



73132

247

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000275634

III a

L. 602/17

Draft. ~~4624~~ 4107

2157a

15004 K

PODREĆCZNIK TEORYI MOSTÓW

dla

inżynierów i słuchaczy szkół politechnicznych

z 144 rysunkami w tekście i 5 tablicami.

CZĘŚĆ I. BELKI PROSTE.

TOM I. BELKI STATYCZNIE WYZNACZALNE.

Opracował

MAKSYMILIAN THULLIE

dplomowany inżynier, profesor szkoły politechnicznej we Lwowie.

Cena 4 złr.



LWÓW.

NAKŁADEM AUTORA.

GŁÓWNY SKŁAD W KSIĘGARNI GUBRYNOWICZA & SCHMIDTA,

I. Związkowa Drukarnia we Lwowie.

1890.

Dokł 4650

25

II 341276

II ~~338578~~



~~Akc. Nr.~~

~~3555/50~~

19-67/2014

PRZEDMOWA.

Zachęcony przychylnem przyjęciem mego Podręcznika Statyki Budowli, przystępuję do ogłoszenia dalszego ciągu mych wykładów w lwowskiej szkole politechnicznej, mianowicie teorii mostów. Nauka ta jednak obecnie tak dalece się rozwinęła, że tom niniejszy zawiera tylko jej część, teorią belek prostych statycznie wyznaczalnych, które zresztą największe zastosowanie znajdują w praktyce.

Staraniem mojem było, aby praca niniejsza stała się podręcznikiem nie tylko słuchaczy szkół politechnicznych, ale także i inżynierów wykonywujących, dlatego umieściłem w niej dane, potrzebne do obliczenia belek mostowych i przydałem przykłady, które wyjaśniają i ułatwiają zastosowanie otrzymanych wzorów.

Ponieważ teoria mostów opiera się na statyce budowli, więc musiałem przyjąć jako znajome prawa statyki budowli, w odnośnych miejscach odwołuję się jednak zawsze do odpowiednich ustępów Podręcznika Statyki Budowli.

I w niniejszej pracy używałem porównano obu metod, liczebnej i wykresnej. Ta ostatnia ma w teorii mostów jeszcze większe zastosowanie, niż w statyce budowli i więcej przedstawia korzyści, choćby tylko jako kontrola.

W układzie mej pracy trzymałem się głównie dzieł prof. Winklera, korzystając, rozumie się, także z wszelkich zdobyczy nauki, dokonanych przez innych uczonych inżynierów, uwzględniłem nareszcie własne swe prace w tym przedmiocie. Jak się łatwo można przekonać z dat publikacyj w spisie bibliograficznym, zamieszczonym na końcu książki, używałem konsekwentnie linii wpływowych tak w wykładach, jak i mych publikacjach o wiele przed wyjściem II. wydania Winklera Teorii Mostów w r. 1881; w którym on też je wszędzie zastosowuje.

IV

Dzieła naukowe z rycinami są dość drogie nawet niemieckie i francuskie; polskie takie dzieło musiałoby być jeszcze droższe. Aby cenę jego, ile możności zniżyć, musiałem jak w Podręczniku Statyki Budowli, tak i tu użyć zamiast drzeworytów rycin litografowanych w zakładzie p. Przyszłaka. Jeżeli wskutek tego parę figur odbiło się niezupełnie wyraźnie, łaskawy czytelnik zechce wybaczyć ze względu na cel niżenia ceny dzieła.

Oddając tę moją pracę pod pobłażliwy sąd techników, pospieszam wywiązać się z miłego obowiązku podziękowania Towarzystwu Politechnicznemu we Lwowie za życzliwą pomoc w wydawnictwie, Szanownej Redakcyi Przeglądu Technicznego a w szczególności redaktorowi p. Adamowi Braunowi i Krakowskiemu Towarzystwu Technicznemu za łaskawe poparcie wydawnictwa i bezinteresowne zbieranie przedpłaty i p. inżynierowi Albinowi Zazule, który podjął się przejrzania rękopisu i z którego uwag niejednokrotnie korzystałem.

Maksymilian Thullie.

We Lwowie w styczniu 1890.

SPIS RZECZY.

Wstęp	Str. 1
-----------------	--------

A. Siły, działające na mosty.

I. Siły zewnętrzne.

§. 1. Rodzaje sił zewnętrznych	4
§. 2. Ciężar własny	4
§. 3. Ciężar ruchomy mostów drogowych	11
§. 4. Ciężar ruchomy mostów kolejowych	12
§. 5. Obciążenie śniegiem	15
§. 6. Ciśnienie poziome, powstające w skutek chwiania się parowozów i wozów	16
§. 7. Parcie wiatru	16
§. 8. Siła odśrodkowa	20

II. Natężenie dopuszczalne.

§. 9. Natężenie dopuszczalne dla mostów żelaznych i stalowych	21
§. 10. Natężenie dopuszczalne dla mostów drewnianych	26

B. Belka prosta jednoprzęsłowa zwykła.

III. Działanie ciężarów skupionych.

§. 11. Linie wpływowe sił poprzecznych	27
§. 12. Linie wpływowe momentów	29
§. 13. Najniekorzystniejsze obciążenie ze względu na siły poprzeczne	30
§. 14. Wyznaczenie największych sił poprzecznych	33
§. 15. Najniekorzystniejsze położenie układu ciężarów ze względu na momenty	34
§. 16. Wyznaczenie największych momentów	38
§. 17. Bezwzględnie największy moment	43
§. 18. Największe momenty dla zmiennych rozpiętości	46

IV. Obciążenie ciągle.

§. 19. Obciążenie jednostajne zupełne	49
§. 20. Najniekorzystniejsze obciążenie ze względu na siły poprzeczne	49

VI

	Str.
§. 21. Największe momenty	50
§. 22. Obciążenie ciężarem własnym i ruchomym, jednostajnie rozłożonym	51
§. 23. Ciężar zastępczy	52

V. Wpływ poprzecznic.

§. 24. Ciężar stały	57
§. 25. Siły poprzeczne wskutek ciężaru ruchomego	58
§. 26. Momenty wskutek ciężaru ruchomego	61

VI. Belka ciągła przegubowa.

§. 27. Określenie	63
§. 28. Obciążenie dowolne	64
§. 29. Linie wpływowe belki wystającej	64
§. 30. Linie wpływowe belki ciągłej przegubowej	65
§. 31. Obciążenie jednostajne zupełne	66
§. 32. Największe siły poprzeczne	67
§. 33. Największe momenty	69

C. Belka kratowa równoległa.

VII. Belka o kracie pojedynczej.

§. 34. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach	72
§. 35. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w krzyżulcach	73
§. 36. Wykreślne wyznaczenie sił wewnętrznych	74
§. 37. Belka o kracie równoramiennej	75
§. 38. Przykład	77

VIII. Belka o kracie wielokrotnej.

§. 39. Zasada obliczenia	79
§. 40. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych	80
§. 41. Dokładne wyznaczenie sił wewnętrznych w krzyżulcach	81
§. 42. Dokładne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach	82
§. 43. Krzyżulce giętkie	84
§. 44. Przykład. Obliczenie mostu drogowego o kracie dwukrotnej prostokątnej	84

IX. Belka o kracie złożonej.

§. 45. Krata złożona bez sztucznego nateżenia	88
§. 46. Krata złożona ze sztucznym nateżeniem	90
§. 47. Belki Howe'a i Ridera	91

X. Ilość materiału.

§. 48. Uwagi ogólne	92
§. 49. Objętość pasów	93

VII

	Str.
§. 50. Objętość kraty z jednego materiału	94
§. 51. Objętość kraty z różnego materiału	96
§. 52. Objętość narożników	97
§. 53. Objętość całej belki kratowej	98

D. Belka kratowa wieloboczna.

XI. Belka o kracie pojedynczej.

§. 54. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach	99
§. 55. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w kracie	100
§. 56. Krzyżulce giętkie	102
§. 57. Ogólne wykreślne sposoby wyznaczania sił wewnętrznych	103
§. 58. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych w pasach	104
§. 59. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych w krzyżulcach	105
§. 60. Linie wpływowe sił wewnętrznych w krzyżulcach	108
§. 61. Wyznaczenie analityczne największych sił wewnętrznych w krzyżulcach	111
§. 62. Linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach. Największe i najmniejsze siły	112
§. 63. Wyznaczenie wykreślne największych sił wewnętrznych	113
§. 64. Podwójne krzyżulce giętkie	117

XII. Belka o kracie wielokrotnej.

§. 65. Zasada obliczenia	118
§. 66. Wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach	118
§. 67. Linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach	119
§. 68. Linie wpływowe sił wewnętrznych w krzyżulcach	120
§. 69. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych	120

XIII. Belka kratowa paraboliczna.

§. 70. Kształt pasów	121
§. 71. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych	123
§. 72. Linie wpływowe belki górnoparabolicznej	124
§. 73. Siły wewnętrzne przy obciążeniu zupełnem	125
§. 74. Największe siły wewnętrzne	126
§. 75. Przykład	128

XIV. Odmiany belki parabolicznej.

§. 76. Zasada belki Paulego	131
§. 77. Kształt belki Paulego	132
§. 78. Belka paraboliczna niezbieżna	133
§. 79. Przykład	134

XV. Belka Schwedlera.

§. 80. Określenie belki	140
§. 81. Przybliżone wyznaczenie kształtu pasów	140

VIII

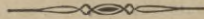
	Str.
§. 82. Dokładne wyznaczenie kształtu belki	144
§. 83. Przykład	145

XVI. Inne belki kratowe.

§. 84. Belka Winklera	149
§. 85. Belka eliptyczna	151
§. 86. Belka górnoparaboliczna o stałym przekroju w pasie górnym	152
§. 87. Belka z ciężarem pomocniczym	153
§. 88. Belka rozporowa prosta	154

XVII. Ugięcie belki.

§. 89. Ogólne uwagi	155
§. 90. Wyznaczenie analityczne ugięcia belki	157
§. 91. Wyznaczenie wykreślne ugięcia belki kratowej	161
Dodatek. Literatura	164



WSTĘP.

Opracowując Podręcznik Statyki Budowli wyłączyliśmy ze statyki budowli obliczenie mostów, które z powodu odmiennego sposobu obciążenia jest przedmiotem osobnej nauki, tak zwanej teorii mostów (n. *Theorie der Brücken*), którą obecnie wyłożyć zamysłamy.

Zadaniem teorii mostów jest obliczenie sił, działających w każdej części mostu, odkształceń, spowodowanych temi siłami i wyznaczenie potrzebnego przekroju każdej części mostu.

Wyznamy więc najpierw:

a) siły zewnętrzne (n. *äussere Kraft*, f. *force extérieure*, a. *outer force, stress*) i

b) siły wewnętrzne (n. *innere Kraft*, f. *force intérieure*, a. *inner force, strain*), potem

c) najkorzystniejszy ustrój mostu ze względu na kosztą i ilość potrzebnego materyału i

d) odkształcenie mostu (n. *Formänderung*, f. *deformation*, a. *deformation*).

Częściami składowemi mostu są:

1. przyczółki i filary (n. *Widerlager, Pfeiler*, f. *culée, pile*, a. *pier*),

2. łożyska (n. *Lager*, f. *support, coussinet*, a. *support, bearing*), służące do przeniesienia sił z belek mostowych na przyczółki i filary,

3. belki czyli dźwigary (n. *Träger*, f. *poutre*, a. *truss*),

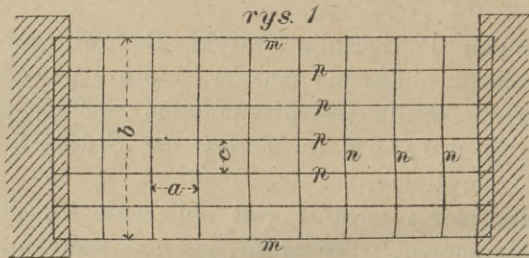
4. pomost (n. *Brückenbahn*, f. *tablier*, a. *planking*),

5. tężniki pionowe i poziome (n. *Querverbindungen*).

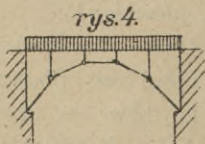
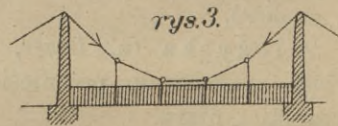
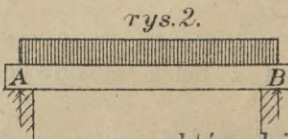
Obliczenie filarów, łożysk, pomostu i tężników podamy w części ustrojowej (konstrukcyjnej) budowy mostów; w części teoretycznej mówić będziemy tylko o belkach, których jest kilka rodzajów.

Rozróżniamy mianowicie belki główne (n. *Hauptträger*, f. *poutre principale*) *m m* (rys. 1), spoczywające za pośrednictwem łożysk na filarach i przyczółkach, belki poprzeczne czyli poprzecznice (n. *Querträger*, f. *pièce du pont n n*,

spoczywające na belkach głównych i belki podłużne czyli podłużnice (n. *Nebenträger*, *secundäre Längsträger*, f. *longeron*) p. p.



Belki główne dzielą się znów ze względu na łożyska na 3 rodzaje. Jeżeli belka obciążona jest tylko siłami pionowymi, a oddziaływania są także pionowe, nazywamy belkę belką prostą (n. *gerader Träger*, *Balkenträger*, f. *poutre droite*, a. *straight girder*, *beam*) (rys. 2). Drugim rodzajem belki jest wieszar (n. *Hängwerksträger*, f. *poutre suspendante*, a. *suspension girder*, *hanging girder*), który działa nawet przy obciążeniu pionowym na podpory w kierunku ukośnym, dążąc do ich zbliżenia (rys. 3) n. p. przy moście wiszącym. Nareszcie rozpornicą, belką rozporową (n. *Sprengwerksträger*, f. *poutre à jambettes*, *poutre de châssis*, a. *strut framed girder*) nazywamy belkę,



która działa nawet przy obciążeniu pionowym na podpory w kierunku ukośnym, dążąc do ich oddalenia (rys. 4). Jeżeli belka taka ma kształt łuku, to nazywamy ją belką łukową lub łukiem (n. *Bogenträger*, f. *poutre en arc*, *arc*, a. *arch*, *arched girder*).

Oprócz tego używamy często belek układu złożonego, n. p. połączenia belki prostej z wiszącą, wieszaru z łukiem, belki prostej z łukiem.

Ze względu na materiał i cel rozróżniamy dalej mosty drewniane, żelazne, stalowe i kamienne, dalej mosty kolejowe, drogowe i mosty dla pieszych.

Według poprzedniego podzielimy nasz przedmiot, t. j. teorię mostów, w następujący sposób:

I. Belki proste.

II. Rozpornice, wieszary, łuki i układy złożone.

Obliczenie mostów sklepionych i filarów podamy przy opisie ustroju mostów.

Część pierwsza teorii mostów zawierać będzie tylko teorię belek prostych, którą podzielimy w ten sposób, że najprzód będziemy mówić o siłach zewnętrznych, działających na belki, potem o siłach wewnętrznych, a nakoniec o ugięciu belek. Przy wykładzie o siłach zewnętrznych rozróżniamy belki proste jednoprzęsłowe zwykle (n. *einfacher Träger*), spoczywające na dwóch podporach, i belki ciągłe (n. *continuirlicher Träger*, f. *poutre continue*, a. *continuous beam*), podparte w więcej, niż dwu punktach. Przy belkach ciągłych urządzamy niekiedy przeguby (n. *Gelenk*, f. *charnière*, a. *joint*) i nazywamy je wtedy belkami ciągłymi przegubowymi (n. *continuirlicher Gelenkträger*).

Ponieważ obliczenie przekroju belek blaszanych i drewnianych podaliśmy w statyce budowli, więc będziemy tu mówić tylko o siłach wewnętrznych w belkach kratowych. Z powodu zaś, że do obliczenia sił zewnętrznych bezprzegubowych belek ciągłych potrzebna jest znajomość sił wewnętrznych, mówić będziemy o bezprzegubowych belkach ciągłych w jednym z późniejszych rozdziałów.

Stąd wynika następujący podział przedmiotu:

A. Siły, działające na mosty.

B. Belka prosta jednoprzęsłowa zwykła.

C. Belka kratowa równoległa.

D. Belka kratowa wieloboczna.

E. Belka ciągła bezprzegubowa.

F. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

G. Natężenia drugorzędne.

Cztery pierwsze działy stanowią tom pierwszy, resztę podamy w tomie drugim.

A. Siły działające na mosty.

I. Siły zewnętrzne.

§. 1. Rodzaje sił zewnętrznych.

Na mosty działają rozmaitego rodzaju siły zewnętrzne, a mianowicie:

1. Ciężar własny, stały (n. *Eigengewicht*, *ruhende Belastung*, f. *charge permanente*, a. *dead load*), ciężar belek, pomostu i w ogóle całego ustroju mostu.

2. Ciężar ruchomy, zmienny (n. *zufällige, rollende Last*, f. *charge roulante, variable, surcharge*, a. *live load, rolling load*), zależny od celu mostu, a więc ciężar parowozów, wozów lub tłumu ludzi.

3. Siły poziome (n. *Horizontalkräfte*), powstające wskutek parcia wiatru, chwiania się parowozów i wozów i wskutek siły odśrodkowej.

4. Oddziaływania podpór (n. *Pfeilerdruck*, f. *réaction des appuis*, a. *supporting force*), które się oblicza na podstawie danych ciężarów.

§. 2. Ciężar własny.

Gdy mamy most jaki projektować, ciężar własny jego jest nieznany, dlatego przy obliczaniu sił zewnętrznych przyjmujemy go w przybliżeniu i na tej podstawie obliczamy wymiary wszystkich części mostu. Mając teraz plan mostu, możemy dokładnie obliczyć cały jego ciężar, który z przyjętym porównujemy. Jeżeli ciężar, do obliczenia przyjęty, różni się znacznie od obliczonego, musimy powtórnie obliczyć wymiary belek mostowych na podstawie obliczonego ciężaru. Rozumie się, że wymiary te po części się zmieniają, a więc i ciężar, obliczony na podstawie nowego projektu, będzie się znów różnił od przyjętego. Jeżeli ta różnica jest znaczna, musielibyśmy rachunek jeszcze raz powtórzyć. Widzimy stąd, jak ważnem jest, aby przy pierwszym

obliczeniu przyjąć ciężar własny trafnie, gdyż w takim razie oszczędzimy sobie powtarzania obliczeń.

Aby otrzymać potrzebne wzory dla ciężaru stałego, zastanowimy się najprzód, od czego ciężar własny zależy. Otóż ciężar własny jest zależny od materiału, a mianowicie od natężenia dopuszczalnego i ciężaru gatunkowego materiału, od ciężaru ruchomego, od rozpiętości i od ustroju mostu. Wzory dokładne musiałyby uwzględnić wszystkie te czynniki. Uwzględnienie materiału i ciężaru ruchomego nie sprawiałoby wielkich trudności, ale ustrój mostów jest tak rozmaity, że trzeba by bardzo wiele wzorów ustawiać, aby najrozmaitsze ustroje mostów uwzględnić. W części ustrojowej budowy mostów podamy takie szczegółowe wzory, tu musimy się ograniczyć na wzory ogólniejsze, które do rozmaitych ustrojów mostów się stosując, nie mogą być zbyt dokładnymi.

W ogóle możemy postępować tu w dwojaki sposób. Licząc w przybliżony sposób używamy wzorów, które podają odrazu ciężar całego mostu. Licząc dokładniej, obliczamy pojedyncze części mostu i tak najprzód pomost, potem obliczamy ciężar pomostu dokładnie i dalej przystępujemy do obliczenia podłużnic, przyczem znamy dokładnie ciężar pomostu, działający na podłużnice i przyjmujemy tylko ciężar podłużnic wedle wzorów. Obliczywszy podłużnice, wykreślamy je i obliczamy dokładnie ich ciężar, co nam posłuży do obliczenia wymiarów poprzecznic, a nareszcie w ten sam sposób i belek głównych.

Podamy tu najprzód wzory ogólne dla ciężaru całego mostu i to dla żelaznych mostów kolejowych na metr bieżący mostu według rozmaitych autorów, którzy otrzymali je na podstawie ciężarów wykonanych mostów. Wzory te mają kształt funkcyi rozpiętości l , od której zależy moment sił zewnętrznych, przyczem przydana jest pewna stała ilość, gdyż ciężar poprzecznic, podłużnic i pomostu nie jest zależny od rozpiętości. Jeżeli więc g nazwiemy ciężar mostu w kg na metr bieżący, l rozpiętość w metrach, α i β współczynniki, to ogólnie możemy napisać:

$$g = \alpha l + \beta \text{ kg/m} 1)$$

Ponieważ we wzorze tym ustrój mostu nie jest uwzględniony, nie może on więc być dokładny, a różni autorowie podają rozmaite wartości dla współczynników α i β . I tak Weiss podaje:

dla mostów jednotorowych . . . $g = 450 + 33l$ kg/m
 „ „ dwutorowych $g = 1800 + 11,1l + 0,44l^2$ „
 Według Asimonta i Frauenholza

dla mostów jednotorowych $g = 31,4l + 700$ kg/m
 Według Otta dla mostów jednotorowych $g = 30l + 800$ „
 „ „ dwutorowych $g = 57l + 900$ „
 „ Heinzerlinga dla most. jednot. $g = 30l + 650$ „

Możemy polecić następane wzory dla g :

dla mostów	$\frac{kg}{m}$	$\frac{pud}{st}$
jednotorowych kolei głównych	$30l + 800$	$0,170l + 15$
dwutorowych kolei głównych	$0,44l^2 + 11,1l + 1800$	$0,076l^2 + 0,063l + 33,5$
jednotorowych kolei drugorzędnych	$27l + 750$	$0,153l + 14$

Ciążar belek głównych możemy przyjąć dla mostów jednotorowych kolei głównych:

dla belek równoległych $30l$ kg/m $0,170l$ pud/st
 „ „ wielobocznych $27l$ „ $0,153l$ „

Dla żelaznych mostów drogowych ciężar jest także zależny od szerokości mostu. Tu więc liczymy ciężar stały na $1m^2$ pomostu.

Możemy przyjąć przy użyciu na pomost podwójnej dyliny dla belek równoległych $g = 4,0l + 230 \frac{kg}{m^2} = 2,361 + 63,9 \frac{pud}{sqz. kw.}$ } 2)
 „ „ wielobocznych $g = 3,7l + 230$ „ = $2,191 + 63,9$ „ }
 zaś przy użyciu $0,2m$ grubej warstwy żwiru:

dla belek równoległych $g = 6,4l + 630 \frac{kg}{m^2} = 3,791 + 175 \frac{pud}{sqz. kw.}$ } 3)
 „ „ wielobocznych $g = 6,0l + 630$ „ = $3,561 + 175$ „ }

Przy małych mostach bez poprzecznic i podłużnic możemy przyjąć w równ. 2) zamiast 230 (63,9) tylko 130 (36), a w równaniu 3) zamiast 630 (175) tylko 400 (111,2). Jako ciężar belek głównych możemy przyjąć pierwsze wyrazy (ze współczynnikiem l) równ. 2) i 3), zmniejszone o $0,6l \frac{kg}{m^2} (0,36l \frac{pud}{sqz. kw.})$.

Dla mostów drewnianych możemy przyjąć następane wartości:

a) mosty kolejowe, jednotorowe z zastrzałami na długość $0,2l$ na metr bieżący mostu

tymczasowego	$g =$	$\frac{kg}{m}$	$50l + 750$	$\frac{pud}{st}$	$0,28l + 10,6$	} . . 4)
stałego	$g =$		$62l + 625$		$0,36l + 11,6$	

Dla belek kratowych Howe'a przyjmujemy przy moście

tymczasowym	$g =$	$54l + 490$	$0,31l + 9,1$	} . . 5)
stałym	$g =$	$72l + 650$	$0,41l + 12,1$	

b) mosty drogowe na $1 m^2$ pomostu:

dylowanego o gr. 15 cm	$g =$	$\frac{kg}{m^2}$	$8,25l + 230$	$\frac{pud}{st. kw.}$	$4,19l + 64$	} . 6)
żwirowanego „ „ 15 „	$g =$		$20l + 400$		$10,2l + 111$	
„ „ „ 26 „	$g =$		$25l + 540$		$12,7l + 150$	

Jeżeli nam chodzi o dokładniejsze wyznaczenie ciężaru mostu, to, jak już wspomnieliśmy, zaczynamy od obliczenia progów lub dyliny i wyznaczamy ich ciężar; na tej podstawie znowu obliczamy bezpośrednio dźwigające części mostu, podłużnice, poprzecznice i tak kolejno postępujemy, aż nareszcie obliczamy belki główne.

Poniżej podajemy ciężar własny poprzecznic i podłużnic według Winklera:

1. Mosty kolejowe.

a) Podłużnice. Niechaj g oznacza ciężar podłużnic na m. bieżący toru w kg , a (rys. 1) odstęp poprzecznic w m , to mamy g dla:

k o l e i	kształtówki		belki blaszane	
	$\frac{kg}{m}$	$\frac{pud}{st}$	$\frac{kg}{m}$	$\frac{pud}{st}$
drugorzędnych o normalnej szerokości toru	$47 a$	$0,27 a$	$18 + 31 a$	$0,24 + 0,17 a$
głównych	$59 a$	$0,33 a$	$21 + 38 a$	$0,39 + 0,42 a$

b) Poprzecznice. Niechaj G będzie ciężar jednej poprzecznicy blaszanej, P ciśnienie koła parowozu w t (pudach), g_2 ciężar poprzecznic na m (st) bież. toru, b długość poprzecznic, c odstęp podłużnic (rys. 1), to możemy przyjąć:

dla kolei	G		g ₂
	kg	puł m	
jednotorowych głów- nych	(55 + 5,3 P + + 1,31 Pa) b	(1,02 + 0,0016 P + + 0,000122 Pa) b	$\frac{1}{a}$ (2,66 + 0,0743 a) (b — 0,73 c)
jednotorowych dru- gorzędnych	—	—	$\frac{1}{a}$ (2,49 + 0,0590 a) (b — 0,73 c)
dwutorowych głów- nych	(94 + 9,1 P + + 2,26 Pa) b	(1,75 + 0,003 P + + 0,00021 Pa) b	$\frac{1}{a}$ (3,89 + 0,1055 a) (b — 1,74 c)
dwutorowych dru- gorzędnych	—	—	$\frac{1}{a}$ (3,77 + 0,889 a) (b — 1,74 c)

Landsberg podaje następane przeciętne ciężary pokładu mostu kolejowego na m (st) bieżący toru w kg (puł), jeżeli a oznacza odstęp poprzecznic.

Koleje główne.

M o s t	C i ę ż a r								
	poprzecznic		podłużnic		pokładu (poprzecznic i podłużnic)				
	kg	puł/st	kg	puł/st	kg	puł/st			
jednotorowy, pomost u góry b = 3,0 m	24 + a	0,45 + a	1,37 a	32 + a	32 a	56 + a	272 a	1,05 + a	1,55 a
" u dołu b = 4,5 m	45 + a	0,84 + a	2,55 a	32 + a	32 a	77 + a	482 a	1,44 + a	2,75 a
dwutorowy, " u góry b = 5,5 m	32 + a	0,60 + a	1,84 a	32 + a	32 a	64 + a	357 a	1,20 + a	2,02 a
" u dołu b = 8,0 m	66 + a	1,23 + a	3,79 a	32 + a	32 a	98 + a	700 a	1,83 + a	3,97 a

Dla kolei drugorzędnych możemy przyjąć:

$$\text{dla pomostu u dołu } 67 + \frac{433}{a} \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad 1,25 + \frac{2,46}{a} \frac{\text{pud}}{\text{st}}$$

$$\text{„ „ u góry } 45 + \frac{200}{a} \text{ „} \quad 0,84 + \frac{1,13}{a} \text{ „}$$

2. Mosty drogowe:

a) Podłużnice. Niechaj g_1' będzie ciężar w *kg* (*pud*) na 1 *m* *b.* (*st b.*) jednej podłużnicy, g_1 ciężar podłużnic w *kg* (*pud*) na m^2 (*st. kw.*) pomostu (dla $c = 1,2m$), a odstęp poprzecznic, c odstęp podłużnic w *m* (*st*), to możemy przyjąć następujące wartości:

Mosty dla	ciężar	belki kształtówki		belki blaszane	
		w <i>kg</i> i <i>m</i>	w <i>pud</i> i <i>st</i>	w <i>kg</i> i <i>m</i>	w <i>pud</i> i <i>m</i>
pieszych . .	g_1	12+1,8 <i>a</i>	0,068+0,0031 <i>a</i>	4,8 <i>a</i>	0,0083 <i>a</i>
wozów lekkich	g_1'	21+(2,9+ +2,1 <i>c</i>) <i>a</i>	0,39+(0,016+ +0,0037 <i>c</i>) <i>a</i>	11(1+0,23 <i>c</i>) (1+0,37 <i>a</i>)	0,20(1+0,070 <i>c</i>) (1+0,11 <i>a</i>)
	g_1	12+5,4 <i>a</i>	0,068+0,094 <i>a</i>	13+4,8 <i>a</i>	0,074+0,0083 <i>a</i>
wozów ciężkich	g_1'	21+(4,2+ +4,0 <i>c</i>) <i>a</i>	0,39+(0,024+ +0,0069 <i>c</i>) <i>a</i>	13,4(1+0,28 <i>c</i>) (1+0,37 <i>a</i>)	0,25(1+0,085 <i>c</i>) (1+0,11 <i>a</i>)
	g_1	12+9,0 <i>a</i>	0,068+0,016 <i>a</i>	23+4,9 <i>a</i>	0,13+0,0085 <i>a</i>
wozów bardzo ciężkich	g_1'	22+(6,6+ +5,2 <i>c</i>) <i>a</i>	0,41+(0,037+ +0,0092 <i>c</i>) <i>a</i>	16,5(1+0,26 <i>c</i>) (1+0,37 <i>a</i>)	0,31(1+0,079 <i>c</i>) (1+0,11 <i>a</i>)
	g_1	12+13,3 <i>a</i>	0,068+0,023 <i>a</i>	34+5,0 <i>a</i>	0,19+0,0087 <i>a</i>

b) Poprzecznic. Niechaj G będzie ciężar jednej poprzecznic, b szerokość mostu, a odstęp poprzecznic w *m* (*st*) g_2 ciężar poprzecznic na m^2 (*stope kw*) pomostu, a możemy przyjąć dla poprzecznic blaszanych:

Mosty dla	G ciężar jednej poprzecznic		g_2 ciężar poprzecznic	
	<i>kg</i>	<i>pud</i>	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{pud}}{\text{st kw.}}$
pieszych .	—	—	$\frac{b}{a} (5,0+2,2a)$	$\frac{b}{a} (0,028+0,0038a)$
wozów lekkich . .	$(2,6+1,9a)(1+$ $+0,115 \frac{b}{c}) b^2$	$(0,015+0,0033a)$ $(1+0,115 \frac{b}{c}) b^2$	$\frac{b}{a} (10,2+1,6a)$	$\frac{b}{a} (0,058+0,0028a)$
wozów ciężkich .	$(3,4+2,6a)(1+$ $+0,115 \frac{b}{c}) b^2$	$(0,019+0,0045a)$ $(1+0,115 \frac{b}{c}) b^2$	$\frac{b}{a} (11,3+2,1a)$	$\frac{b}{a} (0,064+0,0036a)$
wozów bardzo ciężkich .	$(6,8+2,3a)(1+$ $+0,115 \frac{b}{c}) b^2$	$(0,039+0,0040a)$ $(1+0,115 \frac{b}{c}) b^2$	$\frac{b}{a} (12,0+2,2a)$	$\frac{b}{a} (0,068+0,0038a)$

Nakoniec podamy ciężar pomostu i jego pokrycia wedle Winklera.

Ciężar pomostu mostów kolejowych.

Część pomostu	Ciężar pomostu							
	szerokość toru zwyczajna $s = 1,5 m$				koleje wąskotorowe			
	koleje główne cięż. koła = 6,5 t		koleje dru- gorzędne cięż. koła = 5t		$s = 1m$ ciężar koła = 3,8t		$s = 0,75 m$ ciężar koła = 2,5t	
	kg/m	pułst	kg/m	pułst	kg/m	pułst	kg/m	pułst
Szyny żelazne z drob- nym żelazniem	84	1,56	71	1,32	51	0,95	34	0,63
Szyny stalowe z drob- nym żelazniem	74	1,38	61	1,13	45	0,84	30	0,56
Progi	160	2,98	160	2,98	88	1,64	48	0,89
Dylina	224	4,16	224	4,16	150	2,79	112	2,1
Progi jeden obok drugiego	510	9,5	480	8,9	300	5,6	200	3,7
Progi w żwirze	80	1,5	80	1,5	36	0,57	22	0,41
Żwir	2000	37	2000	37	1100	20,5	760	14
Żelazny pomost	200							
Cały pomost dla progów zwyczaj- nych w przecięciu	460	8,6	450	8,4	290	5,4	190	3,5
Poręcze z obu stron	50	0,93	50	0,93	50	0,93	50	0,93

Ciężar pomostu mostów drogowych.

Część pomostu	Ciężar pomostu							
	kładki		mostu drogowego dla wozów					
			lekkich (3 kl.)		ciężkich (2 kl.)		b. ciężkich (1 kl.)	
	kg	puł	kg	puł	kg	puł	kg	puł
m ²	sqż. kw.	m ²	sqż. kw.	m ²	sqż. kw.	m ²	sqż. kw.	
I. Pokrycie pomostu.								
Dylina	80	22	130	36	160	44	190	53
Bruk drewniany na żwirze	—	—	240	67	250	69	260	72
Beton i asfalt	150	42	300	83	340	94	380	106
Bruk drewniany na betonie	—	—	340	94	350	97	360	100
Żwirówka	150	42	340	94	380	106	420	117
Bruk kamienny	350	97	600	167	640	178	680	189
II. Pomost właściwy.								
Kształtówki	30	8,3	40	11	60	17	80	22
Dylina	60	17	100	28	130	36	160	44
Płyty z żelaza lanego	80	22	120	33	150	42	180	50
Sklepienia ceglane	—	—	500	139	600	167	700	195
Płyty kamienne	180	50	250	69	300	83	350	97
Pomost z kształtówek wraz z pokryciem przeciętnie	180	50	340	94	380	106	420	117

Poręcze z obu stron 150 kg na m b. mostu = 2,8 puł na st b. mostu.

§. 3. Ciężar ruchomy mostów drogowych.

Największe obciążenie mostów drogowych jest tłum ludzi lub wozów. W Austrii, Anglii i Niemczech przyjmowano dawniej obciążenie tłumem ludzi (n. *Menschengedränge*, a. *crowd of people*) na 1 sążeń kw. 25 do 30 centnarów, czyli 390 do 467 kg/m^2 , w Bawaryi 360 kg/m^2 . W Ameryce przyjmują od 366 do 488 kg/m^2 , dla większych mostów mniej, mianowicie w miastach od 488 do 244 kg/m^2 , na wsi 342 do 222 kg/m^2 . We Francyi przyjmują zwykle 300 kg/m^2 .

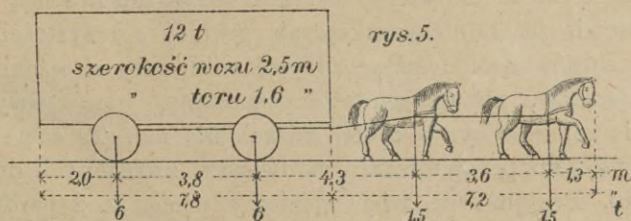
W Austrii należy przyjmować wedle rozp. ministeryalnego z dnia 15/9. 1887. (odnoszącego się jednak tylko do mostów na drogach dojazdowych i przejazdów nad koleją) wedle ważności drogi dla mostów na drodze

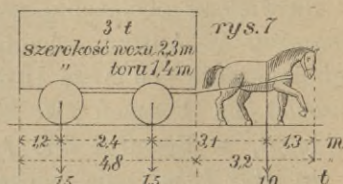
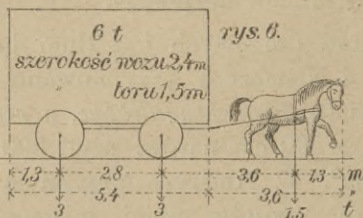
I. klasy (w miastach)	460 kg/m^2	=	128 pud/sąż. kw.	} . . 7)
II. „ (gościńce)	400 „		111 „ „	
III. „ (drogi gminne)	340 „		94 „ „	

Dla mostów dla pieszych przyjąć należy jedną z tych wartości 340 do 460 kg/m^2 wedle tego, czy most ten znajduje się na wsi, w pobliżu zakładów przemysłowych, lub też w większym mieście.

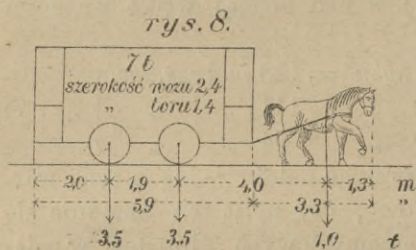
Pojedyncze części mostu mogą być jeszcze więcej obciążone n. p. dyle pomostu, bo na jednym dylu może stać więcej ludzi, zaś na sąsiednich dylach nikt, więc dlatego liczyć będziemy obciążenie dylów pomostu na 1 m b. 160 kg , czyli 3,0 p/st .

Dla obliczenia obciążenia tłumem wozów potrzebne nam są ciężary i wymiary wozów. Według wyżej wspomnianego rozporządzenia austriackiego przyjmować należy dla dróg I. klasy (w większych miastach lub miejscowościach fabrycznych) wóz wedle rys. 5.), dla dróg II. klasy (na gościńcach) wedle rys. 6.), dla dróg III. klasy (gminnych) wedle rys. 7.) W Rosyi nie unormowano ciężarów wozów, polecamy więc wyżej podane cięż-





żary i wymiary wozów wedle rozporządzenia austriackiego. Tylko ciężar pary koni wydaje się nam za wielki, wystarczy przyjąć 1,0 t. Wozy dla kolei konnych drogowych możemy przyjąć wedle rys. 8.)



Jeżeli po umieszczeniu wozów zostanie jeszcze wolne miejsce na moście, to przyjmujemy dla reszty mostu i dla chodników obciążenie tłumem ludzi.

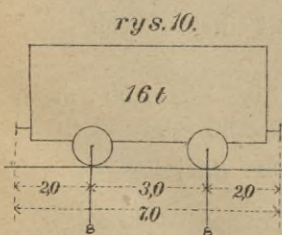
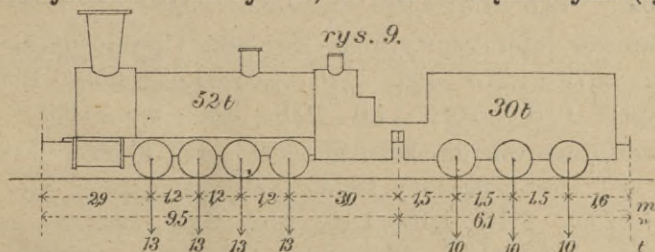
Z tych dwóch rodzajów obciążenia tłumem ludzi lub wozów należy w każdym poszczególnym wypadku i dla każdej poszczególnej części mostu uwzględnić obciążenie niekorzystniejsze.

§. 4. Ciężar ruchomy mostów kolejowych.

Ciężar ruchomy mostów kolejowych składa się z parowozów i wozów kolejowych. Przyjmujemy zatem pociąg, składający się z 2 parowozów z jaszczykami (tendrami) i wozów kolejowych. Często przyjmują trzy parowozy na czele pociągu, a niektórzy chcą nawet przyjmować pociąg, składający się z samych parowozów, jednak to nie jest uzasadnionem, bo wypadki obciążenia mostów w ten sposób są nadzwyczaj rzadkie, a pojedyncze większe nieco natężenia w takim razie nie szkodzą jeszcze materiałowi, jeżeli nie przekraczają granicy sprężystości. A że granica sprężystości leży w przybliżeniu przy natężeniu dwa razy większem, niż natężenie dopuszczalne, więc obawy przekroczenia tej granicy w takich razach nie ma. Te same uwagi stosują się i do przyjmowania parowozów, zwróconych do siebie kominami. Przyjmować więc będziemy pociąg o 2 parowozach

na czele, zwróconych kominami naprzód. Ciężar jednej osi parowozu jest ograniczony, bo wedle norm Tow. niemieckich kolei nie może przenosić dla kolei głównych $14 t$, dla kolei drugorzędnych o normalnej szerokości toru $10 t$, o szerokości toru $1 m$ $7,5 t$, a dla kolei o szerokości toru $0,75 m$ $5 t$. Zresztą jednak parowozy każdej kolei mają inny ciężar, ale z powodu, że parowozy nie przechodzą zwykle na inne koleje, obliczaćbyśmy powinni mosty na podstawie danych dla pewnej kolei parowozów. Lecz w obec zwiększającego się ciągle ruchu, okazuje się potrzeba ciągłego powiększania ciężaru osi parowozów, a zmniejszania ich rozstępu, wskutek tego, gdybyśmy mosty obliczali na podstawie istniejących parowozów danej kolei, przy wprowadzeniu nowych parowozów mosty okazałyby się za słabe. Ażeby temu zapobiec, ustanowiono w Austrii i Rosyi pewne granice dla ciężaru parowozów. Mianowicie przyjęto pociąg urojony t. z. normalny, według którego należy mosty obliczać, a z drugiej strony parowozy, niekorzystniej na mosty działające, nie będą dozwolone.

Pociąg normalny austriacki, którzy jednak wedle wspomnianego rozporządzenia z r. 1887. §. 2. *d* należy brać za podstawę obliczenia tylko przy belkach łukowych, wiszących i systemach niezwykłych*) składa się z trzech parowozów wraz z jazyczkami wedle rys. 9.) i wozów ciężarowych (rys. 10.).



Dla mniejszych rozpiętości (do $10 m$?) przyjmować należy ciśnienie osi $14 t$ zamiast $13 t$, zaś dla bardzo wielkich rozpiętości (wyżej $100 m^2$?) zmniejszyć (do $12 t$?) ze względu na prawdopodobieństwo, że nie wszystkie ciężary osi i rozstępy będą najniekorzystniejsze.

*) Dla belek prostych należy wedle rozporządzenia liczyć na podstawie ciężaru jednostajnie rozłożonego, o czem później będziemy mówić.

Poniżej podajemy schematy obciążeń pociągiem normalnym rosyjskim i kilku parowozami :

a) Pociąg normalny rosyjski:

α) w pudach i stopach:

Odstępy osi: $12\frac{2}{3}$ $12\frac{2}{3}$ $12\frac{2}{3}$ $12\frac{2}{3}$ $5\frac{1}{2}$ $5\frac{1}{2}$ $14\frac{1}{2}$ $4\frac{1}{3}$ $4\frac{1}{3}$ $4\frac{1}{3}$ 18,
 ciężar osi: 500 500 500 500 651 651 651 763 763 763 763
 $4\frac{1}{3}$ $4\frac{1}{3}$ $4\frac{1}{3}$ $14\frac{1}{2}$ $5\frac{1}{2}$ $5\frac{1}{2}$ 15 $4\frac{1}{3}$ $4\frac{1}{3}$ $4\frac{1}{3}$ $14\frac{1}{2}$
 763 763 763 763 651 651 651 763 763 763 763
 $5\frac{1}{2}$ $5\frac{1}{2}$ $12\frac{1}{3}$ 12 $12\frac{2}{3}$ stóp
 651 651 651 500 500 pudów.

β) w tonach i metrach:

Odstępy osi: 3,85 3,66 3,85 3,66 3,75 1,68 1,68 4,42 1,32 1,32
 ciężar osi: 8,2 8,2 8,2 8,2 10,7 10,7 10,7 12,5 12,5 12,5
 1,32 5,48 1,32 1,32 1,32 4,42 1,68 1,68 4,67 1,32 1,32
 12,5 12,5 12,5 12,5 12,5 10,7 10,7 10,7 12,5 12,5 12,5
 1,32, 4,42 1,68 1,68 3,75 3,66 3,85 m
 12,5 10,7 10,7 10,7 8,2 8,2 t.

b) Normalny parowóz ciężarowy państwowych kolei pruskich:

Odstępy: 2,8 2,0 1,4 2,6 | 1,5 1,8 1,5, 1,6 m
 ciężary osi: 12,6 12,5 13,6 9,9 8,6 9,1 t.

c) Parowóz ciężarowy trzyosiowy kolei Lwowsko Czerniowieckiej:

Odstępy: 2,61, 1,58 1,58 4,0 1,58 1,58 1,815 m
 ciężary osi: 12,5 13,1 12,4 9,8 9,8 9,9 t.

d) Parowóz czteroosiowy kolei Lwowsko Czerniowieckiej:

Odstępy: 2,73 1,275 1,26 1,26 4,35 1,63 1,53, 1,69 m
 ciężary osi: 10,8 10,8 11,6 10,8 9,8 9,8 9,9 t.

e) Parowóz Engertha dla kolei górskich, przy którym jaszczyk

jest połączony stale z parowozem:

Odstępy: 2,53, 1,16 1,16 1,16 2,52 2,22 m
 ciężary osi: 13,7 12,6 12,9 8,1 8,7 t.

f) Normalny austriacki parowóz kolei miejscowych
 i dojazdowych:

Odstępy: 2,65 1,2 1,2 2,65 | 1,55, 1,5 1,5 1,55 m
 ciężary osi: 12 12 12 8,33 8,33 8,33 t.

g) Normalny parowóz jaszczkowy kolei miejscowych
 i dojazdowych:

Odstępy: 2,5 1,1 1,1 2,5 m
 ciężary osi: 8,5 8,5 8,5 t.

h) Parowóz dla kolei wąskotorowej o szerokości toru = 0,75m:
 Odstęp: 1,8 0,9 0,9 2,35 m
 ciężary osi: 8 8 8 t.

i) Wóz ciężarowy takiej kolei:
 Odstęp: 2,05 2,5 2,05 m
 ciężary osi: 4 4 t.

Zamiast rzeczywistych ciężarów przyjmują często zastępczy ciężar urojony, jednostajnie rozłożony, wywołujący te same siły zewnętrzne t. j. momenty i siły poprzeczne.

Rozporządzenie ministerjalne austriackie z 15/9 1887. zawiera następujące postanowienia co do ciężaru zastępczego przy obliczaniu momentów dla mostów żelaznych i drewnianych:

„Obciążenie, służące za podstawę obliczenia pasów, pokrywające całe prześło, wyznacza się przy konstrukcyach zwykłych wolno leżących (przy belkach w dwu punktach podpartych) na każdy tor na metr bieżący równo rozdzielone według rozpiętości, mierzonej od środka do środka łożyska w następujący sposób:

Skala a.

Rozpiętości teoretyczne w m	Ciężar ruchomy w t	Rozpiętości teoretyczne w m	Ciężar ruchomy w t	Rozpiętości teoretyczne w m	Ciężar ruchomy w t
1,0	30	5	11,5	40	5,6
1,5	20	10	8,5	80	4,4
2,0	15	15	7,0	120	3,8
2,5	13,5	20	6,5	160	3,4

Dla rozpiętości pośrednich należy wstawiać wedle prawa linii prostej.

W celu obliczenia poprzecznic pośredniej należy przyjąć jako ciężar ruchomy połowę całkowitego według skali a wynikającego obciążenia mostu, którego rozpiętością jest odległość od najbliższej lewej do najbliższej prawej poprzecznic.

Końcowe poprzecznic należy wedle ich ustroju w każdym wypadku obliczać, przyczem należy w myśl poprzedniej reguły przyjmować zamiast brakującej sąsiedniej poprzecznic odpowiednio odległą teoretyczną podporę toru.

Podłużnic należy obliczać jak belki główne, oparte na poprzecznicach. Podobne rozporządzenie rosyjskie podamy poniżej (§. 23). We Francyi należy przyjmować według rozporządzenia z r. 1877.:

dla $l = 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 10 \ 15 \ 20 \ 30 \ 40 \ 60 \ 100 \ 150 \ m$
 $n \ p = 12 \ 10,5 \ 10,2 \ 9,8 \ 7,3 \ 5,7 \ 4,9 \ 4,3 \ 4,1 \ 3,7 \ 3,2 \ 3,0 \ t/m.$

§. 5. Obciążenie śniegiem.

Dalszym ciężarem działającym na mosty jest śnieg. Ciężar warstwy śniegu 80 cm wysokiej na m^2 pomostu wynosi około

100 kg. Rozporządzenie ministeryalne bawarskie każe też uwzględnić obciążenie śniegiem, wynoszące 100 kg/m^2 ; ale ponieważ śnieg zmiata się z mostów, więc się go zwykle nie uwzględnia w obliczeniu zwłaszcza, że jeżeli śnieg jest na moście, to ruch jest po części zatamowany. Nie możemy więc przypuścić równoczesnego obciążenia śniegiem i wielkim ciężarem ruchomym.

§. 6. Ciśnienie poziome, powstające wskutek chwiania się parowozów i wozów.

Ciśnienie poziome, powstające wskutek chwiania się parowozów i wozów, jest tem większe, im większy ciężar i chyżość pociągu. Z doświadczeń Webera przekonano się, że mogą dojść te siły do $\frac{2}{3}$ ciężaru pionowego. Jednak ciśnienia te po części się znoszą, gdyż jedne koła działają na jeden tok szyn, a drugie równocześnie na drugi w przeciwnym kierunku. Przy obliczeniu mostów kolejowych przyjmujemy siłą poziomą, równą 0,08 ciśnienia pionowego u każdego koła parowozu, dla większych rozpiętości zaś (od 10 m) jedną siłę = 0,08 części ciężaru parowozu, więc dla kolei głównych $3,6 \text{ t} = 220 \text{ pud}$, działającą u pierwszej osi parowozu.

Dla mostów drogowych i kładek możemy przyjąć jako siłę poziomą $100 \text{ kg/m}^2 = 28 \text{ p/sq. kw.}$ Ponieważ jednak podczas wielkiego wiatru ruch na mostach drogowych jest mniejszy i powolniejszy, a przy wielkim wicherze ustaje, więc zwykle, uwzględniając parcie wiatru wedle następnego paragrafu, nie uwzględniamy już wstrząśnień poziomych, powstałych wskutek ciężaru ruchomego.

§. 7. Parcie wiatru.

Parcie wiatru w na płaszczyznę prostopadłą do kierunku wiatru wynosi *) $w = 0,112v^2$, przyczem chyżość v przyjmujemy w metrach na sekundę, a w w kg/m^2 . Dla miar rosyjskich jest $w = 0,000064 \text{ pud/st kw.}$ Otrzymamy więc:

D l a	Chyżość wiatru v		parcie wiatru w	
	m	st	kg/m^2	p/st^2
silnej burzy	30	98	110	0,624
wichru	40	131	195	1,10
najsilniejszego wichru w Europie	50	164	305	1,72

*) p. Statyka Budowli str. 191.

W Ameryce spostrzegano nawet parcie 500 kg/m^2 , w Australii 570 kg/m^2 , w Anglii w r. 1884. parcie większe, niż 560 kg/m^2 , lecz parcie to było tylko na małej przestrzeni tak wielkie, obok zaś było mniejsze tak, że, na większą płaszczyznę licząc, możemy je przyjąć średnio znacznie mniejsze. Doświadczenia Bakera wykazały, że dla płyty o płaszczyźnie 28 m^2 było parcie równe tylko $\frac{2}{3}$ parcia na małą płaszczyznę ($< 1 \text{ m}^2$).

Przy obliczeniu mostów musimy zważać na tę okoliczność, że gdy parcie wiatru wynosi 170 kg/m^2 , to wozy osobowe próżne mogą się wywrócić, a zresztą z powodu wielkiego tarcia między szynami a kołami ruch pociągów staje się niemożliwym. W rzeczy samej zastanawia się ruch pociągów podczas silnych wichrów, dlatego przyjmujemy parcie wiatru dla mostu obciążonego $w = 0,170 \text{ t/m}^2$ ($4,72 \text{ p/sq.}^2$) dla kolei o torze normalnym. Wozy kolei wąskotorowych są więcej wywrotne, dlatego przyjmujemy dla obciążonego mostu kolei wąskotorowych $w = 0,125 \text{ t/m}^2$ ($35,7 \text{ p/sq.}^2$), a dla mostów drogowych i kładek $w = 0,100 \text{ t/m}^2$ ($27,8 \text{ p/sq.}^2$).

Nieobciążony most musimy obliczać na największe parcie wiatru, które w naszych stronach możemy przyjąć $w = 0,27 \text{ t/m}^2 = 65 \text{ p/sq.}^2$. W okolicach mniej wystawionych na działanie wiatru, zasłoniętych górami, w dolinach prostopadle do ich długości możemy przyjąć mniejsze parcia.

Dla mostu obciążonego jest wprawdzie parcie na m^2 mniejsze, ale powierzchnia, wystawiona na parcie, większa. W każdym więc szczególnym wypadku wyznaczamy parcie wiatru dla mostu obciążonego i nieobciążonego i obliczamy siły zewnętrzne na podstawie większego parcia. Przytem przyjąć możemy jako wysokość wozów drogowych $2,5 \text{ m}$, kolejowych $3,0 \text{ m}$, a tłumy ludzi $2,0 \text{ m}$. Jeżeli liczymy parcie wiatru dla belki o ściance pełnej, to powierzchnia, wystawiona na parcie jest hl , jeżeli h oznacza wysokość, a l długość belki. Dla belek kratowych musimy dokładnie wyznaczyć powierzchnię pasów i kraty, w przybliżeniu wynosi ona $\frac{1}{3} A$, jeżeli A oznacza pełną powierzchnię belki. Wiatr, przechodząc jednak przez kratę, uderza jeszcze o drugą belkę z mniejszą już siłą, która zależy od gęstości kraty pierwszej i od oddalenia obu belek. Pierwszą okoliczność uwzględnia rozporządzenie austriackie, zmniejszając powierzchnię belki kratowej tem bardziej, im gęstsza jest krata (p. tabliczka

poniżej). Co do drugiej okoliczności okazały doświadczenia Bakera, że parcie na drugą belkę jest tem większe, im dalej ona leży od belki pierwszej. Dla braku dokładniejszych doświadczeń nie możemy jeszcze uwzględniać tej okoliczności.

Oдноśne ustępy rozporządzenia austriackiego minist. handlu z r. 1887. brzmią:

Działanie wiatru należy wyznaczyć, przyjąwszy parcie boczne 270 kg/m^2 na most nieobciążony i 170 kg/m^2 na most obciążony pociągiem, względnie wziąć w rachubę niekorzystniejsze z tych dwu działań, a to, jak następuje:

1. Przy nieobciążonym moście należy wziąć w rachubę jedną ze ścian niosących z powierzchnią, rzeczywiście na działanie wiatru wystawioną, drugą zaś z powierzchnią, w ten sam sposób zmierzyć się mającą, lecz zmniejszoną według poniżej podanej skali.

2. Przy moście obciążonym należy uważać pociąg jako $2,5 \text{ m}$ wysoki, $0,5 \text{ m}$ nad szynami znajdujący się, postępujący pełny prostokąt. Jako płaszczyznę, wystawioną na działanie wiatru, należy wziąć w rachunek powierzchnię pociągu i części jednej ściany, wystającej poza zarys pociągu, jakoteż i zmniejszoną wedle skali powierzchnię tych części drugiej ściany.

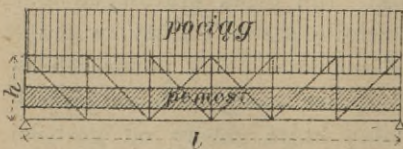
Skala dla zmniejszenia wystawionej na parcie wiatru powierzchni drugiej ściany niosącej.

Stosunek wolnych powierzchni dla kraty do całkowitej powierzchni zarysu w pierwszej ścianie niosącej μ	Spółczynnik sprawdzania dla wystawionej powierzchni drugiej ściany niosącej ν
przy 0,40	0,2
„ 0,60	0,4
„ 0,80	1,0

Dla wartości pośrednich należy wstawiać wedle prawa linii prostej. *)

*) Wyznaczenie powierzchni, na którą działa wiatr, nie jest zupełnie jasnym wedle rozporządzenia. Zdaje nam się, że powinno się ją obliczać w następujący sposób.

rys. 11.



Nazwijmy powierzchnię pasów i kraty belki pierwszej A_1 , powierzchnię pomostu P (rys. 11), części kraty, zakrytych przez pomost Z , to powierzchnia pierwszej belki i pomostu jest $A_1 + P - Z$. Przy wyznaczeniu współczynnika gęstości kraty

μ nie uwzględniamy powierzchni pomostu, bo ona przedstawia płaszczyznę pełną. Mamy więc:
$$\mu = \frac{(hl - P) - (A_1 - Z)}{hl - P} \dots \dots \dots 8)$$

Mosty drogowe. Wpływ parcia wiatru ma się uwzględnić w sposób, przepisany w §. 3. lit. *f* (powyższy ustęp o mostach kolejowych), przyczem uważać należy wypadkowe nagromadzenie ludzi lub wozów jako postępujący pełny prostokąt o 2 *m* wysokości.

Okólnik rosyjskiego techniczno-inspektorskiego komitetu kolei żelaznych z 5. stycznia 1884. — III. Siły wewnętrzne, zależne od parcia wiatru na boczną powierzchnię mostu należy obliczać w dwóch przypuszczeniach, wybierając niepomyślniejsze:

a) bez pociągu na moście, przyjmując parcie wiatru $1\frac{1}{3}$ *puda* na *st*² bocznej powierzchni,

b) z pociągiem na moście, parcie wiatru przyjmując $\frac{3}{4}$ ^{*} *puda* na *st*² powierzchni.

Uwaga 1. W pierwszym wypadku za boczną powierzchnię, wystawioną na działanie wiatru, należy przyjmować oprócz rzeczywistej bocznej powierzchni jednej belki jeszcze część powierzchni drugiej belki, ponieważ przy pochyłym kierunku wiatru obie belki nie będą się nakrywały. Wystawioną na działanie wiatru powierzchnię dwóch belek o tej samej rozpiętości można przyjąć w przybliżeniu dla belek o kracie przedziałowej równą 0,60 ogólnej powierzchni, ograniczonej przez pasy belki, a dla belek o kracie równobocznej równą 0,50 tej powierzchni, przyjmując przytem, iż pomost znajduje się między pasami. Parcie wiatru na boczną powierzchnię belki rozdziela się w takim razie równo między górnymi i dolnymi tęcznikami poziomymi. Jeżeli zaś pomost znajduje się nie między pasami belek, lecz nad pasami, to należy jeszcze przyjąć w rachubę parcie wiatru na zupełną boczną powierzchnię pomostu, odnosząc

Wyszukawszy z powyższej tabliczki odpowiedni współczynnik parcia na drugą belkę *v*, otrzymamy powierzchnię drugiej belki $(A_1 - Z)v$, zatem powierzchnię, wystawioną na parcie wiatru, obu belek i pomostu:

$$A = A_1 + P - Z + (A_1 - Z)v = (A_1 - Z)(1 + v) + P \quad . . \quad 9)$$

Dla mostu nieobciążonego otrzymamy parcie wiatru na *m* *b*:

$$g_w = \frac{270}{l} \left\{ (A_1 - Z)(1 + v) + P \right\} \quad . . \quad kg/m \quad . . . \quad 10)$$

Jeżeli most jest obciążony, to parcie na pociąg uważamy jako ciężar ruchomy *p_w*, gdy parcie na most jako ciężar stały *g'_w*. Otrzymamy wtedy, nazwawszy powierzchnię pociągu *C*, a powierzchnię belki pierwszej, zakrytej przez pociąg, *B*,

$$g'_w = \frac{170}{l} \left\{ (A_1 - Z)(1 + v) + P \right\} \quad . . \quad kg/m \quad . . . \quad 11)$$

$$p_w = \frac{170}{l} \left\{ C - B(1 + v) \right\} \quad \quad " \quad . . . \quad 12)$$

Przykład. Dla mostu systemu Schiffkorna o rozpiętości *l* = 16,09 *m* jest powierzchnia pasów = 3,1 *m*² a kraty = 5,1 *m*², więc *A*₁ = 8,2 *m*². Dalej mamy *P* = 6,1 *m*², *Z* = 2,4 *m*². Wysokość belki *h* = 1,26 *m*, więc *hl* = 20,27 *m*², a stąd wedle rów. 8.) $\mu = \frac{(20,27 - 6,1) - (8,2 - 2,4)}{20,27 - 6,1} = 0,59$, któremu to współczynnikowi odpowiada wedle tabliczki, podanej w rozporządzeniu, *v* = 0,39.

owe dodatkowe parcie w zupełności do górnych lub dolnych tężników stosownie do umieszczenia pomostu.

