimy, że natężenia ν_2 są bardzo wielkie; według wzoru 217) licząc dla $\frac{d}{g} = 1,5$, otrzymamy dla $\tau_2 = 700$, $\nu_2 = 2,35 \times 700 = 1645 \text{ kg/cm}^2$. Jeżeli $\frac{d}{g} > 1,5$, to nie możemy już liczyć wedle wzoru 217), ale nazwawszy τ_2 ciśnienie dopuszczalne na ściankę dziury, otrzymamy $dg \tau_2 = \frac{QS}{I} a$, więc

$$a = \frac{dg \tau_2 I}{QS}, \quad (219)$$

przyczem możemy przyjąć $\tau_2 = 1600 \text{ kg/cm}^2$.

b) Nity pionowe umieszczamy zwykle oba w jednym rzędzie (rys. 150).

Nazwijmy odstęp nitów a_1 , to otrzymamy

$$a_1 \sigma = a_1 \frac{QS_1}{I} = 2 \frac{d^2 \pi}{4} \tau_1,$$

przyczem uwzględnimy, że nity są raz cięte, ale na długości a_1 muszą być ścięte dwa nity. Z powyższego równania otrzymamy

$$a_1 = \frac{\pi \tau_1 d^2 I}{2 QS_1} \quad (220)$$

gdzie S_1 oznacza moment statyczny nakładek ze względu na środek ciężkości przekroju. Oczywiście rzecz, że $S > S_1$, więc z równ. 217) i 220) wynika, że zawsze $a < a_1$. Jeżeli nity poziome obliczamy według 219), to a jest tem bardziej mniejszem niż a_1 . Ale ponieważ nity pionowe umieszczamy w środku między nitami poziomymi, więc przyjąć musimy $a_1 = a$, obliczamy zatem tylko odległość nitów poziomych i w tej samej odległości przyjmujemy też nity pionowe.

Często otrzymujemy z tych równań gdzie Q jest bardzo małe, odstęp nitów a bardzo wielki, ze względów konstrukcyjnych więc przyjmujemy największe

$$\text{najw } a = 6d \dots\dots\dots 221)$$

§. 60. Obliczenie belek drewnianych.

Belki drewniane obliczamy także według równ. 143) $\tau I = Me$, jeżeli $h \leq 0,125l$, gdy l oznacza rozpiętość belki w dwu punktach podpartej (p. §. 52).

Dla przekroju prostokątnego (rys. 151) mamy $\tau \frac{1}{12} bh^3 =$
 $= M \frac{h}{2}$, a stąd

$$bh^3 = \frac{6M}{\tau} \dots\dots\dots 222)$$

Przyjawszy $b = nh$, otrzymamy $nh^3 = \frac{6M}{\tau}$, a stąd

$$h = \sqrt[3]{\frac{6M}{n\tau}} \dots\dots\dots 223)$$

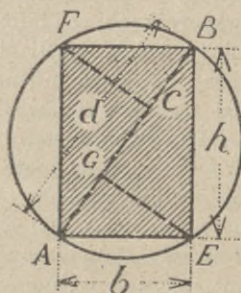
Jeżeli przyjmiemy pewną wartość dla b , to

$$h = \sqrt{\frac{6M}{b\tau}} \dots\dots\dots 224)$$

Wysokie przekroje są korzystniejsze, bo z 222) wynika $bh = F = \frac{6M}{\tau h}$, zatem przekrój będzie tem mniejszym, im większa wysokość.

Byłoby jeszcze do rozwiązania pytanie, jaki jest pod względem wytrzymałości najkorzystniejszy przekrój belki, wyciosanej z pnia okrągłego. Z równ. 222) widzimy, że M będzie tem większem, a zatem belka tem więcej uniesie, im większym jest wyraz bh^2 . Nazwijmy $bh^2 = u$, to otrzymamy najprzód z rysunku 151, jeżeli d jest średnicą pnia $h^2 = d^2 - b^2$, a więc

$$u = bh^2 = b(d^2 - b^2).$$



Rys. 151.

a więc musi być

Szukać teraz będziemy wartości b , dla której u będzie największem,

a więc: dla $b=10$, $h^2=216$, $h=14,7$ cm
 „ $b=12$, $h^2=180$, $h=13,4$ cm.

Jako najbardziej odpowiadające równ. 224) wybieramy więc wymiary $b=10$ cm, $h=15$ cm.

§. 61. Obliczenie belek stropu mieszanego.

Jako przykład obliczenia belek drewnianych i blaszanych podajemy obliczenie belek stropu mieszanego (tabl. II).

Niechaj strop mieszany składa się z belek żelaznych B , umieszczonych w odstępach $l_2=4,5$ m i belek drewnianych K , spoczywających na belkach żelaznych, umieszczonych w odstępach $a < 1$ m. Rozpiętość belek żelaznych w świetle wynosi 11 m; ponieważ wmurowanie jest za małe, aby można belki przyjąć jako poziomo wmurowane, więc obliczamy je jako w dwu punktach podparte. Teoretyczne punkty podparcia przyjmujemy 15 cm odległe od krawędzi muru, więc rozpiętość teoretyczna $l_1 = l + 0,3$ m = 11,3 m. Ciężar własny powały i podłogi wynosi 300 kg/m², obciążenie tłumem ludzi także 300 kg/m². Ciężar własny belki drewnianej przyjmujemy tymczasowo $g_1=40$ kg/m, belki żelaznej $g_2=70+15$ l kg/m, dalej dla drzewa $\tau=80$ kg/cm², dla żelaza $\tau=1000$ kg/cm².

Najprzód musimy obliczyć odstęp a belek drewnianych. Ponieważ przy murze umieszczamy po jednej belce drewnianej, więc jeżeli przyjmujemy n pól, a szerokość belki b , to $l=na+b$, a wstawivszy wartość za l i przyjąwszy tymczasowo $b=0,2$ m, $11=na+0,2$, a stąd $a=\frac{10,8}{n}$.

n musi być liczbą całą, zaś $a < 1$ m, przyjmujemy więc $n=11$, a więc $a=\frac{10,8}{11}=0,982$ m. Belkę drewnianą K możemy teraz obliczyć według równ.

222) $bh^2=\frac{6M}{\tau}$. Pierwej jednak musimy wyznaczyć najw. moment M , który dla obciążenia jednostajnego zupełnego będzie dla połowy rozpiętości belki według 20) $M=\frac{1}{8}ql^2$; przyczem q jest obciążenie na jednostkę długości. Ponieważ 1 m belki K niesie a m² powały, a obciążenie na m² wynosi 300+300=600 kg, więc obciążenie belki drewnianej przy uwzględnieniu ciężaru własnego równa się $a \cdot 600+40=0,982 \cdot 600+40$ kg/m, a więc:

$$g=\frac{0,982 \cdot 600+40}{100}=6,292 \text{ kg/cm.}$$

Rozpiętość l_2 wynosi 4,5 m=450 cm, więc $M=\frac{1}{8}6,292 \times 450^2=159266$ kgcm. Wstawmy teraz wartość w równ. 222), a otrzymamy $bh^2=\frac{6}{8} \cdot 159266=11945$ cm³, więc dla $b=20$ cm, $h=24,4$ cm. Ponieważ stosunek podstawy do wysokości jest stosowny, więc zatrzymujemy jako wymiary belki drewnianej $b=20$ cm, $h=25$ cm. W przeciwnym razie przyjelibyśmy b większe lub mniejsze, według tego, czy wymiar h był za wielki czy za mały.

Znając wymiary, obliczyć możemy ciężar belki drewnianej na m bieżący. Przyjąwszy ciężar gatunkowy drzewa 0,7, wiemy, że ciężar 1 dm³ drzewa jest 0,7 kg, stąd m bieżący belki waży $2 \cdot 2,5 \cdot 10 \cdot 0,7=35$ kg, a więc trochę mniej, niżśmy pierwotnie przyjęli, przez co jednak nie potrzebujemy zmieniać obliczenia belki.

Teraz przystępujemy do obliczenia belki blaszanej. Ciężar powały i obciążenie tłumem ludzi przenosi się na belkę żelazną w punktach E i F . Nazwijmy odnośne siły G i G' , to punkt E dźwiga $al_2 m^2$ powały i $l_2 m$ b. belki drewnianej, więc $G = al_2 600 + l_2 35$, a wstawiwszy wartości $G = 0,982 \cdot 4,5 \cdot 600 + 4,5 \cdot 35 = 2808,9 \text{ kg} = 2,8 t$.

Siła G' , działająca w punkcie F , jest mniejszą, gdyż szerokość paska powały, ciążącego na tym punkcie jest mniejszą, a mianowicie:

$$G' : G = \frac{a+b}{2} : a, \text{ a więc } G' = G \frac{a+b}{2a} = 2,8 \frac{0,982+0,2}{2 \cdot 0,982} = 1,68 t.$$

Obliczywszy siły działające na belkę blaszaną, wykreślamy wielobok sił, przyjmujemy biegun O tak, że odległość biegunowa wedle podziałki sił wynosi $20 t$, kreślimy wielobok sznurowy, zamykającą, wyznaczamy oddziaływania i siły poprzeczne wedle §. 8. Aby wykreślić podziałkę momentów, zastanówmy się, że w rysunku na tabl. II 1 cm w podziałce momentów równa się według podziałki długości $0,5 m$, pomnożonemu przez odległość biegunową, więc przez $20 t$, a zatem według podziałki momentów 1 cm równa się $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ tm}$. Możemy więc wykreślić teraz podziałkę momentów.

Dalej uwzględnić jeszcze musimy ciężar własny belki żelaznej g_2 , który możemy przyjąć na $1 m$ bieżący $70 + 15 l$, a więc $g_2 = 70 + 15 \cdot 11 = 235 \text{ kg/m} = 0,235 t/m$. Moment zatem we środku $M_w = \frac{1}{2} g_2 l^2 = \frac{1}{2} 0,235 \cdot 11,3^2 = 3,74 \text{ tm}$. Moment ten wykreślamy według podziałki momentów i kreślimy w znany sposób parabolę, jako linię momentów.

Obliczymy jeszcze moment M_b dla punktu K analitycznie w następujący sposób: Oddziaływanie D_1 równa się połowie wszystkich ciężarów,

$$\text{więc: } D_1 = \frac{2G' + 10G}{2} = \frac{2 \times 1,68 + 10 \times 2,8}{2} = 15,68 t,$$

a moment w punkcie K

$$M_b = 15,68 \times 5,16 - 1,68 \times 4,9 - 5 \cdot 2,8 \times 2 \times 0,972$$

$$M_b = 80,91 - 8,23 - 27,50 = 45,18 \text{ tm}.$$

Podobnie otrzymamy momenty i dla innych punktów dla obciążenia ciężarem powały i tłumem ludzi: do tego musimy jeszcze dodać momenty z ciężaru własnego według wzoru 18) $M = \frac{1}{2} gx(l-x)$. W ten sposób obliczyliśmy:

dla $x =$	0	0,25	1,23	2,21	3,20	4,18	5,16	m
M' dla obciążenia ciężarem powały i tłumem ludzi	} = 0	3,92	17,65	28,60	36,99	42,46	45,18	tm
M'' dla ciężaru własnego belki		0,32	1,45	2,36	3,03	3,50	3,72	"
Razem $M = 0$		4,24	19,10	30,96	40,02	45,96	48,90	tm

Podobną tabliczkę otrzymamy dla sił poprzecznych, licząc według równań 8) i 18):

$x =$	0	0,25	1,23	2,21	3,20	4,18	5,16	m
$Q' =$	15,68	14,0	11,2	8,4	5,6	2,8	0	t
$Q'' =$	1,33	1,27	1,04	0,81	0,58	0,24	0,11	t
$Q =$	17,01	$\frac{16,95}{15,27}$	$\frac{15,04}{12,24}$	$\frac{12,01}{9,21}$	$\frac{8,98}{6,18}$	$\frac{5,84}{3,04}$	$\frac{2,91}{0,11}$	t

Teraz możemy przystąpić do obliczenia przekroju belki blaszanej. Przyjmujemy wysokość ścianki, zależną od wysokości, jaką na strop mamy do rozporządzenia, $h_1 = 60 \text{ cm}$, kątowniki wedle równania 207) 70 mm szerokie a 8 mm grube; grubość ścianki byłaby według 216) $g = 2 \frac{17,010}{1,000.60} = 0,6 \text{ cm}$, zamiast tego przyjmujemy 8 mm . Dalej niech będzie szerokość nakładki według 208) 21 cm , a nity o średnicy 20 mm . Po odciągnięciu dziur będzie więc użyteczna szerokość nakładki $b_1 = 21 - 2.2,0 = 17,8 \text{ cm}$.

Uwzględnivszy dziury na nity i osłabienie ścianki o 25% otrzymamy

$$I_1 = \frac{1}{12} [(14,8 - 4,0)60^3 - (12,4 - 4,0)58,4^3 - 1,6.46^3 - 0,25.0,8.60^3],$$

$$I_1 = \frac{1}{12} (2332800 - 1673084 - 155738 - 43200) = 38400 \text{ cm}^4.$$

Wedle równania 212) mamy w przybliżeniu grubość nakładki

$$d = \frac{M}{b_1 h_1 \tau} - \frac{2 I_1}{b_1 h_1^2},$$

więc dla $x = 5,16$, wstawivszy wartości w cm i kg ,

$$d_6 = \frac{4890000}{17 \times 60 \times 1000} - \frac{2 \times 38400}{17.60^2} = 3,54 \text{ cm},$$

a teraz dokładnie według równania 206)

$$d_6 = \frac{4890000}{17 \times 60 \times 1000} - \frac{2 \times 38400}{17 \times 60 (60 + 2 \times 3,54)} = 3,4 \text{ cm}.$$

Dla $x = 0$ otrzymamy z równania 212):

$$d_0 = -\frac{2 \times 38400}{17 \times 60^2} = -1,26 \text{ cm} \approx 1,3 \text{ cm}.$$

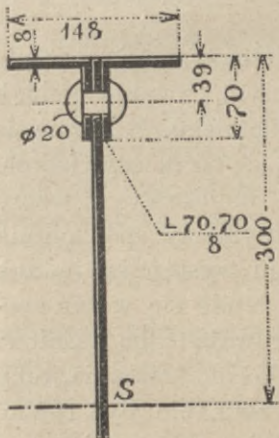
Podobnie otrzymamy i dla innych punktów grubości nakładek, a mianowicie będziemy mieli:

d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
-13	-8	+6	+18	+27	+33	+34 mm.

Grubość nakładek w pojedynczych punktach wykreśliliśmy na rysunku i końce rzędnych połączyliśmy prostymi. W ten sposób otrzymaliśmy teoretyczną grubość nakładek. Według poprzedniego mamy największą grubość $d_6 = 34 \text{ mm}$, przyjmujemy więc trzy nakładki, z których pierwsza 12 mm gruba, a dwie górne po 11 mm i wyznaczamy wykreślnie długości nakładek.

Teraz obliczamy jeszcze odstęp nitów, przyjąwszy według 221) jako największy odstęp $6d = 6.2,0 = 12 \text{ cm}$. Obliczamy więc najprzód odstęp nitów poziomych dla $0,25 > x > 0$. Ponieważ tu średnica nitu d' jest 2 razy większa od grubości kątowniki, więc musimy liczyć według równania 219) $a = \frac{d' g \tau_2 I}{QS}$. Wstawiamy tedy wartości $\tau_2 = 1400 \text{ kg/cm}^2$, $I = I_1$, bo tu niema żadnej nakładki, $d' = 1,6$, $Q = 17,01 \text{ t} = 17010 \text{ kg}$, $S = (14,8.0,8) 29,6 + 2,4.3,1.27,7 = 556,55$ (rys. 153),

$$\text{więc } \frac{2 \times 0,8 \times 1400 \times 38400}{17010 \times 556,55} = 9,00 \text{ cm}.$$



Rys. 153.

Gdybyśmy użyli wzoru 217), otrzymalibyśmy:

$$a = \frac{\pi 600 \cdot 2^2 \cdot 38400}{2 \cdot 17010 \cdot 556,55} = 15,200,$$

zatrzymujemy więc wynik pierwszy mniejszy.

Dla długości od $x=0,25$ m do początku pierwszej nakładki otrzymamy:

$$a = \frac{2 \times 0,8 \times 1400 \times 38400}{15270 \times 556,55} = 10,1.$$

Od początku pierwszej nakładki do $x=1,23$ m mamy:

$$I = I_1 + \frac{1}{12} 21 (62,4^3 - 60^3) = 38400 + 47 198 = 85598$$

$$S = 556,55 + 21 \times 1,2 \times 30,6 = 1327,7, \text{ więc:}$$

$$a = \frac{2 \times 0,8 \times 1400 \times 85598}{15 270 \times 1327,7} = 9,4 \text{ cm.}$$

Dla długości od $x=1,23$ m do początku drugiej nakładki mamy:

$$a = \frac{2 \times 0,8 \times 1400 \times 85518}{12240 \times 1327,7} = 11 \text{ cm.}$$

Podobnie otrzymamy dla długości od początku drugiej nakładki do $x=2,21$ m, $a=11,8$ cm:

dla długości od $x=2,21$ m do $x=3,20$ m { 2 nakładki, $a=15,1$ cm,

„ „ „ $x=3,20$ m „ $x=4,18$ m { 3 nakładki, $a=21,6$ cm,

„ „ „ $x=4,18$ m „ $x=5,16$ m { 3 nakładki, $a=31,4$ cm,

„ „ „ $x=5,16$ m „ $x=6,14$ m { 3 nakładki, $a=33,2$ cm,

zamiast tego jednak przyjmujemy $a=22$ cm.

Odstęp a nitów stosować się muszą ze względów konstrukcyjnych także do długości pól, która musi być wielokrotną długości a , przyczem jednak a nie może być większem od wartości obliczonej.

§. 62. Natężenia zginające po przekroczeniu granicy sprężystości.

Wiemy z §. 37, że wzór 141) $\nu I = M \nu$ ważnym jest tylko do granicy sprężystości.

Gdy obciążenie wzrasta i granica sprężystości zostanie przekroczoną, wzór ten nie jest już ważnym, zwykle jednak w braku innego, obliczamy natężenie wedle niego. Różumie się jednak, że tak obliczone natężenia różnią się od rzeczywistych. Jeżeli ciało obciążamy aż do złamania i obliczamy z wzoru natężenie w tej chwili powstające, to otrzymamy współczynnik wytrzymałości na złamanie. Przy zginaniu występują jednak natężenia na ciśnienie i ciągnienie, belka łamie się w ten sposób, że albo ciągnięte włókna się przerywają albo ciśnione zgniatają. Gdyby wzór 141) był ważnym aż do złamania, toby musiał współczynnik wytrzymałości μ_2 na złamanie być równy mniejszemu ze współczynników wytrzymałości na ciągnienie μ lub ciśnienie μ_1 . Ponieważ jednak wzór ten nie jest ważnym

do złamania, więc okazuje się, że dla μ_2 otrzymujemy inną wartość.

Doświadczenia okazały np. że dla belek drewnianych o przekroju prostokątnym współczynnik wytrzymałości na złamanie μ_2 ma przeciętnie następujące wartości:

	μ_2 w kg/cm^2
drzewo jodłowe	410
„ świerkowe	430
„ modrzewiowe	540
„ dębowe	600
„ bukowe	700

Jeżeli te wartości porównamy z wartościami dla μ i μ_1 w §. 18, to okazuje się, że dla drzewa μ_2 ma wartość średnią między μ a μ_2 , a w przybliżeniu $\mu_2 = 0,65 \mu$.

Dla stali otrzymał Bauschinger następujące wyniki:

zawartość węgla w %	spółcz. wytrzymałości		$\frac{\mu_2}{\mu}$
	na ciągnięcie μ kg/cm^2	na złamanie μ_2 kg/cm^2	
0,14	4430	> 7920	> 1,78
0,19	4785	> 8600	> 1,79
0,46	5330	8340	1,56
0,55	5656	8825	1,58
0,66	6295	8600	1,36
0,80	7230	7645	1,06
0,96	8305	8480	1,02

Dla żelaza lanego wyprowadza Bach z doświadczeń następujące prawidła:

Spółczynnik wytrzymałości na zginanie przewyższa współczynnik wytrzymałości na ciągnięcie tem bardziej, im bardziej skupiony jest materiał około osi obojętnej. Bach wyraża tę względność następującem równaniem:

$$\mu_2 = c \sqrt{\frac{e}{e_0}} \mu, \quad \dots \quad (228)$$

przyczem współczynnik c leży między $\frac{6}{5}$ a $\frac{4}{3}$, e i e_0 oznaczają odstęp skrajnego włókna ciągniętego od osi obojętnej i od środka ciężkości ciągniętej przekroju.

I tak gdy w pewnym wypadku było $\mu = 1369 kg/cm^2$, otrzymał on:

a) dla przekroju kwadratowego, którego przekątnia leży w płaszczyźnie obciążenia	μ_2 kg/cm ²	$\frac{\mu_2}{\mu}$
b) dla przekroju <i>H</i>	3218 do 3323	2,44
c) „ „ okrągłego	2929 „ 3153	2,22
d) „ „ kwadratowego	2905 „ 2986	2,16
e) „ „ <i>I</i>	2572 „ 2238	1,77
	1979 „ 2111	1,49

Considère otrzymał stosunek $\frac{\mu_2}{\mu}$

dla żelaza lanego
miękkiego twardego
($\mu=1130$) ($\mu=2230$)

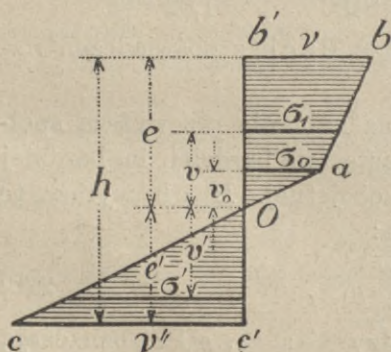
dla przekroju <i>I</i>	1,40	1,15
„ „ prostokątnego	1,82	1,57
„ „ okrągłego	2,21	1,84

Widzimy z poprzedniego, że natężenia zginające po przekroczeniu granicy sprężystości są różne dla różnych materiałów, a przyczyną tego są rozmaite kształty linii odkształceń dla rozmaitych materiałów. Zastanawiać się więc teraz będziemy osobno nad belkami drewnianymi, osobno nad żelazniami.

§. 63. Natężenia przy złamaniu belek drewnianych.

Jeżeli belkę drewnianą o przekroju prostokątnym obciążymy aż do złamania, to z powodu, że granica sprężystości dla ciągnięcia leży bardzo blisko współczynnika wytrzymałości, natężenia na ciągnięcie σ' (rys. 154) będą proporcjonalne do odstępów v' od osi obojętnej, dadzą się więc przedstawić prostą *Oc*. Inaczej rzecz się jednak będzie miała z natężeniami na ciśnienie. Otrzymamy tam prostą *Oa* do granicy sprężystości i krzywą, zamiast której możemy przyjąć prostą *ab*. Dla tego założenia jest dla ciśnionej części przekroju aż do granicy sprężystości:

$$\sigma = av$$



Rys. 154.

a poza tą granicą:

$$\sigma_1 = a[v_0 + \alpha_1(v - v_0)] = av_0(1 - \alpha_1) + a\alpha_1 v$$

$$\sigma_1 = \sigma_0(1 - \alpha_1) + a\alpha_1 v \quad 229)$$

Dla części ciągnionej jest $\sigma' = av'$ 230)

Suma nateżeń dodatnich i ujemnych musi być równą zeru, więc gdy szerokość belki b jest stałą

$$-\frac{v' e'}{2} + \frac{\sigma_0 v_0}{2} + \frac{\sigma_0 + v}{2}(e - v_0) = 0$$

a stąd:
$$e' = \frac{\sigma_0}{v'} v_0 + \frac{\sigma_0 + v}{v'}(e - v_0) \quad 231)$$

Jeżeli przypuścimy, że równocześnie przerywają się włókna ciągnione i zgniatają ciśnione, to możemy napisać ze względu na to, że dla drzewa szpilkowego współczynnik wytrzymałości na ciągnięcie jest dwa razy tak wielki, jak na ciśnienie *),

$$v = \mu = \frac{1}{2} v' = \frac{1}{2} \mu',$$

dalej
$$\sigma_0 = \frac{1}{2} v = \frac{1}{4} v' = \frac{1}{4} \mu', \text{ zatem } e' = \frac{1}{4} v_0 + \frac{3}{4}(e - v_0).$$

Wstawmy dalej:

$$e = h - e' \text{ i } v_0 = \frac{\sigma_0}{a} = \frac{\sigma_0}{\sigma'} v' = \frac{\sigma_0}{v'} e' = \frac{1}{4} e', \text{ to:}$$

$$e' = \frac{1}{16} e' + \frac{3}{4} \left(h - e' - \frac{1}{4} e' \right), \text{ a stąd:}$$

$$e' = 0,4 h \quad 232)$$

Oś obojętna leży więc w chwili złamania poniżej osi belki w odległości $0,1 h$.

Moment sił zewnętrznych M musi być równy momentowi sił wewnętrznych, więc gdy μ_2 nazwiemy nateżenie przy złamaniu, obliczone z wzoru 141), to:

$$M = \frac{bh^2}{6} \mu_2 = b \left[\frac{\mu' e'^2}{6} + \frac{\sigma_0 v_0^2}{6} + \frac{\sigma_0 + \mu}{2}(e - v_0) \left(v_0 + \frac{2\sigma_0 + \mu}{\sigma_0 + \mu} \frac{e - v_0}{3} \right) \right].$$

Po wstawieniu powyższych wartości za v, σ_0, v_0, e' otrzymamy:

$$h^2 \mu_2 = \left[\mu' e'^2 + \frac{1}{64} \mu' e'^2 + \frac{9\mu'}{8} h \left(v_0 + \frac{3}{4} \frac{e - v_0}{3} \right) \right]$$

$$h^2 \mu_2 = \frac{65}{64} \mu' \cdot 0,16 h^2 = \frac{9}{8} \mu' h \left(0,1 h + \frac{2}{9} h \right) = 0,725 \mu' h^2$$

zatem:
$$\mu_2 = 0,725 \mu' \quad 233)$$

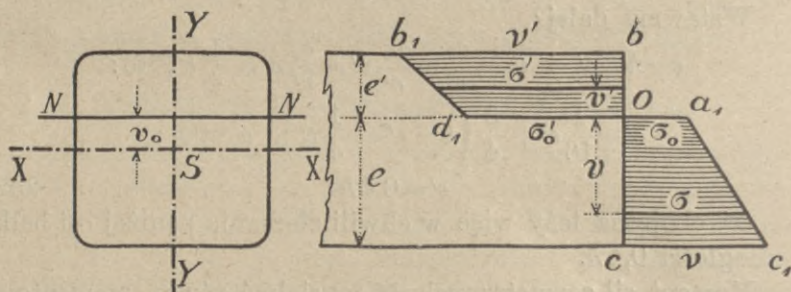
*) Porów. §. 18.

W poprzednim paragrafie widzieliśmy, że doświadczenia okazały, że $\mu_2 = 0,65 \mu$, wynik więc doświadczeń jest bardzo zbliżony do teoretycznego i teraz poznajemy prawdziwą przyczynę tego zjawiska.

§. 64. Natężenie przy złamaniu belek z żelaza spawalnego, zlewne i stali.

Podobnie jak z belkami drewnianymi ma się rzecz także z belkami z żelaza spawalnego, zlewne i stali. Tu jednak odpowiednio do kształtu krzywej odkształceń, wykazanego w §. 20., linia natężeń będzie dla ciągnięcia jak i ciśnienia krzywą, zamiast czego możemy podobnie jak dla drzewa przyjąć dwie proste, (rys. 155), więc dla ciągnięcia Oa_1 i a_1c_1 , dla ciśnienia Od_1 i d_1b_1 . Linie Oa_1 i Od_1 spadają w tej fazie obciążenia prawie z osią, możemy więc napisać:

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \sigma'_0 + a' v' \\ \sigma &= \sigma_0 + a v \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 234)$$



Rys. 155.

Dla równowagi musi być suma natężeń równa zero, więc $\int_0^e \sigma dF - \int_0^{e'} \sigma' dF = 0$, a wstawiwszy wartość za σ i σ' , otrzymamy:

$$\sigma_0 \int_0^e dF + a \int_0^e v dF - \sigma'_0 \int_0^{e'} dF - a' \int_0^{e'} v' dF = 0.$$

Nazwijmy $\int_0^e dF = F_1$ powierzchnię części przekroju poniżej osi obojętnej, $\int_0^e v dF = S_1$ moment statyczny tej powierzchni ze względu na oś obojętną, względnie $\int_0^{e'} dF = F_2$ i $\int_0^{e'} v' dF = S_2$

powierzchnię i moment statyczny części przekroju poniżej osi obojętnej, to:

$$\sigma_0 F_1 + \alpha S_1 - \sigma'_0 F_2 - \alpha' S_2 = 0. \quad . \quad . \quad 235)$$

Dla żelaza zlewego i stali możemy w przybliżeniu przyjąć $\sigma_0 = \sigma'_0$ i $\alpha = c\alpha'$, więc:

$$\sigma_0 (F_1 - F_2) + \alpha (S_1 - c S_2) = 0. \quad . \quad . \quad 236)$$

Wstawmy wartość za α z równ. 232), to:

$$\alpha = \frac{\sigma - \sigma_0}{v} \text{ albo } \frac{v - \sigma_0}{e}, \text{ więc}$$

$$\sigma_0 (F_1 - F_2) + \frac{v - \sigma_0}{e} (S_1 - c S_2) = 0. \quad . \quad . \quad 237)$$

Wedle doświadczeń Considère'a *) można przyjąć w poprzednim równaniu dla stali miękkiej, $\sigma_0 = 3000 \text{ kg/cm}^2$, $c = 3$. Dla żelaza spawalnego możemy przyjąć $\sigma_0 = 2000 \text{ kg/cm}^2$, c nie znamy z doświadczeń, w braku ich moglibyśmy tymczasowo przyjąć także $c = 3$.

Jeżeli kształt przekroju jest dany, to możemy F_1 , F_2 , S_1 i S_2 wyrazić jako funkcje oddalenia osi obojętnej od osi ciężkości i na podstawie rów. 237) wyznaczyć v .

Drugi warunek równowagi brzmi:

$$M = \int_0^e \sigma v dF = \int_0^{e'} \sigma' v' dF.$$

Wstawivszy wartość za σ i σ' z 232), otrzymamy:

$$M = \sigma_0 \int_0^e v dF + \alpha \int_0^e v^2 dF + \sigma'_0 \int_0^{e'} v' dF + \alpha' \int_0^{e'} v'^2 dF.$$

Nazwijmy moment bezwładności powierzchni przekroju poniżej osi obojętnej ze względu na oś obojętną I_1 , powierzchni zaś powyżej osi obojętnej I_2 , to możemy napisać:

$$M = \sigma_0 S_1 + \alpha I_1 + \sigma'_0 S_2 + \alpha' I_2, \text{ albo:}$$

$$M = \sigma_0 (S_1 + S_2) + \alpha (I_1 + c I_2)$$

wreszcie: $M = \sigma_0 (S_1 + S_2) + \frac{v - \sigma_0}{e} (I_1 + c I_2). \quad . \quad . \quad 238)$

Jeżeli zastosujemy ten wzór do prób wytrzymałości na złamanie, to wstawimy $v = \mu$. Spółczynnik wytrzymałości na złamanie w zwykłym rozumieniu będzie:

$$\mu_2 = \frac{Me}{I}.$$

*) P. Ann. des ponts et chaussées 1885, str. 574 i nast.

Z rów. 238) otrzymamy dla $\mu = \nu$

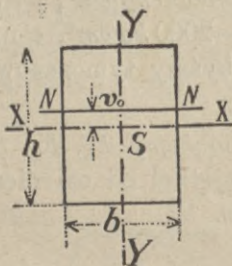
$$Me = (\mu - \sigma_0)(I_1 + cI_2) + \sigma_0 e(S_1 + S_2), \text{ zatem:}$$

$$\frac{\mu_2}{\mu} = \frac{I_1 + cI_2}{I} + \frac{\sigma_0}{\mu} \frac{e(S_1 + S_2) - (I_1 + cI_2)}{I}. \quad 239)$$

Widzimy więc, że współczynnik zwiększający (fr. *coefficient de majoration*) $k = \frac{\mu_2}{\mu}$ zależny jest od kształtu przekroju, bo jest tem większym, im większe jest $\frac{e(S_1 + S_2)}{I}$.

Zastosujmy wzory powyższe do przekrojów prostokątnego i okrągłego.

Dla prostokąta mamy $F_1 = b\left(\frac{h}{2} + v_0\right)$ (rys. 156)



Rys. 156.

$$F_2 = b\left(\frac{h}{2} - v_0\right), \text{ a więc } F_1 - F_2 = 2bv_0,$$

$$S_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} + v_0\right)^2 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} + hv_0 + v_0^2\right),$$

$$S_2 = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - v_0\right)^2 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - hv_0 + v_0^2\right),$$

$$\text{więc } S_1 - 3S_2 = \frac{b}{2} \left(-\frac{h^2}{2} + 4hv_0 - 2v_0^2\right).$$

Wstawivszy to w równ. 237), otrzymamy:

$$2\sigma_0 bv_0 + \frac{\mu - \sigma_0}{\frac{h}{2} + v_0} \frac{b}{2} \left(-\frac{h^2}{2} + 4hv_0 - 2v_0^2\right) = 0,$$

albo:
$$2\sigma_0 v = \frac{\mu - \sigma_0}{h + 2v_0} \left(\frac{h^2}{2} - 4hv_0 + 2v_0^2\right). \quad 240)$$

Wstawmy n. p. dla stali $\sigma_0 = 3000$, $\mu = 7000 \text{ kg/cm}^2$, to otrzymamy $6000 v_0 = \frac{4000}{h + 2v_0} \left(\frac{h^2}{2} - 4hv_0 + 2v_0^2\right)$.

Stąd otrzymamy: $v_0 = 0,09h$.

Obliczmy teraz M wedle wzoru 238), a otrzymamy:

$$S_1 + S_2 = b \left(\frac{h^2}{4} + v^2\right) = b \left(\frac{h^2}{4} + 0,0081 h^2\right)$$

$$S_1 + S_2 = 0,2581 bh^2$$

$$I_1 + cI_2 = \frac{b}{3} \left[\left(\frac{h}{2} - v_0\right)^3 + c\left(\frac{h}{2} + v_0\right)^3\right] = \frac{bh^3}{3} (0,205 + 3 \times 0,0689) = 0,187 bh^3$$

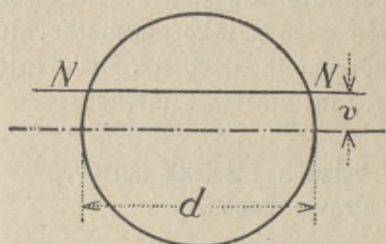
$$\text{więc } M = 3000 \cdot 0,2581 bh^2 + \frac{4000}{0,59h} 0,187 bh^3$$

$$M = bh^2(774,3 + 930) = 1704 bh^2.$$

Moment obliczony wedle zwykłego wzoru jest:

$$M_0 = \frac{bh^2}{6} \cdot 7000 = 1167 bh^2,$$

$$\text{zatem: } \frac{M}{M_0} = \frac{1704}{1161} = 1,46.$$



Rys. 157.

Dla koła otrzymamy (rys. 157):

$$F_1 = \frac{d^2 \pi}{8} + dv_0, \quad F_2 = \frac{d^2 \pi}{8} - dv_0,$$

$$S_1 = \frac{d^2 \pi}{8} (v_0 + 0,21 d) + \frac{dv_0^2}{2}$$

$$S_2 = \frac{d^2 \pi}{8} (0,21 - v_0) - \frac{dv_0^2}{2},$$

$$\text{stad } F_1 - F_2 = 2 dv_0$$

$$S_1 - 3S_2 = \frac{d^2 \pi}{8} (4v_0 - 0,42d) - 2dv_0^2,$$

Z równ. 237) otrzymamy:

$$2 dv_0 \sigma_0 + \frac{\mu - \sigma_0}{\frac{d}{2} + v_0} \left(\frac{d^2 \pi}{8} (4v_0 - 0,42d) - 2dv_0^2 \right) = 0,$$

$$\text{albo: } 2 \sigma_0 v_0 = \frac{\mu - \sigma_0}{d + 2v_0} \left(4v_0^2 - \frac{d\pi}{4} (4v_0 - 0,42d) \right). \quad . \quad . \quad 241)$$

Wstawmy znów dla stali $\sigma_0 = 3000$, $\mu = 7000 \text{ kg/m}^2$, to otrzymamy:

$$6000 v_0 = \frac{4000}{d + 2v_0} \left(4v_0^2 - \frac{d\pi}{4} (4v_0 - 0,42d) \right)$$

a stad otrzymamy: $v_0 = 0,08 d$.

Obliczamy teraz M wedle wzoru 236), a otrzymamy:

$$S_1 + S_2 = \frac{d^2 \pi}{8} (v_0 + 0,21 d) + \frac{dv^2}{2} + \frac{d^2 \pi}{8} (0,21 d - v_0) + \frac{dv_0^2}{2} = 0,164 d^3$$

$$I_1 = 0,00686 d^4 + \frac{d^2 \pi}{8} (0,2122 d + v_0)^2 + \frac{1}{3} dv_0^3$$

$$I_1 = 0,00686 d^4 + 0,03353 d^4 + 0,000171 d^4 = 0,04056 d^4,$$

$$I_2 = 0,00686 d^4 + \frac{d^2 \pi}{8} (0,2122 d - 0,08 d)^2 - \frac{1}{3} dv_0^3,$$

$$I_2 = 0,00686 d^4 + 0,00686 d^4 - 0,000171 d^4 = 0,01355 d^4,$$

$$I_1 + c I_2 = (0,04056 + 3 \cdot 0,01355) d^4 = 0,0812 d^4,$$

$$\text{wiec: } M = 3000 \cdot 0,164 d^3 + \frac{4000}{0,58 d} \cdot 0,0812 d^4 = (492 + 560) d^3$$

$$M = 1052 d^3.$$

Moment obliczony wedle zwykłego wzoru jest:

$$M_0 = \frac{\pi d^3}{32} \cdot 7000 = 0,0982 \cdot 7000 d^3 = 687,4 d^3,$$

$$\text{zatem: } \frac{M}{M_0} = \frac{1053}{687,4} = 1,53.$$

A zatem dla koła, przy którym materiał jest więcej skupionym, niż dla prostokąta, otrzymujemy $\frac{M}{M_0}$, a zatem $k = \frac{\mu_2}{\mu}$ większe, niż dla prostokąta. Powyższy wynik stwierdziły też doświadczenia z żelazem lanem, przytoczone w §. 62.

Spółczynnik k zależny jest wedle równ. 239) także od współczynników σ_0 , μ , c , zmienia się więc z jakością materiału. Doświadczenia Bauschingera, przytoczone w §. 62. wykazują, że współczynnik k jest tem większy, im stal jest miększa.

§. 65. Natężenia zginające w belkach z żelaza lanego, kamienia i betonu. Prawo Bacha.

Już na str. 42 stwierdziliśmy, że dla żelaza lanego niema właściwie żadnej granicy sprężystości, a z rys. 41 widać, że linia odkształceń dla żelaza lanego nie jest wcale prostą, lecz krzywą. Podobnie rzecz się ma z kamieniem, betonem, cementem a w mniejszym nieco stopniu i z drzewem (rys. 42). Otóż prawo Hooaka (str. 36, r. 29) ściśle rzecz biorąc do tych materiałów właściwie się nie stosuje. Pomimo tego obliczamy belki z tych materiałów wedle zwykłych wzorów i otrzymujemy dziwny wynik, że wytrzymałość na złamanie jest znacznie większą, niż wytrzymałość na ciągnięcie. O drzewie mówiliśmy już w §. 63 teraz będziemy mówić o innych, powyżej przytoczonych materiałach.

Prof. Bach wyznaczył na podstawie doświadczeń równanie krzywej odkształceń w ogólnym kształcie:

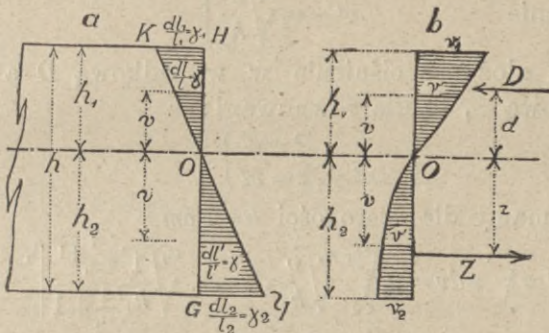
$$\frac{dl}{l} = \frac{\nu^m}{\varepsilon} = \alpha \nu^m,$$

które przechodzi w równanie Hooaka (r. 29) dla $m=1$. Wartość współczynnika m , rozmaita dla różnych materiałów, nie wiele się różni od jedności; podajemy ją w następnjej tabliczce:

Materiał	Ciągnięcie		Ciśnienie	
	$\frac{E}{kg/cm^2}$	m	$\frac{E}{kg/cm^2}$	m
1) żelazo lane:				
przedtem nie obciążone . .	1338000	1,083	1180000	1,052
obciążone przedtem silnie . .	1150000	1,1	1170000	1,05
2) cementowa zaprawa:				
1 cz. cementu 1 $\frac{1}{2}$ cz. piasku	—	—	356000	1,11
1 „ „ 3 $\frac{1}{2}$ „ „	—	—	315000	1,15
1 „ „ 4 $\frac{1}{2}$ „ „	—	—	230000	1,17

Materiał		Ciężnienie		Ciśnienie	
		E	m	E	m
3) beton:		kg/cm^2		kg/cm^2	
1 cz. cementu	2 1/2 cz. piasku	5 cz. żwiru	—	—	298000 1,145
1 "	"	5 " "	6 " "	—	— 280000 1,137
1 "	"	5 " "	10 " "	—	— 217000 1,157
1 "	"	2 1/2 " "	5 " "	—	— 457000 1,157
1 "	"	3 " "	6 " "	—	— 380000 1,164
1 "	"	5 " "	10 " "	—	— 367000 1,207

Przyjmujemy tutaj także, jak w §. 37, że przekroje po ugięciu belki pozostają płaskimi, że więc przekrój GH przejdzie



Rys. 158.

w położenie JK (rys. 158 a) czyli obróci się około osi obojętnej o kąt JOG . Widzimy więc, że przedłużenia i skrócenia włókien będą proporcjonalne do odległości ich od osi obojętnej, zatem

$$\frac{dl}{l} = \gamma = \frac{v^m}{E} = \alpha v^m, \text{ przyczem } \alpha = \frac{1}{E}.$$

Spółczynnik α nazwalimy za Bachem spółczynnikiem wydłużenia (n. *Dehnungscoefficient*, fr. *coefficient d'allongement*, a. *coefficient of extension*, r. коэффициент деформации).

Z rysunku wynika wtedy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl}{l} = \gamma = \gamma_1 \frac{v}{h_1} \\ \frac{dl'}{l'} = \gamma' = \gamma_2 \frac{v'}{h_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 242)$$

W ogólności jest spółczynnik sprężystości dla ciągnięcia różny, więc:

$$\gamma = \alpha_1 v^{m_1}, \gamma' = \alpha_2 v^{m_2}, \dots \dots \dots 243)$$

a stąd:
$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1 \nu_1^{m_1} \\ \gamma_2 &= \alpha_2 \nu_2^{m_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 244)$$

a z rysunku wynika:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{h_1}{h_2} \dots \dots \dots 245)$$

Z równ. 243) i 244) wynika:

$$\nu^{m_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} \nu^{m_1} = \frac{\nu}{h_1} \nu^{m_1},$$

zatem:
$$\left. \begin{aligned} \nu &= \nu_1 \sqrt{\frac{m_1 \nu}{h_1}} \\ \nu' &= \nu_2 \sqrt{\frac{m_2 \nu'}{h_2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 246)$$

i analogicznie

Jeżeli złożymy ciśnienie w wypadkową D a ciągnienie w wypadkową Z , to dla równowagi:

$$\left. \begin{aligned} D &= Z \\ \text{i } Dd + Zz &= M \end{aligned} \right\}$$

Otóż mamy dla szerokości $b=1 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{h_1} \nu dv = \nu_1 \int_0^{h_1} \sqrt{\frac{m_1 \nu}{h_1}} dv = \nu_1 \sqrt{\frac{1}{h_1} \nu^{\frac{m_1}{m_1}+1}} \Big|_0^{h_1} = \\ D &= \nu_1 \sqrt{\frac{1}{h_1}} \sqrt{h_1^{m_1+1}} \frac{m_1}{m_1+1} = \frac{m_1}{m_2+1} \nu_1 h_1 \dots \dots 247) \end{aligned}$$

Podobnie otrzymamy:

$$Z = \int_0^{h_2} \nu' dv = \frac{m_2}{m_2+1} \nu_2 h_2 \dots \dots \dots 248)$$

$$Dd = \int_0^{h_1} \nu v dv = \nu_1 \int_0^{h_1} \sqrt{\frac{m_1 \nu}{h_1}} \nu dv = \frac{m_1}{2m_1+1} \nu_1 h_1^2 \dots \dots 249)$$

$$Zz = \int_0^{h_2} \nu' v' dv = \nu_2 \int_0^{h_2} \sqrt{\frac{m_2 \nu'}{h_2}} \nu' dv = \frac{m_2}{2m_2+1} \nu_2 h_2 \dots \dots 250)$$

a stąd:
$$\frac{m_1}{2m_1+1} \nu_1 h_1^2 + \frac{m_2}{2m_2+1} \nu_2 h_2^2 = M \dots \dots 251)$$

i
$$\frac{m_1}{m_1+1} \nu_1 h_1 = \frac{m_2}{m_2+1} \nu_2 h_2 \dots \dots \dots 252)$$

Z równ. 244) i 245) wynika:

$$\frac{\alpha_1 \nu^{m_1}}{\alpha_2 \nu^{m_2}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{h_1}{h_2} \dots \dots \dots 253)$$

Nareszcie jest:
$$h = h_1 + h_2 \dots \dots \dots 254)$$

Jeżeli znamy m_1 , m_2 , α_1 i α_2 , to z czterech równań 251), 252), 253) i 254) dadzą się obliczyć cztery nieznanne h_1 , h_2 , v_1 i v_2 .

Geusen przyjmuje pewne skrócenie w obliczeniu. W materyałach, o których tu mowa, jest współczynnik wytrzymałości na ciągnięcie $\mu' < \mu$ współczynnika wytrzymałości na ciśnienie. Jeżeli przyjmiemy n -tą pewność, to $\tau' = \frac{\mu'}{n}$ jest natężenie dopuszczalne na ciągnięcie.

Zróbmy w 252) $\tau' = v_2$, to

$$v_1 = \frac{m_2}{m_2 + 1} \frac{m_1 + 1}{m_1} \frac{h_2}{h_1} \tau'.$$

Nazwijmy $\frac{m_2}{m_2 + 1} \frac{m_1 + 1}{m_1} = \varphi$ 255)

to $v_1 = \varphi \tau' \frac{h_2}{h_1}$ 256)

Z równ. 252) mamy $v_2 h_2 = \frac{v_1 h_1}{\varphi}$.

Równ. 251) możemy więc napisać:

$$v_1 h_1 \left(\frac{h_1 m_1}{2 m_1 + 1} + \frac{m_2}{2 m_2 + 1} \frac{h_2}{\varphi} \right) = M,$$

albo $\varphi \tau' h_2 \left(h_1 \frac{m_1}{2 m_1 + 1} + \frac{h_2}{\varphi} \frac{m_2}{2 m_2 + 1} \right) = M$. . . 257)

a że $h_1 = h - h_2$, więc z tych dwu równań możemy obliczyć h_2 .

Współczynniki m podane powyżej nie są zupełnie dokładne i zmieniają się wedle jakości materyału. Przyjmiemy w przybliżeniu z Bachem dla żelaza lanego $m_1 = 1,04$, $m_2 = 1,10$, to

$$\varphi = \frac{1,10}{1,04} \frac{2,04}{2,10} = 1,027$$

$$\frac{m_1}{2 m_1 + 1} = \frac{1,04}{3,08} = 0,3377, \quad \frac{1}{\varphi} \frac{m_2}{2 m_2 + 1} = \frac{1}{1,027} \frac{1,10}{3,20} = 0,3346.$$

Dla granitu jest $m_1 = 1,12$, $m_2 = 1,40$

$$\varphi = \frac{1,40}{1,12} \frac{2,12}{2,40} = 1,10, \quad \frac{m_1}{2 m_1 + 1} = \frac{1,12}{3,24} = 0,35.$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{m_2}{2 m_2 + 1} = \frac{1}{1,10} \frac{1,40}{3,80} = 0,34.$$

Z tego widzimy, że w przybliżeniu dla obu materyałów:

$$\frac{m_1}{2 m_1 + 1} = \frac{1}{\varphi} \frac{m_2}{2 m_2 + 1} = \frac{1}{3} \quad 258)$$

Jeżeli to wstawimy w równ. 257), to

$$\frac{\varphi \tau' h_2}{3} (h_1 + h_2) = M, \text{ zatem}$$

$$h_2 = \frac{3M}{\varphi \tau' h} \dots \dots \dots 259)$$

Mamy zatem z 256):

$$v_1 = \varphi \tau' \frac{h_2}{h_1} = \frac{3M}{h h_1} \dots \dots \dots 260)$$

Dla złamania możemy wstawić μ' zamiast τ' , więc

$$h_2 = \frac{3M}{\varphi \mu' h}$$

Nazwijmy $h_2 = \alpha h$, to $\mu' = \frac{3M}{\alpha \varphi h^2}$, a że dla szerokości 1 cm $W = \frac{h^2}{6}$, więc:

$$\mu' = \frac{1}{2\alpha\varphi} \frac{M}{W} \dots \dots \dots 261)$$

Ponieważ $\alpha\varphi$ jest dla granitu i żelaza lanego prawie równe jednostce, więc:

$$\mu' = \frac{1}{2} \frac{M}{W} \dots \dots \dots 262)$$

Rzeczywista wytrzymałość na ciągnięcie żelaza lanego i granitu, jest więc prawie równa połowie wytrzymałości, otrzymanej z doświadczeń na złamanie, a obliczonej zwykłym sposobem wedle hipotezy Naviera (proporcjonalność wydłużeń i natężeń), co zgadza się z doświadczeniem. Dla betonu znalazł Carling*) ten stosunek 2,2.

§. 66. Natężenie w belkach, gdy siły nie działają w płaszczyźnie osi głównych.

Przypuśćmy, że obciążenie belki działa w płaszczyźnie ZZ, a osie główne przekroju (rys. 159) są XX i YY. Moment sił zewnętrznych ze względu na ten przekrój niech będzie M, to moment ten rozłożyć możemy na dwa momenty składowe, działające w płaszczyznach XX i YY, mianowicie:

M wst α działający w płaszczyźnie prostopadłej do YY
i M dost α " " " " XX.

*) Por. Zeitschr. des österr. Ing. Arch. Ver. 1897 str. 11.

Jeżeli nazwiemy I moment bezwładności ze względu na oś XX , I_1 ze względu na oś YY , to momenty powyższe wywołują nateżenia dla dowolnego punktu przekroju L

$$v_1 = \frac{M \text{ dost } \alpha y}{I}, \quad v_2 = \frac{M \text{ wst } \alpha x}{I_1},$$

a zatem
$$v = v_1 + v_2 = M \left(\frac{y \text{ dost } \alpha}{I} + \frac{x \text{ wst } \alpha}{I_1} \right). \quad . \quad . \quad 263)$$

Dla punktu L_1 jest x ujemne. Widzimy więc, że w ówiartkach, przez które przechodzi prosta ZZ , x i y mają te same znaki, w dwóch innych zaś odwrotne.

Jeżeli chcemy wyznaczyć położenie osi obojętnej, to zróbmy w równ. 263) $v=0$, więc

$$\frac{y \text{ dost } \alpha}{I} + \frac{x \text{ wst } \alpha}{I_1} = 0.$$

Jest to równanie osi obojętnej, które da się napisać też:

$$y = -\frac{I}{I_1} x \text{ st } \alpha. \quad . \quad 264)$$

Jest to równanie linii prostej, zatem oś obojętna jest linią prostą i przechodzi przez środek ciężkości O , bo dla $x=0$, $y=0$.

Niech prosta NN będzie osią obojętną. Dla punktu jej U jest

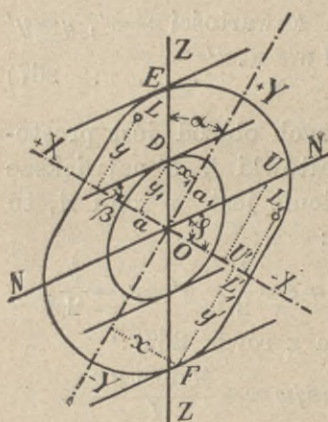
$UU_1 = y$, $OU_1 = -x$, więc $\text{st } \varphi = \frac{UU_1}{OU_1} = -\frac{y}{x}$, albo po wstawieniu wartości z 266):

$$\text{st } \varphi = \frac{I}{I_1} \text{ st } \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 265)$$

A więc położenie osi obojętnej niezależne jest od wielkości obciążenia ani momentu, lecz tylko od przekroju i położenia płaszczyzny obciążenia.

Jeżeli mamy wykreśloną elipsę bezwładności, to równanie jej wedle 164) jest: $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{a^2}$, stąd:

$$\frac{2x_1 dx_1}{a_1^2} + \frac{2y_1 dy_1}{a^2} = 0, \quad \text{zatem: } \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x_1 a^2}{y_1 a_1^2}.$$



Rys. 159.

Jeżeli zastosujemy to równanie do punktu D , to

$$\operatorname{st} \beta = -\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 a^2}{y_1 a_1^2} = \frac{a^2}{a_1^2} \operatorname{st} \alpha = \frac{F a^2}{F a_1^2} \operatorname{st} \alpha = \frac{I}{I_1} \operatorname{st} \alpha = \operatorname{st} \varphi,$$

a stąd: $\beta = \varphi$ 266)

A zatem oś obojętna jest osią sprzężoną osi ZZ , w której działają siły.

Natężenia v są, jak wiadomo, proporcjonalne do odległości od osi obojętnej, więc największe natężenia są w E i F , które to punkty otrzymamy, poprowadziwszy styczne do obwodu przekroju, równoległe do osi obojętnej.

Z równ. 263) wynikają dla punktu F wartości $x=x'$, $y=y'$

$$\text{najw } v = \frac{M \operatorname{dost} \alpha \cdot y'}{I} + \frac{M \operatorname{wst} \alpha \cdot x'}{I_1}. \quad . . . \quad 267)$$

Dla przekroi symetrycznych, których obwód jest prostokątny, więc prostokąta (rys. 160), kształtówki I , U największe natężenie jest w rogu A , tu więc:

$$y' = e = \frac{h}{2}, \quad x' = e_1 = \frac{b}{2},$$

zatem z równ. 267):

$$\begin{aligned} \text{najw } v &= \frac{M \operatorname{dost} \alpha e}{I} + \\ &+ \frac{M \operatorname{wst} \alpha e_1}{I_2}, \end{aligned}$$

albo gdy nazwiemy:

$$M \operatorname{dost} \alpha = M_1, \quad M \operatorname{wst} \alpha = M_2,$$

$$\frac{I}{e} = W_1, \quad \frac{I_1}{e_1} = W_2,$$

$$\text{najw } v = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2}. \quad 268)$$

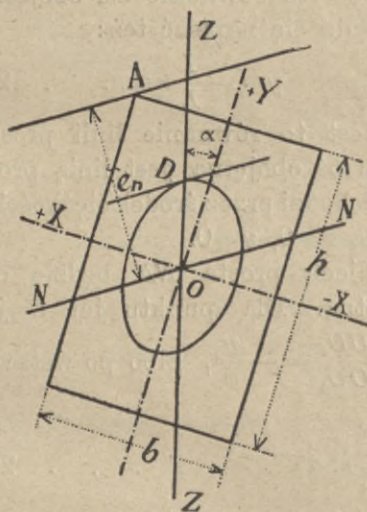
Jeżeli chcemy obliczyć przekrój dla danego M , to

zrobimy $\text{najw } v = \tau$. Nazwijmy dalej:

$$W_1 = c W_2 \quad 269)$$

to: $\tau = \frac{M_1}{W_1} + \frac{c M_2}{W_1}$, a stąd:

$$W_1 = \frac{M_1 + c M_2}{\tau} \quad 270)$$



Rys. 160.

Jeżeli dla danego przekroju znamy c , to dla danego momentu możemy z 270) obliczyć wprost moment oporu, a stąd liczbę kształtówki lub wymiary prostokąta.

Dla prostokąta $W_1 = \frac{bh^2}{6}$, $W_2 = \frac{hb^2}{6}$, więc:

$$c = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{6}{b^2h} = \frac{h}{b} \dots \dots \dots 271)$$

Wartości c dla kształtówek I i U podajemy w następujących tabliczkach.

Kształtówki I (norm. austr.).

liczba	c	l.	c	l.	c	l.	c	l.	c
8	4,96	15	6,59	21	7,66	24a	6,28	30	8,60
10	5,48	16	6,71	22	7,75	25	8,05	32	8,86
12	5,90	18	6,94	22a	5,83	26	8,21	35	9,04
13	6,11	18a	4,66	23	7,73	28	8,32	40	9,45
14	6,50	20	7,36	24	7,90	28a	6,63	45	9,70

Kształtówki U (norm. austr.).

liczba	c	l.	c	l.	c	l.	c	l.	c
6	3,14	12	5,03	16	6,04	22	7,05	28	7,74
8	3,92	13	5,13	18	6,47	24	7,27	30	7,99
10	4,63	14	5,70	20	6,71	26	7,57		

Kształtówki I (norm. niem.).

liczba	c	l.	c	l.	c	l.	c	l.	c
8	6,50	15	7,83	22	8,34	29	8,99	40	9,76
9	6,80	16	7,92	23	8,50	30	9,07	42½	9,89
10	7,01	17	8,02	24	8,50	32	9,23	45	10,1
11	7,23	18	8,10	25	8,54	34	9,40	47½	10,1
12	7,38	19	8,20	26	8,72	36	9,53	50	10,3
13	7,57	20	8,26	27	8,76	38	9,67	55	10,3
14	7,65	21	8,31	28	8,91				

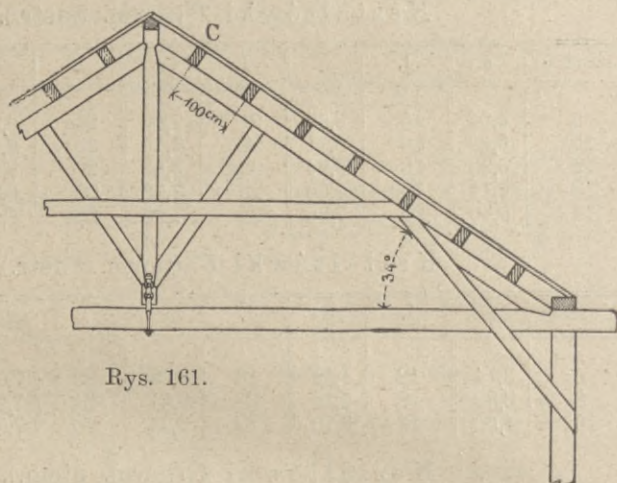
Kształtówki I szerokostopowe (Differdinger).

liczba	c	l.	c	l.	c	l.	c	l.	c
18 B	3,28	27 B	3,35	34 B	3,84	47½ B	5,37	75 B	9,44
20 B	3,29	28 B	3,36	36 B	4,03	50 B	5,70	80 B	10,2
22 B	3,34	29 B	3,40	38 B	4,26	55 B	6,33	85 B	11,0
24 B	3,37	30 B	3,60	40 B	4,46	60 B	7,07	90 B	11,8
25 B	3,37	32 B	3,59	42½ B	4,78	65 B	7,83	95 B	12,7
26 B	3,37			45 B	5,06	70 B	8,63	100 B	13,6

Kształtówki U (norm. niem.).

liczba	c	l.	c	l.	c	l.	c	l.	c
3	1,59	8	4,16	14	5,85	20	7,09	26	7,76
4	2,31	10	4,84	16	6,32	22	7,28	28	7,88
5	2,82	12	5,48	18	6,73	24	7,57	30	7,90
$6\frac{1}{2}$	3,50								

Przykład. 1. W punkcie C leży na krokwi nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha=34^\circ$ (rys. 161) płatw drewniana. Odstęp więzarów wynosi 7 m, ciężar pionowy na m^2 dachu pochyłego 120 kg, odstęp płatwi 1 m.



Rys. 161.

Wyznaczyć wymiary płatwi dla $\tau=80 \text{ kg/cm}^2$. Siła działająca na m. b. krokwi jest $q=120 \text{ kg/m}$, więc moment największy

$$M = \frac{1}{8} 0,12 \cdot 7^2 = 0,735 \text{ tm} = 73500 \text{ kgcm},$$

kąt $\alpha=34^\circ$, więc $M_1 = M \text{ dost } 34^\circ = 73500 \times 0,829 = 60931 \text{ kgcm}$

$$M_2 = M \text{ wst } 34^\circ = 73500 \times 0,559 = 41088 \text{ kgcm}.$$

Przyjmijmy $\frac{h}{b} = 2$, to $c = 2$, więc wedle 270):

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{M_1 + 2M_2}{80} = \frac{60931 + 2 \cdot 41088}{80},$$

$$bh^2 = \frac{6 \cdot 143107}{80} = 10733, \text{ a że } \frac{h}{b} = 2, \text{ więc } h^2 = 20766, h = 27,5.$$

Przyjmijmy więc $b = 14 \text{ cm}$, $h = 28 \text{ cm}$.

Zbadajmy teraz w celu próby, jakie jest natężenie największe w przekroju. Wedle równ. 268) otrzymamy natężenie w punkcie D (rys. 162).

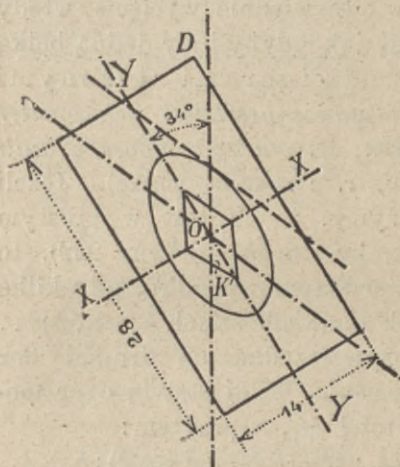
$$\nu = \frac{60931 \cdot 14}{12 \cdot 14 \cdot 28^3} + \frac{41088 \cdot 7}{12 \cdot 28 \cdot 14^3} = 77,47 \text{ kg/cm}^2,$$

zatem mniejsze, niż 80 kg/cm^2 , bośmy wymiary zaokrąglili w górę.

2. Obliczyć platew z kształtówki I , położonej na krokwi, nachylonej pod kątem α , przyczem $st\alpha=0,6$. Długość płatwi niech będzie 6 m, ciężar jednostajnie rozdzielony na całą długość 1,550 t, więc moment największy

$$M = \frac{1}{8} 1,550 \cdot 6 = 1,1625 \text{ tm} = 116250 \text{ kgcm}.$$

Wedle 270) jest $W_1 = \frac{M_1 + cM}{\tau}$.



Rys. 162.

Mamy dalej:

$$st\alpha = 0,6, \log st\alpha = 9,77815, \alpha = 30^\circ 57' 50''$$

$$\log M = 5,06540 \quad \log M = 5,06540$$

$$\log \text{dost } \alpha = 9,93323 \quad \log \text{wst } \alpha = 9,71139$$

$$\log M_1 = 4,99863 \quad \log M_2 = 4,77679$$

$$\log M_1 = 99685 \quad \log M_2 = 59912$$

Przyjmijmy $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$, a tymczasowo $c = 8$, to:

$$W_1 = \frac{99685 + 8 \cdot 59912}{800} = 722,73 \text{ cm}^3.$$

Z tabl. w §. 54 znajdujemy dla kształtówki l. 30, $W_1 = 733,5 \text{ cm}^3$.

Przeliczmy teraz dokładniej. Dla l. 30 jest dokładnie $c = 8,60$,

$$\text{więc } W_1 = \frac{99685 + 8,60 \cdot 59912}{800} = 709 \text{ cm}^3.$$

A zatem kształtówka l. 30 jest za mała. Przyjąwszy l. 32, otrzymamy $c = 8,85$, więc:

$$W_1 = \frac{99685 + 8,85 \cdot 59912}{800} = 787 \text{ cm}^3,$$

a że dla l. 32 jest $W_1 = 873,8 \text{ cm}^3$, więc kształtówka l. 32 jest wystarczająca.

Ale szerokostopowa kształtówka l. 28a jest także wystarczającą, bo $W_1 = 734,2$, a $c = 6,63$, więc potrzebne:

$$W_1 = \frac{99685 + 6,63 \cdot 59912}{800} = 620,3 \text{ cm}^3,$$

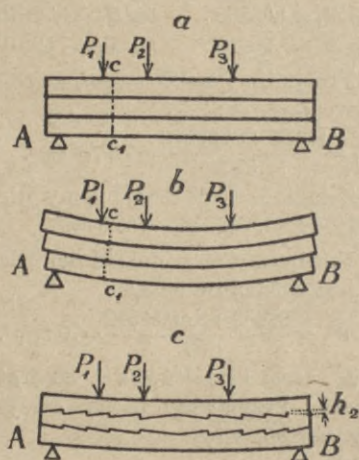
a zatem kształtówka ta jest aż nadto silną. Ponieważ kształtówka ta waży 61,94 kg/m a l. 32 69,85 kg/m, więc korzystniejszą jest kształtówka l. 28a.

§. 67. Dźwigary drewniane złożone.

Jeżeli obciążenie jest tak wielkie, że wytrzymałość jednej belki drewnianej o zwykłych wymiarach nie wystarcza, wtedy kładziemy kilka belek jedna na drugiej (rys. 163 a).

Łatwo zrozumiemy, że belki te położone jedna na drugiej uniosą sumę ciężarów, któreby uniosła każda belka z osobna.

Jeżeli na belkę AB , podpartą w dwu punktach, działają siły, wtedy każda belka z osobna się ugnie tak, że przekroje, znajdujące się przed ugięciem w linii C , przesuną się po ugięciu (rys. 163 *b*). Jeżeli przesunięciu temu przeszkodzimy przez to, że wytniemy w belkach zęby (n. *Zahn*, fr. *dent*, an. *tooth*, r. зубъ) albo wetknijemy kliny, zaporki (n. *Dübel*, fr. *la clef d'assemblage*, an. *key*, r. клинь) w odpowiednie wycięcia, wtedy belki wszystkie razem wygną się, jak gdyby były jedną belką (rys. 163 *c*). Belki takie nazywamy dźwigarami złożonymi



Rys. 163.

(n. *zusammengesetzter*, *gekuppelter Balken*, fr. *poutre composé*, a. *built beam*, r. сложная балка). Jeżeli zważymy, że M jest w prostym stosunku do bh^2 , (równ. 222), to w pierwszym wypadku, gdy kilka belek o wysokościach $h_1, h_2, h_3 \dots$ położymy jedną na drugiej bez połączenia, belki stawiają opór momentowi M_1 , a przytem:

$$M_1 : M = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) : h_1^2,$$

jeżeli M oznacza moment, odnoszący się do belki o wysokości h_1 . Jeżeli te belki połączymy klinami, wtedy w przybliżeniu:

$$M_2 : M = (h_1 + h_2 + h_3)^2 : h_1^2,$$

więc M_2 jest o wiele większe od M_1 , a dźwigary złożone mogą o wiele więcej unieść, niż belki jedna na drugiej położone bez połączenia.

Ponieważ jednak połączenie dźwigarów nie może być w praktyce tak dokładnem, aby dźwigary tworzyły jedną belkę, bo już ściśliwość drzewa i wżeranie się między włókna drzewa czelnego sprawia nadzwyczaj małe przesunięcie poziome, więc, aby uwzględnić zmniejszoną przez to wytrzymałość dźwigaru złożonego, należy przyjąć mniejsze natężenie dopuszczalne, o czem poniżej mówić będziemy szczegółowo.

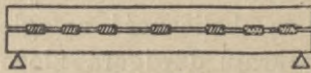
Połączyć belki możemy przez zazębienie albo zaklinowanie. Rozróżniamy więc dźwigary złożone zazębione (n. *verzahnter Balken*, fr. *poutre à crémailleres*, an. *indented beam* (rys. 163 *c*) lub klinowane (n. *verdübelter Balken*, fr. *la poutre à crémailleres*, an. *built beam with keys*) (rys. 164). Jeżeli od-

stęp belek dźwigaru jest znaczny, nazywamy dźwigary klockowymi (n. *Klötzelträger*) (rys. 165).

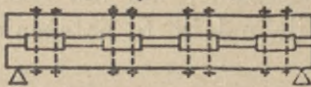
Często wyginają dźwigary zazębione przy wycinaniu zębów w górę, aby powiększyć wytrzymałość. Wskutek sztucznego wygięcia bowiem powstaje w górnych włóknach ciągnienie,

a w dolnych ciśnienie, wskutek zaś obciążenia przeciwnie w dolnych włóknach ciągnienie, a w górnych ciśnienie, a stąd nateżenie jest mniejszem, niż w belkach pierwotnie prostych; tego jednak w obliczeniach nie uwzględniamy.

Rys. 164.

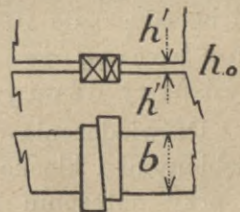


rys.165.



muszą być zęby bardzo dokładnie wycięte, aby zęby jednej belki wypełniały zupełnie wycięcia drugiej belki, gdyż inaczej możliwym jest małe przesunięcie belek w kierunku poziomym, a wtedy belki nie działają już jako całość, jako dźwigar złożony, lecz każda belka osobno, przez co wytrzymałość znacznie się zmniejsza.

Jednak chociaż zęby są zupełnie dokładnie wykonane, to później wskutek zsuchania i wżerania się drzewa nie zupełnie przystają. Przy dźwigarach klinowanych nie mamy tych niedogodności, kliny bowiem składają się z dwu części (rys. 166) i dadzą się wbić tak daleko, że szczelnie wypełniają dziury, a w razie zeschnięcia się drzewa możemy je pobić tak, że znów będą przystawały. Z drugiej strony jednak, jeżeli dźwigar podlega wielkim wstrząśnieniom, kliny rozchełtują się, niedogodność tę możemy jednak usunąć w ten sposób, że zabijamy po dokładnem spojeniu belek gwoździe na cieńszych końcach klinów.



Rys. 166.

Wiemy, że moment oporu belki jest proporcjonalnym do bh^2 , a więc do wysokości w kwadratowym stosunku; ta więc belka ma większy moment oporu, której wysokość jest większą. Ponieważ zaś przy dźwigarze zazębionym tracimy na wysokości przez wycięcie zębów, a przy dźwigarze klinowanym przeciwnie zyskujemy na wysokości wskutek odstępu między belkami, zatem

korzystniej jest i z tego względu używać dźwigarów klinowanych.

§. 68. Natężenie dopuszczalne.

Wspominaliśmy już, że dźwigara złożonego nie jesteśmy w stanie tak wykonać, aby belki nieco się nie przesunęły jedna względem drugiej, wskutek czego dźwigar złożony nie jest tak wytrzymałym, jak jednolity. Aby tę okoliczność uwzględnić, musimy więc przy obliczaniu przekroju dźwigara złożonego przyjąć mniejsze natężenie dopuszczalne, niż dla belki jednolitej. Zachodzi teraz pytanie, o ile należy to natężenie dopuszczalne zmniejszyć.

W r. 1691 ogłosił major inżynierzy Maurycy Bock sprawozdanie *) o licznych doświadczeniach, robionych z drewnianymi dźwigarami złożonymi, które dały następujące wyniki.

Doświadczenia rozpoczęto z dźwigarem złożonym z trzech belek i tylko ześrubowanym. Po obciążeniu nastąpiło jednak natychmiast przesunięcie belek i tak wielkie ugięcie, że okazało się, że śruby wcale nie przyczyniły się do powiększenia wytrzymałości; przy obciążeniu bowiem belki ściskają się i wysokość ich zmniejsza się w ten sposób, że natężenie w śrubach spada do zera. Pomimo, że śruby były tak silnie naciągnięte, że wcisnęły się w drzewo o 5 mm, po obciążeniu stały się w środkowej zwłaszcza części dźwigara nietylko zupełnie luźne, ale można było jeszcze między podkładką a naśrubkiem wstawić blaszkę 5 do 10 mm grubą. A zatem na tarcie, wywołane naciągnięciem śruby nie możemy wcale liczyć przy dźwigarach złożonych.

Doświadczenia dalsze robione z dźwigarami klinowanymi, zazębionymi i klockowymi wykazały, że dźwigary łamały się już przy natężeniu 141 do 239 kg/cm^2 , obliczonym z wzoru $vJ = Me$, który, jak wiadomo, ważnym jest jednak tylko do granicy sprężystości.

Dla porównania robiono próby z belkami pojedynczemi, przyczem okazały one wytrzymałość 440 kg/cm^2 , a więc około 2 razy większą.

*) Por. Wochenschrift des österr. Ing. u. Arch. Ver. 1891, str. 21.

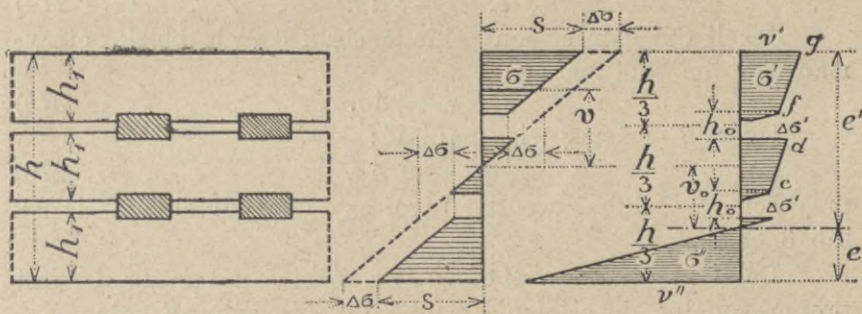
Na podstawie tych doświadczeń ogłosił prof. Melan*) teorię złożonych dźwigarów drewnianych, którą tu wyłożymy.

Ponieważ przecięte dla klinów lub zębów włókna skracają się wskutek ciśnienia podobnie, jak i kliny, a to proporcjonalnie do ciśnienia, i ponieważ wykonanie nie może być zupełnie dokładne, następuje małe przesunięcie włókien dwu belek sąsiednich, co spowoduje różnicę natężeń w tych włóknach $\Delta\sigma$. Natężenia w danym przekroju dźwigaru złożonego rozłożą się wtedy w sposób wskazany na rys. 167.

Natężenie w odstępzie v od osi obojętnej jest wtedy:

$$\left. \begin{array}{l} \text{w średniej belce } \sigma = av \\ \text{w skrajnych } \sigma_1 = av - \Delta\sigma \end{array} \right\} \dots \dots \dots 272)$$

gdzie v oznacza odstęp włókna danego od osi obojętnej, a a współczynnik, przedstawiający natężenie w odstępzie $v=1$.



Rys. 167.

Rys. 168.

Suma momentów sił zewnętrznych musi być równą sumie momentów sił wewnętrznych**), a więc moment:

$$M = 2 \int_0^{1/6 h} \sigma v dF + 2 \int_{1/6 h}^{1/2 h} \sigma_1 v dF, \text{ jeżeli}$$

$dF = b dv$ oznacza element powierzchni. Wstawiwszy wartość za v z rów. 272), otrzymamy:

$$\begin{aligned} M &= 2 ab \int_0^{1/6 h} v^2 dv - 2 b \int_{1/6 h}^{1/2 h} v \Delta\sigma dv, \text{ czyli} \\ M &= 2 ab \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} - 2 b \Delta\sigma \frac{h^2}{9} = \frac{1}{12} abh^3 - \frac{2}{9} \Delta\sigma bh^2. \dots 273) \end{aligned}$$

*) Por. Wochenschrift des österr. Ing. u. Arch. Ver. 1891, str. 46.

**) Por. §. 37.

Nazwijmy teraz natężenie włókna skrajnego belki skrajnej s , to z drugiego równania 272) otrzymamy dla $v = \frac{h}{2}$

$$s = \frac{\alpha h}{2} - \Delta\sigma, \text{ a stąd } \alpha = \frac{2(s + \Delta\sigma)}{h},$$

co wstawiliśmy w 273), będziemy mieli:

$$M = (s + \Delta\sigma) \frac{bh^2}{6} - \frac{2}{3} \Delta\sigma bh^2 = \frac{bh^2}{18} (3s - \Delta\sigma).$$

Jeżeli nazwiemy s_0 największe natężenie obliczone wedle zwykłego $s_0 = \frac{6M}{bh^2}$ (równ. 222), to $bh^2 = \frac{6M}{s_0}$, co wstawiliśmy w poprzednie równanie, otrzymamy:

$$M = \frac{6M}{18s_0} (3s - \Delta\sigma), \text{ a stąd}$$

$$s_0 = s - \frac{1}{3} \Delta\sigma. \quad \dots \dots \dots 274)$$

Jeżeli dźwigar złożony składa się z dwóch belek, otrzymamy w ten sam sposób:

$$s_0 = s - \frac{1}{4} \Delta\sigma. \quad \dots \dots \dots 275)$$

Ogólnie możemy więc napisać:

$$s_0 = s - \delta \cdot \Delta\sigma, \quad \dots \dots \dots 276)$$

przyczem $\delta = \frac{1}{4}$ lub $\frac{1}{3}$ według tego, czy dźwigar składa się z 2 lub 3 belek.

Dalej przypuszcza Melan, że różnica natężenia $\Delta\sigma$ jest proporcjonalną do ciśnienia z na kliny lub zęby, a zatem

$$\Delta\sigma = \beta z, \quad \dots \dots \dots 277)$$

co jednakże tylko w przybliżeniu jest ważnem, bo przesunięcia, powstałe wskutek niedokładnego wykonania nie są proporcjonalnemi do ciśnienia tak, że właściwie powinniśmy napisać $\Delta\sigma = \beta_0 + \beta z$, gdzie β_0 i β są ilości stałe. Ale że trudno ocenić, jak wielkie w praktyce może być β_0 , więc przypuściwszy bardzo staranną robotę, założymy $\beta_0 = 0$, więc $\Delta\sigma = \beta z$.

Możemy więc napisać zamiast równ. 276):

$$s_0 = s - \beta \delta z. \quad \dots \dots \dots 278)$$

A więc wedle Melana obliczać możemy dźwigary złożone jako dźwigary jednolite według zwykłych wzorów, jeżeli zamiast natężenia dopuszczalnego s przyjmiemy natężenie dopuszczalne mniejsze s_0 wedle 278).

Na podstawie doświadczeń Bocka wyznaczył Melan dla rozmaitych dźwigarów złożonych współczynniki β , gdyż w każdym wypadku znanem było w chwili złamania s_0 , s , δ i z .

Melan otrzymał dla belek klinowanych $\beta=7,2$ }
 „ „ zazębionych $\beta=4,6$ } . 279)
 „ „ klockowych $\beta=3,7$ }

Ale powyższe wzory Melana nie były uzasadnione, bo gdyby były one prawdziwe, otrzymalibyśmy tak małe natężenie dopuszczalne, że użycie dźwigarów złożonych nie byłoby możliwe w praktyce, co się nie zgadza z rzeczywistością. Przyczyną tego jest, że równ. 278) odnosi się do chwili złamania, a nie może być wprost zastosowane do natężenia dopuszczalnego. Jeżeli natężenie dopuszczalne dla belek pojedynczych nazwiemy τ , a dla złożonych dźwigarów τ_0 , ciśnienie dopuszczalne na ząb τ' a współczynnik pewności dla ciągnięcia n , względnie dla ciśnienia n' , to

$$\tau_0 = \frac{s_0}{n}, \quad \tau = \frac{s}{n}, \quad \tau' = \frac{z}{n'}, \quad \text{a z równ. 278)}$$

$$n \tau_0 = n \tau - \beta \delta n' \tau', \quad \text{zatem}$$

$$\tau_0 = \tau - \beta \delta \frac{n'}{n} \tau' \quad 280)$$

Oprócz tego zwrócić należy uwagę, że Melan wyznaczył β z doświadczeń na złamanie na podstawie wzoru zwykłego, ważnego jednak tylko do granicy sprężystości. Po przekroczeniu tej granicy rozdzielają się natężenia w przekroju zupełnie wedle innego prawa. Jeżeli więc chcemy korzystać z doświadczeń na złamanie, musimy wyznaczyć natężenia, które powstają w chwili złamania i na tej podstawie wyznaczyć współczynnik β .

Granica sprężystości drzewa dla ciągnięcia leży bardzo wysoko tak, że spada prawie ze współczynnikiem wytrzymałości μ , granica sprężystości zaś dla ciśnienia leży przy 130 do 150 kg/cm^2 . Jeżeli to uwzględnimy, jakoteż i różnice w natężeniu $\Delta \sigma$ włókien sąsiednich dwu belek, to natężenia rozłożą się w chwili złamania w dźwigarze złożonym wedle rys. 168.

Linia natężeń będzie tu kilka razy łamaną. Linie natężeń poza granicą sprężystości cd i fg są naturalnie stromsze, niż inne. Ponieważ przekroje zostały osłabione przez wcięcie na kliny więc musimy to także uwzględnić i nie przyjmujemy w tych częściach przekroju żadnych natężeń.

Z warunku, że suma natężeń dodatnich i ujemnych musi być równą zeru, da się udowodnić*), że oś obojętna po prze-

*) P. art. autora: „Przegląd Techniczny“ 1891, str. 20.

kroczeniu granicy sprężystości znacznie się zniża (poniżej czwartej części wysokości). Z drugiego warunku, że moment sił zewnętrznych musi być równy momentowi sił wewnętrznych w przekroju, otrzymaliśmy w przybliżeniu ν , z którego wynika

dla dźwigarów klinowanych $\beta=2,1$

„ „ zazębionych $\beta=1,5$

„ „ klockowych $\beta=1,1$

Ponieważ to wyznaczenie nie było zupełnie dokładnem, przyjmijmy dla pewności:

dla dźwigarów klinowanych	$\beta=3$	}	. . . 281)
„ „ zazębionych	$\beta=2,2$		
„ „ klockowych	$\beta=1,6$		

Teraz trzeba by jeszcze zbadać, jak wielkie możemy przyjąć τ i τ' , względnie jaką przyjmujemy wartość dla n i n' . Podobnie jak dla nitów przyjmowaliśmy większe ciśnienia dopuszczalne na ściankę dziury*), niż w ogóle ciśnienie w pręcie, tak i tu możemy przyjąć mniejszy współczynnik pewności dla ciśnienia na kliny, więc gdy n. p. $n=4$, możemy przyjąć $n'=1,7$,

zatem $\frac{n'}{n}=0,425$.

Ogólnie mamy: $n'=\frac{z}{\tau'}$, $n=\frac{s}{\tau}$, więc $\frac{n'}{n}=\frac{z}{s} \frac{\tau}{\tau'}$, a zatem

$\tau_0=\tau-\beta\delta\frac{z}{s}\frac{\tau}{\tau'}$, czyli

$$\tau_0=\tau\left(1-\beta\delta\frac{z}{s}\right) \quad 282)$$

Dla dźwigarów klinowanych możemy przyjąć $s=450 \text{ kg/cm}^2$, $z=120 \text{ kg/cm}^2$ prostopadle do włókien, $\beta=3$, więc $\tau_0=\tau(1-0,80\delta)$.

Dla dwu belek więc $\tau_0=0,80\tau$, dla trzech $\tau_0=0,73\tau$. 283)

Dla dźwigarów zazębionych przyjmujemy:

$s=450 \text{ kg/cm}^2$, $z=300 \text{ kg/cm}^2$, $\beta=2,2$, więc $\tau_0=\tau(1-1,46\delta)$.

Dla dwu belek więc $\tau_0=0,64\tau$, dla trzech $\tau_0=0,51\tau$. 284)

Dla belek klockowych jest: $s=450 \text{ kg/cm}^2$, $z=300 \text{ kg/cm}^2$, $\beta=1,6$, więc $\tau_0=\tau(1-1,06\delta)$; zatem:

dla dwu belek będzie $\tau_0=0,74\tau$, dla trzech $\tau_0=0,65\tau$. 285)

Przy zastosowaniu tych wzorów należy przyjąć τ' , mamy na mocy poprzedniego $\tau'=\frac{n}{n'}\frac{z}{s}\tau=\frac{4}{1,7}\frac{z}{s}\tau$, $\tau'=2,35\frac{z}{s}\tau$, więc dla dźwigarów klinowanych $\tau'=0,61\tau$, dla dźwigarów zazębionych i klockowych podłużnych wypadaloby $\tau'=1,54\tau$, przyjmu-

*) Por. §. 31.

jemy jednak znacznie mniej, zwykle $\tau' = 0,8\tau$, τ należy przyjąć 80, 100, względnie 120 kg/cm^2 .

Z powyższego widzimy, że dźwigary złożone musimy obliczać dla nateżeń dopuszczalnych znacznie niższych, mianowicie niższych dla 2 belek o 20 do 36%, dla trzech belek o 17 do 49% tak, że korzyść z użycia dźwigarów złożonych, zwiększająca się w stosunku kwadratowym do wysokości, staje się znów z tego powodu coraz mniejszą, im więcej belek do dźwigaru używamy.

Rozporządzenie austr. min. kolei z r. 1904 §. 8, 9. Przy dźwigarach z drzewa, złożonych z dwu lub więcej belek (dźwigary klinowane lub zazębione) oblicza się moment oporu całego przekroju poprzecznego dźwigaru:

przy 2 belkach zazębionych tylko na	80%
„ 3 „ „ „ „ „	60%
„ 2 „ klinowanych „ „	70%
„ 3 „ „ „ „	50%

§. 69. Obliczenie przekroju dźwigaru złożonego.

1. Dwie belki.

Nazwijmy wysokość całego dźwigaru (rys. 169) h , wysokość i szerokość jednej belki h' i b , średnicę śruby d , wysokość klinów i klocków h_1 , zębów h_2 , odstęp między belkami h_0 , to możemy napisać:

a) dla dźwigaru klinowanego:

$$I = \frac{1}{12}(b-d)(h^3 - h_1^3) \quad \tau I = \frac{1}{2} h M \quad \dots 286)$$

Przyjmijmy $h_0 = 0,1 h'$, to $h = 2h' + h_0 = 2,1 h'$, a stąd $h' = 0,476 h$.

Przyjmijmy dalej tymczasowo:

$$b = 0,75 h', \quad h_1 = 0,3 h', \quad d = 0,1 b,$$

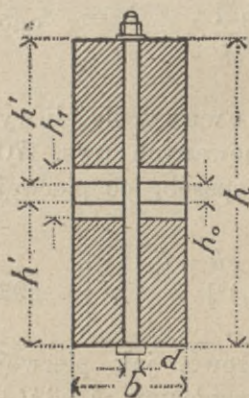
to wstawivszy te wartości w równ. 286), otrzymamy:

$$I = \frac{1}{12} 0,9 b [h^3 - (0,3 \times 0,476 h)^3], \text{ a dalej}$$

$$\tau \cdot \frac{3}{40} \frac{0,75}{2,1} h (h^3 - 0,0029 h^3) = \frac{1}{2} h M, \text{ nareszcie:}$$

$$h = 2,66 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \quad \dots 287)$$

Jest to jednak tylko wartość przybliżona; po dokładnem obliczeniu klinów i śrub i wstawieniu dokładnych wartości w równ. 286) otrzymamy dokładną wartość h .



Rys. 169.

Jeżeli przyjmiemy wszystkie wartości jak poprzednio, tylko $b=h'$, otrzymamy: $h=2,42\sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}$ 288)

Wogóle, jeżeli przyjmiemy szerokość b k razy większą, to wysokość h otrzymamy $\frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ mniejszą.

b) Dźwigar zazębiony.

Tutaj mamy $h=2h'-h_2$ (rys. 163c). Przyjąwszy $h_2=0,2h'$, otrzymamy $h=1,8h'$, a stąd $h'=0,556h$, dalej gdy $h=\frac{3}{4}h'$ a $d=0,1b$, otrzymamy zupełnie w ten sam sposób:

$$h=2,52\sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}. 289)$$

Dla $b=h'$ otrzymamy podobnie:

$$h=2,29\sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}. 290)$$

c) Dźwigar klockowy.

Tutaj znów $h=2h'+h_0$. Przyjmijmy $h_0=0,4h'$, to $h=2,4h'$, więc $h'=0,417h$. Przyjmijmy dalej $b=0,75h'$, $h_1=0,8h'$, $d=0,1b$, to otrzymamy: $I=\frac{1}{12}0,9 \times 0,75h' [h^3 - (0,8 \times 0,417h)^3] = 0,02205h^4$, więc $\tau \cdot 0,02205h^4 = \frac{1}{2}hM$, a stąd:

$$h=2,83\sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}. 291)$$

Dla $b=h'$ otrzymamy podobnie:

$$h=2,57\sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}. 292)$$

2. Trzy belki:

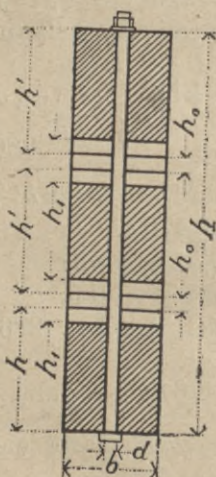
a) Dźwigar klinowany. Jeżeli wymiarów dźwigarów klinowanych (rys. 170) oznaczymy w ten sam sposób, co pierwej, otrzymamy podobnie:

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{12}(b-d)[h^3 - (h'+h_0+h_1)^3 + \\ &+ (h'+h_0-h_1)^3] \\ \tau I &= \frac{1}{2}hM \end{aligned} \right\}. 293)$$

Przyjąwszy tymczasowo, jak pierwej, $b=0,75h'$, $h_0=0,1h'$, otrzymamy $h=3h'+2h_0=3,2h'$, a stąd $h'=0,313h$.

Wstawiwszy te wartości w równanie 293), otrzymamy

$$I=0,01650h^4, \text{ a stąd: } h=3,12\sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}. 294)$$



Rys. 170.

Dla $b=h'$ otrzymamy podobnie:

$$h = 2,83 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 295)$$

b) Dźwigar zazębiony. Podobnie otrzymamy dla dźwigarów zazębionych dla tych samych przypuszczeń, co dla dwu belek, $h=3h'-2h_2=2,6h'$, stąd $h'=0,385$, $h_2=0,2h'=0,077h$,

$$I=0,02166h^4, \text{ a więc: } h = 2,85 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 296)$$

Dla $b=h'$ otrzymamy podobnie:

$$h = 2,59 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 297)$$

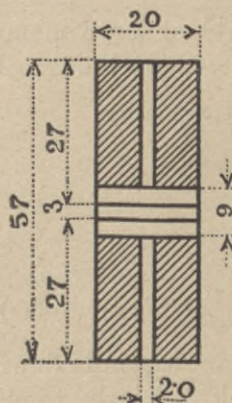
c) Dźwigar klockowy.

Przyjmijmy, jak pierwiej, $h_0=0,4h'$, $h_1=0,8h'$, to $h=3h'+2h_0=3,8h'$, a stąd $h'=0,263h$. Wtedy otrzymamy dla $b=0,75h'$,

$$d=0,1b, I=0,01198h^4, \text{ zaś } h = 3,47 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 298)$$

$$\text{Dla } b=h' \text{ otrzymamy: } h = 3,15 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau}} \dots \dots \dots 299)$$

Wzorów dla dźwigarów, składających się z czterech belek, nie podajemy, bo przy tak wielkich wysokościach lepiej użyć belki bratowej, o której poniżej będziemy mówić. Dlatego też w praktyce nie używamy dźwigarów złożonych z więcej belek, niż trzy.



Rys. 171.

Przykład. Obliczyć przekrój dźwigaru złożonego dla mostu tymczasowego (do 2 lat) kolei głównej, dla którego najw. $M=7,636 \text{ tm}$.

Jeżeli dźwigar ma być klinowany, to przyjmijmy wedle §. 68. dla dźwigaru dwubelkowego $\tau_0=0,8 \cdot 100=80 \text{ kg/cm}^2$. Otrzymamy zatem

$$\text{dla } b = \frac{3}{4}h' \text{ z równ. 287) } h = 2,66 \sqrt[3]{\frac{763600}{80}} = 56,39 \text{ cm,}$$

$$\text{a stąd } h' = 0,476 \times 56,39 = 26,84 \div 27,$$

zaś $b = \frac{3}{4} \cdot 27 \div 20 \text{ cm}$. Przekrój ten przedstawiliśmy na rys. 171.

$$\text{Dokładnie otrzymamy: } I = \frac{1}{12}(57^3 - 9^3)(21 - 2,0) = 276696 \text{ cm}^4, e = 28,5 \text{ cm,}$$

$$\text{więc } \nu = \frac{763600 \cdot 28,5}{322320} = 78,7 \text{ kg/cm}^2,$$

a więc prawie tyle, cośmy założyli.

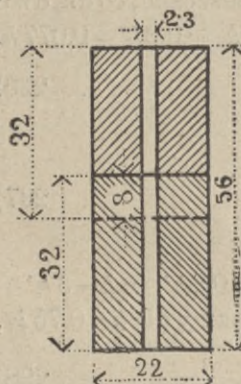
Jeżeli dźwigar ma być zazębiony, a $M=7\text{ tm}$, to przyjmiemy dla dźwigaru dwubelkowego $\tau_0=0,64 \cdot 100=64\text{ kg/cm}^2$. Otrzymamy zatem dla $b=\frac{3}{4}h'$ z równ. 289) $h=2,52\sqrt[3]{\frac{700000}{64}}=55,94\text{ cm}$, a stąd $h'=0,566 \times 55,94=32\text{ cm}$, $b'=\frac{3}{4} \cdot 32=24\text{ cm}$.

Dokładnie otrzymamy (rys. 172):

$$I = \frac{1}{12}(24-2,3)56^3 = 331580\text{ cm}^4,$$

$$v = \frac{700000 \cdot 28}{331580} = 60\text{ kg/cm}^2,$$

zatem prawie tyle, cośmy założyli.



Rys. 172.

§. 70. Obliczenie klinów.

Kliny obliczamy wedle wzoru 191) $\sigma = \frac{QS}{I}$, gdzie σ oznacza siłę ścinającą poziomą w warstwie pp' (rys. 120), S moment statyczny płaszczyzny p_1p_2m ze względu na środek ciężkości przekroju O , a I moment bezwładności przekroju.

Dla prostokąta otrzymaliśmy równ. 193), mianowicie siłę ścinającą poziomą w warstwie o v odległej od środka ciężkości (rys. 121)

$$\sigma = \frac{QS}{I} = 6 \frac{Q}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{v^2}{h^2} \right)$$

Jeżeli przekrój składa się z dwu belek, to obliczyć mamy siłę ścinającą w środku wysokości, więc dla $v=0$, jeżeli z trzech belek $v = \frac{h}{6}$, co wstawiwszy w równ. 193) otrzymamy

$$\text{dla } v=0, \frac{h}{6},$$

$$\sigma = \frac{3}{2} \frac{Q}{h}, \quad \frac{4}{3} \frac{Q}{h}.$$

Ogólnie możemy napisać $\sigma = \mu \cdot \frac{Q}{h}$, 300)

przyczem μ oznacza pewien współczynnik, mianowicie dla dźwigaru złożonego z dwu belek $\frac{3}{2}$, z trzech belek $\frac{4}{3}$. Liczby te nie są dla dźwigarów klinowanych i klockowych zupełnie dokładne, ponieważ nie uwzględniliśmy tu odstępów h_0 . Po dokładniejszym obliczeniu otrzymamy następujące wartości dla μ :

	2 belki	3 belki	
dźwigar zazębiony	$\mu=1,5$	1,333	}
„ klinowany	$\mu=1,497$	1,319	
„ klockowy	$\mu=1,460$	1,396	
			. . . 301)

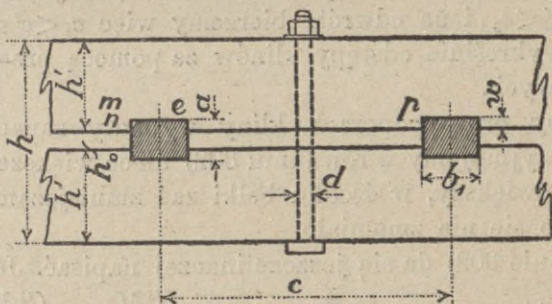
a) Odstęp klinów.

Nazwijmy szerokość klinów b_1 , głębokość wcięcia w , odległość klinów od środka do środka c , szerokość i wysokość belek b i h' (rys. 173), to σc siła ścinająca pozioma, działająca na długości c , wywołuje ciśnienie na powierzchnię mn wcięcia na klin, a zatem gdy τ' oznacza natężenie dopuszczalne na ciśnienie na kliny prostopadłe do włókien, to

$$\sigma c = \mu \frac{Q}{h} c = b w \tau', \text{ a stąd}$$

$$c = \frac{b h w \tau'}{\mu Q} \dots \dots \dots 302)$$

Belka bowiem, starając się przesunąć po drugiej, ciśnienie na powierzchnię mn , a ciśnienie to nie powinno wywołać większego natężenia, niż ciśnienie dopuszczalne τ' .

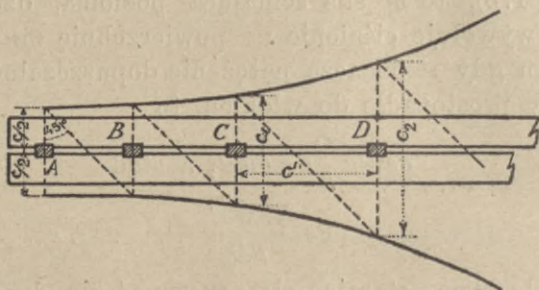


Rys. 173.

Tarcia, wywołanego naciągnięciem śrub nie uwzględniliśmy tu wcale na podstawie doświadczeń Bocka. Ponieważ jednak przy małych ugięciach tarcie jeszcze działa, więc śruby dajemy tem gęstsze i grubsze, im większa siła poprzeczna Q , a więc niedaleko podpór, zaś rzadsze i cieńsze w pobliżu środka dźwigara.

Z równ. 302) wynika, że jeżeli wcięcie w jest wszędzie jednakowe (zwykle $w=0,1h'$ do $0,15h'$) to c jest zmiennem, a mianowicie odwrotnie proporcjonalnem do siły poprzecznej Q , a więc przy podporach c będzie bardzo małe, a w środku wielkie. Aby wyznaczyć położenie klinów, postępujemy w następujący sposób. Obliczamy odlegość c z rów. 302), dla rozmaitych punktów belki (rys. 174), wystawiamy w tych punktach

prostopadłe i odcinamy do góry i na dół po $\frac{1}{2} c$. Końce prostopadłych łączymy i otrzymamy dwie linie krzywe, których odstęp pionowy w każdym punkcie jest równy obliczonej odle-



Rys. 174.

głości c . Nazwijmy c' odstęp klinów C i D , to jeżeliby $c' = c_1$, to byłoby $c' < c_2$ i na odwrót, bierzemy więc $c_1 < c' < c_2$ i wyznaczamy wykreślnie odstępów klinów za pomocą przekątni pod 45° i pionowych.

Jeżeliby przy podporach kliny wypadły zanadto blisko siebie, to przyjmujemy w równaniu 302) nieco większe w , przez co i c się powiększy, w środku belki zaś zmniejszamy w , aby c tak bardzo się nie zmieniało.

Równanie 302) da się jeszcze inaczej napisać. Jeżeli wstawimy wartość dla $h = C \sqrt{\frac{M}{\tau}}$, czyli $h^3 = \frac{C^3 M}{\tau}$, $h = \frac{C^3 M}{\tau h^2}$ w równ.

302), to otrzymamy $c = \frac{b w \tau' C^3 M}{\mu Q \tau h^2}$, a gdy $b = k h'$, $h' = m h$.

$$c = \frac{C^3 m^2 k \tau' w M}{\mu \tau h' Q} = C_1 \frac{\tau' w M}{h' Q}, \quad \dots \quad 303)$$

jeżeli $C_1 = \frac{C^3 m^2 k}{\mu}$.

Wedle poprzedniego możemy przyjąć następujące wartości:

	dźwigar	k	C	m	μ	C_1	$\frac{\tau'}{\tau}$	$C_1 \frac{\tau'}{\tau}$	c_2
2 belki	klimo- wany	$\frac{3}{4}$	2,66						1,69
		1	2,42	0,476	1,497	2,14	0,78	1,67	1,86
	zazę- biony	$\frac{3}{4}$	2,52						1,77
		1	2,29	0,556	1,5	2,47	1,16	2,86	1,94
	kloc- kowy	$\frac{3}{4}$	2,83						1,71
1		2,57	0,417	1,460	2,02	1,00	2,02	1,89	

	dźwigar	k	C	m	μ	C_1	$\frac{\tau'}{\tau}$	$C_1 \frac{\tau'}{\tau}$	C_2
3 belki	klino- wany	$\frac{3}{4}$	3,12	0,313	1,319	1,67	0,85	1,42	1,73
		1	2,83						1,90
	zazę- biony	$\frac{3}{4}$	2,85	0,385	1,333	1,93	1,45	2,80	1,76
		1	2,59						1,94
	kloc- kowy	$\frac{3}{4}$	3,47	0,263	1,396	1,55	1,14	1,77	1,70
		1	3,15						1,87

We wzorze 303) oznacza M największy moment, wedle którego oblicza się przekrój dźwigaru, Q zaś jest zmiennem.

Jeżelibyśmy przyjęli stałe $\frac{w}{h'}$, mianowicie 0,1 dla dźwigarów klinowanych a 0,2 dla zazębionych i klockowych, tobyśmy otrzymali

	2 belki			3 belki		
	klin.	zazęb.	klock.	klin.	zazęb.	klock.
$c =$	0,167	0,572	0,404	0,142	0,560	$0,354 \frac{M}{Q}$

Z zestawienia powyższego widzimy, że odstęp klinów jest mniejszy, niż połowa odstępu klocków, który znów jest mniejszy od odstępu zębów.

b) Szerokość klinów.

Połączenie belek może być zniweczone także przez ścięcie klinów. Siła pozioma działająca na klin jest $\sigma c = bw \tau'$. Jeżeli nazwiemy natężenie dopuszczalne klina na ścinanie równoległe do włókien τ_2 , to $\sigma c = bw \tau' = b b_1 \tau_2$, a stąd

$$b_1 = \frac{\tau'}{\tau_2} w 304)$$

Jeśli przyjmiemy natężenie na ścinanie dla klinów $\tau_2 = 10 \text{ kg/cm}^2$; to gdy $\tau' = 50$, względnie 60 kg/cm^2 , $b_1 = 5w$ lub $6w$.

Szerokość klocków b_1 , obliczamy według tego samego równania, ze względu na wywrót zwykle jednak b_1 musimy przyjmując większe.

c) Najmniejszy odstęp klinów lub zębów. Siła ścinająca pozioma może zniszczyć połączenie belek także, ścinając dźwigar w płaszczyźnie ep (rys. 173), jeżeli kliny lub

zęby zbyt gęsto umieścimy. Aby to nie nastąpiło, musi być dla klinów pionowych $\sigma c = bw\tau' < \tau_2 (c - b_1) b$, a stąd

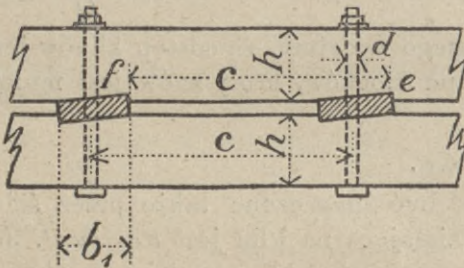
$$c \geq \frac{\tau'}{\tau_2} w + b_1 \dots \dots \dots 305)$$

Podobnie otrzymamy dla klinów pochyłych (rys. 175) i zębów z powodu, że tu chodzi o ścinanie na długości $fe = c$ $\sigma c = bw\tau' < \tau_2 cb$, a stąd:

$$c \geq \frac{\tau'}{\tau_2} w \dots \dots \dots 306)$$

Jeżeli przyjmiemy natężenie dopuszczalne na ścinanie równoległe do włókien $\tau_2 = 10 \text{ kg/cm}^2$, to gdy $\tau' = 50 \text{ kg/cm}^2$, $b_1 = 5w$, otrzymamy więc dla klinów pionowych *najmn* $c = 10w$, dla zębów i klinów pochyłych $c = 5w$.

Jeśliby z równ. 302) lub 303) wypadło c mniejsze, niż tego wymaga równ. 305), to albo należałoby b_1 zmniejszyć, a aby zapobiedz ścięciu klinów, uzbroić kliny blaszkami żelaznymi



Rys. 175.

2 do 4mm grubemi albo też użyć klinów ukośnych lub zębów, w którymto razie znajduje zastosowanie równ. 306). Ale cóż się stanie, gdy odstęp c , obliczony z równ. 302) lub 303), będzie jeszcze mniejszym od *najmn.* c wedle

306)? Wtedy natężenie albo na ścinanie, albo na ciśnienie będzie większem od dopuszczalnego.

Zachodzi więc teraz pytanie, kiedy możemy zadość uczynić obu równaniom 303) i 306). Z obu tych równań otrzymamy:

$$C_1 \frac{\tau'}{\tau} \frac{w}{h'} \frac{M}{Q} \geq \frac{\tau'}{\tau_2} w, \text{ a stąd } \frac{\tau}{\tau_2} \leq \frac{C'}{h'} \frac{M}{Q} \dots \dots \dots 307)$$

A zatem, aby można było tak urządzić kliny lub zęby, aby natężenia na ciśnienie i ścinanie nie przekraczały dozwolonej granicy, musi być $\frac{M}{Q} \frac{C_1}{h'} \geq \frac{\tau}{\tau_2}$, a więc gdy np. $\tau = 50$, $\tau_2 = 10$, $\frac{\tau}{\tau_2} = 5$.

Wstawivszy w równ. 307) $h' = mh = mC\sqrt[3]{\frac{M}{\tau}}$ i wartość za C_1 , otrzymamy:

$$\frac{\tau}{\tau_2} \cong \frac{C^2 km}{\mu} \sqrt[3]{\frac{M^2 \tau}{Q^3}} = C_2 \sqrt[3]{\frac{M^2 \tau}{Q^3}}. \quad \dots \quad 308)$$

Spółczynnik C_2 obliczyliśmy i zestawiliśmy w powyższej tabliczce.

Dla danego obciążenia jest $\sqrt[3]{\frac{M^2 \tau}{Q^3}}$ stałe, C zależy od ustroju dźwigaru złożonego. A więc gdy C_2 jest za małe, to trzeba się starać przez zmianę ustroju uzyskać C_2 większe, więc użyć dźwigarów zazębionych raczej, niż klockowych lub klinowanych. Dla dźwigarów trzybelkowych jest C_2 prawie takie samo, jak dla dwubelkowych, dla belek klinowanych trochę większe, dla klockowych nieco mniejsze. Wysokość wcięcia lub zęba w nie wchodzi wcale do równ. 307) lub 308), jest więc w tym względzie obojętna.

Jeżeli przyjmiemy obciążenie jednostajne ciągle, to *najw.* $M = \frac{1}{8} ql^2$, *najw.* $Q = \frac{1}{2} ql$, więc:

$$\frac{\tau}{\tau_2} \cong C_2 \sqrt[3]{\frac{l\tau}{8q}}. \quad \dots \quad 309)$$

Z równania tego widzimy, że niemożność pogodzenia równ. 303) i 306) zdarzyć się może, gdy l i τ są małe a q wielkie, a więc dla małych rozpiętości i małych nateżeń dopuszczalnych a dla wielkich obciążeń na m. bieżący dźwigaru.

Wartości C_2 dla dźwigarów klockowych są właściwie za małe, bo obliczone dla przypuszczenia $b_1 = 0$, co dla klocków jest możliwe.

Przykład. Dla dźwigaru obliczonego w §. 69. niech będzie na podporze $Q = 3,5 t$, obliczyć odstęp klinów c , szerokość b_1 .

Wedle równ. 302) mamy $c = \frac{bh w \tau'}{\tau Q}$.

Tutaj jest $b = 21 \text{ cm}$, $h = 59 \text{ cm}$, $w = 3 \text{ cm}$, $\tau = 50 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 1,497$, $Q = 3500$, więc $c = \frac{21 \cdot 59 \cdot 3 \cdot 50}{1,497 \cdot 3500} = 35,5 \text{ cm}$.

Szerokość klina b_1 otrzymamy z 304) $b_1 = \frac{\tau'}{10} w = \frac{50}{10} \cdot 3 = 15 \text{ cm}$.

Najmniejszy odstęp klinów wypada z równ. 305):

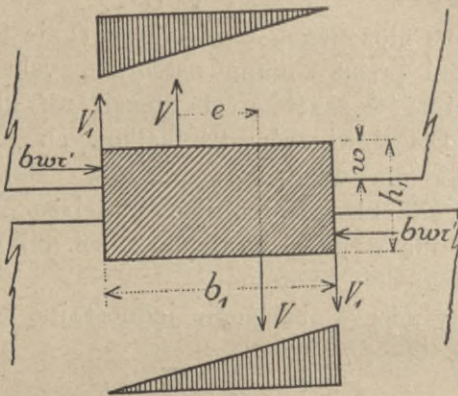
$$c \cong \frac{\tau'}{\tau_1} \cdot w + b_1 = \frac{50}{10} \cdot 3 + 15 = 30 \text{ cm}.$$

Gdybyśmy byli otrzymali odstęp mniejszy niż $35,5 \text{ cm}$ należałoby w tem miejscu użyć klinu pochylego, dla którego *najmn.* $c \cong \frac{50}{10} \cdot 3 = 15 \text{ cm}$.

§. 71. Obliczenie śrub.

Na klin (rys. 176) działają ciśnienia $\sigma c = bw\tau'$, które tworzą moment $bw\tau'(h_1 - w)$ i wzbudzają oddziaływanie pionowe V i V_1 , działające w odstępzie e . Dla równowagi musi być $bw\tau'(h_1 - w) = Ve$, a stąd:

$$V = \frac{bw\tau'}{e} (h_1 - w). \quad \dots \quad 310)$$



Rys. 176.

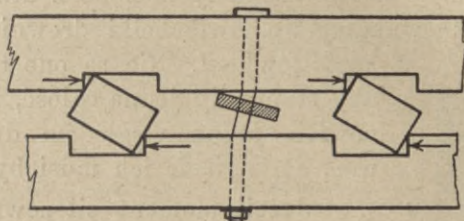
Odstęp e zależy od punktów zaczepienia sił V , a te od rozkładu ciśnienia na górną i dolną podstawę klocka. Jeżeli powierzchnia nateżenia ma kształt trójkąta, to $e = \frac{1}{3}b_1$, a wtedy

$$V = \frac{3bw\tau'}{b_1} (h_1 - w). \quad \dots \quad 311)$$

Z równ. 311) widzimy, że jeżeli V jest mniejszem, to e musi być większem i odwrotnie, a zatem, gdyby śruby nie były dostatecznie naciągnięte, to e może się powiększyć, przy czem najw. $e = b_1$. Tej skrajnej wartości nie może jednak przybrać e , bo wtedy działałyby siły V_1 w krawędziach klina, co wywołałoby w tych krawędziach nieskończenie wielkie nateżenia, a wskutek tego zgniecenie krawędzi.

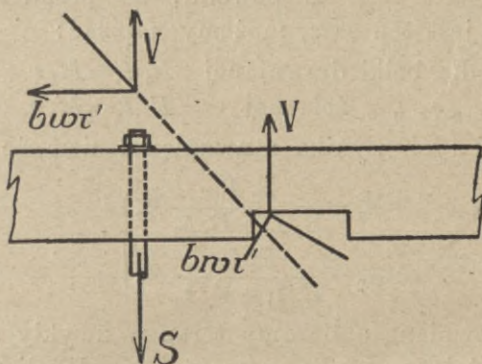
Gdyby śrub nie było, belki przesunęłyby się poziomo, a klinyby się odwróciły, jak to uwidoczniło na rys. 177. Temu zamierzonemu ruchowi mają przeszkadzać śruby. Wi-

dzimy z rys. 178, że jeżeli na jeden klin przypada jedna śruba, to ciągnięcie $S = V = \frac{bw\tau'}{e}(h_1 - w)$. Ponieważ nie chcemy do-



Rys. 177.

puścić zbyt wielkich ciśnień na kliny ani ich obrotu, więc przyjmiemy $e = \frac{1}{3}b$, więc $S = \frac{3bw\tau'}{b_1}(h_1 - w)\tau_1 \cdot \frac{d^2\pi}{4}$, jeżeli τ_1



Rys. 178.

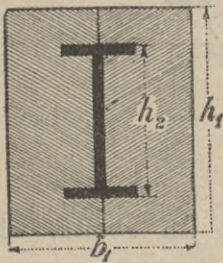
oznacza natężenie dopuszczalne żelaza na ciągnięcie, a d średnicę śruby. A więc $\frac{d^2\pi}{4} = \frac{3bw}{b_1} \frac{\tau'}{\tau_1}(h_1 - w)$,

$$a \quad d = 1,954 \sqrt{\frac{bw}{b_1} \frac{\tau'}{\tau_1}(h_1 - w)}. \quad \dots \quad 312)$$

§. 72. Belki z różnego materiału.

W praktyce inżynierskiej zdarzają się nietylko wypadki użycia dźwigarów złożonych z tego samego materiału, lecz także zeszkłady z kilku dźwigarów z różnych materiałów, połączonych

w ten sposób, że ugięcie ich jest takie samo. Przykładem takiego ustroju są dźwigary żelbetowe, których jednak obliczenie jest przedmiotem odrębnego podręcznika „Teorya żelbetu“*). Prócz tego mamy czasem zeszkłady złożone z drzewa i żelaza. Na rysunku 179 widzimy np. dwie belki drewniane i żelazną



Rys. 179.

kształtówkę I. Nie są one tak połączone, aby stanowiły jedną całość, mogą się mianowicie jedna względem drugiej przesuwac, ale ugięcie ich musi być takie samo.

Jeżeli moment sił zewnętrznych nazwiemy M , to rozdziela on się na obie belki drewniane, (które tu będziemy uważać za jedną) i na żelazną. Z momentu tego niech przypada M_1 na drewnianą, M_2 na żelazną.

Z powodu, że promień krzywizny linii ugięcia r jest ten sam, możemy napisać:

$$\begin{aligned} \text{dla belki drewnianej} \quad E_1 I_1 &= M_1 r \\ \text{„ „ „ żelaznej} \quad E_2 I_2 &= M_2 r. \end{aligned}$$

Z równań tych wynika z uwzględnieniem, że $M = M_1 + M_2$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M, \\ M_2 &= \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M. \end{aligned} \quad \dots \dots \dots 313)$$

Belkę drewnianą obliczamy teraz w zwykły sposób wedle momentu M_1 , żelazną wedle momentu M_2 . Jeżeli materiał ma być wyzyskanym, to powinno równocześnie w belce drewnianej być natężenie dopuszczalne τ_1 , w belce żelaznej τ_2 . A że

$$\tau_1 I_1 = M_1 e_1 \quad \text{i} \quad \tau_2 I_2 = M_2 e_2, \quad \text{więc} \quad \tau_1 = \frac{M_1 e_1}{I_1}, \quad \tau_2 = \frac{M_2 e_2}{I_2}, \quad \text{stad}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{M_1 e_1 I_2}{M_1 e_2 I_1}, \quad \text{a wedle 313)} \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2},$$

$$\text{więc} \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{E_1 I_1 e_1 I_2}{E_2 I_2 e_2 I_1} = \frac{E_1 e_1}{E_2 e_2}, \quad \text{zatem:}$$

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\tau_1 E_2}{\tau_2 E_1} \dots \dots \dots 314)$$

*) Lwów, 1915.

Jeżeli przekroje są symetryczne, to $e_1 = \frac{h_1}{2}$, $e_2 = \frac{h_2}{2}$ więc:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{E_2 \tau_1}{E_1 \tau_2}.$$

Dla żelaza możemy przyjąć $E_2 = 2150000 \text{ kg/cm}^2$, dla drzewa $E_1 = 110000 \text{ kg/cm}^2$, to powinno być:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{2150000}{110000} \frac{\tau_1}{\tau_2} = 19,5 \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

Jeżeli przyjmiemy np. $\tau_1 = 80 \text{ kg/cm}^2$, $\tau_2 = 1000 \text{ kg/cm}^2$, to

$$\frac{h_1}{h_2} = 1,56,$$

a więc wysokość belki drewnianej ma być 1,56 razy większą, niż żelaznej. Jeżeli stosunek wysokości jest inny, to jedna belka nie będzie wykorzystaną i będzie pracować poniżej natężenia dopuszczalnego.

Przykład. Niech będzie $h_1 = 28 \text{ cm}$, $b_1 = 24 \text{ cm}$, $h_2 = 19 \text{ cm}$ (rys. 179) $l = 7,7 \text{ cm}$. Wyznaczyć wielkość obciążenia na jednostkę długości, jeżeli $\tau_1 = 80$, $\tau_2 = 1000 \text{ kg/cm}^2$.

Tu jest $\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{19} = 1,47$, więc wysokość belki drewnianej jest nieco za mała, belka drewniana nie będzie więc zupełnie wykorzystaną.

Tu jest $I_1 = \frac{1}{12} 24 \cdot 28^3 = 43904 \text{ cm}^4$, $I_2 = 1763 \text{ cm}^4$, więc wedle 313):

$$M_1 = \frac{110000 \cdot 43904}{110000 \cdot 43904 + 2150000 \cdot 1763} M = \frac{482944}{861989} M = 0,56 M.$$

$$M_2 = 0,44 M.$$

Dalej mamy $M = \frac{1}{8} q 7,7^2 = 7,412 q \text{ tm} = 74113 q \text{ kgcm}$.

Więc $M_1 = 0,56 \cdot 74113 q = 41503 q$, $M_2 = 32610 q \text{ kgcm}$.

Zatem $80 \cdot 43904 = 41503 q \cdot \frac{28}{2}$, stąd $q = 605 \text{ kg/m}$. b.

Wedle belki żelaznej licząc, otrzymalibyśmy $1000 \cdot 185,6 = 33610 q$, stąd $q = 554 \text{ kg/m}$. b.

Z tych dwu wartości zatrzymujemy mniejszą, belka drewniana nie będzie więc zupełnie wykorzystaną, mianowicie będzie:

$$v = \frac{554}{605} \cdot 80 = 73,3 \text{ kg/cm}^2.$$

To samo otrzymamy z wzoru:

$$v \cdot \frac{1}{12} \cdot 24 \cdot 28^3 = 41503 \times 5,54 \times 14$$

$$v = \frac{41503 \cdot 5,54 \cdot 14 \cdot 12}{24 \cdot 28^3} = 73,3 \text{ kg/cm}^2.$$

§. 73. Równanie linii ugięcia i ugięcie belki.

Linia ugięcia (n. *Biegungslinie*, fr. *élastique*, r. линия изгиба) nazywamy ugiętą oś belki, jak to wiemy z §. 37. Równanie jej otrzymać możemy łatwo z równania 145) $EI = Mr$, które jednak ważne jest tylko do granicy sprężystości.

Promień krzywizny dowolnej krzywej da się, jak wiemy, wyrazić równaniem:

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

W praktyce belki uginają się bardzo mało, linia ugięcia jest więc bardzo płaską, tak że $\frac{dy}{dx} = st\psi$ jest bardzo małą, więc $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ w stosunku do 1 jest tak małą liczbą, że możemy ją opuścić; otrzymamy więc $r = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, albo gdy będziemy liczyć

+y w kierunku z góry na dół,

$$r = -\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Wstawivszy to w równanie 145), otrzymamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{IE}, \quad \dots \quad 315)$$

równanie różniczkowe linii ugięcia, w którym moment zginający M wyrazić musimy jako funkcję x .

$$\text{Równanie to możemy napisać } EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M. \quad \dots \quad 316)$$

Różniczkując to równanie otrzymamy:

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dM}{dx} = -Q, \quad \dots \quad 317)$$

a potem

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{dQ}{dx} = p. \quad \dots \quad 318)$$

Niech na belkę AB (rys. 180) o stałym przekroju działa w E siła P , to według równania 6) $O_1 = \frac{Pb}{l}$, $O_2 = \frac{Pa}{l}$. Moment

M w punkcie F dla $x < a$ będzie $M = O_1 x = \frac{Pbx}{l}$, zatem na mocy równania 315)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pbx}{EIl}, \text{ a stąd:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{st } \varphi = -\frac{Pb}{EIl} \int x dx + C = -\frac{Pbx^2}{2EIl} + C.$$

Dla $x=0$ otrzymamy $\text{st } \varphi_0 = C$, więc

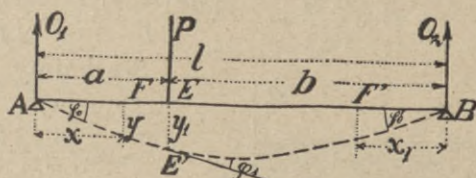
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2EIl} + \text{st } \varphi_0$$

Analogicznie mamy dla części belki EB) a)

$$\frac{dy}{dx_1} = -\frac{Pax_1^2}{2EIl} + \text{st } \varphi'_0.$$

Całkujemy oba równania raz jeszcze, a otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla części } AE \\ \text{" " } EB \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -\frac{Pbx^3}{6EIl} + x \text{st } \varphi_0 \\ y = -\frac{Pax_1^3}{6EIl} + x_1 \text{st } \varphi'_0 \end{array} \quad b)$$



Rys. 180.

Nie dodajemy tu ilości stałej C_1 , bo dla $x=0$ i $x_1=0$ jest $y=0$, więc $C_1=0$.

Rzędną y linii ugięcia nazywamy ugięciem (n. *Durchbiegung*).

W celu wyznaczenia niewiadomych $\text{st } \varphi_0$ i $\text{st } \varphi'_0$ ustawmy równania a) i b) dla punktu E . Otrzymamy wtedy

$$\text{st } \varphi_1 = -\frac{Pba^2}{2EIl} + \text{st } \varphi_0 = -\left(-\frac{Pab^2}{2EIl} + \text{st } \varphi'_0\right),$$

$$EE' = y_1 = -\frac{Pba^3}{6EIl} + a \text{st } \varphi_0 = -\frac{Pab^3}{6EIl} + b \text{st } \varphi'_0.$$

Z obu tych równań otrzymamy

$$\text{st } \varphi_0 = \frac{Pab}{6EIl}(a+2b) \text{ i } \text{st } \varphi'_0 = \frac{Pab}{6EIl}(2a+b) \quad c)$$

Wstawivszy te wartości w *b*), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } AE & y = \frac{Pbx}{6EI} [a(a+2b) - x^2] \\ \text{" } EB & y = \frac{Pax}{6EI} [a(2a+b) - x_1^2] \end{aligned} \right\} \quad . \quad 319)$$

Dla punktu *E* otrzymamy dla $x=a$, względnie $x_1=b$

$$y_1 = \frac{Pa^2b^2}{3EI} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 320)$$

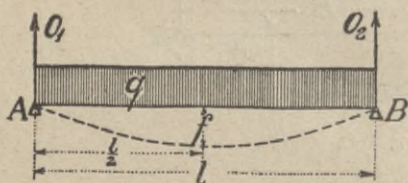
Nie jest to jednak największa rzędna. Największa jest tam, gdzie styczna pozioma.