Uwaga 2. W drugim wypadku, gdy pociąg znajduje się na moście, zupełna powierzchnia boczna, poddana działaniu wiatru, otrzymuje się przez dodanie do wyżej obliczonej: a) 10 st^2 na każdą stopę bieżącą w mostach z jazdą w górze, odnosząc przytem po $\frac{3}{5}$ parcia wiatru na górne i na dolne tężniki poziome, b) w mostach z jazdą na dole od 10 do $7,5 \text{ st}^2$ na stopę bieżącą stosownie do wysokości belek, zmieniającej się od $0,5 \text{ sqż.}$ do 3 sqż. i więcej, przyczem całe parcie na ową dodatkową powierzchnię należy odnieść do tężników dolnych.

Wartości dodatkowe 10 i $7,5 \text{ st}^2$ otrzymane zostały przez odjęcie od ogólnej bocznej powierzchni pociągu odstępów pomiędzy sąsiednimi wozami, tudzież pomiędzy główką szyny i podłogą wozu, przyczem pierwsza liczba stosuje się do wypadku, gdy powierzchnia pociągu nie jest przykryta belką, druga, gdy cały pociąg jest zasłonięty belką, co się zdarza w mostach z jazdą na dole przy wysokości belki większej, niż 3 sążnie.

§. 8. Siła odśrodkowa.

Jeżeli kolej jest w łuku, to podczas przejazdu pociągu powstaje siła odśrodkowa, działająca poziomo na szyny, która przenosi się za pośrednictwem szyn na most i jest zależną od chyżości i ciężaru pociągu i promienia łuku. Jeżeli p oznacza ciężar ruchomy na 1 m , c chyżość pociągu w m/sek , r promień łuku a $g = 9,81 \text{ m}$ przyspieszenie ciężkości, to wiemy z fizyki,

że siła odśrodkowa
$$z = \frac{pc^2}{gr} \dots \dots \dots 13)$$

Ponieważ w tym wzorze c jest w drugiej potędze, więc chcąc otrzymać *najw* z , musimy zastosować ten wzór dla po-

Mamy zatem dla mostu nieobciążonego:

$$g_w = \frac{270}{16,09} \left\{ (8,2 - 2,4) (1 + 0,39) + 6,1 \right\} = 239 \text{ kg/m.}$$

W tym wypadku tężniki znajdują się tylko u pasu dolnego, więc siła g_w działa cała na pas dolny, w przeciwnym razie trzeba ją rozdzielić na pas dolny i górny.

Dla mostu obciążonego mamy powierzchnię pociągu:

$C = 16,09 \cdot 2,5 = 40,22 \text{ m}^2$, a zakryta przez pociąg powierzchnia belki $B = 1,8 \text{ m}^2$. Otrzymamy więc według rów. 11.) i 12.):

$$g'_w = \frac{170}{16,09} \left\{ (8,2 - 2,4) (1 + 0,39) + 6,1 \right\} = 150 \text{ kg/m}$$

$$p'_w = \frac{170}{16,09} \left\{ 40,22 - 1,8 (1 + 0,39) \right\} = 398 \text{ kg/m}$$

Widzimy więc, że dla mostu obciążonego w tym wypadku parcie wiatru jest większe, to też parcie służy tu za podstawę obliczenia tężników.

ciągów pospiesznych, dla których jednak p jest mniejsze, niż dla towarowych, a mianowicie możemy przyjąć w przybliżeniu $p = \frac{3}{4} p_1$, ciężaru na jednostkę długości pociągów towarowych. (§. 4). Wstawmy w rów. 13) dla pociągów pospiesznych:

$$v = 18 \text{ m/sek}, g = 9,81 \text{ m},$$

to otrzymamy:
$$z = \frac{33}{r} p = \frac{25}{r} p_1 \text{ t/m} \dots \dots \dots 14)$$

II. Natężenie dopuszczalne.

§. 9. Natężenie dopuszczalne dla mostów żelaznych i stalowych.

W §§. 19. i 20. Podręcznika Statyki budowli podaliśmy wzory dla obliczenia wymiarów na podstawie doświadczeń Wöhlera. Przy obliczaniu mostów wzorów tych tem bardziej używać należy, że tu zmiany natężeń są z powodu ciężaru ruchomego większe, niż dla innych zeskładów. Tu musimy też uwzględnić wstrząśnienia, a że dokładne obliczenie ich wpływu i wielkości nie jest możliwem, więc uwzględniamy je, przyjmując wedle wielkości wstrząśnień mniejsze natężenie dopuszczalne; inny współczynnik wstrząśnień przyjmujemy więc dla mostów kolejowych, inny dla drogowych, a inny dla kładek.

Licząc sposobem Winklera używamy następných wzorów*), przyczem A oznacza przekrój, P_0 siłę wewnętrzną z powodu ciężaru własnego, P_1 z powodu ciężaru ruchomego, a P_2 takąż siłę o odwrotnym znaku.

Dla mostów kolejowych żelaznych, jeżeli przeważa ciągnięcie:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{590} + \frac{P_2}{1300} \dots \dots \text{ kg/cm}^2 \\ \text{jeżeli przeważa ciśnienie,} \\ A &= \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{550} + \frac{P_2}{1380} \dots \dots \text{ " } \end{aligned} \right\} \dots 15)$$

Dla mostów drogowych żelaznych:
dla przeważającego ciągnięcia:

$$A = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{640} + \frac{P_2}{1400} \dots \dots \text{ kg/cm}^2 \dots 16a)$$

*) p. Podr. Statyki Budowli str. 42. i nast.

dla przeważającego ciśnienia:

$$A = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{600} + \frac{P_2}{1500} \dots \text{kg/cm}^2 \dots 16b)$$

Dla kładek żelaznych:

dla przeważającego ciągnięcia:

$$A = \frac{P_0}{1400} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{1550} \dots \text{kg/cm}^2 \left. \vphantom{A} \right\}$$

dla przeważającego ciśnienia:

$$A = \frac{P_0}{1200} + \frac{P_1}{650} + \frac{P^2}{1640} \dots \text{ " } \left. \vphantom{A} \right\} \dots 17)$$

Licząc wedle wzorów Weyrauch'a mamy:

dla żelaza natężenie dopuszczalne $\tau = 700 (1 \pm \zeta) \text{ kg/cm}^2 \dots 18)$

" stali " " " $\tau = 1100 (1 \pm \frac{9}{11} \zeta) \text{ " } \dots 19)$

a dla zmiennych natężeń $\tau = 1100 (1 - \frac{5}{11} \zeta') \text{ " } \dots 20)$

przyczem $\zeta = \frac{\text{najmn. } P}{\text{najw. } P} = \frac{P_0}{P_0 + \alpha P_1}$, a współczynnik wstrząśnień

α jest dla mostów kolei głównych 1,3, kolei drugorzędnych 1,25, dla drogowych 1,2, dla kładek 1,1. Jeżeli *najw* P i *najmn* P mają przeciwne znaki, wtedy używamy dla żelaza rów. 18) ze znakiem dolnym, dla stali rów. 20.).

Na podstawie najnowszych doświadczeń Bauschinger'a ustawił Tetmajer następujące wzory.

Dla żelaza spawalnego (Schweisseisen):

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 600 \pm 350\zeta + 80 \zeta^2 \text{ kg/m}^2 \\ \tau &= 236 \pm 138\zeta + 31,5\zeta^2 \text{ pud/cal}^2 \end{aligned} \right\} \dots 21)$$

Dla żelaza zlewego (Flusseisen):

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 700 \pm 430\zeta + 100\zeta^2 \text{ kg/m}^2 \\ \tau &= 276 \pm 169\zeta + 39\zeta^2 \text{ pud/cal}^2 \end{aligned} \right\} \dots 22)$$

Dla stali zlewnej (Flusstahl):

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 830 \pm 640\zeta + 250\zeta^2 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau &= 327 \pm 252\zeta + 98\zeta^2 \text{ pud/cal}^2 \end{aligned} \right\} \dots 23)$$

W tych częściach mostu, które obliczamy z uwzględnieniem parcia wiatru, możemy przyjąć większe natężenie dopuszczalne ze względu na tę okoliczność, że tak wielkie parcia wiatru, jakie w obliczeniu przypuszczamy, trafiają się bardzo rzadko. Możemy więc przyjąć:

*) Dla miar rosyjskich mamy dla żelaza $\tau = 276 (1 \pm \frac{1}{2} \zeta) \text{ pud/cal}^2$

" stali $\tau = 433 (1 + \frac{9}{11} \zeta) \text{ "}$

$\tau = 433 (1 - \frac{5}{11} \zeta') \text{ "}$

	natężenie dopuszczalne τ	
	kg/cm^2	$pu\ddot{d}/cal^2$
dla żelaza spawalnego	1000	394
„ „ zlewne	1150	453
„ stali zlewnej	1400	555

Zwrócić tu musimy uwagę, że natężenie dopuszczalne należy przyjmować większe lub mniejsze, wedle tego, czy sposób obliczenia jest więcej, czy mniej ścisły. Polecamy dlatego przy obliczeniu przybliżonem belek statycznie niewyznaczalnych przyjmować natężenie dopuszczalne mniejsze, a mianowicie dla belek kratowych równoległych o kracie wielokrotnej zmniejszyć natężenie dopuszczalne o 5%, a dla takichże belek wielobocznych o 10%.

Poniżej podajemy wyciągi z rozporządzeń austriackich i rosyjskich, w których po części uwzględniono zmienność natężenia dopuszczalnego.

Rozporządzenie austr. min. z r. 1887. Mosty kolejowe. §. 4. Praca materiału. Przy uwzględnieniu obciążeń i wpływów, określonych w §. 3. ust. *a, b, c, d, e, g, h*, jakoteż i ciężaru własnego konstrukcji nie powinno przekraczać obliczone największe natężenie materiału na cm^2 użytecznej powierzchni przekroju (t. j. po odciągnięciu dziur na nity, jako też części nie współdziałających przekroju pełnego) następujących granic:

a) Przy żelazie spawalnem (kutem) na ciągnięcie, ciśnienie i ścinanie:

1. dla rozpiętości niżej 40,0 m 700 kg wraz z dodatkiem 2 kg za każdy metr rozpiętości;

2. dla rozpiętości od 40,0 m wyżej, a to:

dla 40,0 m	780 kg
„ 80,0 „	840 „
„ 120,0 „	880 „
„ 160,0 „ i wyżej	900 „

przyczem dla pośrednich rozpiętości należy wstawiać wedle prawa linii prostej, a dla poprzecznic i podłużnic brać tę wartość, która odpowiada ich rozpiętości;

3. dla obliczenia nitów na ścinanie w jednym tylko kierunku 600 kg/cm^2 , względnie w kilku kierunkach 500 kg/cm^2 , przyczem należy na to zważać, że rzut ścianki dziury nitu nie powinien pracować więcej nad 1400 kg/cm^2 ;

4. dla obliczenia oporu przeciw ścinaniu w kierunku walcowania 500 kg/cm^2 ;

5. żelazo spawalne musi mieć przy wytrzymałości 3600 kg/cm^2 na złamanie i wyższej przynajmniej 12 procent przedłużenia.

Przy mniejszej wytrzymałości na złamanie musi być stosunkowo większe przedłużenie, które ma wynosić przy najniższej jeszcze dozwolonej wytrzymałości na złamanie 3300 kg/cm^2 najmniej 20%.

Przedłużenie należy mierzyć na pręcie próbnym o przekroju 5 cm^2 przy oddaleniu znaczków 20 cm. Jeżeli nie można unikać użycia pręta próbnego

o innym przekroju, niż powyższy, to należy ze względu na pręt normalny w ten sposób wyznaczyć odległość znaczków, aby kwadraty odstępów miały się, jak powierzchnie przekroi.

b) Przy żelazie lanem, który to materiał nie powinien tworzyć żadnych głównych części składowych konstrukcji niosącej, ustanawia się powyżej wzmiankowane granice: 700 kg/cm^2 na ciśnienie, 200 kg/cm^2 na zwykle ciągnięcie, a 300 kg/cm^2 na ciągnięcie przy zginaniu.

c) Dla drzewa 80 kg/cm^2 na zwykle ciągnięcie w kierunku włókien:

d) Przy wszystkich częściach ustroju, pracujących na ciśnienie, należy zważać na potrzebny opór przeciw wyboczeniu.

e) Największe natężenie, które wynika z działania wiatru, określonego w §. 3. ust. f, wraz z natężeniami poprzednio omawianymi według części konstrukcji, o którą chodzi, nie powinno przekraczać następującej granicy:

do §. 4. ust. a punkt 1. i 2.	1 000 kg/cm^2
" " " a " 3.	700 "
" " " a " 4.	600 "
" " " c "	90 "

Mosty drogowe. §. 16. Natężenie. Gdy przyjmujemy za podstawę omówione w §. 15. lit. a, b i d. obciążenia i wpływy, jakoteż własny ciężar konstrukcji, nie może przekraczać rachunkiem wyznaczone największe natężenie materiału na cm^2 użytecznego przekroju (t. j. po odciągnięciu dziur na nity, jakoteż nie współdziałających części pełnego przekroju następujących granic:

a) dla żelaza spawalnego (kutego) jako §. 4. lit. a 1. 5. przepisano: 750 kg/cm^2 wraz z dodatkiem 2 kg/cm^2 na każdy metr rozpiętości teoretycznej, a najwyżej razem 900 kg/cm^2 ; przyczem poprzecznicę, podłużnicę i składniki pośrednie obliczać należy podług ich rozpiętości.

b) Dla żelaza lanego obowiązują pod względem dopuszczalnego natężenia granice, ustanowione w §. 4. lit. b.

c) W końcu mają być zastosowane także dla mostów drogowych postanowienia w §. 4. lit. a 1. 3. i 4. lit. c, d i e (względnie §. 6. lit. b), odnoszące się do mostów kolejowych.

Rozporządzenia rosyjskie. Tablica współczynników wytrzymałości kutego żelaza przy projektach mostów ministerstwa komunikacyj. Nr. 54 z 18/30. czerwca 1875 r.

a) Mosty o rozpiętości do 7 sąż i pokład mostów wszystkich rozpiętości (podłużnicę i poprzecznicę):

Ciągnięcie i ciśnienie (przekr. użyteczny)	6 kg/mm^2
ściananie w nitach	6 "
" " łączących podłużnicę z poprzecznicami	
i te ostatnie z belkami głównymi	5 "
ściananie ścianki pionowej	3,5 "

b) Mosty o rozpiętości od 7 do 15 sąż:

Ciągnięcie (przekrój użyteczny)	7 "
ciśnienie (przekrój całkowity)	7 "

c) Mosty o rozpiętości nad 15 *sqż*:

Ciągnienie (przekrój użyteczny)	7,25	kg/mm ²
ciśnienie (" całkowity) w pasach	7,25	"
" " " w słupach	7,00	"
ściananie w nitach	6	"

d) W poziomych i pionowych tężnikach mostów wyżej

15 *sqż* rozpiętości:

Ciągnienie (przekrój użyteczny)	9	"
ciśnienie (" całkowity)	9	"
ściananie w nitach	7,5	"

Przytem współczynniki na ciśnienie powinny być zmieniane względnie do stosunku długości części ściskanych do najmniejszego przekroju.

Rozporządzenie ministra komunikacyj w kwestyi używania zlewne go żelaza a przy budowie mostów (z 25. sierpnia 1888 l. 9577. dzien. rząd. min.) (wyciąg).

I. Zlewne żelazo można dopuszczać do używania w budowlach z wyjątkiem nitów, które mają być zrobione z żelaza spawalnego.

II. b) Wytrzymałość na ciągnienie ma wynosić 34 do 40 *kg/mm²* a przedłużenie najmniej 25%. Granica sprężystości powinna leżeć przy połowie współczynnika wytrzymałości a najmniej przy 17 *kg/mm²*.

VII. Natężenia dopuszczalne przy projektowaniu wierzchniej budowy mostów z zlewne go żelaza:

a) Mosty o rozpiętości mniej, niż 7 *sqż* (15 *m*), a także poprzecznie i podłużnie mostów wszelkich rozpiętości:

Na ciągnienie i ciśnienie (przekr. użyteczny)	6,5	kg/mm ²
na ściananie w ścianie belek pełnych	3,75	"

b) Mosty od 7 do 15 *sqż* (15 do 32 *m*) rozpiętości, belki główne:

Na ciągnienie i ciśnienie (przekrój użyteczny)	7,25	"
" ściananie w ścianie belek pełnych	4,25	"

c) Mosty o rozpiętości wyżej 15 *sqż* (32 *m*) belki główne:

Na ciągnienie (przekrój użyteczny)	7,75	"
" ciśnienie (półnetto, t. j. po potrąceniu $\frac{1}{4}$ przekroju		
wszystkich otworów na nity) w pasach	7,75	"
" w krzyżulcach	7,5	"
Na ściananie w ścianie belek pełnych	4,75	"

d) W tężnikach poziomych i pionowych mostów aż do 15 *sqż* rozpiętości:

na ciągnienie (przekrój użyteczny)	9	"
" ciśnienie (półnetto)	8	"

e) W tężnikach poziomych i pionowych mostów o większej rozpiętości niż 15 *sqż*:

Na ciągnienie (przekrój użyteczny)	9,5	"
" ciśnienie (półnetto)	8,5	"

Okólnik techniczno inspektorskiego komitetu kolei żelaznych z 5. stycznia 1884 r. N. 60.

IV. Poprzeczne przekroje pasów belek głównych i belek poprzecznych (jeżeli służą jednocześnie jako tężniki poziome) powinny być obliczone na podstawie następujących wzorów:

$$\text{dla pasów } \tau = \frac{P + 0,6 P'}{A} \dots \dots a)$$

$$\text{dla poprzecznic } \tau' = \frac{Me}{J} + \frac{0,5 P''}{A} \dots \dots b),$$

przyczem τ i τ' oznaczają natężenia dopuszczalne dla pasów i poprzecznic, P siłę wewnętrzną, wywołaną w pasie przez obciążenie pionowe, P' " " " " " " " wiatrem, A przekrój pasu, M moment sił zewnętrznych z powodu obciążenia pionowego, P'' siłę wewnętrzną, wywołaną wiatrem, $\frac{J}{e}$ moment oporu przekroju poprzeczniczy, A_1 przekrój poprzeczniczy.

Uwaga. Spółczynniki liczbowe 0,6 i 0,5 w $a)$ i $b)$ są stosunkami $\frac{7,25}{12}$ i $\frac{6}{12}$ t. j. stosunkami natężeń dopuszczalnych w pasie belki głównej i w poprzeczniczy dla obciążenia pionowego i wiatru.

V. Dla części belki poddanych ciśnieniu natężenie dopuszczalne z r. 1875 powinno być zmienione stosunkowo do stosunku długości części ciśnionych do ich przekroju. Podobnie w ciśnionych częściach belki przekroje obliczają się nie całkowite, lecz półnetto, a w ciągnionych częściach przekroje użyteczne (bez dziur na nity).

§. 10. Natężenie dopuszczalne dla mostów drewnianych.

Doświadczenia Wöhlera ograniczały się tylko na żelazo i stal. Drzewa nie badano w ten sposób, jednak analogicznie przypuszczać możemy, że zmiany w natężeniu będą miały podobny wpływ także na wytrzymałość drzewa. Przy mostach drewnianych uwzględniać więc należy także wpływ zmiany natężeń w skutek ciężaru ruchomego.

Nazwijmy P_0 siłę, działająca wskutek ciężaru stałego, a P_1 wskutek ciężaru ruchomego, to ponieważ ciężar ruchomy ma większy wpływ na wytrzymałość od ciężaru stałego, pomnożymy ciężar ruchomy współczynnikiem η , większym od jedności, który przyjmijemy dla kładek $\eta = 1,1$ do $1,2$, dla mostów drogowych $\eta = 1,2$ do $1,3$, dla kolejowych $\eta = 1,3$ do $1,4$, przyczem większe współczynniki odnoszą się do części bezpośrednio obciążonych, zaś mniejsze do części pośrednio obciążonych. Zatem:

$$A = \frac{P_0 + \eta P_1}{\tau_1} \dots \dots 24)$$

Zamiast tego obliczać możemy wymiary według dawnej metody, jeżeli odpowiednio przyjmijemy natężenie dopuszczalne τ_1 , więc:

$$A = \frac{P_0 + P_1}{\tau} = \frac{P_0 + \eta P_1}{\tau_1}, \text{ stąd } \tau = \tau_1 \frac{1 + \frac{P_0}{P_1}}{\eta + \frac{P_0}{P_1}}. \quad . 25)$$

Nateżenie dopuszczalne τ_1 możemy przyjąć według nastę-
pnej tabliczki:

N a	mosty stałe				mosty tymczasowe			
	drzewo				drzewo			
	miękkie		twarde		miękkie		twarde	
	kg/cm ²	puł/cal ²	kg/cm ²	puł/cal ²	kg/cm ²	puł/cal ²	kg/cm ²	puł/cal ²
ciągnięcie	105	43	120	47	120	47	140	55
ciśnienie	70	28	80	32	80	32	95	37
zginanie	90	35	105	43	105	43	120	47

Rozp. austriackie ministryalne nie uwzględnia zmienności nateżeń
p. §. 9.

B. Belka prosta jednoprzęsłowa zwykła.

III. Działanie ciężarów skupionych.

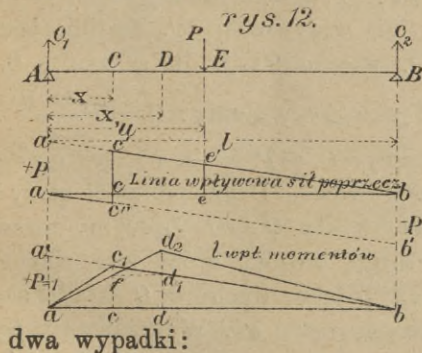
§. II. Linie wpływowe sił poprzecznych.

W Statyce Budowli wyłożyliśmy, jak się wyznacza siły
poprzeczne i momenty dla belki w dwu punktach podpartej *)
dla danego obciążenia. Teraz mamy wyznaczyć momenty i siły
poprzeczne, które sprawia ciężar ruchomy. W tym celu zastano-
wimy się najpierw nad tem, jakie siły poprzeczne w danym

punkcie C (rys. 12), odległym
o x od A , sprawia ciężar P ,
gdy posuwa się od A do B .

Zalóżmy, że na AB działa
siła P w punkcie E w odle-
głości u od lewej podpory A ,
to oddziaływanie $O_1 = P \frac{l-u}{l}$.

W celu wyznaczenia siły po-
przecznej musimy rozróżnić



dwa wypadki:

- a) $l > u > x$, lub: b) $x > u > 0$.

*) p. Podr. Statyki Budowli str. 14. i 17.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dla wypadku } a) \text{ jest } Q = O_1 = P \frac{l-u}{l} \\ \text{zaś dla } b) \text{ } Q = O_1 - P = P \frac{l-u}{l} - P = -P \frac{u}{l} \end{array} \right\} . \quad 26)$$

Gdy ciężar porusza się po belce od A do B , to wraz z u zmienia się Q , bo, jak widzimy, Q jest funkcją u . A że Q jest funkcją pierwszego stopnia zmiennej u , więc siła poprzeczna zmienia się dla zmiennej u według prawa linii prostej.

Wykreślmy w punkcie, w którym siła działa, t. j. w E , rzędną ee' w podziałce sił równą $Q = P \frac{l-u}{l}$, to rzędna ta będzie przedstawiała siłę poprzeczną w C , gdy P działa w E . Gdy zrobimy to samo dla rozmaitych położeń siły P , t. j. gdy wykreślimy w punktach zaczepienia siły P rzędne, równe sile poprzecznej w punkcie C , to końce tych rzędnych będą leżały według poprzedniego na linii prostej bc' .

Linia, która wyraża wpływ zmiany położenia pojedynczego skupionego ciężaru ruchomego na pewną ilość mechaniczną n. p. siłę poprzeczną, moment, oddziaływanie, siłę wewnętrzną, nazywamy linią wpływową (n. *Einflusslinie*, *Influenzlinie*, fr. *ligne d'influence*). W tym wypadku jest tu linia wpływowa bc' prostą, a aby wykreślić tę linią prostą dla wypadku b), dość będzie wyznaczyć dwa jej punkty. Przypuszczamy więc najpierw, że $u=0$, to z rów. 26) otrzymamy: $Q=0$, a odnośny punkt linii wpływowej będzie a . Założmy teraz, że $u=l$, to $Q=-P$, zatem robimy $bb'=-P$, i otrzymujemy b' drugi punkt linii wpływowej ab' . Ta linia jest jednak tylko ważną od a do c'' , więc ac'' t. j. dla $x > u > 0$.

Dla wypadku a) t. j. gdy $l > u > x$, mamy: $Q = P \frac{l-u}{l}$. Podstawiając tu $u=0$, otrzymamy: $Q=P$, robimy więc: $aa' = P$, a a' jest punktem linii wpływowej. Drugi punkt b' otrzymamy, wstawiając w 26) $u=l$, wtedy $Q=0$. Łączymy teraz punkt a' z b i otrzymujemy drugą prostą, która jest ważną od c' do b . Linia wpływowa sił poprzecznych w C składa się więc z dwu równoległych prostych ac'' i $c'b$. Wykreśliwszy tę linią, możemy wyznaczyć siłę poprzeczną w punkcie C dla któregokolwiek położenia siły P , jeżeli tylko wykreślimy rzędną w punkcie zaczepienia siły i odczytamy ją w podziałce sił.

Jeżeli zamiast siły P działa siła P' , to chcąc użyć tej samej linii wpływowej, musimy rzędną y pomnożyć przez $\frac{P'}{P}$, więc: $Q = \frac{P'y}{P}$, a dla $P=1$, będzie: $Q = P'y$.

Jeżeli kilka ciężarów działa na belkę w rozmaitych punktach, to:

$$Q = \frac{P'y'}{P} + \frac{P''y''}{P} + \frac{P'''y'''}{P} + \dots =$$

$$= \frac{1}{P} (P'y' + P''y'' + P'''y''' + \dots) = \frac{1}{P} \Sigma P y . . . 27)$$

a dla $P=1$, to jest, jeśli wykreślając linią wpływową, zrobimy $aa' = bb' = 1$, otrzymamy:

$$Q = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \dots = \Sigma P y . . . 28)$$

Następnie będziemy zawsze przypuszczać, żeśmy wykreślili linią wpływową dla $P=1$, w przeciwnym razie podzielić jeszcze musimy wynik przez P (według rów. 27).

§. 12. Linie wpływowe momentów.

Aby wyznaczyć linią wpływową momentów, przypuśćmy znowu, że siła $P=1$, działa na belkę AB w punkcie E . Wtedy zachodzą te same dwa wypadki: a) $l > u > x$ i b) $x > u > 0$.

Dla wypadku a) jest moment ze względu na punkt C $M = O_1 x$, więc $\frac{M}{x} = O_1$. Nazwijmy $\frac{M}{x} = M'$, to $M' = O_1$, a chcąc otrzymać M , trzeba pomnożyć M' przez x .

Podstawimy za O_1 wartość, to $M' = O_1 = \frac{l-u}{l} . . . 29)$

a dla wypadku b) $M = O_1 x - P(x-u)$: zatem:

$$M' = O_1 - P \left(1 - \frac{u}{x} \right) 30)$$

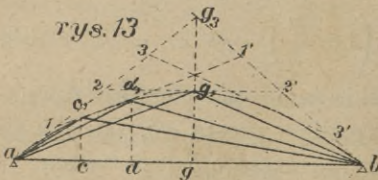
Równanie 29) jest zupełnie takie same, jak pierwsze równanie 26); więc na ten sam sposób kreślimy prostą $a'b$, jak dla sił poprzecznych, z której to prostej tylko część $c_1 b$ jest ważną.

Według równ. 30.) M' składa się z różnicy, której pierwszy wyraz O_1 przedstawia się wykreślnie prostą $a'b$, względnie na długości x prostą $a'c_1$. Od rzędnych tej linii musimy odjąć rzędne linii, wyrażonej równaniem $P \left(1 - \frac{u}{x} \right)$, równaniem także linii prostej. Różnica $M' = O_1 - P \left(1 - \frac{u}{x} \right)$ przedstawia równanie linii prostej, do wyznaczenia której, wystarczają dwa

punkty. Jeżeli w tem równaniu zrobimy $u = 0$, to $F \left(1 - \frac{u}{x}\right) = = P$. Odciągnąwszy więc od rzędnej aa' rzędną $P = aa'$, otrzymamy rzędną linii M' równą zeru, a zatem a jako punkt linii wpływowej. Jeżeli zaś $u = x$, to $F \left(1 - \frac{u}{x}\right) = 0$; w tym punkcie nie mamy więc nic do odciągania, zatem cc_1 jest rzędną linii wpływowej. Ponieważ ta linia jest prostą, więc potrzebujemy tylko połączyć punkt a z c_1 , to ac_1b jest linią wpływową dla momentów w punkcie C .

Dla innego punktu D , oddalonego od punktu A o x_1 , otrzymamy inną linią wpływową, której rzędne trzeba będzie pomnożyć przez x_1 . Abyśmy mogli linie wpływowe dla rozmaitych przekrojów porównywać, musimy je sprowadzić do wspólnej podstawy. Otóż wiemy, że moment w punkcie D , gdy siła $P = 1$ stoi w tymże punkcie, jest $M = dd_1 \cdot x_1 = dd_1 \frac{x_1}{x} x$. Poprowadźmy z punktu d , poziomą $d_1 f$, to $cf = dd_1$, połączmy punkt a z punktem f , aż prosta af przetnie się z pionową dd_2 , a otrzymamy prostą ad_2 . Z rysunku widzimy, że $dd_2 : dd_1 = x_1 : x$, czyli: $dd_2 = dd_1 \frac{x_1}{x}$. Punkt d_2 jest więc punktem linii wpływowej momentów w E dla tej samej podstawy x . Połączmy punkt d_2 z punktem b , a otrzymamy linią wpływową ad_2b dla podstawy x .

Zamiast mnożyć rzędne linii wpływowej przez stałą podstawę x , możemy zmienić odpowiednio podziałkę tak, żeby odrazu odczytywać momenty. W takim razie trzeba jednak, aby wszystkie linie wpływowe były wykreślone ze względu na jedną pod-



stawę. Aby się dowiedzieć na jakiej to linii będą leżały wierzchołki trójkątów wpływowych, założmy, że $u = x$, to otrzymamy z równ. 29.) $M = \frac{P(l-x)}{l}$, a więc $M = \frac{P(l-x)x}{l}$. Widzimy

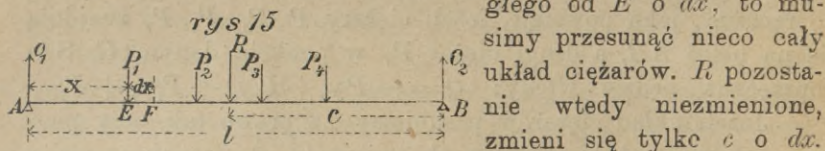
więc, że linia ta jest parabolą (rys. 13).

§. 13. Najniekorzystniejsze obciążenie ze względu na siły poprzeczne.

Wykreśliwszy dla punktu C i siły $P = 1$ linią wpływową sił poprzecznych (rys. 14), widzimy, że każdy ciężar, który stoi

trzebaby więc posunąć na prawo układ ciężarów, a zatem pierwszy ciężar stać będzie w takim razie na przekroju dla *najw* Q . Prawo to możemy wyrazić słowami w następujący sposób: „Drugi ciężar ma stać na przekroju, gdy ciężar jednostkowy na długości e jest mniejszy, niż ciężar jednostkowy na całej belce“. A stać się to może, gdy P jest małe, lub e wielkie, więc gdy mały ciężar idzie naprzód w odległości wielkiej. Przy zwykłych obciążeniach mostów drogowych i kolejowych sprawia *najw*. siły poprzeczne układ ciężarów, gdy pierwszy ciężar stoi na przekroju.

Jeżeli wykreślimy w każdym punkcie belki rzędną, która przedstawia *najw* Q , to rzędne te wyznaczają linię największych sił poprzecznych. Chcąc wyznaczyć kształt tej linii dla danej belki AB (rys. 15), nazwijmy R wypadkową wszystkich sił odległą o c od podpory B , to, jak wiemy, dla przekroju E będzie *najw* $Q = \frac{Rc}{l}$, gdy w punkcie E stoi pierwszy ciężar. Jeżeli *najw* Q w punkcie E jest dla położenia, gdy w punkcie tym stoi drugi ciężar, to *najw* $Q = \frac{Rc}{l} - P_1$. Jeżeli teraz chcemy wyznaczyć *najw* Q dla sąsiedniego przekroju F , odległego od E o dx , to musimy przesunąć nieco cały układ ciężarów. R pozostanie wtedy niezmienną, zmieni się tylko c o dx .



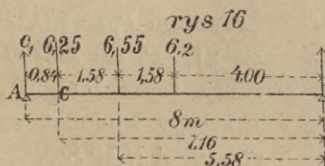
Ponieważ *najw* Q jest funkcją pierwszego stopnia zmiennej e , więc *najw* Q zmieni się według prawa linii prostej. Widzimy więc, że dla przekrojów, dla których te same ciężary znajdują się na belce, *najw* Q możemy przedstawić linią prostą. Chcąc zatem wykreślić największe siły poprzeczne, najlepiej wyznaczyć *najw* Q dla tych przekrojów, dla których przy najniekorzystniejszym obciążeniu jeden ciężar stoi właśnie na podporze, wykreślić odnośne rzędne, równe *najw* Q , w tych punktach i połączyć je liniami prostymi.

Dla *najmn* Q należy zastosować te same zasady z tą różnicą, że obciążać należy lewą stronę belki od danego przekroju.

§. 14. Wyznaczenie największych sił poprzecznych.

1. Liczebnie. Obliczamy dla najniekorzystniejszego położenia układu ciężarów siły poprzeczne według wzorów, znanych ze statyki budowli (Podr. St. Bud. str. 17).

Przykład. Belka o rozpiętości 8 m obciążona jest połową ciężaru parowozu kolei Czerniowieckiej. Chcąc wyznaczyć największe siły poprzeczne, obliczamy je najpierw dla przekroju C (rys. 16)



gdzie jedno koło stoi na podporze B. Tu dla największości stoi pierwsze koło na przekroju. Dla tego położenia:

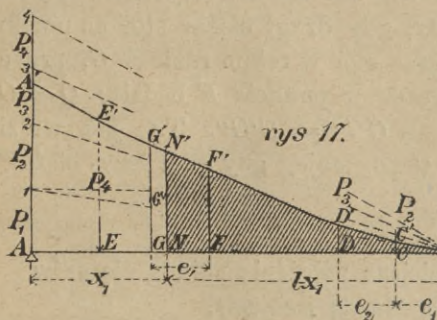
$$O_1 = \frac{1}{8} (6,25 \cdot 7,16 + 6,55 \cdot 5,58 + 6,2 \cdot 4) = \frac{1}{8} 106,09 = 13,26 t, \text{ najw } Q = O_1 = 13,26 t.$$

W ten sam sposób obliczamy

siły poprzeczne dla innych przekroi.

2. Z pomocą linii wpływowych. Wykreślamy linie wpływowe dla siły $P=1$, wyznaczamy najniekorzystniejsze położenie, według tego ustawiamy układ ciężarów i odczytujemy poszczególne rzędne, mnożymy każdą rzędną przez odnośną siłę i dodajemy. Mnożenie to możemy zrobić także wykreślnie z pomocą kąta proporcjonalnego. Niedogodność tutaj jest ta, że dla każdego przekroju musimy osobno wynajdywać siłę poprzeczną, dlatego lepszy jest sposób następujący.

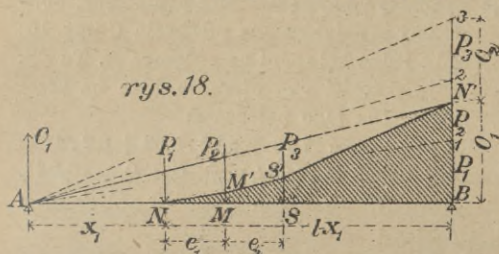
3. Z pomocą wieloboku sznurowego sposobem Winklera. Jeżeli dana jest belka AB (rys. 17.), na którą działają ciężary P_1, P_2, P_3, P_4 i chcemy wykreślić linię największych sił poprzecznych, wystawiamy na podporze A pionową i odcinamy na niej siły P_1, P_2, P_3, P_4 , mianowicie $P_1 = 1A, P_2 = 21,$



$P_3 = 32, P_4 = 43,$ a drugą podporę B obieramy jako biegun i kreśliśmy promień. Teraz

ustawiamy dany układ ciężarów w ten sposób, że pierwszy ciężar stawiamy w B, przyczem dalsze ciężary działają w punktach C, D i E. W tych punktach wystawiamy pionowe i kreślimy wielobok sznurowy $BC'D'E'A'$. Wielobok ten sznurowy przedstawia linię oddziaływań O_1 w lewej podporze,

a zarazem linią *najw* Q , gdy pierwszy ciężar stoi na przekroju. Chcąc tego twierdzenia dowieść, wyznaczmy w zwykły sposób największą siłę poprzeczną w dowolnym punkcie N , odległym od A o x_1 , gdy w tym punkcie stoi pierwszy ciężar P_1 (rys. 18). Ponieważ wtedy tylko trzy ciężary mieszczą się na belce, wielo-



bok sił będzie $\geq 21B$, przyczem $P_1 = 1B, P_2 = 21, P_3 = 32$. Obieramy teraz biegun A i kreślimy wielobok sznurowy $ANM'SN'$. Zamykającą jest tu AN' , a wiemy, że oddziały-

wanie O_1 otrzymujemy, kreśląc z bieguna równoległą do zamykającej, więc tu $AN'.BN'$ jest zatem oddziaływaniem w A , a zarazem największą siłą poprzeczną w N , jeżeli pierwszy ciężar P_1 stoi w tym punkcie. Z porównania powierzchni kreskowanych w rys. 17. i 18. widzimy, że są przystające, więc NN' (rys. 17.) równe jest oddziaływaniu, a zarazem *najw*. siły poprzecznej w N . W ten sam sposób możemy dla każdego innego punktu belki dowieść, że rzędna między prostą AB a wielobokiem sznurowym $BC'D'E'A'$ przedstawia *najw* Q w tym punkcie, gdy na przekroju stoi pierwszy ciężar.

Jeżeli chcemy dla jakiego przekroju F (rys. 17.) sprawdzić, czy *najw* Q powstaje wtedy, gdy drugi ciężar stoi na przekroju, to wiemy, że pierwszy ciężar stoi w takim razie w G , przyczem $GF = e_1$, więc siła poprzeczna w punkcie F będzie: $Q = O_1 - P_1 = GG' - A1 = GG' - GG'' = G'G''$. Tu, jak widzimy, $G'G'' < FF'$, więc *najw* Q powstaje, gdy pierwszy ciężar stoi na przekroju.

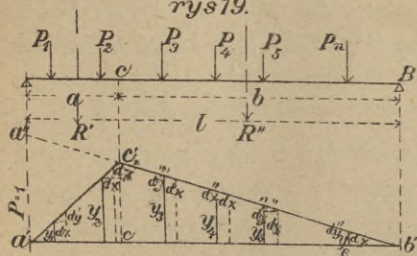
§. 15. Najniekorzystniejsze położenie układu ciężarów ze względu na momenty.

Powyżej w §. 11. udowodniliśmy, że linia wpływowa momentów w punkcie C ma kształt $a'c'b'$ (rys. 19).

Załóżmy, że belka AB jest obciążoną dowolnie ciężarami $P_1, P_2 \dots P_n$; moment w C jest wtedy:

$$M = P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \dots + P_ny_n = \Sigma Py.$$

rys 19.



przekroju C .

Z rysunku widzimy, że:

$$dy' : dx = cc' : a, \quad dy' = \frac{cc'}{a} dx$$

$$dy'' : dx = cc' : b, \quad dy'' = \frac{cc'}{b} dx.$$

Wstawiając powyższe wartości w równanie 32) otrzymujemy:

$$dM = cc' dx \left(\frac{R'}{a} - \frac{R''}{b} \right), \text{ a więc: } dM > 0, \text{ gdy } \frac{R'}{a} > \frac{R''}{b}. \quad 33)$$

Jeżeli więc szukamy takiego położenia układu ciężarów, któreby wywoływało największy moment w C , to przesuniemy układ ciężarów na prawo, jeśli $\frac{R'}{a} > \frac{R''}{b}$, bo wtedy $dM > 0$.

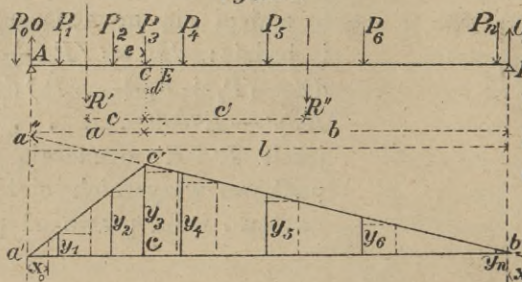
Jeżeli przytem nowy ciężar wejdzie na belkę, to $\frac{R'}{a}$ będzie jeszcze większe, jeśli jeden ciężar zejdzie z belki, to $\frac{R''}{b}$ będzie jeszcze mniejsze; a więc przy przesunięciu na prawo zyskujemy jeszcze więcej. A zatem zmiana znaku nierówności nie może nastąpić ani przez wejście, ani przez zejście jakiego ciężaru z belki, lecz tylko przez przekroczenie ciężaru jakiego przez punkt C . Stąd wynika, że dla większości stać musi jeden ciężar na przekroju. Z kształtu linii wpływowej widzimy też, że dla większości muszą w pobliżu przekroju stać największe i najbardziej skupione ciężary, a więc n. p. dla mostów kolejowych będzie stać na przekroju dla największego momentu parowóz, a nie jaszczyk albo wóz.

To, co powyżej udowodniliśmy, podał pierwszy Winkler, ale w rzeczywistości cecha ta nie wystarcza do wyszukania najniekorzystniejszego położenia układu ciężarów skupionych.

Załóżmy, że ciężar P_3 (rys. 20.) stoi na przekroju C , właściwie o dx na prawo od przekroju, wtedy $R' = P_1 + P_2$,

Jeżeli układ ciężarów przesuniemy o dx na prawo, to zmieni się moment o dM i będzie: $dM = (P_1 + P_2) dy' - (P_3 + P_4 + \dots + P_n) dy'' = R' dy' - R'' dy'' \dots 32)$ jeżeli R' i R'' oznaczają wypadkowe wszystkich ciężarów na lewo i na prawo od prze-

rys. 20.



$$R'' = P_3 + P_4 + P_5 + \dots + P_n.$$

Założmy dalej, że $\frac{R'}{a} > \frac{R''}{b}$, należałoby zatem według 33.) posuwać układ ciężarów na lewo.

Wystarczy tu posunięcie na lewo $\int dx$, aby tylko

P_3 stało po lewej stronie punktu C . Założmy, że teraz $\frac{R' + P_3}{a} > \frac{R'' - P_3}{b}$, że zatem układ ciężarów należałoby przesunąć na prawo. W takim razie musiałby układ ciężarów skupionych w tem położeniu wywołać największy moment w C . Tak jednak nie jest zawsze.

Przesuniemy bowiem układ ciężarów o e na prawo tak, aby P_2 stało na C (na lewo o dx) i założmy, że przytem ciężar P_0 wchodzi na belkę, a ciężar P_n schodzi z belki, to będzie:

$$\Delta M = P_0 y_0 + R' \Delta y' - (R'' - P_n) \Delta y'' - P_n y_n.$$

Z rysunku otrzymamy:

$$y_0 = \frac{cc'x_0}{a}, \Delta y' = \frac{cc'e}{a}, \Delta y'' = \frac{cc'e}{b}, y_n = \frac{cc'(e-x_n)}{b}, \text{ więc:}$$

$$\Delta M = P_0 cc' \frac{x_0}{a} + R' cc' \frac{e}{a} - (R'' - P_n) \frac{cc'e}{b} - P_n \frac{cc'(e-x_n)}{b},$$

$$\Delta M = cc' \left\{ \frac{P_0 x_0}{a} + \frac{R'e}{a} - \frac{R''e}{b} + \frac{P_n x_n}{b} \right\}.$$

Będzie więc: $\Delta M > 0$, gdy $\frac{P_0 x_0 + R'e}{a} > \frac{R''e - P_n x_n}{b}$, lub:

$$\frac{R' + P_0 \frac{x_0}{e}}{a} > \frac{R'' - P_n \frac{x_n}{e}}{b}, \dots \dots \dots 34)$$

co możemy jeszcze inaczej napisać:

$$\frac{R'}{a} + \frac{P_0 x_0}{ae} > \frac{R''}{b} - \frac{P_n x_n}{be} \dots \dots \dots 35)$$

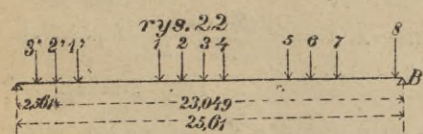
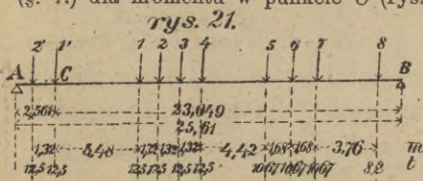
Widzimy więc, że ponieważ $\frac{R'}{a} < \frac{R''}{b}$, więc przy przesunięciu układu ciężarów na prawo wprawdzie z początku moment się zmniejsza, że jednak od chwili, gdy nowy ciężar P_0 wchodzi na belkę, a inny ciężar P_n z belki schodzi, że od tej chwili moment zaczyna wzrastać tak, że po przesunięciu o e moment

będzie większy, niż poprzednio, jeżeli zachodzi nierówność 34). Nierówność 34) lub 35) jest tą drugą cechą, którą trzeba zawsze zbadać, ile razy znak nierówności się zmienia, aby wyznaczyć dokładnie najniekorzystniejsze położenie.

Z nierówności 34) widzimy, że wpływ ciężarów P_0 i P_n jest tem większy, im większe są stosunki $\frac{x_0}{e}$ i $\frac{x_n}{e}$, im bliżej podpór więc siły P_0 i P_n były przed przesunięciem. Wpływ ten jest też po tej stronie przekroju większy, która jest mniejszą, więc, gdy $a > b$, to wpływ $P_0 \frac{x_0}{e}$ jest większy, niż wpływ wyrazu $P_n \frac{x_n}{e}$. Wpływ ciężarów P_0 i P_n jest wreszcie tem większy, im większe są te siły, a im mniejsze wypadkowe R' i R'' .

Musimy tu jeszcze dodać, że te same cechy dadzą się zastosować wszędzie tam, gdzie linie wpływowe mają ten sam kształt, jak dla momentów belki prostej, zatem kształt trójkąta z podstawą w osi.

Dla bliższego wyjaśnienia niech posłużą następny przykład. Chodzi o wyznaczenie najniekorzystniejszego położenia pociągu normalnego rosyjskiego (§. 7.) dla momentu w punkcie C (rys. 21).

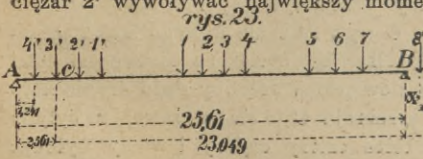


Jeżeli postawimy ciężar 1' na C i wyobrazimy go sobie jako oddalony o dx na prawo od punktu C, to $\frac{12,5}{2,561} > \frac{102,71}{23,049}$, więc pociąg trzeba posunąć na prawo, aż ciężar 2' stanie na przekroju.

Wtedy wejdzie ciężar 3' na belkę, a $\frac{R'}{a}$ będzie jeszcze większe (rys. 22). Wtedy będzie $\frac{25}{102,71} > \frac{2,561}{23,049}$. Musimy więc posunąć dalej

pociąg na prawo, a mianowicie o tyle, aby 2' było po prawej stronie punktu C. Wtedy jest: $\frac{12,5}{2,561} < \frac{115,2}{23,049}$.

Tu zmienia się znak nierówności i według cechy Winklera powinienby ciężar 2' wywoływać największy moment, znajdując się na przekroju C. To się jednak w tym wypadku nie sprawdza, jak to możemy się łatwo o tem przekonać, badając drugą cechę (nierów. 35).



Przesuńmy mianowicie pociąg jeszcze o 1,32 m na prawo tak, aby ciężar 3' stanął na przekroju C, to wtedy wchodzi nowy ciężar 4' (rys. 23.)

na belkę, a ciężar 8 schodzi z belki. Wtedy jest: $P_0 = 12,5 t$, $x_0 = 1,241 m$, $P_n = 8,2 t$, $x_n = 0,749 m$, a więc:

$$\frac{12,5}{2,561} + \frac{12,5 \cdot 1,241}{1,92 \cdot 2,561} > \frac{115,2}{23,049} - \frac{8,2 \cdot 0,749}{23,049 \cdot 2,561}$$

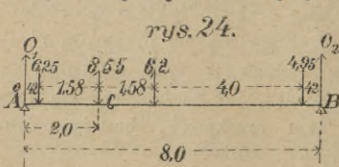
Przez przesunięcie na prawo o $1,32 m$ zyskujemy więc i moment staje się większym.

Gdy ciężar 3' przekracza punkt C , to $\frac{12,5}{2,561} < \frac{119,5}{23,049}$. Musimy więc jeszcze zbadać drugą cechę. Ale przez posunięcie pociągu o $1,32 m$ na prawo nie wchodzi żaden nowy ciężar na belkę i nie schodzi żaden ciężar z belki, więc: $P_0 = P_n = 0$, a druga cecha staje się równa pierwszej.

A więc najniekorzystniejsze położenie pociągu dla momentu w C jest, gdy ciężar 3' stoi w C i w istocie jest wtedy moment $M = 175,7 tm$, gdy przeciwnie, gdy koło 2' stoi na C , moment jest mniejszy, mianowicie: $M = 161,6 tm$.

§. 16. Wyznaczenie największych momentów.

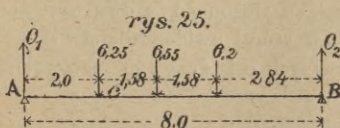
a) Liczebnie z wyklęym sposobem. Dla najniekorzystniejszego położenia, które według poprzedniego paragrafu wyznaczyliśmy, liczymy momenty według zasad, wyłożonych w statyce budowli *). Dla większych rozpiętości wystarczy podzielić połowę rozpiętości na 5 lub 10 części i dla tych punktów wyznaczyć najw. momenty. Te punkty łączymy linią krzywą. Linia ta największych momentów jest obwiednią poszczególnych parabol, przecinających się w punktach, dla których siła jaka przybywa na belkę, lub też ubywa. Dla pewnego bowiem położenia układu ciężarów, sprawiającego najw. moment w danym punkcie C (rys. 20.) jest najw $M = O_1 a - R'c = \frac{(R'(b+c) + R''(b-c))a}{l} + - R'c = \frac{(R' + R'')a(l-a)}{l} - \frac{R'c(l-a) + R''c'a}{l}$. Dla punktu E odległego o dx posunie się tylko cały układ o dx na prawo, więc najw M zmieni się jako funkcya zmiennej a . Z równania tego widzimy, że najw. M zmieniać się będzie wedle paraboli, dopóki te same ciężary stać będą na belce.



Przykład. Dla belki o rozpiętości 8m mamy wyznaczyć najw. moment w punkcie C (rys. 24.), dla którego $x = 2 m$, jeżeli belka jest obciążona parowozem kolei Czerniowieckiej. Jeżeliby stało drugie koło na przekroju C (o dx na prawo), to byłyby na belce cztery ciężary i wtedy byłoby:

*) p. Podr. Statyki Budowli str. 17.

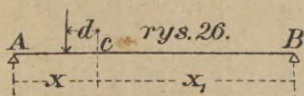
$\frac{6,25}{2} > \frac{17,7}{6}$. Musimy więc posunąć parowóz na prawo, aż pierwsze koło stanie na przekroju (rys. 25.) (o dx na prawo). Teraz $0 < \frac{19}{6}$, więc powin-



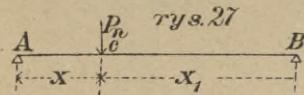
niśmy przesunąć parowóz na lewo. Ponieważ dalsze przesunięcie na prawo jest tu niemożliwe (bo tu pierwsze koło stoi na przekroju), więc nie potrzebujemy tu zastosowywać drugiej cechy. Gdy więc przez przesunięcie układu ciężarów ani na prawo, ani na lewo nie otrzymujemy większego momentu, zatem to położenie jest najniekorzystniejsze.

Dla tego położenia mamy: $O_1 = \frac{1}{8} (6,25 \cdot 6 + 6,55 \cdot 4,42 + 6,2 \cdot 2,84) = 10,26 t$, więc: najw. $M = 10,26 \cdot 2 = 20,52 tm$.

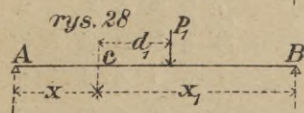
b) Liczebnie zapomocą tablicy momentów Zimmerrmanna. Siła P może być w trojakiem położeniu względem danego punktu C belki (rys. 26.); może działać na lewo od C , w C (rys. 27.) lub na prawo od C (rys. 28.). Moment w C mamy w pierwszym wypadku:



$$M = P \frac{d+x_1}{l} x - Pd = \frac{Pxx_1}{l} + \frac{P(l-x)d}{l} = \frac{Pxx_1}{l} - \frac{Px_1d}{l} \dots 36)$$



A jeżeli więcej takich sił działa na lewo od C ,



$$\Sigma M = \Sigma P \frac{xx_1}{l} - \Sigma P d \frac{x_1}{l} \dots 37)$$

$$\text{Dla } d=0 \text{ jest } M_n = \frac{P_n xx_1}{l} \dots 38)$$

Dla trzeciego wypadku jest:

$$M_1 = \frac{P_1(x_1 - d_1)}{l} x = \frac{P_1 xx_1}{l} - \frac{P_1 d_1 x}{l} \dots 39)$$

$$\text{więc: } \Sigma M_1 = \Sigma P_1 \frac{xx_1}{l} - \Sigma P_1 d_1 \frac{x}{l} \dots 40)$$

Jeżeli belka obciążona jest równocześnie ciężarami $\Sigma P, P_n$ i ΣP_1 , to będzie:

$$M_z = \frac{xx_1 [\Sigma P + P_n + \Sigma P_1] - [\Sigma Pd] x_1 - [\Sigma P_1 d_1] x}{l} \dots 41)$$

Jeżeli $l = na$, $x = ma$, $x_1 = (n - m)a$, to:

$$M_z = \frac{am(n-m)[\Sigma P + P_n + \Sigma P_1] - (\Sigma Pd)(n-m) - [\Sigma P_1 d_1]m}{n} \dots 42)$$

Otóż ułożywszy tablicę, w której dla danego pociągu podane są: ΣP , ΣP_1 , ΣPd i $\Sigma P_1 d_1$, możemy bardzo prędko dla każdego położenia wyznaczyć moment.

Poniżej podajemy taką tabliczkę dla pociągu złożonego z dwu normalnych parowozów austriackich i jednego wozu, w której uwidoczniliśmy ilości d , d_1 , ΣP , ΣP_1 , ΣPd i $\Sigma P_1 d_1$ dla trzech pierwszych osi drugiego parowozu.

	13	13	13	10	10	10	13	13	13	10	10	10	8	8			
d	15,6	14,4	13,2	12,0	7,5	6,0	4,5	*	1,2	2,4	3,6	8,1	9,6	11,1	14,7	17,7	d_1
ΣP	82	69	56	43	30	20	10	*	13	26	39	49	59	69	77	85	ΣP_1
ΣPd	897,6	694,8	507,6	336	180	105	45	*	15,6	46,8	93,6	174,6	270,6	381,6	499,2	640,8	$\Sigma P_1 d_1$
d	16,8	15,6	14,4	13,2	8,7	7,2	5,7	1,2	*	1,2	2,4	6,9	8,4	9,9	13,5	16,5	d_1
ΣP	95	82	69	56	43	33	23	13	*	13	26	36	46	56	64	72	ΣP_1
ΣPd	1 011,6	793,2	590,4	403,2	231,6	144,6	72,6	15,6	*	15,6	46,8	115,8	199,8	298,8	406,8	538,8	$\Sigma P_1 d_1$
d	18,0	16,8	15,6	14,4	9,9	8,4	6,9	2,4	1,2	*	1,2	5,7	7,2	8,7	12,3	15,3	d_1
ΣP	108	95	82	69	56	46	36	26	13	*	13	23	33	43	51	59	ΣP_1
ΣPd	1 141,2	907,2	688,8	486	298,8	199,8	115,8	46,8	15,6	*	15,6	72,6	144,6	231,6	330	452,4	$\Sigma P_1 d_1$

Jeżeli mamy n. p. wyznaczyć dla belki o rozpiętości 20 m najw. moment w środku belki, to stawiając 1 koło na środek belki, otrzymamy:

$$M = \frac{1}{2} \left\{ 10 \cdot 10 (30 + 13 + 59) - 180 \cdot 10 - 270,6 \cdot 10 \right\} = 284,7 \text{ tm.}$$

Postawiwszy drugie koło na środku belki, otrzymamy:

$$M = \frac{1}{2} \left\{ 10 \cdot 10 (43 + 13 + 56) - 231,6 \cdot 10 - 298,8 \cdot 10 \right\} = 294,8 \text{ tm.}$$

A wreszcie, gdy trzecie koło będzie stało na środku belki, będziemy mieli:

$$M = \frac{1}{2} \left\{ 10 \cdot 10 (56 + 13 + 43) - 298,8 \cdot 10 - 231,6 \cdot 10 \right\} = 294,8 \text{ tm.}$$

W tym wypadku więc największy moment powstaje, gdy drugie lub trzecie koło parowozu stoi na środku belki, gdyż momenty są przypadkowo w tych wypadkach równe i wynoszą 294,8 tm.

Tablicy momentów możemy użyć też do wyznaczenia sił poprzecznych. Gdy bowiem siła P działa na lewo od C (rys. 26.), to siła poprzeczna w C

$$Q = \frac{P(d + x_1)}{l} - P = \frac{Pd}{l} - \frac{Px}{l}, \text{ a dla więcej sił}$$

$$\Sigma Q = \frac{1}{l} [\Sigma Pd - \Sigma Px] \dots \dots \dots 43)$$

Gdy siła P_n stoi na C (rys. 27.), to siła poprzeczna w C jest, jeżeli P_n oddalone o dx na prawo od C , $Q_n = \frac{P_n x_1}{l}, \dots 44)$

" P_n " " " " lewo " C , $Q_n = -\frac{P_n x}{l} \dots 45)$

Jeżeli siła P_1 działa na prawo od C (rys. 28.), to siła poprzeczna w C jest $Q_1 = \frac{P_1(x_1 - d_1)}{l}$, a dla więcej sił

$$\Sigma Q_1 = \frac{1}{l} (\Sigma P_1 x_1 - \Sigma P_1 d_1) \dots \dots \dots 46)$$

Aby otrzymać najw ($+Q$), obciążamy prawą stronę belki,

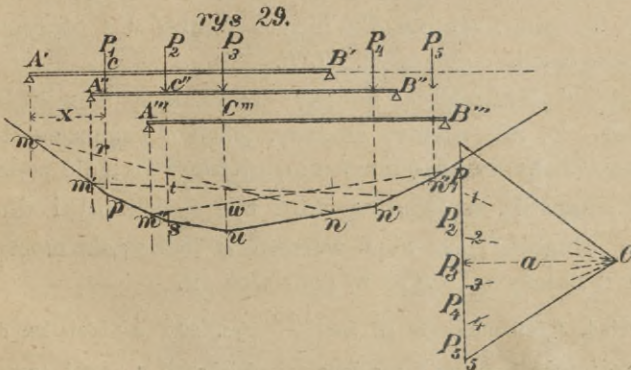
$$\text{wtedy najw } (+Q) = \frac{1}{l} [x_1 (\Sigma P_n + P_n) - \Sigma P_1 d_1], \dots \dots \dots 47)$$

a przy obciążeniu lewej strony belki

$$\text{najw } (-Q) = -\frac{1}{l} [x (\Sigma P + P_n) - \Sigma Pd] \dots \dots \dots 48)$$

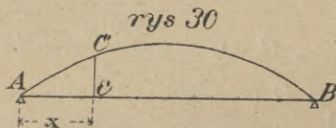
c) Zapomocą linii wpływowych przez dodawanie rzędnych w ten sam sposób, co dla sił poprzecznych (§. 12.).

d) Zapomocą wieloboku sznurowego. Mając dany układ ciężarów skupionych P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (rys. 29.), kreślimy wielobok sił, obieramy biegun O i wykreślamy wielobok sznurowy $mpsun'$. Wykreśliliśmy tu wielobok sznurowy,



nie oznaczywszy jeszcze położenia belki, a to dla tego, aby można użyć tego samego wieloboka sznurowego dla rozmaitych położenia układu ciężarów. Zamiast bowiem posuwać układ ciężarów po belce, możemy układ ciężarów, a więc i wielobok sznurowy zostawić na miejscu, a belkę przesuwac; położenie względne układu ciężarów i belki będzie w obu razach takie samo.