Jeżeli $a=b$, więc gdy siła *P* działa w środku, będzie największe ugięcie *y* czyli strzałka ugięcia (n. *Biegungspfeil*, fr. *flèche de flexion*, r. стрѣлка).

$$f = \frac{Pl^3}{48EI} = 0,0208 \frac{Pl^3}{EI} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 321)$$

Jeżeli belka jest obciążona na całej długości ciężarem jednostajnie rozłożonym (rys. 181), to według równ. 19)

$$M = \frac{1}{2} qx(l-x), \text{ więc } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{1}{2} qx(l-x)}{EI} = -\frac{q}{2EI} x(l-x).$$



Rys. 181.

Scalkujemy to równanie, a otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C \right),$$

a po drugim scalkowaniu

$$y = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} + Cx + C' \right),$$

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc

$C'=0$; dla $x=l$ jest $y=0$, więc

$$\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12} + Cl = 0, \text{ a stąd } C = -\frac{l^3}{12}, \text{ więc}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2EI} \left(-\frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{l^3}{12} \right) \quad . \quad . \quad . \quad 322)$$

$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6} + \frac{l^3x}{12} \right) = \frac{qx}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3) \quad . \quad 323)$$

Ponieważ obciążenie jest symetrycznem, więc naj. $y=f$ będzie w środku belki, tam też styczna będzie pozioma. Wstawmy

$$x = \frac{l}{2}, \text{ a otrzymamy } f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 324)$$

Ponieważ dla $x = \frac{l}{2}$ wedle 143) $\tau I = Me = \frac{ql^2}{8} e$, to gdy

$$e = \frac{h}{2}, \quad \frac{ql^2}{8} = \frac{2\tau I}{h}, \quad \text{więc}$$

$$f = \frac{5}{384} \frac{16\tau I l^2}{h EI} = \frac{5}{24} \frac{\tau l^2}{Eh} \quad \dots \dots \dots 325)$$

Jeżeli l będziemy liczyć w m a resztę w cm , to

$$f = \frac{50000}{24} \frac{\tau l^2}{Eh}, \quad \text{a gdy dla żelaza } E = 2150000,$$

$$f = 0,00097 \frac{\tau l^2}{h} \quad \dots \dots \dots 326)$$

przyczem f i h liczyć należy w cm , τ w kg/cm^2 , l w mm .

Przykład. Niech będzie $l = 6 m$, $q = 500 kg/m$, $\tau = 1000 kg/cm^2$, to

$$M = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 6^2 = 2,25 tm = 225000 kgcm, \quad \text{więc:}$$

$$\frac{M}{\tau} = 225. \quad \text{Zatem przyjmijemy kształtówkę I 20, dla której } \frac{I}{e} = 243.$$

$$\text{Wedle 324)} \quad f = \frac{5}{384} \times \frac{5 \cdot 600^4}{2150000 \cdot 2429} = 1,62 cm = 16,2 mm.$$

$$\text{Wedle 326)} \quad f = 0,00097 \frac{1000 \cdot 36}{20} = 1,74 cm = 17,4 mm.$$

Różnica powstała stąd, że dla kształtówki 20 jest τ mniejsze, niż 1000.

Wzory powyższe stosują się do belek o przekroju stałym. Jeżeli przekrój jest zmiennym, a przypuścimy, że moment bezwładności zmienia się wedle paraboli, to

$$I_x = \frac{4I_1 x(l-x)}{l^2}, \quad \dots \dots \dots 327)$$

jeżeli I_1 oznacza moment bezwładności w środku belki.

$$\text{Zatem } \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{1}{2} qx(l-x)}{EI} = -\frac{qx(l-x)l^2}{8EI_1 x(l-x)} = -\frac{ql^2}{8EI_1}.$$

$$\text{Stąd otrzymamy } \frac{dy}{dx} = -\frac{ql^2}{8EI_1} x + C.$$

$$\text{Dla } x = \frac{l}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = 0 = -\frac{ql^2}{8EI_1} \frac{l}{2} + C, \quad \text{a stąd}$$

$$C = \frac{ql^3}{16EI_1}, \quad \text{więc}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ql^2}{8EI_1} x + \frac{ql^3}{16EI_1} = \frac{ql^2}{8EI_1} \left(\frac{l}{2} - x \right). \quad \dots \dots \dots 328)$$

$$\text{Skalkowawszy raz jeszcze, otrzymamy } y = \frac{ql^2}{8EI_1} \left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + C_1.$$

Dla $x=0, y=0$, więc $C_1=0$, zatem

$$y = \frac{ql^2}{16EI_1} x(l-x), \quad \dots \quad 329)$$

Stąd dla $x = \frac{l}{2}$, $f = \frac{ql^2}{16EI_1} \frac{l^2}{4} = \frac{ql^4}{64EI_1} = 0,0156 \frac{ql^4}{EI_1}$ 330)

W rzeczywistości przekrój nie zmienia się tak bardzo, zatem ugięcie będzie miało wartość między

$$\frac{5}{384} = \frac{1}{76,8} = 0,013 \quad \text{a} \quad \frac{1}{64} = 0,0156 \frac{ql^4}{EI_1}.$$

Dla belek blaszanych lub kratowych równoległych możemy zatem przyjąć w przybliżeniu

$$f = \frac{1}{70} \frac{ql^4}{EI_1} = 0,0143 \frac{ql^4}{EI_1} \quad \dots \quad 331)$$

Podobnie otrzymamy, gdy P działa w środku belki, dla przekroju stałego wedle 321) $f = 0,0208 \frac{Pl^3}{EI}$; dla przekroju zmiennego zaś, jeżeli natężenie dopuszczalne τ i wysokość h są stałe *)

$$f = 0,0312 \frac{Pl^3}{EI_1}, \quad \dots \quad 332)$$

a gdy przytem i wysokość jest zmienna

$$f = 0,0416 \frac{Pl^3}{EI_1} \quad \dots \quad 333)$$

§. 74. Ugięcie belki jednym końcem utwierdzonej.

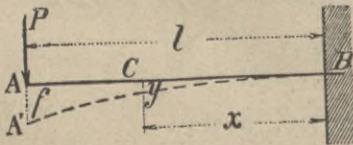
Wiemy, że moment M w punkcie C (rys. 182) belki o stałym przekroju jednym końcem utwierdzonej, a na drugim ciężarem P obciążonej, da się wyrazić według równ. 29)

$$M = -P(l-x).$$

A więc według równ. 315) będzie $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(l-x)}{EI}$, a stąd otrzymamy

$$\text{mamy} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI} \left(lx - \frac{x^2}{2} + C \right),$$

$$\text{a wreszcie} \quad y = \frac{P}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + Cx + C_1 \right).$$



Rys. 182.

*) P. Résal: Constructions métalliques, str. 554.

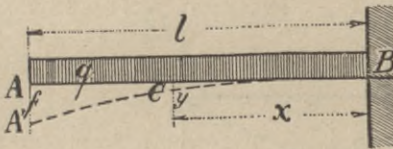
Ponieważ dla $x=0$ jest $y=0$ i $\frac{dy}{dx}=0$, więc $C_1=0$ i $C=0$,

a zatem
$$y = \frac{P}{EI} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} \right) = \frac{Px^2}{6EI} (3l-x). \quad . . . \quad 334)$$

Ponieważ y rośnie wraz z x , więc *najw.* $y=f$ będzie dla $x=l$, a mianowicie $f = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI} = 0,333 \frac{Pl^3}{EI}. \quad . . . \quad 335)$

Dla przekroju zmiennego o stałej wysokości otrzymamy wedle Résala $f = 0,5 \frac{Pl^3}{EI}, \quad . . . \quad 336)$

a dla zmiennej wysokości $f = 0,667 \frac{Pl^3}{EI_1}. \quad . . . \quad 337)$



Rys. 183.

Jeżeli belka AB (rys. 183) obciążona jest zupełnie ciężarem jednostajnym q , to moment w punkcie C będzie $M = -\frac{1}{2} q(l-x)^2$, więc według 315) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EI} (l-x)^2$,

a stąd otrzymamy $\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2EI} \left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} + C \right)$, a wreszcie

$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} + Cx + C_1 \right).$$

Również dla $x=0$ jest $y=0$ i $\frac{dy}{dx}=0$, więc $C = C_1 = C$,

a zatem
$$y = \frac{q x^2}{24EI} (6l^2 - 4lx + x^2). \quad . . . \quad 338)$$

Ponieważ y wzrasta wraz z x , więc *najw.* $y=f$ będzie dla $x=l$, a zatem $f = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI}. \quad . . . \quad 339)$

Dla przekroju zmiennego o stałej wysokości otrzymamy wedle Résala $f = \frac{1}{4} \frac{ql^4}{EI_1}. \quad . . . \quad 340)$

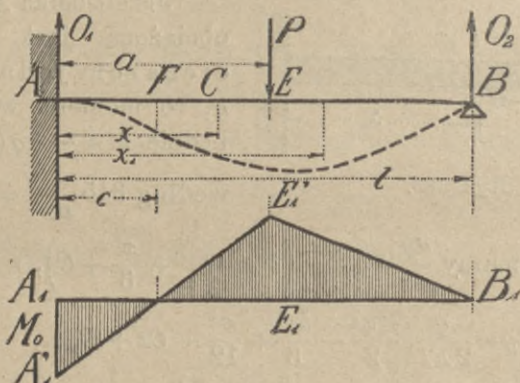
a dla zmiennej wysokości $f = \frac{1}{2} \frac{ql^4}{EI_1}. \quad . . . \quad 341)$

Jako belki jednym końcem utwierdzone obliczamy schody, wsporniki, mosty obrotowe i t. d.

§. 75. Belka jednym końcem wmurowana, a w drugim podparta.

Tam, gdzie prawidła statyki nie wystarczają do wyznaczenia oddziaływań, n. p. przy belce jednym końcem utwierdzonej a w drugim podpartej (n. *der an einem Ende eingespannte, am anderen frei aufliegende Träger*, fr. *poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre*, an. *beam fixed at one end and supported at the other*) używamy równania linii ugięcia do wyznaczenia oddziaływań, jak to zaraz okażemy.

Na belkę taką AB (rys. 184) działa ciężar P w odległości a od A . Zastanówmy się najprzód nad częścią belki AE . Na-



Rys. 184.

zwijmy M_0 moment w punkcie A , gdzie belka jest utwierdzonej, to dla punktu C będzie $M = M_0 + O_1 x$, a więc według równ. 315)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_0 + O_1 x}{EI}, \text{ a stąd}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \left(M_0 x + \frac{O_1 x^2}{2} + C \right), \text{ nareszcie}$$

$$y = -\frac{1}{EI} \left(M_0 \frac{x^2}{2} + \frac{O_1 x^3}{6} + Cx + C' \right).$$

Dla długości EB , t. j., gdy $x > a$, otrzymamy

$$M = M_0 + O_1 x - P(x - a) = M_0 + (O_1 - P)x + Pa,$$

a więc $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} [M_0 + (O_1 - P)x + Pa]$, a stąd

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} [M_0 x + (O_1 - P) \frac{x^2}{2} + Pa x + C_1],$$

nareszcie $y = -\frac{1}{EI} [(M_0 + Pa) \frac{x^2}{2} + (O_1 - P) \frac{x^3}{6} + C_1 x + C'_1].$

Dalej mamy $y=0$ dla $x=0$ i $x=l$, $\frac{dy}{dx}=0$ dla $x=0$. Ugięcie w punkcie C i styczną, więc $\frac{dy}{dx}$, otrzymać musimy z obu równań dla y i $\frac{dy}{dx}$ te same; ze względu na ogólne warunki równowagi musi być też $P=O_1+O_2$ i $O_1 l + M_0 - P(l-a)=0$. Mamy więc 7 równań, z których wyznaczymy 4 stałe ilości C , C' , C_1 i C'_1 i 3 niewiadome M_0 , O_1 i O_2 . Ostatecznie otrzymamy

$$\begin{aligned} C=0, \quad C'=0, \quad C_1 &= -\frac{Pa^2}{2}, \quad C'_1 = \frac{Pa^3}{6}, \\ O_1 &= P \frac{2l^3 - a^2(3l-a)}{2l^3}, \quad O_2 = P \frac{a^2(3l-a)}{2l^3}, \\ M_0 &= -Pa \frac{2l^2 - a(3l-a)}{2l^2}. \end{aligned} \quad 342)$$

Jeżeli te wartości wstawimy w równaniu dla y , otrzymamy dla długości AE

$$\begin{aligned} y &= \frac{Px^2}{12EI l^2} \left[3al(2l^2 - a\{3l-a\}) - x(2l^3 - a^2\{3l-a\}) \right] \\ \text{dla długości } EB & \\ y &= \frac{Pa^2}{12EI l^3} \left[(3l-a)x^3 - 3l(3l-a)x^2 + 6l^3x - 2al^3 \right] \end{aligned} \quad 343)$$

Największe ugięcie znajdziemy, gdzie $\frac{dy}{dx}=0$, to jest dla

$$x_1 = l \left(1 - \sqrt{\frac{l-a}{3l-a}} \right), \quad 344)$$

a wstawiwszy tę wartość w równ. 343), otrzymamy

$$f = \frac{Pa^2}{6EI} (1-a) \sqrt{\frac{1-a}{3l-a}}. \quad 345)$$

Moment w punkcie E będzie

$$M_1 = M_0 + O_1 a = Pa^2 \frac{(3l-a)(1-a)}{2l^3}. \quad 346)$$

W punkcie F , gdzie $M=0$, linia ugięcia ma punkt zwrotny, bo $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Ponieważ $M=M_0+O_1x$, więc $M_0+O_1c=0$, a stąd

$$c = -\frac{M_0}{O_1} = \frac{2l^2 - a(3l - a)}{2l^3 - a^2(3l - a)} al \quad . \quad . \quad . \quad 347)$$

Gdy ciężar jest w środku, więc $a = \frac{l}{2}$, otrzymamy

$$O_1 = \frac{11}{16} P, \quad O_2 = \frac{5}{16} P, \quad M_0 = -\frac{3}{16} Pl, \quad . \quad . \quad . \quad 348)$$

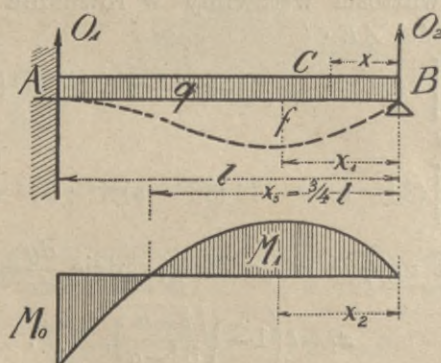
a moment w E $M_1 = +\frac{5}{32} Pl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 349)$

Największe ugięcie dla $x_1 = 0,533l$ jest

$$f = \frac{1}{48\sqrt{5}} \frac{Pl^3}{EI} = \frac{1}{107,3} \frac{Pl^3}{EI}, \quad = 0,00932 \frac{Pl^3}{EI} \quad . \quad . \quad . \quad 350)$$

a punkt zwrotny F dla $c = \frac{3}{11} l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 351)$

Jeżeli zaś belka AB jest obciążona zupełnie ciężarem jednostajnym q (rys. 185), to otrzymamy moment M w punkcie C $M = O_2x - \frac{1}{2} qx_2$,



Rys. 185.

więc według równ. 315) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} (O_2x - \frac{1}{2} qx^2)$,

a więc $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{O_2x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C \right)$,

a nareszcie $y = -\frac{1}{EI} \left(\frac{O_2x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + Cx + C_1 \right)$.

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C_1=0$,

„ $x=l$ „ $y=0$, więc $\frac{O_2 l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} + Cl = 0$, zatem

$$C = -\frac{4O_2 l^2 - ql^3}{24}.$$

Dalej mamy dla $x=l$, $\frac{dy}{dx} = 0$, więc $\frac{O_2 l^2}{2} - \frac{ql^3}{6} + C = 0$,

a wstawivszy wartość za C , otrzymamy $O_2 = \frac{3}{8} ql$. . . 352)

a $C = -\frac{ql^3}{48}$. Możemy więc napisać

$$y = \frac{6}{6EI} \left(\frac{qx^4}{4} + \frac{ql^3 x}{8} - \frac{3qlx^3}{8} \right) = \frac{qx}{48EI} (2x^3 + l^3 - 3lx^2). \quad 353)$$

Największe ugięcie będzie dla x_1 , dla którego $\frac{dy}{dx} = 0$,

więc dla $x_1 = 0,421251$ 354)

Wstawivszy tę wartość w 353) otrzymamy w przybliżeniu

$$f = \frac{1}{185} \frac{ql^4}{EI} = 0,0054 \frac{ql^4}{EI}. \quad 355)$$

Momenty otrzymamy z równania

$$M = O_2 x - \frac{1}{2} qx^2 = \frac{3}{8} qlx - \frac{1}{2} qx^2, \quad 356)$$

więc dla $x=l$ $M_0 = -\frac{1}{8} ql^2$ 357)

Największy moment dodatni jest dla x_2 , gdzie $\frac{dM}{dx} = 0$, więc

$\frac{3}{8} ql - qx_2 = 0$, zatem $x_2 = \frac{3}{8} l$, a wstawivszy to w 356, otrzymamy

$$\text{najw. + } M = \frac{9}{128} ql^2. \quad 358)$$

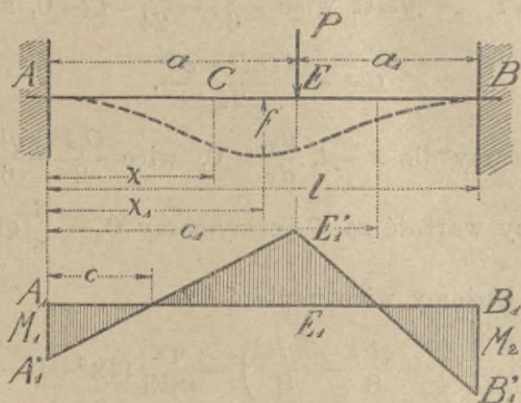
Punkt zwrotny jest dla $M=0$, więc $\frac{3}{8} qlx_3 - \frac{1}{2} qx_3^2 = 0$, stąd

$$x_3 = \frac{3}{4} l. \quad 359)$$

§. 76. Belka obu końcami poziomo utwierdzona.

Gdy na belkę o stałym przekroju obu końcami poziomo utwierdzoną (n. *der an beiden Enden eingespannte Träger*, fr. *poutre encastree aux deux extremités*, a. *beam fixed at*

both ends) AB (rys. 186) działa ciężar P w punkcie E , powstają w A i B momenty, które nazwijmy M_1 i M_2 . W dowolnym



Rys. 186.

punkcie C będzie moment M , przyczem, jeżeli $x < a$,
 $M = M_1 + O_1x$, jeżeli $x > a$, $M = M_1 + O_1x - P(x-a)$.

A zatem otrzymamy według równ. 315) dla $x < a$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}(M_1 + O_1x),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(M_1x + \frac{O_1x^2}{2} + C\right),$$

dla $x > a$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}(M_1 + O_1x - P(x-a)),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(M_1x + \frac{O_1x^2}{2} - \frac{Px^2}{2} + Pax + C_1\right).$$

Dla $x=0$ jest $\frac{dy}{dx}=0$, więc $C=0$; dla $x=a$ jest $\frac{dy}{dx}$ w obu równaniach to samo, więc

$$M_1a + \frac{O_1a^2}{2} = M_1a + \frac{O_1a^2}{2} - \frac{Pa^2}{2} + Pa^2 + C_1, \text{ a stąd } C_1 = -\frac{Pa^2}{2}.$$

Dla $x=l_1$
$$\frac{dy}{dx}=0, \text{ więc}$$

$$2M_1l = Pa^2 - 2Pal + Pl^2 - O_1l^2. \quad \dots \quad 360)$$

Wstawiwszy wartość za C i C_1 , całkujemy jeszcze równanie

dla $\frac{dy}{dx}$, a otrzymamy dla $x < a$,
$$y = -\frac{1}{EI}\left(\frac{M_1x^2}{2} + \frac{O_1x^3}{6} + C'\right),$$

$$\text{dla } x > a, \quad y = -\frac{1}{EI} \left(\frac{M_1 x^2}{2} + \frac{O_1 x^3}{6} - \frac{Px^3}{6} + \frac{Pa x^2}{2} - \frac{Pa^2 x}{2} + C'_1 \right)$$

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C'=0$; dla $x=a$ jest y to samo w obu równaniach, więc $C'_1 = \frac{Pa^3}{6}$; nareszcie dla $x=l$ jest $y=0$ więc

$$3 M_1 l^2 = 3 Pa^2 l - 3 Pal^2 + Pl^3 - O_1 l^3 - Pa^3 \quad . \quad . \quad 361)$$

W równaniach 360) i 361) mamy dwie niewiadome M_1 i O_1 , które możemy obliczyć. Otrzymamy więc

$$O_1 = \frac{Pl^3 - 3 Pa^2 l + 2 Pa^3}{l^3} = \frac{Pa_1^2 (1+2a)}{l^3} \quad . \quad . \quad . \quad 362)$$

a analogicznie otrzymamy

$$O_2 = \frac{Pa^2 (l+2a_1)}{l^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 363)$$

Wstawiając wartość za O_1 w 360), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{Pa a_1^2}{l^2} \\ M_2 &= -\frac{Pa^2 a_1}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 364)$$

a analogicznie

Podstawiając te wartości w równanie dla y , otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } x < a, \quad y &= \frac{Pa_1^2 x^2}{6 EI l^3} (3 al - (l+2a)x), \\ \text{dla } x > a, \quad y &= \frac{Px^2}{6 EI l^3} \left[- (l+2a) a_1^2 x + \right. \\ &\quad \left. + 3 a a_1^2 l + x l^3 - 3 al^3 + \frac{3 a^2 l^3}{x} - \frac{a^3 l^3}{x^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad . \quad 365)$$

Największe ugięcie będzie da x_1 , gdzie $\frac{dy}{dx} = 0$, więc

$$x_1 = \frac{2 al}{l+2a}, \quad \text{a stąd } f_1 = \frac{2 Pa_1^2 a^3}{3 EI (1+2a)^2} \quad . \quad . \quad 366)$$

Momenty otrzymamy według równań

$$M = -\frac{Pa a_1^2}{l^2} + \frac{Pa_1^2 (l+2a)x}{l^3} = \frac{Pa_1^2}{l^3} [(l+2a)x - al], \quad 367)$$

$$M = -\frac{Pa a_1^2}{l^2} + \frac{Pa_1^2 (l+2a)x}{l^3} - P(x-a) =$$

$$= \frac{P}{l^3} \{ (l + 2a)a_1^2 x - a a_1^2 l - l^3 x + a l^3 \} \quad . \quad . \quad 368)$$

Największy moment dodatni otrzymamy dla $x=a$, a więc

$$\text{najw } (+ M) = \frac{2 P a^2 a_1^2}{l^3} \quad . \quad . \quad . \quad 369)$$

Punkty zwrotne otrzymamy dla $x=c$ i $x=c_1$, gdzie $M=0$, więc

$$c = \frac{al}{l + 2a}, \quad c_1 = \frac{a + 2a_1 l}{a + 3a_1} \quad . \quad . \quad . \quad 370)$$

Gdy ciężar P działa w środku, więc $a = \frac{l}{2} = a_1$, otrzymamy z równania 365)

$$y = \frac{P x^2}{48 EI} (3l - 4x) \quad . \quad . \quad . \quad 371)$$

Największe ugięcie będzie dla $x = \frac{l}{2}$, więc

$$f = \frac{1}{192} \frac{P l^3}{EI} = 0,0052 \frac{P l^3}{EI} \quad . \quad . \quad . \quad 372)$$

Dla przekroju zmiennego a stałego τ i h otrzymamy wedle Résala

$$f = 0,0078 \frac{P l^3}{EI_1} \quad . \quad . \quad . \quad 373)$$

dla zmiennego zaś h

$$f = 0,0104 \frac{P l^3}{EI_1} \quad . \quad . \quad . \quad 374)$$

Dalej otrzymamy z równania 364)

$$M_1 = - \frac{Pl}{8} = M_2 \quad . \quad . \quad . \quad 375)$$

a z równania 368)

$$M = \frac{P}{8} (4x - l) \quad . \quad . \quad . \quad 376)$$

Największy moment jest dla $x = \frac{l}{2}$, więc

$$\text{najw } M = + \frac{Pl}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 377)$$

Punkt zwrotny jest w punkcie, gdzie $M=0$, więc dla

$$c = \frac{l}{4}.$$

Jeżeli belka AB (rys. 187) jest obciążoną zupełnie ciężarem jednostkowym q , to z powodu symetrii będzie

$O_1 = O_2 = \frac{ql}{2}$, a moment w punkcie C będzie

$$M = M_1 + \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

Więc według równ. 315) będzie

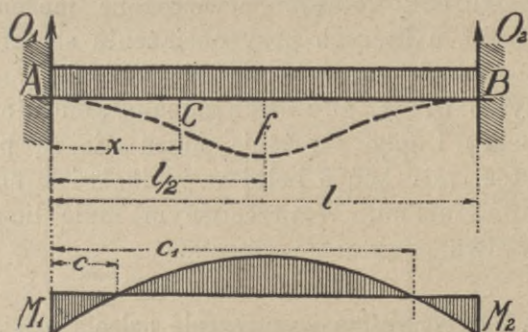
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \left(M_1 + \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \left(M_1 x + \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C \right)$$

Dla $x=0$ jest $\frac{dy}{dx} = 0$, więc $C=0$, dalej dla $x=l$ jest

$$\frac{dy}{dx} = 0, \text{ więc } M_1 l + \frac{ql^3}{4} - \frac{ql^3}{6} = 0, \text{ a stąd}$$

$$M_1 = -\frac{1}{12} ql^2 = M_2 \dots \dots \dots 378)$$



Rys. 187.

Wstawiliśmy wartości, otrzymamy więc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{12} ql^2 x + \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right), \text{ a stąd}$$

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql^2 x^2}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} \right) = \frac{qx^2}{24EI} (l^2 - 2lx + x^2) = \frac{qx^2(1-x)^2}{24EI} \quad 379)$$

Największe ugięcie jest dla $x = \frac{l}{2}$, więc

$$f = \frac{ql^4}{384EI} = 0,0026 \frac{ql^4}{EI} \dots \dots \dots 380)$$

Dla zmiennego przekroju a stałego τ i h otrzymamy podobnie

$$f = 0,0054 \frac{ql^4}{EI_1} \dots \dots \dots 381)$$

a dla zmiennego h

$$f = 0,0090 \frac{ql^4}{EI_1} \dots \dots \dots 382)$$

Moment otrzymamy z równania

$$M = -\frac{1}{12}ql^2 + \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{12}(6lx - 6x^2 - l^2),$$

a więc *najw.* M jest dla $x = \frac{l}{2}$, stąd

$$\text{najw. } M = +\frac{1}{24}ql^2. \quad \dots \quad 383)$$

Punkty zwrotne są dla $M = 0$, więc dla $c = 0,2113l$ i $c_1 = 0,7887l$. Jeżeli przekrój wzrasta ku podporom, to zmniejsza się przez to moment w środku, a wzrasta na podporach *).

I tak, jeżeli $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{8}$, to $\text{najw. } M = 0,0279ql^2 = \frac{ql^2}{35,8}$, zaś

$$M_1 = -\frac{ql^2}{10,5} = -0,0979ql^2. \quad \dots \quad 384)$$

Jako belki obu końcami utwierdzone możemy obliczać tylko takie belki, u których przy obciążeniu styczne linii sprężystej na podporach zupełnie się nie zmieniają, co możemy przypuścić tylko wtedy, gdy belkę głęboko wmurujemy (półtora wysokości belki) i gdy natężenia muru nie są przez to za wielkie, lub też, gdy końce belki w jakikolwiek sposób przytrzymamy np. śrubami. W przeciwnym razie liczymy belkę taką, jako w dwu punktach podpartą.

§. 77. Wykreślnie wyznaczenie ugięcia belki.

Dla dowolnego obciążenia belki AB wyprowadziliśmy w §. 10 równanie krzywej sznurowej

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{a}, \quad \dots \quad 385)$$

gdzie a oznacza odległość biegunową.

Jeśli równanie to porównamy z równ. 315), licząc y w kierunku z dołu do góry, więc zmieniwszy znak,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \quad \text{to}$$

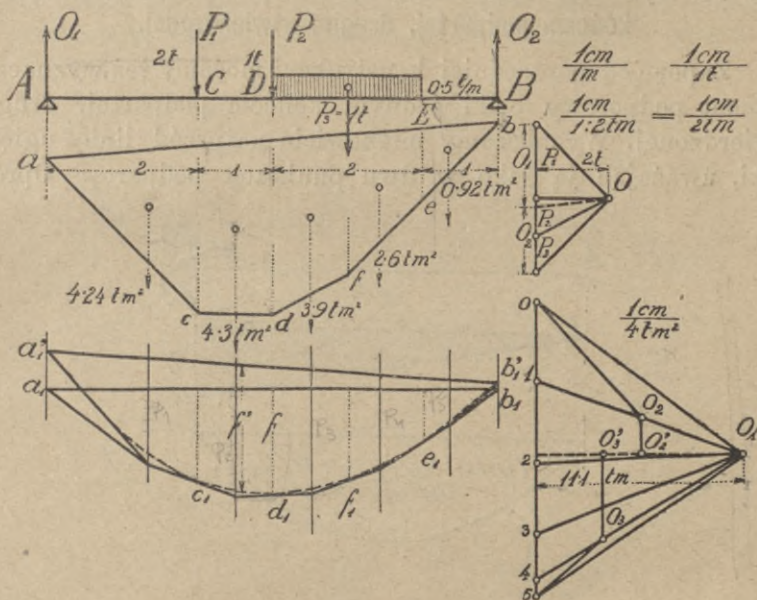
widzimy, że oba równania są identyczne, jeżeli $M = q$ a $EI = a$. A zatem linia ugięcia jest linią sznurową, dla której wykreślenia przyjęto powierzchnię momentów jako powierzchnię obciążenia a odległość

*) Por. artykuł Rittera w *Arniertes Beton* 1909, str. 171.

biegunowa równa się iloczynowi współczynnika sprężystości E przez moment bezwładności przekroju I .

Prawo to podał pierwszy Mohr.

Musimy tu rozróżnić dwa wypadki: albo przekrój jest stały albo zmienny. W pierwszym wypadku odległość biegunowa jest stałą, w drugim dla każdej części belki zmienia się wraz z EI .



Rys. 188.

Przypuśćmy najprzód, że przekrój jest stały i zrobmy przykład. Belka AB (rys. 188) obciążona jest ciężarem $P_1 = 2t$, $P_2 = 1t$ i ciężarem jednostajnie ciągłym $0,5t/m$ na długości $2m$. Wyznaczyć należy linię ugięcia.

W zwykły sposób wyznaczyliśmy najprzód linię momentów $acdfeb$. Teraz płaszczyznę momentów uważamy jako płaszczyznę obciążenia, dzielimy ją na paski, wyznaczamy środki ciężkości i powierzchnie pasków. Z rysunku widzimy, że najw. $M = 4,32t$, czemu dla $\tau = 1000 kg/cm^2$, odpowiada $\frac{M}{\tau} = \frac{432000}{1000} = 432 cm^3$. Przyjmiemy zatem kształtówkę I l. 25, przy czym $I = 5556 cm^4$. Zatem $EI = 2000000 \cdot 5556 kgcm^2 = 1111,2 tm^2$. Przyjawszy więc $EI = 1111,2 tm^2$ otrzymalibyśmy ugięcie w podziałce 1:100, zatem za małe. Jeśli chcemy mieć je w naturalnej wielkości, to przyjmujemy EI

100 razy mniejsze, więc $EI=11,1 \text{ tm}^2$. Wykreśliwszy na tej podstawie wielobok a w nim styczną krzywą sznurową, otrzymamy ugięcie w naturalnej wielkości, tu więc najw. $y=f=14 \text{ mm}$.

Jeżeli przyjmiemy, że przekrój jest zmienny i np. na długości AC $I_1 = \frac{1}{2} I$, na CE $I_2 = I$, na EB $I_3 = \frac{1}{2} I$, to konstrukcyja zmienia się tylko o tyle, że dla kreślenia linii ugięcia na długości AC przyjmiemy $a_1 = \frac{1}{2} a$, na CE $a_2 = a$, na EB $a_3 = \frac{1}{2} a$, a stąd otrzymujemy $e_1 a_1'$ zamiast $c_1 a_1$ i $e_1 b_1'$ zamiast $e_1 b_1$, f' też znacznie większe, bo $17,5 \text{ mm}$.

§. 78. Wykreślnie wyznaczenie sił zewnętrznych belki jednym końcem podpartej, drugim utwierdzonej.

Zapomocą poprzedniej konstrukcyi możemy też wyznaczyć moment podporowy belki jednym końcem podpartej, drugim utwierdzonej. Wyznaczamy mianowicie najprzód linię ugięcia belki, uważając ją jako w dwu punktach podpartą. Oprócz



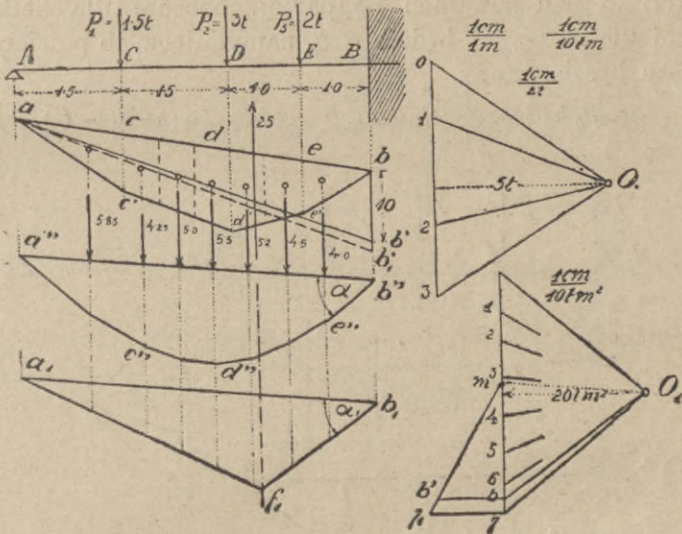
Rys. 189.

togo w B (rys. 189) mamy moment M_1 . Przypuszczamy teraz, że na belkę działa tylko moment podporowy M_1 . Linią momentów przedstawia wtedy prosta ab_1 . Wprawdzie wysokość bb_1 nie jest nam znaną, ale tymczasowo przyjmiemy $M_1 = 1$, wyznaczamy linię ugięcia w tym wypadku dla M_1 i sumujemy ugięcia algebraicznie. Wedle założenia musi być ugięcie w $B=0$

i styczna pozioma, a zatem obie linie ugięcia w b muszą mieć styczne nachylone pod tym samym kątem α tylko o przeciwnym znaku. Z tego warunku możemy wyznaczyć wielkość momentu M_1 , zmieniając wartość dla M_1 tak, aby $\alpha_1 = \alpha$.

Przykład. Belka AB , podparta w A a utwierdzona w B , (rys. 190) obciążona jest ciężarami $P_1=1,5t$, $P_2=3t$ i $P_3=2t$. Chodzi o wyznaczenie momentów, a przede wszystkim momentu podporowego M_1 w B .

W tym celu kreślimy naprzód linię momentów $ac'd'e'b$ dla belki w dwu punktach podpartej. Powierzchnię tę momentów uważamy jako powierzchnię obciążenia i dla dolnie przyjętej odległości biegunowej 20 tm^2 kreślimy drugi wielobok sznurowy czyli linię ugięcia $a''c''d''e''b''$.



Rys. 190.

Ale w B powstaje nieznaną nam jeszcze moment podporowy M_1 . Przyjmujemy dowolnie $M_1=10\text{ tm}$, odcinamy $bb'=10\text{ tm}$ i otrzymujemy powierzchnię momentów abb' . Dla tej powierzchni momentów, jako powierzchni obciążenia trzeba wyznaczyć teraz linię ugięcia. Ale ponieważ potrzeba nam tylko stycznej linii ugięcia na podporze, stycznej podporowej, więc nie dzielimy tę powierzchnię na paski, lecz w $\frac{1}{3}l$ zaczepiamy całą powierzchnię momentów $\frac{5 \cdot 10}{2} = 25\text{ tm}^2$. Dla tej samej odległości biegunowej 20 tm^2 otrzymamy drugi wielobok sznurowy $a_1f_1b_1$. Możemy się jednak nawet obejść bez kreślenia tego wieloboku, bo wiemy, że oddziaływanie w A przy powierzchni obciążenia abb' będzie $\frac{1}{3}abb' = \frac{1}{3}25 = 8\frac{1}{3}\text{ tm}^2$, w B zaś $16\frac{2}{3}\text{ tm}^2$, zatem jeżeli od punktu m odetniemy $mb=16\frac{2}{3}\text{ tm}^2$ otrzy-

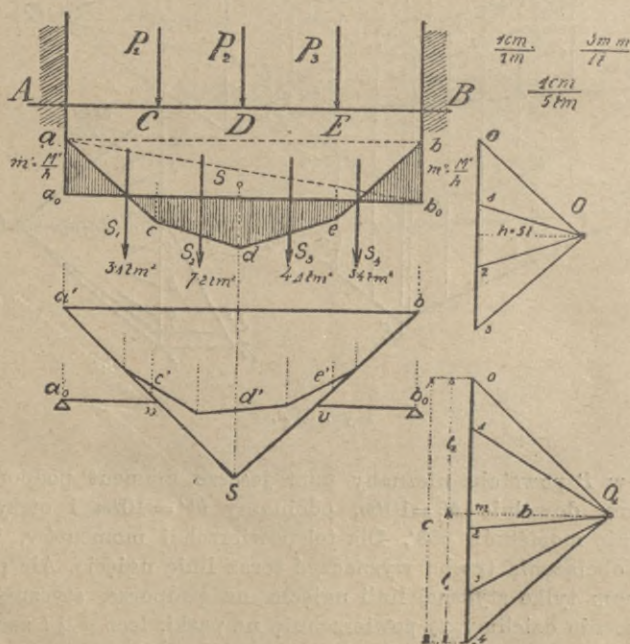
mamy $\alpha_1 = m O_1 b$, gdy $\alpha = m O_1 \bar{\gamma}$. Widzimy, że tu $\alpha > \alpha_1$, musimy jednak te kąty zrównać, zatem zrobić $\alpha_1 = m O_1 \bar{\gamma}$, a w tym celu powiększyć M_1 w stosunku $mb : m\bar{\gamma}$. Zrobiwszy to wykreślnie, otrzymujemy $bb'_1 = 77_1$, jako szukany moment podporowy. Odetnijmy 77 od rzędnej zwykłej powierzchni momentów w b , otrzymamy punkt b'_1 . Linia zamykająca ab'_1 jest tu kreskowana.

Moment w B jest więc wedle rysunku $M_1 = 10,9 \text{ tm}$.

§. 79. Belka obu końcami utwierdzona.

Belka AB (rys. 191) obciążona jest ciężarami P_1, P_2, P_3 . Najprzód wykreśliliśmy pierwszy wielobok sznurowy $acdeb$, jak dla belki w dwu punktach podpartej. Niechaj dla belki obu końcami utwierdzonej będzie $a_0 b_0$ zamykająca, to powierzchnia momentu kreskowana

$$aa_0 b_0 bedc = acdeb - aa_0 b_0 - abb_0 = a(c - t_1 - t_2),$$



Rys. 191.

jeżeli a oznacza wspólną podstawę, ac zwykłą powierzchnią momentów $acdeb$, $at_1 = aa_0 b_0$, $at_2 = abb_0$.

Z rysunku mamy

$$at_1 = \frac{l}{2} \cdot aa_0 = \frac{lM'}{2h}$$

$$at_2 = \frac{l}{2} \cdot bb_0 = \frac{lM''}{2h}$$

nareszcie $ac = \frac{\mathfrak{M}l}{h}$, jeżeli \mathfrak{M} oznacza średni moment belki jedno-przęsłowej.

Kreślmy teraz drugi wielobok sznurowy. Dla powierzchni momentów zwykłej otrzymamy linię ugięcia $a'e'd'e'b'$. Jeżeli jednak chodzi tylko o styczne podporowe, to nie potrzebujemy całego wieloboku kreślić, wystarczają proste $a's'$ i $s'b'$, równoległe do promieni skrajnych O_1O i O_14 . Chcąc uwzględnić też powierzchnie at_1 i at_2 odcinamy w wieloboku sił $mO=t_1$ i $4m=t_2$. Wtedy ua'_0 i vb'_0 przedstawiają styczne podporowe belki obu końcami utwierdzonej. Ponieważ wedle założenia styczne te są poziome, więc $a'_0 u \parallel vb'_0 \parallel O_1 m$, a stąd

$$t_1 + t_2 = c, \quad aa_0 b_0 + ab_0 b = acdeb,$$

nakoniec $aa_0 b_0 bedc = 0$.

Widzimy więc, że dla belki obu końcami poziomo utwierdzonej linia zamykająca wyrównywa powierzchnię momentów, czyli powierzchnie ujemne momentów równają się powierzchni dodatniej momentów.

Z dalszego warunku $m':m''=t_1:t_2$ możemy wyznaczyć długość aa_0 i bb_0 , przyczem $\frac{aa_0 + bb_0}{2} = \mathfrak{M}$.

§. 80. Belka obu końcami ukośnie utwierdzona.

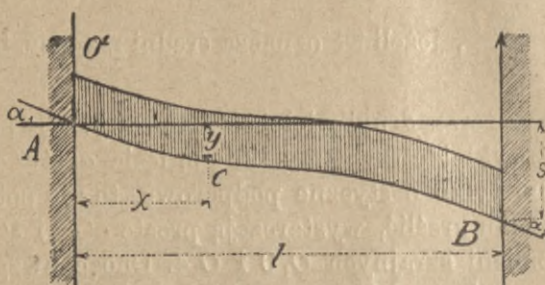
Niech AB (rys. 192) przedstawia linię ugięcia belki, obu końcami ukośnie utwierdzonej i obciążonej jednostajnie; kąty nachylenia osi belki w A i B niech będą α_1 i α_2 . Nazwijmy dalej st $\alpha_1 = \tau_1$, st $\alpha_2 = \tau_2$, a wysokość punktu A nad B niech będzie s .

Według równania 315) możemy napisać: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$,
a stąd $EI \frac{dy}{dx} = -\int M dx + C$.

Dla $x=0$ jest $\frac{dy}{dx} = \tau_1$, więc $EI\tau_1 = C$;

dla $x=l$ jest $\frac{dy}{dx} = \tau_2$, więc $EI\tau_2 = - \int_0^l M dx + C$, a stąd:

$$EI(\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l M dx. \quad . \quad . \quad . \quad 386)$$



Rys. 192.

Całkując raz jeszcze, otrzymamy

$$EIy = - \iint M dx^2 + Cx + C_1.$$

Wyraz $\iint M dx \cdot dx$ możemy inaczej napisać, całkując częściowo, a mianowicie

$$\iint M dx \cdot dx = x \int M dx - \int Mx dx, \text{ więc}$$

$$EIy = -x \int M dx + \int Mx dx + Cx + C_1 = x \left(- \int M dx + C \right) + \int Mx dx + C_1,$$

$$EIy = EIx \frac{dy}{dx} + \int Mx dx + C_1.$$

Dla $x=0$ jest $y=0$, więc $C_1=0$;

dla $x=l$ będzie $EIs = EIl\tau_2 + \int_0^l Mx dx$, a stąd

$$EI(s - l\tau_2) = \int_0^l Mx dx. \quad . \quad . \quad . \quad 387)$$

Jeżeli q jest ciężar jednostkowy, moment w A i B nazwiemy M' i M'' a oddziaływania O' i O'' , to moment w punkcie C będzie

$$M = M' + O'x - \frac{1}{2}qx^2. \quad . \quad . \quad . \quad 388)$$

Dla punktu B będzie $M'' = M' + O'l - \frac{1}{2}ql^2$, a stąd

$$O' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{1}{2}ql \quad \dots \quad 389)$$

Wstawiliśmy to w równanie 388), otrzymamy

$$\begin{aligned} M &= M' + \frac{M'' - M'}{l}x + \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 = \\ &= \frac{M'(1-x) + M''x}{1} + \frac{1}{2}qx(1-x) \quad \dots \quad 390) \end{aligned}$$

Wartość tę podstawimy w 386) i 387) i otrzymamy

$$\begin{aligned} EI(\tau_1 - \tau_2) &= \int_0^l \frac{M'(l-x) + M''x}{l} dx + \frac{1}{2}q \int_0^l x(l-x) dx = \\ &= (M' + M'') \frac{l}{2} + \frac{1}{12}ql^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI(s - l\tau_2) &= \int_0^l \frac{M'(l-x) + M''x}{l} x dx + \frac{1}{2}q \int_0^l x^2(l-x) dx = \\ &= (M' + 2M'') \frac{l^2}{6} + \frac{1}{24}ql^4. \end{aligned}$$

Rozwiązawszy te równania, otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M' &= -\frac{1}{12}ql^2 + 2EI \frac{l(2\tau_1 + \tau_2) - 3s}{l^2} \\ M'' &= -\frac{1}{12}ql^2 - 2EI \frac{l(\tau_1 + 2\tau_2) - 3s}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 391)$$

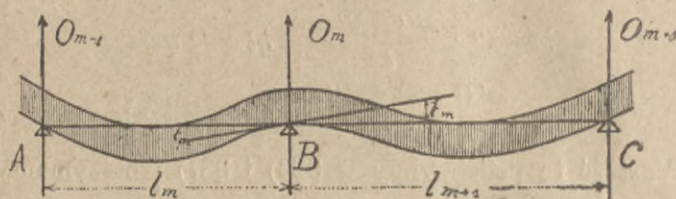
$$\left. \begin{aligned} \text{względnie } \tau_1 &= \frac{l}{6EI} (2M' + M'' + \frac{1}{4}ql^2) + \frac{s}{l} \\ \tau_2 &= -\frac{l}{6EI} (M' + 2M'' + \frac{1}{4}ql^2) + \frac{s}{l} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 392)$$

§. 81. Belka ciągła.

Belką ciągłą albo wieloprzęsłową (n. *continuiertlicher Träger*, fr. *poutre continue*, an. *continuous beam*, cz. *trám spojity* r. неразрѣзная балка) nazywamy belkę prostą, spoczywającą na kilku podporach.

Tu zastanowimy się tylko nad najprostszym przypadkiem, gdy belka jest jednostajnie zupełnie obciążoną ciężarem jednostkowym q , gdy podpory są równe wysokie a przekrój stały.

Niech ABC (rys. 193) będzie m^{ta} i $m+1^{\text{ta}}$ przęsła belki ciągłej o równo wysokich podporach, to oba te przęsła możemy uważać jako belki ukośnie utwierdzone, otrzymamy więc z rów-



Rys. 193.

niania 392), zważywszy, że $s=0$, dla przęsła m^{ego} styczną kąta nachylenia linii ugięcia w B $\tau_m = -\frac{l_m}{6EI}(M_{m-1} + 2M_m + \frac{1}{4}ql_m^2)$, zaś dla przęsła $m+1^{\text{ego}}$ styczną kąta nachylenia linii ugięcia w B także

$$\tau_m = +\frac{l_{m+1}}{6EI}(2M_m + M_{m+1} + \frac{1}{4}ql_{m+1}^2).$$

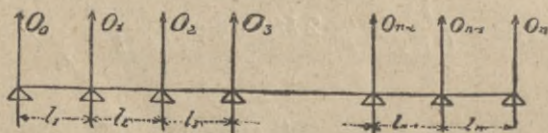
Jeżeli E i I są ilościami stałymi, to

$$l_{m+1}(2M_m + M_{m+1} + \frac{1}{4}ql_{m+1}^2) = -l_m(M_{m-1} + 2M_m + \frac{1}{4}ql_m^2),$$

a stąd

$$M_{m-1}l_m + 2M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}l_{m+1} = -\frac{1}{4}q(l_m^3 + l_{m+1}^3) \quad . \quad 393)$$

Zastosujmy to równanie do wszystkich przęseł (rys. 194) i zważymy, że $M_0 = M_n = 0$, a otrzymamy



Rys. 194.

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } m=1, & \quad 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = -\frac{1}{4}q(l_1^3 + l_2^3), \\ \text{dla } m=2, & \quad M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 = -\frac{1}{4}q(l_2^3 + l_3^3), \\ & \quad \dots \dots \dots \\ \text{dla } m=n-2, & \quad M_{n-3}l_{n-2} + 2M_{n-2}(l_{n-2} + l_{n-1}) + M_{n-1}l_{n-1} = \\ & \quad = -\frac{1}{4}q(l_{n-2}^3 + l_{n-1}^3) \\ \text{dla } m=n-1, & \quad M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) = \\ & \quad = -\frac{1}{4}q(l_{n-1}^3 + l_n^3) \end{aligned} \right\} \quad . \quad 394)$$

Otrzymujemy więc $(n-1)$ równań, które wystarczają do wyznaczenia $(n-1)$ momentów podporowych. Równania te nazywamy równaniami momentów podporowych (*n. Normalgleichungen*) albo równaniami Clapeyrona.

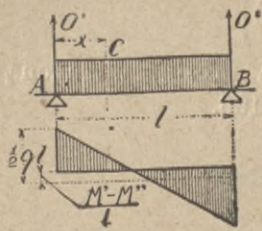
Wyznaczywszy momenty podporowe, otrzymamy łatwo momenty we wszystkich innych punktach, siły poprzeczne i oddziaływania, a mianowicie momenty według równania 393)

$$M = M' \frac{1-x}{l} + M'' \frac{x}{l} + \frac{1}{2} qx(1-x) \dots 395)$$

Jestto równanie paraboli o osi pionowej.

Niechaj będą Q' i Q'' siły poprzeczne w A i B (rys. 195), to moment w C będzie $M = M' + Q'x - \frac{1}{2}qx^2$, więc dla punktu B będzie $M'' = M' + Q'l - \frac{1}{2}ql^2$, a zatem

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{2}ql - \frac{M' - M''}{l} \\ \text{a } Q'' &= -\frac{1}{2}ql - \frac{M' - M''}{l} \end{aligned} \right\} \dots 396)$$



Rys. 195.

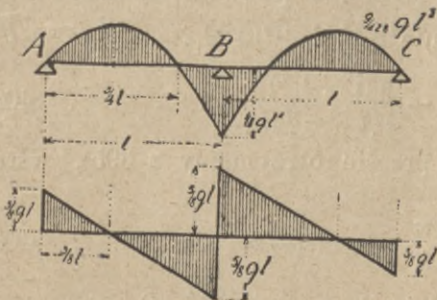
Siła poprzeczna w punkcie C będzie

$$Q = Q' - qx \dots 397)$$

Jestto równanie linii prostej, której nachylenie zależy tylko od q , a więc linie sił poprzecznych będą we wszystkich przęsłach równoległe.

§. 82. Belka ciągła dwu i trzyprzęsłowa.

Zastosujemy teraz wzory poprzednie dla belek dwu i trzyprzęsłowej.



Rys. 196.

Dla belki dwu-przęsłowej (rys. 196), przypuśćmy, że $l_1 = l_2 = l$. Tu otrzymamy tylko jedno równanie momentu podporowego

$$2M_1(l+l) = -\frac{1}{4}q(l^3+l^3), \text{ więc}$$

$$M_1 = -\frac{1}{8}ql^2 \dots 398)$$

W pierwszym przęśle jest $M' = 0$, $M'' = M_1 = -\frac{1}{8}ql^2$, więc według równania 395)

$$M = -\frac{1}{8}qlx + \frac{1}{2}qx(l-x) = \frac{1}{8}qx(3l-4x) \quad . \quad . \quad 399)$$

Najw. M jest dla x_1 , dla którego $\frac{dM}{dx} = 0$, więc $\frac{3}{8}ql - qx_1 = 0$, zatem $x_1 = \frac{3}{8}l = 0,375l$,

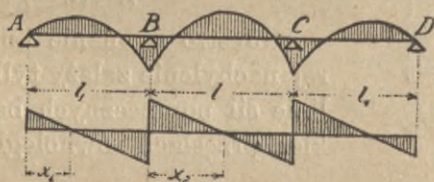
tak, że najw. $(+M) = \frac{1}{8}q \cdot \frac{3}{8}l(3l - \frac{3}{8}l) = \frac{9}{128}ql^2 = 0,07032ql^2 \quad 400)$

zaś $M = 0$ dla $3l = 4x'$, więc $x' = \frac{3}{4}l = 0,75l$.

Według 396) będzie dla pierwszego przęśla

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{2}ql - \frac{1}{8}ql = +\frac{3}{8}ql \\ Q'' &= -\frac{1}{2}ql - \frac{1}{8}ql = -\frac{5}{8}ql \\ \text{zaś } Q &= \frac{3}{8}ql - qx = \frac{1}{8}q(3l - 8x) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 401)$$

Parabolę wyrażoną równaniem 399) i prostą, wyrażoną równaniem 401) wykreśliśmy na rysunku 196.



Rys. 197.

Dla belki trzyprzęsłowej (rys. 197) przypuszczamy, że przęsła skrajne są równe l_1 , średnie zaś przęsło ma długość l .

Tu $M_0 = M_4 = 0$, $M_1 = M_2$, więc dwa pierwsze równania Clapeyrona dają jedno równanie $2M_1(l_1 + l) + M_1l = -\frac{q}{4}(l_1^3 + l^3)$,

a stąd
$$M_1 = M_2 = -\frac{q(l^3 + l_1^3)}{4(2l_1 + 3l)} \quad . \quad . \quad . \quad 402)$$

Momenty w pierwszym przęśle otrzymamy z 395), wstawiając $M' = 0$ $M'' = M_1$,

$$M = M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2}qx(l_1 - x) \quad . \quad . \quad . \quad 403)$$

Największy moment będzie dla x_1 , gdy $\frac{dM}{dx} = 0$, więc

$$\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2}ql_1 - qx_1 = 0, \text{ a stąd } x_1 = \frac{M_1}{ql_1} + \frac{l_1}{2} \quad . \quad . \quad 404)$$

W drugim przęśle będzie $M' = M'' = M_1$, więc

$$M = M_1 + \frac{1}{2}qx(l-x) \quad . \quad . \quad . \quad 405)$$

Największy moment będzie dla x_2 , gdy $\frac{dM}{dx} = 0$, więc

$$\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2}ql - qx_2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}l, \text{ zatem najw. } M = M_1 + \frac{1}{8}ql^2 \quad . \quad . \quad 406)$$

§. 83. Belka ciągła o równych przęsłach.

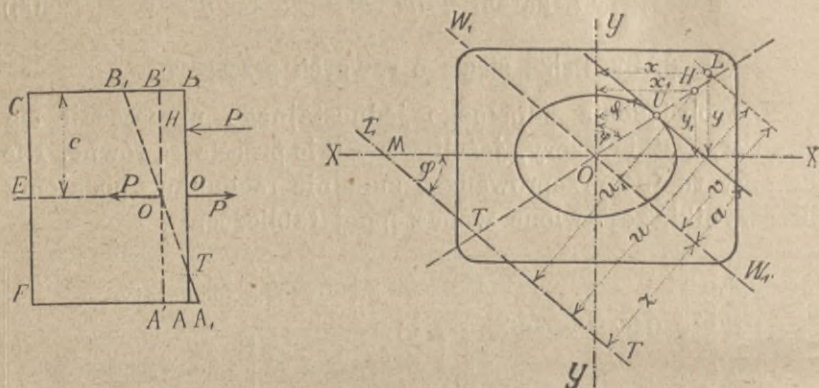
Dla obciążenia zupełnego jednostajnego upraszczają się bardzo wszystkie wzory, jeżeli wszystkie przęsła są równe. Nie będziemy tu już przeprowadzać zupełnie rachunku, podajemy tylko wyniki, zestawione w następującej tabliczce.

Liczba porządkowa	Ilość przęseł równych	Oddziaływania	Największe momenty	
			w punkcie	wynoszą
1	2	$O_0 = O_2 = \frac{3}{8}ql,$ $O_1 = \frac{10}{8}ql$	B (druga podpora) $x = \frac{3}{8}l$ (pierwsze przęsło)	$-\frac{1}{8}ql^2 = -0,125ql^2$ $+\frac{9}{128}ql^2 = +0,0703ql^2$
2	3	$O_0 = O_3 = 0,4ql,$ $O_1 = O_2 = 1,1ql$	B, C (średnie podpory) $x = 0,4l$ (pierwsze i trzecie przęsło)	$-0,1ql^2$ $+0,08ql^2$
3	4	$O_3 = O_4 = \frac{11}{28}ql =$ $= 0,3929ql$ $O_1 = O_2 = \frac{32}{28}ql =$ $= 1,1428ql,$ $O_3 = \frac{26}{28}ql =$ $= 0,9286ql$	B, D (druga i czwarta podpora) $x = 0,393$ (pierwsze i czwarte przęsło)	$-\frac{3}{28}ql^2 = -0,1071ql^2$ $+0,0772ql^2$
4	5	$O_0 = O_5 = \frac{15}{38}ql =$ $= 0,3947ql$ $O_1 = O_4 = \frac{43}{38}ql$ $= 1,1317ql$ $O_2 = O_3 = \frac{37}{38}ql$ $= 0,9736ql$	B, E (druga i piąta podpora) $x = 0,395l$ (pierwsze i piąte przęsło)	$-\frac{4}{38}ql^2 = -0,1053ql^2$ $+0,0779ql^2$

VI. Wytrzymałość złożona na zginanie i ciągnięcie lub zginanie i ciśnienie.

§. 84. Bryła nateżeń i oś obojętna.

Jeżeli na przekrój belki działa siła doń prostopadła P w dowolnym punkcie przekroju H (rys. 198), to nie zmieniając równowagi możemy umieścić w środku ciężkości O dwie siły



Rys. 198.

równe P i równoległe do P , ale działające w kierunkach wprost przeciwnych. Mamy wtedy siłę P działającą w osi i moment $M_w = P \cdot HO$. Siła P w osi sprawia w całym przekroju ciągnięcie lub, jak tutaj, ciśnienie, wszystkie włókna skrócą się o OO' , przekrój więc AB zajmie położenie $A'B'$. Moment zaś M wywołuje nateżenia zginające, przekrój obróci się o pewien kąt około O' i zajmie położenie A_1B_1 . Dwa te działania dodają się algebraicznie, a więc także znoszą się po części. Z rysunku widzimy, że w T odkształcenie, a więc i nateżenie jest równe zeru. Przez T będzie więc przechodzić oś obojętna (p. §. 66.) T_1T_1 , równoległa do W_1W_1 t. j. do osi obojętnej dla samego zginania.

Wiemy, że nateżenia zginające są proporcjonalne do odległości od osi obojętnej, a więc nateżenie ν w dowolnym punkcie L będzie $\nu = \alpha u$. Suma algebraiczna wszystkich nateżeń równa się sile P , więc

$$P = \iint \nu d^2 F = \alpha \iint u d^2 F \quad . \quad . \quad . \quad 407)$$

Natężenie w punkcie L możemy jeszcze inaczej wyrazić; natężenie to składa się z ciśnienia $v_1 = \frac{P}{F}$ i natężenia zginającego $v_2 = \frac{M_w v}{I_w}$, a więc $v = \frac{P}{F} + \frac{M_w v}{I_w}$ 408)

Jeżeli w każdym punkcie przekroju wystawimy prostopadłą na przekrój, której długość i kierunek odpowiada wielkości i kierunkowi natężenia v , to prostopadłe te utworzą bryłę natężeń, której objętość według 407) równa się sile P .

Nazwijmy natężenie w środku ciężkości przekroju v_0 , to objętość bryły natężeń, która jest walcem ukośnie ściętym równa się $P = F v_0 = \alpha z F$, więc $v_0 = \alpha z = \frac{P}{F}$ 409)

Ponieważ P jest wypadkową wszystkich natężeń v , więc musi być także suma momentów natężeń względem dowolnej osi równa momentowi siły P , a więc $P u_1 = \iiint u v d^2 F$, a stąd

$$u_1 = \frac{\iiint u v d^2 F}{P} = \frac{\alpha}{P} \iiint u^2 d^2 F = \frac{\alpha I_t}{P} \quad . \quad . \quad . \quad 410)$$

jeżeli I_t oznacza moment bezwładności ze względu na T, T_1 .

Siła P zaczepia więc w środku ciężkości bryły natężeń, dlatego też punkt ten H nazywamy środkiem natężenia (ciśnienia lub ciągnienia) (n. *Mittelpunkt der Spannung*).

Przyjąwszy osie główne elipsy bezwładności jako osie współrzędnych, możemy napisać (por. §. 40)

$$v = x \text{ wst } \varphi + y \text{ dost } \varphi, \text{ a więc} \\ v = \alpha (z + x \text{ wst } \varphi + y \text{ dost } \varphi).$$

Jeżeli utworzymy moment siły P ze względu na oś YY i XX , to będzie

$$P x_1 = \iiint x v d^2 F \text{ i } P y_1 = \iiint y v d^2 F, \text{ albo inaczej}$$

$$P x_1 = \iiint x \alpha (z + x \text{ wst } \varphi + y \text{ dost } \varphi) d^2 F = \alpha z \iiint x d^2 F + \\ + \alpha \text{ wst } \varphi \iiint x^2 d^2 F + \alpha \text{ dost } \varphi \iiint x y d^2 F.$$

Dla osi głównych, przechodzących przez środek ciężkości jest $\iiint x d^2 F = 0$ i $\iiint x y d^2 F = 0$ (§. 40), więc

$$\begin{aligned} Px_1 &= \alpha \text{ wst } \varphi I_1 \\ \text{i podobnie } Py_1 &= \alpha \text{ dost } \varphi I \end{aligned} \quad 411)$$

Z wzoru tego otrzymamy

$$\text{wst } \varphi = \frac{Px_1}{\alpha I_1}, \text{ dost } \varphi = \frac{Py_1}{\alpha I}, \text{ więc}$$

$$v = \alpha \left(z + \frac{Pxx_1}{\alpha I_1} + \frac{Pyy_1}{\alpha I} \right) = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{a^2} \right) \quad 412)$$

Natężenie v wywołane jest siłą P działającą w osi t. zw. siłą podłużną (n. *Axialkraft*) i momentem $P \cdot HO$. Wiemy z §. 66, że dla momentu HO , którego płaszczyzna różni się od płaszczyzny osi głównych, powstaje oś obojętna $W_1 W_1$, która jest osią sprzężoną z osią HO , w której działają siły. Wskutek działania siły P oś obojętna przesuwa się równolegle o z , zatem promień OH , łączący środek ciężkości przekroju z środkiem ciśnienia, i równoległa do osi obojętnej $T_1 T_1$, poprowadzona przez środek ciężkości są osiami sprzężonymi elipsy środkowej bezwładności.

Jeżeli $\psi = 0$, to także $\varphi = 0$; więc gdy środek ciśnienia pada na oś główną, oś obojętna jest prostopadła do niej.

Odległość osi obojętnej od środka ciężkości przekroju O jest wedle 409)

$$z = \frac{P}{\alpha F}, \text{ a że wedle 411) } \alpha = \frac{Py_1}{I \text{ dost } \varphi}, \text{ więc}$$

$$z = \frac{PI}{FPy_1} \text{ dost } \varphi = \frac{a^2}{y_1} \text{ dost } \varphi \quad 413)$$

W razie, gdy środek ciśnienia pada na oś główną, więc

$$\psi = \varphi = 0, \mathbf{z} = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{y}_1} \quad 414)$$

Odstęp u_1 da się obliczyć także na podstawie rów. 410) i 411). Możemy mianowicie napisać

$$u_1 = \frac{\alpha I_t}{P} = \frac{I_t}{Fz} = \frac{I_w + Fz^2}{Fz} = \frac{Fa'^2 + Fz^2}{Fz} = \frac{a'^2}{z} + z.$$

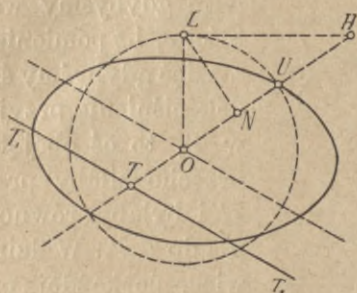
Mamy więc

$$v_1 = u_1 - z = \frac{a'^2}{z},$$

jeżeli a' oznacza promień bezwładności dla osi $W_1 W_1$, a stąd

$$\mathbf{OH} \cdot \mathbf{OT} = \mathbf{OU}^2 \quad 415)$$

A zatem OU , odstęp środka ciężkości O od punktu przecięcia elipsy środkowej z OH , jest średnio geometrycznie proporcjonalny między OH i OT . Jeżeli $\psi = 0$, to to OU jest połową średnicy elipsy bezwładności.



Rys. 199.

Na tem polega łatwa konstrukcyja w celu wyznaczenia położenia osi obojętnej.

Długością OU zakreślamy koło (rys. 199), a z punktu H kreślimy styczną do koła HL .

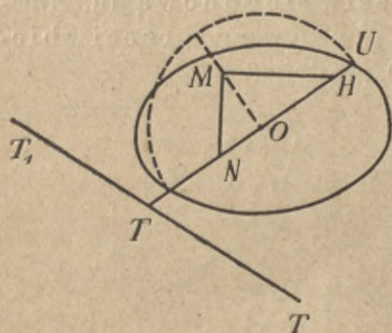
$$\text{Wtedy } ON = \frac{\overline{OL}^2}{\overline{OH}} = \frac{\overline{OU}^2}{\overline{OH}} = OT.$$

Jeżeli więc zrobimy $OT = ON$, to przez T przechodzi oś obojętnej.

Jeżeli $OH < OU$, to postępujemy inaczej (rys. 200). W O kreślimy prostopadłą do OH i zataczamy z H łuk promieniem $= OU$, a więc $HM = OU$. Dalej robimy $MN \perp HM$, to

$$OH = \frac{\overline{HM}^2}{\overline{HN}} = \frac{\overline{OU}^2}{\overline{HN}}.$$

Zrobmy $OT = HN$, to $OH = \frac{\overline{OU}^2}{OT}$, a więc T jest punktem osi obojętnej.



Rys. 200.

Jeżeli przeciwnie znamy położenie osi obojętnej, to znajdziemy środek ciśnienia w następujący sposób (rys. 201). Na długości OT , wykreślonej w kie-

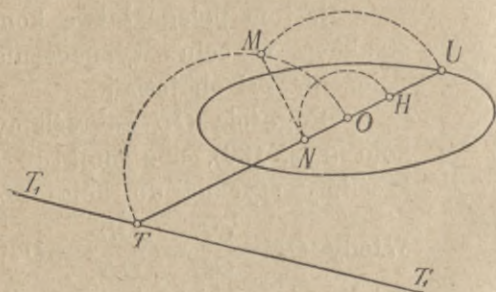
runku osi elipsy sprzężonej do osi obojętnej, zakreślamy półpółkę, z punktu O kreślimy łuk promieniem $OU = OM$. Z M spuszczaamy prostopadłą na OT , zatem

$$ON : OM = OM : OT, \text{ stąd}$$

$$ON = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OU}^2}{\overline{OT}} = OH.$$

Robimy więc $OH = ON$; otóż H jest środkiem ciśnienia. Z równ. 415) widzimy, że z (rys. 198) jest tem większe, im mniejsze

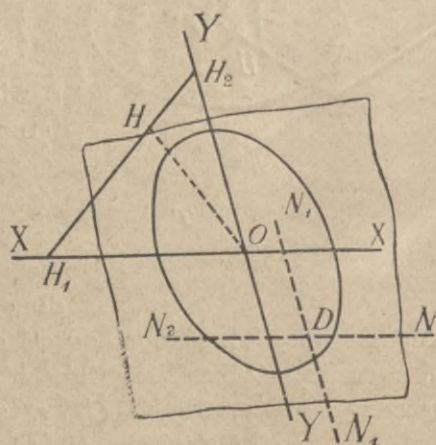
jest v_1 i odwrotnie. Jeżeli oś obojętna porusza się równolegle, to środek ciśnienia H porusza się po osi sprzężonej z kierunkiem osi obojętnej i odwrotnie.



Rys. 201.

odwrot. Dlatego nazywamy punkt H biegunem (n. *Pol*, an. *pole*), równoległą do $T_1 T_1$ po drugiej stronie O w tej samej odległości, co $T_1 T_1$, leżącą, nazywamy biegunową (n. *Polare*, an. *polar*), a prostą $T_1 T_1$ przeciwbiegunową (n. *Antipolare*, an. *antipolar*) i na odwrot H nazywamy przeciwbiegunem (n. *Antipol*, an. *antipole*) prostej $T_1 T_1$.

Jeżeli OX i OY są osiami sprzężonymi środkowej elipsy bezwładności (rys. 202), a H jest środek ciśnienia, w którym działa siła P , to da ona się rozłożyć na dwie siły P_1 i P_2 , działające w punktach osi H_1 i H_2 , przyczem przypuszczamy, że $H_1 H_2$, jest równoległe do WW_1 osi sprzężonej do OH . Dla siły P_1 w H_1 otrzymamy oś obojętną $N_1 N_1$, dla siły P_2 w H_2 otrzymamy oś obojętną $N_2 N_2$. Gdy obie siły działają, w punkcie D będzie natężenie równe zero, więc przez D przechodzi oś obojętna.



Rys. 202.

Gdy siła P poruszać się będzie po $H_1 H_2$, to oś obojętna będzie miała różne położenia, ale zawsze przechodzić będzie przez D , więc gdy H porusza się po prostej, oś obojętna obraca się około punktu D .

Na mocy poprzedniego stwierdzamy dalej, że gdy w D jest środek ciśnienia, to oś obojętna przechodzi przez H i ma kierunek $H_1 H_2$. A więc ogólnie orzec możemy: Jeżeli oś obojętna obraca się około pewnego punktu, środek ciśnienia porusza się po linii prostej, która byłaby linią obojętną, gdyby środek ciśnienia był w D .

§. 85. Jądro przekroju.

Jeżeli oś obojętna porusza się stycznie do obwodu przekroju tak, że go nigdzie nie przecina, to środek ciśnienia opisuje linię zamkniętą, ojędrną, będącą obwodem powierzchni, którą nazywamy jądrem (n. *Kern*, fr. *noyau central*, an. *core heart*, cz. *jádro průřezové*, r. ядро).

Jeżeli środek nateżenia leży w jądrze, to oś obojętna leży po za przekrojem, więc w całym przekroju panuje to samo nateżenie, ciśnienie lub ciągnienie. Gdy środek ciśnienia wpada na linię jędrną, linia obojętna jest styczną do przekroju, w całym przekroju panuje to samo nateżenie, ciśnienie lub ciągnienie, a w punkcie styczności nateżenie to jest równe zeru. Gdy zaś środek ciśnienia wyjdzie z jądra, oś obojętna przecina przekrój; po jednej stronie osi obojętnej jest więc ciśnienie, po drugiej ciągnienie.

W celu wyznaczenia ojędrnej wyznaczamy pojedyncze jej punkty, punkty jędrne (n. *Kernpunkt*, cz. *krajny bod jádrovy*) w sposób w poprzednim paragrafie wskazany, wykreślić lub liczebnie, na podstawie równ. 415). Przytem korzystając będziemy z prawideł tamże wyłożonych, z których wynika, że linii prostej w obwodzie przekroju odpowiada jeden punkt, a każdemu wierzchołkowi, około którego obraca się linia obojętna, linia prosta w ojędrnej. Można udowodnić*), że łukowi koła

*) Por. A. Meyerhofa rozprawka w *Zeitschr. d. Ver. deut. Ing.* (1898, str. 212).

w obwodzie odpowiada linia jędrna paraboliczna, linii obwodu zaś eliptycznej ojędrna hyperpoliczna.

Odstęp punktu jędrnego od środka przekroju nazywamy promieniem jędrnym (n. *Kernweite*). Jeżeli oznaczymy go przez i , to wedle 415)

$$i = \frac{a^2}{e} = \frac{F a^2}{F e} = \frac{W}{F} \quad \dots \quad 416)$$

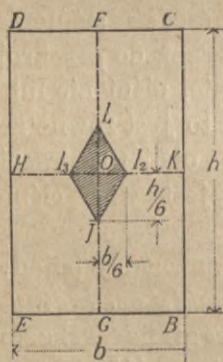
Przykłady. 1. Prostokąt (rys. 203). Tu najłatwiej wyznaczmy ojędrną liczebnie. Gdy oś obojętna będzie DC , to musimy w równ. 416) podstawić dla osi $HK = W = \frac{bh^2}{6} = F = bh$, więc $OI = i_1 = \frac{bh^2}{6} : bh = \frac{h}{6}$. Z powodu symetrii jest $OI_1 = OI$.

Jeżeli oś obojętna ma położenie

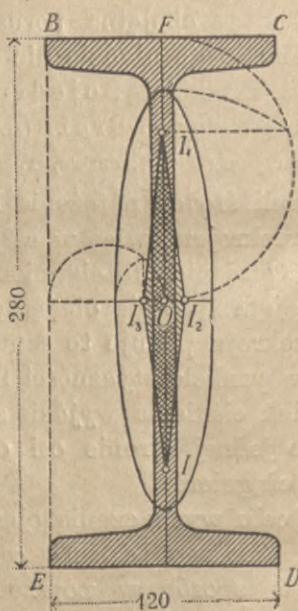
$$DE, \text{ to dla osi } FG, W = \frac{hb^2}{6} : bh,$$

$$\text{więc } OI_2 = \frac{hb^2}{6} : hb = \frac{b}{6}.$$

Ponieważ dalej wierzchołkom B, C, D, E odpowiadają proste, więc ojędrną otrzymamy łącząc I_1, I_2, I i I_3 prostemi.



Rys. 203.



Rys. 204.

2. Przekrój I (rys. 204). Przyjęliśmy tu ten sam przekrój, co na str. 128 i wykreśliliśmy elipsę środkową bezwładności. Gdy teraz oś obojętna ma położenie BC , otrzymamy za pomocą konstrukcyi, naznaczonej na rysunku, a opisanej w poprzednim paragrafie, punkt jędrny I , przyczem $OI = OI_1$. Gdy oś obojętna jest BE , punkt jędrny jest I_2 a $OI_2 = OI_3$. Punktom obwodu B, C, D, E odpowiadają linie proste, więc I, I_3, I_1, I_2 będzie ojędrną.

Liczebnie otrzymamy

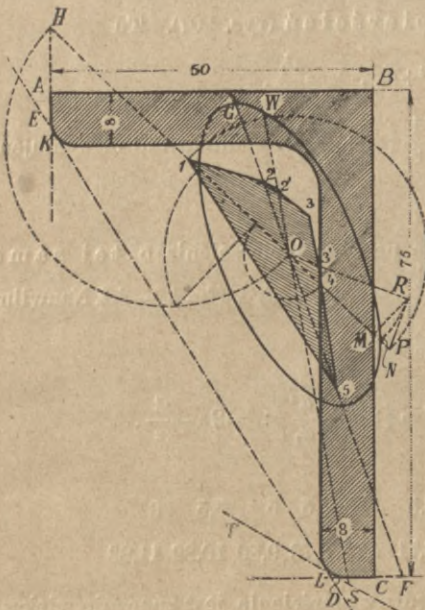
$$i_1 = OI = \frac{W}{F} = \frac{609,1}{68,7} = 8,87 \text{ cm,}$$

$$i_3 = OI_2 = \frac{W_1}{F} = \frac{73,2}{68,7} = 1,07 \text{ cm.}$$

W ten sposób obliczyliśmy dla kształtówek *I* następną tabliczkę:

L. kszt.	i_1	i_3	L. kszt.	i_1	i_3	L. kszt.	i_1	i_3
8	2,68	0,540	20	6,46	0,878	28	8,87	1,07
10	3,34	0,620	21	6,74	0,890	28 <i>a</i>	9,31	1,40
12	4,02	0,680	22	7,01	0,905	30	9,40	1,10
13	4,32	0,711	22 <i>a</i>	7,44	1,28	32	9,93	1,12
14	4,59	0,710	23	7,40	0,957	35	10,86	1,20
15	4,96	0,757	24	7,67	0,971	40	12,31	1,31
16	5,24	0,783	24 <i>a</i>	8,04	1,28	45	13,76	1,41
18	5,92	0,852	25	7,94	0,986			
18 <i>a</i>	6,39	1,31	26	8,27	1,00			

3. Kątówka (rys. 205). Przyjęliśmy tę samą kątówkę nierównoramienną, co na str. 129 i wykreśliśmy elipsę środkową bezwładności.



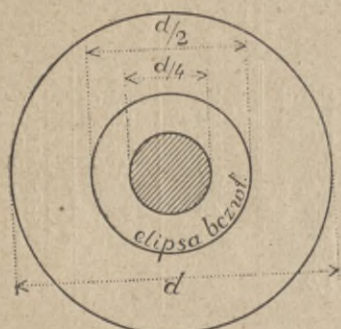
Rys. 205.

Dla położenia *BC* osi obojętnej wyszukujemy kierunek sprzężony *HP*. Z punktu *N* elipsy zataczamy łuk promieniem *ON* aż do przecięcia się z prostopadłą, wystawioną w *M*, potem robimy $RP \perp OR$, to $ON^2 = OR^2 = OM \cdot OP$. Jeżeli więc $OI = OP$, to 1 jest punktem jędrnym. Gdy oś obojętna ma położenie *CD*, to kierunek do niej sprzężony jest *FG*, a odnośny punkt jędrny 2. Dla położenia *KL* otrzymamy podobnie punkt 3, dla *EA* punkt 4, dla *AB* punkt 5. Gdy punkty te połączymy prostymi, otrzymamy ojeđną. Zakrzywienie w *L* uwzględnimy, kreśląc dla pośredniego położenia stycznej oś sprzężoną *WS*. Po przeprowadzeniu konstrukcyi znajdziemy punkt 2' i zamiast prostej 23, otrzymamy łuk paraboli 34.

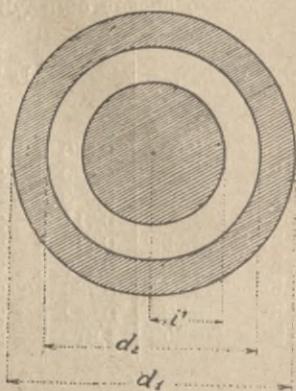
boli 23, i analogicznie dla zakrzywienia w *K* łuk paraboli 34.

4. Koło. Tu $a = \frac{d}{4}$, (rys. 206), $e = \frac{d}{2}$, więc $i = \frac{a^2}{e} = \frac{d^2}{16} : \frac{d}{2} = \frac{d}{8}$.

Dla koła więc elipsa bezwładności jest kołem o średnicy o połowę mniejszej, a jądro przekroju także kołem lecz o średnicy $\frac{d}{4}$.



Rys. 206.



Rys. 207.

5. Koło wydrążone, pierścien (rys. 207). Tu

$$a = \frac{1}{4} \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \quad e = \frac{d_1}{2}.$$

Zatem $i' = \frac{d_1^2 + d_2^2}{16} : \frac{d_1}{2} = \frac{1}{8} \left(d_1 + \frac{d_2^2}{d_1} \right)$. Dla $d_2 = 0$ otrzymujemy

$i' = \frac{d_1}{8}$, jak pierwiej.

Jeżeli porównamy jądra koła pełnego i pierścienia o tej samej powierzchni, to otrzymamy $\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2)$, $d^2 = d_1^2 - d_2^2$. Nazwijmy

$d_1 : d = x$, to $i' = \frac{1}{8} \left(d_1 + \frac{d_1^2 - d^2}{d_1} \right)$, zatem

$$\frac{i'}{i} = \left(d_1 + \frac{d_1^2 - d^2}{d_1} \right) : d = \left(2d_1 - \frac{d^2}{d_1} \right) : d = 2x - \frac{1}{x}.$$

Stąd otrzymamy dla

$x = 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6$

$\frac{i'}{i} = 2,33 \quad 3,50 \quad 4,80 \quad 5,67 \quad 6,71 \quad 7,75 \quad 8,78 \quad 9,80 \quad 10,82 \quad 11,83$

Widzimy więc, że promień jądry pierścienia jest znacznie większy, niż koła o tym samym przekroju.

§. 86. Największe natężenie.

Natężenia w dowolnym punkcie L (rys. 198) obliczyć możemy według wzoru 412)

$$v = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{a^2} \right).$$

Jeżeli siła P działa w osi głównej np. w osi OY , to $x_1 = 0$, więc

$$v = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{yy_1}{a^2} \right) = \frac{P}{F} + \frac{Py_1 y}{Fa^2} = \frac{P}{F} + \frac{My}{I}, \dots \quad 417)$$

bo $M = Py_1$.

Największe v , które wystąpi dla *najw.* $y = e$, powinno się równać τ , więc

$$\tau = \frac{P}{F} + \frac{Me}{I} \dots \dots \dots \quad 418)$$

Jeżeli $M_1 = Px_1$, to możemy równ. 412) także inaczej napisać:

$$v = \frac{P}{F} + \frac{M_1 x}{I_1} + \frac{My}{I} \dots \dots \dots \quad 419)$$

Widzimy więc, że moment $M_w = P \cdot \overline{HO}$ możemy rozłożyć na momenty $M = Py_1$ i $M_1 = Px_1$, działające ze względu na osie główne, oraz że możemy natężenia, wywołane przez oba momenty i siłę P , dodać.

§. 87. Wyznaczenie największych natężeń za pomocą jądra.

Niechaj w H (rys. 208) działa siła P prostopadle do przekroju, to wedle poprzedniego oś obojętna $T_1 T_1$ będzie równoległą do osi sprzężonej z kierunkiem OH t. j. do $W_1 W_1$.

Moment $M = P \cdot HO$ da się rozłożyć na prostopadły i równoległy do $W_1 W_1$. Tylko składowy moment prostopadły do $W_1 W_1$ wywołuje natężenia i obrót około $T_1 T_1$. Moment ten nazwijmy

$$M' = P \cdot HE = P \cdot OH \text{ wst } \alpha = M \text{ wst } \alpha.$$

A więc natężenie największe w I wedle 408)

$$\text{najw. } v = \frac{P}{F} + \frac{M \text{ wst } \alpha \cdot IF}{I_w},$$

$$I_w = F \cdot (OS \text{ wst } \alpha)^2, \text{ więc } v = \frac{P}{F} + \frac{M \cdot \text{wst } \alpha \cdot OI_1 \text{ wst } \alpha}{F \cdot OS^2 \text{ wst}^2 \alpha} =$$

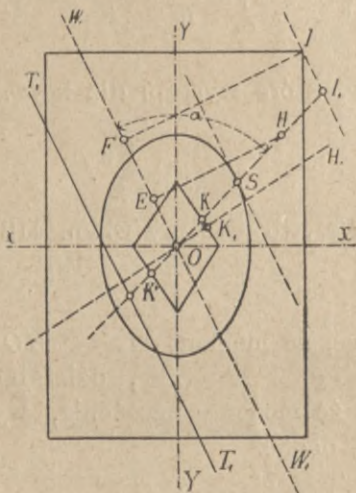
$$= \frac{P}{F} + \frac{M \cdot OI_1}{F \cdot OS^2}.$$

Wedle 415) mamy dalej $OK' \cdot OI_1 = OS^2$, wstawmy to w poprzednie równanie, a otrzymamy

$$\text{najw. } \nu = \frac{P}{F} + \frac{M \cdot OI_1}{F \cdot OK' \cdot OI_1} = \frac{P}{F} + \frac{M}{F \cdot OK'}. \quad (420)$$

Dalej mamy:

$$\text{najw. } \nu = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot HO}{F \cdot OK'} = \frac{P}{F} \frac{OK' + HO}{OK'} = \frac{P}{F} \cdot \frac{K'H}{OK'}. \quad (421)$$



Rys. 208.

A więc największe natężenie w warstwie skrajnej równa się ilorazowi $\frac{P}{F}$ (natężeniu średniemu) więcej momentowi M , podzielonemu przez iloczyn powierzchni F przez promień jędrny OK' , mierzony po przeciwnej stronie środka ciężkości.

W razie, jeżeli P i M pozostają te same, a zmienia się tylko położenie linii HO , natężenie największe jest tem większe, im mniejszy jest promień jędrny OK' , a więc największe natężenie będzie dla kierunku H_1O , bo OK_1 jest najmniejsze.

Jeżeli siła P jest równa zero, a w przekroju działa tylko moment M w płaszczyźnie OH , to z równ. 420) otrzymamy

$$\text{najw. } \nu = \frac{M}{F \cdot OK'}. \quad (422)$$

Rozwiązanie zagadnienia wyznaczenia nateżeń w belkach, gdy siły nie działają w płaszczyźnie osi głównych, omawianego w §. 66., jest przy użyciu jądra przekroju daleko prostsze.

Przykłady. 1. Kształtówka l. 28 a użyta jest jako płatew nachylona do pionu pod kątem α , przyczem $st\alpha=0,6$. Długość płatwi niech będzie 5 m, ciężar jednostajnie rozdzielony na całą długość 1,55 t, więc moment największy $M=116250 \text{ kgcm}$ (por. §. 66).

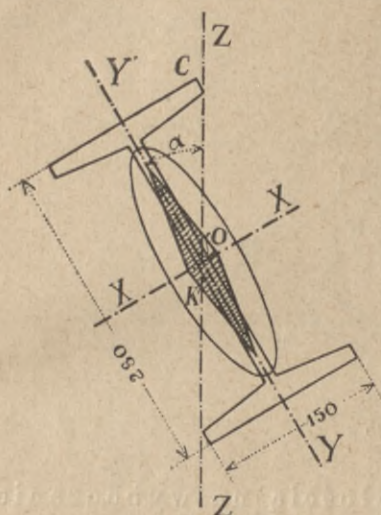
Na rysunku 209 wykreśliliśmy jądro przekroju. Mamy $F=78,9$, $OK'=2,4 \text{ cm}$, więc wedle 422) w C

$$\text{najw. } v = \frac{116250}{78,9 \cdot 2,4} = 614,3 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Zróbmy ten sam przykład, co w §. 66. Obliczyć należy nateżenie największe płatwi (rys. 210), przyczem $M=73500 \text{ kgcm}$. Wedle rysunku $F=14 \cdot 28=392 \text{ cm}^2$, $OK'=2,5 \text{ cm}$, więc

$$\text{najw. } v = \frac{73500}{392 \cdot 2,5} = 75 \text{ kg/cm}^2.$$

W §. 66 otrzymaliśmy $v=77,47 \text{ kg/cm}^2$, a więc wynik nie o wiele się różniący. Naturalną jest rzeczą, że wynik będzie tem dokładniejszy, im dokładniej odczytamy OK' . Należałoby więc jądro konstruować w naturalnej wielkości.



Rys. 209.

Jeżeli na pręt prosty BD działa siła P (rys. 211) w osi, to według równania 44)

$$P = F\tau, \dots \dots \dots 423)$$

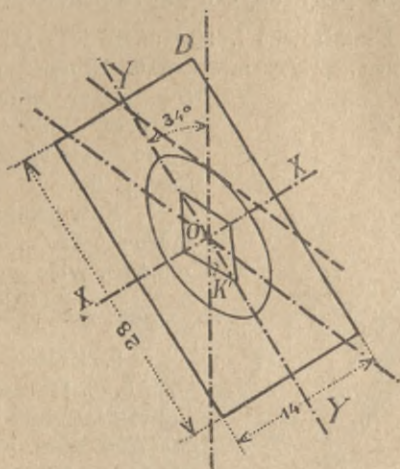
gdy F oznacza przekrój, a τ nateżenie dopuszczalne na ciśnienie.

Powyższe równanie ważne jest jednak tylko do pewnej granicy. Jeżeli wysokość pręta jest większa, niż pięciokrotny najmniejszy jego wymiar, to pręt, który wtedy nazywamy słupem (n. Säule, an. column, fr. poteau, r. стoлб), wyboczy się pod działaniem siły P , jak doświadczenie okazuje, i przy-

VII. Wytrzymałość na wyboczenie.

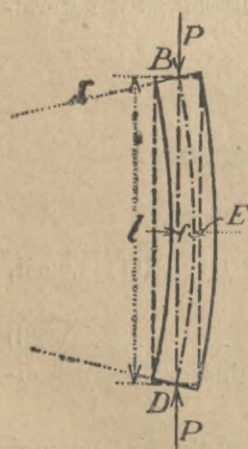
§. 88. Wzory zasadnicze Eulera i Rankina.

bierze kształt BED , a zniszczenie słupa nastąpi nie przez zgniecenie, lecz przez złamanie. Wytrzymałość słupa w tym



Rys. 210.

wypadku nazywamy wytrzymałością na wyboczenie (n. *Knickfestigkeit*, fr. *resistance au flambage*, an. *resistance buckling*, r. *сопротивление продольному изгибу*). Gdyby siła



Rys. 211.

P działała zupełnie środkowo, t. j. gdyby jej kierunek wpadał z matematyczną dokładnością w oś i gdyby materiał słupa był zupełnie jednorodny, nie byłoby żadnej przyczyny wygięcia osi raczej w kierunku BED , niż w innym. Ponieważ jednak w praktyce nie możemy przypuścić zupełnie jednorodnego i równo gęstego materiału, i że siła zaczepia zupełnie dokładnie w środku ciężkości przekroju, zatem oprócz ciśnienia powstaje w słupie także pewien moment, który sprawia, że słup się wybacza.

Przypuśćmy naprzód, że siła P działa w odstępnie g (rys. 212) od osi, przyczem to g jest tak małe, że możemy je w stosunku do y opuścić, to słup BD , którego oba końce mogą się obracać około stałych

punktów B i D , wyboczy się. Nazwijmy r promień krzywizny linii ugięcia w punkcie C , to według 315) otrzymamy

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}.$$

Moment sił zewnętrznych w punkcie C jest $M = Py$, widzimy więc, że ta linia momentów jest identyczną z linią ugięcia. Dalej mamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{EI}. \text{ Nazwijmy } v = \frac{dy}{dx}, \text{ to}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = -\frac{Py}{EI}, \text{ a więc } \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{v dv}{dy} = -\frac{P}{EI}y.$$

$$\int v dv = -\frac{P}{EI} \int y dy, \text{ a stąd}$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{P}{EI} \frac{y^2}{2} + C, \text{ więc}$$

$$v = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2C - \frac{Py^2}{EI}},$$

Rozdzieliwszy niewiadome, otrzymamy

$$\frac{dy}{\sqrt{2C - \frac{Py^2}{EI}}} = dx, \text{ a więc}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2CEI}{P} - y^2}} = \sqrt{\frac{P}{EI}} \int dx.$$

Wykonawszy całkowanie, otrzymamy

$$\text{łuk wst} \left(y \sqrt{\frac{P}{2CEI}} \right) = x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_1, \text{ więc}$$

$$y \sqrt{\frac{P}{2CEI}} = \text{wst} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_1 \right), \text{ czyli}$$

$$y = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{wst} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_1 \right). \quad . \quad . \quad . \quad 424)$$

Jestto równanie sinusoidy.

Ponieważ z powodu symetrii łuk BE jest przystający do łuku ED , więc musi być

$$\text{wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = \text{wst} \left(C_1 - x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \text{ a więc}$$

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \text{ lub } \frac{3\pi}{2} \text{ i t. d., a zatem}$$



Rys. 212.

$$\text{wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = \text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \text{ wreszcie}$$

$$y = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \dots \dots \dots 425)$$

Dla $x = \frac{l}{2}$ będzie $g = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right),$

$$\text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

a więc ze względu na 425) $y = g \frac{\text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} \dots \dots \dots 426)$

Dla $x=0$ otrzymamy we środku pręta

$$f = \frac{g}{\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}, \text{ a zatem}$$

$$y = f \text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \dots \dots \dots 427)$$

Jeżeli teraz przypuścimy, że siła działa w osi, więc $g=0$, to według 426) byłoby $y=0$, gdyby $\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$ nie było także $=0$. Wyboczenie może więc wtedy tylko nastąpić, gdy $\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = 0$, a więc, gdy $\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3\pi}{2}$ i t. d., ogólnie $\frac{m\pi}{2}$, gdy m jest nieparzystą liczbą całą.

Stąd wynika

$$\frac{P}{EI} = \frac{m^2 \pi^2}{l^2}, \text{ więc } P = \frac{EI m^2 \pi^2}{l^2}$$

Dla $m=1$ otrzymamy najmniejszą siłę P , zdolną sprawić wyboczenie, mianowicie

$$P = \frac{E \pi^2 I}{l^2} \dots \dots \dots 428)$$

Dla $g=0$ otrzymamy $f = \frac{0}{0}$, więc nieoznaczone, pręt zatem będzie w równowadze, jakkolwiek będzie strzałka f^*).

*) Według dokładniejszej teorii Obrębowicza każdej sile $P_1 > P$ odpowiada inny stan równowagi i inna strzałka f . (Obrębowicz: O wytrzymałości prętów na wyboczenie 1885). Stwierdzają to i doświadczenia Bauschingera (p. Mittheil. 1887).

Ponieważ nie znamy strzałki f , więc i największego momentu $M=Pf$, zatem, aby moment ten nie wywołał za wielkich nateżeń, nie możemy wcale dopuścić wybożenia; a więc musi być

$$P < \frac{EI\pi^2}{l^2},$$

a przyjąwszy n^{ta} pewność

$$P < \frac{\pi^2 EI}{nl^2} \dots \dots \dots 429)$$

Wzór ten ustawił pierwszy Euler, dlatego nazywamy go wzorem Eulera.

W pewnych wypadkach możemy zadość uczynić obu równaniom 423) i 429). Z równania 423) obliczymy przekrój $F = \frac{P}{\tau}$ a potem staramy się taki nadać kształt przekrojowi, aby I było wielkiem i aby zadość uczynić równaniu 429).

Widzimy, że $I > \frac{n}{\pi^2 E} Pl^2 \dots \dots \dots 430)$

Jeżeli przyjmiemy dla żelaza zlewego $n=5, E=2150000$
 „ „ lanego $n=2, E=1000000$
 „ drzewa $n=9, E=110000$

i jeżeli wstawimy P w t a l w m ; to otrzymamy:

dla żelaza zlewego	$I > \frac{5 \cdot 10^7}{9,87 \cdot 2150000} Pl^2$	$\geq 2,37 Pl^2$	431)
„ „ lanego	$I > \dots \dots \dots$	$\geq 8,1 Pl^2$	
„ drzewa	$I > \dots \dots \dots$	$\geq 83 Pl^2$	

Słup dany nie powinien się wybożyć w żadnym kierunku; jeżeli więc długości nie podparte i momenty bezwładności w innych kierunkach są inne, to musimy i dla tych innych kierunków tak samo liczyć. Przytem chodzi nam, jak zawsze, tak i tu o to, aby pewność we wszystkich kierunkach była równa.

Przekrój w ten sposób obliczony potrzebnym jest właściwie tylko we środku pręta, u stopy i głowy może być przekrój $F_0 = \frac{P}{\tau}$. W jaki sposób przekrój może się zmieniać od F_0 do F nie da się jeszcze ściśle obliczyć.

Wzory powyższe polegają na przypuszczeniu, że siła P działa zupełnie środkowo, co w praktyce rzadko tylko możemy urzeczywistnić. Zresztą wzory te ważne są tylko do granicy sprężystości. Po za nią E nie jest ilością stałą, lecz jest funkcją

nateżenia. Tymczasem z wzoru Eulera nie możemy wcale nateżenia wyznaczyć i to jest dalszą jego niedogodnością.

Nazwijmy ν nateżenie pręta wyboczonego (rys. 211) w punkcie E , gdzie największe ugięcie f . Wyrazić je możemy według równ. 418)

$$\nu = \frac{P}{F} + \frac{Pfe}{I} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{ef}{a^2} \right),$$

gdzie e oznacza oddalenie skrajnej warstwy przekroju od osi a $I = Fa^2$.

Jeżeli w przybliżeniu przypuścimy, że ugięta oś BED jest

$$\text{lukiem kołowym, to } f = \frac{l^2}{8r}.$$

Dalej mamy wedle 143) i 145) $rI = Me$, i $EI = Mr$, a stąd

$$r = E \frac{I}{M} = E \frac{e}{\tau}, \text{ więc } f = \frac{l^2 \tau}{8Ee}, \text{ zatem}$$

$$\nu = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{l^2 \tau}{8Ea^2} \right) = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{\tau}{8E} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \right).$$

$$\text{Jeżeli nazwiemy teraz } \alpha = \frac{\tau}{8E}, \text{ to } \nu = \frac{P}{F} \left(1 + \alpha \frac{l^2}{a^2} \right),$$

jeżeli zaś zamiast ν wstawimy τ , otrzymamy

$$\tau = \frac{P}{F} \left(1 + \alpha \frac{l^2}{a^2} \right). \quad \dots \quad 432)$$

a stąd

$$F = \frac{P}{\tau} \left(1 + \alpha \frac{l^2}{a^2} \right) = \frac{P}{\tau} \left(1 + \alpha \frac{Fl^2}{I} \right) = F_0 \varphi \quad \dots \quad 433)$$

$$\text{jeżeli } \frac{P}{\tau} = F_0.$$

Wzór ten ustawił najprzód Rankine na podstawie doświadczeń Hodgkisona. Spółczynnik wyboczenia (n. *Knickungscoefficient*) α możemy przyjąć w przybliżeniu dla żelaza spawalnego i zlewnego $\alpha = 0,00009$, dla żelaza lanego $\alpha = 0,00022$, jeżeli leizna jest jednostajna, a dziura w słupach o przekroju rurowych jest zupełnie w środku. Dla większych słupów lanych leżących, w których zatem leizna nie jest równo gęsta, możemy przyjąć $\alpha = 0,00068$.

Dla drzewa jest spółczynnik wyboczenia $\alpha = 0,00015$.

Z wzoru 433) widzimy, że ponieważ φ jest zawsze większe, niż jedność, więc $F > F_0$. Spółczynnik ξ nazywamy więc spółczynnikiem zwiększającym.

Widzimy więc, że gdy licząc wedle wzoru Eulera może być $F=F_0$, jeżeli tylko zadość uczynimy równ. 429) tu musi być zawsze $F>F_0$.

Stosunek $\frac{l}{a}=s$ nazywa Huber smukłością słupa.

§. 89. Wyznaczenie długości wolnej.

Poprzednie wzory są ważne tylko wtedy, gdy oba końce słupa są wolne, to jest mogą się obracać około środków ciężkości przekrojów końcowych. Jeżeli jeden lub oba końce są przytrzymane lub utwierdzone, wtedy wzory się zmieniają. Możemy jednak poprzednich wzorów z małą odmianą i tutaj użyć, jak to zaraz wyłożymy.

1) Jeden koniec utwierdzony, drugi wolny. Tu słup AB (rys. 213) wygina się tak, jak połowa BE (rys. 211) słupa w poprzednim wypadku, więc możemy zatrzymać te same wzory, równ. 429) lub 433), wstawivszy tylko w nie $l=2l_1$. Druga strona równania 429) będzie więc cztery razy mniejszą, niż w przypadku, opisanym w poprzednim paragrafie, wytrzymałość słupa o tym samym przekroju jest więc cztery razy mniejszą.

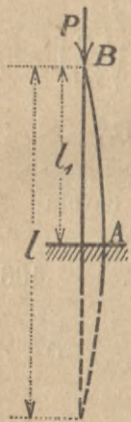
2) Jeden koniec utwierdzony, drugi przytrzymany. Przekrój B (rys. 214) jest przytrzymany, jeżeli może się wprawdzie obracać około swego środka ciężkości, lecz punkt ten zostać musi na prostej DB .

Ponieważ belka jest w B przytrzymana, więc powstaje tu oddziaływanie poziome N , a więc moment w punkcie C jest $M=Py - N(l_1-x)$. Według równ. 315) będzie więc

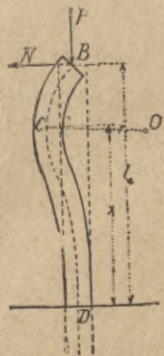
$$\frac{d^2y}{dx^2} = v_1 = -\frac{M}{EI} = -\frac{N}{EI}(l_1-x) - \frac{P}{EI}y.$$

Różniczkujemy to równanie, a otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= -\frac{N}{EI} - \frac{P}{EI} \frac{dy}{dx} \\ \text{a } \frac{d^2v_1}{dx^2} &= -\frac{P}{EI} \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} v_1 \quad . \quad 434) \end{aligned}$$



Rys. 213.



Rys. 214.

Równanie to jest analogiczne do równania

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}y,$$

któreśmy mieli w poprzednim paragrafie; otrzymamy więc podobnie, jak tam (równ. 424)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \text{ albo}$$

$$\frac{N}{EI}(l_1 - x) - \frac{P}{EI}y = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \text{ a stąd}$$

$$y = \frac{EI}{P} \left[\frac{N}{EI}(l_1 - x) - \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \right]. \quad 435)$$

$$\text{Dalej mamy } \frac{dy}{dx} = -\frac{N}{P} - \frac{EI\sqrt{2C}}{P} \text{dost} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right).$$

$$\text{Dla } x=0 \text{ jest } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ więc } N = -EI\sqrt{2C} \text{ dost } C_1,$$

$$\text{dla } x=0 \text{ jest } y=0, \text{ więc } \frac{Nl_1}{EI} = \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{wst } C_1, \text{ a zatem}$$

$$\text{st } C_1 = -l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \dots \quad 436)$$

$$\text{Dla } x=l_1 \text{ jest } y=0, \text{ więc } \sqrt{\frac{2CEI}{P}} \text{wst} \left(C_1 + l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = 0$$

Ponieważ $C \geq 0$, gdyż $N > 0$, a zatem

$$\text{wst} \left(C_1 + l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = 0, \text{ więc } C_1 + l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pi \text{ lub } 2\pi \text{ i t. d.}$$

Stąd zaś wynika, że $\text{st } l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} = -\text{st } C_1$, a ze względu na 436)

$$\text{st } l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} = l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Najmniejsza wartość, dla której $\text{st } \varphi = \varphi$, jest $\varphi = 0$, druga wartość $\varphi^0 = 257^\circ 27'$, przyczem $\text{st } \varphi = \varphi = 4,493$. Pierwsza jest niemożliwą, bo P nie jest $= 0$, więc

$$l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} = 4,493, \text{ a stąd}$$

$$P = \frac{4,493^2 EI}{l_1^2} = \frac{2,04 \pi^2 EI}{l_1^2} = \frac{2 \pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \text{ gdy}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}} l_1 = 0,707 l_1$$

dokładniej $l = \frac{1}{\sqrt{2,04}} l_1 = 0,71 l_1$ 437)

A więc możemy użyć poprzednich wzorów 429) i 432), jeżeli zamiast l wstawimy odpowiednią długość wedle równania 437). Długość ta, którą trzeba wstawić we wzory 429) i 432) zamiast l , aby obliczyć wytrzymałość słupów jednym lub oboma końcami utwierdzonych lub przytrzymanych, nazywa się długością wolną, swobodną (n. *freie Länge*, f. *longueur de sinusoité*).

W tym wypadku $l = \frac{1}{\sqrt{2}} l_1$, zatem ze względu na równanie 429) wytrzymałość jest dwa razy większą, niż w przypadku, opisanym w poprzednim paragrafie.

3) Oba końce utwierdzone (rys. 215).

Tu w punktach B i D powstają momenty z powodu symetrii równe, które nazwiemy M_1 , a więc w punkcie C będzie moment $M = M_1 + Py$, zatem na podstawie równania 315) będzie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_1 + Py}{EI},$$

a stąd podobnie jak w §. 88., gdy

$$v = \frac{dy}{dx}, \quad v \, dv = \frac{d^2 y}{dx^2} \, dy = - \frac{M_1 + Py}{EI} \, dy.$$

Gdy równanie to scałkujemy, otrzymamy

$$\frac{v^2}{2} = - \frac{M_1}{EI} y - \frac{Py^2}{2EI} + C, \text{ nareszcie}$$

$$v = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2C - \frac{2M_1}{EI} y - \frac{Py^2}{EI}}$$

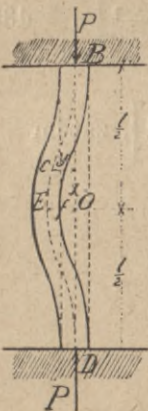
Rys. 215.

Dalej będziemy mieli

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2CEI}{P} - \frac{2M_1 y}{P} - y^2}} = \int \sqrt{\frac{P}{EI}} \, dx = x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_1.$$

Wyraz pierwszy scałkowawszy, otrzymamy

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2CEI}{P} - \frac{2M_1 y}{P} - y^2}} = \text{łuk wst} \frac{2y + \frac{2M_1}{P}}{\sqrt{\frac{8CEI}{P} + \frac{4M_1^2}{P^2}}} = x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_1,$$



$$\text{a sta\u0142 } \bar{y} = -\frac{M_1}{P} \pm \sqrt{\frac{2CEI}{P} + \frac{M_1^2}{P^2}} \text{ wst} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right).$$

Poniewa\u017c cz\u0119\u015b\u0107 linii ugi\u0119cia EB jest przystaj\u0105ca do cz\u0119\u015bci ED , wi\u0119c

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \text{ lub } \frac{3\pi}{2} \text{ i t. d., a zatem}$$

$$y = -\frac{M_1}{P} \pm \sqrt{\frac{2CEI}{P} + \frac{M_1^2}{P^2}} \text{ dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right).$$

Dla $x = \frac{l_1}{2}$ jest $y = 0$, wi\u0119c

$$0 = -\frac{M_1}{P} \pm \sqrt{\frac{2CEI}{P} + \frac{M_1^2}{P^2}} \text{ dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \text{ a zatem}$$

$$y = -\frac{M_1}{P} + \frac{M_1}{P} \frac{\text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} = \frac{M_1}{P} \left[\frac{\text{dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} - 1 \right]. \quad 438)$$

Dla $x = 0$ jest $y = f$, wi\u0119c $f = \frac{M_1}{P} \left[\frac{1}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} - 1 \right]$, zatem

$$y = -\frac{M_1}{P} + \left(f + \frac{M_1}{P} \right) \text{ dost} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

Dalej otrzymamy z r\u00f3wnania 438)

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{M_1}{P} \frac{\text{wst} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}.$$

Dla $x = \frac{l_1}{2}$ jest $\frac{dy}{dx} = 0$, wi\u0119c albo $\frac{M_1}{P} = 0$, co nie mo\u017ce by\u0107,

lub te\u017c

$$\frac{\text{wst} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)}{\text{dost} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} = \text{st} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = 0.$$

A wi\u0119c $\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pi$ lub 2π itd., og\u00f3lnie $m\pi$. Sta\u0142 otrzymamy

$$P = \frac{4m^2\pi^2 EI}{l_1^2}.$$

Najmniejsza siła P , która sprawia wyboczenie, jest dla $m=1$

$$P = \frac{4\pi^2 EI}{l_1^2} \dots \dots \dots 439)$$

Wzór ten przeistoczy się we wzór 428) jeżeli podstawimy

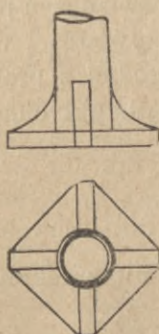
$$l = \frac{l_1}{2} \dots \dots \dots 440)$$

Długość wolna jest więc tu równa połowie długości słupa.

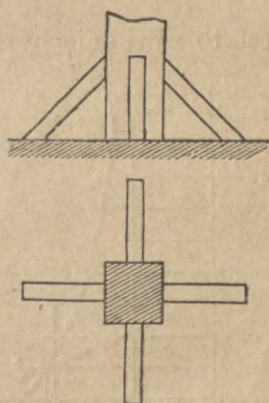
4) Oba końce i środek słupa przytrzymane (rys. 216). Tu obie połowy słupa BE i ED odkształcają się tak, jak słup BED (rys 211), więc długość wolna $l = \frac{l_1}{2}$, a zatem wytrzymałość na wyboczenie jest cztery razy większą, niż w przypadku opisanym w poprzednim paragrafie.



Rys. 216.



Rys. 217.



Rys. 218.

Zrobić tu musimy jeszcze uwagę, że koniec słupa wtedy tylko możemy uważać za utwierdzony, jeżeli tam styczna linii ugięcia nie zmienia się podczas wyboczenia, a więc gdy przyporami (rys. 217) lub zastrzałami (rys. 218) zabezpieczymy niezmiennność stycznej. W braku przypór lub zastrzałów musimy uważać koniec belki tylko jako przytrzymany.

Pręt wybacza się prostopadle do tego kierunku, dla którego $\frac{l}{a}$ jest największe. Jeżeliby wyboczenie w tym kierunku (n. p. dla osi pod 45°) pociągało za sobą skręcenie ni-

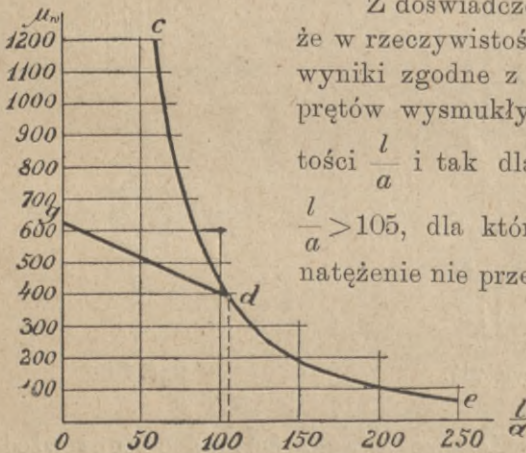
towanych końców pręta, to wtedy należy uważać te końce jako utwierdzone.

§. 90. Wzory Tetmajera.

Powiedzieliśmy powyżej, że wzór Eulera może być ważnym tylko do granicy sprężystości. Obok niego wyprowadziliśmy wzór Rankina. Doświadczenie musiało rozstrzygnąć, wedle którego wzoru należy w praktyce obliczać. Doświadczenia takie robili między innymi Bauschinger w Monachium, Tetmajer w Zurychu i Kirsch we Wiedniu. Zrazu wedle Eulera mamy, jeżeli nazwiemy siłę, która wybacza pręt B , wedle 428) $B = F \mu_w = \frac{E \pi^2 I}{l^2}$ więc $\mu_w = \frac{E \pi^2 I}{F l^2} = E \pi^2 \left(\frac{a}{l}\right)^2$, albo

$$\mu_w \left(\frac{l}{a}\right)^2 = E \pi^2 = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 441)$$

Jest to równanie hyperboli cde (rys. 219).



Rys. 219.

Z doświadczeń pokazało się jednak, że w rzeczywistości wzór Eulera daje wyniki zgodne z prawdą, ale tylko dla prętów wysmukłych, dla wielkich wartości $\frac{l}{a}$ i tak dla żelaza zlewnego dla $\frac{l}{a} > 105$, dla których przy wyboczeniu natężenie nie przekracza jeszcze granicy sprężystości. Dla prętów o mniejszych wartościach $\frac{l}{a}$ przy wybocze-

niu niesprężystym nie da się również

zastosować wprost wzór Rankina, bo współczynnik wyboczenia α nie jest ilością stałą ani nawet funkcją $\frac{l}{a}$, ale wogóle współ-

czynnik zwiększający ζ jest funkcją $\frac{l}{a}$. Tetmajer na podstawie doświadczeń przyjął, że μ_w jest funkcją prostolinijną dla mniejszych $\frac{l}{a}$ (prosta dg). Zamiast współczynnika zwiększa-

jącego można wprowadzić w rachunek jego odwrotność $\zeta' = \frac{1}{\zeta}$,
 współczynnik zmniejszający (n. *Abminderungskoeffizient*),
 a zatem $F = \frac{F_0}{\zeta'}, \tau_w = \frac{P}{F_0 \zeta} = \tau \zeta' \dots \dots \dots 442)$

Ogólnie jest $\zeta' = 1 - \alpha \frac{l}{a}, \tau_w = \tau \left(1 - \alpha \frac{l}{a} \right) = \tau - \alpha \tau \cdot \frac{l}{a}$.

Jeżeli przez n pomnożymy, to

$$\mu_w = \mu - \alpha \cdot \mu \frac{l}{a} = \mu - C_1 \frac{l}{a} \dots \dots \dots 443)$$

W następnych wzorach przyjęliśmy dla

	drzewa	żelaza laneo	żelaza zlewnej	stali zlewnej
$\mu =$	350	8000	3800	4500 kg/cm ²

Tetmajer otrzymał: a) dla drzewa

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } 5 < \frac{l}{a} < 100, \quad \zeta' &= 1,047 - 0,00693 \frac{l}{a} \\ \text{" } 100 < \frac{l}{a}, \quad \dots \quad \zeta' &= 3525 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots 444)$$

Na tej podstawie obliczyliśmy następującą tabliczkę:

Tablica XXV.

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
10	0,979	60	0,632	110	0,293	160	0,136
15	0,943	65	0,596	115	0,268	165	0,129
20	0,907	70	0,561	120	0,246	170	0,121
25	0,871	75	0,525	125	0,225	175	0,114
30	0,839	80	0,493	130	0,207	180	0,107
35	0,804	85	0,457	135	0,193	185	0,104
40	0,771	90	0,421	140	0,179	190	0,096
45	0,736	95	0,387	145	0,168	195	0,093
50	0,700	100	0,353	150	0,157	200	0,089
55	0,664	105	0,321	155	0,146		

b) Żelazo lane:

$$\left. \begin{aligned} \text{dla } 5 < \frac{l}{a} < 80, \quad \zeta' &= 0,97 + 0,0000663 \left(\frac{l}{a} \right)^2 - 0,0151 \frac{l}{a} \\ \text{" } 80 < \frac{l}{a}, \quad \zeta' &= 1234 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots 445)$$

Stąd obliczyliśmy następującą tabliczkę:

Tablica XXVI.

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
10	0,827	50	0,385	90	0,152	130	0,073
15	0,760	55	0,345	95	0,137	135	0,068
20	0,696	60	0,308	100	0,123	140	0,063
25	0,636	65	0,275	105	0,112	145	0,059
30	0,580	70	0,244	110	0,101	150	0,055
35	0,526	75	0,218	115	0,093	160	0,048
40	0,476	80	0,193	120	0,086	170	0,043
45	0,429	85	0,171	125	0,079		

c) Żelazo zlewne z wytrzymał. na ciągnięcie
 $< 4000 \text{ kg/cm}^2$:

$$\left. \begin{array}{l} 10 < \frac{l}{a} < 105 \quad \zeta' = 0,816 - 0,003 \frac{l}{a} \\ 105 < \frac{l}{a} \quad \zeta' = 5584 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \end{array} \right\} \dots 446)$$

Stąd obliczono następującą tabliczkę:

Tablica XXVII.

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
10	0,786	60	0,636	110	0,462	160	0,218
15	0,771	65	0,621	115	0,423	165	0,205
20	0,756	70	0,606	120	0,388	170	0,193
25	0,741	75	0,591	125	0,357	175	0,182
30	0,726	80	0,576	130	0,331	180	0,171
35	0,711	85	0,561	135	0,307	185	0,165
40	0,696	90	0,546	140	0,285	190	0,153
45	0,681	95	0,531	145	0,266	195	0,147
50	0,666	100	0,516	150	0,248	200	0,140
55	0,661	105	0,501	155	0,232	210	0,127

d) Stal zlewna b. miękka ($\mu > 4000$):

$$\left. \begin{array}{l} 10 < \frac{l}{a} < 105 \quad \zeta' = 0,713 - 0,00259 \frac{l}{a} \\ 105 < \frac{l}{a} \quad \zeta' = 4934 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \end{array} \right\} \dots 447)$$

Stąd obliczyliśmy następną tabliczkę:

Tablica XXVIII.

$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'	$\frac{l}{a}$	ζ'
10	0,687	50	0,584	90	0,480	150	0,219
25	0,674	55	0,571	95	0,467	160	0,193
20	0,661	60	0,558	100	0,454	170	0,171
25	0,648	65	0,545	105	0,441	180	0,152
30	0,635	70	0,532	110	0,412	190	0,137
35	0,622	75	0,519	120	0,343	200	0,123
40	0,609	80	0,506	130	0,242	210	0,112
45	0,596	85	0,493	140	0,252		

Ministerstwo kolejowe austr. poleca przyjmować następane spólczynniki zwiększające ζ .

Tablica XXIX.

$\frac{l}{a}$	Żelazo spawane		Żelazo zlewne		Żelazo lane		Drzewo	
	ζ	Δ	ζ	Δ	ζ	Δ	ζ	Δ
10	1,206	0,057	1,273	0,050	1,210	0,226	1,023	0,078
20	1,263	0,061	1,323	0,055	1,436	0,289	1,101	0,082
30	1,324	0,068	1,328	0,059	1,725	0,375	1,193	0,107
40	1,392	0,076	1,437	0,065	2,100	0,493	1,300	0,129
50	1,468	0,083	1,502	0,071	2,593	0,648	1,429	0,157
60	1,551	0,095	1,573	0,078	3,241	0,847	1,586	0,195
70	1,646	0,106	1,651	0,086	4,088	1,068	1,781	0,251
80	1,752	0,121	1,737	0,095	5,155	1,410	2,032	0,333
90	1,873	0,138	1,832	0,107	6,565	1,540	2,365	0,463
100	2,011	0,162	1,939	0,228	8,105	1,702	2,828	0,605
110	2,173	0,380	2,164	0,412	9,807	1,865	3,433	0,652
120	2,553	0,443	2,579	0,447	11,672	2,026	4,085	0,704
130	2,996	0,479	3,026	0,484	13,698	2,184	4,794	0,766
140	3,475	0,514	3,510	0,519	15,887	2,350	5,560	0,823
150	3,989	0,550	4,029	0,555	18,237	2,513	6,383	0,879
160	4,539	0,585	4,584	0,591	20,750	—	7,262	0,937
170	5,124	0,621	5,175	0,627	—	—	8,199	0,992
180	5,745	0,656	5,802	0,669	—	—	9,141	1,050
190	6,401	0,691	6,465	0,698	—	—	10,241	1,107
200	7,092	—	7,163	—	—	—	11,348	—

§. 91. Przekroje złożone.

Słupy, składające się z kilku kształtówek musimy połączyć w pewnych odstępach, aby przekrój można było uważać za całość (rys. 220). Przedewszystkiem należałoby żądać, aby części słupa na długości l' się nie wyboczyły, a więc wedle 430)

$I_1 \geq 2,37 Pl_1^2$, albo podzieliwszy przez F , $a_1^2 \geq 2,37 \nu_0 l_1^2$. Jeżeli ν_0 przyjmiemy $1 t/cm^2$ i wstawimy l_1 w cm , to

$$l_1 \leq 65 a_1. \quad (448)$$

W praktyce dajemy tu odstęp jednak mniejszy, najwyżej $l_1 = 50 a_1$, częściej jeszcze mniej. Emperger twierdzi na podstawie doświadczeń, że tylko wtedy można słup jako całość obliczać, jeśli l_1 jest o połowę mniejszem od obliczonego.

Profesor Saliger*) wychodzi z wzoru Tetmajera, który ogólnie brzmi wedle 443) $\mu_w = \mu - C \frac{l}{a}$, przyczem μ oznacza granicę ciastowatości. Dla żelaza zlewne otrzymamy $\mu_w = 3,1 - 0,0114 \frac{l}{a} t/cm^2$.

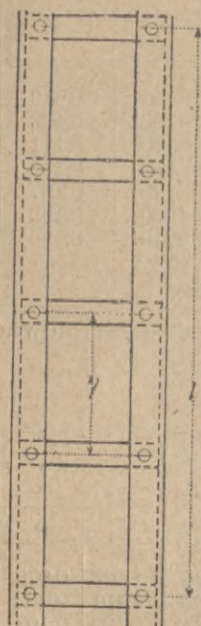
W rys. 221 mamy przekrój słupa, złożonego z dwu uwek, łączonych w odstępach l_1 wstęgami. Wtedy ze względu na oś XX obliczamy słup jako całość, ze względu na oś YY musi być też

$$\mu_{w_1} = \mu - C_1 \frac{l_1}{1 a_1}. \quad (449)$$

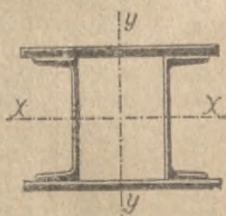
Całego pręta wytrzymałość jest więc wyczerpaną, jeżeli natężenie największe będzie μ_{w_1} . Możemy więc uważać, że μ_{w_1} jest wytrzymałością materiału dla osi Y

i napisać: natężenie wybaczące dla osi Y będzie $\mu_y = \mu_{w_1} - C_1 \frac{l_y}{a_y}$. Jak wielkie jest C_1 ? We wzorze 443) wyraz z C oznacza natężenie wskutek wygięcia pręta. Jeżeli pręt nieobciążony, wygięcia niema, więc $C=0$, jeżeli się wybacza, mamy całe $C \frac{l}{a}$.

Saliger więc przyjmuje $C: C_1 = \mu: \mu_{w_1}$,



Rys. 220.



Rys. 221.

*) „Über den Knickwiderstand gegliederter Stäbe.“ *Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Verein.* 1912, str. 5. Porównaj także „Zur Knickfestigkeit gegliederter Stäbe von Mayer-Mita“ *Z. d. österr. I. A. V.* 1914, str. 246.

stąd $C_1 = \frac{\mu_{w_1}}{\mu} C = \frac{\mu - C \frac{l_1}{a_1}}{\mu} C = C \left(1 - \frac{c}{\mu} \frac{l_1}{a_1} \right)$, więc

$$\mu_y = \mu - C \frac{l_1}{a_1} - C \left(1 - \frac{c}{\mu} \frac{l_1}{a_1} \right) \frac{l_y}{a_y} = \mu - C \left(\frac{l_y}{a_y} + \frac{l_1}{a_1} - \frac{C}{\mu} \frac{l_y}{a_y} \frac{l_1}{a_1} \right) \quad (450)$$

Dla żelaza zlewneho otrzymamy:

$$\mu_y = 3,1 - 0,0114 \left(\frac{l_y}{a_y} + \frac{l_1}{a_1} \right) + 0,000042 \frac{l_y}{a_y} \frac{l_1}{a_1} \quad (451)$$

Jeżeli to samo zastosujemy do wzorów Eulera, otrzymamy dla większego $\frac{l_y}{a_y}$

$$\mu_y = \left(1 - \frac{c}{\mu} \frac{l_y}{a_y} \frac{l_1}{a_1} \right) \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{a} \right)^2} \quad (452)$$

Wzory te można jeszcze inaczej napisać.

Jeżeli współczynnik zmniejszający dla całego pręta jest ζ' , dla części pręta ζ'_1 , to $\mu_y = \mu \zeta' \zeta'_1$. (453)

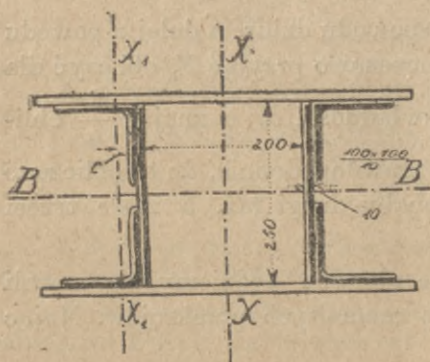
Więc współczynnik wytrzymałości na wyboczenie otrzymamy mnożąc μ przez współczynnik zmniejszający dla całego pręta i przez współczynnik zmniejszający dla części pręta między stężeniami.