Załóżmy, n. p., że mając daną belkę AB (rys. 30.), chcemy wynaleść najw M dla punktu C . Nie wiemy dokładnie, który ciężar ma stać na C dla największości, wiemy jednak, że w pobliżu C mają stać największe i najbardziej skupione ciężary i że cała belka ma być obciążoną; będzie więc stał na C



ciężar P_1, P_2 lub P_3 . Załóżmy najpierw, że pierwszy ciężar P_1 stoi na C . Na dowolnej linii poziomej (rys. 29.) odcinamy od pionowej przez P_1 $A'C' = AC$ i $C'B' = CB$. Teraz więc podpory są w A' i B' , gdy ciężar P_1 stoi w C' , kreślimy zatem przez A' i B' pionowe, mn będzie zamykającą, więc moment w C będzie pr . Teraz próbujemy, czy drugi ciężar P_2 , stojąc na przekroju C , nie wywoła większego momentu, przyczem postępujemy w ten sam sposób. Robimy $A''C'' = AC$, $C''B'' = CB$, kreślimy przez A'' i B'' pionowe i łączymy punkty m' i n' przecięcia się tych pionowych z wielobokiem sznurowym. W ten sposób wyznaczamy moment w tym wypadku dla przekroju C równy st . To samo powtarzamy jeszcze dla wypadku, gdy P_3 stoi na C i otrzymujemy moment uv ; która z tych trzech długości jest największa, tę zatrzymujemy i oznaczamy ją $aa = CC'$ na pionowej w C (rys. 30.). To samo robimy dla innych punktów i otrzymujemy linię największych momentów $AC'B$.

Jeżeli y jest rzędną między zamykającą a wielobokiem sznurowym, to, jak wiemy, $M = ay$, jeżeli a oznacza odległość biegunową. Chcąc uniknąć mnożenia, możemy zmienić podziałkę, a wtedy jednostką momentów musi być $\frac{1}{a}$ jednostki długości. Jednostka długości ma więc wartość a jednostek momentów, przyczem a należy odczytać w podziałce sił.

Przykład. Jeżeli podziałka sił jest $\frac{1mm}{1t}$ (rys. 29.), a podziałka długości $\frac{1mm}{0,2m}$, odległość zaś biegunowa, wyrażona w podziałce sił $a = 20t$, to podziałka

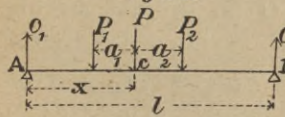
momentów jest $\frac{1 \text{ mm}}{20 \cdot 10^6 \text{ tm}} = \frac{1 \text{ mm}}{4 \text{ tm}}$. Wedle tej podziałki wynosi *pr 21 tm*. Liczenie otrzymaliśmy powyżej w tym wypadku 20,52 *tm*, a więc ze względu na małą podziałkę wynik wykreślny możemy uważać jako zgodny z liczebnym.

§. 17. Bezwzględnie największy moment.

Chcąc wyznaczyć, jak wielki i w jakim punkcie będzie bezwzględnie największy moment, wiemy przedewszystkiem, że na tym przekroju musi stać jeden ciężar.

Wyznamy najw. moment w przekroju *C*, odległym od lewej podpory o *x* (rys. 31.) Załóżmy, że wtedy *P* stoi na przekroju,

rys.31



$O_1 l = P(l - x) + P_1(l - x + a_1) + P_2(l - x - a_2)$, a $M = O_1 x - P_1 a_1$, więc $Ml = O_1 l x - P_1 a_1 l =$
 $= P(l - x)x + P_1(l - x + a_1)x + P_2(l - x - a_2)x - P_1 a_1 l$.

Jeżeli *M* ma być największe, to musimy zrobić $\frac{dM}{dx} = 0$.

Więc $l \frac{dM}{dx} = Pl - 2Px + P_1 l - 2P_1 x + P_1 a_1 + P_2 l - 2P_2 x - P_2 a_2 = 0$,

a stąd $x = \frac{(P + P_1 + P_2)l + (P_1 a_1 - P_2 a_2)}{2(P + P_1 + P_2)}$, czyli

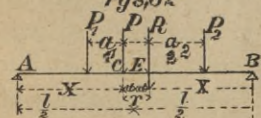
$$x = \frac{l}{2} + \frac{P_1 a_1 - P_2 a_2}{2(P + P_1 + P_2)} \dots \dots \dots 49)$$

Wstawmy wartość za *x* w równanie dla *M*, to otrzymamy:

$$\begin{aligned} \text{najw } M &= \frac{1}{4}(P + P_1 + P_2)l - \frac{1}{2}(P_1 a_2 + P_2 a_2) + \\ &+ \frac{P_1 a_1 - P_2 a_2}{4(P + P_1 + P_2)} \dots \dots \dots 50) \end{aligned}$$

Założmy, że obliczyliśmy z rów. 49) *x* i że w *C* (rys. 32.)

rys.32



jest bezwzględnie najw. moment. Złożmy teraz siły *P*, *P*₁ i *P*₂ w wypadkową *R*, a odległość jej od punktu *C* niechaj będzie *r* (dodatnie, jeżeli po prawej stronie punktu *C*), to $R = P + P_1 + P_2$, a biorąc równanie momentów ze względu na punkt *C*, $Rr = P_2 a_2 - P_1 a_1$.

Wstawmy to w rów. 49), a otrzymamy $x = \frac{l}{2} - \frac{Rr}{2R}$,

$$x = \frac{l}{2} - \frac{r}{2} = \frac{1}{2}(l - r) \dots \dots \dots 51)$$

Dalej otrzymamy z 50):

$$\begin{aligned} \text{najw } M &= \frac{1}{4} Rl - \frac{1}{2} (P_1 a_1 + P_2 a_2) + \\ &+ \frac{R^2 r^2}{4 Rl} = \frac{R(l^2 - r^2)}{4l} - \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{2}, \end{aligned}$$

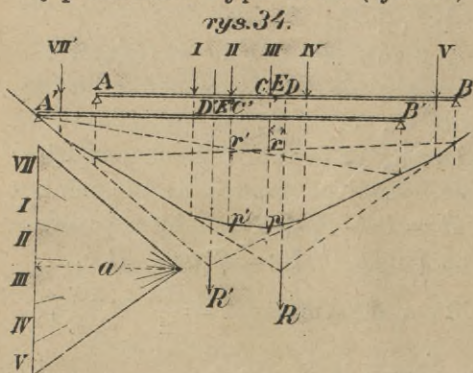
$$\text{najw } M = \frac{R x^2}{l} - P_1 a_1 \dots \dots \dots 52)$$

Widzimy więc, że *najw M* nie będzie we środku belki, lecz w punkcie *C* w odstępnie *d* od środka (rys. 33.). Jeżeli układ ciężarów skupionych wchodzi na belkę z drugiej strony, to otrzymamy takie samo *najw M* w punkcie *D*, który leży symetrycznie do *C* po drugiej stronie środka belki *E*. W środku belki będzie zatem moment nieco mniejszy. Tylko, gdy $P_1 a_1 = P_2 a_2$, a więc zawsze, gdy obciążenie jest ze względu na *P* symetryczne, $x = \frac{l}{2}$, więc moment jest największy w środku belki.

Niechaj punkt *E* (rys. 32.) będzie środkiem belki, to $AE = \frac{l}{2}$. Dalej nazwijmy $CE = d$, to $d = \frac{l}{2} - x$. Podstawivszy za *x* wartość z 51), otrzymamy $d = \frac{l}{2} + \frac{r}{2} - \frac{l}{2}$,

$$\text{zatem } d = \frac{r}{2} \dots \dots \dots 53)$$

Widzimy więc, że punkt *E* połowi długość *r*, na czem polega następująca konstrukcja. Jeżeli dla danego układu ciężarów, które się na belce mieszczą, wykreślimy wielobok sznurowy i skrajne boki przedłużymy, to przez ich punkt przecięcia się przechodzi wypadkowa (rys. 34). Jeżeli spólowiliśmy długość



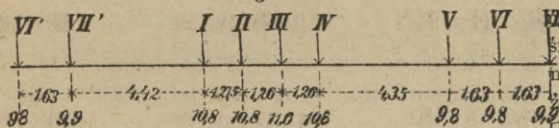
$CD = r$, to środek belki będzie w *E*, punkt *C* zaś nazywamy ze względu na punkt zaczepienia wypadkowej *D* przekrojem symetrycznym (n. *Symmetriequerschnitt*), punktu *C*. Konstrukcją tę podał pierwszy Culmann (1866.).

Twierdzenie Culmanna da się słowami tak wy-

razić: Moment staje się największym przy pewnym ciężarze, gdy ten ciężar i wypadkowa wszystkich ciężarów są od środka belki równo oddalone. Nie wiemy jednak jeszcze, który z ciężarów należy postawić na przekroju symetrycznym punktu D . Zwykle największy moment powstaje pod ciężarem najbliższym punktu D , jednak nie zawsze. Jeżeli zachodzi wątpliwość, trzeba dla kilku najbliższych ciężarów spróbować, czy nie otrzymamy większego momentu. Zresztą ta konstrukcja jest tak długo ważną, jak długo ciężary te same znajdują się na belce. Jeżeli chcemy się przekonać, jak wielki może wywołać najw. moment inna grupa ciężarów (VII', I, II, III, IV), to musimy dla niej tę samą konstrukcją powtórzyć, a wtedy zobaczymy, który moment będzie większym*).

Przykład. Belka o rozpiętości 12 m niech będzie obciążona pociągiem, złożonym z dwu parowozów czteroosiowych kolei Czerniowieckiej, którego

rys 35.



część przedstawiliśmy na rys. 35. Największy moment będzie około środka, gdzie mamy umieścić największe ciężary, a więc I, II, III, IV, na przekroju sta-

nie prawdopodobnie największy ciężar III. Wtedy zmieszczą się na belce siły I, II, III, IV, V. Wypadkowa tych sił R jest odległa od III o

$$r = \frac{4,61 \cdot 9,8 + 1,26 \cdot 10,8 - 1,26 \cdot 10,8 - 2,535 \cdot 10,8}{3 \cdot 10,8 + 11,6 + 9,8} = \frac{17,81}{53,8} = 0,33 \text{ m},$$

więc $x = \frac{12 - 0,33}{2} = 5,83 \text{ m}, \quad l - x = 6,17 \text{ m}.$

Dla tego x właśnie tych 5 ciężarów stać będzie na belce. Jeżeli III będzie stać o dx na lewo od punktu C , to $\frac{34,2}{5,83} > \frac{20,6}{6,17}$. Jeżeli III stoi o dx na prawo od C , to $\frac{21,6}{5,83} > \frac{32,2}{6,17}$, więc, gdy III stoi w C , moment jest największy.

Możliwamby było chyba jeszcze, że najw. moment powstaje pod II, wtedy zmieściłyby się na belce ciężary VII' I, II, III, IV. Wypadkowa tych sił jest odległa od II o

$$r = \frac{2,52 \cdot 10,8 + 1,26 \cdot 11,6 - 1,275 \cdot 10,8 - 5,695 \cdot 9,9}{3 \cdot 10,8 + 11,6 + 9,9} = - \frac{28,33}{53,9} =$$

*) Šolin (Mittheil. des Arch. u. Ing. V. in Böhmen 1877.) podaje wprowadzić znamię, aby poznać, czy siła P , czy też sąsiednie siły P' i P'' , oddalone od P o e' i e'' wywołują bezwzględną największość. Otrzymuje on, że najw M wywołuje P , jeżeli $\frac{P'}{x - \frac{1}{4}e'} < \frac{P}{l} > \frac{P''}{l - x - \frac{1}{4}e''}$. Ale próbowaniem równie prędko znajdziemy bezwzględnie najw M .

$$= -0,53 \text{ m, więc } x = \frac{12 + 0,53}{2} = 6,26 \text{ m, } l - x = 5,74 \text{ m.}$$

Gdy na tym punkcie C' stoi ciężar Π , mieszczą się jeszcze na belce ciężary VII', I, III i IV. Jeżeli Π stoi o dx na lewo od C' , to $\frac{32,5}{6,26} > \frac{22,4}{5,74}$. Gdy Π stoi o dx na prawo od C' , to $\frac{20,7}{6,26} > \frac{34,2}{5,74}$, zatem największy moment jest w C' , gdy Π stoi na przekroju.

W pierwszym wypadku w punkcie C jest *najw* $M = \frac{53,8 \cdot 5,83^2}{12} + - 2 \cdot 10,8 \cdot 1,897 = 103,04 \text{ tm}$; w drugim wypadku w punkcie C' jest *najw* $M = \frac{53,9 \cdot 6,26^2}{12} - 9,9 \cdot 5,695 - 10,8 \cdot 1,275 = 105,82 \text{ tm}$. Więc bezwzględnie największy moment powstaje w C' dla $x = 6,24 \text{ m}$.

§. 18. Największe momenty dla zmiennych rozpiętości.

Jeżeli dla jakiejś kolei lub drogi obliczamy więcej mostów na podstawie danego układu ciężarów skupionych, a chodzi nam o bezwzględnie największe momenty dla rozmaitych rozpiętości, to dadzą się według Empergera ustawić wzory, zapomocą których da się obliczyć *najw* M dla zmiennej rozpiętości.

Dla bardzo małych rozpiętości sprawia bezwzględnie największy moment jedno koło w środku belki, wtedy

$$M = \frac{Pl}{4}, \dots \dots \dots 54)$$

więc dla zmiennej l jestto równanie linii prostej Oa (rys. 36.).

Jeżeli dwa koła mieszczą się na belce, to może być moment największy dla jednego koła lub dla obciążenia dwoma kołami. Tu musimy próbować. Według twierdzenia Culmanna środek belki E musi wtedy połowić odstęp siły P_1 od wypadkowej R . Mamy wtedy, gdy O_1 oznacza oddziaływanie w lewej podporze:

$$M = O_1 x = \frac{Rx}{l} x = \frac{Rx^2}{l}, \dots \dots \dots 55)$$

co zgadza się z rów. 52), przyczem według 51) $x = \frac{l-r}{2}$,

$$\text{zatem } \textit{najw} M = \frac{Rl}{4} - \frac{Rr}{2} + \frac{Rr^2}{4l} = \frac{R}{4} \left(l - 2r + \frac{r^2}{l} \right). 56)$$

Jestto dla zmiennej l równanie hyperboli, bardzo zresztą płaskiej, której część ab zatrzymujemy.

Jeżeli $P_1 = P_2$, a odstęp sił wynosi a , to $r = \frac{a}{2}$, wtedy

Jako przykład wykreśliliśmy powyższe linie największych momentów dla najcięższych trzyosiowych i czteroosiowych parowozów kolei Lwowsko-Czerniowieckiej w następujący sposób:

I. Parowóz trzyosiowy.

a) Jeżeli jedna oś znajduje się na moście, to według wzoru 54) $M = \frac{13,1l}{4} = 3,2751 tm$, zatem dla $l = 1$ jest $M = 3,175 tm$, dla $l = 3$ $M = 9,825 tm$.

b) Gdy 2 osi znajdują się na moście, wtedy $a = 1,58 m$, $r = 0,79 m$, $x = \frac{1}{2} - 0,395$, a $M = \frac{Rx^2}{l} = \frac{25,6x^2}{1}$. Dla $l = 4$ jest $x = 2 - 0,395 = 1,605 m$, więc najw $M = \frac{25,6 \cdot 1,605^2}{4} = 16,5 tm$. Podobnie otrzymamy dla $l = 3 m$ najw $M = 10,41 tm$, dla $l = 2,5 m$ $M = 7,49 tm$.

c) Gdy trzy osi znajdują się na moście, to $a_1 = 1,58 m$, $R = 38 t$, $P_1 = 12,4 t$, więc wedle wzoru 58.)

$$\text{najw } M = \frac{38l}{4} - 12,4 \cdot 1,58 = 9,51 - 19,59 tm,$$

stąd dla $l = 10 m$ $M = 75,4 tm$, dla $l = 4 m$ jest $M = 18,4 tm$.

II. Parowóz czteroosiowy.

a) Jeżeli jedna oś znajduje się na moście, to otrzymamy według rów. 54) $M = 2,91$.

b) Gdy 2 osi znajdują się na moście, mamy $a = 1,26 m$, $r = 0,61 m$, najw. moment jest dla $x = \frac{1}{2} - 0,305 m$, a najw $M = \frac{Rx^2}{1} = \frac{22,4x^2}{1}$. Stąd otrzymamy dla $l = 3$ $x = 1,195 m$ a $M = 10,68 tm$, dla $l = 2$ jest $x = 0,605 m$ a $M = 5,41 tm$.

c) Gdy 3 osi znajdują się na moście, to według 58) najw $M = \frac{33,2l}{4} + 10,8 \cdot 1,26 = 8,31 - 13,6 tm$, stąd dla $l = 10 m$ $M = 69,4 tm$, a dla $l = 4 m$ jest $M = 19,6 tm$.

d) Gdy 4 osi znajdują się na moście, to $a = 1,26$, $r = 0,62 m$, więc $x = \frac{1}{2} - 0,31$, a najw $M = \frac{Rx^2}{l} - 10,8 \cdot 1,26 = \frac{44x^2}{1} - 13,6 tm$, mamy

więc równanie hyperboli bardzo płaskiej. Stąd otrzymamy:

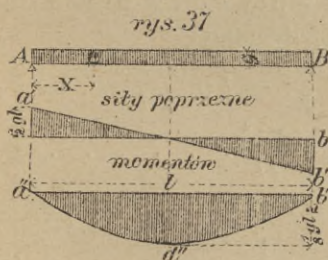
dla $l = 5$	8	10	12	m
$x = 2,19$	3,69	4,69	5,69	m
a najw $M = 23,6$	61,3	83,2	105,1	tm .

Dla większych rozpiętości, gdy na moście zmieści się więcej, niż jeden parowóz, dla rozpiętości powyżej 30 m można przyjąć w przybliżeniu największy moment w środku, a to tem bardziej, że przy mostach kratowych chodzi nam tylko o momenty w węzłach.

IV. Obciążenie ciągłe.

§. 19. Obciążenie jednostajne zupełne.

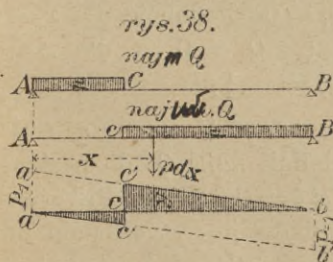
W wykładzie statyki budowli mówiliśmy już o obciążeniu ciągłym dowolnym i o obciążeniu jednostajnym zupełnym*), podamy więc tu tylko wyniki. Jeżeli g jest ciężarem jednostkowym,



to w dowolnym punkcie C (rys. 37.) jest siła poprzeczna $Q = \frac{1}{2} g (l - 2x)$ 59) a moment $M = \frac{1}{2} g x (l - x)$. . . 60) Stąd najw $Q = \frac{1}{2} g l$ 61) jest dla $x = 0$, a najw $M = \frac{1}{8} g l^2$ 62) dla $x = \frac{l}{2}$. Równanie 59) przedstawia linią prostą $a'b'$, zaś 60) parabolę $a''d''b''$.

§. 20. Najniekorzystniejsze obciążenie ze względu na siły poprzeczne.

Ponieważ z linii wpływowej (rys. 38.) sił poprzecznych



wyplywa, że każdy ciężar na prawo od danego przekroju C sprawia w C siłę poprzeczną dodatnią, a każdy ciężar, znajdujący się na belce po lewej stronie punktu C sprawia w C siłę poprzeczną ujemną, więc, aby otrzymać najw Q w punkcie C , musimy obciążyć BC , t. j. całą długość na prawo od przekroju, zaś długości

AC wcale nie obciążać. Jeżeli zaś Q ma być najmniejsze, to obciążamy AC , a długości BC nie obciążamy wcale. Jeżeli p oznacza ciężar jednostkowy, to $p dx$ oznacza ciężar na długości dx , zaś $p y dx$ siłę poprzeczną, wywołaną ciężarem $p dx$, jeżeli y oznacza rzędną linii wpływowej dla sił poprzecznych. Jeżeli belka obciążona jest od C do B , to otrzymamy $Q = p \int_C^B y dx$. Otóż $\int_C^B dx$ jest to powierzchnia, zawarta między linią wpływową a osią od C do B , którą nazywamy powierzchnią wpływową (n. *Influenzfläche, Einflussfläche, fr. surface d'influence*). A zatem otrzy-

*) p. Podr. Statyki Budowli str. 18 i nast.

mamy siłę poprzeczną w danym punkcie C , jeżeli powierzchnię wpływową dla tego punktu, odpowiadającą długości obciążonej, pomnożymy ciężarem jednostkowym p . Twierdzenie to da się w ten sam sposób dowieść dla jakiegokolwiek linii wpływowej, zawsze więc, chcąc otrzymać jakąś ilość mechaniczną, wywołaną ciężarem jednostajnym, pomnożyć mamy odnośną powierzchnię wpływową przez ciężar jednostkowy p . Z rysunku otrzymamy

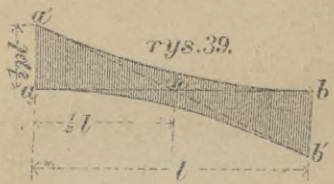
$$nawj (+ Q) = p bc'e = p \frac{1}{2} (l - x) \frac{l - x}{l} = \frac{1}{2} p \frac{(l - x)^2}{l}, \text{ czyli}$$

$$nawj (+ Q) = \frac{1}{2} pl \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 63)$$

Podobnie otrzymamy $nawj (- Q) = - p \cdot acc'' = - p \frac{1}{2} \frac{x^2}{l}$,

$$\text{więc } nawj (- Q) = - \frac{px^2}{2l} \dots \dots \dots 64)$$

Równania 63) i 64) przedstawiają dla zmiennej x parabole przystające odwrócone (rys. 39.), które łatwo możemy wykreślić, gdyż dla $x=0$ jest $nawj Q = \frac{1}{2} pl$, zaś dla $x=l$ jest $nawj (+ Q) = 0$. Podobnie dla $x=0$ jest $nawj (- Q) = 0$, a dla $x=l$ jest $nawj (- Q) = - \frac{1}{2} pl$.



Dalej mamy $\frac{d nawj Q}{dx} = - \frac{p}{l} (l - x) = st \zeta, \dots \dots \dots 65)$ gdy ζ jest kątem nachylenia stycznej linii $nawj Q$ do poziomu. Z rów. 65) otrzymamy dla $x=l$ $st \zeta = 0, \zeta = 0$, dla $x=0$, $st \zeta = -p$. Więc w punkcie b oś odcinków jest styczną do linii $nawj Q$, a w punkcie a' styczną jest prosta $a'b'$, gdyż $aa' = an st \zeta$, a wstawiwszy wartości za aa' i $st \zeta$, otrzymamy $\frac{pl}{2} = p \cdot an$, więc $an = \frac{l}{2}$. Prosta $a'b'$ przechodzi zatem przez środek belki n i jest styczną do obu parabol.

§. 21. Największe momenty.

Ponieważ z kształtu linii wpływowej dla momentów (rys. 12.) wypływa, że każdy ciężar, znajdujący się na belce, sprawia moment dodatni, więc dla największych momentów musimy całą belkę obciążyć. Można zatem tu użyć tych samych wzorów, co dla obciążenia zupełnego, tylko jeżeli we wzorach 60) i 62) zamiast g wstawimy p . Otrzymamy więc

$$nawj (+ M) = \frac{1}{2} px (1 - x) \dots \dots \dots 66)$$

§. 22. Obciążenie ciężarem własnym i ruchomym ,
jednostajnie rozłożonym.

Dla równoczesnego obciążenia ciężarem własnym i ruchomym otrzymamy na podstawie poprzednich wzorów:

$$\left. \begin{aligned} \text{najw } M &= \frac{1}{2} (g + p) x (l - x) \\ \text{najmn } M &= \frac{1}{2} g x (l - x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 67)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{najw } (+Q) &= \frac{1}{2} g (l - 2x) + \frac{p(l-x)^2}{2l} \\ \text{najw } (-Q) &= \frac{1}{2} g (l - 2x) - \frac{px^2}{2l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 68)$$

Równania 67) przedstawiają parabole, jak w §. 19., zaś równania 68) dwie parabole przystające odwrócone A_3B_1 i A_1B_3 (rys. 40.) Parabole te możemy też otrzymać przez dodanie rzędnych prostej A_1B_1 dla ciężaru własnego do parabol A_1B i AB_1 , dla ciężaru ruchomego.

Nazwijmy $AC = x_1$, to dla $x = x_1$ otrzymamy z drugiego rów. 68)

$$0 = \frac{1}{2} g (l - 2x_1) - \frac{px_1^2}{2l}, \text{ a stąd:}$$

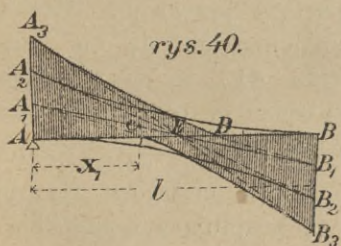
$$\frac{x_1}{l} = -\frac{g}{p} + \sqrt{\left(\frac{g}{p}\right)^2 + \frac{g}{p}} \dots 69)$$

Z rysunku widzimy, że $CD = l - 2x_1$, na tej długości siły poprzeczne mogą być dodatnie i ujemne. Nazwijmy przekrój, dla którego siła poprzeczna jest $= 0$, przekrojem środkowym (n. *mittlerer Querschnitt*, fr. *ligne de partage des forces*), to jeżeli belka jest jednostajnie zupełnie obciążona, przekrój środkowy jest w środku belki, dla obciążenia jednostronnego przekrój środkowy wychyla się ze środka belki najdalej o długość $CE = ED = \frac{l}{2} - x_1$, którą to długość zowiemy wychyleniem się przekroju środkowego. Wychylenie to jest według 69) zależne od stosunku $\frac{g}{p}$, który wynosi w przybliżeniu według Winklera:

dla $l = 5 \quad 10 \quad 20 \quad 50 \quad 75 \quad 100 \quad 150 \quad m$

$\frac{g}{p} = 0,12 \quad 0,19 \quad 0,31 \quad 0,64 \quad 1,05 \quad 1,55 \quad 3,12$

a stąd $CD = 0,52 \quad 0,42 \quad 0,34 \quad 0,24 \quad 0,15 \quad 0,12 \quad 0,08 \quad l$

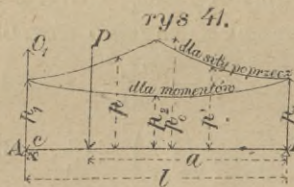


rys. 40.

§. 23. Ciężar zastępczy.

Dla każdego przekroju belki da się wyznaczyć ciężar jednostajnie rozłożony, sprawiający ten sam największy moment lub tę samą największą siłę poprzeczną, co dany układ ciężarów skupionych. Ciężar taki nazywamy ciężarem zastępczym (n. *Belastungsgleichwerth*, *aequivalente Last*, a. *equivalent uniform load*). Dla rozmaitych przekrojów belki otrzymamy w ten sposób rozmaite ciężary zastępcze, a nawet dla tego samego przekroju otrzymamy inny ciężar zastępczy dla sił poprzecznych, a inny dla momentów.

W ogólności są ciężary zastępcze dla sił poprzecznych większe, niż dla momentów, a największe dla środka belki. Ustawmy układ ciężarów w ten sposób, abyśmy otrzymali dla przekroju *C* tuż obok podpory *A* największą siłę poprzeczną, a więc postawmy pierwszy ciężar na tym przekroju. Niechaj wypadkowa wszystkich ciężarów, znajdujących się na belce będzie *P* (rys. 41.), a jej odległość od *B* niechaj będzie *a*, to oddziaływanie



$= \frac{Pa}{l}$, więc najw $Q = \frac{Pa}{l}$. To samo

położenie układu ciężarów wywoła w punkcie *C*, znajdującym się blisko podpory *A*, największy moment, otrzymamy więc najw $M = \frac{Pa}{l}x$. Jeżeli ciężar zastępczy dla sił poprzecznych nazwiemy *p*, to według 63) najw $Q = \frac{1}{2}p \frac{(l-x)^2}{l}$; z porównania obu najw *Q* otrzymamy:

$$p \frac{(l-x)^2}{2l} = \frac{Pa}{l}, \text{ a stąd } p = \frac{2Pa}{(l-x)^2} \dots 70)$$

Dla momentów nazwijmy ciężar zastępczy *p'*, to według 66) najw $M = \frac{1}{2}p'x(l-x)$. Porównajmy oba największe momenty, a otrzymamy $\frac{Pa}{l}x = \frac{1}{2}p'(l-x)x$, stąd $p' = \frac{2Pa}{l(l-x)^2}$ 71)

Widzimy więc, że ciężar zastępczy *p'* dla momentów jest mniejszy, niż ciężar zastępczy dla sił poprzecznych, tylko dla $x=0$ będzie $p=p'$.

Równania 70) i 71) są ważne tylko dla przekrojów, znajdujących się blisko podpory; w podobny sposób dadzą się obliczyć ciężary zastępcze dla innych punktów belki.

Wykreślmy dla każdego x odpowiednie p i p' jako rzędne, i połączmy końce odnośnych rzędnych, a otrzymamy dwie linie dla p górną, zaś dla p' dolną. Linie te będą miały kształt wskazany w rys. 41. Jeżeli przyjmujemy jeden ciężar zastępczy dla całej belki, popełniamy błąd. Lepiej już jest przyjąć inny ciężar dla momentów, a inny dla sił poprzecznych. Więcej naukowo uzasadnionem jest okólnikowe rozporządzenie rosyjskiego ministerstwa komunikacyj, wydane w r. 1884. do zarządów wszystkich kolei żelaznych, w którym podane są ciężary zastępcze p_2 dla momentów w środku, p_0 dla sił poprzecznych w środku przęsła i p_1 na podporach. Dla innych punktów belki należy według okólnika wstawić jeszcze 6 do 10 wartości pośrednich pomiędzy p_0 i p_1 lub p_1 i p_2 .

Z okólnika powyższego podajemy odnośne ustępy:

I. Natężenia w różnych częściach belki mostowej, wywołwane przez obciążenie ruchome, powinny być liczone na podstawie pociągu normalnego (§. 4). Przytem jednakże dla wyznaczenia ciężaru zastępczego, odpowiadającego największemu momentowi zgięcia, pociąg ustawia się ściśle według schematu (§. 4), przy wyznaczeniu zaś ciężaru zastępczego dla najw. sił poprzecznych, wszystkie trzy parowozy należy ustawić na czele pociągu kominami naprzód. Obciążenie na oś parowozu przyjmuje się w przęsłach do 3 *sqż* (włącznie) 15 *t*, do 4 *sqż* (włącznie) 13,75 *t*, a wyżej 4 *sqż* 12,5 *t*. Wspomniane wyżej ciężary zastępcze, obliczone dla przekrojów na podporze i w środku przęsła dają następująca tabliczka:

Rozpiętość teoretyczna w <i>sqż</i>	Ciężar zastępczy w puł na <i>st b</i>			Rozpiętość teoretyczna w <i>sqż</i>	Ciężar zastępczy w puł na <i>st b</i>			Rozpiętość teoretyczna w <i>sqż</i>	Ciężar zastępczy w puł na <i>st b</i>			Rozpiętość teoretyczna w <i>sqż</i>	Ciężar zastępczy w puł na <i>st b</i>		
	p_1	p_2	p_0		p_1	p_2	p_0		p_1	p_2	p_0		p_1	p_2	p_0
1	362	262	523	7	138	112	182	20	108	98	121	50	81	79	103
2	283	232	361	8	133	107	169	25	102	96	116	55	78	76	101
3	241	211	307	9	128	105	159	30	96	93	112	60	76	74	99
4	185	168	257	10	125	104	153	35	91	89	109	65	73	72	96
5	152	133	220	12	119	103	143	40	88	85	107	70	71	70	94
6	143	119	201	15	115	101	131	45	84	82	106	75	70	69	92

Przytem p_1 jest ciężarem zastępczym dla momentów i sił poprzecznych na podporze, p_2 dla momentów, a p_0 dla sił poprzecznych w środku przęsła:

a) Przy obliczaniu momentów zgięcia i sił poprzecznych w różnych przekrojach przęsła odpowiednie ciężary zastępcze należy określać przy pomocy proporcji, korzystając z wielkości ciężarów zastępczych, danych w tablicy dla przekrojów na podporze i w środku przęsła.

b) Dla ułatwienia dla każdego pojedynczego przekroju przęsła nie potrzeba stosować oddzielnych ciężarów zastępczych, lecz należy postępować w sposób następujący:

1. Przy obliczeniu nateżeń w pasach belek o rozpiętości 35 *sq* i więcej dla wszystkich przekrojów przęsła można przyjmować ogólny ciężar zastępczy, średni z pomiędzy wielkości p_1 i p_2 , przy mniejszych rozpiętościach wielkości ciężarów zastępczych mogą być przyjęte jednakowe w pewnych określonych częściach przęsła; liczby tych części zmienia się według rozpiętości od 6 do 12. Ciężar zastępczy dla każdej takiej części jest średnim z ciężaru zastępczego, obliczonego dla przekrojów skrajnych tej części.

2. Podobnież dla określenia nateżeń w krzyżulcach i pionowych częściach belki może dla nich być też przyjęta jednaka wielkość ciężaru zastępczego, dzieląc również belkę na kilka części, n. p. 6 do 12.

c) Dla rozpiętości nie wykazanych w tablicy ciężary zastępcze wyznaczć należy zapomocą wstawienia.

d) Za teoretyczną rozpiętość belki należy przyjąć odległość między środkami podporowych pionowych części belki.

Z tablicy powyższej widzimy, że zwłaszcza przy mniejszych rozpiętościach różnice między ciężarami zastępczymi p_0 , p_1 i p_2 są bardzo wielkie. Im mniejsza jest rozpiętość, tem większy byłby błąd, gdybyśmy jeden ciężar zastępczy przyjęli dla wszystkich punktów.

W Ameryce przyjmują przy mostach większych ciężar zastępczy, odpowiadający wozom ciężarowym i dodają jeszcze na długość parowozów odpowiednie ciężary uzupełniające, ciągle lub skupione (a. *locomotive excess*).

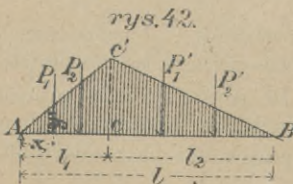
Większą dokładność da się osiągnąć, jeżeli ustawimy wzory przybliżone do ciężaru zastępczego w każdym przekroju. Wzory takie ustawił Winkler na tej podstawie, że ciężar zastępczy zależy od kształtu linii wpływowych.

Wiemy, że dla obciążenia ciągłego ilość mechaniczna Y (moment, oddziaływanie czy siła poprzeczna) równa się powierzchni wpływowej, pomnożonej przez ciężar jednostkowy p , zatem $Y = p \int y dx$, jeżeli y oznacza rzędną linii wpływowej. Jeżeli zaś na belkę działa układ ciężarów skupionych, to, jak wiadomo,

$Y = \sum Py$, jeżeli P (rys. 42.) oznacza ciężar skupiony. Obciążenie zastępcze, wywołujące tę samą ilość mechaniczną Y , wynosić więc będzie:

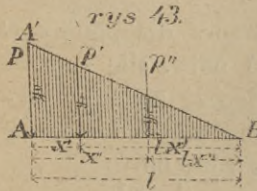
$$P = \frac{\sum Py}{\int y dx} = \frac{\sum Py}{A}, \dots 72)$$

jeżeli A oznacza powierzchnię wpływową.



Z powyższego okazuje się, że ciężar zastępczy jest głównie zależnym od kształtu linii i powierzchni wpływowej.

Przypuśćmy, że powierzchnia wpływowa ma kształt trójkąta prostokątnego (rys. 43). Taki kształt ma np. powierzchnia wpływowa oddziaływania, dodatnich i ujemnych sił poprzecznych belki prostej. W tym ostatnim wypadku długość trójkąta l nie jest równa rozpiętości, lecz długości obciążonej belki. Chcąc wywołać największe obciążenie, stawiamy pierwsze koło na wierzchołku A , gdzie rzędna największa y_0 .



Nazwijmy ilość mechaniczną, dla której wykreśliłmy linią wpływową Y , to $Y = Py_0 + P'y' + P''y'' \dots$ Z rys. widzimy, że $y' : y_0 = (l - x') : l$, więc $y' = \frac{y_0(l - x')}{l}$, podobnie $y'' = \frac{y_0(l - x'')}{l}$, więc $Y = \frac{y_0}{l} \sum P(l - x)$. Nazwawszy obciążenie zastępcze w tym wypadku p_1 , to otrzymamy z równ. (72) po wstawi-

$$\text{wieniu } A = \frac{1}{2} y_0 l \quad p_1 = \frac{\frac{y_0}{l} \sum P(l - x)}{\frac{1}{2} y_0 l} = \frac{2}{l^2} \sum P(l - x) \dots 73)$$

Według tej zasady obliczono ciężar zastępczy dla sił poprzecznych, wywołanych pociągiem normalnym austriackim. Rozporządzenie austr. min. handlu z dnia 15. września 1887. §. 3. b) brzmi:

b) Dla obliczenia kraty lub ścianki w belkach głównych powyższych konstrukcyj (przy belkach w dwu punktach podpartych) należy jednak największe siły poprzeczne, wywołane ciężarem ruchomym w jednym i drugim kierunku dla każdego przekroju mostu wyznaczyć w ten sposób, że uwzględnia się tylko obciążenie, sięgające od tego przekroju do odnośnej podpory.

Dla tego obciążenia ważną jest wtedy następną skalą bez względu na rozpiętość mostu i obliczona tylko według długości obciążonej części mostu na metr bieżący toru:

Skala b.

Długość części obciążonej 1,0 1,5 2,0 2,5 5 10 15 20 40 80 120 160 mostu w metrach.

Ciężar ruchomy na metr 30 25 20 18 14 10 8,5 7,6 6,2 4,8 4,0 3,5 bież. długości obciążonej w ton.

Dla rozpiętości pośrednich należy wstawiać wedle prawa linii prostej.

Dla mostów drogowych podaje Winkler następujące wzory przybliżone w tonach na m b dla szerokości 2,3 m (szerokość wozu).

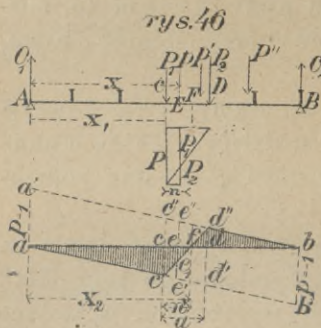
$$\left. \begin{array}{l} \text{dla dróg 1. klasy } p' = 1,02 + \frac{20}{l} t \\ \text{" " 2. " } p' = 1,00 + \frac{9,5}{l} \text{ " } \end{array} \right\} \dots 74a)$$

zmienia, więc i moment M jest ten sam. Zatem momenty są na poprzecznicach dla obciążenia pośredniego te same, co dla bezpośredniego.

Dla danego położenia ciężarów możemy więc wyznaczyć w ten sposób momenty, że wykreślimy bez względu na poprzecznice wielobok sznurowy, jak zwykle, a z punktów, gdzie są umieszczone poprzecznice, spuścimy pionowe aż do przecięcia się z wielobokiem sznurowym i te punkty przecięcia się połączymy prostymi.

§. 25. Siły poprzeczne w skutek ciężaru ruchomego.

Na belkę AB (rys. 46.) działa ciężar $P=1$ pośrednio przez poprzecznice, rozkładając się na dwie siły P_1 i P_2 , działające w punktach C i D .



Oddziaływanie w punktach A i B nie zmienia się, czy ciężar działa bezpośrednio, czy pośrednio przez poprzecznice, dlatego też, jeśli ciężar działa na długości AC lub DB siła poprzeczna w przedziale CD będzie ta sama, co przy obciążeniu bezpośrednim.

W pierwszym wypadku jest mianowicie $Q = O_1 - P$, w drugim $Q = O_1$.

Wykreślimy więc najprzód linie wpływowe tak, jak gdyby nie było poprzecznice, to ważne są one tylko na długościach AC i DB , więc ac' i $d''b$, a zmienia się tylko linia wpływowa w przedziale (n. *Fach*) CD , gdyż tu rozkłada się ciężar P na P_1 i P_2 , a $Q = O_1 - P_1$. Jeżeli $CE = n = 0$, E wpada na C , więc cała siła $P=1$ działa w punkcie C i otrzymamy rzędną linii wpływowej cc' . Jeżeli siła $P=1$ się porusza i przyjdzie do punktu D , to siła poprzeczna jest dd'' . Jeżeli zaś siła P znajduje się w przedziale CD to, rozkłada się na dwie siły P_1 i P_2 według prawa linii prostej, gdyż $P_1 = P \frac{a-n}{a}$. Jeżeli $d'd'' = -P=1$ i połączymy c' z d'' , a z punktu E spuścimy pionową, to $e_1e'' = P_1$, więc siła poprzeczna w CD $Q = O_1 - P_1 = ce'' - e_1e'' = -e_1e$. Widzimy więc, że prosta $c'd''$ jest linią wpływową dla przedziału CD .

W taki sam sposób możemy udowodnić dla jakichkolwiek linii wpływowych, że uwzględnimy wpływ poprzecznie, jeżeli spuścimy z obu poprzecznie danego przedziału pionowe i ich punkty przecięcia się z linią wpływową połączymy linią prostą, że zatem linia wpływowa między dwiema poprzecznicami jest prostą.

Siła poprzeczna w przedziale CD dla danego obciążenia jest stała, bo ciężar P rozdziela się na P_1 i P_2 , z tych P_1 działa w C , a potem nie ma żadnej siły działającej, aż w D siła P_2 . Ponieważ więc linia wpływowa jest dla całego przedziału ta sama, więc i *najw* Q jest takie samo dla jakiegokolwiek punktu tego przedziału.

Jeżeli siła P działa w przedziale CD , to siła poprzeczna w tym przedziale jest $Q = P \frac{l-x}{l} - P \frac{a-n}{a}$. Jestto równanie prostej $c'd''$. Niech będzie $x = x_1 + n$, to otrzymamy

$$Q = P \left(\frac{l-x_1-n}{l} - \frac{a-n}{a} \right) \text{ czyli } Q = \frac{P}{al} (n \{l-a\} - ax_1) \quad (78)$$

Zatem Q jest funkcją stopnia pierwszego zmiennej n , czyli linia $c'd''$ jest prostą, cośmy powyżej wykreślić udowodnili. Teraz łatwo wyznaczymy punkt F , w którym gdy siła działa, nie sprawia w przedziale CD żadnej siły poprzecznej. Punkt ten nazywamy punktem obojętnym (n. *neutraler Punkt*). Niech będzie dla punktu obojętnego $n = n'$, to wedle założenia

$$Q = 0 = \frac{P}{al} (n'(l-a) - ax_1), \text{ stąd } n'(l-a) = ax_1, \text{ więc}$$

$$n' = \frac{ax_1}{l-a} \dots \dots \dots (79)$$

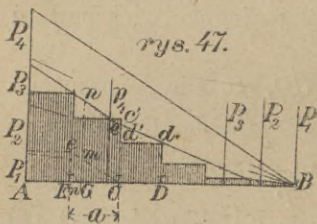
$$\text{Jeżeli } x_2 = x_1 + n', \text{ to } x_2 = x_1 + \frac{ax_1}{l-a} = \frac{lx_1}{l-a} \dots \dots (80)$$

Linia wpływowa nad osią $fd''b$ ma kształt trójkąta, z kształtu tej linii wpływowej widzimy, że wedle §. 15. dla *najw* Q obciążenie układem ciężarów skupionych ma być takie, aby ciężary jednostkowe na FD i DB były, ile możności, równe (cecha Winklera), a jeden ciężar musi stać w D . Nazwijmy wypadkową

ciężarów na długości FD P' , zaś na DB P'' , to, gdy $\frac{P'}{a-n'} > \frac{P''}{l-x_1-a}$, układ ciężarów posuwamy na prawo. Możemy też napisać $\frac{P'}{P''} > \frac{a-n'}{l-x_1-a} = \frac{a-\frac{ax_1}{l-a}}{l-x_1-a}$, zatem $P'l - P'a > P''a$,

nareszcie $\frac{P'}{a} > \frac{P' + P''}{l} \dots \dots \dots 81)$

A więc dla *najw* Q obciążyć mamy długość FB i starać się, aby ciężar jednostkowy w przedziale CD i na całej belce był, ile możności, równy. Podobnie postępujemy dla *najmn* Q , obciążając długość AF . Widzimy więc, że dla *najw* Q na prawej poprzecznicy stać będzie albo pierwszy, albo drugi ciężar*). Z tego wynika następująca konstrukcyja: Wykreślamy dla oddziaływania O_1 wielobok sznurowy (rys. 47.) jak dla obciążenia bezpośredniego według §. 14, który jest zara-



zatem linią *najw* ($+Q$) w razie, gdy pierwszy ciężar stoi na przekroju. W miejscach, gdzie są poprzecznice, kreślimy linie pionowe. Jeżeli dla jakiegoś przedziału CD dla *najw* ($+Q$) ma stać pierwszy ciężar w punkcie D , to Dd jest równe oddziaływaniu, a zarazem

sile poprzecznej dla całego przedziału, zatem linia *najw* Q , dd' będzie tu poziomą.

Jeżeli dla *najw* Q drugi ciężar ma stać na prawej poprzecznicy n. p. dla przedziału EC w punkcie C , to, gdy drugi ciężar P_2 stoi w C , stoi pierwszy ciężar P_1 w punkcie G . Składową P' tego ciężaru, działającą w punkcie E , otrzymamy, jeżeli zrobimy $Ee = P_1$, połączymy punkty e i C , to $Gm = P_1 \frac{a-n}{a} = P'$, stąd dla przedziału EC będzie $Q = O_1 - P' = Gn - Gm = mn$. Jeśli $mn > Cc$, to robimy $mn = Cc'$, i kreślimy poziomą, którą przedstawia *najw* Q .

b) Ciężar jednostajny ciągły.

Dla *najw* Q musi być długość FB (rys. 46.) obciążoną, zatem *najw* ($+Q$) = $p \cdot fd'b = p \frac{1}{2} (l - x_2) dd'$. Wstawivszy $\frac{l - x_1 - a}{l}$, a $x_2 = \frac{lx_1}{l - a}$ według rów. 80), otrzymamy

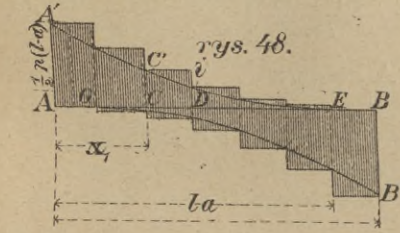
$$\text{najw } (+Q) = \frac{p(1 - a - x_1)^2}{2(1 - a)} \dots \dots \dots 82)$$

$$\text{Podobnie najw } (-Q) = -p \cdot acf = -\frac{1}{2} p x_2 \frac{x_1}{l} = -p \frac{lx_1}{l - a} \frac{x_1}{l}, \text{ więc najw } (-Q) = -\frac{px^2}{2(1 - a)} \dots \dots 83)$$

*) Gdyby trzeci ciężar postawić na poprzecznicy, to $\frac{P'}{a}$ w 81.) będzie już za wielkie dla zwykłych odstępów poprzecznic.

Widzimy więc, że wzory dla największych i najmniejszych sił poprzecznych są takie same jak 63) i 64) dla obciążenia bezpośredniego, jeżeli tylko w nich zamiast l podstawimy $l - a$,

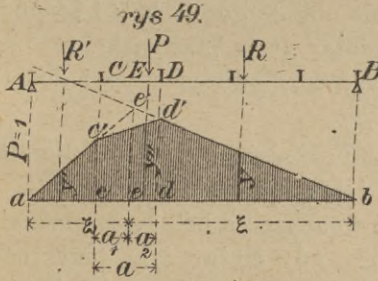
a x_1 zamiast x . Równania 82) i 83) przedstawiają dwie przystające parabole $A'E$ i GB' (rys. 48.), wykreślone, jak w §. 20, dla długości $l - a$. Największą siłę poprzeczną w przedziale CD przedstawia rzędna paraboli w C dla $x_1 = AC$. Wykreślnie więc



przedstawimy *najw* Q linią poziomą $c'i$. To samo stosuje się i do *najw* ($-Q$).

§. 26. Momenty w skutek ciężaru ruchomego.

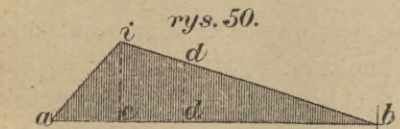
Wykreślmy naprzód linią wpływową $ac'b$ (rys. 49.) dla dowolnego punktu bez względu na poprzecznice. Według poprzedniego paragrafu uwzględnimy wpływ poprzecznic, spuściwszy z punktów C i D , gdzie są poprzecznice, ograniczające przedział CD , w którym dany punkt leży, pionowe i połączywszy c' z d' .



Linia wpływowa jest więc teraz $ac'd'b'$. Jeżeli mamy wykreślić linią wpływową dla przekroju, p. dla C (rys. 50.) to postępując w ten sposób, otrzymamy tę samą linią wpływową, jak gdyby poprzecznice nie było.

Jeżeli mamy wykreślić linią wpływową dla przekroju, w którym leży poprzecznicę n .

Znając linie wpływowe, możemy wyznaczyć najniekorzystniejsze obciążenie dla momentów.



a) Ciężary skupione. Niechaj wypadkowa ciężarów na AC (rys. 49.) będzie R' , wypadkowa ciężarów w przedziale CD P , zaś R wypadkowa ciężarów na DB . Nazwijmy odpowiednie rzędne linii wpływowej y' , y'' , y , to, gdy posuniemy układ ten na prawo o dx , różnica momentów będzie dM i otrzymamy $dM = R'dy' + Pdy'' - Rdy$.

Z rysunku możemy wyznaczyć y, y', y'' , a mianowicie:

$$dy' = \frac{ee'}{\xi_1} dx = \frac{\xi}{l} \cdot \frac{dx}{\xi_1},$$

$$dy'' = \frac{dd' - cc'}{a} \cdot dx = \left[\frac{\xi - a_2}{l} - \frac{\xi(\xi_1 - a_1)}{l\xi_1} \right] \frac{dx}{a} = \frac{a_1\xi - a_2\xi_1}{al\xi_1} dx,$$

$$dy = \frac{1}{l} dx. \text{ A zatem:}$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{R'\xi}{l\xi_1} + P \left(\frac{a_1\xi - a_2\xi_1}{al\xi_1} \right) - \frac{R}{l}, \text{ więc } dM > 0, \text{ gdy}$$

$$R'\xi + \frac{Pa_1\xi}{a} - \frac{Pa_2\xi_1}{a} - R\xi_1 > 0.$$

$$\left(R' + P \frac{a_1}{a} \right) \xi - \left(P \frac{a_2}{a} + R \right) \xi_1 > 0, \text{ czyli}$$

$$\frac{R' + P \frac{a_1}{a}}{\xi_1} > \frac{R + P \frac{a_2}{a}}{\xi} \dots \dots \dots 84)$$

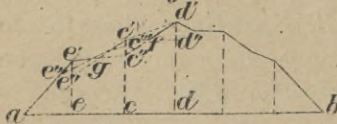
A więc przez przesunięcie na prawo zyskujemy, gdy zachodzi nierówność 84). Dla największych momentów przesuwamy tak długo, aż ciężar jednostkowy na obu długościach ξ i ξ_1 będzie, ile możliwości, równy, przyczem ciężar P w przedziale rozdzielamy w stosunku a_1 i a_2 i przyłączamy odnośne części do ciężarów prawej lub lewej strony.

Jeżeli punkt E leży w środku przedziału CD , to doliczamy po połowie ciężaru P do lewych i prawych ciężarów.

Gdy ciężar jaki schodzi lub wchodzi na belkę, to nie zmienia to znaku nierówności, tylko, gdy ciężar jaki przekroczy sąsiednią poprzecznicę C lub D , wtedy może się zmienić znak nierówności, więc dla większości musi być ciężar na jednej z poprzecznic tego przedziału.

Obliczamy więc największe momenty na poprzecznicach, a że linia wpływowa dla tych punktów jest ta sama, co dla obciążenia bezpośredniego, więc obliczamy te momenty tak jakby poprzecznice nie było i otrzymujemy np. w punkcie c (rys. 51.) moment cc' . Dla tego położenia układu ciężarów będzie na poprzecznicy d moment n. p. dd'' , co wyznaczyć możemy

rys. 51.



łatwo równocześnie przy konstrukcyi wykreslonej za pomocą wieloboku sznurowego. Dla tego więc położenia otrzymamy jako linię momentów w przedziale cd prostą $c'd''$. W ten

sam sposób wyznaczamy moment dla innego położenia, najniekorzystniejszego dla punktu d (jeden ciężar w d) i otrzymamy linią momentów w tym wypadku $e'd'$, więc linia największych momentów dla punktów, leżących między c i d będzie linia łamana $cf'd$. Często zamiast tej linii bierzemy linią $c'd'$, przezco otrzymujemy momenty nieco za wielkie.

Możliwym jest wprawdzie jeszcze, że gdy inny ciężar jaki stoi na sąsiednich poprzecznicach, co w rysunku uwidoczniliśmy dla przedziału ec , otrzymamy linią momentów $e''c''$, która dla środkowej części przedziału będzie największością i że wtedy linia *najw* M będzie dwa razy łamaną w tym przedziale, lecz jestto rzadki wypadek, a z powodu, że różnica nie jest wielką, możemy przyjąć jako linią *najw* M linią raz łamaną $e'gc'$ lub też $e'c'$.

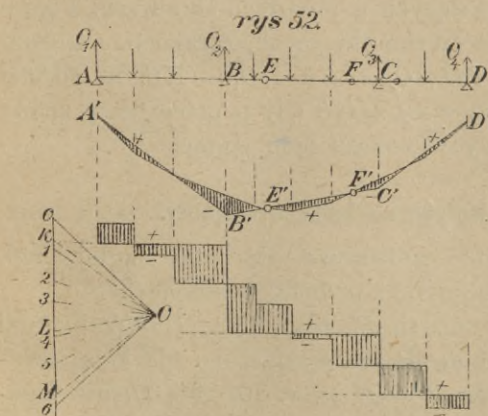
b) Obciążenie jednostajne ciągłe. Z kształtu linii wpływowej wypływa, że największe momenty otrzymamy dla obciążenia zupełnego. Wyznaczamy więc momenty tak, jak dla ciężaru stałego (§. 24).

VI. Belka ciągła przegubowa.

§. 27. Określenie.

Jeżeli belka jest podparta w kilku punktach, nazywamy ją

belką ciągłą, wieloprzęsłową (n. *continuirlicher Träger*, fr. *poutre continue*, an. *continuous beam*). Mówiliśmy już o niej pokrótce przy wykładzie statyki budowli*), obszerniej zastanowimy się nad nią później. Belka ciągła jest statycznie niewyznaczalną i aby ją obliczyć, musimy się uciec do prawideł sprężystości, co przedstawia



wiele niedogodności, jak o tem później będziemy mówić.

*) p. Podr. Statyki Budowli str. 150.

Aby uczynić belkę statycznie wyznaczalną, urządzamy przeguby, którymi łączymy pojedyncze części belki w ten sposób, że każda część jest tylko w dwu punktach podparta. Taką belkę (rys. 52.) nazywamy belką ciągłą przegubową (n. *continuirlicher Gelenkträger*, a. *hinged continuous girder*). Składa się ona z części w dwu punktach podpartych, jak AE i FD , które nazwiemy częściami wystającymi (n. *überhängender Theil*) i z części wiszących (n. *schwebender Theil*) EF , spoczywających na częściach wystających.

§. 28. Obciążenie dowolne.

Części wiszące zachowują się zupełnie tak, jak belki w dwu punktach podparte, a więc oblicza się je według zasad, wyłożonych w poprzednich rozdziałach. W ten sposób możemy wyznaczyć ciśnienia części wiszących na wystające w punktach podparcia E i F , a znając je możemy wyznaczyć oddziaływania, siły poprzeczne i momenty części wystających według zasad, wyłożonych w statyce budowli dla belek wystających *).

Na rysunku 52.) wyznaczaliśmy oddziaływania, momenty i siły poprzeczne wykreślnie. Wykreślamy mianowicie wielobok sił, przyjmujemy biegun O dowolnie i kreślimy wielobok sznurowy. Ponieważ w E i F momenty są równe zeru, więc $E'F'$ jest zamykającą w przeszle BC , a połączymy A' z B' i D' z C' otrzymamy kierunki zamykających w przeszłach skrajnych. Poprowadziwszy z O równoległe do zamykających, otrzymamy oddziaływania $O_4 = 6M$, $O_3 = ML$, $O_2 = LK$ i $O_1 = KO$, na podstawie których łatwo możemy wyznaczyć siły poprzeczne w znany sposób. Wielobok sznurowy wyznacza nam momenty.

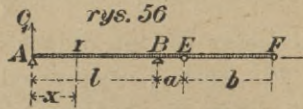
§. 29. Linie wpływowe belki wystającej.

Nim wyznaczymy linie wpływowe dla belki ciągłej przegubowej, wyznaczmy je najprzód dla belki wystającej.

Rozumie się, że dla punktu H (rys. 53.) między podporami AB linie wpływowe od A do B są te same, co dla belki zwykłej. Ponieważ równania dla Q i M (rów. 26, 29 i 30) nie zmieniają się, jeżeli ciężar przekroczy podporę A lub B , więc linie wpływowe poza podporami będą przedłużeniem linii wpływo-

*) p. Podr. Statyki Budowli str. 25. i nast.

Na rysunku 55. wyznaczylimy na tej samej zasadzie linie wpływowowe dla belki ciągłej, w której przeguby są w przęsłach skrajnych.



§. 31. Obciążenie jednostajne zupełne.

1. Przęsło średnie z dwoma przegubami:

a) Część wisząca EF (rys. 54.) zachowuje się jak belka zwykła, więc, gdy $EF = b$, otrzymamy według 59) i 60):

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} g (b - 2x) \\ M &= \frac{1}{2} g x (b - x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 85)$$

b) Dla części skrajnych BE i FC otrzymamy siłę poprzeczną i moment z linii wpływowych, $Q = g \cdot K'K''E''F'' = = g(1 \cdot KE + \frac{1}{2} l \cdot b)$, a ponieważ $KE = -x$, jeżeli x liczymy od punktu E na prawo jako dodatnie, na lewo jako ujemne, więc $Q = \frac{1}{2} g (b - 2x)$, $\dots \dots \dots 86)$ jak dla części wiszącej.

Podobnie otrzymamy z rys. 54. e, zważywszy, że $E'E'' = x$,

$$M = \frac{1}{2} g x (b - x), \dots \dots \dots 87)$$

jak dla części wiszącej.

2. Przęsło skrajne bez przegubu. Ciężar działający na EF (rys. 56.) jest gb , z tego w punkcie E działa $\frac{1}{2} gb$. Ustawmy równanie momentów dla punktu B, to $O_1 l - gl \cdot \frac{1}{2} l + + ga \cdot \frac{1}{2} a + a \cdot \frac{1}{2} gb = 0$, stąd $O_1 = \frac{1}{2} gl - \frac{1}{2} g \frac{a(a+b)}{l}$.

Dla punktu J w odstępnie x od A mamy:

$$Q = O_1 - gx = \frac{1}{2} g (1 - 2x) - \frac{1}{2} g \frac{a(a+b)}{l} \dots \dots 88)$$

$$M = O_1 x - \frac{1}{2} gx^2 = \frac{1}{2} g x (1 - x) - \frac{1}{2} g \frac{a(a+b)x}{l} \dots \dots 89)$$

3. Przęsło skrajne z przegubem. Tu dadzą się zastosować wzory 85) do 87) dla przęsła średniego z dwoma przegubami, jeśli przyjmiemy, że jedna z długości EB lub $CF = 0$.

4. Przęsło średnie bez przegubu (rys. 55). W przegubach E i F działają wtedy siły $\frac{1}{2}gb$ i $\frac{1}{2}gb_1$. Ustawmy teraz równanie momentów ze względu na punkt C , a otrzymamy

$$O_2 l - \frac{1}{2}gb(a+l) - \frac{1}{2}g(a+l)^2 + \frac{1}{2}a_1^2g + \frac{1}{2}gb_1a_1 = 0, \text{ a stąd}$$

$$O_2 = \frac{g}{2l} [(a+l)(a+b+l) - a_1(a_1+b_1)].$$

Dla przekroju H w odstępnie x od B jest

$$Q = O_2 - \frac{1}{2}gb - g(a+x), \text{ a po wstawieniu wartości za } O_2$$

$$Q = \frac{g}{2l} [l(1-2x) + a(a+b) - a_1(a_1+b_1)] \quad . \quad . \quad 90)$$

Moment w punkcie H będzie $M = O_2x - \frac{1}{2}gb(x+a) + - \frac{1}{2}g(a+x)^2$,

$$M = \frac{g}{2l} [lx(1-x) - a(a+b)(1-x) - a_1(a_1+b_1)x] \quad 91)$$

Jeżeli $a = a_1$ i $b = b_1$, to

$$Q = \frac{g}{2}(l-2x) \quad \text{a} \quad M = \frac{g}{2}(x(l-x) - a(a+b)) \quad . \quad 92)$$

§. 32. Największe siły poprzeczne.

1. Przęsło średnie z dwoma przegubami. Tu wyznaczmy tylko największe siły poprzeczne dla części wystających, bo części wiszące zachowują się zupełnie tak, jak belki w dwu punktach podparte.

Dla punktu K w odstępnie x od B linia wpływowa wykreślona jest na rys. 54 c. Dla $najw (+ Q)$ ma być obciążona długość KF , przyczem otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} najw (+ Q) &= pK'K''E''F' = p \left\{ a - x + \frac{1}{2}b \right\} \\ najw (- Q) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 93)$$

Dla części FC można zastosować te same wzory, zmieniając tylko znak.

Przy obciążeniu ciężarami skupionymi należy obciążyć dla $najw (+ Q)$ długość KF , największe ciężary umieścić na długości KE i jeden ciężar postawić na K .

2. Przęsło skrajne bez przegubu. Dla $najw (- Q)$ musi być obciążona lewa część odnośnego przęsła i przęsło sąsiednie do drugiego przegubu (rys. 54 b).

Dla obciążenia długości AJ w przęśle AB będzie, jak dla belki zwykłej $najw (-Q) = -\frac{px^2}{2l}$, dla obciążenia długości BF $Q = -\frac{p}{2} E'E'' (a+b)$. Z rysunku widzimy, że $E'E'' : 1 = a : l$, więc $E'E'' = \frac{a}{l}$. Wstawivszy to, otrzymamy dla obciążenia długości JF

$$najw (-Q) = -\frac{px^2}{2l} - \frac{pa}{2l}(a+b) = -\frac{p}{2l}(x^2 + a(a+b)) \quad 94)$$

Dla $najw (+Q)$ ma być obciążona długość JB , więc jak dla belki zwykłej $najw (+Q) = +\frac{p(1-x)^2}{2l}$ 95)

Przy obciążeniu ciężarami skupionymi należy dla największości obciążyć prawą stronę przęsła, jak dla belki zwykłej; dla $najw (-Q)$ należy obciążyć lewą część przęsła i długość BF . Dla mostów drogowych należy więc przyjąć dwa oddzielne układy ciężarów skupionych, pierwszy ciężar jednego postawić na J , drugiego na E wedle §. 13 i 15. Przy mostach kolejowych jestto niemożliwe, należałoby więc przyjąć takie obciążenie mostu, aby na długości AJ znajdowały się parowozy, przyczem na J stoi jedno koło, na długości JB wozy próżne, a na BF parowóz lub wozy ładowne.

3. Przęsło skrajne z przegubem. Tu da się zastosować wzór 93) dla przęsła średniego z dwoma przegubami. Widzimy bowiem na rys. 55 c, że linia wpływowa jest taka sama, jak w powyższym wypadku.

4. Przęsło średnie bez przegubu (rys. 55 b). Dla $najw (+Q)$ ma być obciążona prawa część przęsła odnośnego i sąsiednie lewe przęsło, dla $najw (-Q)$ przeciwnie część lewa odnośnego przęsła i sąsiednie prawe przęsło.

Przy obciążeniu długości HC danego przęsła powstaje siła poprzeczna jak przy belce zwykłej $Q_1 = \frac{p(l-x)^2}{2l}$, przy obciążeniu przęsła AB $Q_2 = p \cdot \frac{1}{2} (a+b) E'E'' = \frac{p(a+b)a}{2l}$,

więc $najw (+Q) = Q_1 + Q_2 = \frac{p}{2l} [(1-x)^2 + a(a+b)] \quad 96)$

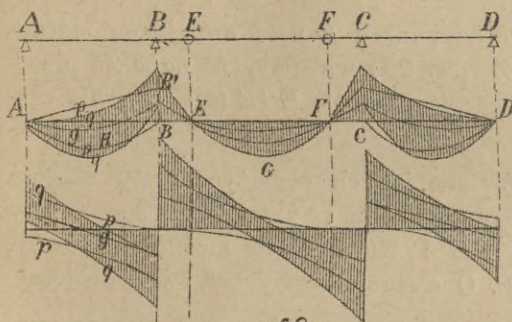
Podobnie otrzymamy

$$najw (-Q) = -\frac{p}{2l} [x^2 + a_1(a_1 + b_1)] \quad . . \quad 97)$$

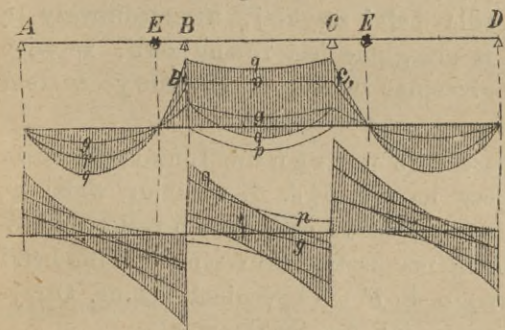
Co do obciążenia układem ciężarów skupionych zastosować możemy i tutaj uwagi wypowiedziane pod 2.

Na rysunkach 57 i 58. oznaczyliśmy wedle powyższego *najw* (+ Q) i *najw* (− Q).

rys 57.



rys 58.



najw (− Q) jest także parabolą o osi pionowej, lecz nie jest styczną do osi, gdyż dla $v = 0$ jest *najw* (− Q) = $-\frac{pa(a+b)}{2l}$.

W przęśle średnim bez przegubu (rys. 58.) linie *najw* (+ Q) i *najw* (− Q) są według rów. 96.) i 97.) parabolami o osi pionowej, nie dotykającymi jednak osi.

§. 33. Największe momenty.

1. Przęsło średnie z dwoma przegubami. Tutaj także wyznaczmy tylko największe momenty dla części wystających, bo części wiszące zachowują się zupełnie tak, jak belki w dwu punktach podparte. Dla punktu K mamy wykreśloną linią wpływową $K'E''F'$ (rys. 54 e), z której widzimy, że dla *najw* (− M)

W części wiszącej są, rozumie się, linie *najw*. sił poprzecznych te same, co dla belki zwykłej.

W częściach wystających przęśla średniego z dwoma przegubami są te linie proste wedle rów. 93.). To samo da się powiedzieć o części wystającej przęśla skrajnego (rys. 58.). Linie te proste są stycznymi do linii *najw* Q w przegubach.

W przęśle skrajnem bez przegubu (rys. 57.) linia *najw* (+ Q) jest parabolą, jak dla belki zwykłej (rów. 95), linia

mamy obciążyć długość $K'F'$, a obciążenie reszty belki jest obojętne. Możemy więc także przyjąć obciążenie zupełne belki, dla którego już w §. 31. wyznaczaliśmy moment. Zmienimy tylko g na p w rów. 87.) i otrzymamy:

$$\text{najw } (-M) = \frac{1}{2} px (1-x) , \dots \dots \dots 98)$$

przyczem x należy liczyć od punktu E na prawo jako dodatnie, na lewo jako ujemne. Z rów. 98.) widzimy, że $\text{najw } M$ przedstawia wykreślnie przedłużenie paraboli EGF' (rys. 57.) dla części wiszącej.

Dla układu ciężarów skupionych obciążyć należy długość KF (rys. 54), jak dla momentów belki zwykłej w ten sposób, aby ciężar jednostkowy na KE i EF był, ile możności, równy, a jeden ciężar stał na E . Obciążenie reszty belki jest obojętne.

Wyznaczyć momenty wykreślnie możemy za pomocą wieloboku sznurowego, jak dla belki zwykłej, uwzględnivszy tę okoliczność, że moment w przegubie jest równy zeru, że więc linia zamykająca musi przecinać wielobok sznurowy w tem miejscu.

2. Przesło skrajne bez przegubu. Linia wpływowa momentów wykreślona jest na rys. 54*d*. Z rysunku widzimy, że dla $\text{najw } (+M)$ ma być obciążone całe dane przesło, na którym linia wpływowa $A'J''B'$ ma kształt taki sam, jak dla belki zwykłej, następne zaś przesło do F ma być nieobciążone. Otrzymamy więc moment taki sam, jak dla belki zwykłej

$$\text{najw } (+M) = \frac{1}{2} px (1-x) \dots \dots \dots 99)$$

Jestto równanie paraboli AHB (rys. 57.).

Dla $\text{najw } (-M)$ nie powinno być obciążone przesło skrajne AB , przesło następne ma być obciążone do F , a obciążenie reszty belki jest obojętne. Widzimy więc, że obciążenie dla $\text{najw } (-M)$ uzupełnia obciążenie dla $\text{najw } (+M)$ do obciążenia zupełnego.

A zatem $\text{najw } (+M) = M_x - \text{najw } (+M)$, więc

$$\text{najw } (-M) = \frac{1}{2} px (l-x) - \frac{1}{2} p \frac{a(a+b)x}{l} - \frac{1}{2} px (l-x), \text{ zatem}$$

$$\text{najw } (-M) = -\frac{1}{2} p \frac{a(a+b)x}{l} \dots \dots \dots 100)$$

Jestto równanie linii prostej AB' (rys. 57.).

Dla układu ciężarów skupionych wynika obciążenie najniekorzystniejsze z kształtu linii wpływowych, zastosować więc tu należy pravidła, wyłożone przy momentach belki zwykłej.

3. Przeszło skrajne z przegubem. Tu zastosować się da wzór 98), jeśli tylko zmienimy b na l , więc

$$najw (+ M) = \frac{1}{2} px (b - x) \dots 101)$$

4. Przeszło średnie bez przegubu. Linie wpływowe momentów wykreślone są na rys. 55 *d*. Wynika z nich, że dla $najw (+ M)$ ma być dane przeszło całe obciążone, a sąsiednie przeszła nie. Ponieważ jednak linia wpływowa w danem przeszle BC jest taką samą, jak dla belki zwykłej, więc i $najw (+ M)$ da się tym samym wzorem wyrazić. Zatem

$$najw (+ M) = \frac{1}{2} px (l - x) \dots 102)$$

$Najw (- M)$ wyznaczymy, jak pod 2), mianowicie

$$najw (- M) = M_x - najw (+ M), \text{ więc według równ. 91)}$$

$$najw (- M) = \frac{p}{2l} [lx(l-x) - a(a+b)(l-x) - a_1(a_1+b_1)x] + \\ - \frac{1}{2} px (l-x),$$

$$najw (- M) = - \frac{p}{2l} [a(a+b)(l-x) + a_1(a_1+b_1)x] \quad 103)$$

Jeżeli $a = a_1$, $b = b_1$ to

$$najw (- M) = - \frac{p}{2} a(a+b) \dots 104)$$

Jestto równanie linii prostej poziomej B_1C_1 (rys. 58.).

Dla układu ciężarów skupionych wynika obciążenie najniekorzystniejsze z kształtu linii wpływowych. Dla $najw (- M)$ muszą być dwa układy ciężarów skupionych dla mostów drogowych, dla kolejowych zaś należy pociąg w ten sposób przyjąć, jak to wyłożyliśmy w §. 32. ust. 2.

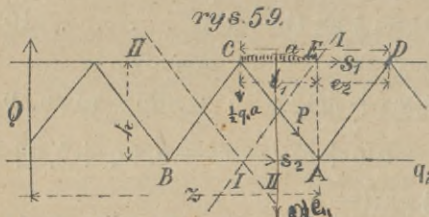
Na rys. 57.) i 58.) dodaliśmy siły poprzeczne i momenty, wywołane ciężarem własnym i ruchomym i otrzymaliśmy linie $najw Q$ i $najw M$ dla obciążenia równoczesnego.

C. Belka kratowa równoległa.

VII. Belka o kracie pojedynczej.

§. 34. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Belkę kratową poznaliśmy już w wykładzie statyki budowlanej *); poznaliśmy tam rozmaite jej rodzaje i jej części składowe. Tu podamy dalsze rozwinięcie zasad tamże podanych, a najprzód zastanawiać się będziemy nad belką kratową równoległą o kracie pojedynczej. Przetnijmy daną belkę, której część widzimy na rys. 59, płaszczyzną II i odejmy prawą część belki. Aby lewa



część pozostała w równowadze, musimy w przeciętych przekrojach zaczepić takie siły, jakie w nich pierwiej działały. Ponieważ zakładamy, że siły zewnętrzne działają tylko w węzłach, a krzyżulce są połączone przegibnie, więc siły wewnętrzne działają w kierunku osi przeciętych prętów.

Nazwijmy S_1 i S_2 siły wewnętrzne, działające w pasach belki równoległej, P siłę, działającą w krzyżulcu CA , h wysokość belki, Q siłę poprzeczną czyli wypadkową wszystkich sił, działających na lewą część belki, to na lewą część belki działają cztery siły: S_1 , P , S_2 i Q . Cztery te siły muszą być w równowadze, więc ze względu na punkt A suma momentów wszystkich sił musi być równą zeru. Zatem $M_1 + S_1 h = 0$, jeżeli $M_1 = Qz$ jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt A . Stąd otrzymamy:

$$S_1 = - \frac{M_1}{h} \dots \dots \dots 1)$$

Podobnie otrzymamy ze względu na punkt C

$$M_2 - S_2 h = 0, \text{ więc } S_2 = \frac{M_2}{h}, \dots \dots \dots 2)$$

jeżeli M_2 jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt C .

Jeżeli siły zewnętrzne działają tylko w węzłach, to obojętną jest rzeczą, jak przetniemy belkę w tym przedziale. Jeżeli

*) p. Podr. Statyki Budowli str. 181 i nast.

zaś przypuścimy, że pas górny i dolny są obciążone jednostajnie ciężarem q , to nie jest obojętnem, jak przecinamy belkę. Musimy mianowicie przeciąć belkę tak, abyśmy otrzymali te same siły zewnętrzne, którebyśmy otrzymali, gdyby ciężary w węzłach działały, a więc w połowie obu części pasów, zatem ukośnie w prostej II, równoległej do BC . Ponieważ przy wyznaczaniu sił zewnętrznych zawsze przypuszczaliśmy przekroje pionowe, więc zamiast przekroju II prowadzimy przekrój pionowy AE i robimy pewną poprawkę.

I tak, jeżeli ciężar działa w węzłach, a ciężar jednostkowy dla pasu górnego jest q_1 , to gdy uwzględnimy tylko dany przedział, działa w węźle C siła $\frac{1}{2}aq_1$, a więc moment tej siły ze względu na A będzie $= -\frac{1}{2}q_1ae_1$. Jeżeli zaś wyznaczymy moment dla ciężaru jednostajnie rozłożonego, to ciężar na CE da nam moment $-\frac{1}{2}q_1e_1^2$. Nazwijmy x poprawkę, którą dodać trzeba do tego momentu, aby otrzymać moment dla sił, działających w węzłach, to $-\frac{1}{2}q_1e_1^2 + x = -\frac{1}{2}q_1ae_1$, stąd $x = -\frac{1}{2}q_1e_1(a - e_1) = -\frac{1}{2}q_1e_1e_2$. Ze względu na tę poprawkę otrzymamy zamiast wzorów 1) i 2) wzory następujące

$$S_1 = -\frac{M_1}{h} + \frac{q_1 e_1 e_2}{2h} \dots \dots \dots 3)$$

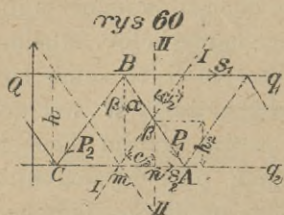
$$S_2 = +\frac{M_2}{h} - \frac{q_2 e_1 e_2}{2h} \dots \dots \dots 4)$$

Poprawki te musimy zastosować do ciężaru własnego belek głównych; dla reszty ciężaru stałego i ciężaru ruchomego nie potrzebujemy dodawać poprawek, jeżeli wyznaczamy siły zewnętrzne ze względu na poprzecznicę, położone w węzłach. A nawet i dla ciężaru własnego belek możemy się obejść bez poprawek, jeśli momenty liczymy na podstawie ciężarów węzłowych.

Ponieważ h jest liczbą stałą, więc z wzorów 1) i 2) wynika, że siły wewnętrzne w pasach są proporcjonalne do momentów, zatem linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach są te same, co dla momentów, jeżeli zmienimy odpowiednio podziałkę, a najniekorzystniejsze obciążenie będzie takie, dla którego moment będzie największy; wyznaczamy je więc według §. 26.

§. 35. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w krzyżulcach.

Jeżeli przetniemy belkę kratową płaszczyzną II (rys. 60.), która przecina także krzyżulec AB , to dla równowagi suma



pionowych składowych sił, działających na lewą część belki, S_1, P_1, S_2 i Q ma być równe zero, zatem $Q - P_1 \text{ dost } \alpha = 0$. Stąd

$$P_1 = Q_1 \text{ siecz } \alpha \dots \dots 5)$$

Podobny wzór otrzymamy dla krzyżulca BC

$$P_2 = -Q_1 \text{ siecz } \beta \dots \dots 6)$$

Jeżeli siły działają w węzłach, to obojętnem jest, jak przecinamy; jeżeli zaś ciężar jest jednostajnie rozłożony, to musimy przeciąć przez środek krzyżulca BA równolegle do drugiego rzędu krzyżulców, przez co części pasów zostaną podzielone na dwie równe części. Jeżeli Q oznacza siłę poprzeczną dla przekroju pionowego $\Pi \Pi$ przez środek krzyżulca AB , to znajdziemy Q_1 w następujący sposób. Nazwijmy $nm = c_2$, to $c_2 = \frac{1}{2} h \text{ st } \beta$, zatem $Q_1 = Q - q_1 c_2 + q_2 c_2$, czyli

$$Q_1 = Q - \frac{1}{2} h \text{ st } \beta (q_1 - q_2) \dots \dots 7)$$

Analogicznie możemy napisać

$$Q_2 = Q + \frac{1}{2} h \text{ st } \alpha (q_1 - q_2) \dots \dots 8)$$

§. 36. Wykreślne wyznaczenie sił wewnętrznych.

a) Metoda wielobokowa.

Wykreślne możemy wyznaczyć siły wewnętrzne dla danego obciążenia zapomożą planu sił*).

Wyznaczywszy oddziaływania znanym sposobem, wykreślamy wielobok sił na linii mn (rys. 9, tabl. I), albo też rozsuwamy go w sposób, na rysunku uwidoczony, dla przejrzystości.

Teraz wykreślamy w znany sposób plan sił i tak wyznaczamy wszystkie siły zewnętrzne. Metody tej z korzyścią użyć możemy dla ciężaru stałego i także do obliczania sił wewnętrznych w pasach, wywołanych ciągłym ciężarem ruchomym, gdyż wiemy, że największe siły wewnętrzne w pasach powstają dla obciążenia zupełnego.

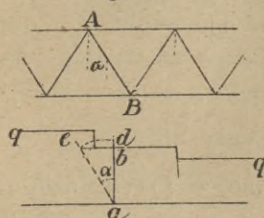
Dla obciążenia układem ciężarów skupionych jest najniekorzystniejsze obciążenie dla każdej części pasu inne, więc musimy dla każdej części pasu kreślić osobny rysunek. Także i dla krzyżulców metoda ta nie da się użyć z korzyścią.

*) p. Podr. Statyki Budowli str. 185 i 209.

b) Wyznaczanie sił wewnętrznych na podstawie sił poprzecznych i momentów.

1. Krzyżulce. Jeżelibyśmy otrzymali linię qq (rys. 61.) jako linię największych sił poprzecznych,

rys. 61.



to dla krzyżulca AB przedstawia *najw* Q długość ab .

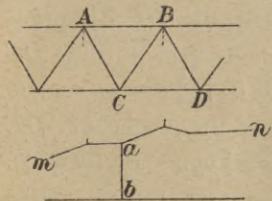
Według rów. 5) jest $P = Q$ siecz α , więc $P = ab$ siecz α . Wykreślmy przez punkt a linią $ae \parallel AB$, to $ae = ab$ siecz α , więc $ae = \text{najw } Q$ siecz $\alpha = \text{najw } P$.

Zróbmy $ad = ae$, to ad przedstawia największą siłę wewnętrzną, działającą w AB .

Jeżeli podzielimy P przez natężenie dopuszczalne τ , to otrzymamy powierzchnię przekroju A . Dla stałego τ możemy to zrobić, zmieniając odpowiednio podziałkę, a wtedy ad przedstawia wprost powierzchnię przekroju.

Dla ciężaru własnego belek głównych, jeśli go uwzględnimy jako ciężar ciągły, należy zrobić jeszcze poprawkę według §. 35.

2. Pasy. Według rów. 1) siła wewnętrzna w pasie górnym lub dolnym bez względu na znak jest $S = \frac{M}{h}$. Jeżeli man przedstawia linią *najw* M (rys. 62), a chcemy wyznaczyć siłę wewnętrzną w części pasu AB , to największy moment dla punktu C jest ab .



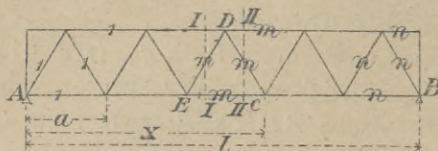
Moment ten mamy jeszcze podzielić przez h , co najlepiej zrobić, zmieniając podziałkę tak, że linia ab da wprost siłę wewnętrzną S . Jeżeli chcemy otrzymać przekrój, należy dla stałego natężenia dopuszczalnego jeszcze raz zmienić podziałkę. Dla ciężaru własnego mamy jeszcze zrobić poprawkę według §. 34.

§. 37. Belka o kracie równoramiennej.

Obliczymy teraz siły wewnętrzne belki kratowej o kracie równoramiennej na podstawie powyższych wzorów, przy czym przypuścimy obciążenie jednostajne ciągłe i pomost na dole.

1. Pasy. Z rys. 63. widzimy, że $l = na$, jeżeli a oznacza odstęp węzłów, czyli długość przedziału, a n ilość przedziałów.

rys. 63.



Dla wyznaczenia siły wewnętrznej w części pasu, oznaczonej m , liczymy moment dla górnego pasu ze względu na punkt C , dla dolnego zaś ze względu na

punkt D , więc dla górnego $x = ma$, dla dolnego $x = (m - 1)a + \frac{1}{2}a = \frac{2m - 1}{2}a$. A zatem otrzymamy momenty dla

$$\begin{aligned} \text{pasu górnego } M_1 &= \frac{1}{2}qx(l-x) = \frac{1}{2}qma(na-ma) = \frac{1}{2}m(n-m)a^2q, \\ \text{„ dolnego } M_2 &= \frac{1}{2}q\frac{2m-1}{2}a(na - \frac{2m-1}{2}a) = \frac{1}{8}(2m-1)(2n-2m+1)a^2q. \end{aligned}$$

Ponieważ przyjęliśmy tu ciężar jednostajnie rozłożony, więc mamy jeszcze zrobić poprawkę według równ. 3) i 4), przyczem $e_1 = e_2 = \frac{a}{2}$, zatem poprawka $-\frac{1}{2}q_1e_1e_2 = -\frac{1}{8}q_1a^2$, jeżeli nazwiemy q_1 ciężar zupełny ($q = p + g$), działający na górnym pasie, a q_2 na dolnym. Zatem

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -\frac{a^2}{8h} [4m(n-m)q - q_1] \\ S_2 &= +\frac{a^2}{8h} [(2m-1)(2n-2m+1)q - q_2] \end{aligned} \right\} \dots 9)$$

2. Krzyżulce. Według §. 35. wyznaczamy Q dla przekroju pionowego przez środek krzyżulca, więc dla DE dla przekroju II , zatem $x_1 = (m-1)a + \frac{1}{4}a = (m - \frac{3}{4})a$, a dla DC przecinamy według $IIII$, zatem $x_2 = (m-1)a + \frac{3}{4}a = (m - \frac{1}{4})a$.

Dla ciężaru własnego mamy $Q = \frac{1}{2}g(l-2x)$, więc dla DE jest $Q_1 = \frac{1}{2}agn - ag(m - \frac{3}{4})$, dla DC jest $Q_2 = \frac{1}{2}agn - ag(m - \frac{1}{4})$.

Do tego mamy dodać poprawkę według równ. 7) i 8). Tutaj jest $\text{st } \alpha = \text{st } \beta = \frac{a}{2h}$, a więc poprawka będzie $\frac{1}{2}h \text{st } \alpha (g_1 - g_2) = \frac{a}{4}(g_1 - g_2)$, gdy g_1 i g_2 oznaczają ciężar stały, działający na węzłach pasu górnego i dolnego.

Dla ciężaru zmiennego jest $AE = x_1 = (m-1)a$, zaś według równ. 82.) najw $Q = \frac{p(l-x_1-a)^2}{2(l-a)}$, więc

$$\begin{aligned} P_1 &= \left\{ \frac{1}{2}agn - (m - \frac{3}{4})ag - (g_1 - g_2)\frac{1}{4}a \right\} \text{siecz } \alpha + \\ &+ p \frac{[na - a - (m-1)a]^2}{2(na-a)} \text{siecz } \alpha, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{czyli } P_1 &= -\frac{1}{4} \left\{ (2n - 4m + 3)g - g_1 + g_2 \right\} \text{ a siecz } \alpha + \\ &\quad + \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} p \text{ a siecz } \alpha \\ P_2 &= \frac{1}{4} \left\{ (2n - 4m + 1)g + g_1 - g_2 \right\} \text{ a siecz } \alpha + \\ &\quad - \frac{(n-m)^2}{2(n-1)} p \text{ a siecz } \alpha \end{aligned} \right\} 10)$$

§. 38. Przykład.

Most kolejowy jednotorowy o dwu belkach kratowych z kratą równoboczną o rozpiętości teoretycznej 21 m. Pomost leży u dołu. — Przyjmujemy wysokość belki $h = 2,5 m$, a odstęp węzłów $\frac{21}{7} = 3 m$. Niechaj będzie według Otta (§. 2.) ciężar stały dla jednej belki $g = \frac{1}{2} (30 + 21 \cdot 800) kg = 0,71 t$. Ponieważ według §. 2. pomost z poręczami waży w przybliżeniu 500 kg/m, więc dla jednej belki 0,25 tm i działa na pas dolny, to $g_1 = 0,23 t$, $g_2 = 0,48 t$. Jako ciężar ruchomy przyjmiemy pociąg normalny austriacki (rys. 9.), a natężenie dopuszczalne według rozporządzenia austriackiego, więc $\tau = 700 + 2l = 742 kg/cm^2$.

Pasy. Moment z powodu ciężaru stałego otrzymamy według poprzedniego paragrafu

$$\begin{aligned} \text{dla węzłów dolnych } M_1 &= \frac{1}{2} m (7 - m) a^2 g - \frac{1}{8} g_1 a^2 = \frac{m(7-m)}{2} 9 \cdot 0,71 + \\ &- \frac{1}{8} 0,23 \cdot 9 = 3,195 m (7 - m) - 0,26 tm. \text{ Dla węzłów górnych otrzymamy} \\ M_2 &= \frac{1}{8} (2m - 1) (2 \cdot 7 - 2m + 1) 9 \cdot 0,71 - \frac{1}{8} 0,48 \cdot 9 = 0,799 (2m - 1) (15 + \\ &- 2m) - 0,54 tm. \end{aligned}$$

Dla ciężaru ruchomego wyznaczamy według §. 15. najniekorzystniejsze obciążenie i otrzymujemy, że dla węzła 1 ma stać na nim 2 koło, dla węzłów 2. i 3. trzecie koło, dla węzła I ma stać na prawej poprzecznicy 2 koło, dla węzłów zaś II, III i IV 3 koło. Dla tych położań pociągu obliczyliśmy według §. 16. najw. momenty. Dla węzłów pasu górnego obliczyliśmy dla najniekorzystniejszego położenia momenty na obu sąsiednich poprzecznicach M' i M'' , wtedy $M = \frac{1}{2} (M' + M'')$.

Siłę wewnętrzną obliczyliśmy wedle wzoru 1) i 2), zaś przekrój teoretyczny wedle wzoru $A = \frac{S}{\tau} = \frac{S}{0,742}$. Wyniki obciążenia zestawiliśmy w następującej tabliczce dla połowy belki, dla drugiej połowy są one takie same.

Część pasu	Moment w tm				Siła wewnętrzna t	przekrój teoretyczny cm ²
	ze względu na węzeł	z powodu ciężaru		razem		
		stałego	ruchomego			
0 1	I	10,3	41,9	52,2	20,9	28,2
1 2	II	25,8	103,9	129,7	51,9	70,0
2 3	III	35,4	139,7	175,1	70,0	94,3
3 4	IV	38,6	148 0	186,6	74,6	100,5
0 I	0	0	0	0	0	0
I II	1	18,9	83,8	102,7	41,8	56,3
II III	2	31,7	130,4	162,1	64,8	87,3
III IV	3	38,1	155,6	193,7	77,5	104,4

Wykreślnie wyznaczaliśmy siły wewnętrzne w pasach na tabl. I i przyjęliśmy następane podziałki: I dla długości $\frac{1\text{ cm}}{2\text{ m}} = 1:200$, II dla sił $\frac{1\text{ mm}}{1\text{ t}}$. Przyjawszy odległość biegunową $a = 20\text{ t}$, mamy III podziałkę dla momentów $\frac{1\text{ cm}}{20 \cdot 2\text{ tm}} = \frac{1\text{ mm}}{4\text{ tm}}$. Dla ciężaru stałego przyjęliśmy 4 razy większą odległość biegunową $a = 80\text{ t}$, za to przyjęliśmy także dla ciężarów 4 razy większą podziałkę $\frac{4\text{ mm}}{1\text{ t}}$ tak, że momenty odczytujemy w tej samej podziałce, co dla ciężaru ruchomego. Chcąc odczytać wprost przekroje, zrobiliśmy podziałkę IV $\frac{1\text{ mm}}{4 \cdot (2,5 \cdot 0,742)} = \frac{1\text{ mm}}{2,156\text{ cm}^2}$. Przekroje te wykreśliliśmy według podziałki V $\frac{1\text{ cm}}{50\text{ cm}^2}$ na rys. 8, który przedstawia teoretyczny rozkład materiału pasów.

Krzyżulce. Dla ciężaru stałego najlepiej wyznaczyć siły poprzeczne na podstawie ciężarów węzłowych. Ciężar węzłowy w pasie dolnym wynosi $G = 3,048 = 1,44\text{ t}$, w pasie górnym $G_1 = 3,023 = 0,69\text{ t}$, w punktach C $G_2 = \frac{3}{4} 3,023 = 0,52\text{ t}$, w D $G_3 = \frac{1}{4} 3,023 = 0,17\text{ t}$. Oddziaływanie wyznaczamy, nie uwzględniając ciężarów węzłowych w A i B , bo one przenoszą się wprost na podpory. A więc otrzymamy $O_1 = \frac{1}{2} (6 \cdot 1,44 + 5 \cdot 0,69 + 2 \cdot 0,52 + 2 \cdot 0,17) = 6,735\text{ t}$. Siły poprzeczne wyznaczymy teraz przez odejmowanie.

Siły poprzeczne dla ciężaru ruchomego obliczyliśmy na podstawie §. 25, przyczem dla pierwszego przedziału stoi drugie koło na 1. Dla tego położenia jest $O_1 = \frac{1}{2} (26 \cdot 17,4 + 15 \cdot 9,6 + 26 \cdot 1,8) = 30,63\text{ t}$. $Q = 30,63 - \frac{6,5 \cdot 1,2}{3} = 28,03\text{ t}$. Dla następnych przedziałów sprawia najw Q położenie pociągu, gdy 1 koło parowozu stoi na prawej poprzecznicy. Dalej mamy $P = Q$ siecz α , przyczem $\text{st } \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$, więc siecz $\alpha = \sqrt{1 + 0,6^2} = 1,166$. Przekrój obliczyliśmy wedle wzoru $A = \frac{P}{0,742}$, a dla porównania także według wzoru 18) w §. 9, przyczem $\tau = 700 \left(\frac{P_0}{P_0 + 1,3 P_1} \right)$.

Krzy- żulce	siła poprzeczna w t				Przekrój teore- tyczny w cm^2		
	w skutek ciężaru własnego	w skutek ciężaru ruchomego		suma		według rozp. min.	wedle wz. Weyr.
		najw (+ Q)	najw (- Q)	najw (+ Q)	najmn (+ Q)		
0 0	+ 0,17	—	—	+ 0,17	+ 0,17	- 0,2	- 0,2
0 I	+ 6,57	+ 28,03	0	+ 34,60	+ 6,57	- 54,4	- 53,5
I 1	+ 6,05	+ 28,03	0	+ 34,08	+ 6,05	+ 53,5	+ 53,0
1 II	+ 4,61	+ 20,20	- 1,67	+ 24,81	+ 2,94	- 38,9	- 39,4
II 2	+ 3,92	+ 20,20	- 1,67	+ 24,12	+ 2,25	+ 37,9	+ 38,7
2 III	+ 2,48	+ 14,34	- 5,20	+ 16,82	- 2,72	- 26,4	- 30,8
III 3	+ 1,79	+ 14,34	- 5,20	+ 16,13	- 3,41	+ 25,3	+ 29,3
3 IV	+ 0,35	+ 9,14	- 9,14	+ 9,49	- 8,79	- 14,9	- 25,5

Z tabliczki powyższej widzimy, że przekroje krzyżulców w średniej części belki, obliczone według rozporządzenia austriackiego, są za małe. Znak — w dwu ostatnich kolumnach oznacza, że przekrój pracuje na ciśnienie.

Wykreślnie wyznaczaliśmy siły poprzeczne według zasad, poprzednio wyłożonych, mierząc siły wedle podziałki II. Na pionowej przez A odcinamy ciężary kół parowozów i jaszczyka (rys. 2.) i przyjęwszy biegun w B , kreślimy

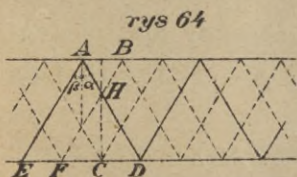
wielobok sznurowy, którego rzędne przedstawiają oddziaływania O_1 dla obciążenia jednostronnego, dlatego nazywamy go też wielobokiem oddziaływań. A że dla tego obciążenia najw $Q = O_1$, więc według §. 25, otrzymamy siły poprzeczne, kreśląc poziome z punktów przecięcia się wieloboku O_1 z punktami węzłowymi. Badamy także, czy drugie koło nie sprawia najw Q (p. rys. 47.) Gdy drugie koło stoi w r , pierwsze stoi w m . P_1 rozdziela się na $P' = mn$, i $P'' = P_1 - mn$. Wtedy $Q = O_1 - P' = mp - mn = np$. Zróbmy $rt = np$. to widzimy, że tu $rt > rs$. A więc w pierwszym przedziale drugie koło na węźle sprawia największość. Powtarzając to samo dla innych węzłów, przekonamy się, że zresztą wszędzie 1 koło sprawia najw Q . Dodajmy do tego siły poprzeczne w skutek ciężaru własnego, a otrzymamy najw. siły poprzeczne. Przez siecz α pomnożyliśmy, kreśląc równoległe do krzyżulec. Długości te przedstawiają siły wewnętrzne P , a odczytane według podziałki VI przekroje teoretyczne. Podziałkę VI zrobiliśmy, zmieniając jednostkę podziałki II w stosunku 0,742 : 1, więc $\frac{1\text{ mm}}{1:0,742\text{ cm}^2} = \frac{1\text{ mm}}{1,35\text{ cm}^2}$.

Siły wewnętrzne w skutek ciężaru własnego wyznaczaliśmy oprócz tego według metody wielobokowej w rys. 9, a to według podziałki VII $\frac{1\text{ cm}}{2t}$ Wielobok sił mn rozsuwamy przytem dla przejrzystości i kreślimy go w ten sposób, że uwzględniamy osobno ciężary węzłowe górne i dolne i kreślimy je po porządku na okół belki, a więc ciężary dolne, 1, 2, 3...6, oddziaływanie O_2 , potem ciężary górne VIII, VII... I, 0, nakoniec O_1 . Wykreślenie planu sił nie przedstawia teraz żadnych trudności.

VII. Belka o kracie wielokrotnej.

§. 39. Zasada obliczenia.

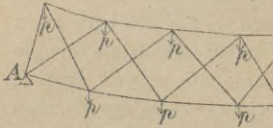
Belka o kracie wielokrotnej jest kratownicą statycznie niewyznaczalną (rys. 64). Chcąc dokładnie obliczyć taką belkę, musimy uciec się do prawideł sprężystości. Obliczenie dokładne jest jednak bardzo zawile, dlatego obliczamy zwykle w przybliżeniu taką belkę, rozkładając ją na pojedyncze części o kracie pojedynczej, a mianowicie kratę n krotną rozkładamy na n części*). Każdy krzyżulec znajduje się więc tylko w jednym układzie, zaś każda część pasu i narożniki są we wszystkich układach. Jeżeli to rozkładanie ma być dozwolone, to ugięcie belki powinno być we wszystkich układach takie, aby, złożywszy wszystkie układy w jedno, otrzymać można rzeczywiście ugiętą belkę.



*) Porów. Statyka Budowli str. 210.

Otóż to się niezupełnie sprawdza, bo aby otrzymać takie ugięcie, musielibyśmy przypuścić pasy łamane i w węzłach innych układów siły p (rys. 65.). Ale ponieważ ugięcie pasu jest bardzo

rys. 65.



małe, więc też i siły te p byłyby tak małe, że możemy je opuścić. Porównanie wyników metody przybliżonej z wynikami metody dokładnej stwierdza, że różnice są tak małe, że użycie metody przybliżonej w praktyce jest uzasadnione.

Będziemy więc belkę rozkładać na n układów i przyjmować będziemy te ciężary, jako działające na każdy układ, które zaczepiają w węzłach danego układu.

§. 40. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

Jeżeli chcemy liczyć w przybliżeniu, to przyjmujemy, że ciężar, działający na jeden układ, jest $\frac{1}{n}$ częścią całego ciężaru, zatem siła poprzeczna dla jednego układu będzie $\frac{1}{n} Q$.

Otrzymamy więc siłę wewnętrzną w krzyżulcu AD (rys. 64.)

$$P_1 = \frac{1}{n} Q \text{ siecz } \alpha \dots\dots\dots 11)$$

zaś w AE

$$P_2 = \frac{1}{n} Q \text{ siecz } \beta \dots\dots\dots 12)$$

Każda część pasu leży, jak wiadomo, we wszystkich układach, na każdy układ działa $\frac{1}{n}$ część ciężaru, więc siła wewnętrzna w przecie AB będzie w jednym układzie $\frac{M_1}{nh}$, w drugim $\frac{M_2}{nh}$ itd., gdy M_1 i $M_2 \dots$ oznaczają momenty dla pojedynczych układów, a więc ze względu na punkt F , C i D . Cała siła wewnętrzna w AB będzie

$$S = \frac{1}{nh} (M_1 + M_2 + M_3 + \dots M_n).$$

Jeżeli $M = \frac{1}{n} (M_1 + M_2 + \dots M_n)$ jest średnią arytmetyczną momentów $M_1, M_2 \dots M_n$, to

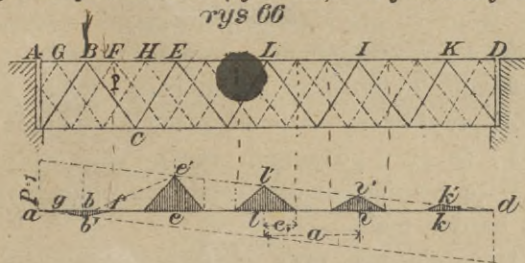
$$S = \frac{M}{h} \dots\dots\dots 13)$$

Zamiast tworzyć średnią arytmetyczną pojedynczych momentów, możemy też przyjąć, że M jest momentem ze względu

na punkt średni między F i D . Punkt ten średni C otrzymamy, jeżeli środek części pasu AB połączymy z wierzchołkiem H trójkąta, jaki tworzą sąsiednie krzyżulce i tę prostą przedłużymy aż do drugiego pasu.

§. 41. Dokładne wyznaczenie sił wewnętrznych w krzyżulcach.

Zadaniem naszym będzie najpierw wynaleść linię wpływową dla danego krzyżulca BC (rys. 66.). Wykreślmy najprzód linią



wpływową dla BC tak, jak gdyby krata była pojedyncza. Jeżeli pomost jest na pasie górnym, to otrzymamy linię $ab'e'd$. Jeżeli ciężar $P=1$ stoi w punkcie B , to cały ten ciężar działa na układ pełnemi liniami wyciągnięty, więc siła wewnętrzna w BC będzie bb' .

Jeżeli ciężar porusza się na prawo i przyjdzie do sąsiedniego węzła F , to cały ciężar przenosi się na drugi układ, a dla krzyżulca BC , należącego do układu wyciągniętego pełnemi liniami, siła wewnętrzna równa jest zeru. Gdy ciężar $P=1$ znajduje się między B i F , to działa on pośrednio przez poprzecznicę, więc według §. 25. otrzymamy linię wpływową, gdy połączymy b' z f . Tak samo postępujemy z drugiej strony punktu B , a otrzymamy linię wpływową gb' . To samo powtarzamy we wszystkich obciążonych węzłach danego układu E, L, I i K i otrzymujemy jako linie wpływowe same trójkąty.

Jeżeli krata jest dwukrotną, to te trójkąty schodzą się i otrzymujemy w węzłach drugiego układu punkty obojętne. Jeżeli zaś krata jest co najmniej trzykrotną, to otrzymamy długości, w których, jeżeli ciężar stoi, nie sprawia żadnej siły poprzecznej w danym krzyżulcu. Długość taką nazywamy długością obojętną (n. *neutrale Strecke*), jaką jest n. p. długość FH . Dla największości siły wewnętrznej w BC należy więc obciążyć

prawą część belki aż do punktu H , części lewej AF nie obciążać, a obciążenie długości FH jest obojętne.

Załóżmy, że belka jest obciążona ciężarem jednostajnym ciągłym i badajmy tylko wpływ obciążenia na długości LI , to otrzymamy P , siłę wewnętrzną w BC według sposobu przybliżonego (§. 40.), gdy $a = ne_1$, $P = \frac{p}{n} a \frac{U' + ii'}{2} = \frac{pe_1}{2} (U' + ii')$, zaś według sposobu dokładnego jest $P = (U' \frac{1}{2} e_1 + ii' \frac{1}{2} e_1) p = \frac{p}{2} e_1 \times (U' + ii')$.

Widzimy więc, że dla ciężaru jednostajnie ciągłego według sposobu przybliżonego otrzymujemy te same wyniki, co według sposobu dokładnego. Tylko przy końcu belki, gdzie nie zawsze $a = ne_1$, sposób przybliżony staje się nieco niedokładnym. Zważywszy jednak, że przy podporach rzędne linii wpływowej są bardzo małe, więc różnica między sposobem dokładnym a przybliżonym jest bardzo mała.

Inaczej rzecz się ma przy obciążeniu układem ciężarów skupionych. Tu musimy obliczać siły wewnętrzne na podstawie linii wpływowych, gdyż różnice między obu sposobami są znaczne. Przypuśćmy n. p., że belka jest obciążona układem ciężarów w odstępach $= a$, to gdy pierwszy ciężar postawimy na E , drugi wpadnie na L , trzeci na I itd. i P będzie takie, jak dla kraty pojedynczej, podczas gdy według sposobu przybliżonego mamy $\frac{P}{n}$. Z drugiej strony możliwym jest, że gdy ciężar postawimy na E , inne ciężary wpadną na długości obojętne i P może być mniejsze, niż według sposobu przybliżonego.

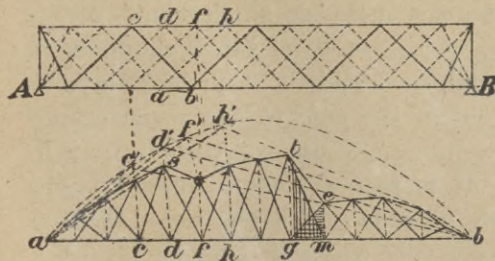
Dla *najw* P musimy obciążyć prawą stronę belki, a nie obciążać lewej strony, największe ciężary mają stać w pobliżu prawej poprzecznicy E , jeden z ciężarów ma stać na E . Przy mostach kolejowych trzeba zwykle drugie lub trzecie koło parowozu postawić na E .

Wielkość siły P wyznaczmy najlepiej wykreślnie zapomością linii wpływowych, rachunkiem zaś w ten sposób, że dla najniekorzystniejszego położenia obliczymy ciężary węzłowe i uwzględnimy tylko należące do danego układu.

§. 42. Dokładne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Chcąc wyznaczyć linie wpływowe dla siły wewnętrznej S w części pasu ab (rys. 67.), wykreślimy najprzód parabolę, na

rys 67



której leżą wierzchołki trójkątów linii wpływowych dla kraty pojedynczej.

Część pasu ab leży w czterech układach. Wykreślmy naprzód linią wpływową dla układu, oznaczonego liniami pełnymi $a'c'b'$. Ponieważ na ten układ działają tylko ciężary, działające w wę-

złach tego układu, a więc otrzymamy podobnie, jak w poprzednim paragrafie, trójkąty, których wierzchołki leżą na liniach $a'c'$ i $c'b'$.

To samo robimy ze wszystkimi innymi układami i w ten sposób dostaniemy szereg trójkątów, które się po części nakrywają. Łatwo jednak dostrzeżemy, że dwa takie trójkąty $gtm + meg = gmet$, że zatem, aby otrzymać sumę powierzchni wszystkich trójkątów, potrzebujemy tylko połączyć kolejno wierzchołki wszystkich trójkątów. W ten sposób otrzymamy jako linią wpływową wcale nieregularny wielobok, zupełnie odmienny od linii wpływowej dla kraty pojedynczej. Z linii wpływowej wynika, że dla *najw* S musi być cała belka obciążona, dla układu ciężarów skupionych największe ciężary mają być w pobliżu danej części pasu, a jeden ciężar musi być na jednej z poprzecznic, gdzie rzędne linii wpływowej są największe.

Liczebne wyznaczenie *najw* S jest bardzo mozolne, najlepiej wyznaczyć, jak w poprzednim paragrafie ciężary węzłowe dla kilku położań, które się nam wydają najniekorzystniejsze, gdy ciężar jeden jest na jednej z poprzecznic, dla których rzędne są największe. Obliczamy teraz dla tego położenia S dla każdego układu z osobna i dodajemy wyniki.

Wykreślnie możemy wyznaczyć siły wewnętrzne na trzy sposoby:

1. Nie rozkładając na pojedyncze układy, wyznaczmy siły poprzeczne i momenty tak, jak dla kraty pojedynczej. Siłę poprzeczną wyznaczamy ze względu na przekrój przez środek danego krzyżulca, a moment ze względu na punkt, który otrzymamy, jeżeli środek części pasu AB (rys. 64.) połączymy z wierzchołkiem trójkąta, jaki tworzą sąsiednie krzyżulce i tę prostą przedłu-

żymy aż do drugiego pasu. Dla krzyżulców dzielimy wyniki przez n . Metoda ta, odpowiadająca metodzie analitycznej, opisanej w §. 40, jest niedokładna, zwłaszcza dla ciężarów skupionych.

2. Rozkładamy na pojedyncze układy i przypuszczamy, że cały ciężar działa na jeden układ. Dla tego układu wyznaczamy siły poprzeczne i momenty, następnie dla wszystkich innych, Q dzielimy przez n , a za M bierzemy średnią arytmetyczną momentów dla pojedynczych układów. Według tego sposobu możemy obliczać ciężar własny, dla ciężarów skupionych używać jej nie należy.

3. Zapomocą linii wpływowych wyznaczamy siły wewnętrzne w pasach i krzyżulcach, co zwłaszcza jest do polecenia dla układu ciężarów skupionych.

§. 43. Krzyżulce giętkie.

Dla kraty prostokątnej urządzamy często słupy, pracujące na ciśnienie tęgie, przekątnie zaś giętkie (n. *schlaffe Diagonalen*) z żelaza płaskiego. Rozumie się, że nie mogą one wtedy pracować na ciśnienie, w tej części belki więc, w której siła poprzeczna może być dodatnią i ujemną, urządzamy dwa rzędy przekątni, jeden spadających na prawo, drugi na lewo. Otóż w takim razie w jednym przedziale jedna przekątnia pracowaćby powinna na ciągnięcie, druga na ciśnienie, ale z powodu, że jest giętka, przekątnia ciśniona wygina się i nie działa wcale

Kratę o podwójnych giętkich przekątniach obliczamy więc zwykle tak, jak gdyby istniały tylko przekątnie ciągnione. Właściwie jednak i giętkie przekątnie mogą pracować na małe ciśnienie, które łatwo obliczyć, znając wielkość i kształt przekroju; siłę działającą w przekątniach ciągnionych, należałoby więc zmniejszyć o siłę potrzebną do wygięcia przekątni ciśnionych.

Przekątnie podwójne urządzamy tylko tak daleko, dopóki siła poprzeczna zmienia swój znak, a więc na długości wychylenia się przekroju środkowego (§. 22).

§. 44. Przykład. Obliczenie mostu drogowego w kracie dwukrotnej prostokątnej.

Rozpiętość teoretyczna wynosi 30 m (tabl. II), pomost 5 m szeroki leży u góry. Przyjmujemy wysokość belki $h = \frac{l}{7,5} = 4 m$, a odstęp węzłów

$\frac{1}{2} = 2 m = \frac{1}{15} l$. Ciężar własny przyjmujemy według §. 2. na m^2 pomostu $3,7 \cdot 30 + 170 kg = 281 kg$, więc na $m b$ 5.281, a na jedną belkę $g = \frac{1}{5} \cdot 281 = 702,5 kg = 0,7 t$. Jeżeli z tego przypada $160 kg/m^2$ na ciężar pomostu, to na jedną belkę $\frac{1}{5} 160 = 400 kg = 0,4 t$, a więc ciężar samej belki $0,7 - 0,4 = 0,3 t/m$, z czego połowa $0,15 t/m$ działa na pas górny, połowa na pas dolny, a zatem $g_1 = 0,55 t/m$, $g_2 = 0,15 t/m$. Jako ciężar ruchomy przyjmujemy obciążenie, przepisane rozporządzeniem minist. austriackim dla dróg II. klasy przyczem na szerokość mostu, przyjmujemy dwa wozy, więc na jedną belkę przypada ciężar jednego szeregu wozów (rys. 6). Natężenie dopuszczalne przyjmujemy także wedle tego rozporządzenia $\tau = 750 + 2 \cdot 30 = 810 kg/cm^2$.

Belkę kratową rozkładamy na dwa układy i nazywamy układ, do którego należą węzły I, III, V, VII, ... XIII, układem I, drugi zaś układem II. Ciężar węzłowy dla mostu nieobciążonego wynosi dla pasu górnego $G_1 = 2 \cdot 0,55 = 1,1 t$, dla pasu dolnego $2 \cdot 0,15 = 0,3 t$, w węzłach skrajnych o połowę mniej.

1. Obliczenie.

a) Krata. Dla układu I jest $O_1 = 7(1,1 + 0,3) \frac{3}{15} = 5,23 t$, dla układu II $O_1 = 7(1,1 + 0,3) \frac{7}{15} = 4,57 t$. A więc w układzie I jest $Q = 5,23 t$, $5,23 + 0,3 = 4,93 t$, $5,23 - 1,4 = 3,83 +$ itd.: w układzie II jest $Q = 4,57 t$, $4,57 + 1,4 = 4,47 t$, $5,97 - 2,8 = 3,1 t$ itd. Wyniki uwidoczniliśmy poniżej w tabliczce.

Dla ciężaru ruchomego wyznaczmy ciężary węzłowe dla położenia, gdy szereg wozów posuwa się na prawo, a drugie koło ostatniego wozu stoi na I. Otrzymamy wtedy ciężary węzłowe w węzłach

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
3,0	1,8	1,2	1,2	1,8	1,8	2,7	0,45	1,05	3,0	1,8	1,2	1,2	1,8	1,8 t.

Z ciężarów tych działają na układ I tylko tłustemi czcionkami drukowane. Oddziaływanie $O_1 = \frac{4}{30}(3,0 \cdot 7 + 1,2 \cdot 6 + 1,8 \cdot 5 + 2,7 \cdot 4 + 1,05 \cdot 3 + 1,8 \cdot 2 + 1,2 \cdot 1) = 7,46 t = Q$ dla przedziału 0 II.

Z kształtu linii wpływowej (rys. 2.) wypływa, że przez posunięcie szeregu wozów na prawo lub na lewo zmniejsza się Q_1 , a więc *najw* $Q = 7,46 t$.

Dla przedziału I III otrzymamy najniekorzystniejsze obciążenie także, gdy ostatnie koło stoi na prawej poprzecznicy, a więc ciężary węzłowe będą te same, tylko o $4 m$ przesunięte, a zatem $Q = O_1 = \frac{4}{30}(3,0 \cdot 6 + 1,2 \cdot 5 + 1,8 \cdot 4 + 2,7 \cdot 3 + 1,05 \cdot 2 + 1,8 \cdot 1) = 5,49 t$.

Podobnie otrzymamy *najw* Q dla wszystkich innych krzyżulców; wyniki zestawiliśmy w poniżej podanej tabliczce.

Dalej mamy $P = Q$ siecz α . Dla przekątni siecz $\alpha = \sqrt{1 + (\frac{1}{4})^2} = 1,114$, dla słupów siecz $\beta = 1$, dla przekątni 0 I jest siecz $\alpha_1 = \sqrt{1 + (\frac{1}{4})^2} = 1,118$. Przekrój teoretyczny wyznaczamy według wzoru $A = \frac{P}{0,81} cm^2$.

Krzy- żulec	Siła poprzeczna w t					Siła wewnętrzna w t		Prze- krój teore- tyczny w cm ²
	w skutek ciężaru własnego	w skutek ciężaru ruchomego		suma		najw	najmn	
		najw (+ Q)	najw (- Q)	najw (+ Q)	najmn (+ Q)			
0 1	5,23	7,46	0	12,69	5,23	14,19	5,84	17,5
0 2	4,57	6,61	0	11,18	4,57	15,80	6,67	19,5
I 3	3,83	5,49	- 0,2	9,32	3,63	13,18	5,13	16,3
II 4	3,17	4,99	- 0,4	8,16	2,77	11,53	3,92	14,2
III 5	2,43	4,22	- 0,68	6,65	1,75	9,41	2,47	11,6
IV 6	1,77	3,57	- 0,96	5,34	0,81	7,55	1,14	9,3
V 7	1,03	2,92	- 1,36	3,95	- 0,33	5,58	- 0,49	6,9
VI 8	0,37	2,34	- 1,76	2,71	- 1,39	3,83	- 1,97	4,7
VII 9	- 0,37	1,76	- 2,34	1,39	- 2,71	1,97	- 3,83	2,4
VIII 10	- 1,03	1,36	- 2,92	0,33	- 3,95	0,49	- 5,58	0,6
1 I	4,93	7,46	- 0,2	12,39	4,73	- 12,39	- 4,73	15,3
2 II	4,23	6,61	- 0,4	10,84	3,83	- 10,84	- 3,83	13,4
3 III	3,53	5,49	- 0,68	9,02	2,85	- 9,02	- 2,85	11,1
4 VI	2,83	4,99	- 0,96	7,82	1,87	- 7,82	- 1,87	9,7
5 V	2,13	4,22	- 1,36	6,35	+ 0,77	- 6,35	- 2,13	7,8
6 VI	1,43	3,57	- 1,76	5,00	- 0,33	- 5,00	- 1,43	6,1
7 VII	0,73	2,92	- 2,34	3,65	- 1,61	- 3,65	+ 1,61	4,5
8 VIII	0,03	2,34	- 2,92	2,37	- 2,89	- 2,37	+ 2,89	3,6

Co do słupów 5 V i 6 VI zauważyć musimy, że gdy prawa strona belki jest obciążoną, a jedno koło stoi na V lub VI, to wtedy działają krzyżulec III 5 i 5 VII, względnie IV 6 i 6 VIII, a więc w słupach V 5 i VI 6 powstaje tylko ciśnienie = 3t, najmniejsze P powstaje więc dla belki nieobciążonej.

b) Narożniki. Siła, powstająca w 00 z powodu ciężaru własnego jest = $\frac{1}{3}(14(1,1 + 0,3) + 2 \cdot 0,55) = 1,035t$. Z powodu ciężaru ruchomego jest największa siła poprzeczna, gdy 2 koło wozu ustawimy na podporze. Wtedy otrzymamy $O_1 = \frac{1}{3}(3,3 \cdot 21 + 3 \cdot 3 \cdot 18,2 + 3 \cdot 1,5 \cdot 14,6 + 2 \cdot 3 \cdot 1,6) = 14,27t$. A więc $P = 10,35 + 14,27 = 24,62t$, a przekrój $A = \frac{26,62}{0,81} = 32,9 \text{ cm}^2$.

c) Pasy. Dla ciężaru własnego otrzymamy dla m-go węzła górnego lub dolnego układu Igo $M = 5,23m \cdot 2 - \frac{m-1}{2}(1,1 + 0,3) \frac{m+1}{2} \cdot 2 = 10,46m + - 0,7m^2 + 0,7$. Dla układu II otrzymamy $M = 4,57m \cdot 2 - \left(\frac{m}{2} - 1\right)(1,1 + + 0,3) \frac{m}{2} \cdot 2 = 10,54m - 0,7m^2$.

A zatem otrzymamy dla

$$m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

$$M = 10,5 \quad 18,3 \quad 26,8 \quad 31,0 \quad 35,5 \quad 38,0 \quad 39,6 \text{ tm.}$$

Dla części pasu górnego między węzłami m i m + 1 w lewej połowie belki jest $S = \frac{1}{4,0}(M_{m+1} + M_m + 2)$, dla pasu dolnego $S = \frac{1}{4,0}(M_{m-1} + + M_m)$. Wyniki uwidoczniliśmy poniżej.

Dla ciężaru ruchomego przeprowadzimy tylko obliczenie dla części pasu V VI, jako przykład. Następną tabliczka uwidoczni ciężary węzłowe przy różnych położeniach i momenty ze względu na węzły 7 i 8, jakoteż ich sumę.

koło	na węźle	układ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	M	M _p
			2	VI	I	1,8	2,7	0,45	1,05	1,8	3,0	1,2	1,2	1,8	1,8	2,7	0,45	1,05
1	VII	I	2,7	1,5	1,05	1,65	3,0	1,2	1,2	1,8	1,8	1,8	1,5	1,05	1,65	50,5	90,6	
		II	1,8	1,8	1,8	0,45	3,0	1,2	1,2	1,8	1,8	1,8	1,8	2,7	0,45	50,1	95,5	
2	VII	I	1,2	1,8	2,7	1,05	1,8	1,8	1,8	1,2	1,2	1,2	1,2	1,8	1,8	0,45	45,4	
		II	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8

A zatem, gdy drugie koło stoi na VII węźle, otrzymamy moment największy. Wyniki zaznaczyliśmy w poniżej podanej tabliczce. Przekrój teoretyczny wyznaczaliśmy z wzoru $\frac{s}{0,81} \text{ cm}^2$.

Oześć pasu	Najmnieko-rzystniejsze położenie		M _g	M _p	M _q	Prze-kroj A	Cześć pasu		Najmnieko-rzystniejsze położenie	M _g	M _p	M _q	Prze-kroj A
	koło	na węźle					koło	na węźle					
0	I	1	28,8	38,6	67,4	20,8	0	1	—	0	0	0	0
I	II	1	45,1	59,7	104,8	32,3	1	2	2	10,5	18,0	28,5	8,9
II	III	1	57,8	73,0	130,8	40,4	2	3	1	28,8	38,6	67,4	20,8
III	IV	1	66,5	86,0	152,5	47,1	3	4	1	45,1	59,7	104,8	32,3
IV	V	2	73,5	93,8	167,3	51,6	4	5	1	57,8	73,0	130,8	40,4
V	VI	2	77,6	95,5	173,1	54,4	5	6	1	66,5	86,0	152,5	47,1
VI	VII	1	79,2	98,0	177,2	54,7	6	7	2	73,5	93,8	167,3	51,6
VII	VIII	1	77,6	95,5	173,1	54,4	7	8	2	77,6	95,5	173,1	54,4

2. Sposób wykreślny.

a) Krata. Na rys. 2. tabl. II. wykreśliliśmy linie wpływowe dla układu I pełne, a dla układu II kreskowane, dla ciężaru 3,0t i 1,5t. Na podstawie tych linii wpływowych i paska papieru, na którym naznaczyliśmy szereg wozów, jak w rys. 3, wyznaczyliśmy, próbując, największe siły poprzeczne i wykreśliliśmy je w rys. 4. Używaliśmy przytem dla długości podziałki I $\frac{1\text{ cm}}{2\text{ m}}$, a dla sił podziałki II $\frac{1\text{ cm}}{2,5\text{ t}}$.