Poprzeczki należy obliczać wedle największej siły poprzecznej

$$Q = \frac{1}{28} \frac{F}{n} \cdot t, \quad (454)$$

gdzie F oznacza całkowity przekrój słupa a n współczynnik bezpieczeństwa.

Przykład. Obliczyć obciążenie dopuszczalne słupa o przekroju, podanym w rys. 222, który połączony jest co 50 cm poprzeczkami. Długość wolna w obu kierunkach $6 m = 600 cm$. Przekrój $F = 2(25 \cdot 1 + 2 \cdot 19,16) = 126,8 cm^2$, moment bezwładności ze względu na oś XX



Rys. 222.

$$I = \frac{1}{12} 25(22^3 - 20^3) + 4[174,6 + 19,16(10 + 2,82)^2] = 5517 + 13468 = 18985 cm^4,$$

$$\text{więc } a = \sqrt{\frac{18985}{126,8}} = 12,23 cm,$$

$$\text{zatem } \frac{l}{a} = \frac{600}{12,23} = 49,1,$$

stąd $\zeta' = 0,669$.

Dla połowy przekroju $F'_1 = 63,4 cm^2$, odstęp środka cięż-

kości połowy przekroju otrzymamy $c = \frac{S}{F_1} = \frac{2 \cdot 19 \cdot 16 \cdot 2,82 - 1 \cdot 25}{63,4} = 1,31 \text{ cm}$

$I_1 = 2 [174,6 + 19,16(2,82 - 1,31)^2] + \frac{1}{12} 25 \cdot 1^3 + 25 \cdot 2,31^2 = 353 \text{ cm}^4$, więc

$$a_1 = \sqrt{\frac{353}{63,4}} = 2,36 \text{ cm}, \text{ zatem } \frac{l_1}{a_1} = \frac{50}{2,36} = 21,4, \text{ więc } \zeta'_1 = 0,752.$$

Wedle 459) dla $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$, $\tau_{10} = 800 \cdot 0,669 \cdot 0,752 = 402 \text{ kg/cm}^2$.

Jeżeli przekrój użyteczny jest $126,8 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 110,8 \text{ cm}^2$, to $P = 110,8 \times 402 = 44542 \text{ kg}$.

Ze względu na oś BB obciążenie mogłoby być większem.

§. 92. Obliczenie wymiarów.

Przy użyciu równań 429) lub 443) zachodzi ta okoliczność, że dla obliczenia szukanego przekroju potrzebnym jest nieznanymi jeszcze promień bezwładności tegoż przekroju. Musimy sobie tedy przy obliczeniach radzić w rozmaity sposób.

Najprzód wyjaśnić musimy kwestyę, czy przy obliczeniu wymiarów na wyboczenie należy odciągać dziury na nity, wogóle osłabienie przekroju, czy nie. Otóż rozumie się, że przekrój F , który wypada z wzoru 442) lub 443), oznacza przekrój użyteczny, to jest przekrój po odciągnięciu dziur na nity lub innych osłabień, ale przy wyznaczeniu promienia bezwładności a nie uwzględniamy osłabienia przekroju, ale liczymy dla przekroju pełnego, bo na wyboczenie, a zatem i na kształt linii ugięcia, mają większy wpływ przekroje pełne, niż w pewnych tylko punktach osłabione. Stwierdził to doświadczalnie Foeppl*).

Mając P i τ , otrzymujemy $F_0 = \frac{P}{\tau}$. Wiemy, że $F > F_0$ z dwu powodów, mianowicie z powodu dziur, a dalej z powodu wyboczenia. Można by więc tymczasowo przyjąć F , obliczyć dla tego przyjętego F promień bezwładności a , a znając $\frac{l}{a}$ obliczyć F . Pokazałoby się wtedy prawdopodobnie, że to obliczone F jest inne od przyjętego, trzeba by drugi raz, a może trzeci raz jeszcze liczyć.

Aby to obliczenie żmudne ułatwić, będziemy się starali ustawić pewne wzory dla a dla rozmaitych przekrojów. Mając

*) P. p. Zapiski doświadczalni mechaniczno-techn. 1897, zeszyt 25.

takie wzory, możemy już z większą dokładnością odrazu przyjąć stosunek $\frac{l}{a}$ i obliczenie znacznie skrócić.

W §. 53. podaliśmy wzory i wartości dla promieni bezwładności dla rozmaitych przekroi. Dla rachunku najwygodniej jest jednak, jeśli wyrazimy promień bezwładności a jako funkcję powierzchni F . Postaramy się ustawić takie wzory dla przekroi, najczęściej w praktyce się zdarzających*).

1. Kwadrat. $a=0,2887\sqrt{F}$ 455)

2. Prostokąt o podstawie b
 $a=0,2887\frac{F}{b}$ 456)

3. Sześciobok $a=0,283\sqrt{F}$ 457)

4. Elipsa (rys. 74), której połowa osi wielkiej a' , połowa małej b'

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{F}{2\pi b'}, \quad a_1 = \frac{F}{2\pi a'}, \quad \text{albo } a = \frac{h}{4}, \\ \text{a że } F &= \frac{\pi b h}{4}, \quad \text{więc } a = \frac{F}{\pi b} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 458)$$

5. Koło (rys. 75)
 $a = \frac{d}{4} = 0,282\sqrt{F}$ 459)

6. Pierścień kołowy (rys. 86)
 $a = \frac{1}{4}\sqrt{d^2 + d_1^2}$.

Jeżeli wstawimy $d_1 = nd$, to

$$a = \frac{d}{4}\sqrt{1+n^2} = 0,282\sqrt{F\frac{1+n^2}{1-n^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad 460)$$

7. Kątówka równoramienna**).

Ze względu na oś poziomą $a=1,4+0,07 F$ 461)

" " " " główną najmn. $a=0,9+0,044 F$ 462)

*) Por. także Feyl. „Zur Ermittlung der Querschnitte“ *Zeit. d. österr. Ing. u. Arch. Verein*, 1908, str. 536.

**) Por. wyprowadzenie tych wzorów w rozprawce autora: „Weiterer Beitrag zur Berechnung der Stäbe auf Knickfestigkeit“. *Z. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.*, 1892. H. 50 i 51.

8. Kątówka nierównoramienna (rys. 137).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ze względu na oś } X_1 X_1 \quad a = 1,3 + 0,11 F \\ \text{" " " " } Y_1 Y_1 \quad a' = 1,3 + 0,55 F \\ \text{" " " " } \text{główną najmn. } a = 0,9 + 0,042 F \end{array} \right\} \dots 463)$$

9. Dla przekroju teowego (rys. 223) nazwijmy

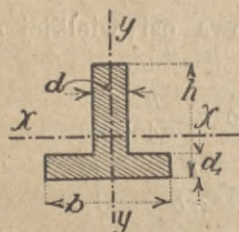
$$m = \frac{h}{b}, \quad n = \frac{d}{d_1}, \quad p = \frac{h}{d_1},$$

to dla osi XX

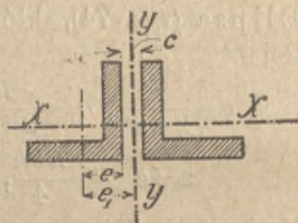
$$a = 0,2887 \frac{h}{1 + mn} \sqrt{mn(4 - mn)} \dots 464)$$

dla osi YY jest

$$a' = 0,2887 b \sqrt{\frac{1}{1 + mn}} \dots 465)$$



Rys. 223.



Rys. 224.

Dla kształtówek \perp według normalij austriackich jest $m = 0,77$, $n = 1$, więc $a = 0,3225 h$, $a' = 0,216 b$. Licząc dokładniej otrzymamy:

$$a = a' = 0,95 + 0,064 \dots 466)$$

Dla kształtówek wysokościennych otrzymamy:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1,3 + 0,077 F \\ a' = 1,55 + 0,026 F \end{array} \right\} \dots 467)$$

10. Jeżeli przekrój składa się z dwu kątówek (rys. 224) i nazwiemy I_1 , F_1 i a_1 moment bezwładności, przekrój i promień bezwładności jednej kątówki, to

$$a^2 = \frac{I}{F} = \frac{2 I_1}{2 F_1} = \frac{I_1}{F_1} = a_1^2,$$

a zatem

$$a = a_1 = 1,4 + 0,07 F_1 \dots 468)$$

Dla osi YY jest

$$a'^2 = \frac{I' 2 (I_1 + F_1 e^2)}{2 F_1} = a_1 + e_1^2.$$

Dalej mamy $e_1 = e + \frac{c}{2}$. Obliczywszy e_1 dla kątówek rozmaitych i dla $c=0, 1, 2 \text{ cm}$, napisać możemy:

$$a'^2 = (0,45 + 0,033c)F + 1,8e - 1,7. \quad . \quad . \quad . \quad 469)$$

11. Przyjmijmy teraz przekrój, złożony z blachy stojącej i dwu kątówek, (rys. 225) i nazwijmy powierzchnię jednej kątówki F_1 , blachy stojącej $F_2 = nF_1$, to $F = (2+n)F_1$.

Wtedy otrzymamy:

$$a^2 = \frac{2}{2+n} a_1^2 + \frac{nh^2 + 6e^2 - 3(2+n)e_1^2}{3+2n}$$

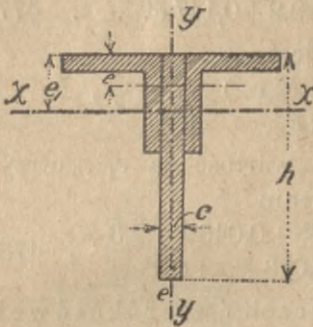
Jeżeli $n=1, h=6e$, to

$$a = 0,206F - 1,13. \quad . \quad . \quad . \quad 470)$$

Jeżeli $n=3$ do 4 , to średnio $a^2 = 0,25 + 0,032F + 0,182h^2. \quad 471)$

Dla osi YY otrzymamy ogólnie

$$a'^2 = \frac{2}{2+n} a_1^2 + \frac{0,7n - 0,6}{3+2n} h^2.$$



Rys. 225.

Dla $n=1, c=1 \text{ cm}$

$$a'^2 = 0,217F - 0,11. \quad . \quad . \quad . \quad 472)$$

Dla $n=3$ do $4, c=2 \text{ cm}$

$$a'^2 = 0,076F + 0,72. \quad . \quad . \quad . \quad 473)$$

12. Przyjmijmy przekrój złożony z blachy stojącej, dwu kątówek i nakładki (rys. 226) i nazwijmy przekrój jednej kątówki F_1 , blachy stojącej $F_2 = nF_1$, nakładki $F_3 = n_1F_1$, to $F = (2+n+n_1)F_1$.

Dla osi XX otrzymamy wtedy

$$a^2 = \frac{2}{2+n+n_1} a_1^2 + \frac{6e^2 + nh^2 + n_1d^2}{3(2+n+n_1)} - e_1^2.$$

Dla $n=3, n_1=4$ i $n=4, n_1=10$ otrzymamy średnio

$$a^2 = 0,008F + 0,076h^2. \quad 474)$$

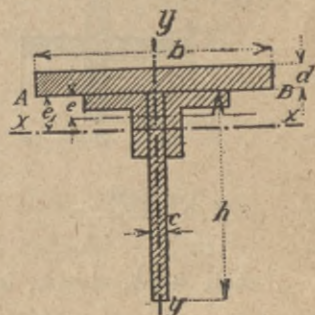
Dla osi YY dla $c=2 \text{ cm}$, n i n_1 , jak pierwej,

$$a'^2 = 0,017F + 0,044b^2. \quad . \quad . \quad . \quad 475)$$

13. Dla U wek (rys. 136) otrzymamy ze względu na oś XX

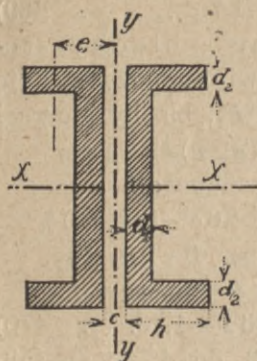
$$a = 2,2 + 0,147F \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 476)$$

$$\text{dla osi } YY \quad a' = 1,0 + 0,03F \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 476)$$



Rys. 226.

14. Jeżeli przekrój składa się z dwu uwek (rys. 227) a przekrój, moment i promień bezwładności jednej uwiki nazwiemy F_1 , I_1 i a_1 , to ze względu na oś XX :



Rys. 227.

$$a^2 = \frac{I}{F} = \frac{2I_1}{2F_1} = a_1^2, \text{ więc} \\ a = a_1 = 2,2 + 0,147 F. \quad . \quad . \quad 477)$$

Dla osi YY jest

$$a'^2 = \frac{2(I_1 + F_1 e_1^2)}{2F_1} = a_1^2 + e_1^2.$$

Wstawivszy wartość za e_1^2 , otrzymamy w przybliżeniu

$$a'^2 = 0,0002 F^2 + 0,043 F + 2,3 + \left. \begin{array}{l} \\ + c(0,013 F + 1,8) \end{array} \right\} 478)$$

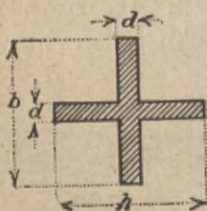
15. Dla czterech ćwierćkołówek otrzymamy:

$$a = 3,7 + 0,0173 F. \quad . \quad . \quad . \quad 479)$$

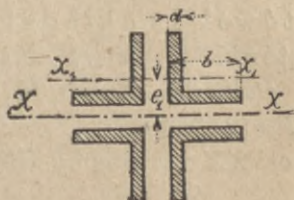
16. Dla przekroju krzyżowego (rys. 227) otrzymamy dla osi poziomej:

$$a = 0,2887 b \sqrt{\frac{1}{1 + mn}}, \quad . \quad . \quad . \quad 480)$$

jak 464) dla przekroju teowego.



Rys. 228.



Rys. 229.

$$\text{Jeżeli } b = h, d = d_1, a = 0,2045 b = 0,1022 \frac{F}{d}. \quad . \quad . \quad 481)$$

Dla osi pionowej otrzymamy analogicznie

$$a' = 0,2887 h \sqrt{\frac{mn}{1 + mn}}, \quad . \quad . \quad . \quad 482)$$

$$\text{a dla } m = n = 1, \text{ jak pierwej, } a' = 0,1022 \frac{F}{d}. \quad . \quad . \quad . \quad 483)$$

16. Jeżeli przekrój krzyżowy składa się z 4 kątownek (rys. 229) i jeśli nazwiemy przekrój, moment i promień bezwładności jednej kątownki F_1, I_1, a_1 , to

$$a^2 = \frac{I}{F} = \frac{4(I_1 + F_1 e_1^2)}{4F_1} = a_1^2 + e_1^2 \quad . \quad . \quad 484)$$

Po wstawieniu wartości za e_1^2 otrzymamy w przybliżeniu dla $c=0$ do 2 cm

$$a^2 = (0,225 + 0,017c) F + 1,8c - 1,7 \quad . \quad . \quad 485)$$

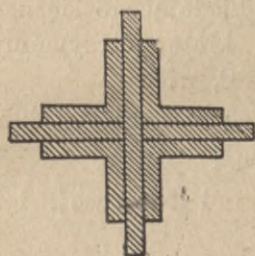
17. Jeżeli przekrój składa się z 4 kątownek i dwu wstęg (rys. 230) i jeżeli nazwiemy przekrój 4 kątownek, ich moment i promień bezwładności F_4, I_4 i a_4 a krzyża z wstęg F_5, I_5, a_5 , to

$$a^2 = \frac{I}{F} = \frac{I_4 + I_5}{F_4 + F_5}$$

Jeżeli $F_5 = F_4$, to

$$a^2 = \frac{a_4^2 + m a_5^2}{1 + m}, \quad . \quad . \quad 486)$$

przyczem a_4 i a_5 należy obliczać ze wzorów 485) i 483).



Rys. 230.

18. Jeżeli przekrój składa się z 4

kątownek i wstęgi (rys. 231) i jeżeli nazwiemy przekrój, moment i promień bezwładności jednej kątownki F_1, I_1 i a_1 a przekrój wstęgi $F_2 = n F_1$, to

$$F = 4 F_1 + F_2 = (4 + n) F_1,$$

a ze względu na oś XX

$$a^2 = \frac{4}{4 + n} (a_1^2 + e_1^2). \quad 487)$$

Dla $d=2$ cm i $n=3$ do 4 otrzymamy

$$a^2 = 0,075 F + 1,0 \quad . \quad 488)$$

Jeżeli zamiast 4 użyjemy 6 kątownek, to otrzymamy

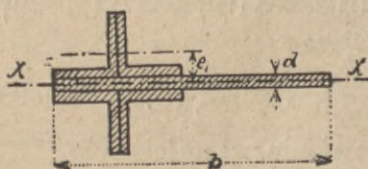
$$a^2 = \frac{6}{6 + n} = a_1^2 + e_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad 489)$$

a dla $d=2$ cm i $n=3$ do 4

$$a^2 = 0,075 F + 1,2 \quad . \quad . \quad . \quad 490)$$

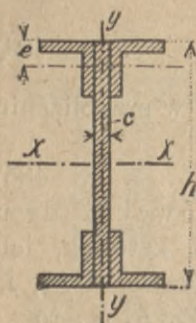
19. Dla kształtówek I otrzymamy w przybliżeniu

$$\left. \begin{aligned} a &= 3,9 + 0,107 F \\ a' &= 1,4 + 0,018 F \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 491)$$



Rys. 231.

20. Dla przekroju I , składającego się ze ścianki i czterech kątownek (rys. 232) otrzymamy, gdy znów wartość dla jednej kątownki oznaczymy znacznikiem 1,



Rys. 232.

$$F = (4+n) F_1,$$

$$a^2 = \frac{4}{4+n} a_1^2 + \frac{(9,72+n) h^2}{12(4+n)}. \quad 492)$$

Dla $n=1,5$ do 3 otrzymamy średnio

$$a^2 = -0,453 + 0,308 F + 0,129 h^2. \quad 493)$$

Dla osi YY możemy użyć wzoru 487). Jeżeli wstawimy $n=1,5$ do 3 i $d=1 \text{ cm}$, otrzymamy

$$a'^2 = 0,106 F - 0,1. \quad 494)$$

21. Dla przekroju, składającego się z 4 kątownek, połączonych kratą, otrzymamy a^2 z 491), wstawiając $n=0$, więc

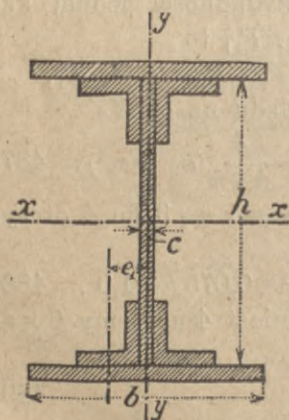
$$a^2 = a_1^2 + 0,2025 h^2 = -0,7 + 0,119 F + 0,2025 h^2. \quad 495)$$

Dla osi YY możemy użyć wzorów 483) i 484).

22. Jeżeli przekrój Iowy składa się z 4 kątownek i 2 nakładek (rys. 233), to $F=2(2+n)F_1$.

Dla osi XX jest

$$a^2 = \frac{3,708 F_1 + (1,6+n) h^2 - 5,6}{4(2+n)}. \quad 496)$$



Rys. 233.

W praktyce jest $n=1,2$ do 2, więc w przecięciu

$$a^2 = 0,036 F + 0,21 h^2 - 0,4. \quad 497)$$

Dla osi YY jest

$$a'^2 = \frac{2}{2+n} (a_1^2 + e_1^2) + \frac{nb^2}{12(2+n)}. \quad 498)$$

albo po wstawieniu wartości za e_1 ,

$$a'^2 = 0,071 F - 1,2 + 0,036 b^2 + (0,06 F + 1,13) c. \quad 499)$$

23. Dla przekroju dwuteowego (rys. 234) niech będzie a_5 promień bezwładności połowy przekroju ze względu na oś XX , który obliczyć należy wedle wzoru 473), to $F=2F_5$, $I=2I_5$, więc

$$a^2 = \frac{2I_5}{2F_5} a_1^2, \text{ stąd } a = a_1. \quad 500)$$

Ze względu na YY , chcąc wyznaczyć a' , otrzymamy

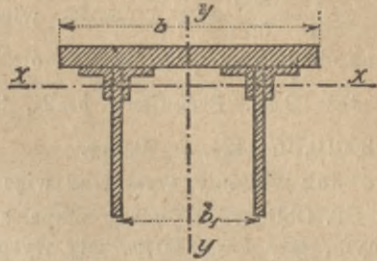
$$F = (4 + 2n + n_1) F_1,$$

$$a'^2 = \frac{4}{4 + 2n + n_1} (0,476 F_1 - 0,7 + \frac{2 + n}{2(4 + 2n + n_1)} b_1^2 + \frac{n_1}{12(4 + 2n + n_1)} b^2 \quad 501)$$

W praktyce jest $n = 2$ do 7 ,

$n_1 = 0$ do 15 , średnio możemy napisać

$$a'^2 = 0,004 F - 0,1 + 0,178 b_1^2 + 0,04 b^2 \quad 502)$$



Rys. 234.

§. 93. Przykłady obliczenia wymiarów.

1. Słup drewniany o przekroju kwadratowym obciążony jest w kierunku osi siłą $P = 3,6t$. Długość wolna wynosi $3m$. Napięcie dopuszczalne na ściskanie należy przyjąć 70 kg/cm^2 i wyznaczyć wymiary przekroju słupa.

Bez względu na wyboczenie mamy $F_0 = \frac{3600}{70} = 51,4 \text{ cm}^2$. Przekrój F musi być większy, przyjmiemy więc jako pierwsze przybliżenie $F = 81 \text{ cm}^2$, $b = 9 \text{ cm}$. Wedle 455) jest $a = 0,2887\sqrt{81} = 0,2887 \cdot 9 = 2,60 \text{ cm}$.

Wtedy $\frac{l}{a} = \frac{300}{2,60} = 115$, zatem $\zeta = 0,268$, a więc

$$F = F_0 : \zeta = 51,4 : 0,268 = 192 \text{ cm}^2.$$

Widzimy, że F wypadło znacznie większe, niż przyjęte; jako drugie przybliżenie przyjmiemy więc $F = 144 \text{ cm}^2$, $b = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$, wtedy:

$a = 0,2887 \times 12 = 3,46$, więc $\frac{l}{a} = \frac{300}{3,46} = 87$, zatem $\zeta = 0,443$, stąd:

$F = 51,4 : 0,443 = 116$, $b = \sqrt{116} = 10,8 \text{ cm}$. Przyjmijmy więc $b = 11 \text{ cm}$, $F = 121 \text{ cm}^2$,

wtedy $a = 0,2887 \times 11 = 3,18 \text{ cm}$, więc $\frac{l}{a} = \frac{300}{3,18} = 94$, zatem

$\zeta = 0,394$, $F = 51,4 : 0,394 = 130 \text{ cm}^2$, stąd $b = 11,4 \text{ cm}$. Zatem $b = 11$ jest za małe, $b = 12$ wprawdzie za wielkie, musimy jednak zatrzymać $b = 12 \text{ cm}$, bo b zaokrąglamy na całe centymetry.

2. Jak gruby ma być słup kwadratowy, obciążony siłą osiową $P = 21000 \text{ kg}$, przyczem dolny koniec jest wpuszczony w cokół kamienny a górny zapomocą kleszczy ochroniony przed wygięciem. Wysokość słupa wynosi $l_1 = 3,75 \text{ m}$.

Tu wedle 437) $l = 0,7 \times 3,75$. Ze względu, że może utwierdzenie nie jest zupełnem, przyjmiemy dla bezpieczeństwa $l = 0,8 \cdot 3,75 = 3,0 \text{ m}$. Dalej mamy $F_0 = \frac{21000}{70} = 300 \text{ cm}^2$, a stąd byłoby $b = \sqrt{300} = 17,3$. Ze względu na wyboczenie przyjmiemy $b = 20$, stąd $a = 0,2887 \times 20 = 5,774 \text{ cm}$. Więc

$$\frac{l}{a} = \frac{300}{5,77} = 52, \text{ a } \zeta = 0,86, \text{ więc } F = 300 : 0,86 = 437, \text{ } b = 20,9 \text{ cm}$$

Teraz chodziłoby tylko jeszcze o zbadanie, czy wystarczy przyjąć $b = 21$ czy też 22 cm . Próbujemy $b = 21$, to $a = 6,06 \text{ cm}$, $\frac{l}{a} = \frac{300}{6,06} = 49,5$, $\zeta = 0,707$
 $F = 300 : 0,707 = 424$, $b = 20,6 \text{ cm}$.

Jak widzimy, wystarczy więc przyjąć $b = 21 \text{ cm}$.

3. Obliczyć wymiary słupa z żelaza lanego o przekroju kołowym pełnym, gdy $P = 30000 \text{ kg}$, gdy wysokość $l_1 = 4 \text{ m}$, oba końce są utwierdzone a $\tau = 800 \text{ kg/m}^2$. Wedle 440) $l = \frac{400}{2} = 200 \text{ cm}$. Dalej mamy

$$F_0 = \frac{30000}{800} = 37,5 \text{ cm}^2, \text{ stąd } d = 7 \text{ cm}. \text{ Przyjmijmy jako pierwsze przybliżenie}$$

$$d = 9 \text{ cm}, \text{ to wedle 459) } a = \frac{1}{4} = 2,25, \text{ stąd } \frac{l}{a} = \frac{200}{2,25} = 89, \text{ stąd}$$

$\zeta = 0,156$, $F = 37,5 : 0,156 = 240$, $d = 17,5 \text{ cm}$. Musimy więc przyjąć d większe, przyjmijmy $d = 15 \text{ cm}$, to

$$a = \frac{15}{4} = 3,75, \frac{l}{a} = \frac{200}{3,75} = 53, \zeta = 0,361, \text{ więc } F = 37,5 : 0,361 = 104 \text{ cm}^2, d = 11,5 \text{ cm},$$

Wystarczy więc d mniejsze, przyjmijmy $d = 13 \text{ cm}$, więc $a = \frac{13}{4} = 3,25$,

$$\frac{l}{a} = \frac{200}{3,25} = 61,5, \zeta = 0,298, \text{ więc } F = 37,5 : 0,298 = 126 \text{ cm}^2, d = 12,7 \text{ cm}. \text{ Wartość}$$

ta tak już bliską jest przyjętej, że możnaby zatrzymać $d = 13 \text{ cm}$. Dokładniej możnaby przyjąć $d = 12,8 \text{ cm}$, zatem $a = 3,2$.

$$\frac{l}{a} = \frac{200}{3,2} = 62,5, \zeta = 0,291, \text{ zatem } F = 37,5 : 0,291 = 129 \text{ cm}^2, d = 12,9. \text{ Zatrzymujemy więc } d = 129 \text{ mm}.$$

4. Dla tego samego wypadku obliczyć słup z żelaza lanego, którego grubość ścian wynosi $\frac{1}{10} d$.

Wtedy wewnętrzna średnica $d_1 = d - 0,2 d = 0,8 d$, przekrój

$$F = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2) = 0,283 d_1^2, \text{ a według 460) } a = \frac{1}{4} \sqrt{d^2 + 0,8^2 d^2} = 0,32 d.$$

Ponieważ słup wydrążony musi być grubszy, więc przyjmijmy od razu $d = 16 \text{ cm}$, to $a = 0,32 \cdot 16 = 5,12 \text{ cm}$, zatem $\frac{l}{a} = \frac{200}{5,12} = 39$, $\zeta = 0,486$.

Dalej mamy $F_0 = \frac{30000}{800} = 37,5 \text{ cm}^2$ więc $F = 37,5 : 0,486 = 77,3 \text{ cm}^2$, stąd

$$d = \sqrt{\frac{77,3}{0,283}} = 16,5 \text{ cm}.$$

Różnica jest mała, przyjmijmy jeszcze $d = 16,3 \text{ cm}$ to $a = 0,32 \cdot 16,3 = 5,22$,

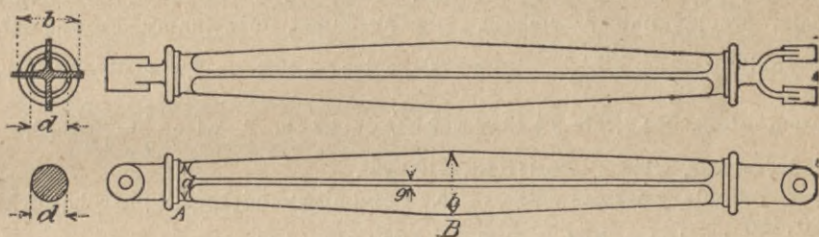
$$\text{zatem } \frac{l}{a} = \frac{200}{5,22} = 38, \zeta = 0,496, \text{ zatem } F = 37,5 : 0,496 = 75,6,$$

a stąd $d = \sqrt{\frac{75,6}{0,283}} = 16,4$, trzeba więc przyjąć $d = 164 \text{ mm}$, grubość ścian po 16 cm , więc $d_1 = 132 \text{ mm}$.

Porównując wyniki dla przekroju pełnego i wydrążonego, widzimy, że dla słupa pełnego przekrój wynosi 131 cm^2 , dla wydrążonego $74,4 \text{ cm}^2$.

5. Zastrzał z lanego żelaza w wiązaniu dachowym pracuje na ciśnienie $P=16 \text{ t}$. Zastrzał ma $1,5 \text{ m}$ długości, na końcach przegibnie połączony.

Jak wiemy, przy wyboczeniu powstaje moment największy we środku pręta, a więc właściwie tam tylko potrzebujemy przekroju według równań 442). Ku końcom mogą być przekroje mniejsze, a na końcach tylko takie, jakich wymaga ciśnienie bez względu na wyboczenie. Dla oszczędności materiału dajemy też rzeczywiście często prętom, narażonym na wyboczenie, przekrój zmienny (rys. 235), a mianowicie w środku B największy



Rys. 235.

na wyboczenie, a przy końcach A tylko na ściskanie. Przekroje pośrednie dałyby się także obliczyć w ten sposób, aby napięcie było wszędzie jednakowe,*) musielibyśmy zrobić jednak pewne przypuszczenie co do kształtu przekrojów. Zamiast tego przyjąć możemy w praktyce linię zarysu AB w przybliżeniu n. p. paraboliczną.

Przekrój F (rys. 236) obliczamy więc na ściskanie, zatem

$$F_0 = \frac{16000}{800} = 20 \text{ cm}^2, \text{ a stąd } d = 5,05 \text{ cm} = 51 \text{ mm}.$$

Przekrój F_1 we środku zastrzału przyjmijmy w kształcie krzyża i obliczać będziemy na wyboczenie. Według równania 480) mamy $a = 0,1022 \frac{F}{d}$. Przyj-

mijmy tymczasowo $d = 1,5 \text{ cm}$, dalej mamy $F_0 = 20 \text{ cm}$. Przyjmijmy $F = 45 \text{ cm}$,

$$\text{to } a = 0,1022 \frac{45}{1,5} = 3,066 \text{ cm}, \text{ zatem } \frac{l}{a} = \frac{150}{3,07} = 49, \text{ stąd } \zeta = 0,394,$$

$F = 20 : 0,394 = 50,8 \text{ cm}^2$. Dalej mamy $F = bd + (b-d)d = 2bd - d^2$. Przyjmijmy $F = 47$, otrzymamy $47 = 2b \cdot 1,5 - 2,25$, stąd $b = 16,4 \text{ cm}$, więc dokładniej

$$a = 0,2045 \cdot 16,4 = 3,35, \text{ stąd } \frac{l}{a} = \frac{150}{3,35} = 45, \zeta = 0,429, F = 20 : 0,429 = 46,6 \text{ cm}^2.$$

Możemy więc zatrzymać wymiary $b = 164 \text{ mm}$, $d = 15 \text{ mm}$.

*) P. Dwelshauvers-Dery: *Principes de la résistance des matériaux* str. 130—136 i Obrębowicz: O wytrzymałości prętów na wyboczenie.

6. Wyznaczyć numeru kształtówek słupa z żelaza zlewneego, złożonego z czterech kątowników (rys. 228) należycie znitowanych, jeżeli długość wolna wynosi 4 m, a odstęp kątowników 1,5 cm. Siła, działająca w osi słupa, jest $P=42 t$ a natężenie dopuszczalne $\tau=750 \text{ kg/cm}^2$. Bez względu na wyoboczenie otrzymamy $F_0 = \frac{42000}{750} = 56,8 \text{ cm}^2$. Ze względu na 2 dziury na nity około 4 cm^2 i wyoboczenie przyjmijmy $F=80 \text{ cm}^2$, zatem przekrój jednej kątowniki 20 cm^2 . Przyjmijmy kątowniki $\frac{100 \cdot 100}{11}$ o przekroju $20,95 \text{ cm}^2$ $v=7,14$, więc $e=2,86$, $e_1=2,86+0,75=3,61 \text{ cm}^2$, zatem wedle 483) $a^2 = a_1^2 + e_1^2 = 3,01^2 + 3,61^2 = 9,06 + 13,0 = 22,56 \text{ cm}^2$, $a=4,7 \text{ cm}$. A więc $\frac{l}{a} = \frac{400}{4,7} = 685$, stąd $\zeta=0,561$, więc $F=56,8 : 0,561 = 101 \text{ cm}^2$. Przyjęte kątowniki zatem nie wystarczają, przyjmując należy większe. Dla $F=90 \text{ cm}^2$, otrzymamy $F=22,5 \text{ cm}^2$, przyjmijmy zatem $\frac{100 \cdot 100}{12}$. Tu $v=7,01$, więc $e=2,99$, $e_1=2,99+0,25=3,24 \text{ cm}$, zatem $a^2=3,00^2+3,74^2=9+13,99=22,99$, $a=4,8 \text{ cm}$. A więc $\frac{l}{a} = \frac{400}{4,8} = 83$, stąd $\zeta=0,567$, więc $F=56,8 : 0,567 = 100 \text{ cm}^2$.

Wymiary jeszcze są za małe. Przyjmijmy większy numer kątowniki $\frac{120 \cdot 120}{11}$. Tu jest $v=8,64$, $e=3,36$, $e_1=3,36+0,75=4,11$, więc

$$a^2=3,66^2+4,11^2=13,40+16,89=30,29, \quad a=5,5 \text{ cm},$$

prawie to samo, co pierwszej, więc

$$\frac{l}{a} = \frac{400}{5,5} = 73, \quad \zeta=0,597, \quad F=56,8 : 0,597 = 95,1 \text{ cm}^2.$$

Cztery kątowniki $\frac{120 \cdot 120}{11}$ mają przekrój $4 \times 25,37 = 101,5 \text{ cm}^2$, od tego dwie dziury na nity $2 \times 2 \times 1,2 = 4,8$, zatem $F=101,5 - 4,8 = 96,7 \text{ cm}^2$. Przekrój zatem jest zupełnie wystarczający, zatrzymujemy kątowniki $\frac{120 \cdot 120}{11}$.

7. Jaki ciężar unieść może bezpiecznie słup, złożony z 4 ćwierćkółek l 20, 6 m wysoki, w obu końcach wolny, jeżeli natężenie dopuszczalne przyjmijmy 1000 kg/cm^2 ?

Dla 4 ćwierćkółek l 20 jest według str. 176. $a=7,94$, zatem

$$\frac{l}{a} = \frac{600}{7,94} = 75,5, \quad \text{stad } \zeta=0,590.$$

Wedle 442) jest $P=F\tau\zeta=4 \cdot 21,57 \cdot 1000 \cdot 0,59 = 50900 \text{ kg}$.

Jeżelibyśmy przyjęli $\tau=800 \text{ kg/cm}^2$, toby było

$$P=4 \cdot 21,57 \cdot 800 \cdot 59 = 40720 \text{ kg}.$$

§. 94. Wytrzymałość słupów żelaznych w razie pożaru.

Wiadomo nam z §. 18., że żelazo pod wpływem wysokiej ciepłoty ma mniejszą wytrzymałość, a do tego podczas pożaru słupy żelazne są niejednostajnie ogrzane, bo od strony pożaru

ciepłota dochodzi do 600° , a ze strony przeciwnej trafia je struga zimnej wody z sikawki straży pożarnej. Wskutek tego oś słupa pierwotnie prosta wygina się i natężenia z tego powodu wzrastają.

Dlatego też, jeżeli obliczamy słupy żelazne w budynkach, które mogą być narażone na pożar, słupy nie osłonięte murem lub betonem, to musimy przyjąć takie wymiary, aby słupy te i podczas pożaru nie okazały się za słabe.

Pod tym względem badali słupy żelazne doświadczalnie Bauschinger, a także M. Möller i R. Lühmann. Möller dochodzi na podstawie tych doświadczeń do wniosku, że słupy żelazne będą bezpieczne i podczas pożaru, jeśli je obliczać będziemy wedle wzoru Rankina, jednak przyjmując większy współczynnik wyboczenia.

Möller proponuje przyjmować

$$\text{dla żelaza lanego} \quad F = \frac{P}{1200} \left(1 + 0,0004 \frac{l^2}{a^2} \right) \quad 503)$$

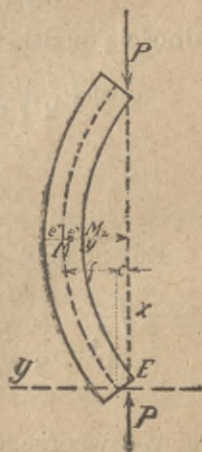
$$\text{" " spawanego} \quad F = \frac{P}{1000} \left(1 + 0,0004 \frac{l^2}{a^2} \right) \quad 504)$$

Obliczywszy słupy żelazne wedle tych wzorów, mamy jeszcze niejaką pewność, bo słupy w ogniu łamią się wedle doświadczeń dopiero dla żelaza lanego przy $\mu = 1500 \text{ kg/cm}^2$ a dla żelaza spawanego przy $\mu = 1200 \text{ kg/cm}^2$ dla rur a 1400 kg/cm^2 dla prętów pełnych.

§. 95. Słupy obciążone mimośrodkowo.

Jeżeli na słup działają siły P w kierunku równoległym do osi, przyczem kierunek ten odległy jest od osi o c , (rys. 236) to mamy do czynienia z obciążeniem mimośrodkowym.

Przypuśćmy najprzód, że siła P działa w osi głównej, tak, że wygięcie nastąpi w płaszczyźnie drugiej osi głównej. Jeżeli przez E położymy osie współrzędnych i nazwiemy rzędne punktu M osi x i y , to możemy wyrazić natężenie w punkcie M ,



Rys. 236.

$$\left. \begin{aligned} v'' &= \frac{P}{F} + \frac{Pye''}{I} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{Fye''}{I} \right) \\ \text{natężenie w punkcie } M_2 \\ v' &= -\frac{P}{F} \left(\frac{Fye'}{I} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 505)$$

W środku ciężkości M jest średnie ciśnienie $\frac{P}{F}$, oś obrotowa leży oddalona od osi ciężkości o z , przyczem wedle 414)

$$z = \frac{a^2}{y} = \frac{I}{Fy}, \text{ zatem } zy = a^2.$$

Jeżeli f jest ugięcie słupa w środku, to najw $y = f + c$, więc największe natężenie

$$\left. \begin{aligned} v'' &= \frac{P}{F} \left(\frac{F(f+c)e''}{I} + 1 \right) = \frac{P}{F} \left(\frac{f+c}{i_1} + 1 \right) \\ v' &= \frac{P}{F} \left(\frac{F(f+c)e'}{I} - 1 \right) = \frac{P}{F} \left(\frac{f+c}{i_2} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 506)$$

Strzałkę $f+c$ mamy teraz obliczyć. Analogicznie do §. 88 mamy i tu $\frac{d^2y}{d^2x} = -\frac{Py}{EI}$, a stąd, podobnie jak tam (równ. 427), otrzymamy dla $x=0$ w środku pręta

$$f+c = \frac{c}{\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} \dots \dots \dots 507)$$

Zamiast dost $\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$ możemy zazwyczaj z dostateczną dokładnością podstawić pierwsze dwa wyrazy szeregu dostawy

$$\text{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)^2 = 1 - \frac{l^2 P}{8 EI}, \text{ więc}$$

$$f+c = \frac{c}{1 - \frac{l^2 P}{8 EI}} \dots \dots \dots 508)$$

Równ. 505) możemy z uwzględnieniem 508) napisać

$$v'' = \frac{P}{F} \left(\frac{cFe''}{\left(1 - \frac{l^2 P}{8 EI} \right) I} + 1 \right), \text{ a stąd } P = \frac{F \tau I}{1 + \frac{cFe''}{\left(1 - \frac{l^2 P}{8 EI} \right)}} \dots \dots \dots 509)$$

We wzorze tym jednak znajduje się P także po prawej stronie, więc nie można z wzoru tego obliczyć wprost P , tylko

przyjąć je należy, a potem poprawiać to przyjęcie. Podobnie jeśli znamy P , a szukamy przekroju, rozwiązać można zadanie tylko próbami. Z równ. 509) otrzymamy

$$F = \frac{P}{\tau} \left(1 + \frac{ce''}{a^2 \left(1 - \frac{l^2 P}{8 EI} \right)} \right) = \frac{P}{\tau} \left(1 + \frac{ce''}{a^2 \operatorname{dost} \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)} \right). \quad 510)$$

§. 96. Natężenie dopuszczalne.

Z wzoru 508) wynika dla $c=0$ $f=0$, a gdy to wstawimy w równ. 506), otrzymamy $v''=v'=\frac{P}{F}$, a zatem dla zwykłego ciśnienia bez uwzględnienia wybożenia. Ponieważ wskutek wybożenia przy $c=0$ t. j. przy obciążeniu środkowym dla wielkiego $\frac{l}{a}$ wzrasta znacznie F , więc mogłoby się zdarzyć, że obliczając wedle 506) przy obciążeniu mimośrodkowym, otrzymalibyśmy mniejsze wymiary, niż przy obciążeniu środkowym, co jest wprost sprzecznem z prawdą. Dlatego też już z powodów teoretycznych, a także na mocy doświadczeń Tetmajera należy przyjmować dopuszczalne natężenie nie tylko mniejsze ze względu na mimośród c , ale także i na stosunek $\frac{l}{a}$.

Z wzoru 506) otrzymamy, wstawivszy

$$v'' = t_w, \quad \frac{P}{F} = \tau, \quad \frac{F e''}{I} = \frac{F e''}{F a^2} = \frac{1}{i}, \quad \text{więc}$$

$$\tau_0 = \frac{P}{F} = \frac{\tau_w}{1 + \frac{f+c}{i}} \quad \dots \quad 511)$$

Tetmajer na mocy doświadczeń przyjmuje zamiast wzoru 511) wzór

$$\tau_0 = \frac{P}{F} = \frac{\tau_w}{1 + \vartheta \frac{f+c}{i}} \quad \dots \quad 512)$$

przyczem ϑ oznacza pewien współczynnik, zależny od materiału i od $\frac{l}{a}$, wyznaczony doświadczalnie, a τ_w natężenie dopuszczalne na wybożenie, wyznaczone wedle 442).

Tetmajer podaje następujące współczynniki ϑ

1. Drzewo

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } \frac{l}{a} < 90 \quad \vartheta = 0,00039 \left(\frac{l}{a} \right)^2 - 1,0115 \frac{l}{a} + 0,93 \\ \text{„ } \frac{l}{a} > 90 \quad \vartheta = 2,058 \left(\frac{a}{l} \right)^2 - 4 \left(\frac{a}{l} \right) \end{array} \right\} \cdot 513)$$

Z tego otrzymamy następującą tabliczkę:

Tablica XXX.

$\frac{l}{a} =$	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
$\vartheta =$	0,65	0,62	0,58	0,54	0,50	0,46	0,43	0,40	0,36	0,33	0,31
$\frac{l}{a} =$	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125
$\vartheta =$	0,28	0,26	0,24	0,22	0,20	0,18	0,16	0,15	0,14	0,13	0,12
$\frac{l}{a} =$	130	135	140	145	150						
$\vartheta =$	0,11	0,10	0,10	0,09	0,09						

2. Dla żelaza lanego otrzymał Tetmajer

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } \frac{l}{a} < 100 \quad \vartheta = 0,0001437 \left(\frac{l}{a} \right)^2 - 0,03174 \frac{l}{a} + 2,077 \\ \text{„ } \frac{l}{a} > 100 \quad \vartheta = 3537 \left(\frac{l}{a} \right)^2 - 1,370 \frac{a}{l} \end{array} \right\} \cdot 514)$$

Stąd otrzymujemy następującą tabliczkę:

Tablica XXXI.

$\frac{l}{a} =$	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$\vartheta =$	1,5	1,37	1,25	1,14	1,04	0,94	0,85	0,77	0,69
$\frac{l}{a} =$	65	70	75	80	85	90	95	100	105
$\vartheta =$	0,62	0,56	0,51	0,46	0,42	0,38	0,36	0,34	0,31
$\frac{l}{a} =$	110	115	120	125	130	135	140	145	150
$\vartheta =$	0,28	0,26	0,24	0,22	0,20	0,18	0,17	0,16	0,15

3. Dla żelaza spawanego i zlewnego mamy:

Tablica XXXII.

$\frac{l}{a} < 70 =$	70	75	80	85	90	95	100	105
$\vartheta = 1,00$	1,00	0,93	0,86	0,80	0,75	0,70	0,65	0,61
$\frac{l}{a} = 110$	115	120	125	130	135	140	145	155
$\vartheta = 0,57$	0,53	0,50	0,46	0,43	0,40	0,38	0,38	0,31
$\frac{l}{a} = 160$	165	170	175	180	185	190	195	200
$\vartheta = 0,29$	0,27	0,26	0,24	0,22	0,20	0,18	0,17	0,16

§. 97. Przykłady.

1. Słup drewniany o długości 4 m i przekroju kwadratowym 20×20 cm jest obciążony z obu stron siłami 10 t, które zaczepiają w odstępach $c=10$ cm od środka, a więc w środku krawędzi. Jakie natężenie powstaje w słupie?

$$\begin{aligned} \text{Tu jest } \sqrt{\frac{P}{EI}} &= \sqrt{\frac{10000 \cdot 12}{120000 \cdot 20^4}} = \frac{1}{400}, \text{ dost } \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \text{dost } \frac{200}{400} = \text{dost } 0,5 \\ &= \text{dost } \frac{0,5 \cdot 180}{\pi} = \text{dost } 28,4^\circ = 0,879 \end{aligned}$$

W przybliżony sposób otrzymalibyśmy

$$1 - \frac{400^2}{8} \cdot \frac{10000 \cdot 12}{120000 \cdot 20^4} = 1 - \frac{1}{8} = 0,875$$

A więc wedle 507)

$$f + 10 = \frac{10}{0,879} = 11,38, \text{ stąd } f = 1,38 \text{ cm.}$$

Wedle 512) otrzymamy $\tau_w = \frac{P}{F} \left(1 + \vartheta \frac{f+c}{8} \right)$.

Tu $a = 0,2887 \cdot 20 = 5,774$, $\frac{l}{a} = \frac{400}{5,77} = 69$, więc $\vartheta = 0,31$, $i = \frac{20}{6} = 3,33$, stąd

$$\tau_w = \frac{10000}{400} \left(1 + 0,31 \frac{11,38}{3,33} \right) = 25(1 + 1,06) = 51,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle 442) $\tau_w = \tau \zeta'$, stąd $\tau = \frac{\tau_w}{\zeta'}$. Dla $\frac{l}{a} = 69$ jest $\zeta' = 0,609$, więc

$$\tau = \frac{51,5}{0,609} = 85 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle wzoru teoretycznego 506) otrzymamy jednak

$$\begin{aligned} v'' &= \frac{10000}{400} \left(\frac{400 \cdot 11,38 \cdot 10 \cdot 12}{20^4} + 1 \right) = 25(3,414 + 1) = 110,4 \text{ kg/cm}^2, \\ v' &= -25(3,414 - 1) = -70,6 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Z obu tych wzorów zatrzymamy wyniki większe. Widzimy w obu wypadkach, że wymiary są za małe.

Przyjąwszy 23×23 cm, otrzymamy

$$\sqrt{\frac{10000 \cdot 12}{12000 \cdot 23^4}} = \frac{1}{529}, \text{ dost } \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \text{dost } \frac{200}{529} = \text{dost } 0,378.$$

$$\text{Więc dost } \frac{0,378 \cdot 180}{\pi} = \text{dost } 12,66^0 = 0,919.$$

$$\text{A więc } f + 10 = \frac{10}{0,919} = 10,76, \text{ zatem } f = 0,76 \text{ cm.}$$

Wedle 306) mamy

$$v'' = \frac{10000}{529} \left(\frac{529 \cdot 10,76 \cdot 10 \cdot 12}{23^4} + 1 \right) = 18,9 (2,441 + 1) = 65 \text{ kg/cm}^2,$$

$$v' = -18,9 (2,441 - 1) = -27,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle 512) otrzymamy, ponieważ tu $a = 0,2887 \cdot 23 = 6,64$,

$$\frac{l}{a} = \frac{400}{6,64} = 60, \text{ więc } \zeta = 0,36, \text{ i} = \frac{23}{6} = 3,83, \text{ stąd}$$

$$\tau_w = \frac{10000}{529} \left(1 + 0,36 \frac{10,76}{3,83} \right) = 18,9 (1 + 1,01) = 38 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle 442) jest $\tau = \frac{\tau_w}{\zeta'}$, a że dla $\frac{l}{a} = 60$, jest $\zeta' = 0,636$, więc

$$\tau_w = \frac{38}{0,636} = 60 \text{ kg/cm}^2.$$

Tu, jak widzimy, wyniki obu wzorów teoretycznego i doświadczalnego nie wiele się różnią.

Zostawimy tu wymiar 23×23 cm.

2. Jaką siłę wytrzyma słup o przekroju I l. 20, obciążony mimośrodkowo w odstępnie 5 cm od osi ścianki, dla długości wolnej 3 m. Natężenie dopuszczalne niech będzie 1000 kg/cm^2 .

Przyjąwszy tymczasowo $f = 0$, otrzymamy z 506) $P = \frac{F v''}{\frac{F c e''}{I} + 1}$.

Przypuśćmy tymczasowo ze względu na założenie $f = 0$

$$v'' = 800 \text{ kg/cm}^2, \text{ to } P = \frac{37,58 \cdot 800}{\frac{37,58 \cdot 5 \cdot 4,8}{158,3} + 1} = 4390 \text{ kg.}$$

Szukajmy teraz dla $P = 4390 \text{ kg}$ v'' , to otrzymamy z 508)

$$f + 5 = \frac{5}{1 - \frac{300^2}{8 \cdot \frac{4390}{210000 \cdot 158,3}}} = \frac{5}{0,8514} = 5,87 \text{ cm.}$$

Więc wedle 506)

$$v'' = \frac{4390}{37,58} \left(\frac{37,58 \cdot 5,87 \cdot 4,8}{158,3} + 1 \right) = 116,8 (6,69 + 1) = 898 \text{ kg/cm}^2.$$

Należy więc przyjąć siłę nieco większą. Gdyby v'' było wprost proporcjonalne do P , to należałoby P powiększyć o $\frac{1}{9}$, blisko o 500 kg , P jednak przychodzi też w mianowniku 507), więc zwiększymy P tylko o 310 i przyjmujemy $P = 4700 \text{ kg}$.

Z równ. 508) otrzymamy

$$f+5 = \frac{5}{1 - \frac{300^2}{8} \frac{4700}{2100000 \cdot 158,3}} = \frac{5}{0,841} = 5,946 \text{ cm.}$$

Więc wedle 506)

$$v'' = \frac{4700}{37,58} \left(\frac{37,58 \cdot 5,946 \cdot 4,8}{158,3} + 1 \right) = 125(6,775 + 1) = 972 \text{ kg/cm}^2.$$

Możemy zatem zatrzymać siłę 4700 kg. Gdyby różnica była większa, trzeba by siłę jeszcze odpowiednio zmienić i rachować raz jeszcze.

Spróbujemy jeszcze obliczyć natężenie wedle Tetmajera. Tu wedle tablicy XXXII

$$a = 2,05, \frac{l}{a} = \frac{300}{2,05} = 146, \text{ więc } \vartheta = 37, i = 0,878, \text{ więc}$$

$$\tau_w = \frac{4700}{37,58} \left(1 + 0,37 \cdot \frac{5,946}{0,878} \right) = 125(1 + 2,706) = 463,3$$

$$\text{Dla } \frac{l}{a} = 146 \text{ jest } \zeta = 0,262, \text{ więc } \tau = \frac{463,3}{0,262} = 1768 \text{ kg/cm}^2.$$

Natężenie więc jest o wiele za wielkie, musimy siłę odpowiednio zmniejszyć. Przyjmijmy $P = 3000 \text{ kg}$, to z 508)

$$f+5 = \frac{5}{1 - \frac{300^2}{8} \frac{3000}{2100000 \cdot 158,3}} = \frac{5}{0,8985} = 5,566 \text{ cm,}$$

$$\tau_w = \frac{3000}{37,58} \left(1 + 0,37 \cdot \frac{5,566}{0,878} \right) = 79,8(1 + 2,345) = 266,9,$$

$$\tau = \frac{266,9}{0,262} = 1015 \text{ kg/cm}^2.$$

Natężenie jest prawie takie, jak dopuszczalne, możemy zostawić $P = 3000 \text{ kg}$, lub też o 1,5% obniżyć, więc $P = 2996 \text{ kg}$.

3. Obliczmy znowu siłę, jaką wytrzyma słup o przekroju tym samym i tym samym mimośrodzie dla długości wolnej 4 m. Natężenie dopuszczalne niech i tu będzie 1000 kg/cm^2 .

Przyjąwszy tymczasowo $f = 0$ a v'' ze względu na to przyjęcie i wielkie l tu tylko 700 kg/cm^2 , otrzymamy

$$P = \frac{37,58 \cdot 700}{\frac{37,58 \cdot 5 \cdot 4,8}{158,3} + 1} = 3929 \text{ kg,}$$

zamiast czego przyjmiemy okrągło $P = 3930 \text{ kg}$. Z równ. 508) otrzymamy

$$f+5 = \frac{5}{1 - \frac{400^2}{8} \frac{3930}{2100000 \cdot 158,3}} = \frac{5}{1 - 0,2364} = 6,55 \text{ cm.}$$

Więc wedle 506)

$$v'' = \frac{3930}{37,58} \left(\frac{37,58 \cdot 6,55 \cdot 4,8}{158,3} + 1 \right) = 104,6(7,80 + 1) = 920 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle Tetmajera otrzymamy, ponieważ tu

$$a = 2,05, \frac{l}{a} = \frac{400}{2,05} = 195, \text{ więc } \vartheta = 0,17, \zeta' = 0,147, i = 0,878, \text{ więc}$$

$$\tau_w = \frac{3930}{37,58} \left(1 + 0,17 \frac{6,55}{0,878} \right) = 104,6(1 + 1,268) = 237 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{a dalej } \tau = \frac{237}{0,147} = 1612 \text{ kg/cm}^2.$$

Stąd widzimy więc, że tu natężenie z uwzględnieniem wybożenia jest prawie dwa razy większem. Musimy tu przyjąć P znacznie mniejsze. Ponieważ we wzorze 512) ξ , F i i są stałe, a $f+c$ wedle 508) dla mniejszego P jest mniejszem, zatem P jest większem, więc

$$P > 3930 \cdot \frac{1000}{1612} = 2438 \text{ kg}.$$

Przyjmijmy $P=2500 \text{ kg}$, to

$$f + 5 - \frac{5}{1 - \frac{400^2}{8 \cdot 2100000 \cdot 158,3}} = \frac{5}{1 - 0,150} = \frac{5}{0,850} = 5,883 \text{ cm},$$

$$\text{zatem } \tau_w = \frac{2500}{37,58} \left(1 + 0,17 \frac{5,883}{0,878} \right) = 68,07(1 + 1,139) = 142 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{a stąd } \tau = \frac{142}{0,147} = 966 \text{ kg/cm}^2.$$

Silę możemy więc przyjąć $2500 \cdot \frac{1000}{966} = 2588 \text{ kg}$, równo 2590 kg .

4. Słup z żelaza lanego niesie na lewym wsporniku ciężar $8 t$, na prawym równocześnie $28 t$; jakie wymiary ma mieć ten słup, jeżeli natężenie dopuszczalne przyjmiemy 1000 kg/cm^2 a $l=4,45 \text{ m}$.

Wypadkowa $36 t$ leży w odstępnie od D (rys. 287) o $\frac{28 \cdot (14 + 24)}{8 + 28} = 29,5 \text{ cm}$, zatem od B o $3,5 \text{ cm}$ na prawo.

Przypuśćmy ze względu na wybożenie i mimośrod $\tau_0 = 240 \text{ kg/cm}^2$.

$$\text{Wtedy } F = \frac{36000}{250} = 144 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2).$$

Jeżeli $d_1 = 0,8 d$, to

$$F = \frac{\pi d^2}{4} (1 - 0,64) = 0,09 \pi d^2, \text{ stąd } d = \sqrt{\frac{144}{0,09 \pi}} = 22,57 \text{ cm},$$

zamiast czego przyjmiemy $d=23 \text{ cm}$, $g=23 \text{ mm}$. Dalej mamy

$$I = 0,0491(23^4 - 18,4^4), \quad F = 415,5 - 265,9 = 149,6 \text{ cm}^2,$$

$$a = \frac{1}{4} \sqrt{23^2 + 18,4^2} = 7,36 \text{ cm},$$

$$i = \frac{2a^2}{d} = \frac{54,17}{11,5} = 4,71 \text{ cm}, \quad \frac{l}{a} = \frac{445}{7,36} = 60,5, \quad \xi = 0,68.$$

Wedle 508) mamy

$$f + c = \frac{3,5}{1 - \frac{445^2}{8 \cdot 1000000 \cdot 0,0491(23^4 - 18,4^4)}} = \frac{3,5}{1 - 0,11} = 3,93 \text{ cm}.$$

Zatem wedle 506) i 511)

$$\nu'' = \frac{36000}{149,6} \left(1 + \frac{3,93}{4,71} \right) = 235,16 \cdot 1,835 = 431 \text{ kg/cm}^2.$$

Dalej otrzymamy $v' = 235,16(0,835 - 1) = -38,8 \text{ kg/cm}^2$.

Jeżeli jednak obliczymy wedle wzoru Tetmajera 512), to dla

$$\frac{l}{a} = 60,5, \quad \zeta = 0,68 \text{ a } \zeta' = 0,305,$$

$$\tau = \frac{\tau_w}{0,305}, \text{ a więc}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{0,305} \frac{36000}{149,6} \left(1 + 0,68 \frac{3,93}{3,71}\right) = \\ &= \frac{369}{0,314} = 1168 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Tu więc wzór teoretyczny daje stanowczo za mały wynik, wedle wzoru Tetmajera τ jest za wielkie, musimy przyjąć d większe.

Przyjmijmy $d = 25 \text{ cm}$, $g = 2,5$
 $d_1 = 29 \text{ cm}$, to

$$a = \frac{1}{4} \sqrt{25^2 + 20^2} = 8,0 \text{ cm},$$

$$i = \frac{64}{12,5} = 5,02 \text{ cm}, \quad \frac{l}{a} = \frac{445}{8} = 55,6.$$

Wedle 508) mamy

$$\begin{aligned} f+c &= \frac{3,5}{1 - \frac{445^2}{8} \frac{36000}{1000000 \cdot 0,0491(25^4 - 20^4)}} = \\ &= \frac{3,5}{1 - 0,08} = 3,80. \end{aligned}$$

Dla $\frac{l}{a} = 55,6$ mamy $d = 76$,

$\zeta' = 0,341$, więc

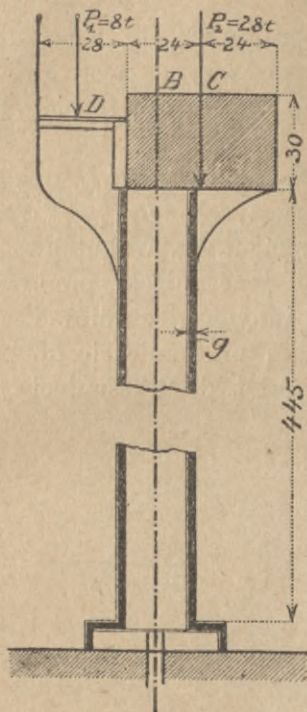
$$\tau_w = \frac{30000}{176,7} \left(1 + 0,76 \frac{3,80}{5,02}\right) = 203,7 \times 1,575 = 321 \text{ kg/cm}^2, \text{ a dalej}$$

$$\tau = \frac{321}{0,341} = 941 \text{ kg/m}^2.$$

Ponieważ dla $a = 24 \text{ cm}$ τ byłoby prawdopodobnie większe, niż 1000 kg/cm^2 , więc zatrzymamy $d = 25$, $g = 2,5 \text{ cm}$.

Właściwie wskutek zwiększenia d zmniejszy się także c i τ będzie jeszcze mniejszem.

Z powyższych przykładów widzimy, że właściwie należałoby obliczać wedle obu wzorów, teoretycznego 506) i Tetmajera 512) i przyjmować natężenie większe, otrzymane z obu wzorów. Wzory Tetmajera dają większe wyniki dla natężenia, jeśli $\frac{l}{a}$ jest wielkiem, a także dla lanego żelaza wogóle z powodu stosunkowo małego ζ' .

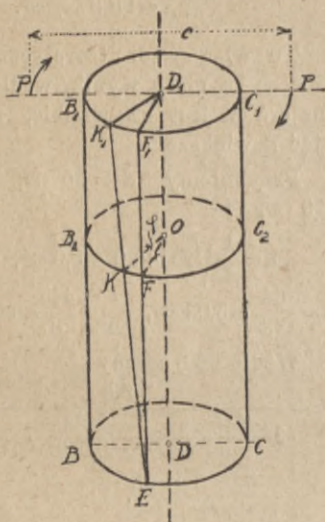


Rys. 237.

VIII. Wytrzymałość na skręcanie.

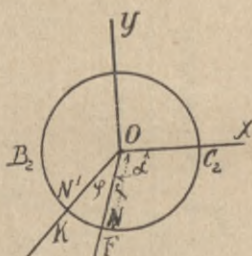
§. 98. Wzory zasadnicze.

Jeżeli siły, działające na ciało, sprowadzić się dadzą dla pewnego przekroju do pary sił, której płaszczyzna jest równoległa do tego przekroju, a więc prostopadła do osi, to ciało to pracuje na skręcanie.



Rys. 238.

Na ciało $BCEB_1C_1F_1$ działa w płaszczyźnie $B_1C_1F_1$ (rys. 238) moment Pc . Wskutek tego nastąpi przesunięcie punktów tego i innych przekrojów i tak punkt F_1 przesunie się do K_1 , F do K i t. d. Przesunięcia te



Rys. 239.

są różne, w pewnym włóknie jednak DD_1 są zerem, a włókno to nazywamy osią skręcania.

Zauważmy punkt N w przekroju B_2C_2F , a zrozumiemy, że przesunięcie punktu N będzie $NN' = \overline{ON}\varphi = r\varphi$, a przesunięciu temu będzie odpowiadać natężenie ścinające σ , a więc $\sigma = m \cdot r\varphi$, gdy m jest ilością stałą.

Jeżeli natężenie to rozłożymy na składowe σ_x i σ_y , działające w kierunku osi OX i OY , to $\sigma_x = \sigma \text{wst } \alpha$, a $\sigma_y = \sigma \text{dost } \alpha$.

Dla równowagi musi być

$$\int \sigma_x d^2 F = 0 \text{ i } \int \sigma_y d^2 F = 0,$$

a gdy wstawimy wartości,

$$\int \sigma \text{wst } \alpha d^2 F = m\varphi \int r \text{wst } \alpha d^2 F = m\varphi \int x d^2 F = 0$$

$$i \int \sigma \text{ dost } a d^2 F = \varphi \int r \text{ wst } a d^2 F = m \varphi \int y d^2 F = 0,$$

$$\text{a więc} \quad \int x d^2 F = 0 \text{ i } \int y d^2 F = 0. \quad \dots \quad 515)$$

Równania te wypełniają się wtedy, gdy początek współrzędnych, gdzie przesunięcie = 0, przyjmiemy w środku ciężkości przekroju, a więc oś skręcenia jest zarazem osią geometryczną ciała.

Dla równowagi musi być także suma momentów w przekroju $B_2 C_2 F$ równa zeru, więc $\int \sigma r d^2 F + M = 0$, gdy $M = Pc$, czyli $m \varphi \int r^2 d^2 F + M = 0$, więc

$$m \varphi = - \frac{M}{\int r^2 d^2 F} = \frac{M}{I_0}.$$

Wyraz $\int r^2 d^2 F = I_0$ nazywamy biegunowym momentem bezwładności (n. *das polare Trägheitsmoment*, fr. *moment d'inertie polaire*).

Wstawmy w to równanie

$$m \varphi = \frac{\sigma}{r} \text{ i } I_0 = \int r^2 d^2 F = \int (x^2 + y^2) d^2 F = \int x^2 d^2 F + \\ + \int y^2 d^2 F + 2 \int xy d^2 F = I_1 + I_1 + 2K,$$

a jeżeli osie OX i OY są osiami głównymi, to $K = 0$, więc $I_0 = I + I_1$. Dla przekroju kołowego, kwadratu i wieloboków regularnych jest $I = I_1$, więc $I_0 = 2I$.

Możemy zatem napisać

$$\sigma = - \frac{Mr}{I + I_1} = - \frac{Mr}{I_0} = - \frac{M}{W_0}. \quad \dots \quad 516)$$

Z równania tego wynika, że największe natężenie σ jest dla *najw.* r , a więc dla najdalszych punktów obwodu.

Kąt φ nie jest stałym dla wszystkich przekrojów, lecz zmienia się od przekroju do przekroju. Niechaj zmiana kąta φ na jednostkę długości będzie ψ , to możemy w przybliżeniu przypuścić, że kąt φ jest proporcjonalnym do długości z , więc $\varphi = Gz$.

Przesunięcie punktu N , jest, jak wiemy, równe $r\varphi$, dla przekroju o dz oddalonego będzie zaś $r(\varphi + d\varphi)$, przesunięcie więc względne $\frac{r d\varphi}{dz} = Gr$; współczynnik G nazywamy spół-

czynnikiem sprężystości na skręcenie (n. *Gleitmodul*, fr. *coefficient d'élasticité de torsion*).

Jeżeli m oznacza stosunek $\frac{1}{E} : \frac{1}{E_1}$, gdy E_1 jest współczynnikiem sprężystości poprzecznej, to wedle prawideł mechaniki rozumowej $G = \frac{m}{2(m+1)} E$, a dla $m = \frac{10}{3}$, $G = 0,385 E$.

Dalej mamy $\sigma = E_1 Gr$, a zatem ze względu na 516)

$$G = - \frac{M}{E_1 I_0} \dots \dots \dots 517)$$

Teorya ta opiera się na przypuszczeniu, że przekrój poprzeczny pozostaje płaskim po skręceniu i że natężenia są prostopadłe do promieni wodzących danych punktów. Przypuszczenia te sprawdzają się jednak tylko przy przekroju kołowym. Dla innych przekrojów wzory powyższe są tylko przybliżone.

Podajemy tu w końcu wartości dla W_0 (równ. 516) dla rozmaitych przekroi:

Tablica XXXIII.

przekrój	rys.	W_0
koło . . .	(78)	$\frac{\pi}{16} d^3$
pierścień . . .	(89)	$\frac{\pi d^4 - d_1^4}{16 d}$
elipsa . . .	(77)	$\frac{\pi}{16} b^2 h$
elipsa wydrążona		$\frac{\pi b^2 h - b_1^2 h_1}{16 \cdot 6}$
prostokąt . . .		$\frac{2}{9} b^2 h$
kwadrat . . .		$\frac{2}{9} a^3$
przekrój ijowy	(91)	$\frac{2}{9} (b - b_1)^2 (h + 2 b_1)$
„ krzyżowy	(93)	$\frac{2}{9} g^2 (h + b)$

§. 99. Wał pełny i wydrążony.

Dla przekroju kołowego (rys. 239) możemy napisać na podstawie równ. 516) bez względu na znak

$$M = \frac{I_0 \sigma}{r} = \frac{(I + I_1) \sigma}{r}$$

Ponieważ dla koła jest

$$I = I_1 = \frac{\pi}{64} d^4, \text{ więc } I_0 = \frac{\pi}{32} d^4, \text{ a } r = \frac{d}{2}.$$

Jeżeli więc chcemy dopuścić natężenie ścinające τ_1 , to

$$M = \frac{\pi}{16} \frac{d^4 \tau_1}{d}, \text{ a stąd}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M}{\pi \tau_1}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau_1}}. \quad \dots \dots \dots 518)$$

Dla przekroju rurowego (rys. 89) jest

$$I_0 = I + I_1 = 2I = 2 \frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4), \text{ a stąd}$$

$$M = \frac{\pi}{32} \frac{(d^4 - d_1^4) \tau_1}{\frac{1}{2} d} = \frac{\pi}{16} \frac{d^4 - d_1^4}{d} \cdot \tau_1 = 0,196 \frac{d^4 - d_1^4}{d} \tau_1, \text{ więc}$$

$$d_1 = \sqrt[4]{d^4 - 1,502 \frac{M d}{\tau_1}}. \quad \dots \dots \dots 519)$$

Dla przyjętego d da się więc d_1 łatwo obliczyć.

Nazwawszy $\frac{d_1}{d} = n$, otrzymamy $M = 0,196 \frac{1 - n^4}{1} \tau_1 d^3$, a stąd

$$d = \sqrt[3]{1,172 \frac{M}{\tau_1 (1 - n^4)}}. \quad \dots \dots \dots 520)$$

§. 100. Przekrój kwadratowy.

Jeżeli bok kwadratu jest a , to możemy, w przybliżeniu licząc, zastosować także wzór 516). Tu jest

$$I_0 = 2 \cdot \frac{1}{12} a^4 = \frac{1}{6} a^4,$$

więc bez względu na znak będzie

$$\text{najw. } \sigma = \frac{Mr}{\frac{1}{6} a^4} = \frac{M \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}}{\frac{1}{6} a^4} = \frac{3 \sqrt{2} M}{a^3}.$$

Jeżeli natężenie dopuszczalne jest τ_1 , to $\tau_1 a^3 = 3 \sqrt{2} M = 4,243 M$, więc

$$a = \sqrt[3]{\frac{4,243 M}{\tau_1}} = 1,62 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau_1}}. \quad \dots \dots \dots 521)$$

Według dokładniejszej teorii (p. Kluger: Wykład wytrzymałości materyałów str. 328) otrzymamy

$$\text{najw } \sigma = 4,5 \frac{M}{a^3},$$

a stąd wstawiwszy τ_1 za *najw* σ_1 będziemy mieli

$$a = \sqrt[3]{\frac{4,5 M}{\tau_1}} = 1,65 \sqrt[3]{\frac{M}{\tau_1}} \dots \dots \dots 522)$$

IX. Dźwigary kratowe i więzary dachowe.

§. 101. Uwagi ogólne.

Wyłożywszy wszystkie rodzaje wytrzymałości, przystępujemy teraz do zespołów, które obliczamy według zasad, poznanych w poprzednich rozdziałach, nad którymi jednak tutaj osobno bliżej się zastanowimy.

Według równania 143) $\frac{M}{\tau} = \frac{I}{e}$,

zatem moment oporu belki, a więc i obciążenie, które belka unieść może, jest tem większe, im większy jest moment bezwładności. Ponieważ

$$I = \int \int d^2 F y^2,$$

więc moment bezwładności jest tem większym, im większe są y . Najkorzystniejszy rozkład materyału byłby więc w przekroju o wielkiej wysokości, w którym materyał byłby skupiony w warstwach skrajnych. Belka o takim przekroju składa się z dwu oddzielnych podłużnych części t. z. pasów (n. *Gurt*, *Gurtung*, fr. *semelle*, *plate-bande*, an. *chord*, *boom*, r. *поясь*), które musimy o tyle połączyć, aby tworzyły całość. W dźwigarze blaszanym ścianka łączy oba pasy; jeżeli zamiast ścianką łączymy pasy dla oszczędności materyału prętami ułożonymi w kratę, wtedy dźwigar ten nazywamy dźwigarem kratowym (n. *Gitterträger*, fr. *poutre en treillis*, an. *trellis girder*, *frame*, cz. *nosník přihradovy*, r. *рѣшетчатая балка*).

Dźwigar kratowy składa się więc z pasu górnego (n. *Obergurt*, fr. *semelle superieure*, an. *top-chord*, *upper-boom*, cz. *pas horni*, r. *верхний пояс*), pasu dolnego (n. *Untergurt*,

fr. *semelle inférieure*, an. *bottom-chord*, *lower boom*, cz. *pas spodni*, r. нижний поясъ) i części łączących oba pasy czyli kraty (n. *Gitterwerk*, fr. *treillis*, an. *trellis work*, *web*, cz. *pruty wypluwaci*, r. рѣшѣтка). W każdym przekroju pracuje jeden pas na ciągnięcie, drugi na ciśnienie, jeden zatem stara się przedłużyć się, drugi skrócić. W obu pasach działają zatem siły wprost przeciwne, które przenoszą się przez kratę i znoszą, jeżeli oba pasy mają tworzyć jeden dźwigar. Aby siły te przemieścić z jednego pasu na drugi, musimy je rozłożyć w dwu kierunkach, łączymy zatem pasy dwoma rzędami pod rozmaitymi kątami nachylonych prętów, ułożonych w kratę. Pręty te nazywamy krzyżulcami (n. *Gitterstäbe*, fr. *barre de remplissage*, *étrésillon*, an. *brace*).

Przy obliczeniu dźwigaru kratowego przypuszczamy najprzód, że krzyżulce z pasami i części pasów nawzajem połączone są w węzłach (n. *Knoten*, an. *knot*, *apex*, cz. *styčnik*, r. узелъ) przegibnie i spółśrodkowo, wskutek czego mogą w krzyżulcach i pasach działać tylko siły podłużne w kierunku osi pręta. Każda inna siła, działająca nie w kierunku osi pręta, musiałaby sprawić obrót pręta około sworznia. Jeżeli więc panuje równowaga, siły działają w kierunku osi pręta.

Dalszem przypuszczeniem jest, że siły zewnętrzne działają tylko w węzłach, a krzyżulce przedstawiamy sobie tymczasowo bez ciężkości.

Nareszcie przypuszczamy, że krzyżulce są proste, a wskutek tego i wskutek działania siły w kierunku osi pręta powstaje we wszystkich przekrojach jednego pręta natężenie jednakowe. Przekroje prętów obliczamy zatem tak, aby natężenie było równe natężeniu dopuszczalnemu. Widzimy stąd, że przy dźwigarach kratowych wyzyskujemy materiał zupełnie, bo we wszystkich częściach dźwigaru mamy jednakową pewność, gdy tymczasem w dźwigarze blaszanym natężenie w warstwach skrajnych jest wielkiem, a blisko osi ciężkości bardzo małym; materiał więc nie jest zupełnie wyzyskanym.

§. 102. Warunki wyznaczalności wewnętrznej.

Przy obliczeniu dźwigarów kratowych chodzi o wyznaczenie sił wewnętrznych, działających w krzyżulcach i częściach pasów w kierunku ich osi. Dla każdego węzła z osobna muszą

być siły zewnętrzne, działające na ten węzeł i siły wewnętrzne prętów, wychodzących zeń, w równowadze, więc możemy dla każdego węzła ustawić dwa równania na tej podstawie, że suma składowych poziomych i suma składowych pionowych tych sił jest równą zeru; dla m węzłów otrzymamy więc $2m$ równań. W tych równaniach zawarte są jednak trzy równania, którebyśmy mogli ustawić dla sił zewnętrznych. Siły zewnętrzne bowiem muszą być między sobą w równowadze, gdyż inaczej cały dźwigar musiałby się poruszyć, a więc sumy składowych sił zewnętrznych pionowych, poziomych i momentów muszą być równe zeru. Z tego wynika, że nie możemy dowolnie przyjąć wszystkich sił zewnętrznych, lecz że muszą one zadość uczynić trzem warunkom. Z tych $2m$ równań, któreśmy otrzymali, dadzą się ustawić trzy równania, określające warunki równowagi sił zewnętrznych. Reszty $2m-3$ równań możemy użyć do wyznaczenia nieznanych sił wewnętrznych. Jeżeli tedy n oznacza ilość krzyżulców i części pasów, to mamy n niewiadomych sił wewnętrznych, do których wyznaczenia potrzebujemy n równań.

Jeżeli $2m-3=n$, 523)

to wtedy mamy właśnie dostateczną ilość równań do wyznaczenia sił wewnętrznych; dźwigar taki nazywamy dźwigarem kratowym statycznie wyznaczalnym (n. *statisch bestimmt*, fr. *stricte indéformable*, cz. *přihradovina tuha*, r. статически определенный). Jeżeli $2m-3 > n$, wtenczas mamy więcej równań, niż niewiadomych, a więc równania te określają jeszcze $2m-3-n$ warunków, które dla równowagi muszą być spełnione. Ponieważ przy zmianie obciążenia takiego dźwigaru musi on zmienić swój kształt, aby dopełnić warunków równowagi, więc dźwigar taki nazywamy chwiejnym lub niesamoistnym (n. *labil, unselbstständig*, fr. *insuffisant, déformable*, cz. *netuhá, vratká*). Przykładem dźwigaru kratowego chwiejnego są dźwigary mostów wiszących.

Jeżeli nakoniec $2m-3 < n$, wtenczas nie możemy wyznaczyć statycznie wszystkich niewiadomych, dźwigar taki jest statycznie niewyznaczalnym (n. *statisch unbestimmt*, fr. *statiquement indéterminé*, an. *not statically determined* r. статически неопределимый). Jeżeli $2m-3-n=1$, to dźwigar kratowy jest niewyznaczalnym 1-go rzędu, jeżeli brakuje do wyznaczenia niewiadomych 2 równań, to dźwigar kratowy jest

niewyznaczalnym 2-go rzędu i t. d. Chcąc wyznaczyć siły wewnętrzne dźwigaru statycznie niewyznaczalnego, musimy ustawić jeszcze $n-2m+3$ równań, a to albo czynić pewne przypuszczenia lub też badając odkształcenia dźwigaru według prawideł sprężystości.

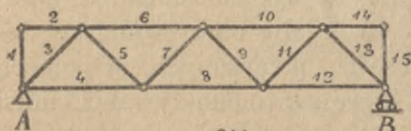
Jeżeli do dźwigaru kratowego statycznie wyznaczalnego dodamy nowy węzeł, łącząc go z dźwigarem dwoma prętami, to w równaniu 523) wstawiamy $m+1$ zamiast m a $n+2$ zamiast n i otrzymamy

$$2(m+1)-3=n+2, \text{ czyli } 2m-3=n, \text{ jak pierwiej,}$$

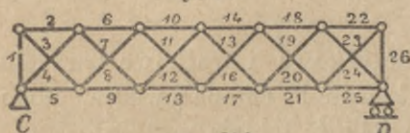
a więc przez dodanie jednego węzła i dwu prętów belka pozostaje nadal statycznie wyznaczalna. Jeżeli belka składa się z samych trójkątów, to zachodzi właśnie ten wypadek i belka taka będzie statycznie wyznaczalna.

Dla belki kratowej AB (rys. 240) jest $n=15$, $m=9$, więc $2m-3=15=n$. Belka ta jest zatem statycznie wyznaczalna.

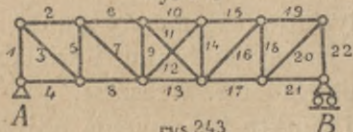
Rys. 240.



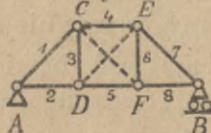
rys. 241



rys. 242



rys. 243



Dla belki CD (rys. 241) mamy $n=26$, $m=14$, $2m-3=28-3=25 < n$. Belka ta jest więc statycznie niewyznaczalna 1-go rzędu, bo $n-2m+3=1$.

Dla belki AB (rys. 242) mamy $n=22$, $m=12$, $2m-3=24-3=21 < n$, więc belka jest niewyznaczalna pierwszego rzędu. Możemy z niej jednak łatwo otrzymać statycznie wyznaczalną, opuściwszy jeden krzyżulec np. 12, gdyż wtedy będzie $2m-3=n$.

Dla belki AB (rys. 243) jest $n=8$, $m=6$, więc $2m-3=12-3=9 > 8$. Belka ta jest zatem niesamoistną pierwszego rzędu. Chcąc zrobić z niej belkę kratową statycznie wyznaczalną, musielibyśmy dodać jeszcze jeden krzyżulec np. ED , aby $2m-3=n$. Gdybyśmy dodali jeszcze drugi krzyżulec np. CF , to wtedy $2m-n$ byłoby $> n$,

otrzymalibyśmy więc belkę kratową niewyznaczalną 1-go rzędu.

§. 103. Warunki wyznaczalności ze względu na łożyska.

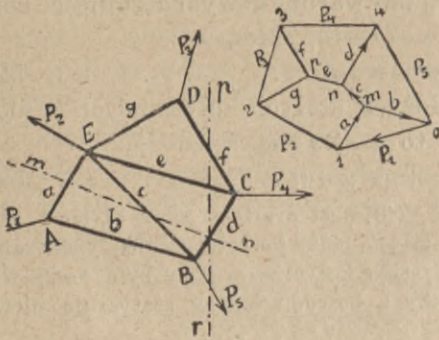
Dotychczas przypuszczaliśmy, że siły zewnętrzne, a zatem i oddziaływania, są już wyznaczone. Belka może być jednak także statycznie niewyznaczalną ze względu na rodzaj podparcia; zależy to od ustroju łożysk. Łożyska dzielimy wogóle na stałe (n. *festes Lager*, fr. *support fixe*, an. *fixed support*, r. неподвижная подушка) i ruchome (n. *beweglich*), które dozwalają na przesunięcie końca dźwigaru. Łożysko ruchome może być albo przesuwowe (n. *Gleitlager*, fr. *glissière*, an. *slide bolster*, плоская подвижная подушка), przy którym ruch końca belki następuje po przewyciężeniu tarcia posuwistego i wałkowe (n. *Rollenlager*, fr. *support en rouleaux*, an. *roller-bearing*, r. подушка на каткахъ), ułatwiające przesuwanie podłużne przez użycie wałków po przewyciężeniu tarcia potoczystego. Jeżeli łożysko jest wałkowe, to jeżeli nie będziemy uwzględniać małego bardzo tarcia potoczystego, dla równowagi oddziaływanie może być tylko prostopadłe do podstawy, na której leżą wałki, bo gdyby było ukośnem, to składowa równoległa do podstawy wywołałaby obrót wałków. Jeżeli łożysko składa się z dwu części, połączonych za pomocą sworznia, więc przegibnie, to kierunek oddziaływania musi przechodzić przez sworznień. Łożysko takie nazywamy kołyskowym (n. *Kipplager*).

Jeżeli urządzimy łożysko kołyskowe i wałkowe zarazem, to znamy punkt zaczepienia i kierunek oddziaływania, pozostaje tylko jedna niewiadoma, wielkość oddziaływania.

Jeżeli łożysko jest tylko kołyskowe, to znamy punkt zaczepienia oddziaływania, ale nie znamy kierunku i wielkości oddziaływania, są tu więc dwie niewiadome. Wreszcie, gdy łożysko jest stałe, to nie znamy ani punktu zaczepienia ani kierunku ani wielkości oddziaływania. Mamy tu trzy niewiadome.

Ponieważ do określenia obu oddziaływań belki prostej w dwu punktach podpartej mamy tylko 3 równania równowagi sił zewnętrznych, przeto suma niewiadomych podporowych nie może być większą, niż trzy. Warunek ten spełni się, gdy urządzimy jedno łożysko stałe kołyskowe (2 niewiadome) a drugie ruchome kołyskowe i wałkowe (1 niewiadoma).

loboku sił $O1$ przedstawia siłę P_1 , poprowadźmy $1m \parallel AE$ i $Om \parallel AB$, to te dwie proste przetną się w punkcie m , a proste Om i $1m$ przedstawiają kierunki i wielkości sił wewnętrznych a i b . Z kierunku



Rys. 244.

strzałek w wieloboku $O1m$ poznamy, że siły a i b działają w kierunku od węzła A , a więc przedstawiają ciągnienia. Idziemy teraz do węzła B . Tu znamy P_5 i b , niewiadome są c i d , które otrzymamy, kreśląc w podobny sposób wielobok sił dla węzła

B $40mn$, a więc $mn=c$, $n4=d$. I tu obie siły są dodatnie t. j. przedstawiają ciągnienia. Gdyby kierunek strzałki był odwrotny, do węzła i wskazywał, że siła działa do przekroju, wtedy byłoby tam ciśnienie. W podobny sposób postępując dalej, otrzymamy wykreślić siły wewnętrzne, działające we wszystkich częściach belki, czyli tak zwany plan sił (n. *Kräfteplan*, fr. *épure*, an. *force diagram*).

Metodę tę podał najpierw Maxwell*) w roku 1864, a Cremona**) w roku 1872. Nazywają ją metodą Cremony, chociaż raczej należałoby ją nazwać metodą Maxwela lub metodą wielobokową (n. *Polygonalmethode*).

Z rys. 244. widzimy, że plan sił łączy się ściśle z wielobokiem sił. Nim więc przystąpimy do wykreślenia planu sił, musimy najprzód mieć wykreślony wielobok sił i wyznaczone wielkości oddziaływań. Boki planu sił są na mocy konstrukcyi równoległe do prętów belki kratowej.

§. 105. Metoda przecięć.

a) Analityczna.

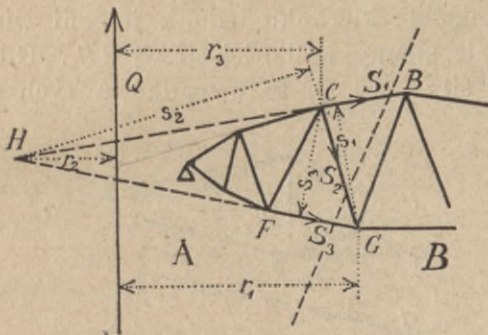
Druga metoda wyznaczania sił wewnętrznych belki kratowej jest metoda przecięć (n. *Schnittmethode*, an. *method*

*) *On reciprocal figures and diagrams of forces*. 1864.

**) *Le figure reciproche nella statica grafica*. Milano 1872.

of sections). Analitycznie zastosował pierwszy tę metodę Ritter (1861), dlatego nazywamy ją metodą Rittera.

Jeżeli belkę kratową przetniemy na dwie części *A* i *B*, to jeżeli chcemy, aby część *A* pozostała w równowadze, musimy przyłożyć siły wewnętrzne przeciętych prętów w punktach, gdzieśmy je przecięli. Jeżeli przetniemy trzy pręty nieprzecinające się w jednym punkcie, to dadzą się siły wewnętrzne tych prętów wyznaczyć, gdyż dla równowagi możemy trzy równania ustawić. Niech *CB*, *CG* i *GF* (rys. 245) będą trzy



Rys. 245.

przecięte pręty, to gdy prawą część belki odejmiemy, dla równowagi zaczepiamy dotychczas nieznanne siły wewnętrzne prętów *S*₁, *S*₂, *S*₃. Wypadkową sił zewnętrznych, czyli dla belki prostej siłą poprzeczną niech będzie *Q*. Chcąc wyznaczyć wprost *S*₁, obieramy

za punkt obrotu dla momentów punkt przecięcia się *G* dwu drugich sił *S*₂ i *S*₃, których moment zatem jest równy zeru. Mamy więc $Qr_1 + S_1s_1 = 0$, a stąd

$$S_1 = -\frac{Qr_1}{s_1} = -\frac{M_1}{s_1}, \dots \dots \dots 526)$$

jeżeli *r*₁ i *s*₁ nazwiemy prostopadłe, spuszczone z *G* na kierunku sił *Q* i *S*₁, a *M*₁ oznacza moment sił zewnętrznych ze względu na *G*.

Znak (—) z równ. 526) oznacza, że kierunek siły będzie przeciwny, niżesmy pierwotnie przyjęli, a więc do węzła, zatem siła *S*₁ jest ciśnieniem.

Dla wyznaczenia siły *S*₂ ustawiamy równanie momentów ze względu na punkt *H* i otrzymamy $-Qr_2 + S_2s_2 = 0$, stąd

$$S_2 = \frac{Qr_2}{s_2} = \frac{M_2}{s_2},$$

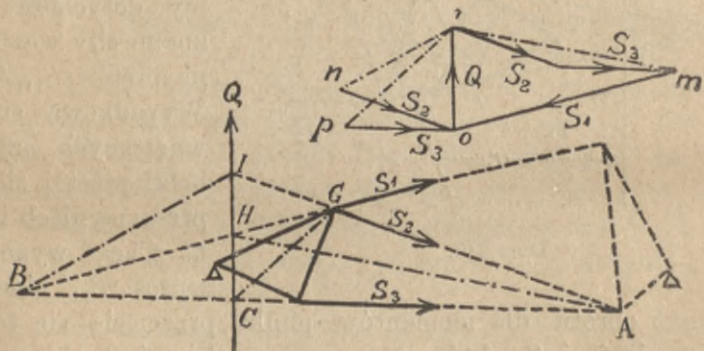
jeżeli *M*₂ oznacza moment zgięcia ze względu

na H . A ze względu na punkt C $Qr_3 - S_3s_3 = 0$, więc $S_3 = \frac{Qr_3}{s_3} = \frac{M_3}{s_3}$, przyczem M_3 oznacza moment zgięcia ze względu na C .

b) Wykreślna.

Podobnie możemy metodą przecięć wyznaczyć natężenia wykreślnie, jak to pierwszy uczynił Culmann (1864).

Przeciąwszy trzy pręty belki kratowej (rys. 246), mamy, jak pierwej, cztery siły Q, S_1, S_2, S_3 , które muszą być w równowadze. Gdybyśmy złożyli siły S_2 i S_3 , to wypadkowa ich przechodziłaby przez punkt A ; kierunku jednak jej ani wielkości nie znamy, gdyż nie znamy wielkości sił S_2 i S_3 . Gdybyśmy następnie złożyli siły S_1 i Q , to wypadkowa tych sił



Rys. 246.

przechodziłaby przez punkt H . Ponieważ jednak wszystkie te cztery siły są w równowadze, więc obie te wypadkowe muszą się równoważyć, a więc działać w jednej i tej samej prostej, ale w przeciwnych kierunkach i muszą być sobie równe, a zatem AH będzie kierunkiem wypadkowej. Niech $O1 = Q$, to gdy poprowadzimy $1m \parallel HA$ a $Om \parallel S_1$, $O1m$ będzie wielobokiem sił zamkniętym, $1m$ wypadkową z sił S_2 i S_3 a $Om = S_1$.

Podobnie otrzymamy $On = S_2$, zrobiwszy $1n \parallel IB$ a $On \parallel S_2$ i $Op = S_3$, zrobiwszy $1p \parallel GC$ a $Op \parallel S_3$. Siły S_2 i S_3 możemy też inaczej wyznaczyć, znamy bowiem ich wypadkową $1m$. Rozkładamy więc ją według znanych kierunków CA i GA , robimy $1r \parallel CA$ i $mr \parallel AG$ i otrzymujemy $S_2 = 1r$ i $S_3 = rm$. Tok sił S_1, S_2 i S_3 wyznaczamy, jak poprzednio, z wieloboku sił; wi-

dzimy więc, że siły S_2 i S_3 działają od przekroju, więc sprawiają ciągnięcie, przeciwnie S_1 ciśnienie.

Metodę przecięć możemy zastosować także przy wykonaniu planu sił, który kreślimy, przecinając po kolei belkę w ten sposób, aby przeciąć zawsze tylko dwa pręty, których sił wewnętrznych nie znamy. Wtedy wszystkie siły zewnętrzne po lewej stronie przekroju i siły wewnętrzne, działające w przeciętych prętach, muszą dać zamknięty wielobok sił. Ze względu na to, że wielkość tylko dwu sił jest nieznaną, wielobok ten da się wykreślić. Postępując tak dalej, otrzymujemy plan sił.

W rys. 244 przecinamy naprzód siły a i b i wykreślamy wielobok sił P_1 , a i b . Teraz tniemy wedle linii mn , przecinamy więc znaną nam siłę a , dalej c i d . Siły P_1 , P_3 , a , c i d muszą być w równowadze. Mamy wykreślone $P_5=40$, $P_1=01$, $a=1m$. Z m wykreślamy $mn \parallel c$ a $4n \parallel d$. Linie te przecinają się w n , mamy więc $mn=c$, $n4=d$. Tok sił w wieloboku sił jest P_5 , P_1 , a , c , d , więc c i d są ciągnięcia.

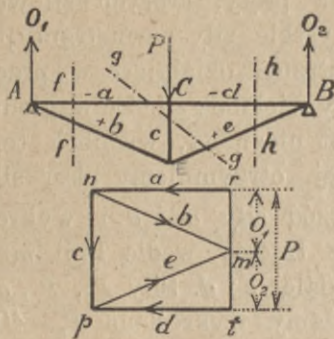
Dalej przecinamy belkę wedle linii pr , d jest tu znane, nieznanymi e i f , itd.

Chcąc porównać obie metody, wielobokową i metodę przecięć, zauważyć musimy, że przy metodzie wielobokowej otrzymujemy, wykreśliwszy plan sił, siły wewnętrzne we wszystkich prętach, podczas gdy przy metodzie przecięć musimy dla każdej trójki sił robić osobny rysunek. Jeśli zatem mamy dla danego obciążenia belki wyznaczyć siły wewnętrzne wszystkich części belki, to użyjemy z korzyścią metody wielobokowej. Jeśli zaś dla pewnego obciążenia mamy wyznaczyć siłę wewnętrzną tylko jednego lub dwu prętów, używamy metody przecięć Rittera lub Culmanna, gdyż nią prędzej dojdziemy do celu.

§. 106. Belka wzmocniona.

Jako przykład metody wielobokowej wyznaczymy w przybliżeniu siły wewnętrzne belki wzmocnionej (n. *armirter Träger*, fr. *poutre armée à un seul poinçon*, an. *triangular truss*) (rys. 247), przypuszczając, że połączenia w węzłach są przegibne, i że działa na nią siła P w punkcie C . Stąd wynika, że $O_1 = O_2 = \frac{P}{2}$, a prosta $rtmr$ jest wielobokiem sił ze-

wewnętrznych. Chcąc wykreślić plan sił, przecinamy belkę najprzód w prostej ff , kreślimy $rn \parallel AC$, $mn \parallel AE$. Proste te przecinają się w punkcie n , więc $rn = a$, $mn = b$. Kierunek sił w wieloboku, oznaczony strzałkami, jest $mrnm$, a więc w a jest do

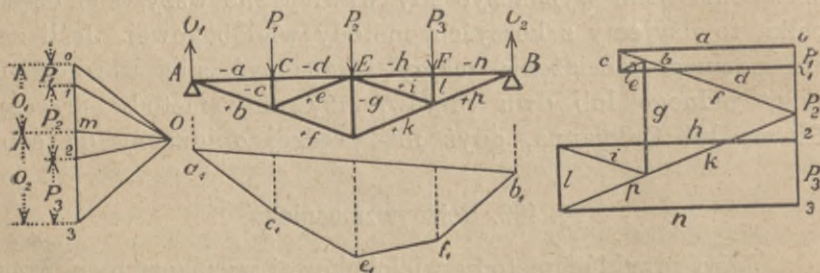


Rys. 247.

przekroju, zatem siła ta sprawia ciśnienie, w b od przekroju, więc ciągnienie. Teraz tniemy belkę w prostej gg i kreślimy wielobok sił: $O_1 = mr$, $a = rn$, dalej $np \parallel CE$. Nie znając wielkości tej siły, musimy kreślić teraz w przeciwnym kierunku, więc $mp \parallel BE$. Proste te przecinają się w punkcie p , więc $np = c$, $mp = e$. Na koniec tniemy belkę w prostej hh i kreślimy wielobok sił, więc $O_1 = mr$, $P = rt$, dalej $tp \parallel CB$. Ponieważ wielobok

sił musi się zamknąć, więc prosta $tp \parallel CB$ musi przechodzić przez punkt p , a $tp = d$, co stanowi zarazem próbę dokładności rysunku.

Na rysunku 248 widzimy belkę podwójnie wzmocnioną (fr. *poutre a trois poinçons*, an. *compound triangular truss*), na którą działają w węzłach C, E i F siły P_1, P_2 i P_3 . Najprzód musimy w znany sposób wyznaczyć oddziaływania O_1 i O_2 . W tym celu wykreślamy wielobok sił, przyjmujemy



Rys. 248.

biegun O , kreślimy wielobok sznurowy, zamykającą a_1, b_1 i równoległy do niej promień Om , wtedy mamy $O_1 = m_0$ i $O_2 = 3m$. Teraz mamy wszystkie siły zewnętrzne i kreślimy osobno wielobok sił $O123m$ i plan sił podobnie, jak powyżej.

Powyżej przypuściliśmy, że połączenia węzłowe są przegibne, a obciążenie działa tylko w węzłach. Często przypuszczenia te w praktyce się nie stwierdzają.

Jeżeli obciążenie działa na pasie górnym belki, wtedy części pasu górnego pracują jako belki drugorzędne na zginanie i przenoszą siły na węzły. Pas górny jest więc nie tylko ciśnionym, ale i zginanym. Obliczać go zatem należy dla wytrzymałości złożonej.

§. 107. Obciążenie dachów.

Według metody wielobokowej wyznaczamy też siły wewnętrzne, działające w więzarach dachowych.

Więzarem dachowym czyli wiązaniem pełnym (n. *Dachbinder*, *Bundgespärre*, fr. *ferme*, an. *roof framing*, *roof truss*, r. ферма) nazywamy parę krokwi, wzmocnionych odpowiedniemi wiązaniem i działających jako belka kratowa, niosąca cały ciężar stały zeskładu dachu, jakoteż i obciążenia śniegiem i wiatrem. Dla obliczenia więzarów dachowych musimy więc przedewszystkiem znać obciążenie dachów, które składa się z ciężaru własnego, z ciężaru śniegu i parcia wiatru. Ciężar własny składa się z ciężaru: α) pokrycia wraz z krokwiemi, β) ciężaru płatwi i tężników, γ) ciężaru więzarów. Ciężar pokrycia wraz z krokwiemi przyjąć możemy dla pierwszego obliczenia przybliżonego według następnej tabliczki XXXIV., ciężar płatwi i tężników możemy przyjąć tak dla dachów drewnianych jak i żelaznych 15 kg/m^2 połaci dachu.

Ciężar więzarów jest nam nieznany, należy go przyjąć w przybliżeniu wedle materiału ustroju i wykonanych budowli, jest on zresztą niewielki w stosunku do innych ciężarów; później należy dokładnie wyznaczyć ciężar i liczyć raz jeszcze.

Tablica XXXIV.

Rodzaj pokrycia dachu	Ciężar własny pokrycia i krokwi w kg na 1 m^2 dachu pochylego bez ciężaru więzarów głównych
cement drzewny z 10 <i>cm</i> żwirówką	200
dachówka zakładkowa	100
beton żużlowy, płyta żelbetowa	150
łupek naturalny	90

Rodzaj pokrycia dachu	Ciężar własny pokrycia i krokwi w kg na 1 m ² dachu pochyłego bez ciężaru więźarów głównych
blacha płaska	40
blacha falista na kątownikach	23
tektura	40
gonty podwójnie	40
„ pojedynczo	35
szkło drutowe do 6 mm	25
„ „ „ 8 „	35
strzecha	65
asfalt, łupek asbestowy	40
ruberoid	40

Ciężar więźarów głównych możemy przyjąć, jak następuje:

Tablica XXXV.

a) Więzary drewniane na 1 m² dachu pochyłego:

Ustrój	rozp. m	cięż. kg/m ²
o stolcu stojącym lub leżącym	7,5—15	7—13
wiszące pojedyncze	10 —18	12—18
„ złożone lub rozporowe	20	20—24
„ niepodparte dla rozpiętości	10 —18	20—30

b) Więzary żelazne na 1 m² rzutu poziomego:

lekkie	—	14—20
cięższe	—	20—30

Nachylenie dachu zależne jest od materiału pokrycia. W przecięciu możemy przyjąć nachylenie według następującej tabliczki, jeżeli kąt nachylenia dachu do poziomu (rys. 249) nazwiemy α , wysokość h a rozpiętość l , zatem $\text{st } \alpha = \frac{2h}{l}$. Nachylenie może być jednak także więcej strome.

Tablica XXXVI.



Rys. 249.

Rodzaj pokrycia	$\text{st } \alpha = \frac{2h}{l}$	
	najmn.	średnie
Strzecha	1:0,9	1:1
Gonty	1:2,25	1:1,5
Dachówka zakładkowa	1:1,5	1:1
Łupek naturalny	1:2,25	1:1,5
„ eternit	1:2,25	1:1,5
Blacha płaska	1:6	1:4
„ falista	1:2	1:2
Szkło	1:2,5	1:2
Tektura	1:6	1:4
Cement drzewny	1:20	1:15

Warstwa śniegu, która się osadza na dachach w naszych okolicach, nie jest zwykle grubszą, niż 0,60 m. Wysoko w górach warstwa ta jest jednak znacznie większą, osiąga nawet 2 m wysokości. Przyjąwszy wysokość warstwy 0,65 m i zważywszy, że śnieg jest około 8 razy lżejszy od wody otrzymamy ciężar śniegu na m^2 rzutu $s = 0,65 \frac{1000}{8} = 81,5 \text{ kg}$, okrągło

$$s = 80 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \dots \dots \dots 527)$$

Odnosi się to tylko do okolic w nizinach, w górach należy przyjąć więcej. Zwłaszcza śnieg zlodowaciały waży znacznie więcej, Schaller *) robił doświadczenia co do ciężaru gatunkowego śniegu, a zarazem badał grubość jego warstw i przychodzi do wniosku, że jest ona zależną od wysokości nad poziom morza, mianowicie $g = 70 \left(1 + \frac{h}{500}\right)$, jeżeli g w *cm* a h w *m* oznacza wysokość nad poziom morza. Radzi on podzielić kraj warstwicami na 3 części.

Tablica XXXVII.

strefa	h	s w kg/m^2
pierwsza	0—200 m	75
druga	200—500 „	120
trzecia	>500 m	340

Zwykle przyjmujemy, że obciążenie śniegu jest równe na całej powierzchni dachu; możliwem jest jednak, że wskutek wiatru jedna połać jest obciążoną śniegiem, druga prawie wcale nie. Czasem może to sprawić w niektórych prętach większe natężenie, w takim razie należałoby to uwzględnić.

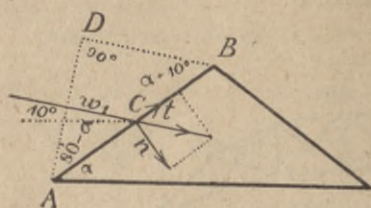
Koechlin i Landsberg przyjmują więc, że śnieg może być tylko na jednej połaci, Breymann jednak twierdzi słusznie, że na drugiej połaci należy przynajmniej przyjąć połowę obciążenia.

Na stromej połaci śnieg nie może się utrzymać, dlatego liczymy powyższe obciążenie tylko do $\alpha = 35^\circ$, przy $\alpha = 40^\circ$ przyjmujemy tylko połowę obciążenia, a przy $\alpha = 45^\circ$ nie przyjmujemy wcale żadnego obciążenia śniegiem.

*) Por. „Beton u. Eisen“ 1909, str. 284 i 1907, str. 136.

chyżość wiatru i nachyla jego kierunek. Jeśli w oznacza ciśnienie na 1 m^2 płaszczyzny prostopadłej do kierunku wiatru,

to ciśnienie na połacie AB o szerokości 1 m otrzymamy, spuściwszy z A prostopadłą na kierunek wiatru, a z B na AD , a zatem parcie wiatru na m^2 dachu pochyłego



Rys. 250.

$$w_1 = w \frac{AD}{AB}.$$

Z rysunku widzimy, że jeżeli kąt nachylenia dachu do poziomu jest α ,

$$\frac{AD}{AB} = \text{wst}(\alpha + 10),$$

więc $w_1 = w \text{wst}(\alpha + 10) \dots \dots \dots 530)$

Rozłóżmy parcie w_1 na siłę prostopadłą do dachu n i równoległą t . Z rysunku widzimy, że

$$n = w_1 \text{wst}(\alpha + 10) = w_1 \text{wst}^2(\alpha + 10), \text{ a } t = w_1 \text{dost}(\alpha + 10).$$

Siła t posuwa prąd wiatru wzdłuż połaci. Ponieważ tarcie wiatru o dach jest stosunkowo małe, więc zwykle nie uwzględniamy go wcale, tylko siłę składową prostopadłą do połaci n .

Jednak doświadczenia Loessla udowodniły, że parcie n jest większem i wzrasta nie w stosunku do kwadratu, lecz do pierwszej potęgi $\text{wst}(\alpha + 10)$.

Będziemy więc używać nadal wzoru

$$n = w \text{wst}(\alpha + 10), \dots \dots \dots 531)$$

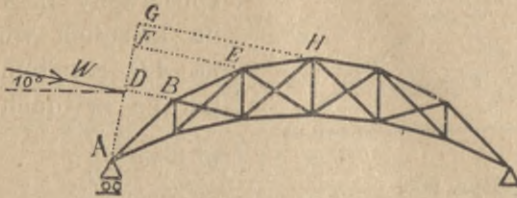
a zatem wzoru identycznego z wzorem 530).

Przy dachach wielobocznych nachylenie dachu zmienia się ciągle, musimy zatem dla każdego nachylenia obliczać parcie według 531). Możemy to zrobić także wykreślnie.

Równ. 531) możemy także inaczej napisać, zważywszy że $\text{wst}(\alpha + 10) = \frac{AD}{AB}$, zatem $n = w \frac{AD}{AB}$, więc $N = w AD$. Parcie prostopadłe do połaci na 1 m szerokości jest więc równe w razy rzut połaci na kierunek wiatru. Jeżeli odstęp ciężarów jest a , to musimy jeszcze przez a pomnożyć.

Dla dachu wielobocznego (rys. 251) wynika z tego łatwa konstrukcja. Z A prowadzimy AG prostopadle do kierunku wiatru i rzucamy na nie punkty załamania powierzchni dachu B ,

E, H , // do kierunku wiatru. Parcie są wtedy proporcjonalne do AD, DF, FG . Aby otrzymać całkowite parcie połaciowe, pomnożyć należy te długości przez wa .



Rys. 251.

Jeżeli przedmiot, o który wiatr uderza, ma powierzchnię krzywą, to parcie wiatru jest mniejszem, niż na powierzchnię płaską o tym samym rzucie pionowym, więc $W = \delta Fw$. 532) jeżeli δ jest współczynnik, w parcie wiatru na jednostkę kwadratową a F rzut pionowy powierzchni.

Jeżeli obliczenie parcia oprzemy wtedy na wzorze Loesla 531), to otrzymamy wedle Mayera

- dla walca (przekrój koło) . . . $\delta = 0,848$
 „ graniastosłupa („ ośmiokąt) . . . $\delta = 0,890$

Wzory te zastosujemy przy obliczeniu parcia wiatru na kominy.

Brune oblicza parcie na stożek i półkulę i otrzymuje dla stożka $\delta = \frac{1}{2}$ dost a , jeżeli a jest kąt nachylenia boków stożka do osi a dla półkuli $\delta = 0,207$.

Rozporządzenie ministr. austr. z r. 1911 dla zakładów żelbetowych §. 4. ust. 5. Ciężar własny pokrycia dachu włącznie z opierzeniem, latami i krokwiami jednak bez ciężarów należy przyjmować na $1 m^2$ pochyłej powierzchni dachu w kg , jak następuje:

Tablica XXXIX.

dachówka pojedyncza	100
„ podwójna	125
„ zakładkowa	64
łupek pojedynczo	73
„ podwójnie	82
„ sztuczny na tekturze	41
tektura pojedynczo bez piasku	32
„ podwójna	35
cement drzewny z 8cm wysoką warstwą żwiru	200

Dla innych rodzajów pokrycia (n. p. dla metalu, szkła i t. d.) należy ciężar własny w danym razie osobno obliczyć.

Ust. 9. Ciężar śniegu. Ciężar śniegu należy w kg/m^2 rzutu dachu przyjąć, jak następuje:

przy nachyleniu dachu do 40°	75
„ „ „ między 40° do 60°	40
„ „ „ nad 60° nie należy wcale uwzględniać ciężaru śniegu.	

Dla okolic, położonych na południu (Austrii), dowodnie ubogich w śnieg, można przyznać w danym wypadku zmniejszenie powyższych obciążeń. Dla okolic z dowodnie wielkim opadem śniegu należy przyjąć ciężar śniegu według miejscowego położenia większy, a mianowicie przy nachyleniach do 40° aż do $200 kg$, dla nachyleń między 40° a 60° aż do $110 kg/m^2$ rzutu. Ciężar śniegu należy przyjmować przy obliczeniu albo na wszystkich, albo gdy to jest niekorzystniejszym na niektórych tylko połaciach dachu.

10. Parcie wiatru. Parcie wiatru należy przyjąć na m^2 powierzchni prostopadłej do kierunku wiatru w ogólności $w=150 kg$, w nadzwyczajnych wypadkach wedle miejscowego położenia do $250 kg$.

11. Kierunek wiatru należy przyjąć poziomy; dla powierzchni, które z kierunkiem wiatru tworzą kąt α , należy przyjąć parcie wiatru prostopadle do tej powierzchni $w_1 = w \text{ wst}^2 \alpha$.

12. Przy otwartych wiatach, daszkach i t. d. należy w danym razie przyjąć parcie wiatru, działające prostopadle do powierzchni dachu z wewnątrz na zewnątrz $60 kg/m^2$, a w nadzwyczajnych wypadkach według położenia miejscowego $100 kg/m^2$.

13. Przy budowlach, które znajdują się w miejscu stale od wiatru osłoniętem, można dopuścić zmniejszenie parcia wiatru aż do $75 kg/m^2$.

Normy przyjęte przez austr. towarzystwo inżynierów i architektów.

Kierunek parcia wiatru przyjmuje się poziomy. Parcie wiatru na płaszczyznę prostopadłą do kierunku wiatru $200 kg/m^2$.

Ciężar śniegu na płaszczyznę poziomą $75 kg/m^2$.

Przepisy dla budowli c. k. kolei państwowych austriackich.

Ciężar śniegu należy przyjąć $75 kg/m^2$ rzutu. Przy nachyleniach dachu wyżej 40° należy przyjąć z tego połowę, wyżej 60° wcale nie uwzględniać ciężaru śniegu.

W okolicach z dowodnie bardzo małym opadem śniegu można wpływu jego całkiem nie uwzględniać.

Parcie wiatru prostopadle do połaci dachu należy obliczać wedle wzoru $w=150 \text{ wst}^2(\alpha+10) kg/m^2$, przyczem α oznacza kąt nachylenia dachu. W okolicach z bardzo wielkimi wichrami (bora) należy przyjąć $250 kg/m^2$ zamiast $150 kg/m^2$. Dla otwartych wiat i dachów peronowych należy przyjmować wiatr, działający z wewnątrz na zewnątrz $60 kg/m^2$, w okolicach z silnymi wiatrami (bora) $100 kg/m^2$ dachu. Przy budowlach w dowodnie osłoniętem położeniu można powyższe cyfry odpowiednio zniżyć.

Należy zawsze uwzględnić najniekorzystniejsze działanie wiatru i ciężar śniegu.

Rozporządzenie minist. pruskiego z 1910.

Tablica XL.

Ciężary własne kg/m^2 :

Dach kryty dachówką pojedynczo z latami i krokwiami . . .	75 kg/m^2
Dtto ustrój czeski (w zaprawie)	85 „
Dach kryty dachówką podwójnie z latami i krokwiami . . .	95 „
Dtto ustrój czeski (w zaprawie)	115 „
Dach kryty podwójnemi dachówkami z latami i krokwiami .	105 „
Dtto ustrój czeski (w zaprawie)	130 „
Dach kryty dachówką holenderską na latach z małych dachówek	80 „
Dtto z wielkich dachówek	85 „
Dach z dachówek holenderskich na opierzeniu zakładaniem .	100 „
Dach z dachówek zakładkowych	65 „
Dach kryty gąsiorkówką z latami i krokwiami	100 „
Dtto pokrycie czeskie	115 „
Angielski dach łupkowy na latach z latami i krokwiami . .	45 „
Angielski dach łupkowy na opierzeniu z opierzeniem i krokwiami	55 „
Niemiecki dach łupkowy na opierzeniu i z podkładką tekturową	65 „
Dtto z mniejszych dachówek (20×15 cm)	60 „
Dach cynkowy na listwach	40 „
Dach miedziany z podwójnemi zakładkami i opierzeniem . .	40 „
Pojedynczy dach tekturowy z opierzeniem i krokwiami . . .	35 „
Podwójny dach z żwirem, opierzeniem i krokwiami	55 „
Dach z cementu drzewnego z warstwą żwiru 7 cm	180 „
Dach z cementu drzewnego na sklepieniach i warstwą żwiru 7 cm	520 „
Dach szklany na żelaznych listwach dla szkła 4 cm	22 „
Dtto dla szkła 5—6 mm albo z drutami	30 „
Ciężar śniegu na 1 m^2 powierzchni połaci	75 „
(Jeżeli $\alpha > 50^\circ$ nie uwzględnia się wcale ciężaru śniegu).	
Parcie wiatru na 1 m^2 powierzchni prostopadłej (dla obliczenia części ścian, ram, więźarów)	125*) „

Całkowite obciążenie dachów

złożone z ciężaru własnego, śniegu i parcia wiatru na 1 m^2 poziomego rzutu:

Tablica XLI.

Dach szklany przy nachyleniu 10°	125 kg
Dtto przy nachyleniu 25°	150 „

*) Dla wysokich budowli na małej powierzchni nie mogą być przekroczone wyższe granice natężeń dopuszczalnych przy $w = 150 kg/m^2$.

Dach łupkowy przy nachyleniu 25°	150 kg
Dtto przy nachyleniu 45°	250 „
Dach dachówkowy przy nachyleniu 30°	250 „
Dach dachówkowy przy nachyleniu 45°	300 „
Dach z cementu drzewnego na drewnianych krokwiach	275 „
Strome dachy mansardowe z pokryciem łupkiem lub dachówką przy nachyleniu 45°	300 „
Dtto przy nachyleniu 70°	700 „

Dla poziomych lub słabo nachylonych 1:20 dachów, które służą jako miejsce zabawy i wypoczynku, obciążenie = 250 kg/m² (rozp. berliń. policyi).

§. 108. Ogólne warunki równowagi dachu.

Najprzód uważać będziemy dach jako całość i badać go, czy siły, działające nań, nie potrafią go wywrócić albo przesunąć (rys. 252), co zwłaszcza możliwem jest przy dachach wysokich.

Składowa wiatru prostopadła do połaci Nusiłuje dach obrócić około krawędzi B. Moment, tu występujący, dla głębokości = 1 jest $M = N \cdot BE = N(A'E - A'B) = nl \left(\frac{l}{2} - b \text{ dost } \alpha \right)$, a że

$\frac{b}{2} = l \text{ dost } \alpha$, więc $M = nl \left(\frac{l}{2} - \frac{b^2}{2l} \right) = \frac{n}{2} (l^2 - b^2)$. Ciężar własny

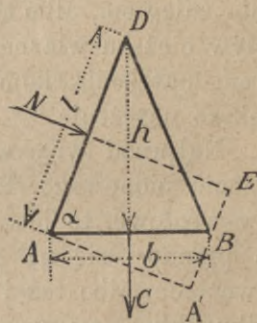
dachu, który niech wynosi $g \text{ kg/m}^2$ powierzchni pochyłej, jest całkowity $C = g \cdot 2l$, zatem moment jego ze względu na punkt B

$$M' = -2gl \cdot \frac{b}{2} = glb.$$

Dla równowagi musi więc być

$$bgl \geq \frac{n}{2} (l^2 - b^2), \text{ stąd}$$

$$g \geq \frac{n}{2bl} (l^2 - b^2) \quad . \quad . \quad 533)$$



Rys. 252.

Przesunąć w kierunku poziomym dach usiłuje $N \text{ wst } \alpha$, składowa pozioma siły N, czemu sprzeciwia się tarcie, wywołane ciężarem $2gl$ i składową pionową parcia wiatru $N \text{ dost } \alpha$. Jeżeli współczynnik tarcia nazwiemy f , to $f(2gl + nl \text{ dost } \alpha) =$

$= nl \text{ wst } \alpha$. Wstawmy $\text{dost } \alpha = \frac{b}{2l}$, $\text{wst } \alpha = \frac{h}{l}$, to $2g + \frac{nb}{2l} \geq \frac{nh}{lf}$, a stąd

$$g \geq \frac{n}{4fl} (2h - fb) \quad . \quad . \quad . \quad 534)$$

Jeżeliby g było mniejszem, niż wypada z równ. 533) i 534), to musielibyśmy więzary zakotwić, aby przeszkodzić czy to przesunięciu czy to przewrotowi.

109. Wyznaczenie sił wewnętrznych dla obciążenia pionowego.

Dach musi być nietylko jako całość w równowadze, lecz także nateżenie we wszystkich prętach nie powinno przekraczać nateżenia dopuszczalnego. Będziemy się więc starali wyznaczyć siły wewnętrzne, działające w prętach i to najprzód wykreślnie.

Siły wewnętrzne więzarów dachu wyznaczamy najlepiej według metody wielobokowej. Dla danego obciążenia wyznaczamy najprzód oddziaływania, a potem wykreślamy plan sił, jak to na przykładzie zaraz zobaczymy. Możemy przytem albo obliczać siły wewnętrzne dla obciążenia równoczesnego śniegiem i wiatrem, albo osobno wyznaczyć siły wewnętrzne dla obciążenia ciężarem własnym i śniegiem, a osobno dla parcia wiatru.

Ten drugi sposób jest z tego względu lepszym, że dla niektórych prętów otrzymamy największe nateżenie dla obciążenia śniegiem, albo tylko wiatrem. Dlatego lepiej badać osobno wpływ ciężaru własnego i śniegu a osobno wiatru, a dopiero potem nateżenia kombinować w ten sposób, aby dały największe nateżenie.

Najprzód więc wyznaczymy siły wewnętrzne dla obciążenia pionowego. Przedewszystkiem musimy wyznaczyć ciężary węzłowe, to jest ciężary, działające w węzłach. Obciążenie przenosi się na więzary główne albo za pomocą platew w węzłach, albo też i między węzłami. W tym ostatnim wypadku obliczamy przecież więzar tak, jakby ciężary działały w węzłach, a tylko pas górny więzaru obliczamy nietylko na ściskanie, ale i na zginanie, wywołane momentem obciążenia, działającego między węzłami.

Jeżeli a oznacza odstęp więzarów, g ciężar własny na m^2 powierzchni pochyłej i s ciężar śniegu na m^2 rzutu, to na długość krokwi l_1 działa ciężar $G = gal_1 + sal_1$ dost a .

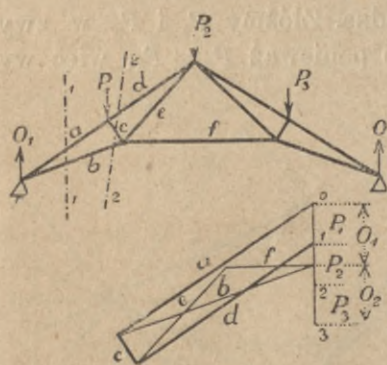
Jeżeli odstęp węzłów jest równy, to na jeden węzeł przypada długość l_1 równa odstępowi węzłów, na pierwszy węzeł połowa tej długości. Przy dachach w kształcie ostrosłupa wię-

zary nie są równoległe, wtedy obciążenie na m b. więzaru jest zmienne, a to wedle powierzchni dachu, która na odpowiednie części więzaru przypada.

Ciężary węzłowe mogą działać także w pasie dolnym. Przy większych dachach już ciężar samego dźwigaru należy rozłożyć na pas górny zwykle w większej części np. $\frac{2}{3}$ i na pas dolny $\frac{1}{3}$ ciężaru. Oprócz tego często zawieszono są na dachu ciężary stropowe, czasem podesty schodów i świeczniki a nawet w budynkach fabrycznych tory dla żórawi.

Znając ciężary węzłowe, wyznaczamy najprzód oddziaływania. Jeśli więzar i obciążenie jego są symetryczne, to $O_1 = O_2 =$ połowie obciążenia; jeżeli niema symetrii, to wyznaczamy oddziaływania wykreślnie zapomocą wieloboku sznurowego. Musi się wtedy zamknąć wielobok sił i wielobok sznurowy. Teraz możemy przystąpić do wykreślenia planu sił wedle §. 104.

Podajemy tu kilka planów sił dla obciążenia pionowego już bez dalszych objaśnień, przyjmąwszy obciążenie symetryczne,

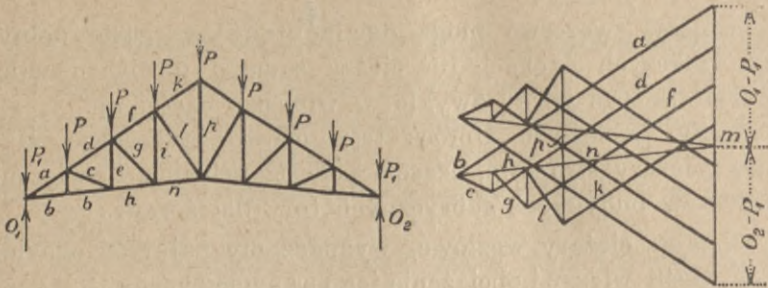


Rys. 253.

w którymto razie $O_1 = O_2 =$ połowie obciążenia. Z powodu symetrii jest tu górna połowa planu sił zupełnie przystająca do dolnej, dlatego też kreślimy zwykle tylko połowę planu sił. Rysunek 253 przedstawia więzar francuski układu Polonceau (n. *der französische oder Polonceau Dachstuhl*, fr. *ferme système Polonceau*, an. *french roof truss*), 254 więzar

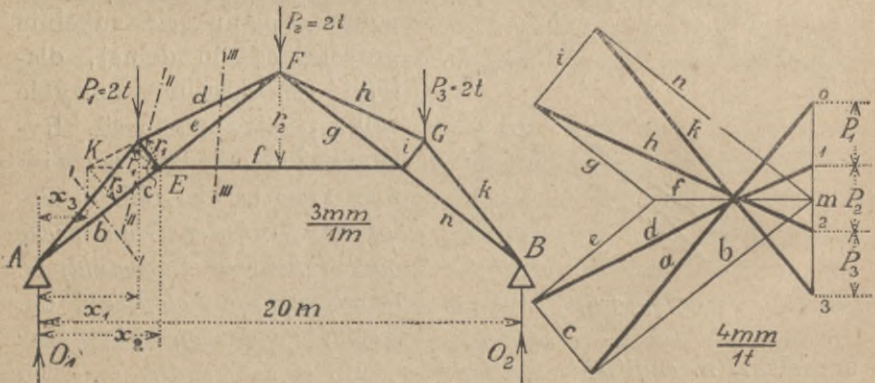
angielski (n. *englischer Dachbinder*, an. *english roof*), rys. 255 więzar mansardowy (fr. *comble à la Mansard*, an. *mansard roof*). Czasem, jak w rysunku na tabl. III., przedstawiającym złożony więzar Polonceau, nie możemy znaleźć przekroju, dla którego byłyby tylko dwie siły niewiadome. W zwykły sposób wyznaczyć tu możemy siły wewnętrzne a, b, c, d, e, f , ale teraz, czy przetniemy w kierunku II , czy $II II$, zawsze mamy trzy niewiadome, nie możemy więc ich wykreślnie wyznaczyć.