W rys. 4. wyznaczyliśmy też siły poprzeczne dla ciężaru własnego (kreskowane) i, aby otrzymać *najw* (+ Q), dodaliśmy odnośne rzędne. Zupełnie symetrycznie możnaby też wykreślić *najw* (− Q), ale właśnie z powodu tej symetrii uważaliśmy wykreślenie ich za zbyteczne. W celu wyznaczenia sił wewnętrznych w krzyżulcach wykreśliliśmy linie równoległe do ich kierunków. Długości, w ten sposób otrzymane, odczytane na podziałce II dają siły wewnętrzne P, a na podziałce III przekroje teoretyczne, przyczem dla podziałki III jest $\frac{1\text{ cm}}{2,5 : 0,81} = \frac{1\text{ cm}}{3,21\text{ cm}^2}$.

b) Pasy. Dla wyznaczenia sił wewnętrznych w pasach wykreśliliśmy linie wpływowe dla każdej części pasu dla ciężaru 3,0 i 1,5t (rys. 6). Na podstawie tych linii wpływowych i paska papieru, na którym wykreślono szereg wozów, wyznaczyliśmy największe momenty dla każdej części pasu i uwidoczniliśmy je na rys. 7. Momenty wykreśliliśmy według podziałki $\frac{1\text{ cm}}{20\text{ tm}} = \frac{1\text{ cm}}{a \cdot 2\text{ m}}$, więc odległość biegunowa $a = \frac{20}{2} = 10\text{ t}$, której użyliśmy do wykreślenia momentów z powodu ciężaru własnego. Wykreśliliśmy mianowicie osobno dla układu I, a osobno dla układu II, wielobok sznurowy, a ponieważ każda część pasu leży w obu układach, więc dodaliśmy odpowiednio momenty, n. p. dla części pasu III IV momenty w punktach 4 i 5. Odnośne sumy przedstawiają poziome linie kreskowane.

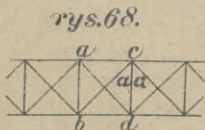
Aby otrzymać przekrój, należy zmienić podziałkę, a mianowicie przyjął podziałkę V $\frac{1\text{ cm}}{20 : (4 \cdot 0,81)} = \frac{1\text{ cm}}{6,17\text{ cm}^2}$.

Na rysunku 8. wykreśliliśmy na tej podstawie rozkład materiału według podziałki VI $\frac{1\text{ mm}}{2\text{ cm}^2}$, a na rys. 9. dla ciężaru własnego plan sił według podziałki II, przyczem połączyliśmy oba plany sił dla obu układów na jednym rysunku. Z tego planu sił otrzymujemy siły wewnętrzne w krzyżulcach wprost, zaś w pasach po dodaniu odnośnych sił z obu układów.

IX. Belka o kracie złożonej.

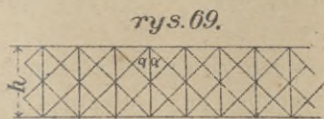
§. 45. Krata złożona bez sztucznego natężenia.

W kracie złożonej mamy trzy rzędy krzyżulców (rys. 68.), słupy (n. *Pfosten*, *Verticalen*) *ab*, *cd*, zwykle pionowe, czasem w mostach amerykańskich pochyłe i przekątnie (n. *Diagonalen*) *ad* i *cb*, nachylone do pionowej pod kątem α .

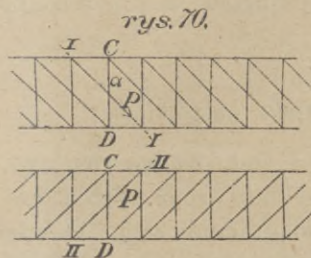


Belka o kracie złożonej jest statycznie niewyznaczalną; licząc w przybliżeniu, rozkładamy ją na dwie belki o kracie pojedynczej, przyczem nietylko pasy, ale i słupy są w obydwu układach. Jeden z nich ma przekątnie, spadające w prawo, drugi w lewo.

Krata złożona może też być wielokrotną (rys. 69). Jeśli liczba podziału jest n , to, gdy rozłożymy kratę na dwa układy, w każdym z tych układów jest liczba podziału $n' = \frac{1}{2}n$ (rys. 70).



rys. 69.



rys. 70.

Słupy. Słupy należą do obu układów, więc wyznaczamy siłę wewnętrzną dla obu układów i dodajemy. Dalej przypuszczamy, że na jeden układ działa tylko połowa ciężaru, działającego na całą belkę, więc siła wewnętrzna w słupie DC będzie według rów. 11)

dla I. układu (rys. 70.) $V_1 = -\frac{1}{2} \frac{Q_1}{n'} = -\frac{Q_1}{n},$

„ II. „ „ $V_2 = +\frac{1}{2} \frac{Q_2}{n'} = +\frac{Q_2}{n},$

przyczem Q_1 oznacza siłę poprzeczną dla przekroju I I, a Q_2 dla przekroju II II.

A zatem siła wewnętrzna w słupie CD będzie $V = V_1 + V_2 = -\frac{1}{n} (Q_1 - Q_2)$. Wedle §. 35 (rów. 7 i 8) mamy $Q_1 = Q + \frac{1}{2} h \operatorname{st} \alpha (q_1 - q_2)$, $Q_2 = Q - \frac{1}{2} h \operatorname{st} \alpha (q_1 - q_2)$, więc $Q_1 + - Q_2 = h \operatorname{st} \alpha (q_1 - q_2)$, zatem

$$V = -\frac{h \operatorname{st} \alpha}{n} (q_1 - q_2) \dots \dots \dots 14)$$

Przytem oznaczają q_1 i q_2 ciężary jednostkowe, działające na pasie górnym i dolnym. A więc gdy pomost jest u góry, $q_1 > q_2$, zatem słupy pracują na ciśnienie, gdy zaś pomost jest u dołu, na ciągnienie. W ogóle siły wewnętrzne w słupach są bardzo małe.

Przekątnie. Przekątnie znajdują się tylko w jednym układzie, więc $P = \frac{1}{2} \frac{Q_1}{n'} \operatorname{siecz} \alpha = \frac{Q}{n} \operatorname{siecz} \alpha \dots \dots \dots 15 a)$

$$P' = -\frac{1}{2} \frac{Q_2}{n'} \text{ siecz } \alpha = -\frac{Q}{n} \text{ siecz } \alpha, \dots 15 b)$$

bo tu przekroje są pionowe, więc $Q_1 = Q_2$.

Widzimy więc, że w przybliżeniu są siły wewnętrzne, działające w przekątniach, takie, jak gdyby słupów nie było.

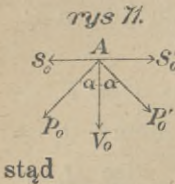
Pasy. Ponieważ siła, działająca w słupach jest bardzo mała, więc w przybliżeniu obliczamy pasy tak, jak gdyby słupów nie było.

Przy dokładnej teorii belek kratowych o kracie złożonej, musimy wziąć do pomocy prawidła sprężystości i uwzględnić materiał i przekroje, które obliczamy najprzód w przybliżeniu. Teorią tę podamy w drugim tomie.

§. 46. Krata złożona ze sztucznem natężeniem.

Przypuśćmy najprzód, że belka jest podparta na rusztowaniu tak, że ciężar własny na belkę także nie działa. Jeżeli teraz w jednym słupie sprawimy sztuczne ciągnięcie w jakikolwiek sposób n. p. naciągnięciem śruby, to w pasach i przekątniach powstaną w skutek tego siły, które nazwiemy sztucznymi siłami wewnętrznymi (n. *Künstliche Spannung*).

Jeżeli sztuczne ciągnięcie w słupie (rys. 71.) jest V_0 , a powstałe stąd siły wewnętrzne w przekątniach nazwiemy P_0 i P'_0 , a w pasach S_0 i S'_0 , to z powodu symetrii $P_0 = P'_0$ i $S_0 = S'_0$.

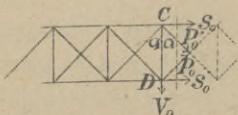


Dla równowagi musi być

$$P_0 \text{ dost } \alpha + P'_0 \text{ dost } \alpha + V = 0, \text{ albo } 2 P_0 \text{ dost } \alpha = V,$$

$$\text{stąd } P_0 = P'_0 = \frac{1}{2} V_0 \text{ siecz } \alpha. \dots 16)$$

Gdy przetniemy belkę płaszczyzną pionową (rys. 72.) otrzymamy dla równowagi $2 S_0 + 2 P_0 \text{ wst } \alpha = 0$, a stąd $S_0 = -P_0 \text{ wst } \alpha = \frac{1}{2} V_0 \text{ st } \alpha \dots 17)$



Dla kraty n krotnej otrzymamy w podobny sposób $S_0 = +\frac{1}{4} n V_0 \text{ st } \alpha \dots 18)$

Jeżeli teraz zdejmujemy rusztowanie i belkę obciążymy, to musimy dodać siły wewnętrzne, wywołane ciężarem stałym i ruchomym, do sił, wywołanych sztucznem natężeniem V_0 i otrzymamy siłę wewnętrzną w słupach wiszących $V = V_0 + V_1 = V_0 - \frac{h \text{ st } \alpha}{n} (q_1 - q_2) \dots 19)$

Dalej mamy w krzyżulcach

$$\left. \begin{aligned} P &= P_0 + P_1 = -\frac{1}{2} V_0 \text{ siecz } \alpha + \frac{1}{n} Q \text{ siecz } \alpha \\ P' &= P_0 + P'_1 = -\frac{1}{2} V_0 \text{ siecz } \alpha - \frac{1}{n} Q \text{ siecz } \alpha \end{aligned} \right\} \dots 20)$$

V_0 jest zależne od nas, możemy więc sprawić tak wielkie ciągnięcie V_0 , aby P i P' były zawsze ujemne, a więc dla najw P_1 , a zatem i najw Q_1 , aby $P=0$.

Wtedy musi być $\frac{1}{2} V_0 \text{ siecz } \alpha = \frac{1}{n} \text{ najw } Q \text{ siecz } \alpha$, więc

$$V_0 = \frac{2}{n} \text{ najw } Q \dots \dots \dots 21)$$

Jeżeli więc V_0 ma powyższą wartość, to najw $P=0$, a najw $P' = \frac{1}{2} \frac{2}{n} \text{ najw } Q \text{ siecz } \alpha - \frac{1}{n} \text{ najw } Q \text{ siecz } \alpha =$

$$= \frac{2}{n} \text{ najw } Q \text{ siecz } \alpha = 2 \text{ najw } P'_1 \dots \dots \dots 22)$$

Widzimy więc, że dla najniekorzystniejszego obciążenia siła wewnętrzna w jednej przekątnej staje się zerem, ale za to w drugiej przekątnej ciśnienie wzrasta do podwójnej wielkości.

§. 47. Belki Howe'a i Ridera.

Belka Howe'a jestto belka o kracie złożonej, której wszystkie części są drewniane z wyjątkiem słupów wiszących, które są żelazne i zakończone gwintami. Naciągnięciem śrub wywołujemy sztuczne nateżenie. Zastrzały rozróżniamy podwójne; te, któreby bez sztucznego nateżenia były także zastrzałami, nazywamy zastrzałami głównymi (n. *Hauptstrebe*, fr. *lien*, *lien principal*, a. *principal strut*), te zaś, które bez sztucznego nateżenia byłyby ścięgnami, nazywamy zastrzałami drugorzędnymi lub odstrzałami (n. *Gegenstrebe*, fr. *contrelien*, a. *counterstrut*).

Jeżeli zamiast drzewa użyjemy żelaza lanego, a w pasie dolnym kutego, to otrzymamy belkę Schiffkorna, którą oblicza się zupełnie, jak belkę Howe'a.

Ciągnięcie sztuczne w pasach wiszących ma być według 21)

$$V_0 = \frac{2}{n} \text{ najw } Q - \frac{h \text{ st } \alpha}{n} (q_1 - q_2). \text{ Według tego, czy } q_1 \leq q_2 \text{ jest } V_0 \leq V. \text{ Zastrzały główne obliczamy według rów. 22).}$$

Z poprzedniego widzimy, że ponieważ dla jednostronnego obciążenia belki siła wewnętrzna w zastrzałach drugorzędnych

jest równą zeru, więc największe siły wewnętrzne w zastrzałach głównych i słupach wiszących możemy obliczać tak, jak gdyby zastrzałów drugorzędnych wcale nie było.

To samo stosuje się i do pasów, które obliczamy dla obciążenia zupełnego, przy którym siły wewnętrzne w odstrzałach są bardzo małe. Obliczamy więc je, jak gdyby odstrzałów wcale nie było. Dla belki nieobciążonej powstaje w pasie górnym ciśnienie z powodu ciężaru własnego, a ciągnięcie z powodu nateżeń sztucznych wedle rów. 18).

Największa siła wewnętrzna odstrzałów jest dla belki nieobciążonej $P = -\frac{1}{2} V_0$ siecz $\alpha + \frac{1}{n} Q_0$ siecz $\alpha = P_1 + \frac{1}{n} Q_0$ siecz α . A więc ciśnienie w odstrzałach jest o siłę wewnętrzną $\frac{1}{n} Q_0$ siecz α mniejsze, niż P_1 . Zwykle przyjmujemy w przybliżeniu, że *najw* $P = P' = \frac{1}{2}$ *najw* P_1' , a więc siła wewnętrzna w odstrzałach równa się w przybliżeniu połowie *najw.* siły wewnętrznej, działającej w zastrzałach głównych.

Trudno jednak bardzo w praktyce śruby naciągnąć i utrzymać w naprężeniu takim, jakiego teoria wymaga. Często naciąga się śruby tak, aby oś pasu według oka była regularną linią, trochę na górze wygiętą, wtedy jednak panuje wielka niepewność co do rzeczywistych nateżeń, które nie zgadzają się z nateżeniami obliczonymi na podstawie powyżej wyluszczonych przypuszczeń.

Przy dokładnem wyznaczaniu sił wewnętrznych musimy się uciec do prawideł sprężystości, robić pewne przypuszczenia, stąd wyznaczenie nateżeń niepewne i bardzo zawile.

Belka Ridera jest podobną do belki Howe'a, różni się od niej jednakże tem, że tam naciągamy sztucznie przekątnie, a słupy pracują na ciśnienie. Wartość tego rodzaju belek, używanych zresztą tylko w Ameryce, jest taka sama, jak Howe'a.

X. Ilość materiału.

§. 48. Uwagi ogólne.

Znajomość ilości materiału potrzebna jest do obliczenia przybliżonego ciężaru własnego (§. 2) i do wyznaczenia najkorzystniejszego kształtu belki. Rozróżniamy ilość materiału teo-

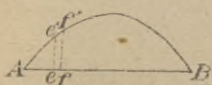
retyczną, którąby posiadała belka, gdyby wszystkie jej części miały tyle tylko materiału, ile teoria wymaga i rzeczywistą ilość materiału, większą z powodu, że w rzeczywistości musimy często używać przekrojów większych i z powodu połączeń, których przy teoretycznej ilości materiału nie uwzględniamy.

Aby otrzymać rzeczywistą ilość materiału musimy ilość teoretyczną pomnożyć liczbą, większą od jedności t. z. współczynnikiem ustrojowym (*n. Constructionscoefficient*). Teraz będziemy mówić tylko o ilości teoretycznej, idąc za wywodami Winklera; współczynniki ustrojowe podamy dopiero w ustrojowej części budowy mostów.

§. 49. Objętość pasów.

Przyпускаjąc, że oba pasy są z jednego materiału, dla którego natężenie dopuszczalne według Winklera jest τ_0 , τ_1 i τ_2 . Nazwijmy objętość obu pasów V_1 , a licząc na jednostkę długości v_1 , to wyznaczamy te ilości w następujący sposób (rys. 73).

rys. 73.



a) Ciężar stały. Niech będzie moment z powodu ciężaru stałego dla pewnej części pasu górnego ee' a dla odnośnej części dolnego pasu ff' , to siła wewnętrzna w pasie górnym będzie $\frac{ee'}{h}$, a w dolnym $\frac{ff'}{h}$, zatem $v_1 = \frac{ee' + ff'}{h\tau_0}$. Niech będzie $ee' + ff' = 2M$, gdzie M jest momentem średnim, a więc ze względu na punkt średni między bardzo bliskimi punktami e i f , to otrzymamy $\frac{2M}{h\tau_0}$, zatem

$$v_1 = \int_A^B \frac{2M}{h\tau_0} dx, \text{ czyli } V_1 = \frac{2}{h\tau_0} \int_A^B M dx \quad \dots \quad 23)$$

b) Ciężar ruchomy. Dla ciężaru ruchomego otrzymamy zupełnie ten sam wzór, tylko musimy za M wstawić *najw* i *najmn* M , a τ_1 i τ_2 za τ_0 . Więc cała objętość pasów będzie

$$V_1 = \frac{2}{h\tau_0} \int_A^B M dx + \frac{2}{h\tau_1} \int_A^B \text{najw } M dx + \frac{2}{h\tau_2} \int_A^B \text{najmn } M dx.$$

$$V_1 = \frac{2}{h} \left[\frac{1}{\tau_0} \int_A^B M dx + \frac{1}{\tau_1} \int_A^B \text{najw } M dx + \frac{1}{\tau_2} \int_A^B \text{najmn } M dx \right] \quad 24)$$

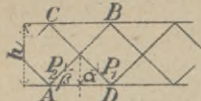
Dla belki jednoprzęsłowej jest $M = \frac{1}{2} gx(l-x)$, najw $M = \frac{1}{2} px(l-x)$, najmn $M = 0$; więc $V_1 = \frac{g}{h\tau_0} \int_A^B x(l-x) dx + \frac{p}{h\tau_1} \int_A^B x(l-x) dx$, a stąd

$$V_1 = \frac{l^3}{6h} \left\{ \frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right\} \dots \dots \dots 25)$$

I tak n. p. dla $h = 0,1l$ jest $V_1 = \frac{5l^2}{3} \left\{ \frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right\}$
 a „ „ $h = \frac{1}{8}l$ „ „ $v_1 = \frac{4l^2}{3} \left\{ \frac{g}{\tau_1} + \frac{p}{\tau_1} \right\}$ } 26)

§. 50. Objętość kraty z jednego materiału.

Niech będą oba rzędy krzyżulców z tego samego materiału. Dla kraty n krotnej jest siła wewnętrzna w CD (rys. 74.) $P_1 = \frac{1}{n} Q$ siecz α , zaś siła wewnętrzna w AB będzie $P_2 = \frac{1}{n} Q'$ siecz β .



A więc

przekrój krzyżulca CD będzie... $\frac{1}{n}$ siecz $\alpha \left\{ \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right\}$,
 zaś „ „ „ AB „ $\frac{1}{n}$ siecz $\beta \left\{ \frac{Q_0'}{\tau_0} + \frac{Q_1'}{\tau_1} + \frac{Q_2'}{\tau_2} \right\}$,

gdzie Q_0, Q_1 i Q_2 oznaczają siły poprzeczne w skutek ciężaru własnego i największe i najmniejsze w skutek ciężaru ruchomego. Długość krzyżulców jest $CD = h$ siecz α , zaś $AB = h$ siecz β , a w przybliżeniu możemy też przyjąć $Q_0 = Q_0', Q_1 = Q_1', Q_2 = Q_2'$.

Objętość dwu krzyżulców równa się więc $\frac{h}{n} \left\{ \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right\} \times \times$ (siecz² α + siecz² β). Na długość AD mamy $\frac{1}{2}n$ krzyżulców każdego rzędu, gdy n oznacza liczbę podziału; chcąc więc mieć ilość materiału wszystkich krzyżulców, musimy pomnożyć objętość obu krzyżulców przez $\frac{n}{2}$, zatem $\frac{n}{2} \cdot \frac{h}{n} \left\{ \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right\}$ (siecz² α + siecz² β) przedstawia objętość wszystkich krzyżulców na długości AD ; ponieważ zaś długość $AD = \frac{1}{2}h$ (st α + st β), więc na jednostkę długości otrzymamy:

$$v_2 = \frac{2}{h} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{h}{n} \left\{ \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right\} \frac{\text{siecz}^2\alpha + \text{siecz}^2\beta}{\text{st}\alpha + \text{st}\beta}$$

czyli $v_2 = \left\{ \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right\} \frac{\text{siecz}^2\alpha + \text{siecz}^2\beta}{\text{st}\alpha + \text{st}\beta} \dots \dots 26)$

Z równania tego widzimy, że ani wysokość belki h , ani liczba podziału n nie mają wpływu na objętość v_2 .

Dla najmniejszości tej funkcji ze względu na α i β muszą być jej pochodne $= 0$, a że wyraz ten jest dla α i β symetryczny, więc dla najmniejszości musi być $\alpha = \beta$, a wtedy

$$v_2 = \left\{ \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right\} \frac{\text{siecz}^2 \alpha}{\text{st} \alpha} = \left\{ \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right\} \frac{2}{\text{wst} 2\alpha} \quad 27)$$

v_2 będzie najmniejszym, gdy $\text{wst} 2\alpha$ będzie największą, mianowicie, gdy $\text{wst} 2\alpha = 1$, czyli $\alpha = 45^\circ$, a więc krata równo ramienna, dla której $\alpha = 45^\circ$, wymaga najmniej materiału. Wstawimy w równ. 27 $\alpha = 45^\circ$, otrzymamy

$$\text{najmn } v_2 = 2 \left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \quad \dots \quad 28)$$

Dla kraty prostokątnej jest $\beta = 0$, a zatem wstawimy to w rów. 26) otrzymamy $v_2 = \left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{\text{siecz}^2 \alpha + 1}{\text{st} \alpha}$,

$$v_2 = \left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{\text{st}^2 \alpha + 2}{\text{st} \alpha} \quad \dots \quad 29)$$

Niech $\text{st} \alpha = x$, to podstawimy tę wartość w równ. 29), otrzymamy $v_2 = \left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \frac{x^2 + 2}{x}$. Z tego wzoru widzimy, że v_2 będzie najmniejszym, gdy wyraz $\frac{x^2 + 2}{x}$ będzie najmniejszym. Zróbmy pochodną tego wyrażenia równą zeru, to $\frac{2x^2 - (2 + x^2)}{x^2} = 0$, a stąd $x = \sqrt{2} = \text{st} \alpha$. Zatem $\alpha = 54^\circ 44' 8''$.

Wstawmy tę wartość w równ. 29), a otrzymamy dla kraty prostokątnej $\text{najmn } v_2 = 2\sqrt{2} \left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \quad \dots \quad 30)$

Porównawszy równ. 28) i 30), widzimy, że dla kraty prostokątnej potrzebujemy 1,41 razy tyle, czyli 41% więcej materiału dla najkorzystniejszego α , niż dla kraty równoramiennej i kąta nachylenia 45° . Jeżeli $\alpha = 45^\circ$ a $\beta = 0$, to według rów. 29)

$$v_2 = 3 \left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \quad \dots \quad 31)$$

Tu więc potrzeba o 50% więcej materiału, niż dla kraty równoramiennej. Dla jakiegokolwiek kąta α i β możemy napisać $v_2 = C \left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) \quad \dots \quad 32)$

gdzie C jest współczynnikiem stałym, wahającym się między granicami 2 a 3. Objętość całej kraty otrzymamy więc

$$V_2 = C \int_A^B \left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) dx, \dots 33)$$

przyczem mamy całkować od początku aż do końca belki, albo, co lepiej, od początku do środka, a otrzymany wynik pomnożyć przez 2. Dla belki jednoprzęsłowej otrzymamy następujące wartości dla Q_0 , Q_1 i Q_2 :

$$Q_0 = \frac{1}{2} g (l - 2x), \quad Q_1 = \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l}, \quad Q_2 = \frac{1}{2} \frac{px^2}{l}, \text{ więc}$$

$$V_2 = 2C \left\{ \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} g (l - 2x) dx + \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l} dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tau_2} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \frac{px^2}{l} dx \right\}$$

$$V_2 = \frac{Cl^2}{4} \left(\frac{g}{\tau_0} + \frac{7p}{6\tau_1} + \frac{p}{6\tau_2} \right) \dots 34)$$

Dla żelaza możemy przyjąć $\tau_2 = 2,35 \tau_1$, więc

$$V_2 = Cl^2 \left(0,25 \frac{g}{\tau_0} + 0,31 \frac{p}{\tau_1} \right) \dots 35)$$

§. 51. Objętość kraty z różnego materiału.

Jeżeli krata składa się z krzyżulców z rozmaitego materiału, to dla ocenienia najlepszego ustroju potrzebujemy znać nie tylko objętość, ale także i koszt, które otrzymamy, pomnożywszy objętość przez odpowiednią cenę jednostki objętości materiału c i c' .

Analogicznie do równ. 26) otrzymamy koszt kraty na jednostkę długości

$$c_2 = \frac{\left(\frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right) c \operatorname{siecz}^2 \alpha + \left(\frac{Q_0'}{\tau_0'} + \frac{Q_1'}{\tau_1'} + \frac{Q_2'}{\tau_2'} \right) c' \operatorname{siecz}^2 \beta}{st \alpha + st \beta} \dots 36)$$

Przypuśćmy, że $\tau_0' = a\tau_0$, $\tau_1' = a\tau_1$, $\tau_2' = a\tau_2$, a następnie, że $Q_0 = Q_0'$, $Q_1 = Q_1'$, $Q_2 = Q_2'$, to otrzymamy

$$c_2 = \left\{ \frac{Q_0}{\tau_0} + \frac{Q_1}{\tau_1} + \frac{Q_2}{\tau_2} \right\} \frac{c \operatorname{siecz}^2 \alpha + \frac{c'}{a} \operatorname{siecz}^2 \beta}{st \alpha + st \alpha} \dots 37)$$

Chcąc wyznaczyć najmniejsze c_2 , różniczkujemy równ. 37 według α i β i pochodne robimy równe zero. W ten sposób otrzymamy

$$(st \alpha + st \beta) \cdot 2c \operatorname{sech}^2 \alpha \operatorname{st} \alpha - (c \operatorname{sech}^2 \alpha + \frac{c'}{a} \operatorname{sech}^2 \beta) \frac{1}{\operatorname{dost}^2 \alpha} = 0 \quad 38)$$

$$(st \alpha + st \beta) \frac{2c'}{a} \operatorname{sech}^2 \beta \operatorname{st} \beta - (c \operatorname{sech}^2 \alpha + \frac{c'}{a} \operatorname{sech}^2 \beta) \frac{1}{\operatorname{dost}^2 \beta} = 0 \quad 39)$$

Podzielmy rów. 38) przez rów. 39), to otrzymamy

$$\frac{\operatorname{st} \alpha}{\operatorname{st} \beta} = \frac{c'}{ac}, \quad \operatorname{st} \beta = \frac{ac}{c'} \operatorname{st} \alpha. \quad \text{Wstawmy tę wartość w rów. 38),}$$

a zamiast $\operatorname{sech}^2 \alpha = 1 + \operatorname{st}^2 \alpha$, to otrzymamy

$$2c \operatorname{st}^2 \alpha \left(1 + \frac{ac}{c'}\right) = c(1 + \operatorname{st}^2 \alpha) + \left(1 + \frac{a^2 c^2}{c'^2} \operatorname{st}^2 \alpha\right), \quad \text{a stąd}$$

$$\operatorname{st} \alpha = \sqrt{\frac{c'}{ac}} \dots \dots \dots 40)$$

$$\text{Wstawivszy } a = \frac{\tau_0'}{\tau_0}, \text{ otrzymamy } \operatorname{st} \alpha = \sqrt{\frac{\tau_0' c'}{\tau_0 c}} \dots \dots \dots 41)$$

$$\text{Podobnie otrzymamy } \operatorname{st} \beta = \sqrt{\frac{\tau_0' c'}{\tau_0 c}} \dots \dots \dots 42)$$

Z porównania równań 41) i 42) widzimy, że

$$\operatorname{st} \alpha = \frac{1}{\operatorname{st} \beta}, \quad \text{czyli że } \alpha = 90 - \beta \dots \dots \dots 43)$$

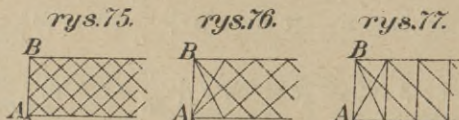
A więc dla najmniejszości kosztów krzyżulce mają stać na sobie prostopadle. Z równ. 41) widzimy też, że $\operatorname{st} \alpha < 1$, gdy $\frac{\tau_0'}{p} < \frac{\tau_0'}{p'}$, więc ten rząd krzyżulców ma być więcej stromy, którego materyał jest droższy, a natężenie dopuszczalne mniejsze.

Dla $\alpha = \beta = 45^\circ$ otrzymamy jednak nie o wiele większą objętość, niż przy najkorzystniejszym nachyleniu krzyżulców.

§. 52. Objętość narożników.

Przy zakończeniu regularnem kraty (rys. 75.) siła wewnętrzna w narożniku wynosi przy podporze $\frac{1}{2}(p + g)l$ i zmniejsza się aż do B , gdzie jest równa prawie zero. W przybliżeniu więc średnia siła wewnętrzna będzie $\frac{1}{4}(p + g)l$, zatem objętość obu narożników $V_3 = 2 \frac{lh}{4} \left(\frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1}\right) = \frac{1}{2}lh \left(\frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1}\right) \dots \dots 44)$

Przy zakończeniu nieregularnem kraty n krotnej równoramiennej (rys. 76.) narożnik znajduje się w $\frac{n}{2}$ układach, a więc



siła wewnętrzna w słupie AB jest $= \frac{1}{2} O_1 = \frac{1}{4} (p + g)l$, zatem dla obu narożników, jak poprzednio, będzie

$$V_3' = \frac{1}{2} l h \left(\frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right) \dots \dots \dots 45)$$

Przy zakończeniu nieregularnem kraty n krotnej prostokątnej (rys. 77.) jest siła wewnętrzna w narożniku $= O_1$, więc 2 razy większa, niż poprzednio, zatem dla obu narożników

$$V_3'' = l h \left(\frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_0} \right) \dots \dots \dots 46)$$

§. 53. Objętość całej belki kratowej.

Jeżeli dodamy objętość pasów, kraty i narożników, otrzymamy objętość całej belki $V = V_1 + V_2 + V_3$, czyli

$$V = \left(A_1 \frac{l}{h} + B_1 + C_1 \frac{h}{l} \right) \frac{gl^2}{\tau_0} + \left(A_2 \frac{l}{h} + B_2 + C_2 \frac{h}{l} \right) \frac{pl^2}{\tau_1} + B_3 \frac{pl^2}{\tau_2}, \dots \dots \dots 47)$$

gdzie A , B i C oznaczają współczynniki, które poniżej dla belki jednoprzęsłowej podajemy.

Dla pasów jest $A_1 = A_2 = 0,167 = \frac{1}{6}$.

Jeżeli krata jest równoramienną i $\alpha = \beta = 45^\circ$, to $B_1 = \frac{1}{2} = 0,5$, $B_2 = \frac{7}{12} = 0,58$, $B_3 = \frac{1}{12} = 0,083$.

Jeżeli krata jest prostokątną, a $\alpha = 45^\circ$ i $\beta = 0$, to $B_1 = 0,75$, $B_2 = 0,87$, $B_3 = 0,14$.

Nakoniec otrzymamy dla narożnika, jeżeli uwzględnimy większą ilość materiału dla kraty przy końcu belki, dla kraty równoramiennej $C_1 = C_2 = 0,5$ dla zakończenia regularnego, $C_1 = C_2 = 0,5$ do $0,63$ dla zakończenia nieregularnego. Dla kraty prostokątnej mamy $C_1 = C_2 = 1,0$ do $1,13$.

Jeżeli przyjmiemy średnie wartości tych wszystkich współczynników, to otrzymamy w przecięciu dla belki o kracie równo-

ramiennej $V = 0,17 l^2 \left(\frac{l}{h} + 3,3 + 3,3 \frac{h}{l} \right) \left(\frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right), \dots 48)$

a dla belki o kracie prostokątnej

$$V = 0,17 l^2 \left(\frac{l}{h} + 5 + 6,2 \frac{h}{l} \right) \left(\frac{g}{\tau_0} + \frac{p}{\tau_1} \right) \dots 49)$$

Z tego widzimy, że objętość pasów, kraty i narożników ma się dla belki o kracie równoramiennej jak $\frac{l}{h} : 3,3 : 3,3 \frac{h}{l}$

" " " " prostokątnej " $\frac{l}{h} : 5 : 6,2 \frac{h}{l}$,

więc dla

$h = \frac{l}{10}$ i kraty równoramiennej jak 10 : 3,3 : 0,33 czyli 30 : 10 : 1

" " " " prostokątnej " 10 : 5 : 0,62 " 16 : 8 : 1

a dla

$h = \frac{l}{8}$ " " równoramiennej " 8 : 3,3 : 0,41 " 20 : 8 : 1

" " " " prostokątnej " 8 : 5 : 0,78 " 10 : 6,4 : 1

Wzorów tych jednak wprost zastosowywać nie możemy do obliczenia ciężaru własnego, gdyż musimy pojedyncze wyrazy jeszcze pomnożyć współczynnikami ustrojowymi.

D. Belka kratowa wieloboczna.

XI. Belka o kracie pojedynczej.

§. 54. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

Nazwijmy M_1 moment sił zewnętrznych ze względu na punkt A (rys. 78.), S_1 siłę wewnętrzną w części pasu BE , a S_2 w części CA , to $M_1 + S_1 r_1 = 0$, więc

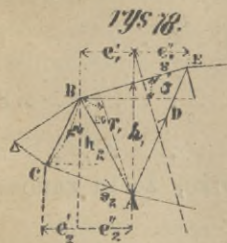
$$S_1 = - \frac{M_1}{r_1}, \dots 1)$$

podobnie $S_2 = + \frac{M_2}{r_2} \dots 2)$

Z rysunku widzimy, że $h_1 = r_1$ siecz σ ,

zatem $S_1 = - \frac{M_1}{h_1}$ siecz $\sigma \dots 3)$

$$S_2 = + \frac{M_2}{h_2}$$
 siecz $\tau \dots 4)$



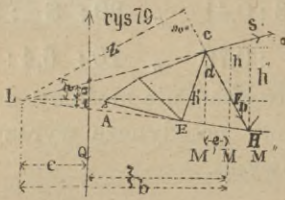
Tych wzorów użyjemy, jeżeli wyznaczymy M_1 , przyjmując ciężar działający w węzłach, a więc z uwzględnieniem poprzecznic. Mając jednak moment wyznaczony dla ciężaru jednostajnie rozłożonego, musimy zrobić poprawkę, podobnie, jak przy belce równoległej (§. 34), a mianowicie

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M - \frac{1}{2} g_1 e_1' e_1'' \\ M_2 &= M' - \frac{1}{2} g_2 e_2' e_2'' \end{aligned} \right\} , \dots \dots \dots 5)$$

gdzie g_1 i g_2 oznaczają ciężar, działający na pasie górnym i dolnym, M i M' momenty ze względu na punkty A i B , zaś długości oznaczone są na rysunku.

§. 55. Analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych w kracie.

Chcąc wyznaczyć siłę wewnętrzną D w krzyżulcu CH (rys. 79.) według sposobu Rittera*), musimy przedłużyć przecięte części pasów aż do przecięcia się w punkcie L .



Poprowadźmy następnie przez punkt L linią poziomą (prostopadłą do kierunku sił zewnętrznych) aż do przecięcia się z krzyżulcem w punkcie F , a Q niech będzie wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych po prawej stronie punktu F . Ustawmy

teraz równanie momentów ze względu na punkt L , to otrzymamy $Dz - Qc = 0$, więc $D = Q \frac{c}{z}$, 6)

gdy c oznacza długość prostopadłej, spuszczonej z L na kierunek Q , a z na kierunek D .

Nazwijmy α kąt nachylenia krzyżulca HC do pionu, to także kąt między z i poziomą LF będzie α , zatem b dost $\alpha = z$, jeżeli $FL = b$. Wstawiwszy to w rów. 6), otrzymamy $D = \frac{Qc}{b \text{ dost } \alpha}$

lub
$$D = Q \frac{c}{b} \text{ siecz } \alpha \dots \dots \dots 7)$$

Nazwijmy dla skrótienia $\frac{Qc}{b} = Y$, 8)

to
$$D = Y \text{ siecz } \alpha \dots \dots \dots 9)$$

podobnie, jak dla belki równoległej (§. 35) tylko, że tu zamiast Q mamy Y .

*) p. Podr. Statyki Budowli str. 186.

Z równ. 9) wypływa $Y = D \text{ dost } \alpha$, zatem Y jest równie i wprost przeciwne pionowej składowej siły wewnętrznej, działającej w krzyżulcu. Siłę Y możemy jeszcze inaczej wyznaczyć. Nazwijmy M moment sił zewnętrznych ze względu na punkt F , to z rysunku widzimy, że $M = Q\xi$, więc $\xi = \frac{M}{Q}$. A ponieważ $\xi = b - c$, zatem $b - c = \frac{M}{Q}$, a stąd $c = b - \frac{M}{Q}$. Wstawivszy tę wartość za c w rów. 8), otrzymamy $Y = \frac{Q}{b} \left(b - \frac{M}{Q} \right)$,

czyli
$$Y = Q - \frac{M}{b} \dots \dots \dots 10)$$

Z rysunku widzimy dalej, że $h = b \cdot (\text{st}\sigma + \text{st}\tau)^*$, czyli $\frac{1}{b} = \frac{1}{h} (\text{st}\sigma + \text{st}\tau)$, po wstawieniu tej wartości w rów. 10) otrzymamy

$$Y = Q - \frac{M}{h} (\text{st}\sigma + \text{st}\tau) \dots \dots \dots 11)$$

Nazwijmy M' moment sił zewnętrznych ze względu na punkt C , to z rysunku widzimy, że $M' = Q(\xi - e) = Q\xi - Qe$, a ponieważ $Q\xi = M$, więc $M' = M - Qe$, a stąd $Q = \frac{M - M'}{e}$. Dalej widzimy z rysunku, że $h - h' = e(\text{st}\sigma + \text{st}\tau)$. Podstawivszy te wartości w rów. 11, otrzymamy

$$Y = \frac{M - M'}{e} - \frac{M}{h} \frac{h - h'}{e}, \text{ czyli } Y = \left(\frac{M}{h} - \frac{M'}{h'} \right) \frac{h'}{e} \dots 12)$$

Nazwijmy wręście h'' wysokość belki w punkcie H , a M'' moment sił zewnętrznych ze względu na punkt H , to $S_1 h'' \text{ dost } \sigma + M'' = 0$. Ze względu na punkt C' będzie $S_1 h' \text{ dost } \sigma + Dh' \text{ wst } \alpha + M' = 0$. Z porównania tych dwóch równań otrzymamy

$$D = \left(\frac{M''}{h''} - \frac{M'}{h'} \right) \text{ dosiecz } \alpha \dots \dots \dots 13)$$

więc
$$Y = \left(\frac{M''}{h''} - \frac{M'}{h'} \right) \text{ dot } \alpha \dots \dots \dots 14)$$

Chcąc obliczyć Y w przybliżeniu, przyjmujemy zamiast pasów wielobocznych pasy ciągle krzywe, czyli odstęp węzłów nieskończenie mały. Wtedy $e = dx$, a $h' = h$, więc z rów. 12)

otrzymamy
$$Y = \frac{d \left(\frac{M}{h} \right) h}{dx} \dots \dots \dots 15)$$

*) Jeżeli punkt L jest po prawej stronie przekroju, to kąty σ i τ są ujemne.

Ponieważ tutaj $h' - h = dh$, więc $dh = dx$ (st $\tau + st \tau$). Wstawiając to w równ. 11) otrzymamy $Y = Q \frac{M}{h} \frac{dh}{dx}$ 16)

Dla belki równoległej jest $\sigma = \tau = 0$, wtedy z tych wszystkich równań dla Y otrzymamy $Y = Q$.

Powyżej zaznaczyliśmy, że Q i M mamy obliczyć ze względu na punkt F , założywszy ciężary, działające w węzłach.

Jeżeli mamy wyznaczone Q' i M' dla ciężaru jednostajnie rozłożonego ze względu na punkt F , to podobnie, jak przy belce równoległej (§. 35) musimy zrobić pewne poprawki. Nazwijmy e_1' i e_1'' odległości węzłów po obu stronach przekroju w pasie górnym, e_2' i e_2'' w dolnym, e_1 i e_2 odległości środków części pasów od przekroju przez F , to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q' - g_1 e_1 + g_2 e_2 \\ Q_2 &= Q' + g_1 e_1 - g_2 e_2 \\ M_1 &= M - \frac{1}{2} g_1 e_1' e_1'' \\ M_2 &= M - \frac{1}{2} g_2 e_2' e_2'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 17)$$

gdy g_1 i g_2 oznaczają ciężary jednostkowe, działające na pasie górnym i dolnym.

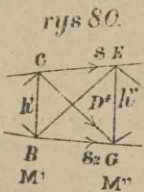
§. 56. Krzyżulce giętkie.

Gdy krzyżulce mają pracować na ciśnienie i ciągnięcie, urządzamy zwykle dla kraty prostokątnej podobnie, jak w belce równoległej (§. 43), krzyżulce podwójne giętkie z żelaza płaskiego.

Z obu przekątnei jednego przedziału pracuje wtedy tylko ciągniona, a druga wygina się i nie wpływa zupełnie na belkę.

Dla danego obciążenia musimy wiedzieć, która przekątnia jest ciągniona, aby przy obliczeniu sił wewnętrznych w pasach orzec, ze względu na który punkt wyznaczyć mamy moment.

Z równ. 13) $D = \left(\frac{M''}{h''} - \frac{M'}{h} \right)$ dosiedz α wypływa, że jeżeli ma być $D > 0$ (rys. 80), to $\frac{M''}{h''} > \frac{M'}{h}$, to znaczy, że ciągniona jest ta przekątnia, która spada ku słupowi, dla którego iloraz $\frac{M''}{h''}$ jest większy; druga przekątnia wcale nie pracuje.



Jeżeli $\frac{M''}{h''} > \frac{M'}{h}$, to przekątnia, spadająca na prawo, CG jest ciągniona, więc

$$S_1 = - \frac{M''}{h''} \text{ siecz } \sigma, \quad S_2 = - \frac{M'}{h} \text{ siecz } \tau.$$

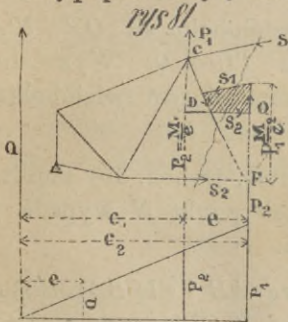
Gdy zaś $\frac{M''}{h'} < \frac{M'}{h'}$, to przekątnia, spadająca na lewo EB jest ciągniona, więc $S_1 = \frac{M'}{h'}$ siecz σ , $S_3 = \frac{M''}{h''}$ siecz τ .

A więc, aby obliczyć siłę wewnętrzną w pasie górnym, uwzględniamy zawsze większy iloraz $\frac{M}{h}$, zaś dla dolnego pasu zawsze iloraz mniejszy z dwóch ilorazów odnośnych do słupów, ograniczających ten przedział.

§. 57. Ogólne wykreślne sposoby wyznaczenia sił wewnętrznych.

Ogólny sposób wielobokowy zapomocą planu sił (§. 36), da się tu także zastosować zwłaszcza do wyznaczenia ciężaru stałego. Drugi sposób ogólny jest sposób Culmanna*), którego użyć można, jeśli znamy wielkość i położenie siły Q , co łatwo otrzymać z wieloboku sznurowego.

Trzeci sposób podał Zimmermann, który polega na tem, że siłę poprzeczną Q zastępujemy dwiema siłami P_1 i P_2 (rys. 81).



zaczepiającemi w obu końcach przeciętego krzyżulca CF . Ażeby Q było wypadkową sił P_1 i P_2 musi być

$$\begin{aligned} +P_1 e &= Q c_2 = M_2 \\ \text{i } -P_2 e &= Q c_1 = -M_1 \end{aligned} \quad \dots 18)$$

a stąd otrzymamy

$$P_1 = Q \frac{c_2}{e} = \frac{M_2}{e}, \quad P_2 = -Q \frac{c_1}{e} = -\frac{M_1}{e} \quad \dots 19)$$

$$Q = P_1 - P_2 = \frac{M_2}{e} - \frac{M_1}{e} \quad \dots 20)$$

Na podstawie równ. 18) łatwo wyznaczymy siły P_1 i P_2 wykreślne w sposób, uwidoczony na rysunku, lub też na podstawie znanych momentów.

Dla równowagi między siłami P_1 , P_2 , S_1 , D i S_2 kreślimy zamknięty wielobok sił osobno lub też, jak to czyni Zimmermann, w wykresie belki, wykreślonym w dość wielkiej podziałce, zaczynając od punktu F lub też od węzła pasu górnego. Dla wyróżnienia kreskujemy powierzchnię tego wieloboku sił.

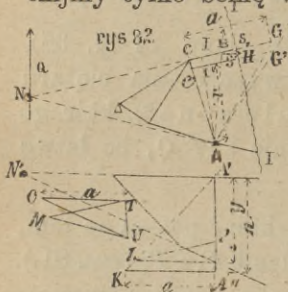
*) p. Podr. Statyki Budowli str. 187.

Jeżeli e jest stałe, to możemy użyć wprost rzędnych linii momentów. Jeżeli przyjmiemy do jej wykreślenia odległość biegunową $a = ae$, to $\frac{M'}{e} = \frac{ay_1}{e} = ay$, i podobnie $\frac{M_2}{e} = ay_2$.

§. 58. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych w pasach.

Szczegółowe sposoby wyznaczenia sił wewnętrznych w pasach są następujące :

a) Możemy tu użyć z korzyścią sposobu Culmanna. Przejniemy tylko belkę według II (rys. 82.) i wyznaczmy odnośną siłę poprzeczną. Przedłużmy dwa odnośne boki wieloboku sznurowego aż do przecięcia się w punkcie N' , przez który przechodzi wypadkowa Q . Przedłużmy następnie część pasu CD , aż się przetnie z siłą poprzeczną Q w punkcie N , to wypadkowa z S_1 i Q musi mieć kierunek NA .



Zróbmy w wieloboku sił $OT \parallel N'A'$, zaś $OU \parallel N'A''$, to, jak wiemy, będzie $TU = Q$. Wykreślmy $TM \parallel CD$ a $UM \parallel AN$, to UTM jest zamkniętym wielobokiem sił i $MT = S_1$.

Jeżeli chcemy użyć sposobu Culmanna, trzeba, aby punkt N znajdował się jeszcze na papierze. Jeżeli punkt N wypada poza papier, użyć musimy innego sposobu.

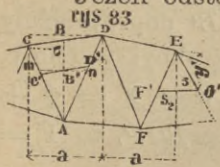
b) Wykreślmy z punktu A pionową AB i siłę S_1 rozłóżmy na dwie składowe, poziomą H i pionową V . Wtedy ze względu na punkt A pionowa składowa V nie daje żadnego momentu, więc możemy napisać $Hh + M = 0$, więc $H = -\frac{M}{h}$, lub bez względu na znak $H = \frac{M}{h}$. Nazwijmy rzędną $A'A'' = y$, to $M = ay$, jeżeli a oznacza odległość biegunową, zatem $H = \frac{ay}{h}$, czyli $H : y = a : h$. Ten stosunek możemy wykreślnie wyznaczyć. Zróbmy $A'F = h$ i wykreślmy z punktów A'' i F poziome, następnie zróbmy $FK = a$ i połączmy punkt A' z K , a otrzymamy dwa trójkąty podobne $A'A''L$ i $A'FK$, więc $A''L : y = a : h$, zatem $A''L = \frac{ay}{h} = H$.

Wykreślmy dalej $LP \parallel CD$, to $LP = H$ siecz $\sigma =$
 $= -\frac{M}{h}$ siecz $\sigma = S_1$.

c) Według równ. 1) jest $S = \frac{M}{r} = \frac{ay}{r}$. Wykreślmy $AI \perp CD$,
 to $AI = r$, zróbmy dalej $CG = a$, $AJ' = y$, połączmy A z G
 i wykreślmy $C'G' \parallel CG$, to $C'G' : CG = y : r$, a stąd $C'G' =$
 $= \frac{ay}{r} = S$.

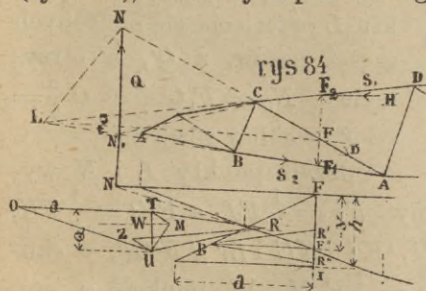
Sposób ten podał Müller Breslau.

Jeżeli odstęp poziomy węzłów jest stały (rys. 83.), to do-
 godnieby było przyjąć odległość biegunową a
 równą temu odstępowi, jeżeli to w ogóle jest
 możliwe ze względu na wielkość rysunku i
 przyjęte podziałki. Znajdziemy wtedy najprzód
 $\frac{M}{h} = \frac{ay}{h}$, a wykreśliwszy w A pionową $AB = h$,
 zrobiwszy $AB' = y$ i przez B' poziomą mn , to $mn = \frac{ay}{h}$. Chcąc
 otrzymać $S = \frac{M}{h}$ siecz $\sigma = mn$ siecz σ , kreślimy przez punkt B'
 $C'D' \parallel CD$, to $C'D' = mn$ siecz $\sigma = S$.



§. 59. Wyznaczenie wykreślne sił wewnętrznych w krzyżulcach.

I. Pierwszy sposób według Culmanna. Przedłuży-
 wszy przecięte części pasów CD i BA do punktu przecięcia się L
 (rys. 84.), kreślimy z punktu tego poziomą, aż przetnie przecięty
 krzyżulec CA w punkcie F ,
 z którego kreślimy pionową
 F_1F_2 .



W znany sposób otrzyma-
 my punkt N' , przez który prze-
 chodzi siła poprzeczna, i prze-
 dłużamy AC , aż się przetnie
 z siłą Q w punkcie N . Wypad-
 kowa siła D i Q będzie więc
 miała kierunek NL .

Jeżeli teraz w wieloboku sił $TU = Q$, to poprowadziwszy
 $TM \parallel AC$ i $UM \parallel LN$, otrzymamy trójkąt TMU , w którym
 $TM = D$.

Ten sposób wymaga, aby punkty L i N były jeszcze na
 papierze. Jeżeli punkt L wypada po za papier, a Q jest jeszcze

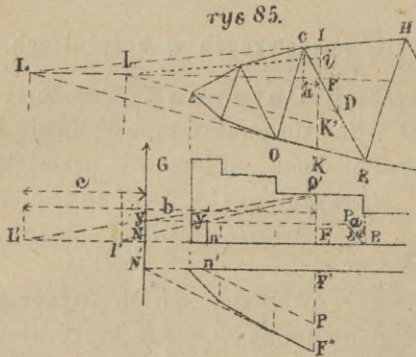
na papierze, to możemy przedłużyć S_3 aż do przecięcia się z Q w N_1 , w wieloboku sił wykreślić $TR \parallel S_2$, $UR \parallel N_1C$, to UR jest wypadkowa z S_1 i D . Zrobiwszy $RZ \parallel S_1$ i $UZ \parallel AC$, otrzymamy $ZU = D$.

Jeżeli oba punkty L i N wypadają po za papier, to używamy następnego sposobu.

II. Drugi sposób. Według równ. 11) P dost $\alpha = Y = Q - \frac{M}{h}(\text{st } \sigma + \text{st } \tau)$. Nazwijmy, jak w poprzednim paragrafie, bez względu na znak iloraz $\frac{M}{h} = H$ i wykreślmy najprzód w ten sam sposób, co pierwej, $H = F''B'$ i z punktu B' poprowadźmy równoległe do obu pasów $B'R'$ i BR'' . Z konstrukcyi widzimy, że $R'R'' = H(\text{st } \sigma + \text{st } \tau) = \frac{M}{h}(\text{st } \sigma + \text{st } \tau)$, a więc $Y = Q + -\frac{M}{h}(\text{st } \sigma + \text{st } \tau) = TU - R'R''$. Zróbmy $UW = R'R''$, to $Y = TU - UW = TW$.

Jeżeli teraz wykreślimy $TM \parallel CA$, a z punktu W poziomą, to $TM = Y$ siecz $\alpha = D$.

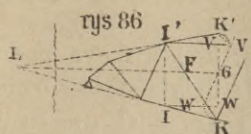
III. Trzeci sposób (rys. 85.) Jeżeli dla danego obciążenia wyznaczylismy nie tylko



momenty, lecz i siły poprzeczne, lub jeśli znamy wielkość i położenie siły $Q = F_1Q'$, to użyć możemy trzeciego sposobu. Połączmy L' , rzut punktu L przecięcia się odnośnych części pasów, z Q' , a otrzymamy $Ny = F_1Q' \frac{c}{b} = Q \frac{c}{b} = Y$, według rów. 8).

Jeżeli punkty L i N wypadają po za papier, to robimy $F_i = \frac{1}{n} FJ$, a $FK' = \frac{1}{n} FK$, $F'f = \frac{1}{n} F'F''$ i kreślimy $il \parallel CH$, $K'l \parallel KE$ i $fn' \parallel F''N'$, w skutek czego $F_1l' = \frac{1}{n} F_1L'$ i $F_1n = \frac{1}{n} F_1N$. W punkcie n wykreślamy pionową, łączymy l' z Q' , to $ny' = Ny = Y$ na mocy konstrukcyi.

Czasem może powstać trudność wyznaczenia punktu F , a mianowicie, jeśli punkt L wypada po za granicę papieru (rys. 86). Poprowadźmy w obu końcach krzyżulca FK pionowe, a z punktów L, F i I poziome, to otrzymamy następujące trój-

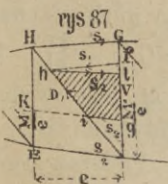


kąty podobne: $LK'G \sim IK'V$, zatem $K'G : K'V = LG : IV$. Z podobieństwa zaś trójkątów LGK i IWK wynika, że $LG : IW = GK : WK$. Porównawszy te dwie proporcje, otrzymamy $K'G : K'V = KG : KW$,

dalej otrzymamy $(K'G - K'V) : K'V = (KG - KW) : KW$, czyli $VG : K'V = WG : KW$.

Zróbmy $V'V' = VK'$, $W'W' = WK$ i połączmy punkty V' i W' z punktem G , to otrzymamy $V'V'G \sim W'W'G$, bo dwa boki są proporcjonalne, mianowicie $VG : V'V' = WG : W'W'$, a kąt naprzeciw większego boku leżący prosty. Z tego wynika, że $\sphericalangle VGV' = \sphericalangle WGW'$, zatem $V'W'$ jest linią prostą. A więc chcąc wyznaczyć punkt F , robimy $V'V' = VK'$ i $W'W' = WK$, następnie łączymy punkt V' z W' i w ten sposób otrzymujemy punkt G , z którego kreślimy poziomą aż do przecięcia się z linią $I'K'$ w punkcie F .

IV. sposób. Możemy tu użyć także ogólnego sposobu Zimmermanna (§. 57). Co do zastosowania jego do wyznaczenia sił wewnętrznych w słupach musimy tu zrobić jednak jeszcze pewną uwagę. Jeżeli pomost jest u góry, a w dolnych węzłach nie działają żadne ciężary, to według sposobu Zimmer-

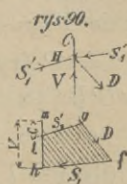
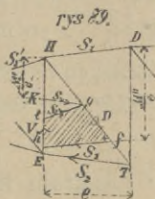
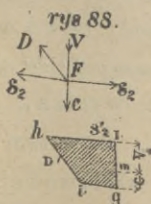


manna robimy (rys. 87.) $Ek = \frac{M'}{e}$, $Tf = \frac{M''}{e}$,

gdy M' i M'' oznaczają momenty sił zewnętrznych w E i T . Kreślimy dalej $kg \parallel S_2$, i $fh \parallel S_1$, to $fh = S_1$, $hi = D$, $ig = S_2$. Dla równowagi w punkcie F musimy wykreślić wielobok sił S_2, S_2', D i V , a że S_2 i D są znane, więc

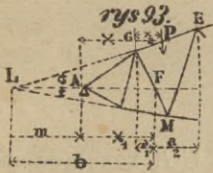
otrzymamy szukany wielobok kreśląc $hl \parallel S_2'$, to $hl = S_2'$ i $gl = V$. V jest tu ciśnieniem.

Jeżeli w punkcie F działa jeszcze ciężar C (rys. 88.), to V i C mają ten sam kierunek, lg jest więc sumą $V + C$. Zrobiwszy $mg = C$, otrzymamy $lm = V$. A zatem chcąc uwzględnić



Dla $l > x > x_1 + a_1$ będzie $Q = P\left(1 - \frac{x}{l}\right)$, zaś $\xi = x_1$, a więc według równ. 10) $Y = P \frac{l-x}{l} \left(1 - \frac{x_1}{b}\right) = P \frac{l-x}{l} \frac{m}{b}$ 22)

Znów więc otrzymujemy równanie linii prostej, dla wykreślenia której potrzebujemy wyznaczania dwóch punktów i tak dla $x=0$ będzie $Y = P \frac{m}{b}$, zaś dla $x=l$ będzie $Y=0$. Wykreślimy $F'F''' = P$, połączmy L' z punktem F''' , a otrzymamy $A'A'' = \frac{Pm}{b}$; $A''B'$ jest więc prostą, wyznaczoną równ. 22). Według założenia z prostych $A'B''$ i $A''B'$ zatrzymać możemy tylko części $A'C''$ i $H''B'$. Pozostaje więc jeszcze tylko wykreślenie linii wpływowej, gdy ciężar działa w przedziale GE (rys. 91.), którą otrzymamy według §. 25, połączywszy C' z H'' (rys. 92.) prostą. Aby otrzymać równanie tej prostej, założymy, że $x_1 - a_1 < x < x_1 + a_2$ (rys. 93.) i zrobmy $x = x_1 - a_1 + x_2$, to $Q = P \frac{l-x}{l} - P \frac{a-x_2}{a}$, więc według równania 10)



$$Y = P \frac{l-x}{l} \frac{m}{b} - P \frac{a-x_2}{a} \left(1 - \frac{a_1}{b}\right) =$$

$$= P \frac{l-x_1+a_1-x_2}{lb} m - P \frac{(a-x_2)(b-a_1)}{ab},$$

albo $Y = \frac{P}{b} \left[\frac{(l-x_1+a_1-x_2)m}{l} - \frac{(a-x_2)(b-a_1)}{a} \right]$ 23)

równanie prostej $C''H''$ (rys. 92).

Cała więc linia wpływowa składa się z trzech prostych $A'C''$, $C''H''$ i $H''B'$. Linia $C''H''$ przecina oś w punkcie obojętnym K .

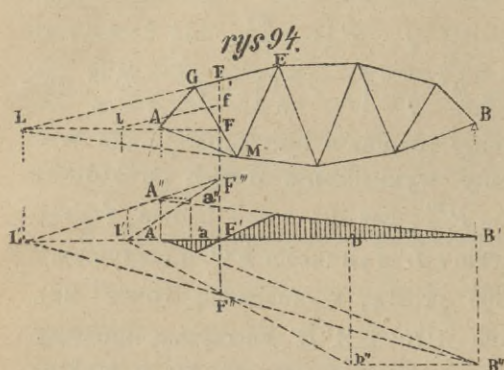
Nazwijmy x_2' odstęp punktu K od C , to dla $x_2 = x_2'$ musi być $Y=0$, więc z rów. 23) otrzymamy $am(l-x_1+a_1-x_2') = (a-x_2')(b-a_1)l$, a stąd

$$x_2' = - \frac{(x_1-a_1)(m+l)}{a(b-x_1)-l(b-a_1)} a = \frac{(l+m)x'}{ln-am} a, \quad 24)$$

jeżeli $n = b - a_1$.

Jeżeli punkt L wypada po za papier, łatwo obejść się będzie można bez punktu L' zapomocą konstrukcyi pomocniczej, wskazanej w rys. 94.

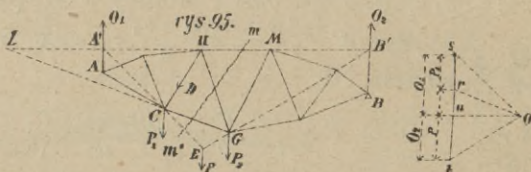
Na pionowej linii FF_1 odcinamy $Ff = \frac{1}{n} FF_1$, przyczem n jest dowolną liczbą całą. Wykreślimy teraz $f'l \parallel F_1E$, to $F'l = \frac{1}{n} FL$.



Połączmy punkt l' z F'' i F''' prostymi, zróbmy $F''a' = \frac{1}{n} F''l'$ i $F'b' = \frac{1}{n} F''l'$, wyprowadźmy w a' i b' prostopadłe, a otrzymamy a'' i b'' . Poziome, wykreślone przez te punkty, wyznaczają punkty A'' i B'' , odpowiadające takimiż punktom

w rys. 92, poczem wykreślamy linią wpływową, jak poprzednio.

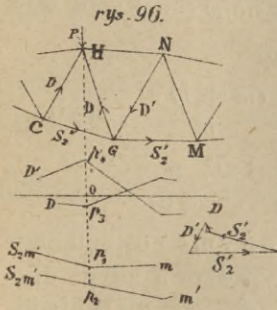
Punkt obojętny możemy wyznaczyć też w inny sposób, podany przez Culmanna (rys. 95.).



Jeżeli ciężar P znajduje się w przedziale CG , rozkłada się na siły P_1 i P_2 , działające w węzłach sąsiednich pasu, na którym znajduje się pomost (tu dolnego). Ciężar ten wywołuje siłę wewnętrzną D w krzyżulcu HG . Dla pewnego położenia tego ciężaru $D = 0$. Punkt obojętny, w którym gdy działa P , D jest $= 0$, znajdziemy w następujący sposób. Przedłużmy przeciętą część pasu górnego HM do pionowych podporowych, połączmy A' z C i B' z G i przedłużmy te proste do przecięcia się w E , to E jest właśnie punktem obojętnym. Aby tego dowieść, założmy, że w E działa siła P i uważajmy wielobok $A'CG B'$, jako wielobok sznurowy, to, jeżeli $st = P$, gdy zrobimy $sO \parallel A'E$, $tO \parallel EB'$ i $Or \parallel GC$, to $sr = P_1$, $rt = P_2$. Jeżeli teraz wykreślimy $Ou \parallel HM$, to $su = O_1$, $ut = O_2$. Położenie siły poprzecznej $Q = O_1 - P_1$ otrzymamy, przedłużwszy odnośne boki wieloboku sznurowego aż do przecięcia się w punkcie L . Z równ. 6) widzimy, że jeżeli siła poprzeczna zaczepia w L , czyli $c = 0$, $D = 0$, a więc rzeczywiście E jest punktem obojętnym.

Linią wpływową sił wewnętrznych w krzyżulcach możemy też wyznaczyć w sposób podany przez Müllera Breslaua

jeżeli znamy linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach. Niech będą linie mm i $m'm'$, liniami wpływowymi sił wewnętrznych w częściach pasów CG i GM (rys. 96.), to z nich możemy łatwo wyznaczyć linie wpływowe dla sił wewnętrznych D i D' w krzyżulcach HG i GN . Załóżmy, że siła $P=1$ działa w H ,



to $S_2 = op_1$, $S_2' = op_2$. Siły wewnętrzne, zaczepiające w węzle G muszą być w równowadze, da się więc wykreślić zamknięty wielobok sił, z którego otrzymamy wielkości sił wewnętrznych — D i D' .

Zróbmy teraz $op_3 = -D$ i $op_4 = +D'$, to punkty p_3 i p_4 będą punktami linii wpływowych D i D' , jeśli

przypuścimy, że siła $P=1$ działa w innych punktach. Ponieważ linia wpływowa składa się w tym wypadku z trzech prostych, więc wystarczy w ten sposób wyznaczyć 2 lub 3 punkty, aby całą linią wykreślić.

§. 61. Wyznaczenie analityczne największych sił wewnętrznych w krzyżulcach.

1. Obciążenie ciągłe. Dla *najw* $+ Y$ musi belka być obciążona na prawo od punktu obojętnego na długości KB' (rys. 92.), a nie powinna być obciążona na długości $A'K$ na lewo od punktu obojętnego.

A zatem, jeżeli ciężar jednostkowy jest p , będzie

$$\text{najw} (+ Y) = p \cdot \frac{1}{2} KB' H'H'' = \frac{p}{2} (l - x' - x_2') H'H''.$$

Z rysunku widzimy, że $H'H'' : A'A'' = (l - x' - a) : l$, zaś $A'A'' : l = m : b$. Pomnóżmy obie te proporcje, a otrzymamy $A'A'' \cdot H'H'' : A'A'' = m(l - x' - a) : bl$, a stąd $H'H'' = \frac{m(l - x' - a)}{bl}$. Wstawivszy tę wartość i wartość za x_2' z rów. 23 w rów. dla *najw* $+ Y$, otrzymamy

$$\text{najw} (+ Y) = \frac{p}{2} \left\{ l - x' - \frac{(l+m)x'}{ln-am} a \right\} \frac{m(l-x'-a)}{bl},$$

czyli zważywszy, że $m + x' = n$,

$$\text{najw} (+ Y) = \frac{(1-a-x')^2 mn p}{ln-am} \frac{p}{2b} \dots \dots \dots 25)$$

Podobnie otrzymamy $najw(-Y) = -\frac{1}{2} p A'K \cdot C'C'' =$
 $= -\frac{1}{2} p (x' + x_2') C'C''$. Z rysunku widzimy, że $C'C'' : B'B'' =$
 $= x' : l$ i $B'B'' : l = (m+l) : b$. Pomnożywszy obie te pro-
 porce, otrzymamy $C'C'' : B'B'' = x' (m+l) : bl$, więc
 $C'C'' = \frac{(m+l)x'}{bl}$. Wstawivszy w równ. dla $najw(-Y)$ tę war-
 tość za $C'C''$ i za x_2' z rów. 24), otrzymamy

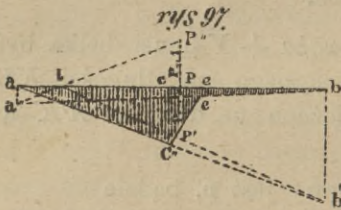
$$najw(-Y) = -\frac{1}{2} p \left\{ x' + \frac{(m+l)x'}{ln-am} a \right\} \frac{(m+l)x'}{bl}, \text{ czyli}$$

$$najw(-Y) = -\frac{(a+n)(l+m)x'^2 p}{ln-am} \frac{1}{2b} \dots 26)$$

2. Dla obciążenia ciężarami skupionymi postępujemy według ogólnych prawideł. Nazwijmy P' wypadkową sił na długości KH' , zaś P'' na długości $H'B$, to wiemy, że dla największości ciężary jednostkowe mają być, ile możności, równe. Jeden ciężar stać więc musi na prawej poprzecznicy.

Zupełnie tak samo postępujemy dla najmn. natężenia.

Czasem, zwłaszcza dla dachów, punkt L wpada w podporę, albo też w środek belki. Konstrukcyja linii wpływowej zostaje wtedy ta sama (rys. 97.), a z niej widzimy, że wtedy nie ma wcale punktu obojętnego i najw. siła wewnętrzna jest wtedy dla zupełnego obciążenia.



Jeżeli punkt l wpada na punkt a , to a' wpada na a i e' na e i otrzymujemy długość obojętną eb .

Wtedy obciążenie prawej strony belki jest obojętne, gdyż nie wywołuje żadnych sił wewnętrznych w krzyżulcach lewej strony belki.

§. 62. Linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach. Największe i najmniejsze siły.

Wiemy z §. 54, że siła wewnętrzna w pasie według równ. 3)
 $S = \pm \frac{M}{h}$ siecz σ . Ponieważ h i σ są dla pewnej części pasu stałe, to zmienny jest tylko moment, jak dla belki równoległej. Linie wpływowe dla S będą więc po odpowiedniej zmianie podziałki takie same, jak dla momentów. Wyznaczywszy w znany sposób

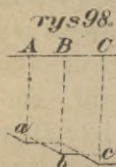
największe momenty dla obciążenia stałego i zmiennego otrzymamy w ten sposób największe i najmniejsze siły wewnętrzne w pasach.

§. 63. Wyznaczenie wykresne największych sił wewnętrznych.

a) Pasy. Dla ciężaru stałego najlepiej użyć tu metody wielobokowej lub Culmanna, lub też któregokolwiek innego sposobu szczegółowego, podanego w §. 58.

Jeżeli ciężar ruchomy jest ciągły, to z powodu, że obciążenie zupełne jest najniekorzystniejsze, postępujemy, jak dla ciężaru stałego.

Dla obciążenia układem ciężarów w skupionych jest najniekorzystniejsze położenie dla każdego węzła inne. Jeżeli mamy dokładnie wyznaczone największe momenty (§. 26), to dla najniekorzystniejszego obciążenia dla punktu *B* (rys. 98), spr-

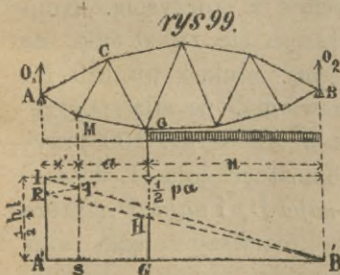


wiającą w tym punkcie największy moment, mamy wykreśloną część wieloboku sznurowego *abc*, która potrzebna do wyznaczenia położenia i wielkości siły poprzecznej *Q*. Znając *Q* i *M* wyznaczymy siłę wewnętrzną w pasie wedle §. 57 i 58.

b) Krzyżulce. Tu wyznaczymy siły wewnętrzne osobno dla ciężaru stałego, a osobno dla ciężaru ruchomego.

Dla ciężaru stałego używamy tu wprost jednego ze sposobów, podanych w §. 57 lub §. 59; dla ciężaru ruchomego możemy ich także użyć, tu musimy jednak zrobić jeszcze parę uwag i podamy kilka innych sposobów.

Z kształtu linii wpływowych wiemy, że dla najw. sił wewnętrznych w krzyżulcach dla ciężaru zmiennego musi być obciążona prawa strona belki od punktu obojętnego.



Jeżeli ciężar jest ciągły, to najlepiej wykreslnie wyznaczymy najw. siłę wewnętrzną, obliczając powierzchnię wpływową. Licząc w przybliżeniu, możemy przyjąć, że belka jest obciążona od węzła prawego *G* do prawej podpory *B* (rys. 99.),

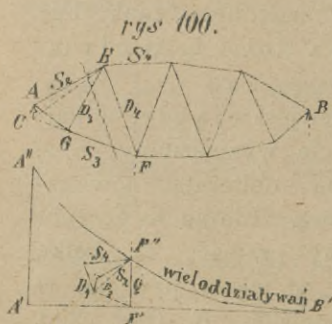
a oprócz tego w węźle prawym ciężarem $\frac{pa}{2}$. Otrzymujemy wtedy siłę poprzeczną nieco większą, niż przy obciążeniu najniekorzystniejszym. Wtedy mamy ze względu na punkt B

$$O_1 l - \frac{pa}{2} u - \frac{pu^2}{2} = 0, \text{ a stąd } O_1 = \frac{pu}{2l} (u + a) = Q. \quad (27)$$

Siłę poprzeczną otrzymamy wtedy wykreślnie według Müllera Breslaua w następujący sposób. Robimy $A'I = \frac{1}{2} pl$ i łączymy B' z I . Z obu sąsiednich węzłów M i G spuszczone pionowe, z punktu T na lewej pionowej kreślimy TR poziomo, to $A'R = ST = \frac{A'I(a+u)}{l} = \frac{1}{2} pl \frac{a+u}{l}$. Jeżeli teraz połączymy B' z R , to $GH = \frac{A'R u}{l} = p \frac{(a+u)u}{2l} = Q$.

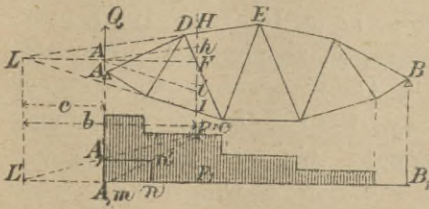
Jeżeli belka jest obciążona układem ciężarów skupionych, to dla największych sił wewnętrznych w krzyżulcach wedle poprzedniego (§. 61.) ma stać na prawej poprzecznicy jeden ciężar; może to być pierwszy ciężar, ale może być także drugi lub trzeci. Konstrukcja znacznie się upraszcza, jeżeli przypuszczamy, że pierwszy ciężar stoi na prawym węźle i dlatego robimy zwykle to przypuszczenie. Że jednak obliczone w ten sposób siły nie byłyby zawsze największymi, chociaż nie wiele różnią się od największych, więc Müller Breslau radzi przyjmować w tym wypadku dla wyrównania pierwszej siły nieco większą n. p. 15t zamiast 13t.

Podamy więc tu najprzód sposoby wyznaczenia sił wewnętrznych w kracie dla tego przypuszczenia, że pierwszy ciężar stoi na prawym węźle. Siła poprzeczna równa się wtedy oddziaływaniu O_1 , które otrzymujemy wykreślnie, kreśląc wielobok sznurowy według §. 14, i zaczepia w lewej podporze.



I. Sposobu Culmanna (§. 59 I) użyć tu możemy z korzyścią. Konstrukcja upraszcza się tu o tyle, że nie potrzebujemy szukać punktu N' , (rys. 84.), bo wiemy, że siła poprzeczna zaczepia w A . W rys. 100 przypuściliśmy pomost u dołu i wyznaczili od razu najw D_3 i najw D_4 , które powstaje, gdy pierwszy ciężar stoi w F .

rys 101



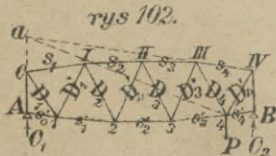
II. Drugi sposób odpowiada sposobowi, opisanemu w §. 59 pod l. III i opiera się na równaniu 8) $Y = Q \frac{c}{b}$. Ponieważ tu przyjmujemy, że siła poprzeczna Q (rys. 101.) zaczepia w punkcie A , więc $LA = c$, a więc $A_1A_1' =$

$$= Q \frac{c}{b} = Y.$$

Jeżeli L wypada za papier, to możemy sobie w następujący sposób poradzić. W punkcie F kreślimy pionową HI , a z punktu A' $A'h \parallel DE$ i $A'i \parallel IC$. Z rysunku wypływa, że $HI : hi = b : (b - c)$, więc $(HI - hi) : HI = c : b$. Zróbmy $F_1m = HI$ i $F_1n = hi$, następnie wykreślimy $F'm$ i pionową w punkcie n , a otrzymamy $nm' : Q = mn : mF_1$, stąd $nm' = Q \frac{HI - hi}{HI}$, a wstawwszy wartość za $\frac{HI - hi}{HI} = \frac{c}{b}$ otrzymamy

$$nm' = Q \frac{c}{b} = Y.$$

III. Trzeci sposób. Załóżmy, że w przedostatnim węźle 4 (rys. 102.) zaczepia siła P , która sprawia $O_1 = 1$, a której wielkości nie potrzebujemy wyznaczać. Dla tego obciążenia wykreślimy plan sił, a dla kontroli d_4 wyznaczmy także sposobem Culmanna.



Jeśli teraz chcemy wyznaczyć najw D_1' i najw D_2 , a pomost jest na dole, to stawiamy pierwszy ciężar na 2 i obciążamy prawą stronę belki. W znany sposób otrzymamy wtedy oddziaływanie O_1 , a zatem

$$\text{najw } D_2 = + O_1 d_2, \text{ najw } D_1' = - O_1 d_1.$$

W ten sposób możemy wyznaczyć wszystkie siły wewnętrzne z wyjątkiem D_4' , które dla obciążenia prawego jest $= 0$, a dla lewego w belce symetrycznej równa się sile D_1 .

Jeżeli d_4 jest za wielkie i nie mieści się na rysunku, to trzeba najw D_4 wyznaczyć sposobem Culmanna.

IV. Sposób Zimmermanna (§. 57 i 59 ust. 4) da się

tu także zastosować. Dla wyznaczenia najw D_3 (rys. 103.) przypuszczamy, że pierwszy ciężar stoi w 3. Oddziaływanie w A niech będzie wtedy O_1 , to otrzymamy momenty $M_3 = O_1 x_3 = \alpha e y_3$,

$$M_2 = O_1 x_2 = \alpha e y_2,$$

jeżeli αe jest odległością biegunową. Stąd otrzymamy

$$y_3 = \frac{O_1 x_3}{\alpha e} = \frac{O_1 l}{\alpha e} \cdot \frac{x_3}{l}, \quad y_2 = \frac{O_1 l}{\alpha e} \frac{x_2}{l}.$$

Jeżeli kreśląc wielobok sznurowy dla oddziaływania, przyjmiemy biegun nie w B , lecz w odległości αe od A' , to otrzymamy wprost wielobok $\frac{O_1 l}{\alpha e}$. Zróbmy teraz $B'R = \frac{O_1 l}{\alpha e}$, to $GE = y_3$, $KI = y_2$. Znając y_3 i y_2 możemy łatwo według Zimmermanna znaleźć najw D_3 .

Zastanówmy się teraz nad zmianą, jaka powstaje w konstrukcyi, jeżeli przypuścimy, że drugi ciężar, stojąc na prawej poprzecznicy, sprawia największą siłę wewnętrzną w krzyżulcu.

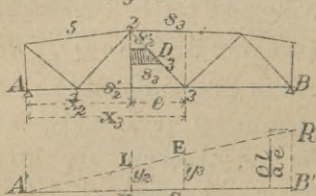
Siła poprzeczna składa się wtedy z oddziaływania i z siły P' , działającej na dół w punkcie l , przyczem $P' = P_1 \frac{e}{a}$. Wyznamy więc najprzód wpływ oddziaływania O_1 , a potem siły P' .

Jeżeli liczymy według drugiego sposobu, to robimy $F_1 F_1'$ (rys. 104) = HH' , t. j. rzędnej wieloboku sznurowego O_1 w pionowej przez punkt za-

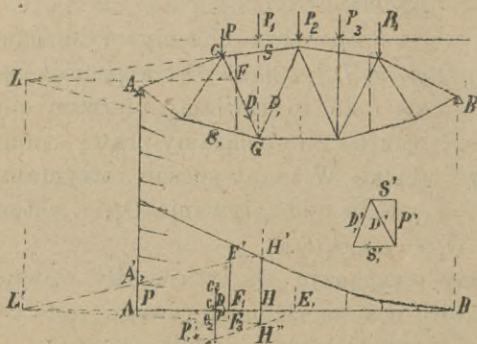
czepienia siły i w znany sposób znajdujemy $Y' = A'A_1'$. Siłę P' wyznaczmy, robiąc $C_1 C' = P_1$ i łącząc E_1 z C' , to $HH'' = P'$, a ponieważ siła ta działa w C , więc potrzebujemy tylko połączyć L' z H'' , a otrzymamy Y'' t. j.

część Y powstające z P' , mianowicie $Y'' = C_1 C_2$ a $Y = Y' - Y''$. Zrobiwszy $C_2 C_3 = A_1 A_1' = Y'$, otrzymamy $C_1 C_3 = Y$, a jeżeli $C_3 P \parallel CG$, to $C_3 P = D$.

rys. 103



rys 104.



W razie, gdy L wypada po za papier, postępujemy nieco odmiennie, jakto już powyżej podaliśmy.

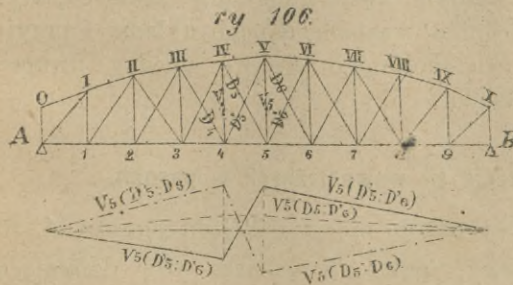
Wpływ P' na siłę wewnętrzną D w krzyżulcach możemy też wyznaczyć zapomocą sposobu Culmanna. Mamy tu siły P' , D_1'' , S i S_1 . P_1' i D_1'' przecinają się w C , S_1' i D_1'' w G , więc wypadkowa ma kierunek CG . Na tej podstawie wykreśliśmy wielobok sił w większej podziałce.

§. 64. Podwójne krzyżulce giętkie.

Bardzo często urządzamy w kracie prostokątnej podwójnej krzyżulce giętkie. Chcąc zbadać, czy krzyżulec jaki giętki pracuje, czy nie, należy według §. 56 utworzyć $\frac{M''}{h''}$ i $\frac{M'}{h'}$. W danym przedziale pracuje ta przekątnia, która spada ku słupowi, dla którego iloraz $\frac{M}{h}$ jest większy. Aby zbadać, czy dla danego położenia $\frac{M''}{h''} \geq \frac{M'}{h'}$, najlepiej wykreślić linią wpływową dla M w zwykły sposób, poczem możemy rozstrzygnąć, który krzyżulec działa, a który nie, uwzględniając przytem także momenty, powstałe w skutek ciężaru własnego.

Dla największego ciągnięcia w danym krzyżulcu należy obciążyć prawą lub lewą stronę belki od punktu obojętnego (rys. 105.). Na ciśnienie nie obliczamy krzyżulców giętkich, bo puszczamy, że się wyginają w takim razie.

Trudniejsza jest rzecz ze słupami. Tu możliwe są rozmaite wypadki działania przekątni. N. p. w rys. 106. wykreślono linie



wpływowo siły wewnętrznej w słupie V_5 dla trzech wypadków, gdy działają przekątnie D_5 i D_6 , D_5' i D_6' i D_5 i D_6' . W pierwszych dwóch wypadkach słupek pracuje na ciśnienie, w trzecim na ciągnięcie.

W pierwszych dwu wypadkach linie wpływowe dadzą się w zwykły sposób łatwo wykreślić i największe natężenie wyznaczyć. Trzeci wypadek, ważny ze względu na ciągnięcie, powstające w słupie, (jeżeli liczymy według Weyraucha), powstaje wtedy, gdy $\frac{M}{h}$ dla danego słupa jest większe, niż dla sąsiednich. Dla tego położenia najlepiej wtedy wyznaczyć siły wewnętrzne w częściach pasu IV V i V VI, z których za pomocą trójkąta sił łatwo otrzymamy V_5 . Wyznaczenie jednak najniekorzystniejszego położenia w tym razie jest dość żmudne.

XIII. Belka o kracie wielokrotnej.

§. 65. Zasada obliczenia.

Niechaj rysunek 107. przedstawia belkę wieloboczną o kracie wielokrotnej. Z ogólnej teorii belek kratowych wiadomo, że jestto układ statycznie niewyznaczalny. W przybliżeniu możemy wyznaczyć siły wewnętrzne, rozłożywszy belkę na pojedyncze układy. Tu dokładność jest znacznie mniejsza, niż dla belki równoległej, bo dla pojedynczych układów np. dla BAG musimy przyjąć cięciwę BG zamiast rzeczywistego pasu zakrzywionego $BDEFG$.

Dla dokładnego obliczenia takich belek musimy się uciec do prawideł sprężystości, więc musimy znać już przekroje. Aby zaś wyznaczyć przekroje, obliczamy belkę według tego przybliżonego sposobu, rozkładając belkę kratową na pojedyncze układy.

Będziemy więc rozkładać belkę o kracie wielokrotnej na pojedyncze układy i w każdym węźle umieścimy takie ciężary, jakie działają w odpowiednich węzłach danego układu i przyjmiemy zamiast pasu wielobocznego cięciwę między dwoma węzłami tego samego układu.

§. 66. Wyznaczenie sił wewnętrznych w pasach.

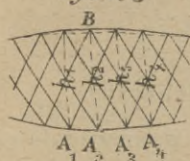
Nazwijmy h pionowy odstęp cięciwy BG od punktu A , to wiemy, że $S = -\frac{M}{h}$ siecz σ , gdzie S oznacza siłę działającą w cięciwie BG .

Chcąc znaleźć siłę wewnętrzną S_1 w części pasu BD , nachylonego do poziomu pod kątem σ_1 , otrzymamy S_1 dost $\sigma_1 = S$ dost σ , zatem $S_1 = S \frac{\text{dost } \sigma}{\text{dost } \sigma_1} = -\frac{M}{h}$ siecz σ_1 27).

Dalej nazwijmy S_2 siłę wewnętrzną w pasie DE , a σ_2 odnośny kąt nachylenia cięciwy do poziomu, to $S_2 = -\frac{M}{h}$ siecz σ_2 itd.

A więc siła wewnętrzną w pasie dla poszczególnego układu równa się ilorazowi $\frac{M}{h}$, pomnożonemu przez sieczną kąta nachylenia tej części pasu. Wyznaczamy przytem M ze względu na punkt A , zaś h , jak wspomniano, jest to wysokość belki w punkcie A , liczona do cięciwy BG .

rys 108.



Rzeczywistą siłę wewnętrzną otrzymamy dopiero wtedy, gdy dodamy siły wewnętrzne, jakie dla każdego poszczególnego układu otrzymaliśmy, więc dla pasu BC (rys. 108.) będzie

$$S = - \left\{ \frac{M_1}{h_1} + \frac{M_2}{h_2} + \frac{M_3}{h_3} \right\} \text{ siecz } \sigma \dots 28)$$

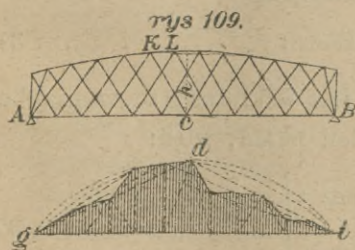
Wykreślna konstrukcyja dla każdego układu z osobna jest taka sama, jak dla kraty pojedynczej.

§. 67. Linie wpływe sił wewnętrznych w pasach.

Chcąc dokładnie obliczyć siły wewnętrzne w pasach, wyznaczyć musimy linie wpływowe. Na podstawie równ. 28) konstrukcyja linii wpływowych jest podobna do konstrukcyi dla belki równoległej.

Równ. 28) możemy też tak napisać:

$$Sh_1 = - \left\{ M_1 + M_2 \frac{h_1}{h_2} + M_3 \frac{h_1}{h_3} \right\} \text{ siecz } \sigma \dots 29)$$



Ponieważ w każdym układzie mamy tu inny punkt obrotu, a zatem i inne h , więc musimy linie wpływowe każdego układu sprowadzić na jednakową wysokość h_1 (rys. 109.). Wiemy według §. 42, że wierzchołki trójkątów dla kraty pojedynczej leżą na paraboli; tutaj leżą one na krzywej gdi , którą

otrzymamy, dzieląc w każdym punkcie M przez odnośne h . Dalej postępujemy zupełnie według §. 42 i otrzymamy w ten sposób linią wpływową dla siły wewnętrznej w pasie KL podobną, jak dla belki równoległej.

§. 68. Linie wpływowe sił wewnętrznych w krzyżulcach.

Każdy krzyżulec należy tylko do jednego układu, siły wewnętrzne w krzyżulcach wyznaczamy więc zapomocą linii wpływowych, które otrzymujemy zupełnie w ten sam sposób, jak dla kraty pojedynczej, przypuszczając zawsze ciężki zamiast pasów wielobocznych. Potem wyznaczamy trójkąty dla każdego układu, jak dla belki równoległej.

W przybliżeniu wyznaczamy siły wewnętrzne, obliczając siłę Y jak dla kraty pojedynczej i dzieląc ją przez n , przyjmując zatem $Y' = \frac{Y}{n}$.

§. 69. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

Czasem wystarczające jest przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych, zwłaszcza dla ocenienia wpływu kształtu pasów. Podamy tu więc także przybliżone wzory:

1. Pasy. Według rów. 28) mamy

$$S = - \left\{ \frac{M_1}{h_1} + \frac{M_2}{h_2} + \frac{M_3}{h_3} \right\} \text{ siecz } \sigma = \frac{M}{h} \text{ siecz } \sigma, \dots 30)$$

jeżeli M i h wyznaczymy ze względu na punkt średni, który otrzymamy, jeżeli środek danej części połączymy z wierzchołkiem trójkąta, jaki tworzą sąsiednie krzyżulce i tę prostą przedłużymy aż do drugiego pasu. M oznacza przytem moment całego ciężaru, działającego na belkę.

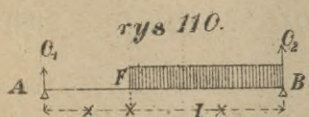
Podobnie otrzymamy dla pasu dolnego

$$S_2 = + \frac{M}{h} \text{ siecz } \tau \dots \dots \dots 31)$$

2. Krzyżulce. Jeżeli krata jest n krotna, to w przybliżeniu $\frac{1}{n}$ część ciężaru działa na jeden układ, więc:

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{1}{n} Y \text{ siecz } \alpha \\ D' &= \frac{1}{n} Y \text{ siecz } \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 32)$$

Według równ. 15) jest $Y = \frac{d\left(\frac{M}{h}\right)}{dx} h$. Dla *najw* Y , odpowiadającego punktowi F (rys. 110.) jest $Q = O_1$, więc $M = Qx$,



rys. 110.

a zatem $d\left(\frac{M}{h}\right) = Q d\left(\frac{x}{h}\right)$, bo Q dla danego obciążenia jest stałym, a mianowicie $Q = p \frac{(l-x)^2}{2l}$. A zatem mamy

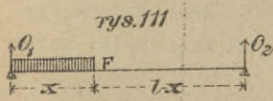
najw $(+ Y) = p \frac{(l-x)^2}{2l} h \frac{d\left(\frac{x}{h}\right)}{dx}$, a ponieważ $d\left(\frac{h}{x}\right) = \frac{xdh - hdx}{x^2}$,

a $d\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{hdx - xdh}{h^2}$, zatem $d\left(\frac{x}{h}\right) = -d\left(\frac{h}{x}\right) \frac{x^2}{h^2}$, więc podstawivszy tę wartość w równanie dla *najw* $(+ Y)$, otrzymamy

$$\text{najw } (+ Y) = - \frac{px^2(l-x)^2}{2lh} \frac{d\left(\frac{h}{x}\right)}{dx} \dots \dots \dots 33)$$

Dla *najw* $(- Y)$ otrzymamy $Q = O_1 - px = O_2$ (rys. 111.)

A zatem $M = -Q(l-x)$, $d\left(\frac{M}{h}\right) =$



rys. 111

$= -Q d\left(\frac{l-x}{h}\right)$, przyczem $Q = -\frac{px^2}{2l}$,

więc *najw* $(- Y) = \frac{px^2 h}{2l} \frac{d\left(\frac{l-x}{h}\right)}{dx}$, a wręście

$$\text{najw } (- Y) = - \frac{px^2(l-x)^2}{2lh} \frac{d\left(\frac{h}{l-x}\right)}{dx} \dots \dots \dots 34)$$

XIII. Belka kratowa paraboliczna.

§. 70. Kształt pasów.

Kształt pasów belki wielobocznej może być rozmaity; aby go bliżej określić, możemy stawiać różne warunki.

Postawmy warunek, aby przy obciążeniu zupełnem siła wewnętrzna w krzyżulcach była równą zeru, a więc cały ciężar przenosił się przez pasy. Według założenia

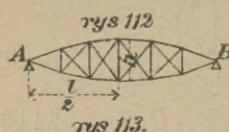
dla obciążenia zupełnego będzie więc według równ. 15)

$$Y = \frac{d\left(\frac{M}{h}\right)h}{dx} = 0, \text{ a zatem } \frac{M}{h} \text{ musi być stałą liczbą.}$$

Niechaj będzie $\frac{M}{h} = \frac{1}{C}$, to $h = CM \dots\dots\dots 35)$

Dla obciążenia zupełnego jednostajnego $M = \frac{1}{2} qx(l-x)$, jeżeli q oznacza ciężar jednostkowy, zatem $h = \frac{1}{2} Cqx(l-x)$.

Niechaj wysokość we środku belki będzie h_1 (rys. 112.), to dla $x = \frac{l}{2}$ $h_1 = \frac{1}{8} Cql^2$. Porównawszy ostatnie dwa równania dla h i h_1 , otrzymamy $h = 4h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \dots\dots\dots 36)$



Jestto równanie paraboli; widzimy więc, że, jeżeli dla obciążenia zupełnego krata nie ma wcale pracować, pasy muszą mieć kształt paraboliczny i dlatego belka ta nazywa się belką paraboliczną (n. *Parabelträger*, fr. *poutre parabolique*, a. *parabolic truss*). Według tego, czy jeden pas, czy też oba pasy są zakrzywione, rozróżniamy następujące rodzaje belki parabolicznej.

- a) Belka górnoparaboliczna (n. *Bogenschnenträger*, fr. *poutre en bowstring*, a. *bowstring girder*) (rys. 113.) o pasie dolnym prostym a górnym parabolicznie zakrzywionym.
- b) Belka dolnoparaboliczna (n. *Fischbauchträger*, a. *inverted bowstring*, *fish bellied girder*) (rys. 114.) o pasie górnym prostym, a dolnym zakrzywionym.

c) Belka ośelkowata (n. *Fisch oder Linsenträger*, a. *the bowstring suspension girder*) (rys. 112.) o obu pasach symetrycznie parabolicznie zakrzywionych.

d) Belka sierpowata (rys. 115.) (n. *Sichelträger*) o obu pasach w jednym kierunku zakrzywionych, używana zwłaszcza do dachów.

Najw ($\pm Y$) jest więc proporcjonalne do wysokości belki w danym przekroju, a ponieważ $D = Y$ siecz α , więc

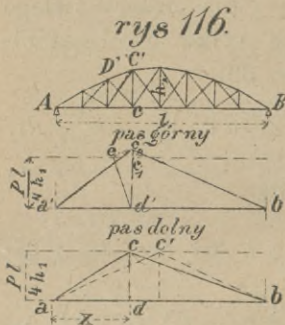
$$\text{najw } D = \frac{pl}{8h_1} h \text{ siecz } \alpha = \pm \frac{pll_1}{8h_1}, \dots \quad (42)$$

gdzie l_1 jest długością krzyżulca. A zatem siła, działająca w krzyżulcach jest proporcjonalna do długości krzyżulców, jeżeli p jest stałym.

§. 72. Linie wpływe belki górnoparabolicznej.

Z rozmaitych rodzajów belki parabolicznej jest belka górnoparaboliczna najczęściej używaną, zastanowimy się więc nad nią bliżej i wyznaczymy najprzód dla niej linie wpływe.

1. Pasy. Siła wewnętrzna w pasie dolnym jest dla ciężaru jednostajnego stałą, więc powierzchnie wpływe (rys. 116.) dla rozmaitych x muszą być równe, a zatem wierzchołki c, c' leżą na linii poziomej. Jeżeli siła P działa w punkcie C , to ze względu na punkt C



$$M = P \frac{x(l-x)}{l^2}, \text{ a ponieważ } h =$$

$$= 4h_1 \frac{x(l-x)}{l}, \text{ więc}$$

$$\frac{M}{h} = \frac{Pl}{4h_1} = S_1 = cd \dots \quad (43)$$

Pas górny jest zakrzywiony, więc

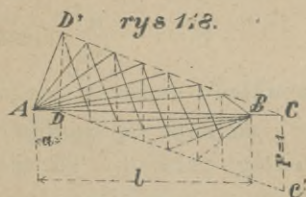
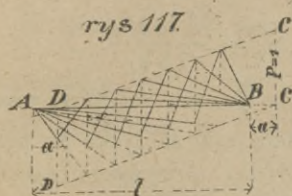
$$S_2 = \frac{M}{h} \text{ siecz } \sigma = \frac{Pl}{4h_1} \text{ siecz } \sigma \dots \quad (44)$$

Chcąc wykreślić linią wpływową dla części $D'C'$ pasu górnego, jeżeli bierzemy moment ze względu na punkt C , kreślimy z punktu d' $d'e$ prostopadłą do części pasu $D'C'$ aż do przecięcia się z poziomą przez c_1 w punkcie e , to $c_1d' = \frac{Pl}{4h_1}$, zaś $ed' = c_1d'$ siecz $\sigma = \frac{Pl}{4h_1}$ siecz σ . Zróbmy teraz $c_2d' = d'e = \frac{Pl}{4h_1}$ siecz σ i połączmy c_2 z a' i b' , to $a'c_2b'$ jest linią wpływową dla części pasu górnego $C'D'$.

2. Krzyżulce. Linie wpływe dla krzyżulców możemy wykreślić według ogólnego sposobu, lecz dla belki parabolicznej w kracie pojedynczej uzyskujemy pewne uproszczenia, jako

Melan*) wykazał. Udowodnił on mianowicie, że wierzchołki trójkątów wpływowych leżą na linii prostej. Dowód Melana, jako dość długi, opuszczamy i podajemy tylko wyniki.

Chcąc wyznaczyć linie wpływowe sił wewnętrznych w przekątniach belki parabolicznej, przedłużmy belkę AB (rys. 117.) do C o długość $a =$ odstępowi poziomemu dwóch węzłów i wykreślmy pionową w punkcie C , zróbmy $CC' = P = 1$ i połączmy C' z D , to na $C'D$ leżą wierzchołki trójkątów wpływowych. Wystawmy w punkcie D pionową $DD' = P = 1$, to DD' posłuży nam do wyznaczenia drugiego szeregu wierzchołków w sposób, uwidoczniiony na rysunku.



Z rów. 39) i 40) wynika, że powierzchnie wpływowe ujemne i dodatnie będą równe.

Jeżeli mamy giętkie przekątnie podwójne, to postępujemy według §. 64.

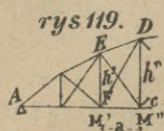
Dla słupów otrzymujemy także linie wpływowe w podobny sposób (rys. 118.). Przy podwójnych krzyżulcach uwzględniamy wywody §. 64, przyczem przy obciążeniu częściowem słupy pracują tylko na ciśnienie. Przy obciążeniu zupełnem powstaje w każdym słupie ciągnienie, równe ciężarowi węzłowemu dolnemu, jakto w następnym paragrafie zobaczymy.

§. 73. Siły wewnętrzne przy obciążeniu zupełnem.

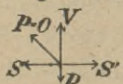
Dla obciążenia zupełnego jednostajnego zmienia się moment według paraboli, zatem jest on proporcjonalny do wysokości.

a) Ściągna. Według rów. 12) $Y = \left(\frac{M''}{h''} - \frac{M'}{h'} \right) \frac{h'}{a}$ (rys. 119), a ponieważ dla obciążenia zupełnego ciężarem jednostajnym

*) Melan. Beitrag zur graphischen Behandlung der Fachwerksträger. Zeitschrift des Hann. Ing. u. Arch. Vereines 1880.



rys 120.



$\frac{M''}{h''} = \frac{M'}{h'}$, zatem $Y=0$, więc przy obciążeniu zupełnym ścięgną wcale nie pracują.

b) Słupy. Dla równowagi węzła dolnego (rys. 120.) $V = P$, 45) gdy P oznacza ciężar, działający w węzle C . A więc słupy pracują przy zupełnym obciążeniu na ciągnienie. Ciężar węzłowy górny nie wpływa wcale na V .

c) Pasy. Ponieważ w ścięgnach nie ma żadnego natężenia, zatem składowe poziome sił, działających w pasach, muszą być stałe, a więc

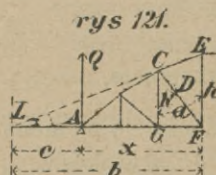
$$S = -\frac{q l^2}{8 h_1} \text{ siecz } \sigma, \quad S_2 = +\frac{q l^2}{8 h_1} \dots \dots \dots 46)$$

Dla układu ciężarów skupionych $\frac{M}{h}$ nie będzie wszędzie stałe, bo h zmienia się według paraboli, a M tylko w przybliżeniu według paraboli. Tu więc wyniki powyższe będą tylko w przybliżeniu prawdziwe. Dla dokładnego obliczenia najlepiej użyć tu ogólnej metody.

§. 74. Największe siły wewnętrzne.

1. Przekątnie. Dla rzędu krzyżulców na prawo spadających musi być prawa strona belki obciążona, dla lewych lewa strona.

Dla największej siły wewnętrznej w krzyżulcu CF (rys. 121.) jest więc obciążona belka na prawo od p . F , jeżeli nie uwzględnimy ciężaru od F aż do punktu obojętnego, a wtedy siła poprzeczna działa w A , więc $LA = c$.



Według rów. 36) jest $h = \frac{4x(l-x)}{l^2} h_1$, więc $h' = \frac{h_1}{l^2} 4(x-a)(l-x+a)$. Z rysunku widzimy, że $b = h$ dot σ , $c = b - x$. Podstawiając wartości w tych równaniach, otrzymamy

$$b = \frac{4x(l-x)h_1}{l^2} \cdot \frac{l^2}{4(l-2x+a)h_1} = \frac{x(l-x)}{l-2x+a} \dots \dots \dots 47)$$

stąd $b - a = \frac{(x-a)(l-x+a)}{l-2x+a} \dots \dots \dots 48)$

$$c = \frac{x(x-a)}{l-2x+a} \dots \dots \dots 49)$$

d) Obciążenie jednostajne.

α) Krata pojedyncza. Niech rys. 122. przedstawia linią wpływową siły wewnętrznej w przekątni, to według rów. 24)

$$x_2' = \frac{x'(l+m)}{ln-am} a.$$

Podstawmy w tem równaniu $m=c$,

$x' = x - a$, $n = b - a$, a otrzymamy

$$x_2' = \frac{(l+c)(x-a)}{l(b-a)-ac} a \dots \dots \dots 50)$$

Wstawmy teraz wartości za $(b-a)$ i c z rów. 48) i 49),

a otrzymamy
$$x_2' = \frac{l-x+a}{l-a} a \dots \dots \dots 51)$$

Najw (+ Y) otrzymamy według rów. 25)

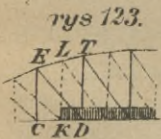
$$\text{najw } Y = \frac{(l-a-x')mn}{ln-am} \frac{p}{2b}.$$

Wstawmy znowu wartości za $x' = x - a$, $n = b - a$, $m = c$, a otrzymamy $\text{najw } Y = \frac{(l-x)c(b-a)p}{[l(b-a)-ac]2b}$, a wstawiwszy wartości za $(b-a)$ i c z rów 47) i 48), otrzymamy

$$\text{najw } Y = \frac{p(x-a)(l-x+a)}{2(l+a)} \dots \dots \dots 52)$$

Z równania tego widzimy, że *najw* Y zmienia się według paraboli.

β) Krata wielokrotna. Tu musi być belka obciążona dla *najw* Y aż do sąsiedniego węzła K (rys. 123.), a ponieważ w węźle C nie działa wtedy żadna siła i siła poprzeczna Q zaczeplą w lewej podporze, otrzymamy według równ. 8) $\text{najw } Y = Q \frac{c}{b}$, a ze względu na rów. 47) i 49)

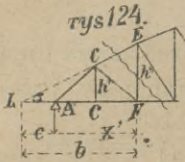


$$\text{najw } Y = \frac{x-a}{l-x} Q \dots \dots \dots 53)$$

b) Obciążenie układem ciężarów skupionych.

Tu obliczamy *najw* Y najlepiej zapomocą linii wpływowych lub według jednej z metod ogólnych.

2. Słupy. Słupy obliczamy tylko dla układu, dla którego ścięga pracują na ciągnięcie. Tu zostają rów. 47), 48) i 49) ważne, jeżeli zastosujemy je do rys. 124.



Podstawmy w równ. 24) $m = c$, $x' = x$, $n = b$, a otrzymamy $x_2' = \frac{(l+c)x}{lb-ac} a$, a jeśli wstawimy w to równanie wartości za b i c z rów. 47) i 49), otrzymamy

$$x_2' = \frac{(1-x)(1+a-x)}{1(1-x) - a(x-a)} a \dots \dots \dots 54)$$

Wstawiwszy te same wartości za m , x' i n w rów. 25), otrzymamy najw $Y = \frac{(l-a-x)^2 c}{lb-ac} \cdot \frac{p}{2}$, a wstawiwszy jeszcze wartości za b i c z rów. 47) i 49)

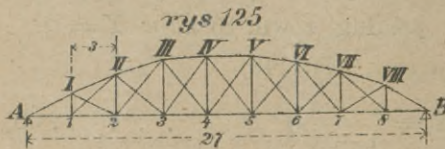
$$\text{najw } Y = \frac{p}{2} \frac{(1-a-x)^2 (x-a)}{1(1-x) - a(x-a)} \dots \dots \dots 55)$$

Dla kraty wielokrotnej otrzymamy zupełnie w ten sam sposób, jak dla przekątnej, $\text{najw } Y = \frac{x-a}{1-x} l \dots \dots 56)$

§. 75. Przykład.

Dane. Most jednotorowy o rozpiętości 27 m. Belki główne górnoparaboliczne z kratą prostokątną o podwójnych giętkich przekątniach. Wysokość belki 4 m, odstęp węzłów 3 m. Ciężar własny całego mostu wynosi według Otta $30l + 800 = 1610 \text{ kg/m}$, niech ciężar pomostu wynosi 450 kg/m , to ciężar dwu belek głównych wynosi $1610 - 450 = 1160 \text{ kg/m}$, zatem jednej belki $0,58 \text{ t/m}$, z czego przypada połowa na pas górny, a połowa na dolny. Ciężar pomostu wynosi na jedną belkę $0,225 \text{ t/m}$ i działa na pas dolny. Ciężar węzłowy dolny jest więc $G_1 = 3(0,29 + 0,225) = 1,545 \text{ t}$, zaś ciężar węzłowy górny $G_2 = 3 \cdot 0,29 = 0,87 \text{ t}$. Ciężar ruchomy przyjmujemy wedle rozporządzenia austriackiego dla momentów 6185 kg/m , na jedną belkę $3,0925 \text{ t/m}$.

Obliczenie. Wysokości słupów (rys. 125.) dadzą się obliczyć z rów. 36



$$h = 4h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) = 4 \cdot 4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Wstawiwszy $x = ma$, $l = na = 9a$, $a = 3 \text{ m}$, otrzymamy

$$h = \frac{16}{81} m (n-m) = 0,1975 m \times (n-m).$$

A zatem dla $m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$
otrzymamy $h = 1,580 \quad 2,745 \quad 3,555 \quad 3,950 \text{ m}.$

1. Pasy. Największe siły wewnętrzne powstają w pasach przy obciążeniu zupełnym, a zatem $q = p + g = 3,0925 + 0,225 + 0,58 = 3,898 \text{ t/m}$. Siła

wewnętrzna w pasie dolnym jest stała i wynosi według rów. 46) $S_2 = \frac{q^2}{8 h_1} = \frac{3,898 \cdot 27^2}{8 \cdot 4} = 88,8 t$. Siła wewnętrzna w pasie górnym jest $S_1 = 88,8$ siecz σ .

Nateżenie dopuszczalne jest wedle rozporządzenia austriackiego 754 kg/cm^2 , więc przekrój teoretyczny pasu dolnego $A_2 = \frac{88,8}{0,754} = 117,8 \text{ cm}^2$. Dla pasu górnego otrzymamy $st \sigma = \frac{h_m - h_{m-1}}{3} = \frac{0,1975}{3} [m(n-m) - (m-1)(n-m+1)] = 0,0658(10-2m)$. Siecz $\sigma = \sqrt{1 + st^2 \sigma}$. Na tej podstawie obliczyliśmy następną tabliczkę.

Część pasu górnego	st σ	siecz σ	S_1	Przekrój teoretyczny A_1
			t	cm ²
A I	0,526	1,130	100,3	133,1
I II	0,395	1,075	95,5	126,7
II III	0,132	1,008	89,5	118,7
III IV	0	1	88,8	117,8

2. Przekątnie. Ciężar własny nie sprawia w przekątniach żadnych nateżeń. Największe siły wewnętrzne w przekątniach otrzymamy w przybliżeniu z rów. 42) *najw* $D = \frac{p l l_1}{8 h_1} = \frac{27 \cdot p l}{8 \cdot 4} = 0,8425 p l_1$, przytem jest dla przekątni, spadających na prawo, $l_1 = \sqrt{h_{m-1}^2 + 3^2} = \sqrt{9 + h_{m-1}^2}$, a p trzeba przyjąć dla długości $(l - ma)$ według rozporządzenia ministeryalnego i podzielić przez 2. Na tej podstawie obliczyliśmy następną tabliczkę:

Przekątnie	l_1	$l - ma$	p	<i>najw</i> D
	m	m	t/m	t
I 2	3,390	21	3,765	10,75
II 3	4,065	18	3,980	13,63
III 4	4,651	15	4,250	16,65
IV 5	4,960	12	4,700	19,64
V 6	4,960	9	5,400	22,55
VI 7	4,651	6	6,600	25,85
VII 8	4,065	3	8,600	29,45

Dokładniej obliczymy *najw* D według rów. 51) i 52), a więc

$$x_2' = \frac{l - x + a}{l + a} a = \frac{n - m + 1}{n + 1} a = \frac{10 - m}{10} a.$$

$$\text{Najw } Y = \frac{p(x-a)(l-x+a)}{2(l+a)} = 3p \frac{(m-1)(10-m)}{20}.$$

$$st \alpha = \frac{a}{h_{m-1}}, \quad \text{siecz } \alpha = \sqrt{1 + st^2 \alpha}.$$

Na tej podstawie obliczyliśmy następną tabliczkę :

Prze- kątnie	m	x_2'	$\frac{l-(x+-a+x_2')}{m}$	p	$\frac{najwY}{t}$	st α	siecz α	$\frac{najwD}{t}$	Prze- kroj teor. A
		m	m	t/m	t			cm^2	
I 2	2	2,4	21,6	3,744	4,49	1,900	2,147	9,64	12,8
II 3	3	2,1	18,9	3,899	8,19	1,093	1,481	12,13	16,1
III 4	4	1,8	16,2	4,142	11,18	0,844	1,308	14,62	19,4
IV 5	5	1,5	13,5	4,475	13,44	0,759	1,254	16,85	22,2
V 6	6	1,2	10,8	5,380	16,14	0,759	1,254	20,24	26,7
VI 7	7	0,9	8,1	5,760	15,55	0,844	1,308	20,34	27,0
VII 8	8	0,6	5,4	6,840	14,36	1,093	1,481	21,23	28,2

Z porównania obu tabliczek widzimy, że wyniki przybliżone różnią się bardzo od dokładnych zwłaszcza z powodu, że ciężar zastępczy zmienia się bardzo wraz z długością obciążoną. Jeżeli więc już chcemy używać sposobu przybliżonego, należy ciężar zastępczy obliczać dla długości obciążonej od punktu obojętnego do podpory, uwzględniając rów. 51).

W przekątниках, spadających na lewo, działają te same siły wewnętrzne, lecz w przeciwnym porządku n. p. siła wewnętrzna w VIII 7 jest taka sama, jak w I 2.

3. Słup y. Ciężar własny sprawia według rów. 45) ciągnięcie $V_p = 1,545 t$, Najw. ciągnięcie wskutek ciężaru ruchomego powstaje także przy obciążeniu zupełnem i wtedy także ciągnięcie równa się ciężarowi węzłowemu. Jako ciężar zastępczy przyjmujemy tu ciężar zastępczy dla momentów dla rozpiętości $2a = 6 m$, zatem $p = \frac{1}{2} 10,9 = 5,45 t/m$. Ciężar węzłowy wynosi więc $3,5, 45 = 16,35 t$, zatem $najw (+ V_p) = 16,35 t$.

Największe ciśnienia otrzymamy dla obciążenia jednostronnego. Gdy przyjmujemy jako działające krzyżulce na prawo spadające, to dla mgo słupa wyznaczmy x_2' według rów. 54), mianowicie $x_2' = \frac{(l-x)(l+a-x)}{l(l-x)-a(x-a)} a$.

Wstawiszmy $l=27, a=3, x=3 m$, otrzymamy $x_2' = \frac{(9-m)(10-m)}{9(9-m)-(m-1)} 3$, a $najw Y$ według rów. 55),

$$najw Y = \frac{p(l-a-x)^2(x-a)}{4l(l-x)-a(x-a)} = \frac{3p(8-m)^2(m-1)}{4 \cdot 9(9-m)-(m-1)}$$

Nakoniec mamy $najw (-V) = -najw Y$.

Przekroje dla porównania obliczyliśmy także na podstawie wzoru Weyrauch'a $\tau = 700(1 + \frac{1}{2} \zeta)$, przyczem $\zeta = \frac{najmn P}{najw P} = \frac{P_0 + 1,3 najmn P_1}{P_0 + 1,3 najw P_1}$, gdyż tu $najmn P_1$ jest ujemnem.

Z porównania przekrojów, obliczonych według obu sposobów, widzimy, że przekroje słupów, obliczone na podstawie natężenia dopuszczalnego, przyjętego według rozporządzenia austriackiego, są za małe.

Na tej podstawie obliczyliśmy następną tabliczkę :

Słup	m	x_2'	$l - x + x_2'$		p	najw (-V _p)		najw (+V _p)		V _σ	V		Przekrój teoretyczny		τ we- dług Weyr. kg/cm ²
			m	l/m		l	l	l	l		l	l	cm ²	cm ²	
1 I	1	3,0	21,0	7,530	0	+ 16,35	+ 5,45	+ 21,8	+ 5,45	+ 21,8	+ 5,45	28,9	28,3	771	
2 II	2	2,7	18,3	7,906	- 3,44	+ 16,35	+ 5,45	+ 21,8	+ 5,45	+ 21,8	+ 2,01	28,9	30,6	712	
3 III	3	2,4	15,6	8,392	- 6,05	+ 16,35	+ 5,45	+ 21,8	+ 5,45	+ 21,8	- 1,60	28,9	32,1	679	
4 IV	4	2,1	12,9	9,130	- 7,83	+ 16,35	+ 5,45	+ 21,8	+ 5,45	+ 21,8	- 1,38	28,9	33,3	652	
5 V	5	1,8	10,2	9,940	- 8,39	+ 16,35	+ 5,45	+ 21,8	+ 5,45	+ 21,8	- 2,84	28,9	34,6	630	
6 VI	6	1,6	7,4	12,080	- 8,24	+ 16,35	+ 5,45	+ 21,8	+ 5,45	+ 21,8	- 2,79	—	—	—	
7 VII	7	1,5	4,5	14,800	- 5,55	+ 16,35	+ 5,45	+ 21,8	+ 5,45	+ 21,8	- 0,10	—	—	—	

Ponieważ założywszy działanie przekątni, spadających na lewo, otrzymamy najw V_p takie samo, lecz w przeciwnym porządku, więc dla słupów symetrycznie położonych należy wybrać wartości większe, uwydatnione tłustym drukiem.

XIV. Odmiiany belki parabolicznej.

§. 76. Zasada belki Paulego.

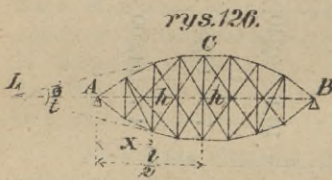
W belce parabolicznej jest siła wewnętrzna w pasach prawie stała, zmienia się tylko według siecz c. Pauli starał

się wynaleść taki kształt belki, aby siły wewnętrzne w pasach były zupełnie stałe. Wtedy może też być przekrój pasów na całą długość belki jednakowym.

Belka taka musi być przedewszystkiem ze względu na środek belki symetryczną, bo nie ma powodu, aby lewa strona belki była inną, niż prawa. W belce takiej będą oba pasy w środku poziome, tam musi też być siła wewnętrzna w obu pasach jednakowo wielką, bo $\frac{M}{h}$ jest takie samo dla obu pasów, a $\sigma = \tau = 0$. Ponieważ siła wewnętrzna ma być w pasach wszędzie jedna, więc musi być także w każdym innym przekroju dla obu pasów jedna, chociaż pasy nie są równoległe. To jest tylko możliwem, gdy $\sigma = \tau$, więc, gdy belka będzie miała kształt ośelkowaty, gdyż $-S_1 = \frac{M}{h}$ siecz σ może być równe $S_2 = \frac{M}{h}$ siecz τ tylko, gdy $\sigma = \tau$.

§. 77. Kształt belki Paulego.

Siły wewnętrzne w pasie otrzymamy w przybliżeniu bez względu na znak według rów. 3) i 4) $S = \frac{M}{h}$ siecz σ . Dla ciężaru jednostajnie ciągłego mamy $M = \frac{1}{2} q x (l - x)$, a z rys. 126.:



$$\text{siecz } \sigma = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \sigma} = \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{2 dx}\right)^2},$$

$$\text{zatem } S = \frac{q x (l - x)}{2h} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}.$$

Dla $x = \frac{l}{2}$ jest

$$S = \frac{q l^2}{8 h_1}, \text{ zatem } \frac{q l^2}{8 h_1} = \frac{q x (l - x)}{2 h} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2},$$

$$\text{albo } \frac{l^2}{4 h_1} = \frac{x (l - x)}{h} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2} \dots \dots \dots 57)$$

Ponieważ belka ta jest bardzo zbliżona do belki parabolicznej, więc dla wyznaczenia $\frac{dh}{dx}$ możemy w przybliżeniu przyjąć, jak dla paraboli, $h = \frac{4 h_1 x (l - x)}{l^2}$, więc $\frac{dh}{dx} = \frac{4 h_1}{l^2} (l - 2x)$.

Dalej wiemy, że gdy a jest bardzo małą liczbą, wyraz $\sqrt{1 + a}$ możemy rozwinąć w szereg i po opuszczeniu dalszych potęg napisać $\sqrt{1 + a} = 1 + \frac{1}{2} a$, a zatem

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2} = 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{2 h_1^2 (l - 2x)^2}{l^4}.$$

Wstawivszy to w rów. 57), otrzymamy

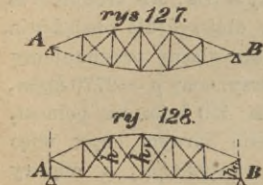
$$\frac{l^2}{4h_1} = \frac{x(l-x)}{h} \{1 + 2h_1^2(l-2x)^2\}, \text{ a stąd}$$

$$h = 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2} \left\{1 + \frac{2h_1}{l^2} \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^2\right\} \dots 58)$$

Rów. 58) jest czwartego stopnia i daje h dla tego samego h_1 nieco większe, niż dla paraboli. Siły wewnętrzne najlepiej obliczać według ogólnych sposobów powyżej podanych.

§. 78. Belka paraboliczna niezbieżna.

Oprócz belek parabolicznych zbieżnych (rys. 127.), o których dotychczas mówiliśmy, używane są także belki paraboliczne niezbieżne (rys. 128.) (n. *Halbparabelträger*), których pasy w obu końcach belki nie schodzą się i które już na podporze mają pewną wysokość h_0 .



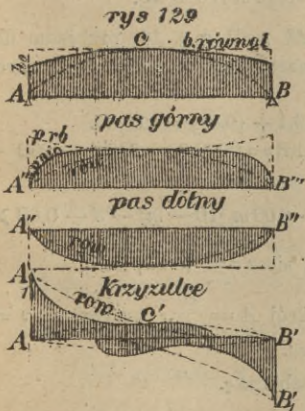
Pas dolny jest tu zwykle prosty, a równanie linii pasu górnego jest wtedy

$$h = h_0 + 4(h_1 - h_0) \frac{x(l-x)}{l^2} \dots 59)$$

Powód, dla czego używamy belek tego kształtu, leży w ustroju mostów. Często potrzebujemy na podporze pewnej wysokości, choćby tylko dla poprzecznic, czasem chcemy mieć większą wysokość belki, aby urządzić górą tężniki.

W porównaniu z równie wysoką belką równoległą potrzebuje belka paraboliczna niezbieżna mniej materiału, więcej jednak, niż belka paraboliczna zbieżna.

Siły wewnętrzne i tu wyznaczać będziemy według ogólnych sposobów, podanych powyżej. Dla porównania podamy tu siły wewnętrzne w pasach i krzyżulcach dla trzech rodzajów belek: równoległej, parabolicznej zbieżnej i niezbieżnej (rys. 129.) o równej wysokości. W belce parabolicznie niezbieżnej jest siła wewnętrzna w pa-



sach dla małego h_0 prawie stałą, dopiero przy podporach nagle spada do zera.

Siła Y w A i C jest taka sama, jak dla belki równoległej. Z punktu A_1' spada tem szybciej, im mniejsze jest h_0 .

§. 79. Przykład.

Ponieważ dla belki parabolicznej niezbieżnej nie dają się uprościć wzory ogólne, więc obliczamy siły wewnętrzne wedle wzorów ogólnych. Przykład, który tu podajemy będzie więc zarazem przykładem dla belek o pasach dowolnie zakrzywionych.