Musimy zatem tu poradzić sobie inaczej, przeciąć więzar płaszczyzną *III III* i wyznaczyć sposobem Rittera siłę *m*.



Rys. 254.

Znając ją, możemy kreślić dalej plan sił, zaczynając od sił *m*, *r* i *s* i kreśląc dalej siły *n*, *h*, *k*, *l*, *g*. Możemy też poradzić sobie w inny sposób i to metodą Culmanna. Przetnijmy więzar po linii *IV IV*. Siły wewnętrzne *h*, *k*, *l*, *s*₁ i *r*₁ i zewnętrzne *P*₄ i *P*₅ są w równowadze. Złożmy *P*₄ i *P*₅ w zwykły sposób w wypadkową *R'*, to ponieważ *P*₄ = *P*₅, więc wy-

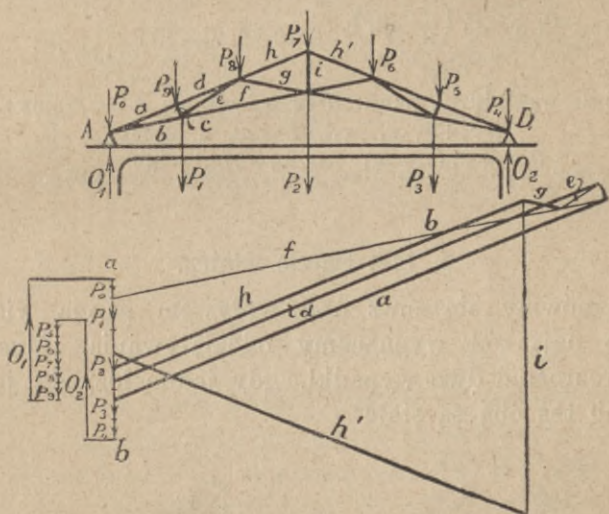


Rys. 255.

padkowa działa w środku odległości między *P*₄ i *P*₅. Jeżeli byśmy złożyli *R'* z *k*, to wypadkowa musiałaby iść przez *S*, wypadkowa *R''* zaś reszty sił *h*, *l*, *s*₁ i *r*₁ musi przechodzić przez *F*. Dla równowagi muszą kierunki obu wypadkowych wpadać na siebie, więc kierunek *R''* jest *SF*. Poprowadźmy

w wieloboku sił $33' // k$, a $53' // SF$, to $33' = k$. Znając k , możemy dla przecięcia $II II$ wyznaczyć niewiadome g i h .

Na rys. 256 widzimy plan sił dla więzaru, którego pas dolny także jest obciążonym. Wyznaczywszy oddziaływanie w zwykły sposób (tutaj $O_1 = O_2$), kreślimy wielobok sił rozsunięty dla przejrzystości, kreśląc po porządku naokoło więzaru; poczem wykreślenie planu sił nie przedstawia żadnych trudności, jeśli tylko baczyć będziemy, że pomimo rozsunięcia plan sił leży w linii ab .



Rys. 256.

Liczebnie wyznaczamy siły wewnętrzne za pomocą sposobu Rittera (§. 105). Jako przykład obliczymy siły wewnętrzne więzaru mansardowego (rys. 255). Niech będzie $l = 20m$, $P_1 = 2t$, $P_2 = 2t$, $P_3 = 2t$, więc $O_1 = 3t$. Otrzymamy najprzód dla przecięcia $II I$ ze względu na punkt C :

$$O_1 x_1 - b \cdot CE = 0, \text{ stąd } b = O_1 \frac{x_1}{CE} = 3 \frac{4,1}{1,45} = 8,2 t.$$

Ze względu na punkt E mamy

$$O_1 x_2 - a r_1 = 0, \text{ stąd } a = - \frac{O_1 x_2}{r_1} = -3 \frac{5}{1,5} = 10,3 t.$$

Przetnijmy teraz więzar w kierunku $II II$, a otrzymamy ze względu na punkt F :

$$O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) - c \cdot EF = 0, \text{ a stąd}$$

$$c = \frac{O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)}{EF} = \frac{3 \times 10 - 2 \times 5,9}{6,4} = 2,85 \text{ t,}$$

a ze względu na punkt E

$$O_1 x_2 - P_1 (x_2 - x_1) + d \cdot r_1 = 0, \text{ a stąd}$$

$$d = \frac{P_1 (x_2 - x_1) - O_1 x_2}{r_1} = \frac{2(5 - 4,1) - 3,5}{1,5} = -8,8 \text{ t.}$$

Przetnijmy na koniec więzar w kierunku $III III$, a otrzymamy ze względu na punkt F

$$O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) - f r_2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$f = \frac{O_1 \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - x_1 \right)}{r_2} = \frac{3 \cdot 10 - 2(10 - 4,1)}{4} = 4,55 \text{ t.}$$

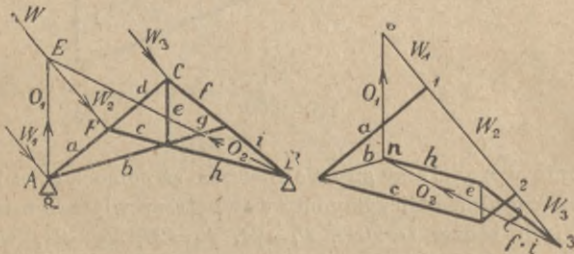
Dalej ze względu na punkt K przecięcia się d i f mamy:

$$O_1 x_3 + P_1 (x_1 - x_3) - e r_3 = 0, \text{ a zatem}$$

$$e = \frac{O_1 x_3 + P_1 (x_1 - x_3)}{r_3} = \frac{3 \times 1,5 + 2(4,1 - 1,5)}{2} = 4,85 \text{ t.}$$

§. 110. Parcie wiatru.

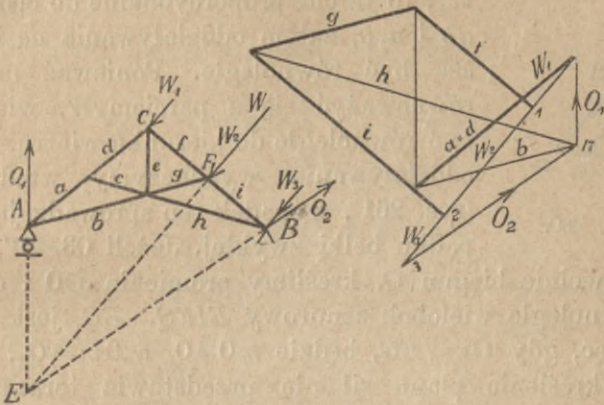
Zastanówmy się teraz nad wpływem parcia wiatru na więzar, a najprzód wyznaczmy oddziaływania. Musimy tu przytem rozróżnić dwa wypadki, gdy jedno łożysko jest wałkowem lub też oba są stałe.



Rys. 257.

Jeżeli bowiem jedno łożysko jest wałkowem, a tor wałków poziomym, to oddziaływanie na tej podporze może być tylko pionowem, oddziaływanie zaś na drugiej podporze wyznaczyć łatwo możemy wykreślnie z wieloboku sił. Niechaj na więzar ACB (rys. 257) działa wiatr z lewej strony prostopadle do AC . Wypadkowa parcia na połąć AC działa w punkcie F . Jeżeli w A jest łożysko wałkowe, to oddziaływanie O_1 jest

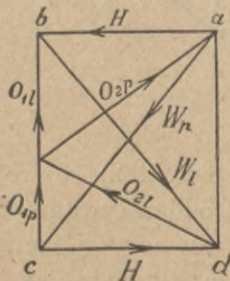
pionowe. Oddziaływanie O_2 w punkcie B musi wraz z O_1 równoważyć parcie wiatru W , mieć więc kierunek BE , bo te trzy siły muszą się przecinać w jednym punkcie. Jeżeli $O_3 = W = W_1 + W_2 + W_3$, a zrobimy $3n \parallel BE$ i $On \parallel AE$, to otrzymamy oddziaływania. Znając oddziaływania, możemy w zwykły sposób wykresić plan sił.



Rys. 258.

Jeżeli wiatr wieje z prawej strony (rys. 258), to oddziaływanie w A pionowe przecina się z wypadkową parcia W w E , zatem oddziaływanie O_2 ma kierunek EB . Wykreślamy zatem $W = O_3$, dalej $3n \parallel EB$ i $On \parallel O_1$, to $nO = O_1$, $3n = O_2$. Po wyznaczeniu oddziaływań łatwym jest dalsze wykreślenie planu sił.

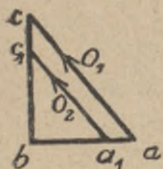
Jeżeli więzar jest symetrycznym, to parcie na połąć lewą W_l będzie równe parciu na połąć prawą W_p (rys. 259). Równą też i wprost przeciwną jest ich składowa pozioma H , działająca na łożyska stałe. Wobec tego, gdy oddziaływanie pionowe wykreślimy w jednej linii, wszystkie oddziaływania zamknięte będą w prostokącie $abcd$. Jeżeliśmy wedle rys. 257 wyznaczyli oddziaływanie O_{1l} i O_{2l} , to z rys. 259 możemy wyznaczyć wielkość i kierunek oddziaływań O_{1p} i O_{2p} , co może nam się przydać wtedy, gdy punkt E na rys. 258 wypada poza papier.



Rys. 259.

Jeżeli oba łożyska są stałe, to właściwie oddziaływania nie są statycznie wyznaczalne.

Przypuśćmy, że więzar spoczywa na płytach żelaznych i że przesunięciu sprzeciwia się tylko tarcie. W takim wypadku tarcie jest proporcjonalne do ciśnienia pionowego. Niech będzie ciśnienie na jednej podporze bc (rys. 260), na drugiej bc_1 , to tarcia proporcjonalne do ciśnień będą ab i a_1b , zatem oddziaływania ac i a_1c muszą być równoległe. Ponieważ muszą one równoważyć się z parciem W , więc muszą być równoległe do kierunku wiatru. Wielkość oddziaływania wyznaczmy wtedy łatwo (rys. 261), wypadek ten sprowadzając do wypadku belki zwykłej. Jeżeli $O_3 = W$, to obie-

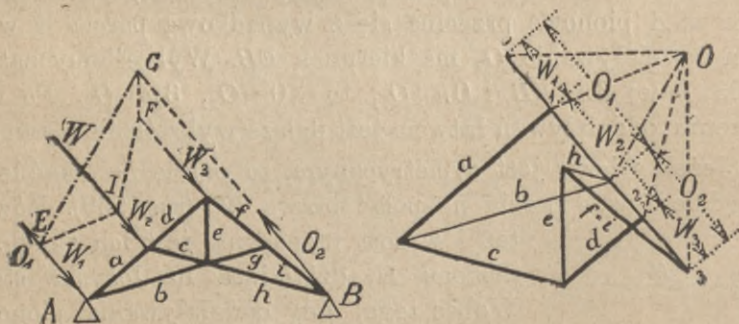


Rys. 260.

ramy dowolnie biegun O , kreślimy promienie OO i O_3 , a do nich równoległe wielobok sznurowy $EIFG$. EG jest zamykającą, więc, gdy $Om \parallel EG$, będzie $mO = O_1$ a $3m = O_2$.

Wykreślenie planu sił nie przedstawia teraz żadnych trudności.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie oddziaływań rachunkiem, to postępować będziemy w następujący sposób.



Rys. 261.

Jeżeli w F zaczepia parcie wiatru W (rys. 262), to rozkłada się ono na $H = W \text{ wst } \alpha$ i $V = H \text{ dost } \alpha$, oddziaływanie O_2 w B rozkłada się także na H i V_2 . Dla równowagi mamy $W \text{ wst } \alpha - H = 0$, $O_1 + V_2 - W \text{ dost } \alpha = 0$, i ze względu na A $V_2 \cdot 2l \text{ dost } \alpha - W \frac{l}{2} = 0$, a stąd mamy:

$$H = W \operatorname{wst} \alpha \quad 535)$$

$$V_2 = \frac{W}{4 \operatorname{dost} \alpha} \quad 536)$$

$$O_1 = W \operatorname{dost} \alpha - \frac{W}{4 \operatorname{dost} \alpha} = \frac{W}{4} \operatorname{dost} \alpha \left(4 - \frac{1}{\operatorname{dost}^2 \alpha} \right)$$

$$O_1 = \frac{W}{4} \operatorname{dost} \alpha (3 - \operatorname{st}^2 \alpha) \quad 537)$$

Jeżeli wiatr działa z prawej (rys. 263), to mamy

$$W \operatorname{wst} \alpha - H = 0.$$

$$O_1 + V_2 - W \operatorname{dost} \alpha = 0 \text{ i ze względu na } B$$

$$O_1 2l \operatorname{dost} \alpha - W \frac{l}{2} = 0.$$

Stąd otrzymamy:

$$H = W \operatorname{st} \alpha \quad 538)$$

$$O_1 = \frac{W}{4 \operatorname{dost} \alpha} \quad 539)$$

$$V_2 = \frac{W}{4} \operatorname{dost} \alpha (3 - \operatorname{st} \alpha) \quad 540)$$

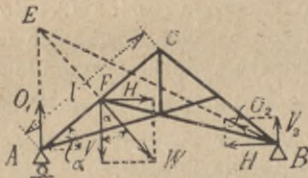
Widzimy więc, że H zmienia swój tok, a O_1 i O_2 zamieniają swe wartości.

Jeżeli wreszcie oba łożyska są stałe i oddziaływania O_1 i O_2 są równoległe do W (rys. 264), to dla równowagi

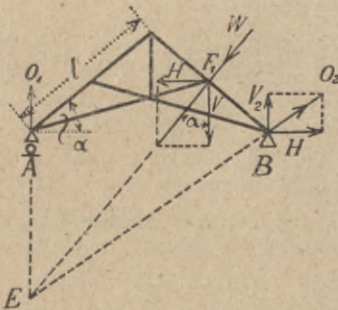
$$W \operatorname{wst} \alpha - H_1 - H_2 = 0$$

$$V_1 + V_2 - W \operatorname{dost} \alpha = 0 \text{ i ze względu}$$

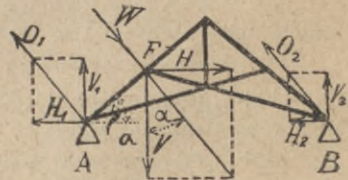
$$\text{du na } A \quad V_2 2l \operatorname{dost} \alpha - W \cdot \frac{l}{2} = 0,$$



Rys. 262.



Rys. 263.



Rys. 264.

a wreszcie ze względu na założenie $H_1 : H_2 = V_1 : V_2$.

Z tych równań otrzymamy

$$V_2 = \frac{W}{4 \operatorname{dost} \alpha} \quad 541)$$

$$V_1 = \frac{W}{4} \text{ dost } \alpha (3 - \text{st}^2 \alpha) \quad \dots \quad 542)$$

$$H_2 = \frac{W \text{ wst } \alpha}{1 + 3 \text{ dost}^2 \alpha - \text{wst}^2 \alpha} \quad \dots \quad 543)$$

$$H_1 = \frac{W \text{ wst } \alpha (3 \text{ dost}^2 \alpha - \text{wst}^2 \alpha)}{1 + 3 \text{ dost}^2 \alpha - \text{wst}^2 \alpha} \quad \dots \quad 544)$$

Jeżeli dach jest wieloboczny, należy wyznaczyć zapomocą wieloboku sznurowego lub rachunkiem wielkość, kierunek i położenie wypadkowej parcia wiatru, przyczem można użyć powyższych sposobów oznaczenia oddziaływań.

§. III. Obliczenie więzaru Polonceau złożonego jako przykład.

Jako przykład obliczymy siły wewnętrzne i przekroje wszystkich prętów więzaru żelaznego systemu złożonego Polonceau (tabl. III.). Rozpiętość podporowa wynosi 18 m, odległość wiązań pełnych 5 m. Dach ma być kryty blachą płaską na opierzeniu; dla pokrycia blachą przyjmujemy $\frac{h}{l} = \frac{1}{6}$, więc $h=3,0$ m, tak że kąt nachylenia połaci do poziomu $\alpha=18^\circ 25'$, $\text{wst } \alpha=0,316$, $\text{dost } \alpha=0,948$. Łożysko wałkowe na lewej podporze. Natężenie dopuszczalne dla drzewa 80 kg/cm^2 , dla żelaza 1000 kg/cm^2 .

1. Obciążenie.

Pokrycie blachą na opierzeniu i krokwie drewn. na 1 m^2 połaci . . . 40 kg
 Ciężar własny płatwi i tężników połaciowych „ 1 „ „ (10+5) 15 „
 „ więzarów dachowych na 1 m^2 rzutu poziomego 20 „
 Obciążenie śniegiem na 1 m^2 połaci $s_1=80$. dost $\alpha=80$. dost $18^\circ 25'$. 76 „
 Parcie wiatru na 1 m^2 połaci do niej prostopadłe
 $w=150$. wst $(\alpha+10)=150$. wst $28^\circ 25'$ 74 „
 Przy równoczesnem działaniu śniegu i wiatru przyjmujemy, że ciężar śniegu wynosi $\frac{2}{3}$ powyżej podanej wartości.

2. Krokwie drewniane $l=2,37$ m,

kładzione w odstępach po 1 m. Składowa ciężaru pokrycia wraz z krokwiąmi oraz śniegu prostopadła do połaci:

$$g_1 = (40 + \frac{2}{3} \cdot 76) \cdot \text{dost } \alpha = 91 \times 0,948 = \dots \dots \dots 86 \text{ kg/m. b.}$$

Składowa równoległa do połaci:

$$g_2 = (40 + \frac{2}{3} \cdot 76) \cdot \text{wst } \alpha = 91 \times 0,316 = \dots \dots \dots 29 \text{ „ „}$$

$$\text{Parcie wiatru, jak wyżej, } w = \dots \dots \dots 74 \text{ „ „}$$

Najprościej postąpimy, przyjmując wymiary krokwi n. p. $12/10 \text{ cm}$ i sprawdzając, czy natężenie normalne, wywołane powyższem obciążeniem, nie przekroczy dopuszczalnego $\tau=80 \text{ kg/cm}^2$, mianowicie ze wzoru $v = \frac{G_2}{F} + \frac{M}{W}$.

$$\text{Dla } G_2 = g_2 l = 29 \times 2,37 = 70 \text{ kg,}$$

$$M = \frac{1}{8} (g_1 + w) l^2 = \frac{1}{8} (86 + 74) \times 2,37^2 = 11240 \text{ kgcm}$$

i przyjętego przekroju $12/10 \text{ cm}$, mamy:

$$v = \frac{70}{120} + \frac{11240}{240} = 47 \text{ kg/cm}^2.$$

3. Płatwie rozp. $l=5,00$ m

przenoszą w kierunku pionowym

$$p=(40+10+\frac{2}{3}76) \cdot 2,37=238 \text{ kg/m. b.}, \text{ zatem } M=\frac{1}{8} p l^2=\frac{1}{8} 238 \times 5^2=74370 \text{ kgm},$$

a w kierunku prostopadłym do połąci

$$w=74 \times 2,37=175 \text{ kg/m. b.}, \text{ zatem } M_w=\frac{1}{8} w l^2=\frac{1}{8} 175 \cdot 5^2=54438 \text{ kgm}.$$

Wedle oznaczeń w §. 65 mamy

$$M_1=M \text{ dost } \alpha + M_w=74370 \cdot 0,948+54438=\dots 114940 \text{ kgcm}$$

$$M_2=M \text{ wst } \alpha = \dots 74370 \cdot 0,316=\dots 23500 \text{ ,,}$$

Przyjmiemy, podobnie jak powyżej, kształtówkę I. l. 18 a i sprawdzimy natężenia. Wedle tabl. na str. 215 mamy dla tego numeru $c=4,66$ cm, zatem potrzebny moment oporu ze wzoru (270)

$$W_1=\frac{M_1+cM_2}{\tau}=\frac{114940+4,66 \times 23500}{1000}=224,45,$$

podczas gdy kształtówka I. l. 18 a ma $W_x=261,53$ cm³.

4. Więzary główne rozp. $l=18,00$ m.

Obliczymy siły węzłowe, a siły wewnętrzne w pojedynczych prętach wyznaczmy wykreślnie.

Nasamprzód uwzględnimy obciążenie pionowe. Na węzeł *C* przenosi się połowa ciężaru z pola *AC* i połowa z *CE*, zatem $P_2=[(40+15+\frac{2}{3}76) \times 2,37+20 \times 2,25]5=1480$ kg. Ponieważ płatwie są na dachu w równych odstępach rozmieszczone, przeto $P_2=P_3=\dots P_8$. Natomiast we węzłach skrajnych, jeżeli krokwie mają wystawać o 50 cm poza teoretyczny punkt podparcia, $P_1=P_9=1480 \times \frac{1,185+0,50}{2,37}=1480 \times 0,72=1070$ kg.

Dla tego obciążenia pionowego kreślimy wielobok sił, a ponieważ więzary i jego obciążenie są symetryczne, więc kreślimy tylko połowę wieloboku i planu sił. Dla wyznaczenia siły wewnętrznej O_3 użyliśmy konstrukcyi pomocniczej, opisanej w §. 109. Dla kontroli obliczymy jeszcze siłę wewnętrzną d_3 w następujący sposób. Przecinamy więzary po linii *III III* i ze względu na *F* ustawiamy równanie momentów:

$$(O_1-P_1) \cdot 9-3 P_2 \times 4,5-d_3 \times 2,5=0, \text{ czyli}$$

$$(6,25-1,07)9-3 \times 1,48 \times 4,5=d_3 \times 2,5, \text{ a stąd}$$

$$d_3=10,70 \text{ t},$$

który to wynik zgodny jest z wynikiem, uzyskanym sposobem wykreślnym. Następnie uwzględniamy parcie wiatru z lewej strony. We węźle *C* działa $W_2=74 \times 2,37 \times 5=0,88$ t i znowu jak poprzednio $W_2=W_3=W_4$. We węźle *F* $W_5=0,44$ t, zaś we węźle skrajnym *A* $W_1=74(1,185+0,5) \times 5=0,63$ t. Wypadkowa parcia wiatru na lewej (wałkowej) podporze musi mieć kierunek pionowy; wyznaczmy zatem kierunek oddziaływania O_{2l} na drugiej (stałej) podporze, łącząc punkt *X* przecięcia się oddziaływania O_{1l} i wypadkowej parcia wiatru z podporą *B*. Ponieważ punkt *X* wypada poza obrębem rysunku, użyjemy dla wyznaczenia kierunku O_{2l} konstrukcyi pomocniczej, podanej na schemacie więzara. W tym celu dzielimy odcinki *AB* i *Ap* w dowolnym, ale tym samym stosunku zapomocą punktów *m* i *n*, z punktu *m* kreślimy $m_0 // W_1$ aż do przecięcia z kierunkiem

O_1 w punkcie o , wówczas on wyznaczy kierunek O_2 . Kreślimy teraz w zwykły sposób plan sił, wyznaczony znów a_5 zapomocą konstrukcyi pomocniczej. Przekonywujemy się, że w tym wypadku $g_1 = g_2 = g_3 = g_4$, $g'_1 = g'_2 = g'_3 = g'_4$, $a'_1 = a'_2 = a'_3 = a'_5 = a'_6 = 0$, oraz $a'_4 = a'_7$.

Nakoniec uwzględnimy parcie wiatru z prawej strony. Wypadkowe parcie zaczepia w punkcie K . Znowu wyznaczymy kierunek oddziaływania na stałej podporze w ten sposób, że połączymy punkt przecięcia się oddziaływania $O_1 p$, (które musi być pionowe) i wypadkowej parcia wiatru z podporą B , używając podanej wyżej konstrukcyi pomocniczej. Kreślimy teraz w zwykły sposób plan sił, przyczem znów w znany sposób wyznaczamy a_5 .

Wyniki tą drogą otrzymane ułożyliśmy w tabliczce, umieszczonej na tabl. III.

Do siły wewnętrznej, wywołanej ciężarem własnym i obciążeniem śniegiem, dodajemy siłę wewnętrzną, wywołaną wiatrem z lewej lub z prawej strony tak, abyśmy otrzymali największą siłę.

5. Przekroje prętów.

a) Pas górny wykonamy z 2 kątówek $\frac{100 \cdot 100}{10}$ i blachy stojącej $^{160}/_{15}$. Wprowadzie siła wewnętrzna w pojedynczych prętach pasu górnego jest zmienna w granicach od $-31,68 t$ do $-33,38 t$, przecież ze względów ustrojowych przyjmiemy dla wszystkich prętów przekrój jednakowy, obliczając go wedle najw. siły $P = -33,38 t$.

Przekrój powyżej opisany ma względem osi pionowej mniejszy moment bezwładności, aniżeli względem osi poziomej tak, że obliczymy go na wyboczenie w kierunku tej ostatniej osi t. j. w kierunku prostopadłym do płaszczyzny więzara. Długość pręta $l = 237 \text{ cm}$. Przyjęto, że pręt na obu końcach jest tylko przytrzymany przez płatwie, więc długość wolna $l_1 = l = 237 \text{ cm}$.

2 kątówki $\frac{100 \cdot 100}{10}$ i blacha stojąca $^{160}/_{15}$ mają po uwzględnieniu dziury na nit $\phi 20 \text{ mm}$ przekrój użyteczny

$$F_0 = 2 \times 19,16 + 16 \times 1,5 - 2 \times 3,5 = 55,32 \text{ cm}^2.$$

Względem osi pionowej

$$I' = \frac{1}{12} \times 16 \times 1,5^3 + 2(174,16 + 19,16 \cdot 4,74^2) = 1215 \text{ cm}^4$$

$$F = 2 \times 19,16 + 16 \times 1,5 = 62,32 \text{ cm}^2,$$

zatem promień bezwładności

$$a' = \sqrt{\frac{I'}{F}} = \sqrt{\frac{1215}{62,32}} = 4,41 \text{ cm}.$$

Dla stosunku $\frac{l}{a'} = \frac{237}{4,41} = 53,7$ mamy wedle zestawienia na str. 288

$$\zeta' = 0,661 + \frac{0,005}{5} \cdot 1,3 = 0,662.$$

Na wyboczenie potrzeba $F = \frac{P}{t \zeta'} = \frac{33380}{1000 \cdot 0,662} = 50,4 \text{ cm}^2$ tak, że przekrój przyjęty jest wystarczający.

b) Pręty pasu dolnego d_1, d_2, d'_2 i d'_1 obliczamy wedle najw $P=32,89 t$.

2 kątowniki $\frac{100 \cdot 100}{10}$ mają po uwzględnieniu dziury na nit $\phi 20 mm$

$$F_0 = 2 \times 19,16 - 2 \times 1 \times 2 = 32,32 cm^2.$$

Pręt środkowy d_3 przenosi najw $P=+14,22 t$.

2 kątowniki $\frac{80 \cdot 80}{8}$ mają po uwzględnieniu dziury na nit $\phi 20 mm$.

$$F_0 = 2 \times 12,27 - 2 \times 0,8 \times 2 = 21,24 cm^2.$$

c) Krata.

1. Ściągna a_2, a_5, a'_2 i a'_5 wykonamy z 2 kątownek $\frac{45 \times 45}{5}$, które dla nitów $\phi 12 mm$ mają przekrój użyteczny

$$F_0 = 2 \times 4,29 - 2 \times 0,5 \times 1,2 = 7,38 cm^2.$$

2. Ściągna a_3, a_7, a'_3 i a'_7 z 2 kątownek $\frac{80 \times 80}{8}$.

3. Zastrzały a_1, a_6, a'_6 i a'_1 przenoszą najw $P=-2,28 t$.

Użyjemy przekroju krzyżowego z 2 kątownek $\frac{45 \cdot 45}{5}$, rozstawionych na odstęp $1,5 cm$, które mają, jak powyżej, $F_0 = 7,38 cm^2$.

Obliczymy promień bezwładności, mianowicie

$$I = 7,86 + 4,29(1,82 + 0,75)^2 = 36,17 cm^4.$$

$$F = 4,29, \frac{I}{F} = 8,431, \text{ zatem } a = \sqrt{\frac{I}{F}} = 2,9 cm.$$

Dla $\frac{l}{a} = \frac{52,5}{2,9} = 18,1$, mamy wedle zestawienia na str. 288. $\zeta' = 0,762$.

Zatem na wyboczenie trzeba tylko

$$F = \frac{2280}{1000 \cdot 0,762} = 3,00 cm^2.$$

4. Zastrzały a_3 i a'_3 mają $l_1 = l = 105 cm$. Używając tego samego przekroju, co poprzednio, mamy dla $\frac{l}{a} = \frac{105}{2,9} = 36,2$, $\zeta' = 0,707$ tak, że na wyboczenie potrzeba

$$F = 4560 : 707 = 6,45 cm^2.$$

§. 112. Belka pochyło leżąca.

Przy obliczeniach więzarów dachowych drewnianych uważać musimy na oddziaływania jednej części więzaru na drugą, które zależne są od sposobu połączenia tych części.

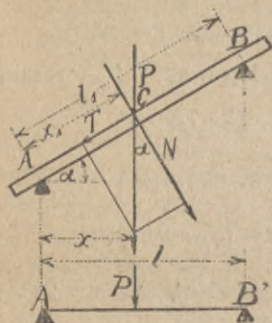
Dla lepszego zrozumienia rzeczy zastanówmy się nad najprostszym przypadkiem, gdy belka pochyła AB podparta jest w dwu punktach (rys. 265). Siła P , działająca pionowo, rozdziela się na N i T . Siła $N=P$ dost a działa prostopadle na belkę i wywołuje moment

$$M = \frac{N x_1 (l_1 - x_1)}{l_1} = \frac{P \operatorname{dost} \alpha \frac{x}{\operatorname{dost} \alpha} \left(\frac{l-x}{\operatorname{dost} \alpha} \right)}{\frac{l}{\operatorname{dost} \alpha}} = \frac{P x (l-x)}{l},$$

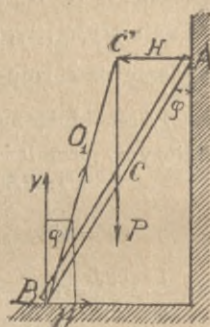
a więc taki sam, jak gdyby siła P działała na rzut belki AB .

Oprócz tego działa jednak siła $T=P \operatorname{wst} \alpha$ i wywołuje w AC ciśnienie, w CB ciągnienie. Przekrój obliczamy wtedy wedle wzoru $\tau = \frac{T}{F} + \frac{Me}{I}$.

Jeżeli belka oparta jest o ziemię i o mur pionowy (rys. 266) i jeżeli przyjmiemy w A oddziaływanie normalne,



Rys. 265.



Rys. 266.

a więc poziome, to dla równowagi muszą się siły O_1 , P i H przecinać w jednym punkcie C' , a zatem w B musi powstać oprócz oddziaływania pionowego $V_1=P$ także poziome H , przyczem

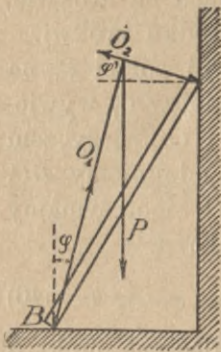
$$H = P \operatorname{st} \varphi 545)$$

Siła H powstaje w B wskutek tarcia. Kat φ , a więc siła H , jest tem większy, im niżej jest punkt A , największe może być $H=Pf=P \operatorname{st} \varphi$, gdy f nazwiemy współczynnikiem a φ kątem tarcia (n. *Reibungswinkel*, fr. *angle du frottement*, an. *angle of friction*, r. уголъ тренія).

Ale i w punkcie A może powstać tarcie i wtedy oddziaływanie w A nie będzie pionowe, lecz w ogóle pochyłe (rys. 267), nachylone do poziomemu pod kątem φ' .

Granica równowagi będzie położenie AB , dla którego kąt $\varphi = \varphi' = \varrho$.

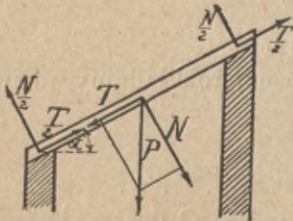
Jakże się zachowują części składowe dachu drewnianego? Zależy to wszystko od rodzaju podparcia. Gdyby położyć kro-



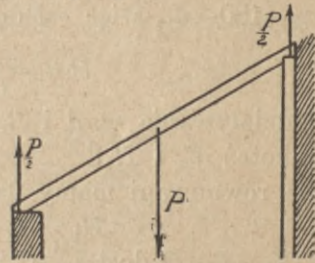
Rys. 267.

kiew na dwu murach w płaszczyznach pochyłych (rys. 268), belka zachowa się, jak w rys. 265. Oddziaływania $\frac{T}{2}$ mogą powstać tylko wskutek tarcia. Ustrój ten możliwymby był więc tylko dla małej siły T , więc dla małego α . Przy większym nachyleniu należałoby zakotwić belkę, aby przeszkodzić przesunięciu.

Jeżeli ta sama belka oparta jest na murze i słupie płaszczyznami poziomymi (rys. 269), to oddziaływania będą tylko pionowe i obliczaćby należało momenty, jak dla rzutu tej belki. Widzimy więc, ile zależy przy belkach i więzarach drewnianych od sposobu połączenia i podparcia.



Rys. 268.

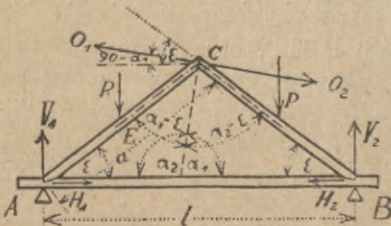


Rys. 269.

§. 113. Drewniany pojedynczy dach krokwiowy.

Najprostszy dach drewniany składa się z więzarów złożonych z dwu krokwi, połączonych jętą, i nazywa się pojedynczym dachem krokwiowym (n. einfaches Sparrendach) (rys. 270). Przypuśćmy, że obciążenie działa tylko pionowo.

Przy obliczeniu dachów drewnianych zwykle bowiem uwzględniamy tylko składową pionową parcia wiatru, bo i tak obliczenie nie



Rys. 270.

może być z powodu połączeń zupełnie dokładnem. Dokładniejsze obliczenie sił, wywołanych wiatrem, nie przedstawiałyby zresztą poważnych trudności. Ciężary, działające na krokwie, składają się w siły wypadkowe, działające w środku krokwi.

Niech będzie wypadkowa ciężarów na lewej połaci P , na prawej P' . Krokwie opierają się jedna na drugiej w C , wywierają więc wzajemne ciśnienie na siebie O_1 i O_2 , przyczem $O_1 = O_2$ i ma ten sam kierunek. Jeżeli teraz odejmiemy BC , to zamiast tej krokwi musimy zaczepić siłę O_1 i otrzymamy dla równowagi krokwi AC ze względu na punkt A

$$O_1 a \text{ dost } (\alpha_1 - \varepsilon) = P \frac{a}{2} \text{ dost } \varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad 546)$$

Podobnie otrzymamy dla krokwi BC ze względu na punkt B

$$O_2 a \text{ dost } (\alpha_2 - \varepsilon) = P' \frac{a}{2} \text{ dost } \varepsilon,$$

$$\text{a że } O_1 = O_2, \text{ więc } \frac{P}{\text{dost } (\alpha_1 - \varepsilon)} = \frac{P'}{\text{dost } (\alpha_2 - \varepsilon)},$$

a gdy $\alpha_2 = 180 - \alpha_1$, więc $-P \text{ dost } (\alpha_1 + \varepsilon) = P' \text{ dost } (\alpha_1 - \varepsilon)$, a stąd

$$\text{st } \alpha_1 = \frac{P + P'}{(P - P') \text{ st } \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad 547)$$

Oddziaływania w A i B są ukośne, rozkładamy je na V_1 i H_1 , jakoteż V_2 i H_2 .

Dla równowagi mamy dalej

$$H_1 = H_2 = O_1 \text{ wst } \alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad 548)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 - P + O_1 \text{ dost } \alpha_1 = 0, \text{ więc } V_1 = P - O_1 \text{ dost } \alpha_1 \\ V_2 = P' + O_1 \text{ dost } \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad . \quad 549)$$

Z równ 546) otrzymamy dalej

$$O_1 = \frac{P \text{ dost } \varepsilon}{2 \text{ dost } (\alpha_1 - \varepsilon)} = \frac{P}{2 (\text{dost } \alpha_1 + \text{st } \varepsilon) \text{ wst } \alpha_1},$$

a po wstawieniu wartości za $\text{dost } \alpha_1$ z 547)

$$O_1 = \frac{P + P'}{4 \text{ wst } \alpha_2 \text{ st } \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad 550)$$

Wstawwszy to w równ. 548) i 549), otrzymamy

$$H_1 = H_2 = H = \frac{P + P'}{4 \text{ st } \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad 551)$$

$$V = P - \frac{P + P'}{4 \text{ st } \alpha_1 \text{ st } \varepsilon} = P - \frac{P - P'}{4} = \frac{3P + P'}{4} \quad . \quad 552)$$

$$V_2 = P' + O_1 \text{ dost } \alpha_1 = P' + \frac{P - P'}{4} = \frac{3P' + P}{4} \quad . \quad 553)$$

Dla obciążenia symetrycznego jest $P=P'$, $\alpha_1=\alpha_2=90^\circ$,
 więc $O_1 = \frac{P}{2 \text{ st } \varepsilon}$, $V_1=V_2=P$, $H = \frac{P}{2} \text{ dost } \varepsilon$. . . 554)

Jeżeli chcemy znaleźć siłę wewnętrzną T w AC , to zauważmy węzeł A . Siły H , T i V_1 , zmniejszone o $\frac{P}{2}$, bo P rozdziela się po połowie na A i C , muszą dać zamknięty wielobok sił, więc

$$T = \left(V_1 - \frac{P}{2} \right) \text{ dosiecz } \varepsilon = \left(\frac{3P+P'}{4} - \frac{P}{2} \right) \text{ dosiecz } \varepsilon = \frac{P+P'}{4 \text{ wst } \varepsilon} . \quad 555)$$

Przy obliczaniu krokwi zważyć jeszcze musimy, że jest ona obciążoną na całej długości ciężarem jednostkowym $\frac{P}{a}$. Ciężar ten działa pionowo, a więc prostopadle do krokwi składową $\frac{P}{a} \text{ dost } \varepsilon$, a w kierunku osi $\frac{P}{a} \text{ wst } \varepsilon$. Ponieważ oprócz tego działa tu ciśnienie T , więc przekrój obliczać będziemy według wzoru

$$\begin{aligned} v &= \frac{T + \frac{P}{a} \text{ wst } \varepsilon}{F} + \frac{Me}{I} = \frac{T + \frac{P}{a} \text{ wst } \varepsilon}{bh} + \frac{\frac{1}{8} \frac{P}{a} \cdot a^2 \text{ dost } \varepsilon \frac{1}{2} h}{\frac{1}{12} bh^3} = \\ &= \frac{\frac{P+P'}{4 \text{ wst } \varepsilon} + \frac{P}{a} \text{ wst } \varepsilon}{bh} + \frac{3 Pa \text{ dost } \varepsilon}{4 bh^2}, \dots \quad 556) \end{aligned}$$

przyczem należy jeszcze v zniżyć ze względu na wyboczenie. Belka AB pracuje na ciągnienie $H = \frac{P+P'}{4 \text{ st } \varepsilon}$, a ewentualnie obciążona być może jeszcze ciężarem jednostajnie rozłożonym.

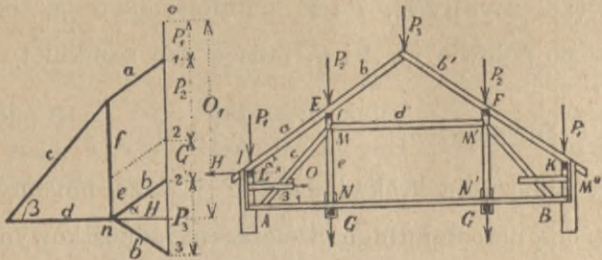
§. 114. Dach płatwowy z podwójnym więzarem i kolanem.

Nie możemy tu zastanawiać się nad wszystkimi rodzajami więzarów, wyznaczymy tylko jeszcze dla przykładu siły wewnętrzne kilku więzarów, a najprzód dla dachu płatwowego z podwójnym wieszarem i kolanem (n. *Pfettendach mit doppeltem Hängewerk und Kniestock*) (rys. 271).

Zaczynając od wierzchołka, rozkładamy siłę P_3 na dwie składowe b i b' wykreślnie, robiąc $2'3 = P_3$ i kreśląc $2'n \parallel CE$ i $3n \parallel CF$. Analitycznie mamy

$$b = \frac{P_3}{2 \text{ wst } \alpha} \dots \dots \dots 557)$$

Od połączenia w *E* zależy, czy siła ta przenosi się na *EI*, czy też przejmuje ją płatew *E*. Przy małym zacięciu na nakładkę możemy przyjąć, że siła *b* przenosi się cała na *EI*, więc $a=b$, zaś siła P_2 przenosi się cała na płatew *E* i słup



Rys. 271.

pod nią stojący. W części słupa *EM* powstaje więc siła zewnętrzna $f=P_2$, a gdy wskutek obciążenia belki *AB* działają w *N* i *N'* ciężary *G*, więc *MN* pracuje na ciągnienie $e=G$. Na węzeł *M* rozpornicy działa więc siła $G+P_2$, która rozkłada się na *c* i *d*, przyczem

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{G+P_2}{\text{wst } \beta} \\ d &= (G+P_2) \text{ dot } \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 558)$$

Siła *H* działająca w *I* jest

$$H = \frac{P_3}{2} \text{ dot } \alpha \dots \dots \dots 559)$$

Siła ta wywróciłaby słup *AI*, gdyby nie kleszcze *L*, w których powstaje siła *O*, równoważąca siłę *H*, a więc tworząc moment ze względu na punkt *A*, otrzymamy

$$H \cdot AI = O \cdot AL, \text{ zatem } O = H \cdot \frac{AI}{AL} \dots \dots \dots 560)$$

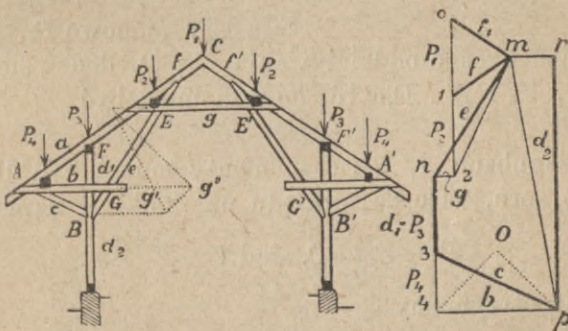
Gdyby połączenie w *E* było silne, to siła *b* działałaby wprost na płatew *E* i rozpornicę, w punkcie *I* nie byłoby zaś wcale parcia poziomego *H*. Widzimy więc, że przy obliczeniu dachów drewnianych musimy bardzo uważać na rodzaj połączeń pojedynczych części dachu.

W obliczeniu tem zrobiliśmy przypuszczenie, że dach jest symetrycznie obciążony. Często w ten sposób postępujemy przy obliczeniu więzarów drewnianych, przyjmując składową pionową wiatru na obu połaciach, aby otrzymać symetryczne obciążenie.

Zwrócić tu musimy uwagę, że przy obliczaniu przekrojów uważać należy na to, czy pręt dany pracuje tylko na ciśnienie lub ciągnięcie, jak EM i MN , czy też także na złamanie, jak IL lub AM . Natężenia zginające mogą także powstać z połączeń mimośrodowych, jak w AM i MM' ; moment zginający jest wtedy równy sile przez mimośród i może znacznie powiększyć natężenia. Dla zmniejszenia natężeń zginających należałoby umieścić punkt L jak najbliżej punktu I .

§. 115. Dach rozporowy.

Tu podparte są płatwy w E i E' (rys. 272) rozpornicą, w F i F' słupem, w A i A' poziomymi belkami AG , $A'G'$ i zastrzałami AB i $A'B'$.

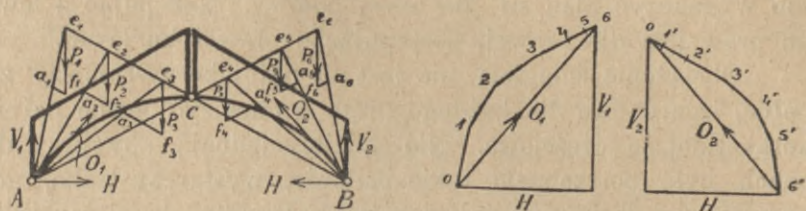


Rys. 272.

Zacznijmy od C i rozłóżmy P_1 na f i f_1 , a otrzymamy $f_1 = 0m$, $f = 1m$. Siła P_2 przenosi się na rozpore EE' i zastrzał BE , a gdy ten jest oprócz tego połączony z krokwią, więc i siła f przenosi się w E . Złóżmy więc f i P_2 , a wypadkową $m2$ rozłóżmy na siły e i g , a otrzymamy $mn = e$, $2n = g$.

Przechodząc teraz do F mamy $d_1 = P_3$. W A ciężar P_4 spoczywa znów na prętach AG i AB . Rozłóżmy więc P_4 na b i c , a otrzymamy $4p = b$, $p3 = c$, b jest ciągnięcie, c ciśnienie. W B schodzą się siły c , d_1 i e_1 , złożywwszy je, otrzymamy mp . A zatem $d_2 = pr$, a oprócz tego działa w B parcie poziome rm . Siła b zaczepia w G i wywołuje moment w punkcie G zastrzału AE . Za pomocą wieloboku sznurowego wyznaczylismy jego wielkość $g'g''$.

w kierunku Ae_1 i e_1B , bo z powodu, że momenty w A , B i C są równe zeru, oddziaływania muszą przechodzić przez A , C

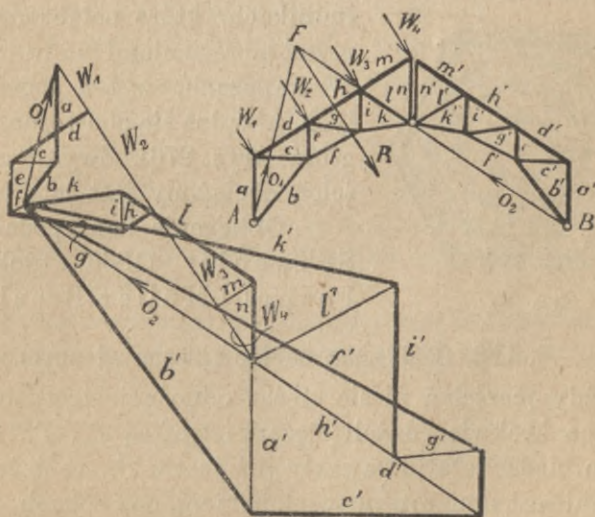


Rys. 274.

i B . Siła P_1 daje więc oddziaływania e_1a i a_1f_1 , siła P_2 a_2e_2 i a_2f_2 i t. d.

Teraz składamy oddziaływania w A i w B zapomocą wieloboku sił i otrzymujemy $O_1=06$ i $O_2=6'C'$. Zamiast wyznaczenia oddziaływania dla każdej siły z osobna możemy złożyć najprzód siły lewej połowy a osobno siły prawej połowy więzaru i dopiero wyznaczać oddziaływania.

Zupełnie w ten sam sposób wyznaczamy oddziaływania parcia wiatru.



Rys. 275.

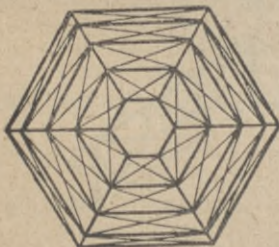
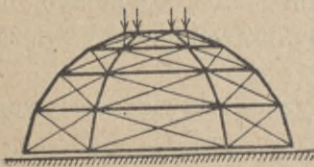
W rys. 275. wyznaczyliśmy w ten sposób oddziaływania, że złożyliśmy parcia W_1, W_2, W_3, W_4 w wypadkową R , poczem wyznaczamy kierunki oddziaływań BC i AF .

W wieloboku sił wyznaczamy wedle tego wielkość $O_1 = 00$ i $O_2 = 40$. Znając oddziaływania, możemy teraz w zwykły sposób wyznaczyć plan sił dla lewej połowy, postępując z lewej ku prawej, a dla prawej, postępując z prawej ku lewej.

Obciążenie śniegiem nie jest tu najniekorzystniejsze zupełnie, lecz da się dla każdego pręta wyznaczyć pewne najniekorzystniejsze częściowe. Nie sądzimy jednak, aby przy dachach było potrzebnem takie badanie, wystarczy tylko, gdy przyjmiemy obciążenie śniegiem raz całkowite, drugi raz tylko dla jednej połaci i dla każdego pręta zatrzymamy wyniki niekorzystniejsze.

§. 117. Dachy baniaste.

Dach baniasty (n. *das Kuppeldach*, fr. *toit en coupole*, an. *cupola roof*, r. сферическая крыша) ma powierzchnię dachową, powstałą wskutek obrotu krzywej płaskiej około osi pionowej. Dźwigające części zeskładu, składają się tu



Rys. 276.

głównie z krokwi, które urządzamy pod różnymi kątami środkowymi w południkach, które połączone są poziomymi pierścieniami w równoleżnikach. W trapezach, w ten sposób powstałych, urządza się podwójne przekątnie gibkie (rys. 276). Zwykle górny pierścień obciążony jest latarnią.

Obliczenie bani podał pierwszy Schwedler (1866), dokładniejsze Foeppli i Müller Breslau (1892).

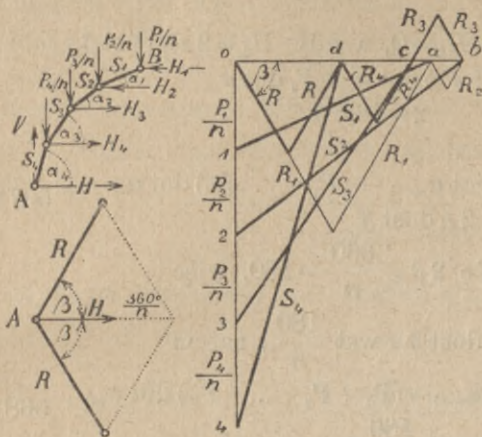
§. 118. Obciążenie bani ciężarem własnym.

Każdy pierścień niesie ciężar odnośnej strefy bani i przenosi go na krokwie. Jeżeli ciężary stref są P_1, P_2, P_3 i t. d., przyczem ciężar latarni zawarty już jest w P_1 , to jeżeli rzut poziomy bani jest umiarem wielobokiem o n bokach, w węzłach jednej krokwi zaczepiają ciężary $\frac{P_1}{n}, \frac{P_2}{n}, \frac{P_3}{n}$ i t. d., a wszystkie krokwie są obciążone jednako. Dolne końce krokwi opierają się o pierścień mury (n. *Mauerring*), który opiera się parciu poziomemu; na sam mur działa tylko ciężar pionowy.

Dla każdej krokwi otrzymamy więc oddziaływanie pionowe

$$V = \frac{1}{n}(P_1 + P_2 + P_3 + \dots) \quad \dots \quad 565)$$

Siły wewnętrzne w krokwi najłatwiej wyznaczyć wykreślnie (rys. 277).



Rys. 277.

Wykreślmy wielobok sił 01234 i badajmy

równowagę w B. Siły $\frac{P_1}{n}$, S_1 i H_1 tworzą zamknięty trójkąt sił, więc $1a \parallel S_1$, $0a$ pozioma.

Wykreśliwszy wielobok sił dla węzła C, otrzymamy $2b = S_2$, $ba = H_2$. Jeśli to samo powtórzymy w D, to otrzymamy $S_3 = 3c$, $cb = -H_3$, więc już cią-

gnięcie, to samo $-H_4 = dc$, wreszcie $-H = od$.

Siły H są wypadkowe ciśnięć, względnie ciągnięć pierścieniowych R , które ze względu na symetrię są równe. Znając siłę H , łatwo teraz rozłożyć ją wykreślnie na dwie siły R , działające w pierścieniu, nachylone do H pod kątami β . Zrobiliśmy to na rysunku.

Uwaga. Na rys. 277. siły poziome $H_1 H_2 H_3 \dots H$ są wszystkie rysowane cienkimi liniami, gdyż H_3, H_4 i H pada na H_2 , nie można więc było uwidocznić ciśnięć i ciągnięć.

Analitycznie wyznaczyć możemy siły wewnętrzne, ustawiając równania równowagi dla rozmaitych węzłów. I tak otrzymamy dla B

$$\frac{P_1}{n} + S_1 \text{ wst } \alpha_1 = 0, \text{ stąd } S_1 = -\frac{P_1}{n \text{ wst } \alpha_1},$$

Dla punktu C mamy $\frac{P_2}{n} + S_2 \text{ wst } \alpha - S_1 \text{ wst } \alpha_1 = 0$, stąd

$$S_2 = S_1 \frac{\text{wst } \alpha_1}{\text{wst } \alpha_2} - \frac{P_2}{n \text{ wst } \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \text{ wst } \alpha_2}$$

ogólnie

$$S_m = -\frac{P_1 + P_2 + \dots + P_m}{n \text{ wst } \alpha_m} \quad \dots \quad 566)$$

Dla punktu B mamy dalej

$$S_1 \text{ dost } \alpha_1 - H_1 = 0, \text{ stąd } H_1 = S_1 \text{ dost } \alpha_1 = -\frac{P}{n} \text{ dost } \alpha_1.$$

$$\text{A że } H_1 = 2R_1 \text{ dost } \beta, \text{ więc } R_1 = -\frac{P \text{ dost } \alpha_1}{2n \text{ dost } \beta}.$$

Dla C otrzymamy

$$S_2 \text{ dost } \alpha_2 - S_1 \text{ dost } \alpha_1 - H_2 = 0, \text{ a gdy } H_2 = 2R_2 \text{ dost } \beta,$$

$$R_2 = -\frac{(P_1 + P_2) \text{ dost } \alpha_2 + P_1 \text{ dost } \alpha_1}{2n \text{ dost } \beta}$$

ogólnie

$$R_m = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1}) \text{ dost } \alpha_{m-1} - (P_1 + \dots + P_m) \text{ dost } \alpha_m}{2n \text{ dost } \beta}. \quad 567)$$

Z rysunku widzimy, że $2\beta + \frac{360}{n} = 180$, więc

$$\beta = 90 - \frac{180}{n}, \text{ dost } \beta = \text{wst } \frac{180}{n}, \text{ zatem}$$

$$R_m = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1}) \text{ dost } \alpha_{m-1} - (P_1 + P_2 + \dots + P_m) \text{ dost } \alpha_m}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}. \quad 568)$$

Dla najniższego punktu A mamy

$$S_4 \text{ dost } \alpha_4 + H = 0, \text{ więc}$$

$$R_5 = \frac{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \text{ dost } \alpha_4}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}. \quad 569)$$

§. 119. Obciążenie bani śniegiem i wiatrem.

Tu przypuścimy, że bania jest tak płaską, że w ogóle wiatr ma mały wpływ na siły wewnętrzne. W przybliżeniu obliczamy więc parcie wiatru dla średniego nachylenia jako we wszystkich częściach bani stałe i uwzględniamy tylko składową pionową parcia, którą dodajemy do ciężaru śniegu.

Niech ciężar śniegu i wiatru na jednej strefie nazywa się Q z odpowiednim znaczkim, to ponieważ wedle 566) S_m siła wewnętrzna w krokwi jest największą dla obciążenia zupełnego, więc otrzymamy

$$\text{najw } S'_m = -\frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m}{n \text{ wst } \alpha_m}. \quad 570)$$

Jeżeli chcemy zbadać najniekorzystniejsze obciążenie pierścieni, to widzimy z 568), że wielkość, a nawet i znak R_m za-

leżny jest od wielkości obu wyrazów w liczniku. I tak w m -tym pierścieniu będzie *najw.* ciśnienie, jeżeli w równ. 568) będzie licznik ujemny, a że $a_m > a_{m-1}$, więc licznik będzie ujemny, gdy $P_1 + P_2 + P_{m-1}$ będą jak najmniejsze, a więc równe zero, zaś P_m jak największe. A więc n. p. w trzecim pierścieniu mają być dla *najw.* ciśnienia I. i II. strefa nieobciążone, a trzeci pierścień obciążony. Obciążenie dalszych pierścieni jest obojętnem. Przeciwnie dla *najw.* ciągnięcia muszą być strefy wewnątrz pierścienia obciążone, dany pierścień zaś nie.

Wobec tego otrzymamy największe siły wewnętrzne w pierścieniach.

najw. ciśnienie:

pierścień latarniowy	najw ($-R_1$) =	$-\frac{Q_1 \text{ dost } \alpha_1}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$
" drugi	najw ($-R_2$) =	$-\frac{Q_2 \text{ dost } \alpha_2}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$
" trzeci	najw ($-R_3$) =	$-\frac{Q_3 \text{ dost } \alpha_3}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$
" murowy	najw ($-R_4$) =	0

najw. ciągnięcie:

pierścień latarn.	najw R_1 =	0
" drugi	najw R_2 =	$\frac{Q_1 (\text{dot } \alpha_1 - \text{dot } \alpha_2)}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$
" trzeci	najw R_3 =	$\frac{(Q_1 + Q_2) (\text{dot } \alpha_2 - \text{dot } \alpha_3)}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$
" murowy	najw R_m =	$\frac{(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{m-1}) \text{dot } \alpha_{m-1}}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}}$

571)

Chcąc wyznaczyć największe siły w przekątniach, pomyślimy, że przez środek przecinających się przekątne położymy płaszczyznę południkową. Niechaj jedna połowa bani będzie obciążona tylko ciężarem własnym, druga zaś połowa ciężarem

własnym i ruchomym, to ponieważ wtedy będzie największa różnica w siłach wewnętrznych krokwi obu połów, zatem i siły wewnętrzne w przekątniach będą wtedy największe.

Gdyby cała bania była obciążona tylko ciężarem własnym, to w pierwszej strefie byłoby $S_1 = -\frac{P_1}{n \text{ wst } \alpha_1}$, dla obciążenia zupełnego ciężarem własnym i ruchomym $S'_1 = -\frac{P_1 + Q_1}{n \text{ wst } \alpha_1}$, różnica zatem wynosiłaby $\Delta S = \frac{Q}{n \text{ wst } \alpha}$. W rzeczywistości, gdy jedna połowa jest obciążona ciężarem ruchomym, a druga nie, różnica będzie mniejsza, lecz aby uniknąć zawyżonych obliczeń, przyjmujemy niekorzystniej, niż w rzeczywistości, $\Delta S = \frac{Q}{n \text{ wst } \alpha}$. Gdy tedy kąt między przekątnią a więcej obciążoną krokwią jest γ , to siła wewnętrzna największa w przekątnei będzie

$$D_1 = \frac{Q}{n \text{ wst } \alpha_1 \text{ dost } \gamma_1}$$

a podobnie w innych strefach

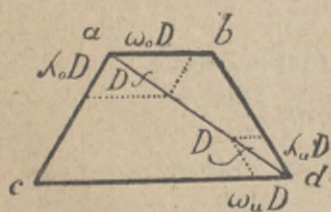
$$D_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{n \text{ wst } \alpha_2 \text{ dost } \gamma_1}$$

$$D_3 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{n \text{ wst } \alpha_3 \text{ dost } \gamma_3}$$

572)

§. 120. Obliczenie dokładniejsze sposobem Müllera Breslaua.

Poprzedni sposób Schwedlera jest tylko przybliżony, dokładniejszy podał Müller Breslau w r. 1892.



Rys. 278.

Wspominaliśmy, że w każdym trapezie (rys. 278), powstałym z dwu krokwi i dwu części pierścienia znajdują się dwie przekątnie gibkie. Jako gibkie nie mogą być one ciśnione i w razie, gdyby w jednej z nich powstało ciśnienie, wygięłaby się ona i przestałaby działać, natomiast druga byłaby ciągnioną.

Obliczamy więc je w ten sposób, że przyjmujemy zawsze tylko jedną przekątnię w trapezie i to ciągnioną. Gdyby wypadło z rachunku ciśnienie, trzeba by rachunek powtórzyć dla drugiej przekątnei.

Siła wewnętrzna D , działająca w przekątnej ad , rozkłada się w a na $\omega_0 D$ i $\lambda_0 D$, w d na $\omega_u Z$ i $\lambda_u Z$. Wartości ω_0 , λ_0 , ω_u , λ_u , dadzą się dla każdego trapezu obliczyć lub wyznaczyć łatwo wykreślnie. Jeżeli więc uwzględnimy siły $\omega_0 D$, $\lambda_0 D$, $\omega_u D$ i $\lambda_u D$, to możemy teraz w dalszem badaniu przekątnie opuścić i pozostają nam tylko krokwie i pierścienie.

Jeżeli oznaczymy sumy sił wewnętrznych w krokwiach i pierścieniach \mathfrak{S} i \mathfrak{R} , to z rys. 279 otrzymamy:

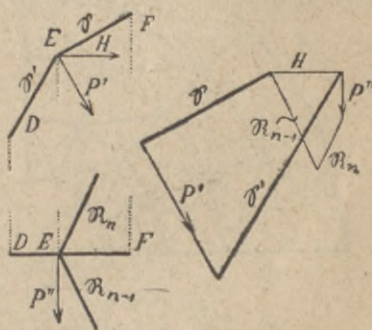
$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_7 &= S_7 + \lambda_0 D_7 + \lambda_u D_6 \\ \mathfrak{S}'_7 &= S'_7 + \lambda'_u D'_7 + \lambda'_u D'_6 \\ \mathfrak{R}_7 &= R_7 + \omega_0 D_7 \\ \mathfrak{R}'_7 &= R'_7 + \omega_u D_7 + \omega'_u D'_7 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 573)$$

Zauważmy teraz węzeł E przedstawiony na rys. 280 w obu rzutach. Siłę P , działającą w E , rozłożmy na siłę P' , działającą w płaszczyźnie krokwi i P'' , działającą prostopadłe do tej płaszczyzny.

Jeżeli znamy siłę P' i siłę wewnętrzną \mathfrak{S} , to dla sił \mathfrak{S} , \mathfrak{S}' , P' i H da się wykreślić zamknięty wielobok sił i da się wyznaczyć siłą H , która jest znów wypadkową sił P'' , \mathfrak{R}_n i \mathfrak{R}_{n-1} . Jeżeliśmy wyznaczyli H , a zna-



Rys. 279.



Rys. 280.

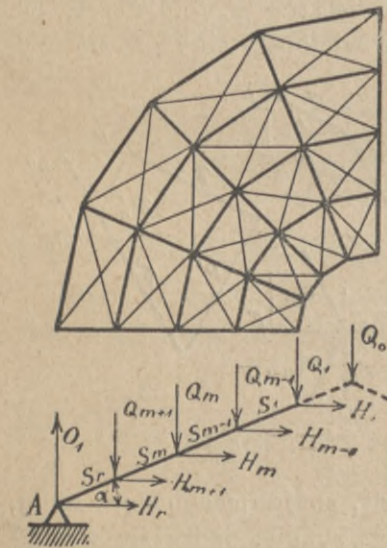
my też P'' , to znów z wieloboku sił, znajdującego się w innej, ale wykreślonego w tej samej płaszczyźnie, dadzą się wyznaczyć \mathfrak{R}_n i \mathfrak{R}_{n-1} .

Widzimy więc, że jeśli znamy oprócz siły P także i jedną siłę wewnętrzną \mathfrak{S} , inne siły wewnętrzne dadzą się wyznaczyć. Otóż zaczynając od pierścienia latarniowego, mamy $\mathfrak{S}=0$, a więc wyznaczymy wszystkie siły wewnętrzne dla tego węzła. Dla węzła pierścienia drugiego znamy już \mathfrak{S} .

Po wyznaczeniu sił \mathfrak{S} , \mathfrak{R} i stosunków λ i ω możemy wyznaczyć też na podstawie równ. 573) siły D , R i S . Przedtem należy dla węzłów bez przekątni wyznaczyć R i S i tak uzyskać pewną ilość znanych ilości, które wprowadzić należy do równ. 573) dla wyznaczenia nieznanych *).

§. 121. Płaskie dachy namiotowe.

Dachy namiotowe mają kształt ostrosłupa, najczęściej regularnego. Mogą się one składać z pewnej ilości więzarów głównych, ułożonych w kierunku promieni, wtedy oblicza się je jak zwykle więzary dachowe wedle obciążenia, które na każdy więzar przypada. W nowszych czasach jednak często nie daje się wcale więzarów, lecz krokwie łączą się krata, zwłaszcza przy dachach płaskich, wszystkie więc części dźwigające zeskładu leżą w powierzchni ostrosłupa tak, jak w bani w powierzchni obrotowej. I tu więc otrzymujemy krokwie, pierścienie i przekątnie, jak w bani, a obliczenie jest zupełnie podobne jak bani.



Rys. 281.

Chociaż rozmaita pochyłość powierzchni dachu nie stanowi różnicy w ustroju, to przecież będziemy osobno mówić o dachach płaskich, a osobno o stromych z powodu, że przy płaskich uwzględnia się ciężar śniegu, przy stromych zaś parcie wiatru.

Płaskie dachy namiotowe, używane nad teatrem, cyrkiem, panoramą itd. możemy uważać za dachy baniaste, w których linia rodząca jest prosta. Wzory otrzymane dla bani możemy tu więc wprost zastosować, wstawiając tylko zamiast zmiennego kąta α_{m-1} , α_m itd. stały kąt α .

*) Landsberg podaje w swej „Statik der Hochbauconstructionen“ IV. wyd., str. 300 przykład dokładnego obliczenia bani według powyższego sposobu.

Krokwie. Tu obciążenie całkowite jest najniekorzystniejsze, otrzymamy więc (rys. 281) wedle 566) i 570):

$$S_m + \frac{\Sigma_1^m P + \Sigma_1^m Q}{n \text{ wst } \alpha}, \quad \dots \quad 574)$$

jeżeli P i Q oznaczają obciążenia pierścieni ciężarem własnym i śniegiem lub wiatrem.

Jeżeli niema latarni, to należy także uwzględnić to w sumach P_0 i Q_0 .

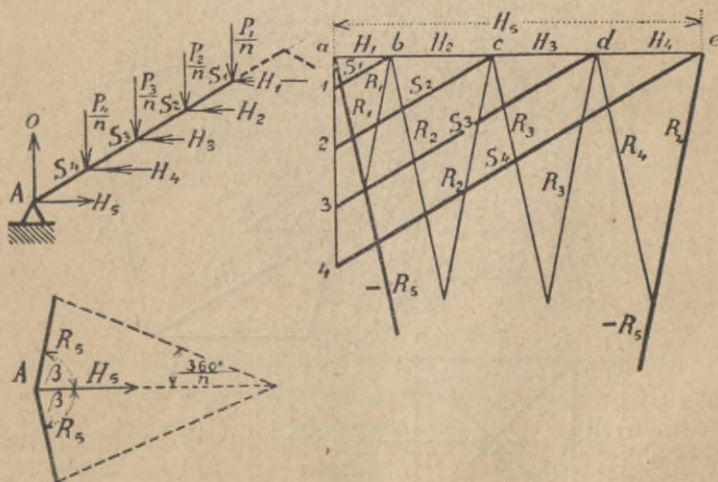
Pierścienie. Z równ. 568) i 571) otrzymamy, wstawiając $\alpha_m = \alpha_{m-1} = \alpha$,

$$R_m = - \frac{P_m + Q_m}{2n \text{ wst } \frac{180}{n}} \text{ dot } \alpha. \quad \dots \quad 575)$$

Dla pierścienia murowego zaś otrzymamy:

$$\text{najw. } R_r = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_{r-1} + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{r-1}}{2n \text{ dost } \frac{180}{n}} \text{ dot } \alpha. \quad 576)$$

Krata. Największe siły wewnętrzne w przekątniach otrzymamy z równ. 572), jeśli w niem wstawimy $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_3 \dots$, a zatem w pierwszym pierścieniu



Rys. 282.

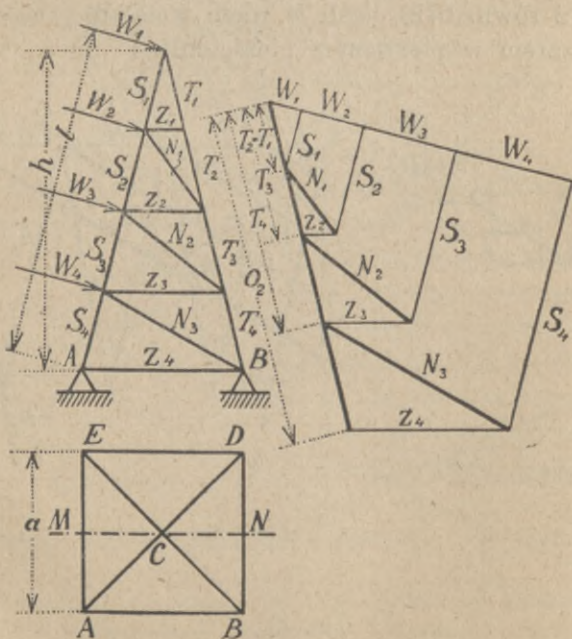
$$\left. \begin{aligned}
 D_1 &= \frac{Q_1}{n \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dost} \gamma_1}, \\
 a \text{ w innych pierścieniach} & \\
 D_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{n \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dost} \gamma_2}, \\
 D_3 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{n \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dost} \gamma_3}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 577)$$

Wykreślnie wyznaczamy siły wewnętrzne zupełnie tak, jak w bani (rys. 282).

Zróbmy $\frac{P_1}{n} = a$, $\frac{P_2}{n} = 12$, itd. i potem kreślimy dla poszczególnych węzłów wieloboki sił, to otrzymamy $1b = S$, $2c = S_2$, $3d = S_3$ i t. d., dalej $ab = H_1$, $bc = H_2$, $cd = H_3$, $de = H_4$, wręście $ae = H_5$. Siły H rozkładamy potem w zwykły sposób na siły R .

§. 122. Dachy wieżowe czworoboczne.

Tutaj wprowadzamy jako obciążenie pionowe tylko ciężar własny, bo śnieg nie może się na wieży utrzymać. Siły we-

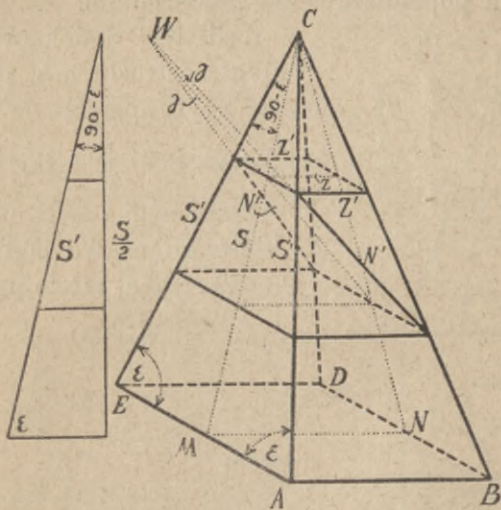


Rys. 283.

wewnętrzne w prętach dachu wskutek ciężaru własnego dadzą się obliczyć zupełnie w ten sam sposób, jak to wyłożono w poprzednim paragrafie. Tu więc tylko będziemy mówić o siłach, powstałych z powodu parcia wiatru, które tu gra wielką rolę.

Przypuśćmy, że mamy obliczyć dach wieżowy, ostrosłupowy czterościenny, gdy wiatr działa na płaszczyznę AEC (rys. 283). Aby wyznaczyć siły wewnętrzne w płaszczyznach ABC i EDC , pomyślmy sobie w płaszczyźnie symetrii MN urojony więzar pionowy, którego rzut pionowy jest przystającym do rzutu pionowego boków EDC i ABC i obciążmy go siłami W_1, W_2, W_3 i W_4 , których wielkość da się wyznaczyć proporcjonalnie do powierzchni, wystawionej na wiatr.

Wykreślić wyznaczyliśmy w znany sposób zapomocą planu sił siły wewnętrzne, liczebnie możnaby to samo zrobić



Rys. 284.

zapomocą sposobu momentów Rittera. Są to jednak siły, działające w więzarze urojonym, teraz z nich musimy obliczyć siły, rzeczywiste, działające w ABC (rys. 284).

I tak zamiast siły S otrzymamy dwie siły S' , przyczem $2 S'$ dost $(90 - \epsilon) = S$, stąd

$$S' = \frac{S}{2 \text{ wst } \epsilon} \dots \dots \dots 578)$$

Dalej otrzymamy

$$Z' = \frac{1}{2} Z, \quad \dots \dots \dots 579)$$

a wreszcie $2N'$ dost $\gamma = N$, stąd

$$N' = \frac{N}{2 \text{ dost } \gamma} \dots \dots \dots 580)$$

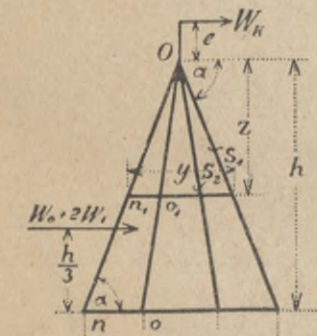
Sprowadzenie sił więzaru urojonego na siły więzaru rzeczywistego można wykonać i wykreślić przez proste rozkładanie sił we wskazany wyżej sposób.

§. 123. Dachy wieżowe ośmioboczne.

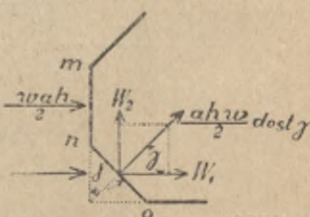
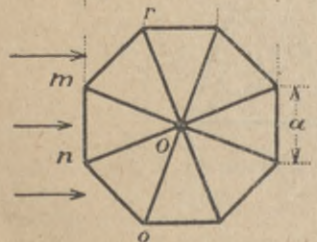
Dla uproszczenia rachunku przyjmijmy tu kierunek poziomy wiatru i będziemy obliczać tak, jakby połacie dachu były pionowe. Ponieważ dachy takie są strome, więc błąd, który przytem popełniamy, nie jest wielkim.

Jeśli bok ośmiokąta nazwiemy a , wysokość ostrosłupa h , parcie wiatru na $m^2 w$, to parcie na płaszczyznę mnO (rys. 285) jest $W_0 = \frac{ah}{2} w$.

Płaszczyzna noO nachylona jest do kierunku wiatru pod kątem $90-\gamma$ (rys. 286), więc parcie prostopadłe do niej jest $\frac{ahw}{2} \text{ wst}(90-\gamma) = \frac{ahw}{2} \text{ dost } \gamma$,



Rys. 285.



Rys. 286.

które rozkłada się na W_1 i W_2 . Parcie W_2 znosi się z takimże parciem, pochodzącem z płaszczyzny mrO , parcia zaś $W_1 = \frac{ahw}{2} \text{ dost}^2 \gamma$ dodają się. Całe więc parcie na dach wynosi

$$W = W_0 + 2W_1 = \frac{ahw}{2} (1 + 2 \text{dost}^2 \gamma), \text{ a że tu } \gamma = 45^0, \text{ więc}$$

$$W = \frac{ahw}{2} (1 + 2 \text{dost}^2 45^0) = ahw. \quad . \quad . \quad . \quad 581)$$

Parcie to zaczepia w jednej trzeciej wysokości dachu. Dla części ostrosłupa o wysokości z (rys. 285) nazwijmy x długość boku $n_1 o_1$, to

$$W_z = xzw, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 582)$$

$$\text{a że } \frac{x}{z} = \frac{a}{h}, \text{ więc } x = \frac{a}{h} z,$$

$$\text{stad } W_z = w \frac{a}{h} z^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 583)$$

Dokładne obliczenie sił wewnętrznych jest trudnem, bo zeskład jest statycznie niewyznaczalnym. W przybliżeniu możemy jednak obliczyć je w następujący sposób. Niechaj oprócz W_z działa jeszcze na krzyż na wieży parcie W_k w wysokości e nad szczytem, wtedy moment ze względu na płaszczyznę $m_1 n_1 o_1$ będzie:

$$M_z = W_z \cdot \frac{z}{3} + W_k (e + z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 584)$$

Moment ten musi być równy momentowi sił wewnętrznych w krokwiach, nachylonych do poziomu pod kątem α , któreto siły przypuszczamy proporcjonalne do odstępów od osi objętej. Więc $M_z = 4S_1 \frac{y}{2} \text{wst } \alpha + 4S_2 \frac{x}{2} \text{wst } \alpha$. Przypuściliśmy, że

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{y}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{y}{x}, \text{ więc } S_2 = S_1 \frac{x}{y},$$

$$\text{stad } M_z = 2S_1 \text{wst } \alpha \left(y + \frac{x^2}{y} \right) = \frac{2S_1 \text{wst } \alpha}{y} (x^2 + y^2),$$

$$\text{a więc } S_1 = \frac{M_z y}{2(x^2 + y^2) \text{wst } \alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 585)$$

$$\text{a } S_2 = \frac{M_z x}{2(x^2 + y^2) \text{wst } \alpha}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 586)$$

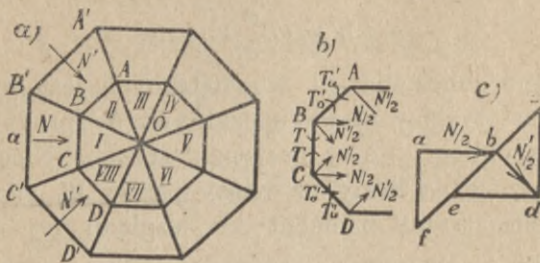
Jeżeli ośmiobok jest regularny, to $y = x + 2x \text{dost } 45^0 = 2,414x$, S_1 jest więc zawsze większe, niż S_2 , a że wiatr może wiać z każdej strony, więc w każdej krokwi S_1 może być dodatniem lub ujemnem. Największa więc siła wewnętrzna we wszystkich krokwiach jest:

$$\text{najw } S = \pm \frac{M_z y}{2(x^2 + y^2) \text{wst } \alpha}, \quad \dots \quad 587)$$

a dla wieloboku regularnego, wstawiwszy $y = 2,414x$, otrzymamy

$$\text{najw } S = \pm 0,427 \frac{M_z}{y \text{wst } \alpha}. \quad \dots \quad 588)$$

Jeżeli teraz chcemy zbadać siły wewnętrzne w pierścieniach i kracie, to przypuścimy, że na pewną część powierzchni boku ostrosłupa $B' C' O$ (rys. 287) działa parcie wiatru N , na odnośne części boku $A' B' O$ i $C' D' O$ N' .



Rys. 287.

Wedle poprzedniego $N' = N \text{dost } 45_0 = \frac{N}{\sqrt{2}}$. W B działają siły $\frac{N}{2}$ i $\frac{N'}{2}$. Jeśli ich wypadkową rozłożymy w kierunku płaszczyzn boków, to otrzymamy siły T i T'_0 .

Z rys. 287 c widzimy, że

$$T = af + cd = \frac{N}{2} + \sqrt{2} \frac{N'^2}{4} = \frac{N}{2} + \frac{N'}{\sqrt{2}} = N.$$

Dalej mamy w płaszczyźnie $OB'A'$

$$T'_0 = bc + bf = \frac{N'}{2} + \sqrt{2} \frac{N^2}{4} = \frac{N}{2\sqrt{2}} + \frac{N}{\sqrt{2}} = \frac{3N}{2\sqrt{2}} = 1,06 N \quad \dots \quad 589)$$

$$\text{zaś } T'_u = be = \frac{N'}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}} = 0,354 N.$$

W płaszczyźnie $OB'C'$ działają z obu stron siły T i znoszą się, przekątnie więc wcale nie pracują. Inaczej rzecz się ma z płaszczyzną $OB'A'$. Tu działa z jednej strony siła T'_0 , z drugiej T'_u , pierwsza trzy razy większa od drugiej. Siły te muszą być przeniesione na punkty podparcia $A'B'$. Belka kratowa więc w płaszczyźnie $OB'A'$ musi te siły przenieść i działa jako belka jednym końcem utwierdzona.

Obciążenie ze strony krawędzi OB' jakoteż OA' zmienia się wedle powierzchni obciążenia trójkątnej. A więc na powierzchni I od szczytu aż do wysokości z

$$N_z = wx \frac{z}{2}, \text{ a gdy } x = \frac{a}{h} z, N_z = \frac{wa}{2h} z^2.$$

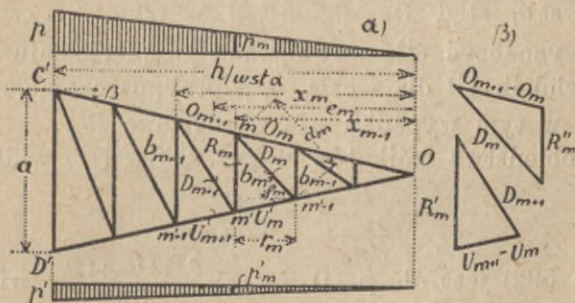
Zatem obciążenie belki kratowej II do wysokości z jest

$$\left. \begin{array}{l} \text{z jednej strony} \quad T'_{oz} = 1,06 \frac{aw}{2h} z^2 \\ \text{z drugiej} \quad \quad \quad T'_{uz} = 0,354 \frac{aw}{2h} z^2 \end{array} \right\} \quad \dots \quad 590)$$

W rys. 288 wykreśliliśmy dźwigar $C'D'O$ jako jednym końcem utwierdzony, obciążony on jest u góry obciążeniem dodatniem, u dołu ujemnem.

Obciążenie jednostkowe obliczymy dla $z=h$, a więc na długość $\frac{h}{\text{wst } \alpha}$ w następujący sposób z 590): $T'_0 = 1,06 \frac{awh}{2} = \frac{ph}{2 \text{wst } \alpha}$,

$$\left. \begin{array}{l} \text{stad} \quad \quad \quad p = 1,06 aw \text{wst } \alpha \\ \text{podobnie mamy} \quad p' = 0,354 aw \text{wst } \alpha \end{array} \right\} \quad \dots \quad 591)$$



Rys. 288.

Dla m -tego węzła pasu górnego otrzymamy:

$$D_m \text{ dost } \varphi_m = O_{m+1} \text{ dost } \beta - O_m \text{ dost } \beta.$$

Jeśli M_m i M_{m+1} oznaczają momenty ze względu na węzły m' i $m'-1$, to

$$O_{m+1} \text{ dost } \beta = \frac{M_m}{b_m}, \quad O_m \text{ dost } \beta = \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}},$$

$$\text{więc } D_m \text{ dost } \varphi_m = \frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}}.$$

Dalej mamy d_m dost $\varphi_m = r_m$, więc

$$D_m = \frac{d_m}{r_m} \left(\frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \right),$$

Następnie jest:

$$M_m = \frac{x_m}{2} \cdot \frac{x_m}{3} (p_m - p'_m) = (p_m - p'_m) \frac{x_m^2}{6},$$

$$p_m : x_m = p : \frac{h}{\text{wst } \alpha}, \text{ więc } p_m = \frac{x_m p}{6} \text{ wst } \alpha,$$

$$\text{zatem } M_m = \frac{p - p'}{h} \frac{x_m^3}{6} \text{ wst } \alpha, \quad M_{m-1} = \frac{p - p'}{h} \frac{x_{m-1}^3}{6} \text{ wst } \alpha.$$

$$\text{Dalej jest } b_m : a = x_m : \frac{h}{\text{wst } \alpha}, \text{ więc } b_m = \frac{a x_m}{h} \text{ wst } \alpha,$$

$$\text{stąd } \frac{M_m}{b_m} = \frac{p - p'}{6 a} x_m^2, \text{ zatem}$$

$$D_m = \frac{d_m}{r_m} \frac{p - p'}{6 a} (x_m^2 - x_{m-1}^2), \text{ a że } r_m = x_m - x_{m-1},$$

$$\text{a } e_m = \frac{x_m + x_{m-1}}{2}, \text{ więc } D_m = \frac{e_m d_m}{3 a} (p - p'). \quad . \quad 592)$$

Jeżeli teraz wstawimy wartości za p i p' z 591), to $p - p' = 0,706 a w \text{ wst } \alpha$, stąd $D_m = 0,235 e_m d_m \text{ w wst } \alpha$ 593)

Aby wyznaczyć siłę wewnętrzną w pierścieniu b_m , wykreślimy wielobok sił dla węzła m' , przypuszczając, że $p' = 0$ i nazwijmy w tym wypadku siłę w rozporze R'_m .

Z podobieństwa trójkątów w rys. 288 α i β) widzimy, że

$$-\frac{R'_m}{D_{m+1}} = \frac{b_{m+1}}{d_{m+1}}.$$

Wedle 592) jest dla $p = 0$ $D_{m+1} = \frac{e_{m+1} d_{m+1} p}{3 a}$, więc

$$R'_m = -\frac{e_{m+1} b_{m+1} p}{3 a}.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy $p = 0$, to dla węzła m otrzymamy po wykreśleniu wieloboku sił podobnie

$$-\frac{R''_m}{D_m} = \frac{b_{m-1}}{d_m}, \text{ a z równ. 592) } D_m = -\frac{e_m d_m p'_m}{3 a}, \text{ więc}$$

$$R''_m = -\frac{e_m b_{m-1} p'}{3 a}.$$

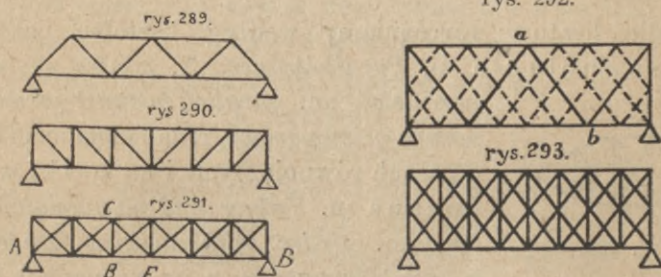
Zatem jeśli p i p' działają równocześnie,

$$R_m = -\frac{1}{3 a} (b_{m+1} e_{m+1} p - b_{m+1} e_m p'). \quad . \quad . \quad 594)$$

Do tych sił, wywołanych parciem wiatru, należy dodać siły wskutek ciężaru własnego, które wyznaczyć możemy łatwo wedle §. 121.

§. 124. Części składowe i rodzaje belek kratowych.

Belka kratowa, jak wiemy z §. 101., składa się z dwu pasów, górnego i dolnego, i z kraty, powstałej z krzyżulców. Według układu krzyżulców rozróżniamy rozmaite rodzaje kraty. A mianowicie, jeżeli krata składa się z dwu rzędów krzyżulców (rys. 289 i 290), nazywamy ją kratą pojedynczą (n. *einfaches Gitterwerk*, fr. *treillis simple*). Jeżeli mamy trzy rzędy krzyżulców (rys. 291), to nazywamy kratę złożoną (n. *kombiniertes Gitterwerk*). Kratę powstałą z kilku równych krat pojedynczych, przesuniętych o pewną część odległości dwu węzłów (rys. 292), nazywamy kratą wielokrotną (n. *mehrtheiliges Gitterwerk*, fr. *treillis multiple*, an. *multiple system*). Liczbę, oznaczającą ilość krat składowych, a zatem także ilość części, na które podzielony został jeden krzyżulec



(np. *ab* na cztery części), nazywamy liczbą podziału (n. *Theilungszahl*). Jeżeli liczba podziału jest 2, 3 i t. d., to nazywamy kratę dwukrotną, trzykrotną itd. (n. *zweiteilig*, *dreitheilig*, fr. *double*, *triple*). Rysunek 293 przedstawia kratę dwukrotną złożoną, tu więc chcąc wyznaczyć liczbę podziału patrzemy, na ile części zostały podzielone krzyżulce pionowe.

Według nachylenia krzyżulców rozróżniamy następujące rodzaje krat: kratę równoramienną (n. *Netzwerk*, fr. *systeme triangulaire*, an. *triangular system*) (rys. 289), składającą się z samych trójkątów równoramiennych i kratę prostokątną

lub przedziałową (n. *Fachwerk*, fr. *système quadrangulaire*, an. *quadrangular system*, r. фахверковая балка) (rys. 290), składającą się z trójkątów prostokątnych.

Krzyżulce dzielią się według nachylenia na pionowe (n. *Verticale*, fr. *montant*, an. *upright*, *vertical brace*, r. стойка) i przekątne (n. *Diagonalen*, fr. *diagonale*, an. *diagonal-brace*, cz. *příčka*, r. диагональ), a według rodzaju natężenia na krzyżulce ciągnione (n. *Zugstäbe*, fr. *tirant*, an. *tie*, r. затяжка) i ciśnione (n. *Druckstäbe*, an. *strut*).

Chcąc oznaczyć równocześnie nachylenie i rodzaj natężenia krzyżulców, używamy następujących nazw. Nazywamy krzyżulec ciągniony pionowy słupem wiszącym (n. *Hängesäule*, fr. *tirant*, *poignon*, an. *suspension post*, r. подвѣска), krzyżulec ciągniony nachylony ścięgnem (n. *Zugband*, fr. *braçon*, *contrefiche*, an. *tie*, cz. *táhlo*), krzyżulec ciśniony pionowy słupem (n. *Säule*, fr. *poteau*, *montant vertical*, an. *post*, cz. *sloupec*, r. стойка), krzyżulec ciśniony nachylony zastrzałem (n. *Strebe*, fr. *montant*, an. *standart*, *strut*, cz. *vzpěra*, r. подкосъ).

Belki kratowe rozróżniamy według kształtu pasów na belki równoległe (n. *Parallelträger*, fr. *poutre en semelle*



Rys. 294.

paralleles, an. *parallel boomed girder*, cz. *nosník přímopasowy*, r. параллельная балка) o pasach równoległych i na belki wieloboczne (n. *Träger mit polygonalen Gurten*, an. *girder with inclined flanges*, cz. *nosník křivopasový*, r. многогранная балка)

(rys. 294) o pasach w kształcie wieloboku lub krzywej. Te ostatnie belki nazywamy rozmaicie według kształtu pasów; belki takie, używane prawie wyłącznie jako belki mostowe, są przedmiotem teorii mostów.

§. 125. Analityczne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej.

Dla belek kratowych równoległych o kracie pojedynczej da się metoda przecięć znacznie uprościć. Aby wyznaczyć siłę S , działającą w pasie górnym, przecinamy belkę w kierunku mn (rys. 295) i ustawiamy równanie momentów ze względu

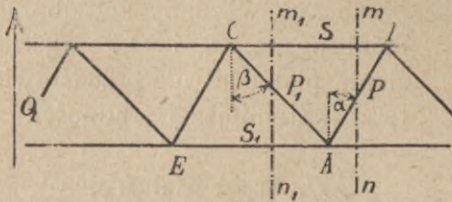
na przeciwny węzeł A . Nazwawszy M moment sił zewnętrznych ze względu na punkt A a h wysokość belki, otrzymamy

$$M + Sh = 0, \text{ a stąd:}$$

$$S = -\frac{M}{h} \quad . \quad 595)$$

Podobnie otrzymamy siłę, działającą w pasie dolnym AE ,

$$S' = +\frac{M'}{h}, \quad . \quad 596)$$



Rys. 295.

jeżeli M' jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt C . Widzimy więc, że siły, działające w pasach belki kratowej równoległej, są proporcjonalne do momentu sił zewnętrznych, przyczem dla momentu dodatniego w pasie górnym powstaje ciśnienie, a w pasie dolnym ciągnięcie.

W celu wyznaczenia sił zewnętrznych w krzyżulcach korzystamy z zasady, że dla równowagi suma pionowych składowych musi być równą zero, więc $Q + P \text{ dost } \alpha = 0$, stąd

$$P = -Q \text{ siecz } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 597)$$

Podobnie otrzymamy dla przecięcia $m_1 n_1$

$$Q - P_1 \text{ dost } \beta = 0, \text{ a stąd}$$

$$P_1 = Q_1 \text{ siecz } \beta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 598)$$

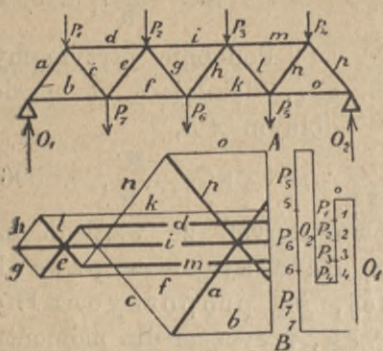
jeżeli Q i Q_1 są siły poprzeczne dla przecięcia mn i $m_1 n_1$. Możemy więc napisać, że siły, działające w krzyżulcach belki kratowej równoległej, są proporcjonalne do siły poprzecznej i zależne od kąta nachylenia krzyżulca.

§. 126. Wykreślne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej.

Dla wyznaczenia wykreślnego sił, działających w belkach równoległych, używamy metody wielobokowej. Wielobok sił zewnętrznych jest tu linią prostą pionową. Na rys. 296 przedstawiliśmy użycie tej metody, przyczem dla przejrzystości rozsunęliśmy wielobok sił AB , aby uwidocznić wszystkie siły

zewewnętrzne, które kreśliły za porządkiem, idąc w kierunku pasów naokoło belki.

Przedtem należy jednak wyznaczyć w znany sposób oddziaływania O_1 i O_2 . Wykreślenie planu sił nie przedstawia teraz najmniejszej trudności.

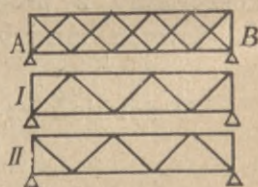


Rys. 296.

127. Krata wielokrotna.

Belkę kratową o kracie n -krotnej (rys. 297) rozkładamy na n układów, w tym więc przypadku na dwa układy, przy czem każda część pasu wchodzi do wszystkich układów, lecz tylko o przekroju równym $\frac{1}{2}$

części przekroju rzeczywistego, krzyżulce zaś wchodzi zawsze tylko do jednego układu. Obliczamy teraz pojedyncze układy w znany sposób, przyjmując tylko $\frac{1}{n}$ część obciążenia na jeden układ, a więc także $\frac{Q}{n}$ i $\frac{M}{n}$. Dla krzyżulców otrzymujemy w ten sposób odrazu siły wewnętrzne, dla pasów zaś dodajemy siły wewnętrzne, otrzymane dla każdego układu z osobna.



Rys. 297.

128. Belka kratowa Howe'a.

Belka Howe'a (rys. 291) jest to belka drewniana, mająca kratę złożoną ze sztucznem nateżeniem, które sprawiamy, naciągając słupy wiszące, zakończone śrubami. Ciągnięcie to sztuczne wywołuje w przekątniach DC i CF ciśnienie równe z powodu symetrii. Ciśnienia te robimy tak wielkie, aby zrównoważyły największości ciągnięcia, wywołanego obciążeniem w krzyżulcach ciągnionych; nateżenie tych krzyżulców dla obciążonej belki będzie więc równe zeru. Łatwo pojmiemy, że przez to wzrosną siły wewnętrzne krzyżulców ciśnionych w dwójnasób, bo do ciśnienia, wywołanego obciążeniem, dodaje

się jeszcze ciśnienie sztuczne. Zastrzały *DC*, które wskutek obciążenia są ciśnione, a więc te, które byłyby zastrzałami, gdyby sztucznego natężenia nie było, nazywamy zastrzałami głównymi (n. *Hauptstrebe*, an. *main brace*), krzyżulce zaś, ciągnione wskutek obciążenia a ciśnione sztucznie, nazywamy zastrzałami drugorzędnymi, odporami, odstrzałami (n. *Gegenstrebe*, fr. *contrelie*, an. *conterstrut*, r. противуподкось).

Ponieważ w zastrzałach drugorzędnych dla belki obciążonej niema wcale żadnego natężenia, więc w przybliżeniu możemy belkę Howe'a obliczać tak, jakby zastrzałów drugorzędnych nie było. Największa zaś siła wewnętrzna zastrzałów drugorzędnych jest dla belki nieobciążonej równą połowie siły wewnętrznej zastrzałów głównych, bo, jak wspomnieliśmy, siła wewnętrzna P , wywołana natężeniem sztucznem, równa się sile wewnętrznej P' , wywołanej obciążeniem, a zatem siła, działająca w zastrzałach głównych, jest $2P$, a w zastrzałach drugorzędnych równa tylko sile P , wywołanej natężeniem sztucznem.

C. Teorya sklepień.

X. Sklepienia kolebkowe.

§. 129. Łuki i sklepienia.

Dotychczas mówiliśmy o belkach prostych, które cisną na podpory tylko w kierunku pionowym; tu będziemy zastanawiać się nad dźwigarami, działającymi nawet przy obciążeniu pionowem na podpory w kierunku ukośnym i dążącymi do ich oddalenia (rys. 298). Dźwigary takie nazywamy w ogóle dźwigarami rozporowymi lub rozpornicami (n. *Sprengwerksträger*, fr. *poutre à jambettes*,



Rys. 298.

an. *strut framed girder*, r. распорная балка). Jeżeli dźwigar jest ciągle krzywym, nazywamy go dźwigarem łukowym lub łukiem (n. *Bogenträger*, fr. *poutre en arc*, an. *arched girder*, r. дугообразная балка), a jeżeli materiałem tej belki jest cegła lub kamień, nazywamy ją sklepieniem (n. *Gewölbe*, fr. *voûte*,

lub kamień, nazywamy ją

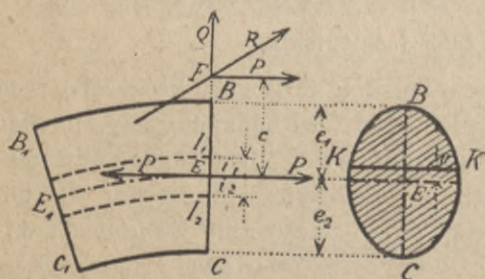
an. *vault*, r. сводъ). Powierzchnię wewnętrzną wklęsłą sklepienia nazywamy podniebieniem (n. *Gewölbsleitung*, fr. *intradós*, an. *intradós*, r. небо свода), powierzchnię zewnętrzną wypukłą nazywamy grzbietem (n. *Gewölbsbrücken*, fr. *extrados*, an. *extrados*, *back of the vault*, r. верхняя поверхность свода).

Gdy podniebienie sklepienia jest częścią powierzchni walca, sklepienie nazywamy kolebkowem (n. *Tonnengewölbe*, fr. *voûte cylindrique, en berceau*, an. *barrel-vault*, r. цилиндрический сводъ). W tym rozdziale będziemy mówić tylko o takich sklepieniach, później dopiero zastanawiać się będziemy także nad innymi rodzajami sklepień.

§. 130. Siła podłużna i momenty jędrne.

Sklepienie, jak widzimy, różni się od łuku tylko materiałem i odpowiednim mu przekrojem. Teoria sklepień da się więc wyprowadzić z ogólnej teorii łuków, o której więc teraz mówić będziemy.

Nazwijmy linię, łączącą środki ciężkości wszystkich przekrojów łuku, osią łuku (n. *Axe des Bogens*, fr. *axe de l'arc*, an. *axis of the arch*) i przypuśćmy, że belkę łukową przecięliśmy prostopadłe do osi EE_1 (rys. 299) płaszczyzną BC i że R



Rys. 299.

jest wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, działających na lewą część łuku. Wypadkowa R wszystkich sił po lewej stronie przekroju nie będzie tu pionową, jak w belce prostej wskutek odpowiednio urządzonych podpór. Tu oddziaływania dla łuku są

ukośne, a dźwigar działa na podpory rozpierająco, co jest główną cechą dźwigarów łukowych.

Przypuśćmy, że wypadkowa R na sklepienie o szerokości $b=1$ przecina płaszczyznę przekroju BC w F . Siłę R rozkładamy na dwie składowe P i Q , z których pierwsza P działa w kierunku prostopadłym do przekroju, a więc równoległe do osi, a druga Q działa w kierunku prostopadłym do osi i na-

zywa się siłą poprzeczną. Te siły zewnętrzne muszą być w równowadze z siłami wewnętrznymi, działającymi w tym przekroju. Wszystkie te siły wewnętrzne możemy rozłożyć na siły prostopadłe do przekroju, wywołujące natężenie normalne i siły, działające w płaszczyźnie przekroju, wywołujące natężenia ścinające.

Umieścimy w punkcie E dwie siły równe sile P i działające wprost przeciwnie a równoległe do osi. Przez to nie naruszymy równowagi układu sił i otrzymamy:

1) siłę P , zaczepioną w środku ciężkości przekroju E , zwaną siłą podłużną (n. *Azialkraft, Längskraft, fr. componente tangentielle*).

2) parę sił, czyli moment $M = Pe$.

3) siłę poprzeczną Q .

Siła podłużna P rozkłada się jednostajnie w całym przekroju, gdyż zaczepia w środku ciężkości przekroju, więc natężenie wskutek siły podłużnej

$$v' = \frac{P}{F}, \quad \dots \dots \dots 599)$$

jeżeli F oznacza przekrój. To natężenie jest tu ciśnieniem, które oznaczamy znakiem $+$.

Chcąc wyznaczyć natężenie v'' , powstałe z działania momentu M , musielibyśmy uwzględnić także promień krzywizny osi $=r$. Jednak gdy promień krzywizny jest dość wielki w stosunku do wysokości dźwigaru, — wtedy w przybliżeniu można użyć tych samych wzorów, co do belki prostej. Możemy więc napisać, nazwawszy v_v'' natężenie we włóknie kk_1 , odległym o v od osi ciężkości, powstałe wskutek działania momentu, wedle 141)

$$v_v'' = \frac{Mv}{I}, \quad \dots \dots \dots 600)$$

jeżeli I oznacza moment bezwładności.

Natężenie więc całe w odległości v od osi ciężkości będzie podobnie, jak według równania 417),

$$v_v = v' + v_v'' = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{I} \quad \dots \dots \dots 601)$$

Müller Breslau otrzymał po długim wywodzie, uwzględniając krzywiznę osi, dla v_v dokładniejszą wartość:

$$v_v = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{I} + \frac{M}{Fr} \dots \dots \dots 602)$$

a Šolin jeszcze dokładniej

$$v_v = \frac{P}{F} + \frac{Mr}{B} \frac{v}{r+v} + \frac{M}{Fr} \dots \dots \dots 603)$$

$$B = \iint \frac{rv^2}{r+v} d^2 F \dots \dots \dots 604)$$

Weyrauch obliczył B i I dla rozmaitych przekrojów i otrzymał $\frac{I}{B}$

Tablica XLII.

dla $\frac{r}{h}$	koło lub elipsa	kwadrat lub prostokąt	przekrój I
1	1,1452	1,1833	1,2614
5	1,0050	1,0060	1,0082
10	1,0012	1,0015	1,0021
20	1,0003	1,0004	1,0005
40	1,0000	1,0001	1,0001.

Widzimy więc, że już dla $r=20h$ możemy śmiało przyjąć $I=B$. a gdy v jest w stosunku do r małym, to wzór 603) przechodzi w 602).

Zważywszy jednak, że gdy r jest wielkiem, to $\frac{M}{Fr}$ jest bardzo małym, możemy więc w praktyce wyraz ten opuścić, przez co otrzymamy równanie 601).

W przekroju BC natężenie jest największem dla najbardziej oddalonych włókien, otrzymujemy więc dla $v=e_1$,

$$v_1 = \frac{P}{F} + \frac{Me_1}{I} \left| \begin{array}{l} \text{a dla } v = -e_2 \\ v_2 = \frac{P}{F} - \frac{Me_2}{I} \end{array} \right. \dots \dots \dots 605)$$

Niech będzie a promieniem bezwładności, to $I=Fa^2$. Wstawiając tę wartość i $Pc=M$ w równanie 605), otrzymamy

$$v_1 = \frac{Pe_1}{Fa^2} \left(\frac{a^2}{e_1} + c \right) = \frac{Pe_1}{I} \left(\frac{a^2}{e_1} + c \right) \left| \begin{array}{l} v_2 = \frac{Pe_2}{Fa^2} (a^2 - c) = \frac{Pe_2}{I} (a^2 - c) \end{array} \right. \dots \dots \dots 606)$$

Wiemy z §. 85, równ. 416) że

$$\frac{a^2}{e_1} = i_2 = EI_2 \quad \text{i} \quad \frac{a^2}{e_2} = i_1 = EI_1.$$

Długości i_1 i i_2 są to promienie jędrne. Możemy więc napisać

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{Pe_1}{I}(i_2 + c) \\ v_2 &= \frac{Pe_2}{I}(i_1 - c) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 607)$$

Wypadkowa R musi przecinać przekrój w jądrze t. j. między punktami jędrnymi I_1 i I_2 , jeżeli cały przekrój ma pracować na ściskanie. Linia, łącząca punkty I poszczególnych przekrojów, nazywa się linią jędrną (n. *Kernlinie*).

Linia, łącząca punkty zaczepienia wypadkowej R czyli środki ciśnienia poszczególnych przekrojów, nazywa się linią ciśnienia (n. *Stützzlinie*, fr. *courbe de pressions*, an. *line of resistance*, cz. *čara tlakova*), wykreślił ją pierwszy Méry (1842). Możemy więc powiedzieć:

Nateżenia normalne w przekroju mają wszystkie ten sam znak, jeżeli linia ciśnienia nie wychodzi z jądra.

Jeżeliby $P < 0$, wtedy w całym przekroju byłoby ciągnięcie. Przy mostach i sklepieniach, gdy obciążenie jest tylko pionowym z góry na dół, P jest zawsze > 0 , a więc gdy linia ciśnienia nie wychodzi z jądra, w całym przekroju panuje ściskanie; jeżeli zaś linia ciśnienia wychodzi z jądra, to w tym przekroju nateżenia są dodatnie i ujemne.

Równ. 607) możemy jeszcze napisać

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{Pe_1(i_2 + c)}{Fa^2} = \frac{P}{F} \frac{i_2 + c}{i_2} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{c}{i_2}\right) \\ v_2 &= \frac{Pe_2(i_1 - c)}{Fa^2} = \frac{P}{F} \frac{i_1 - c}{i_1} = \frac{P}{F} \left(1 - \frac{c}{i_1}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 608)$$

Nazwijmy M_2 , moment sił zewnętrznych ze względu na punkt rdzenny I_2 , momentem jędrnym dolnym (n. *unteres Kernmoment*), to

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= P(c + i_2) \\ \text{Odpowiedni moment jędrny} & \\ \text{górnym (n. oberes Kernmoment) będzie } M_1 &= P(c - i_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 609)$$

Wtedy otrzymamy z równania 607)

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{Pe_1(i_2 + c)}{I} = \frac{M_2 e_1}{I} \\ v_2 &= \frac{Pe_2(i_1 - c)}{I} = \frac{M_1 e_2}{I} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 610)$$

a więc wzory takie same, jak dla belki prostej, jeżeli tylko zamiast momentów zwykłych wstawimy momenty jędrne.

Z równ. 606) i 610) otrzymamy dalej

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{M_2}{F i_2} = v_0 \left(1 + \frac{c}{i_2} \right) \\ v_2 &= \frac{M_1}{F i_1} = v_0 \left(1 - \frac{c}{i_1} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 611)$$

$$\text{jeżeli } \frac{P}{F} = v_0 \dots \dots \dots 612)$$

Sklepienia mają zwykle przekrój poprzeczny prostokątny, a wiemy z §. 85, że dla przekroju prostokątnego jest

$$i_1 = \frac{a^2}{e_2} = \frac{1}{6} h, \quad i_2 = \frac{a^2}{e_1} = \frac{1}{6} h \quad \dots \dots \dots 613)$$

$$\text{więc } i + i_2 = \frac{1}{3} h. \quad \dots \dots \dots 614)$$

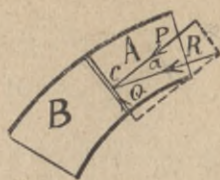
Widzimy zatem, że w sklepieniu o przekroju prostokątnym, średnia trzecia część przekroju, poprowadzonego pionowo przez oś, stanowi jądro, poza które nie powinna wychodzić linia ciśnienia, jeżeli całe sklepienie ma pracować na ściskanie.

§. 131. Warunki równowagi sklepienia.

Mamy trzy warunki równowagi sklepienia:

1) Środek ciśnienia (fr. *centre de pression*) czyli punkt zaczepienia wypadkowej, na szew działającej, powinien leżeć w przekroju, aby nie nastąpił wywrót i załamanie się sklepienia. Jeżeli jednak sklepienie składa się z kłińców, połączonych zaprawą, to ponieważ na wytrzymałość zaprawy na rozciąganie nie możemy na pewne liczyć, więc w sklepieniu takim i w ogóle w budowlach mурowanych nie dopuszczamy wcale ciągnięcia. W takim razie środek ciśnienia powinien leżeć w jądrze t.j. w średniej trzeciej części przekroju. A że odnosi się to wszystkich szwów, więc cała linia ciśnienia powinna leżeć w średniej trzeciej części sklepienia.

Warunek ten nie odnosi się do sklepień litych, betonowych albo żelbetowych, u których możemy pewne ciągnięcie dopuścić. Tam więc linia ciśnienia może wyjść z jądra, a nawet z przekroju.



Rys. 300.

2) Wypadkowa nie powinna być odchylną od prostopadłej na szew więcej, niż wynosi kąt tarcia, aby nie nastąpiło przesunięcie klinów. Wypadkowa R (rys. 300) rozkłada się na dwie siły P i Q .

Składowa Q , działająca w płaszczyźnie szwu, stara się przesunąć kliniec A po klinu B , przeciw czemu działa tarcie $T = P \cdot f = P \cdot \operatorname{st} \varrho$, jeżeli f jest współczynnikiem tarcia i gdy przyjmiemy $f = \operatorname{st} \varrho$, a ϱ nazwiemy kątem tarcia (n. *Reibungswinkel*, fr. *angle du frottement*, an. *angle of friction*, r. угол трения). Dla równowagi musi być $T \geq Q$, jeżeli pominiemy zupełnie wytrzymałość zaprawy, a więc $P \operatorname{st} \varrho \geq P \operatorname{st} \alpha$, jeżeli α jest kątem nachylenia wypadkowej na szew, a stąd nareszcie

$$\varrho \geq \alpha \dots \dots \dots 615)$$

Jako współczynnik tarcia między kamieniem i kamieniem możemy przyjąć z Ponceletem $f = 0,58$ czyli $\varrho = 30^\circ$ bez zaprawy a $f = 0,7$, więc $\varrho = 35^\circ$ z zaprawą starą. Dla świeżej zaprawy jest f bardzo małe. Średnio więc możemy przyjąć $f = 0,4$, $\varrho = 22^\circ$.

3) Trzecim warunkiem równowagi jest, że natężenie nie powinno przekraczać współczynnika wytrzymałości. Jeśli przyjmiemy stosowną pewność, to natężenie nie powinno być większem, niż dopuszczalne.

Największe natężenie w danym szwie znajdziemy z równania 610), wstawiszmy dla przekroju prostokątnego odnośne wartości, a mianowicie dla szerokości b

$$e_1 = e_2 = \frac{h}{2}, \quad a^2 = \frac{1}{12} h^2, \quad i_1 = i_2 = \frac{h}{6}, \quad I = \frac{1}{12} b h^3.$$

W ten sposób otrzymamy $v_1 = \frac{P \frac{1}{2} h}{\frac{1}{12} b h^3} \left(\frac{h}{6} + c \right)$, a stąd

$$v_1 = \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6c}{h} \right) \quad \left| \dots \dots \dots 616) \right.$$

i podobnie $v_2 = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{6c}{h} \right) \quad \left| \dots \dots \dots \right.$

Jeżeli siła P obliczona jest na jeden metr szerokości sklepienia, to $b = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$. Wyraziwszy P w kg , a h i c w cm , otrzymamy

$$v_1 = \frac{P}{100 h} \left(1 + \frac{6c}{h} \right) \left| \begin{array}{l} \text{kg} \\ \text{cm}^2 \end{array} \right. \quad (617)$$

$$v_2 = \frac{P}{100 h} \left(1 - \frac{6c}{h} \right)$$

Dla $c=0$, t. j. gdy wypadkowa działa w osi,

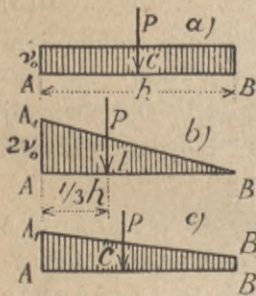
$$v_1 = v_2 = \frac{P}{bh} = v_0 \quad (618)$$

Jeżeli $c = \frac{1}{8} h$, t. j. jeżeli wypadkowa działa w punkcie jędrnym górnym, to

$$v_1 = \frac{2P}{bh} = 2v_0 \quad (619)$$

$$v_2 = 0$$

Widzimy więc, że gdy wypadkowa działa w punkcie jędrnym, to natężenie w krawędzi bliższej tego punktu wzrasta do podwójnej wielkości, w krawędzi zaś dalszej spada do zera.



Rys. 301.

Jeżeli natężenie w każdym punkcie przekroju przedstawimy rzędnymi, to dla natężenia jednostajnego (rys. 301 a) powierzchnia natężeń, którą tu otrzymujemy, jako przekrój bryły natężeń (§. 84), przedstawia prostokąt. Wypadkowa P działa według tegoż paragrafu w środku ciężkości prostokąta.

Jeżeli P działa w punkcie jędrnym I (rys. 301 b), to według równ. 619) w punkcie A natężenie jest dwa razy większe, niż poprzednio, więc $AA_1 = \frac{2P}{bh} = 2v_0$, w punkcie B zaś równe zero, a że przytem środek ciężkości powierzchni natężeń leży w jednej trzeciej wysokości, więc powierzchnia ta będzie trójkątem. W ogóle, działa siła P , jak wiemy, w C (rys. 301 c) w rzucie środka ciężkości powierzchni natężeń, które zmieniają się wedle linii prostej. W środku ciężkości przekroju O natę-

żenie jest zawsze $v_0 = \frac{P}{F}$. Na tem i na równ. 611) polega następna konstrukcja. Zróbmy $OO_1 = v_0$ (rys. 302). Połączmy O_1 z I_1 i I_2 aż do przesunięcia się z kierunkiem siły P i wykreślmy $C_2 B_1$



Rys. 302.

i $C_1A_1 \parallel AB$, to $AA_1 = v_1$, $BB_1 = v_2$, bo $CC_2 : v_0 = (i_2 - c) : i_2$, $CC_1 = AA_1 = v_0 \frac{i_2 - c}{i_2}$, a ze względu, że tu C jest ujemne, $AA_1 = v_2$. Dalej mamy $CC_1 : v_0 = (i_1 + c) : i_1$, stąd $CC_1 = v_0 \frac{i_1 + c}{i_1} = v_1$.

Jeżeli środek ciśnienia C wyjdzie poza jądro, to ciśnienie w B wzrasta, a w A powstaje ciągnienie (rys. 303 a). Jeżeli nie zważamy na bardzo małą zresztą wytrzymałość zaprawy na ciągnienie, to ponieważ na długości AE ciągnienie powstać

nie może (rys. 303 b), więc tam szew się otworzy, a cała siła P rozkłada się na długości $BE_1 = 3e$, otrzymamy więc natężenie w B

$$v_1 = \frac{2P}{b \cdot 3e} = \frac{2P}{3be} \quad (620)$$

Natężenie w środku ciężkości nie będzie już w tym wypadku v_0 , bo nie cały przekrój współdziała.

Najkorzystniej byłoby dla sklepienia, gdyby wszędzie $c = 0$, t. j. gdyby linia ciśnienia wpadała na oś, bo wtedy

w każdym przekroju natężenie rozdzielałoby się równo na przekrój, byłoby więc stosunkowo najmniejsze. W ten sposób wyznaczamy najkorzystniejszy kształt sklepienia. W rzeczywistości jednak choćby dla pewnego obciążenia linia ciśnienia wpadła na oś, to dla innego obciążenia linia ciśnienia zmieni swój kształt.

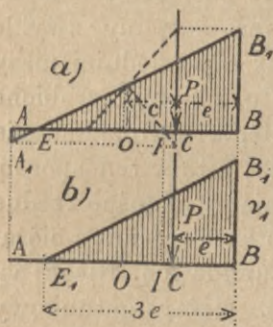
Dla sklepień betonowych możemy dopuścić małe ciągnienie do 3 kg/cm^2 . W obec tego może linia ciśnienia wyjść nieco z jądra, ale tylko o tyle, aby natężenie nie przekroczyło dozwolonej granicy.

Jeżeli przyjmiemy $v_1 = 30$, $v_2 = -3 \text{ kg/cm}^2$, to otrzymamy

$$\text{z równ. 617)} \quad 30 = \frac{P}{100h} \left(1 + \frac{6c}{h}\right) \quad \text{i} \quad -3 = \frac{P}{100h} \left(1 - \frac{6c}{h}\right)$$

$$\frac{P}{100h} = \frac{30}{1 + \frac{6c}{h}} = -\frac{3}{1 - \frac{6c}{h}}, \quad \text{a stąd } c = 0,204h \doteq \frac{1}{5}h.$$

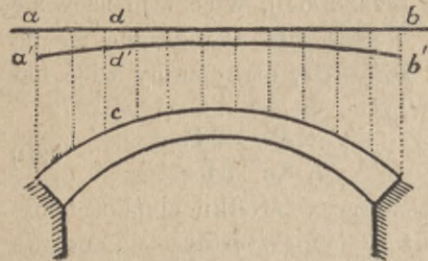
Widzimy więc, że ta linia ciśnienia może się oddalić od osi nie o $\frac{1}{6}h$, lecz więcej, o $\frac{1}{5}h$. Wychylenie możliwe obustronne zajmuje więc $0,4h$.



Rys. 303.

§. 132. Obciążenie sklepienia.

Na sklepienie działa najprzód ciężar stały, a zatem ciężar własny sklepienia, nadmurowania i nasypki, wraz z zeskładem, na niej leżącym, (podłoga, droga itd.). Ciśnienie ziemi przyjmujemy, działające z góry w kierunku pionowym, aż do nachylenia nadmurowania 2:3. Przy większych nachyleniach musimy wyznaczyć kierunek parcia ziemi, o czem później będziemy mówić.



Rys. 304.

Całe obciążenie sklepienia sprowadzamy zwykle na ciężar odpowiedniej masy materiału, z którego zrobione sklepienie, więc np. kamienia lub cegły, a to w ten sposób, że zmieniamy odnośnie rzędne w odwrotnym stosunku ciężarów gatunkowych. Niech będzie np. ciężar gatunkowy

ziemi 1,8, a muru 2,2, to zmieniamy rzędną cd (rys. 304) na cd' , tak aby $cd':cd=1,8:2,2$, a więc $cd' = cd \frac{1,8}{2,2}$.

Zrobiwszy to samo z innymi rzędnymi i połączywszy ich końce, otrzymamy linię $a'b'$, którą nazywamy sprowadzoną linią obciążenia (n. *reducirte Belastungslinie*). Obciążenie tłumem ludzi, wozami lub parowozami sprowadzamy także na ciężar bryły muru o wysokości y . Mamy wtedy na $1 m^2$ ciężar bryły muru $y\gamma_m = p$, a więc

$$y = \frac{p}{\gamma_m} \dots \dots \dots 621)$$

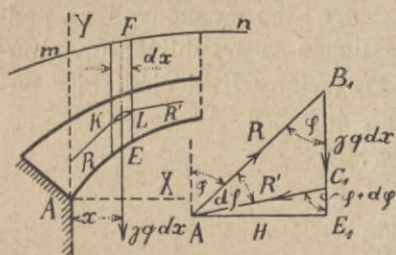
Obciążenie p przyjąć możemy z tabliczki, dołączonej na końcu książki. W nowszych czasach często nie wyznacza się zupełnie linii sprowadzonej obciążenia, lecz wyznacza się ciężar pasków wprost z rysunku, dodając ciężary odpowiednie sklepienia, nadmurowania, nadsypki i obciążenia.

§. 133. Linia ciśnienia.

Linia ciśnienia jest to, jak wiemy, linia łącząca środki ciśnienia wszystkich szwów sklepienia i musi leżeć w środkowej trzeciej części sklepienia, jeżeli chcemy uniknąć ciągnięcia.

Kierunek szwów w sklepieniu mały ma wpływ na linię ciśnienia, ważny on jest tylko ze względu na warunek, aby kąt między prostopadłą na szew a wypadkową nie był większym, niż kąt tarcia. Najlepiej więc byłoby, gdyby szwy były prostopadłe do linii ciśnienia, ponieważ jednak trudno to urzeczywistnić, dlatego robimy je prostopadłymi do osi sklepienia lub do podniebienia. Gdy na razie zważać nie będziemy na ten warunek, możemy przyjąć dowolny kierunek szwów. Przyjmiemy więc pionowy kierunek, wzajemne zaś oddalenie szwów bardzo małe. Jeżeli sklepienie jest płaskie i mało obciążone, to różnica z powodu odmiennego kierunku szwów może być większą i wtedy lepiej kreślić szwy prostopadłe do osi.

Jeżeli przekroje są dość bliskie, to w praktyce różnica między linią ciśnienia a wielobokiem sznurowym dla przekrojów pionowych jest tak małą, że następnie uważać będziemy te dwie linie jako identyczne.



Rys. 305.

Niech mn (rys. 305) będzie sprowadzoną linią obciążenia, a KL częścią linii ciśnienia. Wytnijmy w odległości x od podpory A pasek o grubości dx płaszczyznami pionowymi i nazwijmy średnią wysokość paska

$EF = q$, to powierzchnia jego jest $q dx$ a ciężar $\gamma q dx$. Aby pasek ten utrzymać w równowadze, musimy zastąpić ciśnienia obu stron sklepienia wypadkowami R i R' , działającymi w K i L . Trzy te siły muszą być w równowadze i tworzyć zamknięty wielobok sił. Siły R i R' mają równą i wprost przeciwną składową poziomą H , którą nazywamy parciem poziomem (n. *Horizontalschub*, fr. *poussée horizontale*, an. *horizontal thrust*), a zatem parcie poziome nie zmienia się i jest stałym dla jakiegokolwiek przekroju. Z rysunku widzimy, że $R = \frac{H}{\text{wst } \varphi}$

a $R' = \frac{H}{\text{wst } (\varphi + d\varphi)}$, jeżeli φ jest kątem nachylenia siły R do pionowej, dalej $R \text{ dost } \varphi = \gamma q dx + R' \text{ dost } (\varphi + d\varphi)$, a stąd

$$H \text{ dot } \varphi = H \text{ dot } (\varphi + d\varphi) + \gamma q dx, \text{ a więc}$$

$$H [\text{dot } (\varphi + d\varphi) - \text{dot } \varphi] = -\gamma q dx, \text{ albo}$$

$$H d \text{dot } \varphi = -\gamma q dx \text{ i } \frac{d \text{dot } \varphi}{dx} = -\frac{\gamma q}{H}$$

A że $\text{dot } \varphi = \frac{dy}{dx}$, gdy y jest rzędną linii ciśnienia, więc

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\gamma q}{H}, \quad \dots \quad (622)$$

Jestto równanie różniczkowe linii ciśnienia. Całkując je, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \text{dot } \varphi &= -\frac{\gamma}{H} \int q dx + C, \text{ a stąd} \\ y &= -\frac{\gamma}{H} \int dx \int q dx + Cx + C_1. \quad \dots \quad (623) \end{aligned}$$

Jestto równanie linii ciśnienia, z którego widzimy, że dla danego q mamy tu jeszcze trzy niewiadome H , C i C_1 . Sklepienie jest więc zeskładem statycznie niewyznaczalnym rzędu trzeciego. Trzy te niewiadome możemy albo wyznaczyć na podstawie prawideł sprężystości, albo licząc w przybliżeniu, odpowiednio przyjąć. Jeżeli promień krzywizny linii ciśnienia nazwiemy r , to wiemy z matematyki, że

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

a wstawiwszy wartość z 622) otrzymamy

$$r = -\frac{(1 + \text{dot}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} H}{\gamma q} = -\frac{H}{\gamma q \text{wst}^3 \varphi} \quad \dots \quad (624)$$

Promień krzywizny r będzie najmniejszym, gdy $\gamma q \text{wst}^3 \varphi$ będzie największem, więc dla $\varphi = 90^\circ$, gdzie linia ciśnienia jest poziomą. Jeżeli przyjmiemy w przybliżeniu, że linia ciśnienia wpada na oś, to będzie ona wtedy miała poziomą styczną w kluczu. Nazwijmy r_0 odosny promień krzywizny linii ciśnienia, a więc według przypuszczenia i osi sklepienia, a q_0 wysokość obciążenia w kluczu, to z równania 624) otrzymamy

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{H}{\gamma q_0}, \text{ a stąd} \\ H &= -\gamma r_0 q_0 \quad \dots \quad (625) \end{aligned}$$

A więc, jeżeli linia ciśnienia wpada na oś, partie poziome równa się iloczynowi z promienia krzywizny osi w kluczu przez obciążenie jednostkowe

tamże. Ponieważ jednak przypuszczenie to rzadko się sprawdza dokładnie, więc wartość dla H , otrzymaną z równ. 625), można uważać tylko jako wartość przybliżoną, która różni się mniej lub więcej od wartości prawdziwej.