Dane. Most kolejowy dwutorowy o rozpiętości 36 m i dwu belkach parabolicznych niezbieżnych. Wysokość na podporze $h_0 = 3\text{ m}$, we środku 5 m (tabl. III). Odstęp węzłów $3,6\text{ m}$. Każdą belkę należy obliczyć dla obciążenia jednego toru pociągiem normalnym austriackim. Ciężar własny przyjmujemy według §. 2. $g = 0,44l^2 + 11,1l + 1800$. Dla $l = 36$ otrzymamy $g = 2770\text{ kg/m}$, a dla jednej belki $\frac{1}{2} 2770 = 1385\text{ kg/m}$. Z tego wypada 450 kg/m na pomost, więc ciężar belki głównej wynosi 935 kg/m . Na pasie górnym cięży więc $g_1 = \frac{1}{2} 935 = 0,478\text{ t/m}$, a na dolnym $0,478 + 0,450 = 0,928\text{ t/m}$, a ciężary węzłowe są $G_1 = 0,478 \cdot 3,6 = 1,721\text{ t}$, $G_2 = 0,928 \times 3,6 = 3,341\text{ t}$.

A. Obliczenie.

Wysokości obliczymy z rów. 58) $h = 3 + 4(5 - 3) \frac{x(l-x)}{l^2}$, albo, jeżeli $x = ma = 3,6\text{ m}$, $h = 3 + 8 \frac{m(n-m)}{n^2} = 3 + 0,08\text{ m}(10 - m)$. Stąd otrzymamy :

dla $m =$	1	2	3	4	5
$h =$	3,72	4,28	4,68	4,92	5,0 m.

1. P a s y. Dla ciężaru własnego otrzymamy oddziaływania $4,5(1,721 + 3,341) = 22,78\text{ t}$. Moment ze względu na punkt m jest $M_g = 22,78\text{ m } 3,6 + -(m-1) 5,062 \frac{m}{2} 3,6 = 91,120\text{ m} - 9,112\text{ m}^2 = 9,112\text{ m}(10 - m)$.

Dla ciężaru ruchomego obliczono najw M według §. 16, przyczem dla węzła drugiego stała na węzle 2 oś, zaś dla następnych węzłów 3 oś parowozu. Dla węzła 5. otrzymaliśmy

$$O_1 = \frac{1}{3^5} [52(34,2 + 18,6 + 3,0) + 30(26,4 + (0,8))] = 111,6\text{ t}$$

$$M = O_1 18 - 52 \cdot 16,2 - 30 \cdot 8,4 - 26 \cdot 1,8 = 2008,8 - 842,4 - 252 - 46,8 = 867,6\text{ tm}$$

Dalej mamy st $\sigma = \frac{hm - hm - 1}{3,6} = \frac{1}{3,6} (3 + 0,08\text{ m}(10 - m) - 3 - 0,08 \times (m - 1)(10 - m + 1) = \frac{1}{0,9} (0,22 - 0,04\text{ m})$, siecz $\sigma = \sqrt{1 + st^2\sigma}$.

Siła wewnętrzna $S = \frac{M}{h}$ siecz σ , a przekrój $A = \frac{S}{\tau}$, przyczem $\tau = = 772\text{ kg/cm}^2$ wedle rozporządzenia austriackiego.

Na tej podstawie obliczyliśmy następną tabliczkę.

Część pasu	Siła sto- jąca na węźle	M_p	M_g	M_g	h	$\frac{M_g}{h}$	siecz σ dla pasu górnego	Siła wewn.- trzna, S w pasie		Przekrój te- oretyczny A pasu	
								górnym	dol- nym	górnego	dol- nego
		tm	tm	tm	m	t		t	t	cm^2	cm^2
A 1	—	—	—	—	—	—	—	0	0	0	0
12 i 0 I	2	335,9	82,0	417,9	3,72	112,3	1,020	114,6	112,3	149,6	146,5
23 i I II	3	570,5	145,8	716,3	4,28	167,3	1,012	169,3	167,3	220,6	216,7
34 i II III	3	754,8	191,4	946,2	4,68	202,2	1,006	203,4	202,2	263,4	261,9
45 i III IV	3	829,4	218,7	1048,1	4,92	213,0	1,002	213,4	213,0	276,4	275,9
IV V	3	867,6	227,8	1095,4	5,0	219,1	1,000	219,1	219,1	283,8	283,8

2. Przekątnie. Dla ciężaru własnego jest dla przekątnei, na lewo spadających m tego przedziału $Q_g = 22,78 - (m - 1) 5,062$, M_g obliczyliśmy już poprzednio.

Dla ciężaru ruchomego obliczamy siły poprzeczne na podstawie §. 14, przyczem stawiamy dla pierwszego przedziału drugą oś na prawym węźle, dla innych przedziałów pierwszą oś. W pierwszym wypadku jest $M = O_1x - P_1e$, w drugim $M = O_1x$.

Według rów. 11) jest $Y = \frac{M}{h} \text{st } \sigma$, bo $\tau = 0$. h i $\text{st } \sigma$ mamy z poprzedniego, mianowicie $h = 3 + 0,08m (10 - m)$, $\text{st } \sigma = \frac{1}{0,9} (0,22 - 0,04m)$. Nareszcie $D = P$ siecz α , przyczem $\text{st } \alpha = \frac{3}{hm-1}$, siecz $\alpha = \sqrt{1 + \text{st}^2 \alpha}$.

Dla przekątnei 0 1 otrzymamy $Q_p = 97,63 - \frac{13 \cdot 1,2}{3,6} = 93,3 t$, dalej wedle poprzedniego $M = 335,9$, $h = 3,72$, $\text{st } \sigma = 0,2$, więc $\frac{M}{h} \text{st } \sigma = \frac{335,9}{3,72} 0,2 = 18,1$; $Y_p = 93,3 - 18,1 = 75,2 t$.

Dla przekątni I 2 otrzymamy $O_1 = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} [52(27 + 11,4) + 30(19,2 + 3,6)] = 77,5 = Q_p$. $M = 74,5 \cdot 7,2 = 536,1$, $h = 4,28$, $st\sigma = 0,1555$, $\frac{M}{h} st\sigma = 19,5$
 $Y_p = 74,5 - 19,5 = 55,0 t$.

Przekątnie na lewo spadające urządzamy tak daleko, dopóki jeszcze otrzymujemy ciągnięcie.

Na tej podstawie obliczyliśmy następną tabliczkę:

Przekątnie	Q_p	M_p	$-\frac{M_p st\sigma}{h}$	Y_p	Q_g	$-\frac{M_g st\sigma}{h}$	Y_g	Y_q	siecz α	D	A
	t	tm	t	t	t	t	t	t		t	cm ²
0 I	93,3	335,9	-18,1	75,2	+22,8	-4,4	+18,4	+98,6	1,414	132,2	171,2
I 2	74,5	536,1	-19,5	55,0	+17,7	-5,3	+12,4	+67,4	1,340	90,3	117,0
II 3	58,5	631,5	-15,0	43,5	+12,7	-4,5	+8,2	+51,7	1,221	68,1	81,7
III 4	46,3	660,5	-8,9	37,4	+7,6	-3,0	+4,6	+42,0	1,188	49,9	64,6
IV 5	31,7	571,6	-2,5	28,2	+2,5	-1,0	+1,5	+29,7	1,171	34,7	45,0
V 6	22,2	481,6	+2,0	24,2	-2,5	+1,0	-1,5	+23,7	1,166	26,5	34,3
VI 7	14,1	354,8	+5,0	19,1	-7,6	+3,0	-4,6	+14,5	1,171	17,0	22,0
VII 8	7,8	224,6	+5,8	13,6	-12,7	+4,5	-8,2	+5,4	1,188	6,4	8,3

Najw (+ *V*) otrzymamy wtedy, gdy żadna z przekątni, u odnośnego słupa u góry się schodzących, nie działa. Jeśli belka jest zupełnie obciążona, to działają w lewej połowie belki przekątnie, spadające na dół. Jeżeli pociąg nie sięga aż do *B*, lecz do węzła 9, 8 lub 7, to w skutek tego ciągnięcia w przekątniach tych się zmniejsza. Ciągnięcie to spadnie w przekątni (*m m* + 1) do zera, jeśli $\frac{M_m}{hm} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}$. Dla tego położenia otrzymamy *najw* (+ *V_m*) = $\frac{M_m}{hm}$ (st σ_{m+1} - st σ_m), przyczem *M_m* oznacza moment w skutek ciężaru ruchomego i własnego. Cofamy więc pociąg tak, aby pierwsza oś znajdowała się w 9, w 8, w 7 itd. i dla słupów 2, 3, 4, 5 wyznaczamy $\frac{M}{h}$. I tak n. p., gdy pociąg sięga od *A* do 7, otrzymamy

w węzle	<i>M_p</i>	<i>M_g</i>	<i>M</i>	<i>h</i>	$\frac{M}{h}$
2	510	146	656	3,72	153
3	675	191	866	4,28	185
4	756	219	975	4,68	198
5	774	228	1002	4,92	200

Siła więc *D* w przekątni IV 5 jest prawie równą zeru. Przy bardzo małym jeszcze cofnięciu pociągu, otrzymalibyśmy w węzłach 4 i 5 $\frac{M}{h} = 199$. Dla tego obciążenia otrzymamy *najw* (+ *V₄*) = 199 (0,0667 - 0,0222) = + 8,6.

Najw (+ *V₅*) otrzymamy dla tego samego obciążenia, co *najw* *S* w IV V i V VI, więc $\frac{M}{h} = 219$.

Słup I I musimy osobno obliczać. Najniekorzystniej na ciągnięcie jest, gdy długość *A I* jest obciążoną, a pierwsza oś parowozu stoi na 1. Wtedy $O_1 = \frac{52 \cdot 34,2}{36} = 49,4 t$, $Q_p = 49,4 - 52 = - 2,6 t$, $M_p = 49,4 \cdot 3,6 - 52 \cdot 18 = - 84,2 tm$, $Y_p = - 2,6 - \frac{84,2}{3,72} \cdot 0,2 = - 5,1 t$. Więc *najm* *V* = - 15,0 + + 5,1 = - 9,9 t.

Przekroje obliczyliśmy wedle wzoru $A = \frac{V}{0,772}$. Właściwiej byłoby tu zastosować wzór Weyraucha.

B. Konstrukcyja (tabl. III).

I. Pasy. Dla ciężaru ruchomego wyznaczaliśmy momenty zapomocą wieloboku sznurowego. Przyjęliśmy przytem podziałkę I dla długości $\frac{1 cm}{2 m}$, dla sił podziałkę II $\frac{1 cm}{20 t}$ i odległość biegunową 150 t, zatem dla podziałki III dla momentów będzie $\frac{1 cm}{2 \cdot 150 tm} = \frac{1 mm}{30 tm}$.

W tym samym wieloboku sił wykreśliliśmy dla ciężaru własnego ciężary węzłowe i na tej podstawie wielobok sznurowy, poczem dodaliśmy momenty wskutek ciężaru własnego i ruchomego.

Siły wewnętrzne w pasach wyznaczaliśmy według §. 58 b) (rys. 82.), przyczem zamiast całej odległości biegunowej *a* użyliśmy do konstrukcyi tylko $\frac{1}{2} a$, w skutek czego musimy wyniki otrzymane dla *S* pomnożyć jeszcze przez 2. Jeżeli wykreślmy podziałkę IV, w której 1 cm przedstawia $\frac{2}{0,772} =$

$= 2,59$ razy więcej jednostek, niż podziałka II, a więc w której $\frac{1 \text{ cm}}{20 \cdot 2,59} =$
 $= \frac{1 \text{ cm}}{51,8 \text{ cm}^2}$, to na niej odczytamy przekroje teoretyczne.

2. Przekątnie. Na rys. 5. wykreśliśmy wielobok oddziaływania 0, według §. 14 p. 3) i wyznaczyliśmy największe siły wewnętrzne *najw* D według sposobu Culmanna (§. 63 *b*) I rys. 100), przypuszczając, że pierwsza lub druga oś parowozu stoi na prawym węźle. Jeżeli druga oś stoi na prawym węźle np. 1, to pierwsza oś stoi w a , więc $P' = aa_1$, $O_1 = aa_2$. Siła wewnętrzna w O_1 jest wtedy $D_1 = D_1' - D_1''$. W zwykły sposób otrzymamy $D_1' = ab$, zaś D_1'' wyznaczyliśmy na rys. 6 w poczwórnej podziałce, robiąc $ef = P'$ i kreśląc $fg \parallel 01$, $eg \parallel 0I$. Więc $fg = D_1''$, a według podziałki II $D_1'' = bc$. Zatem $D_1 = ab - bc = ac$. Tutaj $ac > 1 \text{ m}$ dla wypadku, gdy 1 oś stoi na prawym węźle, więc *najw* $D_1 = ac$. Dla innych przekątni otrzymujemy zawsze *najw* D dla położenia pociągu pierwszą osią na prawym węźle.

Dla ciężaru własnego wyznaczyliśmy D na rys. 1. sposobem Zimmermanna (§. 57 rys. 81). M_1 i M_2 mamy już wyznaczone na rys. 4. przy użyciu odległości biegunowej $a = 150 \text{ t}$. Tu potrzeba $\frac{M_2}{e}$ i $\frac{M_1}{e}$, gdzie $e = 3,6 \text{ m}$. Dzielenie to wykonaliśmy na rys. 3, robiąc $Ou = e = 3,6 \text{ m}$, odcinając na Ou M i kreśląc równoległe do mu ; odcinki na Om przedstawiają $\frac{M}{e}$, za pomocą nich wyznaczyliśmy D_g na rys. 1.

Zmieniwszy podziałkę II w stosunku 1:0,772, wykreśliśmy podziałkę V, na której $\frac{1 \text{ cm}}{20 \cdot \frac{1}{0,722}} = \frac{1 \text{ cm}}{25,9 \text{ cm}^2}$. Odczytywać możemy na niej wprost przekroje teoretyczne.

3. Słupy. Na rysunku 7. wykreśliśmy raz jeszcze wielobok O_1 , a to dlatego, aby rys. 5. nie uczynić niewyraźnym. Siły *najw* ($-V_p$) wyznaczyliśmy tu także sposobem Culmanna. Tu jednak przecinamy belkę ukośnie, np. dla słupa 3 III w kierunku mm_1 (rys. 1). Najniekorzystniejsze obciążenie jest dla tego słupa, gdy 1 oś stoi na 4, wtedy $O_1 = 44'$ (rys. 7). Kreślimy teraz $4'a \parallel 4IV$ (rys. 1.), a potem $ab \parallel 4'IV$ i $4'b \parallel IIII$, a $ab = \text{najw} (-V_p)$ w słupie 3 III.

Chcąc wyznaczyć *najw* ($+V_p$), postępujemy, jak powyżej, obciążamy belkę do 9, 8, 7 itd. i szukamy, czy dla którego przedziału przy tem obciążeniu nie jest $\frac{M}{h}$ dla obu słupów równe, więc $Y = 0$.

N. p. gdy pierwsza oś stoi na 7 (lub na 8, a za to obciążamy prawą stronę belki zamiast lewej), to zamykająca jest rr_1 , a odnośne momenty w węzłach 3, 4, 5 będą gg_1 , hh_1 i ii_1 . Dodajemy do nich momenty w skutek ciężaru własnego z rys. 4, dzielimy sumy przez odnośne h i przekonujemy się, że $\frac{M}{h}$ dla węzła 4 i 5 są prawie równe, mianowicie $= 199 \text{ t}$. Dla tego $\frac{M}{h}$ kreślimy III IV i IV V (rys. 9.), zamykamy wielobok sił i otrzymujemy w ten sposób *najw* ($+V_1$). W rys. 10. i 11. zrobiliśmy to samo dla *najw* ($+V_2$) i *najw* ($+V_3$). *Najw* ($+V_5$) otrzymamy dla obciążenia zupełnego. W rys. 8.

robimy więc $ab = ac = najw S$ w IV V i V VI i otrzymujemy $bc = = najm (+ V_3)$.

Sily V_g wskutek ciężaru własnego wyznaczyliśmy na rys. 1. według Zimmermanna (§. 59 IV sposób).

Na rysunku 12. wyznaczyliśmy oprócz tego sily wewnętrzne, wywołane ciężarem własnym zapomocą planu sił, który wykreśliłiśmy według podziałki IV $\frac{1 \text{ cm}}{5 \text{ t}}$.

XV. Belka Schwedlera.

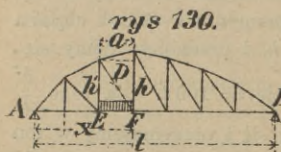
§. 80. Określenie belki.

W belce parabolicznej pracuje każdy krzyżulec na ciągnięcie i ciśnienie, przyczem obie największości są sobie równe. W belce równoległej pracują tylko niektóre krzyżulce środkowe na ciśnienie i na ciągnięcie, a ich największości nie są równe. Schwedler obliczył pośredni kształt belki, dla której najmniejszość sił wewnętrznych krzyżulców jest wszędzie równa zeru, więc natężenie krzyżulców nie zmienia znaku. W ten sposób obejdziemy się bez podwójnych przekątni, używanych w belce parabolicznej i w środkowej części belki równoległej a zarazem najw. sily wewnętrzne w krzyżulcach będą w pobliżu podpór mniejsze, niż w belce równoległej. A więc kształt pasów musi być taki, aby *najmn* Y dla każdego krzyżulca przy obciążeniu jednostronnem było równe zeru.

§. 81. Przybliżone wyznaczenie kształtu pasów.

Pas dolny belki Schwedlera przyjmujemy zawsze poziomy, chodzi więc tylko jeszcze o wyznaczenie kształtu pasu górnego, przyczem iść będziemy za wskazówkami Melana.

Jeżeli prawa strona belki (rys. 130.) jest obciążona od F' do B , to dla przedziału EF $Q = \frac{p(l-x)^2}{2l}$, a $M = Qx$.



Nazwijmy siłę Y , gdy długość FB jest obciążona, Y_1 , to według rów. 11)

$Y_1 = Q - \frac{M}{h} \text{st} \sigma$, a wstawiwszy za Q i M wartości i za $\text{st} \sigma = \frac{h-h'}{a}$, otrzymamy

$$Y_1 = p \left\{ 1 - \frac{x}{a} \frac{h-h'}{h} \right\} \frac{(l-x)^2}{2l} . \quad 60)$$

Gdy lewa strona belki jest obciążona na długości AE , to

$$Q = -p \left(\frac{x-a}{2l} \right)^2, M = -(l-x)Q, \text{ więc}$$

$$Y_2 = -p \left\{ 1 + \frac{l-x}{a} \cdot \frac{h-h'}{h} \right\} \left(\frac{x-a}{2l} \right)^2 \dots 61)$$

Jeżeli obciążony jest tylko dany przedział EF , to połowa tego ciężaru przenosi się na E , a druga połowa ciężaru na węzeł F i sprawia składowa w punkcie F ciągnienie w krzyżulcu CF , a składowa w E ciśnienie.

W skutek ciężaru $\frac{1}{2}pa$, działającego na punkt F , mamy

$$Q = \frac{a(l-x)h}{2l}, \text{ zaś } M = Qx, \text{ więc}$$

$$Y_3 = p \left\{ 1 - \frac{x}{a} \frac{h-h'}{h} \right\} a \frac{l-x}{2l}, \dots 62)$$

a wskutek ciężaru $\frac{1}{2}pa$, działającego na punkt E , mamy

$$Q = -pa \frac{x-a}{2l}, M = -(l-x)Q, \text{ więc}$$

$$Y_4 = -p \left\{ 1 + \frac{l-x}{a} \frac{h-h'}{h} \right\} a \frac{x-a}{2l} \dots 63)$$

Ciężarem własnym jest cała belka obciążona, więc dodawszy te cztery wartości dla Y i zmieniawszy p na g , otrzymamy

$$Y_g = g \left\{ 1 - \frac{x}{a} \frac{h-h'}{h} \right\} \frac{(l-x)(l-x+a)}{2l} +$$

$$-g \left\{ 1 + \frac{l-x}{a} \frac{h-h'}{h} \right\} \frac{x(x-a)}{2l} \dots 64)$$

Największe ciśnienie otrzymujemy, gdy ciężar będzie sięgać od A do punktu obojętnego, ale takie dokładne obliczenie kształtu doprowadza do zawyłych równań. A że nam tu chodzi o przybliżone wyznaczenie, dlatego przyjmujemy obciążenie pełne wszystkich węzłów z lewej strony, podczas gdy wszystkie węzły z prawej strony nie są wcale obciążone.

Wtedy otrzymamy

$$\text{najmn } Y_p = Y_2 + Y_4 = -p \left(1 + \frac{l-x}{a} \frac{h-h'}{h} \right) \frac{x(x-a)}{2l}.$$

Według zasady belki Schwedlera ma być

$$\text{najmn } Y = \text{najmn } Y_p + Y_g = 0, \text{ więc}$$

$$0 = g \left(1 - \frac{x}{a} \frac{h-h'}{h} \right) \frac{(l-x)(l-x+a)}{2l} +$$

$$-(g+p) \left(1 + \frac{l-x}{a} \frac{h-h'}{h} \right) \frac{x(x-a)}{2l}, \text{ stąd}$$

$$h \left[g \frac{a}{x} (l-x+a) - (g+p) \frac{a(x-a)}{l-x} - g(l-x+a) + (g+p)(x-a) \right] = -h' \{ (g+p)(x-a) + g(l-x+a) \},$$

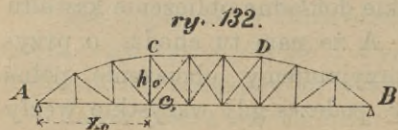
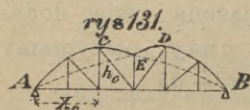
dalej $g(l-x+a) \frac{x-a}{x} + (g+p)(x-a) \frac{l-x+a}{l-x} =$
 $= \frac{h'}{h} [(g+p)(x-a) + g(l-x+a)],$

$$\frac{h'}{h} = \frac{l-x+a}{l-x} - \frac{g(l-x+a) \frac{al}{x(l-x)}}{(g+p)(x-a) + g(l-x+a)}, \text{ czyli}$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{l-x+a}{l-x} \left[1 - \frac{a}{x} \frac{gl}{gl+p(x-a)} \right] \dots 65)$$

Widzimy więc, że dla zmiennej a jest to równanie hyperboli, zatem pas górny będzie hyperbolicznie zakrzywiony, a belkę Schwedlera nazywamy też belką hyperboliczną (n. *Hyperbelträger*).

Równanie 65) wyznacza hyperbolę ACB (rys. 131). Jeżeli zaś nie lewe, lecz prawe obciążenie nie ma sprawiać żadnego ciśnienia w krzyżulcach, to kształt belki będzie symetryczny ADB . Ponieważ belka musi być symetryczną ze względu na środek, więc zatrzymujemy górne linie $ACEDB$. Ponieważ kształt ten jest nieestetyczny, więc przyjmujemy pas górny prosty na długości CD (rys. 132.) Wtedy na tej długości mamy belkę równoległą i musimy urządzić podwójne giętkie przekątnie.



Zwykle mamy dane h_0 najw. wysokość belki i chodzi nam o wyznaczenie odnośnego x_0 . Jeżeli h jest największością, to dla a bardzo małego musi być $h' = h_0$, zatem z rów. 65) otrzymamy

$$\frac{h'}{h_0} = \frac{l-x_0+a}{l-x_0} \left\{ 1 - \frac{a}{x_0} \frac{gl}{gl+p(x_0-a)} \right\} = 1, \text{ stąd}$$

$$l-x_0 = l-x_0+a - \frac{a}{x_0} \frac{gl(l-x_0+a)}{gl+p(x_0-a)}, \text{ albo}$$

$$x_0 gl + px_0^2 - apx_0 = gl^2 - glx_0 + agl, \text{ a więc}$$

$$x_0 = \frac{(ap - 2gl) + \sqrt{(ap - 2gl)^2 + 4pgl(l+a)}}{2p} \dots 66)$$

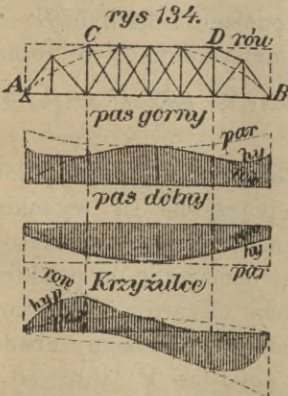
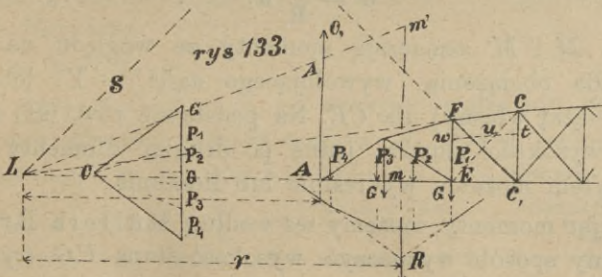
Jeżeli przyjmiemy $a=0$, otrzymamy przybliżony wzór Winklera
$$x_0 = \frac{gl}{p} \left(\sqrt{\frac{p}{g} + 1} - 1 \right) \dots \dots \dots 67)$$

Jeżeli do obliczenia używamy ciężaru zastępczego, to p należałoby brać jako ciężar zastępczy dla sił poprzecznych, który znów zależny jest od x_0 . Przyjąwszy tymczasowo x_0 i p , należy potem obliczenie powtórzyć dla dokładnego x_0 i p .

Słup CC_1 obieramy teraz dla punktu, którego x w przybliżeniu leży w połowie między x_0 i $x_0 - a$, dalsze wysokości h' wyznaczamy według równ. 65) po kolei.

Mając dane a możemy też inaczej postępować. Z równ. 65) obliczamy naprzd h_2 , przyczem $h = h_2$, a $h' = h_1$, potem h_3, h_4 i wyrażamy wszystkie te wysokości przez h_1 i w ten sposób łatwo znajdziemy największą wysokość.

Wykreślić da się kształt belki wyznaczyć według Otta w następujący sposób. Chcąc wyznaczyć wysokość h słupa EF , obciążamy prawą stronę belki AE , stawiając pierwszy ciężar P_1



na E . Oprócz tego belka obciążona jest ciężarem własnym. Dla tego obciążenia wyznaczamy O_1 i wypadkową R ciężarów, działających między A i E , n. p. za pomocą wieloboku sznurowego.

Ze względu na punkt L mamy wtedy $Ds = -O_1m + Rr = 0$, a więc $Rr = O_1m$, a stąd $R : O_1 = m : r$. Jeżeli więc na kierunku siły R odetniemy $mm' = O_1$, a na kierunku siły O_1 $AA_1 = R$ i połączymy m' z A_1 , to otrzymamy punkt L , w którym się

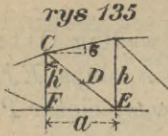
przecinać mają pasy. Połączmy C z L , a otrzymamy szukany punkt F . W ten sposób po kolei wyznaczamy wysokości słupów.

Nateżenie najlepiej wyznaczyć zapomocą sposobów ogólnych. Dla porównania podajemy tu na rys. 134. siły wewnętrzne belki równoległej, parabolicznej i hyperbolicznej o równej wysokości.

§. 82. Dokładne wyznaczenie kształtu belki.

Chcąc dokładnie wyznaczyć kształt belki zwłaszcza, jeżeli obliczamy belkę na podstawie danego układu ciężarów skupionych, używamy innego sposobu. (rys. 135).

Jak wiemy, dla belki Schwedlera musi być dla krzyżulca CE najmn $D = 0$. Uwzględnivszy rów. 12), otrzymamy więc dla prawego obciążenia



$Y = 0 = \left(\frac{M}{h} - \frac{M'}{h'} \right) \frac{h'}{a}$, a stąd $\frac{M}{h} = \frac{M'}{h'}$, więc

$$h' = \frac{M'}{M} h, \dots \dots \dots 68)$$

przyczem M i M' oznaczają momenty ze względu na punkty E i F dla obciążenia, wywołującego najw ($-Y$) [obciążenie prawe i ciężar własny] dla CE . Na podstawie rów. 68.) możemy obliczać wysokości słupów, jedną po drugiej. Momenty wyznaczyć przytem możemy wykreślnie lub liczebnie.

Znając momenty, możemy też według Müllera Breslaua w następny sposób wyznaczyć wysokość słupa FG (rys. 133.). Założmy, że w przedziale danym GC jest przekątnia drugorzędna EC , to dla najniekorzystniejszego położenia ma być $D' = 0$. Jeżeli D' wyznaczamy sposobem Zimmermanna, to robimy $C_1t = \frac{M_0}{e}$, $Ew = \frac{M'}{e}$, kreślimy $tu \parallel EC_1$, to, gdy $D' = 0$, musi być $wu \parallel CF$. Kreślimy więc $CF \parallel uw$.

Do wyznaczenia dokładnego najniekorzystniejszego położenia i wykreślenia linii wpływowych potrzebne są wysokości belki, których jeszcze nie znamy, wyznaczamy więc tymczasowo w przybliżeniu kształt belki, przyjmując obciążenie do punktu F (rys. 135.), albo dla obciążenia układem ciężarów skupionych ustawiamy pierwszą oś na F . Potem dodatkowo możemy zbadać, czy druga oś, stojąc na F , nie sprawi najw ($-Y$) lub, co na jedno wychodzi, czy h' nie będzie większe. Z tego wynika, że

dla rozmaitych położeń ciężarów należy przyjąć do obliczenia takie h' , dla którego $\frac{M'}{M}$ jest największe.

Przy obliczeniu kształtu belki trzeba ciężar własny raczej przyjmować za mały, niż za wielki. Jeżeli bowiem ciężar własny w rzeczywistości jest mniejszy, niż przyjęto w rachunku, to może powstać w krzyżulcu CE ciśnienie, na które nie został obliczony. Aby tego uniknąć, lepiej jest przy obliczeniu przyjąć ciężar własny trochę mniejszy, niż z wzorów przybliżonych wynika.

§. 83. Przykład.

Dane. Most drogowy 1. klasy szeroki 7,5 m ma 2 belki główne Schwedlera o rozpiętości 20 m (tabl. IV). Wysokość belki wynosi 3 m, odstęp węzłów $\frac{20}{8} = 2,5$ m. Ciężar własny przyjmujemy według rów. 3) $g = 6.20 + 630 \text{ kg/m}^2 = 750 \text{ kg/m}^2$, z czego wypada na pomost żwirowany z kształtówek według §. 2. $420 + 80 = 500 \text{ kg/m}^2$. A więc ciężar belki głównej $\frac{7,5}{2} (750 - 500) = 938 \text{ kg/m} = 0,938 \text{ t/m}$, który rozkłada się po połowie na pas dolny i górny. Na pasie dolnym cięży oprócz tego ciężar pomostu $\frac{7,5}{2} 500 = 1875 \text{ kg/m} = 1,875 \text{ t/m}$. A więc $g_1 = 0,469 \text{ t/m}$, $g_2 = 2,344 \text{ t/m}$, a ciężary węzłowe $G_1 = 1,178 \text{ t}$, $G_2 = 5,86 \text{ t}$.

1. Obliczenie.

a) Kształt pasu górnego obliczymy według rów. 68) $\frac{M}{h} = \frac{M'}{h'}$. W tym celu obliczymy najprzód momenty M_g wskutek ciężaru własnego. Otrzymamy więc $O_1 = \frac{n-1}{2} (5,86 + 1,178) = 7,038 \frac{n-1}{2}$. Dla m go węzła

$$M_g = O_1 m e - 7,038 (m-1) \frac{m}{2} e = \frac{7,038 (n-1) m}{2} e - \frac{7,038 m (m-1)}{2} e =$$

$$= 3,519. 2,5 m (n-m) = 8,798 m (8-m), \text{ gdyż } e = 2,5, \text{ a } n = 8. \text{ A więc dla}$$

$m = 1$	2	3	4
$M_g = 61,6$	$105,6$	$132,0$	$140,8 \text{ t/m}$.

Dla wyznaczenia stosunku $h_2 : h_1$ posuwamy wozy od A na prawo tak, aby tylne koła (IV) stały na 1. Innych kół wtedy nie ma na belce. Zauważyć przytem musimy, że ponieważ trzy rzędy wozów zmieszczą się na moście, więc na jedną belkę wypada ciężar $1\frac{1}{2}$ rzędu wozów, ciężary kół i koni pomnożymy więc przez 1,5. Otrzymamy zatem $O_1 = \frac{7e \cdot 9}{8e} = 7,875 \text{ t}$, więc $M_{1p} = O_1 \cdot 2,5 = 19,7 \text{ tm}$, a $M_{2p} = O_2 6e = (9 - 7,875) 15 = 16,9 \text{ tm}$. A zatem $M_1 = M_{1g} + M_{1p} = 61,6 + 19,7 = 81,3 \text{ tm}$, $M_2 = 105,6 + 16,9 = 122,5 \text{ tm}$, więc $\frac{h_1}{h_2} = \frac{81,3}{122,5} = 0,664$.

Posunąwszy wozy tak, aby tylne koła stały na 2, otrzymamy

$$O_2 = \frac{9 \cdot 5 + 9 \cdot 1,2}{20} = 2,79 \text{ t}, \text{ dalej } M_{2p} = 2,79 \cdot 15 = 41,8 \text{ tm} \text{ a } M_{3p} =$$

$$= 2,79 \cdot 12,5 = 34,9 \text{ tm}, \text{ zatem } \frac{h_2}{h_3} = \frac{105,6 + 41,8}{132,0 + 34,9} = 0,883.$$

Posunąwszy wozy tak, aby tylne koła stanęły na 3, otrzymamy $O_2 = \frac{9 \cdot 7,5 + 9 \cdot 3,7}{20} = 5,04t$, dalej $M_{3p} = 5,04 \cdot 12,5 = 63tm$, $M_{4p} = 5,04 \cdot 10 = 50,4tm$, zatem $\frac{h_3}{h_4} = \frac{192,0 + 63}{140,8 + 50,4} = \frac{195}{191,2} > 1$. A zatem h_3 jest największe.

Wedle założenia przyjmujemy $h_3 = 3m$, a więc $h_2 = 3 \cdot 0,883 = 2,65m$
 $h_1 = 0,664 \cdot 2,65 = 1,76m$.

2. Pasy. Siły wewnętrzne w pasach obliczymy według wzorów 3) i 4)
 $S_1 = -\frac{M}{h}$ siecz σ , $S_2 = +\frac{M}{h}$, przyczem w średnich przedziałach należy brać dla pasu górnego większe $\frac{M}{h}$, dla pasu dolnego mniejsze. M_g już obliczyliśmy powyżej, momenty z powodu ciężaru ruchomego M_p obliczymy wedle §. 16, przyczem stawiamy na węźle 1 i 2 ciężar IV, na węzłach 4 i 5 ciężar III. Ponieważ moment w 5 (81,8tm) otrzymujemy większy, niż w 3 (78,7tm), więc przyjmujemy i dla 3 taki sam, jak w 5 (81,8tm), przypuszczając, że szereg wozów porusza się w przeciwnym kierunku.

Dla węzła 4 np. otrzymamy $O_1 = \frac{1}{20} [2,25(17,1 + 5,7 + 2,1) + 9(13,8 + 10)] = 13,51t$. $M = 13,51 \cdot 10 - 2,25 \cdot 7,1 - 9 \cdot 3,8 = 84,9tm$.

Dalej mamy $st \sigma_m = \frac{hm+1 - h_m}{2,5}$, siecz $\sigma = \sqrt{1 + st^2 \sigma}$, przekrój teoretyczny $A = \frac{S}{0,790} cm^2$.

Na tej podstawie obliczyliśmy następujące tabliczki:

Węzeł	M_g	M_p	M_q	h	$\frac{M_g}{h}$
	tonmetrów			metrów	ton
0	0	0	0	0	—
1	61,6	42,2	103,8	1,76	59,0
2	105,6	67,5	173,1	2,65	65,3
3	132,0	81,8	213,8	3,0	71,3
4	140,8	84,9	225,7	3,0	75,2

Część pasu		$\frac{M}{h}$	st σ	siecz σ	S dla pasu		Przekrój teoretyczny dla pasu	
górnego	dolnego				górnego	dolnego	górnego	dolnego
górnego	dolnego	t	dla pasu górnego		ton		cm ²	
0 I	A 2	59,0	0,704	1,223	72,2	59,0	91,4	74,7
I II	2 3	65,3	0,356	1,061	69,3	65,3	87,7	82,7
II III	3 4	71,3	0,140	1,010	72,0	71,3	91,1	90,3
III IV	—	75,2	0,000	1,000	75,2	—	95,2	—

2. Przekątnie. Dla ciężaru własnego otrzymamy w m przedziale $Q_g = O_1 - (m - 1) 7,038 - 7,038 \left(\frac{n-1}{2} - m + 1 \right) = 3,519 (n - 2m + 1) = 3,519 (9 - 2m)$, $Y_g = Q_g - \frac{M_g}{h} \text{st} \sigma$. Wartości M_g , h i $\text{st} \sigma$ znamy już z poprzedniego.

Dla ciężaru ruchomego obliczamy siły poprzeczne na podstawie §. 14, przyczem stawiamy tylne koła wozów na prawym węźle. Wtedy jest $M = O_1 x$, $Q = O_1$, więc $Y = O_1 - \frac{O_1 x}{h} \text{st} \sigma = O_1 \left(1 - \frac{x}{h} \text{st} \sigma \right)$. Dalej mamy $D = Y \text{siecz} \alpha$, a $\text{st} \alpha = \frac{2,5}{hm-1}$, $\text{siecz} \alpha = \sqrt{1 + \text{st}^2 \alpha}$.

N. p. mamy dla krzyżulca I 2: $O_1 = \frac{1}{20} [2,25 (6,9 + 3,3) + 9 (15 + 11,2)] = 12,9$, dalej $\frac{x}{h} \text{st} \sigma = \frac{5}{2,65} 0,356 = 0,672$, $Y_g = 12,9 (1 - 0,672) = 4,2 t$. Dla ciężaru własnego mamy $Q_g = 3,519 (9 - 4) = 17,6 t$, $\frac{M_g}{h} \text{st} \alpha = \frac{105,6}{2,65} 0,356 = 14,2 t$, $Y_g = 17,6 - 14,2 = 3,4 t$. Zatem $Y_g = 4,2 + 3,4 = 7,6 t$. Dalej mamy $\text{st} \alpha = \frac{2,5}{1,76} = 1,420$, $\text{siecz} \alpha = \sqrt{1 + 1,42^2} = 1,734$, więc $D_g = 7,6 \cdot 1,734 = 13,2 t$ a $A = \frac{13,2}{0,79} = 16,7 \text{ cm}^2$.

Wyniki zestawiliśmy w następnjej tabliczce.

Prze- kątnie	najw	$\frac{x}{h} \text{st} \sigma$	Y_p	Q_g	$\frac{M_g}{h} \text{st} \sigma$	Y_g	Y_g	siecz α	D_g	A
	$Q_p = O_1$									t
ton										
I 2	12,9	0,672	4,2	17,6	14,2	3,4	7,6	1,734	13,2	16,7
II 3	10,1	0,350	6,6	10,6	6,2	4,4	11,0	1,378	15,2	19,2
III 4	7,5	0	7,5	3,5	0	3,5	11,0	1,302	14,3	18,1
IV 5	5,0	0	5,0	3,5	0	3,5	1,5	1,302	2,0	2,5

3. Słupy. Dla ciężaru własnego mamy dla m tego słupa, przecinając belkę ukośnie, $Q_g = O_1 - (m - 1) 7,038 - 5,86 = 3,519 (9 - 2m) - 5,86 t$. Dalej otrzymamy $Y_g = Q_g - \frac{M_g}{h} \text{st} \sigma$, przyczem $\frac{M_g}{h} \text{st} \sigma$ jest takie same, jak dla przekątni ($m - 1 m$).

Dla ciężaru ruchomego jest $Y_p = Q_p - \frac{M_p}{h} \text{st} \sigma$, przyczem Q_p jest takie samo, jak dla przekątni ($m m + 1$), h i $\text{st} \sigma$, jak dla przekątni ($m - 1 m$), a $M_p = Q_p m e = 2,5 Q_p m$.

Słup I 1 pracuje tylko na ciągnięcie, równe ciężarowi węzłowemu, a więc $V_{1g} = + 5,86 t$, a $V_{1p} = + 9 t$.

Najmn ($+ V_{2p}$) otrzymujemy, obciążając belkę z lewej strony do 2 a więc stawiając tylne koła wozów na 2. Mamy wtedy $O_2 = \frac{1}{20} 9 (5 + 1,2) = 2,79 t$, więc $Q = - O_2 = - 2,79$, $M = 2,79 \cdot 15 = 41,85 tm$. A zatem $\text{najw} (+ Y_p) = - \left(- 2,79 - \frac{41,85}{2,65} 0,356 \right) = + 8,4 t$.

Najw (+ V_{3p}) otrzymamy, gdy obciążymy lewą część belki, a tylne koła wozu postawimy na 3. Wtedy działać będzie ścięgno 3 IV, a ścięgno III 4 nie; otrzymamy więc, jeżeli uwzględnimy i ciężar własny, *najw* (+ V_3) = = pionowej składowej siły zewnętrznej II III, mniej ciężar węzłowy w II działający = 1,2 t. A zatem *najw* (+ V_3) = $\frac{M_g}{h}$ st α - 1,2. Według poprzedniego mamy wtedy $M_p = 63 tm$, $M_g = 132,0 tm$, więc $M_q = 195 tm$, $h = 3 m$, zatem $\frac{M}{h} = \frac{195}{3} = 65 t$. Otrzymamy więc *najw* (+ V_3) = 65.0,140 - 1,2 = = 7,9 t.

Najw (+ V_4) otrzymamy, gdy wozy posuniemy do 4, wtedy *najw* $\frac{M}{h}$ będzie w 4 i będą działać przekątnie III 4 i V 4, a przekątnie 3 IV i 5 IV nie. A zatem natężenie w słupie 4 IV będzie równe ciężarowi węzłowemu IV = = - 1,2. To samo otrzymamy dla belki nieobciążonej.*)

IV. Konstrukcja.

1. Kształt pasów. Wysokości słupów nie wyznaczyliśmy według Otta, bo punkt *L* wypadłby dla h_3 po za papier, wyznaczyliśmy więc wysokości h według rów. 68) $\frac{M}{h} = \frac{M'}{h'}$, jak przy wyznaczaniu liczebnem, z tą różnicą, że momenty wyznaczyliśmy tu wykreślnie.

Na rys. 3. wykreśliliśmy wielobok sił według podziałki II $\frac{1 cm}{10 t}$, odcinając dla ciężaru własnego ciężary węzłowe 7,04 t, a dla ciężaru ruchomego ciężary osi i koni 9 t i 2,25 t. Odległość biegunową przyjęliśmy równą 30 t, a że podziałka długości I jest $\frac{1 cm}{1 m}$, więc III podziałka momentów jest $\frac{1 cm}{30 tm} = \frac{1 mm}{3 tm}$.

Na rys. 2. wykreśliliśmy na tej podstawie wielobok sznurowy, wyznaczyliśmy największe momenty dla rozmaitych położań układu ciężarów (§. 16 d), przypuszczając, że obciążenie sięga do 1, do 2 lub do 3 z lewej strony, albo, co na jedno wychodzi, do 7, do 6 lub do 5 z prawej strony. N. p. jeżeli tylne koła stoją na 3, to zmieszczą się jeszcze na belce z lewej strony tylko przednie koła, a wielobok sznurowy otrzymamy, przedłużwszy bok *ms*, *fmre*, a zamykającą *fe*. Moment w 3 jest mn , w 4 m_1n_1 .

Na rys. 4. wykreśliliśmy wielobok sznurowy *ACB*, z którego otrzymujemy momenty z powodu ciężaru własnego.

2. Pasy. Zapomocą wieloboku sznurowego wyznaczone *najw.* momenty wskutek ciężaru ruchomego wykreśliliśmy na rys. 4, a do-

*) Wyniki w ten sposób otrzymane zestawiliśmy w następniej tabliczce:

Słup	Q_p	M_p	h	st α	$\frac{M_p}{h}$ st α	<i>najw</i> ($-V_p$)	Q_g	$\frac{M_g}{h}$ st α	V_g	<i>najw</i> (+ V_p)	<i>najmn</i> V	<i>najw</i> V	A
I	—	—	—	—	+5,9	0	—	+5,9	+9	+5,9	+14,9	18,9	—
II	10,1	50,5	2,65	0,356	—6,8	—3,3	11,7	—14,2	+8,4	—0,8	+10,9	13,8	—
III	7,5	56,3	3,0	0,140	—2,6	—4,9	4,7	—6,2	+5,4	—3,4	+7,9	10,0	—
IV	5,0	50,0	3,0	0	0	—5,0	—	0	—1,2	—6,2	—1,2	7,9	—

dawszy do nich momenty z powodu ciężaru własnego, otrzymujemy moment y wskutek obciążenia zupełnego. Siły wewnętrzne w pasach wyznaczamy na podstawie rów. $S = \frac{M}{h}$ siecz σ (§. 57 b). N. p. dla części pasu AI jest $ts = M$, $ut = h$, $uu_1 = a = 30 t$, więc $ss_1 = \frac{M}{h}$, a gdy wykreślimy $s_1w \parallel AI$, otrzymamy $s_1w = AI$. Zarazem otrzymamy $ss_1 = Az$.

Chcąc otrzymać odrazu przekrój teoretyczny, potrzebujemy tylko zmienić podziałkę II i otrzymamy dla podziałki IV $\frac{1 \text{ cm}}{10 t : 0,79} = \frac{1 \text{ cm}}{12,66 \text{ cm}^2}$.

3. Przekątnie. a) Ciężar własny. Wykreśliwszy na rys. 5. siły poprzeczne na podstawie ciężarów węzłowych, wyznaczyliśmy siły wewnętrzne na podstawie rów. $Y = \frac{c}{b}$ według §. 59 III. N. p. dla przekątnej I 2 jest siła poprzeczna pp_1 , kierunek jej przechodzi przez punkt N (rys. 4). Punkt przecięcia się pasów jest L (rys. 1.), połączywszy więc L' z p_1 (rys. 5), otrzymamy $N'M = Y_g$, a $MW = D_g$.

b) Ciężar ruchomy. Wykreśliwszy wielobok oddziaływań, wyznaczamy najw. siły wewnętrzne sposobem Culmanna (§. 63 I). N. p. dla II 3 stawiamy tylne koła wozu na 3, a więc $O_1 = rr_1$ (rys. 5.), wypadkowa ze sił S_3 i D_3 ma kierunek AI (rys. 1.). Wykreśliwszy więc $r_1t \parallel AI$, $ut \parallel II 3$ i $r_1u \parallel II III$, otrzymamy $D_{3p} = ut$.

4. Słupy. Ciężar własny. Dla ciężaru własnego wyznaczyliśmy siły zewnętrzne w ten sam sposób, co dla przekątnej. Dla słupa II 2 przecinamy belkę wedle mm_1 (rys. 1.), siła poprzeczna jest pp_1 (rys. 5.). Ponieważ punkt N wypada po za papier, więc użyliśmy tu konstrukcyi pomocniczej (p. rys. 85). Robimy $KK_2 = \frac{1}{2} KK_1$ (rys. 4), $K_2n_2 \parallel K_1c$. Punktowi n_2 odpowiada n w rys. 6. Podobnie otrzymujemy z rys. 1 l (rys. 6.), a połączywszy l z p , otrzymujemy $mn' = -V_{2g}$.

Ciężar ruchomy. Najw. ciśnienie w słupach wyznaczamy za pomocą sposobu Culmanna, jak dla przekątnej. Najw. ciągnięcie w słupie I 1 jest, jak wiadomo, równe ciężarowi węzłowemu $9t$, w słupie II 2 otrzymamy, wyznaczając *najw* ($+V_6$), sposobem Culmanna. Dla słupa III 3 musimy, jak to poprzednio podaliśmy, obciążyć belkę z prawej strony do 3. Otrzymamy wtedy moment w 3 mn (rys. 2). Zrobmy $mn = ce$ (rys. 4), to be przedstawia wtedy moment w 3 dla tego obciążenia, $ef = \frac{M}{h}$, $eg = \frac{M}{h} \text{ st } \sigma$, a gdy $gh = 1,2t =$ ciężarowi węzłowemu górnemu, to $eg - gh = ch = \textit{najw}$ ($+V_3$).

Najw ($+V_4$) = $-1,2t$, jak to powyżej wykazaliśmy.

Rys. 7. przedstawia plan sił sposobem Cremony dla obciążenia ciężarem własnym.

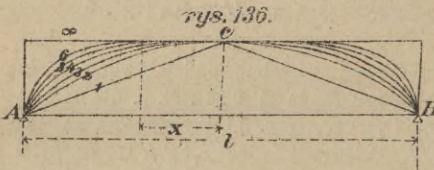
XVI. Inne belki kratowe.

§. 84. Belka Winklera.

Ważnem jest pytanie, jaki kształt nadać belce kratowej, aby ilość materiału była najmniejszą. Potrzebaby w tym celu

obliczyć teoretyczną i rzeczywistą ilość materiału dla belki równoległej, parabolicznej i belki o pasach dowolnie krzywych i ją jako funkcją kształtu pasów wyrazić. Zadanie tak ogólnie postawione nie da się rozwiązać. Musimy je więc bliżej określić. Winkler, który starał się rozwiązać powyższe pytanie, przypuszcza, że belki kratowe, które porównujemy, mają wszystkie w środku rozpiętości tę samą wysokość największą, dalej przyjmuje on pas dolny prosty a górny zakrzywiony według paraboli n ego rzędu. Wtedy będzie wysokość h w odstępnie x od środka belki (rys. 136.)

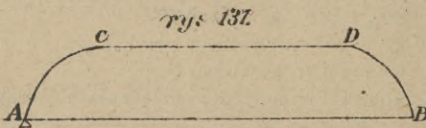
$$h = \left(1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right)^n h_1 \dots \dots \dots 69)$$



Dla $n = 1$ otrzymujemy trójkąt ACB , dla $n = 2$ mamy pas górny zakrzywiony według paraboli zwykłej, dla $n > 2$ według paraboli wyższego stopnia,

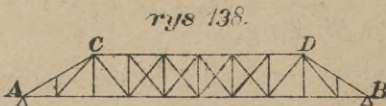
nareście dla $n = \infty$ według linii prostej, więc belkę równoległą. Winkler wyznaczył wykreslnie objętość materiału dla rozmaitych wartości n i otrzymał najmniejszą teoretyczną ilość materiału dla $n = 4$ do $n = 6$. Rzeczywista najmniejsza ilość materiału będzie dla nieco mniejszego n .

Belka taka ma pas górny na znacznej długości bardzo mało zakrzywiony, dopiero przy podporach spada on nagle. Nazywamy ją belką Winklera, nie używamy jej jednak w praktyce, tylko zamiast niej używamy belek o kształtach przybliżonych i tak najprzód belkę z parabolicznem zakończeniem (rys. 137.) (*Parallelträger mit parabolischen Enden*).



Jestto belka, której pas dolny jest prosty, a górny także prosty w części środkowej, przy końcach zaś zakrzywiony parabolicznie.

Siły wewnętrzne obliczamy na długości CD jak dla belki równoległej, dla końców zaś AC i DB według sposobów ogólnych,



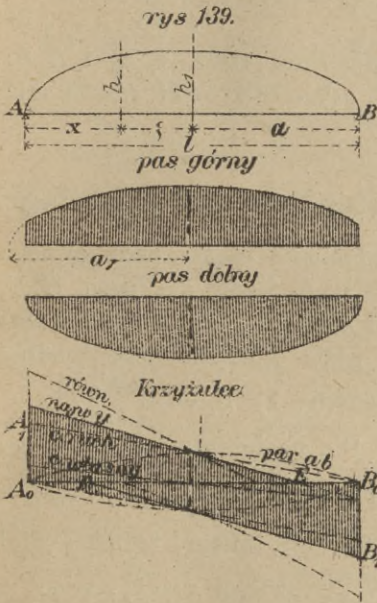
używanych dla belki wielobocznej.

Kształt przybliżony do belki Winklera ma także

belka trapezowa (n. *Trapezträger*) (rys. 138.), używana często w Ameryce, w Europie wprowadzona przez Köstlina i Battiga. Tu zakończenie pasu górnego jest proste, co wielce ułatwia robotę belki.

§. 85. Belka eliptyczna.

Belka eliptyczna (n. *Elipsenträger*) (rys. 139.) jest używana także jako belka kształtem zbliżona do belki Winklera. Równanie linii pasu górnego



jest $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{h^2}{h_1^2} = 1$, więc

$h = h_1 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}$, a ponieważ $\xi = \frac{l}{2} - x$, a $a = \frac{l}{2}$, więc

$h = \frac{2h_1}{l} \sqrt{x(l-x)}$. 70)

Winkler oblicza dla tej belki w przybliżeniu siły wewnętrzne w pasie górnym i dolnym S_1 i S_2 i otrzymuje dla obydwóch wartości równania elipsy. Podajemy tu tylko wyniki, bo belka ta jest mało używana, a przy dokładnem obliczeniu trzeba uży-

wać wzorów ogólnych. Na rys. 139. przedstawiliśmy siły zewnętrzne w obu pasach, przyczem

$a_1 = a \sqrt{\frac{2a^2}{2a^2 - h_1^2}}$ *) 71)

Dla kraty otrzymamy wedle Winklera

dla ciężaru własnego $\frac{M_g}{h} = \frac{gx(l-x)l}{2 \cdot 2h_1 \sqrt{x(l-x)}} = \frac{gl}{4h_1} \sqrt{x(l-x)}$.

Według rów. 15) jest $Y_g = \frac{d}{dx} \frac{M_g}{h} = \frac{gl(l-2x)}{4h_1 \sqrt{x(l-x)}} \frac{2h_1}{l} \times \sqrt{x(l-x)}$, więc $Y_g = \frac{g}{4}(l-2x) = \frac{1}{2}g\xi$ 72)

*) p. Winkler. Theorie der gegliederten Balkenträger II. wyd. str. 211.

Dla ciężaru ruchomego jest

$$najw (+ Y) = Q - \frac{M}{h} \operatorname{st} \alpha = Q - \frac{M}{h} \frac{dh}{dx}. \text{ Wstawivszy wartości}$$

$$Q = \frac{p(l-x)}{2l}, M = \frac{px(l-x)^2}{2l}, \frac{dh}{dx} = \frac{h_1}{l} \frac{l-2x}{\sqrt{x(l-x)}}, \text{ otrzymamy}$$

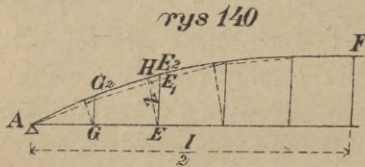
$$najw (+ Y) = \frac{1}{4} p (l-x), \dots \dots \dots 73)$$

$$a \text{ najw } (- Y) = Y_s - najw (+ Y) = \frac{p}{4} (l-2x) - \frac{p}{4} (l-x) = \\ = -\frac{1}{4} p x \dots \dots \dots 74)$$

Równania 73) i 74) wyznaczają linie proste $A_1 B_0$ i $A_0 B_1$. Dla porównania wykreśliśmy Y także dla belki równoległej i parabolicznej.

§. 86. Belka górnoparaboliczna o stałym przekroju pasu górnego.

Jeżeli z (rys. 140.) oznacza oddalenie części pasu górnego do odnośnego węzła pasu dolnego n. p. jeżeli dla pasu $G_2 E_2$ jest $EH = z$, to siła wewnętrzna



w pasie górnym jest według równania 1) $S_1 = -\frac{M_1}{z}$.

Dla obciążenia jednostajnego zupełnego jest $M_1 = \frac{qx(l-x)}{2}$,

więc $S_1 = -\frac{qx(l-x)}{2z}$. Jeżeli S_1 ma być stałym, to musi mieć taką samą wartość także dla $x = \frac{l}{2}$, przyczem $z = h_1$, więc

$$S_1 = -\frac{qx(l-x)}{2z} = -\frac{ql^2}{8h_1}, \text{ a zatem } z = 4h_1 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad 75)$$

Jestto równanie paraboli. Jeżeli więc AE_1F jest parabolą, to zataczamy rzędnymi paraboli łuki o promieniu równym z , a pas górny kreślimy stycznie do tych łuków. Przybliżone równanie pasu górnego otrzymamy podobnie, jak dla belki Paulego (§. 77),

$$h = 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2} \left[1 + 8 \frac{h_1^2}{l^2} \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2\right] \dots \dots 76)$$

Belkę tę nazywamy belką górnoparaboliczną o stałym przekroju w pasie górnym (n. *Bogenschnenträger mit constanter Spannung der Obergurtes*). Ritter pisał o niej już w r. 1870, później Haberkalt w r. 1878.

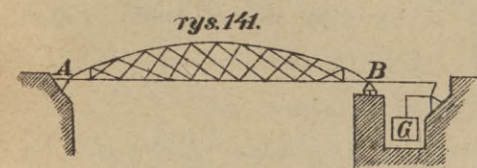
Dobłą stroną tej belki ma być to, że przekrój pasu górnego jest stały, podczas gdy w belce górnoparabolicznej przekrój zmienia się ze siecz σ . Łatwo jednak zrozumiemy, że w belce Haberkalta pas górny ma wprawdzie przekrój stały, ale za to pas dolny ma przekrój zmienny. Poprawką tą pasu górnego więc nie zyskujemy.

§. 87. Belka z ciężarem pomocniczym.

Köpcke wpadł w r. 1865 na myśl zmniejszenia siły wewnętrznej w pasie dolnym prostym sztucznem obciążeniem. Myśl tę wykonano w r. 1878 w moście pod Rieżą nad Łabą (rys. 141.).

Najwięcej korzyści sprawia ciężar pomocniczy (n. *supplementäres Gewicht*) dla belki parabolicznej, bo tu siła wewnętrzna w pasie dolnym S_2

jest stałą, a ponieważ wielkość ciężaru pomocniczego G i stosunki ramion dźwigni od nas zależą, więc możemy wywołać tak



wielkie ciśnienie, jak wielkie jest ciągnienie S_{2p} z powodu ciężaru własnego. Dla mostu nieobciążonego będzie więc siła wewnętrzna w pasie dolnym równa zeru; pas dolny obliczamy wtedy według siły S_{2p} , powstałej z ciężaru ruchomego.

Jeżeli pas dolny jest tęgi, to możemy wywołać jeszcze większe ciśnienie i znieść połowę S_{2p} , wtedy przy moście nieobciążonym pas dolny jest ciśniony.

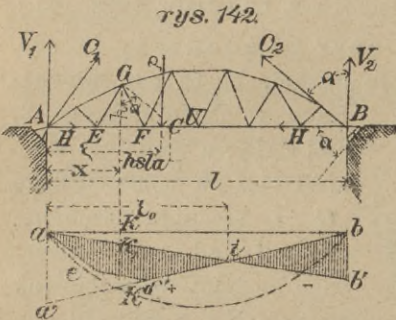
Siły wewnętrzne w kracie i pasie górnym nie zmieniają się wcale z powodu sztucznego ciśnienia, bo obliczając je, jak wiemy, tworzymy momenty sił zewnętrznych ze względu na węzły pasu dolnego, a dla tych punktów moment sztucznego ciśnienia jest zerem.

Belka ta wykazuje znaczną oszczędność materiału dla pasu dolnego, za to jednak potrzebujemy też materiału dość dla ciężaru pomocniczego i silniejszych przyczółków tak, że ostatecznie koszt całego mostu mało co będzie mniejszy i to tylko przy wielkich rozpiętościach. Korzyść ta może być znaczną dla belki o kilku przęsłach, bo jeden ciężar pomocniczy wystarcza na wszystkie przęsła.

Köpccke proponował też wywoływać sztuczne ciągnięcie w prostym pasie górnym, w takim razie pas dolny byłby parabolicznym.

§. 88. Belka rozporowa prosta.

Foeppl proponował w r. 1878 urządzenie łożysk pochyłych dla belki prostej. Wskutek łożysk pochyłych powstają pochyłe oddziaływania, belka prosta staje się więc rozporową, dlatego nazywamy ją belką rozporową prostą (n. *Träger mit schiefer Auflagerung*) (rys. 142.).



rys. 142.

Powstaje tu oddziaływanie O_1 , prostopadłe do łożyska walcowego, które rozłożyć możemy na H i V_2 , przy czem $H = V_2 \operatorname{st} \alpha$.

Gdy siła P działa w punkcie C , to $O_2 = \frac{P\xi}{l}$, więc $H = P \frac{\xi}{l} \operatorname{st} \alpha$.

Dla części EF pasu dolnego między A i C otrzymamy, tworząc momenty ze względu na punkt G ,

$$S_2 = \frac{1}{h} \left[\frac{P(l - \xi)x}{l} - Hh \right] = \frac{P}{lh} [lx - \xi(x + h \operatorname{st} \alpha)] \quad . \quad 77$$

Dla $\xi = \xi_0$ jest $S_2 = 0$, więc

$$\xi_0 = \frac{lx}{x + h \operatorname{st} \alpha}, \quad \dots \quad 78$$

przyczem ξ_0 wyznacza punkt obojętny.