§. 134. Grubość sklepienia.

Z poprzedniego paragrafu wiemy, że $R = \frac{H}{\text{wst } \varphi}$, jeżeli φ oznacza kąt nachylenia do pionu stycznej do linii ciśnienia w danym szwie ab (rys. 306), prostopadłym na oś. Jeżeli przypuścimy znowu, że linia ciśnienia wpada na oś, to kąt φ będzie kątem nachylenia stycznej do osi w punkcie g . Jeżeli chcemy, aby natężenie było w całym sklepieniu jednakowe, to nazwawszy d , i d_0 grubości sklepienia w kluczu i w danym szwie ab , możemy ustawić proporcją $d_0 : d = H : R$, gdy na ab działa wypadkowa R , a na ef , gdzie według założenia linia ciśnienia jest pozioma, tylko parcie poziome H . Obie siły działają w środkach ciężkości przekrojów, więc ciśnienia rozdzielają się równo na przekrój, aby więc ciśnienia były równe, grubości sklepień muszą być proporcjonalne do sił, na przekroje działających. Wstawivszy wartość za R , otrzymamy

$$d_0 : d = H : \frac{H}{\text{wst } \varphi}, \text{ a stąd}$$

$$d = \frac{d_0}{\text{wst } \varphi} = \frac{d_0}{\text{dost } \alpha} = d_0 \text{ siecz } \alpha, \dots \dots \dots 626)$$

gdyż $\alpha = 90 - \varphi$.

Poprowadźmy z b pionową a z a poziomą, a otrzymamy $cb = ab \text{ dost } \alpha$, czyli $cb = d \text{ dost } \alpha = d_0$.

Widzimy więc, że jeżeli linia ciśnienia wpada na oś, rzuty pionowe wszystkich szwów powinny być równe grubości sklepienia w kluczu, gdy chcemy aby natężenia były jednakowe. Ponieważ jednak linia ciśnienia rzadko kiedy wpada zupełnie na oś, więc do pravidła tego należy się tylko w przybliżeniu stosować.

W praktyce możemy to правило zresztą zastosować tylko do pewnych granic. Dla $\alpha = 60^\circ$ otrzymamy już bowiem $d = d_0$, siecz $60_0 = 2d$, a dla większego α d wzrastałoby bardzo znacznie. Tymczasem w praktyce nie robimy grubości d' na podporze większej, niż $2d_0$.

Jeżeli grubość sklepienia wzrasta według równania 626), a linia ciśnienia wpada na oś, to natężenie ν jest wszędzie jednakowe, a mianowicie

$$\nu = \frac{H}{d_0}, \dots \dots \dots 627)$$

jeżeli H wyznaczymy na długość sklepienia równą jedności, a stąd

$$d_0 = \frac{H}{\tau} = \frac{\gamma r_0 q_0}{\tau}, \dots \dots \dots 628)$$

jeżeli zamiast ν wstawimy τ , natężenie dopuszczalne na ściskanie. Jeżeli łuk jest kołowy, to w przybliżeniu $r_0 = \frac{l^2}{8f} = 0,125 \frac{l^2}{f}$,

jeżeli f oznacza strzałkę łuku. Wtedy mamy $d_0 = 0,125 \frac{l^2}{f} \gamma q_0$.

Ponieważ tu jednak przyjęliśmy najkorzystniejsze warunki, które często w praktyce nie zachodzą, więc należy H , a stąd i d_0 , przyjąć nieco większe.

Tolkmitt przyjmuje

$$H = 0,15 \gamma \frac{l^2}{f} \left(q_0 + \frac{f}{10} \right) = d_0 \tau \dots \dots \dots 629)$$

Wysokość do linii obciążenia $q_0 = d_0 + z + p$, jeżeli z oznacza wysokość sprowadzoną nadsypki a p ciężaru ruchomego. Ponieważ sklepienie może być raz obciążone ($p = p$), drugi raz nie ($p = 0$), więc przyjmujemy średnie obciążenie $\frac{p}{2}$, zatem $q_0 =$

$= d_0 + z + \frac{p}{2}$. Jeżeli wszystkie wartości przyjmiemy w m i t tylko τ w kg/cm^2 , to zamiast τ musimy wstawić 10τ , zatem $d_0 10\tau = 0,15 \gamma \frac{l^2}{f} \left(d_0 + z + \frac{p}{2} + \frac{f}{10} \right)$, a stąd

$$d_0 = \frac{0,15 \gamma \frac{l^2}{f} \left(z + \frac{p}{2} + \frac{f}{10} \right)}{10\tau - 0,15 \gamma \frac{l^2}{f}} \dots \dots \dots 630)$$

Wzór ten daje jednak w praktyce za małe wartości dla sklepień w budownictwie lądowem. Z tego powodu przyjmujemy zwykle d_0 i d_1 (na podporze) według wzorów praktycznych, a potem, kreśląc linię ciśnienia, badamy, czy w sklepieniu panuje równowaga i czy natężenie nie jest za wielkiem.

Podajemy tu kilka wzorów praktycznych i tak:

Lesguiller przyjmuje $d_0 = 0,2\sqrt{l} + 0,1m$, gdy l oznacza rozpiętość w m ;

Perronet $d_0 = 0,33 + 0,035l$ m ;

Fontenay dla sklepień bardzo obciążonych $d_0 = 0,7r + 0,32m$, gdy r oznacza promień krzywizny;

Rondelet przyjmuje dla sklepień ceglanych:

1. dla półkola przy nadmurowaniu do szczytu . . . $d_0 = \frac{l}{48}$

2. przy nadmurowaniu poziomem do połowy wysokości $d_0 = \frac{l}{36}$

3. " " " " " " " " a następnie zbieżnem do szczytu $d_0 = \frac{l}{48}$

Dla sklepień z kamienia łamanego należy wartości powyższe 1,5 do 1,6 razy powiększyć.

Dla sklepień ciosowych:

1. dla silnie obciążonych (mosty) $d_0 = 0,04l + 0,32m$

2. " średnio " . . . $d_0 = 0,02l + 0,16m$

3. " nieobciążonych $d_0 = 0,01l + 0,08m$

W budownictwie przyjmuje się zwykle grubość sklepienia w kluczu dla sklepień w murach:

rozpięt.	sklep. półkoliste	odcinkowe $f \geq \frac{l}{6}$
do 2 m	0,30	0,45 m
" 3 m	0,45	0,45 do 0,60 m
" 6 m	0,60	0,60 " 0,75 m
" 8 m	0,75	0,75 " 0,90 m

Wzory te*), jak widzimy, różnią się bardzo, co łatwo zrozumiemy, bacząc na to, że grubość sklepienia nie zależy tylko o rozpiętości, ale od obciążenia i kształtu sklepienia.

*) Wzory Croizette-Desnoyers'a i inne, por. Mosty kamienne wyd. II. str. 49.

Dlatego wzory te mogą służyć tylko jako wskazówki przy tymczasowym przyjęciu grubości sklepienia. Dokładnie wyznaczyć możemy grubość sklepienia dopiero po wyznaczeniu sił wewnętrznych, działających w sklepieniu.

§. 135. Grubość sklepień betonowych i żelbetowych.

Grubość sklepień betonowych może być mniejszą, niż sklepień kamiennych lub ceglanych, bo dla betonu możemy dopuścić choć małe ciągnięcie, linia więc ciśnienia może tu nieco wychodzić z jądra o tyle, aby ciągnięcie nie przekraczało 2 do 3 kg/cm².

Housselle przyjmuje

$$d_0 = 0,2 + 0,022r 631)$$

Jeżeli sklepienie zbudowaliśmy wedle linii ciśnienia, a także dla płaskich sklepień odcinkowych $\left(\frac{f}{l} = \frac{1}{10}\right)$, można dla mostów drogowych zejść z grubością jeszcze niżej, możemy mianowicie przyjąć

$$\left. \begin{array}{l} d_0 = 0,021 \\ d_1 = (1,5 + 0,015l) d_0 \end{array} \right\} 632)$$

Jeżeli beton wzmocnimy siatką drucianą, to możemy jeszcze mniejsze przyjąć wymiary, ale tylko ze względu na ciężar ruchomy. Wkładka żelazna wspomaga bowiem beton skutecznie zwłaszcza, gdy występuje ciągnięcie, dla ciśnienia mniej jest potrzebną.

Jednak natężenie na ciągnięcie w sklepieniu występuje tylko, gdy linia ciśnienia wychodzi z jądra. Jeżelibyśmy przyjęli taki kształt sklepienia, że linia ciśnienia nie wychodzi wcale z jądra, lub też wychodzi tak mało, że ciągnięcie nie jest większe, niż 3 kg/cm², wkładki żelaznej nie potrzeba.

Housselle przyjmuje dla sklepień żelbetowych Moniera

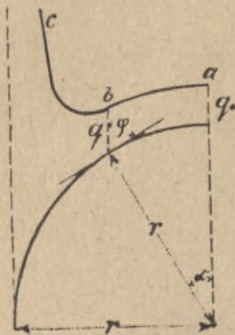
$$d_3 = 0,05 + 0,01r 633)$$

§. 136. Związek między linią ciśnienia a linią obciążenia.

Zastanówmy się teraz nad tem, jaki zachodzi związek między linią ciśnienia a linią obciążenia.

Równanie 624) brzmi $r = \frac{H}{\gamma q \text{wst}^3 \varphi}$.

Wstawivszy $\varphi = 90 - \alpha$, otrzymamy $r = \frac{H}{\gamma q \text{dost}^3 \alpha}$.



Rys. 307.

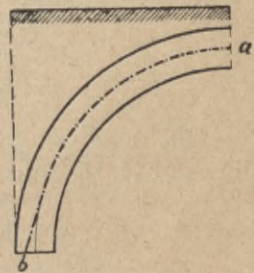
Jeżeli oś sklepienia jest linią kołową (rys. 307), a linia ciśnienia ma wpadać na oś, to r musi być stałym, a więc

$$q = \frac{H}{\gamma r \text{dost}^3 \alpha}$$

Dla klucza jest $\alpha = 0$, więc $q_0 = \frac{H}{\gamma r}$, co wstawivszy w poprzednie równanie, otrzymamy

$$q = q_0 \text{ siecz}^3 \alpha \dots \dots \dots 634)$$

Jestto równanie linii obciążenia dla sklepienia kolistego. Dla $\alpha = 90^\circ$ jest siecz $\alpha = \infty$, więc $q = \infty$, a zatem w sklepieniu półkolistym musiałoby być obciążenie na podporach nieskończenie wielkiem, aby linia ciśnienia wpadała na oś. Dla zwykłych obciążeń będzie więc linia ciśnienia w sklepieniu półkolistym na podporach znacznie zbaczać od osi (rys. 308). Wynika z tego, że sklepienia półkoliste nie są korzystne pod względem rozkładu nateżeń i że korzystniejsze są sklepienia odcinkowe, gdzie największe α (rys. 307) wynosi 40° do 50° , a najwięcej 70° .



Rys. 308.

Przy sklepieniach półkolistych trzeba, jeśli to możliwe,

na podporze skupiać wielkie ciężary. Np. przy mostach dadzą się z korzyścią urządzić w tych miejscach wieżyczki, posągi i t. d.

W razie, gdy sklepienie jest obciążone ciężarem skupionym w kluczu, to w tym punkcie linia ciśnienia załamuje się, wtedy obieramy dla sklepienia kształt ostrołuku (rys. 309).



Rys. 309.

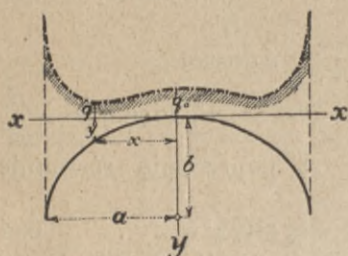
Zbadajmy jeszcze linię obciążenia dla sklepienia eliptycznego (rys. 310). Jeżeli w kluczu przyjmijemy początek spólrzędnych, to

$$b-y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}, \quad \dots \quad 635)$$

a więc

$$\frac{dy}{dx} = + \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \text{wreszcie}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ab}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} \quad \dots \quad 636)$$



Rys. 310.

Jeżeli wartość za $\frac{d^2y}{dx^2}$ wstawimy z równ. 636) w równ. 622), to otrzymamy $\frac{ab}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\gamma q}{H}$, a stąd bez względu na znak

$$q = \frac{abH}{\gamma(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}},$$

a więc ze względu na 635):

$$q = \frac{b^2 H}{\gamma(a^2-x^2)(b-y)} = \frac{b^4 H}{\gamma a^2 (b-y)^3} \quad \dots \quad 637)$$

A więc dla klucza, gdy $y=0$, $q_0 = \frac{bH}{\gamma a^2}$, a stąd:

$$H = \frac{a^2 q_0 \gamma}{b} \quad \dots \quad 638)$$

Dla $a=b=r_0$ przechodzi to równanie w równ. 625). Jeżeli wartość za H wstawimy w 637), to

$$q = \frac{b^3 q_0}{(b-y)^3} = q_0 \left(\frac{b}{b-y} \right)^3 \quad \dots \quad 639)$$

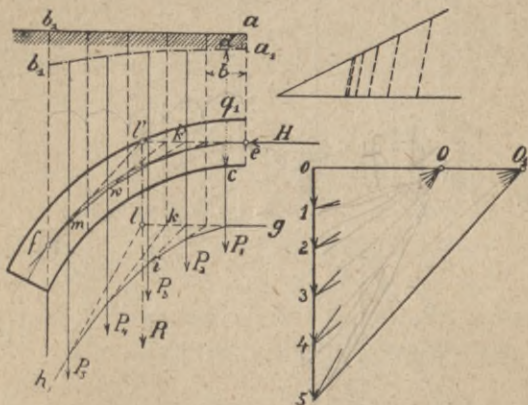
Jest to równanie linii obciążenia sklepienia eliptycznego. Z powyższego równania otrzymamy dla $b=y$, to jest dla węgłowania, $z=\infty$, podobnie jak dla sklepienia kołowego.

§. 137. Przybliżone wyznaczenie linii ciśnienia w sklepieniu symetrycznem.

Sposób wyznaczenia przybliżonego linii ciśnienia najlepiej poznamy na przykładzie. Rys. 311 przedstawia połowę sklepienia symetrycznego i symetrycznie obciążonego, ab jest linią obciążenia, a, b_1 sprowadzoną linią obciążenia, do której wykreślenia możemy użyć kąta proporcjonalnego. Sklepienie wraz z obciążeniem dzielimy na pewną ilość (na rysunku 5) równo

grubych pasków. Dla sklepień płaskich przyjmuje się zwykle szerokość poziomą pasków stałą, dla silnie zakrzywionej osi dzieli się oś na równe części.

Środki ciężkości ich możemy bez wielkiego błędu przyjąć w połowie grubości pasków, w pionowych połowiących działają więc ciężary pasków P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , proporcjonalne do długości tych pionowych cd . Szerokość sklepienia zwykle przyjmujemy w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku równą 1 m, a więc $P_1 = q_1 \cdot b \cdot \gamma = c q_1$, $P_2 = q_2 \cdot b_1 \gamma = c_1 q_2$ itd. Kreślimy teraz wielobok sił; wielkości sił $P_1, P_2 \dots$ kreślimy w tonach wedle przyjętej podziałki, wyznaczyszy ciężary pasków. Ponieważ sklepienie jest symetrycznym, więc linia ciśnienia będzie miała w kluczu styczną poziomą.



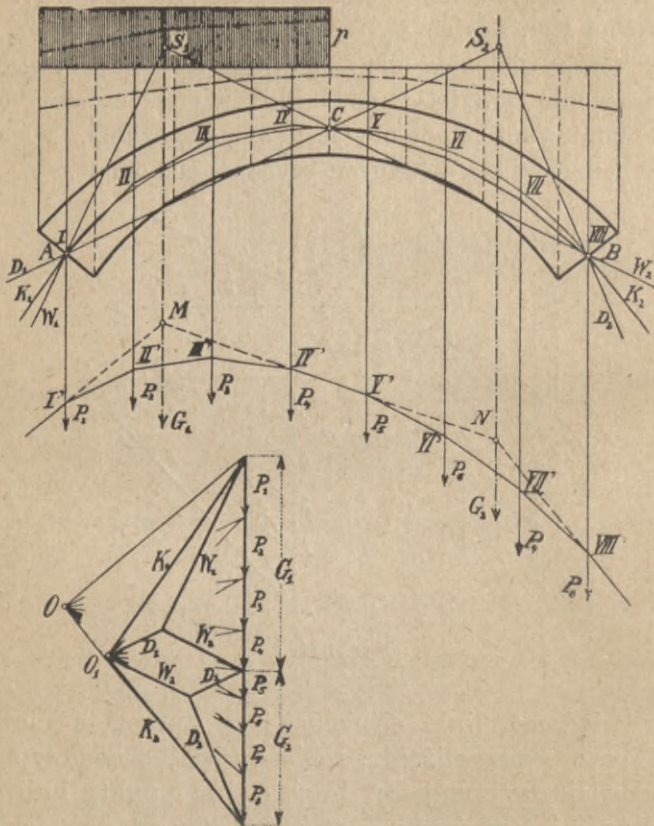
Rys. 311.

Jak wiadomo, linia ciśnienia jest statycznie niewyznaczalną. Licząc w przybliżeniu, robimy więc pewne przypuszczenia, mianowicie przyjmujemy jeszcze dwa punkty linii ciśnienia, punkty e i f w środku szwów w kluczu i na podporze, gdyż, jak to później udowodnimy, prawdziwa linia ciśnienia zbliża się jak najwięcej do osi.

W punkcie e działa zatem tylko siła pozioma H . Wielkości jej nie znamy, przyjmujemy więc tymczasowo dowolnie lub według równ. 625) lub 629) $H=0$, prowadzimy z O promienie i osobno wykreślamy wielobok sznurowy gih . Jeżelibyśmy wielobok ten zaczęli kreślić w e , punkt h nie wypadłby na f ,

gdyż H nie wyznaczyliśmy statycznie, lecz przyjęliśmy dowolnie. Musimy więc zmienić H tak, aby linia ciśnienia przechodziła przez e i f .

W tym celu przedłużamy boki skrajne wieloboku sznurowego aż do przecięcia się w punkcie l i wiemy, że w pionowej przez l działa wypadkowa R wszystkich ciężarów, działających na połowę sklepienia. Pierwszy bok szukanej połowy



Rys. 312.

linii ciśnienia jest H , który przecina się z wypadkową w l' , więc jeżeli ostatni bok linii ciśnienia ma przechodzić przez f , to kierunek jego musi być fl' . Kierunek wypadkowej sił P_1, P_2, P_3, P_4 , jest $k'k$, drugi bok więc będzie mk' , ważny do w . W ten sam sposób możemy i resztę boków wykreślić. Parcie poziome możemy teraz łatwo wyznaczyć. Zrobmy $5 O_1 // fl'$, to

O_1O jest parciem poziomem. Z O_1 wykreślmy promienie, to kreśląc wielobok sznurowy równoległy do tych promieni z punktu e , przyjść musimy do punktu f , a $ewmf$ jest linią ciśnienia.

§. 138. Sklepienie niesymetrycznie obciążone.

Przypuśćmy teraz, że sklepienie ACB (rys. 312) jest do połowy obciążone ciężarem ruchomym. Chodzi o wykreślenie linii ciśnienia dla przypuszczenia, że linia ciśnienia przechodzi przez A , C i B . W tym celu kreślimy wielobok sił, przyjmujemy dowolnie biegun O , kreślimy promienie, a równoległe do nich wielobok sznurowy I' , II' ... $VIII'$. Przypuśćmy na chwilę, że tylko lewa strona sklepienia AC jest obciążoną, prawa zaś wcale nie (nawet ciężarem własnym), to linia ciśnienia po prawej stronie będzie prostą, a że musi przechodzić przez C i B , więc prostą BC . Wypadkowa G_1 ciężarów I' II' III' IV' przechodzi przez M , na pionowej MS_1 przecinają się więc skrajne boki wieloboku sznurowego, zatem ostatni bok musi być AS_1 . Z tego wynika, że dla tego obciążenia powstanie oddziaływanie W_1 i W_2 , które łatwo w wieloboku sił wyznaczymy.

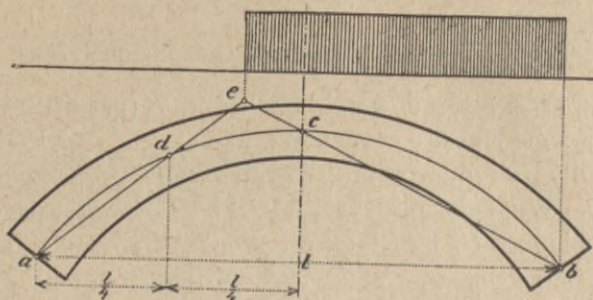
Przypuśćmy teraz, że tylko prawa strona sklepienia CB jest obciążoną, linia ciśnienia po lewej stronie będzie prosta AC , wypadkowa G_2 ciężarów V' VI' ... $VIII'$ przechodzi przez NS_2 , ostatni bok wieloboku sznurowego jest CS_2 , oddziaływania dla tego obciążenia D_1 i D_2 .

Jeżeli teraz równocześnie obciążoną jest prawa i lewa strona sklepienia, to w A działają równocześnie D_1 i W_1 , w B D_2 i W_2 , czyli w AK_1 , w BK_2 , które łatwo z wieloboku sił wyznaczyć. K_1 i K_2 przecinają się w O_1 , który jest prawdziwym biegunem, z którego wykreśliwszy promienie, a równoległe do nich wielobok sznurowy, otrzymamy linię ciśnienia, przechodzącą przez A , C i B .

Zupełnie tak samo postępujemy, jeśli sklepienie samo jest niesymetrycznym.

Z rysunku widzimy, że linia ciśnienia jest po stronie obciążonej nad osią, po stronie nieobciążonej pod osią. Później wykazemy, że prawdziwa linia ciśnienia nie może mieć takiego kształtu, i że punkty dowolnie przyjęte ACB trzeba by przy-

jąc inaczej, mianowicie punkt A nieco niżej na prawo, zaś punkt B nieco wyżej na prawo.



Rys. 313.

Zwrócić tu musimy też uwagę, że obciążenie sklepienia do połowy nie jest najniekorzystniejszym, lecz poza połowę. W przybliżeniu możemy punkt e (rys. 313) znaleźć zapomocą konstrukcyi, naznaczonej na rys. 313, której uzasadnienie i bliższy wywód podaliśmy w „Teoryi Mostów“*). Wyznaczenie linii ciśnienia możemy i w tym wypadku wykonać, jak poprzednio, przyjmawszy trzy punktu linii ciśnienia a , c , b .

139. Siły zewnętrzne.

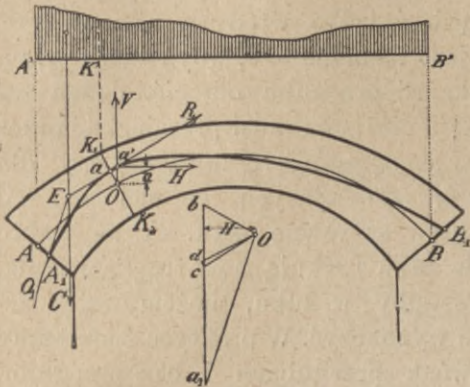
W poprzednich paragrafach zrobiliśmy pewne dowolne przypuszczenia; aby tego uniknąć i wyznaczyć prawdziwą linią ciśnienia, musimy bliżej zbadać natężenia w sklepieniu i wynikające stąd odkształcenia. Ponieważ sklepienie jest tylko szczegółowym wypadkiem łuku, więc cała dalsza teoria w celu wyznaczenia prawdziwej linii ciśnienia odnosi się wogóle do łuku.

Niech $A_1 a B_1$ będzie linią ciśnienia dla danego obciążenia (rys. 314). Wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych R przecina przekrój $K_1 K_2$ w punkcie a i jeżeli aa' jest małym, można przyjąć, że jest styczną w punkcie a' na pionowej przez O do linii sznurowej, której odległością biegunową jest składowa

*) Część II. Łuki i więzary.

pozioma H . Wypadkową R otrzymamy, składając oddziaływanie O , z obciążeniem na długości $A'K'=C$, z czego wynika,

że siły O_1 , C i R przecinają się w jednym punkcie E . Moment sił zewnętrznych ze względu na punkt O jest równy momentowi wypadkowej R albo sumie momentów jej składowych H i V ; możemy więc napisać: $M = H\eta$, gdy $O\alpha' = \eta$, bo V przechodząc przez O nie daje żadnego momentu. Widzimy więc, że odstęp



Rys. 314.

pionowy między osią a linią ciśnienia jest proporcjonalnym do momentu sił zewnętrznych, czyli innymi słowy: oś łuku jest zamykającą linią ciśnienia (twierdzenie Winklera). Jeżeli chodzi tylko o wielkość momentów, a nie o środki ciśnienia, to chcąc uzyskać momenty w n razy większej podziałce, przyjmujemy odległość biegunową n razy mniejszą. Odstęp środków ciśnienia od osi jest wtedy n razy większy, niż w rzeczywistości. Otrzymamy wtedy wyraźny wykres momentów, którego ograniczenie nie będzie już linią ciśnienia.

Jeżeli w odnośnym wieloboku sił poprowadzimy $Oc \parallel R$, a $Od \parallel$ do stycznej do osi w punkcie O , wtedy $Oc = R$, $Od = P$, siłę podłużnej, $cd = Q$, siłę poprzeczną.

Jeżeli więc znamy w łuku linię ciśnienia, to możemy wyznaczyć wszystkie siły zewnętrzne. Zadaniem naszym będzie teraz wykreślić dla każdego danego obciążenia odpowiednią linię ciśnienia.

Wiemy z §. 133, że dla określenia linii ciśnienia potrzeba wyznaczenia trzech niewiadomych. W tym celu albo uciekamy się do prawideł sprężystości i badamy odkształcenie łuku, lub też budujemy łuk w ten sposób, aby trzem danym warunkom zadość uczynić, urządzając przeguby (n. *Gelenk*, fr. *charnière*, an. *joint*, cz. *kloub*, r. *сустав*), wprowadzone w użycie najprzód przez Gerbera. Są to połączenia przegibne dwóch zupełnie

odrębnych części, na które dźwigar został podzielonym, (nie zaś dwóch prętów tej samej belki).

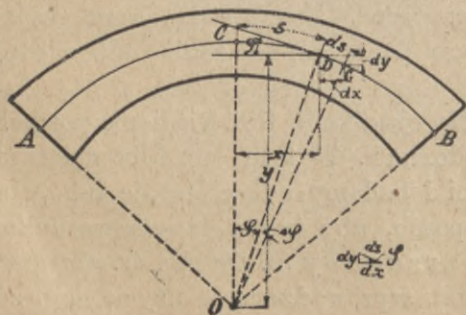
Jeżeli w któremkolwiek miejscu łuku urządzimy przegub, obie części dźwigaru mogą być tylko wtedy w równowadze, jeżeli w miejscu przegubu jest moment $=0$, gdyż inaczej musiałyby się część jedna około osi przegubu obrócić. Jeżeli zaś $M=H\eta=0$, to $\eta=0$, więc linia ciśnienia musi przechodzić przez przegub. Urządziwszy więc n przegubów, otrzymujemy dla równowagi jeszcze n równań, wyrażających, że momenty sił zewnętrznych dla tych punktów są równe zeru. A że, jakto przedtem udowodniliśmy, dla łuku brakują nam trzy równania, więc urządziwszy trzy przeguby w łuku, możemy siły zewnętrzne zupełnie dokładnie wyznaczyć. W praktyce spotykamy łuki żelazne o trzech, o dwóch przegubach i bez przegubu, w sklepieniach w nowszych czasach używamy także dwu lub trzech przegubów. Łuk trójprzegubowy (n. *Bogenträger mit drei Gelenken*, fr. *arc à trois articulations*, an. *three-hinged arch*, cz. *oblouk o třech kloubech*) jest statycznie wyznaczalnym. Dla łuków i sklepień dwuprzegubowych (n. *Bogenträger mit Kämpfergelenken*, fr. *arc avec deux charnières*, an. *arch with hinged ends*, cz. *oblouk o dvou kloubech*) i bezprzegubowych (n. *Bogenträger ohne Gelenke*, fr. *arc sans articulations*, an. *hingeless arch*, cz. *oblouk bez kloubu*), musimy się uciec do prawideł sprężystości, jak to wyżej wspomnieliśmy.

140. Odkształcenie łuku.

Niech będzie ACB (rys. 315) osią łuku, którego długość od przekroju C nazwijmy $s=CD$, kąt zaś nachylenia stycznej w punkcie D do poziomu niech będzie φ . Wskutek obciążenia lub zmiany ciepłoty ilości φ i s zmieniają się o $\Delta\varphi$ i Δs .

Nim je wyznaczymy, określimy zależność ilości s i φ , mianowicie otrzymamy, jeżeli s wzrośnie o $ds=DG$

$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \operatorname{dost} \varphi \\ dy &= -ds \operatorname{wst} \varphi \end{aligned} \right\} \cdot 640$$



Rys. 315.

Przy odkształceniu zmieniają się te wszystkie długości, gdy więc Δs nazwalimy zmianę długości s , to nazwiemy Δds zmianę długości ds . Różniczkując równanie 640), otrzymamy:

$$\Delta dx = -\Delta ds \operatorname{dost} \varphi - ds \Delta \varphi \operatorname{wst} \varphi,$$

$$\Delta dy = \Delta ds \operatorname{wst} \varphi - ds \Delta \varphi \operatorname{dost} \varphi,$$

a wstawivszy za $\operatorname{dost} \varphi$ i $\operatorname{wst} \varphi$ wartość z równ. 640), otrzymamy:

$$\Delta dx = \frac{\Delta ds}{ds} ds + \Delta \varphi dy = d \Delta x,$$

$$\Delta dy = \frac{\Delta ds}{ds} dy - \Delta \varphi dx = d \Delta y,$$

gdyż z powodu, że odkształcenia te są bardzo małe, możemy przyjąć $\Delta dx = d \Delta x$ i $\Delta dy = d \Delta y$. Całkujemy teraz te równania, to

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \int_0^x \frac{\Delta ds}{ds} dx + \int_0^x \Delta \varphi dy \\ \Delta y &= \int_0^x \frac{\Delta ds}{ds} dy - \int_0^x \Delta \varphi dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 641)$$

Δds jest to zmiana długości nieskończenie małej cząstki łuku ds , a iloczyn $\frac{\Delta ds}{ds}$ jest więc względną zmianą długości łuku, możemy zatem napisać wedle równ. 34) i dla zmiany ciepłoty o $t^0 \text{C}$, gdy α oznacza współczynnik rozszerzalności,

$$\frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{P}{EF} + \alpha t = -\frac{v'}{E} + \alpha t. \dots \dots \dots 642)$$

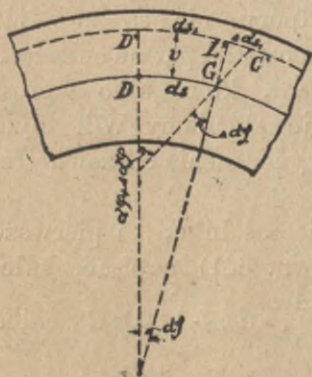
Dajemy znak $-$, bo P , oznaczając ściskanie, skraca łuk. Dla wyznaczenia $\Delta \varphi$ musimy wyznaczyć działanie momentu M .

Wskutek działania momentu M zmienia się kąt $d\varphi$ o $\Delta d\varphi$ (rys. 316). Z tego wynika, że $D'L' = ds_1$ przedłuża się o Δds_1 , a przedłużenie to możemy wyrazić analogicznie do

$$\text{równ. 34)} \quad \frac{\Delta ds}{ds_1} = -\frac{v_o''}{E}, \text{ gdy } v_o''$$

oznacza natężenie wskutek działania momentu M w warstwie odległej o v od osi obojętnej. Wstawivszy wartość za v_o'' z równ. 600) otrzymamy:

$$\Delta ds_1 = -\frac{Mv}{EI} ds_1. \dots \dots \dots 643)$$



Rys. 316.

Z rysunku widzimy, że $\Delta ds_1 = v \Delta d\varphi$, więc $\Delta d\varphi = \frac{\Delta ds_1}{v} = -\frac{M}{EI} ds_1$,

a stąd:

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI} \quad \dots \quad (644)$$

ponieważ $ds_1 = ds$.

Z uwzględnieniem krzywizny otrzymał Weyrauch:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = at - \left(P + \frac{M}{r}\right) \frac{1}{EF} \quad \dots \quad (645)$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI} - \left(P + \frac{M}{r}\right) \frac{1}{EFr} \quad \dots \quad (646)$$

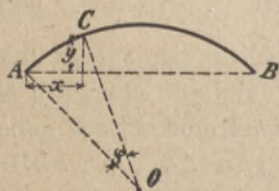
Całkujemy teraz równania (642) i (644) i mamy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= -\int_0^x \frac{P}{EF} ds \\ \Delta \varphi &= -\int_0^x \frac{M}{EI} ds \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (647)$$

Gdy kształt łuku jest dany, wtedy znana jest zależność między zmiennymi x , y , s i φ i zapomocą powyższych równań możemy wyznaczyć odkształcenie łuku.

141. Wyznaczenie trzech warunków.

Łuk bez przegubowy jest to łuk, którego oba końce są tak utwierdzone, że styczne podporowe się nie zmieniają.



Rys. 317.

Ponieważ w łuku takim obie podpory zwykle są stałe, więc dla $x=l$ możemy napisać trzy następujące równania:

$$\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta \varphi = 0. \quad \dots \quad (648)$$

Jeżeli podpory nie są zupełnie stałe, to mogą powstać pewne odkształcenia Δx , Δy , $\Delta \varphi$, które albo wprost znamy, albo też je zakładamy. W każdym

razie te trzy równania wystarczą do wyznaczenia sił zewnętrznych, jak to udowodniliśmy wyżej.

Niech ACB (rys. 317) przedstawia oś łuku, to pierwsze równanie możemy ze względu na równ. (641) napisać, zało-

żywszy, że mamy dane Δx_1 , $\Delta x_1 = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} dx + \int_A^B \Delta \varphi dy$, albo

całkując częściowo $\Delta x_1 = \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} ds + (\Delta \varphi \cdot y)_A^B - \int_A^B y \frac{d\Delta \varphi}{ds} ds$.

Dla A i B jest $y=0$, więc drugi wyraz odpada i możemy napisać:

$$\Delta x_1 = - \int_A^B \frac{\Delta ds}{ds} dx - \int_A^B y \frac{d\Delta\varphi}{ds} ds.$$

Wstawmy teraz wartości z równ. 642) i 644), a otrzymamy

$$\Delta x_1 = - \int_A^B \frac{P}{EF} dx + \int_A^B \frac{My}{EI} ds. \quad . \quad . \quad . \quad 649)$$

E jest liczbą stałą, a dla przekroju stałego możemy I i F także wyłączyć przed znak i napisać, gdy $\Delta x_1 = 0$,

$$\int_A^B My ds - \frac{I}{F} \int_A^B P dx = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 650)$$

Z uwzględnieniem krzywizny otrzymuje Müller Breslau

$$\int_A^B \frac{My ds}{EI} + \int_A^B \frac{P}{EF} \left(y \frac{ds}{r} - ds \right) = \Delta x_1. \quad . \quad . \quad . \quad 651)$$

Gdy promień łuku jest wielki, a $\Delta x_1 = 0$, równ. 651) przechodzi w równ. 650).

Keck liczy jeszcze dokładniej i otrzymuje, jeżeli Δx_1 liczymy od pewnego punktu osi, dla którego rzędne są x_1 i y_1 ,

$$\int_A^B \frac{M(y_1 - y) ds}{EI} + \int_A^B \frac{M dx}{EFr} + \int_A^B \frac{P}{EF} \left(\frac{y_1 - y}{r} ds + dx \right) = -\Delta x_1. \quad 652)$$

Dla $y_1 = 0$ i r wielkiego przechodzi to równanie w równ. 651).

Dla łuków nie bardzo grubych, gdy I jest małym, drugi wyraz równ. 650) daje stosunkowo tak małe wartości, że możemy wpływ siły podłużnej P opuścić i w przybliżeniu napisać

$$\int_A^B M y ds = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 653)$$

Jeżeli zaś przyjmiemy nie I stałe, lecz $I' = I \frac{dx}{ds} = I \cos \alpha$,

to znaczy, jeśli przyjmiemy, że moment bezwładności, a więc i grubość łuku ku podporom, się zwiększa, to z równ. 651) otrzymamy dla $\Delta x_1 = 0$ po opuszczeniu wpływu siły podłużnej

$$\int_A^B M y dx = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 654)$$

W ten sam sposób postępując, otrzymamy z drugiego równania 648) dla $\Delta x_1 = 0$

$$\int_A^B M x ds + \frac{I}{F} \int_A^B P dy = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 655)$$

Z uwzględnieniem krzywizny jest wedle Müllera Breslaua ogólnie:

$$\int_B^A \frac{Mx ds}{EI} + \int_B^A \frac{P}{EFr} \left(x \frac{ds}{r} + dy \right) = \Delta y_1, \quad . \quad . \quad 656)$$

które to równanie dla wielkiego r i stałego E, I, F i $\Delta y_1 = 0$ przechodzi w równ. 655).

Keck otrzymuje dokładniej:

$$-\int_A^B \frac{M(x_1 - x) ds}{EI} + \int_A^B \frac{M dy}{EFr} + \int_A^B \frac{P}{EF} \left(dy - \frac{x_1 - x}{r} ds \right) = \Delta y_1. \quad 657)$$

Dla $x_1 = 0$ a r wielkiego przechodzi to równanie w równ. 656).

Jeśli opuścimy wpływ siły podłużnej, to otrzymamy z równ. 655)

$$\int_A^B \mathbf{M}x ds = 0, \quad . \quad . \quad . \quad 658)$$

względnie dla stałego I' $\int_A^B \mathbf{M}x dx = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 659)$

Trzecie równanie brzmi $\Delta \varphi_1 = 0$; według równania 647)

$$0 = \Delta \varphi_1 = - \int_A^B \frac{M}{EI} ds, \quad . \quad . \quad . \quad 660)$$

dla przekroju stałego $\int_A^B \mathbf{M} ds = 0, \quad . \quad . \quad . \quad 661)$

a dla stałego I' $\int_A^B \mathbf{M} dx = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 662)$

Wedle Müllera Breslaua otrzymamy z uwzględnieniem krzywizny

$$\int_A^B \frac{M ds}{EI} + \int \frac{P}{EFr} ds = \Delta \varphi_1, \quad . \quad . \quad . \quad 663)$$

Keck otrzymuje dokładniej

$$\int_A^B \frac{M ds}{EI} + \int \frac{P}{EFr} + \int \frac{M ds}{Er^2 F} = \Delta \varphi_1. \quad . \quad . \quad . \quad 664)$$

które to równanie przechodzi dla wielkiego r i stałego I w rów. 661).

Na trzech zasadniczych równaniach 650), 655) i 660), względnie przybliżonych bez uwzględnienia krzywizny i siły podłużnej (równaniach 954), 658) i 662), polega cała dalsza teoria belek łukowych, a więc i sklepień.

§. 142. Wyznaczenie prawdziwej linii ciśnienia.

Ta linia ciśnienia jest prawdziwą, która wypełnia wszystkie trzy powyżej podane warunki, a że brakowały nam tylko

trzy równania, więc teraz mamy tyle równań, ile niewiadomych, a zatem niewiadome dadzą się ściśle wyznaczyć. Linia ciśnienia jest więc zupełnie wyznaczalna temi równaniami.

Będziemy teraz szukać tej prawdziwej linii ciśnienia, odpowiadającej trzem warunkom, a to w ten sposób, że najprzód wyszukamy linię ciśnienia, odpowiadającą jednemu warunkowi, potem zmienimy ją tak, aby nie przestając odpowiadać pierwszemu warunkowi, odpowiadała i drugiemu, a nareszcie i trzeciemu.

Każdy wielobok uważać możemy jako wielobok sznurowy dla pewnego obciążenia, a więc i oś ACB (tabl. IV.) niech będzie wielobokiem sznurowym dla pewnego obciążenia i parcia poziomego. Przypuśćmy dalej, że LK jest linią zamykającą dla belki prostej, obu końcami utwierdzonej, to wtedy odstępów pionowych między LK a osią będą dla pewnego parcia poziomego równe momentom M , a na mocy równania 662), które tu także jest ważnem $\int_A^B M_b dx = 0$. Równ. 662) bowiem powstało z warunku $\Delta \varphi_1 = 0$, który i tu musi być wypełnionym (por. §. 139).

Niech będzie $a' a'_1 a'_2 \dots a'_{11}$ prawdziwą linią ciśnienia i przypuśćmy na chwilę, że linia ta jest także wielobokiem sznurowym dla tej samej belki prostej obu końcami utwierdzonej i tego samego parcia poziomego, co wielobok b , ale dla danego rzeczywistego obciążenia, i że linia LK jest znów linią zamykającą. Wtedy odstępów między linią zamykającą a wielobokiem a będą równe momentom M_a i tu będzie także:

$$\int_A^B M_a dx = 0.$$

Wiemy, że dla łuku linią zamykającą jest oś łuku, więc momenty dla łuku będą:

$$M = M_a - M_b, \dots \dots \dots 665)$$

jak to z rysunku widzimy.

Pomnożywszy to równanie przez $x dx$, otrzymamy

$$Mx dx = M_a x dx - M_b x dx.$$

Scalkujmy to równanie, to

$$\int Mx dx = \int M_a x dx - \int M_b x dx = 0$$

według równania 659), a zatem:

$$\int M_a x dx = \int M_b x dx \dots \dots \dots 666)$$

Analogicznie możemy napisać na podstawie równań 653) i 662)

$$\int M_a y dx = \int M_b y dx \quad 667)$$

$$\text{i } \int M_a dx = \int M_b dx \quad 668)$$

Te trzy równania posłużą nam do wyznaczenia prawdziwej linii ciśnienia *), a mianowicie w równ. 666) i 668) zrobimy obie strony równania = 0, przezco będą też sobie równe. W tym celu dzielimy najprzód rozpiętość na równą liczbę części (na rysunku na 10 części); rozpiętość jest tu $l=16 m$, strzałka

$$f=3 m, d_0=1 m, d_1=1,8 m, \text{ nadsypka } 1 m, \text{ ciężar ruchomy } 1200 \frac{kg}{m^2}.$$

Jeśli ciężar kamienia jest $2,4 \frac{t}{m^2}$, nadsypki $1,6 \frac{t}{m^2}$, to $h_0 = \frac{1200}{1600} = 0,75 m$.

Widzimy, że tu pasek szósty nie jest cały, lecz tylko do połowy, obciążonym. Możemy albo przyjąć, że obciążony jest on całkowicie na całej długości połową ciężaru, albo licząc dokładniej, podzielimy pasek piąty na dwie części 6_a i 6_b , co do których będziemy pamiętać, że szerokość ich jest o połowę mniejszą, a więc w rachunek zawsze przyjmować będziemy tylko połowę rzędnych tych pasków, albo też rzędną jedną średnio arytmetyczną.

Ciężar stały jednego paska i ciężar ruchomy działają w praktyce dość dokładnie w pionowej, połowiącej ten pasek wyjąwszy pasek 6, który jest tylko do połowy obciążony ciężarem ruchomym, tak że ciężar lewej połowy paska

$$P_l = 2,4 \times 0,8 \times 2,17 = 3,73 t, \quad \text{„} \quad \text{prawej} \quad \text{„} \quad \text{„}$$

$$P_p = 2,4 \times 0,8 \times 1,70 = 2,92 t, \quad \text{a wypadkowa } P_6 = 6,65 t \text{ dzieli szerokość paska w stosunku } x = \frac{\frac{1}{4}P_l + \frac{3}{4}P_p}{P_6} = 0,47. \text{ Odstępy więc ciężaru } P_6 \text{ od sąsiednich kierunków, mierzone po prostopadłej do nich, wynoszą } (0,47 + 0,5) \cdot 1,60 = 155 \text{ cm i } (0,53 + 0,5) \cdot 1,60 = 165 \text{ cm. Otóż wykreślamy te kierunki sił działających } P_1, P_2 \dots P_{10} \text{ oraz wielobok sił dla danego obciążenia. Tu przypuściliśmy, że obciążoną jest ciężarem ruchomym lewa połowa sklepienia i część } pnwd, \text{ mianowicie na długości } 0,55 l = 8,80 m, \text{ wykreślamy więc według §. 132. sprowadzoną linią obciążenia i wy-$$

*) Porów. Burr. *Suspension bridges arch ribs and cantilevers*, Nowy York 1913, str. 284.

znaczamy ciężary pasków. N. p. ciężar paska pierwszego jest $2,4 \times 1,6 \times 1 \times 4,6 = 17,66 t$. Reszta ciężarów będzie proporcjonalną do średnich wysokości pasków.

Przyjąwszy tymczasowo biegun w punkcie D , kreślimy promienie i w zwykły sposób wielobok sznurowy ENF . Teraz szukamy linii zamykającej, któraby zadość uczyniła równaniu

$$\int_A^B M_a d = 0,$$

co znaczy, że powierzchnia między linią zamykającą a wielobokiem sznurowym a ma być $= 0$, oczywiście, gdy uwzględnimy znaki rzędnych.

Jeżeli I' jest zmiennem, to według 649) mamy zamiast M wyraz $\frac{M}{I'}$ we wszystkich następnych wzorach, więc $\frac{M}{I'} dx$ zamiast $\frac{M}{I} ds$.

Wykreślimy teraz najprzód prostą $L_3 K_3$, równoległą do EF , oceniwszy na oko, że powierzchnia między $L_3 K_3$ a $ENF = 0$. Dobrze także użyć w tym celu linii prostej, wykreślonej na kalce, którą przesuwamy równolegle do linii EF , aż powierzchnie po obu stronach linii będą równe. Gdyby linia ciśnienia była parabolą, to $L_3 K_3$ przechodziłaby w $\frac{2}{3}$ wysokości w środku.

Teraz sprawdzimy, czy rzeczywiście $\int_A^B M_a dx = 0$.

Jeżeli nazwiemy odcinki pionowe między wielobokiem a a zamykającą v , to powierzchnia momentów

$$F = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \frac{e}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} e + \dots + \frac{v_4 + v_5}{2} \cdot e + \frac{v_5 + v_6}{2} \cdot 0,97 e +$$

$$+ \frac{v_6 + v_7}{2} \cdot 1,03 e + \frac{v_7 + v_8}{2} e + \dots + \frac{v_9 + v_{10}}{2} \cdot e + \frac{v_{10} + v_{11}}{2} \cdot \frac{e}{2},$$

$$F = e \left[v_1 + v_2 + \dots + v_9 + v_{10} + \frac{v_0 - v_1 + v_{11} - v_{10}}{4} + \right. \\ \left. + 0,015(v_7 - v_5) \right] = e.m. \dots \dots \dots 669)$$

Dodawanie rzędnych v możemy skutecznie cyrklem i w ten sposób otrzymamy $F = e \left(16,2 - \frac{22,2}{4} - 0,15 \cdot 4,0 \right) = e \cdot 10,59$.

Ponieważ powierzchnia nie jest $= 0$, posuniemy prostą $L_3 K_3$ do góry o długość

$$\Delta a = \frac{f}{l} = \frac{e \cdot m}{en} = \frac{m}{n} \dots \dots \dots 670)$$

W naszym wypadku przesuwając $L_3 K_3$ o $\Delta a = \frac{10,59}{10} = 1,06 \text{ mm}$ w górę, otrzymamy prostą $L_2 K_2$, a powierzchnia będzie teraz dokładnie $= 0$.

Chodzi teraz o to, aby $\int_A^B M_a x dx = 0$, tj. aby moment statyczny tej powierzchni ze względu na AE był $= 0$. Obliczymy moment statyczny tej powierzchni, rozkładając ją na trapezy i przypuszczając, że środek ciężkości trapezu jest w połowie szerokości. Otrzymamy więc:

$$\begin{aligned} S = & \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{e}{4} + \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot e \cdot 1 e + \frac{v_2 + v_3}{2} \cdot e \cdot 2 e + \dots + \\ & + \frac{v_4 + v_5}{2} \cdot e \cdot 4 e + \frac{v_5 + v_6}{2} \cdot 0,97 e \cdot 4,985 e + \frac{v_6 + v_7}{2} \cdot 1,03 e \cdot 5,985 e + \\ & + \frac{v_7 + v_8}{2} \cdot e \cdot 7 e + \dots + \frac{v_9 + v_{10}}{2} \cdot e \cdot 9 e + \frac{v_{10} + v_{11}}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot 9,75 e = \\ & + \frac{e^2}{2} \left[\frac{v_0}{8} + \frac{9 v_1}{8} + (1+2)v_2 + (2+3)v_3 + (3+4)v_4 + (4+4,84)v_5 + \right. \\ & \quad \left. + (4,84+6,16)v_6 + (6,16+7)v_7 + (7+8)v_8 + (8+9)v_9 + \right. \\ & \quad \left. + \left(9 + \frac{9,75}{2} \right) v_{10} + \frac{9,75}{2} v_{11} \right], \end{aligned}$$

po wstawieniu wartości za v będzie w mm^3 :

$$\begin{aligned} S = & \frac{e^2}{2} \left(-\frac{33}{8} - \frac{9}{8} \times 22 - 3 \times 6,2 + 5 \times 4,8 + 7 \times 11,4 + 8,84 \times 14,8 + \right. \\ & \quad \left. + 11,0 \times 14,5 + 13,16 \times 11,0 + 15 \times 4,9 - 17 \times 6,0 - 13,875 \times 21 + \right. \\ & \quad \left. - 4,875 \times 31,9 \right) = \frac{e^2}{2} (-596,36 + 612,39) = +8,02 e^2. \end{aligned}$$

Musimy więc moment statyczny powierzchni pomniejszyć o $S = 8,02 e^2 mm^3$ przez to, że prostą $L_2 K_2$ obrócimy około punktu I o pewien kąt odwrotnie do ruchu wskazówek na zegarze, aż przyjdzie w położenie $L_1 K_1$.

Moment statyczny, jaki przez to powstanie, ma być:

$$\begin{aligned} -S = & + I L_1 L_2 \frac{1}{6} l - I K_1 K_2 \frac{5}{6} l = -\frac{2}{3} l \cdot I L_1 L_2 = \\ & = \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{2} L_1 L_2 \cdot \frac{1}{2} l = -\frac{l^2}{6} L_1 L_2, \text{ a stąd} \end{aligned}$$

$$L_1 L_2 = \frac{6S}{1^2} \dots \dots \dots 671)$$

Tu otrzymamy $L_1 L_2 = \frac{6 \cdot 8,02 e^2}{(10e)^2} = 0,48 mm$. A że $IK_1 K_2 = IL_1 L_2$, więc warunek pierwszy nie został naruszony. Linia zamykająca $L_1 K_1$ odpowiada więc teraz dwom pierwszym warunkom.

Teraz szukamy linii zamykającej dla osi łuku jako wieloboku sznurowego w ten sam sposób i znajdziemy LK , równoległe do AB , bo jeżeli suma powierzchni momentów jest równa zeru, to z powodu symetrii drugi warunek będzie już przez to także wypełniony. Środek ciężkości bowiem tak ujemnej części powierzchni, jak i dodatniej, leży w prostej CD , a że te powierzchnie są równe, więc momenty statyczne muszą być równe z przeciwnym znakiem, a zatem $\int_A^B M_b x dx = 0$.

Chodzi jeszcze o wypełnienie trzeciego warunku;

$$\int_A^B M_a y dx = \int_A^B M_b y dx.$$

Rzędne ac wyobrażają nam, jak wiemy, momenty M_a . Uważajmy M_a jako siły, działające poziomo w odpowiednich punktach osi b , oddalonych od linii AB o y np. $a_1 c_1$ w b_1 , $a_2 c_2$ w b_2 itd., wtedy otrzymamy łatwo $\int_A^B M_a y dx$, wykreślając na dowolnej poziomej wielobok sił $f_0 f_1 \dots f_{10} f_{11}$, a potem wielobok sznurowy. Powierzchnie przedstawiają się tu jako trapezy i trójkąty. Środki ciężkości znajdują się w jednej trzeciej lub w przybliżeniu w połowie podstaw. Zatem od f_0 odcinamy $f_0 f_1 = \frac{1}{2} u_1$, $f_1 f_2 = u_2$, $f_2 f_3 = u_3$, $f_3 f_4$ w przeciwnym kierunku $= u_4$ itd., a ponieważ powierzchnia momentów powinna być równa zeru, więc ostatni punkt wieloboku f_{11} zejdzie się z punktem f_0 .

Przyjmmy odległość biegunową dowolnie równą h_1 i połączmy biegun S_1 z wszystkimi punktami wieloboku sił, z punktów k_1, k_2 itd. ponad środkami ciężkości trapezów poprowadźmy poziome i wykreślmy wielobok sznurowy URW . Z §. 7. wiemy, że odcinek UW prostej równoległej do wypadkowej między skrajnymi bokami wieloboku sznurowego URW , pomnożony przez odległość biegunową h_1 , równy jest sumie momentów statycznych sił M_a , więc według równań 4) i 181)

$$UW = \frac{1}{h_1} \int_A^B M_a y dx \dots \dots \dots 672)$$

To samo robimy, chcąc wyznaczyć $\int_A^B M_b y dx$.

Tu M_b są równe rzędnym między osią łuku a linią zamykającą LK . Wykreślmy w ten sam sposób wielobok sznurowy czyli raczej z powodu symetrii tylko połowę wieloboku, a otrzymamy

$$RT = \frac{1}{2h_1} \int_A^B M_b y dx \quad \dots \quad (673)$$

Aby zadość uczynić równaniu 667), musiałoby być:

$$\int_A^B M_a y dx = \int_A^B M_b y dx \quad \text{czyli } 2h_1 RT = h_1 \cdot UW, \text{ albo} \\ \mathbf{2RT = UW} \quad \dots \quad (674)$$

Rzeczywiście jednak $2RT > UW$, więc aby uzyskać równ. 674), musimy, ponieważ $2RT$ jest dla danego kształtu łuku stałym, zmienić tak UW , aby $UW = 2RT$.

W naszym przykładzie jest $2RT < UW$, a mianowicie ponieważ $2RT = \frac{1}{n} \cdot UW$, więc UW trzeba n razy zmniejszyć. Ponieważ $UW = \frac{1}{h_1} \int_A^B M_a y dx$, więc UW będzie n razy mniejsze, jeżeli M_a czyli rzędne wieloboku sznurowego a zmniejszymy n razy. Rzędne zaś wieloboku tego będą n razy mniejsze, jeżeli do wykreślenia go użyjemy odległości biegunowej n razy większej, a zatem $b' = nb = b \cdot \frac{UW}{2RT}$.

Teraz dwojaki jest sposób wykreślenia prawdziwej linii ciśnienia, albo mnożymy wszystkie rzędne wieloboku a przez $\frac{1}{n} = \frac{2RT}{UW}$ i wykreślamy je według znaku powyżej lub poniżej linii LK , albo wyznaczywszy prawdziwą odległość biegunową, szukamy takiego bieguna, aby linie zamykające obu wieloboków zeszły się razem i aby można jeden na drugi położyć. Wykreślmy dowolny kąt POP' , zróbmy $OP = UW$, $OP' = 2RT$, odetnijmy potem odległość biegunową b na OP' do punktu D' i wykreślmy $D'D''$ równoległe do PP' , a będziemy mogli napisać:

$$OD'' = OD' \cdot \frac{OP}{OP'} = OD' \cdot \frac{UW}{2RT} = n \cdot b.$$

Prawdziwą odległością biegunową jest więc $OD'' = b'$.

Według pierwszego sposobu mamy pomniejszyć wszystkie rzędne M_a w stosunku $OP:OP'$, co zrobić możemy zapomocą kąta proporcjonalnego POP' . Sposób ten jest łatwy i dokładny; jako próbę użyć możemy drugiego sposobu, a to jak następuje: Kreślimy DF_1 równoległe do L_1K_1 , przezco otrzymujemy $OF_1 = V_1$ i $F_1 10 = V_2$, oddziaływania pionowe belki prostej. Z punktu F_1 kreślimy poziomą F_1D'' , równoległą do zamykającej LK , gdyż L_1K_1 musi być poziomą, jeżeli chcemy położyć wielobok a na wielobok b i uzyskać $M = M_a - M_b$ i robimy $F_1D_1 = OD''$. D_1 jest wtedy prawdziwym biegunem, gdyż odległość biegunowa $F_1D_1 = OD'' = b'$, a równoległa do nowej zamykającej LK dzieli wielobok sił na V_1 i V_2 . Teraz kreślimy promienie i linią ciśnienia. Punkt początkowy a' , a może i więcej punktów, jako kontrolę wyznaczamy według poprzedniego sposobu.

Drugą próbą rzetelności konstrukcyi jest ta okoliczność, że punkty przecięcia się wieloboku a z linią zamykającą m i n leżą w pionowych punktach przecięcia się linii ciśnienia z $LK - m'$ i n' . Dalej boki skrajne wieloboku sznurowego muszą się przecinać w pionowej przez środek ciężkości wszystkich ciężarów GG' , a nakoniec sumy powierzchni powyżej osi i poniżej osi muszą być sobie równe.

Otrzymaawszy tak prawdziwą linią ciśnienia, mamy momenty ze względu na oś $M = bz$, jeżeli z oznacza pionowy odstęp między osią a linią ciśnienia.

Chodzi jeszcze o największe natężenie, które obliczymy według równ. 617) $v_1 = \frac{P}{100h} \left(1 + \frac{6c}{h} \right)$. Widzimy, że v_1 może być największe dla największego P lub największego c . Na tablicy jest P i c największe na podporze A . Dla szwu gl , prostopadłego do osi w A , znajdziemy P , robiąc $or \parallel gl$, a $D_1 r \parallel$ do stycznej do osi w A , to $P = D_1 r = 84,0 t = 84000 \text{ kg}$. Dalej mamy $c = Aa' = 0,18 m = 18 \text{ cm}$, $h = 1,7 m = 170 \text{ cm}$, więc

$$\text{najw. } v = \frac{84000}{100 \cdot 170} \left(1 + \frac{6 \cdot 18}{170} \right) = 8,0 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

a więc dla muru kamiennego natężenie stosowne. To samo zrobiliśmy wykreślnie. Gdybyśmy chcieli otrzymać wynik do-

kładniejszy, to otrzymalibyśmy dla stałego I' z wzorów 654), 658) i 662), wstawivszy $I' = I \frac{ds}{dx}$ i $F' = F \frac{ds}{dx}$,

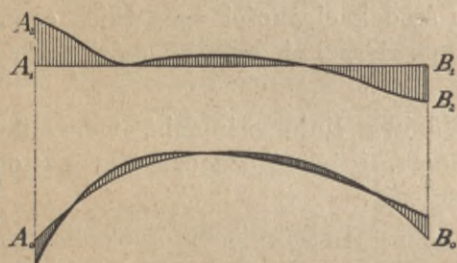
$$\left. \begin{aligned} \int_A^B M dx &= 0 \\ \int_A^B M x dx + \frac{I'}{F'} \int_A^B P dy &= 0 \\ \int_A^B M y dx - \frac{I'}{F'} \int_A^B P dx &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 675)$$

Z tego widzimy, że pierwszy warunek $\int_A^B M_a dx - \int_A^B M_b dx = 0$ jest dokładny, żadnej zmiany tu nie trzeba.

W drugim równ. 675) wstawmy $P = [Q] \frac{ds}{dy}$, jeżeli $[Q]$ oznacza siłę poprzeczną, a otrzymamy

$$\int_A^B M x dx - a'^2 \int_A^B [Q] ds = 0 \text{ albo w przybliżeniu}$$

$$\int_A^B M x dx = a'^2 \int_A^B [Q] dx \dots \dots \dots 676)$$



Rys. 318.

Jeżeli więc w zwykły sposób wyznaczmy powierzchnie momentów a i b , to jeszcze należy w każdym punkcie a siłę poprzeczną $[Q]$ odciąć pionowo od pewnej poziomej $A_1 B_1$ (rys. 318). Końce tych rzędnych

połączone dadzą w ogólności linię krzywą $A_2 B_2$, a $\int_A^B [Q] dx =$
 $=$ pow. $A_1 A_2 B_2 B_1$. Dla obciążenia zupełnego jest ta powierzchnia dla łuku parabolicznego równa zero, a zwykle bardzo mała.

Jeżeli łuk jest symetryczny, to $\int_A^B M_b x dx = 0$, więc

$$\int_A^B M_a x dx = -\text{pow}[Q] \dots \dots \dots 677)$$

a nie jest równe zero, jak to pierwiej robiliśmy. Z uwzględnieniem tego robimy obrót $L_2 K_2$ w położenie $L_1 K_1$.

Trzecie równanie 675) możemy napisać zważywszy, że

$$P = H \frac{ds}{dx}, \quad \int_A^B My dx - a'^2 H \int_A^B ds = 0, \text{ albo}$$

$$\int_A^B My dx = a'^2 H l. \quad \dots \dots \dots 678)$$

jeżeli l oznacza długość łuku.

Otrzymamy więc z 672) i 678) $h_1 UD - a'^2 H l = h_1 2 Ct$, więc

$$UD = 2 Ct + \frac{a' H l}{h_1} \quad \dots \dots \dots 679)$$

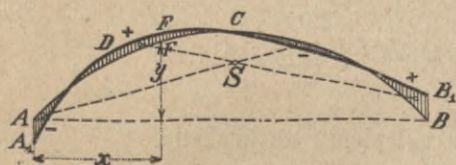
Jeżeli to równanie się nie ziszcza, to należy UD , zatem odległość biegunową odpowiednio zmienić, aby zadość uczynić temu równaniu.

Różnica w wielkości parcia poziomego przy zastosowaniu tych poprawek jest jednak zwykle tak mała, że w zwyczajnych wypadkach nie potrzeba uwzględniać wpływu siły połużnej P .

§. 143. Położenie powierzchni momentów.

Niech będzie ACB (rys. 319) osią łuku, $A_1 D B_1$ prawdziwą linią ciśnienia, to rzędne między temi dwiema liniami będą,

jak wiemy, proporcjonalne do momentów. Pierwszy warunek $\int_A^B Mx dx = 0$ oznacza, że suma powierzchni dodatnich jest równa sumie powierzchni ujemnych tj. poniżej osi leżących. Drugi



Rys. 319.

i trzeci warunek brzmią:

$$\int_A^B Mx dx = 0 \text{ i } \int_A^B My dx = 0,$$

co da się słowami tak wyrazić: moment statyczny powierzchni ujemnych musi być równy momentowi statycznemu powierzchni dodatnich tak ze względu na oś odcinków, jak i rzędnych. $\int_A^B My dx$ nie oznacza wprawdzie momentu statycznego powierzchni momentów ze względu na AB , bo y oznacza odstęp punktu osi od AB . Ale

różnica jest bardzo małą tak, że możemy $\int_A^B Mydx$ uważać w przybliżeniu jak moment statyczny. Wiemy, że moment statyczny jest iloczynem z powierzchni przez odległość środka ciężkości od danej linii, a więc gdy powierzchnie dodatnie i ujemne i ich momenty statyczne są równe, to i odległość środka ciężkości powierzchni ujemnych i dodatnich od obu osi musi być równą, czyli innymi słowy: środek ciężkości części ujemnych musi wpadać na środek ciężkości części dodatnich.

Aby tego ostatniego warunku dopełnić, musi linia ciśnienia przecinać oś najmniej w trzech punktach, bo jeżeliby przecinała tylko w dwóch punktach, to otrzymalibyśmy dwie części tego samego znaku, a wyżej lub niżej jedną część przeciwnego tak, że środki ciężkości nie mogłyby się schodzić.

Powyzsza ulepszona metoda Burra wyznaczenia prawdziwej linii ciśnienia zaleca się zwłaszcza tem, że jest bardzo przejrzystą i jasną, a nadewszystko ogólną.

Jeżeli uwzględnimy skrócenie osi wskutek siły podłużnej, to otrzymamy wedle Kecka*) dla sklepienia parabolicznego podniesienie się linii ciśnienia w kluczu o e , aniżenie na podporach o $2e$, przyczem

$$c = \frac{d^2}{f}, \dots \dots \dots 680)$$

jeśli d oznacza grubość a f strzałkę sklepienia.

§. 144. Ciśnienie sklepienia na krążyny.

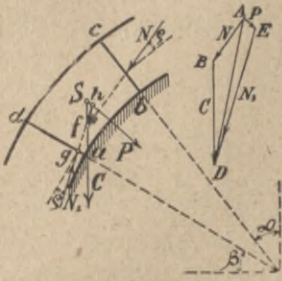
Przy budowie sklepień używamy osobnego rodzaju rusztowań, które mają podierać niedokończone jeszcze sklepienie, dopóki nie założymy klucza, poczem już sklepienie nie potrzebuje podparcia. Rusztowania te nazywamy krążynami (*Lehrgerüst*, fr. *cintre*, r. *кружало*).

Aby obliczyć wymiary krążyn, musimy poznać ciśnienie, jakie wywiera sklepienie podczas budowy na krążyny.

Wszystkie klince nachylone pod kątem mniejszym do poziomu, niż kąt tarcia wynosi, nie cisną wcale na krążyny, dopiero gdy $\beta > \rho$ (rys. 320), kliniec cisnie na krążyny i wywo-

*) Keck: *Elastizitätslehre* st. 338.

łuje oddziaływanie P prostopadłe do podniebienia. Zastanówmy się nad równowagą klinca takiego $abcd$. Ciężar jego C działa w środku ciężkości S , klince leżące na danym klincu wywierają ciśnienie N , działające także pod kątem tarcia. Siły N , N_1 , C i P muszą być w równowadze i dać się złożyć w zamknięty



Rys. 320.

wielobok sił. Jeżeli N jest dane, C obliczamy, kreślimy $AB=N$ i $BD=C$, wypadkowa tych dwóch sił jest AD , z punktu ich przecięcia się f kreślimy $fh \parallel AD$ do przecięcia się z siłą P , którą z poprzednimi składamy. Kierunek wypadkowej N_1 znamy, bo działa ona pod kątem tarcia φ do prostopadłej na ad , kreślimy więc $DE \parallel gh$ i otrzymujemy w wieloboku sił $DE=N$, i $AE=P$. Znając teraz N_1 ,

możemy wyznaczyć w ten sam sposób ciśnienie następnego klinca na krążynę.

Jeżeli punkt g wypada zewnątrz przekroju, to konstrukcyja ta nie jest ważną. Wtedy musimy przypuścić mniejszy kąt tarcia, niż φ , — albo, co na jedno wychodzi, obrać punkt g blisko krawędzi a . Możemy przyjąć $ag=2$ do 5 cm .

W rys. 321 zrobiliśmy tę konstrukcyę dla sześciu klinców A , B , C , D , E i F . Zaczynamy od najwyższego klinca F . Tu, rozumie się, $N=0$, a siły P_1 i C_1 przecinają w S_1 , skąd prowadzimy N_1 pod kątem φ do prostopadłej na szew ab . Przeprowadziwszy tak konstrukcyę dla wszystkich 6 klinców, otrzymamy w wieloboku sił P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 i P_6 . Z rysunku widzimy, że proste, przedstawiające ciśnienia N , są zbieżne, a ciśnienie P ku dołowi coraz mniejsze. Dodajmy jeszcze jeden kliniec G , którego ciężar jest C_0 , to z powodu zbieżności prostych, przedstawiających ciśnienia N , otrzymamy odnośne ciśnienia na krążyny P mniejsze, niż w pierwszym przypadku. A więc największe ciśnienie na krążyny pod pewnym klincem powstaje zawsze wtedy, gdy jest on najwyższym klincem. Ciśnienia te największe wra- stają ku kluczowi. Z rysunku widzimy, że przez dodanie klinca G ciśnienia, wywarte przez poprzednie klince, maleją, a kliniec A nie wywiera już wcale ciśnienia na krążyny, $P_5=0$.

Najw. P możemy łatwo wyznaczyć liczebnie, gdyż wtedy $N=0$ (rys. 322), $BF=C \operatorname{wst} \alpha$, więc

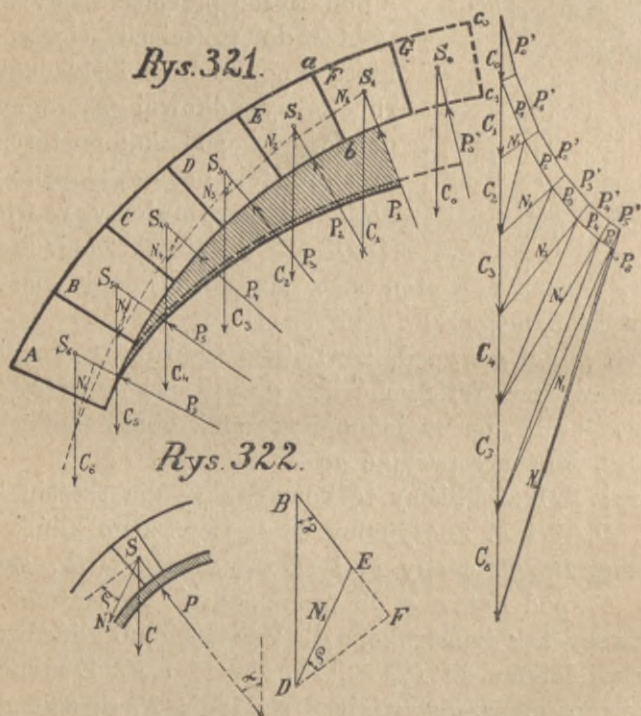
$$DE = N_1 = \frac{DF}{\operatorname{dost} \varrho} = \frac{C \operatorname{wst} \alpha}{\operatorname{dost} \varrho}.$$

Dalej mamy

$$P = BE = C \operatorname{dost} \alpha - DF \operatorname{st} \varrho = C \operatorname{dost} \alpha - C \operatorname{wst} \alpha \operatorname{st} \varrho, \text{ albo}$$

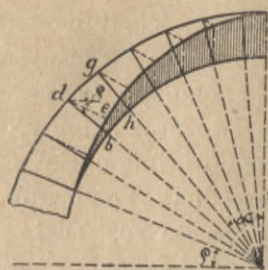
$$P = C(\operatorname{dost} \alpha - \operatorname{wst} \alpha \operatorname{st} \varrho) = C(\operatorname{dost} \alpha - f \operatorname{wst} \alpha), \quad (681)$$

jeżeli f jest współczynnikiem tarcia.



Dla $\alpha = 90 - \varrho$ jest $P = C \left(\operatorname{wst} \varrho - \operatorname{dost} \varrho \frac{\operatorname{wst} \varrho}{\operatorname{dost} \varrho} \right) = 0$. Kąt ϱ jest według §. 131 w przecięciu dla ciosów bez zaprawy 30° , z zaprawą starą 35° , świeżą zaś bardzo mały, co najwyżej przyjąć więc możemy $\varrho = 22^\circ$, $f = 0,4$. Dla cegły jest średnio $\varrho = 46^\circ$, dla pewności przyjąć możemy $\varrho = 35^\circ$.

Konstrukcja linii najw. P wynika z poprzedniego. Jeżeli chodzi o ciśnienie klinca $dbgh$ (rys. 323) bardzo ważkiego, to ciężar jego będzie proporcjonalnym do grubości sklepienia db ,



Rys. 323.

mianowicie $C = db \cdot b_1 \cdot 1 \cdot \gamma$, jeżeli b , jest szerokością klinca. Przyjmijmy $b_1 = 1$, to $C = \gamma \cdot db$.

Jeżeli w rys. 323 zrobimy $db = C$, jeżeli z d poprowadzimy poziomą i de pod kątem ϱ do poziomej, a z b pionową be , to $dbe = BDE$ (w rys. 322), bo wszystkie kąty równe, a $db = BD$, więc $be = BE = P$. Zróbmy to samo dla innych szwów i połączmy odnośne punkty, a otrzymamy linią naj-

większych P . Powierzchnię kreskowaną przyjąć możemy, obliczając wytrzymałość krawędzi, jako powierzchnię obciążenia, pomnożywszy ją przez γ . Będzie to wprawdzie obciążenie trochę za wielkie, bo ciśnienia największe nie wystąpią nigdy równocześnie, ale przypuszczenie to jest na korzyść pewności.

XI. Sklepienia krzyżowe i baniaste.

§. 145. Sklepienie krzyżowe nad kwadratem.

Sklepienie, powstające z przecięcia się dwóch sklepień kolebkowych o równej strzałce, których podniebienia w linii przecięcia się tworzą kąt wypukły, nazywany sklepieniem krzyżowym (n. *Kreuzgewölbe*, fr. *voûte des arêtes*, an. *cross-vaulting*, r. *крестовый сводъ*) (tabl. V.). Linie, powstające na podniebieniu z przecięcia się dwu sklepień AE i CF , nazywamy żyłami i liniami żebrowymi (n. *Grathbogen*, fr. *nervure*, an. *nerve*), pas zaś, wystający z żyły dla wzmocnienia lub ozdoby, żebrem (n. *Grath, Rippe*, fr. *arêtier de voûte, ogive*, an. *groin rib*).

Przypuśćmy najprostszy przypadek, że sklepienie krzyżowe powstaje z dwu sklepień kolebkowych o jednakim przekroju, przecinających się pod kątem prostym. Podzielmy oba te sklepienia płaszczyznami pionowymi, prostopadłymi do osi, na równą ilość pasków, które możemy uważać jako sklepienia kolebkowe i wykreślmy w każdym w znany sposób linią ciśnienia (przekrój AC). Jeżeli następne paski ku środkowi sklepienia położone np. ef mają tę samą grubość, to przekrój ich two-

rzy część przekroju skrajnego paska AC , linii ciśnienia nie potrzebujemy więc osobno szukać, lecz jest ona częścią linii ciśnienia paska AC . Wszystkie te paski wywierają pewne ciśnienia ukośne np. w ef R_c na żebra, które da się rozłożyć na parcie poziome H_c i ciśnienie pionowe V_c . Łatwo zrozumiemy, że jeżeli sklepienie ma stałą grubość i jest jednostajnie obciążone, parcie poziome H_c będzie dla wszystkich jednakowo grubych pasków to samo $=H_1$, a więc także i w pasku eg . Dwie te siły H_1 dają wypadkową poziomą w płaszczyźnie żebra $H=H_1\sqrt{2}=ei$. Siły pionowe V_c zaś dodają się, a więc $V=2V_c$.

Teraz przystępujemy do sprawdzenia równowagi żebra, które dzielimy na części, odpowiadające podziałowi pasków sklepienia. Na każdy kliniec żebra działają oprócz ciężaru własnego żebra siły V i H , które to wszystkie siły dają w każdym punkcie ukośną wypadkową R_1, R_2 itd., a które wyznaczamy z wieloboku sił. W naszym przykładzie żebro wystaje na dół o 15 cm , tu więc siły H działają w połowie grubości sklepienia, a nie żebra, więc w punktach odległych od grzbietu o 15 cm . Szukamy teraz parcia poziomego, przypuszczając, że linia ciśnienia przechodzi przez środek szwów w węzłowie i w kluczu, a gdy obciążenie jest symetryczne, linia ciśnienia w kluczu jest poziomą.

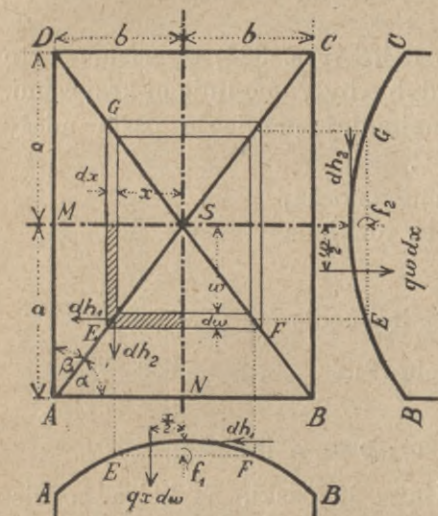
Aby wykreślić linią ciśnienia, przyjmujemy podobnie, jak przy sklepieniu kolebkowem, mO_1 tymczasowo jako parcie poziome, prowadzimy promień i kreślimy wielobok sznurowy suv , wychodząc ze środka szwu w kluczu. Wielobok ten sznurowy w ogólności nie zejdzie się z przyjętym punktem t w węzłowie, bo parcie poziome przyjęliśmy dowolnie, musimy je więc odpowiednio zmienić. Przez punkt p przecięcia się boków skrajnych wieloboku przechodzi wypadkowa wszystkich sił, działających na połowę sklepienia, jeżeli więc linia ciśnienia ma przechodzić przez t , to ostatni bok musi mieć kierunek pt . Bok ten wykreślimy aż do przecięcia się z R_7 w n . Wypadkowa sił $V_0, R_1, R_2, R_3, R_4 \dots R_6$ przechodzi przez punkt y , który łączymy z n i otrzymujemy w ten sposób nz . Postępując tak dalej, wykreślimy całą linią ciśnienia $tnzs$. Parcie poziome wyznaczymy łatwo, zrobiwszy lO równoległą do pt . O jest więc biegunem, z którego poprowadziwszy promienie, mo-

żemy kreślić przez s wielobok sznurowy, równoległy do tych promieni, a który przechodzić będzie przez t .

Widzimy, że w tym wypadku linia ciśnienia wychodzi w czwartym i piątym pasku z jądra, równowaga więc nie byłaby zapewnioną; wiemy jednak także, że prawdziwa linia ciśnienia leży powyżej i poniżej osi, podczas gdy tu cała linia ciśnienia leży poniżej osi. To wskazuje nam, że linia ciśnienia w kluczu leży powyżej środka szwu, należy więc całą linią ciśnienia przesunąć w górę tak, aby powierzchnia momentów była równa zero i otrzymamy linię xu_1t .

§. 146. Sklepienie krzyżowe nad prostokątem.

Przypuśćmy, że w prostokącie $ABCD$ (rys. 324) wykonamy sklepienie krzyżowe i dla uproszczenia przyjmijmy, że ciężar jest jednostajny $q \text{ kg/m}^2$.



Rys. 324.

Wytnijmy, jak poprzednio, płaszczyznami równoległymi do AB i AD paski EF i EG o grubości dw i dx , nazwijmy strzałki odnośnych łuków f_1 i f_2 a parcia poziome dh_1 i dh_2 , to dla równowagi ze względu na punkt E będzie

$$\frac{x}{2} \cdot qxdw = f_1 dh_1,$$

a stąd $dh_1 = \frac{qx^2 dw}{2f_1}$, (682)

a analogicznie

$$dh_2 = \frac{qw^2 dx}{2f_2}. \quad (683)$$

W punkcie E działają więc oba parcia poziome dh_1 i dh_2

jakoteż i składowe pionowe parcia $qxdw$ i $qxdw$. A zatem wypadkowa pionowa będzie $v = q(xdw + wdx)$ (684)

a więc równa połowie ciężaru przyległych pasków.

Parcia poziome dh_1 i dh_2 składają się w wypadkową dh (rys. 325). Siły dh_1 i dh_2 dadzą się rozłożyć na składowe w kierunku przekątnej dh'_1 i dh'_2 i siły prostopadłe do przekątnej dh''_1 i dh''_2 .

Z rysunku mamy $dh'_1 = dh_1 \text{ wst } \alpha$, $dh''_1 = dh_1 \text{ dost } \alpha$, $dh'_2 = dh_2 \text{ dost } \alpha$, $dh''_2 = dh_2 \text{ wst } \alpha$, a więc

$$dh = dh''_1 + dh''_2 = dh_1 \text{ dost } \alpha + dh_2 \text{ wst } \alpha.$$

Jeżeli więc wypadkowa ma mieć kierunek żebra, to składowe prostopadłe doń muszą się znosić

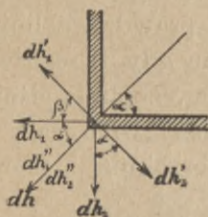
$$dh'_1 = dh_1 \text{ wst } \alpha = dh'_2 = dh_2 \text{ dost } \alpha,$$

a stąd

$$\text{st } \alpha = \frac{dh_2}{dh_1} = \frac{qw^2 dx}{2f_2} \frac{2f_1}{qx^2 dw} = \frac{w^2 dx f_1}{x^2 dw \cdot f_2},$$

a że $w = x \text{ st } \alpha$, $dw = \text{st } \alpha \cdot dx$, więc

$$\text{st } \alpha = \frac{x^2 \text{st}^2 \alpha dx \cdot f_1}{x^2 \text{st } \alpha dx \cdot f_2} = \text{st } \alpha \cdot \frac{f_1}{f_2}, \text{ stąd } f_1 = f_2.$$



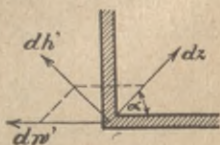
Rys. 325.

A zatem jeżeli wypadkowa parę poziomych ma być w płaszczyźnie przekątnej, to dla obu przyległych pasków muszą być strzałki takie same.

Jeżeli linie szczytów, NS i MS (rys. 324) są poziome, to musi być $f_1 = f_2$. Ale nawet gdyby były one liniami krzywymi, to wskazanem jest, aby przynajmniej przyległe paski miały tę samą strzałkę.

Jeżeli siły dh'_1 i dh'_2 się nie znoszą, lecz $dh'_1 - dh'_2 = dh'$, to siła ta rozkłada się (rys. 326) na dw' i dz .

Siła $dw' = \frac{dh'}{\text{wst } \alpha}$ działa na łęk czolowy, siła zaś $dz = dh' \text{ dot } \alpha$ na żebro *).



Rys. 326.

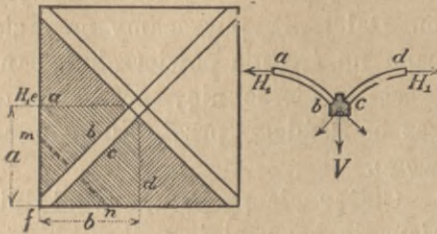
§. 147. Sklepienie krzyżowe w jedlinkę.

Dotychczas przypuszczaliśmy, że paski, na które podzieliśmy sklepienie, działają jako sklepienia kolebkowe i nie przenoszą na sąsiednie paski żadnych nateżeń ścinających.

Jeżeli jednak sklepimy warstwami ukośnemi czyli w jedlinkę (rys. 327), to wtedy inny jest rozkład sił, na co pierwszy zwrócił uwagę Wittmann. Sklepienie dzielimy znów na paski w kierunku szwów. Jeden taki pasek ab opiera się w a na drugim pasku, w b na żebrze. Szukamy najprzód

*) Por. Landsberg: Die Statik der Hochbaukonstruktionen IV, wyd. 1909, str. 349.

dla tego paska linii ciśnienia w znany sposób. Parcie poziome w a dwóch pasków symetrycznych daje wypadkową siłę poziomą H_1 , działającą w osi sklepienia na mur przyczółkowy w punkcie e .



Rys. 327.

Także wszędzie na długości ef inne paski n. p. mn , wywierają ukośne ciśnienie na mur przyczółkowy. Ciśnienia na żebro zaś składają się jako symetryczne na ciśnienie pionowe V , które działa jako obciążenie żebra. Żebra, jako sklepienia kolebkowe, badamy w znany sposób, a wykreślenie linii ciśnienia nie przedstawia tu najmniejszej trudności.

Widzimy z poprzedniego, że przy sklepieniu w jedlinkę nad kwadratem mury przyczółkowe wystawione są na ciśnienie poziome prostopadłe do muru, a żebra na ciśnienie pionowe.

Jeżeli sklepienie zbudowane jest nad prostokątem, to da się podobnie, jak w poprzednim paragrafie, dowieść, że ciśnienie na żebro tylko wtedy jest pionowe, jeśli

Jeżeli sklepienie zbudowane jest nad prostokątem, to da się podobnie, jak w poprzednim paragrafie, dowieść, że ciśnienie na żebro tylko wtedy jest pionowe, jeśli

$$\frac{f_2}{f_1} = \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{a^4}{b^4} \quad (685)$$

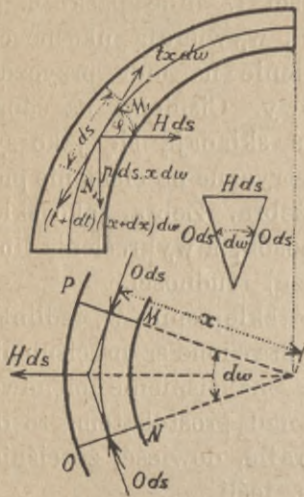
Jeśli stosunek jest inny, to stan równowagi będzie pośredni, ciśnienie na żebro będzie ukośnem, a oprócz tego pewne parcie poziome działa na mury czołowe. Zaprawa, spajająca pojedyncze paski, przyczynia się w znacznej mierze do wytworzenia rozkładu ciśnienia, którego dokładne wyznaczenie nie jest możliwem. Obciążenie żebra pionowe będzie wzrastało od klucza ku podporom wedle linii prostej.

§. 148. Sklepienie baniaste.

Sklepienie, którego podniebienie jest powierzchnią obrotową, utworzoną ruchem krzywej wypukłej około osi pionowej, nazywamy sklepieniem baniastem, banią lub kopułą (n. *Kuppelgewölbe*, fr. *voûte en dôme*, *coupole*, an. *spherical-vault*, *domical-vault*, r. купольный сводъ). Wyznaczenie sił

*) Por. Landsberg: Die Statik der Hochbau-Konstruktionen, str. 355.

wewnętrznych w bani jest trudnem; dla uproszczenia więc przyjmijmy, że obciążenie jest stałem i tak rozdzielonem na poszczególne pierścienie, że albo cały pierścień jest obciążonym, albo też wcale nieobciążonym. Dalej przypuszczamy na razie, że powierzchnia ciśnienia wpada na średnią powierzchnię bani, to jest powierzchnię, przechodzącą przez oś każdego przekroju południkowego.



Rys. 328.

Ciężar własny bani, a względnie obciążenie, sprawiają odkształcenie, pierścienie poszczególne zwąężają się skutkiem ciśnień, powstałych w pierścieniach w kierunku obwodu koła, które nazywamy z tego powodu ciśnieniami obwodowemi (n. *Ringspannung*) (rys. 328). Tu więc mamy oprócz ciśnień w kierunku południka, jak przy sklepieniu kolebkowem, także ciśnienia obwodowe.

Początek spóórzędnych przyjmijmy w kluczu bani *S* (rys. 329) a oś pionową bani za oś *Y*, prostopadłą do niej *SX* za oś *X*.

Zbadajmy teraz wycinek kuli *MNOP* (rys. 328). Jeżeli nateżenie stycznne w kierunku południka nazwiemy *t*, to gdy długość łuku wynosi $ds = x dw$, siła na *PMNO* wynosi $t x dw$.

Na *PM* i *ON* działają ciśnienia obwodowe na jednostkę *o*, więc na *ds* ods . Oprócz tego działa obciążenie $p ds \cdot x \cdot dw$. Z rysunku widzimy, że

$$H ds = 2 ods \operatorname{wst} \frac{dw}{2},$$

a że *w* jest bardzo małym, więc

$$\operatorname{wst} \frac{dw}{2} = \frac{dw}{2},$$

zatem $H ds = ods \cdot dw$ (686)

Dla równowagi mamy:

$$t x dw \operatorname{dost} \varphi - (t + dt)(x + dx) dw \operatorname{dost} (\varphi + d\varphi) + ods dw = 0.$$



Rys. 329.

Opuściwszy bardzo małe drugiego i trzeciego stopnia, otrzymamy $tx \text{ wst } \varphi d\varphi - dtx \text{ dost } \varphi - tdx \text{ dost } \varphi - ods = 0$,
 $d(tx \text{ dost } \varphi) = ods$ 687)

Dalej dla równowagi w kierunku pionowym
 $p \cdot ds \cdot x \cdot dw - tx \cdot dw \text{ wst } \varphi + (t + dt)(x + dx) \text{ wst } (\varphi + d\varphi) = 0$,
 a stąd, zważywszy, że $\text{wst } (\varphi + d\varphi) = \text{wst } \varphi + \text{dost } \varphi d\varphi$, opuściwszy nieskończenie małe wyższych rzędów, otrzymamy
 $pxds - tdx \text{ wst } \varphi - xdt \text{ wst } \varphi - tx \text{ dost } \varphi d\varphi = 0$
 wreszcie $-pxds = +d(tx \text{ wst } \varphi)$ 688)

Równ. 687) i 688) wskazują związek sił t i R dla dowolnych obciążeń i powierzchni.

§. 149. Bania kulista.

Jeżeli bania jest kulistą, to x i ds należy wprowadzić dla koła. Wedle rys. 329 jest $x = r \text{ wst } \varphi$, $ds = r d\varphi$. Jeżeli jeszcze przyjmiemy p dla całej kuli stałe, to z 688) wynika

$$-pr \text{ wst } \varphi \cdot r d\varphi = d(tr \text{ wst}^2 \varphi), \text{ a stąd}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d(tr \text{ wst}^2 \varphi) = -pr^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \text{wst } \varphi d\varphi.$$

Jeżeli zaczynamy od punktu S , to $\varphi_0 = 0$, więc

$$tr \text{ wst}^2 \varphi = pr^2 \text{ dost } \tau \Big|_0^{\varphi} = -pr^2(1 - \text{dost } \varphi), \text{ stąd}$$

$$t = \frac{pr(1 - \text{dost } \varphi)}{\text{wst}^2 \varphi} = -\frac{pr}{1 + \text{dost } \varphi}. \quad 689)$$

Jeżeli wstawimy tę wartość w równ. 687), to otrzymamy

$$ord \varphi = d\left(-\frac{pr}{1 + \text{dost } \varphi} r \text{ wst } \varphi \text{ dost } \varphi\right) = -pr^2 d \frac{\text{wst } \varphi \text{ dost } \varphi}{1 + \text{dost } \varphi},$$

$$\text{zatem } o = -pr \frac{\text{dost } 2 \varphi + \text{dost}^3 \varphi}{(1 + \text{dost } \varphi)^2}. \quad 690)$$

W kluczu $\varphi = 0$, więc

$$t_0 = -\frac{pr}{2}, \quad o = -\frac{pr}{2}. \quad 691)$$

Zatem w kluczu jest ciśnienie jednostajne na wszystkie strony równe $\frac{pr}{2}$ na jednostkę powierzchni.

Dla półkuli jest na równiku $\varphi = \frac{\pi}{2}$, więc

$$\frac{t\pi}{2} = -pr, \quad \frac{o\pi}{2} = +pr. \quad 692)$$

Zatem na równiku jest ciśnienie południkowe dwa razy większem, niż w kluczu, zaś nateżenie obwodowe jest dodatnie, rozciąganie, co do wielkości równe nateżeniu południkowemu.

Dla pewnego kąta φ_1 staje się $\sigma=0$. Z równ. 690) otrzymamy $0 = -pr \frac{\text{dost } 2 \varphi_1 + \text{dost }^3 \varphi_1}{1 + \text{dost } \varphi_1^3}$, a stąd $\text{dost } \varphi_1 = 0,618$

$$\varphi_1 = 51^\circ 50' 693)$$

A zatem dla kątów φ mniejszych, niż φ_1 , powstają ciśnienia obwodowe, dla większych, niż φ_1 , ciągnienia.

Powyższe wyniki dadzą się więc zastosować tylko wtedy, gdy ciągnienia tak wielkie są możliwe. Jeżeli mamy do czynienia z banią murowaną z kamienia lub cegły, nie możemy dopuścić wcale ciągnienia, zatem albo ciągnienie musimy znieść pierścieniem żelaznym albo też pogrubić przekrój bani tak, aby linia ciśnienia w dolnej części, nie wpadając wprawdzie w oś, jednak nie wychodziła z jądra przekroju.

§. 150. Wykreślne wyznaczenie nateżeń w bani.

Na powyższej podstawie wyznaczmy teraz wykreślnie linię ciśnienia i nateżenie obwodowe w bani.

Jeżeli wytniemy z bani wycinek płaszczyznami pionowymi, przechodzącymi przez oś bani, a odchyleni o bardzo mały kąt α , to siły obwodowe O (rys. 330), działające z obu stron, dają wypadkową H . Wielkość jej otrzymamy z wieloboku sił, z którego widzimy, że



$$H = 2 O \text{ wst } \frac{\alpha}{2} 694)$$

Z równania tego wyznaczmy α , dla którego $H=O$, a mianowicie

$$2 \text{ wst } \frac{\alpha}{2} = 1, \text{ a stąd } \alpha = 60^\circ.$$

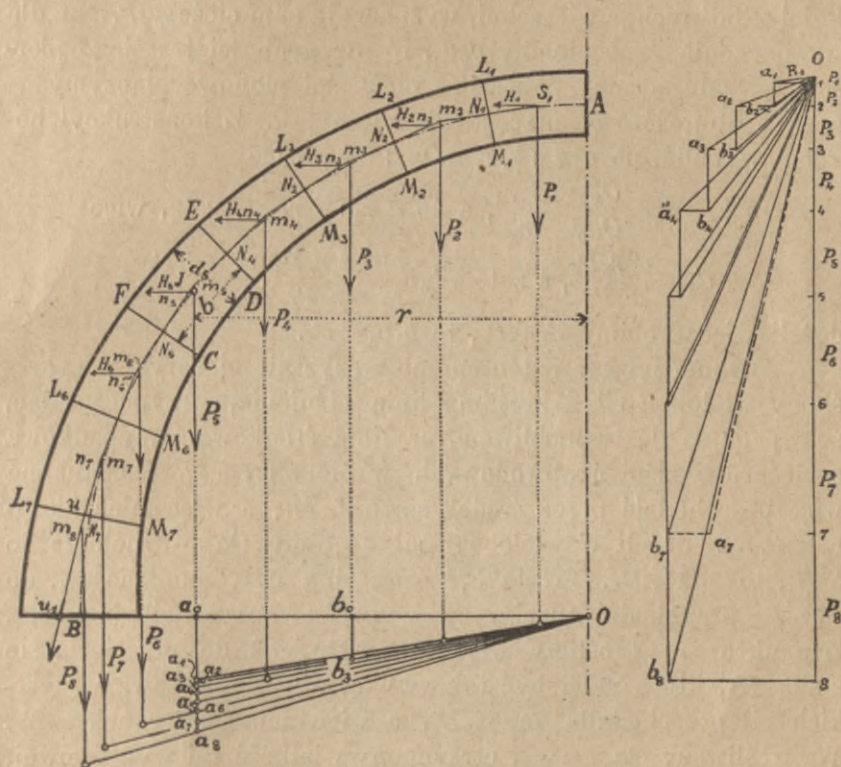
Jeżeli więc obliczać będziemy ciężary wycinka dla $\frac{1}{6}$ okręgu koła,

to H , które z konstrukcyi otrzymamy, będzie równem O , ciśnieniu obwodowemu.

Na rysunku 331 wykreśliliśmy w przybliżeniu linię ciśnienia w następujący sposób. Szwami, stojącymi prostopadle na

Rys. 330.

linii środkowej, a których oddalenia b , mierzone na tej linii, są równe, podzielimy najprzód połowę przekroju bani na 8 części. Objętość pierścienia, utworzonego ruchem obrotowym powierzchni $CDEF$ około osi AO , jest według twierdzenia



Rys. 331.

Guldina równą powierzchni $CDEF$, pomnożonej przez drogę środka ciężkości I , a więc, gdy grubość pierścienia $=d$, a odległość punktu I od osi $=r$, to objętość równa się $bd2r\pi$.

Ciężar $\frac{1}{8}$ pierścienia będzie więc:

$$P_5 = \frac{1}{8} \gamma bd 2r\pi = \frac{\gamma bdr\pi}{3}, \quad \dots \quad 695)$$

jeżeli γ jest ciężarem jednostki sześcienniej.

Podobnie możemy obliczyć wszystkie inne ciężary, albo możemy też resztę ciężarów wyznaczyć wykreślnie w następujący

sposób. Z równania 695) widzimy, że ciężary P są proporcjonalne dla stałego b do d i r . Przyjmijmy taką podziałkę sił, ażeby $d_5 = a_0 a_5 = P_5$ i odetnijmy od a_0 wszystkie długości d na prostej $a_0 a_5$. Tak otrzymane punkty połączymy z O , to punkty przecięcia się z pionowemi, poprowadzonymi ze środków ciężkości odnośnych powierzchni, wyznaczają nam ciężary P . Np. dla wyznaczenia P_3 odcinamy $a_0 a_3$, równe grubości trzeciego pierścienia, spuszczaemy ze środka ciężkości pionową, łączymy a_3 z O , a długość $b_0 b_3$ przedstawia ciężar P_3 . Z konstrukcyi bowiem wypada, że $a_0 a_3 : b_0 b_3 = Oa_0 : Ob_0$, więc

$$b_0 b_3 = a_0 a_3 \frac{Ob_0}{Oa_0} = \frac{d_3 r_3}{r_5}, \text{ a że } d_3 r_3 : d_5 r_5 = P_3 : P_5, \text{ więc}$$

$$d_3 = \frac{d_5 r_5 P_3}{r_3 P_5}, \text{ a zatem } b_0 b_3 = \frac{d_5 r_5 P_3}{r_3 P_5} \cdot \frac{r_3}{r_5} = \frac{d_5 P_3}{P_5}.$$

Jeżeli więc zrobimy $d_5 = P_5$, to $b_0 b_3 = P_3$.

Wyznaczywszy w ten sposób wszystkie ciężary P , wykreśliamy wielobok sił i kreślimy linią ciśnienia, przypuszczając, że wpada, o ile to możliwem, na linią środkową. Wypadkowa z ciężaru i ciśnień obwodowych w pierwszym pierścieniu ma więc przechodzić przez środek szwu $L_1 M_1$, a więc mieć kierunek $S_1 N_1$. Jeżeli w wieloboku sił zrobimy Oa_1 równoległe do $S_1 N_1$, to $a_1 l = H_1$. Prosta $S_1 N_1$ przecina P_2 w punkcie m_2 , do siły R_1 przychodzi tu siła P_2 , wypadkowa tych sił jest Ob_2 . Z punktu m_2 kreślimy więc $m_2 n_2 \parallel Ob_2$ aż do przecięcia się z siłą H_2 , która musi być tak wielką, aby wypadkowa wszystkich sił przechodziła przez N_2 , a więc miała kierunek $n_2 N_2$. Wykreśliwszy $Oa_2 \parallel n_2 N_2$, otrzymamy wielkość tej wypadkowej, przyczem $H_2 = b_2 a_2$. Podobnie postępujemy dalej, $n_2 N_2$ przedłużamy do siły P_3 do punktu m_3 , kreślimy $m_3 n_3 \parallel Ob_3$ i rysujemy $n_3 N_3$ aż do m_4 . W wieloboku sił robimy $Oa_3 \parallel n_3 N_3$ a $H_3 = b_3 a_3$. W ten sam sposób postępujemy dopóty, aż z konstrukcyi wypadłaby siła H ujemna, jak na przykład tu $H_7 = -b_7 a_7$. Ponieważ jednak, jeżeli na wytrzymałość zaprawy zważać nie będziemy, mur nie może pracować na ciągnienie, więc przypuszczamy, że w tym pierścieniu $H_7 = 0$, a zatem, że niema tu żadnych ciśnień obwodowych. Wskutek tego jednak wypadkowa $R_7 = Ob_7$, a nie Oa_7 , zaś linia ciśnienia oddala się od linii środkowej, gdyż zrobiwszy $m_7 u \parallel Ob_7$, nie przetniemy szwu $L_7 M_7$ we środku, lecz w punkcie u obok środka N_7 . Prosta $m_7 u$ prze-

dłużamy aż do m_8 , punktu przecięcia się z P_8 . I tu także ciśnienie obwodowe przypuszczamy równe zeru, a stąd otrzymujemy $R_8 = Ob_8$, a ostatni bok wieloboku sznurowego $m_8 u_1 // Ob_8$. Jeżeli u_1 leży w średniej trzeciej części sklepienia, jeżeli wypadkowa na jakikolwiek szew nie jest więcej odchyloną od prostopadłej na szew, niż kąt tarcia wynosi, a ciśnienie nie przekracza dozwolonej granicy, wtedy równowaga jest zapewnioną i w całej bani panuje tylko ciśnienie. Jeżeli zaś linia ciśnienia wychodziła ze średniej trzeciej części przekroju, to albo musielibyśmy pogrubić banię w tem miejscu lub też obręczami żelaznymi znieść ciągnięcie obwodowe, któreby w dolnej części bani powstało, gdyby linia ciśnienia i tam nie zbaczała od osi. Jeżeli ciężary obliczaliśmy wedle 695), to otrzymane H dają nam wprost O , ciśnienia obwodowe.

W rysunku 331. przyjęliśmy grubość bani, wzrastającą ku dołowi, gdybyśmy przyjęli ją równą, linia ciśnienia wypadłaby o wiele niekorzystniej, a punkt, w którym ciśnienia obwodowe stają się równe zeru, wypadłby wyżej. Dlatego należy przyjmować grubość sklepienia w kluczu małą i zwiększać ją ku dołowi.

§. 151. Sklepienie klasztorne.

Sklepienie, powstające z przecięcia się dwóch sklepień kolebkowych o równej strzałce, których podniebienia w żyłce tworzą kąt wklęsły, nazywamy sklepieniem klasztorne (n. *Klostergewölbe*, fr. *voûte cloisonée*, *voûte en arc de cloiture*, an. *croced vault*).

Obliczenie dokładne sklepienia takiego jest bardzo trudnem i dotychczas zadanie to pozostało nierozwiązane. Podamy tu według Foeppla tylko niektóre wskazówki, jakby można w przybliżony sposób wykreślić linię ciśnienia w sklepieniu klasztorne. Przypuściwszy sklepienie założone na wieloboku regularnym, symetryczne i symetrycznie obciążone, dojdziemy do wniosku, że z powodu symetrii w płaszczyznach żył powstają tylko nateżenia normalne, więc ponieważ płaszczyzny te są pionowe, nateżenia będą poziome. Ciśnienia te, które działają poziomo na części sklepienia klasztorne w żyłkach, nazywamy ciśnieniami żyłowemi (n. *Gratspannung*). Ciśnienia te, działające na jedną część sklepienia klasztorne, ogra-

niczoną dwiema żyłami, składają się, a wypadkowa działa w płaszczyźnie ją połowiącej.

Widzimy więc, że teoria sklepień klasztornych podobną jest do teorii sklepień baniastych i rzeczywiście bania jest właściwie sklepieniem klasztorne, założonem na wieloboku o nieskończonej ilości boków czyli na kole. Ciśnienia żyłowe odpowiadają ciśnieniom obwodowym w bani, ta tylko zachodzi tu różnica, że, gdy tam ciśnienia obwodowe były w tym samym pierścieniu stałe, tu nie wiemy dokładnie, jak się ciśnienia żyłowe rozdzielają w kierunku poziomym.

W płaszczyźnie, połowiącej części sklepienia, zawarte między dwiema żyłami, kreślimy więc zupełnie w ten sam sposób, jak dla bani, linią ciśnienia, przyjmując z początku, że linia ciśnienia wpada w oś, potem, aby uniknąć ciągnięcia, odступujemy od tego przypuszczenia i przyjmujemy nateżenia żyłowe, równe zeru.

Linia ta ciśnienia nie powinna wychodzić z jądra i za-
dość czynić i dwom drugim warunkom równowagi.

XII. Przyczółki, filary i kominy.

§. 152. Linia ciśnienia.

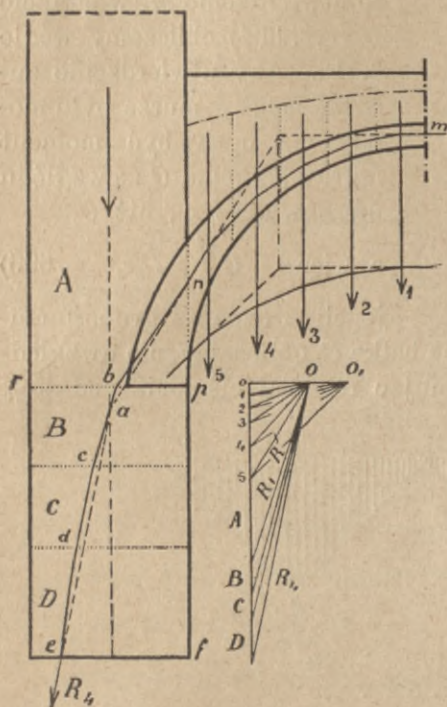
Budowlę, na której opiera się sklepienie lub jakakolwiek inna belka, nazywamy w budowie mostów przyczółkiem (n. *Widerlager*, fr. *culée*, *abutement*, an. *land pier*, r. *веперовоѣ ыцоѣ*). Jeżeli na budowli takiej opierają się z dwóch stron sklepienia lub inne belki, nazywamy ją filarem (n. *Pfeiler*, fr. *pilier*, *pile*, an. *pier*, r. *столбъ*). W budownictwie często opiera się sklepienie o ścianę murowaną, która tu zastępuje miejsce przyczółka. Warunki równowagi przyczółka, filaru kamiennego lub ściany są te same, co sklepienia; dla zbadania więc równowagi najlepiej wykreślić linią ciśnienia.

Na rysunku 332, wykreśliłiśmy linią ciśnienia w ścianie w następnym sposob. Najprzód wyznaczyliśmy w zwykły sposób przybliżony linią ciśnienia *mn* w sklepieniu i otrzymaliśmy parcie ukośne *R*, działające w punkcie *n* na ścianę. Następnie podzieliliśmy ścianę na warstwy poziome i obliczyli ciężary

warstw *A*, *B*, *C* i *D*. Parcie *R* przecina się z kierunkiem ciężaru *A* w punkcie *a* i daje wypadkową R_1 , która przecina szew *pr* w punkcie *b*. Z siłą R_1 składamy teraz ciężar *B*, otrzymujemy R_2 , którą to siła działa

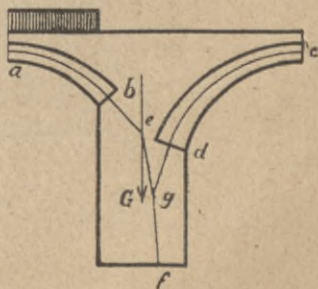
na następny szew w *c*. Podobnie otrzymujemy siły R_3 i R_4 , działające w punktach *d* i *e*. Punkty te połączone dają linią ciśnienia *bcde*, która, jak widzimy, w tym wypadku wychodzi z trzeciej części przekroju, w krawędzi *f* powstanie więc ciągnięcie. Chcąc temu zapobiec, musielibyśmy powiększyć grubość ściany u podstawy.

Podobnie postępujemy w celu wykreślenia linii ciśnienia w filarze (rys. 333). Jeżeli oba sklepienia, opierające się na filarze, są równe i równo obciążone, to parcia ukośne, składając się, dają wypadkową pionową, filar wtedy obciążo-



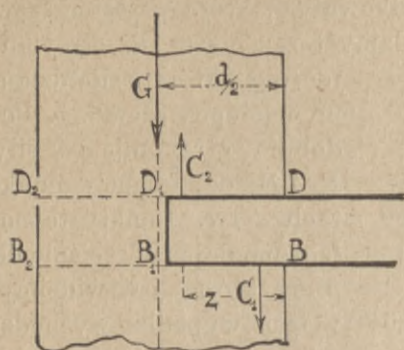
Rys. 332.

nym jest tylko pionowo. Jeżeli zaś sklepienia są nierówne, leżą nie w tej samej wysokości, lub są nareszcie nierówno obciążone, jak tu, to musimy wykreślić dla obu sklepień osobno linie ciśnienia *ab* i *cd*, mur podzielić na warstwy poziome i składać ciśnienia ukośne z ciężarami warstw muru, jak poprzednio. W ten sposób otrzymalibyśmy linią ciśnienia *bef*, która, jak widzimy, nie wychodzi tutaj z jądra przekroju.



Rys. 333.

§. 153. Wmurowanie belki wspornikowej.



Rys. 334 a.

Jeżeli belka jest jednym końcem utwierdzoną w ścianie, to utwierdzenie M_0 w punkcie B (rys. 334) obliczamy wedle §. 13. Aby utwierdzenie zupełne belki w murze było możliwem, musi być moment muru nad belką G ze względu na B większym, niż C_2z

a więc $G \frac{d}{2} > C_2z$, . 696)

jeżeli d oznacza grubość muru.

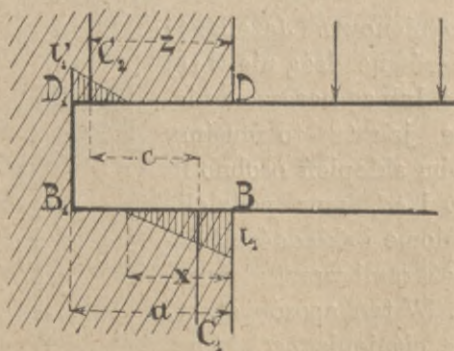
Ciężar muru, działającego na belkę G , obliczamy, nie uwzględniając spójności muru i przyjmując rozdział ciśnienia pod 45°

(rys. 334 a).



Rys. 334 b.

Możemy teraz przyjąć w przybliżeniu (rys. 335)



Rys. 335.

$M_0 = C_2c = \frac{2}{3} C_2a$, więc $C_2 = \frac{3 M_0}{2 a}$ 697)

Jeżeli siła poprzeczna w punkcie B belki jest Q , to

$$C_1 = C_2 + Q \quad \dots \quad 698)$$

Wyznaczywszy w ten sposób C_1 i C_2 , możemy obliczyć natężenie, bo $C_1 = \tau_1 \frac{bx}{2}$, $C_2 = \tau_1' \frac{b(a-x)}{2}$, więc $\tau_1 : \tau_1' = x : (a-x)$.

$$\begin{aligned} \text{Mamy więc } \tau_1 \frac{bx}{2} &= \tau_1' \frac{b(a-x)}{2} + Q, \text{ albo } \frac{\tau_1}{\tau_1'} \frac{x}{a-x} = 1 + \frac{2Q}{b\tau_1'(a-x)} = \\ &= \frac{x^2}{(a-x)^2}, \text{ a stąd } \frac{x^2}{(a-x)^2} = 1 + \frac{2aQ}{3M_0}. \end{aligned}$$

$$\text{Nazwijmy } m = \sqrt{1 + \frac{2aQ}{3M_0}}, \quad \dots \quad 699)$$

$$\text{to otrzymamy} \quad x = \frac{am}{1+m} \quad \dots \quad 700)$$

$$\begin{aligned} \text{Dalej otrzymamy} \quad \left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{2C_1}{bx} = \frac{2}{bx} \left(\frac{3M_0}{2a} + Q \right) \\ \tau_1' &= \frac{2C_2}{b(a-x)} = \frac{3M_0}{ab(a-x)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 701)$$

To są jednak tylko natężenia wskutek utwierdzenia belki. Oprócz tego powstają jeszcze natężenia wskutek siły G (rys. 334a). Na przekrój BB_2 działa siła G i C_2 czyli moment $C_2 \left(\frac{d}{2} - z \right) = M'$ i siła podłużna $N' = G - C_2$.

$$\text{Mamy dalej } z = x + \frac{2}{3}(a-x) = \frac{x+2a}{3},$$

$$M' = \frac{3M_0}{2a} \left(\frac{d}{2} - \frac{x+2a}{3} \right) = \frac{M_0}{4a} (3d - 4a - 2x) \quad \dots \quad 702)$$

$$\text{i} \quad N' = G - \frac{3M_0}{2a} \quad \dots \quad 703)$$

a natężenia włókien skrajnych w B_2 i B

$$\begin{aligned} \text{w } B \quad \tau' &= \frac{N'}{bd} - \frac{6M'}{bd^2} \\ \text{w } B^2 \quad \tau'' &= \frac{N'}{bd} + \frac{6M'}{bd^2} \end{aligned} \quad \dots \quad 704)$$

Największe ciśnienie będzie w B , mianowicie

$$\tau = \tau_1 + \tau' \quad \dots \quad 705)$$

Gdyby to ciśnienie było na mur za wielkiem, trzeba by użyć podkładek żelaznych, któreby je rozłożyły na większą szerokość b_1 .

Przykład. Przypuśćmy, że obliczyliśmy w danym wypadku moment w B i że $M_0 = 1,2 tm$, $Q = 1,5 t$ a ciężar muru, nad belką spoczywającego, $G = 10 t$. Jeżeli grubość muru wynosi $60 cm$, a belka sięga przez całą grubość, to wedle 697)

$$C_2 = \frac{3 \cdot 120000}{2 \cdot 60} = 3000 kg,$$

a $C_1 = C_2 + Q = 3000 + 1500 = 4500 kg$. Z równ. 700) otrzymamy dla

$$m = \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 60 \cdot 1500}{3 \cdot 120000}} = 1,225, \quad x = \frac{60 \cdot 1,225}{1 + 1,225} = 33 cm,$$

$$\text{a wreszcie } z = \frac{33 + 2 \cdot 60}{3} = 51 cm.$$

Jeżeli przyjmiemy dla muru ceglanego na cemencie $\tau = 12 kg/cm^2$, to wedle 619)

$$b = \frac{2 \cdot 4500}{12 \cdot 33} = 22,8 cm, \text{ zamiast czego przyjmiemy } b = 30 cm.$$

Natężenia przeto z powodu utwierdzenia wynoszą

$$\text{w } B \quad \tau_1 = \frac{2 \cdot 4500}{30 \cdot 33} = 9,5 kg/cm^2,$$

$$\text{a w } B_2 \quad \tau_2 = \frac{2 \cdot 3000}{20 \cdot 27} = 7,4 kg/cm^2.$$

Zbadać jeszcze wypadka, czy zamurowanie obejdzie się bez zakotwienia. Wedle równ. 696) winno być $G \frac{d}{2} > C_2 z$. Jakoż w naszym przypadku $10 \cdot 0,30 - 3 \cdot 0,51 = 1,47 tm$. Ta wartość jest dodatnia i przedstawia dostateczną pewność, że mur nie zostanie wyrwany.

Do natężeń, z powodu utwierdzenia powstałych, trzeba dodać pochodzące od sił G i C_2 . Wedle równ. 702)

$$M' = 3000(30 - 51) = -63000 kgcm,$$

siła podłużna $N' = G - C_2 = 10000 - 3000 = 7000 kg$, a wreszcie natężenie włókien skrajnych wedle równ. 704)

$$\text{w } B \dots \tau' = \frac{7000}{30 \cdot 60} + \frac{6 \cdot 63000}{30 \cdot 60^2} = 3,9 + 3,5 = 7,4 kg/cm^2,$$

$$\text{w } B_2 \dots \tau'' = 3,9 - 3,5 = 0,4 kg/cm^2.$$

Jeśli te wartości dodamy do powyższych, z powodu utwierdzenia samego wywołanych, otrzymamy natężenie sumaryczne

$$\text{w } B \dots \tau_B = \tau_1 + \tau' = 9,5 + 7,4 = 16,9 kg/cm^2$$

$$\text{zaś w } B_2 \dots \tau_{B_2} = \tau_2 + \tau'' = 7,4 + 0,4 = 7,8 kg/cm^2.$$

Ciśnienie w B wypadło za duże. Z tego wynika, że trzeba użyć szerszego ciosu, a więc $b = 45 cm$.

$$\text{Jakoż wtedy } \tau_B = 16,9 \cdot \frac{30}{45} = 11,3 kg/cm^2.$$

§. 154. Linie wyznacznice przekroju prostokątnego.

Gdy na przyczółek lub filar działa siła ukośna, środek ciśnienia, jak wiemy, oddala się od środka przekroju; zastoso-

MD i ND są trójkątami, środek ciężkości leży w jednej trzeciej wysokości, a więc gdy mamy dane p , otrzymamy oś obojętną, kreśląc pm i pn , robiąc $pm=2t$ i $pn=2u$ i łącząc m i n . Odwrotnie jeżeli mamy oś obojętną MN , a chodzi o wyznaczenie środka ciśnienia, to zrobimy $M_1D=\frac{1}{3}MD$ i połączmy M_1 z N .

Na linii M_1N leżą środki ciężkości przekrojów równoległych do MD . Środek ciśnienia leży więc w p na przecięciu się prostych NM_1 i OD . Możemy też udowodnić, że $Op=pD$, bo $Dp=\sqrt{u^2+t^2}$, a $Op=\frac{pR}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2t)^2+(2u)^2}=\sqrt{u^2+t^2}=Dp$. Z powodu, że $Opn \infty ODN$, jest $DN:2u=OD:Op$, więc

$$DN=\frac{2u \cdot OD}{Op}=4u,$$

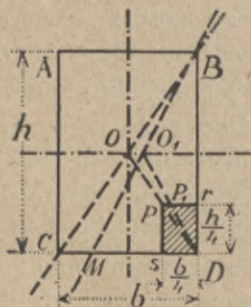
podobnie mamy też $MD=4t$.

Środek ciężkości trójkąta MND leży w S w prostej OD w odległości $\frac{OD}{3}$ od MN , nazwijmy v_0 natężenie w środku ciężkości, to według równania 409)

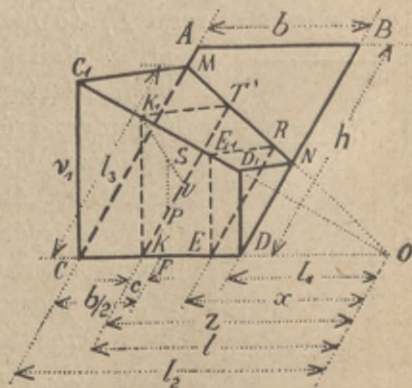
$$v_0=\frac{P}{\frac{1}{2}4u \cdot 4t}=\frac{P}{8ut}, \text{ a więc natężenie w } D$$

$$v_1=\frac{3P}{8ut} \dots \dots \dots 706)$$

Chcąc wyznaczyć linie wyznaczące dla tego przypadku, zastanowimy się nad wypadkiem granicznym, gdy obojętna ma



Rys. 337.



Rys. 338.

położenie CB (rys. 337). Łatwo znajdziemy odnośny środek

ciśnienia w punkcie p , robiąc $Op = pD$. Jeżeli obojętna obraca się około B i przyjdzie w położenie BM , to p_1 znajdziemy, połowiąc MB , a potem połowiąc O_1D . Z konstrukcyi tej wynika, że gdy obojętna obraca się około B z położenia BC aż do BD , to środek ciśnienia porusza się po linii $pr \parallel CD$, przy czem $Dr = \frac{h}{4}$. Jeżeli podobnie obojętna obraca się około C , to p porusza się na $ps \parallel BD$. Takie same prostokąty otrzymamy we wszystkich rogach przekroju, w jednym z nich leżeć musi środek ciśnienia, jeśli obojętna ma odcinać trójkąt.

2. Oś obojętna odcina czworobok (rys. 338).

Tu bryła nateżeń jest ostrosłupem ściętym, którego wierzchołkiem jest punkt O . Przetnijmy ją płaszczyzną pionową równoległą do AC w odległości x od O , a otrzymamy trójkąt EE_1R , którego powierzchnia

$$F = \frac{1}{2} EE_1 \cdot ER = \frac{1}{2} \frac{v_1 x}{l_2} \cdot \frac{l_3 x}{l_2} = \frac{v_1 l_3 x^2}{2 l_2^2}.$$

Objętość ostrosłupa ściętego jest więc

$$P = \frac{v_1 l_3}{2 l_2^2} \int_{l_1}^{l_2} x^2 dx = \frac{v_1 l_3 (l_2^3 - l_1^3)}{6 l_2^2}.$$

a stąd

$$v_1 = \frac{6 P l_2^2}{l_3 (l_2^3 - l_1^3)}. \quad \dots \quad 707)$$

Jeżeli przez środek ciężkości bryły nateżeń S poprowadzimy płaszczyznę pionową, równoległą do AC , to możemy napisać

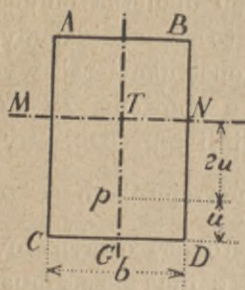
$$\frac{l v_1 l_3 (l_2^3 - l_1^3)}{6 l^2} = \int_{l_1}^{l_2} \frac{v_1 l_3 x^3}{2 l_2^2} dx, \text{ a stąd}$$

$$l = \frac{3}{4} \frac{l_2^4 - l_1^4}{l_2^3 - l_1^3}. \quad \dots \quad 708)$$

Długość KP łatwo wyznaczymy, gdyż $KU = \frac{1}{2} KT$, a $UP = \frac{1}{3} KU$, więc

$$KP = \frac{KT}{3} = \frac{l_3 l}{3 l_2}. \quad \dots \quad 709)$$

Dla danej obojętnej MN mamy też dane l_1 , l_2 i l_3 , możemy więc łatwo wyznaczyć środek ciśnienia P . W odwrotnym wypadku, t. j. gdy dany jest środek ciśnienia P , więc i długość $KF = c$, najlepiej będzie przyjąć dowolnie O , a więc l_1 i l_2 , a stąd obliczyć według równ. 708) l . Po niewielu próbach znaj-



Rys. 339.

dziemy prawdziwy punkt O , dla którego l odpowiada danemu punktowi P . Długość l_3 obliczamy potem z równ. 709), a v_1 z równ. 707). Można też punkt O wprost wyznaczyć: Barkhausen otrzymuje wzór następujący

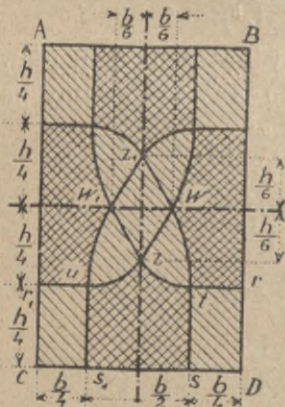
$$z = \frac{b}{12c} (b + \sqrt{b^2 - 12c}) \quad . \quad . \quad 710)$$

Gdy $c=0$, tj. gdy P leży w osi głównej (rys. 339), $z=\infty$, a więc obojętna jest równoległa do CD , a według 709) $GP = \frac{1}{3} GT$, wtedy największe natężenie w $CD = v_1$. Bryła natężeń jest wtedy graniastosłupem trójkątnym, więc $P = v_1 b \cdot \frac{1}{2} GT = \frac{v_1 3ub}{2}$; stąd

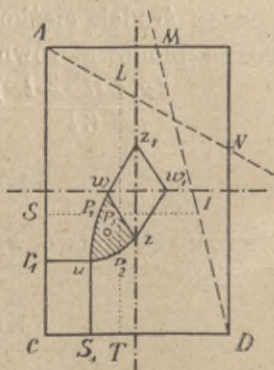
$$v_1 = \frac{2P}{3ub} \quad . \quad . \quad . \quad 711)$$

Widzimy więc, że w tym wypadku najw. ciśnienie v_1 jest dwa razy tak wielkie, niżby było, gdyby P się rozdzieliło równo na powierzchnię $MNDC = 3ub$.

Linie wyznacznice, które możemy wyznaczyć podobnie, jak poprzednio, są w tym wypadku krzywe uz i zt i proste ts , ss ,



Rys. 340.

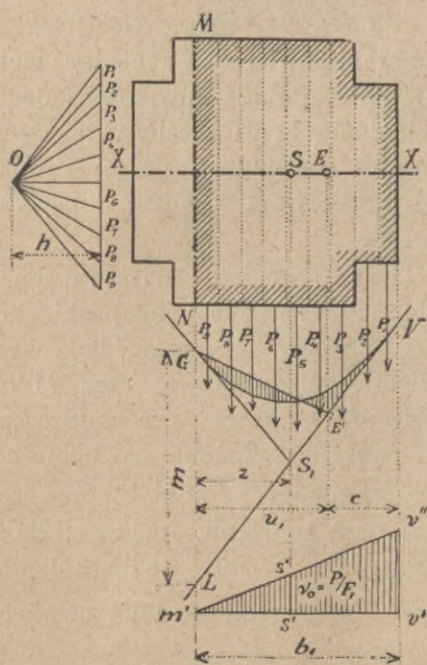


Rys. 341.

i $s_1 u$ (rys. 340), pięcioboków takich krzywolinijnych otrzymamy cztery przy wszystkich bokach przekroju. Krzywe uz i zt są styczne do poziomych $r_1 u$, względnie rt i linii jędrnych $w_1 z$, względnie wz .

3. Oś obojętna odcina pięciobok. Środek ciśnienia znajduje się wtedy w trójkątach krzywoliniwnych uwz , twz itd. (rys. 341), które nam jeszcze z całego przekroju pozostały. Dokładne wyznaczenie nateżeń jest w tym wypadku trudne, w przybliżeniu jednak licząc, postępujemy w ten sposób. Rozkładamy siłę P , działającą w punkcie P na dwie siły P_1 i P_2 , działające w liniach wyznacznych, przyczem $P_1, P_2 \parallel wz$. Ponieważ P_1 leży na linii wyznacznej, więc oś obojętna musi być w położeniu granicznym między przypadkiem, gdy odcina czworobok lub pięciobok, a więc przechodzi przez wierzchołek D . Zastosowując wyniki otrzymane w poprzednim przypadku (równ. 709), zrobimy $P_1 I \parallel CD$ i $SI = 3SP_1$, więc DM jest osią obojętną dla siły P_2 . Największe nateżenie będzie tu oczywiście w wierzchołku C , obliczamy je dla siły P_1 i P_2 osobno według równania 707) i dodajemy wyniki. Dokładniej wyznaczyć możemy nateżenia sposobem ogólnym, który później podamy.

§. 155. Przekrój nieregularny. Siła działa w osi głównej.



Rys. 342.

Przypuścimy, że siła działa w osi głównej XX (rys. 342) w E , to oś obojętna MN będzie prostopadłą do tej osi. Wtedy mamy analogicznie do równ. 407 i 410)

$P = \iint v d^2 F = a \iint u d^2 F = a S$,
i $Pu_1 = a I_z$, gdy S_z i I_z oznaczają moment statyczny i bezwładności skutecznej (tu ciśnionej) powierzchni przekroju ze względu na oś obojętną. Stąd wynika

$$u_1 = \frac{I_z}{S_z} \quad . \quad . \quad 712)$$

Z rysunku widzimy, że dla danego c możemy wyznaczyć odstęp osi obojętnej $b_1 = c + u_1 = c + \frac{I_z}{S_z}$.

Jeżeli jednak przekrój jest nieregularny, to wyznaczenie I_c i S_c jako całek przedstawia znaczne trudności i zwykle uciekamy się wtedy sposobu wykreslnego.

Przypuśćmy, że mamy dane położenie osi obojętnej MN . Podzielmy powierzchnię skuteczną (tu kreskowaną) na paski, oznaczmy powierzchnie ich, wykreślmy wielobok sił i dla dowolnego bieguna O wielobok sznurowy. Jeżeli przedłużymy prawy bok skrajny do pionowej przez MN , to wedle równ. 5) moment statyczny powierzchni skutecznej ze względu na MN jest

$$S_c = m \cdot h = F_c \cdot z \dots \dots \dots 713)$$

zaś moment bezwładności

$$I_c = 2h \text{ pow. } G 9, 8, 7 \dots 1 L = 2h \cdot F_1 \dots \dots 714)$$

Wstawmy w równ. 712) wartości za I_c i S_c , to otrzymamy

$$u_1 = \frac{2h F_1}{m h} = \frac{2 F_1}{m}$$

a stąd

$$F_1 = \frac{1}{2} m u_1 \dots \dots \dots 715)$$

Ale z rysunku widzimy, że $GE'L = \frac{1}{2} m u_1$, więc $GE'L = F_1 = \text{pow. } G, 9, 8, 7 \dots 1 L$. A zatem powierzchnia między wielobokiem sznurowym a prostymi GE' i $E'V$ jest równa zeru. Jeżeli więc chcemy znaleźć środek ciśnienia E , to kreślimy taką prostą GE' , aby powierzchnia rzeczona, tu kreskowana, była równa zeru czyli, żeby powierzchnie kreskowane poniżej i powyżej GG' były sobie równe.

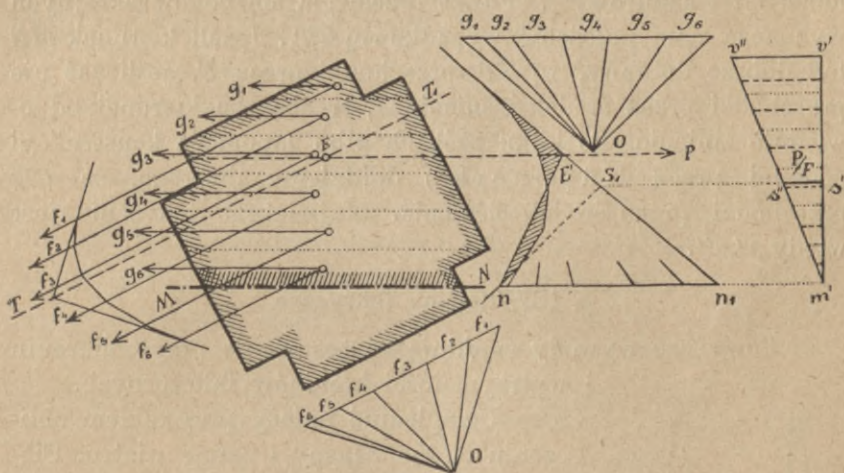
Odwrotnie, jeżeli dany jest środek ciśnienia, a szukamy osi obojętnej, to dzielimy cały przekrój na paski, kreślimy wielobok sznurowy. Przedłużamy teraz prawy bok skrajny, znajdujemy E' na przecięciu się z pionową przez E i kreślimy z E' teraz taką prostą $E'G$, która wyrównywa powierzchnie. Pionowa przez G oznacza położenie osi obojętnej.

Natężenie teraz łatwo wyznaczyć. Punkt S_1 przecięcia się boków skrajnych wyznacza nam położenie środka ciężkości powierzchni skutecznej. Natężenie w S jest wedle 409) $v_0 = \frac{P}{F_c} = s's''$. Połączmy s'' z m' , a otrzymamy linią natężenia i największe natężenie $v'v''$.

§. 156. Przekrój nieregularny, siła działa nie w osi głównej.

Jeżeli środek ciśnienia nie leży w osi głównej bezwładności, wyznaczenie osi obojętnej i nateżeń staje się trudniejszym. Jeżeli cały przekrój pracuje, to jak wiemy z §. 66., kierunek osi obojętnej jest znany. Oś obojętna jest wtedy równoległą do osi elipsy środkowej bezwładności, sprzężonej do osi, poprowadzonej przez środek przekroju i środek ciśnienia. Gdy część przekroju nie pracuje, należałoby dla powierzchni skutecznej narysować nową elipsę środkową i do niej zastosować powyższe prawidło. Ponieważ jednak położenie osi obojętnej nie jest znanym, nie możemy tego uczynić. Tu więc nieznanym jest nie tylko kierunek, ale i położenie osi obojętnej.

Jeżeli oś obojętna MN jest dana (rys. 343), to powierzchnię skuteczną dzielimy na paski, w środkach ciężkości



Rys. 343.

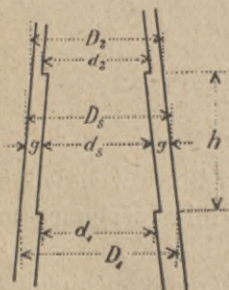
ich zaczepiamy powierzchnie $g_1, g_2 \dots g_6$, kreślimy wielobok sił i sznurowy i w podobny sposób, jak poprzednio, wyznaczamy przez wyrównanie powierzchni momentów punkt E' , na prostej EE' , równoległej do osi obojętnej, leży więc środek ciśnienia E . Aby wyznaczyć dokładnie położenie punktu E , zauważmy, że $m'v''$ przedstawia linię nateżeń. Jeżeli więc każde g pomnożymy przez odnośne nateżenia, lub gdy boki pierwszego wieloboku przedłużymy do przecięcia się z kierunkiem MN , to

odcinki przedstawiają nam siły f (na prostej un). Możemy je też w dowolnej podziałce narysować. Gdy je wreszcie zapomocą wieloboku sznurowego złożymy, to otrzymamy, rozumie się, ten sam kierunek wypadkowej EE' . Jeżeli jednak zmienimy kierunek sił na równoległy do boków, to wielobok sił odnośny wyznaczy kierunek wypadkowej TT_1 , a punkt przecięcia się tych dwu kierunków środek ciśnienia E .

Jeżeli przeciwnie dany jest środek ciśnienia, a szukamy osi obojętnej, to możemy to zrobić tylko przez próby. Przyjmiemy więc najprzód kierunek MN dowolnie, może równoległy do osi sprzężonych elipsy bezwładności środkowej całego przekroju, dzielimy cały przekrój na paski i wyrównujemy powierzchnię momentów, jak w poprzednim paragrafie. W ten sposób znajdujemy położenie osi obojętnej MN . Teraz musimy zbadać, czy kierunek był dobrze obrany, kreślimy więc wielobok sił i sznurowy f . Punkt przecięcia się boków skrajnych wyznacza nam położenie wypadkowej TT_1 . Jeżeli kierunek MN był dobrze dobrany, to TT_1 przechodzi przez E , jeśli zaś nie przechodzi przez środek ciśnienia E , trzeba ten kierunek odpowiednio zmienić. Po kilku próbach albo zapomocą konstrukcyi podanej przez Hüpnera*) dojdziemy do tego, że TT_1 przechodzi przez środek ciśnienia. Największe natężenie jest wtedy $v'v''$.

§. 157. Kominy fabryczne.

Powyższe wywody znajdują zastosowanie przy obliczeniu wytrzymałości kominów fabrycznych.



Rys. 344.

Uwzględnić należy przy takim obliczeniu ciężar własny i parcie wiatru. Ciężar własny C da się dla danego kominu łatwo wyznaczyć, potrzeba tylko w obliczeniu uwzględnić dokładnie ciężar gatunkowy danego muru.

Przy stałej grubości g (rys. 344) dla piętra o wysokości h możemy wyznaczyć ciężar wedle średnich wymiarów D_2 i d_2 . Dla kominów okrągłych otrzymamy

*) P. *Civilingenieur* 1885 str. 39. Patrz także Schepp: „Zur Ermittlung der Druckvertheilung in Mauerwerksschnitten. *Centr. d. Bauverw.* 1889.

$$C = \gamma \cdot \frac{\pi h}{4} (D_s^2 - d_s^2) = 0,7854 \gamma h (D_s^2 - d_s^2) \quad . \quad . \quad 716)$$

Dla kominów ośmiobocznych będzie

$$C = 0,8284 \gamma h (D^2 - d^2) \quad . \quad . \quad . \quad 717)$$

jeżeli D i d oznaczają średnice kół wpisanych dla przekroju średniego.

Ciężar właściwy γ należy przyjąć wedle rozporządzenia austr. min. handlu z r. 1902 dla muru z zwykłych cegieł nie więcej niż 1600 kg/m^3 , dla muru z zendrówek 1800 kg/m^3 . Większy ciężar można przyjąć tylko po zważeniu próbnem danego materiału.

Parcie wiatru należy tu przyjąć większe, niż przy zwykłych budowlach, z powodu wysokości, a także ze względu na powiększenie nateżeń z powodu wahnień sprężystych i możliwego skrzywienia osi kominu. W Niemczech przyjmują zwykle $w = 125 \text{ kg/m}^2$, co jest za mało, w Austrii 150 kg/m^2 . Jednak z powyższych powodów radzi Göbel*) przyjmować parcie wiatru $w = 200 \text{ kg/m}^2$ w kierunku poziomym.

Z powodu, że powierzchnia kominu jest krzywą, parcie jest mniejsze, niżby wypadło na rzut pionowy kominu, a mianowicie współczynnik δ , którym pomnożyć mamy rzut, wynosi, jak o tem mówiliśmy w §. 107., dla przekroju kołowego 0,848, dla ośmioboku 0,890, dla sześcioboku około 0,790.

Dla danego przekroju mn (rys. 345) należy wyznaczyć C , W i punkt zaczepienia parcia wiatru E , który leży w środku ciężkości przekroju pionowego, będącego trapezem. Gdy dwie te siły złożymy, otrzymamy wypadkową R , przecinającą przekrój w K . Tu uwzględniamy tylko składową pionową wypadkowej C , a gdy długość $OK = w$, otrzymamy

$$w = \frac{W}{C} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 718)$$

Znając środek ciśnienia K i siłę C możemy wyznaczyć teraz nateżenie w przekroju mn . Badanie to przeprowadzić należy przedewszystkiem dla wszystkich piąter, zaczynając od góry aż do podstawy AB , bo chociaż dla wyższych przekrojów siła W się zmniejsza, to zmniejsza się też i C a także i grubość ścian, mogą być więc czasem wyżej nateżenia większe.

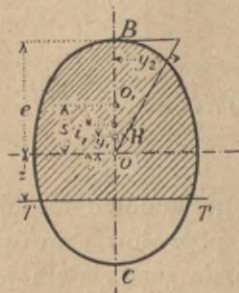
*) P. Göbel: *Standfestigkeit der Schornsteine. Zeitschrift des Vereines deutsch. Ingenieure.* 1898 str. 180.

Goebel podaje dla współczynnika v następującą tabliczkę:

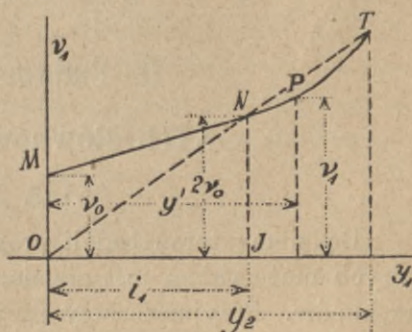
Tablica XLIII.

$\frac{w}{r}$	$\frac{r_1}{r}$						
	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	1,0	1,0	1,0	1,00	1,00	1,00	1,00
0,05	1,2	1,16	1,15	1,13	1,12	1,11	1,10
0,10	1,4	1,32	1,29	1,27	1,24	1,24	1,20
0,15	1,6	1,48	1,44	1,40	1,37	1,33	1,30
0,20	1,8	1,64	1,59	1,54	1,49	1,44	1,40
0,25	2,0	1,80	1,73	1,67	1,61	1,55	1,50
0,30	2,23	1,96	1,88	1,81	1,73	1,66	1,60
0,35	2,48	2,12	2,04	1,94	1,85	1,77	1,70
0,40	2,76	2,29	2,20	2,07	1,98	1,88	1,80
0,45	3,11	2,51	2,39	2,23	2,10	1,99	1,90
0,50	3,55	2,80	2,61	2,42	2,26	2,10	2,00
0,55	4,15	3,14	2,89	2,67	2,42	2,26	2,17
0,60	4,96	3,58	3,24	2,92	2,64	2,42	2,26
0,65	6,60	4,34	3,80	3,30	2,92	2,64	2,42
0,70	7,48	5,40	4,65	3,86	3,33	2,95	2,64
0,75	9,93	7,26	5,97	4,81	3,93	3,33	2,89
0,80	13,87	10,05	8,80	6,53	4,93	3,96	3,27
0,85	21,08	15,55	13,32	10,43	7,16	4,50	3,77
0,90	38,25	30,80	25,80	19,85	14,60	7,13	4,71
0,95	96,10	72,20	62,20	50,20	34,60	19,80	6,72
1,00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Jäcker podaje też przybliżony sposób wyznaczenia wykreślnego największego ciśnienia^{*)}. Jeżeli siła P (rys. 347) za-



Rys. 347.



Rys. 348.

czepia w H jeszcze w jądrze, to wedle 417), gdy i_1 nazwiemy promień jądry, natężenie w B

^{*)} P. Oest. Wochensch. für d. öff. Baudienst. 1902 str. 271.

$$v_1 = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_1}{F i_1} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_1}{i_1} \right) = v_0 \left(1 + \frac{y_1}{i_2} \right),$$

zaś w *C*

$$v_2 = v_0 \left(1 - \frac{y_1}{i_2} \right) \dots \dots \dots 720)$$

Wobec tego v_1 wzrasta proporcjonalnie do y_1 i da się przedstawić linią prostą *MN* (rys 348). Po przekroczeniu linii jędrnej ciśnienie wzrasta dalej wedle linii krzywej, zamiast której Jäcker przyjmuje parabolę. Wyznacza on jeden punkt ten krzywej *T*, leżący na linii *ON* dla $y=y_2$, przyczem, jak autor udowadnia,

$$\frac{y_2}{i} = \frac{e}{s}, \dots \dots \dots 721)$$

jeżeli *s* oznacza odstęp środka ciężkości O_1 połowy przekroju od osi przez środek ciężkości *O*.

Z rys. 348 widać, że jeżeli środek ciśnienia wyjdzie z jądra, to z początku v nie bardzo wzrasta, później jednak po przekroczeniu n. p. punktu *P*, dla którego $y=y'$, natężenie wzrasta niepomierne: dlatego należałoby nie dopuszczać przekroczenia środka ciśnienia poza punkt *P*.

Rozp. pruskiego min. handlu z r. 1902 przepisuje, że dla parcia wiatru 125 kg/m^2 rzutu komina okrągłego przynajmniej połowa przekroju powinna być ciśnioną czyli os obojętna co najwyżej może przechodzić przez środek przekroju *O*.

D. Budowle ziemne.

XIII. Równowaga stoków.

§. 158. Zasady.

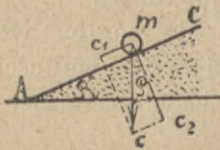
Będziemy teraz badali prawa równowagi budowli takich, których materiałem jest ziemia, a więc n. p. wałów, rowów, przekopów. Przypuszczamy przytem, że ziemia jest ciałem jednorodnem i niesprężystem o małej spójności. Tu więc nie będziemy mogli zastosowywać prawideł o wytrzymałości, wyłożonych w poprzednich rozdziałach, lecz zato uwzględniać będziemy także tarcie, tj. opór, jaki powstaje przy ruchu względnym dwóch ciał lub dwóch części tego samego ciała, przylegających jedna do drugiej.

Z mechaniki wiemy, że tarcie jest wprost proporcjonalnem do ciśnienia prostopadłego na płaszczyznę zetknięcia obu ciał a niezależnem od wielkości powierzchni zetknięcia; spójność zaś jest niezależną od ciśnienia prostopadłego a proporcjonalną do powierzchni przekroju. Chcąc przesunąć cząstki ziemi, musimy przewyciężyć obie te siły.

Powierzchnię ziemi nachyloną ku poziomowi, nazywamy stokiem (n. *Böschung*, fr. *talus*, an. *slope*, *talus*, r. откосъ, наклонъ) a styczną kąta nachylenia stoku do poziomu czyli stosunek wysokości do rzutu pionowego stoku (np. 1:1, 1:2) stoczystością (n. *Neigung der Böschung*, fr. *pente*, an. *sloping*). Zastanawiać się będziemy głównie nad stokami, których stoczystość w każdym punkcie jest ta sama, czyli nad stokami płaskimi, a ilekroćbyśmy mieli rozpatrywać stoki o zmiennej stoczystości, osobno to zaznaczymy.

§. 159. Równowaga ziemi niespoistej.

Wiemy, że powierzchnia wody w stanie równowagi jest poziomą. Piasek, żwir i ziemia sypka, których spójność jest bardzo małą, utrzymują się w równowadze, chociaż ich powierzchnia jest nachyloną, ale tylko do pewnej granicy, gdy kąt nachylenia stoku nie przekroczy pewnej wartości ϱ (rys. 349).



Rys. 349.

Dla tego największego kąta ϱ niech się znajduje punkt materialny m na powierzchni AC właśnie w stanie równowagi tak, że najmniejsze powiększenie kąta ϱ jużby wywołało stoczenie się punktu m . Ciężar tego punktu c rozdziela się na c_1 i c_2 , przyczem $c_1 = c \text{ wst } \varrho$, $c_2 = c \text{ dost } \varrho$. Siła c_1 stara się poruszyć punkt w kierunku CA , c_2 zaś przyciska go do płaszczyzny i wywołuje tarcie. Jeżeli współczynnik tarcia nazwiemy f , to dla równowagi musi być $c_1 = f c_2$, czyli $c \text{ wst } \varrho = f c \text{ dost } \varrho$, a stąd

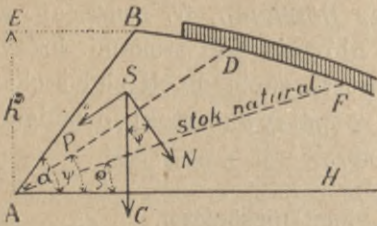
$$f = \text{st } \varrho \dots \dots \dots 722)$$

Ponieważ kąt ϱ zależnym jest tylko od współczynnika tarcia, dlatego nazywamy go kątem tarcia (n. *Reibungswinkel*, fr. *angle de frottement*, an. *angle of friction*, r. уголъ треня) (p. §. 131). Stok dla którego ziemia sypka utrzymuje się w równowadze, a więc nachylony pod kątem tarcia do poziomu,

nazywamy stokiem naturalnym, stokiem usypu (n. *naturliche Böschung*, fr. *talus naturel*, an. *plane of repos*, r. *относь насыпи*). Stok naturalny i kąt tarcia ziemi niespoistej wyznaczyć można, sypiąc ziemię i podgartując ją pod górę. Ziemia ułoży się wtedy w stoku naturalnym.

§. 160. Równowaga ziemi spoistej.

Jeżeli stok *AB* (rys. 350) jest za stromy, wtedy ziemia nie może utrzymać się w równowadze i część ziemi *ABD* się



Rys. 350.

usuwa. Część tej ziemi nazywamy odłamem, a powierzchnia *AD*, jak doświadczenia Forchheimera i Leygue'a okazują, mało się co różni od płaszczyzny. Przyjmować więc ją będziemy nadal za płaszczyznę i nazywać płaszczyzną odłamu (n. *Bruchfläche*, *Gleitebene*,

fr. *plan de rupture*, *plan de séparation*, *plan de glissement*, an. *plane of rupture*). Gdyby spójności nie było, to kąt α , pod którym stok *AB* jest nachylony do poziomemu, nie mógłby być dla równowagi większym, niż φ . Z powodu działania spójności kąt ten będzie większym, a zadaniem naszym będzie teraz wyznaczenie jego wielkości.

Zauważmy bryłę ziemi, której długość w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunkowej niech będzie równą jedności, nazwijmy *l* prostą *AD*, *c* spójność na jednostkę powierzchni, *f* współczynnik tarcia między ziemią a ziemią a φ odnośny kąt tarcia i zaczepmy w środku ciężkości odłamu *S* ciężar jego *C*, to da on się rozłożyć na siłę *N* prostopadłą do *AD* i *P* równoległą do *AD*. Wtedy będzie

$$N = C \text{ dost } \psi, \quad P = C \text{ wst } \psi, \quad \dots \quad (723)$$

jeżeli ψ jest kątem nachylenia płaszczyzny odłamu do poziomemu. Siła *P* usiłuje poruszyć odłamek w kierunku *DA*, czemu sprzeciwia się siła *Q*, powstająca wskutek tarcia i spójności ziemi w płaszczyźnie odłamu.

Stąd otrzymamy

$$Q = f N + cl = Cf \text{ dost } \psi + cl \quad \dots \quad (724)$$

jest płaszczyzną nachyloną pod kątem β do poziomu, wtedy ciężar odłamu możemy wyznaczyć, nazwawszy γ ciężar gatunkowy ziemi w następujący sposób:

$$C = \gamma \Delta ABD = \frac{1}{2} \gamma AB \cdot AD \cdot \text{wst}(\alpha - \psi),$$

a wstawwszy za AD wartość l

$$\text{a } AB = \frac{h}{\text{wst } \alpha}, \text{ otrzymamy}$$

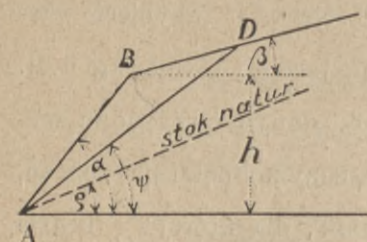
$$C = \frac{1}{2} \gamma h l \frac{\text{wst}(\alpha - \psi)}{\text{wst } \alpha}.$$

Według równań 723), 724)

i 725) mamy

$$\frac{P}{Q} = \frac{C \text{wst } \psi}{Cf \text{dost } \psi + cl} = 1,$$

a stąd, wstawwszy wartość za C



Rys. 351.

i $f = \text{st } \varrho$, otrzymamy:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\gamma h l \text{wst } \psi \text{wst}(\alpha - \psi)}{\gamma h l \text{wst}(\alpha - \psi) \text{dost } \psi \text{st } \varrho + 2cl \text{wst } \alpha} = 1. \quad 728)$$

Różniczkujemy osobno licznik, a osobno mianownik tego wyrazu, a otrzymamy wedle 726)

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dQ} &= \frac{-\text{wst } \psi \text{dost}(\alpha - \psi) + \text{dost } \psi \text{wst}(\alpha - \psi)}{[\text{wst}(\alpha - \psi) \text{wst } \psi + \text{dost}(\alpha - \psi) \text{dost } \psi] \text{st } \varrho} = \\ &= \frac{\text{wst}(2\psi - \alpha)}{\text{dost}(2\psi - \alpha) \text{st } \varrho} = \frac{\text{st}(2\psi - \alpha)}{\text{st } \varrho} = 1, \end{aligned}$$

$$\text{stąd } 2\psi - \alpha = \varrho, \text{ zatem } \psi = \frac{\varrho + \alpha}{2}. \quad 729)$$

A więc płaszczyzna odłamu połowi kąt, zawarty między stokiem rzeczywistym a naturalnym.

Równanie 728) możemy inaczej napisać

$$\gamma h \text{wst } \psi \text{wst}(\alpha - \psi) = \gamma h \text{wst}(\alpha - \psi) \text{dost } \psi \text{st } \varrho + 2c \text{wst } \alpha, \text{ a stąd}$$

$$h = \frac{2c \text{wst } \alpha}{\gamma \text{wst}(\alpha - \psi) [\text{wst } \psi - \text{dost } \psi \text{st } \varrho]} = \frac{2c \text{wst } \alpha \text{dost } \varrho}{\gamma \text{wst}(\alpha - \psi) \text{wst}(\psi - \varrho)}.$$

Oba kąty w mianowniku możemy inaczej wyrazić, a mianowicie:

$$\alpha - \psi = \alpha - \frac{\varrho + \alpha}{2} = \frac{\alpha - \varrho}{2}, \text{ zaś } \psi - \varrho = \frac{\varrho + \alpha}{2} - \varrho = \frac{\alpha - \varrho}{2}, \text{ a więc}$$

$$h = \frac{2c \text{dost } \varrho \text{wst } \alpha}{\gamma \text{wst}^2 \frac{\alpha - \varrho}{2}}. \quad 730)$$

Z tego wzoru możemy obliczyć wysokość stoku, dla której się stok jeszcze może przy spójności c utrzymać; kąt β , jak widzimy, w tym wypadku zupełnie nie wchodzi w rachubę, a więc tu jest h od stoczystości naziomu niezależnem.

§. 162. Stok pionowy.

Dla stoku pionowego $\alpha=90^\circ$; nazwijmy odnośną wysokość stoku h_0 (n. *Standhöhe*), to z równania 729) otrzymamy

$$h_0 = \frac{2c \operatorname{dost} \varrho}{\gamma \operatorname{wst}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{2c \left(\operatorname{dost}^2 \frac{\varrho}{2} - \operatorname{wst}^2 \frac{\varrho}{2}\right)}{\gamma \left(\operatorname{wst} 45^\circ \operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} - \operatorname{dost} 45^\circ \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{4c \left(\operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} + \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)}{\gamma \left(\operatorname{dost} \frac{\varrho}{2} - \operatorname{wst} \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{4c \left(1 + \operatorname{st} \frac{\varrho}{2}\right)}{\gamma \left(1 - \operatorname{st} \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{4c}{4} \operatorname{st} \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right). \quad 731)$$

Znając odwrotnie h_0 , możemy obliczyć c , a mianowicie

$$c = \frac{\gamma h_0}{4} \operatorname{dot} \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right). \quad 732)$$

Wstawiwszy tę wartość w równanie 730), otrzymamy

$$h = \frac{h_0 \operatorname{dost} \varrho \operatorname{wst} \alpha}{2 \operatorname{wst} \frac{\alpha - \varrho}{2} \operatorname{st} \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2}\right)}. \quad 733)$$

Z pierwszej wartości h_0 otrzymamy też

$$c = \frac{\gamma h_0}{2} \frac{\operatorname{wst}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right)}{\operatorname{dost} \varrho},$$

a wstawiwszy to w 730)

$$h = h_0 \frac{\operatorname{wst}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right) \operatorname{wst} \alpha}{\operatorname{wst}^2 \frac{\alpha - \varrho}{2}}. \quad 734)$$

Wzory te służą do obliczenia wysokości stoku pochylego dla jakiegokolwiek kąta α . Odt obliczył z równań 733) i 734) następną tabliczkę dla wartości $\frac{h}{h_0}$:

Tablica XLIV.

$\frac{h}{h_0} =$		Wartości dla $\text{dot } \rho$						
		1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
Wartość dla $\text{dot } \alpha$	0,20	1,17	1,64	1,59	1,55	1,52	1,49	1,47
	0,25	1,99	1,89	1,82	1,75	1,70	1,66	1,63
	0,30	2,35	2,19	2,08	1,99	1,91	1,86	1,81
	0,35	2,79	2,56	2,39	2,27	2,17	2,08	2,02
	0,40	3,36	3,02	2,78	2,60	2,46	2,35	2,26
	0,45	4,11	3,60	3,24	3,00	2,81	2,66	2,54
	0,50	5,11	4,34	3,84	3,48	3,22	3,02	2,87
	0,55	6,47	5,31	4,58	4,08	3,72	3,45	3,24
	0,60	8,41	6,63	5,53	4,83	4,33	3,97	3,69
	0,65	11,28	8,40	6,77	5,76	5,08	4,58	4,22
	0,70	15,77	10,90	8,42	6,96	6,00	5,33	4,84
	0,75	23,26	14,63	10,69	8,52	7,16	6,25	5,60
	0,80	37,41	20,47	13,92	10,61	8,65	7,39	6,51
	0,85	68,21	30,26	18,67	13,46	10,59	8,82	7,63
	0,90	157,39	48,55	26,65	17,51	13,18	10,65	9,01
	0,95	645,69	86,59	38,61	23,50	16,73	13,03	10,79
1,00	∞	204,69	61,95	32,86	21,77	16,21	12,98	
1,05	—	840,78	113,03	48,60	29,21	20,57	15,88	
1,10	—	∞	260,64	79,01	40,81	26,73	19,74	
1,15	—	—	1072,65	142,23	60,35	35,87	25,04	
1,20	—	—	∞	328,14	95,93	50,09	32,53	

Przykład. Mamy wykopać rów głęboki 9 m w ziemi, dla której $\rho=32^\circ$, więc $\text{dot } \rho=1,6$ a $h_0=1$ m. Jaka może być stoczystość?

Tu mamy $h=9$, $h_0=1$, więc $\frac{h}{h_0}=9$, liczbę tę szukamy w ostatniej kolumnie i znajdujemy 9,01, co odpowiada $\text{dot } \alpha=0,90$, a więc $\alpha=48^\circ$.

§. 163. Wyznaczenie wykreślne spójności, wysokości stoku i stoczystości.

Na podstawie powyższych równań możemy wykreślnie wyznaczyć stoczystość, stok pionowy lub spójność, jeżeli znanym jest kąt tarcia.

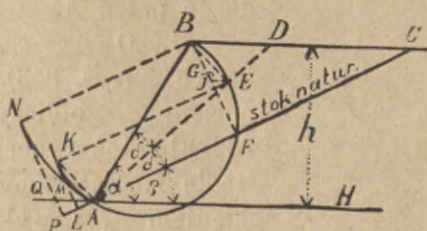
1. Dane są α , h i ρ , wyznaczyć należy c (rys. 352).

Z równ. 730) wynika $c = \frac{\gamma h \text{ wst}^2 \frac{\alpha - \rho}{2}}{2 \text{ dost } \rho \text{ wst } \alpha}$, albo gdy nazwiemy:

$$AB = l = \frac{h}{\text{wst } \alpha}, \quad c = \gamma l \frac{\text{wst}^2 \frac{\alpha - \rho}{2}}{2 \text{ dost } \rho},$$

a gdy $\alpha - \varrho = 2\delta$, więc $c = \frac{\gamma l \text{wst}^2 \delta}{2 \text{dost} \varrho}$ 735)

Społowiwszy kąt $\alpha - \varrho$, otrzymamy kąt δ . Z B spuszczaemy prostopadłe na AD i AC , to B, E, F i A muszą leżeć na półkole.



Rys. 352.

Z E kreślimy poziomą EG , a wtedy $c = \frac{\gamma \cdot EG}{2}$. Aby się o tem przekonać, zrobimy $EI \parallel AC$, to

$$EG = \frac{EI}{\text{dost} \varrho} = \frac{BE \text{wst} \delta}{\text{dost} \varrho} = \frac{l \cdot \text{wst}^2 \delta}{\text{dost} \varrho},$$

zatem ze względu na 735) $EG = \frac{2c}{\gamma}$ 736)

Udowodniliśmy, że półkole, założone na AB , przechodzi przez F i E . Poprowadźmy styczną do koła $KL \parallel BF$, to $AKL \cong BEI$, bo $AK = BE$, a boki równoległe. Stąd łatwo udowodnić, że

$$AM = EG = \frac{2c}{\gamma} 737)$$

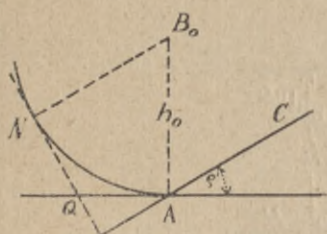
Nareszcie jeżeli z B zatoczmy łuk promieniem BA i wykreślimy styczną $NP \parallel BF$, to $AQ = 2AM$, jak to się da łatwo udowodnić z podobieństwa trójkątów, zatem

$$AQ = \frac{4c}{\gamma} 738)$$

2. Dane α, c i ϱ , szukana wysokość h . Połowimy kąt CAB i kreślimy $AN \perp BD$, odcinamy teraz $AQ = \frac{4c}{\gamma}$ i przez punkt Q kreślimy QN prostopadłą do AC . Z punktu N kreślimy NB równoległe do AC i w ten sposób otrzymujemy punkt B , a zatem i wysokość stoku.

3. Dane są c , h i ϱ , szukane α .

Odcinamy $AQ = \frac{4c}{\gamma}$, kreślimy $QN \perp AC$ i szukamy na poziomej w wysokości h punktu, z którego możemy poprowadzić koło styczne do QN a przechodzące przez A .



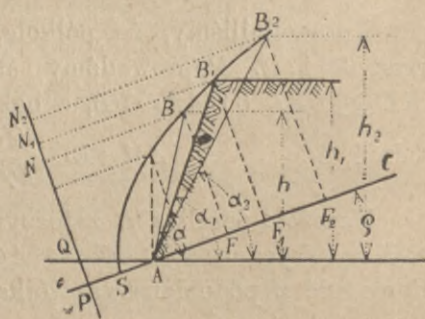
Rys. 353.

4. Dane h_0 , h i ϱ , szukane α (rys. 353). Dla danego h_0 możemy c obliczyć z równania 732) albo też wyznaczyć wykreślnie wedle 1. Zatoczmy z B_0 łuk promieniem h_0 i wykreślimy styczną $QN \perp AC$, to $AQ = \frac{4c}{\gamma}$. Dalsza konstrukcja, jak poprzednio, wedle 3.

§. 164. Parabola spójności.

Jeżeli dla rozmaitych h będziemy szukać wedle poprzedniego paragrafu kąty α , a zatem odnośne punkty B (rys. 354), to da się łatwo udowodnić, że punkty te leżą na paraboli. Na mocy konstrukcyi bowiem jest $AB_1 = B_1N_1$, a to jest właśnie cechą punktów paraboli, której osią jest stok naturalny, punkt A ogniskiem a parametrem $2AP = \frac{8c \text{ dost } \varrho}{\gamma}$.

Nazywamy ją parabolą spójności (n. *Cohäsionsparabel*), kreślimy poziomą $AQ = \frac{4c}{\gamma}$ i $QP \perp AC$.



Rys. 354.

Jeżeli wykreślimy z punktów B prostopadłe do AC , to $PF_1 = N_1 B_1 = AB$. Na tem polega prosty sposób wykreślenia paraboli spójności. Z punktu A zakreślamy łuk dowolną długością AB_1 , robimy $PF_1 = AB_1$ i wystawiamy w F prostopadłą do przecięcia się z łukiem w B_1 .

§. 165. Wyznaczenie stoku naturalnego, spójności i ciężaru gatunkowego.

Mówiliśmy poprzednio, jak się wyznacza stok naturalny dla ziem niespoistych. Dla ziem spoistych najlepiej wyznaczać h_0 i ϱ z doświadczeń; w tym celu trzeba ziemię skopywać pionowo. Wykop musi być dość długi o zmiennej głębokości, należy go zostawić najlepiej przez cały rok, aby się przekonać, o ile wpływy atmosferyczne zmniejszają spójność. Największa wysokość, przy której stok pionowy się utrzyma, będzie h_0 . To samo możemy zrobić dla innych kątów α i otrzymamy odnośne h . Z tych wartości możemy wtedy wyznaczyć c i ϱ na podstawie równań 732) i 733). Na podstawie doświadczeń Kavena możemy przyjąć dla ziem zbitych $c=225 \text{ kg/m}^2$, a że należy uwzględnić spójność pewności 1,5, więc przyjmujemy zwykle

$$c=150 \text{ kg/m}^2. \quad \dots \dots \dots 739)$$

W tym samym stosunku zmniejszamy też i kąt tarcia.

Możemy dalej przyjąć:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla zwykłej ziemi zbitej} \quad h_0=1 \text{ do } 3 \text{ m} \\ \text{dla zbitego łu lub gliny} \quad h_0=2 \text{ do } 5 \text{ m} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots 740)$$

Dla bezpieczeństwa lepiej przy obliczeniu przyjmować mniejsze wartości t. j. 1 względnie 2 m. Na wielkość tarcia i spójności ma znaczny wpływ atmosfera. Ważną okolicznością pod tym względem jest ilość wody, znajdującej się w ziemi, zwłaszcza gliniastej. Gdy glina jest tylko zwilżoną, spójność jest wielka, gdy jest suchą zupełnie — mała, a gdy przesiąknięta wodą — prawie żadna, kąt ϱ schodzi czasem do 10° . Dlatego też przy budowlach ziemnych bardzo ważną rzeczą jest odpowiednie odwodnienie.

W tabl. XLV. podaliśmy według Rebhanna i Otta kąt tarcia ϱ , ciężar metra sześciennego γ i spójność c dla rozmaitych ziem. Nie potrzebujemy dodawać, że są to tylko wartości przeciętne. Przy większych budowlach ziemnych dobrze jest robić, jeśli czas na to pozwala, z daną ziemią osobne doświadczenia dla wyznaczenia c i ϱ .

Tablica XLV.

Materiał	ką- tarcia ρ	ciężar gatu- kowy γ kg/m^3	spój- ność c kg/m^2	st p dot p	
Ziemia roślinna sypka sucha	35°	1420	250	0,700	1,428
„ „ „ wilgotna	40°	1580	250	0,839	1,192
„ „ nasycona wodą	30°	1800	—	0,577	1,732
„ „ sucha ubita	42°	1680	500	0,900	1,111
„ „ wilgotna ubita	65°	1880	—	2,145	1,466
Gлина sypka sucha	40°	1500	600	0,839	0,192
„ „ wilgotna	45°	1550	930	1,000	1,000
„ „ nasycona wodą	20°	2000	400	0,864	2,747
„ ubita sucha	42°	1790	—	0,900	1,111
„ „ naturalnie wilgotna	70°	1850	—	2,748	0,364
Piasek suchy miałki	35°	1500	10	0,700	1,428
„ „ gruby	35°	1640	20	0,700	1,428
„ „ wilgotny	40°	1770	100	0,839	1,192
„ „ nasycona wodą	30°	1950	60	0,577	1,732
Żwir graniasty (tłuczony)	45°	1800	1500	1,000	1,000
„ „ okrągły (rzeczny)	30°	1800	1500	0,577	1,732
Zboże	25°	759	—	0,466	2,145
Srut	23°	6800	—	0,424	2,356

Müller Breslau podaje następną krótką tabliczkę:
Tablica XXI.

Rodzaj ziemi	γ kg/m^3	ρ
Ziemia roślinna sucha	1400	35°—40°
„ „ wilgotna	1600	45°
„ „ nasycona wodą	1800	30°—35°
Gлина sucha	1500	40°—45°
„ mokra	1900	20°—25°
Piasek nasycony wodą	2000	25°
„ wilgotny	1800	40°
„ suchy	1580—1650	30°—35°
„ „ średnio	1600	33 $\frac{1}{2}$ °
Żwir tłuczony	1800	35°—40°
„ rzeczny	1800	30°

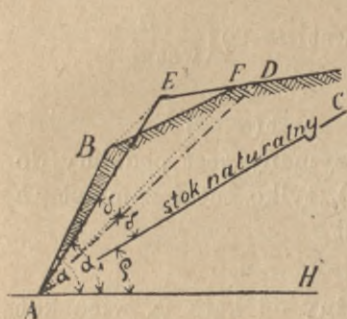
Keck podaje następujące wartości:
Tablica XLVII.

Rodzaj ziemi	γ kg/m^3	ρ
II suchy	1500	40°—46°
„ mokry	1900	20°—25°
Gлина sucha	1600	40°—50°
„ mokra	1950	20°—25°
Ziemia roślinna mokra	1650	30°—35°
Piasek, żwir rzeczny	1600—1860	30°
Żwir tłuczony	1600	35°—40°

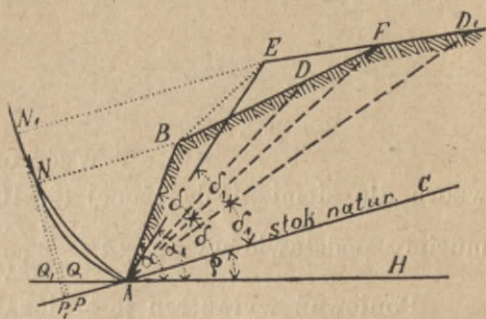
§. 166. Naziom załamany.

Jeżeli naziom nie jest płaskim, lecz składa się z dwu płaszczyzn (rys. 355), a jeżeli AD jest płaszczyzną odłamu, to czworobok $ABFD$ musimy zamienić na trójkąt AED , aby można poprzednie wzory zastosować. Kreślimy więc $BE \parallel AF$ i dalej wykreślamy tak, jak gdybyśmy mieli stok AE i naziom płaski. Płaszczyzna odłamu położy wtedy kąt EAC , a dalsza konstrukcyja pozostaje ta sama.

Jeżeli jednak przy tej przemianie, punkt D wypadłby przed F , to w takim razie stok się zachowuje, jak gdyby był płaskim.



Rys. 355.



Rys. 356.

Jeżeli odległość punktu załamania wzrasta, wtedy może się zdarzyć, że gdy bez przemiany podzielimy na połowę kąt $\alpha - \varphi$ (rys. 356), punkt D może wypaść przed punktem załamania F . Jeżeli zaś przeprowadzimy przemianę, to wypadają nam płaszczyzna odłamu AD_1 . Któraż z nich jest prawdziwą? Ta, dla której potrzeba większej spójności. Jeżeli więc zatoczmy z B koło promieniem BA , z E promieniem EA i wykreślimy styczne $\perp AC$, to zatrzymujemy tę płaszczyznę odłamu, dla której AQ jest większem. Tu $AQ_1 > AQ$, więc prawdziwą linią odłamu jest AD .

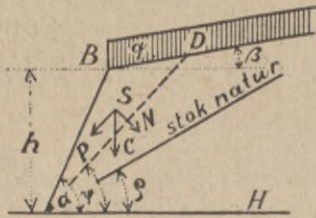
§. 167. Równowaga ziemi jednostajnie obciążonej.

Jeżeli ziemia jest jednostajnie obciążona ciężarem q na m^2 , to licząc na długość równą $1 m$ w kierunku prostopadłym do rysunku, otrzymamy (rys. 357) $C = \gamma \cdot ABD + BD \cdot q$.

Powierzchnię trójkąta ABD wyznaczyliśmy już w §. 161, a mianowicie, gdy $AD=l$, $ABD=\frac{1}{2}hl \frac{\text{wst}(\alpha-\psi)}{\text{wst}\alpha}$, dla wyznaczenia BD zaś ustawimy proporcją:

$$BD : l = \text{wst}(\alpha-\psi) : \text{wst}(180-\alpha+\beta),$$

więc $BD = \frac{l \text{wst}(\alpha-\psi)}{\text{wst}(\alpha-\beta)}$. Wstawivszy te wartości w równaniu dla C , otrzymamy



Rys. 357.

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \gamma h l \frac{\text{wst}(\alpha-\psi)}{\text{wst}\alpha} + \\ &+ \frac{q l \text{wst}(\alpha-\psi)}{\text{wst}(\alpha-\beta)} = \\ &= l \text{wst}(\alpha-\psi) \left(\frac{\frac{1}{2} \gamma h}{\text{wst}\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{\text{wst}(\alpha-\beta)} \right). \end{aligned}$$

Wzór otrzymany jest podobny do wzoru dla ziemi nieobciążonej (§. 161), tylko tutaj zamiast γh musimy podstawić wyraz $\gamma h + \frac{2q \text{wst}\alpha}{\text{wst}(\alpha-\beta)}$.

Ponieważ wyraz ten jest niezależny od kąta ψ , więc kąt ψ będzie taki sam, jak poprzednio, tj. $\psi = \frac{\alpha+q}{2}$, a więc i tu płaszczyzna odłamu położy kąt między stokiem naturalnym a rzeczywistym.

Dla ziemi nieobciążonej mieliśmy według 733)

$$\gamma h = \gamma h_0 \frac{\text{wst}\alpha \text{ dost } q}{2 \text{st}\left(45^\circ + \frac{q}{2}\right) \text{wst}^2 \frac{\alpha-q}{2}},$$

dla ziemi obciążonej otrzymamy podobny wzór, podstawivszy tylko zamiast γh wyraz powyżej wspomniany, więc

$$\gamma h + \frac{2q \text{wst}\alpha}{\text{wst}(\alpha-\beta)} = \gamma h_0 \frac{\text{wst}\alpha \text{ dost } q}{2 \text{st}\left(45^\circ + \frac{q}{2}\right) \text{wst}^2 \frac{\alpha-q}{2}}, \text{ a stąd}$$

$$h = h_0 \frac{\text{wst}\alpha \text{ dost } q}{2 \text{st}\left(45^\circ + \frac{q}{2}\right) \text{wst}^2 \frac{\alpha-q}{2}} - \frac{2q \text{wst}\alpha}{\gamma \text{wst}(\alpha-\beta)}. \quad . \quad 741)$$

Według 733) pierwszy wyraz równa się h_1 , wysokości stoku ziemi nieobciążonej, więc

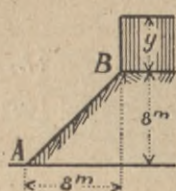
$$h = h_1 - \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma \operatorname{wst}(\alpha - \beta)} \quad (742)$$

Dla naziomu poziomego $\beta = 0$, więc

$$h = h_1 - \frac{2q}{\gamma} \quad (743)$$

A zatem dla naziomu poziomego obciążenie na wysokości h_1 ma ten skutek, jak gdyby stok był o $\frac{2q}{\gamma}$ wyższym. Pochodzi to stąd, że obciążenie powiększa wprawdzie tarcie, ale nie powiększa spójności, gdy przy stoku wyższym obie siły wzrastają.

Przykład. Na poziomym naziomu stoku wysokiego 8 m (rys. 358) mamy złożyć kamienie; jak wysoką może być warstwa tych kamieni bez narażenia stoku na usunięcie?



Mamy dane $\operatorname{st} \alpha = 1$, $h_0 = 1$, ciężar gatunkowy ziemi $\gamma = 1600 \text{ kg/m}^3$, ciężar gatunkowy kamienia uwzględniając próżnię między kamieniami $\gamma_1 = 2000 \text{ kg/m}^3$, kąt tarcia $\rho = 35^\circ$. Tu obciążenie na m^2 będzie $q = \gamma y = 2000 y$, jeżeli y oznacza wysokość kamieni. Dla $\operatorname{st} \alpha = 1,0$ otrzymamy $\operatorname{wst} \alpha = 0,707$, $\alpha = 45^\circ$, dalej będzie

$$\frac{\alpha - \rho}{2} = \frac{10}{2} = 5^\circ, \quad 45 - \frac{\rho}{2} = 27,5^\circ, \quad \operatorname{wst}^2 27,5^\circ = 0,2134,$$

Rys. 358.

$$\operatorname{wst} \frac{\alpha - \rho}{2} = 0,087, \quad \operatorname{wst}^2 \frac{\alpha - \rho}{2} = 0,00757. \quad \text{Więc wedle 734)}$$

$$h_1 = 1 - \frac{0,2134 \times 0,707}{0,00757} = 19,93 \text{ m}, \quad \text{zatem wedle 743)} \quad h = 19,93 - \frac{2 \times 2000 y}{1600} = 19,93$$

$$- 2,5 y = 8 \text{ m.} \quad \text{stąd } y = 4,77 \text{ m.}$$

§. 168. Wykreślne wyznaczenie stoku ziemi jednostajnie obciążonej.

Jeżeli w równowadze utrzymuje się stok AB obciążony ciężarem q (rys. 359), to ciężar ten q zamieniamy, jak wiadomo, na warstwę ziemi o wysokości $h_1 = \frac{q}{\gamma}$.

Z poprzedniego paragrafu wiemy, że płaszczyzna odłamu pozostaje ta sama, co dla stoku nieobciążonego, otrzymujemy ją przez spólowienie kąta BAC. Odłam więc stanowi powierzchnia ABIFD, którą zamieniamy na trójkąt, robiąc ze względu na 743) $I_1 I = IB = h_1$, $I_1 B_1 \parallel BD$ i przedłużając AB aż do B_1 . Dalsza konstrukcja

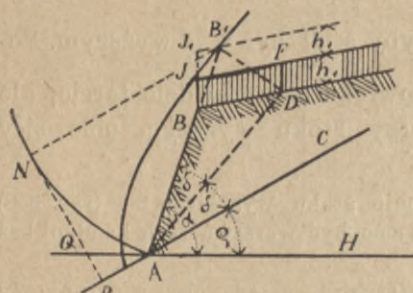
pozostaje ta sama, $AQ = \frac{4c}{\gamma}$. PN jest kierownicą, A ogniskiem a punkt B_1 jest punktem paraboli spójności.

§. 169. Naziom dowolny częściowo obciążony.

Jeżeli naziom dowolnie zakrzywiony jest częściowo obciążony (rys. 360), to właściwie płaszczyzna odłamu nie pozostaje ta sama, co dla ziemi nieobciążonej, mało się jednak różni. Przyjąwszy znów płaszczyznę tę samą, połowiącą kąt BAC , zamieniamy

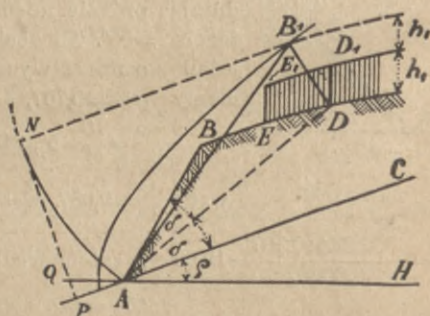
$$ABEE_1 D_1 D$$

na trójkąt $AB_1 D$, którego wierzchołek leży w odstępnie $2h_1$ od ED .



Rys. 359.

Dalsza konstrukcja pozostaje ta sama, zatem $AQ = \frac{4c}{\gamma}$. W ten sposób możemy wyznaczyć c , spójność potrzebną do równowagi stałej. Jeżeli rzeczywista spójność jest c' , to $\frac{c'}{c} = n$ jest stosunkiem pewności.

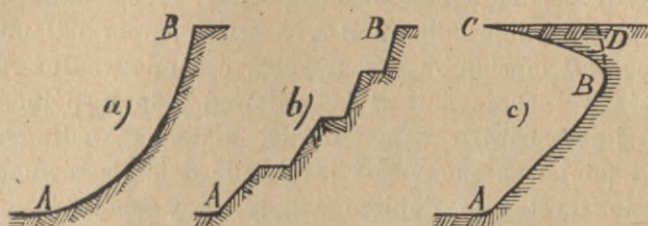


Rys. 360.

170. Stok zakrzywiony.

Z paraboli spójności (rys. 354) widzimy, że im większym jest h , tem większym jest α . Dla wyższych części stoku, dla których h jest mniejszym, może więc być stoczystość większą. Jeżelibyśmy więc nasyp (rys. 361 a) w myśli podzielili na warstwy poziome i dla każdej z nich wyznaczyli kąt nachylenia stoku, to otrzymalibyśmy stok krzywy AB u dołu mniej, u góry więcej stromy. Przy większych nasypach urzą-

dzamy rzeczywiście w praktyce stok krzywy, lub też jako przybliżony kształt stok z ławeczkami (rys. 361b).



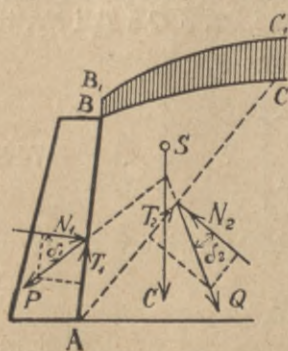
Rys. 361.

Winkler wyznacza równanie krzywej AB (rys. 361a), z którego się okazuje, że krzywa ta ma właściwie kształt ABC (rys. 361c), kształt, jak widzimy, nieprawdopodobny, gdyż przytem nie uwzględniono tej okoliczności, że ziemia złamałaby się pod własnym ciężarem w linii BD ; w rzeczywistości więc ziemia usuwa się w linii ABD^*).

XIV. Parcie ziemi, obliczone sposobem analitycznym.

§. 171. Ogólne zasady.

Jeżeli stoczystość jest tak wielką, że stok spójnością i tarciem nie może się utrzymać, wtedy, aby zapobiec usunięciu się



Rys. 362.

ziemi, budujemy ścianę drewnianą lub murowaną AB (rys. 362), przypierającą do stoku. Jeżeli ściana jest murowaną, to nazywamy ją murem oporowym (n. *Stützmauer*, fr. *mur de soutènement*, an. *retaining wall*, h. *muro de sostenimiento*, r. подпорная стена). Zadaniem naszym jest teraz obliczyć parcie, które ziemia wywiera na mur, a które nazywamy parciem ziemi (n. *Erddruck*, fr. *poussée des terres*, an. *pressure of*

earth, r. давление земли). Wyłożymy tu najpierw teorią par-

*) Bliższe szczegóły z teorii stoków znajdzie czytelnik w wybornem dziele A. v. Kavena „*Theorie der Böschungen*“, 1885.

cia ziemi, tak zwaną dawniejszą według Coulomba i Ponceleta, a potem wspomniemy także o innych teoryach.

Gdyby ściana AB miała się poddać, to ziemiaby się usunęła w płaszczyźnie odłamu AC , a więc parcie odłamu ABC na ścianę AB musiałoby przewyciężyć tarcie wzdłuż AB i AC i spójność w płaszczyźnie AC . Ponieważ jednak spójność ziemi nasypanej jest bardzo małą i bardzo zmienną według stopnia wilgoci i ponieważ spójność i tarcie nie działają równocześnie, lecz tarcie występuje dopiero wtedy, gdy spójność zostanie zniweczona, więc zwykle nie uwzględniamy jej w obliczeniu w praktyce dla większej pewności. Gdyby nawet spójność w rzeczywistości równocześnie działała z tarcie, to działałaby tylko korzystnie i zmniejszałaby parcie ziemi; nie uwzględniając jej więc, przypuszczamy warunki najniekorzystniejsze.

Później podamy sposoby uwzględnienia spójności, którego zachodzi potrzeba w niektórych wypadkach. Obecnie pozostaje zatem do uwzględnienia tylko tarcie, które klin (n. *Druckkeil*, fr. *coin de poussée*) ABC wraz z obciążeniem ma pokonać przy usunięciu się podczas ruchu po płaszczyznach AB i AC i ciężar klina wraz z obciążeniem C , działający w środku ciężkości S odłamu ABB_1C_1C . Ciężar C wywołuje oddziaływania N_1 i N_2 , prostopadłe do AB i AC . Podczas ruchu powstaje także tarcie T_1 i T_2 . Jeżeli kąt tarcia między ziemią a murem nazwiemy ϱ_1 , a między ziemią a ziemią ϱ_2 , to $T_1 = N_1 \text{ st } \varrho_1$, $T_2 = N_2 \text{ st } \varrho_2$. Nazwijmy P wypadkową z T_1 i N_1 , a Q z T_2 i N_2 , to

$$\begin{aligned}
 P &= \sqrt{N_1^2 + N_1^2 \text{ st}^2 \varrho_1} = N_1 \sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho_1} \\
 &= N_1 \text{ siecz } \varrho_1 = \frac{N_1}{\text{dost } \varrho_1} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \\
 \text{a } Q &= \frac{N_2}{\text{dost } \varrho_2} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \dots \dots \dots 744)
 \end{aligned}$$

Jeżeli kąt nachylenia między P i N_1 nazwiemy δ_1 , a δ_2 między Q i N_2 , to $P = \frac{N_1}{\text{dost } \delta_1}$, $Q = \frac{N_2}{\text{dost } \delta_2}$, \dots \dots \dots 745)

a więc ze względu na równ. 744) $\varrho_1 = \delta_1$, $\varrho_2 = \delta_2$. \dots \dots \dots 746)

Widzimy więc, że podczas ruchu klina ABC odłam wywierać musi parcia na ścianę AC i płaszczyznę odłamu, które są nachylone do AB i AC pod odnośnymi kątami tarcia. Dla równowagi muszą też siły P , Q i C przecinać się w jednym punkcie. Nad tym ostatnim warunkiem zastanowimy się później.

§. 172. Ogólne wyznaczenie powierzchni odłamu i parcia ziemi.

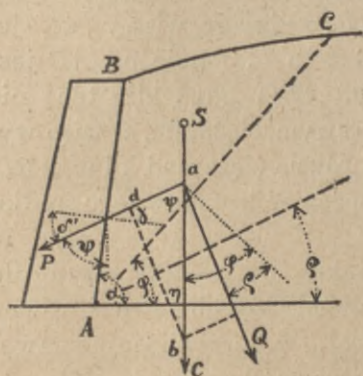
Kąt tarcia ϱ_1 między murem a ziemią jest zwykle większym, niż kąt tarcia ϱ_2 między ziemią a ziemią. Zresztą, choćby on był mniejszym, w naszej jest mocy uczynić ścianę AB więcej szorstką i zwiększyć tarcie tak, że możemy prawie zawsze przyjąć, że kąt tarcia $\varrho_1 > \varrho_2$. W takim razie przy usunięciu się ziemi, zostaje przy murze bardzo cienka warstwa ziemi, w ziemi tworzy się szczelina, a przy usunięciu odbywa się ruch ziemi po ziemi, musimy zatem uwzględnić współczynnik tarcia między ziemią a ziemią, a więc ten sam kąt tarcia ϱ_2 . Tak twierdzi Winkler, z którym zgadzają się Haeseler i Engesser. Jednak nie można temu zaprzeczyć, że może się zdarzyć też, że $\varrho_1 < \varrho_2$, zwłaszcza jeśli woda dostanie się poza mur. Dlatego Möller radzi przyjmować $\delta_1 = \frac{2}{3}\varrho_2$ przy zwykłych stosunkach, zaś $\delta_1 = \frac{1}{3}\varrho_2$ przy wązkich i gładkich ścianach, np. przy drzewie heblowanym i okrągłych palach. Müller Breslau stwierdza na mocy doświadczeń, że $\delta_1 < \varrho_2$ zależnie od powierzchni ściany, a przeważnie przyjmuje $\delta_1 = \frac{3}{4}\varrho_2$.

Nadal więc przyjmować będziemy na razie kąt δ_1 , bliżej nieokreślony, aby można zbadać, jaki wpływ wywierają różne założenia co do wielkości tego kąta. Z rys. 363 otrzymamy, rozłożywszy siłę C na składowe P i Q , $P : C = ad : ab = \text{wst } \eta : \text{wst } \gamma$. Dalej mamy $\eta = \varphi - \varrho$, $\gamma = 180 - \eta - \psi = 180 - (\varphi - \varrho + \psi)$, więc $P : C = \text{wst } (\varphi - \varrho) : \text{wst } (\varphi - \varrho + \psi)$, stąd $P = \frac{C \text{wst } (\varphi - \varrho)}{\text{wst } (\varphi - \varrho + \psi)}$. 747)

P więc zależnem jest od kąta φ , którego jeszcze nie znamy.

Łatwo jednak zrozumiemy, że ziemia usunie się w tej płaszczyźnie, a więc dla takiego kąta φ , dla którego P jest największem. Szukać zatem będziemy teraz wartości kąta φ , dla którego P jest największem, przy czem jednak musimy także ciężar C wyrazić jako funkcją φ , jakto pokażemy poniżej w szczegółowych przypadkach.

Z rysunku widzimy, że



Rys. 363.

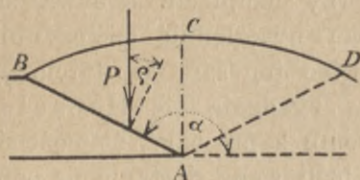
$\psi = 180 - \alpha - \delta'$, więc równ. 747) możemy inaczej napisać

$$P = \frac{C \operatorname{wst}(\varphi - \varrho)}{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi + \varrho + \delta_1)} \quad \dots \quad 748)$$

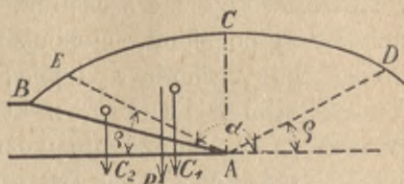
Gdy $\alpha = 180 - \varrho$ (rys. 364), otrzymamy z równ. 748)

$$P = \frac{C \operatorname{wst}(\varphi - \varrho)}{\operatorname{wst}(\varphi - \delta_1)}$$

Jeżeli przyjmijemy $\delta_1 = \varrho_1$, to $P = C$. $\dots \dots \dots$ 749)



Rys. 364.



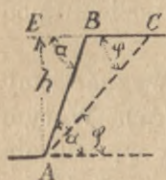
Rys. 365.

I rzeczywiście, jeżeli naziom jest symetryczny do pionowej AC , to łatwo zrozumiemy, że ponieważ płaszczyzna AB jest zupełnie symetryczną do AD t. j. do stoku naturalnego, więc płaszczyzna odłamu musi być pionową, a parcie ziemi w tym wypadku pionowe równa się ciężarowi ziemi ABC , nad murem leżącej.

Gdy $\alpha > 180 - \varrho$, wtedy ciśnienie P jest także pionowe, (rys. 365) i równe ciężarowi ziemi nad murem leżącej, bo wtedy ziemia nie może się usuwać w płaszczyźnie AB , lecz w razie poddania się muru utworzy się w powierzchni AE , nachylonej pod kątem ϱ do poziomu, szczelina i na tej płaszczyźnie ziemia będzie się usuwała. Rozłożyć więc możemy wtedy ABC na AEC i ABE , a z poprzedniego wiemy, że, jeżeli naziom jest symetryczny do AC , to C_1 parcie na AE jest pionowem i równem ciężarowi klina AEC , gdyż klin ten, nie usuwając się, działa tylko na mur swym ciężarem, a więc wypadkowe parcie P będzie pionowe i równe ciężarowi klina ABC , czyli ziemi nad murem leżącej i zaczepiać będzie w jego środku ciężkości.

Twierdzenie to ważnem jest także dla $\alpha = 180^\circ$ czyli dla muru poziomego, na który parcie ziemi jest pionowe i równe ciężarowi ziemi nad murem leżącej, w przybliżeniu nawet wtedy, gdyby naziom nie był nawet symetryczny do AC .

Aby się przekonać o rzetelności równania 747), zastosujemy ten wzór do parcia wody, a przyjmąwszy $\varrho=0$ i $\delta_1=0$, musimy otrzymać znane wzory dla parcia wody (rys. 366).



Rys. 366.

Nie znając kąta φ , przyjmujemy go z początku dowolnie, niech więc będzie AC płaszczyzną odłamu, to otrzymamy z równania 747):

$$P = \frac{C \operatorname{wst} \varphi}{\operatorname{wst}(\varphi + \psi)} = \frac{C \operatorname{wst} \varphi}{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi)},$$

ciężar zaś odłamu będzie:

$$\begin{aligned} C &= \gamma_w ABC = \gamma_w \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} \gamma_w h (EC - EB) = \\ &= \frac{1}{2} \gamma_w h (h \operatorname{dost} \varphi - h \operatorname{dost} \alpha) = \frac{1}{2} \gamma_w h^2 \frac{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{wst} \alpha \operatorname{wst} \varphi}. \end{aligned}$$

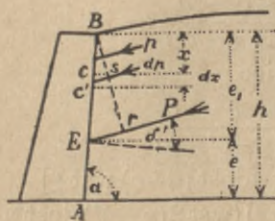
Wstawiając wartość za C w równanie dla P , otrzymamy

$$P = \frac{1}{2} \gamma_w h^2 \frac{\operatorname{wst}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{wst} \alpha \operatorname{wst} \varphi} \cdot \frac{\operatorname{wst} \varphi}{\operatorname{wst}(\varphi + \psi)} = \frac{1}{2} \gamma_w \frac{h^2}{\operatorname{wst} \alpha}. \quad (750)$$

znany wzór hydrostatyczny.

§. 173. Ogólne wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi.

Nazwijmy p parcie ziemi na część muru BC (rys. 367) przyczem rzut pionowy długości BC niech się nazywa x . Jeżeli x wzrośnie o dx , to p wzrośnie o dp , parcie na część muru CC' . Całe parcie P na mur AB będzie $P = \int_0^h dp$.



Rys. 367.

Moment siły dp ze względu na punkt B jest $dp \cdot Bs = dp \cdot BC \operatorname{dost} \varrho = dp \cdot \frac{x}{\operatorname{wst} \alpha} \operatorname{dost} \varrho$. Moment siły wypadkowej P będzie więc $P \cdot Br =$

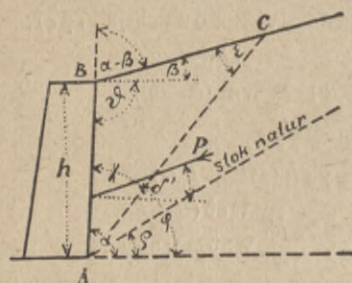
$$= P \cdot BE \operatorname{dost} \varrho = P \frac{e_1}{\operatorname{wst} \alpha} \operatorname{dost} \varrho =$$

$$= \frac{\operatorname{dost} \varrho}{\operatorname{wst} \alpha} \int_0^h x dp, \text{ a stąd } e_1 = \frac{1}{P} \int_0^h x dp. \quad (751)$$

W szczególnych wypadkach wyznaczamy dp , wstawiamy w równanie 751) i otrzymujemy w ten sposób e_1 , a stąd $e = h - e_1$.

§. 174. Wyznaczenie parcia ziemi, gdy naziom jest płaszczyzną, nachyloną do poziomu pod kątem β .

Przyпускаjemy, że naziom nachylony jest do poziomu pod kątem β (rys. 368) mniejszym od ϱ .



Rys. 368.

Parcie ziemi wyznaczamy według równania 747). W tym celu jednak musimy wprzód obliczyć ciężar odłamu C . Z rysunku otrzymamy

$$C = \gamma \cdot ABC = \frac{1}{2} \gamma \cdot AB \cdot AC \operatorname{wst}(\alpha - \varphi).$$

Z trójkąta ABC mamy

$$AB : AC = \operatorname{wst} \varepsilon : \operatorname{wst}(\vartheta + \beta),$$

przyczem

$$\varepsilon = 180 - \alpha + \varphi - \vartheta - \beta = 180 - \alpha + \varphi - (180 - \alpha + \beta) = \varphi - \beta, \text{ a więc}$$

$$AB : AC = \operatorname{wst}(\varphi - \beta) : \operatorname{wst}(\alpha - \beta),$$

$$\text{stad } AC = \frac{AB \operatorname{wst}(\alpha - \beta)}{\operatorname{wst}(\varphi - \beta)}.$$

Z rysunku mamy dalej $AB = \frac{h}{\operatorname{wst} \alpha}$. Wstawivszy wartości

$$\text{za } AB \text{ i } AC, \text{ otrzymamy } C = \frac{\gamma h^2 \operatorname{wst}(\alpha - \beta) \operatorname{wst}(\alpha - \varphi)}{2 \operatorname{wst}^2 \alpha \operatorname{wst}(\varphi - \beta)}.$$

Wstawmy tę wartość w 747), a otrzymamy

$$P = \frac{\gamma h^2 \operatorname{wst}(\alpha - \beta) \operatorname{wst}(\alpha - \varphi) \operatorname{wst}(\varphi - \varrho)}{2 \operatorname{wst}^2 \alpha \operatorname{wst}(\varphi - \beta) \operatorname{wst}(\alpha - \varphi + \varrho + \delta')}.$$

Z rysunku widzimy, że $\chi = \alpha - \varphi$, więc

$$P = \frac{\gamma h^2 \operatorname{wst}(\alpha - \beta) \operatorname{wst} \chi \operatorname{wst}(\alpha - \varrho - \chi)}{2 \operatorname{wst}^2 \alpha \operatorname{wst}(\alpha - \beta - \chi) \operatorname{wst}(\varrho + \delta' + \chi)}.$$

$$P = \frac{\gamma h^2 \operatorname{wst}(\alpha - \beta) \operatorname{wst} \chi [\operatorname{wst}(\alpha - \varrho) \operatorname{dost} \chi - \operatorname{dost}(\alpha - \varrho) \operatorname{wst} \chi]}{2 \operatorname{wst}^2 \alpha [\operatorname{wst}(\alpha - \beta) \operatorname{dost} \chi - \operatorname{dost}(\alpha - \beta) \operatorname{wst} \chi] (\operatorname{wst} 2(\varrho + \delta') \operatorname{dost} \chi + \operatorname{dost}(\varrho + \delta') \operatorname{wst} \chi)}.$$

Podzielmy licznik i mianownik przez $\operatorname{wst}(\alpha - \beta) \operatorname{wst}^2 \chi$, a otrzymamy:

$$P = \frac{\gamma h^2 \operatorname{wst}(\alpha - \varrho) [\operatorname{dot} \chi - \operatorname{dot}(\alpha - \varrho)]}{2 \operatorname{wst}^2 \alpha \operatorname{wst}(\varrho + \delta') \operatorname{dot} \chi - \operatorname{dot}(\alpha - \beta) (\operatorname{dot} \chi + \operatorname{dot}(\varrho + \delta'))}$$

Załóźmy $x = \operatorname{dot} \chi$, to

$$P = \frac{\gamma h^2 \operatorname{wst}(\alpha - \varrho)}{2 \operatorname{wst}^2 \alpha \operatorname{wst}(\varrho + \delta')} \frac{x - \operatorname{dot}(\alpha - \varrho)}{(x + \operatorname{dot}(\varrho + \delta'))(x - \operatorname{dot}(\alpha - \beta))},$$

czyli:
$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst}(\varrho + \delta')} \cdot U, \quad \dots \quad 752$$

gdy
$$U = \frac{x - \text{dot}(\alpha - \varrho)}{(x + \text{dot}(\varrho + \delta')) [x - \text{dot}(\alpha - \beta)]}, \quad \dots \quad 753$$

czyli
$$U = \frac{x - \text{dot}(\alpha - \varrho)}{x^2 + x[\text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)] - \text{dot}(\varrho + \delta') \text{dot}(\alpha - \beta)}$$

P będzie największem, gdy U będzie największem, więc

gdy $\frac{dU}{dx} = 0$. Różniczkując funkcję U , otrzymamy

$$\begin{aligned} & x^2 + x[\text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)] - \text{dot}(\alpha - \beta) \text{dot}(\varrho + \delta') + \\ & - [x - \text{dot}(\alpha - \varrho)][2x + \text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)] \\ + & \frac{\text{dot}(\alpha - \beta) \text{dot}(\varrho + \delta')}{(x^2 + x[\text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)] - \text{dot}(\alpha - \beta) \text{dot}(\varrho + \delta'))^2} = 0. \end{aligned}$$

Aby wyraz lewy równał się zeru, musi być albo licznik równym zeru albo mianownik równym ∞ . W tym ostatnim wypadku musiałoby być $x = \text{dot} \chi = \infty$, a więc $\chi = 0$, co jest niemożliwem. A zatem musi być licznik $= 0$, więc

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x \text{dot}(\alpha - \varrho) = \\ & = \text{dot}(\alpha - \varrho) \text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta) [\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot} 2(\varrho + \delta')], \text{ a stąd} \\ & x = \text{dot}(\alpha - \varrho) + \end{aligned}$$

$$\pm \sqrt{\text{dot}^2(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\alpha - \varrho) \text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta) [\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')]}$$

czyli $x = \text{dot} \psi =$

$$= \text{dot}(\alpha - \varrho) \pm \sqrt{[\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')][\text{dot}(\alpha - \varrho) - \text{dot}(\alpha - \beta)]}.$$

Ponieważ kąt χ jest ostry, więc $\text{dot} \chi > 0$, dlatego przyjmujemy tylko znak górny, więc

$$\text{dot} \chi = x = \text{dot}(\alpha - \varrho) +$$

$$+ \sqrt{[\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')][\text{dot}(\alpha - \varrho) - \text{dot}(\alpha - \beta)]}. \quad 754$$

Wprowadziwszy tę wartość za x w równanie 753), otrzymalibyśmy *najw* U . Lecz wzór byłby za zawilży, postąpimy więc inaczej. Niech będzie:

$$U = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x - \text{dot}(\alpha - \varrho)}{x^2 + x[\text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)] - \text{dot}(\varrho + \delta') \text{dot}(\alpha - \beta)},$$

to
$$\frac{dU}{dx} = \frac{F_1(x) f(x) - f_1(x) F(x)}{f(x)^2} = 0,$$

jeżeli $F_1(x)$ i $f_1(x)$ nazwiemy pochodne funkcji $F(x)$, względnie $f(x)$.

Ponieważ $f(x)$ nie jest $= \infty$, więc licznik musi być $= 0$, zatem $f(x) F_1(x) = f_1(x) F(x)$, a stąd

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \text{najw } U. \quad \dots \quad 755$$

Wykonajmy naznaczone działanie, a otrzymamy

$$\text{najw } U = \frac{1}{2x + \text{dot}(\varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha - \beta)}$$

Podstawivszy w to równanie wartość z równania 754), otrzymamy:

$$\text{najw } U = \frac{1}{[\sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')} + \sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) - \text{dot}(\alpha - \beta)^2}]^2}$$

a wstawivszy tę wartość w równanie 752), otrzymamy nareście

$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst}(\varrho + \delta') [\sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')} + \sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) - \text{dot}(\alpha - \beta)^2}]^2} \quad 756)$$

Chcąc wyznaczyć położenie punktu zaczepienia parcia ziemi, zastosujemy tu ogólne równanie 751).

Równanie 756) możemy napisać $P = ah^2$, gdzie a jest pewnym współczynnikiem, zależnym od α , β , ϱ i δ' , ale niezależnym od h .

Analogicznie możemy wyrazić parcie na część muru od wierzchołka aż do głębokości x $p = ax^2$, a więc $\frac{dp}{dx} = 2ax$. Wstawivszy to w równanie 751), otrzymamy:

$$e_1 = \frac{1}{P} \int_0^h x dp = \frac{1}{h^2} \int_0^h 2ax^2 dx = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{2}{3}h, \text{ a więc}$$

$$e = h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}h. \quad \dots \quad 757)$$

Punkt zaczepienia parcia ziemi leży więc dla naziomu płaskiego w jednej trzeciej części wysokości stoku.

§. 175. Parcie ziemi dla naziomu poziomego.

Dla poziomego naziomu (rys. 369) jest $\beta = 0$, więc otrzymamy z równania 756):

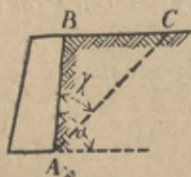
$$P = \frac{\gamma h^2 \text{wst}(\alpha - \varrho)}{2 \text{wst}^2 \alpha \text{wst}(\varrho + \delta') [\sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) + \text{dot}(\varrho + \delta')} + \sqrt{\text{dot}(\alpha - \varrho) - \text{dot} \alpha^2}]^2}$$

Podstawmy $\text{dot} \alpha = a$, $\text{dot} \varrho = r$, $\text{dot} \delta' = d$

a więc

$$\text{dot}(\varrho + \delta') = \frac{dr - 1}{d + r},$$

$$\text{dot}(\alpha - \varrho) = \frac{ar + 1}{r - a}, \text{ a będziemy mieli}$$



Rys. 369.

Tablica XLIX.

$\frac{P}{\gamma h^2} =$		Wartości dla $\text{st } \beta$										
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Wartości dla $\text{st } \rho$	1,0	0,081	0,085	0,091	0,095	0,102	0,110	0,119	0,132	0,150	0,179	0,297
	0,9	0,092	0,098	0,104	0,116	0,119	0,129	0,143	0,162	0,194	0,322	—
	0,8	0,106	0,115	0,120	0,129	0,141	0,155	0,174	0,210	0,348	—	—
	0,7	0,122	0,135	0,140	0,153	0,168	0,191	0,227	0,374	—	—	—
	0,6	0,143	0,153	0,167	0,184	0,207	0,244	0,401	—	—	—	—
	0,5	0,169	0,185	0,201	0,226	0,267	0,425	—	—	—	—	—
	0,4	0,202	0,222	0,261	0,290	0,449	—	—	—	—	—	—
	0,3	0,248	0,271	0,314	0,465	—	—	—	—	—	—	—

Jeżeli oprócz tego naziom jest poziomy, czyli $\beta=0$, wtedy

$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \text{st}^2 \delta'}}{2[\sqrt{1 + \text{st}^2 \rho} + \sqrt{(\text{st } \rho + \text{st } \delta') \text{st } \rho}]^2},$$

a wstawivszy $r = \text{dot } \rho$ a $d = \text{dot } \delta'$, otrzymamy

$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \frac{1}{d^2}}}{2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} + \sqrt{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d}\right) \frac{1}{r}} \right]^2} = \frac{\gamma h^2 r^2 \sqrt{1 + d^2}}{2[(1+r^2)d + \sqrt{d+r}]^2}. \quad 760)$$

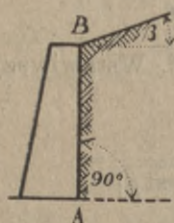
To samo otrzymamy z równania 758), wstawivszy $\alpha=90^\circ$, więc $\text{dot } \alpha = a=0$.

Jeżeli wstawimy w równ. 760) $\delta'=0$, $d=\infty$, otrzymamy:

$$P = \frac{\gamma h^2 r^2}{2[\sqrt{1+r^2}+1]^2} = \frac{\gamma h^2 \text{dot}^2 \rho}{2[1+\text{dosiecz } \rho]} = \frac{\gamma h^2}{2} \text{st}^2 \left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right). \quad 761)$$

Gdy naziom jest równoległy do stoku naturalnego to $\beta=\rho$, a więc z 759) otrzymujemy:

$$P = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1 + \text{st}^2 \delta'}}{2[\sqrt{1 + \text{st}^2 \rho}]^2} = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sqrt{1 + \text{st}^2 \delta'}}{1 + \text{st}^2 \rho} = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\text{dost}^2 \rho}{\text{dost } \delta'}. \quad 762)$$



Rys. 370.

§. 177. Wyznaczenie parcia ziemi dla naziomu pochyłego zakończonego płaszczyzną poziomą.

Gdy naziom wznosi się pod kątem β aż do pewnej wysokości h_0 , a potem zakończony jest płaszczyzną poziomą (rys. 371), to ciężar odłamu $C = \gamma(AED - BEC)$.

Dalej mamy

$$AED = \frac{1}{2} H \cdot ED = \frac{1}{2} H (FD - EF) = \frac{1}{2} H^2 (\dot{\varphi} - \dot{\alpha}),$$

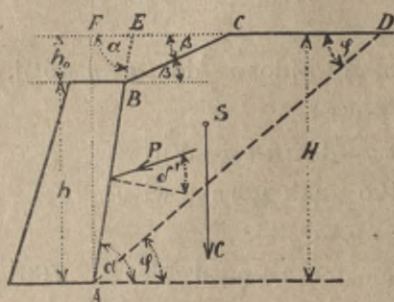
$$BEC = \frac{1}{2} h_0^2 (\dot{\beta} - \dot{\alpha}), \text{ więc}$$

$$C = \frac{1}{2} \gamma H^2 (\dot{\varphi} - \dot{\alpha}) + \\ - \frac{1}{2} \gamma h_0^2 (\dot{\beta} - \dot{\alpha}),$$

$$\text{albo } C = \gamma \frac{H^2}{2} \left[(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}) + \right.$$

$$\left. - \left(\frac{h_0}{H} \right)^2 (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \right] =$$

$$= \frac{\gamma H^2}{2} (\dot{\varphi} - k), \quad 763)$$



Rys. 371.

$$\text{gdz } k = \dot{\alpha} + \left(\frac{h_0}{H} \right)^2 (\dot{\beta} - \dot{\alpha}), \quad 764)$$

któryto wyraz jest od φ niezależnym.

Podstawiając w równanie 748) wartość za C , otrzymamy

$$P = \frac{\gamma H^2}{2} (\dot{\varphi} - k) \frac{\text{wst}(\varphi - \varrho)}{\text{wst}(\alpha + \varrho + \delta' - \varphi)}, \text{ czyli}$$

$$P = \frac{\gamma H^2 (\dot{\varphi} - k) (\text{wst } \varphi \text{ dost } \varrho - \text{wst } \varrho \text{ dost } \varphi)}{2 [\text{wst}(\alpha + \varrho + \delta') \text{ dost } \varphi - \text{dost}(\alpha + \varrho + \delta') \text{ wst } \varphi]},$$

a podzieliwszy przez $\text{wst } \varphi$ licznik i mianownik

$$P = \frac{\gamma H^2 (\dot{\varphi} - k) (\text{dost } \delta - \text{wst } \delta \text{ dost } \varphi)}{2 [\text{wst}(\alpha + \varrho + \delta') \text{ dost } \varphi - \text{dost}(\alpha + \varrho + \delta')]} = \\ = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho (\dot{\varphi} - k) (\text{dot } \varrho - \text{dot } \varphi)}{2 \text{wst}(\alpha + \varrho + \delta') [\text{dot } \varphi - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')]},$$

$$\text{a gdz } x = \text{dot } \varphi, \quad P = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho (x - k) (\text{dot } \varrho - x)}{2 \text{wst}(\alpha + \varrho + \delta') [x - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')]} = \\ = \frac{\gamma H^2 \text{wst } \varrho}{2 \text{wst}(\alpha + \varrho + \delta')} \cdot U, \quad 765)$$

$$\text{gdz } U = \frac{(x - k) (\text{dot } \varrho - x)}{x - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')}.$$

Jeżeli U , a więc i P , ma być największem, to $\frac{dU}{dx} = 0$, więc

$$\frac{dU}{dx} = \frac{[x - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')] (\text{dot } \varrho - 2x + k) - (x - k) (\text{dot } \varrho - x)}{[x - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')]^2} = 0.$$

Ponieważ ani $x = \text{dot } \varphi$, ani $\text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')$ nie mogą być równa ∞ , więc musi być $[x - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')] (\text{dot } \varrho - 2x + k) - (x - k) (\text{dot } \varrho - x) = 0$, czyli $x (\text{dot } \varrho + k) - 2x^2 + 2x \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') - x (\text{dot } \varrho + k) + x^2 = \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') (\text{dot } \varrho + k) - k \text{dot } \varrho$, stąd $x^2 - 2x \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') = \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') \text{dot } \varrho + k (\text{dot } \varrho - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta'))$,

a więc

$$\frac{x = \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') + \pm \sqrt{\text{dot}^2(\alpha + \varrho + \delta') - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') \text{dot} \varrho + k(\text{dot} \varrho - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta'))}}{x = \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') + \pm \sqrt{\text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') [\text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') - \text{dot} \varrho] + k[\text{dot} \varrho - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')]}, \text{ albo}$$

wreszcie

$$\frac{x = \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') + \pm \sqrt{[k - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')] [\text{dot} \varrho - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')].}}{}$$

Dla *najw* U przyjmujemy tylko znak górny, więc

$$\frac{x = \text{dot} \varphi = \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') + \sqrt{[k - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')] [\text{dot} \varrho - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')].}}{\dots} \quad 766)$$

Według równ. 755) otrzymamy, przyjmawszy $U = \frac{F(x)}{f(x)}$,

$$\text{najw } U = \frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{\text{dot} \varrho - 2x + k}{1} = \text{dot} \varrho - 2x + k, \text{ więc}$$

$$\begin{aligned} \text{najw } U &= \text{dot} \varrho + k - 2 \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta') + \\ &= 2 \sqrt{[k - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')] [\text{dot} \varrho - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')]}, \end{aligned}$$

stąd $\text{najw } U = \sqrt{[k - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')] - \sqrt{[\text{dot} \varrho - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')]}}^2$.

Wstawivszy tę wartość w 765), otrzymamy

$$\mathbf{P} = \frac{\gamma H^2 \text{wst} \varrho}{2 \text{wst}(\alpha + \varrho + \delta')} [\sqrt{k - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')} - \sqrt{\text{dot} \varrho - \text{dot}(\alpha + \varrho + \delta')}]^2. \quad 767)$$

Jeżeli przytem mur jest pionowy, to $\alpha = 90^\circ$, $\text{dot} 90^\circ = 0$, więc według równania 764) $k = \left(\frac{h_1}{H}\right)^2 \text{dot} \beta$.

Wstawivszy to w równ. 767), otrzymamy dla muru pionowego:

$$\mathbf{P} = \frac{\gamma H^2 \text{wst} \varrho}{2 \text{dot}(\varrho + \delta')} \left[\sqrt{\frac{h_1^2 \text{dot} \beta}{H^2} + \text{st}(\varrho + \delta')} - \sqrt{\text{dot} \varrho + \text{st}(\varrho + \delta')} \right]^2. \quad 768)$$

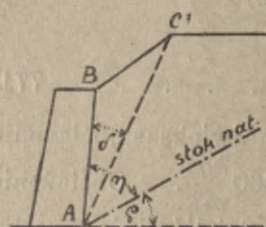
Dla $\varrho = 33^\circ$, $\delta = \frac{3}{4} \varrho = 24^\circ 45'$ i $\beta = \varrho$ otrzymamy z równ. 768) następną tabliczkę:

Tablica L.

$\frac{h_0}{h} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$P =$	0,132	0,129	0,123	0,116	0,108	0,100	0,092	0,085	0,079	0,073 γH^2
$\frac{h_3}{h} =$	1	2	3	4	5	6	10			
$P =$	0,067	0,035	0,021	0,014	0,010	0,007	0,003 γH^2			

§. 178. Wysokość punktu zaczepienia parcia ziemi dla naziomu płaskiego, zakończonego płaszczyzną poziomą.

Dokładne wyznaczenie punktu zaczepienia w sposób analityczny jest bardzo zawiłe; wykreślnie rozwiążemy to zagadnienie daleko łatwiej. Teraz ograniczymy się więc na podaniu wyników odnośnych badań Poncelet'a, Rebhanna i Culmanna, a mianowicie, że najw $e = 0,375 h$ i to dla $\delta = \frac{1}{3} \eta$ (rys. 372).



Rys. 372.

Widzimy więc, że dla innych wartości δ leży e w ciasnych granicach między $0,333 h$ i $0,375 h$.

§. 179. Uwzględnienie ciężaru ruchomego.

Jeżeli obciążenie ziemi wynosi $q \frac{kg}{m^2}$, to da się ono zastąpić warstwą ziemi o wysokości h_1 (rys. 373), której ciężar równałby się obciążeniu q . A więc, gdy ciężar gatunkowy ziemi jest γ , to ciężar m^2 warstwy ziemi o wysokości h_1 jest γh_1 , a więc $\gamma h_1 = q$, a stąd

$$h_1 = \frac{q}{\gamma} \quad \dots \quad 769)$$

Jeżeli więc teraz wyznaczmy parcie ziemi na ścianę AC , a od tego odciągniemy parcie ziemi na długości BC , to otrzymamy parcie ziemi na AB z uwzględnieniem obciążenia.

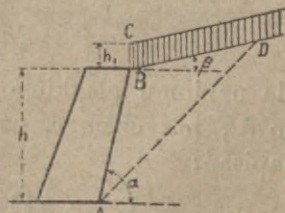
Wpływ obciążenia możemy też inaczej uwzględnić, a mianowicie podobnie, jak w §. 167, wstawiając we wzory, wyznaczające ciężar odłamu C dla naziomu płaskiego, zamiast γh wyraz

$$\gamma h + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\operatorname{wst}(\alpha - \beta)} =$$

$$\gamma h = \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst}(\alpha - \beta)} \right) = \gamma h c,$$

jeżeli $c = 1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst}(\alpha - \beta)}$, przyczem

$l = AD$ zostawiamy niezmiennione.



Rys. 373.

Otrzymamy więc ciężar odłamu z uwzględnieniem obciążenia $C' = Cc$, jeżeli C oznacza ciężar odłamu bez uwzględnienia obciążenia. Dalej otrzymamy:

$$P' = Pc = P \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst} (\alpha - \beta)} \right), \quad \dots \quad 770)$$

a dla naziomu poziomego, ponieważ $\beta = 0$,

$$P' = P \left(1 + \frac{2q}{\gamma h} \right). \quad \dots \quad 771)$$

Dla dróg przyjmujemy zwykle jako największe obciążenie tłum ludzi lub wozów, zatem $q = 400$ do $460 \frac{kg}{m^2}$. Obciążenie wałkiem jest zwykle większem; należy rozdzielić ciężar wałka równo na podstawę powiększoną ze wszystkich stron o grubość żwirówki. Dla kolei możemy przyjąć przy obciążeniu parowozami przeciętnie $q = 1400 \frac{kg}{m^2}$, która to wartość jednak zależy od ciężaru parowozów, rozstępu osi i szerokości nasypu. Dokładniej licząc trzeba rozdzielić ciężar osi, znajdujących się na długości BD , równomiernie, uwzględniając rozdzielenie się ciśnienia przez żwir i nasyp pod 45° . Twierdzenia te odnoszą się do wypadków, gdy ciężar jest w przybliżeniu równo rozdzielonym. Jeżeliby jednak poza punktem D był jakiś wielki ciężar, to należałoby spróbować, czy uwzględniając także ten ciężar po za D nie otrzymamy innej płaszczyzny odłamu, mamy bowiem wtedy stok sprowadzony już nie płaski, lecz załamany. Wtedy wykreślić wyznaczyć możemy parcie wedle §. 182.

Wskutek obciążenia zmienia się punkt zaczepienia parcia ziemi, a mianowicie, ponieważ obciążenie działa u góry, punkt zaczepienia podniesie się. Postępując według ogólnej metody (§. 173), otrzymamy z równania 770):

$$P' = Pc = c_1 h^2 \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma h \operatorname{wst} (\alpha - \beta)} \right)$$

dla naziomu płaskiego, bo wtedy parcie P jest proporcjonalne do h^2 , przyczem c_1 oznacza liczbę stałą. Możemy wtedy też napisać:

$$P' = c_1 h \left(1 + \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma \operatorname{wst} (\alpha - \beta)} \right) = c_1 h (h + c_2),$$

a stąd dla wysokości x (rys. 374)

$$p' = c_1 x (x + c_2), \text{ a dalej } dp' = 2c_1 x dx + c_1 c_2 dx.$$

Według metody ogólnej (równ. 751) mamy

$$e'_1 = \frac{1}{P} \int_0^h x dp' = \frac{1}{c_1 h (h + c_2)} \left[\int_0^h 2 c_1 x^2 dx + \int_0^h c_1 c_2 x dx \right],$$

a scałkowawszy, otrzymamy:

$$e'_1 = \frac{1}{h(h+c)} \left(\frac{2h^3}{3} + \frac{h^2}{2} c_2 \right), \text{ a więc}$$

$$e' = h - e'_1 = \frac{6h^2(h+c_2) - 4h^3 - 3h^2 c_2}{6h(h+c_2)}$$

czyli

$$e' = \frac{2h^2 + 3hc_2}{6(h+c_2)} = \frac{h}{3} \frac{h + \frac{3}{2}c_2}{h+c_2}, \quad \dots \quad 772)$$

przyczem

$$c_2 = \frac{2q \operatorname{wst} \alpha}{\gamma \operatorname{wst}(\alpha - \beta)} \quad \dots \quad 773)$$

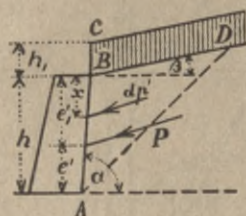
Z równania 772) widzimy, że e' jest zawsze większem, niż $\frac{h}{3}$, a mianowicie otrzymamy granice:

$$\text{dla } q=0 \quad c_2=0, \quad \text{więc } e' = \frac{h}{3},$$

$$\text{" } q=\infty \quad c_2=\infty, \quad \text{" } e' = \frac{h}{2}.$$

A zatem punkt zaczepienia parcia ziemi obciążonej leży między granicami $0,33h$ a $0,5h$. Jeżeli $\beta=0$, więc gdy naziom jest poziomy, mamy $c'_2 = \frac{2q}{\gamma}$, więc

$$e' = \frac{h}{3} \frac{h + \frac{3q}{\gamma}}{h + \frac{2q}{\gamma}} \quad \dots \quad 774)$$



Rys. 374.

XV. Parcie ziemi wyznaczone wykreślnie.

§. 180. Zasady.

Przypuśćmy, że prosta AC (rys. 375) jest przecięciem się płaszczyzny odłamu z płaszczyzną rysunku. Ciężar odłamu C rozkłada się, jak wiadomo, na siły P i Q , nachylone pod kątami δ' i ϱ do prostopadłych na proste AB i AC . Rozłóżmy siłę C wykreślnie, a mianowicie zróbmy $C=bc$, poprowadźmy $ba \parallel P$ i $ca \parallel Q$, a wtedy $ab=P$ a $ac=Q$.

Według równ. 773) mamy $F = dF \cdot \frac{abc}{adc}$, a wstawivszy wartość za dF

$$F = adc \left(1 + \frac{2h, \text{dost } \beta}{h'} \right) \frac{abc}{adc} = abc \left(1 + \frac{2h_1, \text{dost } \beta}{h'} \right). \quad 776)$$

Zróbmy $ae \parallel AC$, to $\sphericalangle cae = 90 + \varphi$, ale także $\sphericalangle cae = ca\hat{h} + hae = ca\hat{h} + \varphi + \varphi$, a stąd $\sphericalangle ca\hat{h} = 90 - \varphi$, a więc $\sphericalangle ach = 90 - ca\hat{h} = \varphi$.

Poprowadźmy teraz $CI \perp AD$, to $ACI \cong ach$, bo $AC = ac$, $\varphi = \sphericalangle ach$, a drugi kąt jest prostym, więc $CI = ah$. Z rysunku widzimy, że $\eta = \gamma + \varepsilon = 90 - \delta' + \varepsilon$, jeżeli ε oznacza kąt nachylenia ściany do pionu. Dalej mamy $\sphericalangle bah = 90 - \eta$, bo $ab \parallel P$, a ah pozioma. Wstawivszy wartość za η , otrzymamy $\sphericalangle bah = \delta_1 - \varepsilon$. Poprowadźmy CK pod kątem $\delta_1' - \varepsilon$ do CI , to otrzymamy $ACK \cong abc$, bo wszystkie boki są równoległe, a $CI = ah$. Stąd wynika ze względu na równanie 776)

$$F = ACK \left(1 + \frac{2h, \text{dost } \beta}{h'} \right). \quad 777)$$

Dla $p = 0$ jest $h_1 = 0$, więc $F = ACK$, a zatem dla ziemi nieobciążonej prosta AC połowi powierzchnię $ABCK$. Jest to prawo Rebhanna.

Chcąc wyznaczyć parcie P , ustawimy proporcją $P : C = ab : bc = CK : AK$. Zróbmy $KM = KC$, to otrzymamy $P : C = KM : AK$, a pomnożywszy drugą stronę równania przez $\frac{1}{2} CI$, otrzymamy $P : C = KMC : AKC$. Ponieważ zaś $C = \gamma F = \gamma ACK \left(1 + \frac{2h_1}{h} \text{dost } \beta \right)$, więc

$$P = C \frac{KMC}{AKC} = \gamma KMC \left(1 + \frac{2h_1, \text{dost } \beta}{h'} \right). \quad 778)$$

Ciężar graniastosłupa o podstawie KMC a wysokości równej jedności jest więc proporcjonalny do parcia ziemi P na mur AB . Graniastosłup KMC nazywamy dlatego graniastosłupem parcia (n. *Druckprisma*). Dla $p = 0$ jest $h_1 = 0$, więc

$$P = \gamma_1 KMC, \quad 779)$$

a zatem dla ziemi nieobciążonej ciężar graniastosłupa parcia równa się parciu ziemi na ścianę AB .

181. Parcie ziemi na mur płaski dla naziomu płaskiego.

Według równania 777) mamy

$$F = ACK \left(1 + \frac{2h_1 \text{dost } \beta}{h'} \right),$$

z rysunku, zaś 376 widzimy, że $F = ABC + h_1 BC \text{dost } \beta$; a więc

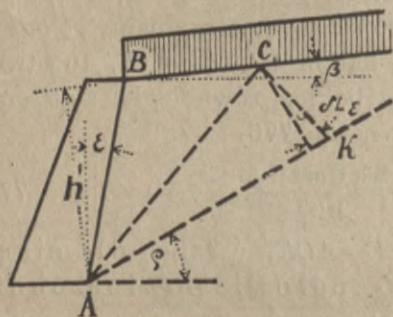
$$F = ABC \left(1 + \frac{h_1 BC \text{dost } \beta}{\frac{1}{2} BC \cdot h'} \right) = ABC \left(1 + \frac{2h_1 \text{dost } \beta}{h'} \right),$$

zatem porównawszy z równ. 777), otrzymamy

$$ABC = ACK. \quad \dots \quad 780)$$

A zatem, jeżeli naziom jest płaski, a ziemia jednostajnie obciążona, to położenie płaszczyzny odłamu jest niezależne od obciążenia, ponieważ i tu prosta AC połowi powierzchnię $FBCK$.

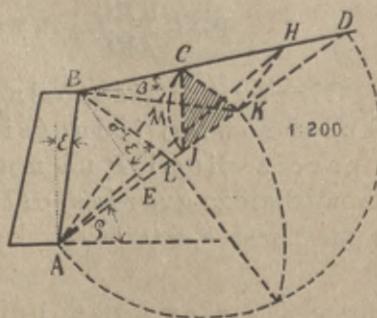
W dalszym ciągu będziemy więc wyznaczać zawsze płaszczyznę odłamu bez względu na obciążenie, które dopiero uwzględnimy, mnożąc graniastosłup parcia czynnikiem $(1 + \frac{2h_1}{h'} \text{dost } \beta)$. W przy-



Rys. 376.

bliżeniu licząc, postępować tak będziemy także wtedy, gdy naziom jest krzywym.

Jeżeli więc ziemia jest nieobciążona, to $ABC = ACK$ (rys. 377), a stąd $BM = MK$. Można by zatem wyznaczyć położenie prostej AC , próbując tak, aby BM było równe MK , przyczem CK ma być nachylone do prostopadłej na AD pod kątem $\delta' - \epsilon$. Spuścimy z punktu B prostopadłą BE na AD i wykreślimy BL pod kątem $\delta' - \epsilon$, to prosta BL będzie równoległą do CK i nazywa się kierującą (n. *Orientierungslinie*), bo wskazuje kierunek prostej CK .



Rys. 377.

W tym wypadku mamy $\sphericalangle BAL = 90^\circ - \rho - \varepsilon$, a więc kąt $ABE = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle BAL = \rho + \varepsilon$, zatem $\sphericalangle ABL = \sphericalangle ABE + \delta' - \varepsilon$, lub $\sphericalangle ABL = \rho + \delta'$ 781)

A więc kierująca nachyloną jest pod kątem $\rho + \delta'$ do ściany AB i to dla naziomu o dowolnym kształcie, bo przy udowodnieniu tego twierdzenia nie potrzebowaliśmy przypuszczać, że naziom jest płaski.

Płaszczyznę odłamu możemy też wprost wyznaczyć łatwą konstrukcją, którą zaraz uzasadnimy. Z rys. 377 wynika, że jeżeli zrobimy

$KH \parallel AC$, będzie $ACD \sim KHD$, a stąd $AK : AD = CH : CD$.

Ponieważ $KH \parallel AC$, więc $ACK = ACH$, a że także $ACK = ABC$, więc $ABC = ACH$, a stąd $BC = CH$.

Wstawmy tę wartość za CH w poprzednią proporcję, a otrzymamy

$AK : AD = BC : CD$, a z trójkątów $BLD \sim CKD$

$BC : CD = LK : KD$, a więc $AK : AD = LK : KD$, lub

$AK : AD = (AK - AL) : (AD - AK)$.

Pomnożywszy wyrazy skrajne i średnie, otrzymamy

$AK \cdot AD - AK^2 = AK \cdot AD - AD \cdot AL$, więc

$AK^2 = AD \cdot AL$, 782)

a zatem AK jest średnio geometrycznie proporcjonalną między długościami AD i AL .

Stąd wypływa łatwa konstrukcja wyznaczania punktu K , podana przez Ponceleta. Zatoczmy nad AD półkoło, wykreślmy kierującą BL , zróbmy $LN \perp AD$, wyznaczmy N , punkt przecięcia się LN z kołem, zróbmy $AN = AK$, to AN a więc i AK , będzie średnio geometrycznie proporcjonalną między AD i AL , a więc, jeżeli zrobimy $KC \parallel BL$, prosta AC będzie śladem płaszczyzny odłamu.

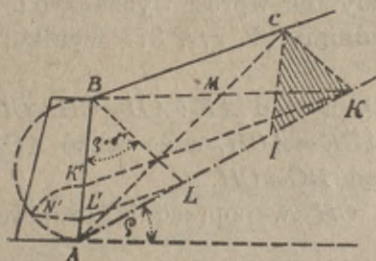
Przykład. Na rysunku 377 jest $\varepsilon = 8^\circ 45'$, $\alpha = 90^\circ - \varepsilon = 81^\circ 15'$, $\rho = 35^\circ$, $\text{st } \beta = 0,2$, $\beta = 11^\circ 18'$, $h = 3,8$ m. Wykreślnie otrzymujemy dla $\gamma = 1,8$ $P = \gamma \cdot CIK = \gamma \frac{1}{2} 1,80 \times 1,7 = 2,75$ t. Analitycznie otrzymamy (z równania 756).

$$P = \frac{1,8 \cdot 3,8^2 \text{ wst}(46^\circ 15')}{2 \text{ wst}^2 81^\circ 15' \text{ wst} 61^\circ 15' [\sqrt{\text{dot} 46^\circ 15' + \text{dot} 61^\circ 15'} + \sqrt{\text{dot} 46^\circ 15' - \text{dot} 69^\circ 57'}]^2} = 2,79 \text{ t.}$$

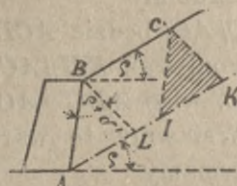
W uwzględnieniu małej podziałki zgodność jest dostateczną.

Jeżeli punkt D wypada poza papier, wtedy użyjemy następnej konstrukcyi pomocniczej. Wyznaczymy jak zwykle kierującą BL (rys. 378), poprowadźmy $LL' \parallel BD$. Zatoczmy nad

AB półkole, wystawmy $L'N' \perp AB$ i zrobmy $AK' = AN'$, to AK' będzie średnią geometrycznie proporcjonalną między AL' i AB . Poprowadźmy teraz $K'K \parallel BD$, to widzimy, że pęk promieni AB i AD przecięty jest trzema prostymi równoległymi, które dzielą prostą AD w ten sam sposób, co AB , a więc AK jest średnio geometrycznie proporcjonalną między AL i AD . Jeżeli zatem $KC \parallel BE$, to AC jest płaszczyzną odłamu.



Rys. 378.



Rys. 379.

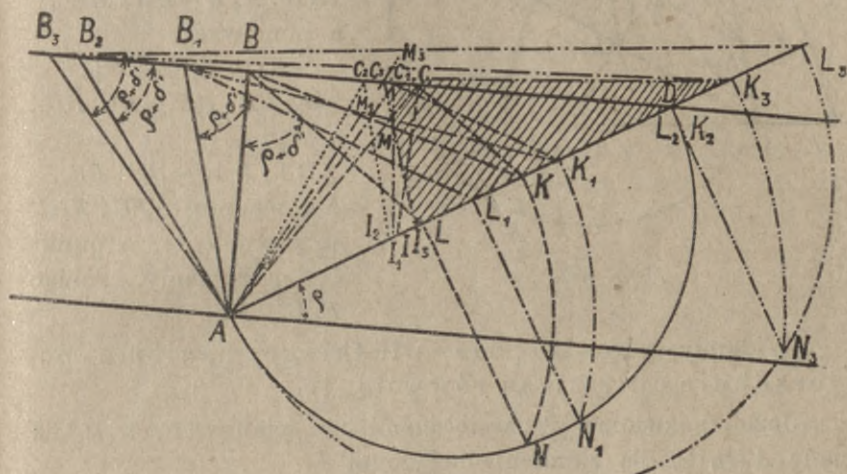
Jako próby możemy użyć znanej własności prostej CA , że dzieli prostą BK na dwie równe części, a więc, że $BM = MK$.

Konstrukcja ta jest ważną dla jakiegokolwiek kąta β , a więc i dla $\beta = 0$ i dla $\beta > 0$. Dla $\beta = \varrho$ (rys. 379) punkt D leży w nieskończonej odległości, tam też leży także punkt K , a więc płaszczyzna odłamu wpada na stok naturalny. Z powodu jednak, że $AK \parallel BC$, trójkąt CKI będzie miał tę samą powierzchnię, gdziekolwiek przyjmujemy punkt C . Przyjmujemy więc punkt C dowolnie i postępujemy dalej według ogólnego sposobu.

Chcąc zbadać, czy konstrukcja ta ważna jest dla jakiegokolwiek kąta nachylenia ściany AB , przyjmijmy najpierw ścianę AB pionową (rys. 380) i wyznaczmy w powyższy sposób powierzchnię odłamu AC . Niechaj ściana AB obróci się teraz około A na lewo, to ε staje się ujemnem, a punkt B przybierze kolejno położenie B_1 i B_2 . Wyznaczmy w ten sam sposób dla położenia ściany AB_1 powierzchnię odłamu, a otrzymamy punkt C_1 , dla położenia zaś ściany AB_2 , gdy $-\varepsilon = 90 - \varrho - \delta'$, kierująca wpada na linię naziomu B_2D , punkt L_2 na B , konstrukcja nasza płaszczyzny odłamu staje się wprawdzie wtedy niemożliwą, ale zarazem i niepotrzebną, bo i punkt K_2 wpada wtedy na D . Chcąc otrzymać C_2 , społowimy wtedy B_2D . Już

gdy punkt K zbliża się do D , kąt KCD staje się tak mały, że trzeba zawsze sprawdzać, czy $BM=MK$ i ewentualnie poprawić punkt przecięcia się C_1 .

Jeżeli ściana odchyli się jeszcze bardziej na lewo i przyjdzie np. w położenie AB_3 , to punkt L_3 wypada poza punkt D .



Rys. 380.

Wedle 782) mamy wyznaczyć AK_3 jako średnio geometrycznie proporcjonalną między AD i AL_3 . Zataczamy wtedy półkole na AL_3 , wystawiamy w D prostą aż do przecięcia się N_3 z półkolem, robimy $AN_3=AK_3$, z K_3 kreślimy $K_3C_3 \parallel L_3B_3$, przyczem sprawdzamy, czy $B_3M_3=M_3K_3$. Robimy dalej $K_3I_3=K_3C_3$ a trójkąt $K_3C_3I_3$ jest trójkątem parcia.

Dla $\alpha=180-\varrho$ wiemy już z §. 168, że płaszczyzna odłamu jest pionową, a dla $\alpha > 180-2\varrho$ umiemy też wyznaczać parcie ziemi.

Z rys 380 widzimy, że jeżeli ściana FB obraca się na lewo, płaszczyzna odłamu także się obraca w tym kierunku, chociaż daleko powolniej i dla FB_2 zbliża się do położenia, w którym $\varphi = \frac{90-\varrho-\delta'}{2}$.

Jeżeli CKI (rys. 381) jest graniastosłupem parcia ziemi na mur AB , to możemy też łatwo wyznaczyć graniastosłup parcia ziemi na część muru A_1B . Gdybyśmy dla punktu A_1 powtórzyli całą konstrukcją, to wykreślilibyśmy $A_1D_1 \parallel AD$

i wyszukali w znany sposób K_1 . Punkt ten jednak leżeć musi w prostej BK , bo pęk promieni, wychodzący z punktu B , dzieli

dwie równoległe $A_1 D_1$ i AD w tym samym stosunku. Więc otrzymamy

$$AB : A_1 B = BK : BK_1,$$

a ponieważ

$$KC \parallel K_1 C_1 \parallel BL,$$

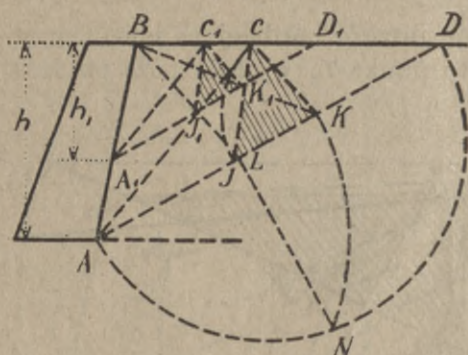
więc $BK : BK_1 = BC : BC_1$,

a stąd

$$BA : BA_1 = BC : BC_1.$$

A zatem proste FC i $F_1 C_1$ są równoległe, a punkt

C_1 otrzymamy, robiąc $F_1 C_1 \parallel FC$.



Rys. 381.

Widzimy więc, że dla płaskiego naziomu powierzchnie odłamu są równoległe.

Jeżeli nazwiemy P parcie ziemi na ścianę AB , a P_1 na ścianę $A_1 B$, to dla ziemi nieobciążonej

$$P : P_1 = \overline{CIK} : \overline{C_1 I_1 K_1},$$

zaś

$$\overline{CIK} : \overline{C_1 I_1 K_1} = \overline{CK^2} : \overline{C_1 K_1^2},$$

$$\overline{CK^2} : \overline{C_1 K_1^2} = \overline{AB^2} : \overline{A_1 B^2},$$

$$\overline{AB^2} : \overline{A_1 B^2} = h^2 : h_1^2, \text{ więc } P : P_1 = h^2 : h_1^2.$$

A zatem parcie ziemi nieobciążonej wzrasta dla naziomu płaskiego w stosunku kwadratowym wysokości muru.

§. 182. Parcie ziemi na mur płaski, gdy naziom tworzą dwie płaszczyzny.

Jeżeli naziom tworzą dwie płaszczyzny BG i GD (rys. 382), to, jeżeli AC jest płaszczyzną odłamu, powierzchnia odłamu jest teraz czworobokiem $ABGC$, który zamienimy na trójkąt AEC , przedłużając GD i robiąc $BE \parallel AG$. Z rysunku E kreślimy teraz pod kątem $\delta' - \varepsilon$ do prostopadłej na AD lub pod kątem $\varrho + \delta'$ do AB kierującą i wyznaczamy graniastosłup parcia, jak w poprzednim ustępie.

Przykład. Na rysunku 382 jest $h=4\text{ m}$, $h_0=2$, $\beta=45^\circ$, $\rho=35^\circ$, $\delta'=\frac{3}{4}\rho=26^\circ 15'$, $\text{st}\varepsilon=\frac{1}{2}$, $\varepsilon=11^\circ 18' 36''$, $\alpha=78^\circ 41' 24''$. Wykreślne dla $\gamma=1,8$ mamy $P=\gamma \cdot CIK=1,8 \frac{1}{2} \cdot 2,3 \times 2,18=4,51$. Analitycznie mamy według 764)

$k=\text{dot}\alpha + \left(\frac{h_0}{H}\right)^2 (\text{dot}\beta - \text{dot}\alpha) = 0,02 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 (1,00 - 0,02) = 0,02 + 0,109 = 0,129$,
a według równ. 767)

$$P = \frac{\gamma H^2 \text{wst}\rho}{2 \text{wst}(\delta + \rho + \delta')} [\sqrt{k - \text{dot}(\alpha + \rho + \delta')} - \sqrt{\text{dot}\rho - \text{dot}(\alpha + \rho + \delta')}]^2 =$$

$$= \frac{1,8 \times 6,0^2 \text{wst}35^\circ}{2 \text{wst}139^\circ 56' 24''} [\sqrt{0,129 - \text{dot}139^\circ 56' 24''} - \sqrt{\text{dot}35^\circ - \text{dot}139^\circ 56' 24''}]^2 =$$

$$= 1,67\text{ t.}$$

Chcąc się przekonać, w jakim stosunku do wysokości ściany AB zmienia się parcie, wyznaczmy miejsce geometryczne punktów K (rys. 383), których w znany sposób użyć możemy do wykreślenia trójkątów parcia.

Przypuśćmy najprzód, że ziemia ograniczona jest jedyną płaszczyzną BD_0 i wyznaczmy dla tego wypadku w zwykły sposób punkt K_0 . Ponieważ prosta, poprowadzona równolegle do kierującej z K_0 , trafia

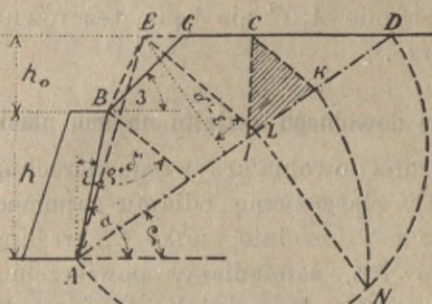
nie BG , lecz jej przedłużenie w punkcie C , więc punktu K_0 nie możemy użyć do wyznaczenia trójkątu parcia. Wiemy jednak, że prosta BK_0 jest miejscem geometrycznym punktów K dla odłamów nie sięgających jeszcze płaszczyzny GD . Graniczny punkt K_1 znajdziemy, poprowadzimy $GK_1 \parallel BL_0$, a zro-

biwszy dalej $K_1 A_1 \parallel KA$, otrzymamy punkt A_1 i płaszczyznę odłamu $A_1 G$, do której będą równoległe wszystkie płaszczyzny odłamu po lewej stronie $A_1 G$.

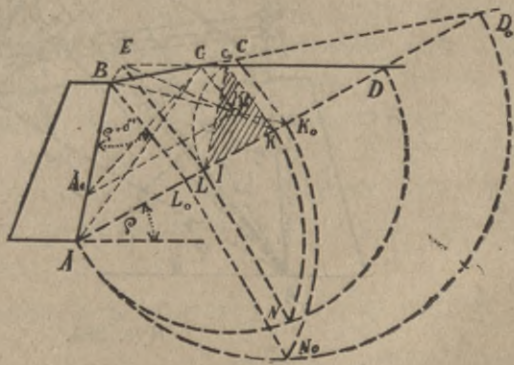
W tym celu wykreślmy miejsce geometryczne punktów K dla odłamów nie sięgających jeszcze płaszczyzny GD . Graniczny punkt K_1 znajdziemy, poprowadzimy $GK_1 \parallel BL_0$, a zro-

biwszy dalej $K_1 A_1 \parallel KA$, otrzymamy punkt A_1 i płaszczyznę odłamu $A_1 G$, do której będą równoległe wszystkie płaszczyzny odłamu po lewej stronie $A_1 G$.

W tym celu wykreślmy miejsce geometryczne punktów K dla odłamów nie sięgających jeszcze płaszczyzny GD . Graniczny punkt K_1 znajdziemy, poprowadzimy $GK_1 \parallel BL_0$, a zro-



Rys. 382.



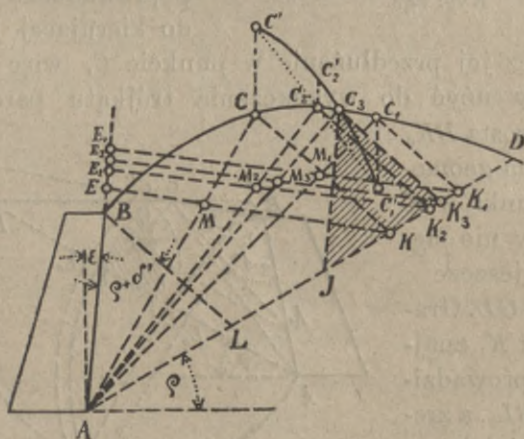
Rys. 383.

Chcąc otrzymać parcie dla całej wysokości AB , kreślimy AG , dalej $BE \parallel AG$, $EL \parallel BL_0$ i w zwykły sposób wyznaczamy punkt K . Gdyby punkt E był stałym, toby EK było miejscem geometrycznym punktów K . Ponieważ jednak dla punktów, wyżej A leżących, linia AG , więc i BE , pochyla się i punkt E posuwa się na prawo, a z nim i prosta EK , więc widzimy, że punkty K będą leżeć na krzywej, której dwa punkty K i K_1 i styczną EK znamy; możemy więc ją łatwo wykreślić.

Znając punkty K łatwo możemy wyznaczyć dla jakiegokolwiek wysokości ściany parcie ziemi, które dla części ściany AA_1 nie będzie proporcjonalnem do kwadratu wysokości. Płaszczyzny odłamu po prawej stronie $A_1 G$ nie będą też równoległymi, ale zbieżnemi ku górze.

§. 183. Parcie ziemi o naziomiu dowolnego kształtu na mur płaski.

Jeżeli ziemia jest ograniczona dowolną krzywą powierzchnią BCD (rys. 384), wyszukujemy płaszczyznę odłamu zapomocą próbowania. Obieramy mianowicie dowolnie punkt C , kreślimy CK równoległe do kierującej BL , zamieniamy powierzchnię ABC na trójkąt AEC , łączymy E z K , a jeżeli AC jest płaszczyzną odłamu, EM powinno być równe MK . Prawdopodobnie



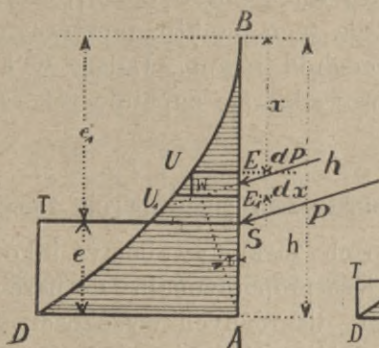
Rys. 384.

pokaże się, że tak nie jest, tu np. jest $MK > EM$. Wykreślamy teraz w C pionową i robimy $MK - EM = CC'$, wtedy CC' oznacza wielkość błędu dla przyjętej linii odłamu AC . Obieramy

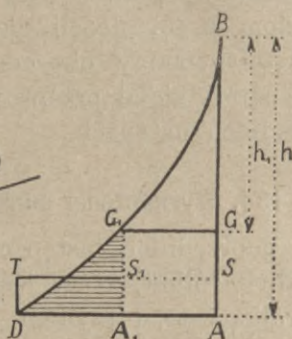
a stąd:
$$e = \frac{F}{P} \quad \dots \dots \dots 783)$$

Ponieważ $P = ED$, więc $F = FD \cdot e \quad \dots \dots \dots 784)$

a stąd wypływa konstrukcyja następująca: Zamieniamy płaszczyzną ABD w jakikolwiek sposób na prostokąt o podstawie AD , a wysokość jego $AS = e$ na mocy równ. 784.



Rys. 386.

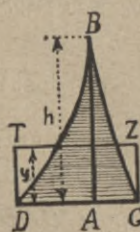


Rys. 387.

Ponieważ dla wysokości h parcie $P = DA$, zaś dla wysokości h_1 (rys. 387) $P_1 = GG_1$, więc parcie na część muru $GA P' = P - P_1 = AD - GG_1 = A_1 D$. Punkt zaczepienia parcia ziemi P' da się w zupełnie ten sam sposób wyznaczyć, jeżeli powierzchnię $DA_1 G_1$ zamienimy na prostokąt $A_1 S_1 TD$ o podstawie DA_1 , to $A_1 S_1$ wyznacza wysokość punktu zaczepienia S nad podstawą.