Jeżeli $x > \xi$, otrzymamy podobnie

$$S_2 = \frac{1}{h} \left[\frac{P(l - \xi)x}{l} - P(x - \xi) - Hh \right] = \frac{P\xi}{lh} [l - x - h \operatorname{st} \alpha] \quad 79$$

Na podstawie tych równań możemy wykreślić linią wpływową S_2 . Równ. 77) i 78) są równaniami linii prostych ze względu na ξ , należy więc wyznaczyć tylko po dwa punkty tych linii. Mianowicie przyjmąwszy $P=1$, mamy z rów. 77) dla $\xi=0$ $S_2 = \frac{x}{h}$, albo $S_2' = S_2 h = x = ak = aa'$. Dla $\xi=l$ jest $S_2 = \operatorname{st} \alpha$, więc $S_2' = h \operatorname{st} \alpha = bb'$. Jeżeli a połączymy z b' i a' z b , otrzymamy punkt obojętny i . Prosta ak' odpowiada rów. 79).

Z rys. widzimy, że dodatni trójkąt wpływowy $ak'b$ odpowiada wyrazowi $\frac{P(l-\xi)x}{l}$ w rów. 77) i 79), zaś ujemny trójkąt abb' wyrazowi $-Hh = -\frac{P\xi h}{l} \text{st } \alpha$ w rów. 77). Z tego łatwo poznamy, że punkt k' leży na paraboli, jak dla linii wpływowej momentów.

Jeżeli ciężary działają za pośrednictwem poprzecznic, to gdy spuścimy pionowe z E i F , otrzymamy e' i f' , a linia wpływowa będzie $ae'f'ibb'a$.

Dla ciężaru własnego jest $O_1 = O_3 = \frac{1}{2}gl$, $H = \frac{1}{2}gl \text{st } \alpha$, więc

$$S_{2g} = \frac{gx(1-x)}{2h} - \frac{1}{2}gl \text{st } \alpha \dots \dots \dots 80)$$

Nie zważając na poprzecznicę, otrzymamy

najw $S_{2p} = \frac{p}{h} \frac{1}{2} \xi_0 k_1 k' = \frac{p \xi_0}{2h} \left[\frac{x(l-x)}{l} - \frac{xh \text{st } \alpha}{l} \right]$, a wstawiwszy wartość za ξ_0 z rów. 78) najw $S_{2p} = \frac{px^2}{2h} \frac{1-x-h \text{st } \alpha}{x+h \text{st } \alpha} \dots \dots 81)$

Podobnie otrzymamy

$$\text{najw } (-S_{2p}) = -\frac{p}{h} \frac{1}{2} (l - \xi_0) h \text{st } \alpha = -\frac{plh \text{st}^2 \alpha}{2(x+h \text{st } \alpha)} \dots \dots 82)$$

Dla belki parabolicznej jest $h = 4h_1 \frac{x(l-x)}{l^2}$. Jeżeli wstawimy tę wartość w powyższe wzory, otrzymamy wzory dla siły wewnętrznej S_2 wskutek ciężaru własnego i ruchomego i da się łatwo udowodnić, że, aby najw $(-S_2) \geq 0$, musi być

$$\text{st } \alpha \leq \frac{l}{4h_1} \sqrt{\frac{g}{g+p}} \dots \dots \dots 83)$$

Z rów. 80) widzimy nakoniec, że $S_{2g} = 0$, gdy $\text{st } \alpha = \frac{x(l-x)}{hl}$, a dla belki parabolicznej $\text{st } \alpha = \frac{l}{4h_1} \dots \dots \dots 84)$

a zatem, jeżeli ciężar własny nie ma sprawiać w pasie dolnym wcale żadnego ciągnięcia, powinno oddziaływanie O_2 być styczne do pasu górnego, a zatem łożysko wałkowe ma być prostopadłe do pasu górnego w B .

Siły wewnętrzne w pasie górnym i w kracie pozostają niezmiennione.

XVII. Ugięcie belki.

§. 89. Ogólne uwagi.

Przy mostach nowo zbudowanych urządzamy zwykle próbę obciążenia i badamy wtedy ugięcie belki (n. *Durchbiegung*),

czyli pionowe przesunięcie poszczególnych punktów belki (węzłów) wskutek obciążenia. Próby takie obciążenia powtarza się w pewnych odstępach czasu, a wielkość ugięcia może nam dać pewne wskazówki co do dobroci roboty mostu, a później co do jego stanu. Mówimy tylko „pewne wskazówki“, bo ugięcie większe od obliczonego wskazuje nam, że natężenia są większe od obliczonych, a w niektórych prętach może przekroczyły granicę sprężystości; należy więc miejsce słabe wynaleść i je wzmocnić. Z drugiej strony jedno takie słabe miejsce tak mało wpływa na ugięcie ogólne, że nie da się istnienie jego poznać przy próbie obciążenia, a pomimo tego może być bardzo niebezpieczne dla mostu. Wyznaczenie ugięcia mostu jest jednak także z tego powodu pożyteczne, że za pomocą ugięcia dadzą się wyznaczyć oddziaływania w belkach statycznie niewyznaczalnych, o czym mówić będziemy w następnym tomie.

Ugięcie może być trwałe (n. *bleibend*), powstałe wskutek małych przesunięć, wżarcia się stykających przekrojów i błędów wykonania. Ugięcie to okazuje się tylko przy pierwszym obciążeniu mostu. Ugięcie trwałe, okazujące się przy następnych próbach, wskazywałoby na przekroczenie granicy sprężystości. Dalej może być ugięcie sprężyste (n. *elastisch*), które po ustaniu obciążenia znika. To ugięcie będziemy się starali obliczyć zwłaszcza, że obliczenie to jest potrzebne do porównania wyników próby z ugięciem obliczonym.

Austryackie rozporząd. minister. z r. 1887 §. 8, a) Nowo wybudowane mosty winne być przed oddaniem ich ruchowi kolejowemu przez komisją zbadane i wypróbowane... Zarząd kolejowy powinien... zaopatrzyć podanie w następujące załączniki:

1. Schematyczny szkic pociągów, które mają być użyte do próby, a które winne, ile możliwości, wywołać te same momenty, jak w § 3 (względnie §. 6) obciążenia normowane. Pociągi te muszą się składać w miarę rozpiętości 15,0 m, 25,0 m albo ponad 25,0 m dla każdego toru z jednego, dwu lub trzech zupełnie opatrzonych najcięższych parowozów, jakie na odnośnej kolei są w użyciu, jakoteż wozów ciężarowych, potrzebnych do zajęcia największego przesła, a obciążonych zupełnie aż do przepisanej granicy obciążenia.

2. Obliczenie obciążeń, osiągniętych pociągiem próbnym dla pojedynczych rozpiętości, wyrażone w procentach przepisanego obciążenia, jakoteż wykaz obliczonych dla pociągu próbnego największych sprężystych odkształceń...

§. 9. b) Do prób z obciążeniem stałym winne pociągi próbne, o których była mowa w §. 8 lit. a), stopniowo być ustawione w położenie najmniej korzystniejsze dla belek mostowych i w każdym z tych położzeń należy je tak długo pozostawić, póki dalsze odkształcenie nie jest już spostrzegalne.

Przy używanych wolno leżących konstrukcyach (belkach w dwu punktach podpartych) wystarcza badać most przy stopniowym obciążeniu połowy i całego przęsła.

c) Do zrobienia próby przy obciążeniu ruchomem należy najpierw przejechać most po każdym torze z chyżością około 20 km na godzinę pociągiem próbnym, który winien być zestawiony w myśl zarządzenia, zawartego w §. 8 lit a) ustęp 1, składać się ma jednakowoż z dwóch parowozów.

Następnie powinna odbyć się na każdym torze z tymże samym pociągiem jazda pospieszna z chyżością 40 do 50 km na godzinę; te jazdy pospieszne można też później przedsięwziąć w razie, gdyby mury albo nawierzchnia nie ułożyły się jeszcze dostatecznie.

§. 11. Peryodyczne badania: a) Zarządy kolejowe mają obok obowiązkowego stałego nadzoru przedsięwziąć przynajmniej co 6 lat peryodyczne badania i próby mostów w myśl postanowień §. 9 lit. b) i d).

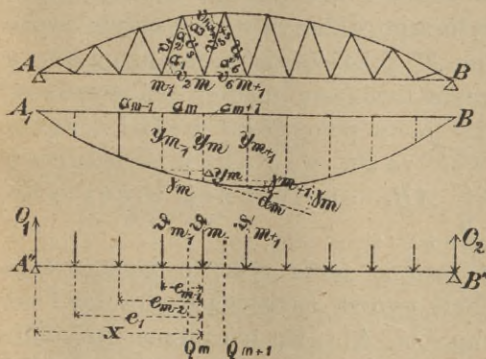
§. 17. a) Wybudowane przejazdy nad koleją i mosty na drogach dojazdowych należy w każdym razie zbadać komisyjnie... W tym celu należy odnieść się do c. k. generalnej inspekcji austriackiej kolei, a władza ta rozstrzygnie..., czy należy przedsięwziąć obok wyż wymienionego badania także obciążenie próbne.

b) Wybudowane mosty należy i nadal przynajmniej co 6 lat peryodycznie zbadać, względnie wypróbować, przyczem winno być zachowane przepisane w *. 11 lit. b) i c) postępowanie.

§. 90. Wyznaczenie analityczne ugięcia belki.

Najczęściej jeden pas belki kratowej jest prosty. Wyznamy więc analitycznie ugięcie belki w tym wypadku, gdy pas dolny (rys. 143.) jest prosty i pójdziemy przytem za wskazówkami Müllera Breslaua*).

rys. 143.



Przypuśćmy, że dla pewnego obciążenia pas dolny prosty AB ugnie się i przybierze kształt wieloboku $A'm'B'$, Niech y_{m-1} , y_m , y_{m+1} będą ugięcia, czyli pionowe przesunięcia węzłów $m-1$, m , $m+1$ itd. Kąty nachylenia boków wieloboku ugięcia do poziomu nazwijmy γ , a kąty

*) Müller Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Bauconstructions. Lipsk 1886. str. 19 i następ.

$$\times \text{dost } \alpha_3 - c_2 \text{ wst } \alpha_3 \Delta \alpha_3 + \Delta c_3 \text{ dost } \alpha_2 - c_3 \text{ wst } \alpha_2 \Delta \alpha_2 \text{ albo } \Delta c_1 = \\ = \frac{\Delta c_2}{c_2} c_2 \text{ dost } \alpha_3 + \frac{\Delta c_3}{c_3} c_3 \text{ dost } \alpha_2 - h (\Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3) \dots \dots \dots 88)$$

Wiemy, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ$, więc $\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 = 0$, zatem $\Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 = -\Delta \alpha_1$. Dalej z rysunku wynika, że

$$c_2 \text{ dost } \alpha_3 = h \text{ dot } \alpha_3, \quad c_3 \text{ dost } \alpha_2 = h \text{ dot } \alpha_2.$$

Wstawiając to w równ. 88), otrzymamy

$$\Delta c_1 = \frac{\Delta c_2}{c_2} h \text{ dot } \alpha_3 + \frac{\Delta c_3}{c_3} h \text{ dot } \alpha_2 + h \Delta \alpha_1,$$

a więc
$$\Delta \alpha_1 = \frac{\Delta c_1}{c_1} \cdot \frac{c_1}{h} - \frac{\Delta c_2}{c_2} \text{ dot } \alpha_3 - \frac{\Delta c_3}{c_3} \text{ dot } \alpha_2 \dots \dots \dots 89)$$

Jeżeli natężenie, wywołane danym obciążeniem w prętach c_1, c_2 i c_3 , nazwiemy v_1, v_2 i v_3 , a ϵ współczynnik sprężystości, to

wiemy, że
$$\frac{\Delta c_1}{c_1} = \frac{v_1}{\epsilon}, \quad \frac{\Delta c_2}{c_2} = \frac{v_2}{\epsilon}, \quad \frac{\Delta c_3}{c_3} = \frac{v_3}{\epsilon}.$$

Dalej wynika z rysunku, że $\frac{c_1}{h} = \text{dot } \alpha_2 + \text{dot } \alpha_3$.

Wstawiając to w równ. 89) i pomnożywszy przez ϵ , otrzymamy $\epsilon \Delta \alpha_1 = v_1 \text{ dot } \alpha_2 + v_1 \text{ dot } \alpha_3 - v_2 \text{ dot } \alpha_3 - v_3 \text{ dot } \alpha_2$,

albo wręcz
$$\epsilon \Delta \alpha_1 = (v_1 - v_3) \text{ dot } \alpha_2 + (v_1 - v_2) \text{ dot } \alpha_3 \dots \dots 90)$$

Chcąc teraz wyznaczyć \mathcal{F}_m , zastosujemy to równanie do trzech trójkątów, mających wspólny wierzchołek w m (rys. 143.), a otrzymamy

$$\epsilon \mathcal{F}_m = (v_1 - v_2) \text{ dot } \alpha_1 + (v_1 - v_3) \text{ dot } \alpha_2 + (v_4 - v_3) \text{ dot } \alpha_3 + \\ + (v_4 - v_5) \text{ dot } \alpha_4 + (v_7 - v_5) \text{ dot } \alpha_5 + (v_7 - v_6) \text{ dot } \alpha_6 \dots 91)$$

Przykład. Wyznaczymy ugięcie belki Schwedlera, którąśmy obliczyli w §. 83, przypuszczając, że most obciążony jest trzema szeregami wozów w ten sposób, że tylne koła wozów stoją na 4 (tabl. V). W tym punkcie działa więc ciężar 9t, inne ciężary 9t i 2,25t musimy rozłożyć na ciężary węzłowe i otrzymamy

w węzłach	1	2	3	4	5	6	7	B
	1,89	5,04	4,32	9,0	0,63	1,62	1,89	0,36t.

Oddziaływanie $O_1 = \frac{1}{20} [9(10 + 13,8) + 2,25(17,1 + 5,7 + 2,1)] = 13,51t$

Na podstawie tych ciężarów węzłowych i oddziaływań wyznaczmy w jakikolwiek sposób siły wewnętrzne we wszystkich prętach. Tu uskuteczniwszy to wykreślnie za pomocą planu sił i otrzymaliśmy następujące wyniki:

Pręt	siła wewnętrzna		przekrój	natężenie ν		długość l	prze-dłuże-nie Δl	Pręt	siła wewnętrzna		przekrój	natężenie ν		długość l	prze-dłuże-nie Δl
	t	cm^2		kg/cm^2	cm^2				t	cm^2		kg/cm^2	cm		
0	— 23,5	120	— 196	120	— 23,5	306	— 0,30	7	+ 19,7	85	+ 232	250	+ 0,29		
I	— 25,2	120	— 210	120	— 25,2	265	— 0,28	I	+ 1,9	22	+ 86	176	+ 0,08		
II	— 26,5	120	— 221	120	— 26,5	252	— 0,28	I	+ 5,5	20	+ 275	306	+ 0,42		
III	— 28,1	125	— 225	125	— 28,1	250	— 0,28	2	+ 2,0	16	+ 125	265	+ 0,16		
IV	— 28,1	125	— 225	125	— 28,1	250	— 0,28	II	+ 3,8	22	+ 173	355	+ 0,31		
V	— 22,5	120	— 186	120	— 22,5	252	— 0,24	3	+ 1,3	16	+ 81	300	+ 0,12		
VI	— 19,4	120	— 162	120	— 19,4	265	— 0,22	III	+ 3,1	20	+ 155	391	+ 0,30		
VII	— 18,3	120	— 153	120	— 18,3	306	— 0,23	4	0	14	0	300	0		
0	+ 19,2	85	+ 214	85	+ 19,2	250	+ 0,27	4	+ 8,8	20	+ 440	391	+ 0,86		
1	+ 19,2	85	+ 214	85	+ 19,2	250	+ 0,27	V	— 3,8	16	— 238	300	— 0,35		
2	+ 23,6	95	+ 248	95	+ 23,6	250	+ 0,31	5	+ 6,0	22	+ 273	355	+ 0,48		
3	+ 26,2	100	+ 262	100	+ 26,2	250	+ 0,32	VI	— 0,6	16	— 38	265	— 0,04		
4	+ 22,4	100	+ 224	100	+ 22,4	250	+ 0,28	6	+ 4,1	20	+ 205	306	+ 0,31		
5	+ 23,3	95	+ 245	95	+ 23,3	250	+ 0,31	VII	+ 1,9	22	+ 86	176	+ 0,08		
6	+ 19,7	85	+ 232	85	+ 19,7	250	+ 0,39								

W trzecim rzędku tabliczki podaliśmy przekroje rzeczywiste bez odciążenia dziur, gdyż dziury sprawiają tylko miejscowe większe natężenia bez znacniejszego wpływu na odkształcenie pręta. Czwartą i piątą rzędek potrzebny nam będzie później przy wykreśleniu wyznaczeniu ugięcia.

Następnie obliczyliśmy dotychczasowe kąty wszystkich u górnego pasu i naznaczyliśmy je na rys. 1. tablicy.

ϵ_{sm} obliczamy na podstawie rów. 91) i otrzymamy

$$\epsilon S_1 = (-196 - 214) 1,42 + (-196 - 86) 0,70 + (275 - 86) 0,70 + (275 + 86) 0,70 + (275 - 214) 1,42 = -551 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_2 = (86 - 275) 0,70 + (-210 - 275) 0,71 + (-210 - 125) 0,35 + (173 + 125) 1,06 + (173 - 248) 0,94 = -616 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_3 = (125 - 173) 1,06 + (-221 - 173) 0,71 + (-221 - 81) 0,14 + (155 + 81) 1,20 + (155 - 262) 0,83 = -372 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_4 = (81 - 155) 1,20 + (-225 - 155) 0,83 + (-225 - 440) 0,83 + (-230 + 440) 1,20 = -1584 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_5 = (440 - 224) 0,83 + (440 + 230) 1,2 + (-186 + 230) 0,14 + (-186 + 273) 0,71 + (-33 - 273) 1,06 = +148 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_6 = (273 - 245) 0,94 + (273 + 38) 1,06 + (-162 + 33) 0,35 + (-162 + 205) 0,71 + (86 - 205) 0,70 = -31 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon S_7 = (205 - 86) 0,7 + (205 - 232) 1,42 + (-153 - 86) 0,70 + (-153 + 232) 1,42 = -669 \text{ kg/cm}^2.$$

Kąty δ uważamy jako siły w kg ze znakiem przeciwnym, bo tu — oznacza kierunek na dół.

$$\text{Otrzymamy wtedy } \epsilon O_1 = \frac{1}{8} (551 \cdot 7 + 616 \cdot 6 + 372 \cdot 5 + 1584 \cdot 4 - 148 \cdot 3 + 31 \cdot 2 + 669 \cdot 1) = 2004 \text{ kg}^2 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Stąd otrzymamy momenty i ugięcia } \epsilon M_1 = 2004 \cdot 250, \text{ więc } M_1 = 2004 \cdot \frac{250}{8000000} = 2004 \cdot \frac{1}{32000} = 0,25 \text{ cm} = y.$$

$$\text{Dalej otrzymamy } M_2 = \frac{1}{80000} (2004 \cdot 2 - 551) = 0,43 \text{ cm} = y_2, \text{ a podobnie także } M_3 = 0,54 \text{ cm} = y_3, M_4 = 0,59 \text{ cm} = y_4, M_5 = 0,45 \text{ cm} = y_5, M_6 = 0,33 \text{ cm} = y_6, M_7 = 0,21 \text{ cm} = y_7.$$

§. 91. Wyznaczenie wykresne ugięcia belki kratowej.

Później będziemy mówić o wykresnem wyznaczeniu ugięcia belki o ściance pełnej zapomocą wieloboku sznurowego*), teraz podamy tylko sposób wykresnego wyznaczenia ugięcia belki kratowej według Williota.

Zasada wykresnego wyznaczenia ugięcia jest bardzo prosta. Gdy belkę obciążymy w dany sposób, powstają wskutek tego we wszystkich prętach natężenia, które, jak wiadomo, dadzą się łatwo wyznaczyć zapomocą planu sił, jeżeli znamy też przekroje prętów. Znając natężenia, łatwo obliczymy zmianę długości Δl prętów według wzoru $\Delta l = \frac{lP}{\epsilon A} = \frac{l\nu^{**})}{\epsilon}$. . . 92) jeżeli l i A oznaczają długość i przekrój pręta, P siłę wewnętrzną a ϵ współczynnik sprężystości. Jeżeli wykreslimy teraz

*) Co do liczebnego wyznaczenia ugięcia takich belek p. Podr. Statyki Budowli str. 137 i nast.

***) por. Podr. Statyki Budowli str. 31.

belkę na podstawie zmienionych w ten sposób długości prętów, otrzymamy ugiętą belkę.

Ale te przedłużenia i skrócenia prętów są bardzo małe n. p. dla $l = 600 \text{ cm}$, $\nu = 600 \text{ kg/cm}^2$, $\epsilon = 2000000 \text{ kg/cm}^2$, otrzymamy z równ. 92 $\Delta l = \frac{600 \cdot 600}{2000000} = 0,18 \text{ cm} < 2 \text{ mm}$. Przedłużenia te lub skrócenia wynoszą więc najwięcej około 2 mm. Otóż gdybyśmy wykreślili ugiętą belkę nawet w bardzo wielkiej podziałce, otrzymalibyśmy prawie zupełnie taki kształt belki, jak przed ugięciem.

Aby odkształcenie belki uczynić widocznym, musimy przyjąć dla odkształceń Δl inną podziałkę, kreślimy je w naturalnej wielkości lub jeszcze większe. Przy kreśleniu nowego kształtu belki musimy jednak zachować jeszcze pewną ostrożność, mianowicie kreśląc poszczególne trójkąty, nie możemy zataczać długościami $l \pm \Delta l$ łuków właśnie z powodu różnych podziałek, lecz kreślimy zamiast łuków prostopadłe do kierunków boków, co ze względu na bardzo małe kąty obrotu a wielkie promienie możemy śmiało uczynić.

Przypuśćmy na chwilę, że pręt $A1$ (tabl. V. rys. 5.) nie zmienia swego położenia, tylko przedłuży się o $11'$, niechaj pręt $A1$ skróci się o $1a$, a pręt $1I$ przedłuży się o $1b$. Z powodu przesunięcia się węzła 1 o $11'$ musi się przesunąć też koniec pręta b o $bb' \parallel 11'$. Zatoczmy teraz łuki z punktów A i $1'$, a raczej wykreślimy prostopadłe do odnośnych prętów $a1' \perp A1$ i $b'1' \perp 1I$, a punkt ich przecięcia się I' wyznacza nam położenie nowego punktu I .

Niechaj będą $2c$ i $2d$ przedłużenia prętów $I2$ i 12 , to musimy uwzględnić także przesunięcia początkowych punktów odnośnych prętów. Kreślimy więc $cc' \parallel 11'$ i $dd' \parallel 11'$. Z punktów c' i d' kreślimy teraz prostopadłe $c'2' \perp I2$ i $d'2' \perp 12$, a punkt ich przecięcia się $2'$ wyznacza nam nowe położenie punktu 2 .

W ten sposób postępując możemy wyznaczyć nowe położenie wszystkich węzłów, przyczem, jeżeli punkt B' nie wpada na podporę (jak n. p. tutaj), musimy belkę obrócić o kąt $\alpha = BAB''$, aby sprowadzić belkę na łożysko.

Aby więc wynaleść prawdziwe położenie jakiegoś punktu n. p. III po ugięciu, musimy przesunąć punkt III' o długość

$y = \frac{A III}{AB} BB'''$ prostopadle na $A III$. Robimy więc $Ae = A III$, kreślimy $ee' \perp AB$, to $ee' = \frac{Ae}{AB} BB''' = y$. Kreślimy zatem $III' III'' = ee'$ i otrzymujemy III' jako prawdziwe położenie punktu III po ugięciu. Na rysunku zrobiliśmy to samo z innymi punktami i połączyliśmy poszczególne węzły prostymi. Otrzymaliśmy w ten sposób kształt ugiętej belki w spazzonej podziałce t. z., że tylko przesunięcie poszczególnych węzłów otrzymaliśmy w tej podziałce, w jakiej wykreśliliśmy odkształcenia. Kierunki jednak boków nie są prawdziwe z powodu użycia dwu różnych podziałek.

Powyższym sposobem wykreślonym wyznaczamy równocześnie poziome i pionowe przesunięcia wszystkich węzłów, podczas gdy sposobem analitycznym Müllera Breslaua wyznaczaliśmy tylko przesunięcia pionowe węzłów pasu dolnego.

Jeżeli belka jest symetryczna i symetrycznie obciążona, sposób ten znacznie się upraszcza, bo wtedy słup w środku rozpiętości pozostaje pionowym. Zaczynając więc konstrukcją od tego słupa i przyjmując go jako pionowy, otrzymujemy od razu belkę w należytem położeniu i nie potrzebujemy jej już obracać. Jeżeli belka nie ma słupa w środku rozpiętości, to środkowa część pasu dolnego lub górnego pozostanie po ugięciu pozioma ten więc kierunek przyjmujemy jako stały.

Przykład. Na tabl. V. wyznaczaliśmy wykreślnie ugięcie takiej samej i tak samo obciążonej belki Schwedlera, dla jakiej obliczyliśmy ugięcia sposobem Müllera Breslaua. Na rys. 2. i 3. wykreśliliśmy wielobok sił i wielobok sznurowy dla obciążenia danego, w rys. 4. plan sił, rozłożywszy wszystkie ciężary na ciężary węzłowe. I tak n. p. zrobiliśmy $2n = 9t$ i połączyli n z 3 , to uv oznacza składową ciężaru $9t$ działającą w 2, a $(2n - uv)$ składową, działającą w 3. Tym sposobem otrzymaliśmy siły wewnętrzne, zestawione w tabliczce, umieszczonej w poprzednim paragrafie. Na podstawie rów. 91) obliczyliśmy dla wszystkich prętów przedłużenia i skrócenia, zestawione także w tej tabliczce. Przedłużenia te i skrócenia poszczególnych prętów oznaczyliśmy w rysunku w podziałce $\frac{5 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ i przyjąwszy tymczasowo kierunek boku $A 1$ jako stały, otrzymaliśmy ugiętą belkę AB' . Aby punkt B' sprowadzić na podporę, obróciliśmy belkę o kąt α i otrzymaliśmy ostatecznie ugiętą belkę AB'' . W ten sposób otrzymaliśmy pionowe i poziome przesunięcia węzłów. Największe pionowe przesunięcie, największe ugięcie czyli strzałkę belki otrzymamy z rysunku w punkcie IV równą $6,3 \text{ mm}$, największe przesunięcie poziome $2,7 \text{ mm}$. Porównując ten wynik z wynikiem liczebnym widzimy, że różnica, pochodząca z niedokładności rysunku wynosi mniej, niż $\frac{1}{2} \text{ mm}$. W praktyce więc sposób wykreślny daje wyniki z dokładnością zupełnie wystarczającą.



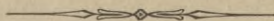
D O D A T E K.

Literatura.

- Podajemy tu w chronologicznym porządku spis podręczników teorii mostów, niektórych ważniejszych artykułów i nowszych dzieł, odnoszących się do części teorii mostów, zawartej w niniejszym tomie.
- Becker: *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*. 2 tom: *Der Brückenbau*. Stuttgart 1854, 4 wyd. 1873.
- Rebhann: *Theorie der Holz und Eisenconstructions*. Wiedeń 1856.
- Laissle i Schübler: *Der Bau der Brückenträger*. Stuttgart 1857, 4. wyd. 1876.
- Mollinos i Pronnier: *Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques*. Paryż 1857.
- Bresse: *Cours de la mécanique appliquée*. II. część Paryż 1862.
- Scheffler. *Über Gitter u. Bogenträger*. Brunzswik 1862.
- Culmann: *Graphische Statik*. Zurych 1. wyd. 1866, 2. wyd. 1875.
- Collignon: *Cours de la mécanique appliquée aux constructions*. Paryż 1869.
- Ritter: *Theorie und Berechnung der eisernen Dach- und Brückenconstructions* 1870.
- Heinzerling: *Die Brücken der Gegenwart*. Akwisgran 1873 — 1885.
- Levy: *La statique graphique*. 1. wyd. 1874, 2. wyd. 1886—1888.
- Jay du Bois: *The elements of graphical statics*. Nowy Jork 1875 — 1877.
- Tetmajer: *Die äusseren und inneren Kräfte*. Zurych 1875.
- Winkler: *Die Durchbiegung der Gitterträger*. *Technische Blätter* 1876.
- Williot: *Notions pratiques sur la statique graphique*. Paryż 1877.
- Ott: *Vorträge über Baumechanik*. Praga 1877 — 1880.
- Loewe: *Grundzüge zu Vorlesungen über eiserne Balkenträger*. Mnichów 1877.

- Zimmermann: *Das Momentenschema. Zeitschr. d. hann. Arch. u. Ing. Ver.* 1877.
- Böhlk: *Statische Berechnung der Balkenbrücken einer Öffnung Hanower* 1877.
- Thullie: O krzywych influencyjnych i ich zastosowaniu do wyznaczenia graficznego sił, działających w zwykłej belce kratowej. *Dźwignia* 1878.
- Šolin: *Analytische Bestimmung des absoluten Maximalmomentes Woch. des österr. Ing. u. Arch. Ver.* 1878.
- Hermansky. *Die elastische Durchbiegung eiserner Fachwerke. Zeit. d. öst. Ing. u. Arch. Ver.* 1878.
- Krohn: *Resultate aus der Theorie des Brückenbaues und deren Anwendung, I. Theil. Balkenbrücken.* Akwisgran 1879.
- Holzhey: *Vorträge über Baumechanik.* Wiedeń 1879.
- Foeppl: *Theorie der Fachwerkes.* Lipsk 1880.
- Melan: *Beitrag zur graphischen Behandlung der Fachwerksträger mit Zugrundelegung des Principes der Influenzcurven. Zeit. d. hann. Arch. u. Ing. Ver.* 1880.
- Burr: *A course on the stresses in bridge and roof trusses.* Nowy Jork 1880.
- Schäffer i Sonne: *Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 2 tom: Der Brückenbau.* Lipsk 1880. 2. wyd. 1886—1889.
- Stelzel: *Theorie einfacher statisch bestimmter Brückenträger.* Wiedeń 1880.
- Thullie: Oznaczenie sił, działających w belce ciągłej przegubowej zapomocą linii wpływowych. *Dźwignia* 1881.
- Chalmers; *Graphical determination of forces.* Londyn 1881.
- Winkler: *Theorie der Brücken.* 2. i 3. wydanie 1881—1886.
- Müller Breslau: *Graphische Statik der Bauconstructionen* 1. wyd. Berlin 1881, 2. wyd. Lipsk 1887.
- Maurer: *Graphische Statik.* 1882.
- Ott: *Graphische Statik.* IV. wyd. Praga 1883—1885.
- Thullie: O wykreślnem oznaczeniu sił, działających w belce dwuprzęsłowej na podstawie ugięcia belki. *Przegląd Techniczny* 1887. *Woch. d. österr. Ing. u. Arch. Vereines* 1884.
- Weyrauch: *Aufgaben zur Theorie elastischer Körper* Lipsk 1885.
- Müller Breslau: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Bauconstructionen.* Lipsk 1886.
- Weyrauch: *Theorie der statisch bestimmten Träger.* Lipsk 1887.

- Thullie: Analityczne wyznaczenie najniekorzystniejszego obciążenia belki prostej układem ciężarów skupionych. Przegl. Tech. 1887. i *Woch. d. österr. Ing. u. Arch. Ver.* 1887.
- Emperger: *Über die Zulässigkeit schwerer Fahrbetriebsmittel vom Standpunkte einer neuen Verordnung für Eisenbahnbrücken.* Wiedeń 1887.
- Leber: *Die neue Brückenverordnung des österr. Handelsministeriums.* Wiedeń 1888.
- Koechlin: *Applications de la statique graphique.* Paryż 1889.



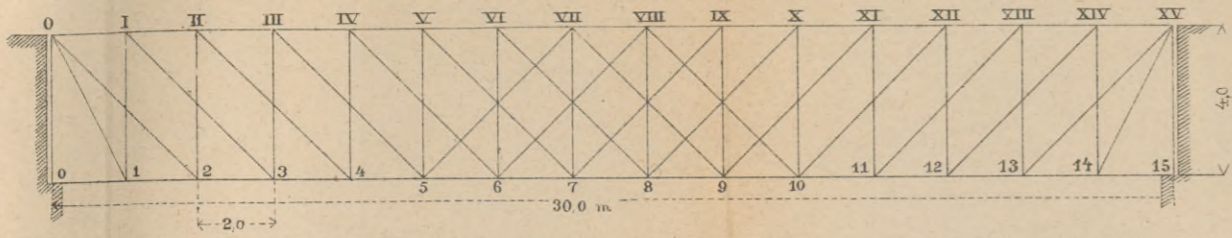
Sprostowanie omyłek.

	zamiast	czytaj
Str. 9 w. 15, 18 i 21 z dołu	$(1 + 0,37 a)$	$(1 + 0,47 a)$
" 13 " 6 z dołu	m^2	m
" 17 " 14 z góry	4,72	47,2
" 19 " 9 z dołu	belki pierwszej, zakrytej przez pociąg	pociągu, zakrytą przez belkę pierwszą
" 20 " 15 " "	pr^2	pc^2
" 29 " 12 " "	$\frac{l-u}{l}$	$P \frac{l-u}{l}$
" 36 " 36 " "	$>$	$<$
" 38 rys. 24	8,55 i 8,2	6,55 i 6,2
" 52 w. 19 z góry	$1 =$	$O_1 =$
" 57 " 4 z dołu	$-\frac{1}{2}Rr$	$-Rr$
" 76 " 11 z góry	$(2n - 2m = 1)$	$(2n - 2m + 1)$
" 77 " 10 " "	$\frac{1}{2} (30 - 21 \cdot 800) kg$	$\frac{1}{2} (30 \cdot 21 + 800) kg$
" 77 " 11 " "	$0,25 tm$	$0,25 t/m$
" 83 " 8 " "	$a'c'b'$	$ac'b$
" 83 " 13 " "	$a'c' i c'b'$	$ac' i c'b$
" 96 " 1 z dołu	$st\alpha + st\alpha$	$st\alpha + st\beta$

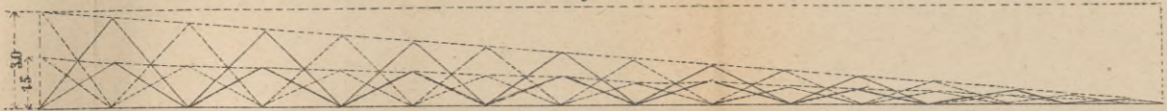
Most drogowy kratowy o kracie podwójnej prostokątnej

Tabl. II

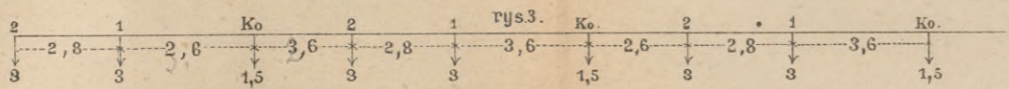
rys. I.



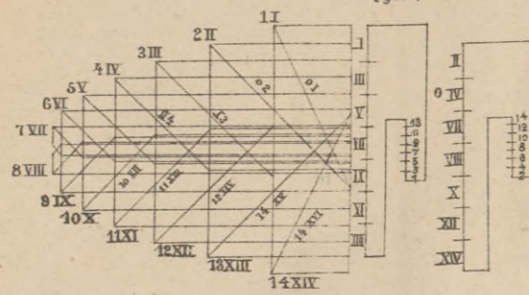
rys. 2.



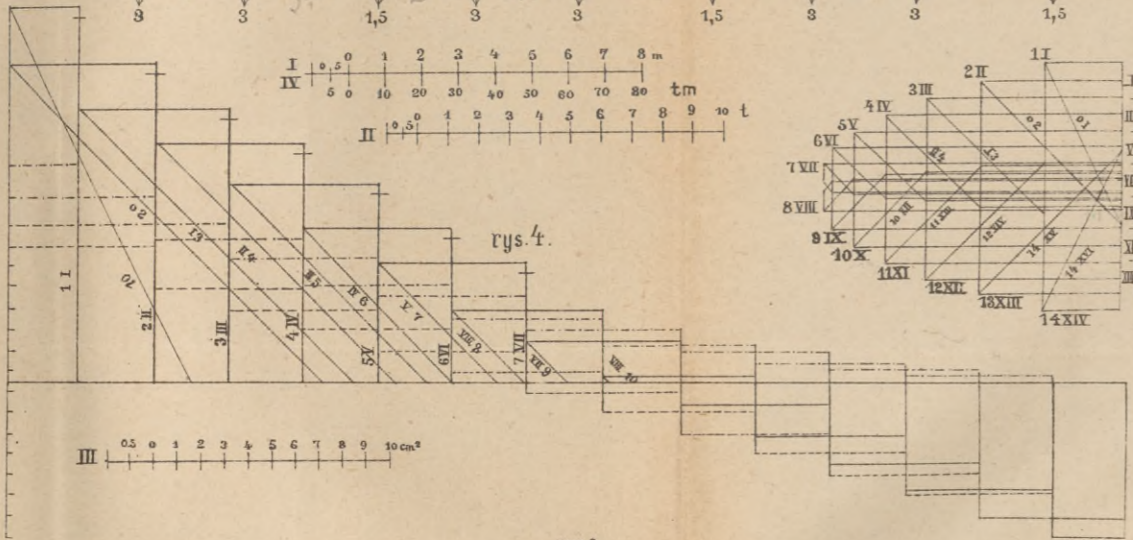
rys. 3.



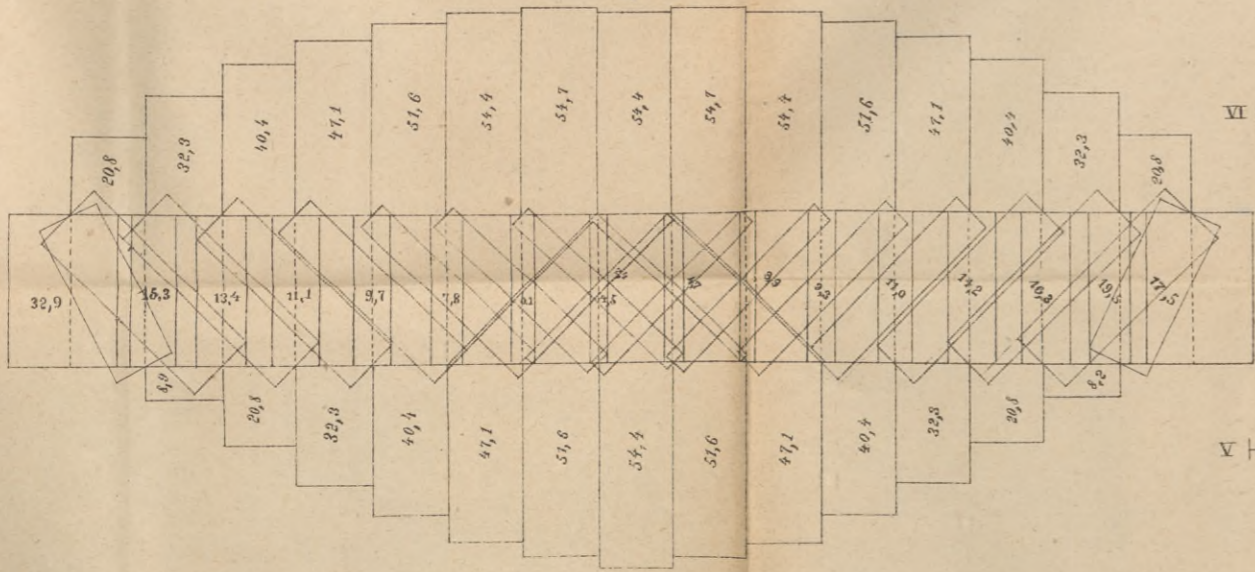
rys. 9.



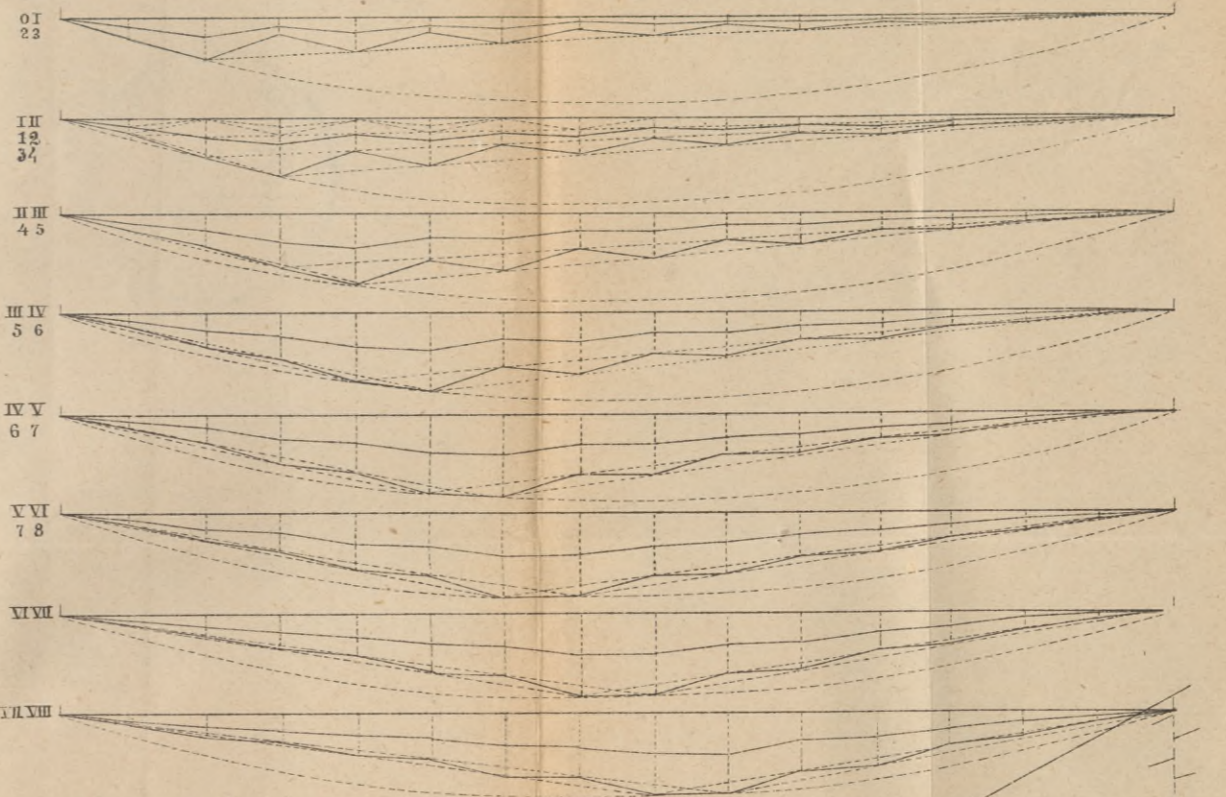
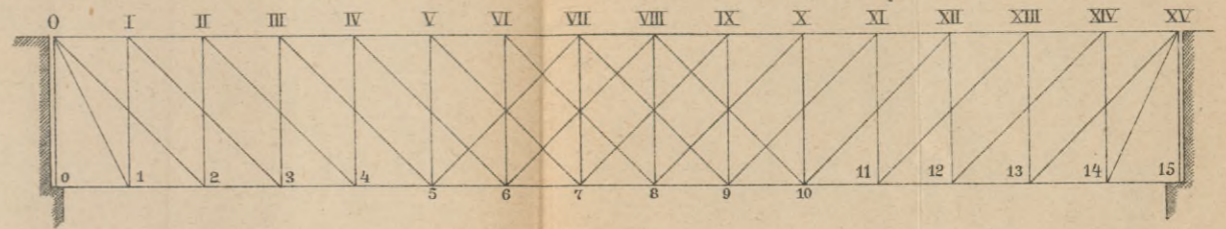
rys. 4.



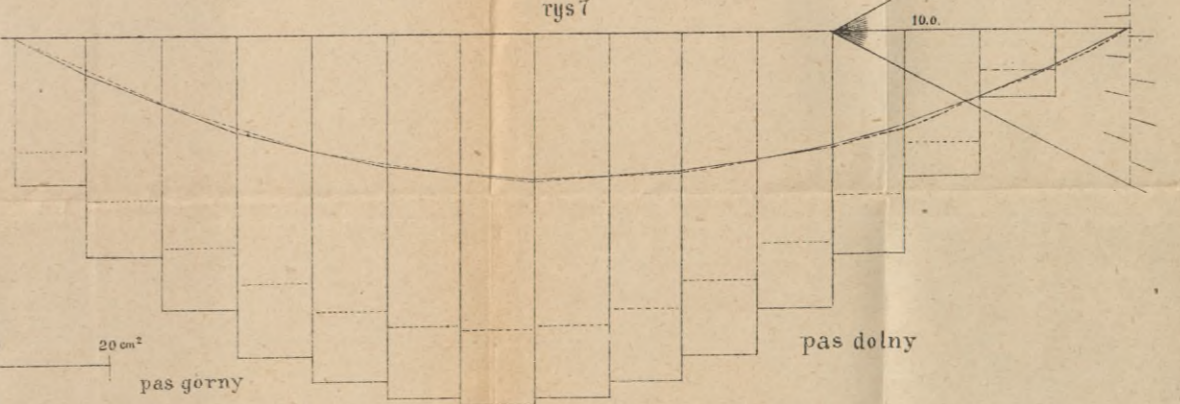
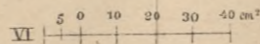
rys. 8.



rys. 6.



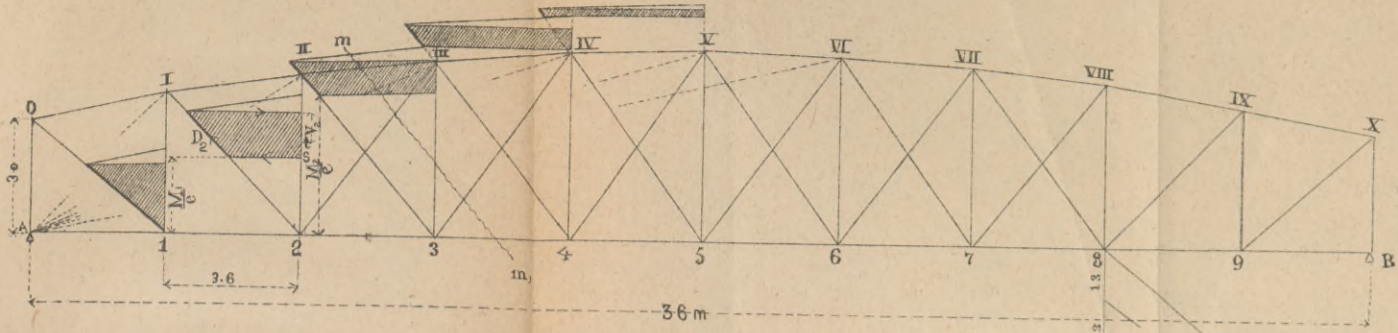
rys. 7.



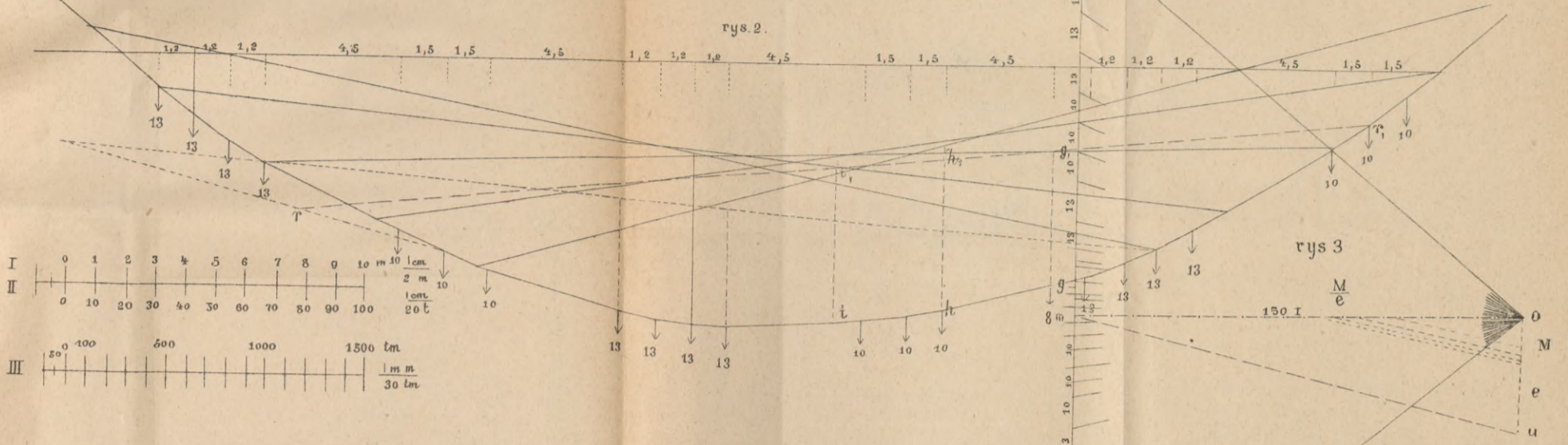


Belka paraboliczna niezbieżna

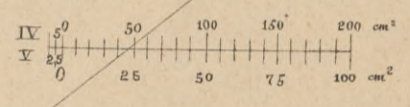
rys.1.



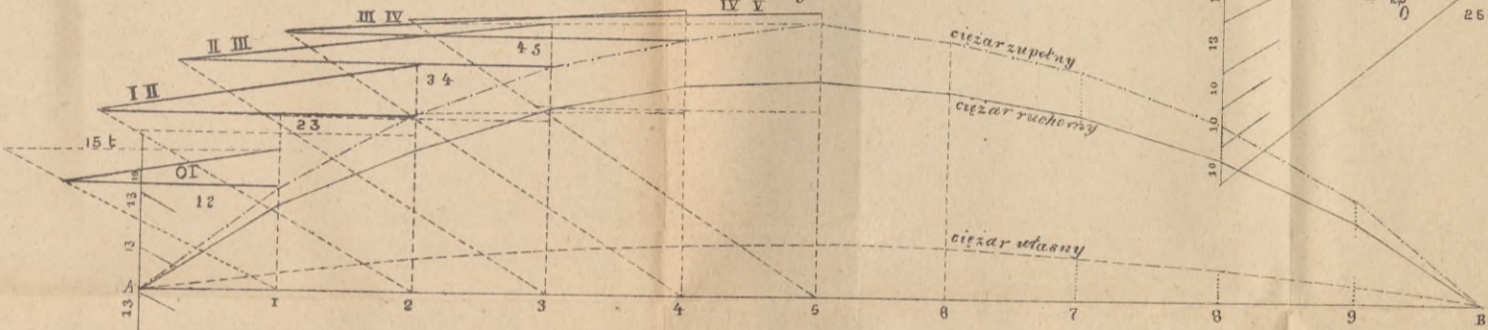
rys.2.



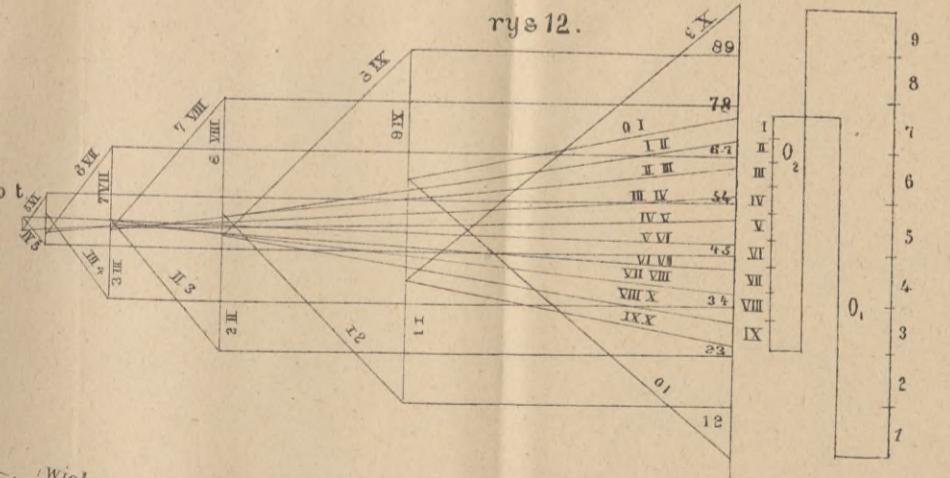
rys.3



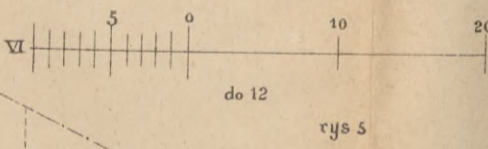
rys.4



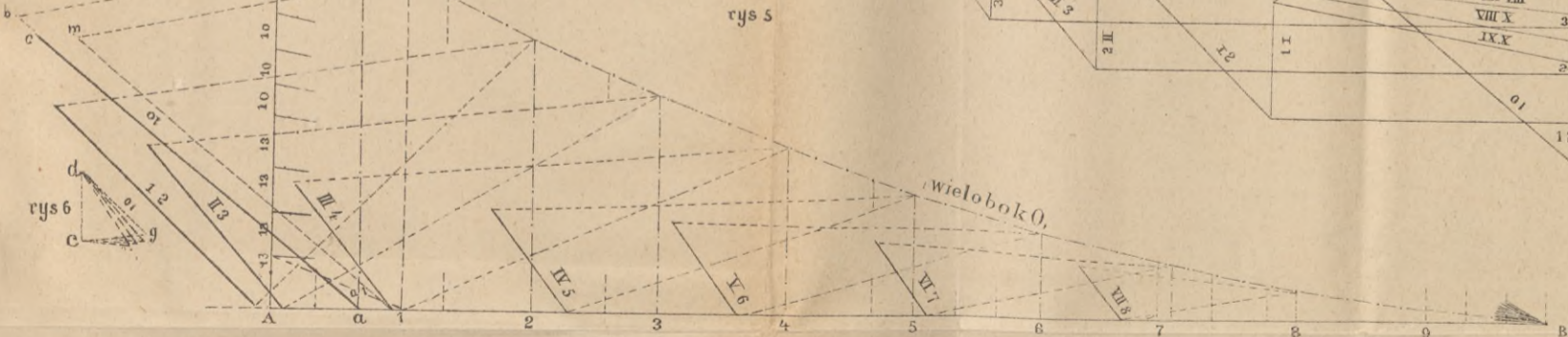
rys.12.



rys.5



rys.6

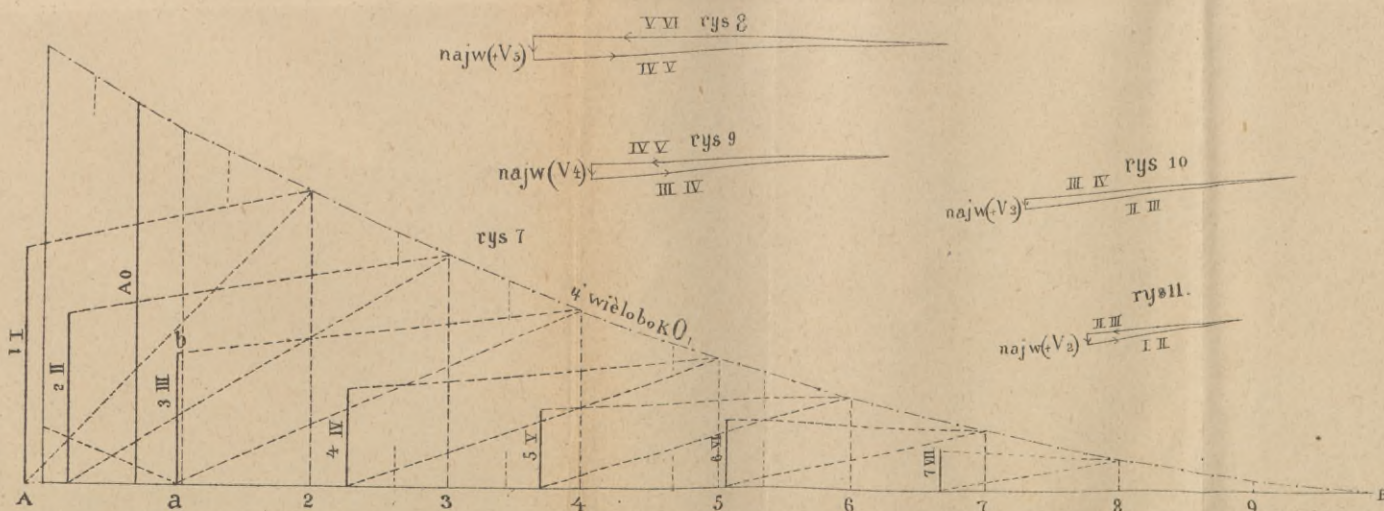


najw(V₃)

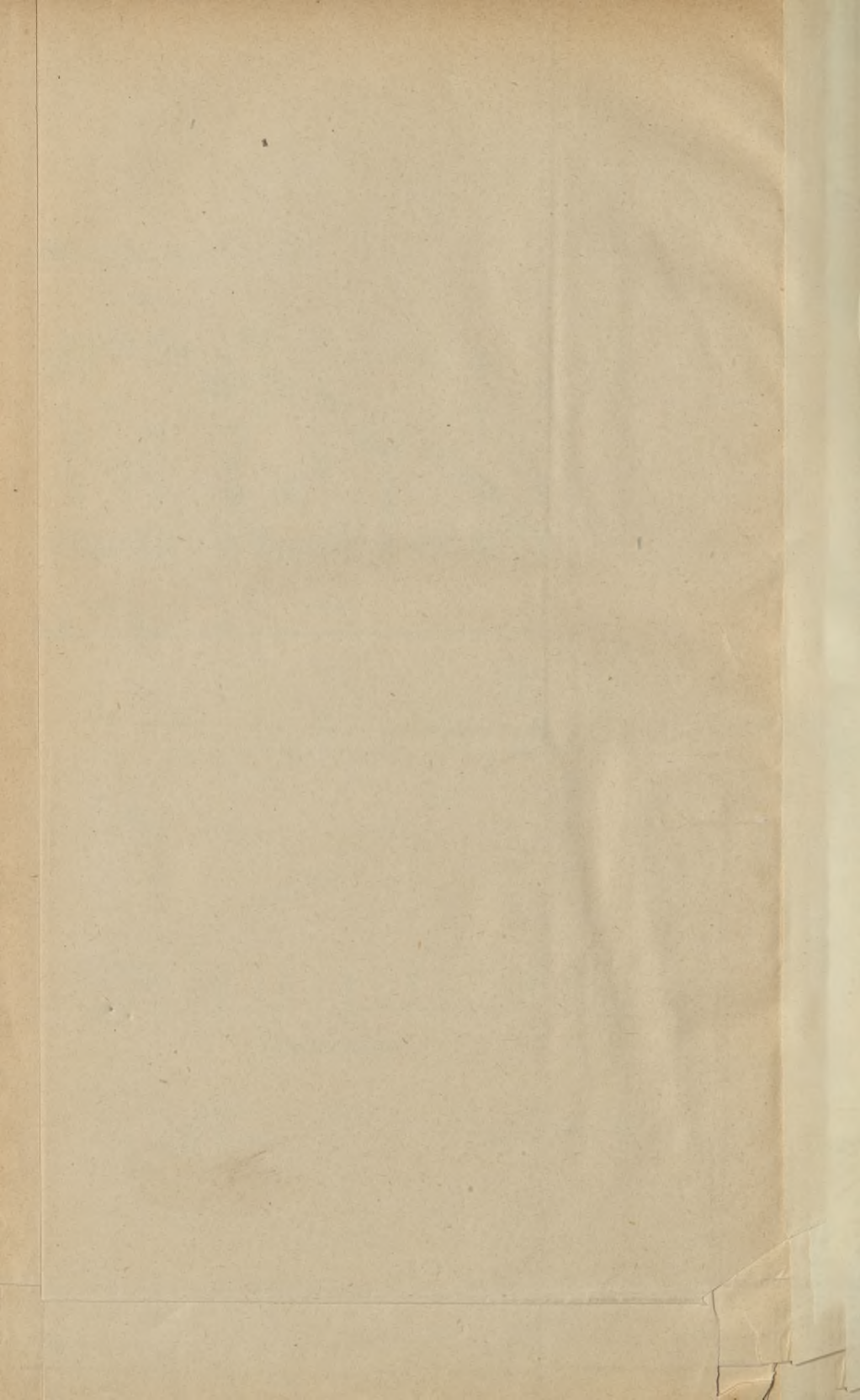
najw(V₄)

najw(V₅)

najw(V₂)







100.00

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-341276

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000275634