Dla ziemi obciążonej musimy parcie ziemi P i p , a zatem i każdą rzędną y , pomnożyć według równania 778) przez $(1 + \frac{2h}{h'} \text{dost } \beta)$, albo dodać do każdej rzędnej $y' = y \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}$ (rys. 388). Dla $x=0$ jest $y'=0$, a dla $x=h$ jest

$$y' = AC = AD \cdot \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'}$$



Rys. 388.



Rys. 389.

Tu więc dodać musimy do pow. ABD jeszcze powierzchnię ABC , a zresztą postępujemy, jak pierwiej. Robimy więc $CDTZ = CBD$, a wysokość $CZ = e'$.

Jeżeli naziom jest płaskim, to wiemy, że dla ziemi nieobciążonej $P = bh^2$ (równ. 756), a więc $y = bx^2$, gdzie b jest stałym współczynnikiem, a zatem linia

BD (rys. 388) jest parabolą. Dla ziemi obciążonej mamy:
 $P_1 = bh^2 \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'} \right)$, więc $y_1 = bx^2 \left(1 + \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'} \right)$, h' zmienia się proporcjonalnie do x , a więc $h' = h'_1 \frac{x}{h}$, jeżeli h'_1 oznacza h' dla wysokości h . A więc

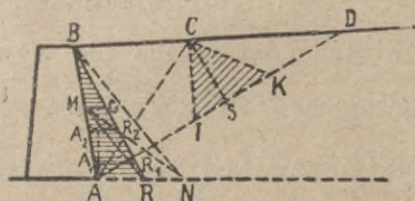
$$y_1 = y + \frac{2bx^2 h_1 \text{ dost } \beta}{x} = y + \frac{2bh_1 h \text{ dost } \beta}{h'_1} x = y + y'.$$

Widzimy zatem, że $y' = \frac{2bh_1 h \text{ dost } \beta}{h'_1} x$, więc jest funkcją pierwszego stopnia, linia BC jest zatem prostą. Długość AC otrzymamy, wstawivszy $x=h$, więc $AC = \frac{2bh_1 h^2 \text{ dost } \beta}{h'_1}$, a zważywszy, że $AD = bh^2$,

$$AC = AD \cdot \frac{2h_1 \text{ dost } \beta}{h'_1} \dots \dots \dots 785)$$

Drugi sposób wyznaczenia punktu zaczepienia parcia ziemi jest następujący:

Parcie ziemi dla jakiegokolwiek wysokości ściany możemy też przedstawić powierzchnią w ten sposób, że trójkąt parcia KCI (rys. 390) zamieniamy na ABR , którego jednym bokiem AB , robiąc $AN = IK$, $AG = CS$, $GM \parallel AN$, dalej łączymy N z B i kreślimy $MR \parallel BN$, to



Rys. 390.

$BAR = MAN = CIK$.

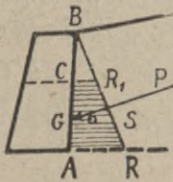
Powierzchnia ABR przedstawia więc parcie na ścianę AB . Łatwo jednak pojmujemy, że parcie ziemi na ścianę $A_1 B$ przedstawia trójkąt $A_1 R_1 B$, jeżeli natomiast jest płaskim, gdyż

w takim razie parcia są proporcjonalne do kwadratów wysokości, a więc $P : P_1 = \overline{AB^2} : \overline{A_1 B^2}$, a z rysunku widzimy, że $\overline{AB^2} : \overline{A_1 B^2} = \overline{ARB} : \overline{A_1 R_1 B}$, więc $P : P_1 = \overline{ARB} : \overline{A_1 R_1 B}$, zatem gdy $P = \overline{ARB}$, to $P_1 = \overline{A_1 R_1 B}$.

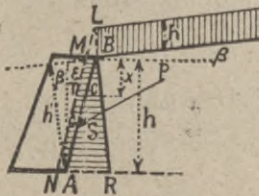
Z poprzedniego wyniku też, że $A_1 R_1 RA = \overline{ABR} - \overline{A_1 BR_1} = P - P_1$, a więc równa się parciu na część ściany AA_1 . Podobnie otrzymamy parcie na dowolną część ściany $A_1 A_2$ równe

powierzchni $A_1 A_2 R_2 R_1$. Widzimy więc, że parcie w każdym punkcie ściany AB wyraża się odnośną rzędną prostej BR , jeżeli BA przyjmiemy jako oś odcinków. Wypadkowa tych wszystkich sił zaczepiać więc musi w środku ciężkości odnośnej powierzchni, a więc dla całej wysokości AB w $\frac{1}{3}$ wysokości tej linii, bo ABR jest trójkątem.

Jeżeli mamy wyznaczyć punkt zaczepienia parcia ziemi na część muru AC (rys. 391), to wyszukujemy środek ciężkości S trapezu ACR , R , skąd prowadzimy poziomą SG , a punkt G jest punktem zaczepienia parcia ziemi na część ściany AC .



Rys. 391.



Rys. 392.

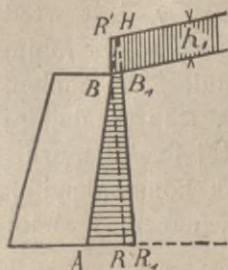
Jeżeli chcemy uwzględnić wpływ obciążenia ziemi, to musimy w razie, jeżeli naziom jest płaskim, dodać do trójkąta ABR (rys. 392) równoległobok $ABMN$. Wiemy bowiem, że $P_1 = P + P'$, przyczem $P' = \frac{2bh_1 h x \text{ dost } \beta}{h_1'}$, a więc wzrasta w prostym stosunku do x . Warunkowi temu odpowiada dla wysokości x powierzchnia równoległoboku $MBCT = CT \cdot x = \frac{P'}{\gamma}$, a stąd $CT = NA = \frac{2bh_1 h \text{ dost } \beta}{\gamma h_1'}$. Zważywszy, że $P = bh^2 = \gamma \cdot ABR = \gamma \frac{1}{2} AR \cdot h$, a stąd $bh = \gamma \cdot \frac{AR}{2}$, to wstawiwszy tę wartość w równanie dla NA , otrzymamy:

$$NA = AR \frac{h_1 \text{ dost } \beta}{h_1'} \dots \dots \dots 786)$$

Trapez $NMBR$ nazywamy trapezem parcia (n. *Drucktrapez*). Punkt zaczepienia parcia G wyznaczmy, jak pierwej, poprowadziwszy ze środka ciężkości trapezu S poziomą SG .

Trapez parcia możemy otrzymać też wykreślić w następujący sposób. Jeżeli obciążenie przedstawimy warstwą ziemi h_1

(rys. 393), to przedłużamy AB aż do przecięcia się z $R'H$ w H . Dla ściany AH wyznaczmy w zwykły sposób trójkąt parcia AHR_1 . Dla ściany BH będzie wtedy parcie BB_1H , a zatem parcie na AB przedstawia trapez BB_1R_1A . Ponieważ parcie



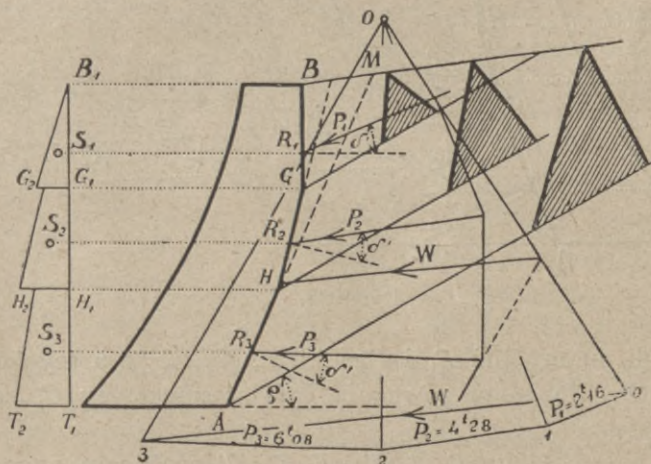
Rys. 393.

na mur nieobciążony AB jest ABR , przy-
czem $BR \parallel HR_1$, jeżeli jakość ziemi jest
na całej wysokości ta sama, więc możemy
postępować odwrotnie, wyznaczyć trójkąt
parcia ABR dla ziemi nieobciążonej, prze-
dłużyć AB do H , a z H wykreślić HR ,
równoległe do RR_1 , wtedy BB_1R_1A jest
trapezem parcia.

Jeżeli naziom nie jest płaskim, to
otrzymalibyśmy zamiast trójkąta i trapezu
figury, ograniczone liniami krzywymi, któ-
rych wykreślenie byłoby za żmudne, dlatego stosujemy wtedy
pierwszy sposób wyznaczenia punktu zaczepienia (rys. 388).

§. 185. Parcie ziemi na mur krzywy lub załamany.

Chcąc wyznaczyć parcie ziemi na mur krzywy AB (rys. 394)
dzielimy krzywą AB na pewną ilość części tak, aby pojedyncze
części AH , HG itd. można uważać jako proste. Zwykle mamy
do czynienia nie z murem krzywym, lecz wprost z murem,
ograniczonym linią łamaną $AHGB$. Dla każdej części muru



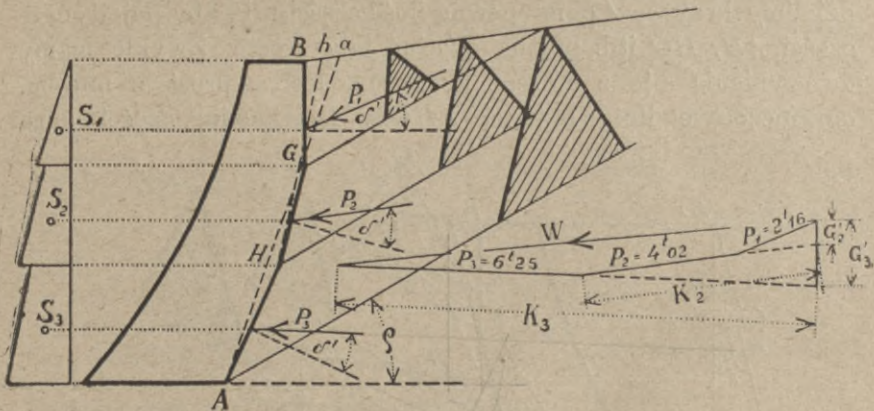
Rys. 394.

płaskiej obliczamy lub wykreślamy parcie ziemi na tę część ściany, a więc np. na AH różnicę parcia na ścianę AM i HM . Dla wyznaczenia punktu zaczepienia parcia na część muru AH najlepiej wykreślić, jeżeli naziom jest płaski, trapez parcia $T_1 T_2 H_2 H_1$ według poprzedniego paragrafu, wyznaczyć środek ciężkości trapezu S_3 i wykreślić poziomą $S_3 R_3$. R_3 jest wtedy punktem zaczepienia parcia ziemi na AH . To samo robimy i z innymi częściami ściany i otrzymamy punkty zaczepienia R_1, R_2 i R_3 , w których odnośne parcia P_1, P_2 i P_3 działają pod kątami δ' do prostopadłej na kierunek tej części muru.

Gdy naziom nie jest płaskim, wtedy tok konstrukcyi pozostaje ten sam, tylko punkty zaczepienia wyznaczamy według pierwszej metody.

Obliczenie parcia w sposób powyższy nie jest zupełnie dokładnem, bo przyjmujemy ścianę idealną AM , gdy w rzeczywistości jest po lewej stronie HM nie ściana, lecz ziemia, która wywiera pewne parcie czynne. Müller Breslau wyznacza dokładnie po kolei parcie P_1, P_2 i P_3 (rys. 395). Najłatwiej zrobić to na tej zasadzie, że powierzchnia *)

$$AHGC'' = AC'' K'' = G'' \dots \dots \dots 787)$$



Rys. 395.

Jeżeli znamy już P_1 i P_2 i kierunek P_3 , to z tego otrzymujemy G' . Na mocy równania 787) wyznaczymy C , zamie-

*) Uwaga. Litera C, C', C'' i K, K', K'' opuszczone na rys. 395 porównaj z rys. 390.

niwszy wprzód $AHGB C''$ na trójkąt, w zwykły sposób, a stąd otrzymamy trójkąt, a wreszcie trapez parcia.

Wobec wielkiej niepewności co do wszystkich danych γ , ρ , δ' wystarczy jednak w praktyce używać sposobu przybliżonego.

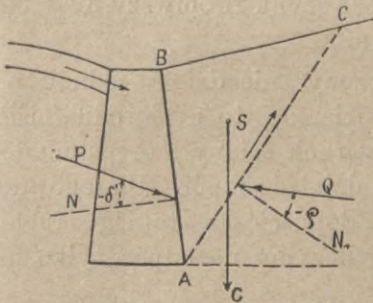
Przykład. Dla muru, przedstawionego na rys. 394, otrzymujemy dla $\gamma=1,8 t/m^2$ wedle sposobu przybliżonego $P_1=2,16 t$, $P_2=4,28 t$, $P_3=6,08 t$. Wedle sposobu dokładniejszego (rys. 395), a mianowicie, zamieniając czworobok $HGB C''$ na trójkąt $Aa C''$, otrzymamy $P_1=2,16 t$, $P_2=4,02 t$, $P_3=6,25 t$.

§. 186. Odpór ziemi.

Jeżeli ciśnienie prostopadłe N ściany AB (rys. 396) na ziemię jest równe składowej prostopadłej na ścianę parcia ziemi N , to ściana i ziemia pozostają w równowadze. Przypuśćmy teraz, że ciśnienie N wzrasta, to w takim razie, aby równowaga nie została zniweczona, musi wzrastać też ciśnienie ziemi. Dziać się to może jednak tylko do pewnej granicy, gdy bowiem N przekroczy tę granicę, część ziemi się usunie, a odłam ABC poruszy się w kierunku AC .

Ciśnienie ziemi więc, które zostaje wzbudzone ciśnieniem zewnętrznym, nazywamy odporem ziemi (n. *passiver Erddruck*, *Erdschub*, fr. *butée des terres*) w przeciwstawieniu do parcia ziemi (n. *aktiver Erddruck*, fr. *poussée des terres*), o którym dotąd mówiliśmy.

Ponieważ ruch ten nastąpi w kierunku AC , a nie CA , więc tarcie, które jest zawsze przeciwne kierunkowi ruchu, działać będzie w kierunku przeciwnym. Rozumując w ten sam

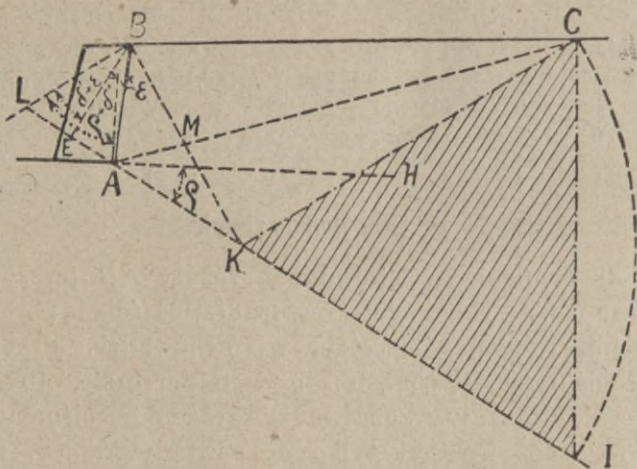


Rys. 396.

sposób, co pierwiej, otrzymamy więc odnośne wzory, jeżeli zamiast kąta tarcia ρ przyjmijemy kąt $(-\rho)$, a zamiast δ' kąt $(-\delta')$.

Przy wykreślnem wyznaczeniu oporu ziemi mamy więc tylko dwie zmiany, a mianowicie stok naturalny AK (rys. 397) wykreślamy pod kątem ρ poniżej osi, a kierującą prowadzimy nie pod kątem $\delta' - \epsilon$, lecz $-\delta' - \epsilon = -(\delta' + \epsilon)$, a więc

pod kątem $(\delta' + \varepsilon)$ po lewej stronie prostopadłej BE na stok naturalny, a więc BL . Kąt ABL równa się wtedy $\varrho + \delta'$. Przyjmujemy teraz punkt C tak, aby gdy poprowadzimy $CK \parallel BL$ i połączymy A z C a B z K , było $BM = MK$. Jeżeliby



Rys. 397.

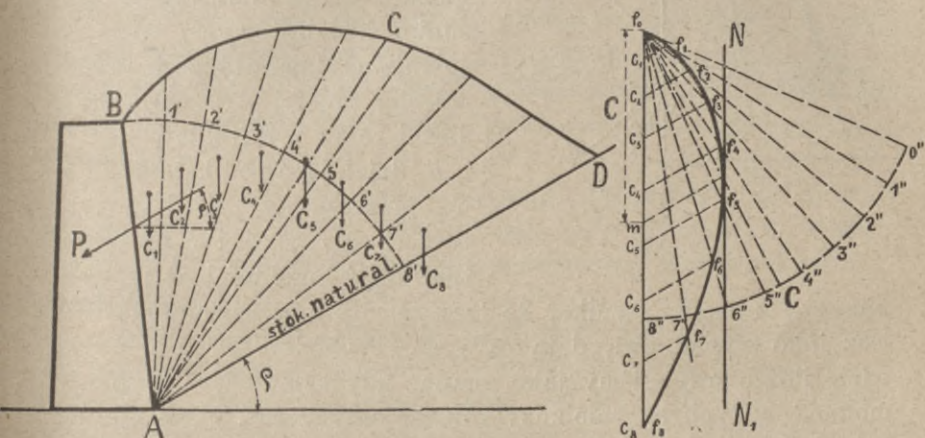
$BM > MK$, to obieramy inny punkt C , aż dopóki nie znajdziemy punktu, który temu warunkowi zadość czyni. Zrobiwszy $KI = KC$, otrzymamy wreszcie trójkąt odporu.

Odpór w ten sposób wyznaczony, nie działa jednak od razu. Gdy siła N (rys. 397) ciśnie ziemię, to z powodu ściśłości ziemi nastąpi najpierw mały ruch ściany AB , potem dopiero po ściśnięciu ziemi zaczyna działać odpór. Dlatego też w wypadkach, gdzie nie chcemy dopuścić do takiego ruchu muru, n. p. przy sklepieniach, nie liczymy na odpór tylko na parcie ziemi.

§. 187. Wyznaczenie wykreślne parcia ziemi sposobem Pilleta.

Prosty sposób wyznaczenia parcia ziemi podaje Pillet. Przypuśćmy ogólnie naziom dowolnie zakrzywiony (rys. 398). Wykreślmy AD , stok naturalny, i podzielmy powierzchnię ABD na pewną ilość klinów z wierzchołkiem A . Najlepiej przyjmować przytem kąty równe. W tym celu zataczamy łuk promie-

niem AB i dzielimy łuk BS' na pewną ilość (tu 8) równych części, poczem kreślimy promienie $A1'$, $A2'$ itd. Wyznaczamy powierzchnię klinów i odnośne ciężary odcinamy na pionowej $f_0 f_8$. Ciężary te rozkładają się na P i Q , P działa pod kątem δ' do prostopadłej na AB , a więc w kierunku naznaczonym na rysunku, Q zaś nachylone jest pod kątem ϱ do prostopadłej na



Rys. 398.

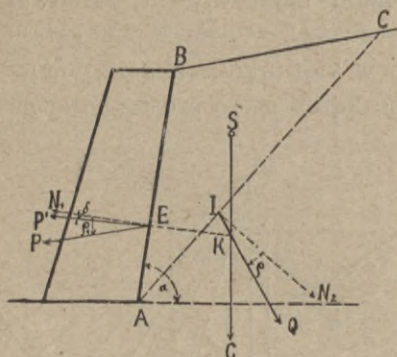
$A1'$, $A2'$, $A3'$ itd. Kierunek sił Q wyznaczymy łatwo. Dla AD kierunek Q jest pionowy. Jeżeli teraz zatoczmy łuk $8''0''$ tym samym promieniem i odetniemy równe takie same odcinki, wreszcie wykreślimy promienie $f_0 7''$, $f_0 6'' \dots f_0 0''$, to przedstawiają one kierunki sił Q . Z punktów $c_1, c_2, c_3 \dots c_7$ kreślimy teraz równoległe do P , a punkty przecięcia się f łączymy krzywą. Dla rozmaitych płaszczyzn odłamu otrzymujemy więc rozmaite parcia P , prawdziwą będzie płaszczyzna, dla której P jest największem. Jeżeli teraz poprowadzimy NN_1 pionową styczną do krzywej paré, to otrzymamy punkt styczności M' , a $M'm$ przedstawia szukane parcie P . Jeżeli zrobimy $5''C=5'C$, to AC jest płaszczyzną odłamu.

XVI. Inne teorye parcia ziemi.

§. 188. Poprawka dla równowagi w spoczynku.

Wspominaliśmy już w §. 167, że dla równowagi klinu ABC (rys. 399) trzy siły nań działające C , Q i P muszą się

przecinać w jednym punkcie. Jeżeli natomiast jest płaskim, wiemy, że parcie na ścianę AB wzrasta w stosunku kwadratowym,



Rys. 399.

a punkt zaczepienia siły P leży w $\frac{1}{3}$ wysokości ściany, w punkcie E . Ponieważ ciśnienie na płaszczyznę AC musi analogicznie także wzrastać w stosunku kwadratowym, więc ciśnienie Q działa także w jednej trzeciej prostej AC , więc w I . Jeżeli teraz wykreślimy siły Q i P , działające pod kątami ϱ i δ' na płaszczyznę AB i AC , to trzy te siły C , Q i P nie przeczną się w ogólności w jednym

punkcie, z czego wynika, że trzy te siły nie równoważą się, lecz jako wypadkową dają parę sił. Pochodzi to stąd, że za wiele ilości przyjęliśmy jako znane, gdy tymczasem równanie momentów tych sił, nie zużytkowane dotychczas, określa jedną z tych ilości.

Oto jeden zarzut, jaki słusznie robią dawnej teorii parcia ziemi, która dotychczas ogólnie używana, dawała wyniki dość zgodne z praktyką.

Drugi zarzut dotyczy się założenia, że powierzchnia odłamu jest płaszczyzną, co niezupełnie zgadza się z doświadczeniami a także i z warunkami równowagi. Co do tego ostatniego zarzutu zauważyć możemy, że tylko to założenie umożliwia obliczenie parcia ziemi, że przy belkach zginanych przyjmujemy także płaskie przekroje po ugięciu, gdy bliższe rozważania okazują nieprawdziwość tego założenia. Wogóle wszystkie nasze obliczenia w statyce budowli są tylko przybliżone, chodzi tylko o to, aby niedokładność nie przekraczała granic dopuszczalnych w praktyce.

Widząc sprzeczność, jaka się mieści się w dawnej teorii, próbowało wielu uczonych utworzyć inne teorie, wychodzące z równowagi w masie ziemi nieograniczonej, które w przeciwieństwie do dawniejszych teorii nazywamy nowszymi.

Zanim jednak zastanawiać się będziemy nad zasadami nowszej teorii, pokażemy, jak zapomocą stosownej poprawki

możemy zadość uczynić koniecznemu warunkowi przecinania się trzech sił C , P i Q w jednym punkcie.

Dawna teoria zapomina, że tarcie jest siłą bierną, która działa tylko o tyle, o ile tego potrzeba do przeszkodzenia ruchowi, a więc do równowagi w spoczynku. Jeśli siła zaczepiająca wzrasta, to wzrasta i tarcie do pewnej granicy, przy której jest równe $f_1 N_1$ i $f_2 N_2$. Jeśli więc przyjmujemy tarcia $f_1 N_1$ i $f_2 N_2$, to jest to słusznem tylko wtedy, gdy siła zaczepna (parcie) jest tak wielką, że przewycięża tarcie, a więc podczas ruchu odłamu. Wtedy jednak niema równowagi i dla tego wypadku trzy siły C , E i Q nie potrzebują się przecinać w jednym punkcie.

Widzimy więc, że przypuszczając ruch ściany lub ziemi, możemy używać wprost dawnej teorii parcia ziemi i że w stanie spoczynku parcie działa inaczej, niżby z dawnej teorii wypadło.

Jeżeli zauważymy odłam ABC , to zobaczymy, że wywiera on parcie na AB tylko wtedy i o tyle, o ileby przy usunięciu ściany AB odłam się usunął. Jeżeli np. $\alpha = \varrho$, to nie potrzeba wcale ściany. Stąd można wnioskować, że nim na ścianę AB odłam wywrze parcie, musi być całe tarcie na AC wyzyskaniem, a więc możemy przyjąć, że parcie Q działa w każdym razie pod kątem ϱ do prostopadłej na AC .

Przeciwnie działa podczas równowagi, a więc w stanie spoczynku, tarcie na AB tylko o tyle, o ile potrzeba go do zachowania równowagi. W ogólności więc działa zamiast siły P siła P' pod kątem $\delta < \varrho_1$ do prostopadłej. Aby się zastosować do wyników doświadczeń, myśmy założenie to zrobili już przy wyznaczeniu parcia, przyjmowaliśmy w przybliżeniu $\delta' = \frac{3}{4}\varrho$. Tu dla parcia w spoczynku wyznaczmy δ z warunku, aby siły P' , C i Q dla równowagi przecinały się w jednym punkcie.

Jeżeliśmy w jakikolwiek sposób wyznaczyli kierunek płaszczyzny odłamu, to przez to jest wyznaczony kierunek siły Q . Położenie siły ciężkości C jest także znane, chodzi więc jeszcze tylko o punkty zaczepienia sił P' i Q i kierunek siły P' .

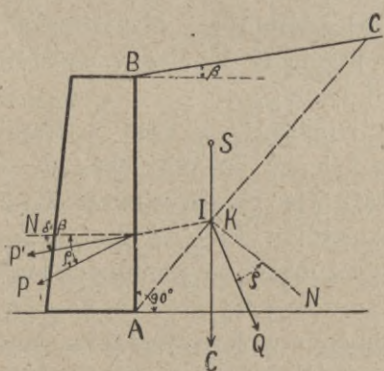
Otóż wiadomo, że przy naziomie płaskim punkt zaczepienia parcia ziemi P lub P' leży w jednej trzeciej wysokości ściany. Doświadczenia Gobina potwierdziły pośrednio to

twierdzenie, gdyż wykazały, że parcie wzrasta w przybliżeniu w stosunku kwadratu wysokości, z czego łatwo można wywnioskować, że punkt zaczepienia parcia leży w $\frac{1}{3}$ wysokości ściany*). Analogicznie musimy przyjąć, że siła Q zacze-
 pnia w $\frac{1}{3}$ wysokości płaszczyzny odłamu, bo niema powodu, aby odłam, znajdujący się między dwiema płaszczyznami, działał według innego prawa na jedną płaszczyznę, niż na drugą.

Przyjmujemy więc, że parcie zacze-
 pnia w E , przyczem $AE = \frac{1}{3} AB$, a siła Q w I , przyczem $AI = \frac{1}{3} AC$. Kierunek parcia P' jest wtedy wyznaczony warunkiem, że trzy siły P' , Q i C przecinają się w jednym punkcie K . Gdy więc połączymy punkt przecięcia się sił C i Q z E , otrzymamy kierunek parcia ziemi w stanie spoczynku, które to parcie nazwiemy geostatycznym w przeciwieństwie do geodynamicznego w stanie ruchu.

§. 189. Poszczególne wypadki.

Podaliśmy powyżej ogólną regułę dla wyznaczenia parcia geostatycznego, której jednak w niektórych wypadkach nie można użyć. Teraz zrobimy pewne założenia co do kierunku ściany i naziomu.



Rys. 400.

Jeżeli ściana jest pionową, to przecina kierunek siły C płaszczyznę odłamu w $\frac{1}{3} AC$ w punkcie I (rys. 400), punkty K i I wpadają więc na siebie a parcie geostatyczne na ścianę pionową jest równoległe do naziomu.

Jeżeli naziom wznosi się pod kątem β do poziomu, to $\delta = \beta$, jeżeli jest poziomy, $\delta = 0$. Przy spadającym naziomie musiałoby

*) Doświadczenia Müllera Breslaua wykazały dla nieobciążonej ziemi wysokości punktu zaczepienia

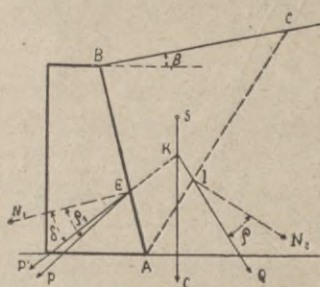
dla $\alpha =$	$-\rho$	$-\frac{1}{2}\rho$	0	$+\frac{1}{2}\rho$
$AE =$	0,31	0,33	0,36	0,375 AB

Wyniki te wymagają jeszcze potwierdzenia przez inne doświadczenia.

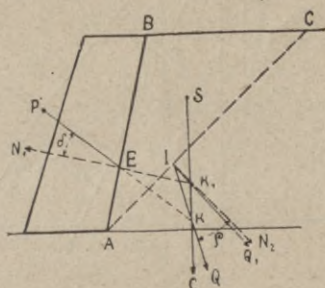
być parcie P' skierowane w górę. To trudno przypuścić, ten wypadek rzadko zresztą zdarzający się w praktyce, wymagałby osobnych doświadczeń, gdyż, przyjąwszy $\delta = 0$, trudno zrozumieć, w jaki sposób równowaga zostaje zachowaną.

Jeżeli ściana jest nachyloną na zewnątrz (rys. 401), ε ujemne, wtedy przecina kierunek siły C płaszczyznę odłamu AC w pierwszej trzeciej części, więc K znajduje się wyżej AC i w największej liczbie wypadków będzie wtedy $\delta < \varrho$ i dodatnie.

Jeżeli ściana jest pochylona na wewnątrz (ε dodatnie, rys. 402) wtedy przecina kierunek siły C prostą AC w średniej trzeciej części, zatem punkt K znajduje się poniżej AC . Jeżeli teraz połączymy K z E , to otrzymamy kierunek siły P' . Może tu łatwo się zdarzyć, że δ będzie ujemnem. Ponieważ trudno nam to przypuścić, prawdopodobnie będzie



Rys. 401.



Rys. 402.

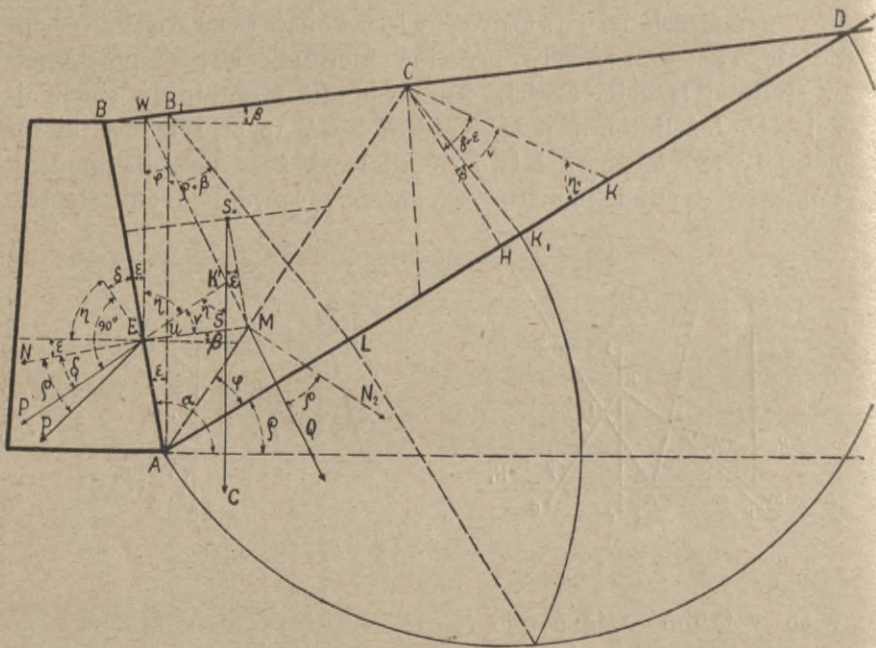
więc w takim razie parcie $P' = N_1$ prostopadłe na ścianę. Jako przecięcie parcia N_1 z C otrzymamy punkt K_1 , który połączony z I wyznacza parcie Q_1 na płaszczyznę odłamu, odchyłone od prostopadłej o kąt mniejszy, niż ϱ .

§. 190. Wyznaczenie płaszczyzny odłamu.

Dotychczas nie mówiliśmy, w jaki sposób wyznaczamy płaszczyznę odłamu, zastanowimy się teraz nad tem, bo z kątem δ , który tworzy parcie ziemi z prostopadłą na ścianę, zmienia się też i położenie płaszczyzny odłamu. Będzie więc inna płaszczyzna odłamu dla stanu spoczynku, a inna dla stanu ruchu. Pierwsza nie jest właściwie płaszczyzną odłamu,

gdyż podczas ruchu objawia się inna płaszczyzna odłamu; nazywamy jednak także tę płaszczyznę płaszczyzną odłamu, dla której parcie geostatyczne jest największem.

Położenie płaszczyzny odłamu jest zależne od kąta δ , który znów zależnym jest od położenia płaszczyzny odłamu. Wyznaczenie płaszczyzny odłamu wprost byłoby więc niemożliwym, gdyby nam nie przyszło w pomoc twierdzenie Almquista, które w tem miejscu podamy.



Rys. 403.

Na rys. 403 mamy wyznaczyć płaszczyznę odłamu AC , gdy ściana AB jest pochylona na zewnątrz pod kątem $-\epsilon$.

Wykreślmy pionową AB_1 i wyznaczmy najprzód płaszczyznę odłamu dla tej pomyślanej ściany pionowej. Wtedy jest parcie geostatyczne równoległe do BD , więc nachylone do poziomej pod kątem β , kreślmy zatem kierującą B_1L pod kątem $\varphi + \beta$, a z pomocą punktu L otrzymamy jak zwykle, K_1 , kreślmy $KC \parallel LB_1$, a AC jest płaszczyzną odłamu dla ściany pionowej AB_1 .

Otóż da się udowodnić, że tę samą płaszczyznę odłamu otrzymamy i dla ściany AB , nachylonej pod dowolnym kątem $-\varepsilon$. Jeżeli bowiem AC jest płaszczyzną odłamu, to możemy łatwo wynaleść środek ciężkości odłamu i położenie siły C . Przedłużmy kierunek siły Q do punktu przecięcia się K' , to $K'E$ jest kierunkiem parcia geostatycznego P' , który zawiera z prostopadłą kąt δ . Wykreślmy teraz prostą CK pod kątem $\delta + \varepsilon$ do prostopadłej CH , to jeżeli AC jest płaszczyzną odłamu, musi być $ABC = ACK$, co zaraz udowodnimy.

Widzimy, że $\eta + \delta + \varepsilon = 90^\circ$, a także kąt $K'EW = 90 - \delta - \varepsilon$, i $\eta_1 = 90 - \delta - \varepsilon = \eta$. Dalej mamy $\sphericalangle EWM = CAD = \varphi$, bo WM i EM zawierają z prostopadłymi na AD i AC ten sam kąt φ . A więc w trójkątach EKW i ACK są po dwa kąty równe, zatem $EKW \sim ACK$. Stąd wynika

$$AK : AC = EW : WK'. \quad \dots \quad \alpha)$$

Dalej mamy

$$\sphericalangle K'EM = \nu = \delta + \varepsilon - \beta, \quad = \sphericalangle K_1CK, \quad \text{a} \quad \sphericalangle AK_1C = \mu = \eta + \delta + \varepsilon - \beta = \nu + \eta = \sphericalangle WEM.$$

W trójkątach EWM i ACK_1 są więc po 2 kąty równe, a więc $EWM \sim ACK_1$, a stąd

$$AC : AK_1 = MW : EW. \quad \dots \quad \beta)$$

Z równań $\alpha)$ i $\beta)$ wynika

$$AK : AK_1 = MW : MK' = ME : ES.$$

Z konstrukcyi środka ciężkości wynika, że

$$SS_0M \cong AEU, \quad \text{bo} \quad \sphericalangle SS_0M = \varepsilon \quad \text{a} \quad \sphericalangle ENA = \sphericalangle S_0SM,$$

dalej $SS_0 = AU$, więc $EU = SM$ i $ES = UM$, zatem

$$AK : AK_1 = ME : UM = BC : B_1C. \quad \dots \quad \gamma)$$

Dalej mamy

$$ACK : ACK_1 = AK : AK_1$$

$$ABC : AB_1C = AC : B_1C,$$

więc ze względu na równ. $\gamma)$

$$ACK : ACK_1 = ABC : AB_1C$$

$$ACK : ABC = ACK_1 : AB_1C.$$

A że $ACK_1 = AB_1C$, więc także $ACK = ABC$, co było do udowodnienia.

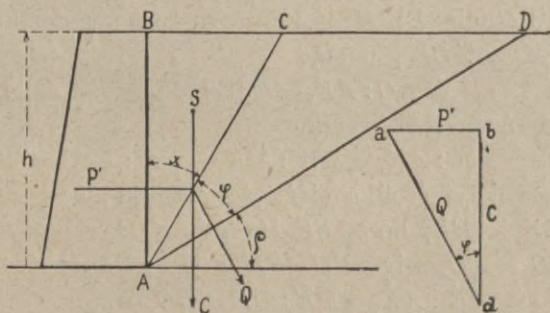
A więc AC jest powierzchnią odłamu także dla ściany pochyłej AB i wogóle dla jakiegokolwiek ściany, sięgającej od A do prostej BD .

Za pomocą tego twierdzenia, któreśmy udowodnili, możemy łatwo wyznaczyć płaszczyznę odłamu dla dowolnie nachylonych ścian, wyszukawszy ją dla odnośnej ściany pionowej. Wyznaczenie parcia geostatycznego nie podlega wedle powyższego żadnej trudności.

Prawie zawsze jest $P' > P$ t. j. parcie geostatyczne (w stanie spoczynku) jest większem, niż parcie geodynamiczne (w stanie ruchu). Dla płynów było to prawo dawne znane, mianowicie prawo, że parcie hydrostatyczne jest większem, niż hydrodynamiczne.

§. 191. Wyznaczenie analityczne parcia geostatycznego dla ściany pionowej i naziomu poziomego.

Wiemy, że dla ściany pionowej jest parcie geostatyczne P' równoległe do naziomu, w tym wypadku (rys. 404) więc poziomem.



Rys. 404.

A zatem tu $\alpha = 90^\circ$, $\delta' = 0$, $\beta = 0$. Wstawiwszy te wartości w równ. 754) otrzymamy,

$$\begin{aligned} \text{dot } \chi &= \text{st } \varrho + \sqrt{[\text{st } \varrho + \text{dot } \varrho] \text{st } \varrho} = \text{st } \varrho + \sqrt{\text{st}^2 \varrho + 1} \\ &= \text{st } \varrho + \text{siecz } \varrho = \frac{1 + \text{wst } \varrho}{\text{dost } \varrho} = \text{dot } (45 - \frac{1}{2} \varrho). \end{aligned}$$

Zatem $\chi = \varphi = 45 - \frac{1}{2} \varrho$ 788)

A więc płaszczyzna odłamu położy kąt między ścianą a stokiem naturalnym.

Z równ. zaś 756) otrzymamy:

$$P' = \frac{\gamma h^2 \text{dost } \varrho}{2 \text{wst } \varrho (\sqrt{\text{st } \varrho + \text{dot } \varrho} + \sqrt{\text{st } \varrho})^2} = \frac{\gamma h^2}{2[\sqrt{1 + \text{st}^2 \varrho} + \text{st } \varrho]^2} = \\ = \frac{\gamma h^2}{2} \text{st} \left(45 - \frac{\varrho}{2}\right). \quad \dots \dots \dots 789)$$

Zwykle jest ϱ od $30'$ do 45^0 , otrzymamy więc

dla $\varrho =$	30	33	35	37	40	45'
P'	0,1667	0,1474	0,1355	0,1233	0,1087	0,0858 γh^2 .

Dla odporu należy tylko zmienić znak parcia, otrzymamy

więc
$$P'' = \frac{\gamma h^2}{2} \text{st}^2 \left(45 + \frac{\varrho}{2}\right). \quad \dots \dots \dots 790)$$

Stąd otrzymamy dla

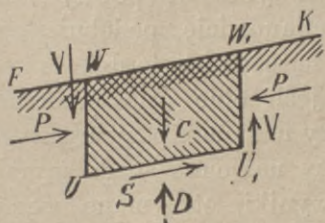
$\varrho =$	30	33	35	37	40	45'
P''	1,400	1,696	1,845	2,011	2,298	2,914 γh^2 .

Widzimy stąd, jak ogromna jest różnica między parciem czynnem a odporem ziemi.

§. 192. Nowsze teorye.

Zadaleko zaprowadziłyby nas opisanie wszystkich teoryj parcia ziemi, które podali Rankine, Considère, Lévy, St. Venant, Winkler, Scheffler, Mohr, Boussinesq i inni. Wspominamy tu tylko o ogólnych zarysach nowszej teoryi według streszczenia Müllera-Breslaua *).

Rankine i Boussinesq zastanawiają się nad natężeniami, panującymi w ziemi o naziomie dowolnym, zresztą nieograniczonej. Wytnijmy w myśli nieskończenie mały równoległobok UWW, U_1 (rys. 405) tuż przy powierzchni ziemi płaszczyznami pionowymi i badajmy siły, jakie nań działają. Siły, działające w nieskończenie bliskich płaszczyznach UW i $U_1 W_1$, możemy przyjąć jako równe, oznaczamy je więc



Rys. 405.

obie literą V . Dla równowagi muszą być też i siły P , działające pod kątem na te płaszczyzny, równe i równoległe do

*) *Graphische Statik*. 1881.

naziomu. Ciśnienie pionowe na dno D musi być $=C$, a ponieważ suma momentów musi być $=0$, więc $S=0$ i $V=0$. Stąd wyprowadzają Rankine i Boussinesq następujące wnioski:

1. Parcie ziemi na powierzchnię pionową jest równoległe do naziomu.

2. Parcie ziemi na powierzchnię równoległą do naziomu jest pionowe.

Wniosek pierwszy prowadzi do parcia geostatycznego, drugi znany jest nam z §. 172.

Jeżeli twierdzenie pierwsze zastosujemy wprost do parcia ziemi na mur, to pomijamy tarcie między ścianą a murem, przez co otrzymujemy parcie geostatyczne a nie geodynamiczne.

Inni, jak Weyrauch (*Theorie des Erddruckes auf Grund der neueren Anschauungen 1884*), wyznaczają inny kierunek parcia na dowolną płaszczyznę, mianowicie kąt δ , o który odchyła się tu parcie do prostopadłej na płaszczyznę. Niektórzy, jak Lévy i Winkler, przyjmują nawet, że $\delta = \rho$; wszyscy jednak wychodzą z ogólnych nateżeń ziemi o dowolnym naziomie, zresztą nieograniczonej. Wyniki, w ten sposób otrzymane, stosują wprost do parcia ziemi na stałe ściany, mówiąc, że gdy pomyślimy sobie przez ziemię położoną płaszczyznę i gdy przypuścimy, że ziemia po jednej stronie tej płaszczyzny nagle stwardnieje, to stan równowagi przez to się nie zmienia. Słusznie zauważa tu Weyrauch, że tak nie jest, że po stwardnieniu ziemi będzie wprawdzie istnieć równowaga, ale nie ta sama, że siły, układające się w równowagę, będą prawdopodobnie teraz inne. Dlatego sami autorowie nowych teorii ograniczają ważność ich tylko do pewnych wypadków. Weyrauch wyznacza mianowicie podobnie, jak w ciałach sprężystych, osie główne nateżeń i twierdzi, że nowsza teoria jest wtedy prawdziwą, jeśli obie osie przecinają naziom. Sprawdza się to zawsze przy naziomie poziomym, gdy $\varepsilon \geq 0$ i pod pewnymi warunkami przy naziomie spadającym.

Zresztą i w tych wypadkach wyniki, otrzymane według nowszej teorii nie zgadzają się z praktyką ani z doświadczeniami i dają za wielkie parcie.

Dlatego też nie będziemy się dalej zastanawiać nad nowszą teorią i zadowolimy się dawniejszą, stosując przytem, gdzie tego potrzeba, naszą poprawkę.

Doświadczenia prof. Engelsa*) stwierdziły, że rzeczywistość parcie ziemi w stanie spoczynku na ścianę pionową jest poziome, mały ruch jednak, do którego stwierdzenia potrzeba aż przyrządu zwierciadłowego, wystarczy, aby wywołać tarcie. Ponieważ w praktyce możemy śmiało dopuścić prawie zawsze tak małe ruchy, zatem możemy też uwzględnić tarcie, chociaż ono w stanie spoczynku nie istnieje.

XVII. Parcie ziemi na sklepienie.

§. 193. Sklepienie owalne.

W §. 132. nie uwzględnialiśmy parcia ziemi na sklepienie, lecz tylko jej ciężar pionowy. Z §. 172 wynika, że możemy tak postępować, dopóki grzbiet sklepienia lub nadmurowania nie jest bardziej nachylony do poziomu niż stok naturalny. Przy sklepieniach owalnych, jajowatych i tunelowych musimy jednak z powodu większego nachylenia uwzględnić także wielkość i kierunek ukośnego parcia na sklepienie, przy czem zastosowujemy tylko znane już prawidła. Tok postępowania pokażemy na przykładzie.

Na tabl. VI. wykreśliłiśmy sklepienie owalne z wielką nadsypką symetryczne i symetrycznie obciążone, to samo, dla którego Ott wyznaczył linią ciśnienia w swym podręczniku (*Vorträge über Bautechnik I. Theil*). Przypuszczamy, że grzbiet sklepienia jest wieloboczny; jeśli tak nie jest, to zamiast krzywej przyjmujemy wielobok w nią wpisany lub opisany. Na każdy kliniec wyznaczamy parcie ziemi $P_1, P_2, P_3 \dots P_7$, według dawnej metody, przy czem przyjmujemy kąt tarcia $\rho = 35^\circ$, $\delta = \frac{3}{4}\rho = 26'15''$ ciężar gatunkowy ziemi $\gamma_z = 1,8 \frac{t}{m^3}$, kamienia $\gamma_k = 2,3 \frac{t}{m^3}$. Dla pierwszych dwóch klinców jest $a > 180 - \rho$, więc parcie jest pionowe i równe ciężarowi ziemi, leżącej nad klincami. Następne parcia są nachylone do prostopadłej na ścianę o kąt ρ , obliczyliśmy je według wzoru 758), po części korzystaliśmy także z tablic, obliczonych dla tych równań. Ponieważ mamy tu wyznaczyć parcie na część ściany, więc obliczywszy parcie dla całej ściany przedłużonej aż do naziomu, wykreśliłiśmy trójkąt parcia. Dla danej ściany otrzymaliłiśmy więc według §. 184. trapez parcia, który nam służył do wyznaczenia wielkości i punktu zaczepienia parcia (rys. 391). Aby rysunek na tabl. VI. uczynić wyraźnym, opuściłiśmy na nim te przedwstępne konstrukcyje, znane nam zresztą z poprzedniego.

*) *Zeitschrift für Bauwesen*, 1896, str. 409.

Teraz wyznaczamy ciężar kłińców $G_1, G_2 \dots G_7$, mnożymy powierzchnie przekroju kłińców przez długość $=1$ i przez ciężar gatunkowy $\gamma_k = 2,3 \frac{t}{m^3}$.

Wyznaczywszy w ten sposób wszystkie siły, działające na sklepienie, przystępujemy do wykreślenia linii ciśnienia według §. 137. Przyjmujemy więc najprzód dowolnie parcie poziome $H=O_1 a$, zaczepiamy go w e w połowie wysokości klucza i na tej podstawie wykreślamy linię ciśnienia (kreskowaną na tablicy). Ostatni jej bok cd przedłużony przecina się z pierwszym w punkcie d , przez który przechodzi wypadkowa R wszystkich sił, działających na prawą stronę sklepienia. Jeżeli przypuścimy, że linia ciśnienia przechodzi przez środek podstawy f , to fd jest ostatnim bokiem wieloboku sznurowego, a więc zrobiwszy $bO \parallel fd$, otrzymamy prawdziwy biegun O . Wykreślamy teraz drugi raz linię ciśnienia (pełno wyciągniętą na tablicy), przechodzącą przez punkty e i f . Linia ta ciśnienia wpada na punkt jędrny w g . Z kształtu jej jednak widzimy, że cała leży poniżej osi sklepienia, co sprzeciwia się prawidłu, wypowiedzianemu w §. 143, że suma powierzchni dodatnich ma być równa sumie powierzchni ujemnych. Prawdziwa linia ciśnienia leżeć będzie nieco wyżej, niż linia pełna wyciągnięta, należałoby zatem przyjąć punkt e nieco wyżej, a wtedy punkt g wejdzie w jądro.

§. 194. Sklepienie tunelowe.

Linia ciśnienia w sklepieniu tunelowem możnaby wyznaczyć według poprzedniego paragrafu. Jeżeli jednak tunel leży głęboko pod naziomem, otrzymalibyśmy w ten sposób parcie ziemi znacznie większe, niż w rzeczywistości istnieje. Głębiej położone warstwy ziemi i skały mają bowiem spójność zwykle tak wielką, że jej pominąć zupełnie nie możemy. Wielki wpływ na parcie ziemi ma też także kierunek warstw, tak że nieraz parcie jest większe z jednej, niż z drugiej strony osi tunelu. Spójność ziemi i kierunek warstw zmieniają się jednak często dla tego samego tunelu tak, że w praktyce nieraz widzimy, że w niektórych miejscach tunel obejść się może czasem zupełnie bez sklepienia, a w innych grubość sklepienia jest nader zmienną. Obliczenie sklepienia tunelowego jest więc zwykle niemożliwe dla nieznanomości sił, nań działających. Jeżeli jednak potrafimy wyznaczyć siły zewnętrzne, czy to jako zwykle parcie ziemi, czy też praktycznie, badając zachowanie się tymczasowego rusztowania drewnianego, to wykreślenie linii ciśnienia nie będzie przedstawiać żadnych trudności.

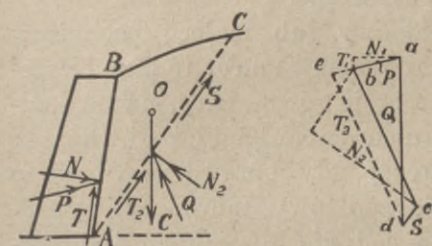
§. 195. Uwzględnienie spójności.

Powiedzieliśmy wyżej, że zwykle przy wyznaczaniu parcia ziemi nie uwzględniamy spójności. Zdarzają się jednak wypadki, że to jest koniecznym lub przynajmniej wskazanem. Koniecznym jest ono przy parciu na sklepienie tunelowe, a wskazanem przy murach w przekopach, gdzie mur przylega do ziemi naturalnej, nienasypanej, wykazującej mniejszą lub większą spójność.

Zaznaczamy tu w krótkości, w jaki sposób należałoby uwzględnić spójność, która, jak wiadomo, proporcjonalną jest do powierzchni odłamu. Jeżeli więc spójność na jednostkę kwadratową nazwiemy c , to cała spójność S w wyznaczonej w zwykły sposób płaszczyźnie odłamu AC (rys. 406) będzie $S=cl$. Wykreślmy teraz wielobok sił, zróbmy $ad = C$, $de \parallel AC$ i równe S , dalej $cb \parallel Q$ i $ab \parallel P$, to $ab = P$. Nie uwzględnivszy spójności, otrzymalibyśmy $P=ae$, przyczem $ae > ab$. Jeżeli spójność przyjmiemy większą, to ab będzie mniejszem, może się nawet stać zerem, wtedy niema wcale parcia.

Wyznaczenie to nie jest dokładnem, bo S zmienia się proporcjonalnie do l , które jest funkcją φ , może więc przy uwzględnieniu spójności otrzymamy inną płaszczyznę usuwową.

W przybliżeniu możemy też uwzględnić spójność według prof. Skibińskiego, przyjmując zamiast kąta φ większy kąt φ' , wyznaczony z paraboli spójności. Dla tego większego kąta przeprowadzamy wtedy obliczenie



Rys. 406.

w zwykły sposób. Przybliżone te sposoby są tem bardziej wystarczające, że zwykle dokładnie nie znamy, jak wielką jest spójność.

E. Mury oporowe.

XVIII. Stałość murów oporowych.

§. 196. Ogólne zasady.

W §. 171. podaliśmy określenie muru oporowego. Składa się on z warstw poziomych lub też pochyłych. Jeżeli wyznaczymy siły, działające na każdą warstwę, t. j. ciężar muru i parcie ziemi, znajdziemy środek ciśnienia czyli punkt zaczepienia wypadkowej, działającej na szew, a jeżeli środki ciśnienia wszystkich szwów połączymy, otrzymamy, jak wiemy, linię ciśnienia.

Warunki równowagi murów oporowych są te same, co sklepień, filarów i przyczółków, a więc według §. 131.

1. Środek ciśnienia powinien leżeć w jądrze t. j. w środkowej trzeciej części szwu, aby zaprawa nie pracowała na ciągnięcie. Przy murach litych betonowych lub żelbetowych możemy dopuścić pewne ciągnięcie, linia ciśnienia może więc wyjść z jądra.

2. Wypadkowa powinna być odchylną od prostopadłej na szew więcej, niż wynosi kąt tarcia.

3. Natężenie nie powinno przekraczać spólczynnika wytrzymałości. Jeśli przyjmiemy stosowną pewność, to natężenie powinno być większem, niż dopuszczalne.

Jeżeli na mur oporowy pionowy lub mało pochyłony działa tylko parcie ziemi i ciężar własny muru, to linia ciśnienia wpada u góry muru, gdzie parcie równe zeru, na oś i oddala się dla dolnych części muru coraz bardziej od osi. Dlatego w zwykłych wypadkach wystarcza, gdy sprawdzimy, czy te trzy warunki wypełniają się dla podstawy muru. W wypadkach bardziej zawiłych potrzeba badanie rozciągnąć i do innych szwów.

§. 197. Ogólne wyznaczenie grubości muru oporowego.

Jeżeli Z jest parciem ziemi na mur $ABML$ (rys. 407) a C ciężarem tego muru, to dwie te siły złożone dają wypadkową R , która przecina podstawę muru AL w punkcie G . Rozłożmy wszystkie te trzy siły na składowe równoległe i prostopadłe do AL , to otrzymamy siły Z_1, Z_2, C_1, C_2, P i T . Z rysunku widzimy, że $P = C_2 + Z_2$ a $T = Z_1 - C_1$, dalej, że $C_1 = C \text{ wst } \beta$, $C_2 = C \text{ dost } \beta$, $Z_1 = Z \text{ wst } \eta$, $Z_2 = Z \text{ dost } \eta$.

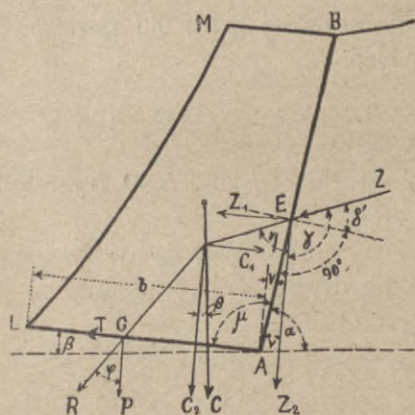
Dalej widzimy, że $\nu = \mu - 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ - \nu + \delta'$, a wstawiwszy wartość za ν , otrzymamy $\gamma = 180^\circ - \mu + \delta'$. Dalej mamy $\eta = 180^\circ - \gamma$ albo $\eta = 180^\circ - (180^\circ - \mu + \delta') = \mu - \delta'$.

Wstawiwszy tę wartość za η , otrzymamy

$$Z_1 = Z \text{ wst } (\mu - \delta'), \quad Z_2 = Z \text{ dost } (\mu - \delta'), \quad \text{a więc}$$

$$\left. \begin{aligned} P &= C \text{ dost } \beta + Z \text{ dost } (\mu - \delta') \\ T &= C \text{ wst } \beta - Z \text{ wst } (\mu - \delta') \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 791)$$

a stąd
$$\text{st } \varphi = \frac{T}{P} = \frac{C \text{ wst } \beta - Z \text{ wst } (\mu - \delta')}{C \text{ dost } \beta + Z \text{ dost } (\mu - \delta')} \quad \dots \quad 792)$$



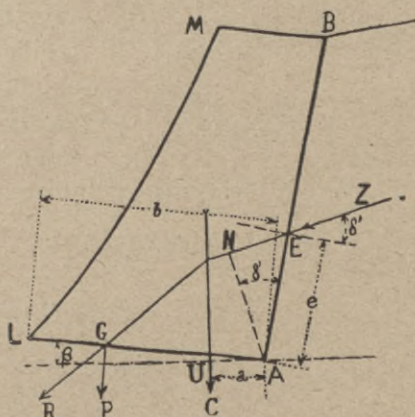
Rys. 407.

Przy obliczaniu murów podporowych przyjmujemy takie wymiary muru, aby środek ciśnienia podstawy wpadał na zewnętrzny punkt jędrny. Przyjmujemy to położenie graniczne środka ciśnienia, ponieważ, chcąc go sprowadzić bliżej środka ciężkości podstawy, potrzebowalibyśmy wiele więcej materiału, a gdyby z jakichkolwiek przyczyn środek ciśnienia wyszedł nawet poza jądro, to mur jeszczeby się nie wy-

wrócił, tylko szew otworzyłby się trochę. Robiąc to przypuszczenie, mamy więc jeszcze dostateczną pewność.

Aby zatem środek ciśnienia G nie wyszedł z jądra, musi być $AG < \frac{2}{3} AL = \frac{2}{3} b$. Jeżeli $AG = \frac{2}{3} b$ (rys. 408), to możemy ustawić następane równanie momentów ze względu na punkt A .

$P \cdot \frac{2}{3} b = C \cdot AU + Z \cdot AN$, a nazwawszy $AU = a$, $AN = = AE \text{ dost } \delta' = e \text{ dost } \delta'$, otrzymamy:



Rys. 408.

$$\frac{2}{3} b = \frac{a \cdot C + Z e \text{ dost } \delta'}{P} = \frac{a C + Z e \text{ dost } \delta'}{C \text{ dost } \beta + Z \text{ dost } (\mu - \delta')} \quad 793)$$

Rozumie się, że należałoby też zbadać punkt 3-ci, dotyczący nateżeń, które obliczać należy wedle równania 616). W razie, gdy punkt *G* wpada na punkt jędrny, mamy wedle 619)

$$v_1 = \frac{2P}{100b}, \quad \dots \quad 794)$$

jeżeli wszystko liczymy w *kg* i *cm*. Również należy zbadać, czy ciśnienie w fundamencie nie jest za wielkiem.

§. 198. Analityczne wyznaczenie grubości muru dla szwów pochyłych.

Na podstawie równ. 793) wyznaczmy teraz według Otta grubość *b* muru o przekroju trapezowym.

Jeżeli przekrój muru ma kształt trapezu *ABML* (rys. 409) to da się równ. 793) inaczej wyrazić.

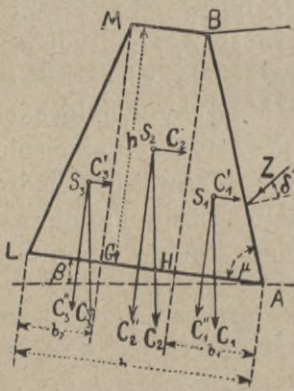
Z rysunku otrzymamy *C*, ciężar muru na długość równą jedności

$$C = \gamma h \frac{AL + MB}{2} = \gamma \frac{h}{2} (2b - b_1 - b_2) \quad 795)$$

$$h = b_1 \text{ st } \mu$$

jeżeli γ oznacza ciężar gatunkowy muru.

Chcąc wyznaczyć moment siły *C* ze względu na punkt *A*, rozłożymy trapez na prostokąt *GHBM* i dwa trójkąty, oznaczymy ciężar części składowych przekroju i rozłożymy każdy z nich na składowe równoległe i prostopadłe do podstawy *AL*.



Rys. 409.

Wtedy otrzymamy moment ciężaru *C* ze względu na *A*

$$Ca = C_1'' \frac{2}{3} b_1 + C_2'' \left(b_1 + \frac{b - b_1 - b_2}{2} \right) + C_3'' \left(b - \frac{2b_2}{3} \right) +$$

$$- (C_1' + C_3') \frac{h}{3} - C_2' \frac{h}{2}.$$

Z rysunku widzimy, że

$$C_1 = \gamma \frac{b_1 h}{2}, \text{ więc } C_1'' = \gamma \frac{b_1 h}{2} \text{ dost } \beta, \quad C_1' = \gamma \frac{b_1 h}{2} \text{ wst } \beta,$$

$C_2 = \gamma(b - b_1 - b_2)h$, więc $C_2'' = \gamma(b - b_1 - b_2)h \operatorname{dost} \beta$,

$C_2' = \gamma(b - b_1 - b_2)h \operatorname{wst} \beta$,

$C_3 = \gamma \frac{b_2 h}{2}$, więc $C_3'' = \gamma \frac{b_2 h}{2} \operatorname{dost} \beta$, $C_3' = \gamma \frac{b_2 h}{2} \operatorname{wst} \gamma$.

Wstawiliśmy te wartości w poprzednie równanie, otrzymamy:

$$Ca = \gamma h \operatorname{dost} \beta \left[\frac{1}{3} b_1^2 + \frac{(b_1 - b_2)^2 - b_1^2}{2} + \left(b - \frac{2b_2}{3} \right) \frac{b_2}{2} \right] + \\ - \gamma h^2 \operatorname{wst} \beta \left(\frac{b_1 + b_2}{6} + \frac{k - b_1 - b_2}{2} \right)$$

$$Ca = \gamma \frac{h \operatorname{dost} \beta}{2} \left[b^2 - (b_2 + h \operatorname{st} \beta) b + \frac{b_2^2 - b_1^2}{3} + \frac{2}{3} (b_1 + b_2) h \operatorname{st} \beta \right]. \quad 796)$$

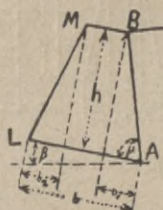
Wstawiliśmy wartości za C i Ca w równ. 793), otrzymamy

$$\frac{\gamma}{2} h \operatorname{dost} \beta [b^2 - (b_2 + h \operatorname{st} \beta) b + \frac{b_2^2 - b_1^2}{3} + \frac{2}{3} (b_1 + b_2) h \operatorname{st} \beta] + Z \operatorname{dost} \delta' \\ \frac{2}{3} b = \frac{\frac{1}{2} \gamma h (2b - b_1 - b_2) \operatorname{dost} \beta + Z \operatorname{dost} (\mu - \delta')}{}$$

Stąd otrzymamy wreszcie, uporządkowawszy równanie według b :

$$b^2 + \left[b_2 - 2b_1 + 3h \operatorname{st} \beta + \frac{4Z \operatorname{dost} (\mu - \delta')}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \right] b = b_2^2 - b_1^2 + \\ + 2(b_1 + b_2) h \operatorname{st} \beta + \frac{6Ze \operatorname{dost} \delta'}{\gamma h \operatorname{dost} \beta}, \quad \dots \quad 797)$$

a więc równanie drugiego stopnia, które w danym wypadku możemy łatwo rozwiązać.



Rys. 410.



Rys. 411.



Rys. 412.



Rys. 413.

Z równ. 797) otrzymamy dla poszczególnych wypadków następujące wzory:

1. Dla $b_1 = b_2$ (rys. 410) otrzymamy:

$$b^2 + \left(-b_1 + 3h \operatorname{st} \beta + \frac{4Z \operatorname{dost} (\mu - \delta')}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \right) b = \\ = 4b_1 h \operatorname{st} \beta + \frac{6Ze \operatorname{dost} \delta'}{\gamma h \operatorname{dost} \beta}. \quad \dots \quad 798)$$

2. Dla $b_2 = 0$ (rys. 411) otrzymamy:

$$b^2 + \left(-2b_1 + 3h \operatorname{st} \beta + \frac{4Z \operatorname{dost}(\mu - \delta')}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \right) b = -b_1^2 + 2b_1 h \operatorname{st} \beta + \frac{6Ze \operatorname{dost} \delta'}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \quad 799)$$

3. Dla $b_1 = 0$ (rys. 412) otrzymamy, zważywszy, że $\mu = 90^\circ$,

$$b^2 + \left(b_2 + 3h \operatorname{st} \beta + \frac{4Z \operatorname{wst} \delta'}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \right) b = b_2^2 + 2b_2 h \operatorname{st} \beta + \frac{6Ze \operatorname{dost} \delta'}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \quad 800)$$

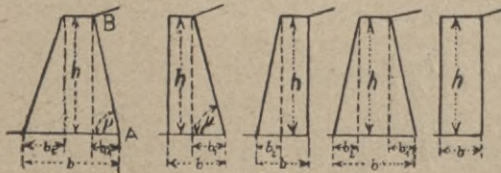
4. Dla $b_1 = b_2 = 0$, a więc dla przekroju prostokątnego (rys. 413) mamy:

$$b^2 + \left(3h \operatorname{st} \beta + \frac{4Z \operatorname{wst} \delta'}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \right) b = \frac{6Ze \operatorname{dost} \delta'}{\gamma h \operatorname{dost} \beta} \quad 801)$$

§. 199. Analityczne wyznaczenie grubości murów dla szwów poziomych.

Jeżeli szwy muru podporowego są poziome (rys. 414), to otrzymamy odnośne wzory dla przekroju trapezowego, wstawiając w równ. 797) $\beta = 0$, więc $\operatorname{st} \beta = 0$, $\operatorname{dost} \beta = 1$. Mamy więc

$$b^2 + \left(b_2 - 2b_1 + \frac{4Z \operatorname{dost}(\mu - \delta')}{\gamma h} \right) b = b_2^2 - b_1^2 + \frac{6Ze \operatorname{dost} \delta'}{\gamma h} \quad 802)$$



Rys. 414. Rys. 415. Rys. 416. Rys. 417. Rys. 418.

Z równania tego otrzymamy znowu w szczególnych wypadkach

1. Dla $b_2 = 0$ (rys. 415):

$$b^2 + \left(-2b_1 + \frac{4Z \operatorname{dost}(\mu - \delta')}{\gamma h} \right) b = -b_1^2 + \frac{6Ze \operatorname{dost} \delta'}{\gamma h} \quad 803)$$

2. Dla $b_1 = 0$ będzie $\mu = 90^\circ$ (rys. 416), więc

$$b^2 + \left(b_2 + \frac{4Z \operatorname{wst} \delta'}{\gamma h} \right) b = b_2^2 + \frac{6Ze \operatorname{dost} \delta'}{\gamma h} \quad 804)$$

3. Dla $b_1 = b_2$ (rys. 417) otrzymamy:

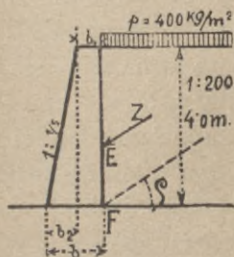
$$b^2 + \left(-b_1 + \frac{4Z \text{dost}(\mu - \delta')}{\gamma h} \right) b = \frac{6Ze \text{dost} \delta'}{\gamma h} \quad (805)$$

Dla $b_1 = b_2 = 0$ (rys. 418), a więc dla przekroju prostokątnego będzie: $b^2 + \frac{4Z \text{wst} \delta'}{\gamma h} b = \frac{6Ze \text{dost} \delta'}{\gamma h}$ (806)

Podobnie dadzą się ustawić wzory dla murów zakrzywionych lub wielobocznych, ale są one jeszcze zawilsze, więc je pomijamy. Obliczenia tego rodzaju należą do nauki o budowlach ziemnych. Obliczając grubości muru zbiorników wody, tam itd. możemy zatrzymać te same wzory, wstawivszy w nie tylko dla wody $\delta' = 0$. Przy wysokich takich murach obliczenie należy przeprowadzić na innych zasadach. Omawianie tego zagadnienia należy do budownictwa wodnego.

Dla przekonania się, czy drugi warunek równowagi jest wypełnionym, mianowicie czy $\varphi < \rho$, musimy jeszcze obliczyć $\text{st} \varphi$ według równ. 792). Gdyby kąt φ był większym od kąta tarcia, to należałoby użyć albo szwów ukośnych, lub też pogrubić mur, a przez to powiększyć jego ciężar.

Przykład. Mur podporowy 4 m wysoki podtrzymuje drogę, dla której $p = 400 \text{ kg/m}^2$. Niech będzie $\rho = 33^\circ$, $\delta' = \frac{2}{3}\rho = 24^\circ 45'$, $\gamma_z = 1,8 \text{ t/m}^3$, $\gamma_m = 2,3 \text{ t/m}^3$. (rys. 419). Nachylenie przedniej ściany jest 1:200.



Rys. 419.

Jak wielka ma być szerokość muru u podstawy b . Najprzód wyznaczmy parcie ziemi Z . Dla $\rho = 33^\circ$ jest $\text{dot} \rho = 1,54$, $\text{st} \rho = 0,646$. Według tablicy w §. 176 mamy dla $\text{st} \beta = 0$ i $\text{st} \rho = 0,7$ współczynnik 0,122, dla $\text{st} \rho = 0,6$, 0,143, więc dla $\text{st} \rho = 0,649$ otrzymamy 0,131, zatem $P = 0,131 \cdot 1,8 \cdot 4^2 = 3,77 \text{ t}$. Dalej

mamy wedle 769 $h_1 = \frac{400}{1800} = 0,222$, a wedle 771):

$$Z = 3,77 \left(1 + \frac{2 \cdot 400}{1800 \cdot 4} \right) = 3,77 \cdot 1,11 = 4,18 \text{ t}$$

Wreszcie wedle 774):

$$FE = e' = \frac{4 + 3 \cdot 0,222}{4 + 2 \cdot 0,222} = \frac{4,666}{4,444} = \frac{1}{3} \cdot 1,05 = 1,4 \text{ m}$$

Teraz przystąpimy do obliczenia grubości muru. Wedle założenia $b_2 = \frac{h}{5} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ m}$, więc wedle 804):

$$b^2 + \left(0,8 + \frac{4 \cdot 4,18 \text{wst} 24^\circ 45'}{2,3 \cdot 4} \right) b = 0,8^2 + \frac{6 \cdot 4,18 \cdot 1,4 \text{dost} 24^\circ 45'}{2,3 \cdot 4}$$

Dalej mamy $\text{wst} 24^\circ 45' = 0,419$, $\text{dost} 24^\circ 45' = 0,908$, co wstawivszy, otrzymamy:

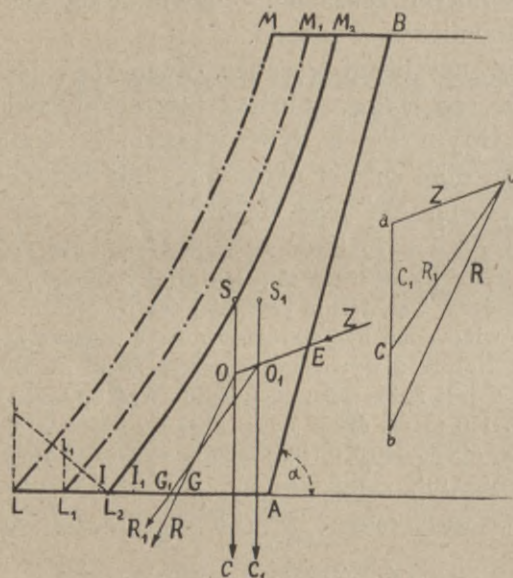
$$b^2 + 1,56 b = 4,05, \text{ stąd } b = -0,78 + \sqrt{0,78^2 + 4,05} = 1,38 \text{ m}$$

$b_0 = 1,38 - 0,8 = 0,58$. Gdyby b_0 wypadło mniejsze, niż $0,4 m$, należałoby ze względu na wykonanie przyjąć inne nachylenie ściany przedniej i powtórzyć rachunek dopóty, aż $b_0 \geq 0,4 m$.

§. 200. Wykreślne wyznaczenie grubości muru oporowego.

Jeżeli mamy dany przekrój muru $ABML$ (rys. 420), to łatwo obliczymy ciężar C muru na jednostkę długości w kierunku prostopadłym do rysunku. Parcie ziemi Z i punkt zaczepienia E wyznaczamy w znany sposób. Dwie te siły $Z = Oa$ i $C = ab$ składamy zapomocą wieloboku sił i otrzymujemy wypadkową R , przecinającą podstawę w punkcie G . Jeżeli, jak tu, środek ciśnienia G leży w jądrze t. j. średniej trzeciej

części podstawy, to nie tylko równowaga jest zapewniona, ale też cała podstawa pracuje na ciśnienie. Jeżeliby G wypadło poza punkt jądry I , to w punkcie A powstałoby ciągnięcie, czego ze względu na małą wytrzymałość zaprawy na ciągnięcie zwykle nie chcemy dopuścić. Chcąc, aby koszta muru były jak najmniejsze, a z drugiej strony, aby nigdzie mur nie pracował na ciągnięcie,



Rys. 420.

będziemy się starali, jak przy analitycznym obliczeniu, aby punkt G wypadł na punkt jądry I . W naszym wypadku wypadaloby więc zmniejszyć grubość muru. Przyjmmy zatem teraz przekrój muru mniejszy ABM_1L_1 , przyczem $M_1L_1 \parallel ML$, i powtórzmy całą konstrukcyę, to otrzymamy jako środek ciśnienia punkt G_1 jeszcze w średniej trzeciej części podstawy. Zróbmy $l_1 = IG_1$ równe odstępowi środka ciśnienia G_1 od punktu jądry, dalej $L_1l_1 = I_1G_1 =$ odstępowi punktu G_1 od nowego

punktu jędrnego I_1 , to gdybyśmy to dla kilku wypadków powtórzyli i połączyli wierzchołki rzędnych linią, to linia ta byłaby w ogóle wprawdzie krzywa, lecz nie wiele różniłaby się od prostej ll_1 . Jeżeli więc prostą ll_1 przedłużymy do przecięcia się z podstawą AL i poprowadzimy L_2M_2 , to ABM_2L_2 będzie w przybliżeniu przekrojem muru, dla którego środek ciśnienia podstawy wpada w punkt jędrny. Chcąc dokładniej wyznaczyć grubość muru, wyszukamy jeszcze dla tej grubości $L_2l_2 = I_2G_2$. Mamy teraz trzy punkty linii krzywej, możemy ją wykreślić, a punkt L_1 przecięcia się jej z podstawą da szukaną szerokość podstawy.

Jeżeli górna szerokość muru jest dana, wtedy przyjmujemy rozmaite położenia ściany ML , obracając ją około punktu M (rys. 421). Zamiast wyszukiwać każdą razą na nowo ciężar muru i jego środek ciężkości, możemy do poprzednich sił dołączyć ciężar paska, który dodajemy lub odejmujemy (wtedy ciężar ujemny do góry działający) i złożyć w zwyczajny sposób tę dodatkową siłę z poprzednim R .

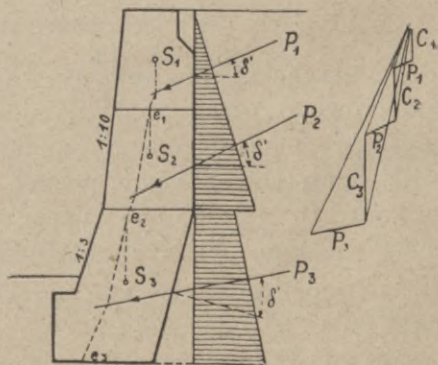


Rys. 421.

Są także inne sposoby, prowadzące wprost (nie przez próbowanie) do wyznaczenia grubości muru, jak np. metoda prof. Rychtera.

(„Przegląd Techniczny“ 1877), Crugnoli („Eisenbahn“ 1882), które jako więcej zawiłe pomijamy, gdyż wyznaczenie grubości muru według powyższej metody jest w praktyce dostatecznie dokładnem.

Jeżeli przekrój muru jest zawilszy, podcięty (rys. 422) lub ograniczony liniami krzywymi, to dzielimy go na paski (w rys. 422), wyznaczamy dla każdego z nich wedle poprzedniego parcia ziemi na każdy pasek P_1 , P_2 i P_3 i ich punkty zaczepienia. Wyznaczamy środki ciężkości pasków i cięż-



Rys. 422.

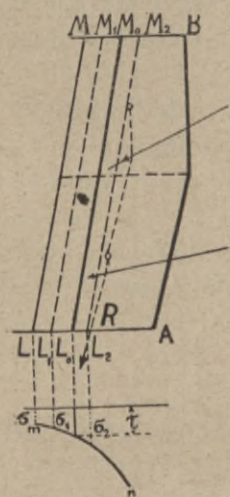
żary ich C_1 , C_2 i C_3 i składamy siły po kolei za pomocą wieloboku sił. Punkty przecięcia się wypadkowych na szew e_1 , e_2 i e_3 połączone dają linię ciśnienia, która nie powinna wychodzić z średniej trzeciej części przekroju. W tym wypadku linia ciśnienia wychodzi z średniej trzeciej części przekroju, więc należałoby obrąć grubszy mur (dla wyrazistości rysunku linia ciśnienia jest opuszczoną).

Wyznaczając grubość muru w ten sposób, trzeba jeszcze

zawsze wyznaczyć najw. ciśnienie w zewnętrznej krawędzi, które nie może być większem od dopuszczalnego.

Niektórzy inżynierowie dopuszczają otwarcia szwu przy murach oporowych, a wtedy linia ciśnienia może wychodzić z jądra, a chodzi tylko o to, aby natężenie nie było za wielkiem.

Dla przyjętych grubości w podstawie AL , AL_1 , AL_2 (rys. 423), wyznaczamy wypadkową R , a stąd największe ciśnienie σ , σ_1 , σ_2 itd. Wartości te odnosimy w pionowych pod L , L_1 , L_2 i h i otrzymujemy krzywą mn . Dla danego natężenia dopuszczalnego I wyznaczamy wtedy wykreślnie z łatwością grubość AL_0 .



Rys. 423.

§. 201. Parcie geostatyczne przy wyznaczaniu grubości muru oporowego.

Dotychczas używaliśmy do wyznaczenia grubości muru podporowego parcia geodynamicznego. O ile to tyczy przewrotu lub przesunięcia muru, jest to usprawiedliwionem. Jeżeli jednak chcielibyśmy poznać natężenie w murze podczas spokoju, to należałoby wyznaczyć parcie geostatyczne i na podstawie tego obliczyć natężenie według znanych prawideł.

A może się zdarzyć wypadek, że przy parciu geostatycznym leży linia ciśnienia wewnątrz przekroju muru, przy parciu geostatycznym zaś zewnątrz przekroju. Jak wtedy utrzymuje się równowaga i jakie są wtedy natężenia?

Ponieważ dla parcia geostatycznego wypadkowa przecina podstawę poza przekrojem muru, to musiałby się mur przewrócić. Ale skoro zacznie się ruch, występuje całe tarcie na powierzchni muru i musimy się liczyć tylko z mniejszem i korzystniej działającym parciem geodynamicznem, wskutek tego wypadkowa odchyli się o tyle, że przecina podstawę wewnątrz przekroju. Ruch więc muru ustaje, ale tarcie, wywołane tym ruchem, działa dalej. Widzimy zatem, że w takim razie możliwy jest tylko bardzo mały ruch, tylko otwarcie szwów, potem panuje znów równowaga. Ale jak wytłómaczymy sobie tę równowagę? Otóż musimy tu znów przypomnąć, że tarcie jest tylko oporem, siłą bierną, która w stanie spoczynku działa tylko o tyle, o ile tego potrzeba do utrzymania równowagi. A więc wystąpi dla stanu równowagi tylko tyle tarcia, aby wypadkowa przechodziła przez zewnętrzną krawędź muru, aby jeszcze równowaga była zachowaną. W rzeczywistości nie może jednak wypadkowa przechodzić przez samą krawędź, bo wtedy byłoby natężenie tam nieskończenie wielkie. Musiałby się mur wtedy na krawędzi skruszyć, a wypadkowa przesunie się od krawędzi na wewnątrz o 2 do 5 *cm*.

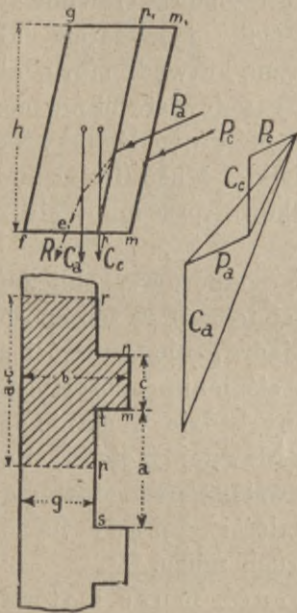
Z powyższego widzimy, że mur podporowy, obliczony według parcia geodynamicznego (dawnej teorii) w ten sposób, aby linia ciśnienia nie wychodziła z jądra, nie wywróci się nawet w tym wypadku, jeżeliby linia ciśnienia geostatyczna wychodziła z przekroju, Z drugiej strony będzie w stanie spoczynku w murze, obliczonym według dawnej metody, linia ciśnienia wychodzić często poza jądro, wskutek czego wystąpi ciągnienie, a z powodu małej wytrzymałości zaprawy na ciągnienie, otwarcie szwu i bardzo mały ruch muru.

Tam więc, gdzie taki mały ruch muru i otwarcie szwów nie jest szkodliwem, więc zwykle przy murach podporowych, możemy używać bez obawy dawnej teorii parcia ziemi, jak to zresztą praktyka nas uczy, jeżeli tylko materiał jest dość wytrzymały. Przy przyczółkach jednak mostów sklepionych i w ogóle wszędzie tam, gdzie nie możemy dopuścić żadnego nawet małego ruchu, należałoby uwzględnić parcie geostatyczne. Przy niskich przyczółkach, gdzie przeważa parcie sklepienia, jest parcie geostatycznie korzystniejsze od

geodynamicznego. Przeciwnie przy wysokich przyczółkach, gdzie przeważa parcie ziemi, a linia ciśnienia zwraca się ku wewnętrznej stronie (ku osi mostu), tam działa parcie geostatyczne niekorzystniej i należałoby je koniecznie uwzględnić, bo w takim razie nawet mały ruch przyczółka może spowodować pęknięcie sklepienia. W praktyce jednak takich przyczółków unikamy.

§. 202. Mury oporowe z przyporami.

Czasem robimy mury oporowe z przyporami (n. *Strebe-pfeiler*, fr. *contrefort*, an. *counterfort*, r. *контрфорс*) (rys. 424). Wtedy obliczamy parcie nie na 1 m bieżący, lecz na długość a i c . Parcie P_c działa wtedy w powierzchni mn , parcie P_a w pr . Parcia te składamy z ciężarami C_a i C_c , zaczepiającymi w środku ciężkości przekroju fgp_1p_2 i fgm_1m_2 . Wypadkowa R przecina podstawę w e , który to punkt nie powinien wychodzić poza punkt jędrny. Punkt ten nie będzie leżał tutaj w $\frac{1}{3}$ grubości. Trzeba go osobno wyznaczyć.



Rys. 424.

Co do grubości g , to na długości a działa siła P_a . Składowa pozioma tej siły H_a , równo rozdzielona na st czyli na jednostkę H , wywołuje w tej części muru natężenia zginające. Mamy przytem w przybliżeniu, zważywszy, że siła H nie rozdziela się równo na przekrój pionowy, lecz działając w jednej trzeciej wysokości, wywołuje 2 razy tak

wielkie natężenie, niż gdyby działała w środku, $2 \frac{Ha^2}{8} = \frac{hg^2}{6} \tau$,

a stąd

$$a = 2g \sqrt{\frac{h\tau}{6H}} \quad \dots \quad 807)$$

lub

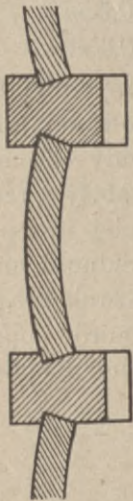
$$g = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{6H}{h\tau}} \quad \dots \quad 808)$$

τ oznacza tu dodatkowe natężenie wskutek wypadkowej R .

Dlatego przyjmujemy zwykle τ bardzo małe, $\tau=1$ do $1,5 \text{ kg/cm}^2$.*).

Aby uniknąć nateżeń na zginanie w murze między przyporami, używają zamiast muru płaskiego sklepień (rys. 425).

Tu także podwójną siłę H uważać należy za obciążenie sklepienia i wyznaczyć linią ciśnienia, a osobno badać równowagę filarów między sklepieniami.



Rys. 425.

§. 203. Korzystny przekrój muru oporowego.

Chcąc wyznaczyć najkorzystniejszy przekrój muru podporowego, musimy zważać najprzód na oszczędność materiału, potem na wielkość wykopu i na inne względy.

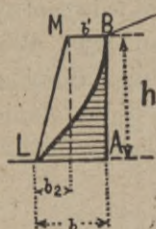
Pod względem oszczędności materiału są leżące mury najlepsze i to tem korzystniejsze, im mniejszy kąt α . Gdy $\alpha = \varrho$, a nawet nieco większy (§. 160), ziemia utrzymuje się sama, muru wtedy wcale nie potrzeba.

Z drugiej strony im mniejszy kąt α , tem większy jest wykop, który także kosztuje, a właśnie dla zmniejszenia wykopu i aby wykop nie sięgał za daleko na stromych stokach lub w miejscach zabudowanych, używamy bardzo często murów podporowych. Czasem chodzi nam o to, aby przystęp był łatwiejszy, np. przy bulwarach, wtedy budujemy mur wewnątrz pionowy, zewnątrz trochę pochły.

Dobry przekrój muru powinien być dalej taki, aby pewność była w całej wysokości jednakowa. To jednak nie da się osiągnąć, gdyż dla wierzchu muru ciśnienie jest równem zero, teoretycznie więc grubość muru powinna być na wierzchu równą zero i wzrastać wraz z ciśnieniem, a więc, jeżeli naziom jest płaskim, przekrój powinien mieć kształt ABL (rys. 426). Ze względów praktycznych nie możemy jednak budować takich murów, bo pominiawszy, że oprócz parcia ziemi

* Inny dokładniejszy sposób obliczenia podaje Haeseler w *Handbuch der Ingenieurwissenschaft* 1. t. 2. Oddział str. 297.

mogą działać i siły przypadkowe, lecz także wpływ powietrza działa szkodliwie na mur i zmniejsza jego przekrój, a wpływ ten jest największym na wierzchu muru. Szerokość wierzchu muru $BM = b'$ przyjmujemy więc zwykle



Rys. 426.

dla murów kamiennych $b' \geq 0,5 m$

„ „ ceglanych $b' \geq 0,45 m$

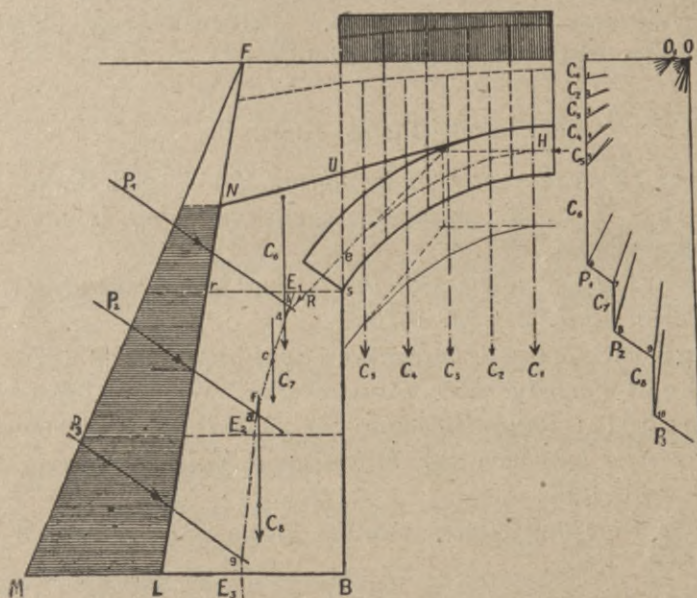
Ponieważ, jak wiadomo, najkorzystniejszy jest kształt przekroju budowli murowanej, gdy linia ciśnienia spada z osią, więc gdy chcemy się do tego pravidła zastosować, należy przednią powierzchnię muru ML nachylić, albo co lepiej jeszcze, użyć muru o przekroju podciętym (rys. 422). Oszczędność materiału może wynieść w stosunku do przekroju prostokątnego do 35%. O korzyściach tego rodzaju przekrojów murów oporowych traktuje zresztą nauka o budowlach ziemnych i budowie mostów, do których czytelników odsyłamy.

§. 204. Parcie ziemi na przyczółek.

Jeżeli oprócz parcia ziemi działa na mur inna siła ukośna, np. parcie sklepienia, wtedy linia ciśnienia wyjść może z jądra niekoniecznie w podstawie, lecz w którymkolwiek innym szwie, dlatego zwykle wykreślamy wtedy całą linię ciśnienia, aby osądzić, czy w murze takim nie wystąpi ciągnięcie.

Rys. 427 przedstawia taki przypadek. Jest to przyczółek sklepienia, na które działa parcie ziemi. W znany nam z poprzednich rozdziałów sposób wykreślamy linię ciśnienia w sklepieniu i otrzymujemy parcie R ukośne sklepienia na mur, przechodzące przez środek szwu w węzłowie. W znany również sposób wyznaczamy parcie P_1, P_2, P_3, P_4 na warstwy muru i ich punkty zaczepienia, jakoteż ciężary warstw. Parcie ziemi na NU jest, jak wiadomo, pionowe i równe ciężarowi ziemi, nad NU leżącej, który to ciężar składamy razem z ciężarem muru nad rs i otrzymujemy C_6 . Siły te składamy jedną po drugiej za pomocą wieloboku sił w zwykły sposób. A więc przedłużamy R aż do przecięcia się z C_1 w punkcie a i kreślimy wypadkową $ab \parallel O6$, dalej $bc \parallel C7$, Przedłużywszy bc do

przecięcia z rs w punkcie E_1 , otrzymujemy punkt linii ciśnienia. Wypadkową $O7$ składamy teraz z C_7 , robimy więc $cd \parallel O8$, $df \parallel O9$. Przecięcie się tej prostej z drugim szwem w E_2 daje nam następny punkt linii ciśnienia. $O9$ składamy teraz z C_8 i P_3 , a więc robimy najprzód $fg \parallel O10$, potem $gE_3 \parallel O11$. Przecięcie się gE_3 z podstawą daje nam środek ciśnienia podstawy. Linia ciśnienia jest linią, łączącą środki ciśnień na pojedyncze szwy, a więc $eE_1E_2E_3$ (na rysunku dla wyrazistości opuszczona).



Rys. 427.

W tym wypadku widzimy, że linia ciśnienia nie wychodzi wcale z jądra w podstawie, a nawet leży za blisko środka podstawy, potrzebaby więc zmniejszyć przekrój muru i powtórzyć konstrukcją raz jeszcze, aby się przekonać, czy mur nie pracuje na ciągnięcie.

Jeżeli parcie ziemi jest stosunkowo większem, a więc przy wysokich przyczółkach, zdarza się często, że linia ciśnienia w środku wysokości zbliża się do ojędnej zewnętrznej, potem zaś zwraca się na wewnątrz i zbliża się do ojędnej wewnętrznej.



I. DODATEK.

Literatura.

Podajemy tu w porządku chronologicznym spis podręczników i ważniejszych (bo ilość ich jest nader wielka) artykułów, jako też dzieł o statyce budowli, przyczem nadmienić musimy, że przytaczamy tu także dzieła, z których przy układaniu podręcznika wcale nie korzystaliśmy.

I. Ogólne dzieła.

- Bresse: *Cours de mécanique appliquée*. Paryż 1859. 3 wyd. 1880.
Rankine W. J. M.: *Manuel of civil engineering*. Londyn 1862.
12 wydanie 1877.
Heinzerling F.: *Die angreifenden und widerstehenden Kräfte*.
Berlin 1867. 2 wyd. 1876.
Collignon: *Cours de mécanique appliquée*. Paryż 1870.
Holzhey: *Vorträge über Baumechanik*. Wiedeń 1872—1879.
Frauenholz: *Bauconstruction für Ingenieure*. Mníchów 1875.
Ritter A.: *Lehrbuch der Ingenieurmechanik*. Hanower 1875.
3 wyd. 1885.
Ott: *Vorträge über Baumechanik*. Praga 1877—1880., 3 wyd.
1888—1893.
Navier: *Mechanik der Baukunst, bearbeitet von Westphal und Föppl*. Hanower 1879.
Résal H.: *Traité de la mécanique générale*.
Hintz L.: *Baustatik*. Weimar 1882.
Herrmann: *Die Statik der Bauwerke*. Brunszwik 1882.
Flamant: *Stabilité des constructions*. Paryż 1886. 2 wyd. 1909.
Planat: *Pratique de la mécanique appliquée*. Paryż 1887.,
2 wyd. 1899.
Tetmajer: *Baumechanik*. II. część. Zurych 1889.
Landsberg Theod.: *Die Statik der Hochbauconstructionen*.
Darmstadt. 2 wyd. 1989., 3 wyd. 1899.
Vigreux: *Revue technique de l' exposition universelle*. Paryż
1891.

- Canevazzi: S.: *Meccanica applicata delle costruzioni*. Turyn 1891.
- Claussen E.: *Statik und Festigkeitslehre*. Berlin 1893.
- Pillet J.: *Traité de stabilité des constructions*. Paryż 1895.
- Vonderlinn J.: *Statik für Hoch- und Tiefbautechniker*. Stuttgart 1896, 2 wyd. 1902.
- Mehrtens G.: *Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre*. Lipsk 1903—5., 2 wyd. 1909.
- Тимошенко: Сборникъ задачъ по сопротивленію матеріаловъ. Kijów 1910.
- Zschetzsche A. P.: *Handbuch der Baustatik*. Düsseldorf 1912.
- Andrews Ewart S.: *The theory and design of structures*. Londyn 1913.

2. Statyka wykreślna.

- Culmann: *Graphische Statik*. Zurych 1 wyd. 1866, 2 wyd. 1875.
- Bauschinger: *Elemente der graphischen Statik*. Mnichów 1871, 2 wyd. 1880.
- Favaro: *La statica grafica*. Wenecya 1873., 2 wyd. Padwa 1877.
- Levy: *La statique graphique et ses applications aux constructions*. Paryż 1874, wyd. 1888.
- Cremona L.: *Elementi di calcolo grafico*. Turyn 1874.
- Ott: *Graphische Statik*. 1874, 4 wyd. Praga 1884—1885.
- Abakanowicz B.: *Zarys statyki wykreślnej*. Lwów 1876.
- Du Bois: *Elements of graphical statics*. Nowy York 1876.
- Klasen: *Graphische Ermittlung der Spannungen*. Wiedeń 1878.
- Saviotti C.: *Lezioni di statica grafica*. Rzym 1878—9.
- Cremona L.: *Le figure reciproche nella statica grafica*. Medyolan 3 wyd. 1879.
- Eddy: *New constructions in graphical statics*. Londyn 1880, 2 wyd. 1888.
- Müller Breslau: *Elemente der graphischen Statik*. Berlin 1881, 3 wyd. 1887—1892, 5 wyd. 1912.
- Baldermann: *Graphische Integration. Allg. Bauzeitung*. 1881.
- Chalmers: *Graphical determination of forces*. Londyn 1881.
- Maurer: *Statique graphique*. Paryż 1882, 2 wyd. 1885.
- Stelzel: *Graphische Statik*. Gradec 1882.

- Hauser et Cunq.: *Statique graphique appliquée*. Paryż 1886.
Ritter W.: *Anwendungen der graphischen Statik*. 1 część Zurych 1888.
Cullmann-Ritter: *Anwendungen der graphischen Statik*. Zurych 1888—90.
Köchlin: *Applications de la statique graphique*. Paryż 1889, 2 wyd. 1898.
Lauenstein B.: *Die graphische Statik*. Stuttgart 1—4 wyd. 1890—1898, 8 wyd. 1904.
Keck W.: *Vorträge über graphische Statik*. Hannover 1894.
Кирницев: Основания графической статики. Кіjów 1902.
Everding G.: *Lehrbuch der Graphostatik*. 1906.
Huber Dr. Maks.: *Statyka wykreślna*. Lwów 1909.
Wehnert Ern.: *Einführung in die Festigkeitslehre* 1910.
Schur Fr.: *Vorlesungen über graphische Statik*. 1915.
Popławski: *Statyka wykreślna*. Warszawa. 1917.

3. Teorya belek, sprężystość i wytrzymałość.

- Rebhann: *Theorie der Holz- u. Eisenkonstruktion*. Wiedeń 1856.
Morin A.: *Résistance des matériaux*. Paryż 1857.
Clapeyron: *Calcul d'une poutre élastique, reposant librement sur des appuis inégalement espacés*. 1857.
Scheffler H.: *Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken*. Brunswik 1858.
Grashof: *Festigkeitslehre*. Berlin 1866.
Winkler E.: *Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Praga 1867.
Mohr: *Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen, Zeit. der Arch. oder Ing. Ver. zu Hannover* 1868.
Ritter A.: *Theorie und Berechnung der eisernen Dach- und Brückenkonstruktionen*. 1870, 3 wyd. 1873.
Wöhler: *Die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl*. Berlin 1870.
Cordier E.: *Equilibre stable des charpentes*. Paryż. 1872.
Winkler E.: *Vorträge über Brückenbau*. 1875.
Spangenberg: *Ueber das Verhalten der Metalle bei wiederholten Anstrengungen*. Berlin 1875.
Tetmajer: *Die äusseren und inneren Kräfte an st. bestimmten Konstruktionen*. Zurych 1875.

- Hulewicz: Obliczenie wytrzymałości belek wieloprzęsłowych. Paryż 1876.
- Kluger: Wykład wytrzymałości materiałów. Paryż 1876.
- Weyrauch J.: *Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen und Stahlkonstruktionen*. Lipsk 1876.
- Bauschinger: *Mittheilungen aus dem mech. technischen Laboratorium der k. k. Hochschule in München*, zeszyt I. 1877.
- Winkler E.: *Wahl der zulässigen Inanspruchnahme der Eisenconstruction*. Wiedeń 1877.
- Winkler E.: *Versuche über die Knickfestigkeit eiserner Säulen*. Civiling. 1878.
- Abakanowicz: Integrator, krzywa całkowita i jej zastosowanie. Warszawa 1880, 2 wyd. Paryż 1886.
- Burr: *A course on the stresses in bridge and roof trusses*. Nowy York 1880.
- Foeppl: *Theorie des Fachwerks*. Lipsk 1880.
- Wehage: *Spannungen in verbogenen Körpern*. Civiling 1880.
- Hulewicz: *Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées*. *Ann. d. ponts et chaus.* 1882.
- Wittmann: *Statik der Hochbauconstructionen II Holzconstructionen*. Mnichów 1882.
- Ritter W.: *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken*. Zurych 1883.
- Jay du Bois: *The strains in framed structures*. Nowy York 1883.
- Wittmann: *Statik der Hochbauconstructionen III. Eisenconstruction*. Mnichów 1884, 2. wyd. 1893.
- Dwelshavers-Dery: *Principes de la résistance des matériaux*. Leodyum 1884.
- Tetmajer L.: *Mittheilungen der Anstalt zur Prüfung der Baumaterialien*. Zurych 1884—1901.
- Obrębowicz: O wytrzymałości na wyboczenie. Rocznik Akademii Umiejętności. Kraków 1885.
- Vigreux L.: *Traité théorique et pratique de la résistances des matériaux*. Paryż 1885.
- Müller-Breslau: *Die neuere Methoden der Festigkeitslehre*. Lipsk 1886, 3 wyd. 1904, 4 wyd. 1913.
- Brune: *Cours de construction. Résistance des matériaux*. Paryż 1888.

- Smith R.: *Stress diagrams of solid structures*. 1889.
- Bach: *Elasticität und Festigkeit*. Berlin 1889—1890, 2 wyd. 1894.
- Ritter W.: *Das Fachwerk*. Zurych 1890.
- Miceau et Petit: *Congrès international des procédés de construction*. Paryż 1891.
- Madamet A.: *Résistance des matériaux*. Paryż 1891.
- Keck W.: *Vorträge über Elastizitäts-Lehre*, Hannover 1902—3.
- Hartig: *Vergleichende Versuche über die Festigkeitseigenschaften metallener Gliederkette*. Civilingen. 1892.
- Résal Jean: *Construction métalliques, élasticité et résistance des matériaux, fonte, fer et acier*. Paryż 1892.
- Jasiński F. S.: *Opiat razwytia teorii prodalnahoz izhyba*. Petersburg 1893; to samo po francusku 1894 i po polsku 1895.
- Fidler T. Claxton: *A practical treatise on bridge construction*. Londyn 1893.
- Bovey Henry: *Theory of structures and strength of materials* Nowy York 1893.
- Tetmajer: *Gesetze der Knickfestigkeit der technisch wichtigsten Materialien*. Zurych 1896, 2 wyd. 1901.
- Dechamps: *Les principes de la constructions des charpentes métalliques*. Leodyum 2 wyd. 1898.
- Planat: *Recherches sur la théorie des ciments armés*. Paryż 1898.
- Huber Dr. M. T.: O wytrzymałości słupów. Przeg. Tech. Warszawa 1907.
- Gestessy Th.: *Die Festigkeits-Berechnung der eisernen Träger*. Halle 1908.
- Bryła Dr. St.: *Obliczenie kopuł płaszczowych*. Lwów 1910.
- Ulkowski Fr.: *Tablica wykreslna dźwigarów walcowanych i belek drewnianych*. Rzeszów-Lwów 1910.
- Murdock H. E.: *Strength of materials* Nowy York 1911.

4. Teorya sklepień.

- Carvallo: *Etude sur la stabilité du voûtes* Paryż 1853.
- Scheffler: *Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken*. Brunswik 1875.
- Schwedler: *Zur Theorie der Gewölbe*. Zeitschrift für Bauwesen. Berlin 1859.

- Fabré: *Theorie des voûtes élastiques et dilatables*. Paryż. 1859.
- Hagen: *Form und Stärke gewölbter Bögen*. 1862.
- Harlachner: *Stützlinie im Gewölbe*. *Technische Blätter*. Praga 1870.
- Dupuit: *Traité d'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie*. 1870.
- Heinzerling: *Theorie, Construction und statische Berechnung der Brückengewölbe*. *Allgem. Bauzeitung*. 1872.
- Chrzanowski T.: *Teorya sklepień*. Warszawa 1877.
- Szysztowski: *Nowy sposób kreślenia krzywej ciśnienia*. Paryż 1877.
- Wittmann: *Statik der Hochbauconstruction. I. Theil*. Praga 1879.
- Winkler E.: *Ueber die Lage der Stützlinie im Gewölbe*. *Deutsche Bauzeitung*. 1879.
- Foepppl: *Theorie der Gewölbe*. Lipsk 1880.
- Ritter Fr.: *Zur Theorie der Gewölbe etc. Allg. Bauzeit.* 1881.
- Groeger J.: *Die Statik der Tunnelgewölbe im druckreichen Gebirge*. Praga 1881.
- Perrodil: *Arc d'expérience en maçonnerie An. d. ponts et chaus.* 1882.
- Barkhausen: *Druckvertheilung im rechteckigen Mauerquerschnitt, Z. des hann. Ing. und Arch. Verh.* 1883.
- Rytiř: *Beitrag zur Statik der Gewölbe. Mitth. der Arch. und Ing. Ver. Böhmen.* 1884.
- Obrębowicz: *Oznaczenie naprężeń, wywołanych działaniem sił prostopadłych do przekroju*. *Przegląd Techn.* 1884.
- Autenrieth E.: *Die statische Berechnung der Kuppelgewölbe*. Berlin 1894.
- Tolkmitt G.: *Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken*. Berlin 1895.
- Cain W.: *Theory of steel coscrete arches and of vaulted structures*, 2 wyd. Nowy York 1902.
- Weyrauch: *Elastische Bogenträger*. 1911.
- Vetulani: *Wyznaczenie natężeń normalnych w łukach płaskich*. Lwów 1911.
- Kögler: *Vereinfachte Berechnung eingespannter Gewölbe*. 1913.

5. Budowle ziemne i mury oporowe.

- Ande: *Nouvelles expériences sur la poussée des terres*. Paryż 1849.
- Rebhann: *Theorie des Erddruckes und der Futtermauern*. Wiedeń 1871.
- Mohr: *Beitrag zur Theorie des Erddruckes*. *Zeits. der hann. Ing. und Arch. Ver.* 1871.
- Winkler E: *Neue Theorie des Erddruckes*. Wiedeń 1872.
- Chrzanowski T.: Wyznaczenie grubości ścian murowanych podtrzymujących nasypy. Warszawa 1876.
- Wittmann: *Statik der Hochbauconstructionen I. Theil*. 1879.
- Weyrauch: *Theorie des Erddruckes*. Wiedeń 1881.
- Dubosque: *Murs de soutènement et ponts en maçonnerie*. Paryż 1881.
- Baker B.: *The actual lateral pressure of earthwork*. Nowy York 1881.
- Forchheimer: *Erddruckversuche*. *Zeits. der öster. Ing. und Arch. Ver.* 1882—1883.
- Gobin: *Détermination précise de la stabilité des murs de soutènement*. Paryż 1884.
- Flamant: *La poussée des terres*. *Ann. des pont. et chaus.* 1883.
- Thullie: *Einige Bemerkungen über die ältere Erddrucktheorie*. *Wochens. des öster. Ing. und. Arch. Verein.* 1884.
- Skibiński: Parcie ziemi na podstawie nowych doświadczeń. *Czasop. Techn. i Zeits. des öster. Ing. und Arch. Ver.* 1885.
- Thullie: Doświadczenia Gobina w kwestyi parcia ziemi. *Czasop. Techn. i Wochenbl. für Baukunde.* 1885.
- Kaven A. v.: *Anwendungen der Theorie der Böschungen*. Lipsk 1885.
- Leygue M. L.: *Poussée des terres*. *Ann. d. pont et chaus.* 1885.,
- Häseler E.: *Stütz und Futtermauern*. *Handb. d. Ing.* I. tom II. oddz. 3 wyd. Lipsk 1907.
- Skibiński: *Ueber Stützmauerquerschnitte*. Wiedeń 1893.
- Résal J.: *Poussée des terres, stabilité des murs de soutènement*. Paryż 1903.
- Müller Breslau: *Erddruck auf Stützmauer*. Stutgart. 1906.
- Skibiński: *Das Gleichgewicht des rolligen Materiales*. Wiedeń *Wochen f. d. öffent. Baudienst.* 1917.

II. DODATEK.

Tablice obciążeń stropów.

I. Ciężar stropów i obciążenia

wedle rozporządzenia policji budowniczej w Berlinie z r. 1887.

	ciężar własny <i>kg/m²</i>	zupelny <i>kg/m²</i>
Strop belkowy w domach mieszkalnych	250	500
„ „ we fabrykach i magazynach	250	750
„ „ w spichrzach na zboże	—	850—1000
„ sklepiony z kamieni porowatych w budynkach mieszkalnych	350	600
„ sklepiony we fabrykach	—	1000
„ „ pod przejazdami i podwórzami	—	1250
„ z blachy-falistej	—	500—1000
Schody sklepione	500	1000

2. Ciężar własny stropów

wedle Melana.

Ustrój stropu:

	Ciężar w <i>kg/m²</i>
1. Strop belkowy z podłogą wprost przybitą z dołu, opierzony, z trzciniowaniem i wyprawą	110
2. Strop taki, ale z wstawioną warstwą desek zakładanych na listwach i 8 <i>cm</i> nadsypką	210
3. Zwykły strop belkowy z powalą zakładaną z sufitem, 10 <i>cm</i> nadsypką, podłogą ślepą i posadzką deszczułkową	250
4. Strop zbity z belek w przecięciu 24 <i>cm</i> wysokich z sufitem, 10 <i>cm</i> nadsypką i leżącym brukiem ceglany z 4 <i>cm</i> płytami strychowemi	330
5. Strop z belek żelaznych, zresztą jak 3, bez belek	230
6. „ sklepiony między dźwigarami żelaznymi 15 <i>cm</i> gruby, z cegieł, z wyprawą, nadsypką w kluczu 8 <i>cm</i> grubą i podłogą drewnianą przy odstępnie dźwigarów do 1.5 <i>m</i> bez dźwigarów	450
7. Strop, ale przy odstępnie dźwigarów do 3.0 <i>m</i>	500
8. Sklepienie płaskie, sklepienie wedle układu Demskiego, Hönela, Ludwiga, Schneidra, Scholera, Wehlera i i., zresztą jak 6, średnio	470
9. Strop Kleina z cegłą porowatą, z zaprawą cementową i wkład- kami żelaznymi z 4 <i>cm</i> warstwą zaprawy cementowej, zresztą jak 6	370
10. Sklepienie betonowe w kluczu 8 <i>cm</i> gr., strzałka 15 do 20 <i>cm</i> nadsypka 6 <i>cm</i> nad kluczem, zresztą jak 6	380
11. Sklepienie takie, ale z wypełnieniem z lekkiego betonu nad skle- pieniem aż do 2 <i>cm</i> nad kluczem z 2 <i>cm</i> gr. polepą cementową	330

	Ciężar w kg/m^2
12. Sklepienie Moniera, w kluczu 5 <i>cm</i> gr. odstęp dźwigarów do 3 <i>m</i> , zresztą jak 10	340
13. Dtto, ale z podłogą jak 11	300
14. Strop z blachy falistej, z wypełnieniem betonem poza łukiem w kluczu 8 <i>cm</i> gr. i polepą cementową, odstęp dźwigarów do 3 <i>m</i> , bez wyprawy sufitu i bez dźwigarów	250

3. Ciężary i obciążenia

wedle tow. austr. inż. i arch. w Wiedniu.

a) Ciężar własny stropów.

	z cięż dźwig. kg/m^2	bez dźwig.
1. Zwykły strop belkowy z nadsypką 10 <i>cm</i> , z podłogą, trzcinowaniem i wyprawą powały	250	
2. Zwykły strop zbity z nadsypką 10 <i>cm</i> , zresztą jak pod 1.	340	
3. Zwykły strop zbity z nadsypką 8 <i>cm</i> , trzcinowaniem i wyprawą, posadzką z leżącego bruku ceglanego lub z płyt kamiennych	360	
4. Strop belkowy między dźwigarami, zresztą jak pod 1.	260	210
5. Sklepienie ceglane 15 <i>cm</i> grube między dźwigarami z nadsypką 8 <i>cm</i> w kluczu, trzcinowaniem, posadzką i dźwigarami:		
a) przy odstępie dźwigarów do 1,4	480	450
b) " " " 1,4 <i>m</i> do 3 <i>m</i>	550	520
6. Proste sklepienia, aż do odstępu dźwigarów 1,5 z cegieł wraz z nadsypką, trzcinowaniem i podłogą układu Scholera, wys. ustr. 35 <i>cm</i>	570	530
" Demskiego, Hömla, Ludwiga, Schneidra, Wehlera, Seidla, wys. ustr. 32 <i>cm</i>	450	420
7. Sklepienie betonowe z wyprawą, z nadsypką 6 <i>cm</i> i podłogą:		
a) 7,5 <i>cm</i> gr. 11,5 <i>cm</i> strzałka, wys. ustr. 30 <i>cm</i>	370	350
b) 8,5 <i>cm</i> gr. 20,5 <i>cm</i> strzałka, wys. ustr. 40 <i>m</i>	430	410
8. Sklepienie betonowe z wypełnieniem betonowym i 6 <i>cm</i> grubą betonową podłogą nad kluczem:		
a) 7,5 <i>cm</i> gr. 16,5 <i>cm</i> strzałka wys. ustr. 30 <i>cm</i>	460	440
b) 8,5 <i>cm</i> " 25,5 <i>cm</i> " " " 40 <i>m</i>	550	530
9. Sklepienie Moniera:		
a) 5 <i>cm</i> gruba 25 <i>cm</i> strzałka, wys. ustr. 40 <i>cm</i> z wyprawą, nadsypką 5 <i>cm</i> w kluczu i podłogą drewnianą	360	340

	z cięż. dźwig.	bez dźwig.
	kg/m^2	
1.) 5 cm gr. 43 cm strzałka, wys. ustr. 50 cm z posadzką cementową 2 cm i wypełnieniem pachwin żużlowym betonem	450	480
10. Proste płyty Moniera z podłogą drewnianą, wyprawą i nadsypką, gr. płyt 5 cm z wybetonowaniem główki dźwigaru	440	420
11. Sklepienie z blachy falistej między żelaznymi dźwigarami z podłogą i nadsypką, jednak bez wyprawy:		
a) do odstępu dźwigarów 2 m przy nadsypce 10 m nad szczytem *)	250	235
b) do odstępu 3 m przy nadsypce 6 cm nad szczytem	280	265

b) Ciężar zmienny.

Nazwa obciążonej ubikacji	Ciężar w kg/m^2
Zwykły strych	150
Zwykle mieszkanie	250
Szkoły	300
Schody, ganki, sale koncertowe i balowe, gimnastyczne i dla szermierki, dla zgromadzeń	400
Kancelarye, pracownie, magazyny na piątrach	450
Dtto w parterze	550
Komórki na siano i sieżkę	400
Lodownie na warstwę lodu 1 m	750

4. Ciężary stropów i obciążenia

wedle rozp. prusk. ministerstwa robót publicznych z r. 1910.

a) Stropy drewniane: kg/m^2

Odstęp belek od środka do środka 1 m, grubość 24 . 26 cm.

1. Strop belkowy wałkowy płaski, warstwa gliny 10 cm gruba	230
2. Dtto tylko z podłogą 3,5 cm gr.	70
3. Dtto z polepą zakładaną 3 cm gr. i warstwą gliny 10 cm	210
4. Dtto z polepą zwykłą, wypełnieniem gliną do dolnej krawędzi podłogi 11 cm gr. i podłogą 3,5 cm gr.	220
5. Dtto ale zamiast podłogi z polepą gipsową lub glinianą 5 do 7 cm gr.	310
6. Dtto jak 4, lecz oprócz tego z sufitem 2 cm gr., trzciniowaniem i wyprawą	250
7. Dtto jak 5, lecz oprócz tego z sufitem 2 cm, z trzciniowaniem i wyprawą	340
8. Dtto z polepą pełną, także u dołu okryty gliną do dolnej krawędzi belek, podłoga 3,5 cm gr.	360

*) Na każdy centymeter większej nadsypki zwiększa się ciężar o 11 kg.

b) Stropy sklepione między dźwigarami		
stosunek strzałki $\frac{1}{8}$, ciężar bez dźwigarów.		kg/m ³
9.	Sklepienie łączące do 2 m rozp. przy wyrównaniu popiołem koksowym i podłogą drewnianą	370
9a	Dtto przy wyrównaniu piaskiem zamiast popiołem	} . 420
9b	aż do górnej powierzchni legarów popiołem koksowym	
9c	piaskiem	560
10.	Dtto jak 9, dla l od 2 do 2,5 m	400
10a	przy wyrównaniu piaskiem	} . 490
10b	aż do powierzchni górnej legarów popiołem	
10c	piaskiem	680
11*)	Dtto jak 9, jednak z cegły dziurkowanej	290
12.	Dtto jak 10, „ „ „	320
13.	Dtto „ 9, „ „ porowatej	250
14.	Dtto „ 10, „ „ „	280
15.	Sklepienie betonowe aż do 1,5 m. rozp., zresztą jak 9	320

c) Płaskie stropy pełne.

Ciężar należy w każdym wypadku wyznaczyć. Przykłady:

16.	Strop płaski żelbetowy Moniera, płyta 6 cm, przy wyrównaniu popiołem koksowym z podłogą drewnianą	290
16a	Dtto przy wyrównaniu piaskiem	420
16b	„ za każdy centym. większej grubości płyty	25
17.	Strop płaski żelbetowy Koenena, płyta 10 cm	430
18.	„ „ ceglany Kleina z cegieł porowatych, nadsypką z popiołu, podłogą drewnianą	250

d) Obciążenie użytkowe.

Rodzaj ubikacji:

1.	Mieszkania, małe urzędy, bez obciążenia aktami	250
2.	Sale zgromadzeń, szkoły, sale gimnastyczne, domy towarowe, fabryki, (jeżeli szczególne okoliczności nie wymagają przyjęcia większych obciążeń)	500
3.	Przejazdy lub podwórza, po których się jeździ	800
4.	Schody	500
5.	Magazyny wedle ciężaru towaru i wysokości jego.	
	Dla szaf z aktami, bibliotek, archiwów należy przyjąć razem z pustym miejscem na m ³ 500 kg.	
6.	Strychy	125

*) Powiększenie ciężaru wynosi przy wyrównaniu piaskiem zamiast popiołem przy ceglach dziurkowanych 50, pełnych 90, betonie 70 kg/m². Przy wyrównaniu aż do górnej powierzchni legarów popiołem 65, piaskiem 140 kg/m².

5. Rozporządzenie austr. ministr. dla budowli żelbetowych

z r. 1911 przypisuje w §. 3. ciężar użyteczny.

6. Jako ciężar użyteczny należy przyjąć następujące wartości w *kg* na *m*²:

dla zwykłych strychów	150
„ „ mieszkań	250
„ sal szkolnych	300
„ korytarzy, sali koncertowych, gimnastycznych i szermierskich, dalej dla komór na obrok i dla schodów w zwykłych domach mieszkalnych	400
„ ubikacyj handlowych, sal roboczych i składów na piętrach do- mów mieszkalnych i handlowych	450
„ schodów budynków publicznych, dla sal tańców i sal na zgro- madzenia, ubikacyj handlowych, warstatów i składów na parterze	550
„ lodowni (do wysokości lodu 1 <i>m</i>)	750

7. Wielkość obciążenia dla teatrów, bibliotek, spichrzów, magazynów i pracowni z ciężkimi maszynami należy wyznaczyć w każdym przypadku z osobna.

8. Zeszkłady niosące, które podlegają wstrząśnieniom, należy obliczać dla ciężaru użytecznego 1,3 razy większego, te, które podlegają silnym wstrząśnieniom (np. przez ciężkie maszyny robocze 1,5 razy większego, niż podane w punkcie 6 (lub obliczone wedle punktu 7).

6. Ciężar towarów

nasypanych i nałożonych w magazynach.

Słoma i siano	100 <i>kg/m</i> ³
Pszenvca	760 „
Żyto	680 „
Jęczmień gruby	640 „
„ drobny	510 „
Owies	430 „
Groch, soczewica, proso	850 „
Jablka	300 „
Gruszki, śliwki	350 „
Trawa, koniczyna	350 „
Euraki	700 „
Torf wilgotny	600 „
„ suchy	400 „
Węgiel brunatny	650 „
„ kamienny	900 „
Koks	450 „
Półki na akta, szafy z książkami itd.	600 „
Papier złożony 1 <i>m</i> wysok.	1100 „
Mąka	700 „
Grys	650 „

Ziemiaki	700 kg/m ³
Cukier	750 „
Sól	800 „

Ułożone w workach o 20% mniej.

III. DODATEK.

Tablice liczbowe.

1. Tablica średnicy, obwodu i powierzchni kół, kwadratów, sześciątów, pierwiastków i odwrotności.

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześciąt <i>n</i> ³	Pierwiastki		Od- wro- tność $\frac{100}{n}$
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2π}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	
1	3,14	0,79	1	1	1,000	1,000	100,00
2	6,28	3,14	4	8	1,414	1,260	50,00
3	9,42	7,07	9	27	1,732	1,442	33,33
4	12,57	12,57	16	64	2,000	1,587	25,00
5	15,71	19,63	25	125	2,236	1,710	20,00
6	18,85	28,27	36	216	2,449	1,817	16,67
7	21,99	38,48	49	343	2,646	1,918	14,29
8	25,13	50,27	64	512	2,828	2,000	12,50
9	28,27	63,62	81	729	3,000	2,080	11,11
10	31,42	78,54	100	1000	3,162	2,154	10,00
11	34,56	95,03	121	1331	3,317	2,224	9,09
12	37,70	113,10	144	1728	3,464	2,289	8,33
13	40,84	132,73	169	2197	3,606	2,351	7,69
14	43,98	153,94	196	2744	3,742	2,410	7,14
15	47,12	176,71	225	3375	3,873	2,466	6,67
16	50,26	201,06	256	4096	4,000	2,520	6,25
17	53,41	226,98	289	4913	4,123	2,571	5,88
18	56,55	254,47	324	5832	4,243	2,621	5,56
19	59,69	283,53	361	6859	4,359	2,668	5,26
20	62,83	314,16	400	8000	4,472	2,714	5,00
21	65,97	346,36	441	9261	4,583	2,759	4,76
22	69,11	380,13	484	10648	4,690	2,802	4,55
23	72,26	415,48	529	12167	4,796	2,844	4,35
24	75,40	452,39	576	13824	4,899	2,884	4,17
25	78,54	490,87	625	15625	5,000	2,924	4,00
26	81,68	530,93	676	17576	5,099	2,962	3,85
27	84,82	572,55	729	19683	5,196	3,000	3,70
28	87,97	615,75	784	21952	5,291	3,037	3,57
29	91,11	660,52	841	24389	5,385	3,072	3,45
30	94,25	706,86	900	27000	5,477	3,107	3,33

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześciąt <i>n</i> ³	Pierwiastki		Od- wro- tność $\frac{100}{n}$
	Obwód <i>n</i> π	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	
31	97,39	754,77	9 61	29 791	5,568	3,141	3,23
32	100,53	804,25	10 24	32 768	5,657	3,175	3,13
33	103,67	855,30	10 89	35 937	5,745	3,207	3,03
34	106,81	907,92	11 56	39 304	5,831	3,240	2,94
35	109,96	962,11	12 25	42 875	5,916	3,271	2,86
36	113,10	1017,88	12 96	46 656	6,000	3,302	2,78
37	116,24	1075,21	13 69	50 653	6,083	3,332	2,70
38	119,38	1134,11	14 44	54 872	6,164	3,362	2,63
39	122,52	1194,59	15 21	59 319	6,245	3,391	2,56
40	125,66	1256,64	16 00	64 000	6,325	3,420	2,50
41	128,81	1320,25	16 81	68 921	6,403	3,448	2,44
42	131,95	1385,44	17 64	74 088	6,481	3,476	2,38
43	135,09	1452,20	18 49	79 507	6,557	3,503	2,33
44	138,23	1520,53	19 36	85 184	6,633	3,530	2,27
45	141,37	1590,43	20 25	91 125	6,708	3,557	2,22
46	144,51	1661,90	21 16	97 336	6,782	3,583	2,17
47	147,65	1734,94	22 09	103 823	6,856	3,609	2,13
48	150,80	1809,56	23 04	110 592	6,928	3,634	2,08
49	153,94	1885,74	24 01	117 649	7,000	3,659	2,04
50	157,08	1963,50	25 00	125 000	7,071	3,684	2,00
51	160,22	2042,82	26 01	132 651	7,141	3,708	1,96
52	163,36	2123,72	27 04	140 608	7,211	3,732	1,92
53	166,50	2206,18	28 09	148 877	7,280	3,756	1,89
54	169,65	2290,22	29 16	157 464	7,348	3,780	1,85
55	172,79	2375,83	30 25	166 375	7,416	3,803	1,82
56	175,93	2463,01	31 36	175 616	7,483	3,826	1,79
57	179,07	2551,76	32 49	185 193	7,550	3,848	1,75
58	182,21	2642,08	33 64	195 112	7,616	3,871	1,72
59	185,35	2733,97	34 81	205 379	7,681	3,893	1,69
60	188,50	2827,43	36 00	216 000	7,746	3,915	1,67
61	191,64	2922,47	37 21	226 981	7,810	3,936	1,64
62	194,78	3019,07	38 44	238 328	7,874	3,958	1,61
63	197,92	3117,25	39 69	250 047	7,937	3,979	1,59
64	201,06	3216,99	40 96	262 144	8,000	4,000	1,56
65	204,20	3318,31	42 25	274 625	8,062	4,021	1,54
66	207,35	3421,19	43 56	287 496	8,124	4,041	1,52
67	210,49	3525,65	44 89	300 763	8,185	4,061	1,49
68	213,63	3631,68	46 24	314 432	8,246	4,082	1,47
69	216,77	3739,28	47 61	328 509	8,307	4,102	1,45
70	219,91	3848,45	49 00	343 000	8,367	4,121	1,43
71	223,05	3959,19	50 41	357 911	8,426	4,141	1,41
72	226,19	4071,50	51 84	373 248	8,485	4,160	1,39
73	229,34	4185,39	53 29	389 017	8,544	4,179	1,37
74	232,48	4300,84	54 76	405 224	8,602	4,198	1,35
75	235,62	4417,86	56 25	421 875	8,660	4,217	1,33
76	238,76	4536,46	57 76	438 976	8,718	4,236	1,32

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki		Od- wro- tność $\frac{100}{n}$
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	
77	241,90	4656,63	59 29	456 533	8,775	4,254	1,30
78	245,04	4778,36	60 84	474 552	8,832	4,273	1,28
79	248,19	4901,67	62 41	493 039	8,888	4,291	1,27
80	251,33	5026,55	64 00	512 000	8,944	4,309	1,25
81	254,47	5153,00	65 61	531 441	9,000	4,327	1,23
82	257,61	5281,02	67 24	551 368	9,055	4,345	1,22
83	260,75	5410,61	68 89	571 787	9,110	4,362	1,20
84	263,89	5541,77	70 56	592 704	9,165	4,379	1,19
85	267,04	5674,50	72 25	614 125	9,219	4,397	1,18
86	270,18	5808,80	73 96	636 056	9,274	4,414	1,16
87	273,32	5944,68	75 69	658 503	9,327	4,431	1,15
88	276,46	6082,12	77 44	681 472	9,381	4,448	1,14
89	279,60	6221,14	79 21	704 969	9,434	4,465	1,12
90	282,74	6361,73	81 00	729 000	9,487	4,481	1,11
91	285,88	6503,88	82 81	753 571	9,539	4,498	1,10
92	289,03	6647,61	84 64	778 688	9,592	4,514	1,09
93	292,17	6792,91	86 49	804 357	9,644	4,531	1,08
94	295,31	6939,78	88 36	830 584	9,695	4,547	1,06
95	298,45	7088,22	90 25	857 375	9,747	4,563	1,05
96	301,59	7238,23	92 16	884 736	9,798	4,579	1,04
97	304,73	7389,81	94 09	912 673	9,849	4,595	1,03
98	307,88	7542,96	96 04	941 192	9,899	4,610	1,02
99	311,02	7697,69	98 01	970 299	9,950	4,626	1,01
100	314,16	7853,98	1 00 00	1 000 000	10,00	4,642	1,00
101	317,30	8011,85	1 02 01	1 030 301	10,05	4,657	0,990
102	320,44	8171,28	1 04 04	1 061 208	10,10	4,672	0,980
103	323,58	8332,29	1 06 09	1 092 727	10,15	4,687	0,971
104	326,73	8494,87	1 08 16	1 124 864	10,20	4,703	0,962
105	329,87	8659,01	1 10 25	1 157 625	10,25	4,718	0,952
106	333,01	8824,73	1 12 36	1 191 016	10,30	4,733	0,943
107	336,15	8992,02	1 14 49	1 225 043	10,34	4,747	0,936
108	339,29	9160,88	1 16 64	1 259 712	10,39	4,762	0,926
109	342,43	9331,32	1 18 81	1 295 029	10,44	4,777	0,917
110	345,58	9503,32	1 21 00	1 331 000	10,49	4,791	0,909
111	348,72	9676,89	1 23 21	1 367 631	10,54	4,806	0,901
112	351,86	9852,03	1 25 44	1 404 928	10,58	4,820	0,893
113	355,00	10028,7	1 27 69	1 442 897	10,63	4,835	0,885
114	358,14	10207,0	1 29 96	1 481 544	10,68	4,849	0,877
115	361,28	10386,9	1 32 25	1 520 875	10,72	4,863	0,870
116	364,42	10568,3	1 34 56	1 560 896	10,77	4,877	0,862
117	367,57	10751,3	1 36 89	1 601 613	10,82	4,891	0,855
118	370,71	10935,9	1 39 24	1 643 032	10,86	4,905	0,847
119	373,85	11122,0	1 41 61	1 685 159	10,91	4,919	0,840
120	376,99	11309,7	1 44 00	1 728 000	10,95	4,932	0,833
121	380,13	11499,0	1 46 41	1 771 561	11,00	4,946	0,826

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcián n^3	Pierwiastki		Od- wro- tność $\frac{100}{n}$
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	
122	383,27	11689,9	1 48 84	1 815 848	11,05	4,960	0,820
123	386,42	11882,3	1 51 29	1 860 867	11,09	4,973	0,813
124	389,56	12076,3	1 53 76	1 906 624	11,14	4,987	0,806
125	392,70	12271,8	1 56 25	1 953 125	11,18	5,000	0,800
126	395,84	12469,0	1 58 76	2 000 376	11,22	5,013	0,794
127	398,98	12667,7	1 61 29	2 048 383	11,27	5,026	0,787
128	402,12	12868,0	1 63 84	2 097 152	11,31	5,040	0,781
129	405,27	13069,8	1 66 41	2 146 689	11,36	5,053	0,775
130	408,41	13273,2	1 69 00	2 197 000	11,40	5,066	0,769
131	411,55	13478,2	1 71 61	2 248 091	11,45	5,079	0,763
132	414,69	13684,8	1 74 24	2 299 968	11,49	5,092	0,758
133	417,83	13892,9	1 76 89	2 352 637	11,53	5,104	0,752
134	420,97	14102,6	1 79 56	2 406 104	11,58	5,117	0,746
135	424,12	14313,9	1 82 25	2 460 375	11,62	5,130	0,741
136	427,26	14526,7	1 84 96	2 515 456	11,66	5,143	0,735
137	430,40	14741,1	1 87 69	2 571 353	11,70	5,155	0,730
138	433,54	14957,1	1 90 44	2 628 072	11,75	5,168	0,725
139	436,68	15174,7	1 93 21	2 685 619	11,79	5,180	0,719
140	439,82	15393,8	1 96 00	2 744 000	11,83	5,192	0,714
141	442,96	15614,5	1 98 81	2 803 221	11,87	5,205	0,709
142	446,11	15836,8	2 01 64	2 863 288	11,92	5,217	0,704
143	449,25	16060,6	2 04 49	2 924 207	11,96	5,229	0,699
144	452,39	16286,0	2 07 36	2 985 984	12,00	5,241	0,694
145	455,53	16513,0	2 10 25	3 048 625	12,04	5,254	0,690
146	458,67	16741,5	2 13 16	3 112 136	12,08	5,266	0,685
147	461,81	16971,7	2 16 09	3 176 523	12,12	5,278	0,680
148	464,96	17203,4	2 19 04	3 241 792	12,17	5,290	0,676
149	468,10	17436,6	2 22 01	3 307 949	12,21	5,301	0,671
150	471,24	17671,5	2 25 00	3 375 000	12,25	5,313	0,667
151	474,38	17907,9	2 28 01	3 442 951	12,29	5,325	0,662
152	477,52	18145,8	2 31 04	3 511 808	12,33	5,337	0,658
153	480,66	18385,4	2 34 09	3 581 577	12,37	5,348	0,654
154	483,81	18626,5	2 37 16	3 652 264	12,41	5,360	0,649
155	486,95	18869,2	2 40 25	3 723 875	12,45	5,372	0,645
156	490,09	19113,4	2 43 36	3 796 416	12,49	5,383	0,641
157	493,23	19359,3	2 46 49	3 869 893	12,53	5,395	0,637
158	496,37	19606,7	2 49 64	3 944 312	12,57	5,406	0,633
159	455,51	19855,7	2 52 81	4 019 679	12,61	5,417	0,629

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki		Od- wro- tność $\frac{1000}{n}$
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	
160	502,65	20106,2	2 56 00	4 096 000	12,65	5,429	6,25
161	505,80	20358,8	2 59 21	4 178 281	12,69	5,440	6,21
162	508,94	20612,0	2 62 44	4 251 528	12,73	5,451	6,17
163	512,08	20867,2	2 65 69	4 330 747	12,77	5,463	6,13
164	515,22	21124,1	2 68 96	4 410 944	12,81	5,474	6,10
165	518,36	21382,5	2 72 25	4 492 125	12,85	5,485	6,06
166	521,50	21642,4	2 75 56	4 574 296	12,88	5,496	6,03
167	524,65	21904,0	2 78 89	4 657 463	12,92	5,507	5,99
168	527,79	22167,1	2 82 24	4 741 632	12,96	5,518	5,95
169	530,93	22431,8	2 85 61	4 826 809	13,00	5,529	5,92
170	534,07	22698,0	2 89 00	4 913 000	13,04	5,540	5,88
171	537,21	22965,8	2 92 41	5 000 211	13,08	5,550	5,85
172	540,35	23235,1	2 95 84	5 088 448	13,11	5,561	5,81
173	543,50	23506,2	2 99 29	5 177 717	13,15	5,572	5,78
174	546,64	23778,7	3 02 76	5 268 024	13,19	5,583	5,75
175	549,78	24052,8	3 06 25	5 359 375	13,23	5,593	5,71
176	552,92	24328,5	3 09 76	5 451 776	13,27	5,604	5,68
177	556,06	24605,7	3 13 29	5 545 233	13,30	5,615	5,65
178	559,29	24884,6	3 16 84	5 639 752	13,34	5,625	5,62
179	562,35	25164,9	3 20 41	5 725 339	13,38	5,636	5,59
180	565,49	25446,9	3 24 00	5 832 000	13,42	5,646	5,56
181	568,63	25730,4	3 27 61	5 929 741	13,45	5,657	5,52
182	571,77	26015,5	3 31 24	6 028 568	13,49	5,667	5,49
183	574,91	26302,2	3 34 89	6 128 487	13,53	5,677	5,46
184	578,05	26590,4	3 38 56	6 229 504	13,56	5,688	5,43
185	581,19	26880,3	3 42 25	6 331 625	13,60	5,698	5,41
186	584,34	27171,6	3 45 96	6 434 856	13,64	5,708	5,38
187	587,48	27464,6	3 49 69	6 539 203	13,67	5,718	5,35
188	590,62	27759,1	3 53 44	6 644 672	13,71	5,729	5,32
189	593,76	28055,2	3 57 21	6 751 269	13,75	5,739	5,29
190	596,90	28352,9	3 61 00	6 859 000	13,78	5,749	5,26
191	600,04	28652,1	3 64 81	6 967 871	13,82	5,759	5,24
192	603,19	28952,9	3 68 64	7 077 888	13,86	5,769	5,21
193	606,33	29255,3	3 72 49	7 189 057	13,89	5,779	5,18
194	609,47	29559,2	3 76 36	7 301 384	13,93	5,789	5,15
195	612,61	29864,8	3 80 25	7 414 875	13,96	5,799	5,13
196	615,75	30171,9	3 84 16	7 529 536	14,00	5,809	5,10
197	618,89	30480,5	3 88 09	7 645 373	14,04	5,819	5,08
198	622,04	30790,7	3 92 04	7 762 392	14,07	5,828	5,05
199	625,18	31102,6	3 96 01	7 880 599	14,11	5,838	5,03
200	628,32	31415,9	4 00 00	8 000 000	14,14	5,848	5,00
201	631,46	31730,9	4 04 01	8 120 601	14,18	5,858	4,98
202	634,60	32047,4	4 08 04	8 242 408	14,21	5,867	4,95
203	637,74	32365,5	4 12 09	8 365 427	14,25	5,877	4,93
204	640,88	32685,1	4 16 16	8 489 664	14,28	5,887	4,90

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcián n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
205	644,03	33006,4	4 20 25	8 615 125	14,32	5,896
206	647,17	33329,2	4 24 36	8 741 816	14,35	5,906
207	650,31	33653,5	4 28 49	8 869 743	14,39	5,915
208	653,45	33979,5	4 32 64	8 998 912	14,42	5,925
209	656,59	34307,0	4 36 81	9 123 329	14,46	5,934
210	659,73	34636,1	4 41 00	9 261 000	14,49	5,944
211	662,88	34966,7	4 45 21	9 393 931	14,53	5,953
212	666,02	35298,9	4 49 44	9 528 128	14,56	5,963
213	669,16	35632,7	4 53 69	9 663 597	14,59	5,972
214	672,30	36968,1	4 57 96	9 800 344	14,63	5,981
215	675,44	36305,0	4 62 25	9 938 375	14,66	5,991
216	678,58	36643,5	4 66 56	10 077 696	14,70	6,000
217	681,73	36983,6	4 70 89	10 218 313	14,73	6,009
218	684,86	37325,3	4 75 24	10 360 232	14,76	6,018
219	688,01	37668,5	4 79 61	10 503 459	14,80	6,028
220	691,15	38013,3	4 84 00	10 648 000	14,83	6,037
221	694,29	38359,6	4 88 41	10 793 861	14,87	6,046
222	697,43	38707,6	4 92 84	10 941 048	14,90	6,055
223	700,58	39057,1	4 97 29	11 089 567	14,93	6,064
224	703,72	39408,1	5 01 76	11 239 424	14,97	6,073
225	706,86	39760,8	5 06 25	11 390 625	15,00	6,082
226	710,00	40115,0	5 10 76	11 543 176	15,03	6,091
227	713,14	40470,8	5 15 29	11 697 083	15,07	6,100
228	716,28	40828,1	5 19 84	11 852 352	15,10	6,109
229	719,42	41187,1	5 24 41	12 008 989	15,13	6,118
230	722,57	41547,6	5 29 00	12 167 000	15,17	6,127
231	725,71	41909,6	5 33 61	12 326 391	15,20	6,136
232	728,85	42273,3	5 38 24	12 487 168	15,23	6,145
233	731,99	42638,5	5 42 89	12 649 337	15,26	6,153
234	735,13	43005,3	5 47 56	12 812 904	15,30	6,162
235	738,27	43373,6	5 52 25	12 977 875	15,33	6,171
236	741,42	43743,5	5 56 96	13 144 256	15,36	6,180
237	744,56	44115,0	5 61 69	13 312 053	15,39	6,188
238	747,70	44488,1	5 66 44	13 481 272	15,43	6,197
239	750,84	44862,7	5 71 21	13 651 919	15,46	6,206
240	753,98	45238,9	5 76 00	13 824 000	15,49	6,214
241	757,12	45616,7	5 80 81	13 997 521	15,52	6,223
242	760,27	44996,1	5 85 64	14 172 488	15,56	6,232
243	763,41	46377,0	5 90 49	14 348 907	15,59	6,240
244	766,55	46759,5	5 95 36	14 526 784	15,62	6,249
245	769,69	47143,5	6 00 25	14 706 125	15,65	6,257
246	772,83	47529,2	6 05 16	14 886 936	15,68	6,266
247	775,97	47916,4	6 10 09	15 069 223	15,72	6,274
248	779,11	48305,1	6 15 04	15 252 992	15,75	6,283
249	782,26	48695,5	6 20 01	15 438 249	15,78	6,291
250	785,40	49087,4	6 25 00	15 625 000	15,81	6,300

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześciąt n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
251	788,54	49480,9	6 30 01	15 813 251	15,84	6,308
252	791,68	49875,9	6 35 04	16 008 008	15,87	6,316
253	794,82	50272,6	6 40 09	16 194 277	15,91	6,325
254	797,96	50670,7	6 45 16	16 387 064	15,94	6,333
255	801,11	51070,5	6 50 25	16 581 375	15,97	6,341
256	804,25	51471,9	6 55 36	16 777 216	16,00	6,350
257	807,39	51874,8	6 60 49	16 974 593	16,03	6,358
258	810,53	52279,2	6 65 64	17 173 512	16,06	6,366
259	813,67	52685,3	6 70 81	17 373 979	16,09	6,374
260	816,81	53092,9	6 76 00	17 576 000	16,12	6,383
261	819,96	53502,1	6 81 21	17 779 581	16,16	6,391
262	823,10	53912,9	6 86 44	17 984 728	16,19	6,399
263	826,24	54325,2	6 91 69	18 191 447	16,22	6,407
264	829,38	54739,1	6 96 96	18 399 744	16,25	6,415
265	832,52	55154,6	7 02 25	18 609 625	16,28	6,423
266	835,66	55571,6	7 07 56	18 821 096	16,31	6,431
267	838,81	55990,2	7 12 89	19 034 163	16,34	6,439
268	841,95	56410,4	7 18 24	19 248 832	16,37	6,447
269	845,09	56832,2	7 23 61	19 465 109	16,40	6,455
270	848,23	57255,5	7 29 00	19 683 000	16,43	6,463
271	851,37	57680,4	7 34 41	19 902 511	16,46	6,471
272	854,51	58106,9	7 39 84	20 123 648	16,49	6,479
273	857,65	58534,9	7 45 29	20 346 417	16,52	6,487
274	860,80	58964,6	7 50 76	20 570 824	16,55	6,495
275	863,94	59395,7	7 56 25	20 796 875	16,58	6,503
276	867,08	59828,5	7 61 76	21 024 576	16,61	6,511
277	870,22	60262,8	7 67 29	21 253 933	16,64	6,519
278	873,66	60698,7	7 72 84	21 484 952	16,67	6,526
279	876,50	61136,2	7 78 41	21 717 639	16,70	6,534
280	879,65	61575,2	7 84 00	21 952 000	16,73	6,542
281	882,79	62015,8	7 89 61	22 188 041	16,76	6,550
282	885,93	62458,0	7 95 24	22 425 768	16,79	6,558
283	889,07	62901,8	8 00 89	22 665 187	16,82	6,565
284	892,21	63347,1	8 06 56	22 906 304	16,85	6,573
285	895,35	63794,0	8 12 25	23 149 125	16,88	6,581
286	898,50	64242,4	8 17 96	23 393 656	16,91	6,588
287	901,64	64692,5	8 23 69	23 639 903	16,94	6,596
288	904,78	65144,1	8 29 44	23 887 872	16,97	6,604
289	907,92	65597,2	8 35 21	24 137 569	17,00	6,611
290	911,06	66052,0	8 41 00	24 389 000	17,03	6,619
291	914,20	66508,3	8 46 81	24 642 171	17,06	6,627
292	917,35	66966,2	8 52 64	24 897 088	17,09	6,634
293	920,49	67425,6	8 58 49	25 153 757	17,12	6,642
294	923,63	67886,7	8 64 36	25 412 184	17,15	6,649
295	926,77	68349,3	8 70 25	25 672 375	17,18	6,657
296	929,91	68813,4	8 76 16	26 934 336	17,20	6,664

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcian <i>n</i> ³	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
297	933,05	69279,2	8 82 09	26 198 073	17,23	6,672
298	936,19	69746,5	8 88 04	26 463 592	17,26	6,679
299	939,34	70215,4	8 94 01	26 730 899	17,29	6,687
300	942,48	70685,8	9 00 00	27 000 000	17,32	6,694
301	945,62	71157,9	9 06 01	27 270 901	17,35	6,702
302	948,76	71631,5	9 12 04	27 543 608	17,38	6,709
303	951,90	72106,6	9 18 09	27 818 127	17,41	6,717
304	955,04	72583,4	9 24 16	28 094 464	17,44	6,724
305	958,19	73061,7	9 30 25	28 372 625	17,46	6,731
306	961,33	73541,5	9 36 36	28 652 616	17,49	6,739
307	964,47	74023,0	9 42 49	28 934 443	17,52	6,746
308	967,61	74506,0	9 48 64	29 218 112	17,55	6,753
309	970,75	74990,6	9 54 81	29 503 629	17,58	6,761
310	973,89	75476,8	9 61 00	29 791 000	17,61	6,768
311	977,04	75964,5	9 67 21	30 080 231	17,64	6,775
312	980,18	76453,8	9 73 44	30 371 328	17,66	6,782
313	983,32	76944,7	9 79 69	30 664 297	17,69	6,790
314	986,46	77437,1	9 85 96	30 959 144	17,72	6,797
315	989,60	77931,1	9 92 25	31 255 875	17,75	6,804
316	992,74	78426,7	9 98 56	31 554 496	17,78	6,811
317	995,88	78923,9	10 04 89	31 855 013	17,80	6,818
318	999,03	79422,6	10 11 24	32 157 432	17,83	6,826
319	1002,2	79922,9	10 17 61	32 461 759	17,86	6,833
320	1005,3	80424,8	10 24 00	32 768 000	17,89	6,840
321	1008,5	80928,2	10 30 41	33 076 161	17,92	6,847
322	1011,6	81433,2	10 36 84	33 386 248	17,94	6,854
323	1014,7	81939,8	10 43 29	33 698 267	17,97	6,861
324	1017,9	82448,0	10 49 76	34 012 224	18,00	6,868
325	1021,0	82957,7	10 56 25	34 328 125	18,03	6,875
326	1024,2	83469,0	10 62 76	34 645 976	18,06	6,882
327	1027,3	83981,8	10 69 29	34 965 783	18,08	6,889
328	1030,4	84496,3	10 75 84	35 287 552	18,11	6,896
329	1033,6	85012,3	10 82 41	35 611 289	18,14	6,903
330	1036,7	85529,9	10 89 00	35 937 000	18,17	6,910
331	1039,9	86049,0	10 95 61	36 264 691	18,19	6,917
332	1043,0	86569,7	11 02 24	36 594 368	18,22	6,924
333	1046,2	87092,0	11 08 89	36 926 037	18,25	6,931
334	1049,3	87615,9	11 15 56	37 259 704	18,28	6,938
335	1052,4	88141,3	11 22 25	37 595 375	18,30	6,945
336	1055,6	88668,2	11 28 96	37 933 056	18,33	6,952
337	1058,7	89196,9	11 35 69	38 272 753	18,36	6,959
338	1061,9	89727,0	11 42 44	38 614 472	18,38	6,966
339	1065,0	90258,7	11 49 21	38 958 219	18,41	6,973
340	1068,1	90792,0	11 56 00	39 304 000	18,44	6,979
341	1071,3	91326,9	11 62 81	39 651 821	18,47	6,986

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcián <i>n</i> ²	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
342	1074,4	91863,3	11 69 64	40 001 688	18,49	6,998
343	1077,6	92401,3	11 76 49	40 353 607	18,52	7,000
344	1080,7	92940,9	11 83 36	40 707 584	18,55	7,007
245	1083,9	93482,0	11 90 25	41 063 625	18,57	7,014
346	1087,0	94024,7	11 97 16	41 421 736	18,60	7,020
347	1090,1	94569,0	12 04 09	41 781 923	18,63	7,027
348	1093,3	95114,9	12 11 04	42 144 192	18,66	7,034
349	1096,4	95662,3	12 18 01	42 508 549	18,68	7,040
350	1099,6	96211,3	12 25 00	42 875 000	18,71	7,047
351	1102,7	96761,8	12 32 01	43 243 551	18,74	7,054
352	1105,8	97314,0	12 39 04	43 614 208	18,76	7,061
353	1109,0	97867,7	12 46 09	43 986 977	18,79	7,067
354	1112,1	98423,0	12 53 16	44 361 864	18,81	7,074
355	1115,3	98979,8	12 60 25	44 738 875	18,84	7,081
356	1118,4	99538,3	12 67 36	45 118 016	18,87	7,087
357	1121,6	100098	12 74 49	45 499 293	18,89	7,094
358	1124,7	100660	12 81 64	45 882 712	18,92	7,101
359	1127,8	101223	12 88 81	46 268 279	18,95	7,107
360	1131,0	101788	12 96 00	46 656 000	18,97	7,114
361	1134,1	102354	13 03 21	47 045 881	19,00	7,120
362	1137,3	102922	13 10 44	47 437 928	19,03	7,127
363	1140,4	103491	13 17 69	47 832 147	19,05	7,133
364	1143,5	104062	13 24 96	48 228 544	19,08	7,140
365	1146,7	104635	13 32 25	48 627 125	19,11	7,147
366	1149,8	105209	13 39 56	49 027 896	19,13	7,153
367	1153,0	105784	13 46 89	49 430 863	19,16	7,160
368	1156,1	106362	13 54 24	49 836 032	19,18	7,166
369	1159,3	106941	13 61 61	50 243 409	19,21	7,173
370	1162,4	107521	13 69 00	50 653 000	19,24	7,179
371	1165,5	108103	13 76 41	51 064 811	19,26	7,185
372	1168,7	108687	13 83 84	51 478 848	19,29	7,192
373	1171,8	109272	13 91 29	51 895 117	19,31	7,198
374	1175,0	109858	13 98 76	52 313 624	19,34	7,205
375	1178,1	110447	14 06 25	52 734 375	19,36	7,211
376	1181,2	111036	14 13 76	53 157 376	19,39	7,218
377	1184,4	111628	14 21 29	53 582 533	19,42	7,224
378	1187,5	112221	14 28 84	54 010 152	19,44	7,230
379	1190,7	112815	14 36 41	54 439 939	19,47	7,237
380	1193,8	113411	14 44 00	54 872 000	19,49	7,243
381	1196,9	114009	14 51 61	55 306 341	19,52	7,249
382	1200,1	114608	14 59 24	55 742 968	19,54	7,256
383	1203,2	115209	14 66 89	56 181 887	19,57	7,262
384	1206,4	115812	14 74 56	56 623 104	19,60	7,268
385	1209,5	116416	14 82 25	57 066 625	19,62	7,275
386	1212,7	117021	14 89 96	57 512 456	19,65	7,281
387	1215,8	117628	14 97 69	57 960 603	19,67	7,287

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcián n^2	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
388	1218,9	118237	15 05 44	58 411 072	19,70	7,294
389	1222,1	118847	15 13 21	58 863 869	19,72	7,300
390	1225,2	119459	15 21 00	59 319 000	19,75	7,306
391	1228,4	120072	15 28 81	59 776 471	19,77	7,312
392	1231,5	120687	15 36 64	60 236 288	19,80	7,319
393	1234,6	121304	15 44 49	60 698 457	19,82	7,325
394	1237,8	121922	15 52 36	61 162 984	19,85	7,331
395	1240,9	122542	15 60 25	61 629 875	19,88	7,337
396	1244,1	123168	15 68 16	62 099 136	19,90	7,343
397	1247,2	123786	15 76 09	62 570 773	19,92	7,350
398	1250,4	124410	15 84 04	63 044 792	19,95	7,356
399	1253,5	125036	15 92 01	63 521 199	19,98	7,362
400	1256,6	125664	16 00 00	64 000 000	20,00	7,368
401	1259,8	126293	16 08 01	64 481 201	20,03	7,374
402	1262,9	126923	16 16 04	64 964 808	20,05	7,380
403	1266,1	127556	16 24 09	65 450 827	20,07	7,386
404	1269,2	128190	16 32 16	65 939 264	20,10	7,392
405	1272,3	128825	16 40 25	66 430 125	20,12	7,399
406	1275,5	129462	16 48 36	66 923 416	20,15	7,405
407	1278,6	130100	16 56 49	67 419 143	20,17	7,411
408	1281,8	130741	16 64 64	67 917 312	20,20	7,417
409	1284,9	131382	16 72 81	68 417 929	20,22	7,423
410	1288,1	132025	16 81 00	68 921 000	20,25	7,429
411	1291,1	132670	16 89 21	69 426 531	20,27	7,435
412	1294,3	133317	16 97 44	69 934 528	20,30	7,441
413	1297,5	133965	17 05 69	70 444 997	20,32	7,447
414	1300,6	134614	17 13 96	70 957 944	20,35	7,453
415	1303,8	135265	17 22 25	71 473 375	20,37	7,459
416	1306,8	135918	17 30 56	71 991 296	20,40	7,465
417	1310,0	136572	17 38 89	72 511 713	20,42	7,471
418	1313,2	137228	17 47 24	73 034 632	20,45	7,477
419	1316,3	137885	17 55 61	73 560 059	20,47	7,483
420	1319,5	138544	17 64 00	74 088 000	20,49	7,489
421	1322,6	139205	17 72 41	74 618 461	20,52	7,495
422	1325,8	139867	17 80 84	75 151 448	20,54	7,501
423	1328,9	140531	17 89 29	75 686 967	20,57	7,507
424	1332,0	141196	17 97 76	76 225 024	20,59	7,513
425	1335,2	141863	18 06 25	76 755 625	20,62	7,518
426	1338,3	142531	18 14 76	77 308 776	20,64	7,524
427	1341,5	143201	18 23 29	77 854 483	20,66	7,530
428	1344,6	143872	18 31 84	78 402 752	20,69	7,536
429	1347,7	144545	18 40 41	78 953 589	20,71	7,542
430	1350,9	145220	18 49 00	79 507 000	20,74	7,548
431	1354,0	145896	18 57 61	80 062 991	20,76	7,554
432	1357,2	146574	18 66 24	80 621 568	20,78	7,559

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcián n^2	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
433	1360,3	147254	18 74 89	81 182 737	20,81	7,565
434	1363,5	147984	18 83 56	81 746 504	20,83	7,571
435	1366,6	148617	18 92 25	82 312 875	20,86	7,577
436	1369,7	149301	19 00 96	82 881 856	20,88	7,583
437	1372,9	149987	19 09 69	83 453 453	20,90	7,589
438	1376,0	150674	19 18 44	84 027 672	20,93	7,594
439	1479,2	151363	19 27 21	84 604 519	20,95	7,600
440	1382,3	152053	19 36 00	85 184 000	20,98	7,606
441	1385,4	152745	19 44 81	85 766 121	21,00	7,612
442	1388,6	153439	19 53 64	86 350 388	21,02	7,617
443	1391,7	154134	19 62 49	86 938 307	21,05	7,623
444	1394,9	154830	19 71 36	87 528 384	21,07	7,629
445	1398,0	155528	19 80 25	88 121 125	21,10	7,635
446	1401,2	156228	19 89 16	88 716 536	21,12	7,640
447	1404,3	156930	19 98 09	89 314 623	21,14	7,646
448	1407,4	157633	20 07 04	89 915 392	21,17	7,652
449	1410,6	158337	20 16 01	90 518 849	21,19	7,657
450	1413,7	159043	20 25 00	91 125 000	21,21	7,663
451	1416,9	159751	20 34 01	91 733 851	21,24	7,669
452	1420,0	160460	20 43 04	92 345 408	21,26	7,674
453	1423,1	161171	20 52 09	92 959 677	21,28	7,680
454	1426,3	161883	20 61 16	93 546 664	21,31	7,686
455	1429,4	162597	20 70 25	94 196 375	21,33	7,691
456	1332,6	163313	20 79 36	94 818 816	21,35	7,697
457	1435,7	164030	20 88 49	95 443 993	21,38	7,703
458	1438,9	164748	20 97 64	96 071 912	21,40	7,708
459	1442,0	165468	21 06 81	96 702 579	21,42	7,714
460	1445,1	166190	21 16 00	97 336 000	21,45	7,719
461	1448,3	166914	21 25 21	97 972 181	21,47	7,725
462	1451,4	167639	21 34 44	98 611 128	21,49	7,731
463	1454,6	168365	21 43 69	99 252 847	21,52	7,736
464	1457,7	169093	21 52 96	99 897 344	21,54	7,742
465	1460,8	169823	21 62 25	100 544 625	21,56	7,747
466	1364,0	170554	21 71 56	101 194 696	21,59	7,753
467	1467,1	171287	21 80 89	101 847 563	21,61	7,758
468	1470,3	172021	21 90 24	102 503 232	21,63	7,764
469	1473,4	172757	21 99 61	103 161 709	21,66	7,769
470	1476,5	173494	22 09 00	103 823 000	21,68	7,775
471	1479,7	174234	22 18 41	104 487 111	21,70	7,780
472	1482,8	174974	22 27 80	105 154 048	21,73	7,786
473	1486,0	175716	22 37 29	105 823 817	21,75	7,791
474	1489,1	176460	22 46 76	106 496 424	21,77	7,797
475	1492,3	177205	22 56 25	107 171 875	21,79	7,802
476	1495,4	177952	22 65 76	107 850 176	21,82	7,808
477	1498,5	178701	22 75 29	108 531 333	21,84	7,813
478	1501,7	179451	22 84 84	109 215 352	21,86	7,819

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcian <i>n</i> ³	Pierwiastki	
	Obwód <i>n</i> π	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
479	1504,8	180208	22 94 41	109 902 239	21,89	7,824
480	1508,0	180956	23 04 00	110 592 000	21,91	7,830
481	1511,1	181711	23 13 61	111 284 641	21,93	7,835
482	1514,3	182467	23 23 24	111 980 168	21,95	7,841
483	1517,4	183225	33 32 89	112 678 587	21,98	7,746
484	1520,5	183984	23 42 56	113 379 904	22,00	7,851
485	1523,7	184745	23 52 25	114 084 125	22,02	7,857
486	1526,8	185508	23 61 96	114 791 256	22,05	7,862
487	1530,0	186272	23 71 69	115 501 303	22,07	7,868
488	1533,1	187038	23 81 44	116 214 272	22,09	7,873
489	1536,2	187805	23 91 21	116 930 169	22,11	7,878
490	1539,4	188574	24 01 00	117 649 000	22,14	7,884
491	1542,5	189345	24 10 81	118 370 771	22,16	7,889
492	1545,7	190117	24 20 64	119 095 488	22,18	7,894
493	1548,8	190890	24 30 49	119 823 157	22,20	7,900
494	1552,0	191665	24 40 36	120 553 784	22,23	7,905
495	1555,1	192442	24 50 25	121 287 375	22,25	7,910
496	1558,2	193221	24 60 16	122 023 936	22,27	7,916
497	1561,4	194000	24 70 09	122 763 473	22,29	7,921
498	1564,5	194782	24 80 04	123 505 992	22,32	7,926
499	1567,7	195565	24 90 01	124 251 499	22,34	7,932
500	1570,8	196350	25 00 00	125 000 000	22,36	7,937
501	1573,9	197136	25 10 01	125 751 501	22,38	7,942
502	1577,1	197923	25 20 04	126 506 008	22,41	7,948
503	1580,2	198713	25 30 09	127 263 527	22,43	7,953
504	1583,4	199504	25 40 16	128 024 064	22,45	7,958
505	1586,5	200296	25 50 25	128 787 625	22,47	7,963
506	1589,6	201090	25 60 36	129 554 216	22,49	7,969
507	1592,8	201886	25 70 49	130 323 843	22,52	7,974
508	1595,9	202683	25 80 64	131 096 512	22,54	7,979
509	1599,1	203482	25 90 81	131 872 229	22,56	7,984
510	1602,2	204282	26 01 00	132 651 000	22,58	7,990
511	1605,4	205084	26 11 21	133 432 831	22,61	7,995
512	1608,5	205887	26 21 44	134 217 728	22,63	8,000
513	1611,6	206692	26 31 69	135 005 697	22,65	8,005
514	1614,8	207499	26 41 96	135 796 744	22,67	8,010
515	1617,9	208307	26 52 25	136 590 875	22,69	8,016
516	1621,1	209117	26 62 56	137 388 096	22,72	8,021
517	1624,2	209928	26 72 89	138 188 413	22,74	8,026
518	1627,3	210741	26 83 24	138 991 832	22,76	8,031
519	1630,5	211556	26 93 61	139 798 359	22,78	8,036
520	1633,6	212372	27 04 00	140 608 000	22,80	8,041
521	1636,8	213189	27 14 41	141 420 761	22,83	8,047
522	1639,9	214008	27 24 84	142 236 648	22,85	8,052
523	1643,1	214829	27 35 29	143 055 667	22,87	8,057

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcián n^2	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
524	1646,2	215651	27 45 76	143 877 824	22,89	8,062
525	1649,3	216475	27 56 25	144 703 125	22,91	8,067
526	1652,5	217301	27 66 76	145 531 576	22,93	8,072
527	1655,6	218128	27 77 29	146 363 183	22,96	8,077
528	1658,8	218956	27 87 84	147 197 952	22,98	8,082
529	1661,9	219787	27 98 41	148 035 889	23,00	8,088
530	1665,1	220618	28 09 00	148 877 000	23,02	8,093
531	1668,2	221452	28 19 61	149 721 291	23,04	8,098
532	1671,3	222287	28 30 24	150 568 768	23,07	8,103
533	1674,5	223123	28 40 89	151 419 437	23,09	8,108
534	1677,6	223961	28 51 56	152 273 304	23,11	8,113
535	1680,8	224801	28 62 25	153 130 375	23,13	8,118
536	1683,8	225642	28 72 96	153 990 656	23,15	8,123
537	1687,0	226484	28 83 69	154 854 153	23,17	8,128
538	1690,2	227329	28 94 44	155 720 872	23,19	8,133
539	1693,3	228176	29 05 21	156 590 819	23,22	8,138
540	1696,5	229022	29 16 00	157 464 000	23,24	8,143
541	1699,6	229871	29 26 81	158 340 421	23,26	8,148
542	1702,7	230722	29 37 64	159 220 088	23,28	8,153
543	1705,9	231574	29 48 49	160 103 007	23,30	8,158
544	1709,0	232428	29 59 36	160 989 184	23,32	8,163
545	1712,2	233283	29 70 25	161 878 625	23,35	8,168
546	1715,3	234140	29 81 16	162 771 336	23,37	8,173
547	1718,5	234998	29 92 09	163 667 323	23,39	8,178
548	1721,6	235858	30 03 04	164 566 592	23,41	8,183
549	1724,7	236720	30 14 01	165 469 149	23,43	8,188
550	1727,8	237583	30 25 00	166 375 000	23,45	8,193
551	1731,0	238448	30 36 01	167 284 151	23,47	8,198
552	1734,2	239314	30 47 04	168 196 608	23,50	8,203
553	1737,3	240182	30 58 09	169 112 377	23,52	8,208
554	1740,4	241051	30 69 16	170 031 464	23,54	8,213
555	1743,6	241922	30 80 25	170 953 875	23,56	8,218
556	1746,7	242795	30 91 36	171 879 616	23,58	8,223
557	1749,9	243669	31 02 49	172 808 693	23,60	8,228
558	1753,0	244545	31 13 64	173 741 112	23,62	8,233
559	1756,1	245422	31 24 81	174 676 879	23,64	8,238
560	1759,3	246301	31 36 00	175 616 000	23,66	8,243
561	1762,4	247181	31 47 21	176 558 481	23,69	8,248
562	1765,5	248063	31 58 44	177 504 328	23,71	8,252
563	1768,7	248947	31 69 69	178 453 547	23,73	8,257
564	1771,8	249832	31 80 96	179 406 144	23,75	8,262
565	1775,0	250719	31 92 25	180 362 125	23,77	8,267
566	1778,1	251607	32 03 56	181 321 496	23,79	8,272
567	1781,3	252497	32 14 89	182 284 263	23,81	8,277
568	1784,4	253388	32 26 24	183 250 432	23,83	8,282
569	1787,6	254281	32 37 61	184 220 009	23,85	8,287

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcián <i>n</i> ²	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
570	1790,7	255176	32 49 00	185 193 000	23,88	8,292
571	1793,9	256072	32 60 41	186 169 411	23,90	8,296
572	1797,0	256970	32 71 84	187 149 248	23,92	8,301
573	1800,1	257869	32 83 29	188 132 517	23,94	8,307
574	1803,3	258770	32 94 76	189 119 224	23,96	8,311
575	1806,4	259672	33 06 25	190 109 375	23,98	8,315
576	1809,7	260576	33 17 76	191 102 976	24,00	8,320
577	1812,8	261482	33 29 29	192 100 033	24,02	8,325
578	1815,8	262389	33 40 84	193 100 552	24,04	8,330
579	1819,0	263298	33 52 41	194 104 539	24,06	8,335
580	1822,1	264208	33 64 00	195 112 000	24,08	8,340
581	1825,3	265120	33 75 61	196 122 941	24,10	8,344
582	1828,4	266033	33 87 24	197 137 368	24,12	8,349
583	1831,6	266948	33 98 89	198 155 287	24,15	8,354
584	1834,7	267865	34 10 56	199 176 704	24,17	8,359
585	1837,8	268783	34 22 25	200 201 625	24,19	8,363
586	1841,0	269703	34 33 96	201 230 056	24,21	8,368
587	1844,1	270624	34 45 69	202 262 008	24,23	8,373
588	1847,3	271547	34 57 44	203 297 472	24,25	8,378
589	1850,4	272471	34 69 21	204 336 469	24,27	8,382
590	1853,5	273397	34 81 00	205 379 000	24,29	8,387
591	1856,7	274325	34 92 81	206 425 071	24,31	8,392
592	1859,8	275254	35 04 64	207 474 688	24,33	8,397
593	1863,0	276184	35 16 49	208 527 857	24,35	8,401
594	1866,1	277117	35 28 36	209 584 584	24,37	8,406
595	1869,3	278051	35 40 25	210 644 875	24,39	8,411
596	1872,4	278986	35 52 16	211 708 736	24,41	8,415
597	1875,5	279923	35 64 09	212 776 173	24,43	8,420
598	1878,7	280862	35 76 04	213 847 192	24,45	8,425
599	1881,8	281802	35 88 01	214 921 799	24,47	8,430
600	1885,0	282743	36 00 00	216 000 000	24,50	8,434
601	1888,1	283687	36 12 01	217 081 801	24,52	8,439
602	1891,2	284631	36 24 04	218 167 208	24,54	8,444
603	1894,4	285578	36 36 09	219 256 227	24,56	8,448
604	1897,5	286526	36 48 16	220 348 864	24,58	8,453
605	1900,7	287475	36 60 25	221 445 125	24,60	8,458
606	1903,8	288426	36 72 36	222 545 016	24,62	8,462
607	1907,0	289379	36 84 49	223 648 543	24,64	8,467
608	1910,1	290333	36 96 64	224 755 712	24,66	8,472
609	1913,2	291289	37 08 81	225 866 529	24,68	8,476
610	1916,4	292247	37 21 00	226 981 000	24,70	8,481
611	1919,5	293206	37 33 21	228 099 181	24,72	8,486
612	1922,7	294166	37 45 44	229 220 928	24,74	8,490
613	1925,8	295128	37 57 69	230 346 397	24,76	8,495
614	1928,9	296092	37 69 96	231 475 544	24,78	8,499

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
615	1932,1	297057	37 82 25	232 608 375	24,80	8,504
616	1935,2	298024	37 94 56	223 744 896	24,82	8,509
617	1938,4	298992	38 06 89	234 885 118	24,84	8,513
618	1941,5	299962	38 19 24	236 029 032	24,86	8,518
619	1944,7	300934	38 31 61	237 176 659	24,88	8,522
620	1947,8	301907	38 44 00	238 328 000	24,90	8,527
621	1950,9	302882	38 56 41	239 483 061	24,92	8,532
622	1954,1	303858	38 68 84	240 641 848	24,94	8,536
623	1957,2	304836	38 81 29	241 804 367	24,96	8,541
624	1960,4	305815	38 93 76	242 970 624	24,98	8,545
625	1963,5	306796	39 06 25	244 140 625	25,00	8,550
626	1966,6	307779	39 18 76	245 314 376	25,02	8,554
627	1969,8	308763	39 31 29	246 491 888	25,04	8,559
628	1972,9	309748	39 43 84	247 673 152	25,06	8,563
629	1976,1	310736	39 56 41	248 858 189	25,08	8,568
630	1979,2	311725	39 69 00	250 047 000	25,10	8,573
631	1982,3	312715	39 81 61	251 239 591	25,12	8,577
632	1985,5	313707	39 94 24	252 435 968	25,14	8,582
633	1988,6	314700	40 06 89	253 636 137	25,16	8,586
634	1991,8	315696	40 19 56	254 840 104	25,18	8,591
635	1994,9	316692	40 32 25	256 047 875	25,20	8,595
636	1998,1	317690	40 44 96	257 259 456	25,22	8,600
637	2001,2	318690	40 57 69	258 474 853	25,24	8,604
638	2004,3	319692	40 70 44	259 694 072	25,26	8,609
639	2007,5	320695	40 83 21	260 917 119	25,28	8,613
640	2010,6	321699	40 96 00	262 144 000	25,30	8,618
641	2013,8	322705	41 08 81	263 374 721	25,32	8,622
642	2016,9	323713	41 21 64	264 609 288	25,34	8,627
643	2020,0	324722	41 34 49	265 847 707	25,36	8,631
644	2023,2	325733	41 47 36	267 089 984	25,38	8,636
645	2026,3	326745	41 60 25	268 336 125	25,40	8,640
646	2029,5	327759	41 73 16	269 586 136	25,42	8,645
647	2032,6	328775	41 86 09	270 840 023	25,44	8,649
648	2035,8	329792	41 99 04	272 097 792	25,46	8,653
649	2038,9	330810	42 12 01	273 359 449	25,48	8,658
650	2042,0	331831	42 25 00	274 625 000	25,50	8,662
651	2045,2	332853	42 38 01	275 894 451	25,52	8,667
652	2048,3	333876	42 51 04	277 167 808	25,53	8,671
653	2051,5	334901	42 64 09	278 445 077	25,55	8,676
654	2054,6	335927	42 77 16	279 726 264	25,57	8,680
655	2057,7	336955	42 90 25	281 011 375	25,59	8,684
656	2060,9	337985	43 03 36	282 300 416	25,61	8,689
657	2064,0	339016	43 16 49	283 593 393	25,63	8,693
658	2067,2	340049	43 29 64	284 890 312	25,65	8,698
659	2070,3	341083	43 42 81	286 191 179	25,67	8,702
660	2073,5	342119	43 56 00	287 496 000	25,69	8,707

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcián n^2	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
661	2076,6	343157	43 69 21	288 804 781	25,71	8,711
662	2079,7	344196	43 82 44	290 117 528	25,73	8,715
663	2082,9	345237	43 95 69	291 434 247	25,75	8,720
664	2086,0	346279	44 08 96	292 754 944	25,77	8,724
665	2089,2	347323	44 22 25	294 079 625	25,79	8,728
666	2092,3	348368	44 35 56	295 408 296	25,81	8,733
667	2095,4	349415	44 48 89	296 740 963	25,83	8,737
668	2098,6	350464	44 62 24	298 077 632	25,85	8,742
669	2101,7	351514	44 75 61	299 418 309	25,87	8,746
670	2104,9	352565	44 89 00	300 763 000	25,88	8,750
671	2108,0	353618	45 02 41	302 111 711	25,90	8,755
672	2111,2	354673	45 15 84	303 464 448	25,92	8,759
673	2114,3	355730	45 29 29	304 821 217	25,94	8,763
674	2117,4	356788	45 42 76	306 182 024	25,96	8,768
675	2120,6	357847	45 56 25	307 546 875	25,98	8,772
676	2123,7	358908	45 69 76	308 915 776	26,00	8,776
677	2126,9	359971	45 83 29	310 288 733	26,02	8,781
678	2130,0	361035	45 96 84	311 665 752	26,04	8,785
679	2133,1	362101	46 10 41	313 046 839	26,06	8,789
680	2136,3	363168	46 24 00	314 432 000	26,08	8,794
681	2139,4	364237	46 37 61	315 821 241	26,10	8,798
682	2142,6	365308	46 51 24	317 214 568	26,12	8,802
683	2145,7	366380	46 64 89	318 611 987	26,13	8,807
684	2148,9	367453	46 78 56	320 013 504	26,15	8,811
685	2152,0	368528	46 92 25	321 419 125	26,17	8,815
686	2155,1	369605	47 05 96	322 828 856	26,19	8,819
687	2158,3	370684	47 19 69	324 242 703	26,21	8,824
688	2161,4	371764	47 33 44	325 660 672	26,23	8,828
689	2164,6	372845	47 47 21	327 082 769	26,25	8,832
690	2167,7	373928	47 61 00	328 509 000	26,27	8,837
691	2170,8	375013	47 74 81	329 939 371	26,29	8,841
692	2174,0	376099	47 88 64	331 373 888	26,31	8,845
693	2177,1	377187	48 02 49	332 812 557	26,32	8,849
694	2180,3	378276	48 16 36	334 255 384	26,34	8,854
695	2183,4	379367	48 30 25	335 702 375	26,36	8,858
696	2186,6	380459	48 44 16	337 153 536	26,38	8,862
697	2189,7	381553	48 58 09	338 608 873	26,40	8,866
698	2192,8	382649	48 72 04	340 068 392	26,42	8,871
699	2196,0	383746	48 86 01	341 532 099	26,44	8,875
700	2199,1	384845	49 00 00	343 000 000	26,46	8,879
701	2202,3	385945	49 14 01	344 472 101	26,48	8,883
702	2205,4	387047	49 28 04	345 948 408	26,50	8,887
703	2208,5	388151	49 42 09	347 428 927	26,51	8,892
704	2211,7	389256	49 56 16	348 913 664	26,53	8,896
705	2214,8	390363	49 70 25	350 402 625	26,55	8,900
706	2218,0	391471	49 84 36	351 895 816	26,57	8,904
707	2221,1	392580	49 98 49	353 393 243	26,59	8,908

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcián <i>n</i> ²	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
708	2224,8	398692	50 12 64	354 894 912	26,61	8,913
709	2227,4	394805	50 26 81	356 400 829	26,63	8,917
710	2230,5	395919	50 41 00	357 911 000	26,65	8,921
711	2233,7	397035	50 55 21	359 425 431	26,66	8,925
712	2236,8	398153	50 69 44	360 944 128	26,68	8,929
713	2240,0	399272	50 83 69	362 467 097	26,70	8,934
714	2243,1	400393	50 97 96	363 994 344	26,72	8,938
715	2246,2	401515	51 12 25	365 525 875	26,74	8,942
716	2249,4	402639	51 26 56	367 061 696	26,76	8,946
717	2252,5	403765	51 40 89	368 601 813	26,78	8,950
718	2255,7	404892	51 55 24	370 146 232	26,80	8,954
719	2258,8	406020	51 69 61	371 694 959	26,81	8,959
720	2262,0	407150	51 84 00	373 248 000	26,83	8,963
721	2265,1	408282	51 98 41	374 805 361	26,85	8,967
722	2268,2	409415	52 12 84	376 367 048	26,87	8,971
723	2271,4	410550	52 27 29	377 933 067	26,89	8,975
724	2274,5	411687	52 41 76	379 503 424	26,91	8,979
725	2277,7	412825	52 56 25	381 078 125	26,93	8,983
726	2280,8	413965	52 70 76	382 657 176	26,94	8,988
727	2283,9	415106	52 85 29	384 240 583	26,96	8,992
728	2287,1	416248	52 99 84	385 828 352	26,98	8,996
729	2290,2	417393	53 14 41	387 420 489	27,00	9,000
730	2293,4	418539	53 29 00	389 017 000	27,02	9,004
731	2296,5	419686	53 43 61	390 617 891	27,04	9,008
732	2299,7	420835	53 58 24	392 223 168	27,06	9,012
733	2302,8	421986	53 72 89	393 832 837	27,07	9,016
734	2305,9	423138	53 87 56	395 446 904	27,09	9,020
735	2309,1	424293	54 02 25	397 065 375	27,11	9,025
736	2312,2	425447	54 16 96	398 688 256	27,13	9,029
737	2315,4	426604	54 31 69	400 315 553	27,15	9,033
738	2318,5	426762	54 46 44	401 947 272	27,17	9,037
739	2321,6	428922	54 61 21	403 583 419	27,18	9,041
740	2324,8	430084	54 76 00	405 224 000	27,20	9,045
741	2327,9	431247	54 90 81	406 869 021	27,22	9,049
742	2331,1	432412	55 05 64	408 518 488	27,24	9,053
743	2334,2	433578	55 20 49	410 172 407	27,26	9,057
744	2337,4	434746	55 35 36	411 830 784	27,28	9,061
745	2340,5	435916	55 50 25	413 493 625	27,29	9,065
746	2343,6	437087	55 65 16	415 160 936	27,31	9,069
747	2346,8	438259	55 80 09	416 832 723	27,33	9,073
748	2349,9	439433	55 95 04	418 508 992	27,35	9,077
749	2353,1	440609	56 10 01	420 189 749	27,37	9,082
750	2356,2	441786	56 25 00	421 875 000	27,39	9,086
751	2359,3	442965	56 40 01	423 564 751	27,40	9,090
752	2362,5	444145	56 55 04	425 259 008	27,42	9,094

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcián <i>n</i> ²	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
753	2365,6	445328	56 70 09	426 957 777	27,44	9,098
754	2368,8	446512	56 85 16	428 661 064	27,46	9,102
755	2371,9	447697	57 00 25	430 368 875	27,48	9,106
756	2375,0	448883	57 15 36	432 081 216	27,50	9,110
757	2378,2	450072	57 30 49	433 798 093	27,51	9,114
758	2381,3	451262	57 45 64	435 519 512	27,53	9,118
759	2384,5	452453	57 60 81	437 245 479	27,55	9,122
760	2387,6	453646	57 76 00	438 976 000	27,57	9,126
761	2390,8	454841	57 91 21	440 711 081	27,59	9,130
762	2393,9	456037	58 06 44	442 450 728	27,60	9,134
763	2397,0	457234	58 21 69	444 194 947	27,62	9,138
764	2400,2	458434	58 36 96	445 943 744	27,64	9,142
765	2403,3	459635	58 52 25	447 697 125	27,66	9,146
766	2406,5	460837	58 67 56	449 455 096	27,68	9,150
767	2409,6	462041	58 82 89	451 217 663	27,69	9,154
768	2412,7	463247	58 98 24	452 984 832	27,71	9,158
769	2416,0	464454	59 13 61	454 756 609	27,73	9,162
770	2419,0	465663	59 29 00	456 533 000	27,75	9,166
771	2422,2	466873	59 44 41	458 314 011	27,77	9,170
772	2425,3	468085	59 59 84	460 099 648	27,78	9,174
773	2428,5	469298	59 75 29	461 889 917	27,80	9,177
774	2431,6	470513	59 90 76	463 684 824	27,82	9,181
775	2434,7	471730	60 06 25	465 484 375	27,84	9,185
776	2437,9	472948	60 21 76	467 288 576	27,86	9,189
777	2441,0	474168	60 37 29	469 097 433	27,87	9,193
778	2444,2	475389	60 52 84	470 910 952	27,89	9,197
779	2447,3	476612	60 68 41	472 729 139	27,91	9,201
780	2450,4	477836	60 84 00	474 552 000	27,93	9,205
781	2453,6	479062	60 99 61	476 379 541	27,95	9,209
782	2456,7	480290	61 15 24	478 211 768	27,96	9,213
783	2459,9	481519	61 30 89	480 048 687	27,98	9,217
784	2463,0	482750	61 46 56	481 890 304	28,00	9,221
785	2466,2	483982	61 62 25	483 736 625	28,02	9,225
786	2469,3	485216	61 77 96	485 587 656	28,04	9,229
787	2472,4	486451	61 93 69	487 443 403	28,05	9,233
788	2475,5	487688	62 09 44	489 303 872	28,07	9,237
789	2478,7	488927	62 25 21	491 169 069	28,09	9,240
790	2481,9	490167	62 41 00	493 039 000	28,11	9,244
791	2485,0	491409	62 56 81	494 913 671	28,12	9,248
792	2488,1	492652	62 72 64	496 793 088	28,14	9,252
793	2491,3	493897	62 88 49	498 677 257	28,16	9,256
794	2494,4	495143	63 04 36	500 566 184	28,18	9,260
795	2497,6	496391	63 20 25	502 459 875	28,20	9,264
796	2500,7	497641	63 36 16	504 358 336	28,21	9,268
797	2503,9	498892	63 52 09	506 261 573	28,23	9,272
798	2507,0	500145	63 68 04	508 169 592	28,25	9,275

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześciąt <i>n</i> ²	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
799	2510,1	501399	63 84 01	510 082 399	28,27	9,279
800	2513,5	502655	64 00 00	512 000 000	28,28	9,283
801	2516,4	503912	64 16 01	513 922 401	28,30	9,287
802	2519,6	505171	64 32 04	515 849 608	28,32	9,291
803	2522,7	506432	64 48 09	517 788 627	28,34	9,295
804	2525,8	507694	64 64 16	519 718 464	28,35	9,299
805	2529,0	508958	64 80 25	521 660 125	28,37	9,302
806	2532,1	510223	64 96 36	523 606 616	28,39	9,306
807	2535,3	511490	65 12 49	525 557 943	28,41	9,310
808	2538,4	512758	65 28 64	527 514 112	28,43	9,314
809	2541,6	514028	65 44 81	529 475 129	28,44	9,318
810	2544,7	515300	65 61 00	531 441 000	28,46	9,322
811	2547,8	516573	65 77 21	533 411 731	28,48	9,325
812	2551,0	517848	65 93 44	535 387 328	28,50	9,329
813	2554,1	519124	66 09 69	537 367 797	28,51	9,333
814	2557,3	520402	66 25 76	539 353 144	28,53	9,337
815	2560,4	521681	66 42 25	541 343 375	28,55	9,341
816	2563,5	522962	66 58 76	543 338 496	28,57	9,345
817	2566,7	524245	66 74 89	545 338 513	28,58	9,348
818	2569,8	525529	66 91 24	547 343 432	28,60	9,352
819	2573,0	526814	67 07 61	549 353 259	28,62	9,356
820	2576,1	528102	67 24 00	551 368 000	28,64	9,360
821	2579,3	529391	67 40 41	553 387 661	28,65	9,364
822	2582,4	530681	67 56 84	555 412 248	28,67	9,367
823	2585,5	531973	67 73 29	557 441 767	28,69	9,371
824	2588,6	533267	67 89 76	559 476 224	28,71	9,375
825	2591,8	534562	68 06 25	561 515 625	28,72	9,379
826	2595,0	535856	68 22 76	563 559 976	28,74	9,383
827	2598,1	537157	68 39 29	565 609 283	28,76	9,386
828	2601,2	538456	68 55 84	567 663 552	28,78	9,390
829	2604,4	539758	68 72 41	569 722 789	28,79	9,394
830	2607,5	541061	68 89 00	571 787 000	28,81	9,398
831	2610,7	542365	69 05 61	573 856 191	28,83	9,402
832	2613,8	543671	69 22 24	575 930 368	28,84	9,405
833	2617,0	544979	69 38 89	578 009 537	28,86	9,409
834	2620,1	546288	69 55 56	580 093 704	28,88	9,413
835	2623,2	547599	69 72 25	582 182 875	28,90	9,417
836	2626,4	548912	69 88 96	584 277 056	28,91	9,420
837	2629,5	550226	70 05 69	586 376 253	28,93	9,424
838	2632,6	551541	70 22 44	588 480 472	28,95	9,428
839	2635,8	552858	70 39 21	590 589 719	28,97	9,432
840	2638,9	554177	70 56 00	592 704 000	28,98	9,435
841	2642,1	555497	70 72 81	594 823 321	29,00	9,439
842	2645,2	556819	70 89 64	596 947 688	29,02	9,443
843	2648,4	558142	71 06 49	599 077 107	29,03	9,447

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcián <i>n</i> ²	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
844	2651,5	559467	71 23 36	601 211 584	29,05	9,450
845	2654,7	560794	71 40 25	603 351 125	29,07	9,454
846	2657,8	562122	71 57 16	605 495 736	29,09	9,458
847	2660,9	563452	71 74 09	607 645 423	29,10	9,461
848	2664,1	564783	71 91 04	609 800 192	29,12	9,465
849	2667,2	566116	72 08 01	611 960 049	29,14	9,469
850	2670,4	567450	72 25 00	614 125 000	29,16	9,473
851	2673,5	568786	72 42 01	616 295 051	29,17	9,476
852	2676,6	570124	72 59 04	618 470 208	29,19	9,480
853	2679,8	571463	72 76 09	620 650 477	29,21	9,483
854	2682,9	572803	72 93 16	622 835 864	29,22	9,487
855	2686,1	574146	73 10 25	625 026 375	29,24	9,491
856	2689,2	575490	73 27 36	627 222 016	29,26	9,495
857	2692,4	576835	73 44 49	629 422 793	29,27	9,499
858	2695,5	578182	73 61 64	631 628 712	29,29	9,502
859	2698,6	579530	73 78 81	633 839 779	29,31	9,506
860	2701,8	580880	73 96 00	636 056 000	29,33	9,510
861	2704,9	582232	74 13 21	638 277 381	29,34	9,513
862	2708,1	583585	74 30 44	640 503 928	29,36	9,517
863	2711,2	584940	74 47 69	642 735 647	29,38	9,521
864	2714,3	586297	74 64 96	644 972 544	29,39	9,524
865	2717,5	587655	74 82 25	647 214 625	29,41	9,528
866	2720,7	589014	74 99 56	649 461 896	29,43	9,532
867	2723,8	590375	75 16 89	651 714 363	29,45	9,535
868	2726,9	591738	75 34 24	653 972 032	29,46	9,539
869	2730,1	593102	75 51 61	656 234 909	29,48	9,543
870	2733,2	594468	75 69 00	658 503 000	29,50	9,546
871	2736,3	595835	75 86 41	660 776 311	29,51	9,550
872	2739,5	597204	76 03 84	663 054 848	29,53	9,554
873	2742,6	598575	76 21 29	665 338 617	29,55	9,557
874	2745,8	599947	76 38 76	667 627 624	29,56	9,561
875	2748,9	601320	76 56 25	669 921 875	29,58	9,565
876	2752,0	602696	76 73 76	672 221 376	29,60	9,568
877	2755,2	604073	76 91 29	674 526 133	29,61	9,572
878	2758,3	605451	77 08 84	676 836 152	29,63	9,575
879	2761,5	606831	77 26 41	679 151 439	29,65	9,579
880	2764,6	608212	77 44 00	681 472 000	29,67	9,583
881	2767,7	609595	77 61 61	683 797 841	29,68	9,586
882	2770,9	610980	77 79 24	686 128 968	29,70	9,590
883	2774,0	612366	77 96 89	688 465 387	29,72	9,594
884	2777,2	613754	78 14 56	690 807 104	29,73	9,597
885	2780,3	615143	78 32 25	693 154 125	29,75	9,601
886	2783,5	616534	78 49 96	695 506 456	29,77	9,604
887	2786,6	617927	78 67 69	697 864 103	29,78	9,608
888	2789,8	619321	78 85 44	700 227 072	29,80	9,612
889	2792,9	620717	79 03 21	702 595 369	29,82	9,615

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcián <i>n</i> ²	Pierwiastki	
	Obwód <i>n</i> π	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
890	2796,0	622114	79 21 00	704 969 000	29,88	9,619
891	2799,2	623513	79 38 81	707 347 971	29,85	9,623
892	2802,2	624913	79 56 64	709 732 288	29,87	9,626
893	2805,4	626315	79 74 49	712 121 957	29,88	9,630
894	2808,6	627718	79 92 36	714 516 984	29,90	9,633
895	2811,7	629124	80 10 25	716 917 375	29,92	9,637
896	2814,9	630530	80 28 16	719 323 136	29,93	9,641
897	2818,0	631938	80 46 09	721 734 273	29,95	9,644
898	2821,2	633348	80 64 04	724 150 792	29,97	9,648
899	2824,3	634760	80 82 01	726 572 699	29,98	9,651
900	2827,4	636173	81 00 00	729 000 000	30,00	9,655
901	2830,6	637587	81 18 01	731 432 701	30,02	9,658
902	2833,7	639003	81 36 04	733 870 808	30,03	9,662
903	2836,9	640421	81 54 09	736 314 327	30,05	9,666
904	2840,0	641840	81 72 16	738 763 264	30,07	9,669
905	2843,1	643261	81 90 25	741 217 625	30,08	9,673
906	2846,3	644683	82 08 36	743 677 416	30,10	9,676
907	2849,4	646107	82 26 49	746 142 643	30,12	9,680
908	2852,6	647533	82 44 64	748 613 312	30,13	9,683
909	2855,7	648960	82 62 81	751 089 429	30,15	9,687
910	2858,9	650388	82 81 00	753 571 000	30,17	9,690
911	2862,0	651818	82 99 21	756 058 031	30,18	9,694
912	2865,1	653250	83 17 44	758 550 528	30,20	9,698
913	2868,3	654684	83 35 69	761 048 497	30,22	9,701
914	2871,4	656118	83 53 96	763 551 944	30,23	9,705
915	2874,6	657555	83 72 25	766 060 875	30,25	9,708
916	2877,7	658993	83 90 56	768 575 296	30,27	9,712
917	2880,8	660433	84 08 89	771 095 213	30,28	9,715
918	2884,0	661874	84 27 24	773 620 632	30,30	9,719
919	2887,1	663317	84 45 61	776 151 559	30,32	9,722
920	2890,3	664761	84 64 00	778 688 000	30,33	9,726
921	2893,4	666207	84 82 41	781 229 961	30,35	9,729
922	2896,6	667654	85 00 84	783 777 448	30,36	9,733
923	2899,7	669103	85 19 29	786 330 467	30,38	9,736
924	2902,8	670554	85 37 76	788 889 024	30,40	9,740
925	2906,0	672006	85 56 25	791 453 125	30,41	9,743
926	2909,1	673460	85 74 76	794 022 776	30,43	9,747
927	2912,3	674915	85 93 29	796 597 983	30,45	9,750
928	2915,4	676372	86 11 84	799 178 752	30,46	9,754
929	2918,5	677831	86 30 41	801 765 089	30,48	9,757
930	2921,7	679291	86 49 00	804 357 000	30,50	9,761
931	2924,8	680752	86 67 61	806 954 491	30,51	9,764
932	2928,0	682216	86 86 24	809 557 568	30,53	9,768
933	2931,1	683680	87 04 89	812 166 237	30,55	9,771
934	2934,3	685147	87 23 56	814 780 504	30,56	9,775

Liczba <i>n</i>	K o ł o		Kwadrat <i>n</i> ²	Sześcián <i>n</i> ³	Pierwiastki	
	Obwód <i>nπ</i>	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
935	2937,4	686615	87 42 25	817 400 375	30,58	9,778
936	2940,5	688084	87 60 96	820 025 856	30,59	9,782
937	2943,7	689555	87 79 69	822 656 953	30,61	9,785
938	2946,8	691028	87 98 44	825 293 672	30,63	9,789
939	2950,0	692502	88 17 21	827 936 019	30,64	9,792
940	2953,1	693978	88 36 00	830 584 000	30,66	9,796
941	2956,2	695455	88 54 81	833 237 621	30,68	9,799
942	2959,4	696934	88 73 64	835 896 888	30,69	9,803
943	2962,5	698415	88 92 49	838 561 807	30,71	9,806
944	2965,7	699897	89 11 36	841 232 384	30,72	9,810
945	2968,8	701380	89 30 25	843 908 625	30,74	9,813
946	2972,0	702865	89 49 16	846 590 536	30,76	9,817
947	2975,1	704352	89 68 09	849 278 123	30,77	9,820
948	2978,2	705840	89 87 04	851 971 392	30,79	9,824
949	2981,4	707330	90 06 01	854 670 349	30,81	9,827
950	2984,5	708822	90 25 00	857 375 000	30,82	9,830
951	2987,7	710315	90 44 01	860 085 351	30,84	9,834
952	2990,8	711809	90 63 04	862 801 408	30,85	9,837
953	2993,9	713306	90 82 09	865 523 177	30,87	9,841
954	2997,1	714808	91 01 16	868 250 664	30,89	9,844
955	3000,2	716303	91 20 25	870 983 875	30,90	9,848
956	3003,4	717804	91 39 36	873 722 816	30,92	9,851
957	3006,5	719306	91 58 49	876 467 493	30,94	9,855
958	3009,7	720810	91 77 64	879 217 912	30,95	9,858
959	3012,8	722316	91 96 81	881 974 079	30,97	9,861
960	3015,9	723823	92 16 00	884 736 000	30,98	9,865
961	3019,1	725332	92 35 21	887 503 681	31,00	9,868
962	3022,2	726842	92 54 44	890 277 128	31,02	9,872
963	3025,4	728354	92 73 69	893 056 347	31,03	9,875
964	3028,5	729867	92 92 96	895 841 344	31,05	9,878
965	3031,6	731382	93 12 25	898 632 125	31,06	9,882
966	3034,8	732899	93 31 56	901 428 696	31,08	9,885
967	3037,9	734417	93 50 89	904 231 063	31,10	9,889
968	3041,1	735937	93 70 24	907 039 232	31,11	9,892
969	3044,2	737458	93 89 61	909 853 209	31,13	9,896
970	3047,4	738981	94 09 00	912 673 000	31,15	9,899
971	3050,5	740506	94 28 41	915 498 611	31,16	9,902
972	3053,6	742032	94 47 84	918 330 048	31,18	9,906
973	3056,8	743559	94 67 29	921 167 317	31,19	9,909
974	3059,9	745088	94 86 76	924 010 424	31,21	9,913
975	3063,1	746619	95 06 25	926 859 375	31,23	9,916
976	3066,2	748151	95 25 76	929 714 176	31,24	9,919
977	3069,3	749685	95 45 29	932 574 833	31,26	9,923
978	3072,5	751221	95 64 84	935 441 352	31,27	9,926
979	3075,6	752758	95 84 41	938 313 739	31,29	9,929
980	3078,8	754296	96 04 00	941 192 000	31,31	9,933

Liczba n	K o ł o		Kwadrat n^2	Sześcian n^3	Pierwiastki	
	Obwód $n\pi$	Po- wierzchnia $\frac{n^2\pi}{4}$			\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
981	3082,0	755887	96 23 61	944 076 141	31,82	9,986
982	3085,0	757378	96 43 24	946 966 168	31,84	9,940
983	3088,2	758922	96 62 89	949 862 087	31,85	9,943
984	3091,3	760466	96 82 56	952 763 904	31,87	9,946
985	3094,5	762013	97 02 25	955 671 625	31,88	9,950
986	3097,6	763561	97 21 96	958 585 256	31,40	9,953
987	3100,8	765111	97 41 69	961 504 803	31,42	9,956
988	3104,0	766662	97 61 44	964 430 272	31,43	9,960
989	3107,0	768214	97 81 21	967 361 669	31,45	9,963
990	3110,2	769769	98 01 00	970 299 000	31,46	9,966
991	3113,3	771325	98 20 81	973 242 271	31,48	9,970
992	3116,5	772882	98 40 64	976 191 488	31,50	9,973
993	3119,6	774441	98 60 49	979 149 657	31,51	9,977
994	3122,8	776002	98 80 36	982 107 784	31,53	9,980
995	3125,9	777564	99 00 25	985 074 875	31,54	9,983
996	3129,0	779128	99 20 16	988 047 936	31,56	9,987
997	3132,2	780693	99 40 09	991 026 973	31,58	9,990
998	3135,3	782260	99 60 04	994 011 992	31,59	9,993
999	3138,5	783828	99 80 01	997 002 999	31,61	9,997

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW



Spis rzeczy.

Wstęp	8tr. 1
-----------------	-----------

A. Wiadomości wstępne ze statyki wykreślnej.

I. Składanie sił.

§. 1. Siły przecinające się w jednym punkcie	3
§. 2. Siły działające w płaszczyźnie na układ punktów stale połączonych. Wielobok sznurowy	6
§. 3. Siły równoległe	7
§. 4. Moment statyczny	8
§. 5. Składanie iluokolwiek sił	9
§. 6. Dalsze własności wieloboku sznurowego	12
§. 7. Wykreślne wyznaczenie momentu statycznego	14

II. Belka prosta.

§. 8. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla obciążenia ciężarami skupionymi	15
§. 9. Analityczne wyznaczenie sił poprzecznych i momentów	20
§. 10. Dowolne obciążenie ciągle	22
§. 11. Jednostajne obciążenie ciągle	25
§. 12. Jednostajne obciążenie częściowe	28
§. 13. Obciążenie ciągle i ciężarami skupionymi	30
§. 14. Belka jednym końcem utwierdzona	31
§. 15. Belka wystająca	32

B. Wytrzymałość zeskładów drewnianych i żelaznych.

III. Wytrzymałość na wyciąganie i ściskanie.

§. 16. Ogólne pojęcia	34
§. 17. Spółczynniki sprężystości	38
§. 18. Spółczynniki wytrzymałości na wyciąganie i ściskanie	48
§. 19. Wpływ kształtu ciała, ciepłoty, wilgotności i ciężaru gatunkowego na wytrzymałość	48
§. 20. Zjawiska przy przerywaniu	51
§. 21. Własności ciał, zależne od krzywej odkształceń, zwężenia i przedłużenia	54
§. 22. Pewność i natężenie dopuszczalne	58
§. 23. Doświadczenia Wöhlera i Bauschingera	67
§. 24. Wyznaczenie wymiarów według Winklera	69

	Str.
§. 25. Wyznaczenie wymiarów według Launhardta i Weyraucha	74
§. 26. Natężenie dopuszczalne dla drzewa	77
§. 27. Pręty o stałym przekroju	78
§. 28. Pręty o stałym natężeniu	79
§. 29. Liny konopne i drucziane i łańcuchy	81

IV. Wytrzymałość na ścinanie.

§. 30. Spółczynnik wytrzymałości i natężenie dopuszczalne	85
§. 31. Nitowanie pojedyncze	89
§. 32. Nitowanie podwójne	96
§. 33. Nitowanie wstęg i kształtówek	99
§. 34. Połączenia przegibne	102
§. 35. Obliczenie śrub	103
§. 36. Połączenia belek drewnianych	105

V. Wytrzymałość na zginanie.

§. 37. Związek między siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi	109
§. 38. Moment bezwładności	113
§. 39. Wyznaczenie momentu bezwładności ze względu na oś równoległą do danej	122
§. 40. Promień i elipsa bezwładności	123
§. 41. Elipsa bezwładności ze względu na osie ukośne	131
§. 42. Koło bezwładności	133
§. 43. Punkty stałe przekroju	134
§. 44. Analityczne wyznaczenie momentu bezwładności dla figur nieregularnych	135
§. 45. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności	138
§. 46. Linia całkowita	141
§. 47. Przykład. Moment bezwładności szyny kolejowej	143
§. 48. Wykreślne wyznaczenie momentu bezwładności powierzchni sposobem Nehlsa	145
§. 49. Obliczenie siły ścinającej poziomej	148
§. 50. Natężenia ścinające pionowe	151
§. 51. Natężenia w kierunkach ukośnych. Linie największych natężeń	152
§. 52. Natężenia główne	156
§. 53. Wykreślne wyznaczenie siły ścinającej poziomej	159
§. 54. Obliczenie przekroju kształtówek I, pracujących na zginanie	161
§. 55. Inne kształtówki	164
§. 56. Dźwigary blaszane	187
§. 57. Obliczenie przekroju belki blaszanej	188
§. 58. Obliczenie grubości ścianki belki blaszanej	191
§. 59. Obliczenie nitów belki blaszanej	193
§. 60. Obliczenie belek drewnianych	195
§. 61. Obliczenie belek stropu mięszanego	197

	Str.
§. 62. Natężenia zginające po przekroczeniu granicy sprężystości . . .	200
§. 63. Natężenia przy złamaniu belek drewnianych	202
§. 64. Natężenia przy złamaniu belek z żelaza spawanego, zlewne i stali	201
§. 65. Natężenia zginające w belkach z żelaza lanego, kamienia i be- tonu. Prawo Bacha	208
§. 66. Natężenie w belkach, gdy siły nie działają w płaszczyźnie osi głównych	212
§. 67. Dźwigary drewniane złożone	217
§. 68. Natężenie dopuszczalne	220
§. 69. Obliczenie przekroju dźwigaru złożonego	225
§. 70. Obliczenie klinów	228
§. 71. Obliczenie śrub	234
§. 72. Belki z różnego materiału	235
§. 73. Równanie linii ugięcia i ugięcie belki	238
§. 74. Ugięcie belki jednym końcem utwierdzonej	242
§. 75. Belka jednym końcem wmurowana, a w drugim podparta	244
§. 76. Belka obu końcami poziomo utwierdzona	247
§. 77. Wykreślne wyznaczenie ugięcia belki	252
§. 78. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych belki jednym końcem podparte, drugim utwierdzonej	254
§. 79. Belka obu końcami utwierdzonej	256
§. 80. Belka obu końcami ukośnie utwierdzonej	257
§. 81. Belka ciągła	259
§. 82. Belka ciągła dwu- i trzyprzęsłowa	261
§. 83. Belka ciągła o równych przęsłach	263

VI. Wytrzymałość złożona na zginanie i wyciąganie lub zginanie i ściskanie.

§. 84. Bryła natężeń i oś obojętna	264
§. 85. Jądro przekroju	269
§. 86. Największe natężenie	273
§. 87. Wyznaczenie największych natężeń zapomocą jądra	273

VII. Wytrzymałość na wyboczenie.

§. 88. Wzory zasadnicze Eulera i Rankina	275
§. 89. Wyznaczenie długości wolnej	281
§. 90. Wzory Tetmajera	286
§. 91. Przekroje złożone	289
§. 92. Obliczenie wymiarów	292
§. 93. Przykłady obliczenia wymiarów	299
§. 94. Wytrzymałość słupów żelaznych w razie pożaru	302
§. 95. Słupy obciążone mimośrodkowo	303
§. 96. Natężenie dopuszczalne	305
§. 97. Przykłady	307

VIII. Wytrzymałość na skręcanie.

§ 98.	Wzory zasadnicze	312
§ 99.	Wał pełny i wydrażony	314
§ 100.	Przekrój kwadratowy	315

IX. Belki kratowe i więzary dachowe.

§ 101.	Uwagi ogólne	316
§ 102.	Warunki wyznaczalności wewnętrznej	317
§ 103.	Warunki wyznaczalności ze względu na łożyska	320
§ 104.	Wyznaczenie wykreslne sił wewnętrznych za pomocą metody wielobokowej	321
§ 105.	Metoda przecięć	322
§ 106.	Belka wzmocniona	325
§ 107.	Obciążenie dachów	327
§ 108.	Ogólne warunki równowagi dachu	335
§ 109.	Wyznaczenie sił wewnętrznych dla obciążenia pionowego	336
§ 110.	Parcie wiatru	340
§ 111.	Obliczenie więzaru Polonceau złożonego jako przykład	344
§ 112.	Belka pochyło leżąca	347
§ 113.	Drewniany pojedynczy dach krokwiowy	349
§ 114.	Dach płatwowy z podwójnym więzarem i kolanem	351
§ 115.	Dach rozporowy	353
§ 116.	Więzar łukowy trójprzegubowy	354
§ 117.	Dachy baniaste	356
§ 118.	Obciążenie bani ciężarem własnym	356
§ 119.	„ „ śniegiem i wiatrem	358
§ 120.	Obliczenie dokładniejsze sposobem Müllera Breslaua	360
§ 121.	Płaskie dachy namiotowe	362
§ 122.	Dachy wieżowe czworoboczne	364
§ 123.	Dachy wieżowe ośmioboczne	366
§ 124.	Części składowe i rodzaje belek kratowych	371
§ 125.	Analityczne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej	372
§ 126.	Wykreslne wyznaczenie sił, działających w belkach kratowych równoległych o kracie pojedynczej	373
§ 127.	Krata wielokrotna	374
§ 128.	Belka kratowa Howe'a	374

C. Teorya sklepień.

X. Sklepienia kolebkowe.

§ 129.	Łuki i sklepienia	375
§ 130.	Siła podłużna i momenty jędrne	376
§ 131.	Warunki równowagi sklepienia	380
§ 132.	Obciążenie sklepienia	384

	Str.
§. 133. Linia ciśnienia	384
§. 134. Grubość sklepienia	387
§. 135. Grubość sklepień betonowych i żelbetowych	390
§. 136. Związek między linią ciśnienia a linią obciążenia	390
§. 137. Przybliżone wyznaczenie linii ciśnienia w sklepieniu symetrycznym	392
§. 138. Sklepienie niesymetrycznie obciążone	395
§. 139. Siły zewnętrzne	396
§. 140. Odkształcenie łuku	398
§. 141. Wyznaczenie trzech warunków	400
§. 142. Wyznaczenie prawdziwej linii ciśnienia	402
§. 143. Położenie powierzchni momentów	411
§. 144. Ciśnienie sklepienia na krążyny	412

XI. Sklepienia krzyżowe i baniaste.

§. 145. Sklepienie krzyżowe nad kwadratem	415
§. 146. " " " prostokątem	417
§. 147. " " " w jedlinkę	418
§. 148. " baniaste	419
§. 149. Bania kulista	421
§. 150. Wykreślne wyznaczenie nateżeń w bani	422
§. 151. Sklepienie klasztorne	425

XII. Przyczółki, filary i kominy.

§. 152. Linia ciśnienia	426
§. 153. Wmurowanie belki wspornikowej	428
§. 154. Linie wyznacznice przekroju prostokątnego	430
§. 155. Przekrój nieregularny. Siła działa w osi głównej	435
§. 156. Przekrój nieregularny. Siła działa nie w osi głównej	437
§. 157. Kominy fabryczne	438

D. Budowle ziemne.

XIII. Równowaga stoków.

§. 158. Zasady	442
§. 159. Równowaga ziemi niespoistej	443
§. 160. Równowaga ziemi spoistej	444
§. 161. Naziom płaski i nieobciążony	445
§. 162. Stok pionowy	447
§. 163. Wyznaczenie wykreślne spójności i wysokości stoku i stoczystości	448
§. 164. Parabola spójności	450
§. 165. Wyznaczenie stoku naturalnego, spójności i ciężaru gatunkowego	451

	Str.
§. 166. Naziom załamany	453
§. 167. Równowaga ziemi jednostajnie obciążonej	453
§. 168. Wykreślne wyznaczenie stoku ziemi jednostajnie obciążonej .	455
§. 169. Naziom dowolny częściowo obciążony	456
§. 170. Stok zakrzywiony	455

XIV. Parcie ziemi, obliczone sposobem analitycznym.

§. 171. Ogólne zasady	457
§. 172. Ogólne wyznaczenie powierzchni odłamu i parcia ziemi . .	459
§. 173. Ogólne wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi . . .	461
§. 174. Wyznaczenie parcia ziemi, gdy naziom jest płaszczyzną, nachyloną do poziomu pod kątem β	462
§. 175. Parcie ziemi dla naziomu poziomego	464
§. 176. Parcie ziemi na mur pionowy	465
§. 177. Wyznaczenie parcia ziemi dla naziomu pochylego, zakończonogopłaszczyzną poziomą	466
§. 178. Wysokość punktu zaczepienia parcia ziemi dla naziomu płaskiego, zakończonogopłaszczyzną poziomą	469
§. 179. Uwzględnienie ciężaru ruchomego	469

XV. Parcie ziemi, wyznaczone wykreślnie.

§. 180. Zasady	471
§. 181. Parcie ziemi na mur płaski dla naziomu płaskiego	474
§. 182. Parcie ziemi na mur płaski, gdy naziom tworzą dwie płaszczyzny	478
§. 183. Parcie ziemi o naziomie dowolnego kształtu na mur płaski .	480
§. 184. Wyznaczenie punktu zaczepienia parcia ziemi	481
§. 185. Parcie ziemi na mur krzywy lub załamany	485
§. 186. Odpór ziemi	486
§. 187. Wykreślne wyznaczenie parcia ziemi sposobem Pillęta . . .	488

XVI. Inne teorie parcia ziemi.

§. 188. Poprawka dla równowagi w spoczynku	489
§. 189. Poszczególne wypadki	492
§. 190. Wyznaczenie płaszczyzny odłamu	493
§. 191. Wyznaczenie analityczne parcia geostatycznego dla ściany pionowej i naziomu poziomego	496
§. 192. Nowsze teorie	497

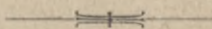
XVII. Parcie ziemi na sklepienie.

§. 193. Sklepienie owalne	499
§. 194. Sklepienie tunelowe	500
§. 195. Uwzględnienie spójności	501

E. Mury oporowe.

XVIII. Stałość murów oporowych.

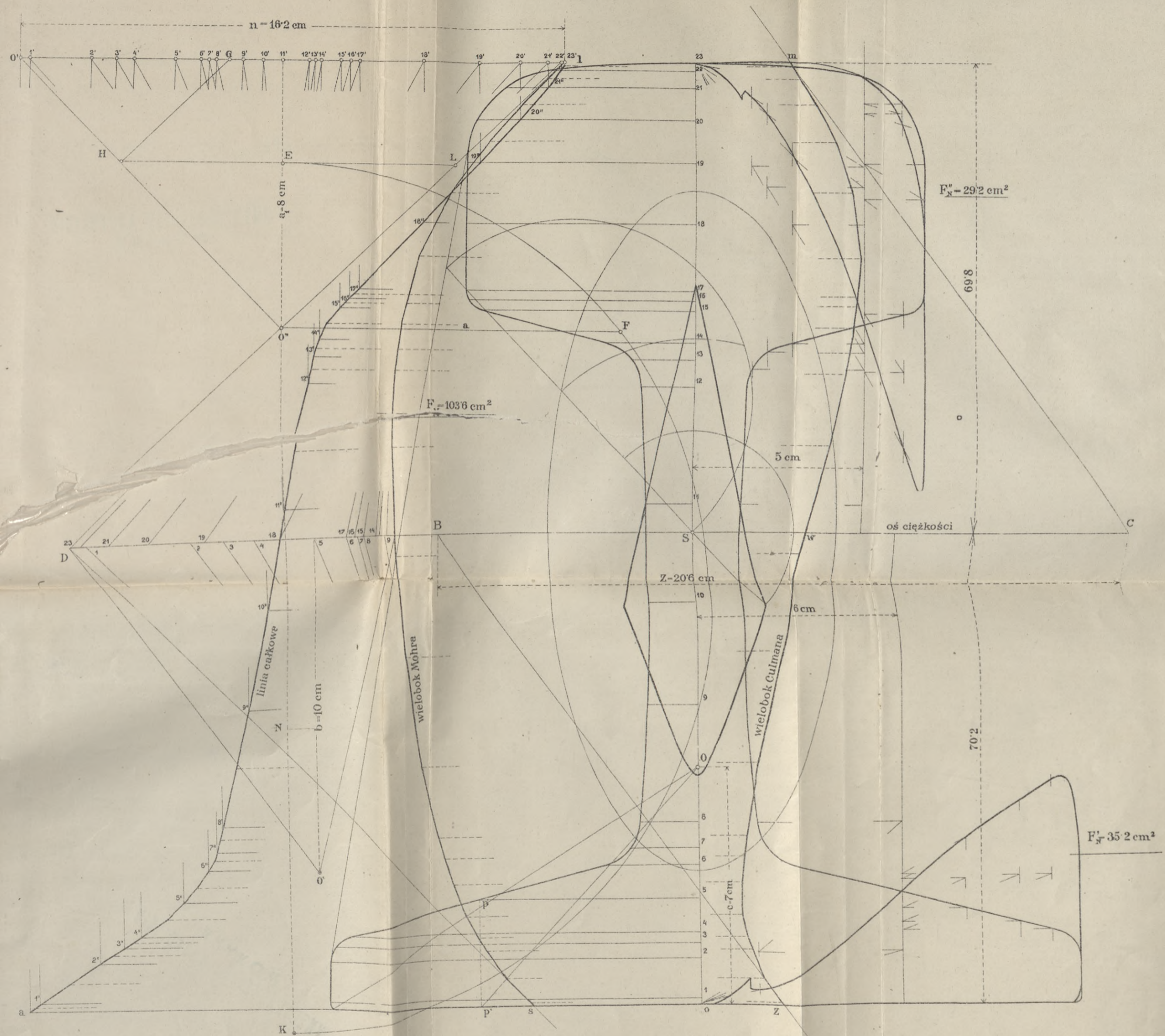
§. 196.	Ogólne zasady	502
§. 197.	Ogólne wyznaczenie grubości muru oporowego	502
§. 198.	Analityczne wyznaczenie grubości muru dla szwów pochyłych	504
§. 199.	Analityczne wyznaczenie grubości muru dla szwów poziomych	506
§. 200.	Wykreślne wyznaczenie grubości muru oporowego	508
§. 201.	Parcie geostatyczne przy wyznaczeniu grubości muru oporowego	510
§. 202.	Mury oporowe z przyporami	512
§. 203.	Korzystny przekrój muru oporowego	513
§. 204.	Parcie ziemi na przyczółek	514
I. Dodatek: Literatura		516
II. Dodatek: Tablice obciążeń stropów		523
III. Dodatek: Tablice liczbowe		528



~~BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW~~

S. 61

MOMENT BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU SZYNY KOLEJOWEJ



$$I_1 = \frac{20 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2}{16} = 1442 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{103.6 \cdot 2.8 \cdot 7 \cdot 2}{16} = 1450 \text{ cm}^4$$

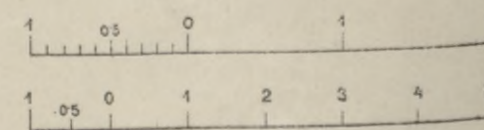
$$I_x = \frac{I_1 + I_2}{2} = 1446 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{29.2 \cdot 5^2 + 35.2 \cdot 6^2}{16} = 2249.6 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{16.2 \cdot 7 \cdot 2}{4} = 56.7 \text{ cm}^4$$

Podziałka dla przekroju 2:1

dla innych długości 1:1



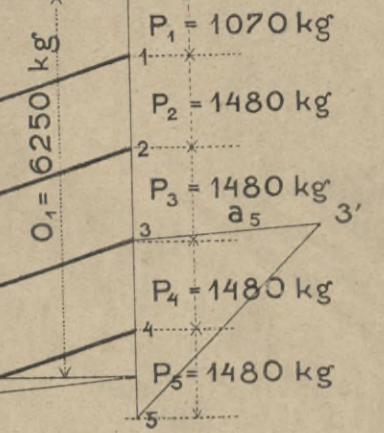
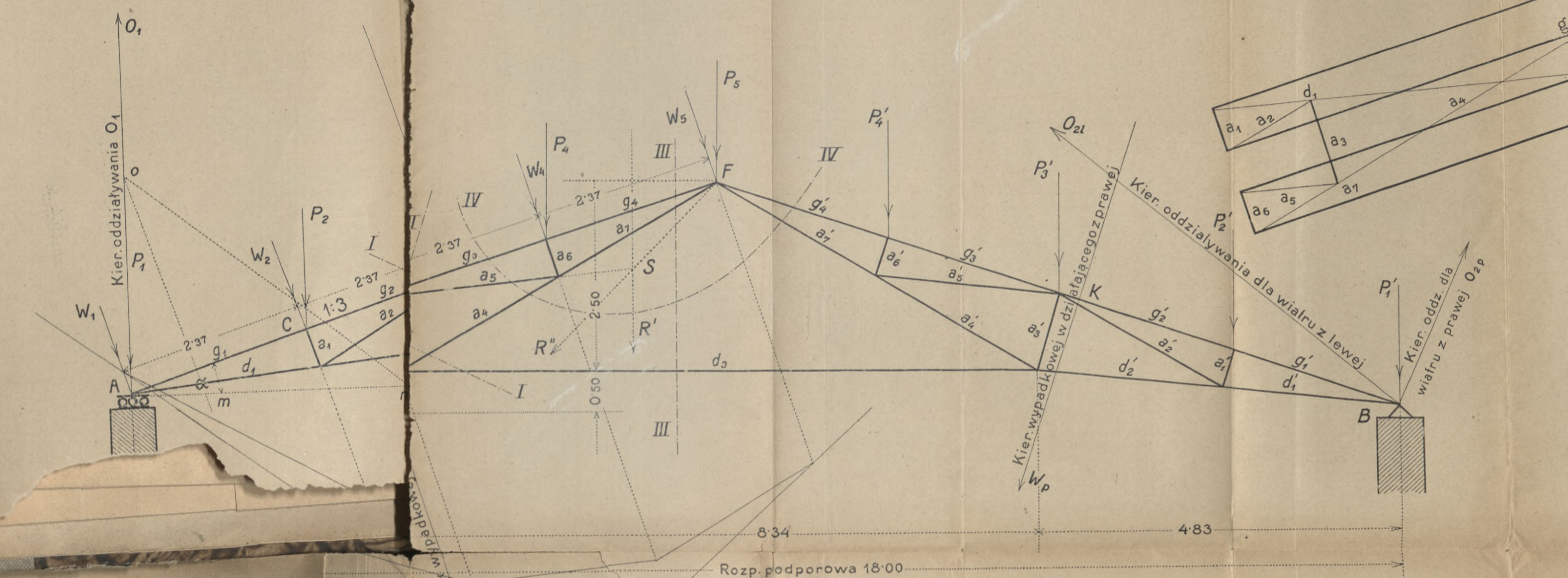
BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Dach Polonceau, złożony

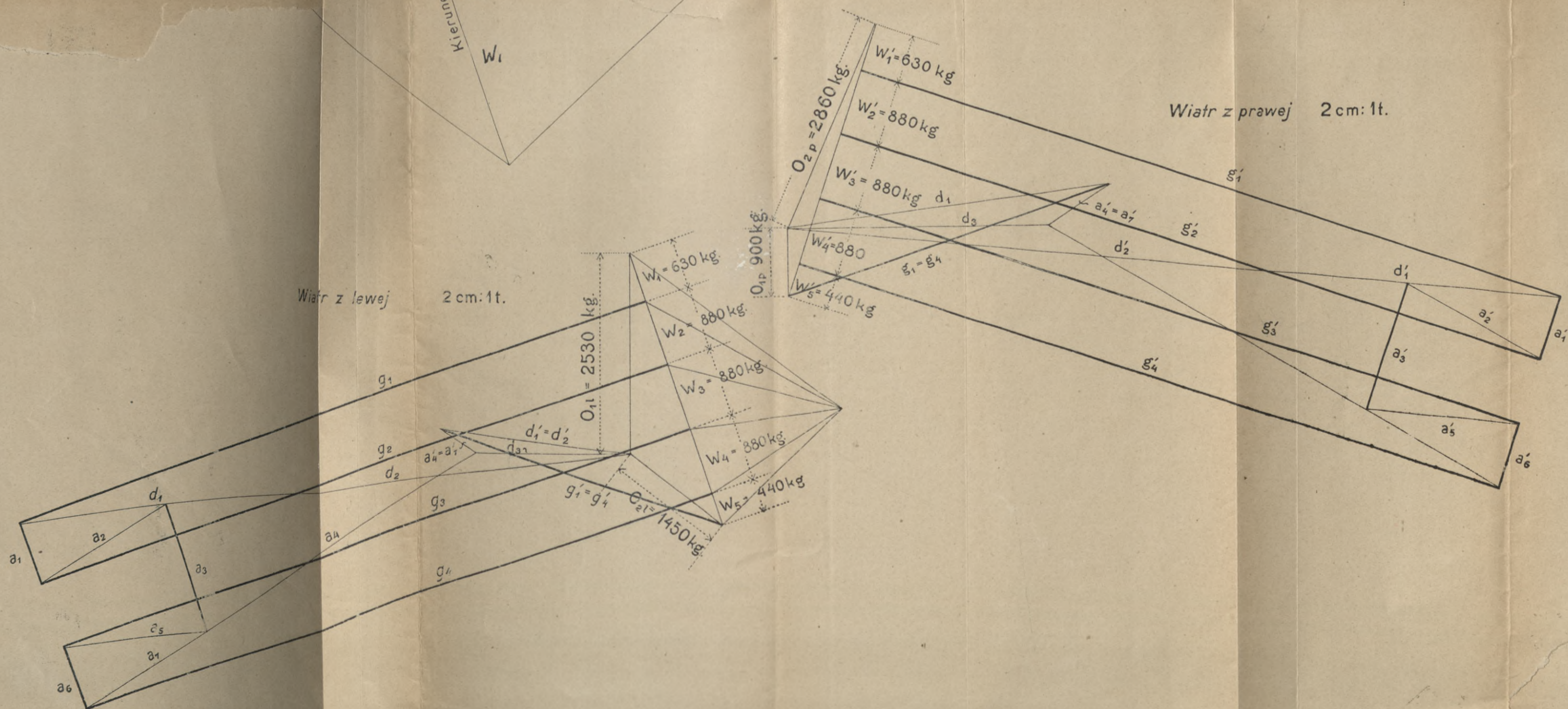
Obciążenie pionowe



0.8 cm : 1 ft.

Sily wewn. i przekroje prętów

Pręt	Obciąż. pionowe	Wiatr z lewej	Wiatr z prawej	Najw. P	Przekrój	
Pas górny	g ₁	-23.72	-9.31	-4.41	-33.03	
	g ₂	-23.27			-32.58	
	g ₃	-22.85			-32.16	
	g ₄	-22.37	-3.83	-9.66	-31.68	
	g' ₁	-22.37			-32.03	
	g' ₂	-22.85			-32.51	
	g' ₃	-23.27			-32.93	
g' ₄	-23.72			-33.38		
Pas dolny	d ₁	+22.70	+8.69	+4.24	+31.39	
	d ₂	+19.48	+6.73		+26.21	
	d ₃	+10.70	+2.04	+3.40	+14.10	
	d' ₂	+19.48	+2.47	+10.19	+8.15	+27.63
	d' ₁	+22.70			+32.89	
Krata	a ₁	-1.40	-0.88	0.00	-2.28	
	a ₂	+3.21	+2.00		+5.21	
	a ₃	-2.80	-1.76		-4.56	
	a ₄	+8.98	+4.75	+0.95	+13.73	
	a ₅	+3.19	+2.00	0.00	+5.19	
	a ₆	-1.40	-0.88		-2.28	
	a ₇	+12.17	+6.75	+0.95	+18.92	
	a' ₇	+12.17	+0.50	+6.88	+19.05	
	a' ₆	-1.40	0.00	-0.88	-2.28	
	a' ₅	+3.19		+2.00	+5.19	
	a' ₄	+8.98		+0.50	+4.85	+13.83
	a' ₃	-2.80	0.00	-1.76	-4.56	
	a' ₂	+3.21		+2.00	+5.21	
a' ₁	-1.40		-0.88	-2.28		



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

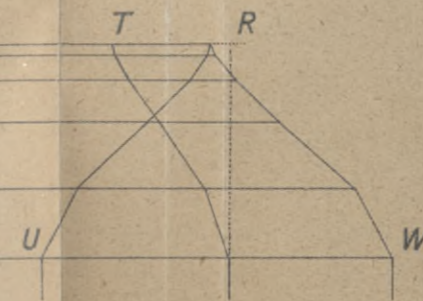
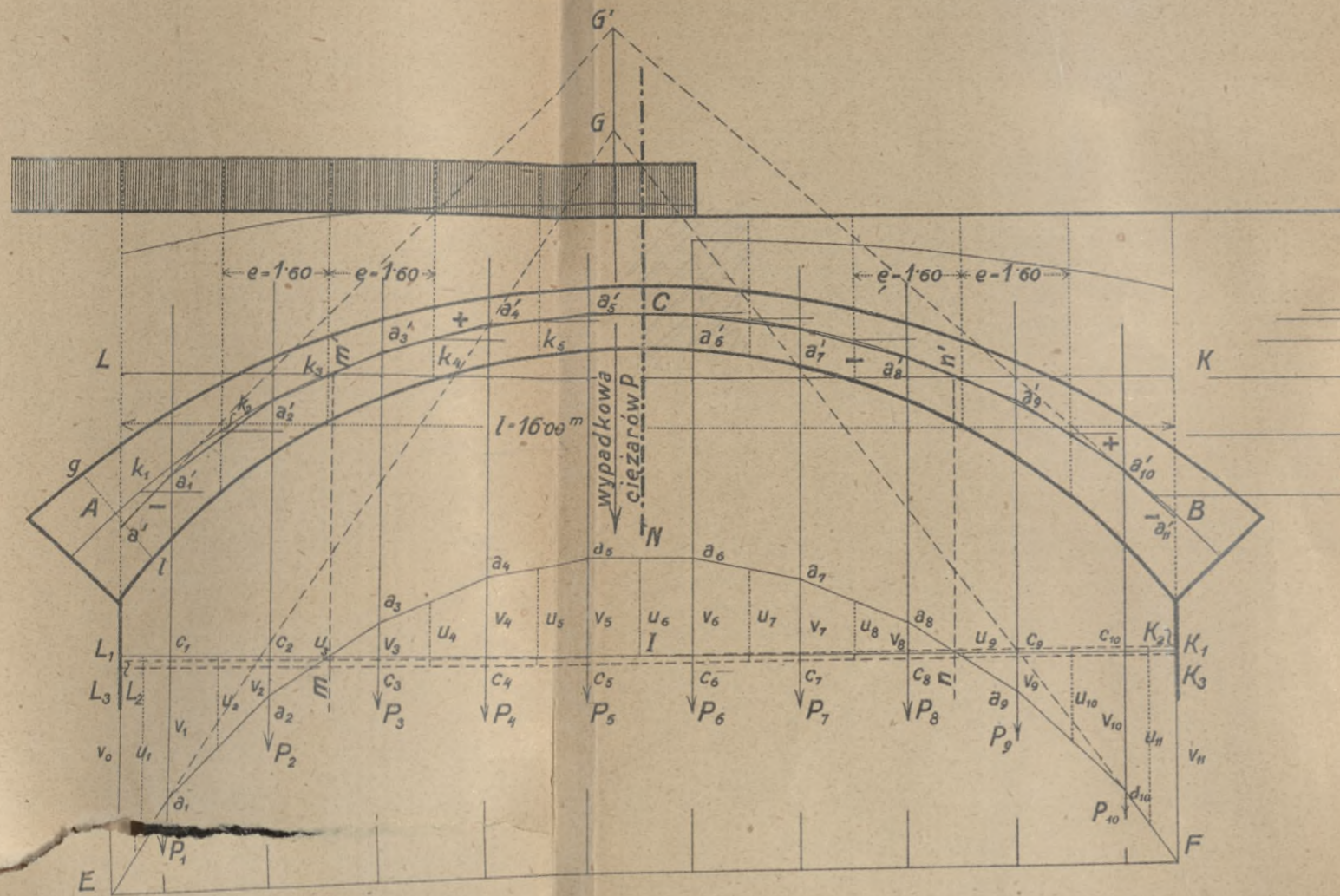
BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

WYKRES
CZĘŚĆ I

1/10 1/10 1/10

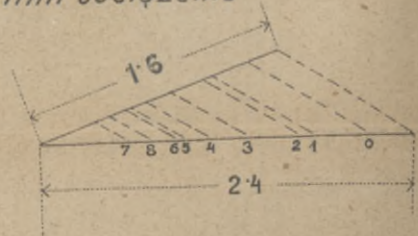
Prawdziwa linia ciśnienia w sklepieniu.

Tabl. IV.

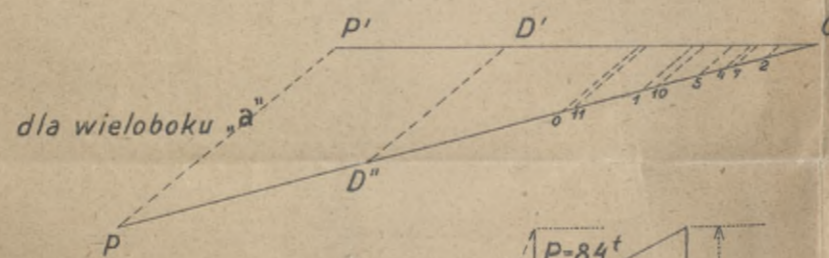
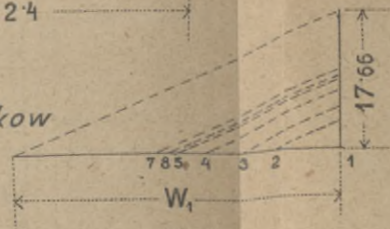


Kąty proporcjonalności:

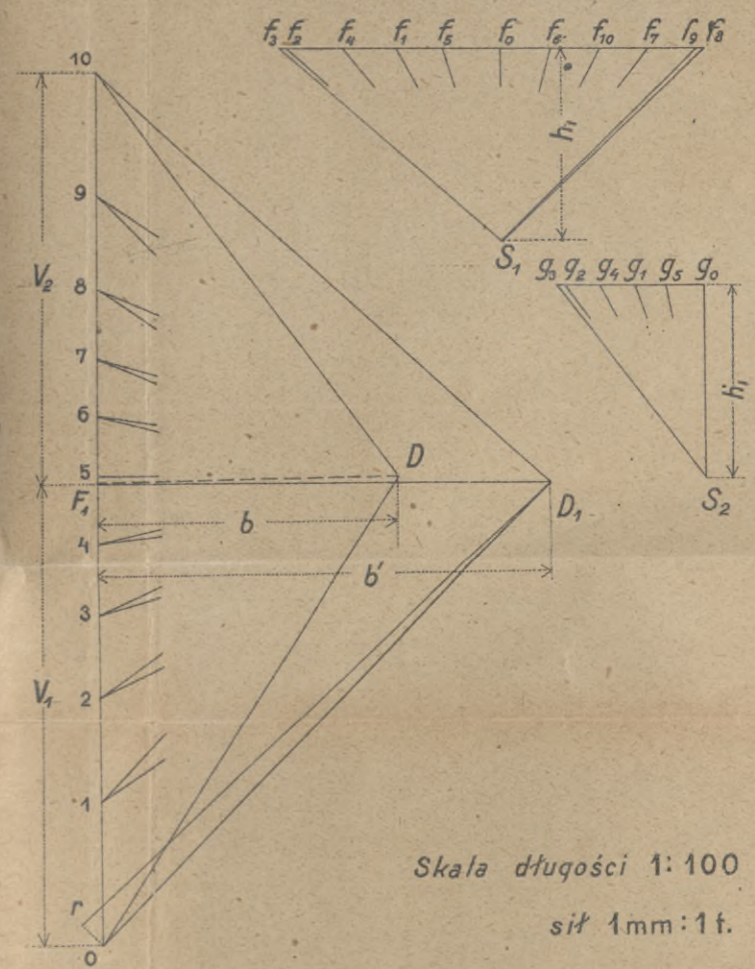
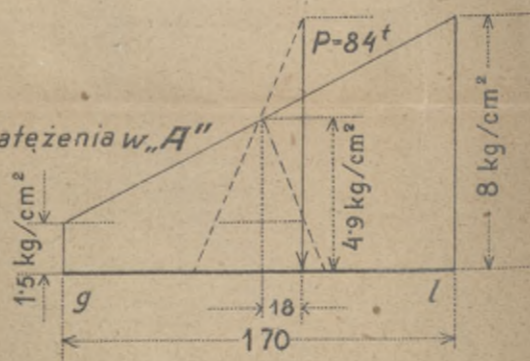
dla linii obciążenia



dla ciężaru paskow



Natężenia w „A”



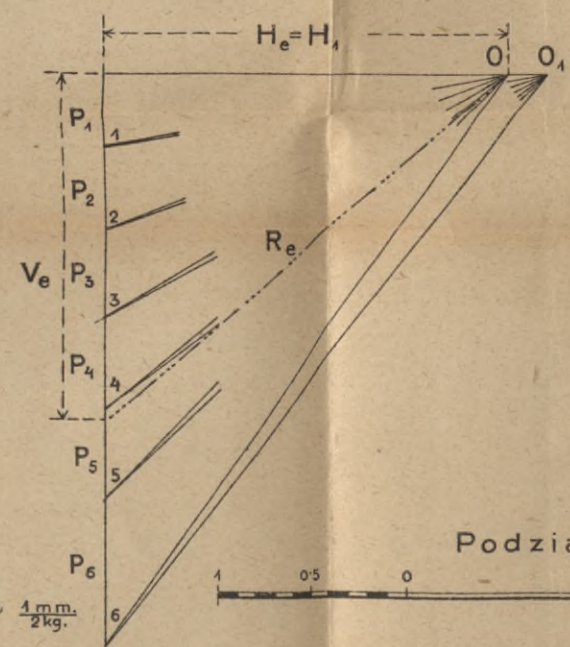
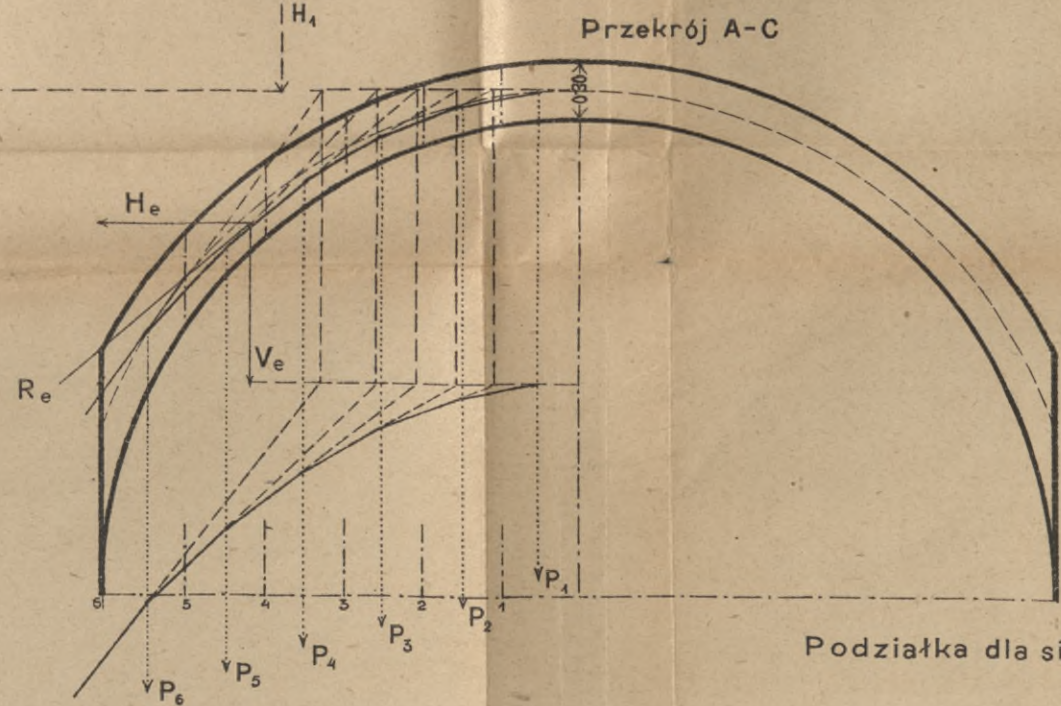
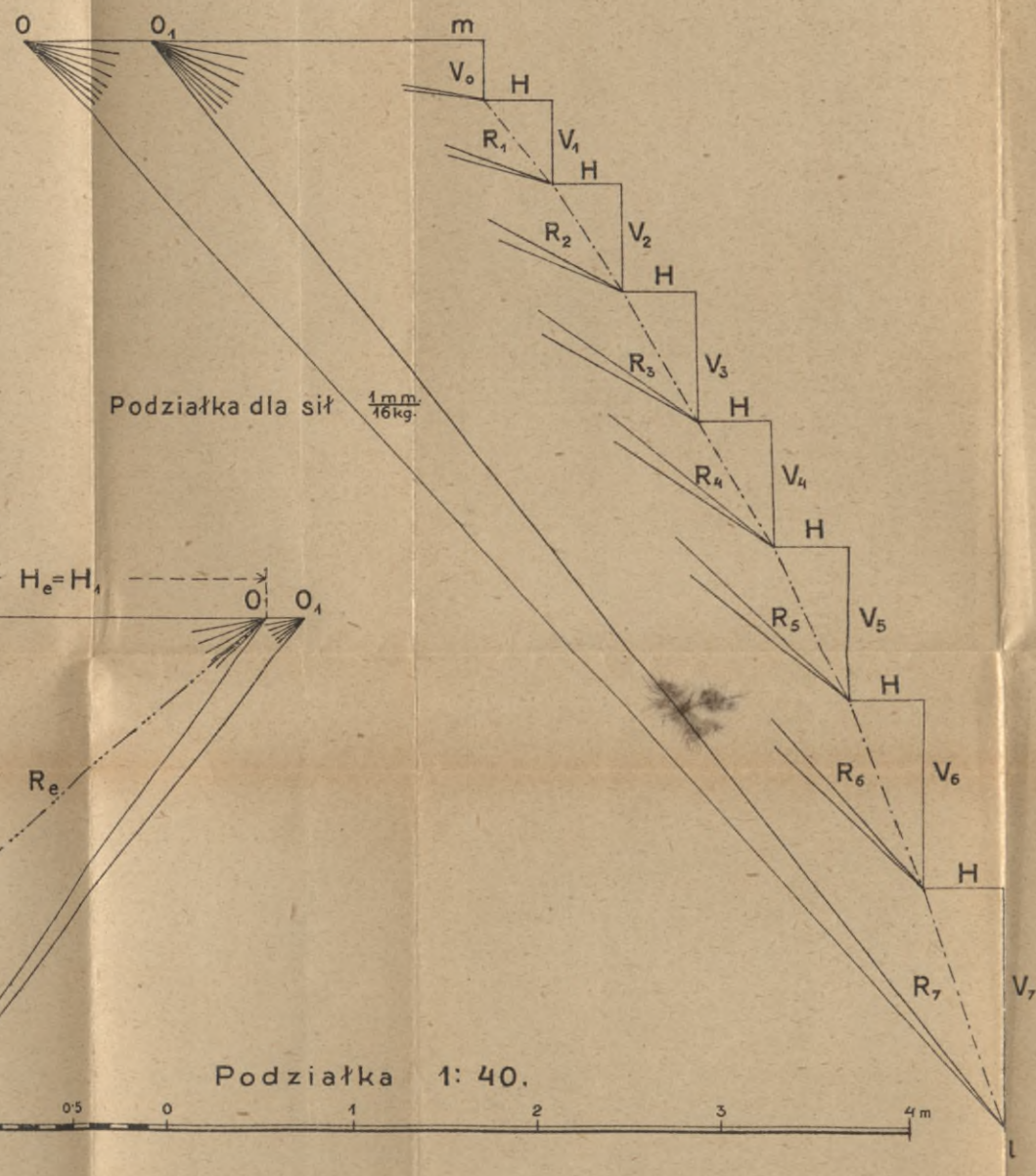
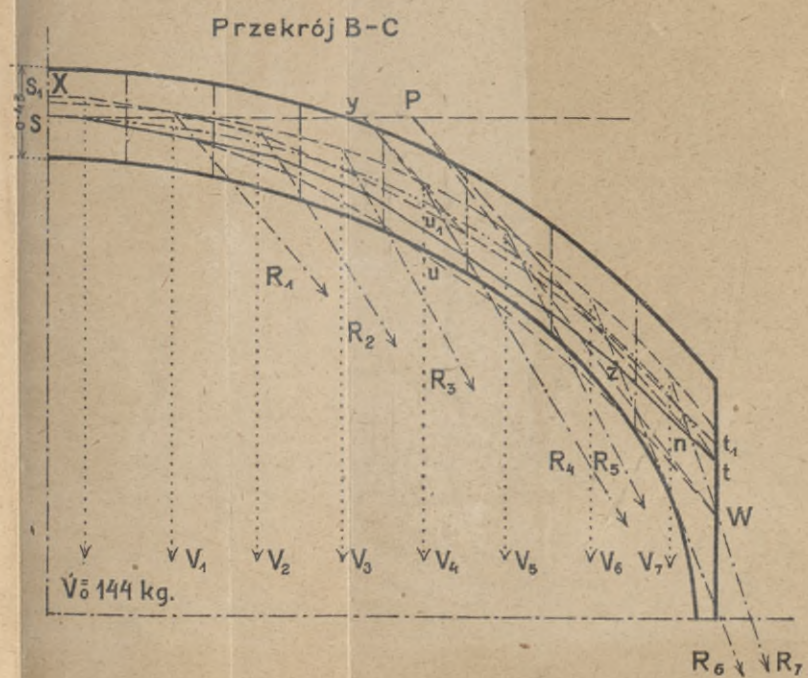
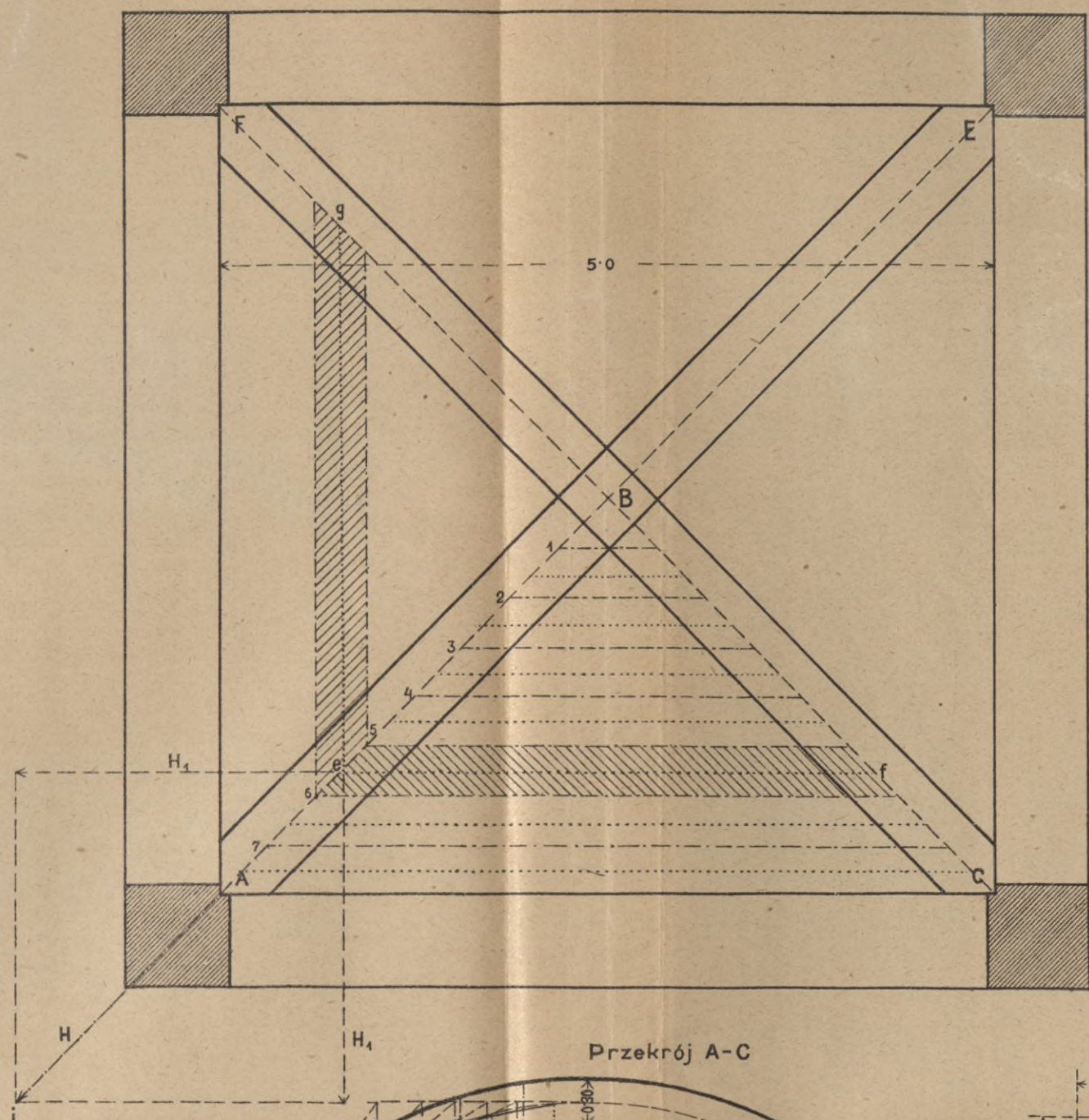
Skala długości 1:100
sił 1mm:1t.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Tab. V.

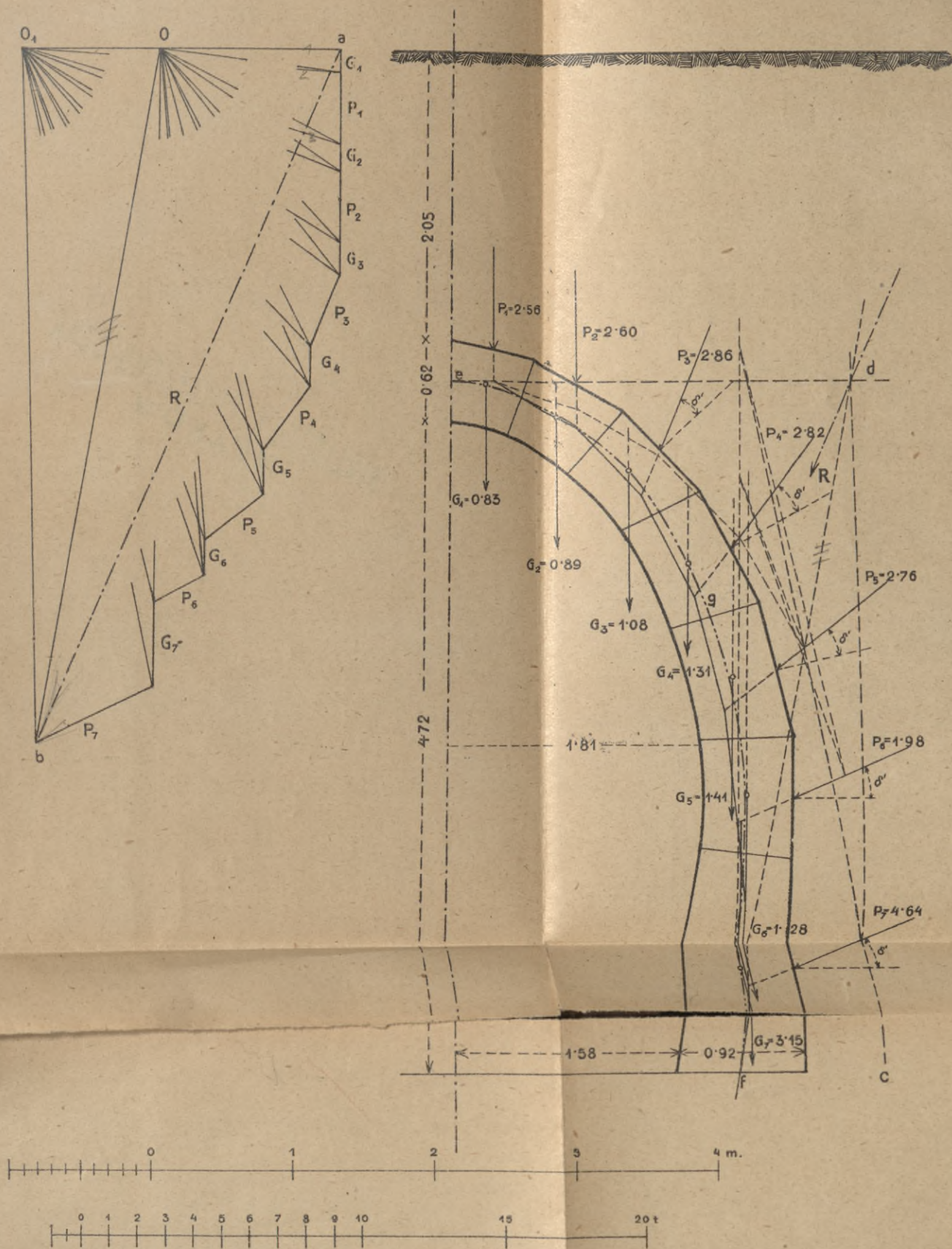
Wykreślne wyznaczenie linii ciśnienia w sklepieniu krzyżowym nad kwadratem



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Wykreślenie linii ciśnienia z uwzględnieniem ukośnego parcia ziemi



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

S 61

21. IV 50 soldat

50,00



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-338578

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000267682